



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS

“PUNTOS, TRIÁNGULOS, TRIANGULACIONES Y  
GRÁFICAS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A  
RUY FABILA MONROY

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE URRUTIA GALICIA.

México, D.F.

MAYO 2009.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Muchas son las personas que ayudaron directa o indirectamente a la elaboración de esta tesis, me disculpo de antemano por cualquier omisión de mi parte.

Me gustaría agradecer a mis directores de tesis Jorge Urrutia y Ferran Hurtado por brindarme la oportunidad de aprender de ellos y por el constante apoyo profesional y personal que me otorgaron estos años.

Durante el curso de mis estudios de doctorado tuve la ocasión de visitar a varios investigadores y de aprender mucho de ellos. Quisiera agradecer a: Luis Montejano del Instituto de Matemáticas de la UNAM; Oswin Aichholzer de la Technical University of Graz; José Miguel Díaz de la Universidad de Sevilla y Gelasio Salazar de el Instituto de Física de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Me gustaría extender este agradecimiento a los grupos de investigación que las personas arriba mencionadas dirigen. Sus estudiantes hicieron mis visitas de lo más placenteras, agradezco a: Clemens Huemer, Maria Saumell Pablo Pérez, Thomas Hackl, Birgit Vogtenhuber, Jesus Leños y Mario Cetina por su hospitalidad.

Agradezco a Clemens Huemer por su amistad, la fructífera colaboración y su ayuda logística durante mis visitas a Barcelona y Graz.

Me gustaría agradecer a todo el grupo de Geometría Computacional dirigido por Jorge Urrutia por el aprendizaje mutuo y los buenos momentos que pasamos durante congresos y talleres.

Agradezco a mis sinodales, Gelasio Salazar, Luis Montejano y Eduardo Rivera por correcciones y observaciones a esta tesis.

Este trabajo requirió de un constante trabajo administrativo para llevarse a cabo me gustaría por lo tanto agradecer a Laura, Tere, Coco y Alexia del posgrado de Matemáticas quienes me brindaron este apoyo.

En términos personales a mis padres por seguir ayudandome en todos los sentido durante todos estos años.

Finalmente te agradezco a ti Jhoseline por todo tu amor y por compartir tu vida conmigo.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Triángulos monocromáticos vacíos</b>	<b>13</b>
2.1. El problema de Erdős-Szekeres . . . . .	15
2.1.1. Primer prueba del Teorema de Erdős-Szekeres . . . . .	15
2.1.2. Segunda prueba del teorema Erdős-Szekeres . . . . .	16
2.1.3. El conjunto de Horton . . . . .	19
2.2. Número de polígonos convexos . . . . .	21
2.2.1. Triángulos vacíos . . . . .	22
2.3. Variantes cromáticas del Teorema de Erdős-Szekeres . . . . .	23
2.4. Triángulos monocromáticos vacíos . . . . .	24
2.4.1. Cota superior . . . . .	30
2.5. Simplices monocromáticos vacíos en $\mathbb{R}^d$ . . . . .	31
2.6. Problemas abiertos y trabajo futuro . . . . .	34
<b>3. Triangulaciones y tetraedralizaciones Hamiltonianas</b>	<b>39</b>
3.1. Graficación por computadora . . . . .	40
3.2. Triangulaciones Hamiltonianas . . . . .	42
3.2.1. Algoritmo de inserción . . . . .	43
3.2.2. Algoritmo de la cebolla . . . . .	44
3.2.3. Algoritmo de triangulación de Graham . . . . .	44
3.3. Tetraedralizaciones Hamiltonianas . . . . .	46
3.3.1. Uniendo ciclos . . . . .	51
3.3.2. Complejidad e implementación del algoritmo . . . . .	52
3.4. Gráficas 3-conexas cúbicas planas . . . . .	53
3.4.1. Inflando vértices . . . . .	55
3.5. Problemas abiertos . . . . .	57
<b>4. Gráfica de Fichas</b>	<b>59</b>
4.1. Trabajo previo . . . . .	59
4.1.1. La gráfica de Johnson . . . . .	60

4.2. Propiedades básicas . . . . .	61
4.3. Conexidad y diámetro . . . . .	62
4.4. Número cromático . . . . .	67
4.5. Ciclos y trayectorias Hamiltonianas. . . . .	69
4.6. Clanes . . . . .	70
4.7. Problemas abiertos y trabajo futuro . . . . .	72

# Capítulo 1

## Introducción

La Geometría Combinatoria estudia problemas de conteo y de estructura relativos a objetos geométricos. En particular, incluye el estudio de diversas gráficas que son geométricas por naturaleza, o que reflejan relaciones entre puntos, variedades u objetos. Por supuesto, éste último aspecto constituye un área particular dentro de la Teoría de Gráficas, una rama amplia y fundamental dentro de las Matemáticas Discretas.

Ambas disciplinas tienen sus orígenes en el siglo XVIII con trabajos de Leonard Euler. En el caso de la Geometría Combinatoria uno de los primeros problemas considerados fue el de contar el número de triangulaciones de un polígono convexo de  $n$  lados. Una triangulación de un polígono  $P$ , es un conjunto maximal de diagonales de  $P$  tal que cualesquiera dos de ellas no se intersectan en su interior. En 1751 Leonard Euler (en una carta a Christian Goldbach) planteó el problema de contar el número de triangulaciones distintas de un polígono regular de  $n$  lados (ver Figura 1.1); la solución  $C_{n-2}$  (donde  $C_m = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$ ), es lo que ahora se conoce como el  $n$ -ésimo número de Catalan (en honor a Eugène Charles Catalan quien encontró esta forma cerrada).

Se considera que el primer problema en Teoría de Gráficas es el conocido como “El problema de los puentes de Königsberg”. Este problema nace en la ciudad de Königsberg (ahora conocida como Kaliningrado). Los puentes de la ciudad de Königsberg estaban dispuestos como se muestra en la Figura 1.2, una pregunta entre los locales era si es posible visitar la ciudad pasando por cada puente una y sólo una vez. Euler demostró que esto no era posible traduciéndolo a un problema de Teoría de Gráficas.

Pese a que ambas áreas iniciaron hace más de dos siglos, su verdadero desarrollo no comenzó si no hasta el siglo XX y actualmente están en una etapa de intensa actividad.

Desde la segunda mitad del siglo XX ha habido una creciente interacción entre la Geometría Combinatoria y la Teoría de Gráficas. Esta tendencia se ha intensificado ahora a principios del siglo XXI. Muestra de ello es la aparición de títulos como “Towards a Theory of Geometric Graphs” [Pac04] y “Combinatorial Geometry and Graph Theory” [ABK05].

Esta tesis aborda problemas que se encuentran precisamente en esta intersección, yendo de problemas cuyo componente principal es la Geometría Combinatoria a problemas donde

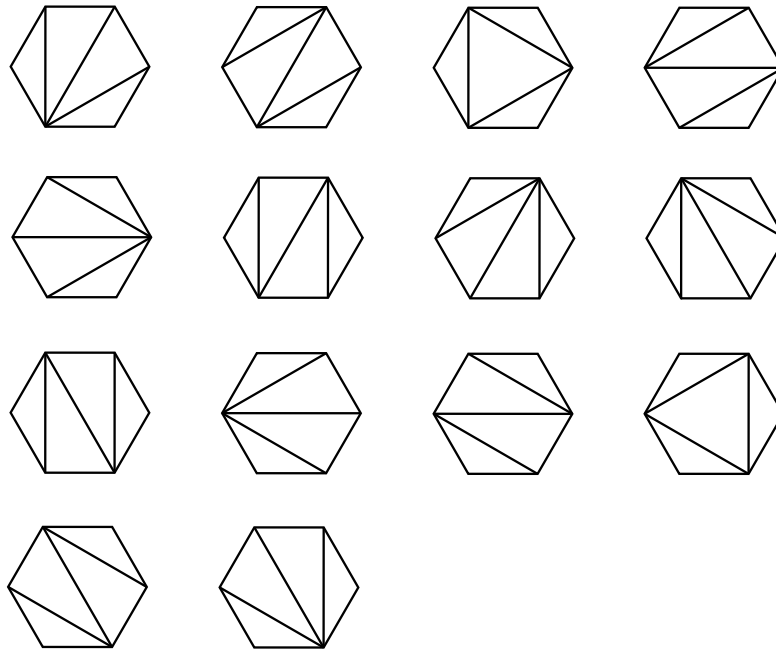


Figura 1.1: Las 14 triangulaciones distintas del hexágono regular.

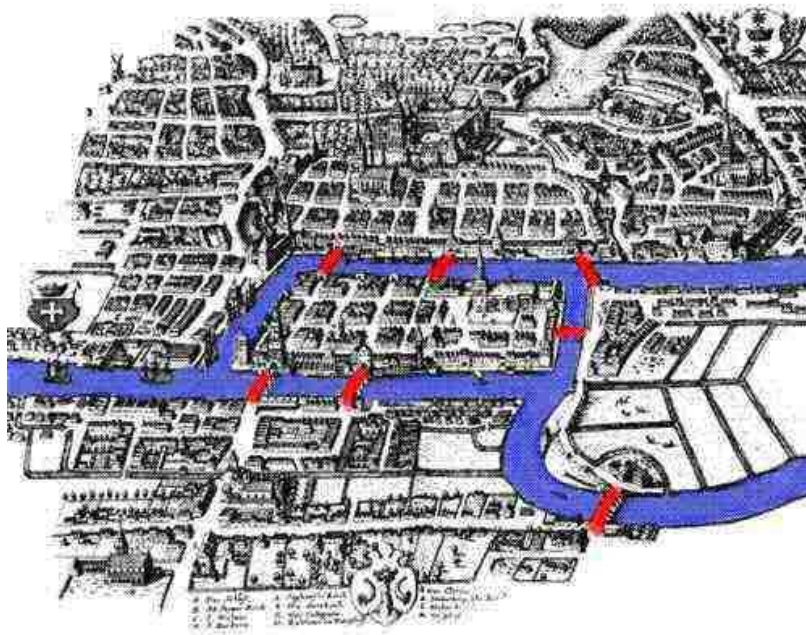


Figura 1.2: Los puentes de la ciudad de Königsberg.

domina la Teoría de Gráficas. Por esta razón hemos organizado el material de manera tal que al principio la Geometría Combinatoria tiene un papel predominante y conforme se avanza lo cede a la Teoría de Gráficas.

A continuación damos una breve muestra del tipo de problemas que se abordarán en esta tesis: problemas de Geometría Combinatoria y de Teoría de Gráficas; destacando a la vez la contribución de cada una de ellas. Aprovechamos también la ocasión para dar algunas definiciones.

Sea  $S$  un conjunto finito de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ . Decimos que  $S$  está en *posición general* si dados cualesquiera  $k \leq d + 1$  elementos de  $S$ , no existe un subespacio lineal afín de dimensión  $k - 2$  que los contenga. Si  $S$  está en el plano esta definición se traduce a que no tenga tres puntos colineales. En esta tesis salvo que explícitamente se diga lo contrario todos los conjuntos de puntos estarán en posición general.

Un subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^d$  es *convexo* si el segmento de recta que une cualesquiera dos de sus elementos está contenido en  $C$ . A la intersección de todos los subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^d$  que contienen a  $S$  se le conoce como la *cerradura convexa* de  $S$  y la denotamos con  $\text{Conv}(S)$ . A la frontera de  $\text{Conv}(S)$  se le conoce como *casco convexo* o *casquete convexo* de  $S$  y lo denotamos como  $\text{CH}(S)$ . Decimos que  $S$  está en posición convexa si  $S \subset \text{CH}(S)$ . Finalmente un punto de  $S$  es *interior* si se encuentra al interior de  $\text{Conv}(S)$ .

Uno de los teoremas de más tradición en Geometría Combinatoria es el Teorema de Erdős-Szekeres [ES35]:

**Teorema 1.** (*Teorema de Erdős-Szekeres*) *Para todo entero positivo  $n$ , existe un entero positivo  $N(n)$ , tal que todo conjunto de  $N(n)$  puntos en el plano en posición general contiene un subconjunto de  $n$  puntos en posición convexa.*

Mencionamos por ejemplo que aunque este es un Teorema clásico de Geometría Combinatoria una de las pruebas dadas en [ES35] usa el Teorema de Ramsey que es un resultado de Teoría de Gráficas. Observamos también que es un resultado combinatorio sobre objetos geométricos (conjuntos de puntos).

El Teorema de Erdős-Szekeres muestra que todo conjunto de puntos suficientemente grande tiene un subconjunto de puntos arbitrariamente grande en cierta configuración (posición convexa). Es aquí donde está la similitud con el Teorema de Ramsey para gráficas que en una de sus versiones dice que para todo entero positivo  $n$  existe un entero positivo  $R(n)$  que sólo depende de  $n$  tal que toda gráfica completa de  $R(n)$  vértices con sus aristas coloreadas en rojas y azules contiene una subgráfica completa de  $n$  vértices tal que sus aristas son todas rojas o todas azules.

Otro tipo de problemas son de conteo, es decir el contar o estimar cuantas configuraciones de un cierto tipo existen, como por ejemplo cuantas triangulaciones existen de un conjunto de  $n$  puntos en el plano.

Mencionamos brevemente qué es una triangulación de un conjunto de puntos. Un  $d$ -simplejo es la cerradura convexa de un conjunto de  $d + 1$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  en posición general. Por ejemplo un 2-simplejo es un triángulo y un 3-simplejo es un tetraedro.



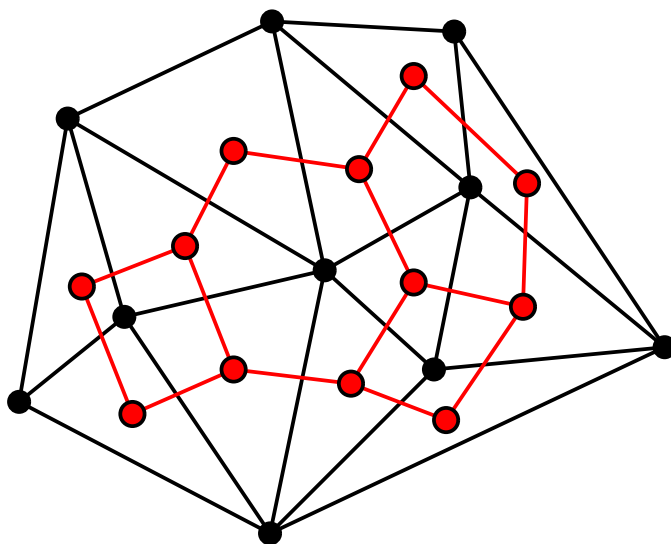


Figura 1.3: Una triangulación de un conjunto de puntos y su gráfica dual.

Una *triangulación* de  $S$  es una colección  $\mathcal{T}$  de  $d$ -simplejos cuya unión es  $\text{Conv}(S)$  de manera que los  $d$ -simplejos:

- Tengan como vértices sólo elementos de  $S$ .
- Tengan interiores disjuntos dos a dos.
- No contengan elementos de  $S$  en su interior.

En  $\mathbb{R}^3$  a una triangulación se le conoce también como *tetraedralización*.

Un problema en el que se ha trabajado mucho es en el de estimar cuántas triangulaciones distintas puede tener un conjunto de  $n$  puntos en el plano. David Avis probablemente fue el primero en sugerir este problema y actualmente la mejor cota superior es que todo conjunto de  $n$  puntos en el plano contiene a lo más  $43^n$  triangulaciones distintas dada por Sharir y Welzl en [SW06]. En lo que respecta a cotas inferiores Aichholzer, Hurtado y Noy [AHN04] mostraron que todo conjunto de  $n$  puntos en el plano tiene  $\Omega(2.33^n)$  triangulaciones distintas. En el capítulo 2 nosotros consideramos problemas de conteo relacionados con el Teorema de Erdős-Szekeres.

En los problemas mencionados anteriormente la componente de Geometría Combinatoria predomina. Sin embargo a veces se considera a las triangulaciones no como colecciones de triángulos si no como gráficas (es decir los elementos de  $S$  son vistos como vértices de una gráfica y son adyacentes si un segmento de recta los une).

En estos casos se buscan triangulaciones con ciertas propiedades gráficas. Como por ejemplo Hamiltonicidad. Un *ciclo Hamiltoniano* de una gráfica es un ciclo que pasa por todos los vértices. Decimos que una gráfica es *Hamiltoniana* si tiene un ciclo Hamiltoniano.

Una triangulación muy importante es la triangulación de Delaunay; en el plano la triangulación de Delaunay es la triangulación que maximiza el mínimo ángulo (sobre los ángulos de todos los triángulos), esta propiedad es importante en aspectos computacionales pues entre más pequeño sea un ángulo los errores por redondeo al manejarlo son mayores.

Las triangulaciones de Delaunay (vistas como gráficas) tienen importancia tanto teórica como práctica. Dillencourt mostró en [Dil87] que existen conjuntos de puntos tal que su triangulación de Delaunay no es Hamiltoniana y en [Dil96] demostró que el problema de determinar si una triangulación de Delaunay tiene un ciclo Hamiltoniano es NP-completo.

A parte de ver a las triangulaciones como gráficas otra manera en la que se ha hecho uso de la Teoría de Gráficas en el estudio de triangulaciones es asociándole una gráfica (su gráfica dual) a una triangulación.

La *gráfica dual* de una triangulación  $\mathcal{T}$  de un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^d$  es la gráfica cuyo conjunto de vértices son los elementos de  $\mathcal{T}$ , haciendo dos de ellos adyacentes si su intersección es un  $(d - 1)$ -simplejo.

En [AHMS96] estudian triangulaciones de diversos objetos geométricos (conjuntos de puntos, polígonos, polígonos con hoyos) donde la gráfica dual es Hamiltoniana. Hacemos incapié en la diferencia en que una triangulación sea Hamiltoniana porque vista como gráfica es Hamiltoniana y que sea Hamiltoniana porque su gráfica dual sea Hamiltoniana. Son conceptos distintos y ambos usados libremente en la literatura. En esta tesis tendremos la ocasión de trabajar con triangulaciones cuya gráfica dual es Hamiltoniana.

Vemos aquí una creciente interacción entre la Geometría Combinatoria y la Teoría de Gráficas pues estudiamos ahora objetos que normalmente son de Geometría Combinatoria pero ahora vistos como gráficas esto se intensifica al asociarle a un objeto geométrico una gráfica y estudiarlo en términos de su gráfica asociada.

El Capítulo 3 de esta tesis sigue esta línea y consideramos problemas de triangulaciones en el plano y en el espacio tridimensional en términos de su gráfica dual. Ese capítulo tiene también un fuerte componente computacional y sus temas pertenecen en su mayoría a la Geometría Computacional. La Geometría Computacional estudia problemas de Geometría Combinatoria pero donde lo que se busca son soluciones algorítmicas.

Hasta ahora los ejemplos dados han sido de problemas donde se considera un objeto geométrico (un conjunto de puntos, una triangulación etc), en un planteamiento más general se podría estudiar una colección de objetos geométricos. Por ejemplo todos los conjuntos de  $n$  puntos en el plano o todas las triangulaciones de un conjunto de puntos.

Un ejemplo de esto es la gráfica de giros. En general las gráficas de giros se definen sobre un conjunto de objetos combinatorios de un mismo tipo tal que existe una operación llamada giro que al aplicarla a un objeto da otro objeto del mismo tipo muy similar al original.

Por ejemplo un giro en una triangulación de un conjunto de puntos en el plano es tomar

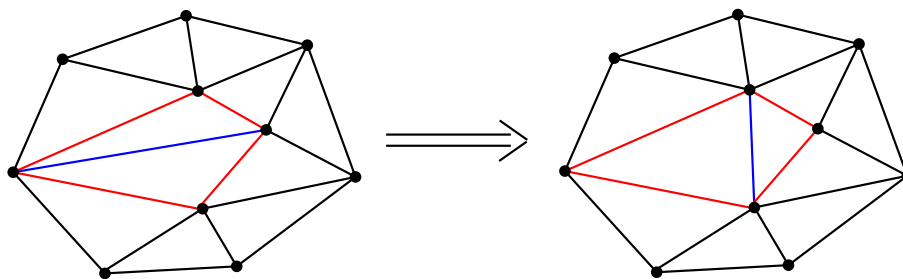


Figura 1.4: Un giro en una triangulación de un conjunto de puntos en el plano.

dos triángulos que compartan una arista y tales que su unión sea un cuadrilátero convexo e intercambiar la arista que comparten por la otra diagonal del cuadrilátero (ver Figura 1.4).

Si  $S$  está en el plano podemos definir su gráfica de giros de triangulaciones  $G_T(S)$  como la gráfica cuyo conjunto de vértices son todas la triangulaciones de  $S$  y dos de ellas son adyacentes en  $G_T(S)$  si se puede pasar de una a la otra mediante un giro.

Se han estudiado muchas de las propiedades gráficas de  $G_T(S)$ , en [Law72] por ejemplo se muestra  $G_T(S)$  es siempre conexa y en [HNU99] estudian el diámetro y el grado mínimo de esta gráfica.

La mayoría de los esfuerzos se han concentrado en el caso cuando  $S$  está en posición convexa, esto debido a que por una parte es mucho más fácil de manejar y otra porque tiene aplicaciones en otros ámbitos (como estructuras de datos por ejemplo). En este caso, dado que la gráfica de giros de triangulaciones de dos conjuntos de  $n$  puntos en posición convexa en el plano son isomorfas en este caso la gráfica de giros se denota como  $G_T(n)$  (ver Figura 1.5).

En [STT88] se determina el diámetro exacto de  $G_T(n)$  y en [Luc87] se prueba que  $G_T(n)$  es Hamiltoniana. Estas y otras propiedades gráficas de  $G_T(n)$  son probadas nuevamente en [HN99] en un marco teórico unificante llamado “árbol de triangulaciones”.

Se han definido gráficas de giros para diversos objetos geométricos sobre conjuntos de puntos en el plano como emparejamientos, árboles generadores y trayectorias hamiltonianas sin cruces [RCUG01, HHN02, HHNRC05].

En estos problemas se define una gráfica a partir de una clase de objetos geométricos y se estudia esta gráfica. La Geometría juega un papel cada vez menor en estos casos pues se pueden definir gráficas de giros a partir de objetos meramente combinatorios. En el caso de  $G_T(n)$ , por ejemplo ésta se puede también construir como la gráfica de giros de árboles binarios con raíz.

En el Capítulo 4 definimos una gráfica de giros a partir de una gráfica. Esta gráfica fue definida por el autor en [FM07] donde sólo fue definida y sus propiedades más elementales demostradas; En esta tesis estudiamos a detalle muchas de sus propiedades gráficas.

Éste es un ejemplo de un problema de Teoría de Gráficas que fue inspirado por proble-

## Capítulo 2

# Triángulos Monocromáticos Vacíos en Conjuntos de Puntos Bi-coloreados

En este capítulo trabajaremos sobre variantes de un problema con mucha tradición en la Geometría Combinatoria: el Problema de Erdős-Szekeres. De toda la tesis es aquí donde la componente de la Geometría Combinatoria es más fuerte.

La Teoría de Gráficas está presente pero de manera muy sutil. Un ejemplo de ello es la prueba del Teorema de Erdős-Szekeres usando el Teorema de Ramsey para hipergráficas.

En los dos capítulos posteriores la Teoría de Gráficas jugará un papel cada vez mayor. En el siguiente capítulo asociaremos una gráfica a un objeto geométrico y en el último capítulo definiremos una gráfica de giros sobre gráficas abstractas inspiradas en las gráficas de giros análogas definidas para objetos geométricos.

En 1933 Esther Klein mostró que en cualquier conjunto de cinco puntos en el plano, cuatro de ellos forman un cuadrilátero convexo, después sugirió el siguiente problema [ES35] (véase la Figura 2):

*Can we find for a given  $n$  a number  $N(n)$  such that from any set containing at least  $N(n)$  points it is possible to select  $n$  points forming a convex polygon?*

Que se traduce al castellano como:

*¿Dado un entero positivo  $n$ , podemos encontrar un número  $N(n)$  tal que para cualquier conjunto con al menos  $N(n)$  puntos, se pueden elegir  $n$  de ellos de manera que formen los vértices un polígono convexo?*

Paul Erdős llamó al primer problema el “Happy ending problem” (Problema del final feliz), pues éste llevó al matrimonio de Esther Klein con George Szekeres en 1937. Erdős y Szekeres dieron una respuesta afirmativa a esta pregunta en [ES35], en lo que ahora se conoce como el “Teorema de Erdős-Szekeres”. Esta línea de pensamiento dio lugar a varios problemas interesantes que mencionaremos más adelante.

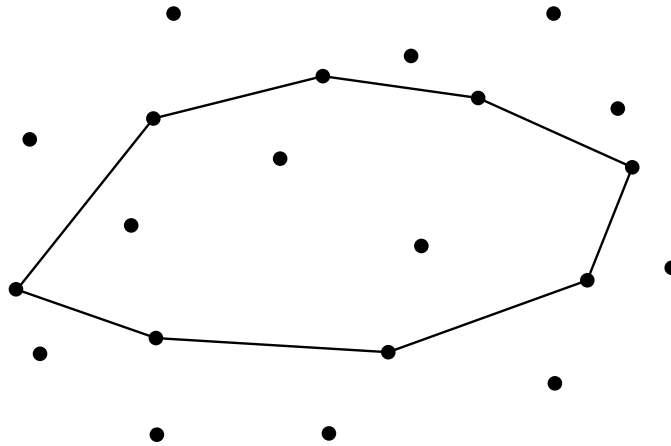


Figura 2.1: Un subconjunto en posición convexa de un conjunto de puntos en el plano.

El Teorema de Erdős-Szekeres es existencial en el sentido que prueba que dado un entero positivo  $k$ , cualquier conjunto de puntos lo suficientemente grande contiene los vértices de un  $k$ -gono convexo. Sin embargo uno puede preguntar cuántos de estos polígonos existen al menos en todo conjunto de  $n$  puntos en el plano. Este problema fue planteado por Erdős y Guy por primera vez en [EG73].

Un problema relacionado es el pedir además que los  $k$ -gonos estén vacíos. El caso para  $k = 3$ , fue considerado primero por Katchalski y Meir en [KM88]. Es decir se preguntaron por el mínimo número de triángulos vacíos en todo conjunto de  $n$  puntos en el plano.

Devillers, Hurtado, Károlyi y Seara añadieron colores a estos problemas y consideraron en [DHKS03] problemas relacionados al Teorema de Erdős-Szekeres para conjuntos de puntos coloreados.

En un conjunto coloreado de puntos, decimos que un polígono es monocromático si todos sus vértices son del mismo color.

El problema estudiado en este capítulo es:

¿Cuál es el mínimo número de triángulos monocromáticos que se puede garantizar que existen en todo conjunto 2-coloreado de puntos en el plano?

Este problema fue planteado por Aichholzer, Hackl, Huemer, Flores-Peñaloza, Urrutia y el autor en [AFMFP<sup>+</sup>08], mostramos en ese artículo que en todo conjunto 2-coloreado de  $n$  puntos existen al menos  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos vacíos. Esta cota fue mejorada al poco tiempo por Pach y Tóth en [PT08] a  $\Omega(n^{4/3})$ .

En este capítulo nos enfocaremos en este problema y sus generalizaciones a dimensiones más altas, antes veremos a detalle los problemas mencionados previamente (para una exposición más a profundidad de la mostrada a continuación véase [MS00]).

## 2.1. El problema de Erdős-Szekeres

Como ya hemos mencionado, Erdős y Szkeres probaron el siguiente teorema:

**Teorema 2.** (*Teorema de Erdős-Szekeres*) Para todo entero positivo  $n$ , existe un entero positivo  $N(n)$ , tal que todo conjunto de  $N(n)$  puntos en el plano en posición general contiene un subconjunto de  $n$  puntos en posición convexa.

En [ES35], Erdős y Szekeres dieron dos pruebas de este teorema. Una de ellas usa el Teorema de Ramsey [Ram29] y es por lo tanto enteramente combinatoria, la otra es más geométrica.

### 2.1.1. Primer prueba del Teorema de Erdős-Szekeres

Después de la primera prueba usando el Teorema de Ramsey se han encontrado pruebas más sencillas que también usan el Teorema de Ramsey. Seguimos aquí la presentación de [Mat02].

Sea  $X$  un conjunto con una 2-coloración de sus  $r$ -conjuntos en rojos y azules, decimos que un subconjunto  $Y$  de  $X$  es rojo si todos sus  $r$ -conjuntos son rojos y azul si todos sus  $r$ -conjuntos son azules.

