UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

"El extraño mundo de las teselaciones, un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

Sara Alejandra Pando Figueroa

Dirigida por:

M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez

CIENCIAS

México, DF **abril, 2009**

La vida es una oportunidad

La vida es una oportunidad, aprovéchala.
La vida es belleza, admírala.
La vida es beatitud, saboréala.
La vida es sueño, hazlo realidad.
La vida es un reto, afróntalo.
La vida es un deber, cúmplelo.
La vida es un juego, juégalo.
La vida es preciosa, cuídala.
La vida es riqueza, consérvala.
La vida es amor, gózala.
La vida es un misterio, devélalo.
La vida es promesa, cúmplela.
La vida es tristeza, supérala.
La vida es un himno, cántalo.
La vida es un combate, acéptalo.
La vida es una tragedia, domínala.
La vida es una aventura, arróstrala.
La vida es felicidad, merécela.
La vida es la VIDA, defiéndela.

Anónimo

"Yo creo que la verdad es perfecta para las matemáticas, la química, la filosofía, pero no para la vida. En la vida, la ilusión, la imaginación, el deseo, la esperanza cuentan más."
Anónimo

"El maestro que intenta enseñar sin inspirar en el alumno el deseo de aprender, está tratando de forjar un hierro frío."
Anónimo

Dedicatoria

"Preciso es encontrar lo infinitamente grande en lo infinitamente pequeño, para sentir la presencia de Dios."

Pitágoras.

Dedico este proyecto de tesis de maestría con gran emoción y amor a quienes han hecho posible que este sueño sea ahora una realidad.

Antes que nadie, a Dios por estar siempre a mi lado, por permitirme compartir momentos inolvidables y darme todo lo necesario para lograr cada una de mis metas. A mi mamá Sara Figueroa del Olmo, me has dado el mejor regalo, la vida, aunque físicamente no estás conmigo desde hace 27 años, siempre seguirás estando cerca de mí, en mi mente y en mi corazón siendo mi principal fuente de inspiración, dándome fuerza y valor suficiente para seguir adelante. A mi segunda madre, Socorro Figueroa del Olmo, por tu apoyo incondicional, por estar siempre cerca de mí, por tus sabios consejos en el momento oportuno, por impulsarme a disfrutar la vida.

A la memoria de mis seres queridos, mis abuelitos Sara y Felipe, mi tío Felipe, mi mamá Sara y mi papá Fernando, a todos los extraño y los recuerdo siempre con mucho cariño.

A mi familia porque siempre he tenido su cariño, su confianza, su apoyo y su presencia en las buenas y en las malas de manera incondicional. Con ustedes he compartido alegrías, tristezas, sentimientos, emociones y momentos que nunca olvidaré.

A mis profesores de la Facultad de Ciencias y del Instituto de Matemáticas de la UNAM, Concha Ruiz, Paz Álvarez, Paco Struck, Dr. Alberto Barajas Celis, Dr. Michael Barot Schlatter, por compartir conmigo su sabiduría, su experiencia y su tiempo en cada curso impartido, recuerdo tantas veces, que incluso entre pasillos resolvían mis dudas o hacían que surgieran muchas más.

A mis alumnos de CCH Sur, de la Facultad de Ciencias y del Instituto Técnico y Cultural porque ustedes le dan sentido a mi vocación docente.

A mis doctores de Servicios Médicos de la UNAM y del Hospital Darío Fernández porque en su momento y hasta la fecha me han brindado todo su apoyo y profesionalismo para cuidar y mejorar mi salud.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por la oportunidad de vivir, de ser, de sentir, de amar, de crecer, de soñar, de aprender, de pensar, de creer, de actuar, de equivocarme, en fin, de tantos momentos y experiencias que la lista sería infinita, en especial mil gracias por la salud y el conocimiento que me permitieron concluir este proyecto.

Gracias mamá, Sara Figueroa del Olmo, papá, Fernando Pando León su recuerdo me acompañará siempre. Gracias a mi tía Socorro y a mi tío Jesús por dejarme aprender de ustedes y apoyarme en todas las decisiones que he tomado en la vida. A mis primos casi hermanos Isabel, Javier, Andrea y Lupita con quienes he compartido momentos importantes, travesuras, alegrías y tristezas. A mi tía Carmen, mi tío Carlos y mi tío Lalo que siempre han estado conmigo en las buenas y en las malas, todos ustedes son muy importantes para mí, los quiero mucho.

Gracias a mis profesores de la Facultad de Ciencias ya que afortunadamente tuve y tengo la oportunidad de aprender de muchos de ustedes, en especial recuerdo al Dr. Alberto Barajas Celis quien nos contagiaba siempre de su gran pasión por la teoría de números y la geometría moderna. Agradezco sinceramente a una gran maestra y amiga Concha Ruiz quien despertó mi interés por la labor docente, enseñar matemáticas no es fácil pero si tienes vocación, has dado un gran paso. A Paz Álvarez y a Paco Struck porque ellos me enseñaron que la geometría contiene temas fascinantes, interesantes y entretenidos como las teselaciones y los fractales.

Agradezco a Paco Struck Chávez quien dirigió la presente tesis MADEMS, todo su apoyo, paciencia, motivación, consejos y tiempo al compartir sus amplios conocimientos y experiencias. A Michael Barot Schlatter quien también aportó muchas ideas, inquietudes y comentarios que me hicieron trabajar más para mejorar esta tesis. Agradezco a los demás sinodales, Mtra. Martha Rosa del Moral Nieto, Mtra. Martha Diana Bosco Hernández y Mtro. Juan Recio Zubieta por su tiempo y disposición para revisar este trabajo.

Gracias a mi estimado Dr. Manuel González Vivian, mi médico cirujano y amigo a quien admiro mucho por su inigualable calidad humana y por ser un gran ejemplo a seguir. Gracias a su gran profesionalismo y sus consejos he podido mejorar muchísimo. De igual forma quiero agradecer enormemente a mi estimado Dr. Isaías Velázquez Espinosa, mi médico cirujano quien con su atención, experiencia y consejo, ha dejado una huella imborrable en mi vida y me ha hecho crecer como ser humano.

Gracias a aquellas personas que de una u otra forma han pasado por mi vida y que no menciono acá, sepan que ustedes también han sido parte importante, me han ayudado a crecer y eso no tiene valor…

ÍNDICE

Capítulo 3
Isometrías, simetrías y teselaciones

Capítulo 4
Experiencia docente, las teselaciones en los bachilleratos de la UNAM

Prólogo.

Antes de entrar en el extraño mundo de las teselaciones, me gustaría comentar cómo surge la idea de trabajar ese tema matemático como una propuesta para enseñar geometría a estudiantes de bachillerato.

Como estudiante de la Facultad de Ciencias, me encontré con las teselaciones en dos seminarios de geometría poco antes de terminar la carrera, nunca antes había oído esa palabra, ni sabía qué tipo de matemáticas estaban detrás de ella. Cursé ambos seminarios en el mismo semestre, uno con Paz Álvarez sobre las teselaciones de la Alhambra y el otro con Paco Struck sobre las teselaciones de Penrose. Desde ese momento me llamó la atención el tema, era divertido aprender geometría armando rompecabezas, encontrando patrones para cubrir el plano con muchas piezas iguales, cuidando de no encimarlas ni dejar huecos. Además, fue muy interesante conocer resultados sobre la teoría de grupos, movimientos rígidos en el plano y otros más que explican y demuestran matemáticamente el comportamiento de las teselaciones, cuándo tienen o no simetrías y por qué. Ello, generó en mí la inquietud de acercarme más al tema y descubrir que hay cosas realmente sorprendentes que se pueden crear y explicar con geometría. Cuando fui becaria de UNIVERSUM, el Museo de las Ciencias de la UNAM, hace aproximadamente siete años, realicé un proyecto sobre el mosaico de Penrose donde explicaba cómo construir la flecha y el papalote y su relación con la proporción áurea, las siete formas de rodear un vértice en esa teselación con flechas y papalotes, la existencia de piezas obligadas, los imperios, los moños y las corbatas, entre otras cosas…

El conocer cosas tan sorprendentes, interesantes y bonitas sobre esos extraños rompecabezas matemáticos me motivo a compartirlo durante mi experiencia docente con estudiantes adolescentes, una de tantas caras de la matemática, desconocida por muchos de ellos.

No podía dejar de mencionar en este prólogo al Dr. Alberto Barajas Celis, un excelente profesor emérito de la Facultad de Ciencias de nuestra máxima casa de estudios, quien me hizo vivir experiencias inigualables en cada una de sus clases. Además de ser un gran matemático, lograba contagiarnos la pasión por la matemática, sin duda, el hacedor de sueños es y será un gran ejemplo a seguir del buen docente…

Introducción.

El tema de cómo mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en bachillerato no es algo nuevo, desde hace varias décadas, los profesores que imparten su cátedra en el bachillerato se han enfrentado a múltiples problemáticas tanto culturales, sociales, académicas y didácticas para mantener y mejorar su desempeño docente en el aula, sin embargo, aún no se han logrado encontrar soluciones. La labor docente es una actividad humana en la que tanto profesores como estudiantes se ven influenciados por afirmaciones, ideas y creencias sobre lo difícil que resulta entender matemáticas a ese nivel escolar y estos comentarios se transmiten de generación en generación. Escuchar frases como "las matemáticas que veo en la escuela no sirven para nada", "para qué aprender cosas tan complejas si nunca lo voy a usar", "las matemáticas sólo sirven para atormentarte el cerebro", "no pude estudiar medicina porque no pase álgebra y geometría en el CCH", "mi maestra de matemáticas me confunde, no sabe enseñar", "si las clases de mate no fueran tan difíciles, entendería mejor" entre muchas otras, confirman que aún nos falta trabajar mucho más para obtener mejores resultados con nuestros grupos de estudiantes de bachillerato.

Es común escuchar que quien logra entender matemáticas es considerado un genio, como en el bachillerato se requiere de mayor madurez intelectual para manejar ideas, imágenes, conceptos y representaciones abstractas para así entender el tema, socialmente se piensa que sólo un ser superdotado al que le tocó el gen matemático que activó su cerebro, podrá lograrlo.

Actualmente hay gran variedad de recursos tanto en materiales didácticos como en estrategias pedagógicas para generar cambios que produzcan mejores resultados en los procesos de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas.

Se dice que la enseñanza de ésta rama del saber humano, juega un papel muy importante en el desarrollo intelectual, cultural y social de cualquier persona capaz de pensar. El docente es quien día a día adquiere experiencia, puede corregir estrategias y formas de trabajo en el aula para lograr que los estudiantes participen y se involucren con los demás compañeros para comprender el tema de matemáticas en turno.

En nuestro quehacer cotidiano como docentes nos enfrentamos a todo tipo de estudiantes, tanto a quienes rechazan la matemática por sentirse incompetentes o vencidos por ella, como a quienes ven en esa ciencia un espacio para trabajar aún más las habilidades que han logrado desarrollar desde pequeños.

Es entonces cuando surge la pregunta, qué matemáticas debemos enseñar, las que llevan al estudiante a memorizar conceptos, algoritmos y fórmulas para pasar un curso o aquellas que lo motivan a conocer, a entender, a preguntar, a equivocarse, a dudar, a razonar, a sorprenderse, a madurar mentalmente y aprender para la vida. Es posible reconocer la importancia de aprender matemática desde el preescolar hasta niveles más avanzados si consideramos a esta ciencia como un pretexto para aprender a pensar, pues nos dota de varias herramientas para observar, examinar, intuir, razonar, conjeturar, tomar decisiones en situaciones concretas y abstractas.

El trabajo de tesis está pensado para dar a conocer el extraño mundo de las teselaciones a estudiantes de bachillerato, dando un paseo por la geometría plana. La palabra **tesela** viene del latín *tessellae*, que a su vez viene del griego τεσσερες, que significa, cuatro. Los romanos construían los mosaicos con estas pequeñas piezas llamadas teselas. Las teselas son cada una de las piezas de arcilla, mármol, piedra, barro cocido, roca calcárea, cerámica o vidrio con que los antiguos formaban los pavimentos o mosaicos sobre la superficie, armando tipo rompecabezas distribuyendo el color y la forma de cada pieza, fijándolas con una masa de cemento. Todas las piezas eran elaboradas cuidadosamente y de distintos tamaños. Una teselación es el resultado de colocar muchas piezas "teselas" en el plano de tal forma que se forme un mosaico donde todas las piezas embonan perfectamente, no se enciman ni dejan huecos.

Dentro de los objetivos a alcanzar con el presente proyecto, se pretende que los estudiantes conozcan un poquito sobre esos rompecabezas infinitos llamados teselaciones, que observen y analicen propiedades geométricas como los movimientos rígidos en el plano, simetrías, que inventen y diseñen sus propias piezas para armar teselaciones y que descubran la frontera entre la ciencia y el arte al ver las teselaciones desde el punto de vista matemático y artístico.

El contenido de este proyecto de TESIS MADEMS se concentra en cuatro capítulos. En el primero, "Un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato", se abordan aspectos psicopedagógicos y didácticos sobre la enseñanza de la geometría en ese nivel escolar. En particular se mencionan aspectos relevantes de lo que plantean los dos bachilleratos de la UNAM en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, con el fin de ubicar el contexto en el cual se desarrollará el tema de teselaciones. Se trata de resaltar la importancia de aprender y hacer geometría en el bachillerato y su impacto en el estudiante. Posteriormente se presentan algunas posturas psicopedagógicas que sustentan el desarrollo de habilidades y destrezas para aprender geometría. En consecuencia, las estrategias didácticas que facilitan el aprendizaje de las teselaciones en el aula del bachillerato marcan un vínculo entre lo que exponen algunas teorías psicopedagógicas y lo que se aprende de manera significativa cuando se trabaja con ellas en el aula.

Otro punto no menos relevante en este capítulo, es el papel que juega el profesor, el estudiante, el contenido y las estrategias de aprendizaje durante las clases de geometría en el aula del bachillerato, así como el impacto de la tecnología computacional como medio de comunicación en el aula para visualizar conceptos geométricos.

En el segundo capítulo "Geometría, ciencia, arte y teselaciones" se presenta un texto que refleja la base de lo que se enseñó en la práctica docente tanto en el plantel seis de la ENP como en el plantel sur del CCH. Incluye una breve semblanza histórica sobre las teselaciones, una galería de patrones y teselaciones tanto antiguas como modernas, destacando el trabajo de un gran artista con dotes de matemático, las obras de MC Escher. El texto expone las nociones básicas para trabajar el tema de teselaciones en el plano euclidiano, así como el diseño y construcción de teselas, transformando polígonos al estilo Escher.

En el capítulo tres "Isometrías, simetrías y teselaciones", se presenta la segunda parte del texto y material utilizado en las sesiones de práctica docente como actividades, ejercicios y exámenes. La información y explicación de temas como movimientos rígidos para teselar el plano, grupo de simetrías del cuadrado, frisos, reptiles entre otros permite que el estudiante de bachillerato logre estudiar más detalladamente el tema de las teselaciones.

En el último capítulo se presenta la experiencia docente de haber trabajado en ambos bachilleratos de la UNAM, durante el curso de práctica docente II en la Escuela Nacional Preparatoria, plantel 6 y durante el curso de práctica docente III en el Colegio de Ciencias y Humanidades plantel sur. Se presenta una breve descripción de ambos centros de prácticas, descripción de la población escolar en los dos planteles, los objetivos y aprendizajes del tema de tesis MADEMS y por último las observaciones, reflexiones y conclusiones.

Capítulo 1

Un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato

"Enseñar no es una función vital, porque no tiene fin en sí misma;
La función vital es aprender"
(Aristóteles)

1. Aprender y enseñar geometría plana en los bachilleratos de la UNAM.

En la labor del verdadero quehacer docente es indispensable meditar sobre estas dos palabras "aprender" y "enseñar" que sin duda forman parte fundamental en el proceso que realizamos a diario en nuestras aulas del bachillerato. La primera implica adquirir conocimientos, habilidades, actitudes y valores por medio del estudio y la experiencia tanto fuera como dentro del aula. La segunda involucra ofrecer alternativas, métodos y estrategias que logran motivar, vincular, guiar y dirigir el aprendizaje significativo.

De esta forma, el profesor es el encargado de "enseñar" y el papel del estudiante es el de "aprender", sin embargo, hablar de un proceso que involucra enseñanza-aprendizaje de la geometría pero que va más allá de la enseñanza tradicional basada en aprendizajes memorísticos y monótonos, implica buscar alternativas para lograr aprendizajes que representen experiencias significativas que alcanzan trascender el ámbito escolar. Ello requiere que exista una buena comunicación en el aula entre los mismos estudiantes y el profesor, así, el intercambio de ideas que surgen de ambas partes cuando expresan puntos de vista, dudas, preguntas, conjeturas, deducciones y comentarios sobre el tema, fomentan la participación activa para que se aprenda de manera significativa.

Me parece importante, hacer notar que hay temas que aportan aprendizajes significativos tanto para el estudiante como para el profesor y no aparecen en el programa de estudios de los bachilleratos de la UNAM, y quizá en ningún otro plan de estudios avalado por la SEP, tal es el caso del tema de teselaciones, es un tema extracurricular que tiene alto contenido geométrico y artístico que puede ser conocido, comprendido y trabajado por los estudiantes de bachillerato.

Para presentar el tema de las teselaciones, qué son y cómo se construyen ante un público de adolescentes que cursan el bachillerato se requiere conocer y dominar el tema pero también es necesario conocer el perfil del alumno, su contexto académico y los objetivos del plan de estudios del plantel donde se trabaja la experiencia docente. En los tres años de la educación media superior es posible conocer, descubrir y aprender el tema de teselaciones dado que el conocimiento que requiere el estudiante para entender ese tema de geometría es el que se aprende en el nivel básico. Los temas de geometría plana actualmente vigentes en los programas de los dos bachilleratos de la UNAM, la Escuela Nacional Preparatoria y el Colegio de Ciencias y Humanidades, no son los mismos ni se abordan de la misma forma pero en ambas instituciones educativas se puede incluir el tema de teselaciones desde el primer año o desde los primeros dos semestres como una aplicación de la geometría euclidiana y su relación con el arte. En los dos primeros semestres de CCH los estudiantes ven temas de álgebra y geometría euclidiana, es este el momento justo de incluir el tema de teselaciones ya que podrán apreciar una de las aplicaciones de la geometría plana y relacionarla con su entorno. Mientras tanto, en el primer año de la ENP los estudiantes ven temas de álgebra elemental y problemas con ecuaciones de primer grado, pero dado que el programa no da espacio y cabida para que aprendan teselaciones podrán apreciarlo como tema extracurricular, pero de igual forma se logra acercar al estudiante hacia temas novedosos e interesantes de la geometría plana.

Aunque el enfoque, la secuencia y estructura del plan de estudios es muy diferente en ambos bachilleratos de la UNAM, la propuesta para enseñar teselaciones será la misma por estar dirigido para el mismo nivel educativo. La diferencia se dará precisamente en la forma de trabajo en el aula, en la manera de interactuar con el estudiante al abordar y plantear el tema en cada sesión, en el intercambio de ideas, dudas, preguntas, comentarios y conclusiones que vayan proporcionando retroalimentación al alumno, de este modo el profesor puede evaluar constantemente los alcances de los estudiantes al enfrentarse a este tema de geometría euclidiana.

Se pretende abordar el tema de teselaciones desde un modelo basado en la construcción del conocimiento, donde el estudiante ya posee ciertos conocimientos previos que le serán útiles para adquirir con mayor soltura y madurez el conocimiento nuevo. Dentro de los propósitos a alcanzar con los estudiantes de bachillerato, uno es mostrar los alcances de la geometría en el mundo de la ciencia y el arte para que comprendan que las Matemáticas son un lenguaje que crea vínculos con su entorno social, cultural, científico y artístico.

El tema de teselaciones contribuye al desarrollo del aprendizaje, de tal manera que el estudiante requiere generar estrategias para aplicar lo aprendido durante cursos anteriores, reconocer aspectos geométricos que se relacionan entre sí, logrando aprendizajes significativos, relacionar la geometría con los avances científicos y tecnológicos, desarrollar habilidad para reconocer, buscar, organizar y aplicar la información que va adquiriendo sobre las teselaciones. Así mismo, el alumno logrará aplicar los conocimientos matemáticos para crear diseños propios pero también la capacidad de trabajar en equipo en actividades dentro del aula, en el intercambio de ideas, puntos de vista, opiniones y conclusiones durante la discusión del tema. Incrementar la participación de los alumnos en concursos de temas de geometría que fomenten su superación académica y aprendizaje significativo.

La finalidad de la enseñanza de la geometría en la Enseñanza Media Superior desde mi punto de vista debe brindarle al adolescente un panorama general sobre los principales aspectos del conocimiento geométrico y del quehacer matemático que le permitirán acceder en un futuro a conocimientos más especializados, de tal modo que de un semestre o un año al siguiente, se recuerden y utilicen conocimientos adquiridos previamente, ya sea trabajándolos desde otro nivel de profundidad y extensión, o remitiéndose a su aplicación en otro contexto o temática, o incluso abordándolos desde una nueva perspectiva. Tal es el caso de las teselaciones, el tema muestra otra faceta de la geometría en el arte, sin dejar de lado otros objetivos como desarrollar el pensamiento geométrico, análisis lógico de argumentos, construcción de razonamientos, planteamiento de conjeturas a partir de descubrir patrones de comportamiento en las teselaciones, manejo de transformaciones geométricas en el plano.

De esta manera, para el buen desempeño docente es fundamental conocer y dominar el tema a impartir sea un tema que pertenezca a los planes y programas de estudio de alguna institución educativa o no, la forma de enfocarlo, presentarlo y trabajarlo con el estudiante, es lo que hace la diferencia y atiende a los principios educativos que pretende cada institución. La concepción de la geometría conlleva una intención del para qué queremos enseñarla y cómo contribuye a la formación del estudiante capaz de buscar y adquirir por sí mismo nuevos conocimientos, además de analizar e interpretar el mundo que lo rodea de manera reflexiva, analítica y constructiva.

Algunos aspectos fundamentales de enseñar geometría en el bachillerato son:

Buscar el desarrollo de habilidades de pensamiento que le permitan al estudiante adquirir por su cuenta nuevos conocimientos. Comprender el significado de conceptos, símbolos, patrones y procedimientos. Realizar análisis y establecer relaciones identificando semejanzas y analogías. Formular conjeturas, construir argumentos válidos y aceptar o refutar los de otros.

Lograr en los estudiantes desarrollar la capacidad de aprender tanto de los aciertos como de los errores. Efectuar generalizaciones a partir del análisis de similitudes y el uso de razonamientos inductivos o deductivos. Se busca una formación integral que prepare al estudiante para su desarrollo personal y académico para la vida pero la diferencia se encuentra en la forma de trabajo en el aula y en las estrategias didácticas de enseñanza-aprendizaje que utiliza el docente de matemáticas en dichas instituciones educativas para lograr un mejor resultado con sus alumnos.

En la siguiente cita se reflejan los principios que marca el plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, mismos que se desean alcanzar con los estudiantes al trabajar el tema de *"El extraño mundo de las teselaciones, un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato"*.

[1]"Más que privilegiar la memorización de una gran cantidad de contenidos matemáticos y la repetición de definiciones o la práctica irreflexiva de algoritmos, interesa poner énfasis en el significado de conceptos y procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos, en el tránsito de un registro a otro y en el desarrollo de habilidades matemáticas; entre estas últimas están: generalización (percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente); formalizar material matemático (operar con estructuras más que con el contexto de una situación, operar con numerales y símbolos, combinando reglas y estrategias); reversibilidad de pensamiento (invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento); flexibilidad de pensamiento (disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos); visualización espacial (percibir esquemas geométricos contenidos en otros más complejos, o bien adelantar mentalmente el tipo de figura resultante al aplicar algún movimiento o transformación a una figura dada). En consecuencia, resulta importante que los alumnos interactúen de forma activa (organizando, sistematizando, comparando, clasificando, analizando, explorando, argumentando, aplicando, etcétera) con la temática que van a conocer, de modo que además de favorecer una mejor comprensión de la misma, se les dote de herramientas intelectuales."

[1] Programa vigente en el 2009, del plan de estudios de matemáticas del CCH.

2. Teselaciones en el bachillerato.

La importancia de hacer geometría y su impacto en el estudiante.

La enseñanza de la matemática a nivel medio superior es un tema sumamente delicado, hay muchos problemas que repercuten en dicho proceso, aquí abordaré sólo un par de situaciones que trascienden directamente en el aprendizaje de la geometría: los altos índices de deserción en las aulas de matemáticas en el bachillerato y la poca relevancia que se le da a enseñar aplicaciones sobre temas de geometría en ese nivel escolar.

Sabemos que al inicio del curso en el CCH hay alrededor de veinticinco estudiantes por cada grupo y en las preparatorias de la UNAM son entre cincuenta y sesenta alumnos, sin embargo, en ambas instituciones a medida que avanza el semestre o el año escolar, los estudiantes pierden el interés por las clases de matemáticas y dejan de asistir a la escuela, así, al final del curso ya casi no hay alumnos en el aula que hayan seguido el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde un principio y hayan adquirido aprendizaje significativo del mismo. Esto no sólo sucede en éstas escuelas, es característico en otras instituciones y colegios de nivel medio superior tanto públicos como privados. Por ello considero que es un problema grave que requiere del trabajo docente para que su impacto no sea tan fuerte en futuras generaciones.