Dados enteros positivos  $s, t$  y  $r$  tales que  $r \leq \min\{s, t\}$ , definimos a  $R^{(r)}(s, t)$  como el mínimo entero  $n$  tal que para todo conjunto  $X$  de  $n$  elementos y toda 2-coloración de sus  $r$ -conjuntos en rojos y azules existe ya sea un  $s$ -conjunto rojo o un  $t$ -conjunto azul de  $X$ . Claramente si  $r = \min\{s, t\}$ ,  $R^{(r)}(s, t) = r$

Uno de los teoremas originales de Ramsey [Ram29] establece que:

**Teorema 3.** *Dados  $r, s$  y  $t$  enteros positivos tales que  $r < \min\{s, t\}$ .  $R^{(r)}(s, t)$  existe y  $R^{(r)}(s, t) \leq R^{(r-1)}(R^{(r)}(s-1, t), R^{(r)}(s, t-1)) + 1$ .*

*Demostración.* Suponemos por inducción que  $R^{(r-1)}(x, y)$ ,  $R^{(r)}(s-1, t)$  y  $R^{(r)}(s, t-1)$  existen para todo par de enteros positivos  $x$  y  $y$ .

Sea  $X$  un conjunto de  $R^{(r-1)}(R^{(r)}(s-1, t), R^{(r)}(s, t-1)) + 1$  elementos con sus  $r$ -conjuntos 2-coloreados en rojos y azules. Tomamos un elemento  $x$  de  $X$  y definimos  $Y = X \setminus \{x\}$ . Inducimos una 2-coloración de los  $r-1$ -conjuntos de  $Y$  dando a cada  $r-1$ -conjunto  $\sigma$  de  $Y$  el color de  $\sigma \cup \{x\}$  en  $X$ . Por inducción, como  $Y$  tiene  $R^{(r-1)}(R^{(r)}(s-1, t), R^{(r)}(s, t-1))$  elementos,  $Y$  contiene un  $R^{(r)}(s-1, t)$ -conjunto rojo o un  $R^{(r)}(s, t-1)$ -conjunto azul.

Si  $Y$  tiene un  $R^{(r)}(s-1, t)$ -conjunto rojo  $Z$ , éste a su vez (en la 2-coloración de  $X$ ) contiene un  $s-1$ -conjunto rojo o un  $t$ -conjunto azul. Si  $Z$  contiene un  $s-1$  conjunto rojo  $R$ ,  $R \cup \{x\}$  es un  $s$ -conjunto rojo de  $X$  por otra parte si  $Z$  contiene un  $t$ -conjunto azul éste es un  $t$ -conjunto azul de  $X$ .

De la misma manera, si  $Y$  tiene un  $R^{(r)}(s, t-1)$ -conjunto azul  $Z$ , éste a su vez contiene un  $s$ -conjunto rojo o un  $t-1$ -conjunto azul. Si contiene un  $s$ -conjunto rojo terminamos

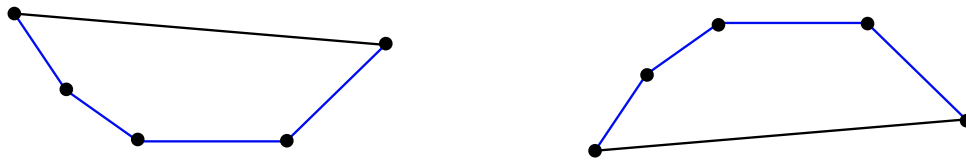


Figura 2.2: Una 5-taza y una 5-tapa

pues lo es también de  $X$  y si tiene un  $t - 1$ -conjunto azul  $A$ ,  $A \cup \{x\}$  es un  $t$ -conjunto azul de  $Z$ .  $\square$

**Demostración. Primer Prueba del Teorema de Erdős-Szekeres usando el Teorema de Ramsey.**

Sea  $n \geq 5$  un entero positivo. Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano. Coloreamos a todos los subconjuntos de cuatro elementos de  $S$  de rojo si están en posición convexa y de azul en caso contrario. Por el teorema de Ramsey si  $S$  tiene  $N = N(n)$  elementos existe un subconjunto  $S'$  de  $S$  de  $n$  elementos tal que todos sus 4-conjuntos son del mismo color. Este color no puede ser azul pues todo conjunto de al menos 5 puntos en el plano contiene un cuadrilátero convexo (el cual hemos coloreado de rojo). Por lo tanto todos los 4-conjuntos de  $S'$  están en posición convexa y por lo tanto todo  $S'$  también.  $\square$

Finalizamos esta discusión mencionando que la versión más conocida del Teorema 3 es para cuando  $r = 2$  en este caso se interpreta como: dados dos enteros positivos  $s$  y  $t$  existe un entero positivo  $n$  tal que para toda 2-coloración de las aristas de la gráfica completa  $K_n$  en aristas rojas y azules existe una subgráfica completa con todas sus aristas de color rojo de  $s$  vértices o una subgráfica completa de  $t$  vértices con todas sus aristas de color azul.

En este caso se puede mejorar la cota a:

**Teorema 4.** *Dados dos enteros positivos  $s, t > 2$ . Se tiene que:*

- $R^{(2)}(s, t) \leq R^{(2)}(s - 1, t) + R^{(2)}(s, t - 1)$
- $R^{(2)}(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$

### 2.1.2. Segunda prueba del teorema Erdős-Szekeres

La segunda prueba hace uso del concepto de *tazas* y *tapas*.

Decimos que un conjunto de puntos en posición convexa  $X$  es una *taza* si la parte superior de su casco convexo consta de una sola arista. De manera análoga decimos que es una *tapa* si la parte inferior de su casco convexo consta de una sola arista. Si  $X$  consta de  $r$  elementos decimos además que es una  $r$ -taza o una  $r$ -tapa, según sea el caso (véase la Figura 2.2).

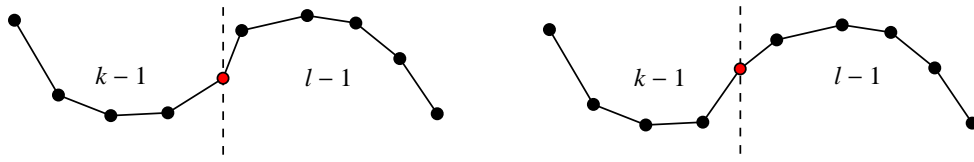


Figura 2.3:

**Demostración. Segunda Prueba del Teorema de Erdős-Szekeres**

Dados  $k$  y  $l$  enteros positivos definimos a  $f(k, l)$  como el mínimo entero tal que todo conjunto de  $f(k, l)$  puntos en el plano contiene una  $k$ -taza o una  $l$ -tapa. Probaremos por inducción sobre  $k$  y  $l$  que  $f(k, l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$ .

La desigualdad se cumple cuando  $k \leq 2$  o  $l \leq 2$ . Supongamos por tanto que  $k, l \geq 3$ .

Sea  $S$  un conjunto de  $f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$  puntos en el plano. Probaremos que  $S$  contiene una  $k$ -taza o una  $l$ -tapa.

Supongamos que  $S$  no contiene  $l$ -tapas. Sea  $E$  el subconjunto de todos los elementos  $p$  de  $S$  tales que existe una  $(k-1)$ -taza que termina en  $p$  (es decir que su elemento de más a la derecha es  $p$ ). Ahora bien  $S \setminus E$  no contiene  $(k-1)$ -tazas pues hemos quitado todos los puntos finales de todas las  $(k-1)$ -tazas y como  $S$  no tiene  $l$ -tapas  $S \setminus E$  tampoco, por lo tanto  $|S \setminus E| \leq f(k-1, l) - 1$ . Esto a su vez implica que  $|E| \geq f(k, l-1)$ . Por inducción  $E$  contiene una  $k$ -taza y terminamos o  $E$  contiene una  $(l-1)$ -tapa. El primer elemento  $p$  de esta  $(l-1)$ -tapa (por estar en  $E$ ) es el último elemento de una  $(k-1)$ -taza en  $S$ . Ahora bien ya sea la  $(l-1)$ -tapa se puede extender a una  $l$ -tapa o la  $(k-1)$ -taza se puede extender a una  $k$ -taza (véase la figura 2.3).

Por lo tanto  $f(k, l) \leq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$  y por inducción:

$$f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1 \leq \binom{k+l-5}{k-2} + 1 + \binom{k+l-5}{k-3} + 1 - 1 = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$$

Por lo tanto todo conjunto de al menos  $f(n, n) = \binom{2n-4}{n-2} + 1$  contiene una  $n$ -taza o una  $n$ -tapa pero ambos son conjuntos de  $n$  puntos en posición convexa.  $\square$

Una vez probada la existencia de  $N(n)$ , resta el problema de estimar o calcular  $N(n)$ .

La segunda prueba del Teorema 2 da una estimación mejor de  $N(n)$  que la primera.

La cota superior para  $N(n)$  dada por la segunda prueba es:

$$N(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$$

La mejor cota superior actualmente es [TV05]:



$$N(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 1$$

La cota inferior para  $N(n)$  dada en [ES35] es:

$$N(n) \geq 2^{n-2} + 1$$

En ese mismo artículo conjeturaron que esta desigualdad es de hecho una igualdad. La conjetura sigue en pie, es decir:

**Conjetura 1.**  $N(n) = 2^{n-2} + 1$  para todo  $n \geq 3$ .

A pesar de numerosos intentos por varios autores esta conjetura no ha sido resuelta.

Una familia de problemas relacionados surge cuando además se pide que el polígono convexo sea vacío, esto es: dado un entero positivo  $n \geq 3$ , determinar (si es que existe) el mínimo entero positivo  $H(n)$ , tal que todo conjunto de al menos  $H(n)$  puntos en el plano contiene un subconjunto de  $n$  puntos en posición convexa vacío. Recordamos al lector que decimos que un polígono convexo con vértices en un conjunto finito  $S$  de puntos en el plano es vacío, si no contiene a ningún punto de  $S$  en su interior.

Este problema fue planteado por Erdős en 1978 [Erd78]. Los valores  $H(3) = 3$ ,  $H(4) = 5$  se pueden demostrar fácilmente. El mismo año, Harborth mostró que  $H(5) = 10$  en [Har78].

El problema de determinar si  $H(6)$  existe quedó desde entonces abierto hasta hace poco, cuando en 2007 Gerken [Ger08] y Nicolás [Nic07] demostraron de manera independiente la existencia de  $H(6)$ .

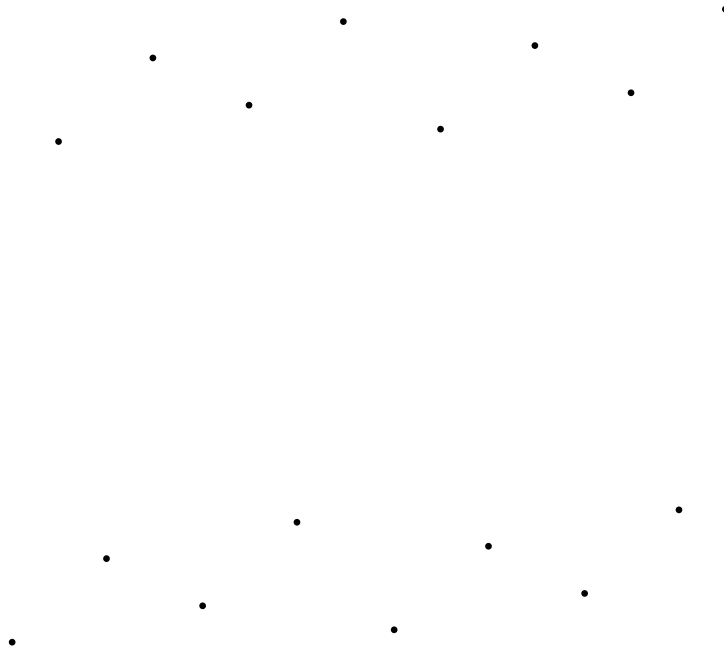
En particular Nicolás dio una cota superior de  $H(6) \leq N(25)$ , mientras que Gerken una cota superior de  $H(6) \leq N(9)$ . Esta última siendo la mejor cota superior actual. Como cota inferior se tiene un conjunto de 29 puntos en el plano sin hexágonos convexos vacíos, encontrado por Overmars [Ove03].

Un problema restante en esta dirección es el de determinar el valor exacto de  $H(6)$ . Dado que  $N(9)$  es al menos  $\binom{2 \cdot 9 - 5}{9 - 2} + 1 = 1717$ , las estimaciones actuales de  $H(6)$  son:

$$30 \leq H(6) \leq 1717$$

Mencionamos brevemente que se ha anunciado una nueva cota superior de  $H(6) \leq 463$  en [Kos07], sin embargo al momento de la escritura de este documento no se ha publicado dicha prueba.

Finalmente en 1983, Horton exhibió en [Hor83], para todo entero positivo  $k$  un conjunto de  $2^k$  puntos en el plano sin heptágonos convexos vacíos, mostrando así que  $H(n)$  no existe para  $n \geq 7$ . Este conjunto se conoce hoy en día como el conjunto de Horton.

Figura 2.4: Conjunto de Horton  $H^{(4)}$ 

### 2.1.3. El conjunto de Horton

Presentamos brevemente el conjunto de Horton; seguimos la exposición de [Mat02].

**Definición 1.** Sean  $X$  y  $Y$  dos conjuntos finitos de puntos en el plano, decimos que  $X$  está **muy arriba** de  $Y$  o que  $Y$  está **muy abajo** de  $X$ , si se cumplen las siguientes propiedades:

- Ninguna línea determinada por dos elementos de  $X \cup Y$  es vertical.
- Todos los elementos de  $Y$  se encuentran debajo de toda línea determinada por dos elementos de  $X$ .
- Todos los elementos de  $X$  se encuentran por arriba de toda línea determinada por dos elementos de  $Y$ .

Dado un conjunto  $X$  de  $n$  puntos en el plano ordenamos sus elementos conforme a su coordenada  $x$ , de manera de que  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  y la coordenada  $x$  de  $x_i$  es mayor que la coordenada  $x$  de  $x_{i+1}$ , denotamos con  $X_0 = \{x_2, x_4, \dots\}$  al subconjunto de  $X$  de elementos con índice par y con  $X_1 = \{x_1, x_3, \dots\}$  al subconjunto de  $X$  de elementos de índice impar.

**Definición 2.** Sea  $H$  un conjunto finito de puntos en el plano.  $H$  es un **conjunto de Horton** si  $|H| \leq 1$  o bien se cumple que:

- $H_0$  y  $H_1$  son ambos conjuntos de Horton.
- $H_0$  está muy arriba de  $H_1$  o  $H_0$  está muy abajo de  $H_1$ .

Falta mostrar la existencia de los conjuntos de Horton. Dado un entero no negativo  $k$  construimos un conjunto  $H^{(k)}$  de  $2^k$  puntos en el plano como sigue: definimos  $H^{(0)} = \{(0, 0)\}$  y construimos recursivamente  $H^{(k+1)}$  a partir de  $H^{(k)}$ . Sea  $A := 2H^{(k)} = \{(2x, 2y) | (x, y) \in H^{(k)}\}$  y  $B = A + (1, h_k)$ , donde elegimos a  $h_k$  lo suficientemente grande de manera de que  $B$  se encuentre muy arriba de  $A$ , definimos entonces  $H^{(k+1)} := A \cup B$ . Observe que  $H^{(k+1)}$  es un conjunto de Horton si  $H^{(k)}$  lo es. Podemos construir conjuntos de Horton de cardinalidades menores a  $2^k$  puntos quitando sucesivamente puntos a la derecha de  $H^{(k)}$ .

Mostramos ahora que el conjunto de Horton no contiene heptágonos convexos vacíos.

Un conjunto finito  $S$  de puntos en el plano está *r-cerrado por arriba* si para toda  $r$ -taza con vértices en  $S$ , existe un elemento de  $S$  arriba de ella. De manera análoga se dice que  $S$  está *r-cerrado por abajo* si para toda  $r$ -tapa con vértices en  $S$  existe un elemento de  $S$  abajo de ella (ver Figura 2.5).

**Lema 1.** *Todo conjunto de Horton está 4-cerrado por arriba y 4-cerrado por abajo.*

*Demostración.* Sea  $H$  un conjunto de Horton, sin pérdida de generalidad suponemos que  $H_0$  está muy arriba de  $H_1$ . Procedemos inductivamente. Por vacuidad  $H$  está 4-cerrado por arriba si  $|H| \leq 1$ .

Sea  $T$  una 4-taza con vértices en  $H$ .

Dado que  $H_0$  y  $H_1$  son conjuntos de Horton podemos suponer que  $T$  no está enteramente contenida en  $H_0$  o en  $H_1$  pues  $H_0$  y  $H_1$  son a su vez conjuntos de Horton y por hipótesis de inducción están cerrados por arriba.

Por lo tanto  $T \cap H_0 \neq \emptyset$  y  $T \cap H_1 \neq \emptyset$ . Ahora bien  $H_0$  no puede contener más de 2 elementos de  $T$  pues si contuviera 3 puntos de  $T$  estos formarían una 3-taza en  $H_0$  y dado que  $H_0$  está muy arriba de  $H_1$  no podrían formar una 4-taza con ningún elemento de  $H_1$ . Por lo tanto hay al menos dos puntos  $x$  y  $y$  de  $T$  en  $H_1$  pero como los elementos de  $H$  alternan entre  $H_0$  y  $H_1$  en medio  $x$  y  $y$  se encuentra al menos un elemento  $z$  de  $H_0$ , dicho elemento no puede estar en la 4-taza y se encuentra además por arriba de  $T$ .

Usando los mismos argumentos se prueba que  $H$  está cerrado por abajo. □

**Teorema 5.** *Ningún conjunto de Horton tiene un heptágono convexo vacío.*

*Demostración.* Sea  $H$  un conjunto de Horton y  $C$  un heptágono convexo vacío con vértices en  $H$ . Suponemos sin pérdida de generalidad que  $H_0$  está muy por arriba de  $H_1$ .

Procedemos por inducción sobre el número de elementos de  $H$ , claramente no existe un heptágono convexo vacío con vértices en  $H$  si  $|H| \leq 6$ . Suponemos por lo tanto que  $|H| \geq 7$  y que ningún conjunto de Horton con menos elementos que  $H$  tiene un heptágono convexo vacío. Por hipótesis de inducción  $C$  no puede estar enteramente contenido en  $H_0$  o en  $H_1$

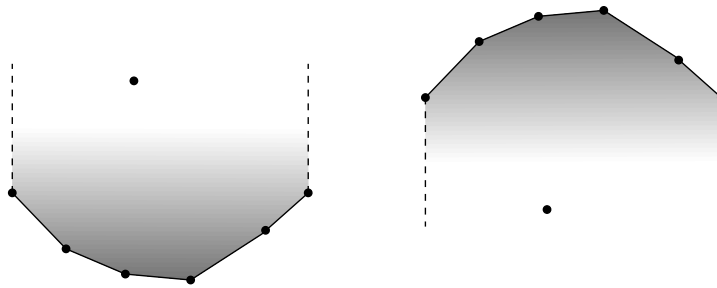


Figura 2.5: Conjuntos 6-cerrado por arriba y 6-cerrado por abajo.

(pues ambos son conjuntos de Horton con menos elementos que  $H$ ), por lo que alguno de los dos contiene al menos 4 puntos de  $C$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $H_1$  contiene 4 puntos de  $C$ , estos 4 puntos forman una 4-taza  $T$  en  $H_1$  y como  $H_1$  está 4-cerrado por arriba existe un punto  $H_1$  arriba de  $T$  y este punto está al interior de  $C$ . Por lo tanto  $C$  no es vacío.  $\square$

## 2.2. El número de polígonos convexos, determinados por un conjunto de puntos en el plano

Hasta ahora todos los problemas han sido de carácter existencial, uno puede también preguntar por el número de polígonos convexos en todo conjunto de puntos en el plano. Este problema fue explícitamente planteado por Erdős en [Erd78]. Él escribe que en una discusión con J. Hammer se preguntaron:

*Sea  $f(n)$  el entero positivo más grande tal que cualquier conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general contiene al menos  $f(n)$  subconjuntos en posición convexa. Determina o estima  $f(n)$ .*

Erdős mostró que existen dos constantes  $c_1$  y  $c_2$  tales que:

$$n^{c_1 \log n} < f(n) < n^{c_2 \log n}$$

Un problema más específico sería el de preguntar para un entero positivo  $k$ , cual es el mínimo número de  $k$ -gonos convexos en todo conjunto de  $n$  puntos en el plano. Este problema fue planteado inicialmente por Erdős y Guy en [EG73].

De esta familia de problemas probablemente el más conocido sea el caso  $k = 4$ . Para  $k = 4$  uno se pregunta por el mínimo número de cuadriláteros convexos en cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano. Si se dibujan todos los segmentos de recta con extremos en  $S$ , Si dos de ellos se cruzan entonces sus extremos correspondientes forman una cuadrilátero

convexo, viceversa por cada cuadrilátero convexo obtenemos un par de segmentos de recta que se cruzan. Así que el preguntar por el mínimo número de cuadriláteros convexos en todo conjunto de  $n$  puntos es preguntar por el mínimo número de cruces de todo dibujo en el plano de la gráfica completa  $K_n$ , donde además sus aristas son dibujadas con segmentos de recta. Este problema se conoce también como el número de cruces rectilíneo de  $K_n$  y se denota a este parámetro como  $\overline{cr}(K_n)$ .

Siguiendo el camino del Problema de Erdős-Szekeres, se puede añadir el requisito de que los polígonos sean vacíos y preguntarse entonces por el mínimo número  $f_k(n)$  de  $k$ -gonos convexos vacíos en todo conjunto de  $n$  puntos en el plano.

Dado que para  $k \geq 7$ , existen conjuntos de puntos sin  $k$ -gonos vacíos se tiene que  $f_k(n) = 0$  para todo  $k \geq 7$ .

Para valores pequeños de  $k$  las mejores cotas actualmente son:

$$n^2 - O(n \log n) \leq f_3(n) \leq 1.6195 \dots n^2 + o(n^2)$$

$$1/2n^2 \leq f_4(n) \leq 1.9396 \dots n^2 + o(n^2)$$

$$\left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor \leq f_5(n) \leq 1.0206 \dots n^2 + o(n^2)$$

$$\Omega(n) \leq f_6(n) \leq 0.2005 \dots n^2 + o(n^2)$$

Todas las cotas superiores anteriores fueron dadas por Bárány y Valtr en [BV04]. La cota inferior para  $f_3(n)$  fue probada por Bárány en correspondencia personal con Valtr (véase [Val95]) y por Dumitrescu [Dum00]. La cota inferior para  $f_5(n)$  fue dada por Bárány y Károlyi en [BK01]. La cota inferior lineal para  $f_6(n)$  se sigue del resultado mencionado anteriormente de que todo conjunto de al menos 1771 contiene un hexágono vacío. Basta con ordenar verticalmente los elementos de un conjunto de  $n$  puntos en el plano y después considerar intervalos de 1771 puntos consecutivos para obtener un número lineal de hexágonos vacíos.

De estos problemas, el problema de determinar el mínimo número de triángulos vacíos en todo conjunto de puntos en el plano, es el que más atención ha recibido.

### 2.2.1. Triángulos vacíos

Katchalski y Meir [KM88] fueron los primeros en considerar este problema y mostraron que  $\binom{n-1}{2} \leq f_3(n) \leq 200n^2$ . La cota superior fue demostrada al exhibir una construcción explícita de un conjunto de  $n$  puntos en el plano con menos de  $200n^2$  triángulos vacíos.

Bárány y Füredi [BF87] mejoraron estas cotas a:  $n^2 - O(n \log n) \leq f_3(n) \leq 2n^2$ . Para la cota superior se muestra que el conjunto de Horton de  $n$  elementos (donde  $n$  es una potencia de 2) contiene a lo más  $2n^2$  triángulos vacíos. En ese mismo artículo dan también

una cota superior de  $2n^2 + O(n \log n)$ , algo interesante de esta cota es que da mediante una construcción aleatoria. Se construye un conjunto aleatorio de  $n$  puntos de manera que el valor esperado de triángulos vacíos es de  $2n^2 + O(n \log n)$ .

La cota superior fue mejorada por Valtr [Val95] a  $f_3(n) \leq 1.8n^2$ , usando copias transformadas del conjunto de Horton. Mediante la misma técnica: Dumitrescu [Dum00] mejoró esta cota a  $f_3(n) \leq 1.68n^2$  y finalmente Bárány y Valtr a  $f_3(n) \leq 1.62n^2$ . Siendo esta última la mejor actualmente.

## 2.3. Variantes cromáticas del Teorema de Erdős-Szekeres

Una línea de investigación muy fructífera ha sido el considerar problemas clásicos de Geometría Combinatoria para puntos sin colores y estudiarlos ahora en conjuntos coloreados de puntos.

Devillers, Hurtado, Károlyi y Seara hicieron esto con el Teorema de Erdős-Szekeres en [DHKS03].

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos  $k$ -coloreado en el plano (es decir una partición de  $S$  en  $k$  elementos). Ellos hicieron distinciones entre varios subconjuntos de  $S$ , a un subconjunto de  $S$  lo llaman: *monocromático* si todos sus elementos son del mismo color; *policromático* si todos sus elementos son de distinto color y *heterocromático* si no es monocromático ni policromático.

Definen los números  $n_M(m, k)$ ,  $n_P(m, k)$  y  $n_H(m, k)$  como los menores enteros tales que cualquier conjunto  $k$ -coloreado de puntos en el plano con al menos esa cantidad de elementos contiene los vértices de un  $m$ -gono convexo monocromático, policromático y heterocromático respectivamente. Este problema es precisamente la versión con colores del problema de Erdős-Szekeres.

Siguiendo la misma línea de pensamiento, se preguntaron por la existencia de polígonos vacíos (monocromáticos, policromáticos y heterocromáticos), añadiendo además el requisito de que dichos polígonos fueran compatibles. Es decir que tuvieran interiores disjuntos. Definen así los números  $MC(n, m, k)$ ,  $HC(n, m, k)$  y  $PC(n, m, k)$  como los mínimos números de  $m$ -gonos monocromáticos, heterocromáticos y policromáticos respectivamente, compatibles en todo conjunto  $k$ -coloreado de  $n$  puntos en el plano.

Entre sus resultados exhiben una 3-coloración del conjunto de Horton sin triángulos monocromáticos vacíos (ver Figura 2.6).

Conjeturaron también que todo conjunto 2-coloreado suficientemente grande contiene un cuadrilátero monocromático convexo vacío. Este problema permanece abierto a la fecha. Recientemente Aichholzer, Hackl, Huemer, Hurtado y Vogtenhuber mostraron en [AHHV09] que la conjetura es cierta si se quita el requisito de convexidad, es decir que todo conjunto 2-coloreado de puntos suficientemente grande (más de 5044 puntos) en el plano contiene un cuadrilátero monocromático (no necesariamente convexo) vacío.

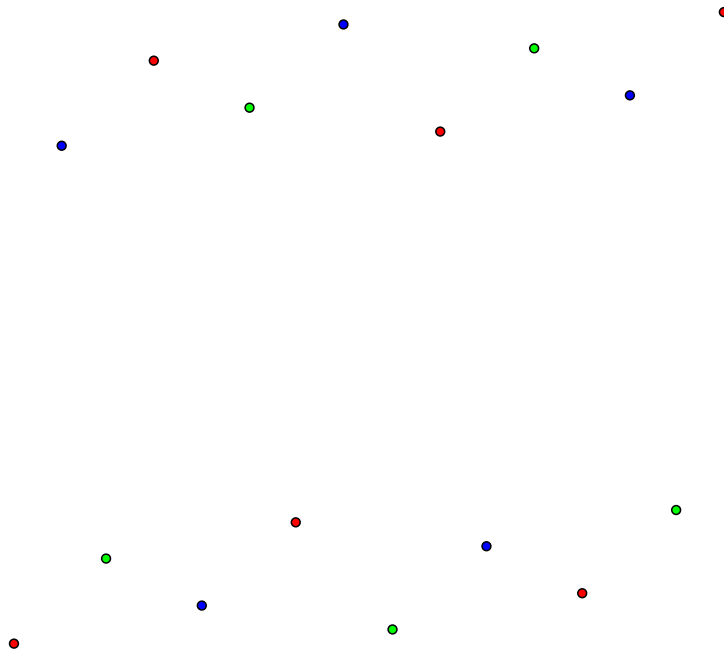


Figura 2.6: Una 3-coloración del conjunto de Horton sin triángulos monocromáticos vacíos

## 2.4. Triángulos monocromáticos vacíos en conjuntos 2-coloreados de puntos

En [AFMFP<sup>+</sup>08] consideramos el problema de estimar el número mínimo de triángulos monocromáticos vacíos en todo conjunto 2-coloreado de  $n$  puntos en el plano.