El problema no es la cantidad de alumnos en cada grupo que queda a cargo del docente. Si el problema fuera ese, estaría resuelto con armar grupos de estudiantes no muy numerosos donde la atención a cada uno de ellos puede ser más personalizada. Sabemos que no es así, el problema es la falta asistencia a los cursos porque no hay suficiente motivación e interés de los estudiantes por los temas de matemáticas.

Esto puede deberse a varias causas, a la forma en que el profesor desarrolla su plan de clase, a las creencias e ideas que se forma el alumno sobre la matemática que lo predisponen desde cursos anteriores.

En muchas ocasiones la ven sólo como una materia donde el objetivo es saber fórmulas para resolver muchos problemas, usar las que les sirven para obtener el resultado esperado y así poder pasar el examen correspondiente de cada unidad, sin encontrarle sentido útil y práctico a todo aquello que aprenden. La motivación en el aula juega un papel fundamental para que el alumno canalice toda su atención interés y energía en la participación activa en las clases de matemáticas, pero desafortunadamente, la parte que más se trabaja en el aula y fuera de ella, es la mecánica y memorística en cuanto a algoritmos, álgebra y aritmética se refiere.

Es posible que el alumno sepa resolver problemas usando las formulas correspondientes, esto enmarcado en la enseñanza tradicional, pero es mucho más importante que sepa plantear problemas en lenguaje algebraico y geométrico, esto implica mayor abstracción y compromiso de los adolescentes por comprender el tema y participar en clase, o decidir no entrar al aula para evadirlo. El profesor de matemáticas se pregunta cómo va a aprender un estudiante que no asiste a clases o falta con mucha frecuencia, de manera que su aprendizaje sea significativo. La preocupación es cómo lograr que el estudiante asista a clases, cómo motivarlo para que se interese, aprenda y no abandone el curso.

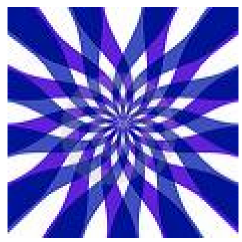
Además, otro factor poco motivante para el estudiante de bachillerato es no encontrar la utilidad de aquello que le enseñan en las clases de matemáticas, cuándo éste se pregunta, "y todo eso a mí para qué me va a servir", y no encuentra respuesta que lo motive a seguir adelante. La clave está en preparar bien una clase, planear estrategias de enseñanza y promover en los estudiantes diversas estrategias de aprendizaje para entender y recordar el tema.

Aunado a eso, la enseñanza de la geometría en este nivel educativo no es tan relevante como la del álgebra, se le brindan pocos espacios en los programas de estudio del bachillerato, siendo que hay gran variedad de temas con aplicaciones geométricas que pueden resultar de gran interés para el alumno adolescente porque puede reconocer, investigar y ampliar su concepción geométrica, reestructurando y comprendiendo ideas nuevas sobre esos temas. Se le da poco énfasis al desarrollo de estrategias de pensamiento lógico tanto inductivo como deductivo, es necesario enfrentar al estudiante a retos nuevos. En ocasiones se desconoce el alcance de la geometría como parte de la matemática que proporciona el desarrollo de habilidades de pensamiento con las cuales es posible estructurar mejor nuestras ideas, así como deducir pensamientos claros y elocuentes.

Bajo todos estos argumentos, la preocupación por conseguir que cada vez sean menos los alumnos que abandonen el aula de bachillerato y sean más los que adquieran un aprendizaje de la matemática, en particular de la geometría, nos lleva a buscar que el aprendizaje de ésta sea significativo, es decir, que le permita al estudiante hacer suyo el conocimiento, que lo entienda y este cause un reacomodo de ideas en su mente haciéndolo desarrollar una estructura de pensamiento lógico, una actitud crítica al tomar decisiones para comprender y resolver problemas abstractos, complejos o de su entorno. Al mismo tiempo es preciso fomentar la preparación de profesores comprometidos con la enseñanza de la geometría que conozcan el contexto en el que viven sus estudiantes para así trabajar con ellos y brindarles un curso donde el estudiante aprenda junto con el docente y viceversa.

La enseñanza de la geometría se convierte en algo fundamental para el ser humano ya que ésta forma parte de nuestro entorno tanto histórico como cultural.

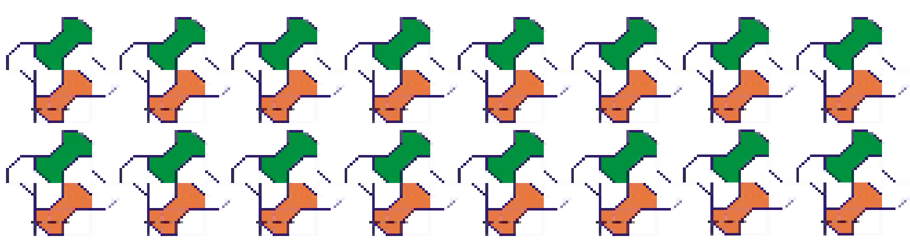
Es difícil pensar en algo donde no aparezca de alguna forma la geometría. Constantemente nos fijamos en el tamaño, la forma, la dimensión, el orden, la posición, la estructura y otras propiedades de miles y miles de objetos que inventa el hombre o que se encuentran en la naturaleza. Para referirnos a todo eso usamos un lenguaje geométrico que nos permite comunicar a otros nuestras ideas acerca de las características de los objetos que nos rodean ya sea por medio de símbolos, de trazos geométricos o usando el lenguaje geométrico de conceptos que entendemos intuitivamente pero que a veces no es tan sencillo definir como puntos, líneas, ángulos, perspectiva, paralelas, perpendiculares, y muchos más.

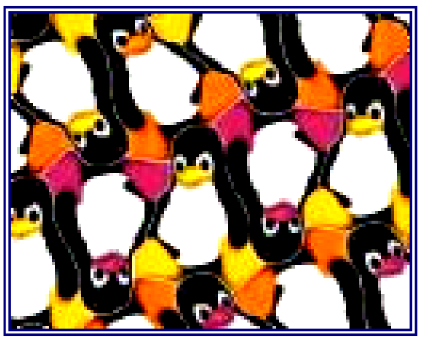

La geometría puede pensarse como una parte de la matemática de alto desarrollo intelectual ya que nos permite observar, conocer, encontrar, analizar, estructurar, descubrir, investigar, comparar, razonar, organizar y visualizar tanto lo que nos rodea en realidad como todo aquello que no percibimos pero somos capaces de imaginar, intuir, deducir y crear en nuestra mente. Además gracias a la geometría el estudiante adquiere mayor capacidad y criterio para escuchar, leer y argumentar ya que cuando el alumno estudia geometría, deja de aceptar a ciegas, proposiciones e ideas y se le enseña a pensar de forma clara y crítica antes de hacer conclusiones.

La didáctica de la Matemática como herramienta para desarrollar estrategias de enseñanza que apoyen al profesor al desarrollar su labor docente y estrategias de aprendizaje que generen en los estudiantes la curiosidad por aprender y hacer geometría en el aula, nos lleva a concluir que para conocer, constituir y crear "teselaciones" en el aula de bachillerato necesitamos considerar su impacto en el estudiante, es decir, qué tanto va a seguir, entender y recordar del tema al conocerlo, trabajarlo y relacionarlo con sus ideas previas sobre la geometría y sus aplicaciones.

¿Por qué surge la idea de enseñar teselaciones en el bachillerato?



En "el extraño mundo de las teselaciones, un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato" desarrollo un tema de geometría euclidiana que trabaja con patrones y simetrías, además tiene aplicaciones tanto en el arte como en la ciencia y en nuestra vida cotidiana lo cual logra que el impacto que tiene este tema en los adolescentes sea significativo ya que lo relacionan con su entorno. El objetivo es lograr que el estudiante desarrolle su percepción e intuición geométrica al observar, conocer, identificar, determinar, y comprobar cuáles son los patrones que hay en cada diseño de una teselación. También se busca que comprenda y maneje el concepto de simetría descubriendo cómo patrones y figuras interesantes tienen una explicación matemática. El objetivo se cumple cuando el alumno observa, conoce, arma y diseña los rompecabezas infinitos llamados teselaciones, como éste de los pingüinos.



Logramos cubrir el plano con muchos pingüinos en distintas posiciones, siguiendo un patrón sin encimar piezas ni dejar huecos. Todos ellos tienen la misma forma y el mismo tamaño.

A ese rompecabezas infinito le llamamos teselación monoédrica con pingüinos en el plano euclidiano.

Al trabajar con ejemplos y diseños de teselaciones vamos logrando que los estudiantes se apropien de conocimientos nuevos a partir de lo que ellos conocen de geometría; a través de ciertas habilidades y destrezas que ellos mismos ponen a prueba durante el trabajo en el aula: el alumno observa, analiza, intuye, pregunta, compara, razona, deduce, interpreta, construye, diseña y conoce diversos tipos de teselaciones en el plano.

Trabajamos constantemente con conceptos matemáticos como forma, figura, tamaño, color, movimiento, simetría, distancia, rotación, translación, reflexión, deslizamiento, orientación, colocación, ordenación, etcétera. La mayoría de estos conceptos no sólo se utilizan dentro del aula cuando se enseñan temas en cursos posteriores al primer año o los primeros semestres del nivel medio superior, también adquieren gran importancia en nuestro lenguaje cotidiano cuando expresamos ideas y nos referimos a todo aquello que nos rodea desde el punto de vista geométrico. De este modo se refleja cómo el saber geometría trasciende el ámbito escolar, amplía nuestra capacidad de imaginación, creatividad y argumentación.

3. Posturas psicopedagógicas que sustentan el desarrollo de habilidades y destrezas para aprender geometría.

La intervención de la psicología educativa, la pedagogía y la didáctica de la matemática en las habilidades cognitivas que desarrolla el adolescente cuando se le enseña a pensar de manera lógica y estructurada, nos permiten estar al tanto de lo que será capaz de lograr y percibir al conocer y trabajar con temas de geometría euclidiana. El extraño mundo de las teselaciones, es un tema apropiado para entender cómo el desarrollo de la habilidad visual y destreza geométrica de los estudiantes adolescentes puede mejorar significativamente al trabajar bajo el enfoque del aprendizaje estratégico.

En geometría plana se estudian conceptos que por ser abstractos, requieren de una imagen o representación visual más que de una descripción con palabras para lograr ser reconocidos y trabajados por los estudiantes en el aula. La frase "una imagen dice más que mil palabras" tiene un gran significado en ésta área de las matemáticas dado que muchas ideas pueden entenderse mejor cuando se tiene una imagen que muestre de qué se trata, por mencionar un ejemplo, explicar con palabras qué es un ángulo no es algo más sencillo que dibujarlo en un papel y a partir del dibujo entender de qué se trata, qué características y propiedades tiene, entre muchas otras preguntas. Es muy cierto que cada estudiante posee habilidades, destrezas y experiencias que le permiten seguir, entender y recordar lo que escucha, lo que ve y lo que hace cuando trabaja con temas geométricos, mientras para algunos la parte visual da mucha información, a otros no les dice mucho o prácticamente nada. Entonces, el profesor debe tomar en cuenta que cada estudiante aprende el mismo tema de diferente forma, en base a sus experiencias previas y por lo tanto tendrá que utilizar estrategias de enseñanza que le ayuden a explicar y abordar el tema de acuerdo a las condiciones de cada grupo.

Considero que una buena alternativa para dar a conocer el tema de las teselaciones a estudiantes adolescentes en ambas instituciones educativas de la UNAM es mediante la perspectiva teórica del constructivismo ya que el alumno construye esquemas de pensamiento que le permiten tener acceso a conocimiento nuevo a partir de conocimientos previos y el estudiante logra tener un aprendizaje significativo.

El constructivismo

La perspectiva constructivista en la educación matemática contempla varios elementos principales, tales como la actividad intelectual que realiza el estudiante al pensar, el aprendizaje individual y social mientras explora, deduce y aprende. La evaluación del potencial de aprendizaje se refleja en el avance que ha producido el cambio entre lo que el estudiante ya sabía y lo que ahora sabe, el seguimiento en el proceso de construcción de los conocimientos y la atención a los conocimientos previos de los alumnos para crear aprendizajes significativos, estableciendo siempre todo tipo de relaciones entre los contenidos que se estén trabajando, ya sea por medio de la formulación de preguntas, haciendo conjeturas con la posibilidad de generalizar y transferir los conocimientos a otros contextos.

Para aprender diversos aspectos de las teselaciones es muy importante el trabajo en el aula bajo el enfoque constructivista. Además se puede observar como la ciencia se involucra con el arte y cómo interviene la capacidad de interpretación que el estudiante le da a cada diseño trabajado geométricamente. Todo esto implica que el trabajo en el aula también se basa en el aprendizaje estratégico, mismo que requiere de la enseñanza presencial donde el profesor prepara actividades con ausencia de algunas indicaciones pero da al alumno consejos y recomendaciones que le serán útiles para trabajar las actividades. En otras ocasiones dará instrucciones detalladas si así lo requiere el desarrollo de la actividad.

El aprendizaje estratégico logra dotar al alumno de procesos reguladores en forma de guías o pautas de interrogación que él mismo debe ir cerrando al tomar decisiones apropiadas que le permitan aproximarse al objeto de aprendizaje, en nuestro caso al estudio de las teselaciones.

Los procesos de aprendizaje pueden ser intencionales, concientes, contextualizados, es decir, dependen de la variedad de situaciones relevantes que se presenten en el aula cuando se enseña y se aprende geometría, recodemos que no todos los grupos son iguales, cada curso tiene sus propias metas y limitaciones. Hay además varios tipos de conocimientos, el declarativo que indica el qué, el procedimental que enseña cómo, el actitudinal nos dice dónde y el estratégico que nos permite determinar cuándo y por qué, todos ellos juegan un papel fundamental durante el trabajo matemático en el aula del bachillerato al aprender, armar y diseñar teselaciones.

Enseguida intentaré explicar específicamente qué tipos de aprendizaje son los más apropiados para seguir, entender, y recordar conceptos geométricos en el plano. Ha habido discusiones sobre si el aprendizaje y rendimiento escolar del alumno queda determinado por el grado de inteligencia y el avance cognitivo, lógico y formal que posee cada uno de ellos de manera innata o por el que se adquiere en base a las experiencias a las que se enfrenta en el trabajo cotidiano tanto dentro como fuera del aula, modificando esquemas de pensamiento así como habilidades y destrezas geométricas.

Para ahondar un poco más sobre estas perspectivas, a continuación mostraré algunas posturas psicopedagógicas que sustentan el desarrollo de habilidades y destrezas para aprender geometría enfatizando que el estudiante es el principal responsable de su aprendizaje, estar dispuesto a aprender es indispensable para poder lograrlo. La construcción, visualización y asimilación del conocimiento geométrico forman parte de del desarrollo intelectual, lógico y deductivo de cada estudiante y son fundamentales para el aprendizaje significativo.

Tipos de aprendizaje que adquiere el estudiante cuando se le enseñan teselaciones.

Aprendizaje conceptual	Aprendizaje presencial	Aprendizaje actitudinal
Figuras geométricas que teselan o no el plano, polígonos regulares: triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos.	Con figuras geométricas en cartulina previamente elaboradas por los estudiantes, construyen diferentes tipos de teselaciones, observan que es posible pegar lados iguales de algunos polígonos sin encimar piezas ni dejar huecos, pero notan que con los pentágonos no es posible.	Trabajo colaborativo al armar teselaciones en equipo. Intercambio de ideas al comparar las teselaciones de unos con otros. Vivencia real y sorpresiva no lograr teselar con pentágonos regulares. Encuentran relación muy estrecha entre el arte, las matemáticas y su vida cotidiana.
Tipos de vértices en una teselación de Penrose, piezas que lo forman y los nombres que reciben.	El estudiante observa y encuentra las siete formas de rodear un vértice, identifica las piezas que lo rodean y da sus nombres.	Trabajo individual al buscar tipos de vértices. Argumenta por qué son todos y no hay más.
Grupo de simetrías del cuadrado. Rotaciones, reflexiones.	El estudiante manipula un cuadrado para encontrar su grupo de simetrías. Observa los resultados que van dando según los movimientos que realice con el cuadrado.	Trabajo individual y colaborativo ya que cada estudiante va encontrando sus propias respuestas y las compara con los de sus compañeros.

El cuadro anterior representa una pequeña muestra del tipo de aprendizajes significativos que adquiere el adolescente cuando trabaja con conceptos geométricos para analizar y diseñar teselaciones.

Entre los psicólogos que aportan resultados interesantes sobre la perspectiva constructivista, el aprendizaje por descubrimiento, el aprendizaje colaborativo y el aprendizaje estratégico para obtener mejores resultados en el aprendizaje significativo de la geometría destacan Jean Piaget, Vigostky, Bishop y Ausubel.

Jean William Fritz Piaget (1896-1980)

Con su teoría de la equilibración, Piaget de origen suizo, quien a pesar de ser biólogo y no matemático, proporciona una estructura capaz de abarcar varios aspectos sobre cómo el estudiante mejora sus nociones en la construcción del conocimiento. Él opina que el pensamiento del ser humano es de orden superior, más abstracto y lógico a medida que avanza su desarrollo por varias etapas de la vida desde recién nacido hasta llegar a la vida adulta. Argumenta que el aprendizaje comienza por descubrimiento cuando el pequeño de apenas unos meses observa, toca, siente, percibe y descubre su entorno, posteriormente el niño explora, clasifica, organiza y crea. Más adelante, ya en la etapa de operaciones concretas, el niño comprende el proceso de la reversibilidad, comprueba hipótesis, hasta ser capaz de hacer deducciones y conjeturas, así como de desarrollar un pensamiento lógico y formar razonamientos mediante abstracciones.

El aspecto psicológico social abarca todo lo que el niño piensa y descubre por sí sólo, lo que aprende de su familia, de la escuela, de los amigos, así como del nivel de desarrollo de su inteligencia. Lo cierto es que cada individuo es diferente, aprende y desarrolla habilidades pero no al mismo tiempo que los demás. Según Piaget, el sujeto construye su conocimiento a medida que interactúa con la realidad, así los estudiantes de bachillerato trabajarán interactuando con conceptos, imágenes y objetos geométricos de tal forma que el adolescente reestructura sus esquemas cognitivos.

En la teoría de Piaget surgen varios conceptos: acomodación, conservación, asimilación y equilibración, estos forman parte de los cambios constantes en las estructuras mentales del estudiante durante el proceso de aprendizaje, se llevan a cabo mientras percibe y procesa la información que será significativa. A partir de cierto conocimiento previo, el estudiante pasa de un estado de menor conocimiento a un estado de mayor conocimiento, surgiendo así una nueva estructura mental distinta a las anteriores que las incluye porque forman parte de lo que él ya sabe. Cuando se conoce algo nuevo, se adapta a la situación utilizando mecanismos de asimilación y acomodación. En la asimilación, el estudiante incorpora la nueva información haciéndola parte de su conocimiento; en la acomodación, transforma la información que ya poseía en función de lo nuevo. Esta relación entre acomodación y asimilación es interactiva y el resultado es la equilibración; el equilibrio entre las contradicciones o confusiones que pudieran surgir entre los conocimientos previos y la información nueva.

En el caso de las teselaciones, el estudiante conoce figuras geométricas, reconoce patrones, formas, tamaños, colores, simetrías y es capaz de llegar al estado de equilibración cuando utiliza todo eso que ya sabe para conservar, asimilar, entender, acomodar y trabajar con conceptos nuevos cuya base son sus conocimientos básicos de secundaria.

Para Piaget, el aprendizaje depende fundamentalmente del nivel de desarrollo cognitivo del sujeto en las distintas etapas de su vida, el alumno adolescente se encuentra en una etapa de transición entre el período de las operaciones concretas y el de operaciones formales. Por ello, algunos aún no tienen la madurez suficiente para asimilar conceptos abstractos y es por ese motivo que les parece un reto entender las matemáticas de bachillerato. Indudablemente, el grado de desarrollo en habilidades y en destrezas geométricas que posee el estudiante de acuerdo a su experiencia de vida y su compromiso por aprender le permitirán trabajar mejor para aprender de manera significativa el tema.

Lev Semiónovich Vigotsky(1896-1934)

La teoría de Vigotsky quien es de origen ruso, explica principalmente que el aprendizaje es un proceso constructivo en el que cada individuo tiende a desarrollarse social, cultural y cognitivamente. El medio en el cual se desenvuelve al interactuar con el otro, ejerce una influencia entre el aprendizaje y el desarrollo cognitivo de tal forma que si un estudiante tiene más oportunidades de aprender que otro, no sólo adquiere más información, sino que además, la forma en la que la recibe y procesa mentalmente le brinda un mejor desarrollo intelectual. Considera que el aprendizaje significativo se da como resultado de un proceso activo en el cual es tan importante el contexto social como la capacidad de imitación. Muchas personas que conviven con el estudiante intervienen en el desarrollo de sus capacidades y habilidades cognitivas, así como en su desarrollo cultural y social dado que el ser humano aprende imitando patrones ya sean de conducta o cognitivos. En el quehacer docente, el maestro de matemáticas averigua los conocimientos previos que sus estudiantes tienen sobre la geometría, ayuda a construir los conceptos, establece puentes entre los conocimientos previos y la nueva información, organiza los contenidos, elige las estrategias y actividades, según el nivel de madurez intelectual de los alumnos y su motivación. Vigotsky logra darle mayor importancia a la actividad social ya que el estudiante aprende mejor cuando lo hace con sus compañeros. Si pensamos en una clase de geometría donde el profesor explica teselaciones, permite la participación y opinión de los estudiantes, nos damos cuenta que cada estudiante aprende de los otros. Es cierto que el estudiante competente tiene mayor habilidad para adquirir conocimientos ya sea en el aula, de manera independiente o autodidacta pero igualmente adquiere experiencias que lo hacen aprender del otro cuando escucha opiniones de estudiantes menos competentes y también puede aportar comentarios que sirvan para aclarar más dudas y preguntas del tema de geometría que se esté discutiendo en la clase.

Dado que Vigotsky señala que el desarrollo intelectual del estudiante no puede entenderse si no se toma en cuenta el medio social en el que está inmersa la persona, el desarrollo de las funciones psicológicas superiores se da primero en el plano social y después en el individual donde el aprendizaje y el desarrollo son dos procesos que interactúan para lograr la transmisión y adquisición de conocimientos y patrones.

Al explicar el tema de teselaciones se utiliza constantemente la noción de patrones y formas en las figuras geométricas, el trabajo colaborativo es una estrategia que favorece la interacción entre los estudiantes de tal manera que al observar cómo lo hacen los demás, los estudiantes pueden identificar otros patrones de armado para obtener distintas teselaciones. Así, el aprendizaje de ellos no sólo depende de lo que logre entender en forma individual, las experiencias, comentarios, sugerencias y dudas de los demás enriquecen el proceso de enseñanza–aprendizaje de las teselaciones.

Alan Bishop

El filósofo y matemático inglés Alan Bishop, en su libro Enculturación matemática comenta:

[2]"La matemática se encuentran en una posición nada envidiable: es una de las materias escolares más importantes que los niños de hoy deben estudiar y, al mismo tiempo, una de las peor comprendidas. Su reputación intimida. Todo el mundo sabe que son importantes y que su estudio es necesario. Pero pocas personas se sienten cómodas con ellas; hasta tal punto que en muchos países es totalmente aceptable, en el ámbito social, confesar la ignorancia que se tiene de ellas, fanfarronear sobre la propia incapacidad para enfrentarse a ellas, ¡e incluso afirmar que se les tiene fobia! Entonces, ¿es que los profesores de todo el mundo son unos sádicos legitimados que torturan mentalmente a sus alumnos? ¿O quizás los alumnos son masoquistas y disfrutan con la emoción de la tortura auto inflingida? Hablando más en serio, ¿sabemos realmente en qué razones se basa la actividad matemática que se desarrolla en la escuela? ¿Realmente tenemos confianza en nuestros criterios para juzgar qué es importante y qué no? ¿De verdad sabemos qué deberíamos hacer?..."

[2] Alan Bishop, Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural, Paidós, Barcelona, 1999, p. 1

Estas preguntas también son importantes cuando las consideramos en nuestra labor docente durante el proceso de andamiaje que se da con los estudiantes de nivel bachillerato. Se denomina andamiaje a los recursos empleados por los docentes para fortalecer y estimular las destrezas y aprendizajes previos que poseen los alumnos. El proceso es la etapa en que se construye esta estructura, cuyo objetivo es elevar los alcances de los aprendizajes de los alumnos.

[3] Dodge indica tres tipos de andamiaje: La recepción. Antes de iniciar la tarea, el docente orientará a los alumnos en el mejor uso de los recursos con los que trabajarán. La transformación. Es conveniente trabajar con recursos que faciliten la lluvia de ideas, comparar, contrastar e impulsar la toma de decisiones. La producción. Se aconseja trabajar con guías que propongan el desarrollo de las actividades a realizar, aprovechar al máximo los recursos multimedia. El facilitar estructuras de aprendizaje tiene como objetivo la apropiación de las mismas para luego trabajar de manera autónoma.

La responsabilidad para llevar a cabo un buen proceso de andamiaje no sólo depende del maestro, ni tampoco es únicamente tarea del alumno, es una responsabilidad conjunta que primero se aprende a partir de lo que el docente explique y realice, para que luego el estudiante lo ponga en práctica.

[3] Dodge, B. J. (1995). Webquests: a structure for active learning on the World Wide Web. *The Distance Educator*, v.1, no. 2.

David Paul Ausubel (1918-2008)

Así mismo, Ausubel en su teoría del aprendizaje significativo por descubrimiento nos revela que el aprendizaje escolar puede lograrse a través de una estrategia de enseñanza y puede lograr un aprendizaje significativo o memorístico y repetitivo. De acuerdo al aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los que ya posee, es decir que, el contenido del aprendizaje debe incluir información que el alumno ya conoce así como conocimiento nuevo pero también es necesario que el alumno se interese por aprender lo que se le está mostrando.

Para Ausubel aprender es sinónimo de comprender, lo que se comprende es lo que se aprende y se podrá recordar mejor. En consecuencia, los contenidos de aprendizaje necesitan ser revelados al estudiante de tal manera que el orden y secuencia tome en cuenta los conocimientos previos que ellos tienen o no al momento de entrar en contacto con información nueva. Las habilidades para transmitir conocimientos por parte del profesor también deben ser adecuadas para producir aprendizaje significativo, más aún si toma en cuenta los conocimientos previos del estudiante y su capacidad de comprensión.

El aprendizaje significativo produce una retención más duradera de la información, facilita el alcanzar nuevos conocimientos relacionados con los anteriormente adquiridos de forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido. La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo. Es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del alumno. Es personal, ya que el significado que representa cada aprendizaje depende de los recursos cognitivos del estudiante.

El potencial del aprendizaje significativo y estratégico en la enseñanza de la geometría se incrementa notablemente cuando se trabaja bajo un estilo cognitivo del enseñar para aprender, es decir, el estudiante se vuelve constructor de su aprendizaje gracias a la intervención de otros alumnos más competentes al verse involucrados en el aprendizaje activo y participativo, organizándolo a partir de experiencias previas donde los estudiantes aprenden a conocer, aprenden a hacer, aprenden a convivir y compartir experiencias con los demás y como parte de todo ello, aprenden a ser.

4. Estrategias didácticas que facilitan el aprendizaje de las teselaciones en el aula del bachillerato.

Para lograr que los estudiantes desarrollen habilidades cognitivas y capacidades que aparecen en los objetivos de aprendizaje que se dan durante el trabajo en el aula mientras el alumno conoce y se apropia del conocimiento matemático se requiere que el profesor de matemáticas reconozca qué tipo de habilidades serán las más adecuadas para conocer, entender y aprender sobre las teselaciones. Para ello, mencionaré distintos tipos de estrategias.

Estrategias de Aprendizaje: son procesos que le permiten al estudiante tomar decisiones de manera conciente acerca de qué conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales poner en marcha para conseguir un objetivo de aprendizaje, tomando en cuenta un contexto definido por condiciones específicas.

Estrategias de Apoyo: son procesos que brindan al alumno un ambiente de confianza, aceptación social, satisfacción personal, seguridad en sí mismo, donde el profesor logra identificar tanto el nivel de autoestima y de autoconcepto de sus estudiantes, además de percibir sus intereses personales e intelectuales. La motivación extrínseca se da cuando se tiene control sobre el trabajo en el aula, las tareas realizadas y entregadas que le otorgan al estudiante participaciones o puntos extra para su calificación. La motivación cognitiva es la que el estudiante tiene por aprender y es sin duda, el motor que lo impulsa a observar, preguntar, investigar y querer saber más sobre el tema. La motivación intrínseca se da en el alumno cuando se enfrenta a retos interesantes al trabajar con el tema matemático. En nuestro caso, al construir teselaciones descubre una satisfacción personal por haber logrado armar ese tipo de rompecabezas y entender de qué se trata. El llegar a la respuesta correcta o el resultado esperado le da mayor seguridad y confianza en sí mismo, eso lo alienta seguir adelante.

Estrategias de Procesamiento: Estas se dan al seleccionar, resumir, subrayar y enfatizar la idea principal que se va a trabajar, es aconsejable usar imágenes, esquemas, diagramas de árbol, mapas conceptuales, mapas mentales y destrezas heurísticas que le permitan al estudiante partir de lo que ya sabe para explorar el tema y trabajar con él, emplear comparaciones, modelos, analogías, apuntes, habilidades nemotécnicas, predecir, parafrasear, diálogo entre pregunta y respuesta, hacer conjeturas y analizar varios puntos de vista sobre el tema.

Estrategias Meta-cognitivas: la meta atención consiste en darse cuenta de lo que ya se sabe y de lo que no, para ello se recomienda establecer una jerarquía de los estímulos más relevantes que han logrado que cierto conocimiento haya sido adquirido de manera significativa.

La meta comprensión a nivel interpretativo y aplicado se basa en comprobar si se ha entendido una idea, que el estudiante logre explicarla con sus propias palabras, buscar ejemplos distintos a los dados, etc. La meta memoria se basa en hacer evidente todo aquel conocimiento que ha quedado registrado en nuestra memoria a largo plazo. Todos estos procesos forman parte de lo que el estudiante debe realizar de manera consiente durante su aprendizaje.

Estrategias de Personalidad, dominio y control: Estas implican, tratar de estar bien informado, analizar con claridad y precisión la información, controlar la impulsividad y sobre todo mantener una actitud crítica.

Las estrategias antes mencionadas juegan un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría porque todas ellas tienen la finalidad de promover el desarrollo de habilidades que brinden oportunidades de desarrollo mental, emocional, social y académico a los estudiantes de bachillerato.

Dentro de los objetivos del **entrenamiento cognitivo** se toman en cuenta los aspectos cognitivos, motivacionales y los rasgos de personalidad del profesor y sus alumnos a fin de que el proceso de enseñanza–aprendizaje tenga éxito tanto en la adaptación al entorno, modificación del ambiente, búsqueda de nuevas situaciones, toma de decisiones basadas en la comunicación en el aula, desarrollo al máximo de la inteligencia creativa, promoviendo el descubrimiento, la imaginación, la producción y suposición de ideas lógicas y acordes al trabajo en el aula.

Con esta perspectiva educativa basada en el aprendizaje estratégico se pretende modificar y perfeccionar capacidades y habilidades del alumno adolescente al trabajar con conceptos geométricos, activar estrategias que le permitan pensar y argumentar mejor, inducir y deducir estrategias para plantear y resolver problemas concretos, promover el desarrollo de habilidades de razonamiento abstracto, para ello se requiere dominio de conocimientos y habilidades básicas como leer, escribir imaginar y pensar.

5. El profesor, el estudiante, el contenido y las estrategias de aprendizaje durante las clases de geometría en el aula del bachillerato.

"Querer aprender y saber pensar son las condiciones personales básicas que permiten la adquisición de nuevos conocimientos y la aplicación de lo aprendido de forma efectiva cuando se necesita".

Alonso Tapia

El **constructivismo** surge como una perspectiva teórica preocupada por entender los problemas de la formación del conocimiento en el ser humano. Existe la convicción de que los seres humanos son producto de su capacidad para adquirir conocimientos y para reflexionar sobre si mismos, esto ha permitido al hombre, anticipar, explicar y controlar la naturaleza, así como construir la cultura. El conocimiento se construye activamente por seres pensantes y no se recibe pasivamente del ambiente. Tanto el constructivismo psico-genético de Jean Piaget como el constructivismo social de Lev Vigotsky son parte fundamental para el desarrollo integral del ser humano. En el enfoque constructivista, tratando de conjuntar el "qué" y el "cómo" de la enseñanza, la idea central es "enseñar a pensar y actuar sobre contenidos significativos".

En el proceso de enseñanza-aprendizaje hay cuatro factores indisolubles dentro del salón de clase: el estudiante, el profesor, el contenido a aprender y las estrategias de aprendizaje. El **estudiante** adolescente debe ser responsable de su proceso de aprendizaje, él es quien construye su propio conocimiento y nadie puede sustituirle en esa tarea. La actividad mental constructiva y social realizada por el alumno va a determinar su aprendizaje, es él quien aprende y si él no lo hace, nadie, ni siquiera el profesor puede hacerlo en su lugar.

El estudiante no es sólo activo cuando explora, manipula, descubre o inventa, también lo es cuando lee, observa y escucha las explicaciones y comentarios del profesor o de sus compañeros.

El aprendizaje es el resultado de un proceso de construcción a nivel presencial y social, los estudiantes construyen o reconstruyen objetos de conocimiento matemático a partir de lo que ya está escrito y de la información que el profesor les exponga como punto de partida para trabajar con teselaciones, así el alumno necesita de los contenidos que va a aprender.

Dado que el aprendizaje de las teselaciones depende de ciertos contenidos geométricos que el profesor ya conoce y maneja adecuadamente, su papel no puede limitarse únicamente a crear las condiciones óptimas para que los alumnos realicen una actividad donde trabajen varias habilidades y estrategias para comprender más sobre el tema; además intentará orientar la actividad de tal forma que los contenidos geométricos sean significativos como saberes culturales.

La aplicación de la teoría constructivista, implica para el estudiante cambios muy significativos al desempeñar su papel en el bachillerato, pasaría de ser un alumno pasivo a un ser humano dinámico, tendrá que preguntar, investigar y analizar de manera responsable y conciente, ya que se convierte en el principal responsable de alcanzar y apropiarse de sus conocimientos según su interés y compromiso por aprender.

Las consecuencias de adoptar un enfoque de este tipo en la educación matemática implican para el docente llevar una pedagogía constructivista, le exige mayor entrega a su profesión, mayor responsabilidad, mayor conocimiento del estudiante y su entorno. Le exige una gran capacidad de aceptación y respeto por la opinión del otro para comprobar, decidir, acordar y estructurar los conocimientos que integran tanto la versión de los estudiantes como la suya. Además necesita trabajar con una actitud crítica, haciendo preguntas que lleven al estudiante a pensar y logre así responder de acuerdo al conocimiento adquirido en ese momento.

El **profesor** debe conocer y dominar el contenido matemático que va a presentar al estudiante, debe poseer mucha creatividad para construir situaciones didácticas que favorezcan el aprendizaje en el aula, parte importante de su tarea como docente es identificar qué conocimientos son esenciales para seguir, entender y recordar el tema de teselaciones, enfatizar siempre lo más importante para garantizar que el estudiante pueda identificar a partir de lo que ya sabe, qué es lo indispensable que debe saber y que le hará comprender mejor el tema.

En cuanto a los **contenidos geométricos** por aprender y las **estrategias de aprendizaje**, de nada sirve enseñar algo que será olvidado después del examen porque no hubo ningún proceso de asimilación al no impactar al alumno, el que el estudiante se quede con dudas, conocimientos inconexos y superficiales no garantiza un aprendizaje significativo. Con frecuencia sucede que el profesor tiene que volver a enseñar gran parte de lo que el alumno ya debería saber, esto implica invertir tiempo y recursos, además de que deteriora la autoestima y motivación del alumno. Es importante darle un sentido o interpretación personal al contenido matemático, que el alumno relacione información nueva con lo que él ya sabe, así modifica y enriquece sus modelos de la realidad.

Aprender con sentido requiere hacer una reestructuración de lo que se sabía previamente, provocando una mejor organización y asimilación de información almacenada en la memoria. Una manera de favorecer el aprendizaje significativo es organizar adecuadamente los contenidos por aprender.

La parte emocional y afectiva también influye, debe considerarse como parte del proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas ya que cuando trabajamos con nuestros alumnos en el aula, trabajamos con seres humanos, no son máquinas que hay que programar ni recipientes que llenar de información.

Nuestra labor es ofrecer alternativas para que ellos se acerquen al conocimiento. Que comprendan el tema dependerá del compromiso del estudiante por aprender y del profesor por enseñar teselaciones. Es necesario considerar las actitudes, los valores, el comportamiento ético y moral del alumno y del docente. El ser humano está constituido por tres partes indisolubles: mente, cuerpo y alma, piensa, actúa, y siente. Los conocimientos, creencias, sentimientos, valores, actitudes y aptitudes se expresan día a día en el aula, son indicadores de los avances en el aprendizaje. Los valores son más estables y esenciales que las actitudes, permiten explicar el comportamiento del alumno y las habilidades adquiridas que han perdurado, mismas que serán útiles para evaluar su aprendizaje y actuar de acuerdo a dicha evaluación.

La evaluación es otro elemento que está presente en nuestra labor docente ya que durante todas las sesiones frente a grupo debemos tomar en cuenta: las expectativas del estudiante, el compromiso que tiene por aprender el tema, las experiencias vividas y compartidas en el aula mientras se trabaja con teselaciones, entre muchos otros factores que determinan condiciones favorables o no para que los estudiantes se apropien del conocimiento geométrico.

6. Impacto de la tecnología computacional como medio de comunicación en el aula de bachillerato para visualizar conceptos geométricos.

La constante intervención de nuevos equipos electrónicos en nuestra vida diaria como los celulares y las computadoras ha propiciado un cambio en la forma que ahora podemos trabajar con los estudiantes en el aula cuando de enseñar geometría se trata. El contar con equipo de cómputo adecuado para mostrar, explicar y comprender temas geométricos resulta ser realmente útil, apropiado, motivante y eficiente tanto para el docente como para el alumno. Por ejemplo, el profesor no sufre al tratar de dibujar tres rectas que se intersectan en un punto, ni recurre a la teoría del punto gordo para que el estudiante comprenda lo que se quiere explicar. Con ayuda de un programa que trabaje con esos conceptos geométricos y el equipo de cómputo adecuado se puede visualizar y entender mejor la idea.

El tema de teselaciones es cien por ciento visual. Mediante diapositivas que se pueden mostrar en un pizarrón electrónico, en una computadora o en una pantalla al proyectar con un cañón, los estudiantes observan gran variedad de propuestas y diseños de teselaciones y a partir de lo que observan, logran hacer conjeturas muy ciertas sobre las características y propiedades de estos rompecabezas infinitos.

Además, existen varios programas con los que los estudiantes pueden practicar, inventar, diseñar, modificar y crear gran variedad de teselaciones ya sea periódicas o no periódicas según sea el caso de que tengan o no simetrías.

El proyector de acetatos también es un gran apoyo didáctico para detectar si una teselación tiene o no reflexiones, rotaciones, translaciones y deslizamientos de tal forma que el alumno observa, entiende e imita lo que ha visto al trabajar con otros ejemplos de teselaciones en fotocopias. Sin estos materiales la enseñanza y aprendizaje del tema sería menos sencillo.

Capítulo 2

Geometría, arte, ciencia y teselaciones

"La enseñanza debe ser tal que pueda recibirse como un regalo,
no como una amarga obligación"
Albert Einstein

1. Geometría estética en el mundo actual.

En el mundo en el que vivimos hay una gran cantidad de cosas extraordinarias que podemos apreciar con nuestros cinco sentidos. Basta observar algunos elementos de la naturaleza tan caprichosos como las flores, las hojas de los árboles, las rocas, los minerales, las nubes, las montañas, los astros, los animales, las plantas, las bacterias, los hongos y el hombre mismo, así como muchos objetos inventados por él que surgen de lo que crea nuestra mente, para darnos una idea de la gran variedad de formas, tamaños y colores que intervienen en el diseño y estructura de cada uno de ellos.

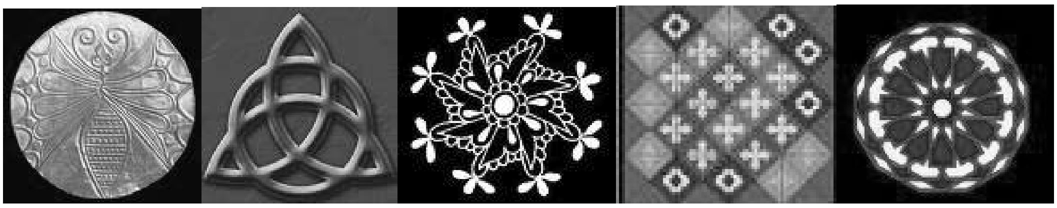
Algunos diseños geométricos utilizados para decorar objetos.

Por mencionar algunos ejemplos, podemos pensar en los decorados de una artesanía mexicana ya sean en barro o tela como los bordados de un mantel o el tejido de un tapete, o bien, los grabados en macetas, jarrones, ollas y cazuelas. En el boceto de una pintura, en el diseño de un tatuaje, en la fachada de una iglesia y en muchas otras cosas que se localizan en nuestro entorno cuya esencia se encuentra en las formas geométricas.

A partir de la existencia de esa gran variedad de formas, tamaños y colores tanto en la naturaleza como en aquello que el hombre inventa, crea o transforma, podríamos pensar que no cabe la posibilidad de encontrar propiedades interesantes entre ellas porque a fin de cuentas son sólo un capricho del hombre o de la naturaleza. Afortunadamente, no es así, algunos matemáticos obstinados en descubrir la esencia geométrica de casi todo aquello que nos rodea, han dedicado parte de su vida a observar, averiguar, deducir, investigar, analizar, y organizar el mundo geométricamente, ello nos permite ahora, conocer propiedades interesantes que tienen una explicación matemática de casi todo.

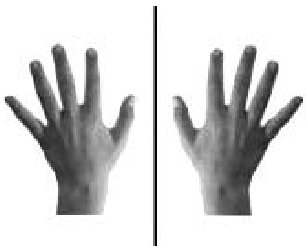
Algunos diseños geométricos utilizados para hacer tatuajes.

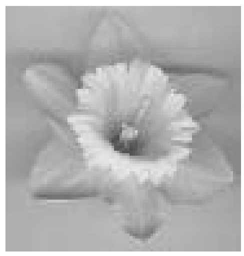
Precisamente una de estas propiedades geométricas que se encuentra sorprendentemente casi en cualquier parte de la naturaleza o en los diseños del hombre donde sobresalen la belleza, la armonía, la proporción y el equilibrio, que además contiene patrones ocultos muy interesantes es la simetría.



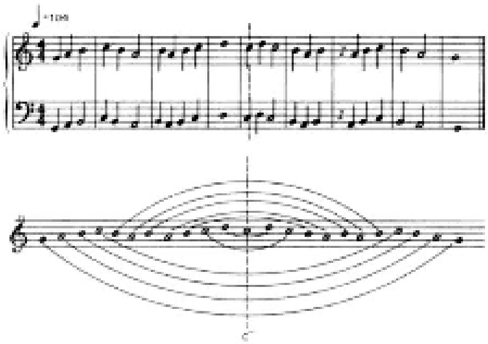
Simetría, es una palabra que se relaciona directamente con diversos conceptos como belleza, arte y ciencia.

Cuando un objeto, una imagen, una figura, o un diseño tiene simetría, podemos darnos cuenta que, a simple vista posee estructura y armonía entre sus partes, mantiene cierta proporción, equilibrio y orden que dan como resultado la belleza natural de ese objeto, imagen, figura o diseño que por sus características se puede interpretar como arte y como ciencia.





Como arte, digamos que estos son elementos esenciales que logran cautivar al espectador ya sea por el diseño, estructura o combinación de colores, tamaños y formas que en conjunto dan como resultado esa obra interesante y sorprendente.



Simetría en una pieza musical. Fragmento de "Six unisono melodies" de Bartók.

(El pentagrama de abajo representa la simetrización de la partitura de arriba)

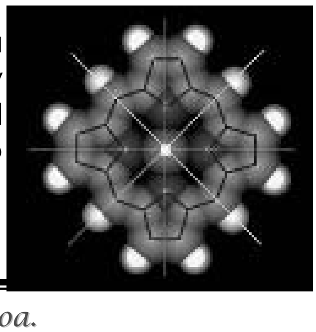
Como ciencia, cada uno de estos y otros elementos determinan de forma muy precisa la relación que hay entre ellos en cuanto a posición, tamaño, forma y color que, son elementos de estudio para el matemático. La ciencia se nutre del arte, a partir de aquello que existe como fruto del quehacer artístico, el científico trata de encontrar patrones y modelos que explican las tácticas y técnicas que usa el artista para generar su obra.

La simetría es la propiedad que tiene un objeto cuando características como forma, tamaño y posición relativa de sus partes permanecen invariantes, es decir, tras realizar algún movimiento permitido en el plano, estas no cambian. Por ejemplo, son las mismas en ambos lados de una línea divisoria que se le llama eje, o bien en torno a un punto que se llama centro de giro.

Algunas flores poseen por naturaleza la propiedad de ser simétricas.

Existe simetría en un objeto, cuando al aplicarle un movimiento que lo transforme efectivamente, no parece observarse cambio alguno en cuanto al tamaño, posición y forma del mismo, por ello se dice que permanece invariante.

Esta imagen representa un esquema del núcleo de la hemoglobina, que es una proteína que contiene hierro y da el color rojo a nuestra sangre, además transporta el oxigeno desde los pulmones hasta los tejidos, como podemos ver…



En el esquema anterior tenemos una línea de reflexión horizontal, una línea de reflexión vertical, y las diagonales también son líneas de reflexión; el centro de rotación es justamente el punto de intersección de los cuatro ejes de reflexión.

Esto sucede porque al reflejar la figura sobre cada una de esas línea, esta coincide con la que esta del otro lado de la línea como si fuera su reflejo en el espejo. Existe sólo un centro de giro, que es el punto donde se cruzan todas las líneas de reflexión y que queda justo en el centro, el ángulo de rotación es de 90°, con este giro, la figura que gira coincide exactamente con la original.

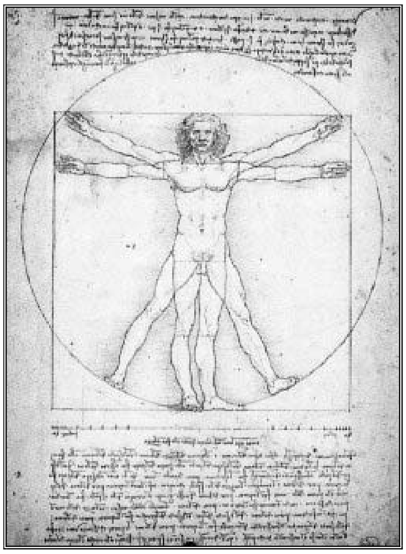
En cuanto a la parte artística y matemática del concepto de simetría, hay ejemplos interesantes en la arquitectura, tal es el caso de la construcción de templos y pirámides como las del antiguo Egipto o el Partenón de Atenas en Grecia.

El Partenón de Atenas, Grecia es una obra arquitectónica y matemática que por su diseño posee belleza, equilibrio y proporción.

Quienes diseñaron estas obras arquitectónicas lograron conjuntar varios elementos: proporción, equilibrio, armonía y belleza, independientemente de su función astronómica o funeraria, dándonos la oportunidad de apreciar en ellas, las características de la simetría. La perfecta proporción de esas construcciones marca la huella del arquitecto humano que desde la antigüedad se preocupó por buscar y encontrar aquellos elementos que dan origen a la simetría con los que podría distinguir su propia obra de las de la madre naturaleza.

Los seres humanos somos también un buen ejemplo de simetría, tenemos una igualdad casi perfecta entre el lado izquierdo y el lado derecho de nuestro cuerpo que resultan, dividiéndolo por un plano que pasa por el centro de la nariz y por el centro del ombligo. Es posible apreciar esta obra artística, justamente es el famoso estudio sobre la simetría del cuerpo humano, el dibujo de una figura masculina desnuda realizado alrededor del año 1492 por Leonardo da Vinci que contiene algunas notas sobre anatomía impresas en la parte inferior y superior del mismo. Muestra la imagen desnuda de un hombre en dos posiciones sobreimpresas de brazos y piernas, una inscrita en un círculo y la otra inscrita en un cuadrado.

La obra se llama "El hombre del Vitruvio" porque fue realizado a partir de los textos del arquitecto Vitruvio de la antigua Roma, aunque también se le conoce como "El Canon de las proporciones humanas".



Esta obra también es considerada como un símbolo de la simetría básica del cuerpo humano. Examinando el dibujo puede notarse que la combinación de las posiciones de los brazos y piernas crea realmente dieciséis posiciones distintas, de las cuales sólo dos son simétricas. La posición con los brazos en cruz y los pies juntos se ve inscrita en el cuadrado. La otra posición, los dos brazos y las dos piernas abiertas se ven inscritos en el círculo. Esto muestra el principio de que en el cambio entre las dos posiciones, el centro aparente de la figura parece moverse, pero en realidad el ombligo de la figura, que es el centro de gravedad verdadero, permanece inmóvil. Como dato cultural, esta imagen aparece en el reverso de la moneda de euro de Italia.

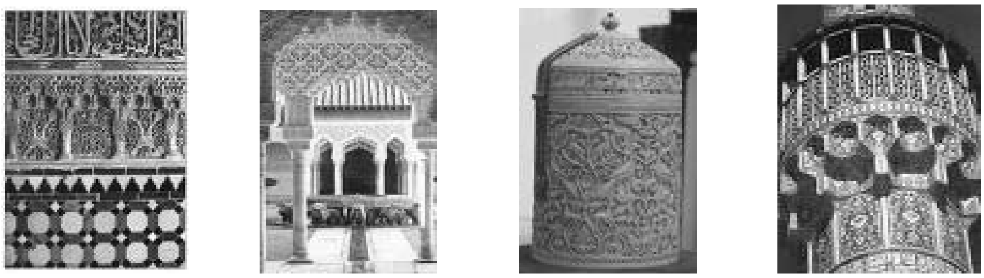
2. Un poco de historia sobre el mundo de las teselaciones.