Este problema es la variante cromática del problema de encontrar el mínimo número de triángulos vacíos en todo conjunto de  $n$  puntos en el plano.

Dado que como mencionamos antes en [DHKS03] se mostró que existen conjuntos de puntos 3-coloreados arbitrariamente grandes sin triángulos monocromáticos vacíos, nosotros consideramos el problema sólo para conjuntos 2-coloreados de puntos.

Sea  $S$  un conjunto 2-coloreado de  $n$  puntos en el plano. Nos referiremos a sus clases cromáticas como *rojos* y *azules*.

Dados los resultados anteriores para conjuntos no coloreados es fácil mostrar que siempre hay  $\Omega(n)$  triángulos monocromáticos vacíos. Sin embargo el mostrar que existen más de un número lineal de triángulos monocromáticos vacíos es ya un problema no trivial.

Nosotros fuimos capaces de mostrar en [AFMFP<sup>+</sup>08] que siempre existen  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos en todo conjunto 2-coloreado de  $n$  puntos en el plano.

Lo hicimos combinando los siguientes lemas:

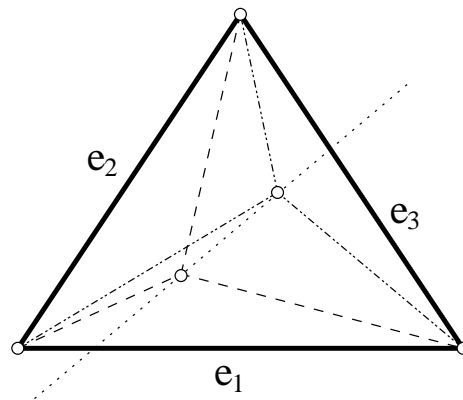


Figura 2.7: Dos puntos comparables con respecto a  $e_1$  y  $e_3$ , pero incomparables con respecto a  $e_2$ .

**Lema 2.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano tal que exactamente 3 de sus elementos están en el casco convexo y los restantes  $m = n - 3$  son interiores. Entonces  $S$  se puede triangular de manera que al menos  $m + \sqrt{m} + 1$  de sus triángulos tengan (al menos) uno de sus vértices en el casco convexo de  $S$ .

*Demostración.* Sea  $\Delta$  el conjunto de aristas del casquete convexo de  $S$  y  $M = \{p_1, \dots, p_m\}$  el conjunto de puntos interiores de  $S$ .

Para cada arista  $e$  en  $\Delta$  definimos un orden parcial en  $M$  como sigue: decimos que  $p_i \leq_e p_j$  si el triángulo formado por  $e$  y  $p_i$  está contenido en el triángulo formado por  $e$  y  $p_j$ .

Observemos que dos elementos son comparables exactamente por el orden dado por dos de las tres aristas del casco convexo.

Una cadena de un conjunto parcialmente ordenado es un subconjunto de elementos comparables dos a dos y una anticadena un subconjunto de elementos no comparables dos a dos. El Teorema de Dilworth [Dil50] afirma que todo conjunto ordenado de  $m$  elementos contiene una cadena o una anticadena de tamaño al menos  $\sqrt{m}$ . En nuestro caso, dado que bajo el orden dado por una arista una anticadena es una cadena bajo el orden dado por las otras dos supondremos sin pérdida de generalidad que existe una cadena  $q_1 \leq_e \dots \leq_e q_{\lceil \sqrt{m} \rceil}$  de tamaño  $\lceil \sqrt{m} \rceil$ .

Unimos los siguientes puntos con segmentos de recta (ver Figura 2.8):  $q_i$  con  $q_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq \lceil \sqrt{m} \rceil - 1$ );  $q_i$  con los extremos de  $e$  ( $1 \leq i \leq \lceil \sqrt{m} \rceil$ );  $q_{\lceil \sqrt{m} \rceil}$  con el vértice del casquete convexo de  $S$  opuesto a  $e$  y por cada punto interior  $p$  de  $S$  que no está en la cadena, existe exactamente un extremo  $x$  de  $e$  al cual se puede unir sin generar cruces con las aristas previamente añadidas, unimos  $p$  con  $x$ .

Dichos segmentos de recta no se intersectan entre sí y podemos completarlos a una triangulación. En dicha triangulación hay  $m + \sqrt{m} + 1$  triángulos con (al menos) uno de sus vértices en el casco convexo.  $\square$



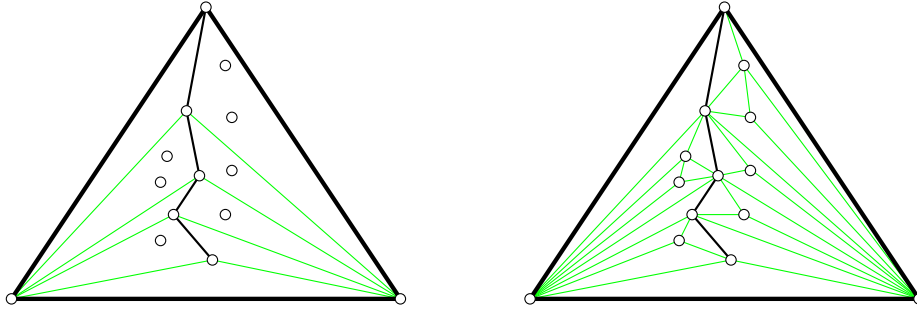


Figura 2.8: La triangulación de una cadena y su extensión a todo el conjunto de puntos.

**Lema 3.** (*Lema de Orden*) Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general con exactamente  $h$  puntos en su casco convexo. Entonces  $S$  se puede triangular de manera que al menos  $n + \sqrt{n-h} - 2$  de sus triángulos tengan (al menos) uno de sus vértices en el casco convexo de  $S$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}$  una triangulación arbitraria de los vértices del casco convexo de  $S$  (es decir, sin contar sus vértices interiores). Sean  $\tau_1, \dots, \tau_{h-2}$  los triángulos obtenidos en  $\mathcal{T}$ . Para cada  $\tau_i$  sea  $S_i$  el conjunto de puntos de  $S$  al interior de  $\tau_i$  y  $s_i$  su cardinal. Por el Lema 2 los elementos de  $\tau_i \cup S_i$ , se pueden triangular de manera de que al menos  $s_i + \sqrt{s_i} + 1$  de sus triángulos tengan uno de sus vértices en el casco convexo, es decir en  $\tau_i$  y por tanto en el casco convexo de  $S$ . Triangulando de esta manera cada  $\tau_i$  y tomando la suma sobre todos los  $\tau_i$  obtenemos una triangulación de  $S$  con al menos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{h-2} (s_i + \sqrt{s_i} + 1) &= \sum_{i=1}^{h-2} s_i + \sum_{i=1}^{h-2} \sqrt{s_i} + \sum_{i=1}^{h-2} 1 \\
 &= (n - h) + \sum_{i=1}^{h-2} \sqrt{s_i} + (h - 2) \\
 &\geq n + \sqrt{\sum_{i=1}^{h-2} s_i} - 2 \\
 &= n + \sqrt{n - h} - 2
 \end{aligned}$$

triángulos con (al menos) uno de sus vértices en el casco convexo de  $S$ .  $\square$

**Lema 4.** (*Lema de Discrepancia*) Sea  $S = R \cup A$  un conjunto de  $n$  puntos 2-coloreado en el plano, tal que  $|R| = |A| + \alpha$ . Entonces existen al menos  $\frac{(\alpha-2)}{6}(n + \alpha)$  triángulos monocromáticos vacíos con vértices en  $S$ .

*Demostración.* Consideremos un elemento  $r$  de  $R$ , unimos este punto con cada elemento de  $R \setminus \{r\}$  con un segmento de recta. Dado que estos segmentos de recta no se cruzan entre

sí los podemos completar a una triangulación de  $R$  con al menos  $|R| - 2$  triángulos con  $r$  como uno de sus vértices. Dado que  $|R| = |B| + \alpha$ , al menos  $\alpha - 2$  de ellos no contienen elementos de  $B$  en su interior.

Haciendo esto para cada elemento de  $R$  obtenemos al menos  $\frac{(\alpha-2)}{3}|R| = \frac{(\alpha-2)}{3} \frac{n+\alpha}{2} = \frac{(\alpha-2)}{6}(n + \alpha)$  triángulos rojos vacíos, pues sobre contamos cada triángulo a lo más 3 veces.  $\square$

Usando estos Lemas obtenemos una cota inferior de  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos vacíos.

**Teorema 6.** *Sea  $S = R \cup B$  un conjunto de  $n$  puntos bi-coloreado (en puntos rojos y azules) en el plano. Entonces existen  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos vacíos rojos o existe un conjunto convexo  $C$  en el plano tal que  $\|C \cap R\| - \|C \cap B\| = \Omega(n^{1/4})$  y  $|C \cap S| = \Omega(n)$ .*

*Demostración.* La idea general detrás de la prueba es el ir quitando “capas” convexas rojas de  $S$ . En cada capa aplicamos el Lema de Orden para obtener cerca de  $\sqrt{n}$  triángulos monocromáticos vacíos. Si en algún momento la diferencia entre las cardinalidades de las clases cromáticas es muy grande detenemos el proceso y obtenemos el conjunto convexo  $C$  con las propiedades afirmadas por el teorema. En caso contrario seguimos el proceso por a lo más  $\frac{1}{4}n^{3/4}$  pasos, obteniendo así  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos rojos vacíos.

Sea  $\tilde{n} = \frac{n}{6}$ . Empezamos definiendo  $S_1 := S$ ,  $R_1 := R$  y  $B_1 := B$ . En cada iteración construiremos conjuntos más pequeños  $S_{i+1} \subset S_i$ ,  $R_{i+1} \subseteq R_i$ , y  $B_{i+1} \subseteq B_i$ , respectivamente (con  $S_{i+1} = R_{i+1} \cup B_{i+1}$ ). Mantendremos la invariante además de que en cada paso  $|S_i| \geq 2\tilde{n}$ . El proceso termina si en cualquier iteración  $i$ , se tiene que  $\|R_i\| - \|B_i\| \geq \tilde{n}^{1/4}$  siendo  $\text{Conv}(S_i)$  el conjunto convexo afirmado por el Teorema. En caso contrario terminamos el proceso después de  $\frac{1}{4}n^{3/4}$  pasos.

En la  $i$ -ésima iteración hacemos:

- (a) Si  $\|R_i\| - \|B_i\| \geq \tilde{n}^{1/4}$  entonces  $\text{Conv}(S_i)$  es el conjunto convexo buscado.
- (b) En caso contrario, sea  $B'_i \subseteq B_i$  el subconjunto de elementos de  $B_i$  no contenidos en  $\text{Conv}(R_i)$ . Sean  $r_i = |R_i|$  y  $b_i = |B_i \setminus B'_i|$ . Por la invariante, se tiene que  $r_i \geq \tilde{n} - \frac{\tilde{n}^{1/4}}{2}$ . Por otra parte  $r_i - \tilde{n}^{1/4} < b_i < r_i + \tilde{n}^{1/4}$ , pues de otra manera el conjunto convexo  $\text{Conv}((R_i \cup B_i) \setminus B'_i)$  contiene  $\tilde{n}^{1/4}$  más elementos de un color que del otro. Esta última desigualdad implica que  $|B'_i| < 2\tilde{n}^{1/4}$ .

Aplicamos el Lema de orden a  $R_i$  para obtener al menos  $r_i + \sqrt{r_i - |CH(R_i)|} - 2$  triángulos monocromáticos rojos con al menos uno de sus vértices en el cierre convexo de  $S_i$ .

Tenemos que  $|CH(R_i)| < 2\tilde{n}^{1/4}$ , pues de lo contrario el conjunto  $(R_i \setminus CH(R_i)) \cup (B_i \setminus B'_i)$  tiene a lo más  $r_i - 2\tilde{n}^{1/4}$  puntos rojos y  $b_i > r_i - \tilde{n}^{1/4}$ , esta diferencia es más que  $\tilde{n}^{1/4}$  y entonces  $\text{Conv}(R_i \setminus CH(R_i)) \cup (B_i \setminus B'_i)$  es el conjunto convexo deseado.

Por lo tanto si en ningún momento encontramos un conjunto convexo con discrepancia mayor a  $\tilde{n}^{1/4}$ , obtenemos al menos  $\sqrt{\tilde{n} - \frac{5}{2}\tilde{n}^{1/4} - \tilde{n}^{1/4} - 2} \geq \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{2}$  triángulos rojos vacíos en la  $i$ -ésima iteración. Observamos que esta última desigualdad es válida para valores suficientemente grandes de  $\tilde{n}$ .

Para la siguiente iteración definimos  $R_{i+1} = R_i \setminus CH(R_i)$ ,  $B_{i+1} = B_i \setminus B'_i$  y  $S_{i+1} = R_{i+1} \cup B_{i+1}$ . Dado que todos los triángulos rojos obtenidos hasta ahora tiene al menos un vértice en  $CH(R_i)$  estos triángulos no vuelven a ser contados en las siguientes iteraciones.

El proceso termina por que en algún paso se encontró un conjunto convexo de tamaño lineal con al menos  $\Omega(n^{1/4})$  más puntos de un color que del otro o después de  $\frac{1}{4}n^{3/4}$  pasos. Como en cada paso se obtienen  $\frac{\sqrt{\tilde{n}}}{2}$  triángulos rojos vacíos, en total obtenemos  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos rojos vacíos.

Falta probar que en cada iteración se mantiene la invariante de que  $|S_i| \geq 2\tilde{n}$ . En la  $i$ -ésima iteración quitamos  $|B'_i| + |CH(R_i)| < 2\tilde{n}^{1/4} + 2\tilde{n}^{1/4} = 4\tilde{n}^{1/4}$  puntos. Por lo que después de  $\frac{1}{4}n^{3/4}$  pasos tenemos al menos  $n - \frac{1}{4}n^{3/4} \cdot 4\tilde{n}^{1/4} \geq 2\tilde{n}$  puntos todavía.  $\square$

**Corolario 1.** *Todo conjunto bi-coloreado  $S$  de  $n$  puntos en el plano determina  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos vacíos.*

*Demostración.* Por el Teorema 6, existen  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos vacíos monocromáticos o existe un convexo  $C$  en el plano que contiene  $\Omega(n)$  puntos de  $S$  y con al menos  $\Omega(n^{1/4})$  más puntos de un color que de el otro. Aplicando el Lema de discrepancia a  $C \cap S$  obtenemos  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos vacíos.  $\square$

Combinando nuestros lemas de manera diferente Pach y Tóth [PT08] fueron capaces de mejorar la cota inferior a  $\Omega(n^{4/3})$ .

**Teorema 7.** *Sea  $S = R \dot{\cup} B$  un conjunto de  $n$  puntos bi-coloreado (en puntos rojos y azules) en el plano. Entonces existen  $\Omega(n^{4/3})$  triángulos vacíos rojos o existe un conjunto convexo  $C$  en el plano tal que  $||C \cap R| - |C \cap B|| = \Omega(n^{1/3})$  y  $|C \cap S| = \Omega(n)$ .*

*Demostración.* Procedemos de manera similar a la prueba del teorema 6 con la diferencia de que ahora en vez de quitar capas rojas convexas quitamos un punto rojo por iteración, a ese punto le asignaremos  $\Omega(n^{1/3})$  triángulos rojos vacíos. Análogamente como en la prueba del Teorema 6 esto lo podremos hacer mientras la discrepancia entre las dos clases cromáticas no se mayor a  $\sqrt[3]{n}/100$ .

Empezamos definiendo  $S_1 := S$ ,  $R_1 := R$  y  $B_1 := B$ . En cada iteración construiremos conjuntos más pequeños  $S_{i+1} \subset S_i$ ,  $R_{i+1} \subseteq R_i$ , y  $B_{i+1} \subseteq B_i$ , respectivamente, con  $S_{i+1} = R_{i+1} \cup B_{i+1}$ . Tendremos ahora la propiedad adicional de que  $|R_{i+1}| = |R_i| - 1$ .

El proceso termina si en cualquier iteración, se tiene que  $||R_i| - |B_i|| \geq \sqrt[3]{n}/100$ , siendo  $\text{Conv}(S_i)$  el conjunto convexo afirmado por el teorema. En caso contrario terminamos el

proceso después de  $\frac{n}{5}$  pasos. En la primera iteración esta suposición sobre la diferencia de las clases cromáticas implica que  $|R_1| > n/2 - \sqrt[3]{n}/200$  y como  $|R_{i+1}| = |R_i| - 1$  en general se tiene que  $|R_i| = |R_1| - i > n/2 - \sqrt[3]{n}/200 - i$ .

En la  $i$ -ésima iteración hacemos:

- (a) Si  $\|R_i| - |B_i|\| \geq \sqrt[3]{n}/100$ . entonces  $\text{Conv}(S_i)$  es el conjunto convexo buscado.
- (b) En caso contrario, sea  $B'_i := B_i \cap \text{Conv}(R_i)$  (el conjunto de puntos azules al interior de la cerradura convexa de los puntos rojos). Sean  $r_i = |r_i|$  y  $b_i = |B'_i|$ . Suponemos que  $|r_i - b_i| < \sqrt[3]{n}/100$  pues de lo contrario  $\text{Conv}(R_i)$  es el conjunto convexo buscado. Por lo tanto  $b_i > r_i - |r_i - b_i| > n/2 - 3\sqrt[3]{n}/200 - i > n/4$  (pues  $i \leq n/5$ ).

$\text{CH}(R_i)$  tampoco puede ser muy grande, a saber si  $|\text{CH}(R_i)| \geq \sqrt[3]{n}/50$  entonces  $\text{Conv}(B'_i)$  contendría al menos  $\sqrt[3]{n}/100$  más puntos azules que rojos y sería el conjunto convexo buscado.

Suponemos por lo tanto que  $|\text{CH}(R_i)| < \sqrt[3]{n}/50$ . Sean  $p_1, p_2, \dots, p_m$  los vértices de  $\text{CH}(R_i)$  en orden de las manecillas del reloj. Triangulamos los vértices de  $\text{CH}(R_i)$  agregando los segmentos de recta  $\overline{p_1 p_j}$  ( $1 = 2, \dots, m$ ) junto con las aristas de  $\text{CH}(R_i)$ . Para  $1 \leq j \leq m - 2$ , sea  $\tau_j$  el triángulo con vértices  $p_1, p_{j+1}, p_{j+2}$  y sean  $r'_j$  y  $b'_j$  el número de puntos rojos y azules al interior de  $\tau_j$  respectivamente.

Supongamos que para algún  $j$  se tiene que  $|b'_j - r'_j| > \sqrt[3]{n}/50$ . Al menos uno de los siguientes conjuntos convexos contiene más de  $n/6$  puntos:  $\tau_j, \tau_1, \tau_2 \cup \dots \cup \tau_{j-1}$  o  $\tau_{j+1} \cup \dots \cup \tau_{m-2}$ . Si  $\tau_j$  es dicho convexo terminamos el proceso pues  $\tau_j$  es un conjunto convexo con  $n/6$  puntos de  $S$  y una diferencia entre las clases cromáticas de  $\Omega(n^{1/3})$ . Si en cambio lo es  $\tau_1, \tau_2 \cup \dots \cup \tau_{j-1}$  entonces  $\tau_1, \tau_2 \cup \dots \cup \tau_{j-1}$  o  $\tau_1, \tau_2 \cup \dots \cup \tau_{j-1} \cup \tau_j$  tienen discrepancia  $\Omega(n^{1/3})$  y serían el convexo deseado. De la misma manera si  $\tau_{j+1} \cup \dots \cup \tau_{m-2}$  tuviera más de  $n/6$  elementos de  $S$ ,  $\tau_j \cup \tau_{j+1} \cup \dots \cup \tau_{m-2}$  o  $\tau_{j+1} \cup \dots \cup \tau_{m-2}$  sería el convexo afirmado por el Teorema.

Podemos suponer por lo tanto que para todo  $j$  se tiene que  $|b'_j - r'_j| \leq \sqrt[3]{n}/50$ . Como  $\sum_{j=1}^{m-2} b'_j = r_i$  y  $r_i > n/4$ , existe un  $j$  tal que  $r'_j \geq n/(4m) \geq 50n^{2/3}$  y por tanto  $b'_j \leq r'_j + \sqrt[3]{n}/50$ . Aplicamos el Lema de Orden a  $\tau_j \cap R_i$  de para obtener una triangulación con al menos  $r'_j + \sqrt{r'_j} + 1 > b_j + 7\sqrt[3]{n}/2$  de sus triángulos con al menos un vértice en el casco convexo. De estos al menos  $7\sqrt[3]{n}/2 - \sqrt[3]{n}/50 > 3\sqrt[3]{n}$  están vacíos también de puntos azules y a su vez un tercio de ellos comparte un mismo vértice  $p$  de  $\tau_j$ . Es decir hemos encontrado al menos  $\sqrt[3]{n}$  rojos vacíos cuyo uno de sus vértices es  $p$ . Pasamos a la  $i + 1$ -ésima iteración, definiendo ahora  $R_{i+1} := R_i \setminus \{p\}$  y  $B_{i+1} := B'_i$ .

Si no terminamos el proceso antes de  $n/5$  iteraciones será por que hemos encontrado un conjunto convexo con un número lineal de elementos de  $S$  y una diferencia entre sus clases cromáticas de  $\Omega(n^{1/3})$  en caso contrario el proceso termina después de  $n/5$  encontrando en

cada paso al menos  $\sqrt[3]{n}$  triángulos rojos vacíos. Como no hay sobre conteo se tienen  $n^{4/3}/5$  triángulos vacíos rojos en total  $\square$

La mejor cota inferior actualmente por lo tanto es de  $\Omega(n^{4/3})$  triángulos monocromáticos vacíos en todo conjunto bi-coloreado de  $n$  puntos en el plano.

### 2.4.1. Cota superior

Dado que para puntos sin colores existen ejemplos de conjuntos de  $n$  puntos en el plano con  $\Theta(n^2)$  triángulos vacíos, estos mismos ejemplos al ser coloreados tendrán  $O(n^2)$  triángulos monocromáticos vacíos. Podría sin embargo ser el caso que hubiera ejemplos de conjuntos de  $n$  puntos bi-coloreados en el plano con  $o(n^2)$  triángulos monocromáticos vacíos, conjeturamos que este no es el caso:

**Conjetura 2.** *Existe una constante  $c > 0$ , tal que todo conjunto de  $n$  puntos bi-coloreado en el plano tiene al menos  $cn^2$  triángulos monocromáticos vacíos.*

Una de las razones por las que creemos la conjetura anterior es cierta es que no parece que exista manera de colorear los ejemplos de puntos (sin colores) con pocos triángulos para obtener un número menor que cuadrático de triángulos monocromáticos vacíos.

El primer de estos ejemplos que viene a la mente es el del conjunto de Horton, sin embargo toda coloración del conjunto de Horton tiene un número cuadrático de triángulos monocromáticos vacíos, como lo muestra el siguiente teorema:

**Teorema 8.** *Sea  $n$  un entero positivo potencia de 2. Toda 2-coloración del conjunto de Horton de  $n$  elementos tiene  $\Omega(n^2)$  triángulos monocromáticos vacíos.*

*Demostración.* Sea  $H$  un conjunto de Horton de  $n$  puntos en el plano 2-coloreado en conjuntos rojos y azules. Suponemos sin pérdida de generalidad que  $H_0$  se encuentra muy por abajo de  $H_1$  y que a su vez  $(H_0)_0$  se encuentra muy por abajo de  $(H_0)_1$ . Suponemos también que los elementos de  $H_0$  son  $x_2, \dots, x_{n/2}$  (ordenados respecto a su coordenada  $x$ ). Sea  $x_i, x_{i+2}, x_{i+4}$  con  $x_i, x_{i+4} \in (H_0)_1$  y  $x_{i+2} \in (H_0)_0$ . Cada una de las aristas tres aristas  $\overline{x_i, x_{i+2}}, \overline{x_{i+2}, x_{i+4}}$  y  $\overline{x_i, x_{i+4}}$  junto con cualquier elemento de  $H_1$  forman un triángulo vacío, de estas tres al menos una es monocromática. Dado que hay  $n/4$  ternas de este tipo al menos  $n/8$  son del mismo color, supongamos sin pérdida de generalidad que son rojas. Ahora bien  $H_1$  consta de  $n/2$  puntos, supongamos que al menos  $n/8$  de ellos son rojos, entonces junto con las al menos  $n/8$  aristas rojas de  $H_0$  formarían  $n^2/64$  triángulos rojos vacíos. Si en caso contrario menos de  $n/8$  puntos de  $H_1$  fueran rojos, la discrepancia entre las dos clases cromáticas en  $H_1$  sería de al menos  $(1/4)n$  y aplicando el Lema de Discrepancia obtendríamos  $((1/4)n - 2)/6(n/2 + (1/4)n) = ((1/24)n - 1/3)((3/4)n) = n^2/96 - 1/4n \approx n^2/96$  triángulos monocromáticos vacíos.  $\square$

El Teorema 8 dificulta mucho las construcciones basadas en copias transformadas del conjunto de Horton, que lamentablemente para el caso no coloreado son las que mejores cotas superiores han dado. La primera construcción de conjuntos de puntos con pocos triángulos vacíos dada por Katchalski y Meir [KM88] tampoco parece tener una dos coloración con  $o(n^2)$  triángulos monocromáticos vacíos; aclaramos que no lo hemos demostrado formalmente.

Otra manera en la que se han dado construcciones de conjuntos de puntos ha sido de manera aleatoria, sin embargo parece también poco probable que estas técnicas ayuden por el siguiente teorema:

**Teorema 9.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano con exactamente  $\tau(S)$  triángulos vacíos. Si coloreamos los elementos de  $S$  de manera aleatoria e independiente “rojo” o “azul” con probabilidad  $1/2$ , el número esperado de triángulos monocromáticos vacíos en la coloración obtenida es  $\frac{1}{4}\tau(S)$ .*

*Demostración.* Dado un triángulo vacío  $\tau$  en  $S$  éste será monocromático con probabilidad  $1/4$  en la coloración aleatoria. Definimos la variable  $X_\tau = 1$  si  $\tau$  es monocromático y  $X_\tau = 0$  en caso contrario (por lo tanto  $E(X_\tau) = 1/4$ ). Sea  $\mathcal{T}(S)$  el conjunto de triángulos vacíos en  $S$  y sea  $X = \sum_{\tau \in \mathcal{T}(S)} X_\tau$ . El número esperado de triángulos vacíos es  $E(X) = E(\sum_{\tau \in \mathcal{T}(S)} X_\tau) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}(S)} E(X_\tau) = (1/4)\tau(S)$ .  $\square$

El Teorema 9 implica que dado cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano, existe una manera de 2-colorearlo de manera de que sólo tenga  $\frac{1}{4}\tau(S)$  triángulos monocromáticos vacíos. Si usamos la mejor cota actual dada por Bárány y Valtr de un conjunto de  $n$  puntos con aproximadamente  $1.62n^2$  triángulos vacíos, obtenemos una cota de aproximada de  $0.4n^2$  triángulos monocromáticos vacíos. Lamentablemente esta es la mejor cota superior que hemos podido dar hasta el momento. Conjeturamos sin embargo que siempre hay al menos un número cuadrático de triángulos monocromáticos vacíos (ver Conjetura 2 y 5).

## 2.5. Simplicios monocromáticos vacíos en $\mathbb{R}^d$

Estudiamos ahora la generalización de nuestro problema a dimensiones más altas, donde ahora tenemos un conjunto de  $n$  puntos, 2-coloreado  $S$  en  $\mathbb{R}^d$  y estamos interesados en dar cotas para el mínimo número de  $d$ -simplejos monocromáticos vacíos.