Las primeras evidencias de que el pensamiento matemático y geométrico ha existido desde hace más de cinco mil años, son algunos restos de huesos marcados con muecas, varios dibujos, signos y símbolos trazados sobre cuevas, piedras, cortezas de los árboles, ladrillos o tablillas de arcilla. Sin embargo, no existe evidencia alguna que pueda garantizar qué tan antiguas son las teselaciones o cuál fue el origen de esos diseños en distintos lugares del mundo. A pesar de ello, podríamos advertir que el hombre se ha valido de su intuición, creatividad, imaginación, criterio y conocimiento matemático para crear y diseñar algunas teselaciones, obras artísticas y matemáticas que han estado presentes desde la antigüedad hasta nuestros días en diversas culturas, tanto en América, como en Asia, África y Europa.

Es incontable la cantidad de teselaciones que podemos contemplar a través de los siglos, desde las que contienen construcciones geométricas en paredes, lienzos y muros con patrones interesantes, hasta impresionantes diseños de animales, flores, seres mitológicos, y muchas otras en las que se observan de fondo una infinidad de figuras geométricas, grabados de franjas con adornos elegantes, algunos decorados con colores y un estilo muy peculiar de cada autor. Todas ellas forman parte del patrimonio matemático, artístico, cultural y social de diversas regiones del mundo, mostrando sus avances a lo largo de la historia.

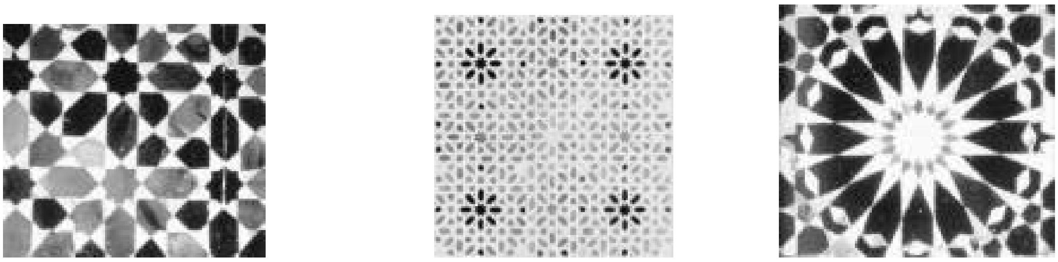
Las civilizaciones antiguas utilizaban el arte del teselado para la decoración de casas y templos aproximadamente desde el año cuatro mil antes de nuestra era. En ese tiempo los sumerios realizaban decoraciones con mosaicos que formaban modelos geométricos, para ello usaban arcilla cocida a la que le ponían color y esmalte.

Posteriormente fueron los persas, los árabes, los moros y los musulmanes, quienes demostraron desarrollar este tipo de trabajo y habilidad para decorar muros, techos y fachadas de majestuosos palacios. Ciertamente, no fueron los únicos, también encontramos manifestaciones artísticas de otras culturas en nuestro país que conocían, trabajaban y desarrollaban el arte de las teselaciones, como los mayas, que se establecieron en la parte sur de Tabasco, península de Yucatán, Chiapas y parte de Centroamérica, su trabajo se caracteriza por la simetría que aparece en sus construcciones, así como su gran destreza para las matemáticas y la astronomía dado que sus predicciones para los eclipses solares y lunares eran muy ciertas. Así mismo, los egipcios, los griegos, los indios, los chinos, entre otros tantos, mostraron gran habilidad en la creación de teselados.

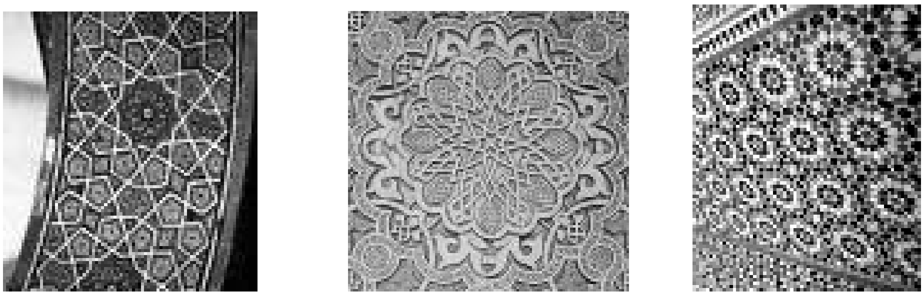


Diseños del arte islámico

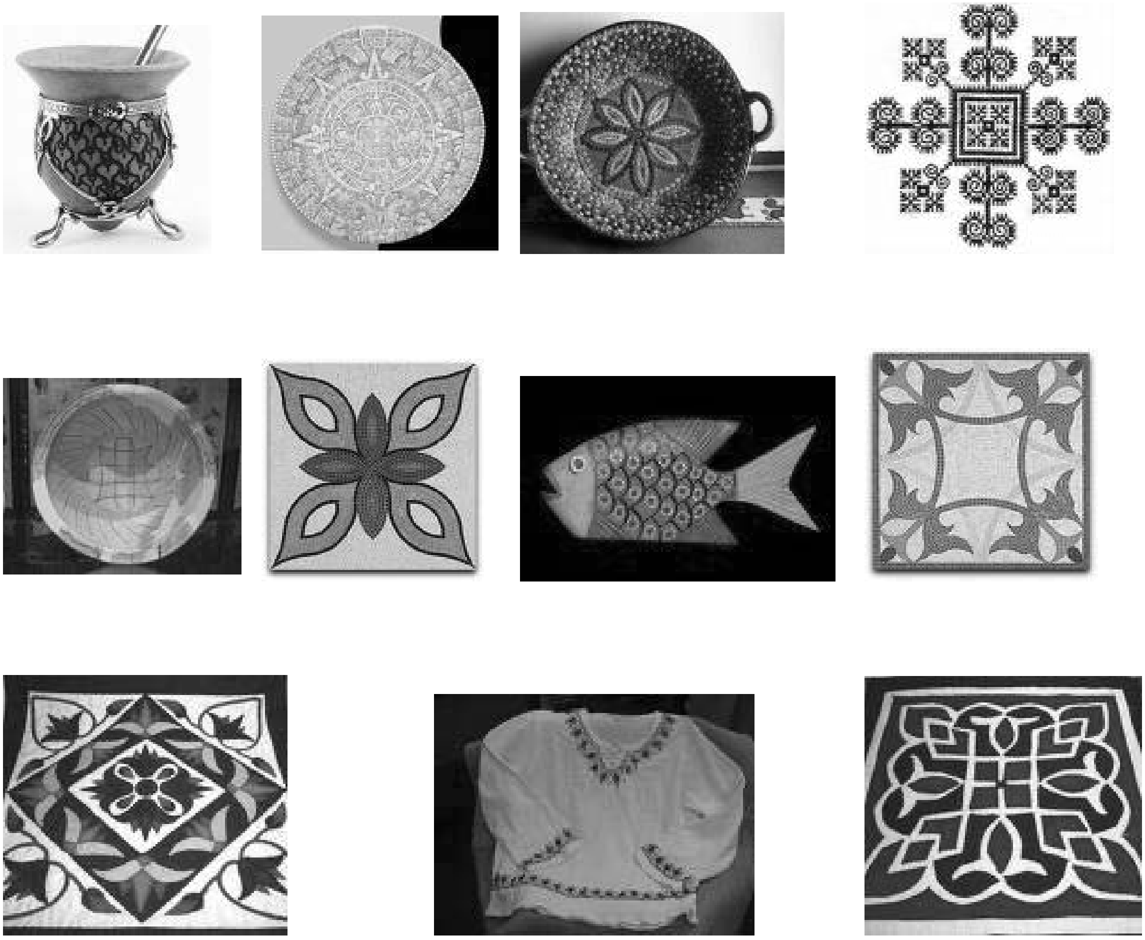
En el arte islámico, la geometría alcanza gran valor decorativo. En las figuras que se observan en suelos, paredes, pilares y arcos, se deja apreciar una gran variedad de diseños en dos dimensiones donde se combinan colores, formas geométricas y grabados.



Muestra de teselaciones del arte islámico



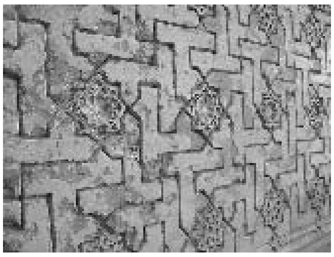
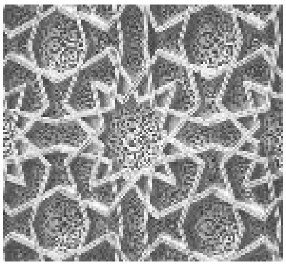
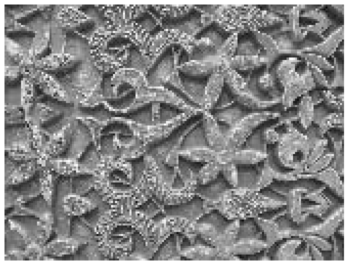
Así, al paso de los años, se siguen dando cada vez más evidencias matemáticas y artísticas del desarrollo, perfección y belleza de las teselaciones. Gran cantidad de progresos en estos ámbitos nos permiten apreciar ahora cosas muy parecidas en ropa, tapetes, colchas, cerámica, artesanía, paredes y suelos, sin contar con los impresionantes murales y construcciones arquitectónicas modernas que indiscutiblemente nos dejan apreciar armonía, orden, equilibrio, belleza, simetría y elegancia en sus diseños.



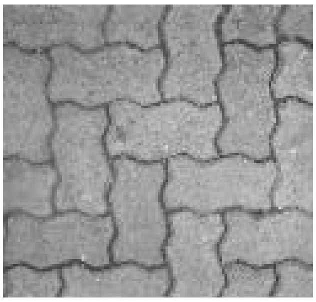
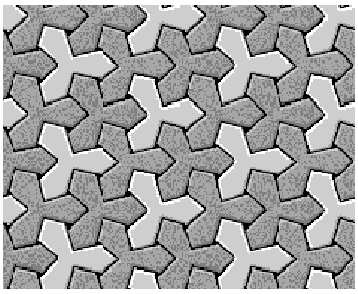
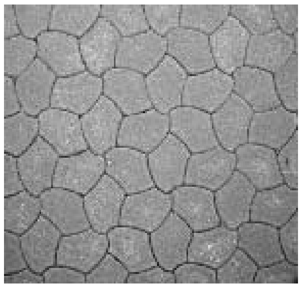
Bordados y artesanías con un toque de geometría

3. Galería de patrones y teselaciones Antiguas y modernas.

Aquí observamos cómo a través de patrones con ciertos diseños geométricos es posible recubrir pisos y paredes de tal forma que se descubren reglas que obligan a colocar las piezas de alguna manera obteniendo así un estilo en el grabado.

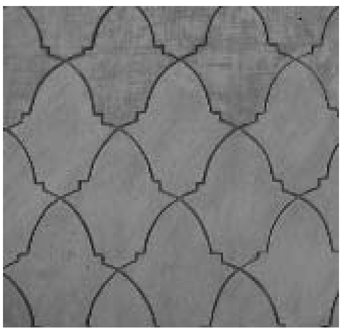
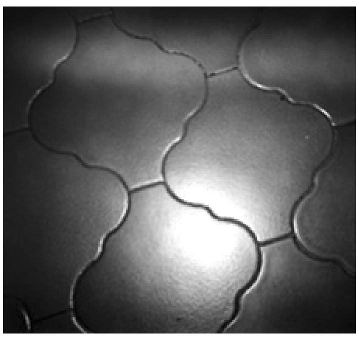
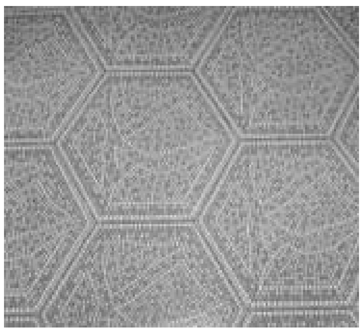




Otro uso muy común y cotidiano de las teselaciones es en el diseño y decoración de interiores, por ejemplo, en los pisos y paredes de salas, baños y cocinas.

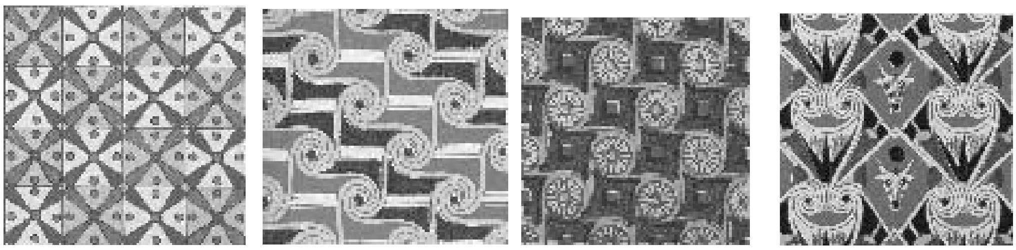
Teselado de adoquín

Las teselaciones han sido muy utilizadas en la Arquitectura, por ejemplo, en los pavimentos de superficies de parques y plazas.

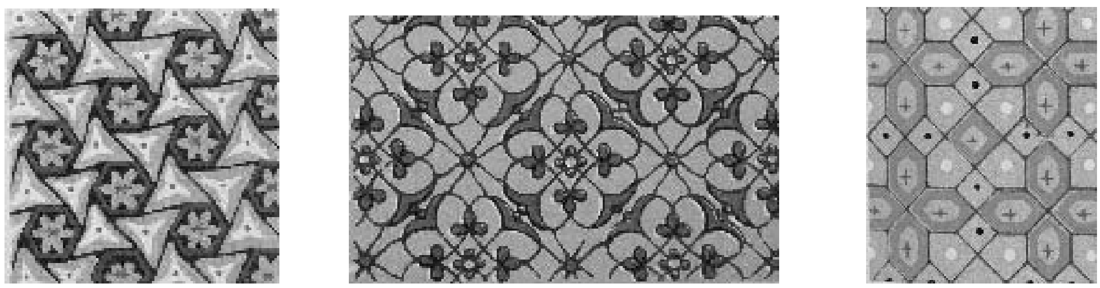




Teselado de mosaico

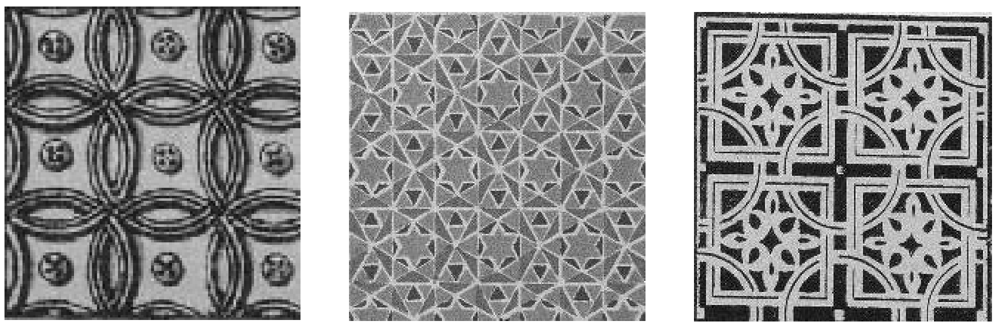
La historia de las teselaciones se puede apreciar en varios diseños que han sido elaborados por diferentes culturas por varios siglos desde antes del renacimiento hasta nuestros días. Aquí presento una pequeña muestra de teselaciones



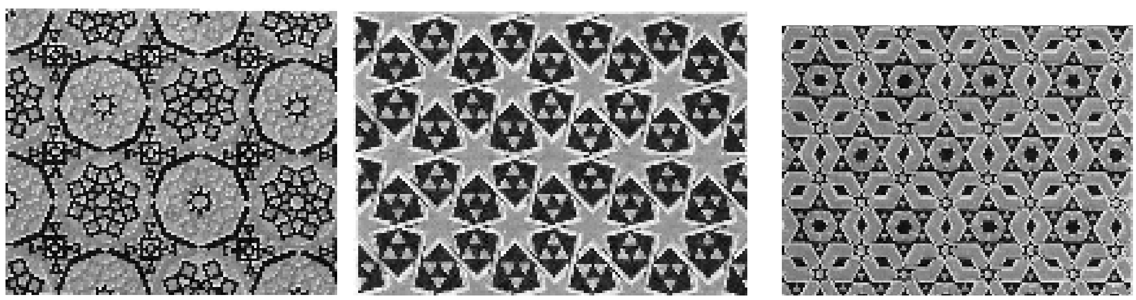
Teselaciones de Egipto



Teselaciones Persas

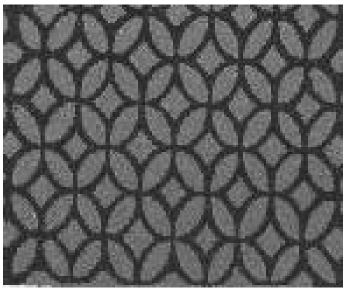


Teselaciones de Bizancio

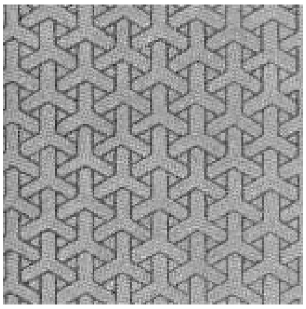
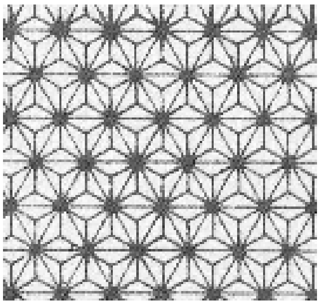


Teselaciones de Arabia

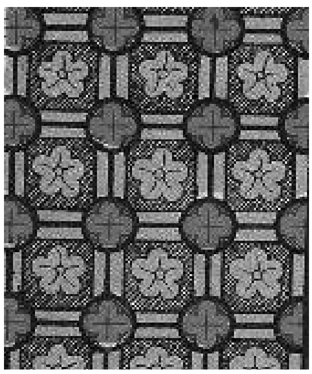
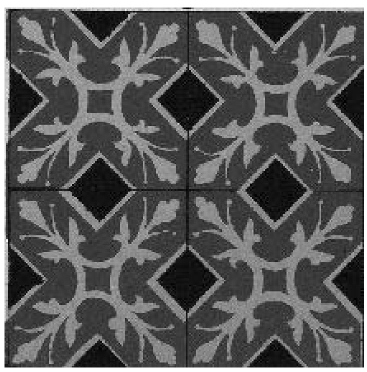
En estos diseños podemos observar cómo cada cultura en una época y lugar determinado presenta algunos rasgos característicos de sus diseños, sin embargo todas ellas tienen características fundamentales de lo que es teselar el plano.



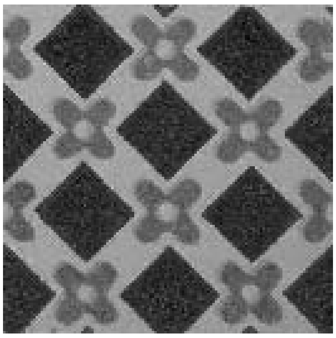
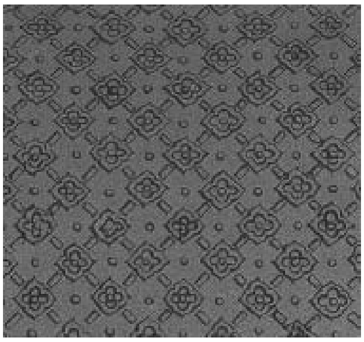
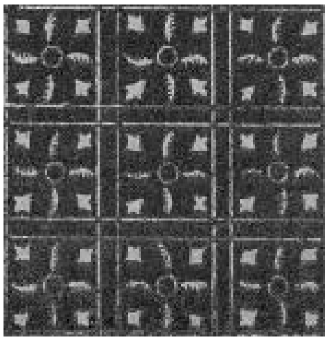

Teselaciones de los indios Norteamericanos

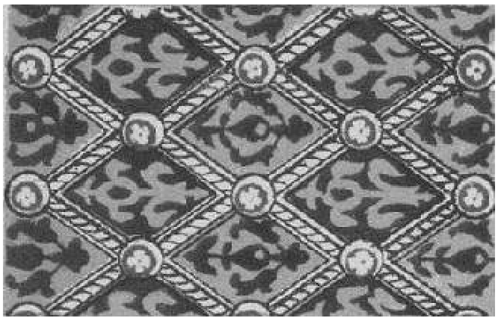
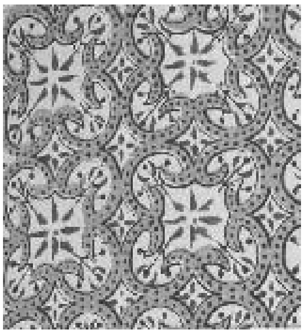

Teselaciones de China

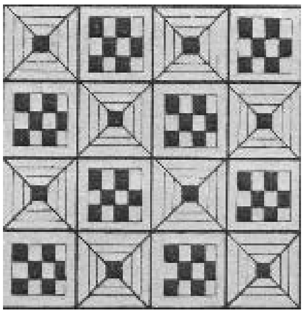
Teselaciones en la Edad Media

Teselaciones en el Renacimiento

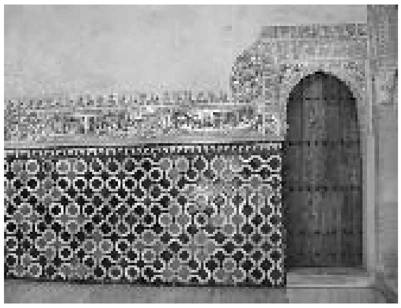
Teselaciones del Período Isabelino



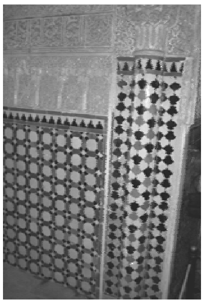
Teselación de India

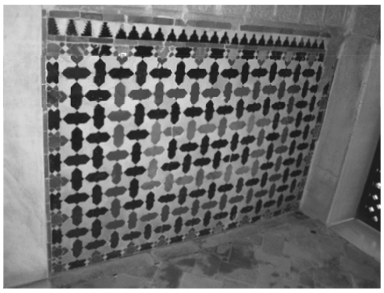
Todas estas imágenes forman parte de la gran variedad de diseños de teselaciones que han sido trabajadas por hombre de distintas épocas y culturas. Sin embargo es posible apreciar la presencia de figuras y formas geométricas, colores y patrones que dan vida a cada una de ellas.

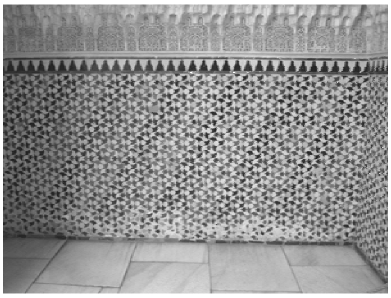
PALACIO DE LA ALHAMBRA, ESPAÑA



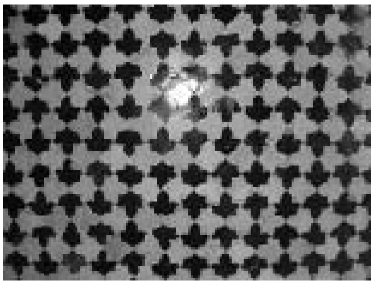
Granada es una ciudad amurallada. El palacio de La Alhambra ubicado en Granada España, representa uno de los recintos más visitados por todo tipo de personas, artistas, fotógrafos, expertos creadores del arte del teselado, historiadores, músicos, matemáticos, entre muchos más. Su verdadero atractivo, como en otras obras musulmanas de la época, son los interiores, cuya decoración está entre lo más destacado del arte islámico.

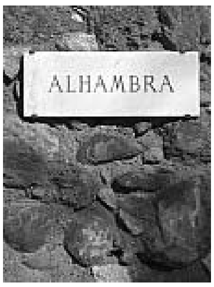


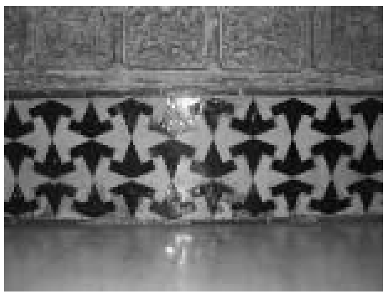




Para muestra basta con observar estas imágenes de algunos diseños geométricos en pasillos, estancias, habitaciones que decoran el interior del palacio con un estilo muy peculiar, capaz de ser analizado, estudiado e interpretado matemáticamente.