Usando las cotas inferiores para  $\mathbb{R}^2$  podemos dar cotas análogas en  $\mathbb{R}^d$  usando los siguientes lemas:

**Lema 5.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n \geq d + 2$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  y  $X$  un subconjunto de  $S$  de  $d - 1$  elementos. Existe un conjunto de  $n - d$   $d$ -simplejos vacíos tal que los  $d$ -simplejos:*

1. *Tienen sus vértices en  $S$ .*
2. *Tienen interiores disjuntos.*

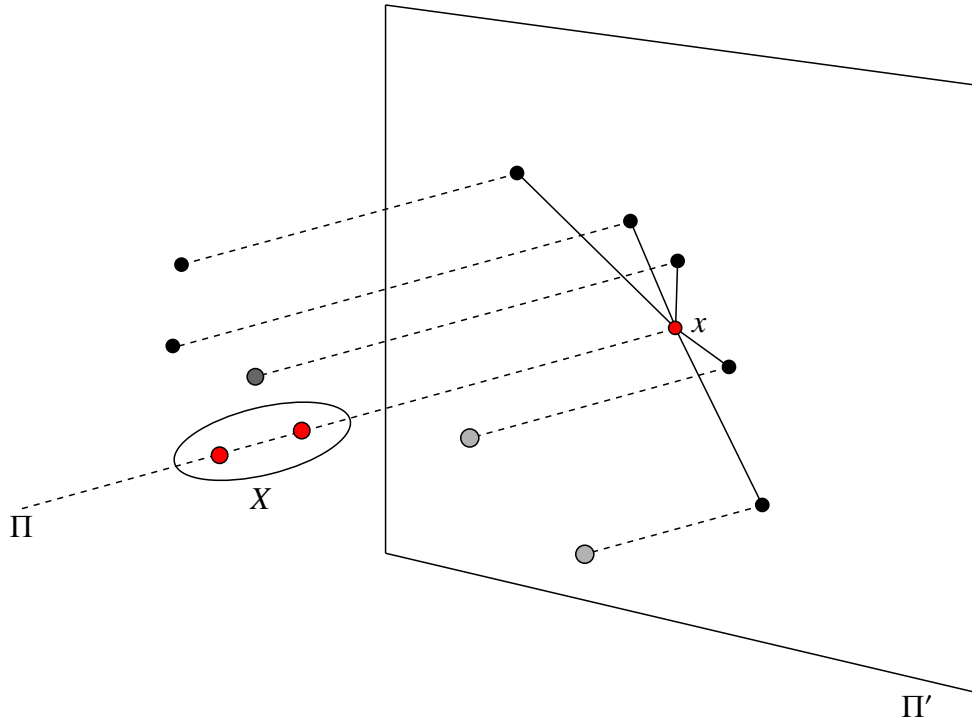


Figura 2.9: Ejemplo de la demostración del Lema 5 en  $\mathbb{R}^3$ .

3. *Contienen todos a  $X$  como subconjunto de vértices.*

*Demostración.* Sea  $\Pi$  el hiperplano  $d - 2$  dimensional que contiene a  $X$  y sea  $\Pi'$  un plano 2-dimensional ortogonal a  $\Pi$ . Proyectamos todos los elementos de  $S$  ortogonalmente a  $\Pi'$  (ver Figura 2.9). Obsérvese que todos los elementos de  $X$  son proyectados a un mismo punto  $x$  en  $\Pi'$ . Sean  $p_1, p_2, \dots, p_{n-(d-1)}$  las imágenes en  $\Pi'$  de los restantes  $n - (d - 1)$  puntos en  $S - X$ . Suponemos además que están ordenados por ángulo alrededor de  $x$ . Ahora bien las preimágenes de  $\{p_i, p_{i+1}\} \cup \{x\}$  ( $1 \leq i \leq n - d$ ) son una familia de  $d$ -simplejos que cumplen las condiciones del teorema.  $\square$

Con el lema anterior podemos generalizar el Lema de Discrepancia a  $\mathbb{R}^d$ .

**Lema 6.** (*Lema Generalizado de Discrepancia*) Sea  $S = R \cup A$  un conjunto de  $n$  puntos bicolorado (en puntos rojos y azules) en  $\mathbb{R}^d$ , tal que  $|R| = |A| + \alpha$ . Entonces existen al menos  $\alpha c_d n^{d-1}$   $d$ -simplejos monocromáticos vacíos con vértices en  $S$ , donde  $c_d$  es una constante positiva que sólo depende de  $d$ .

*Demostración.* Sea  $X$  un subconjunto de  $d - 1$  elementos de  $R$ . Por el Lema 5 existen  $|R| - d$   $d$ -simplejos rojos, vacíos de puntos rojos y de manera tal que todos contienen a

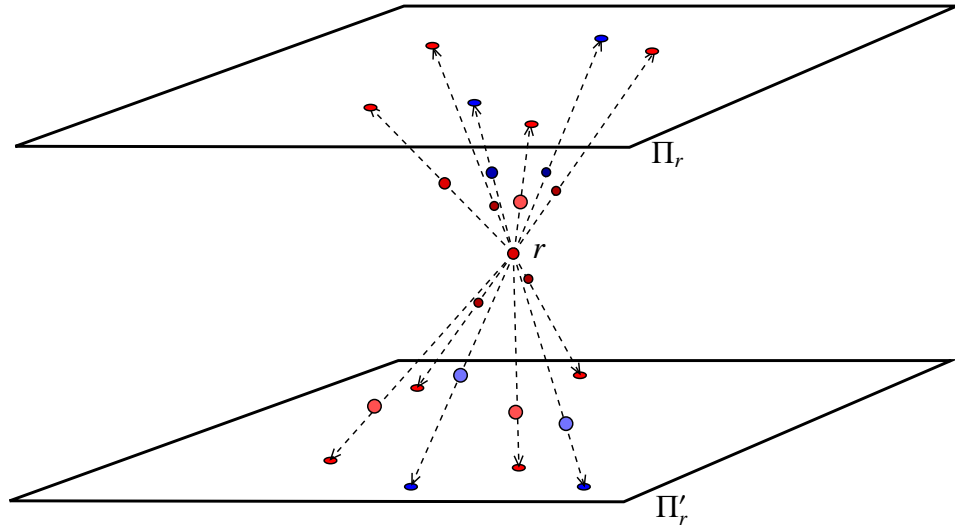


Figura 2.10: Ejemplo de la demostración del Teorema 10 en  $\mathbb{R}^3$ .

$X$  como conjunto de vértices. Al menos  $|R| - d - |B| = \alpha - d$  de estos  $d$ -simplejos rojos están también vacíos de puntos azules. Haciendo esto para cada  $d - 1$  subconjunto de  $R$ , obtenemos  $\binom{|R|}{2} = \binom{(n+\alpha)/2}{2}$   $d$ -simplejos rojos vacíos, sobrecontamos cada uno de ellos a lo más  $\binom{d}{d-1} = \binom{d}{2}$  veces. Por lo tanto encontramos  $\left(\frac{\alpha - d}{2}\right) \binom{n}{d-1}$   $d$ -simplejos rojos vacíos, con lo que se prueba el teorema.  $\square$

Probamos ahora la versión del Teorema 7 para  $\mathbb{R}^d$ .

**Teorema 10.** *Sea  $S = R \dot{\cup} B$  un conjunto de  $n$  puntos bi-coloreado (en puntos rojos y azules) en el  $\mathbb{R}^d$ . Entonces existen  $\Omega(n^{d-2/3})$   $d$ -simplejos vacíos rojos o existe un conjunto convexo  $C$  en  $\mathbb{R}^d$  tal que  $|C \cap R| - |C \cap B| = \Omega(n^{1/3})$  y  $|C \cap S| = \Omega(n)$ .*

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $d$ . El resultado para  $d = 2$  es simplemente el Teorema 7. Sea pues  $d \geq 3$ .

Observamos que si  $||R| - |B|| \geq n^{1/3}$  entonces  $\text{Conv}(S)$  es un conjunto convexo con la diferencia deseada entre las cardinalidades de sus clases cromáticas. Suponemos por tanto que  $|R| - |B| < n^{1/3}$ . Esta última desigualdad implica que  $|R| > n - \frac{n^{1/3}}{2}$ .

Sea  $r \in R$  un punto rojo. Para todos los otros puntos  $p \in S \setminus \{r\}$  consideramos el rayo infinito  $l_{r,p}$  que tiene como base  $r$  y pasa por  $p$ . Sean  $\Pi_r$  y  $\Pi'_r$  dos hiperplanos paralelos  $d - 1$  dimensionales tales que no son paralelos a ninguno de los rayos  $l_{r,p}$  y con la propiedad adicional de que  $S$  se encuentra contenido entre  $\Pi_r$  y  $\Pi'_r$ . Cada rayo  $l_{r,p}$  intersecciona a  $\Pi_r$  o  $\Pi'_r$  pero no a ambos. Proyectamos los elementos de  $S - \{r\}$  a  $\Pi_r$  y  $\Pi'_r$  tomando para cada punto la intersección de su rayo con  $\Pi_r$  o  $\Pi'_r$  según sea el caso (ver Figura 2.10).



La preimagen de un  $(d - 1)$ -simplejo rojo en  $\Pi_r$  (o en  $\Pi'_r$ ) junto con  $r$  es un  $d$ -simplejo en  $\mathbb{R}^d$ .

Aplicamos la hipótesis de inducción a las imágenes de  $S \setminus \{r\}$  bajo la proyección en  $\Pi_r$  y  $\Pi'_r$ . Obteniendo así  $\Omega(n^{d-1-2/3})$   $d$ -simplejos rojos vacíos o un conjunto convexo  $C$  en  $\mathbb{R}^d$  que contiene un número lineal de elementos de  $S$  tal que  $\|C \cup R\| - \|C \cup B\| = \Omega(n^{1/3})$ .

Haciendo esto por cada punto rojo encontramos por cada uno de ellos  $\Omega(n^{d-5/3})$   $d$ -simplejos rojos vacíos y por tanto  $\Omega(n^{d-2/3})$  en total (pues sobre contamos cada uno a lo más  $d$  veces) o bien para un punto rojo encontramos el conjunto convexo  $C$  de  $\mathbb{R}^d$  con una diferencia de  $\Omega(n^{1/3})$  entre los puntos rojos y azules que contiene.  $\square$

**Corolario 2.** *Todo conjunto bi-coloreado  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  determina  $\Omega(n^{d-2/3})$   $d$ -simplejos monocromáticos vacíos.*

*Demostración.* Por el Teorema 10, existen  $\Omega(n^{d-3/4})$   $d$ -simplejos vacíos monocromáticos o existe un convexo  $C$  en  $\mathbb{R}^d$  que contiene  $\Omega(n)$  puntos de  $S$  y con al menos  $\Omega(n^{1/4})$  más puntos de un color que de él otro. Aplicando el Lema de Discrepancia Generalizado a  $C \cap S$  obtenemos  $\Omega(n^{d-3/4})$   $d$ -simplejos monocromáticos vacíos en  $\mathbb{R}^d$ .  $\square$

## 2.6. Problemas abiertos y trabajo futuro

La generalización se puede dar en otra dirección y considerar conjuntos de puntos  $k$ -coloreados en  $\mathbb{R}^d$ . A diferencia de  $\mathbb{R}^2$ , todo conjunto de puntos 3-coloreado suficientemente grande en  $\mathbb{R}^3$  ([Urr03]) contiene un tetraedro monocromático vacío. Actualmente los autores de [AFMFP<sup>+</sup>08] estamos trabajando en esta dirección.

Vale la pena hacer una pausa antes de continuar con la generalización y mencionar algunas propiedades de los  $d$ -simplejos y triangulaciones en dimensiones mayores a 2. Existen conjuntos de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  que tienen triangulaciones con  $\Omega(n^{\lfloor d+1 \rfloor})$   $d$ -simplejos.

Un ejemplo de estos conjuntos son puntos sobre la curva de momentos, la curva de momentos en  $\mathbb{R}^d$  se define como  $\gamma = \{(t, t^2, \dots, t^d) | t \in \mathbb{R}\}$ . Cualquier subconjunto de  $n$  puntos de la curva de momentos se puede triangular con  $\Omega(n^{\lfloor d \rfloor})$   $d$ -simplejos.

Estos conjuntos tienen la peculiaridad incluso en dimensiones bajas como  $\mathbb{R}^3$  de que no importa como se  $k$ -coloreen, si  $n$  es lo suficientemente grande con respecto a  $k$  siempre existe un  $d$ -simplejo monocromático vacío.

Es posible incluso que en  $\mathbb{R}^3$  todo conjunto de  $n$  puntos admita una triangulación con un número super lineal de tetraedros, Urrutia conjetura que éste es el caso en [Urr03], en ese artículo se observa que de ser así, se tendría la propiedad anterior en  $\mathbb{R}^3$  para todos los conjuntos de puntos. Es decir que si  $n$  es suficientemente grande con respecto a  $k$ , para cualquier conjunto de  $n$  puntos  $k$ -coloreados en  $\mathbb{R}^3$  existe un tetraedro monocromático vacío.

Conjeturamos que al menos esta implicación es cierta ya en  $\mathbb{R}^3$ .

**Conjetura 3.** *Sea  $k$  un entero positivo. Existe un entero positivo  $n_k$  que sólo depende de  $k$  tal que todo conjunto  $k$ -coloreado con al menos  $n_k$  puntos en  $\mathbb{R}^3$  tiene un tetraedro monocromático vacío.*

Observamos que la Conjetura 3 no implica la existencia de una triangulación de tamaño super lineal. Mencionamos también que Braß [Bra05] dio ejemplos de conjuntos de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$  tales que cualquier tetraedralización tiene  $O(n^{5/4})$  tetraedros.

Conforme la dimensión aumenta es más factible que la propiedad análoga de la Conjetura 3 se cumpla, conjeturamos al menos que existe una dimensión  $d$  a partir de la cual la Conjetura 3 es cierta.

**Conjetura 4.** *Existe un entero positivo  $d$  tal que para todo entero positivo  $k$  existe un entero positivo  $n_k$  tal que todo conjunto  $k$ -coloreado de al menos  $n_k$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  tiene un  $d$ -simplejo monocromático vacío.*

Note que si la Conjetura 4 es cierta para alguna dimensión  $d$  entonces lo es para dimensiones más altas, esto se prueba usando proyecciones a hiperplanos de dimensiones más bajas como en la prueba del Teorema 10.

Regresando a conjuntos 2-coloreados en el plano, la tarea más urgente probablemente es la de dar un cota superior no trivial para el número de triángulos monocromáticos vacíos.

Por otra parte si la Conjetura 2 es cierta la mejor cota superior será un conjunto 2-coloreado de  $n$  puntos en el plano con un número cuadrático de triángulos monocromáticos vacíos. Conjeturamos que de hecho no puede bajar mucho el número de triángulos monocromáticos vacíos en relación al número de triángulos vacíos al colorear un conjunto de puntos en el plano.

Dado  $S$  un conjunto de puntos en el plano definimos a  $\tau(S)$  como el número de triángulos vacíos en  $S$ . Si coloreamos a  $S$  con una 2-coloración  $c$  (vista como función de  $S$  a un conjunto de 2 elementos), definimos a  $\tau_c(S)$  como el número de triángulos monocromáticos vacíos en  $S$ .

**Conjetura 5.** *Existe una constante positiva  $\alpha$  y un entero positivo  $n_\alpha$  (que sólo depende de  $\alpha$ ), tal que si  $S$  es un conjunto de al menos  $n_\alpha$  puntos en el plano y  $c$  cualquier 2-coloración de  $S$ , entonces  $\tau_c(S)/\tau(S) \geq \alpha$ .*

Se puede exhibir un conjunto de puntos  $S$  y una 2-coloración  $c$  de éste tal que  $\tau_c(S)/\tau(S) \approx 1/5$ .

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano con no dos de sus puntos en una misma línea vertical (si  $S$  está en posición general podemos rotarlo hasta que cumpla esta última condición).

Construimos a partir de  $S$  un conjunto de  $2n$  puntos  $S' = \{(x, y \pm \epsilon) | (x, y) \in S\}$  donde  $\epsilon > 0$  lo escogemos arbitrariamente chico. Coloreamos a los puntos de  $S'$  como sigue: a los puntos de la forma  $\{(x, y + \epsilon) | (x, y) \in S\}$  los coloreamos de rojo a los puntos de la forma

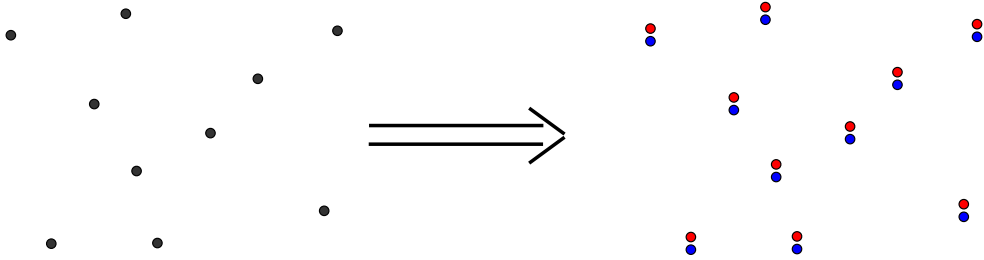


Figura 2.11: Construcción de  $S'$  a partir de  $S$ .

$\{(x, y - \epsilon) \mid (x, y) \in S\}$  los coloreamos de azul. Denotamos con  $c$  esta coloración (ver Figura 2.11).

Ahora bien cada elemento  $x$  de  $S$  y cada par de puntos de  $S \setminus \{x\}$  a distancia  $\epsilon$  determinan un triángulo vacío (no monocromático), hay en total  $2n(n-1) = 2n^2 - 2n$  dichos triángulos. Por cada triángulo vacío de  $S$  exactamente una de las copias trasladadas (en  $\epsilon$ ) es vacía (y además monocromática) en  $S'$ , por lo que por cada triángulo vacío en  $S$  tenemos 4 triángulos vacíos en  $S'$  (no usando puntos a distancia  $2\epsilon$ ) de los cuales sólo uno será monocromático (ver Figura 2.12). Si  $\epsilon$  es lo suficientemente pequeño estos dos tipos de triángulos serán los únicos triángulos vacíos en  $S'$ .

Por lo tanto  $\tau(S') = 4\tau(S) + 2n^2 - 2n$  y  $\tau_c(S') = \tau(S)$ . La relación de triángulos monocromáticos vacíos a triángulos vacíos en  $S'$  es  $\tau_c(S')/\tau(S') = 1/4 + \tau(S)/(2n^2 - 2n)$ .

Usando como  $S$  el conjunto de  $n$  puntos encontrado por Bárány y Valtr en [BV04] con  $\tau(S) = 1.62n^2$  triángulos vacíos se obtiene una construcción con  $\tau_c(S')/\tau(S') \approx 0.191$ .

Finalmente mencionamos que para superar la cota inferior de  $\Omega(n^{4/3})$  triángulos monocromáticos vacíos muy probablemente se necesitarán ideas distintas a las dadas en [AFMFP<sup>+</sup>08] y [PT08].

El Lema 2 es justo en el sentido de que existen conjuntos de puntos con cierre convexo triangular tal que en los órdenes dados por las aristas del cierre convexo las cadenas y anticadenas más grandes son de tamaño  $\sqrt{n}$  como lo muestra la Figura 2.13.

Suponiendo que el Lema 4 no es mejorado parece que la mejor cota que se puede alcanzar con los Lemas 3 y 4 es probablemente  $\Omega(n^{3/2})$ . Por otra parte mejorar el Lema 4 se necesitan nuevas ideas.

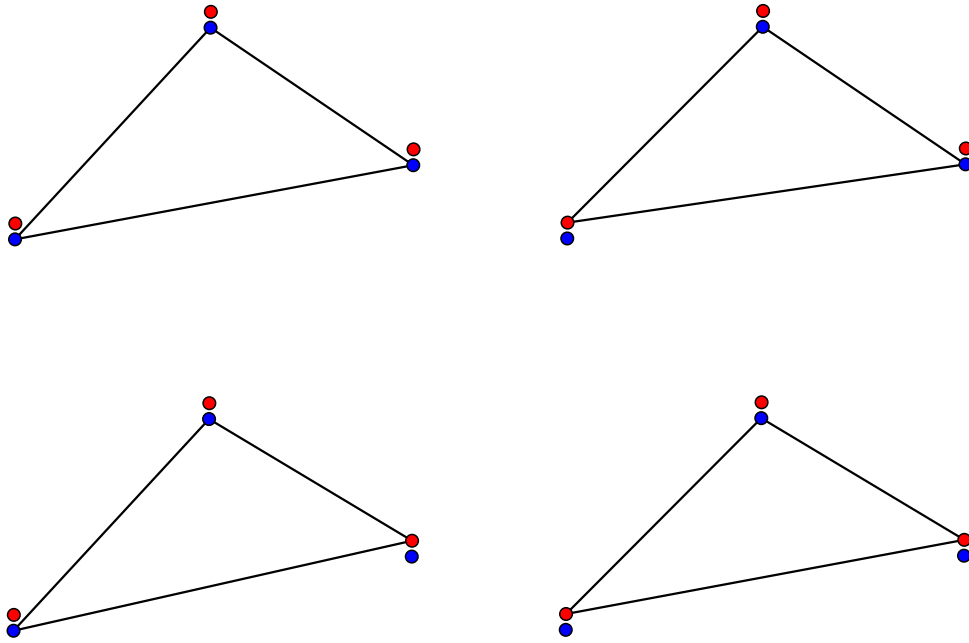


Figura 2.12: Los 4 triángulos vacíos de  $S'$  inducidos por un triángulo vacío de  $S$ .

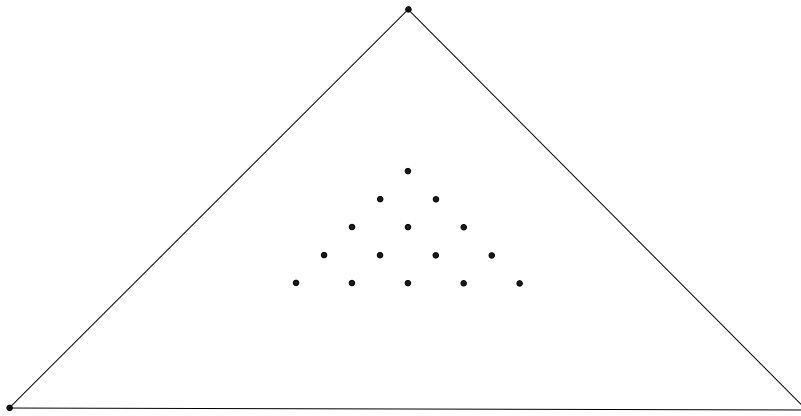


Figura 2.13: Conjunto de  $n$  puntos en el plano tal que el orden  $\leq_e$  dado por cualquier arista del cierre convexo  $e$  no tiene una cadena o anticadena de tamaño mayor a  $\sqrt{n}$ .

## Capítulo 3

# Triangulaciones y tetraedralizaciones Hamiltonianas

Incluiremos más a la Teoría de Gráficas en este capítulo; la Geometría Combinatoria seguirá siendo importante. Asociaremos una gráfica (la gráfica dual) a cada triangulación de un conjunto finito de puntos (en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ) y buscaremos encontrar triangulaciones tales que su gráfica asociada cumpla ciertas propiedades gráficas. Mencionamos además que el lector podrá observar como paulatinamente incluso en este capítulo la Geometría Combinatoria cede terreno a la Teoría de Gráficas.

Finalmente en el último capítulo definiremos una gráfica de giros para configuraciones de “fichas” puestas sobre los vértices de una gráfica, esta definición está inspirada en la gráfica de giros de triangulaciones de un conjunto de puntos.

Esta gráfica ya nada tendrá que tener con la Geometría Combinatoria y se estudiará dentro del marco de Teoría de Gráficas.

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  y  $\mathcal{T}$  una triangulación de  $S$ . Decimos que  $\mathcal{T}$  es Hamiltoniana si su gráfica dual contiene una trayectoria Hamiltoniana (recordamos que una trayectoria Hamiltoniana en una gráfica  $G$  es un camino que pasa por todos los vértices de  $G$  sin repetir ninguno).

Hay dos problemas respecto a triangulaciones Hamiltonianas, uno es existencial y otro es algorítmico:

¿Existe siempre una triangulación Hamiltoniana de todo conjunto de  $n > d$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ ?

¿Existe un algoritmo eficiente para encontrar (si es que existe) una triangulación Hamiltoniana de un conjunto de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$ ?

Los casos que más nos interesan son los de dimensiones bajas, en particular  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

En  $\mathbb{R}^2$  ambos problemas fueron planteados y resueltos por Arkin, Held, Mitchell y Skiena en [AHMS96]. En ese artículo mostraron que todo conjunto de puntos en el plano

admite una triangulación Hamiltoniana y dieron dos algoritmos para encontrarla en tiempo  $O(n \log n)$ . Plantearon también el problema para  $\mathbb{R}^3$  y tanto el problema existencial como el algorítmico siguen abiertos hasta la fecha. El problema existencial está listado como el Problema 29 en la lista de problemas abiertos de [DMO].

Los algoritmos presentados en [AHMS96], pese a ser asintóticamente óptimos en utilización de recursos de cómputo, tienen el problema de ser difíciles de implementar. En [FMU05] Urrutia y el autor dimos un algoritmo de tiempo  $O(n \log n)$  para encontrar una triangulación Hamiltoniana de un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Nuestro algoritmo tiene la misma complejidad asintótica que los algoritmos de [AHMS96], sin embargo es más eficiente en tiempo de ejecución (por constantes multiplicativas) y más fácil de implementar.

El problema en  $\mathbb{R}^3$  se ha estudiado poco. A la fecha sólo hay dos artículos que abordan este problema. Chin, Ding y Wang exhibieron en [CDW05] un conjunto de 92 puntos en  $\mathbb{R}^3$  que no admite triangulaciones tirantes Hamiltonianas (“pulling triangulations” en inglés). En este capítulo mejoramos esta cota exhibiendo un conjunto de 84 puntos en  $\mathbb{R}^3$  sin una tetraedralización Hamiltoniana de este tipo.

En la cuestión algorítmica Escalona, Urrutia y el autor dimos en [EFMU07] un algoritmo de tiempo  $O(n^{3/2})$  para añadir  $O(n)$  puntos extra a un conjunto de  $n$  puntos en el plano de manera de que siempre podemos encontrar una triangulación Hamiltoniana del conjunto aumentado. En este mismo artículo abordamos el problema existencial y mostramos que todo conjunto de a lo más 20 puntos en  $\mathbb{R}^3$  admite una tetraedralización Hamiltoniana.

En este capítulo trataremos el problema de encontrar triangulaciones Hamiltonianas de conjuntos de puntos en el plano y en el espacio tri-dimensional, abordaremos tanto los aspectos existenciales como los algorítmicos.

Así mismo haremos un breve resumen de los resultados que se conocen a la fecha sobre este problema.

### 3.1. Graficación por computadora

La computadora siendo de recursos limitados sólo puede manejar descripciones finitas de los objetos del mundo real. Esta limitación se hace patente en la graficación por computadora donde en muchas ocasiones para dibujar una superficie continua, ésta se subdivide en varios polígonos (normalmente triángulos y cuadrángulos) que se dibujan por separado. Haciendo una partición lo suficientemente fina se puede aproximar tanto como se quiera a la superficie y dar así la ilusión de continuidad (ver Figura 3.1).

En muchas aplicaciones (video juegos por ejemplo) de graficación por computadora además se busca dibujar los objetos lo más rápido posible. Para este efecto las computadoras de hoy en día cuentan normalmente con una pieza de hardware encargada de realizar los cálculos involucrados en graficación por computadora, estas se conocen con el nombre genérico de Unidad de Procesamiento Gráfico (“GPU” por sus siglas en inglés) y están optimizadas para este efecto.

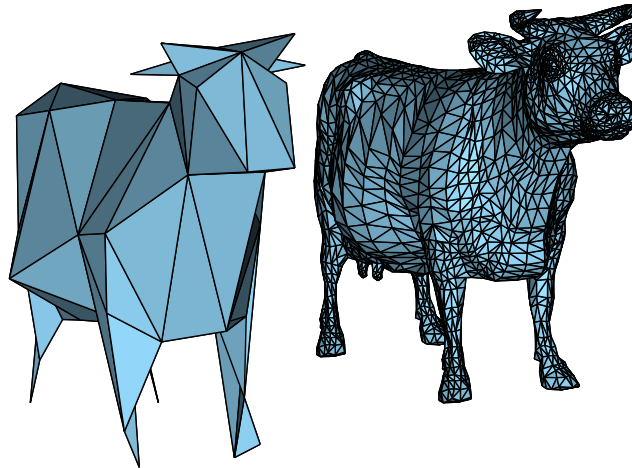


Figura 3.1: Aumentando el número de triángulos da la ilusión de continuidad

Las GPUs cuentan normalmente con lo que en inglés se conoce como *pipelining*. La ejecución de una instrucción en un procesador consta de varias etapas, cada etapa se realiza en un ciclo del reloj. Esto permite que se empiece a ejecutar una instrucción cuando la instrucción inmediata anterior no ha terminado de ejecutarse y a esto se le conoce como *pipelining*.