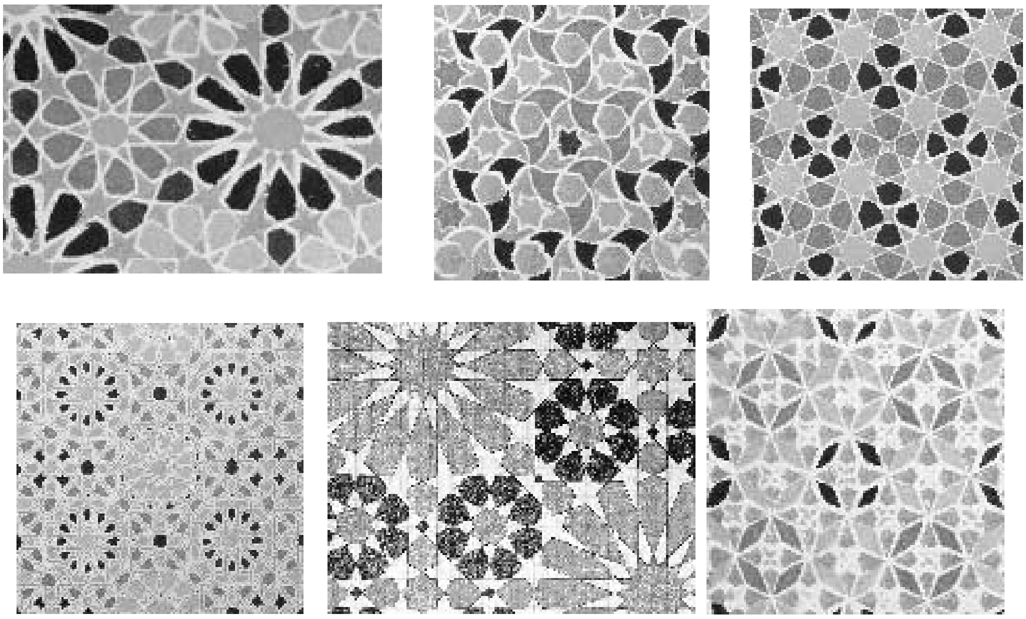




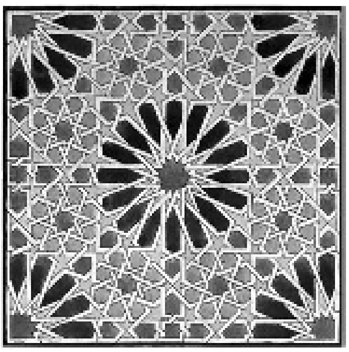


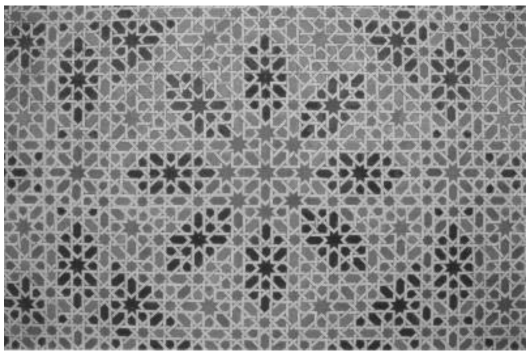
Diseños de teselaciones en los interiores del palacio de la Alhambra

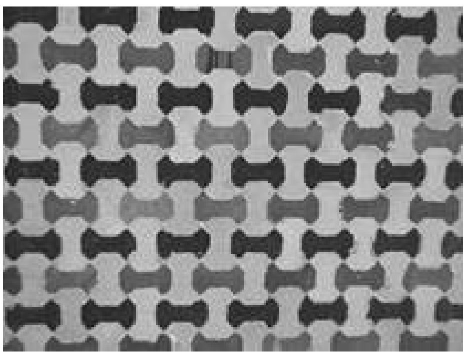
Las siguientes imágenes son parte de lo que aún se puede encontrar en el interior del palacio, en todos los diseños que observamos hay una descripción matemática que justifica y explica el diseño de estas teselaciones tan famosas en el mundo del arte y la matemática.

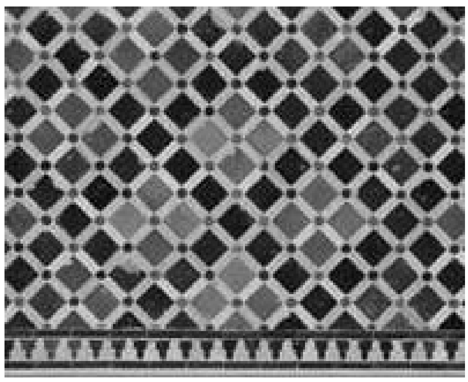


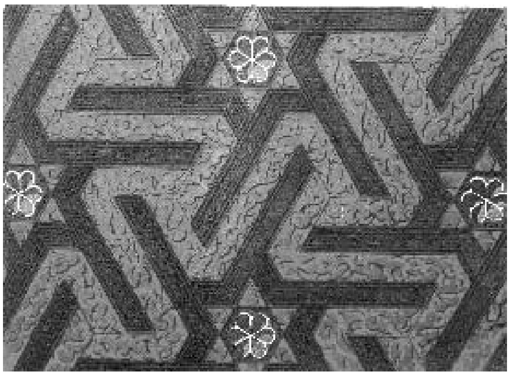
Diseños de teselaciones en los interiores del palacio de La Alhambra

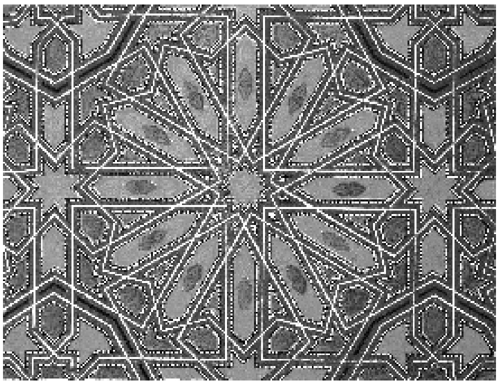


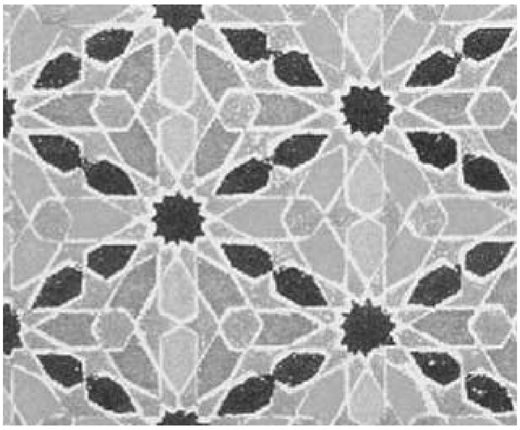




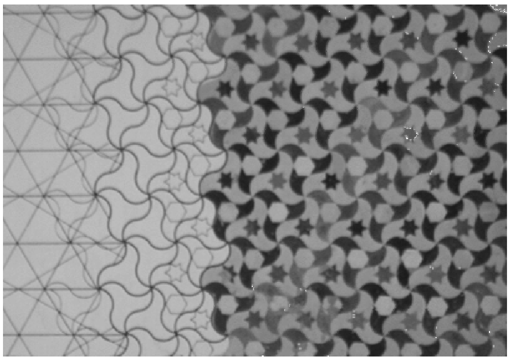


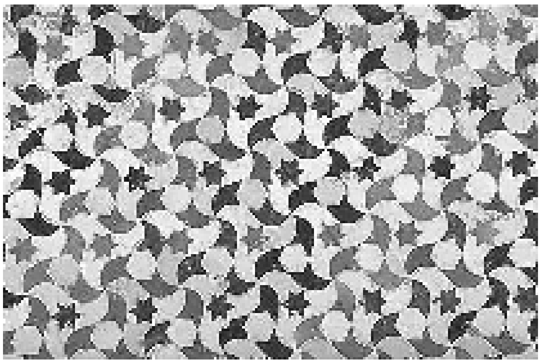






Del bosquejo matemático al diseño artístico de una teselación…

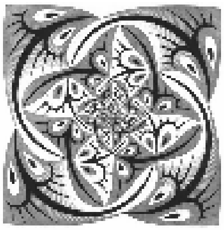
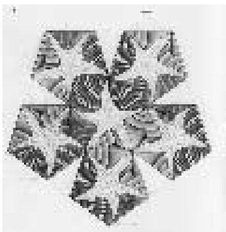
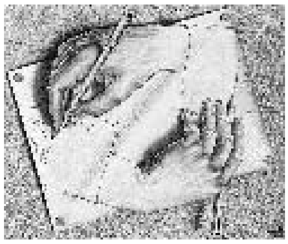




En la imagen del lado izquierdo se aprecia el trabajo matemático mediante el cual se trabaja el diseño de la teselación que se observa del lado derecho, se ven los trazos que van dando forma a cada una de las piezas con las que se cubrieron las paredes de algún lugar de tan extraordinario palacio.

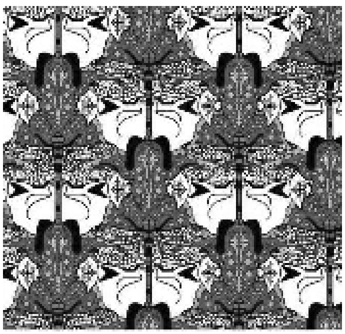
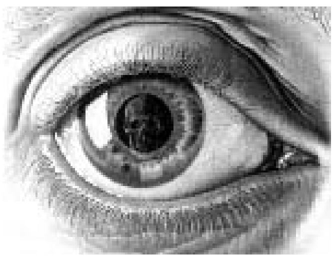
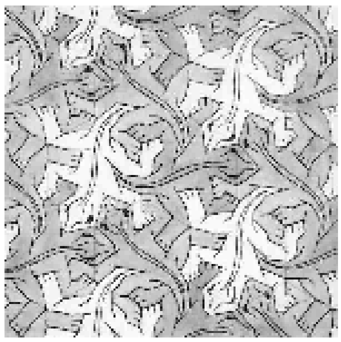
4. Escher, un gran artista con dotes de matemático

A través de la historia a habido matemáticos que tienen algo de artistas y artistas que tienen algo de matemáticos, muy reconocidos y admirados por sus trabajos tan sorprendentes, como es el caso de Maurita Cornelis Escher quien nació el 17 de junio de 1898 en Holanda, es uno de los artistas gráficos más famosos del mundo, conocido por sus grabados en madera, piedra, dibujos de construcciones muy interesantes y sorprendentes que han llamado la atención de muchísimos matemáticos, artistas, fotógrafos, y miles de espectadores que se asombran al mirar su trabajo. Cabe mencionar que según palabras de Escher, quien ha dejado un legado impresionante de obras artísticas con gran contenido e interés matemático y artístico, dice: "*Me encuentro más cerca de los matemáticos que de mis colegas artistas, todos mis trabajos son juegos, juegos muy serios*".


Escher

El palacio de La Alhambra en Granada España que contiene muchos ejemplos de mosaicos y grabados simétricos en techos, paredes, fachadas, muros y pisos, sirvió como fuente de inspiración para que Escher creara sus propias obras. Las creaciones de Escher se caracterizan por cubrir el plano con figuras de animales como peces, aves, mariposas, escarabajos, lagartos, caballos, y seres míticos como ángeles, demonios, rostros de seres humanos, duendes, barcos, aunque muchas otras tienen gran variedad de formas.

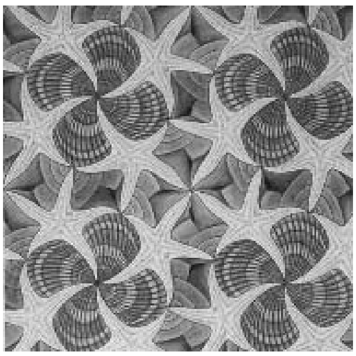
En la mayoría de sus teselaciones se presenta la dualidad, es decir, usa dos tipos de teselas cuyos conceptos se complementan, como ángeles y demonios, jinetes y caballos, peces y barcos, todos sus diseños cumplen con propiedades matemáticas muy interesantes que no cualquier artista domina y utiliza de manera tan sorprendente.

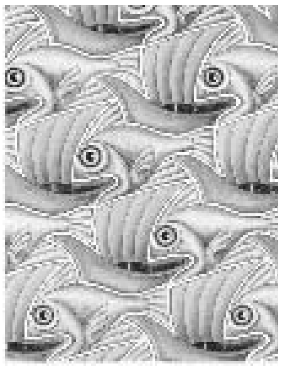
Escher murió el 27 de marzo 1972 dejando un legado impresionante de obras cuya interpretación va desde lo que se observa artística y estéticamente hasta las características y elementos matemáticos que posee cada una de ellas.

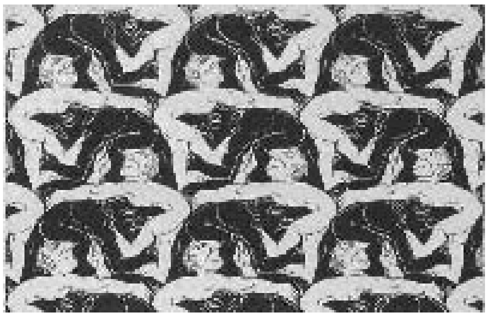
El arte de interpretar una obra artística como las teselaciones significa observar, percibir, intuir, comprender, entender, apreciar todo aquello que nos transmite y expresarlo tanto física, intelectual y emocionalmente, recordando que el ser humano es cuerpo, mente y espíritu.

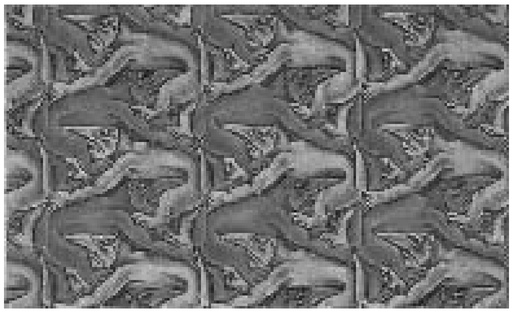
El ser humano interpreta lo que ve, lo que toca, lo que escucha, lo que prueba, lo que siente, lo que piensa, lo que hace, lo que dice, en fin, ya sea con actitudes, gestos, ademanes, ideas, frases, emociones, sentimientos, criterios y argumentos lógicos expresados por escrito o de palabra, pinturas, murales, dibujos, grabados, el ser humano tiene la capacidad de analizar e interpretar matemáticamente una obra artística.

Aquí, una pequeña muestra de algunos diseños de las teselaciones de Escher.



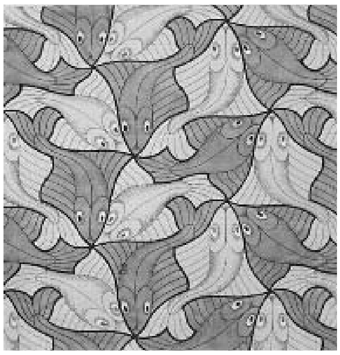


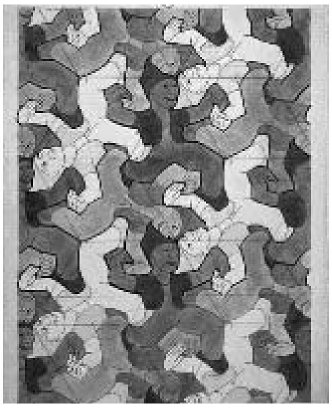
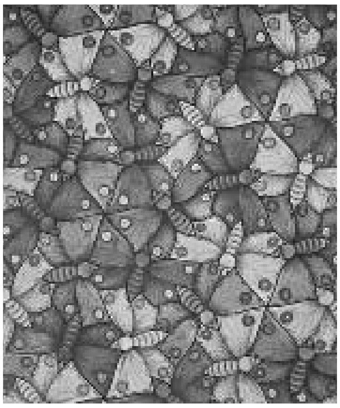
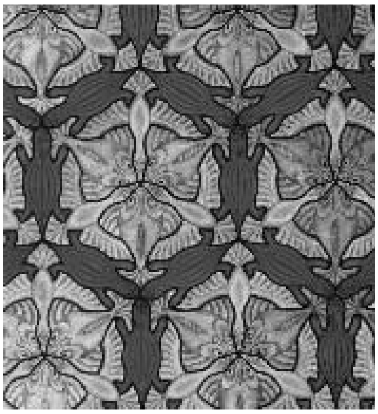
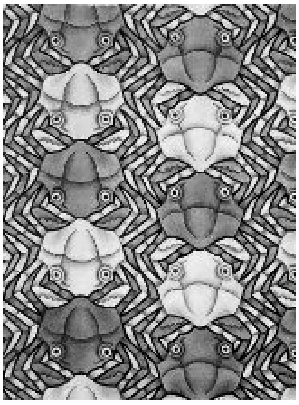
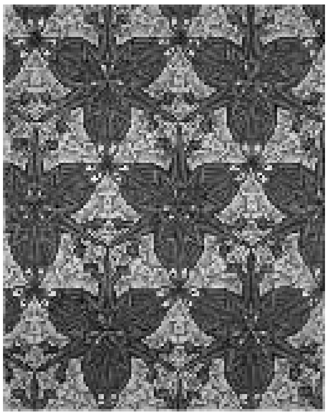
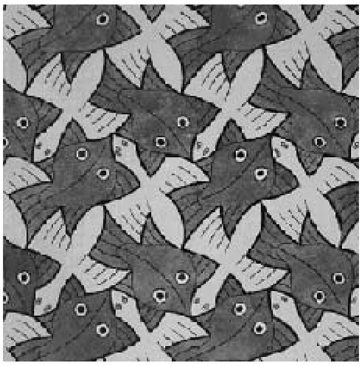


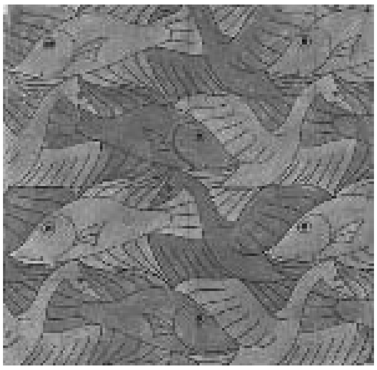


Diseños de teselaciones de Escher

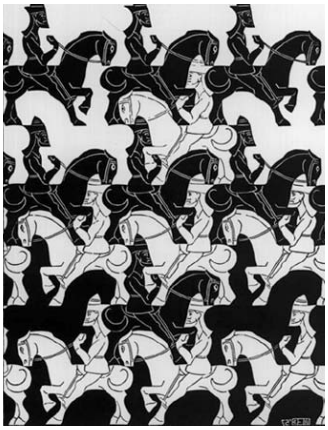
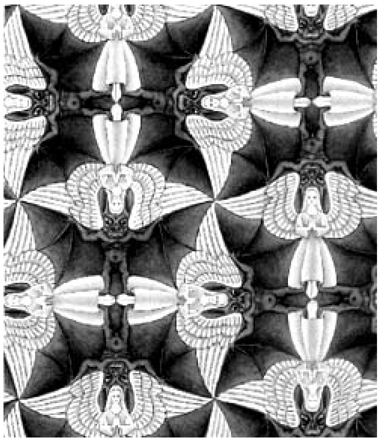


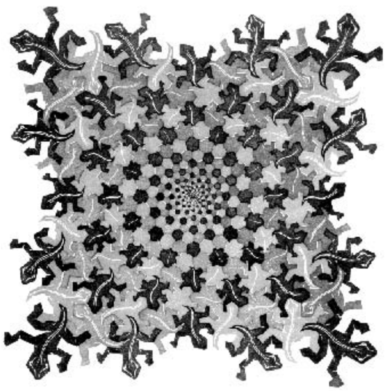
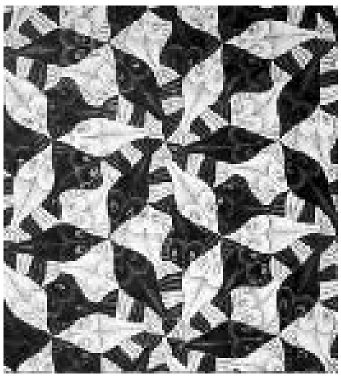
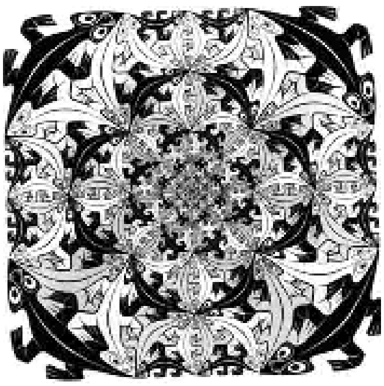


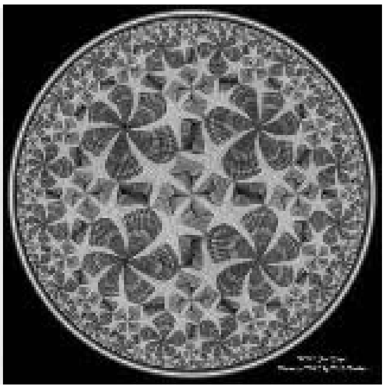
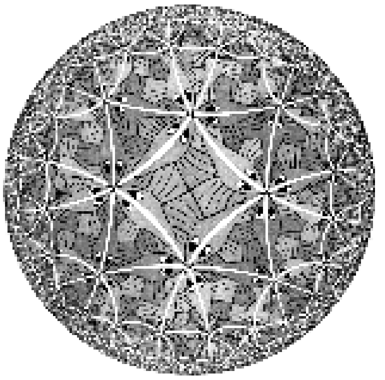









Diseños de teselaciones de Escher

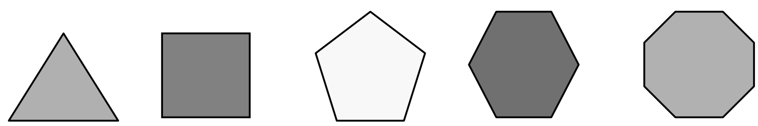



Muchas de estas teselaciones son producto de las obras artísticas de Escher que sin duda son ya un legado artístico y matemático de gran valor en muchas partes del mundo.

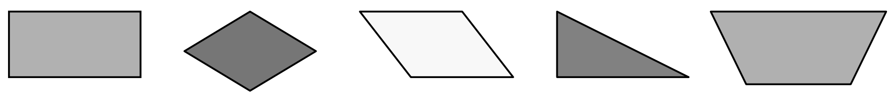
5. Lo necesario para teselar el plano

Para construir teselaciones en el plano es inevitable hablar de geometría. En este breve recorrido por el extraño mundo de las teselaciones nos encontraremos con algunos conceptos que aprendimos en cursos anteriores al bachillerato, estos conceptos están relacionados con las propiedades que tienen los polígonos según la forma y tamaño de sus lados, según el tipo de ángulos internos que tienen y las distintas formas que existen de colocarlos al dibujarlos en el plano.

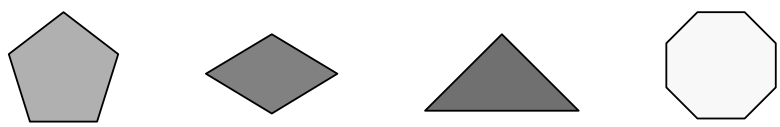
- Un polígono es regular si tiene todos sus lados y ángulos iguales.



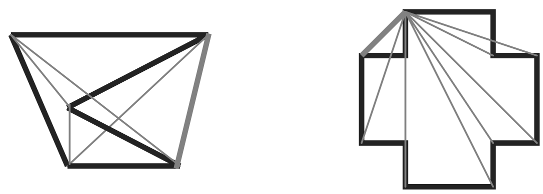
- Un polígono es irregular si tiene al menos un lado o ángulo distinto a los demás.



- Un polígono es convexo si todas sus diagonales están al interior del polígono.



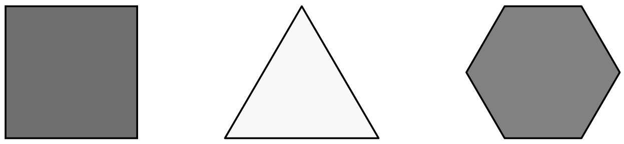
- Un polígono es no convexo si al menos una de sus diagonales está al exterior del polígono.



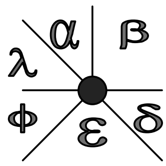
- La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.
- La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es igual a 360°.

Solamente se puede teselar el plano con polígonos regulares que cumplan la siguiente condición: que la medida de su ángulo interior sea un divisor de 360°.

Los únicos tres polígonos regulares que cumplen esa condición son el cuadrado cuyos ángulos internos miden 90° cada uno, el triángulo equilátero ya que su ángulo interno mide 60° y el hexágono regular dado que sus ángulos internos miden 120°.



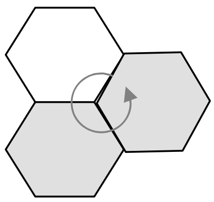
- La suma de los ángulos que concurren en un vértice de la teselación es 360°.



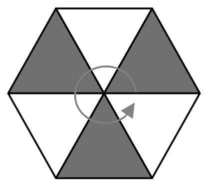
$$\alpha + \beta + \delta + \varepsilon + \phi + \lambda = 360°$$

Aquí algunos ejemplos de los conceptos que debemos tomar en cuenta cuando estudiemos el tema de teselaciones.

Con tres hexágonos regulares rodeamos un vértice de la teselación que tiene la misma forma que un panal de abejas.



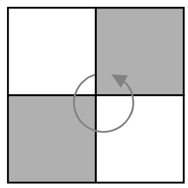
3 x 120° = 360°



6 x 60° = 360°

Con seis triángulos equiláteros rodeamos un vértice de la teselación que tiene la forma de un rehilete.

Con cuatro cuadrados rodeamos un vértice de la teselación que tiene la misma forma que un tablero de ajedrez.



4 x 90° = 360°

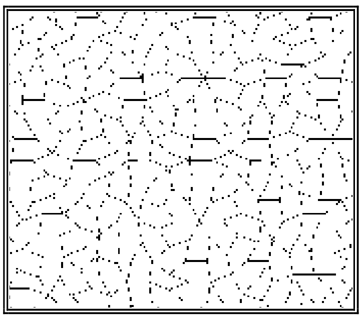
Estas son las únicas tres formas de rodear un vértice con piezas que tengan la misma forma y el mismo tamaño y que sean polígonos regulares.

6. ¿Cómo son las teselaciones en el plano?

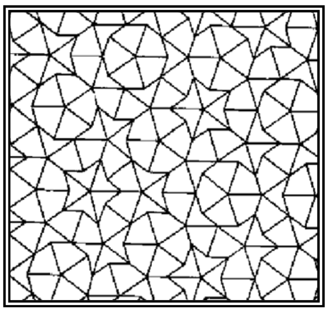
Las teselas son figuras planas que pueden tener diferentes formas y tamaños como los polígonos regulares o los irregulares. Una **teselación** consiste en **cubrir el plano con un número infinito de teselas,** siguiendo un patrón determinado y vigilando que **al unir las piezas o teselas, estas cubran perfectamente el plano,** que **no se encimen o sobrepongan unas con otras**, pero **tampoco deben dejar huecos o espacios vacíos entre ellas.**

Para diseñar, construir, armar o analizar teselaciones necesitamos conocer cuál o cuáles piezas llamadas teselas forman parte de ellas, descubrir y determinar patrones de armado, que siempre se pueden extender, imaginando de esta forma cómo las teselaciones cumplen con la condición de ser infinitas, es decir, con una infinidad de teselas se puede cubrir todo el plano.

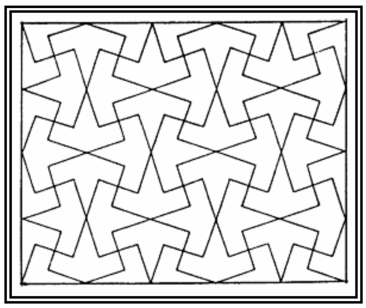
Es posible cubrir el plano usando siempre un mismo tipo de tesela o utilizando teselas de diferentes tipos, combinando la posición de estas en el plano generamos distintas teselaciones. Si usamos únicamente piezas congruentes para teselar el plano, donde todas sean iguales, es decir, tengan el mismo diseño, tendremos una **teselación monoédrica**, esas teselas deben tener siempre la misma forma y el mismo tamaño. Ahora bien, tenemos una **teselación diédrica**, si usamos sólo dos tipos de piezas diferentes para teselar, de modo que todas las teselas del mismo tipo sean del mismo tamaño y conserven la misma forma.



Teselación diédrica



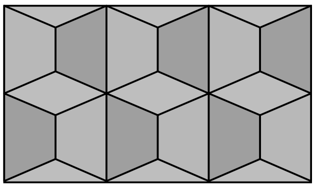
Teselación diédrica



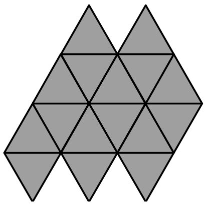
Teselación monoédrica

Así que, dependiendo de la cantidad de teselas distintas en forma, tamaño o incluso color, que utilicemos en el diseño, construcción o armado de cada teselación será el nombre que reciba. Cuando utilizamos tres tipos de teselas armamos una teselación triédrica, con cuatro tipos de teselas recibe el nombre de tetraédrica, con cinco, pentaédrica y así sucesivamente…

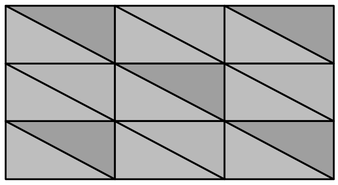
Aquí algunos ejemplos de teselaciones según el número de teselas de diferente tipo que se requieren para armar cada una de ellas.



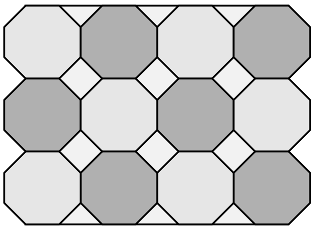
Teselación diédrica formada por trapecios y rombos.



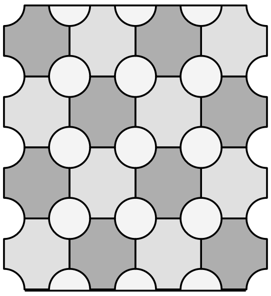
Teselación monoédrica formada por triángulos equiláteros.



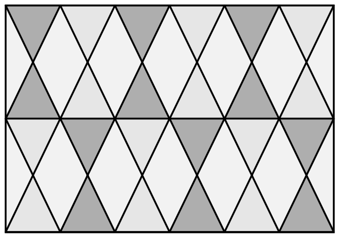
Teselación monoédrica formada por triángulos rectángulos.



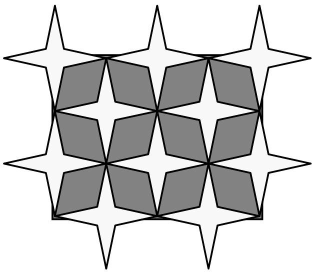
Teselación diédrica formada por octágonos regulares y cuadrados.



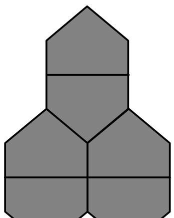
Teselación diédrica formada por un cuadrado sin vértices y círculos.



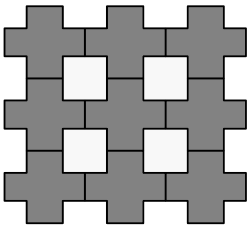
Teselación diédrica formada por triángulos isósceles y rombos.



Teselación diédrica formada por octágonos irregulares y rombos.



Teselación monoédrica formada por pentágonos irregulares.



Teselación diédrica formada por cuadrados y polígonos irregulares en forma de cruz.

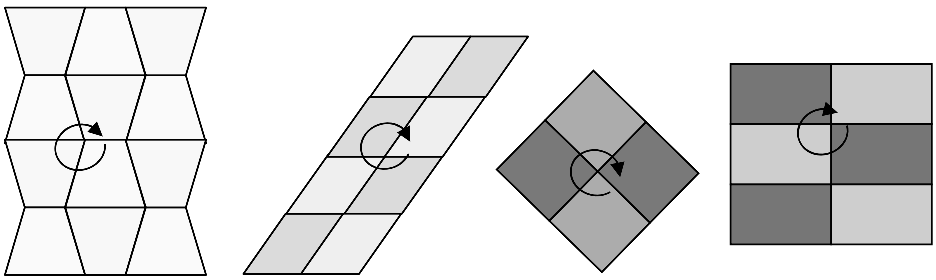
7. Figuras que teselan el plano.

Las piezas con las que armamos teselaciones tienen gran variedad de formas y diseños, las más sencillas son los polígonos regulares que como ya dijimos son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.

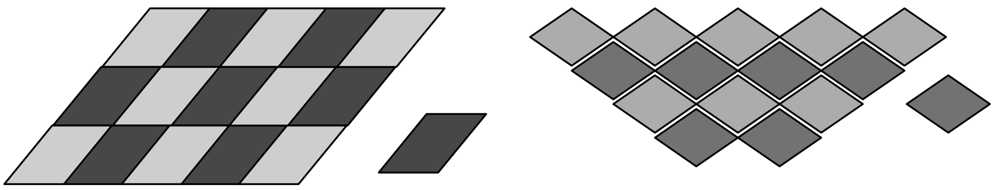
Conozcamos entonces qué pasa con otros polígonos, por ejemplo, los irregulares como los triángulos rectángulos, isósceles, escálenos, acutángulos, obtusángulos y con los cuadriláteros como rectángulos, rombos, paralelogramos, romboides, trapecios, trapezoides, o con cualquier otro polígono irregular.

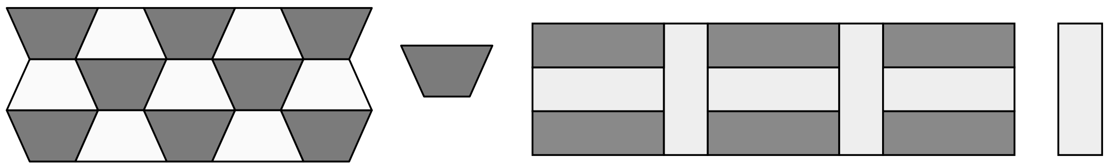
¿Cómo saber si podemos teselar con ellos o no?

¿Cualquier polígono de cuatro lados tesela el plano?…



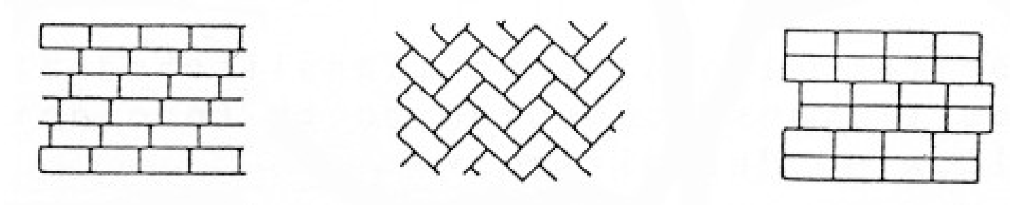
Los polígonos de cuatro lados que no son regulares y teselan de manera monoédrica cumplen que al ser colocados en el plano, sus ángulos que rodean cada vértice suman 360°. De hecho, cualquier paralelogramo, es un ejemplo de un polígono no regular que tesela el plano, para comprobarlo únicamente debemos prolongar sus lados paralelos y construir los nuevos paralelogramos congruentes al primero, es decir, todos los paralelogramos deben tener el mismo tamaño y la misma forma, obteniendo así una teselación monoédrica.





Otros polígonos irregulares de cuatro lados que también teselan el plano…

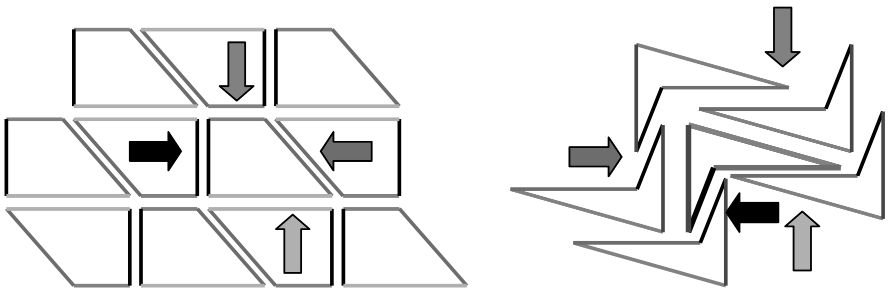
Aquí observamos tres formas distintas de colocar piezas rectangulares en forma de ladrillos, cada una de ellas utiliza un patrón diferente, el de la izquierda muestra los ladrillos desfasados por hileras.



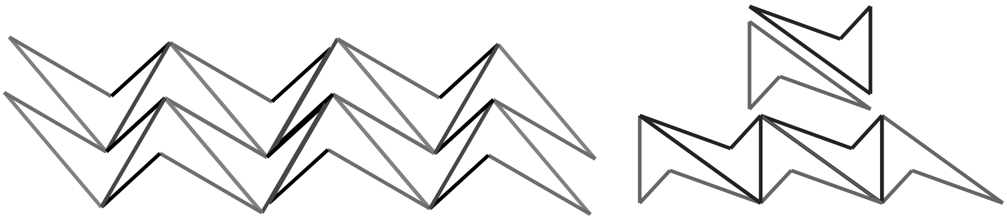
El del centro es un ejemplo original que logra embonar perfectamente el largo y el ancho de cada pieza ya que la medida del largo de la tesela es el doble del ancho de la misma. El patrón en el ejemplo de la derecha forma tres bloques de dos hileras iguales y desfasa el bloque del centro a la derecha.

Pero… ¿Todo cuadrilátero tesela?

Dado que los cuatro ángulos de cualquier cuadrilátero suman 360°, sabemos que basta rodear ese vértice con las otras tres esquinas de tres polígonos iguales, así se completa una vuelta que son 360°. Además, las piezas embonan perfectamente porque al unirlas, coinciden siempre lados iguales con lados iguales ya que así los pegamos.



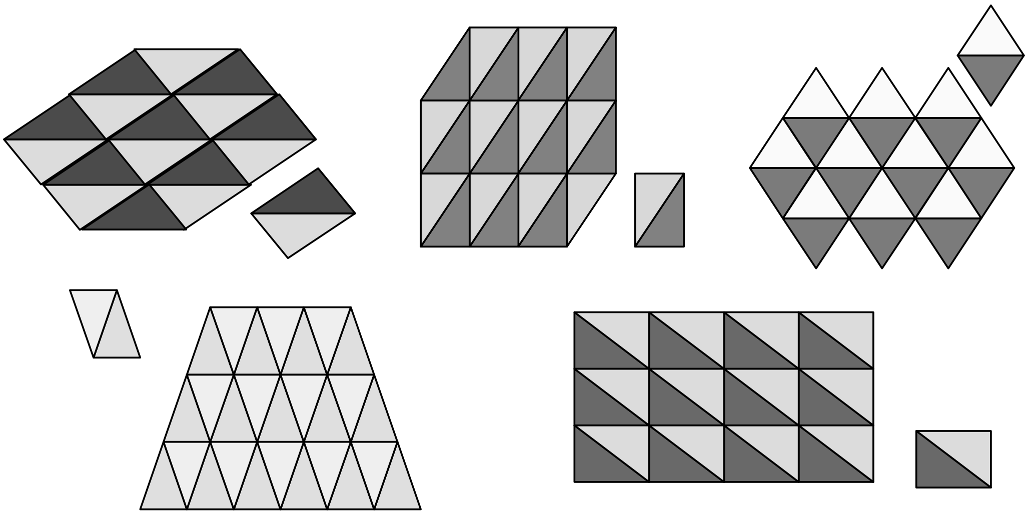
En el caso de que el cuadrilátero sea irregular y no sea convexo tenemos una flecha de cuatro lados, también podemos lograr que esa pieza sirva para teselar de forma monoédrica. Es importante detectar qué forma tiene ya que a partir de rotaciones de 180° en el punto medio de sus lados se obtiene el patrón que nos será útil para teselar el plano sin encimar piezas ni dejar huecos.



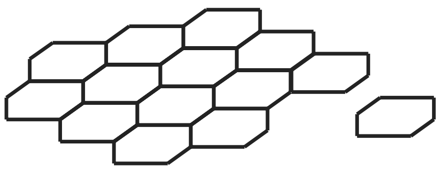
La condición es **girar 180°** en el punto medio de cada lado del cuadrilátero y colocar la pieza nueva en el lado que mide lo mismo.

Por lo tanto, podemos afirmar que, sí cualquier cuadrilátero tesela, entonces cualquier triángulo también lo cumple, dado que al trazar las diagonales de cualquier cuadrilátero obtenemos diversos tipos de triángulos, mismos que serán las piezas que formen la nueva teselación con triángulos. Luego entonces, todos los triángulos también teselan el plano.

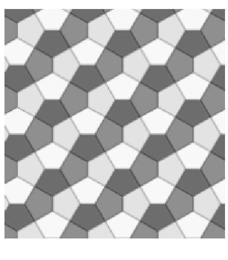
Aquí vemos algunos ejemplos.

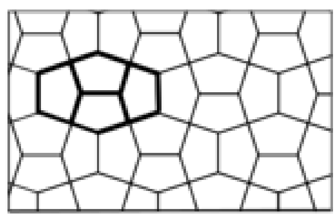


Con los hexágonos que no son regulares pero tienen sus lados opuestos paralelos y de la misma longitud, llamados parhexágonos, se puede construir una teselación colocando las piezas de tal forma que lados iguales de los hexágonos queden unidos.



Un caso particular del parhexágono es aquel que puede dividirse en cuatro pentágonos iguales trazando las perpendiculares levantadas por los puntos medios de sus lados. El pentágono tiene 4 lados del mismo tamaño, tiene 2 ángulos rectos, un ángulo de 144° y dos ángulos de 108°, de esta forma obtenemos 540° que es la suma de los ángulos internos de cualquier pentágono. A la teselación formada por estos pentágonos se le conoce como la teselación del Cairo porque aparece con mucha frecuencia en las calles de Egipto cuya capital lleva dicho nombre.



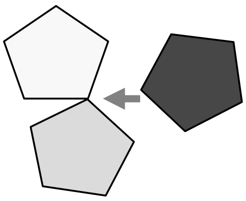


Teselación del Cairo

8. Figuras que no teselan el plano.

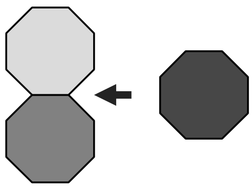
Ahora veamos qué pasa con el pentágono regular… ¿tesela o no tesela?

El pentágono regular no sirve para teselar el plano de forma monoédrica porque los ángulos interiores del ese pentágono miden 108°. Si colocamos dos pentágonos los ángulos suman 216°, si colocamos tres pentágonos la suma de los ángulos es de 324°, pero al colocar el cuarto pentágono, la pieza se encima con la primera dado que sus ángulos suman 432°, la suma de sus ángulos es mayor a 360°, o sea que 108° no es divisor de 360° y por ello es imposible teselar el plano sólo con pentágonos regulares. Aquí notamos porque el pentágono regular no tesela.



la suma de los ángulos interiores de tres pentágonos regulares es 324° ya que cada uno mide 108°

Si queremos encontrar otro polígono regular que tesele el plano de forma monoédrica y que no sea ninguno de los tres que ya conocemos, basta con observar que al colocar varias piezas iguales a ese polígono sobre el plano, sucede que quedan huecos o las piezas se enciman y el plano no se cubre por completo, lo cual quiere decir que ese polígono no tesela el plano. Tampoco el heptágono, el octágono y demás polígonos regulares de más de siete lados teselan el plano.



la suma de los ángulos interiores de tres octágonos regulares es 405° ya que cada uno mide 135°

Por lo tanto, ningún otro polígono regular distinto al triángulo equilátero, al cuadrado o al hexágono regular sirve para armar teselaciones monoédricas en el plano.

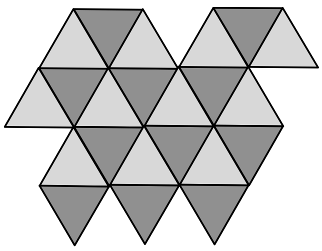
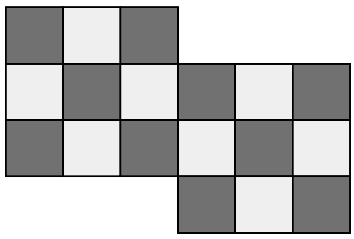
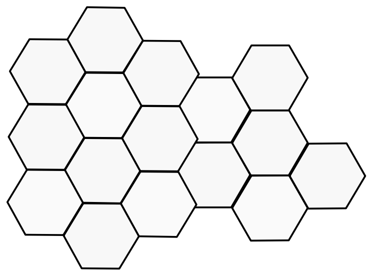
9. ¿De cuántas formas se pueden armar teselaciones que cubran el plano?

Cuando colocamos piezas en el plano para armar una teselación, regularmente seguimos ciertas reglas de pegado que nos indican cómo embonan perfectamente sin encimarse ni dejar huecos. De acuerdo a las reglas de pegado que deben cumplirse al armar una teselación se generan patrones de armado que determinan varios tipos de teselaciones, entre ellas: las regulares, las semiregulares, las no regulares, las periódicas, las no periódicas y las aperiódicas.

Es importante identificar el comportamiento de dicho patrón de armado al teselar el plano ya que indica las reglas para pegar las piezas y así permite seguir extendiendo la teselación infinitamente. Por ejemplo, si cualquier vértice de la teselación está rodeado por el mismo número de teselas congruentes, el patrón de armado de esa teselación indica que siempre se va a cumplir esa condición entre otras, y las simetrías, si es que existen, quedarán determinadas por dichas reglas de pegado.

Teselaciones Regulares

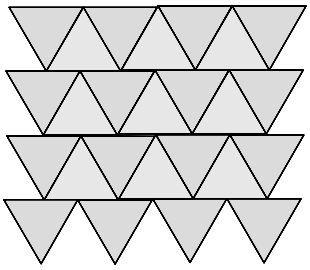
Los diseños de este tipo de teselaciones se identifican por usar **una única tesela que es un polígono regular** para cubrir todo el plano, además si pedimos que las piezas se unan lado con lado y que cada vértice de la teselación tenga el mismo número de piezas congruentes.

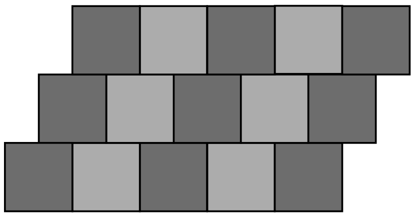
Un tablero de damas chinas | Un tablero de ajedrez | Un panal de abejas

Los tres ejemplos anteriores son las únicas teselaciones regulares ya que la suma de los ángulos internos de las piezas que rodean un vértice, siempre suman 360°, esto se debe a que los ángulos son de un triángulo equiángulo, de un cuadrado y de un hexágono regular son divisores de 360°.

A continuación se muestra un par de ejemplos de teselaciones que resultan de aceptar que los lados de las teselas no coincidan completamente unos con otros, por lo tanto, no son teselaciones regulares. Los vértices de los triángulos tocan el punto medio de uno de los lados de otro triángulo y lo mismo sucede con la teselación de los cuadrados desfasados.



Dientes de cocodrilo



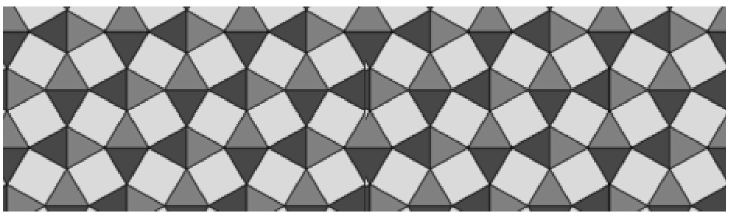
Subiendo algunos escalones

Teselaciones Semiregulares

Las teselaciones **semiregulares** son aquellas que están formadas por varios polígonos regulares de tal manera que **las piezas se unen lado con lado**, cumpliendo además que **la forma de colocar las teselas sea igual en todos los vértices**. Es posible colocar dos o más polígonos regulares para rodear los vértices de una teselación completando los 360° pero hay pocas opciones si además se pide como requisito necesario que las piezas se peguen lado con lado y la manera de rodear todos los vértices de la teselación siempre sea la misma. Pero, cuántas de ellas cumplen con esas condiciones: las piezas coincidan al unirse lado con lado, la posición de las piezas sea igual en cada vértice, se usen al menos dos polígonos regulares y sean diferentes.

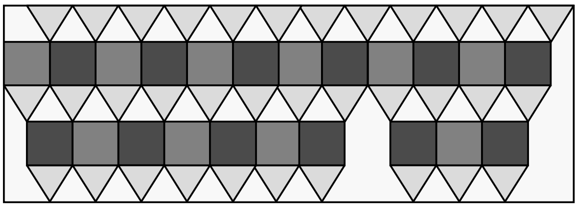
Se puede demostrar matemáticamente que existen únicamente ocho formas de armar teselaciones semiregulares. Esto quiere decir que sólo hay ocho maneras distintas de rodear los vértices de una teselación colocando de manera combinada polígonos regulares que se unen lado con lado, donde todos los vértices de cada teselación sean siempre iguales, es decir, estén rodeados por las mismas piezas y estén acomodadas de la misma manera.

Algunos ejemplos de teselaciones semiregulares.



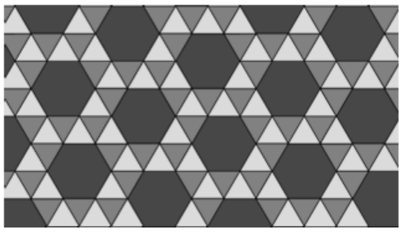
(4, 3, 4, 3, 3)

En cada vértice hay dos cuadrados y tres triángulos equiláteros, pero es importante observar que el lado del cuadrado mide lo mismo que el lado del triángulo equilátero y en qué orden rodean cada vértice éstas cinco piezas. La notación que usaré para representarlo es por medio de números entre paréntesis separados por comas, donde el 3 simboliza un triángulo, el 4 un cuadrado, el 6 un hexágono…



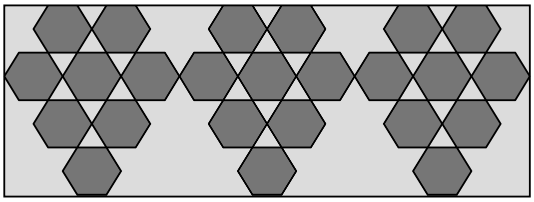
(3, 3, 3, 4, 4)

En cada vértice hay tres triángulos y dos cuadrados.



(6, 3, 3, 3, 3)

En cada vértice hay cuatro triángulos y un hexágono.

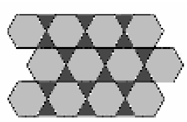


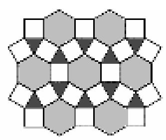
(6, 3, 6, 3)

En cada vértice hay dos triángulos y dos hexágonos.

Las únicas ocho opciones distintas de rodear todos los vértices en una teselación de la misma forma, de tal manera que las piezas coincidan lado con lado y se usen al menos dos polígonos regulares son las siguientes.