La velocidad de procesamiento del GPU está acotada por lo tanto por la velocidad en que los datos son enviados a ésta. Un triángulo normalmente se especifica por sus tres vértices. Si en cambio tenemos un conjunto de triángulos ordenados  $\tau_1, \dots, \tau_n$  de manera tal que dos triángulos consecutivos comparten una arista, una vez especificado el primer triángulo los siguientes triángulos se pueden especificar con un solo vértice (y un bit de dirección) acortando así la cantidad de datos que se necesita enviar al GPU. Estas sucesiones de triángulos tales que dos consecutivos comparten una arista se conocen como *tiras de triángulos* (“*triangle strips*” en inglés).

Los triángulos se encuentran normalmente en  $\mathbb{R}^3$  por lo que las tiras de triángulos sirven para graficar superficies en el espacio. La biblioteca para graficación por computadora OpenGL cuenta con una función para dibujar tiras de triángulos. La convención usada por OpenGL es que los triángulos van alternando de izquierda a derecha, es decir no hay tres triángulos consecutivos que compartan un vértice, usando esta convención se especifica una tira de triángulos como sucesión de puntos donde el  $i$ -ésimo triángulo en la tira está especificado por los  $i, i + 1$  y  $i + 2$  ésimos puntos en la sucesión (ver Figura 3.2).

Una *mall*a de triángulos es un conjunto de triángulos en  $\mathbb{R}^3$  tales que los triángulos no

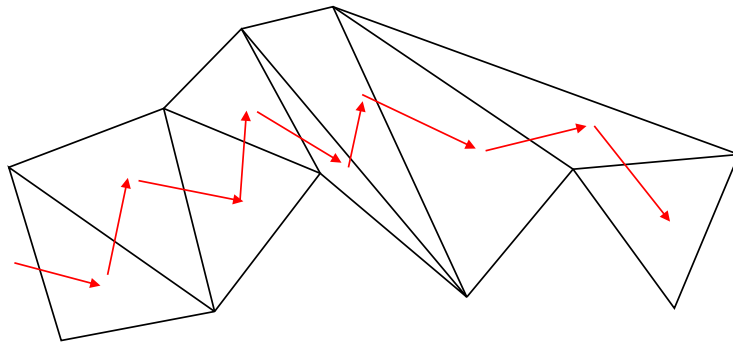


Figura 3.2: Tira de triángulos con la convención de OpenGL.

se intersectan en su interior. Las mallas de triángulos se usan para graficar objetos tridimensionales y es por lo tanto deseable particionar estas mallas en el menor número de tiras de triángulos posible, este problema sin embargo es *NP*-completo [EMX02].

## 3.2. Triangulaciones Hamiltonianas

La discusión anterior sobre tiras de triángulos motivó el estudio de triangulaciones Hamiltonianas de diversos objetos geométricos.

En particular en [AHMS96], se estudiaron triangulaciones Hamiltonianas de conjuntos de puntos, polígonos y polígonos con hoyos en el plano. Dada la convención de OpenGL también se estudiaron triangulaciones Hamiltonianas donde además los triángulos alternan de izquierda a derecha. Estas triangulaciones se conocen como triangulaciones secuenciales.

En particular:

- Mostraron que todo conjunto de puntos en el plano admite una triangulación Hamiltoniana y dieron dos algoritmos de tiempo  $O(n \log n)$  para encontrarla.
- Exhibieron conjuntos de puntos en el plano que no admiten una triangulación secuencial y dieron un algoritmo para determinar si un conjunto de puntos en el plano tiene una de estas triangulaciones.
- Dieron un algoritmo para determinar si un polígono simple tiene una triangulación Hamiltoniana y mostraron que este problema (de decisión) para polígonos con hoyos es *NP*-completo.

A continuación detallamos los dos algoritmos mostrados en [AHMS96] para encontrar triangulaciones Hamiltonianas de conjuntos de puntos en el plano.



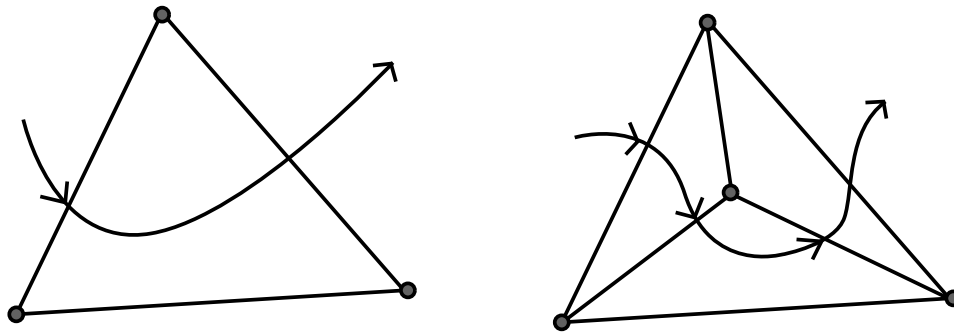


Figura 3.3: Extendiendo una trayectoria Hamiltoniana al agregar un punto interior.

### 3.2.1. Algoritmo de inserción

El algoritmo de Inserción se basa en la siguiente observación:

**Teorema 11.** *Sea  $S$  un conjunto finito de puntos en el plano y  $x$  un punto interior de  $S$ . Si  $S \setminus \{x\}$  admite una triangulación Hamiltoniana entonces todo  $S$  admite una triangulación Hamiltoniana.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}$  una triangulación Hamiltoniana de  $S \setminus \{x\}$ . Observamos que  $x$  se encuentra al interior de un solo triángulo  $\tau$  de  $\mathcal{T}$ . Supongamos que los vértices de  $\tau$  son  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  entonces al agregar las aristas  $\overline{xp_1}$ ,  $\overline{xp_2}$  y  $\overline{xp_3}$  habremos triangulado a todo  $S$ . En esta nueva triangulación  $\mathcal{T}'$ ,  $\tau$  es reemplazado por 3 triángulos mutuamente adyacentes en la gráfica dual de  $\mathcal{T}'$  y por tanto el ciclo Hamiltoniano de  $D(\mathcal{T})$  se puede extender a  $D(\mathcal{T}')$  (Ver Figura 3.3).  $\square$

El algoritmo es: primero se quitan todos los puntos interiores de  $S$ , se triangulan Hamiltonianamente los vértices de  $\text{CH}(S)$ ; después se regresan uno a uno los vértices  $S$  como en la prueba del Teorema 11.

Basta mostrar pues, que todo conjunto finito de puntos en posición convexa se puede triangular Hamiltonianamente, para esto supongamos que  $S$  está en posición convexa y sean  $p_1, \dots, p_n$  sus elementos en orden de las manecillas del reloj. Para cada  $1 < i < n$ , sea  $\tau_i$  el triángulo formado por los vértices  $p_1, p_i$  y  $p_{i+1}$ . Observamos que estos triángulos forman una triangulación Hamiltoniana de  $S$ .

Calcular el casquete convexo de  $S$  se puede hacer en tiempo  $O(n \log n)$ . Existen varios algoritmos para este propósito, el más conocido probablemente sea el Barrido de Graham [Gra72] que mencionaremos más adelante.

Una vez calculado  $\text{CH}(S)$ , triangular y encontrar el ciclo Hamiltoniano en la gráfica dual de solo estos vértices lleva tiempo  $O(n)$ . Sólo resta regresar los vértices interiores como en la prueba del Teorema 11.

Ahora bien dependiendo de el orden en que se inserten los vértices la complejidad puede subir hasta  $\Omega(n^2)$ . Al insertar un vértice  $x$  en un triángulo  $\tau$ , éste se divide en 3 triángulos y hay que determinar en cual de estos 3 triángulos se encuentran los vértices interiores a  $\tau$  que no han sido agregados, esto se hace en  $O(1)$  por vértice interior, supongamos que estos puntos se encuentran todos en uno de estos 3 triángulos y que esto sucede cada vez que se insertan vértices. Si originalmente había  $m$  vértices interiores a  $\tau$ , se realizarán  $m - 1$  operaciones de búsqueda al insertar el primer vértice  $m - 2$  al insertar el segundo etc. Dando como complejidad total  $\Omega(m^2)$  y como en principio podría haber  $\Omega(n)$  vértices interiores a  $\tau$  un orden malo de inserción podría dar una complejidad total final de  $\Omega(n^2)$ .

Para evitar esta situación necesitamos encontrar un vértice que al agregarlo reparta los puntos de manera más o menos equitativa entre los tres triángulos generados. Se puede encontrar en tiempo lineal un vértice (separador) tal que al agregarlo en cada triángulo no deje más de  $2m/3$  puntos [AEG87]. Esto da un árbol de recursión de altura logarítmica y en cada nivel calcular las particiones lleva tiempo  $O(n)$  por lo que finalmente escogiendo un vértice separador se garantiza una complejidad de  $O(n \log n)$ . Lamentablemente el algoritmo para encontrar este vértice separador es difícil de implementar.

Por tanto en [AHMS96] optaron por implementar una variante del algoritmo descrito anteriormente, donde este vértice se escoge aleatoriamente y muestran que el tiempo de ejecución esperado es  $O(n \log n)$ .

### 3.2.2. Algoritmo de la cebolla

El segundo algoritmo presentado en [AHMS96] triangula la región entre capas convexas consecutivas del conjunto de puntos, por esto lo llaman el algoritmo de la cebolla.

Definimos la primera capa convexa  $C_1$  de  $S$  como el conjunto de vértices de  $S$  en el casco convexo, definimos también  $S_1 := S \setminus C_1$ . Inductivamente definimos la  $i$ -ésima capa convexa  $C_i$  como los vértices en el casco convexo de  $S_{i-1}$  (siempre y cuando  $S_{i-1}$  no sea vacío) y a  $S_i := S \setminus C_i$  (ver Figura 3.4).

Esta partición de los vértices de  $S$  en capas convexas se puede encontrar en tiempo  $O(n \log n)$  [Cha85].

Muestran después que las regiones entre distintas capas se pueden triangular en tiempo lineal de manera de que la triangulación final sea Hamiltoniana, dando una complejidad total de  $O(n \log n)$ .

### 3.2.3. Algoritmo de triangulación de Graham

En [FMU05] Urrutia y el autor dimos un algoritmo de tiempo  $O(n \log n)$  para calcular una triangulación Hamiltoniana de un conjunto de puntos en el plano. Nuestro algoritmo tiene el mismo tiempo asintótico que los dos algoritmos mostrados en [AHMS96] y de los tres es el más fácil de implementar.

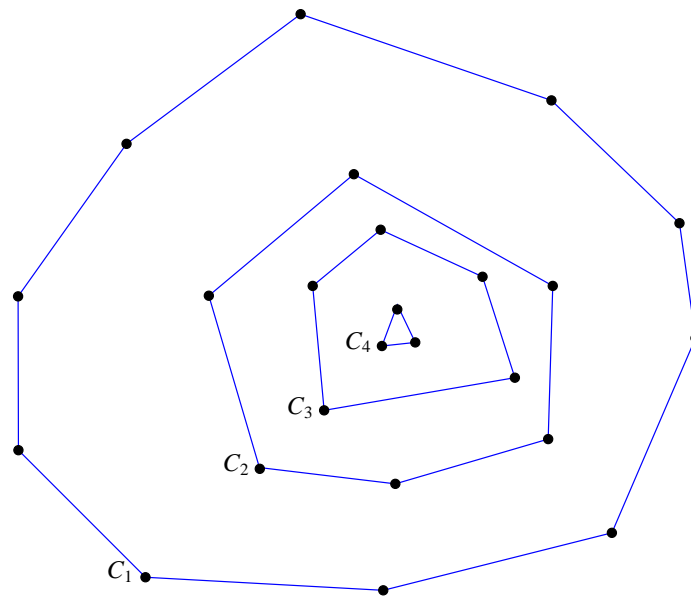


Figura 3.4: Capas convexas de un conjunto de puntos.

Nuestro algoritmo se basa en un algoritmo mencionado anteriormente usado para encontrar cascos convexos de conjuntos de puntos en el plano, llamado “Barrido de Graham”.

Describimos a continuación el Barrido de Graham y después mostramos como modificarlo para encontrar la triangulación Hamiltoniana.

### Barrido de Graham

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y sea  $p$  el elemento de  $S$  con menor coordenada  $y$ , en caso de empate lo rompemos escogiendo el de menor coordenada  $x$ . Este punto se puede encontrar en tiempo  $O(n)$ .

Ordenamos los elementos de  $S \setminus \{x\} = \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$  en orden contrario a las manecillas del reloj por ángulo con respecto a  $x$ .

Usamos una pila  $P$ , en ella guardaremos los elementos de  $S$  que son candidatos a estar en  $\text{CH}(S)$ . Empezamos por lo tanto agregando a  $x$ ,  $p_1$  y a  $p_2$  a la pila.

Vamos visitando los vértices de  $S \setminus \{x\}$ . Al visitar  $p_i$  vemos que elementos de  $P$  ya no pueden formar parte de  $\text{CH}(S)$ . Esto lo hacemos viendo los dos elementos  $p$  y  $q$  de arriba de la pila y si el ángulo  $\angle p_i p q$  es menor a  $\pi$ ,  $p$  no puede estar en  $\text{CH}(S)$ . Seguimos sacando elementos de  $P$  hasta que finalmente en la pila están los vértices del casco convexo de  $\{x, p_1, \dots, p_i\}$  (Ver Figura 3.5).

Ordenar los vértices por ángulo alrededor de  $p$  se hace en tiempo  $O(n \log n)$  y dado que un vértice entra y se saca a lo más una vez de la pila se hacen  $O(n)$  extracciones en total.

El tiempo de ejecución del Barrido de Graham es por lo tanto  $O(n \log n)$ .

### Modificación al barrido de Graham.

Sólo basta una pequeña modificación al Barrido de Graham para poder obtener al final de su ejecución una triangulación Hamiltoniana del conjunto de puntos.

Codificaremos las trayectorias Hamiltonianas como una lista de puntos donde cada elemento tiene además asociado un bit de dirección.

En un momento dado de la ejecución de el Barrido Graham sea  $p$  un elemento cualquiera de la pila  $P$  y  $q$  el elemento que le precede en  $P$ .

Consideremos el triángulo  $\tau$  formado por  $x$ ,  $p$  y  $q$ . Sea  $S_p = S \cap \tau$ , tendremos en todo momento 3 trayectorias Hamiltonianas (con la representación mencionada anteriormente) de  $S_p$  asociadas a  $p$ : una trayectoria que entra por  $\overline{xp}$  y sale por  $\overline{xq}$  que denotamos como  $l_p$ ; otra trayectoria que entra por  $\overline{qp}$  y sale por  $\overline{xq}$  que denotamos con  $l'_p$  y finalmente una trayectoria que entra por  $\overline{xp}$  y sale por  $\overline{qp}$  que denotamos con  $l''_p$  (ver Figura 3.6).

Supongamos que  $p$  es elemento a la cabeza de la pila,  $q$  le precede y visitamos el siguiente elemento  $r$  en la ordenación.

Como en este momento el triángulo formado por  $r$ ,  $x$  y el elemento a la cabeza de la pila es vacío podemos construir a  $l_r, l'_r$  y  $l''_r$  en tiempo constante.

Al ir sacando elementos de la pila tenemos que actualizar  $l_r, l'_r$  y  $l''_r$ . Supongamos que sacamos a  $p$  de la pila. Tenemos que  $q$  está ahora a la cabeza de la pila, sea  $\tau$  el triángulo formado por  $x$ ,  $r$  y  $q$  e igual que antes  $S_r = \tau \cap S$ .

Una trayectoria Hamiltoniana que entra por  $xr$  y sale por  $xq$  está dada por la trayectoria  $l''_r$  (que entra por  $\overline{xr}$  y sale por  $\overline{pr}$ ) seguida del triángulo  $\Delta_{pqr}$  y finalmente siguiendo la trayectoria  $l'_q$ . Dado que estas trayectorias están representadas con listas podemos actualizar a  $l_r$  en tiempo constante y de manera análoga a  $l'_r$  y  $l''_r$  (ver Figura 3.7).

Al terminar el Barrido de Graham tendremos los elementos de  $\text{CH}(S)$  guardados en la pila. Para obtener la triangulación Hamiltoniana de  $S$  empezamos con una lista vacía  $l$  y sacamos en orden cada elemento  $p$  de la pila, actualizando  $l := l \circ l_p$ . Al final  $l$  será la representación en lista de una triangulación Hamiltoniana de  $S$ .

## 3.3. Tetraedralizaciones Hamiltonianas

Desde el punto de vista práctico las tetraedralizaciones Hamiltonianas de conjuntos de puntos en  $\mathbb{R}^3$  son deseables por la misma razón que las triangulaciones Hamiltonianas en  $\mathbb{R}^2$ . Porque de la misma manera una tetraedralización Hamiltoniana necesita menos memoria para ser representada que una no Hamiltoniana y en consecuencia puede ser procesada más rápidamente.

Sin embargo en [AHMS96] conjeturaron que encontrar una triangulación Hamiltoniana de un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$  es un problema  $NP$ -completo.

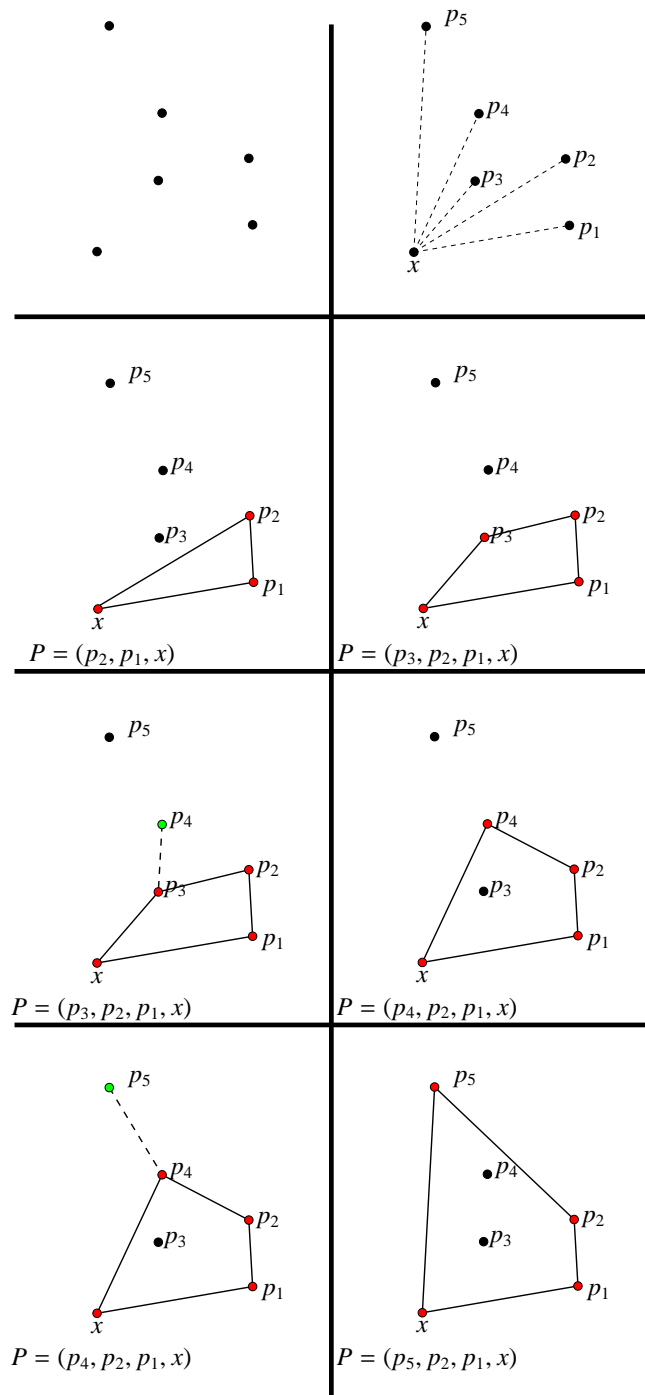


Figura 3.5: Ejecución del Barrido de Graham.

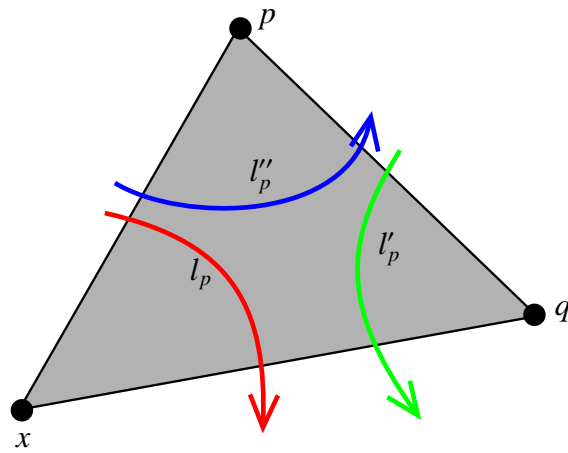


Figura 3.6: Listas asociadas a un punto  $p$  de  $S$ .

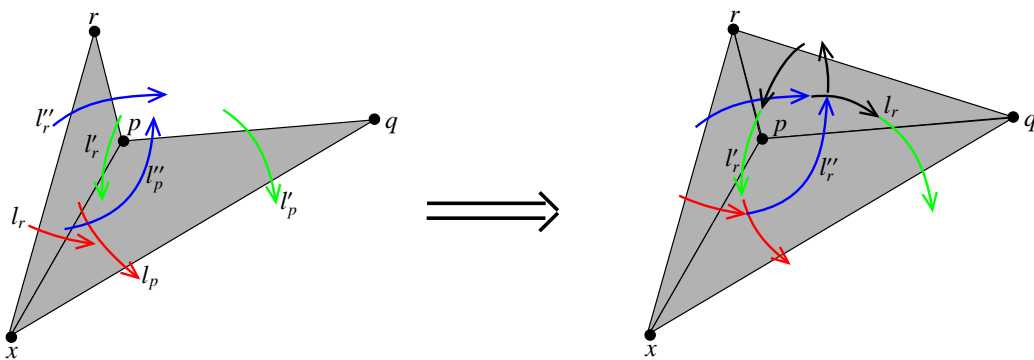


Figura 3.7: Actualizando las listas  $l_r$ ,  $l'_r$  y  $l''_r$ .

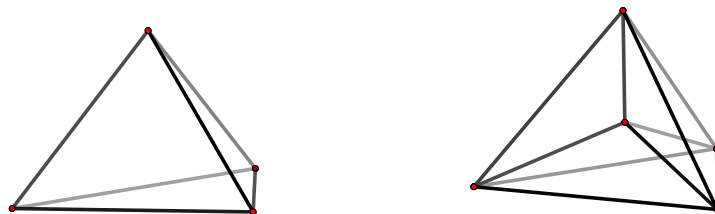


Figura 3.8: Agregando puntos interiores en  $\mathbb{R}^3$ .

De ser cierta esta conjetura, incluso en el caso en que todo conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$  admita una tetraedralización Hamiltoniana, no será posible calcularla de manera eficiente (a menos que  $P = NP$ ).

En [EFMU07] dimos un algoritmo que dado un conjunto de puntos en el espacio, agrega puntos al conjunto original de manera que podemos calcular eficientemente una tetraedralización Hamiltoniana del conjunto aumentado. En esta sección describiremos este algoritmo.

Damos primero un bosquejo del algoritmo y después analizamos cuestiones de implementación y complejidad.

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$ . Hacemos la misma observación que en el plano:

**Teorema 12.** *Sea  $S$  un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^3$  y  $x$  un punto interior de  $S$ . Si  $S \setminus \{x\}$  admite una tetraedralización Hamiltoniana entonces todo  $S$  admite una tetraedralización Hamiltoniana.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}$  una tetraedralización Hamiltoniana de  $S \setminus \{x\}$ . Observamos que  $x$  se encuentra al interior de un solo tetraedro  $\tau$  de  $\mathcal{T}$ . Supongamos que los vértices de  $\tau$  son  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  entonces al remplazar  $\tau$  de  $\mathcal{T}$  por los tetraedros formados por cada cara de  $\tau$  y  $x$  habremos tetraedralizado a todo  $S$ . En esta nueva tetraedralización  $\mathcal{T}'$ ,  $\tau$  es reemplazado por 4 tetraedros mutuamente adyacentes en la gráfica dual de  $\mathcal{T}'$  y por tanto el ciclo Hamiltoniano de  $D(\mathcal{T})$  se puede extender a  $D(\mathcal{T}')$  (ver Figura 3.8).  $\square$

El Teorema 12 nos permite quitar todos los puntos al interior de  $S$  y trabajar sólo con los puntos del casquete convexo. Suponemos de ahora en adelante que  $S$  no tiene puntos interiores.

En  $\mathbb{R}^3$  podemos además quitar los puntos del casco convexo de grado tres (vértices adyacentes a solo tres vértices del casco convexo).

**Teorema 13.** *Sea  $S$  un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^3$  y  $x$  un vértice del casco convexo de  $S$  de grado 3. Si  $S \setminus \{x\}$  admite una tetraedralización Hamiltoniana entonces todo  $S$  admite una tetraedralización Hamiltoniana.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}$  una tetraedralización Hamiltoniana de  $S \setminus \{x\}$ . Los tres vértices adyacentes a  $x$  en  $\text{CH}(S)$  forman una cara  $F$  de  $\text{CH}(S \setminus \{x\})$ . Sea  $\tau_1$  el único tetraedro de  $\mathcal{T}$  que contiene a  $F$  como cara y  $\tau_2$  el tetraedro formado por  $x$  y  $F$ . Observe que  $\tau_1 \cup \tau_2$  es convexo. Reemplazamos  $\tau_2$  en  $\mathcal{T}$  por los tetraedros formados por  $x$  y las caras de  $\tau_2$  (distintas a  $F$ ). Esto da como resultado una tetraedralización  $\mathcal{T}'$  de  $S$  y dado que los tres tetraedros añadidos comparten dos a dos una cara, el ciclo Hamiltoniano de  $D(\mathcal{T})$  se puede extender a  $D(\mathcal{T}')$ .  $\square$

Supondremos por lo tanto que hemos quitado también a todos los vértices de grado 3 de  $S$ .

Una vez que  $S$  no contiene vértices interiores ni de grado 3, agregamos vértices al interior de  $\text{Conv}(S)$ , construyendo al mismo tiempo una tetraedralización del conjunto de puntos hasta ese momento; la tetraedralización final será Hamiltoniana. Añadimos los vértices al interior de  $\text{Conv}(S)$  para preservar el casco convexo original y por que de otra forma por los teoremas anteriores basta con agregar un tetraedro que contenga todo  $S$  para tener un conjunto de puntos que admita una tetraedralización Hamiltoniana.

Añadimos primero un punto  $x$  al interior de  $\text{Conv}(S)$ . El conjunto de tetraedros formados por  $x$  y una cara de  $\text{CH}(S)$  es una tetraedralización  $\mathcal{T}$  de  $S \cup \{x\}$ . Esta tetraedralización tiene una estructura muy particular pues es isomorfa a lo que llamamos la gráfica dual de  $\text{CH}(S)$ , esta gráfica tiene como vértices las caras de  $\text{CH}(S)$  y dos de sus vértices son adyacentes si sus caras correspondientes comparten una arista, la denotamos como  $D_S$ .

Dado que estamos suponiendo que  $S$  está en posición general todas las caras de  $\text{CH}(S)$  son triángulos y por tanto  $D_S$  es un gráfica cúbica, como además está inmersa en la esfera es una gráfica plana y se puede mostrar además que  $D_S$  es una gráfica 3-conexa. En resumen  $D_S$  es una gráfica 3-conexa cúbica y plana (que abreviamos como 3CCP). Lo converso también es cierto es decir dada una gráfica 3-conexa, cúbica y plana  $G$  existe un conjunto de puntos  $S'$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $D_{S'}$  es isomorfa a  $G$  [Ste92].

Un teorema de Julius Petersen [Pet91] establece que toda gráfica cúbica plana y 2-conexa (por aristas) tiene un emparejamiento perfecto. Como  $D_S$  es 3-conexa por vértices es 2-conexa por aristas, por lo que el Teorema de Petersen nos garantiza que  $D_S$  tiene un emparejamiento perfecto  $M$ . Si quitamos de  $D_S$  todas las aristas de  $M$  obtenemos una gráfica (que denotamos como  $D_S \setminus M$ ) donde todos los vértices tienen grado 2.  $D_S \setminus M$  por tanto es una unión de ciclos disjuntos y dado que  $D(\mathcal{T})$  isomorfa a  $D_S$  esta partición induce una partición en ciclos de los vértices de  $D(\mathcal{T})$ .

Una vez que tengamos esta partición de  $V(D_S)$  en ciclos iremos uniendo ciclos con puntos de Steiner hasta que la partición conste de un solo ciclo este ciclo será por tanto un ciclo Hamiltoniano en la gráfica dual de la tetraedralización correspondiente.



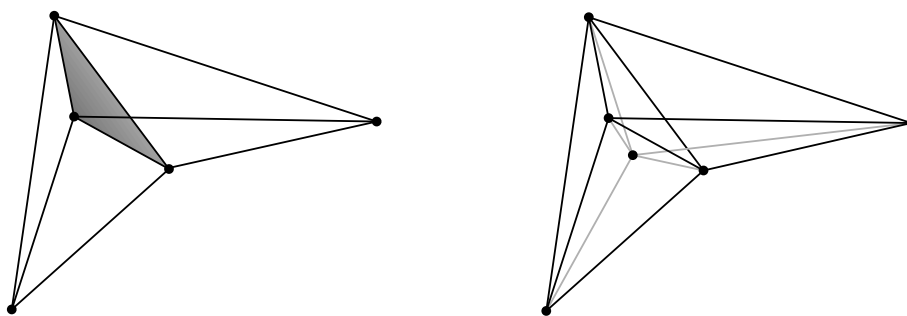


Figura 3.9: Añadiendo un punto extra para unir ciclos.

### 3.3.1. Uniendo ciclos

Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos ciclos disjuntos en nuestra partición cíclica de  $V(D(\mathcal{T}))$  tales que existe una arista  $e$  de  $D_S$  con uno de sus vértices en  $C_1$  y el otro en  $C_2$ , sean  $\tau_1$  y  $\tau_2$  los tetraedros correspondientes en  $\mathcal{T}$ .

Ahora bien dado que  $\tau_1$  y  $\tau_2$  son adyacentes en  $D(\mathcal{T})$  estos comparten una cara  $F$ . Sea  $q$  el vértice de  $\tau_2$  opuesto  $F$ .

La operación para unir  $\tau_1$  y  $\tau_2$  consiste en agregar un punto  $p$  al interior de  $\tau_1$  de manera que el segmento de recta que una a  $p$  y  $q$  interseque  $F$ . Una vez hecho esto se retiran a  $\tau_1$  y  $\tau_2$  de la tetraedralización y se reemplazan por los tetraedros formados al tomar una cara (excepto  $F$ ) de  $\tau_1 \cup \tau_2$  como base y a  $p$  como ápice (ver Figura 3.9). No importando como entraban originalmente los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  a  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , después de esta operación existe un ciclo  $C$  en la gráfica dual de la nueva tetraedralización que pasa por todos los vértices de  $C_1$  y  $C_2$  así como por los vértices que corresponden a los nuevos tetraedros que hemos agregado (ver Figura 3.10).

De esta manera en cada paso podemos reducir en uno el número de ciclos en la partición usando exactamente un punto de Steiner. Si la partición original constaba de  $k$  ciclos habremos usado por lo tanto  $k$  vértices extra ( $k - 1$  para unir todos los  $k$  elementos de la partición más el primer vértice que agregamos) para encontrar un conjunto de puntos aumentado  $S'$  y su tetraedralización Hamiltoniana correspondiente.

Una vez que tenemos la tetraedralización Hamiltoniana de  $S'$  regresamos los vértices de grado 3 en  $\text{CH}(S)$  y los vértices interiores de  $S$  (en ese orden).

Dado que originalmente quitamos los vértices de grado 3 en  $\text{CH}(S)$  no hay ciclos de longitud 4 en la partición original. Tenemos por lo tanto que:

**Teorema 14.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$  con  $m$  de ellos en su casco convexo. Añadiendo a lo más  $\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor$  puntos al interior de  $\text{Conv}(S)$  se obtiene un conjunto de puntos que admite una tetraedralización Hamiltoniana.*

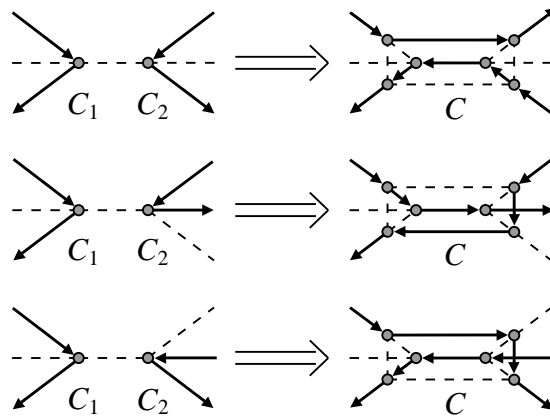


Figura 3.10:  $D_{\mathcal{T}}$  antes y después de añadir el punto de Steiner.

*Demostración.* Por la fórmula de Euler,  $\text{CH}(S)$  tiene  $2m - 4$  caras, después de quitar los vértices de grado 3 tenemos por tanto a lo más  $2m - 4$  caras.

Dado que cada ciclo de la partición consta de al menos 4 vértices la partición cíclica consta de a lo más  $\lfloor \frac{2m-4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor$  elementos.  $\square$

Esto nos da ya un bosquejo del Algoritmo: quitar primero todos los vértices de grado 3 en  $\text{CH}(S)$ , seguidos de los vértices interiores; agregar un punto al interior para generar la partición en ciclos; agregar puntos para unir ciclos hasta que la partición conste de un solo ciclo y finalmente regresar los puntos que quitamos en un principio.

### 3.3.2. Complejidad e implementación del algoritmo

Como antes sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$  con  $m$  de ellos en su casco convexo.

Encontrar el casco convexo de  $S$  lleva tiempo  $O(n \log n)$ . Quitar los vértices interiores toma tiempo  $O(1)$  pues basta con considerar solo el casco convexo que ya hemos calculado y quitar los vértices de grado 3 del cierre convexo se puede hacer en tiempo  $O(m)$  usando una pila donde inicialmente se agregan todos los vértices del casco convexo de grado 3, cuando se saca un elemento de la pila éste también se elimina del casco convexo y se verifica si alguno de sus vecinos disminuye su grado a 3; de ser así éste se agrega a la pila y se sigue el procedimiento hasta que la pila queda vacía y ya no hay vértices de grado 3 en el casco convexo.

La complejidad de encontrar la partición en ciclos es la complejidad de encontrar un emparejamiento perfecto en la gráfica dual del cierre convexo. En general encontrar un emparejamiento perfecto en una gráfica de  $V$  vértices y  $|E|$  aristas se puede hacer en tiempo  $O(|E| \sqrt{|V|})$  [MV80]. Dado que en este caso la gráfica dual del casco convexo tiene  $O(m)$

vértices y es plana, la partición inicial en ciclos se calcula en tiempo  $O(m^{3/2})$  usando este algoritmo.

Una vez que tenemos la partición en ciclos regresamos los vértices de grado 3, este paso lo hacemos antes que en el bosquejo anterior para aprovechar el hecho que la gráfica dual de la tetraedralización actual es plana. Al regresar los puntos de grado 3 ésta seguirá siendo plana y usaremos la planaridad para regresar los vértices interiores de manera eficiente. Regresar los vértices de grado 3 se puede hacer en tiempo  $O(m)$  regresándolos en orden inverso en que fueron quitados. Observamos que al regresar los vértices de grado 3 el número de elementos en la partición no aumenta.

Regresamos ahora los vértices interiores que quitamos dado que la gráfica dual de la tetraedralización es plana podemos encontrar en que tetraedro de esta tetraedralización se encuentra un punto interior en tiempo  $O(\log n)$  [Kir83]. Una vez que sabemos en que tetraedro se encuentra cada punto interior procedemos a insertarlos como en el Teorema 12, observamos que como en el caso del plano que la complejidad puede aumentar considerablemente si el orden en que se insertan los puntos no es el adecuado y como en el caso del plano se puede encontrar siempre un vértice separador en tiempo lineal que garantiza que al agregarlo ninguno de los cuatro tetraedros formados tenga más de  $3/4$  partes de los puntos. Esto permite reinsertar los puntos interiores en una complejidad total de  $O(n \log n)$ . Si representamos a los ciclos como listas doblemente ligadas podemos hacer la unión de dos ciclos en tiempo constante por lo que la unión de toda la partición en un solo ciclo se puede hacer en tiempo total de  $O(m)$ .

Resumiendo obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 15.** *Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  con  $m$  de ellos en su casco convexo. Agregando a lo más  $\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor$  puntos al interior de  $\text{Conv}(S)$  se puede obtener una tetraedralización Hamiltoniana del conjunto aumentado en tiempo  $O(m^{3/2}) + O(n \log n)$ .*

*Demostración.* □

### 3.4. Gráficas 3-conexas cúbicas planas

Combinatoriamente hablando las gráficas 3-conexas planas (3CCP) sólo pueden ser inmersas de una manera en el plano, es decir que sus caras no dependen de la manera en que sean dibujadas [Whi32].

Esto en particular implica que cada cara  $F$  de  $D_S$  corresponde a todas las caras de  $\text{CH}(S)$  que comparten un mismo vértice  $p_F$  de  $\text{CH}(S)$ . De la misma manera dado un vértice  $p$  de  $\text{CH}(S)$  todos las caras que contienen a  $p$  como vértice inducen una cara  $F_p$  en  $D_S$ .

Sea  $S$  un conjunto finito de puntos en posición convexa en  $\mathbb{R}^3$  y  $x$  un elemento de  $S$ . Definimos  $\mathcal{T}_x$  como la tetraedralización de  $S$  dada por el conjunto de todos tetraedros formados al tomar una cara  $\text{CH}(S)$  y  $x$ . Este tipo de tetraedralizaciones se llaman tirantes

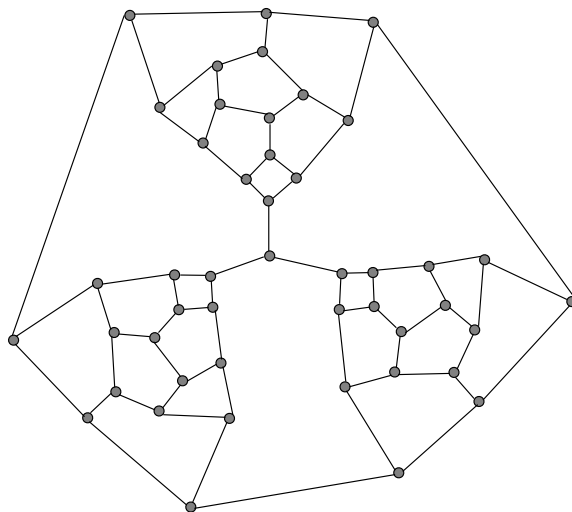


Figura 3.11: Ejemplo de una gráfica 3CCP sin ciclo Hamiltoniano dado por William Tutte.

(“pulling” en inglés). Por la discusión anterior la gráfica dual de  $\mathcal{T}_x$  es isomorfa a  $D_5$  menos todos los vértices de  $F_x$ .

Si  $D_5$  contiene un ciclo Hamiltoniano, podemos aprovechar esta propiedad de las tetraedralizaciones tirantes para encontrar un vértice  $x$  de  $\text{CH}(S)$  tal que  $\mathcal{T}_x$  es una tetraedralización Hamiltoniana.

**Teorema 16.** *Sea  $G$  una gráfica 3CCP con un ciclo Hamiltoniano. Entonces existe una cara  $F$  de  $G$  tal que  $G \setminus F$  tiene una trayectoria Hamiltoniana.*

*Demostración.* Sea  $C$  un ciclo Hamiltoniano de  $G$ . Definimos la distancia de dos vértices de  $G$  como la longitud de la trayectoria más corta contenida en  $C$  que los une. De entre todos los pares de vértices de  $G$  que están unidos por una arista que no está en  $C$  escogemos el par  $(x, y)$  a distancia mínima, la arista  $e$  que los une junto con la trayectoria contenida en  $C$  (de longitud menor) que los une forma una cara  $F$  de  $G$ , pues de otra manera habría un par a distancia menor que  $(x, y)$ . Ahora bien la otra trayectoria que una a  $x$  y a  $y$  es una trayectoria Hamiltoniana en  $G \setminus F$ .  $\square$

Durante mucho tiempo se pensó de hecho que toda las gráficas 3CCP tenían un ciclo Hamiltoniano [Tai80]. Hasta que en 1946 William Tutte [Tut46] dio a conocer la gráfica 3CCP de 46 vértices sin ciclos Hamiltonianas mostrada en la Figura 3.11. McKay y Holton sin embargo mostraron en [HM88] que todas las gráficas 3CCP con a lo más 36 tienen un ciclo Hamiltoniano y exhibieron además una gráfica 3CCP de 38 vértices sin ciclos Hamiltonianos.

Por la fórmula de Euler una gráfica 3CCP de  $n$  vértices tiene  $\frac{n+4}{2}$  caras. Usando estas observaciones y el Teorema 16 tenemos que:

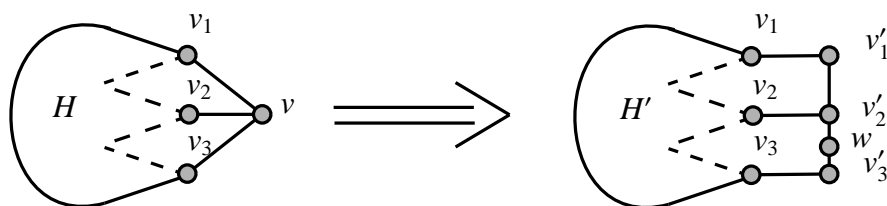


Figura 3.12: Reemplazando un vértice de una gráfica 3CCP con otra gráfica 3CCP.

**Corolario 3.** *Todo conjunto de a lo más 20 puntos en  $\mathbb{R}^3$  admite una tetraedralización Hamiltoniana.*

*Demostración.*

□

Aunque en principio es una simple observación el Teorema 16 da un vínculo entre las gráficas 3CCP Hamiltonianas y conjuntos de puntos en  $\mathbb{R}^3$  con una tetraedralización tirante Hamiltoniana. Se sabe [ABHM00], por ejemplo que toda gráfica 3CCP de a lo más 176 vértices con la propiedad de que sus caras tienen a lo más 6 vértices tiene un ciclo Hamiltoniano. Esto implica que todo conjunto de a lo más 90 puntos en  $\mathbb{R}^3$  tal que todo vértice del casco convexo es de grado a lo más 6 admite una tetraedralización Hamiltoniana.

Barnette conjetura por ejemplo que toda gráfica 3CCP bipartita tiene un ciclo Hamiltoniano (Conjetura 5 en [bar69]). Esto implicaría que todo conjunto finito  $S$  de puntos en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $D_S$  es bipartita tendría una tetraedralización Hamiltoniana.

### 3.4.1. Inflando vértices

Presentaremos una operación que nos permite reemplazar cualquier vértice de una gráfica 3CCP por otra gráfica 3CCP de manera que la gráfica resultante de esta operación será también una gráfica 3CCP.

Usaremos esta operación para crear gráficas 3CCP tales que no sólo no tienen un ciclo Hamiltoniano si no que además la gráfica que resulta de quitarles cualquier cara no tiene una trayectoria Hamiltoniana.

Sean  $G$  y  $H$  gráficas 3CCP y  $v$  un vértice de  $H$ . Suponemos además que  $H$  está inmersa en el plano de manera de que  $v$  se encuentra en la cara exterior.

Sea  $N_H(v) = \{v_1, v_2, v_3\}$  el conjunto de vecinos de  $v$  en  $H$ . Quitamos a  $v$  de  $H$  ponemos en su lugar un camino de cuatro vértices ( $v'_1, v'_2, w, v'_3$ ) unimos a  $v_i$  con  $v'_i$  y llamamos a la gráfica resultante  $H'$ .  $H'$  ya no es cúbica pero la podemos usar para reemplazar cualquier vértice  $u$  de  $G$ : Sea  $N_G(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$  el conjunto de vecinos de  $u$  en  $G$  en un orden determinado; quitamos a  $u$  de  $G$  y lo reemplazamos con  $H'$ ; unimos a  $v'_1$  con  $u'_1$  a  $v'_3$  con  $u'_3$  y a  $w$  con  $v_2$ . La gráfica resultante  $G'$  es una gráfica 3CCP (ver Figura 3.12).

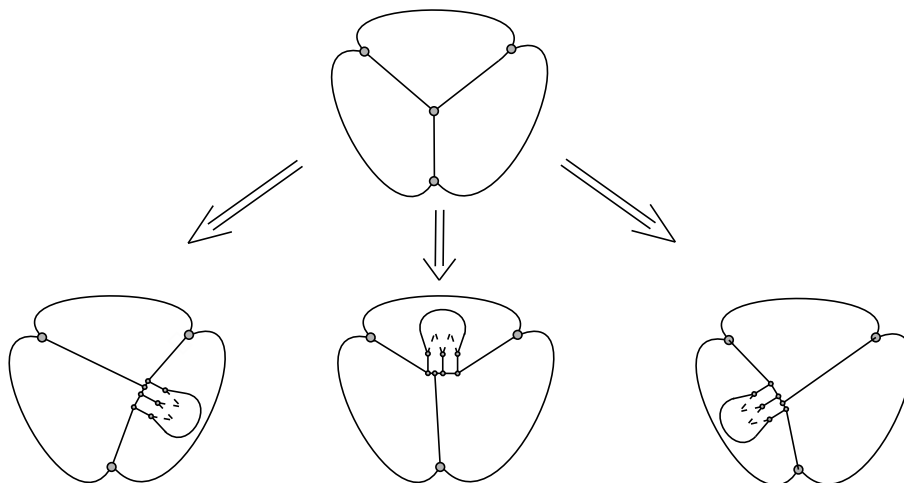


Figura 3.13: Tres maneras distintas de reemplazar un vértice.

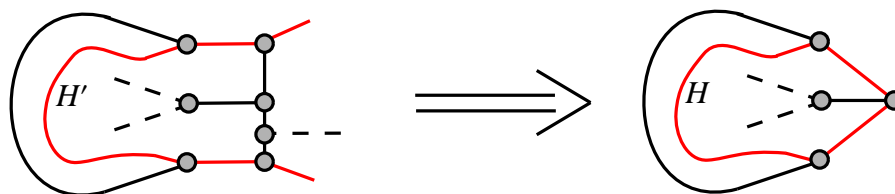


Figura 3.14: Construyendo un ciclo Hamiltoniano en  $H$  a partir de una trayectoria Hamiltoniana de  $G$  que entra y sale de  $H'$

Cambiando el orden de los vértices de  $N_G(u)$  podemos poner a  $H$  en una cara en particular de  $G'$  (ver Figura 3.4.1).

Usamos esta propiedad para poner una gráfica 3-conexa cúbica y plana  $H$  sin ciclos Hamiltonianos en cada cara de  $K_4$  (que también es una gráfica 3CCP), denotamos con  $G$  a esta gráfica.

Sea  $F$  cualquier cara de  $G$  y supongamos que al quitarla de  $G$  existe una trayectoria Hamiltoniana en  $G \setminus F$ . Como hay 4 copias de  $H'$  en  $G$  al menos 3 de ellas no contienen a  $F$ . De estas una al menos no contiene un extremo de la trayectoria Hamiltoniana. Es decir la trayectoria entra y sale de esta copia de  $H'$  y pasa por todos los vértices. Esto es una contradicción pues a partir de esta trayectoria podemos construir un ciclo Hamiltoniano en  $H$  (ver Figura 3.14).

Si usamos como  $H$  a la gráfica 3CCP sin ciclos Hamiltonianos de 38 vértices tenemos que  $G$  tiene en total 164 vértices y por lo tanto existe un conjunto de  $(164 + 4)/2 = 84$

puntos en posición convexa tal que ninguna tetraedralización tirante es Hamiltoniana. Un conjunto con esta propiedad de 92 puntos se dio a conocer previamente en [CDW05]. El mostrado aquí es el conjunto más pequeño con esta propiedad conocido a la fecha.

Si aplicamos esta técnica a gráficas 3CCP arbitrariamente grandes podemos construir gráficas 3CCP de  $n$  vértices, tales que toda partición en ciclos de sus vértices tiene al menos  $\frac{n}{41}$  ciclos.

Como corolario esto muestra que existen instancias para las cuales nuestro algoritmo añadirá  $\Omega(n)$  puntos extra.

### 3.5. Problemas abiertos

El problema de encontrar una tetraedralización Hamiltoniana en todo conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^3$  sigue abierto tanto en el sentido existencial como en el algorítmico. Al momento de la escritura de este documento no se cuenta con más avances que los aquí mostrados.

En lo referente a las aplicaciones prácticas, la tarea más importante sería el determinar si en efecto el problema de la tetraedralización Hamiltoniana es un problema *NP-Duro*.

En caso de ser así una línea de investigación sería dar algoritmos de aproximación es decir: encontrar un algoritmo de tiempo polinomial que dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^3$  encuentre una tetraedralización y una partición de su gráfica dual en pocos ciclos.

Otra dirección es la de minimizar el número de puntos que hay que agregar a  $S$  para encontrar una tetraedralización Hamiltoniana.

Dimos un algoritmo de tiempo polinomial que agrega  $O(n)$  puntos para encontrar una tetraedralización Hamiltoniana. ¿Se podrá con  $o(n)$  puntos?

Nosotros conjeturamos que no:

**Conjetura 6.** *Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}$ . El problema de añadir  $o(n)$  puntos para encontrar una tetraedralización Hamiltoniana del conjunto aumentado es NP-Completo.*

# Capítulo 4

## Gráfica de Fichas

En este capítulo definimos la Gráfica de Fichas que es de hecho una gráfica de giros construida a partir de las configuraciones de fichas puestas en los vértices de una gráfica inicial.

Vemos como a lo largo de la tesis la Teoría de Gráficas ha desplazado a la Geometría Combinatoria en importancia. Hasta que finalmente en este último Capítulo los problemas que se tratan son sólo de Teoría de Gráficas.

Sea  $G$  una gráfica de  $n$  vértices, definimos a  $F_k(G)$  como la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los subconjuntos de  $k$  elementos de  $V(G)$ . Dos vértices  $A$  y  $B$  son adyacentes en  $F_k(G)$ , si su diferencia simétrica  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  es un par de vértices  $\{a, b\}$  tales que  $a \in A$ ,  $b \in B$  y  $a$  es adyacente a  $b$  en  $G$ .

Esta definición se puede interpretar de manera intuitiva como: primero ponemos  $k$  “fichas” indistinguibles unas de otras en los vértices de  $G$  (a lo más una ficha por vértice); después construimos una gráfica cuyo conjunto de vértices son todas la configuraciones posibles de estas  $k$  fichas; finalmente hacemos dos configuraciones adyacentes si se puede pasar de una configuración a la otra deslizando una ficha a lo largo de una arista desde su posición actual a un vértice desocupado.

Por esta interpretación llamamos a  $F_k(G)$  la gráfica de  $k$  fichas de  $G$ .

En este capítulo presentaremos la gráfica de fichas y probaremos algunas de sus propiedades.

### 4.1. Trabajo previo

La idea de poner fichas (guijarros, monedas, etc.) en los vértices de una gráfica y después moverlas con reglas preestablecidas es usada para modelar muchos problemas en varias áreas de Matemáticas y Ciencias de la Computación. Ninguna hasta donde sabemos tiene el carácter estructural que presentamos aquí.

En esta sección mencionamos alguno de estos ejemplos; la exposición es breve pues estrictamente hablando están fuera del tema tratado en este capítulo.



La instancia más conocida de estas ideas probablemente sea el enguijarramiento de gráficas (“Graph Pebbling” en inglés).

Suponga que  $t$  guijarros (fichas en nuestro lenguaje) son puestos sobre los vértices de una gráfica (sin la restricción de tener a lo más un guijarro por vértice). Un movimiento de guijarro consiste en quitar dos guijarros de un vértice y poner un guijarro en un vértice adyacente. Se define el número de enguijarramiento de una gráfica  $G$  como el mínimo entero  $\pi(G)$  tal que: para todo vértice  $v$  de  $G$  y toda configuración inicial de  $\pi(G)$  guijarros existe una sucesión de movimientos de guijarros de manera que al final hay al menos un guijarro en  $v$ .

La idea de enguijarramiento de gráficas se introdujo para simplificar la prueba de un teorema de Teoría de Números conjeturado inicialmente por Erdős y Lemke. La idea fue primero sugerida por Lagarias y Saks y llevada a cabo por Chung en [Chu89].

El enguijarramiento de gráficas ha sido estudiado extensamente referimos al lector a [Hur99] y [Hur05] para una exposición a detalle.

Una idea similar al enguijarramiento de gráficas es el juego del disparo de fichas. En el juego de disparo de fichas, fichas son puestas en los vértices de una gráfica y un vértice puede “disparar” si tiene al menos tantas fichas como vecinos, cuando un vértice dispara le pasa una ficha a cada uno de sus vecinos. El juego puede seguir indefinidamente o terminar cuando ningún vértice puede disparar. El juego de disparo de fichas se definió por primera vez en [BLS91] como una realización de un juego de balanceo definido en [Spe86]. El juego de disparo de fichas tiene conexiones con otras áreas de Combinatoria como los Matroides y el Polinomio de Tutte. Es usado también en Física Teórica. Para una visión general de estas conexiones véase [Mer05].

Juegos similares han sido usados para estudiar rigidez en gráficas [JH97, JT95] y como modelos de cómputo (ver [Sav97] por ejemplo).

Otra área en que la idea de poner fichas (o guijarros) en los vértices de una gráfica ha sido usada en planeación de movimiento. Aquí, una ficha se distingue de las demás y el resto de las fichas son vistas como obstáculos. Se busca después el mínimo número de movimientos de fichas de manera de que la ficha señalada vaya de su vértice original a un vértice destino especificado con anterioridad [AMPP96, PRST94].

La característica común a todos los ejemplos anteriores es que la pregunta es si siempre hay forma de llegar a una cierta configuración. Nosotros nos interesamos por la estructura que emerge al considerar configuraciones de fichas y sus movimientos, no hemos encontrado nada similar en la literatura en este sentido.

### 4.1.1. La gráfica de Johnson

Existe sin embargo una gráfica muy relacionada con la Gráfica de Fichas, la Gráfica de Johnson. La Gráfica de Johnson  $J(n, m)$ , se define como la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los  $m$ -conjuntos de un conjunto de tamaño  $n$ , haciendo dos de ellos adyacentes si su diferencia simétrica tiene cardinalidad 2. Observe que de hecho  $F_m(K_n) \simeq J(n, m)$ .

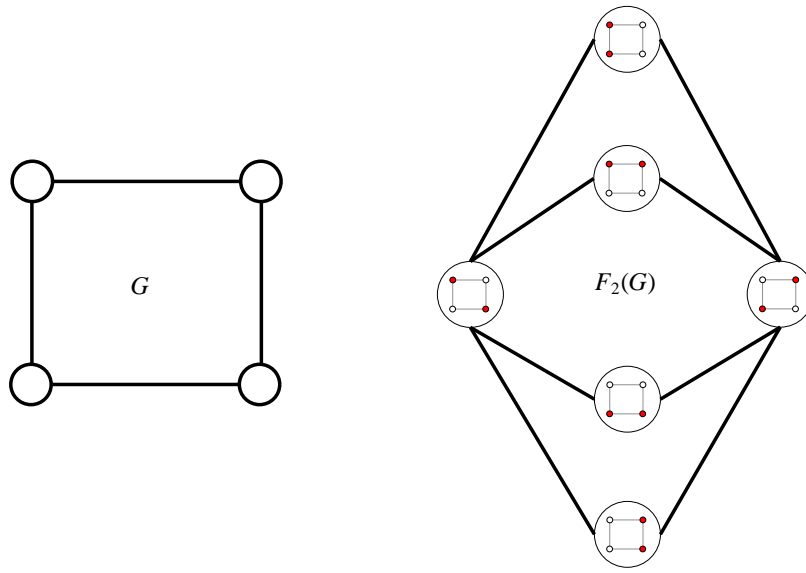


Figura 4.1: Una gráfica y su gráfica de 2-fichas.