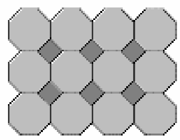
(3, 6, 3, 6)

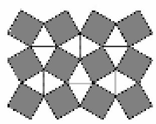




(3, 4, 6, 4)

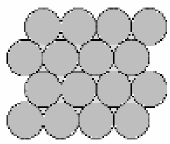
(4, 8, 8)

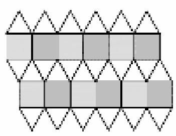




(3, 3, 4, 3, 4)

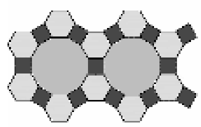
(3, 12, 12)

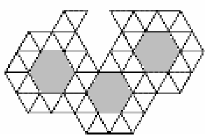




(3, 3, 3, 4, 4)

(4, 6, 12)





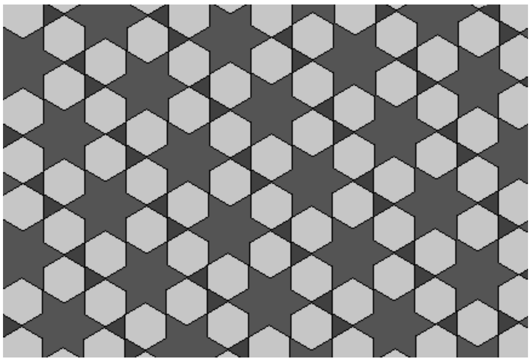
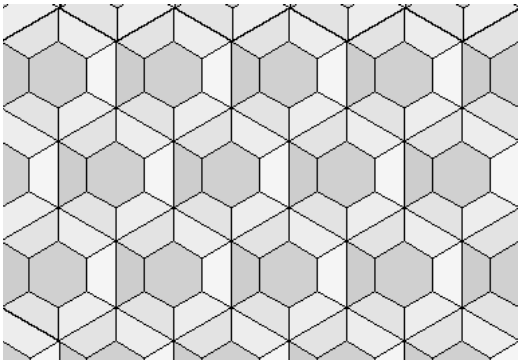
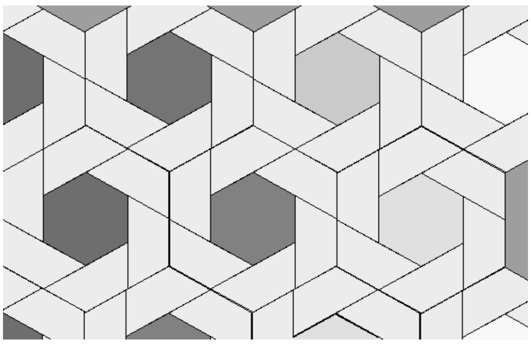
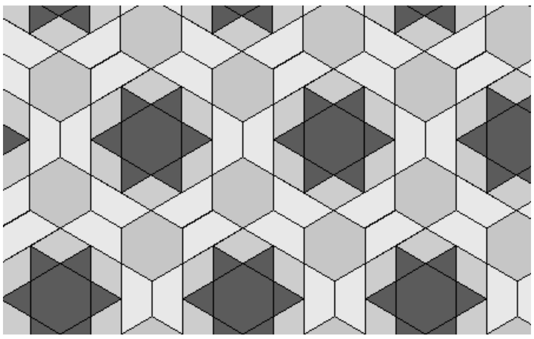
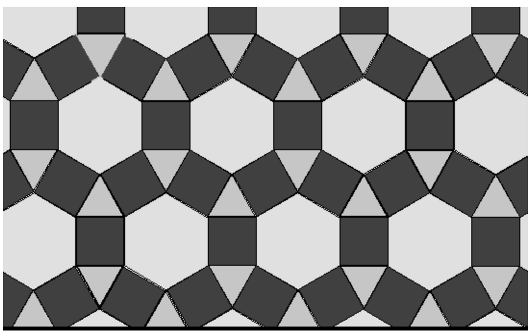
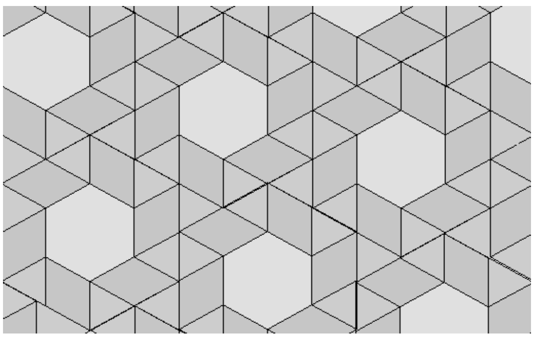
(6, 3, 3, 3, 3)

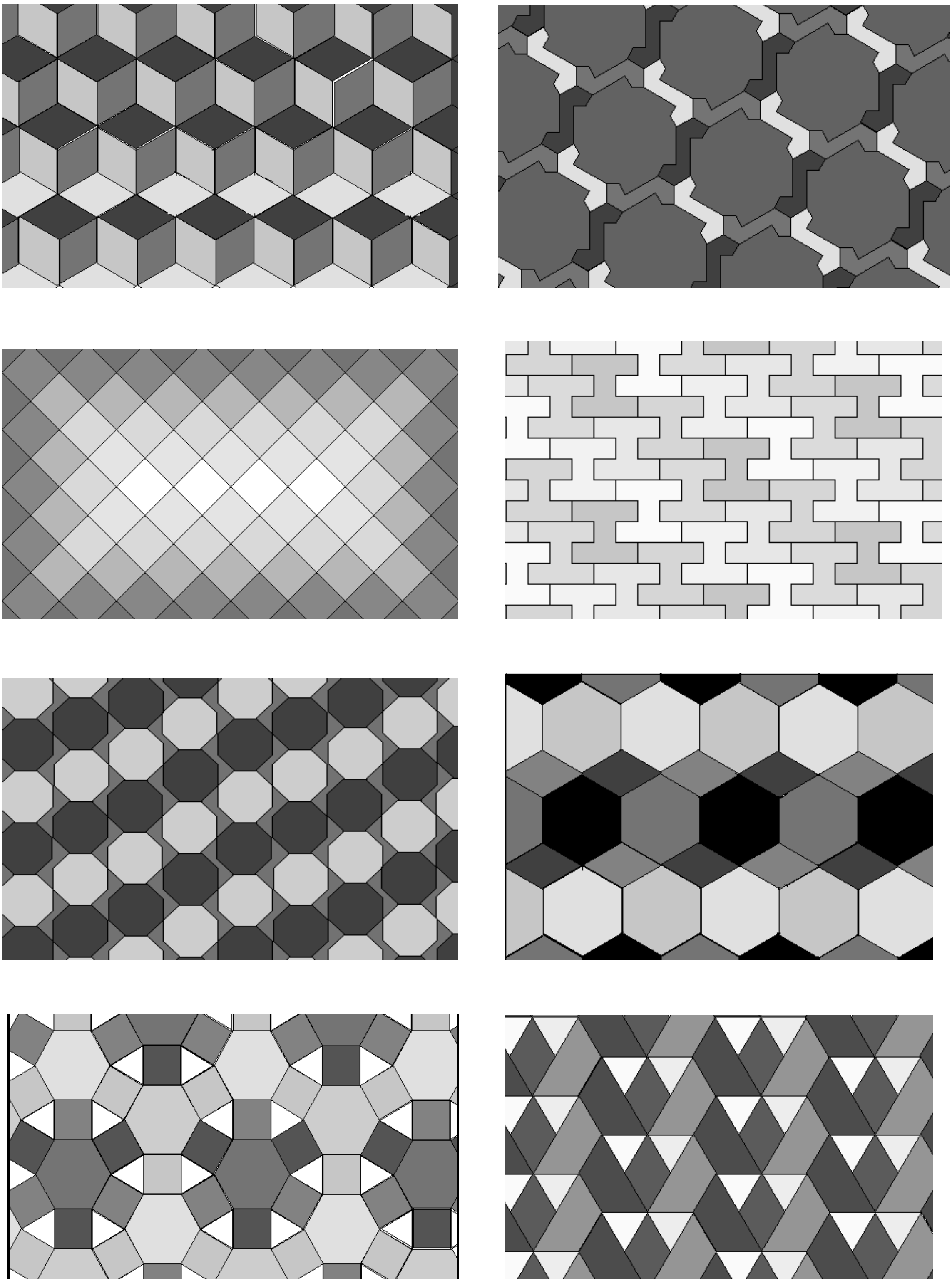
En ellas encontramos polígonos regulares como triángulos, cuadrados, hexágonos, octágonos y dodecágonos que cumplen las condiciones necesarias y suficientes para armar las ocho teselaciones semiregulares diferentes.

Teselaciones no regulares

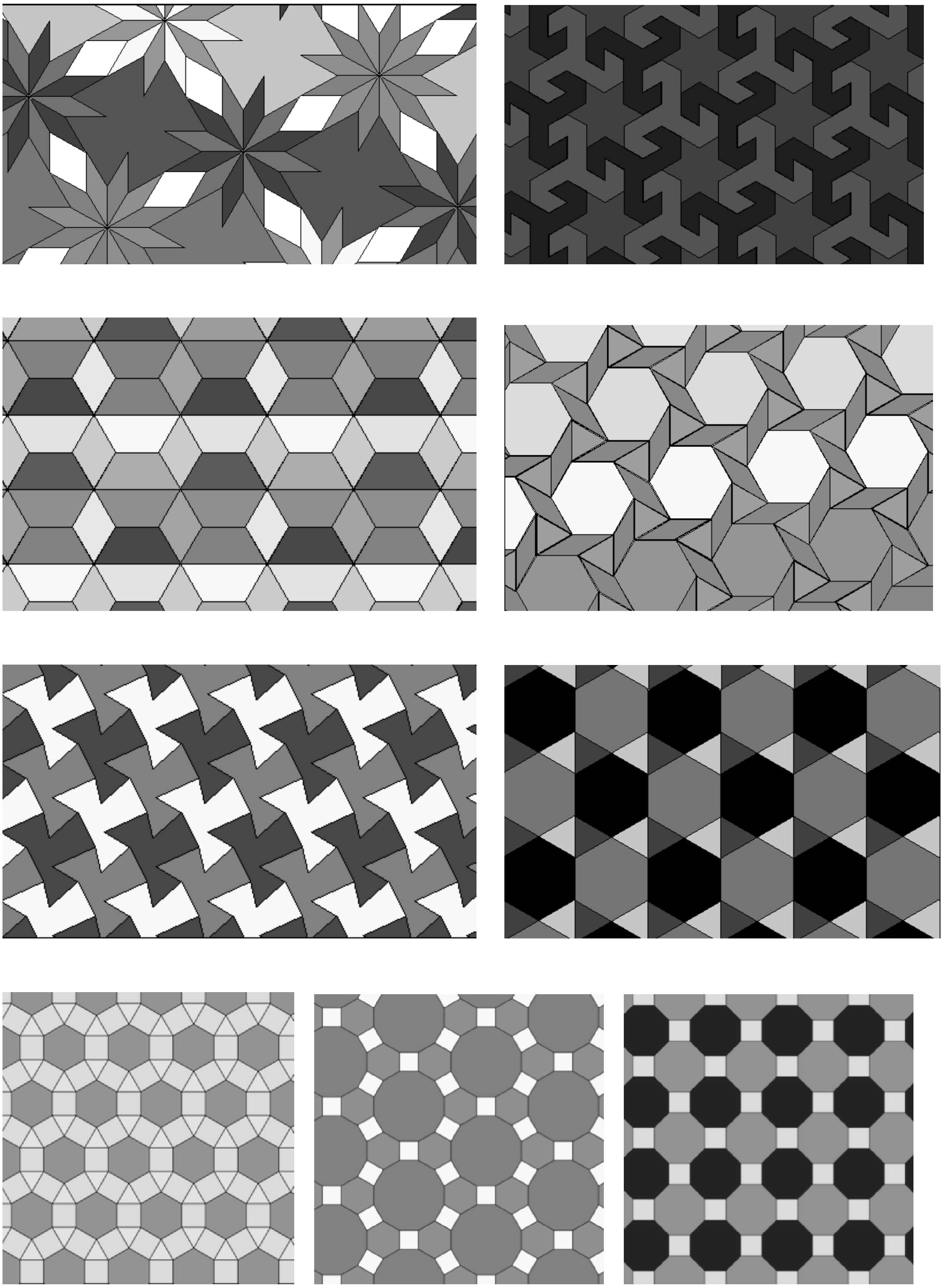
Existe una inmensa variedad de teselaciones que están formadas por **polígonos no regulares,** las teselas que utilizamos para construirlas van desde algunos polígonos irregulares hasta aquellas que tienen lados curvos o líneas que dan forma a flores, animales o cosas.

Existen muchos ejemplos de piezas que tienen formas conocidas pero que vistas como polígonos tienen la propiedad de teselar formando gran variedad de diseños, para muestra tenemos aquí algunas teselaciones con polígonos de diversos tipos, tamaños y colores.

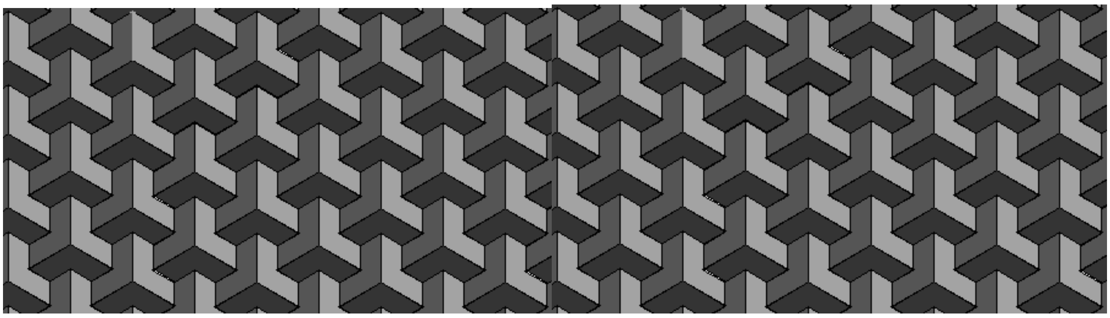


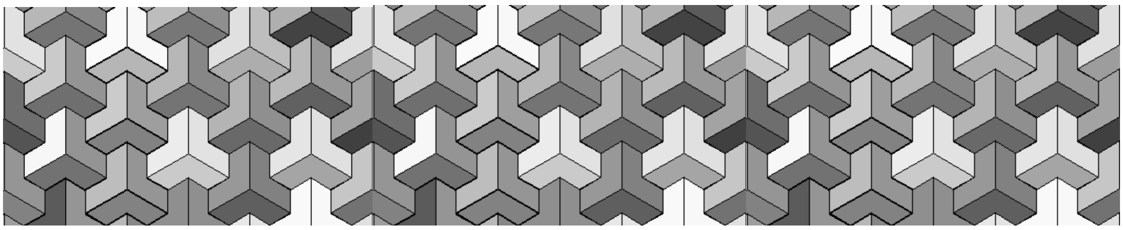
Teselando el plano con polígonos

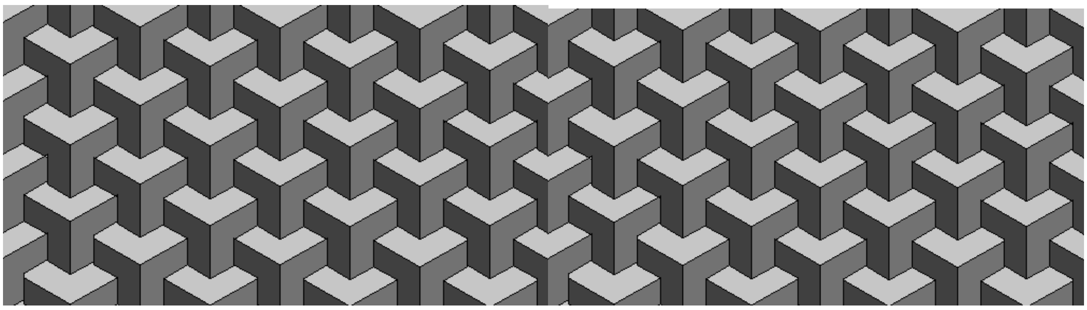


Teselando el plano con polígonos

Aquí hay algunos ejemplos de teselaciones en el plano con vista en un espacio de tres dimensiones usando perspectiva. Incluso, si observamos con atención se trata de la misma tesela, la diferencia entre ellas es el tamaño de la pieza y la asignación de colores.





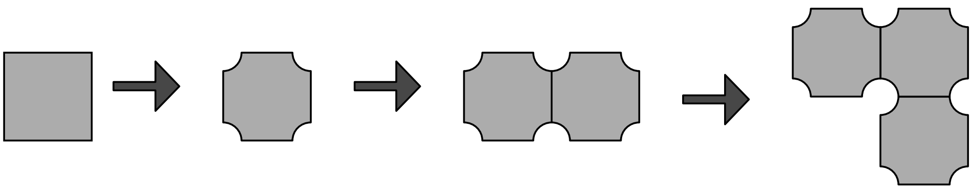


Teselando el plano con polígonos

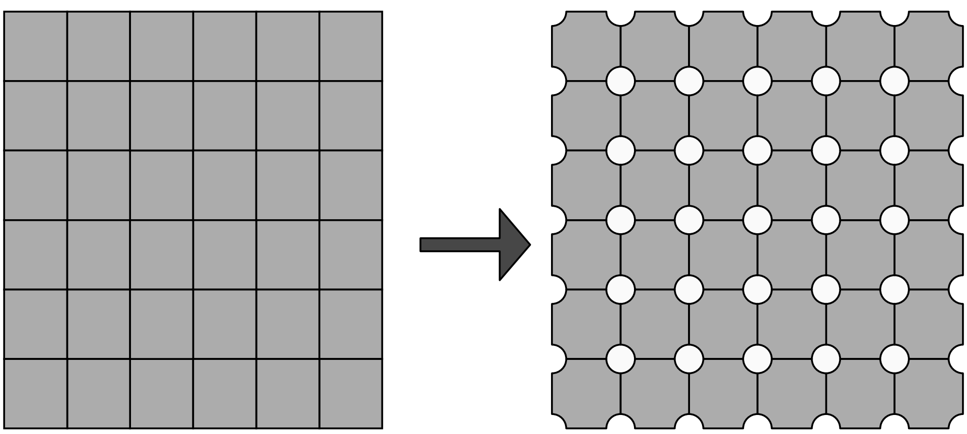
10. Diseño y construcción de teselas.

Ahora conoceremos cómo diseñar teselas que cubran el plano a partir de piezas en forma de polígonos que sabemos que sí teselan, como el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular o bien, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos y otros polígonos irregulares. La técnica consiste en modificar la forma de los lados de esas teselas que ya conocemos siguiendo un patrón determinado, así, según el tipo de modificación que hagamos obtendremos diferentes teselaciones.

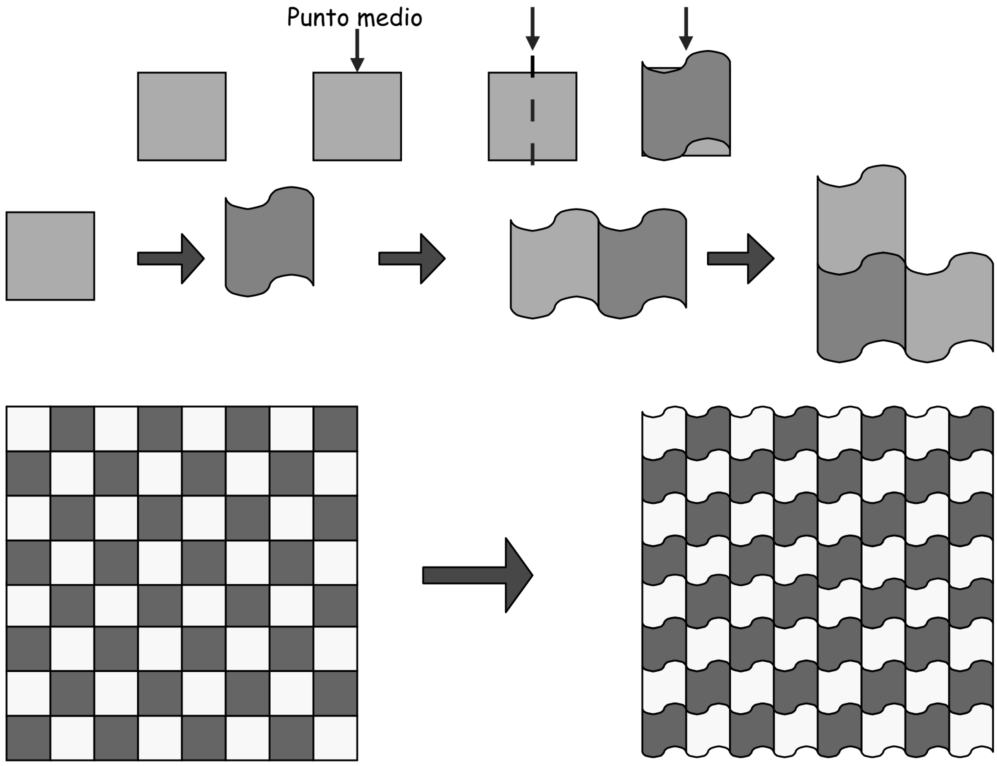
Sabemos que es posible teselar con cuadrados uniendo lado con lado, haciendo coincidir así, cuatro de ellos en cada vértice. Dado que los lados de una tesela no tienen por qué ser siempre rectos, es posible cambiarlos por líneas quebradas o curvas. En este caso, si observamos la tesela modificada, vemos que se obtiene al quitarle las cuatro esquinas al cuadrado, aquí cambiamos el ángulo recto por una curva cóncava que es simétrica en las cuatro esquinas.



Al teselar con nuestra tesela modificada obtenemos una teselación nueva, al unir las piezas lado con lado, lo que era el vértice en nuestra teselación vieja se transformó en el centro de un círculo. Tenemos ahora una teselación diédrica.



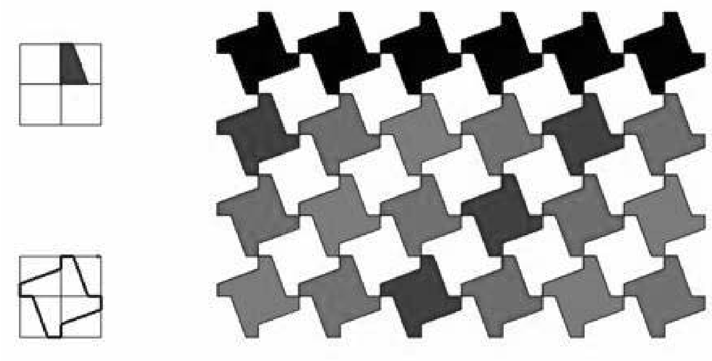
En el siguiente ejemplo transformaremos un cuadrado en otra tesela con bordes curvos. Elegimos dos de los lados paralelos, en cada uno de ellos marcamos el punto medio, trazamos una curva del vértice al punto medio, giramos esa curva 180° sobre el punto medio y así completamos el trazo de ese lado que ahora tiene un borde curvo que embona sobre sí mismo por haberlo girado media vuelta. Tenemos así una tesela con borde curvo que embona con otra igual a ella al pegar lados iguales.



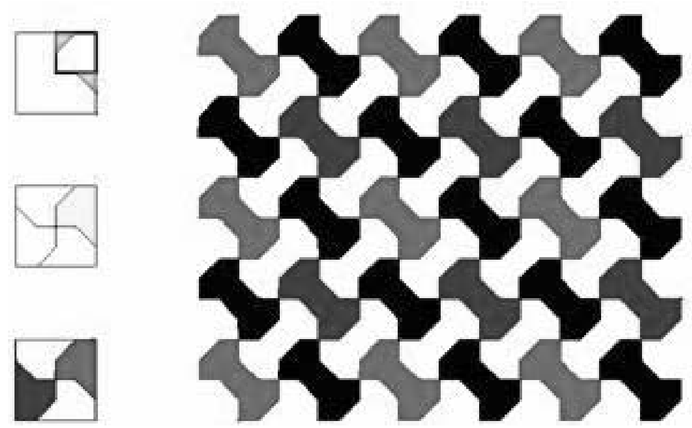
Es posible deformar uno, dos, tres o los cuatro lados del cuadrado simétricamente y con ello podremos estar seguros de que la tesela cubre el plano dado que al diseñarlas de esa forma obligamos a que los lados correspondientes embonen perfectamente.

A continuación podremos observar varios ejemplos de cómo obtener una pieza que tesele a partir de un polígono que sabemos que sí tesela. Sin embargo, es importante decir que el área de la nueva pieza no siempre coincide con el área del polígono, en estos ejemplos el área de la pieza nueva suele ser menor o igual que la del polígono del cual partimos. En todos estos ejemplos, se marcan líneas que dividan el polígono que tesela en varias piezas siguiendo reglas específicas, de tal modo que al seguir el contorno de esas líneas auxiliares se forma la nueva figura geométrica que también tesela.

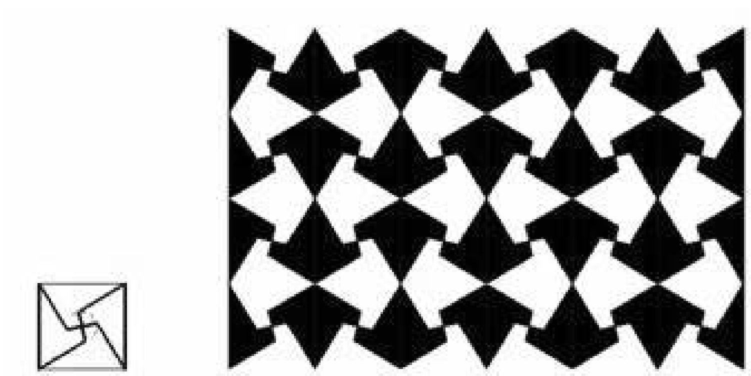
En el cuadrado de la izquierda de cada uno de los ejemplos se muestra paso a paso la construcción de la nueva tesela. En la mayoría de ellos, se observa como a partir del cuadrado se trazan algunas líneas que van a definir el contorno de la nueva tesela.