A lo largo de este capítulo haremos referencia con frecuencia a la gráfica de Johnson remarcando las instancias donde ésta difiere de la Gráfica de Fichas.

A continuación presentamos algunas propiedades básicas de la Gráfica de Fichas.

## 4.2. Propiedades básicas

Recordamos al lector que usaremos el término *k-conjuntos* para referirnos a los subconjuntos de tamaño  $k$  de un conjunto dado. En lo subsecuente,  $G$  denotará una gráfica de  $n$  vértices.

El número de vértices y aristas de  $F_k(G)$  está dado por:

**Teorema 17.**  $|V(F_k(G))| = \binom{n}{k}$  y  $|E(F_k(G))| = \binom{n-2}{k-1}|E(G)|$ .

*Demostración.* Por definición  $V(F_k(G))$  es el conjunto de  $k$ -conjuntos de  $V(G)$  y por tanto  $|V(F_k(G))| = \binom{n}{k}$ .

Cada arista  $\{a, b\}$  de  $G$  y cada par  $\{A, B\}$  de  $k$ -conjuntos de  $V(G)$ , tales que  $A \Delta B = \{a, b\}$  determinan una arista de  $F_k(G)$ . Por cada arista de  $G$ , existen  $\binom{n-2}{k-1}$  de estos pares y como cada arista de  $F_k(G)$  está determinada de esta manera se tiene que  $|E(F_k(G))| = \binom{n-2}{k-1}|E(G)|$ .  $\square$

**Teorema 18.**  $F_1(G) \simeq G$ .

*Demostración.* Observe que la función de  $V(F_1(G))$  a  $V(G)$  dada por  $\{x\} \mapsto x$  es un isomorfismo de gráficas entre  $F_1(G)$  y  $G$ .  $\square$

**Teorema 19.**  $F_k(G) \simeq F_{n-k}(G)$ .

*Demostración.* Considere la función  $f$  que manda  $A \in V(F_k(G))$  a  $f(A) = V(G) \setminus A$ . Como  $A$  es un  $k$ -conjunto de  $V(G)$ ,  $V(G) \setminus A$  es un  $n - k$  conjunto de  $V(G)$ . Sean  $A$  y  $B$  un par de vértices adyacentes en  $F_k(G)$  y  $A \Delta B = \{a, b\}$  (con  $a \in A$  y  $b \in B$ ). Observe que  $(V(G) \setminus A) \Delta (V(G) \setminus B) = \{a, b\}$  donde ahora  $a \in V(G) \setminus B$  y  $b \in V(G) \setminus A$ . Por lo tanto si  $A$  y  $B$  son adyacentes en  $F_k(G)$ ,  $f(A)$  y  $f(B)$  son adyacentes en  $F_{n-k}(G)$ .

Todo vértice  $A$  de  $F_{n-k}(G)$  se puede expresar como  $V(G) \setminus A'$  donde  $A'$  es un  $k$ -conjunto de  $V(G)$  (a saber  $A' = V(G) \setminus A$ ). Sean  $A$  y  $B$  son dos vértices adyacentes en  $F_{n-k}(G)$  tales que  $A \Delta B = \{a, b\}$  ( $a \in A$  y  $b \in B$ ). Al igual que antes  $A' \Delta B' = \{a, b\}$  donde ahora  $a \in B'$  y  $b \in A'$ . Por lo que  $f^{-1}(A)$  es adyacente a  $f^{-1}(B)$  en  $F_k(G)$ .

Esto demuestra que  $f$  es un isomorfismo de gráficas entre  $F_k(G)$  y  $F_{n-k}(G)$ .  $\square$

El Teorema 19 es la generalización a las gráficas de fichas de la misma propiedad ya conocida de las gráficas de Johnson (es decir que  $J(n, m) \simeq J(n, n - m)$ ). Usaremos en ocasiones el Teorema 19 para suponer que  $k \leq n/2$

Dado un subconjunto  $X \subset V(G)$ ,  $|X| \leq k$ , definimos  $F_{|X|k}(G)$  como la subgráfica de  $F_k(G)$  inducida por todos los vértices de  $F_k(G)$  que contienen a  $X$  como subconjunto. Esto se interpreta como el dejar  $|X|$  fichas fijas en los vértices de  $X$  y mover sólo las fichas restantes.

**Teorema 20.** Para cada subconjunto  $X$  de  $V(G)$  de tamaño  $r \leq k$  se tiene que  $F_{|X|k}(G) \simeq F_{k-r}(G \setminus X)$ .

*Demostración.* Observe que todos los vértices de  $F_{|X|k}(G)$  contienen a  $X$  como subconjunto. Sea  $f$  la función de  $V(F_{k-r}(G \setminus X))$  a  $V(F_{|X|k}(G))$  que manda a  $A \in V(F_{k-r}(G \setminus X))$  a  $f(A) = A \setminus X$ .

Dado que  $A$  tiene cardinalidad  $k$  y contiene a  $X$  como subconjunto,  $A \setminus X$  es un  $(k - r)$ -conjunto de  $V(G)$ , como además no contiene a  $X$  lo es también de  $V(G) \setminus X$ . Sean  $A$  y  $B$  dos vértices adyacentes en  $F_{k-r}(G \setminus X)$  con  $A \Delta B = \{a, b\}$  ( $a \in A$  y  $b \in B$ ). Entonces  $A \cup X$  es adyacente a  $B \cup X$  en  $F_k(G)$  y como  $a, b \notin X$  lo son también en  $F_{|X|k}(G)$ . Como todo vértice  $A$  de  $F_{|X|k}(G)$  se puede expresar como  $A = A' \cup X$  para algún  $A' \subset V(G \setminus X)$ ,  $f$  es un isomorfismo de gráficas entre  $F_{|X|k}(G)$  y  $V(F_{k-r}(G \setminus X))$ .

$\square$

### 4.3. Conexidad y diámetro

En esta sección estudiamos propiedades de conexidad y diámetro de la Gráfica de Fichas. Estas propiedades han sido las más estudiadas en las instancias parecidas a las Gráficas de Fichas mencionadas al principio del capítulo.

Recordamos que  $G$  es *conexa* si entre cualquier par de sus vértices existe un camino que los une y es *t-conexa* si el quitar menos de  $t$  vértices de  $G$  no desconecta a la gráfica. Un

subconjunto de vértices de  $G$  cuya eliminación sí desconecta a  $G$  se conoce como *conjunto de corte*, de esta manera  $G$  es  $t$ -conexa si todo conjunto de corte tiene cardinalidad al menos  $t$ . La *distancia* entre dos vértices de  $G$  es la longitud del camino más corto que los une. El *diámetro* de  $G$  ( $\text{Diam}(G)$ ), es la distancia máxima entre todos los pares de vértices de  $G$ .

**Teorema 21.** *Si  $G$  es conexa,  $F_k(G)$  también lo es.*

*Demostración.* Sea  $A, B \in V(F_k(G))$  con  $A \neq B$ . Como  $G$  es conexa existe una trayectoria en  $G$ , de cada elemento en  $A \setminus B$  a cada elemento de  $B \setminus A$ . Entre todas las trayectorias de vértices de  $A \setminus B$  a vértices de  $B \setminus A$ , sea  $\Gamma = (x_1, \dots, x_r)$  una trayectoria de longitud mínima.

Por elección de  $\Gamma$  se tiene que  $x_1 \in A$ ,  $x_r \in B$  y  $x_i \notin A \Delta B$  para todo  $1 < i < r$ . Sean  $x_1 = x'_1, \dots, x'_s$  los elementos  $A \cap \Gamma$  en el orden dado por  $\Gamma$ .

Empezando en la configuración de fichas representada por  $A$ , deslizamos la ficha en  $x'_s$  a largo de  $\Gamma$  hasta  $x_r$ , después deslizamos la ficha en  $x'_{s-1}$  a  $x'_s$  a lo largo de  $\Gamma$  así sucesivamente, después de mover la ficha en  $x'_i$  a  $x'_{i+1}$  movemos la ficha en  $x'_{i-1}$  a  $x'_i$  hasta que finalmente movemos la ficha en  $x'_1$  a  $x'_2$ , denotemos con  $A'$  a la configuración de fichas resultante. Observamos que  $|A' \Delta B| = |A \Delta B| - 1$ , pues  $A' = A \setminus \{x_1\} \cup \{x_r\}$ . Aplicando este proceso inductivamente podemos encontrar una camino de  $A$  a  $B$  en  $F_k(G)$ .  $\square$

**Teorema 22.** *Si  $G$  es  $t$ -conexa, también lo es  $F_k(G)$ .*

*Demostración.* Usamos el Teorema 19 para suponer que  $k \leq n/2$ .

Sea  $C$  un conjunto de corte de  $F_k(G)$ . Consideramos el conjunto  $\mathcal{D}$  de todos los pares de  $F_k(G) \setminus C$ , que se encuentran en diferentes componentes conexos de  $F_k(G) \setminus C$ . De todos estos pares, sea  $(A, B) \in \mathcal{D}$  el par cuya diferencia simétrica  $A \Delta B$  sea mínima en cardinalidad.

- Caso 1:  $|A \Delta B| = 2$ .

Sea  $a \in A \setminus B$  y  $b \in B \setminus A$ . Como  $G$  es  $t$ -conexa por el Teorema de Menger, existen  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_t$  trayectorias internamente ajenas de  $a$  a  $b$  en  $G$ .

Sean  $a_1, a_2, \dots, a_m$  los elementos de  $A \cap \Gamma_1$  en su respectivo orden en  $\Gamma_1$  (observe que  $a_1 = a$ ).

Consideramos la siguiente sucesión de movimientos de fichas: deslizamos la ficha en  $a_m$  a lo largo de  $\Gamma_1$  hasta que depositarla en  $b$ ; movemos después la ficha en  $a_{m-1}$  a lo largo de  $\Gamma_1$  hasta ponerla en  $a_m$  (que ahora se encuentra desocupado); seguimos moviendo de esta manera la ficha en  $a_i$  a  $a_{i+1}$ ; finalmente la ficha en  $a_1 = a$  es puesta en  $a_2$ . La configuración final no es otra más que la representada por  $B$ .

Esta sucesión de movimientos de fichas induce un camino de  $A$  a  $B$  en  $F_k(G)$  pero como en  $F_k(G) \setminus C$ ,  $A$  y  $B$  se encuentran en distintos componentes conexos en algún momento debimos pasar por una configuración en  $C$ .

Haciendo esto para cada  $\Gamma_i$  encontramos  $t$  elementos de  $C$  y como las  $\Gamma_i$  son internamente ajenas todos estos elementos son distintos. Por lo tanto  $|C| \geq t$ .

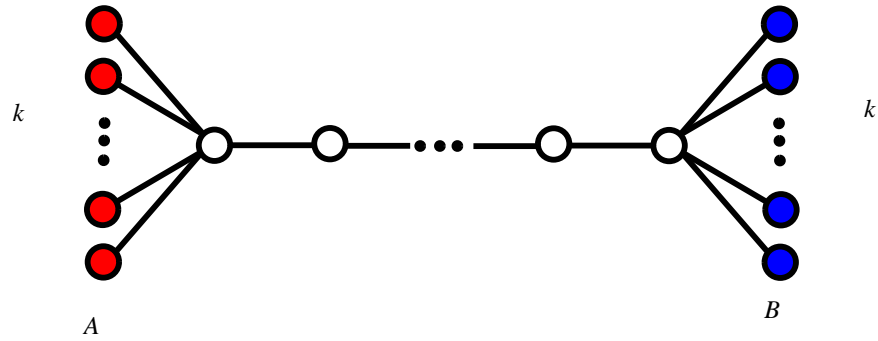


Figura 4.2: Ejemplo de dos configuraciones de fichas  $A$  y  $B$  a distancia  $k$   $\text{Diam}(G)$  en  $F_k(G)$ .

- Caso 2:  $|A \Delta B| = 2r > 2$ .

Sean  $A \setminus B = \{a_1, \dots, a_r\}$  y  $B \setminus A = \{b_1, \dots, b_r\}$ . Para cada  $1 \leq i \leq r$  y  $x \notin A \cup B$  definimos  $A_{i,x} := A \setminus \{a_i\} \cup \{x\}$  y  $B_{i,x} := B \setminus \{b_i\} \cup \{x\}$ .

Supongamos que para alguna elección de  $i, j$  y  $x$  se tiene que  $A_{i,x}$  y  $B_{j,x}$  no pertenecen a  $C$ .

Como  $|A \Delta A_{i,x}| = |\{a_i, x\}| = 2 < 2r$  y por elección de  $\{A, B\}$ ;  $A$  y  $A_i$  están en el mismo componente conexo de  $G \setminus C$  y por los mismos argumentos  $B$  y  $B_i$  están en el mismo componente conexo de  $G \setminus C$ . Por lo tanto  $A_{i,x}$  y  $B_{j,x}$  están en diferentes componentes conexos de  $F_k(G) \setminus C$  pero por otra parte  $|A_{i,x} \Delta B_{j,x}| = 2(r-1) < 2r$ , una contradicción.

Por lo tanto ya sea  $A_{i,x}$  o  $B_{j,x}$  está en  $C$ . Por cada elección de  $i, j$  y  $x$ , obtenemos al menos un elemento de  $C$  y sobrecontamos cada elemento exactamente  $r$  veces. Como hay  $r^2(n - (k + r))$  elecciones distintas de  $i, j, x$  (y estamos suponiendo que  $k \leq n/2$ ),  $C$  tiene al menos  $r^2(n - k - r)/r = r(n - k) - r^2 \geq r(n - n/2) - r^2 = rn/2 - r^2$  elementos.

Consideramos ahora todos los conjuntos de la forma  $A_{i,j} = A - \{a_i\} \cup \{b_j\}$  y  $B_{i,j} = B - \{b_j\} \cup \{a_i\}$ ; hay  $2r^2$  tales conjuntos.

Supongamos que  $A_{i,j}$  no está en  $C$ .  $A$  y  $A_{i,j}$  están en el mismo componente conexo de  $F_k(G) \setminus C$  pues  $|A \Delta A_{i,j}| = |\{a_i, b_j\}| < 2r$ . Pero al mismo tiempo  $B$  y  $A_{i,j}$  están en el mismo componente conexo de  $F_k(G) \setminus C$  pues  $|B \Delta A_{i,j}| = 2(r-1) < 2r$ , contradicción.

Por lo tanto todos los  $A_{i,j}$  y por los mismos argumentos todos los  $B_{i,j}$  están en  $C$ . Estos conjuntos no estaba en el conteo inicial y como  $r \geq 2$ :  $|C| \geq rn/2 - r^2 + 2r^2 = rn/2 + r^2 > n > t$ .

En ambos casos tenemos que  $|C| \geq t$  y por lo tanto  $F_k(G)$  es  $t$ -conexa.  $\square$

**Teorema 23.**  $\text{Diam}(F_k(G)) \leq k \text{Diam}(G)$ .

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  dos configuraciones distintas de fichas sobre  $G$ . Repetimos el argumento de la prueba del Teorema 21. Consideramos una trayectoria de menor longitud  $\Gamma$  entre vértices de  $A \setminus B$  y  $B \setminus A$ .

Observe que en  $\Gamma$ , el primer vértice está en  $A$ ; el segundo en  $B$  y ninguno de los vértices interiores de  $\Gamma$  está en  $A \Delta B$ .

Sean  $x_1, \dots, x_r$  los vértices de  $\Gamma \cap A$  en el orden dado por  $\Gamma$ .

Empezando por la configuración de fichas representada por  $A$  movemos la ficha en el vértice  $x_r$  al último vértice de  $\Gamma$ , después movemos la ficha en  $x_{r-1}$  a  $x_r$ , así sucesivamente movemos la ficha en  $x_i$  a  $x_{i+1}$  hasta que finalmente movemos la ficha en  $x_1$  a  $x_2$ . En total hacemos a lo más  $\text{Diam}(G)$  movimientos de fichas.

La cardinalidad de la diferencia simétrica de esta configuración con  $B$  es una menos que la de la diferencia simétrica de  $A$  y  $B$ . Por lo tanto con a lo más  $k \text{Diam}(G)$  movimientos de fichas podemos llegar de  $A$  a  $B$  y el diámetro de  $F_k(G)$  es a lo más  $k \text{Diam}(G)$ .  $\square$

La cota superior dada por el Teorema 23 se puede alcanzar como lo muestra la Figura 4.2.

Damos ahora algunas cotas inferiores:

**Teorema 24.** *Sea  $D = \text{Diam}(G)$ , entonces:*

- $\text{Diam}(F_k(G)) \geq k(D - k + 1)$  para  $k \leq (D + 1)/2$ .
- $\text{Diam}(F_k(G)) \geq (D^2 + 2D)/4$  para  $(D + 1)/2 \leq k \leq D$ .
- $F_k(G) \geq (D^2 - 2D + 4k)/4$  para  $k > D$ .

*Demostración.* Usaremos el Teorema 19 y supondremos que  $k \leq n/2$ . Sean  $x$  y  $y$  vértices a distancia  $D$  en  $G$  y para cada  $0 \leq i \leq D$  sea  $V_i$  el conjunto de vértices a distancia  $i$  de  $x$  en  $G$  por lo que  $V_0 = \{x\}$  y  $y \in V_D$  (ver Figura 4.3).

Ahora bien sea  $a$  el primer índice tal que  $\sum_{i=0}^a |V_i| \geq k$  y análogamente sea  $b$  el último índice tal que  $\sum_{i=b}^D |V_i| \geq k$ .

Note que  $a \leq b$  pues estamos suponiendo que  $k \leq n/2$ .

Ponemos una ficha en cada elemento de  $\cup_{i=0}^{a-1} V_i$  y las restantes  $k - |\cup_{i=0}^{a-1} V_i|$  fichas arbitrariamente en elementos de  $V_a$ , denotamos con  $A$  a la configuración de fichas resultante.

Definimos una configuración de  $k$  fichas  $B$  de manera similar poniendo una ficha en cada vértice de  $\cup_{i=b+1}^D V_i$  y después colocando las fichas restantes en  $V_b$ , tenemos cuidado sin embargo de no poner las fichas en vértices ya ocupados por  $A$  (esto puede suceder cuando  $a = b$ ). Considere cualquier sucesión de movimientos de fichas que lleve  $A$  a  $B$ . cada ficha de  $A$  es llevado a una vértice de distancia mayor o igual a  $x$ . Por lo que si una ficha (en  $A$ ) está originalmente en  $V_i$  y es llevada finalmente a un vértice en  $V_j$  (en  $B$ ) se necesitan  $j - i$  movimientos de fichas para lograrlo. Por lo que si tomamos la suma sobre todas las fichas de  $A$  obtenemos una cota inferior al número de movimientos de fichas. Pero esta suma también se puede expresar como la suma de las distancias a  $x$  de cada elemento en  $B$

menos la suma de las distancias a  $x$  de cada elemento en  $A$ . El primer término se minimiza cuando hay exactamente una ficha en cada  $V_j$  ( $j > b$ ) y todas las fichas restantes en  $V_b$ ; el segundo término se maximiza cuando hay exactamente una ficha en cada  $V_i$  ( $i < a$ ) y las fichas restantes en  $V_a$ . La observación anterior también implica que esta suma se minimiza cuando  $a$  es tan grande y  $b$  tan pequeña como sea posible.

Usamos estas observaciones para obtener las cotas afirmadas:

- Caso  $k \leq (D + 1)/2$ .

De las observaciones anteriores, en el peor caso  $a = k$ ,  $b = D - (k - 1)$  y el número mínimo de movimientos de fichas realizado sería:

$$\sum_{j=D-(k-1)}^D j - \sum_{i=0}^{k-1} i = k(2D - k + 1)/2 - k(k - 1)/2 = k(D - k + 1)$$

- Caso  $(D + 1)/2 \leq k \leq D$ .

En este caso la cota inferior se minimiza cuando  $a = b$ . Por lo que hay un elemento de  $A$  en cada  $V_i$  ( $i < a$ ) y un elemento de  $B$  en cada  $V_j$  ( $j < a$ ). La suma de las distancias a  $x$  de estos dos conjuntos sería:  $\sum_{i=0}^{a-1} i = a(a - 1)/2$  para  $A$  y  $\sum_{j=a+1}^D j = (D - a)(D - a + 1)/2$  para  $B$ . Los elementos restantes de  $A$  están todos en  $V_a$  así como los elementos restantes de  $B$  están todos en  $V_b$ . Hay  $k - a$  de los primeros y  $k - (D - a)$  de los segundos. En resumen la suma de la distancia de los elementos en  $B$  a  $x$  es  $(D - a)(D - a + 1)/2 + a(k - D + a)$  y la suma de la distancia de los elementos de  $A$  a  $x$  es  $a(a - 1)/2 + a(k - a)$ . La diferencia de los dos estos dos términos es  $(D^2 + D + 2a^2 - 2aD)/2$ . Esto nos da una cota inferior al número de movimientos de fichas para un valor específico de  $a$ . Esta cota se minimiza cuando  $a = D/2$ . Dando como cota inferior general de:

$$\frac{(D^2 + 2D)}{4}.$$

- Caso  $k > D$ .

Usamos exactamente los mismos argumentos que antes con la excepción de que ahora observamos que al menos  $k - (D - a) - a = k - D$  elementos de  $A \cap V_a$  deben ser movidos a elementos de  $B \cap V_a$  en nuestro conteo inicial esto nos aportaba 0 movimientos de fichas, sin embargo al menos una movimiento es necesario para cada uno de estos elementos, por lo que agregamos un término adicional de  $k - D$  a la cota anterior de  $(D^2 + D + 2a^2 - 2aD)/2$ . La cual se minimiza otra vez cuando  $a = D/2$  Dando como cota inferior:

$$\frac{D^2 - 2D + 4k}{4}$$

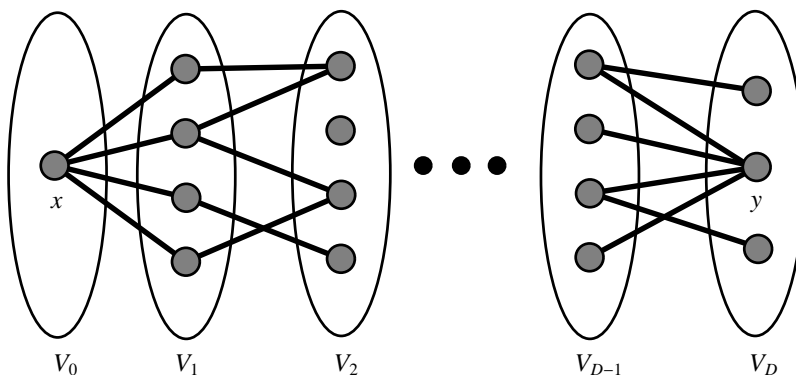


Figura 4.3: Vértices  $x$  y  $y$  a distancia  $D$  en  $G$  y los vértices intermedios.

□

Mencionamos finalmente que se sabe que el diámetro de la Gráfica de Johnson  $J(n, k)$  es igual a  $k$  [ICAB01].

## 4.4. Número cromático

Recordemos brevemente que: una *coloración* de  $G$  es una asignación de colores a los vértices de  $G$  (es decir una función de  $V(G)$  a un conjunto dado); una coloración de  $G$  es *propia* si dos vértices adyacentes no reciben el mismo color; el *número cromático* de  $G$  es el mínimo número de colores con que se puede colorear propiamente a  $G$  y se denota como  $\chi(G)$ ; a todos los vértices de un mismo color se le conoce como *clase cromática*.

En esta sección estudiamos el número cromático de  $F_k(G)$  en términos del número cromático de  $G$ .

Como primeras cotas tenemos:

**Teorema 25.**  $\chi(F_k(G)) \leq \chi(G)$ .

*Demostración.* Considere cualquier coloración propia  $c$  de  $G$  usando como conjunto de colores a  $\{0, 1, \dots, \chi(G) - 1\}$ . A cada vértice  $A \in V(F_k(G))$  le asignamos el color  $c(A) = \sum_{x \in A} c(x) \pmod{\chi(G)}$ . Ésto da una coloración propia de los vértices de  $F_k(G)$ , pues sean  $A$  y  $B$  dos vértices adyacentes en  $F_k(G)$  tal que  $A \Delta B = \{a, b\}$ . Como  $a$  es adyacente a  $b$  en  $G$ ,  $c(a) \neq c(b)$  y  $c(A) - c(B) = c(a) - c(b) \neq 0$ . Por lo tanto  $c(A) \neq c(B)$ . □

Este resultado se conocía con anterioridad para las Gráficas de Johnson [GS80].

**Teorema 26.**  $\chi(F_k(G)) \geq \frac{n-k+2}{n} \chi(G) - 1$ .



*Demostración.* Note que la cota se cumple para  $k = 1$  pues  $F_1(G) \simeq G$ . Suponga por lo tanto que  $k \geq 2$ .

Considere una coloración propia de  $G$  con  $\chi(G)$  colores. Sean  $V_1, \dots, V_{\chi(G)}$  sus clases cromáticas ordenadas de manera tal que  $|V_1| \geq |V_2| \geq \dots \geq |V_{\chi(G)}|$ . Para cada índice  $m$  se tiene que  $\sum_{i=1}^m |V_i| \geq m(n/\chi(G))$ , de otra manera  $|V_m| < n/\chi(G)$  y por tanto para todos los  $V_i$ 's posteriores. Esto a su vez implica que:

$\sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| = \sum_{i=1}^m |V_i| + \sum_{i=m+1}^{\chi(G)} |V_i| < m(n/\chi(G)) + (\chi(G) - m)(n/\chi(G)) = n$ , contradicción. Escogemos pues a  $m$  como el primer índice tal que  $\sum_{i=1}^m |V_i| \geq k - 1$ . Por elección de  $m$ ,  $\sum_{i=1}^{m-1} |V_i| \leq k - 2$  si  $m \geq 2$ . Por tanto  $(m - 1)(n/\chi(G)) \leq k - 2$  y  $m \leq \frac{k-2}{n}\chi(G) + 1$ .

Sea  $X \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$  de tamaño  $k - 1$ . Por el Teorema 20,  $F_{|X|}(G) \simeq F_1(G \setminus X) \simeq G \setminus X$  es una subgráfica de  $F_k(G)$ .

Por construcción  $\bigcup_{i=m+1}^{\chi(G)} V_i \subset V(G \setminus X)$ . Suponga que  $G \setminus X$  tiene una coloración propia con menos de  $\chi(G) - m$  colores. Asignando estos colores a los vértices de  $\bigcup_{i=m+1}^{\chi(G)} V_i \subset V(G \setminus X)$  mientras conservamos los colores originales de  $\bigcup_{i=1}^m V_i$  nos daría una coloración propia de  $G$  con menos de  $\chi(G)$  colores. Por lo tanto  $\chi(G \setminus X) \geq \chi(G) - m \geq \chi(G) - \frac{(k-2)}{n}\chi(G) - 1 = \frac{n-k+2}{n}\chi(G) - 1$ . Como  $G \setminus X$  es una subgráfica de  $F_k(G)$ ,  $\chi(F_k(G)) \geq \frac{n-k+2}{n}\chi(G) - 1$ .  $\square$

La cota inferior dada por el Teorema 26 es mala cuando  $k$  difiere poco de  $n$ , en este caso podemos usar el Teorema 19 como lo muestra el siguiente resultado:

**Teorema 27.**  $\chi(F_k(G)) \geq \frac{k+2}{n}\chi(G) - 1$ .

*Demostración.*  $\chi(F_k(G)) = \chi(F_{n-k}(G)) \geq \frac{n-(n-k)+2}{n}\chi(G) - 1 = \frac{k+2}{n}\chi(G) - 1$ .  $\square$

Combinando los Teoremas 26 y 27 obtenemos una cota superior independiente del valor de  $k$ .

**Corolario 4.**  $F_k(G) \geq (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})\chi(G) - 2$ .

*Demostración.*

$$2\chi(F_k(G)) \geq \frac{n-k+2}{n}\chi(G) - 1 + \frac{k+2}{n}\chi(G) - 1 = \frac{n+2}{n}\chi(G) - 2$$

$\square$

Esto finaliza las cotas que hemos encontrado para  $\chi(F_k(G))$ . Creemos que las cotas inferiores están lejos del valor real de  $\chi(F_k(G))$  pues los mejores ejemplos que existen son gráficas  $G$  tales que  $\chi(F_k(G)) = \chi(G) - 2$ . éstas se realizan con casos particulares de la Gráfica de Johnson [EB96], en la Figura 4.4 damos un claro ejemplo de una gráfica tal que su gráfica de fichas tiene número cromático estrictamente menor.

Hablaremos más sobre el tema al final de este capítulo.

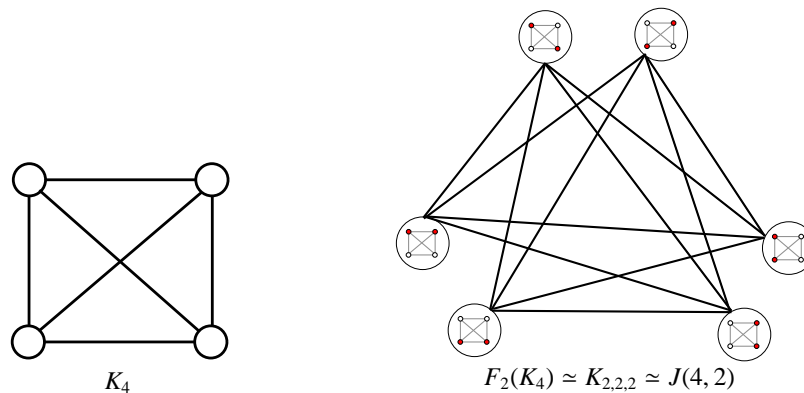


Figura 4.4: Una gráfica de fichas con número cromático menor que la gráfica original.

## 4.5. Ciclos y trayectorias Hamiltonianas.

Recordamos que un ciclo Hamiltoniano en una gráfica  $G$  es un ciclo que pasa por todos los vértices de  $G$ ; de la misma manera una trayectoria Hamiltoniana es una trayectoria que pasa por todos los vértices de  $G$ . En esta sección estudiaremos condiciones necesarias para la existencia de ciclos y trayectorias Hamiltonianas en  $F_k(G)$ .

La primera observación es que la existencia de un ciclo Hamiltoniano en  $G$  no implica la existencia de una trayectoria Hamiltoniana en  $F_k(G)$ . Como lo muestra el hecho de que  $C_4$  tiene un ciclo Hamiltoniano pero  $F_2(C_4) \simeq K_{2,4}$  no tiene siquiera una trayectoria Hamiltoniana.

Ejemplos más generales de gráficas Hamiltonianas tales que sus gráficas de fichas no son Hamiltonianas se pueden construir recordando que ninguna gráfica bipartita con un número impar de vértices puede contener un ciclo Hamiltoniano.

Sea  $G$  una gráfica bipartita Hamiltoniana tal que  $\binom{n}{k}$  es impar. Entonces  $F_k(G)$  tiene un número impar de vértices y por el Teorema 25 es bipartita y como mencionamos anteriormente no puede contener un ciclo Hamiltoniano.

Incluso en el caso en que escogemos a  $k$  de manera de  $F_k(G)$  tiene un número par de vértices  $F_k(G)$  podría no contener una trayectoria Hamiltoniana, como es el caso de  $K_{n,n}$  para elecciones particulares de  $k$ . Sean  $V_1$  y  $V_2$  los dos elementos de la partición de  $V(K_{n,n})$ .  $F_k(K_{n,n})$  es bipartita también y los dos elementos de la partición está dadas por  $W_1 = \{A \in V(F_k(K_{n,n})) \mid |A \cap V_1| \text{ es par}\}$  y  $W_2 = \{A \in V(F_k(K_{n,n})) \mid |A \cap V_1| \text{ es impar}\}$ . La diferencia de  $|W_1| - |W_2|$  está dada por:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{k-i}$$

La cual es 0 cuando  $k$  es par y para valores impares de  $k$  su valor está dado por la identidad

[Gou72]:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} = (-1)^{k/2} \binom{n}{k/2} = \binom{n}{k} \frac{2^n (n-k)! \sqrt{\pi}}{(n-k/2)! (-k/2-1/2)!}$$

Por lo que para valores impares de  $k$ ,  $|W_1| - |W_2|$  es mayor a 2 y por lo tanto  $F_k(K_{n,n})$  no contiene una trayectoria Hamiltoniana. Por el Lema 7 para valores pares de  $k$ ,  $F_k(K_{n,n})$  siempre contiene una trayectoria Hamiltoniana.

Para una gráfica  $G$  que contiene una trayectoria Hamiltoniana pero no necesariamente bipartita,  $F_k(G)$  puede contener una trayectoria Hamiltoniana dependiendo de la paridad de  $k$  y  $n$ .

Consideramos primero el caso cuando  $G$  es un trayectoria de  $n$  vértices. En este caso en particular una Trayectoria Hamiltoniana en  $F_k(G)$  correspondería un código de Gray de transposiciones adyacentes en el conjunto de combinaciones de  $k$  elementos del conjunto  $V(G)$ . Este código de Gray (véase [Rus]) existe si y sólo si  $n$  es par y  $k$  es impar.

**Lema 7.** *Si  $G$  es una trayectoria de  $n$  vértices  $F_k(G)$  es Hamiltoniana si y sólo si  $n$  es par y  $k$  es impar.*

*Demostración.* □

En general tenemos:

**Teorema 28.** *Si  $G$  es una gráfica con un número par de vértices y contiene una trayectoria Hamiltoniana, entonces  $F_k(G)$  es Hamiltoniana para todo valor impar de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).*

*Demostración.* Como  $G$  contiene una trayectoria Hamiltoniana  $P_n$  de  $n$  vértices,  $F_k(G)$  contiene a  $F_k(P_n)$  como subgráfica la cual por el Lema 7, contiene una trayectoria Hamiltoniana y como  $V(F_k(G)) = V(F_k(P_n))$  también  $F_k(G)$ . □

## 4.6. Clanes

Un clan en una gráfica  $G$  es una subgráfica completa de  $G$  maximal por contención. El número de clan  $\omega(G)$  de  $G$  es el tamaño del clan más grande de  $G$ . En esta sección caracterizamos los clanes de  $F_k(G)$ .

**Lema 8.** *Sean  $A, B, C$  tres vértices disjuntos dos a dos de  $F_k(G)$ . Se tiene que  $A \subset B \cup C$  o bien  $B \cap C \subset A$ .*

*Demostración.* Sea  $B \Delta C = \{b, c\}$  con  $b \in B$  y  $c \in C$ . Suponga que  $A \not\subset B \cup C$ . Existe al menos un elemento  $a$  en  $A \setminus (B \cup C)$ . Note que dado que  $A$  es adyacente a  $B$  en  $F_k(G)$  y  $a \notin B$ ,  $A \setminus B = \{a\}$ . Esta igualdad implica que  $c \notin A$  y como  $A$  es también adyacente a  $C$  en  $F_k(G)$ , esto también implica que  $C \setminus \{c\} \subset A$ . Pero  $C \setminus \{c\} = B \cap C$ . □

Usamos el Lema 8 para caracterizar todas las subgráficas completas de  $F_k(G)$ .

**Teorema 29.** *Sea  $H$  una subgráfica completa de  $F_k(G)$ . Entonces existe una subgráfica completa  $K$  de  $G$  y un conjunto  $S$  de vértices de  $G$ , tal que:  $V(H) = \{\{v\} \cup S \mid v \in K\}$  o bien  $V(H) = \{(S \cup K) \setminus \{v\} \mid v \in K\}$ .*

*Demostración.* El resultado es válido si  $H$  tiene dos vértices o menos; si  $H$  es una gráfica completa de tres vértices el resultado se sigue del Lema 8.

Suponga por lo tanto que  $H$  tiene más de tres vértices. Sean  $A, B, C$  y  $D$  vértices de  $H$ . Observamos que las dos opciones dadas por el Lema 8. para  $A, B, C$  y  $D, B, C$  son incompatibles. Esto es si  $A \subset B \cup C$  pero  $D \not\subset B \cup C$ , entonces  $A$  y  $D$  no pueden ser adyacentes en  $F_k(G)$ .

Si todos los vértices de  $H$  están contenidos en  $B \cup C$ , cada vértice de  $H$  se puede expresar como  $S = B \cup C$  menos un vértice de  $G$ . Ahora bien, sean  $V = S \setminus \{v\}$  y  $U = S \setminus \{u\}$  dos vértices de  $H$ . Entonces  $V \Delta U = \{u, v\}$  y como  $U$  y  $V$  son adyacentes en  $F_k(G)$  también lo son  $u$  y  $v$  en  $G$ .

Si por otra parte ninguno de los vértices de  $H$  (aparte de  $B$  y  $C$ ) están contenidos en  $B \cup C$ , aplicando sucesivamente el Lema 8 todos los vértices de  $H$  son de la forma  $S = B \cap C$  más un vértice  $v$  de  $G$  con  $v \in K$  para alguna subgráfica completa  $K$  de  $G$ .  $\square$

**Teorema 30.**  $\omega(F_k(G)) = \max\{\min\{\omega(G), n - k + 1\}, \min\{\omega(G), k + 1\}\}$ .

*Demostración.* Sea  $K$  un clan de  $G$  con  $\omega(G)$  vértices. Considere las siguientes dos construcciones de subgráficas completas de  $F_k(G)$ :

- Tome  $k - 1$  fichas y ponga tantas como pueda en los elementos de  $V(G) \setminus V(K)$ , las fichas restantes póngalas arbitrariamente en los vértices de  $K$ .

Los vértices no ocupados de  $J$  inducen una subgráfica completa  $K'$  de  $G$  con  $\min\{\omega(G), n - k + 1\}$  vértices. El dejar las primeras  $k - 1$  fichas y moviendo la ficha restante sobre los vértices de  $K'$  induce una subgráfica completa de  $F_k(G)$  con  $\min\{\omega(G), n - k + 1\}$  vértices.

- Escoja un vértice  $v$  de  $K$  y ponga tantas fichas como sea posible sobre los elementos de  $V(K) \setminus \{v\}$ , Ponga las fichas restantes (si es que queda alguna) en los elementos de  $V(G) \setminus V(K)$ . Los vértices ocupados de  $J$  junto con  $v$  inducen una subgráfica completa  $K'$  de  $G$  con  $\min\{\omega(G), k + 1\}$  vértices. Sea  $B$  el conjunto de elementos de ocupados de  $V(G) \setminus V(K)$  y sea  $S = B \cup V(K')$ . Los conjuntos de la forma  $\{S \setminus \{x\} \mid x \in V(K')\}$  inducen una subgráfica completa de  $F_k(G)$  con  $\min\{\omega(G), k + 1\}$  vértices.

Por el Teorema 29 toda gráfica completa de  $F_k(G)$  se construye de estas dos maneras y el resultado se sigue.  $\square$

**Corolario 5.**  $\omega(F_k(G)) \leq \omega(G)$

*Demostración.*  $\square$

## 4.7. Problemas abiertos y trabajo futuro

Definimos a la Gráfica de  $k$  fichas de una gráfica y dimos varias cotas superiores e inferiores de sus propiedades gráficas. A este respecto queda como trabajo futuro el ajustar estas cotas. De éstas probablemente la más interesante y difícil sea la del número cromático. Creemos que la cota superior dada por el Teorema 25 está muy cerca del valor real de  $\chi(F_k(G))$ .

Aventuramos por lo tanto la siguiente conjetura:

**Conjetura 7.** *Existe un entero positivo  $c$  tal que para toda gráfica  $G$  y todo entero positivo  $k \leq |V(G)|$  se tiene que  $\chi(F_k(G)) \geq \chi(G) - c$ .*

En este Capítulo se estudio la Gráfica de Fichas en términos de la gráfica original, sin embargo podríamos tratar de obtener información de la gráfica subyacente a partir de su gráfica de fichas.

A este respecto la pregunta fundamental es si la gráfica de fichas captura toda la información de la gráfica original. Es decir si:

**Conjetura 8.** *Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas tales que para alguna  $k$  se tiene que  $F_k(G) \simeq F_k(H)$  entonces  $G \simeq H$ .*

Creemos que esta conjetura es de una gran profundidad pues se relaciona de alguna manera con un problema abierto famoso en Teoría de Gráficas llamada la “La Conjetura de Reconstrucción de Gráficas” debida a Paul J. Kelly y Stanisław Ulam.

La conjetura establece que:

**Conjetura 9.** *(Conjetura de Reconstrucción de Gráficas) Toda gráfica  $G$  con más de 3 vértices se puede reconstruir a partir de todas sus subgráficas de la forma  $G \setminus v$ , donde  $v$  es un vértice de  $G$ .*

Es decir supongamos que nos dan todas las subgráficas (con los vértices sin etiquetar) que resultan de quitar un vértice a una gráfica  $G$ . La pregunta es si es posible a partir de esta información determinar a  $G$  (módulo isomorfismo).

Al multiconjunto de las subgráficas de  $G$  de la forma  $G \setminus v$  (con  $v \in V(G)$ ) se le conoce como la baraja de  $G$  y a cada uno de sus elementos como una carta.

Una formulación equivalente a la Conjetura de la Reconstrucción de Gráficas es que si  $G$  y  $H$  son dos gráficas tales que existe una biyección entre sus barajas de manera que las cartas asociadas son isomorfas entonces  $G$  y  $H$  son isomorfas. Es en esta formulación que está planteada la Conjetura 8. Pero se podría reescribir como el preguntar si es posible reconstruir a  $G$  a partir de  $F_k(G)$ .

Más allá de que ambas conjeturas son problemas sobre reconstruir una gráfica a partir de cierta información de ésta, existe un vínculo más fuerte entre ambas. Pues considere  $F_2(G)$  y un vértice cualquiera  $v$  de  $G$ . Supongamos que dejamos fija una de las dos fichas

de  $G$  y sólo movemos la ficha restante (es decir nos fijamos en  $F_{\{v\},k}(G)$ ) esta gráfica es isomorfa a  $G \setminus v$ . Es decir  $F_2(G)$  tiene como subgráfica inducida a cada carta de la baraja de  $G$ .

Una pregunta relacionada sería si dada  $F_k(G)$  pero no  $G$ : ¿es posible determinar si una subgráfica de  $F_k(G)$  es o no una carta de  $G$ ? De ser así es posible que el resolver la Conjetura 8 arroje luz sobre el problema de reconstrucción de Gráficas.

# Bibliografía

- [ABF<sup>+</sup>08] G. Araujo, J. Balogh, R. Fabila, G. Salazar, and J. Urrutia. A note on harmonic subgraphs in labelled geometric graphs. *Inform. Process. Lett.*, 105(3):98–102, 2008.
- [ABHM00] R. E. L. Aldred, S. Bau, D. A. Holton, and Brendan D. McKay. Nonhamiltonian 3-connected cubic planar graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 13(1):25–32 (electronic), 2000.
- [ABK05] Jin Akiyama, Edy Tri Baskoro, and Mikio Kano, editors. *Combinatorial geometry and graph theory*, volume 3330 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Selected papers from the Indonesia-Japan Joint Conference (IJCCGGT 2003) held in Bandung, September 13–16, 2003.
- [ACFM<sup>+</sup>08] O. Aichholzer, S. Cabello, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, F. Hurtado, and D.R. Wood. Edge-removal and non-crossing configurations in geometric graphs. In *Proc. 24<sup>th</sup> European Workshop on Computational Geometry EuroCG '08*, pages 119–122, Nancy, France, 2008.
- [AEG87] David Avis and Hossam El-Gindy. Triangulating point sets in space. *Discrete Comput. Geom.*, 2(2):99–111, 1987.
- [AFMFP<sup>+</sup>08] Oswin Aichholzer, Ruy Fabila-Monroy, David Flores-Peñaloza, Thomas Hackl, Clemens Huemer, and Jorge Urrutia. Empty monochromatic triangles. In *Proceedings of the 20th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG2008)*, pages 75–79, August 2008.
- [AFMP<sup>+</sup>09] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, J. Urrutia, and B. Vogtenhuber. Modern illumination of monotone polygons. In *Proc. 25<sup>th</sup> European Workshop on Computational Geometry EuroCG '09*, pages 167–170, Brussels, Belgium, 2009.

- [AHHV09] O. Aichholzer, T. Hackl, C. Huemer, and F. Hurtado B. Vogtenhuber. Large bichromatic point sets admit empty monochromatic 4-gons. In *Proc. 25<sup>th</sup> European Workshop on Computational Geometry EuroCG '09*, page to appear, Brussels, Belgium, 2009.
- [AHMS96] Esther M. Arkin, Martin Held, Joseph S. B. Mitchell, and Steven Skiena. Hamiltonian triangulations for fast rendering. *The Visual Computer*, 12(9):429–444, 1996.
- [AHN04] Oswin Aichholzer, Ferran Hurtado, and Marc Noy. A lower bound on the number of triangulations of planar point sets. *Comput. Geom.*, 29(2):135–145, 2004.
- [AIJ<sup>+</sup>08] Jorge Luis Arocha, Bárány Imre, Bracho Javier, Fabila Ruy, and Montejano Luis. Very colorful theorems. *Discrete and Computational Geometry*, 2008. Aceptado.
- [AMPP96] Vincenzo Auletta, Angelo Monti, Mimmo Parente, and Pino Persiano. A linear time algorithm for the feasibility of pebble motion on trees, to appear on *algorithmica*. a preliminary version appeared. In *in Proceedings of Scandinavian Workshop on Algorithm Theory, (SWAT) Lecture Notes in Computer Science 1097*, pages 259–270, 1996.
- [bar69] *Recent progress in combinatorics*. Proceedings of the Third Waterloo Conference on Combinatorics, May 1968. Edited by W. T. Tutte. Academic Press, New York, 1969.
- [BF87] Imre Bárány and Zoltán Füredi. Empty simplices in Euclidean space. *Canad. Math. Bull.*, 30(4):436–445, 1987.
- [BK01] Imre Bárány and Gyula Károlyi. Problems and results around the Erdős-Szekeres convex polygon theorem. In *Discrete and computational geometry (Tokyo, 2000)*, volume 2098 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 91–105. Springer, Berlin, 2001.
- [BLS91] Anders Björner, László Lovász, and Peter W. Shor. Chip-firing games on graphs. *Eur. J. Comb.*, 12(4):283–291, 1991.
- [Bra05] Peter Braß. On the size of higher-dimensional triangulations. In *Combinatorial and Computational Geometry*, volume 52 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 147–153. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [BV04] Imre Bárány and Pavel Valtr. Planar point sets with a small number of empty convex polygons. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 41(2):243–266, 2004.



- [CDW05] Francis Chin, Qing-Huai Ding, and Cao An Wang. On hamiltonian tetrahedralizations of convex polyhedra. In *Proceedings of ISORA' 05 (Lecture Notes on Operations Research)*, volume 5, pages 206–216, Lhasa China, Agosto 2005.
- [Cha85] Bernard Chazelle. On the convex layers of a planar set. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 31(4):509–517, 1985.
- [Chu89] Fan Chung. Pebbling in hypercubes. *SIAM J. Discret. Math.*, 2(4):467–472, 1989.
- [DHKS03] Olivier Devillers, Ferran Hurtado, Gyula Károlyi, and Carlos Seara. Chromatic variants of the Erdős-Szekeres theorem on points in convex position. *Comput. Geom.*, 26(3):193–208, 2003.
- [Dil50] R. P. Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Ann. of Math. (2)*, 51:161–166, 1950.
- [Dil87] Michael B. Dillencourt. A non-Hamiltonian, nondegenerate Delaunay triangulation. *Inform. Process. Lett.*, 25(3):149–151, 1987.
- [Dil96] Michael B. Dillencourt. Finding Hamiltonian cycles in Delaunay triangulation is NP-complete. *Discrete Appl. Math.*, 64(3):207–217, 1996.
- [DMO] Erik D. Demaine, Joseph S. B. Mitchell, and Joseph O'Rourke. The open problems project. <http://maven.smith.edu/~orourke/TOPP/>.
- [Dum00] Adrian Dumitrescu. Planar sets with few empty convex polygons. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 36(1-2):93–109, 2000.
- [EB96] Tuví Etzion and Sara Bitan. On the chromatic number, colorings, and codes of the Johnson graph. *Discrete Appl. Math.*, 70(2):163–175, 1996.
- [EFMU07] Francisco Escalona, Ruy Fabila-Monroy, and Jorge Urrutia. Hamiltonian tetrahedralizations with steiner points. In O. Aichholzer, editor, *23rd European Workshop on Computational Geometry*, pages 12–16. Univ. Graz, 3 2007.
- [EG73] P. Erdős and R. K. Guy. Crossing number problems. *Amer. Math. Monthly*, 80:52–58, 1973.
- [EMX02] Regina Estkowski, Joseph S. B. Mitchell, and Xinyu Xiang. Optimal decomposition of polygonal models into triangle strips. In *SCG '02: Proceedings of the eighteenth annual symposium on Computational Geometry*, pages 254–263, New York, NY, USA, 2002. ACM.

- [Erd78] P. Erdős. Some more problems on elementary geometry. *Austral. Math. Soc. Gaz.*, 5(2):52–54, 1978.
- [ES35] Paul Erdős and George Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.
- [FM07] Ruy Fabila-Monroy. Números cromáticos de gráficas de giros. Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.
- [FMU05] Ruy Fabila-Monroy and Jorge Urrutia. Graham triangulations and triangulations with a center are hamiltonean. *Information Processing Letters*, 96:295–299, 2005.
- [Ger08] Tobias Gerken. Empty convex hexagons in planar point sets. *Discrete Comput. Geom.*, 39(1-3):239–272, 2008.
- [Gou72] Henry W. Gould. *Combinatorial identities*. Henry W. Gould, Morgantown, W.Va., 1972. A standardized set of tables listing 500 binomial coefficient summations.
- [Gra72] Ronald L. Graham. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. *Inf. Process. Lett.*, 1(4):132–133, 1972.
- [GS80] R. L. Graham and N. J. A. Sloane. Lower bounds for constant weight codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 26(1):37–43, 1980.
- [Har78] Heiko Harborth. Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen. *Elem. Math.*, 33(5):116–118, 1978.
- [HFMM08] C. Huemer, D. Flores, A. Montejano, and R. Fabila-Monroy. Lower bounds for the colored mixed chromatic number of some classes of graphs. *Mathematicae Universitatis Carolinae*, 49(4):637–645, 2008.
- [HHN02] C. Hernando, F. Hurtado, and Marc Noy. Graphs of non-crossing perfect matchings. *Graphs Combin.*, 18(3):517–532, 2002.
- [HHNRC05] M. E. Houle, F. Hurtado, M. Noy, and E. Rivera-Campo. Graphs of triangulations and perfect matchings. *Graphs Combin.*, 21(3):325–331, 2005.
- [HM88] D. A. Holton and B. D. McKay. The smallest non-Hamiltonian 3-connected cubic planar graphs have 38 vertices. *J. Combin. Theory Ser. B*, 45(3):305–319, 1988.
- [HN99] F. Hurtado and M. Noy. Graph of triangulations of a convex polygon and tree of triangulations. *Comput. Geom.*, 13(3):179–188, 1999.

- [HNU99] Ferran Hurtado, Marc Noy, and Jorge Urrutia. Flipping edges in triangulations. *Discrete Comput. Geom.*, 22(3):333–346, 1999.
- [Hor83] J. D. Horton. Sets with no empty convex 7-gons. *Canad. Math. Bull.*, 26(4):482–484, 1983.
- [Hur99] Glenn Hurlbert. A survey of graph pebbling. *CONGRESSUS NUMERANTIIUM*, 139:41, 1999.
- [Hur05] Glenn Hurlbert. Recent progress in graph pebbling. 2005.
- [ICAB01] Felix P. Muga II, Jaime D.L. Caro, Henry N. Adorna, and Greg Baes. On the wide-diameter of the Johnson graph  $j(n,k)$ . *The Loyola Schools Review*, 1:77–88, 2001.
- [JH97] Donald Jacobs and Bruce Hendrickson. An algorithm for two dimensional rigidity percolation: The pebble game. *J. Computational Physics*, 137(2):346–365, 1997.
- [JT95] Donald Jacobs and Michael F. Thorpe. Generic rigidity percolation: The pebble game. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4051–4054, 1995.
- [Kir83] David Kirkpatrick. Optimal search in planar subdivisions. *SIAM J. Comput.*, 12(1):28–35, 1983.
- [KM88] M. Katchalski and A. Meir. On empty triangles determined by points in the plane. *Acta Math. Hungar.*, 51(3-4):323–328, 1988.
- [Kos07] V.A. Koshelev. On the erdos-szekeres problem in combinatorial geometry. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 29:175 – 177, 2007. European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications.
- [Law72] Charles L. Lawson. Transforming triangulations. *Discrete Math.*, 3:365–372, 1972.
- [Luc87] Joan M. Lucas. The rotation graph of binary trees is Hamiltonian. *J. Algorithms*, 8(4):503–535, 1987.
- [Mat02] Jiří Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*, volume 212 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Mer05] Criel Merino. The chip-firing game. *Discrete Mathematics*, 302(1-3):188–210, 2005.

- [MS00] W. Morris and V. Soltan. The Erdős-Szekeres problem on points in convex position—a survey. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 37(4):437–458 (electronic), 2000.
- [MV80] Silvio Micali and Vijay V. Vazirani. An  $O(\sqrt{|V|}|E|)$  algorithm for finding maximum matching in general graphs. *Symposium on Foundations of Computer Science*, 0:17–27, 1980.
- [Nic07] Carlos M. Nicolás. The empty hexagon theorem. *Discrete Comput. Geom.*, 38(2):389–397, 2007.
- [Ove03] Mark Overmars. Finding sets of points without empty convex 6-gons. *Discrete Comput. Geom.*, 29(1):153–158, 2003.
- [Pac04] János Pach, editor. *Towards a theory of geometric graphs*, volume 342 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [Pet91] Julius Petersen. Die theorie de regulären graphen. *Acta Math*, 15:193–120, 1891.
- [PRST94] Christos H. Papadimitriou, Prabhakar Raghavan, Madhu Sudan, and Hisao Tamaki. Motion planning on a graph. In *SFCS '94: Proceedings of the Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 511–520, Washington, DC, USA, 1994. IEEE Computer Society.
- [PT08] Janos Pach and Géza Tóth. Monochromatic empty triangles in two-colored point sets. In *Geometry, Games, Graphs and Education: the Joe Malkevitch Festschrift*, November 2008.
- [Ram29] F. Ramsey. On a problem of formal logic. In *Proceedings of the London Mathematical Society*, volume 30 of 2, pages 338–384, 1929.
- [RCUG01] Eduardo Rivera-Campo and Virginia Urrutia-Galicia. Hamilton cycles in the path graph of a set of points in convex position. *Comput. Geom.*, 18(2):65–72, 2001.
- [Rus] Frank Ruskey. *Combinatorial Generation*.
- [Sav97] John E. Savage. *Models of Computation: Exploring the Power of Computing*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1997.
- [Spe86] Joel Spencer. Balancing vectors in the max norm. *Combinatorica*, 6(1):55–65, 1986.

- [Ste92] Ernst Steinitz. *Encyclopadie der Mathematischen Wissenschaften*, volume 3, chapter Polyeder und Raumeinteilungen, pages 1–139. 1992.
- [STT88] Daniel D. Sleator, Robert E. Tarjan, and William P. Thurston. Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(3):647–681, 1988.
- [SW06] Micha Sharir and Emo Welzl. Random triangulations of planar point sets. In *Computational geometry (SCG'06)*, pages 273–281. ACM, New York, 2006.
- [Tai80] Peter G. Tait. Remarks on the colouring of maps. *Proc. Royal Society Edinburgh*, 10:728–729, 1880.
- [Tut46] W. T. Tutte. On Hamiltonian circuits. *J. London Math. Soc.*, 21:98–101, 1946.
- [TV05] Géza Tóth and Pavel Valtr. The Erdős-Szekeres theorem: upper bounds and related results. In *Combinatorial and computational geometry*, volume 52 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 557–568. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [Urr03] Jorge Urrutia. Coloraciones, tetraedralizaciones, y tetraedros vacíos en coloraciones de conjuntos de puntos en  $\mathbb{R}^3$ . In *Proc. X Encuentros de Geometría Computacional*, pages 95–100, Sevilla, España, 2003.
- [Val95] P. Valtr. On the minimum number of empty polygons in planar point sets. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 30(1-2):155–163, 1995.
- [Whi32] Hassler Whitney. Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs. *Amer. J. Math.*, 54(1):150–168, 1932.