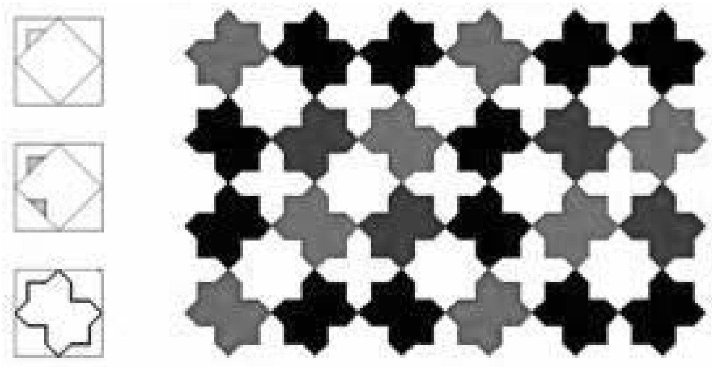
El área de la pieza nueva es igual a la mitad del área que tiene el cuadrado original.



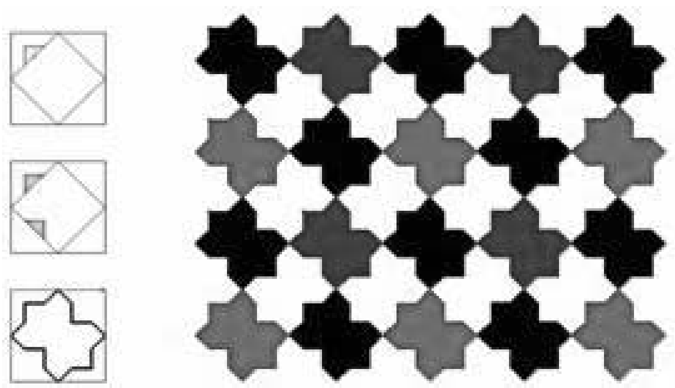
El área de la pieza nueva es igual a la que tiene el cuadrado original.



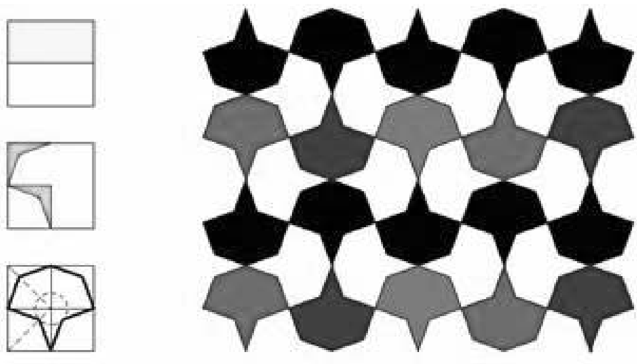
El área de la pieza nueva es igual que la del cuadrado.

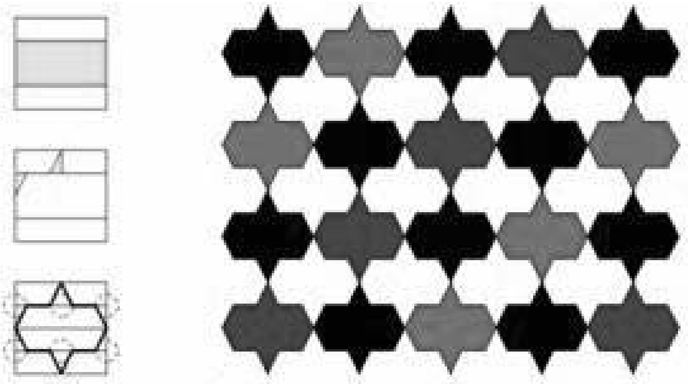


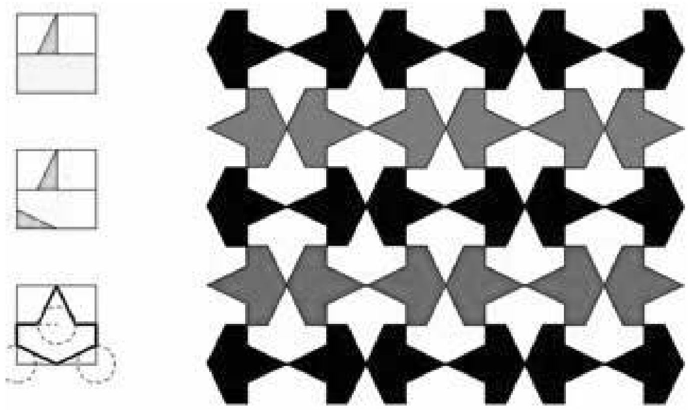
Aquí tenemos la misma pieza pero la forma de colocarla en el plano nos permite obtener dos teselaciones diferentes, la de arriba es una teselación triédrica y la de abajo es una teselación monoédrica.

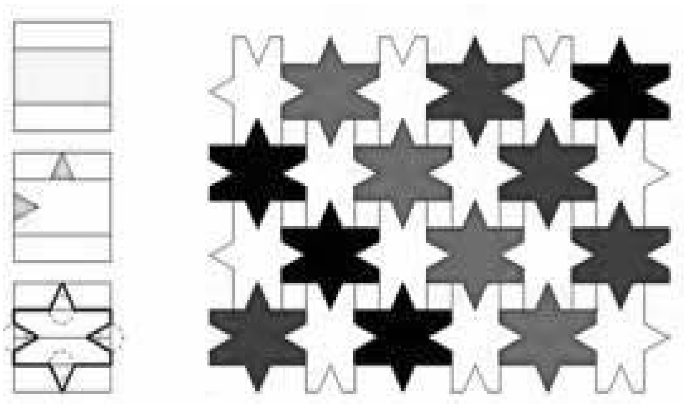


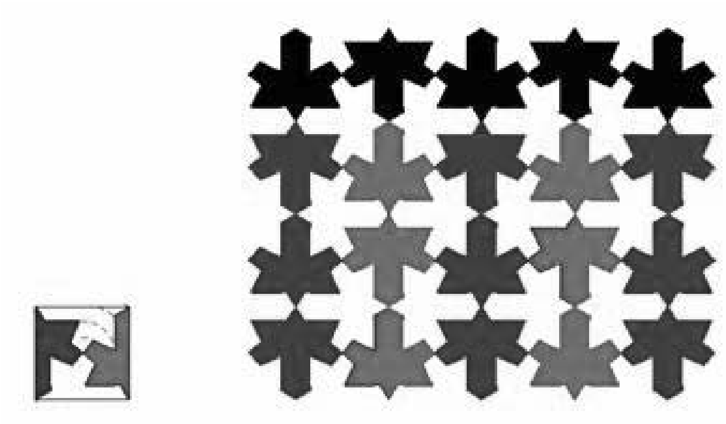
El área de la pieza nueva es menor que la del cuadrado.





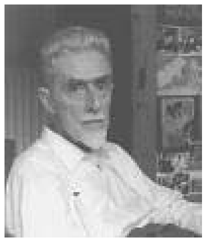




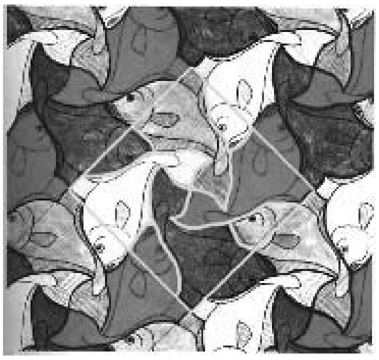


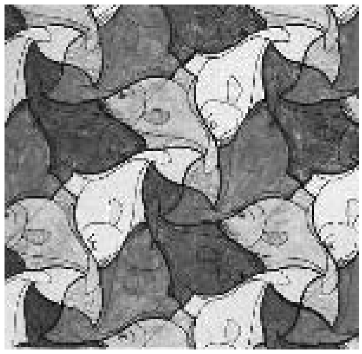
11. Transformando polígonos al estilo Escher.

Al hablar de teselaciones en el plano euclidiano es necesario considerar que a partir de los polígonos regulares e irregulares que sí teselan es posible construir nuevas figuras que también sirven para cubrir el plano. Un plano teselado es una familia numerable de conjuntos cerrados llamados teselas, estas figuras no se enciman ni dejan huecos y las hay de muchas formas.



El artista holandés M. C. Escher se divirtió creando teselaciones en el plano con figuras de distintas formas, pájaros, peces, caracoles, estrellas y caballitos de mar, barcos, jinetes, caballos, murciélagos, escarabajos, duendes, en fin...





Si en cada lado del cuadrado marcamos el mismo trazo de la figura obtendremos la forma de dividir el cuadrado en las partes de cuatro peces.

En este ejemplo, a la izquierda tenemos una teselación monoédrica formada por peces, todos del mismo tipo pero en diferentes colores. Si observamos el cuadrado marcado en la teselación notamos que está dividido en ocho regiones de tal forma que quedan cuatro cabezas y cuatro cuerpos, la cabeza del pez blanco aparece justo atrás de su cuerpo y así sucede también con los otros tres. De este modo caben exactamente cuatro peces dentro del cuadrado, lo cual significa que el área del cuadrado es exactamente igual que si sumamos las áreas de los cuatro peces.

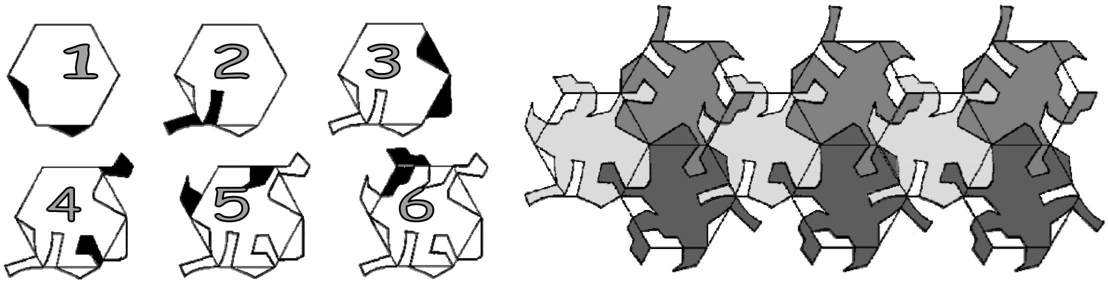
En esta teselación podemos apreciar del lado derecho una teselación monoédrica formada por pájaros, todos son del mismo tipo, los hay blancos y negros.

Aquí observamos un hexágono regular dividido en triángulos equiláteros que a su vez están divididos marcando la forma del pájaro. El cuerpo del ave blanca o negra ocupa la parte central del triángulo quedando fuera la cabeza, la cola y parte de ambas alas. En las cuatro regiones que quedan en el triángulo encontramos la cabeza, la cola y dos partes de las alas de otros pájaros negros o blancos que rodean al que queda en el centro.

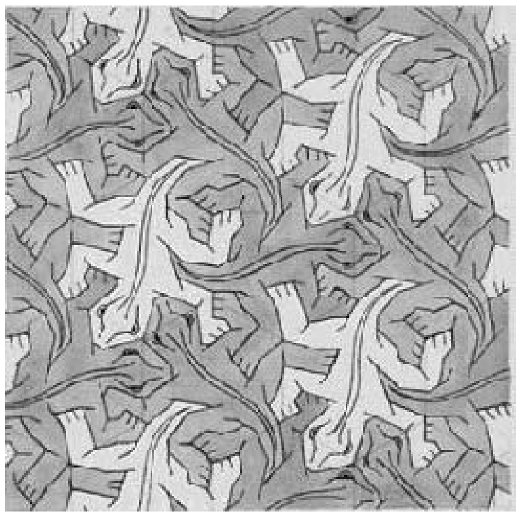
¿Cómo transformar un cuadrado en un lagarto?

Observando y comparando ambas teselaciones es posible describir cómo hacer la transformación de un cuadrado en un lagarto.

¿Cómo transformar un hexágono equilátero en un lagarto?



La secuencia de las imágenes que aquí aparecen, muestran paso a paso la transformación de un hexágono regular en un lagarto. Recortamos el área marcada en negro que está dentro del primer hexágono y la pegamos en el lado consecutivo del mismo como lo indica la imagen, de igual manera en cada uno de los siguientes pasos.



Teselación de Escher con lagartos de colores.

De esta manera logramos transformar polígonos en figuras que teselan, es fácil sospechar que las piezas que nos sirven para teselar tienen una gran variedad de formas, de hecho existe una infinidad de formas. Los matemáticos y en particular los geómetras se han ocupado especialmente por estudiar diversos diseños de teselaciones cuyas teselas tienen formas muy atractivas, extrañas e interesantes. La investigación matemática sigue trabajando en varios problemas abiertos sobre el tema.

Capítulo 3
Isometrías, simetrías y teselaciones

"Enseñar no es dar carrera para vivir,
es templar el alma para las dificultades de la vida"
(Pitágoras)

En los programas de estudio del nivel medio superior de nuestro país, México, se encuentra el tema de simetrías más no los de isometrías y teselaciones, estos son temas no tradicionales. Sin embargo, aprender algunas propiedades de las figuras geométricas en el plano y observar patrones es relevante para entender mejor el estudio de las teselaciones. El tema está relacionado con la noción de congruencia, mismo que se ve en los primeros años del bachillerato por lo que no es posible evitar abordarlo. Tiene además, una fuerte relación con la expresión artística que se apoya en la construcción geométrica, su aprendizaje favorece el desarrollo de habilidades asociadas al sentido espacial, al dominio de propiedades geométricas de algunas figuras y al desarrollo de habilidades intelectuales como percepción, imaginación, razonamiento lógico y abstracción.

En este capítulo veremos qué es una isometría y qué es una simetría, analizaremos cuál es la relación entre ambas, algunos conceptos y propiedades geométricas que se relacionan con ellas y con las teselaciones. Revisaremos propiedades interesantes de los cuatro movimientos rígidos del plano, las simetrías en algunas figuras planas, como caso especial el grupo de simetrías del cuadrado, simetrías en frisos y en algunas teselaciones. Ejemplos interesantes como las teselaciones de Penrose que no tienen simetrías y el caso de teselar con reptiles. Para concluir el capítulo se presentan actividades y ejercicios con los temas vistos.

1. Movimientos rígidos en el plano, isometrías.

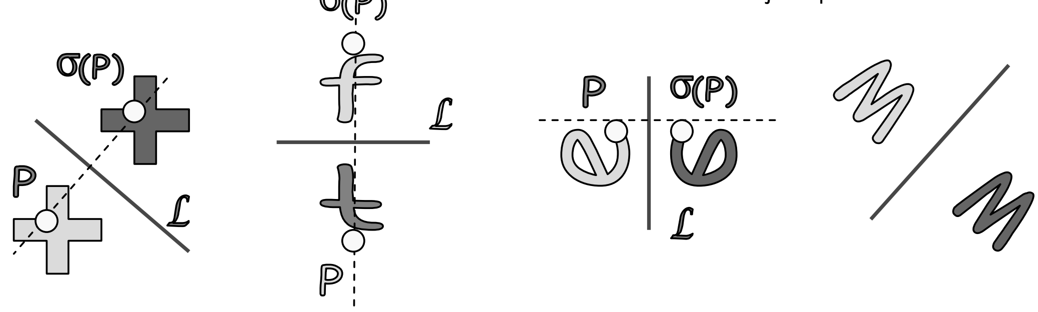
La palabra isometría tiene su origen en el griego (ισο **igual** o **mismo y** μετρια **medir**). Las isometrías o transformaciones isométricas son movimientos rígidos del plano, preservan las distancias, significa que no deforman las figuras. Las isometrías conservan la forma y el tamaño de la figura original. Cuando una transformación cambia el tamaño o la forma de la figura tenemos una transformación no rígida.

Las isometrías forman un **grupo**, esto quiere decir que cumplen las siguientes condiciones, la composición de movimientos isométricos es cerrada ya que al aplicar dos isometrías a la misma figura, el resultado es una isometría. La **identidad**, es una isometría. Toda isometría t, tiene **inversa** t^{-1}, y la inversa también es isometría, ya que al regresar la figura a su lugar original las distancias no se transforman.

Como señala Grünbaum en su libro Tilings and patterns, en el plano únicamente hay **cuatro isometrías**, tres de ellas son conocidas por todos desde la secundaria: las reflexiones, las traslaciones y las rotaciones, la cuarta se llama deslizamiento y consiste en realizar una reflexión y luego una traslación que siga la dirección de la línea de reflexión.

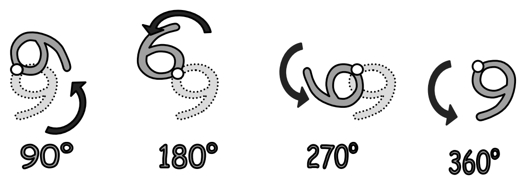
Definición i) Una transformación isométrica es una **reflexión** en una recta $\mathcal{L}$ en el plano, si para todo punto P la recta que pasa por P y por **σ**(P) es perpendicular a $\mathcal{L}$ y el punto medio de P y **σ**(P) está en $\mathcal{L}$.

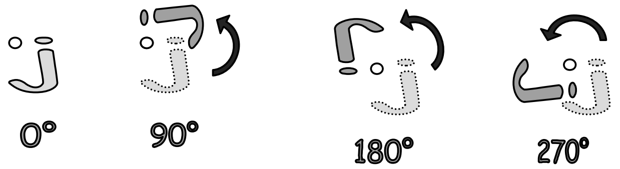
Ejemplos de reflexiones.



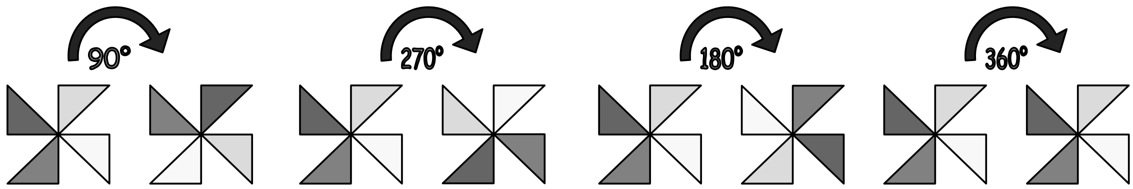
Definición ii) Una transformación isométrica **ρ** es una **rotación** alrededor de un punto O con ángulo dirigido si el punto O permanece fijo y siempre se cumple que d (P, O) = d (ρ(P), O) y el ángulo P O ρ(P) es **α**.

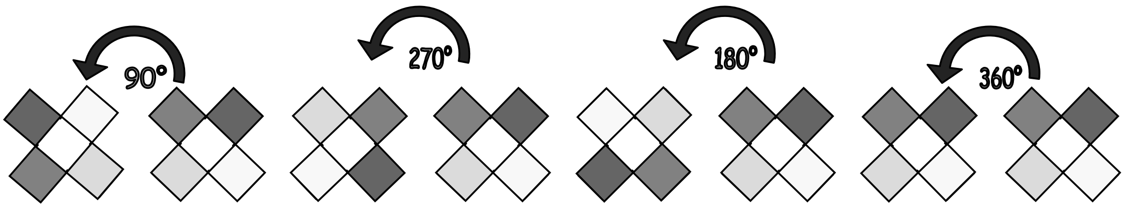
Ejemplos de rotaciones.





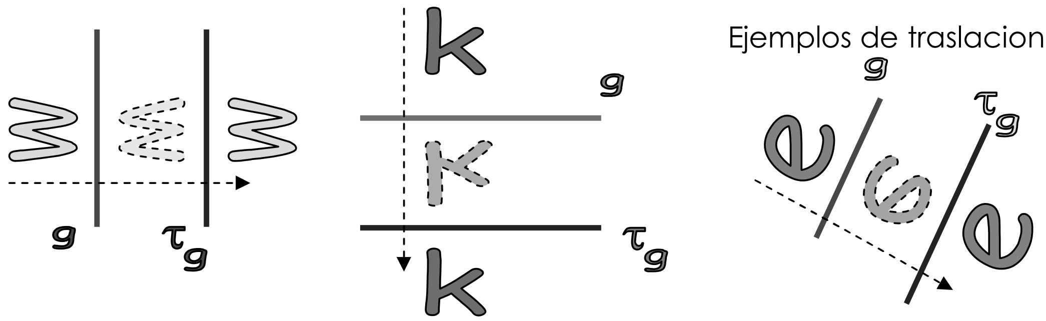
Ejemplos de rotaciones.





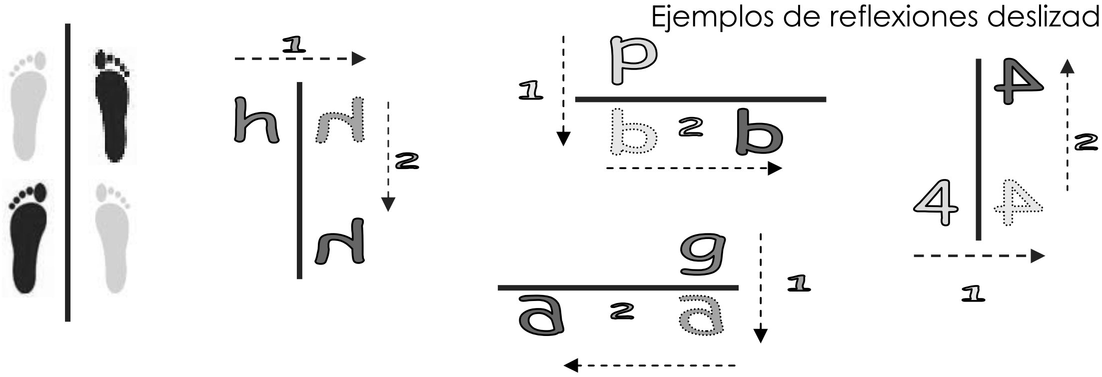
Definición iii) Una transformación isométrica τ es una **translación** si τ no tiene puntos fijos y para toda recta g se cumple siempre que g es paralela a τg. Es decir, una translación es el resultado de aplicar dos reflexiones en ejes paralelos.

Ejemplos de traslaciones.



Definición iv) Una transformación isométrica δ es un **deslizamiento** si es la composición de dos movimientos, una reflexión seguida de una traslación en la dirección indicada por el eje de reflexión, por ello también se le llama reflexión deslizada.

Ejemplos de reflexiones deslizadas.

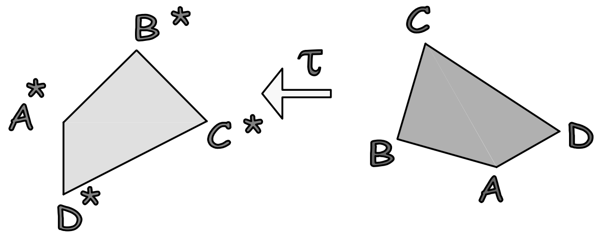


Isometrías Directas e Inversas.

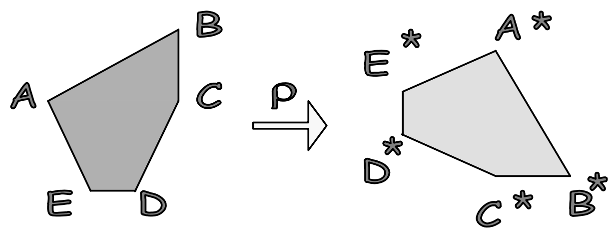
La traslación y la rotación son isometrías directas ya que preservan la orientación, en los siguientes ejemplos se ve que el orden de los vértices del polígono leídos en orden levógiro (en el sentido contrario a las manecillas del reloj) no cambia.

Ejemplos:

$$\tau(A) = A^*$$
$$\tau(B) = B^*$$
$$\tau(C) = C^*$$
$$\tau(D) = D^*$$

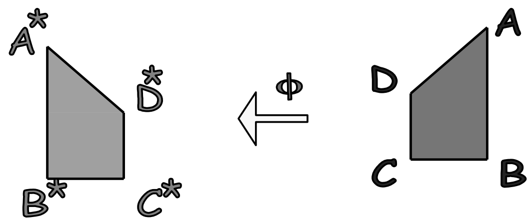


$$\rho(A) = A^*$$
$$\rho(B) = B^*$$
$$\rho(C) = C^*$$
$$\rho(D) = D^*$$
$$\rho(E) = E^*$$

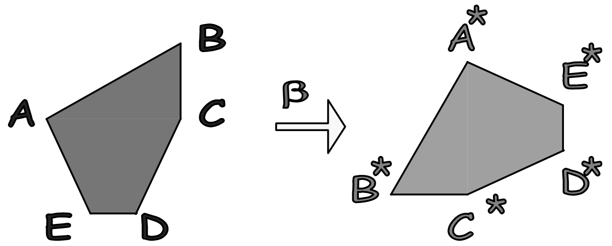


En cambio, en la reflexión y el deslizamiento, se invierte el orden en que se leen los vértices, es decir si los vértices de la figura original se leen en orden levógiro (al contrario de las manecillas del reloj), los vértices de la figura imagen se leerán en orden dextrógiro (en el mismo sentido de las manecillas del reloj) y viceversa.

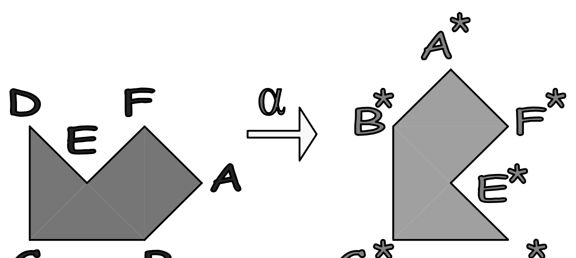
Ejemplos:



$$\phi(A) = A^*$$
$$\phi(B) = B^*$$
$$\phi(C) = C^*$$
$$\phi(D) = D^*$$



$$\beta(A) = A^*$$
$$\beta(B) = B^*$$
$$\beta(C) = C^*$$
$$\beta(D) = D^*$$
$$\beta(E) = E^*$$



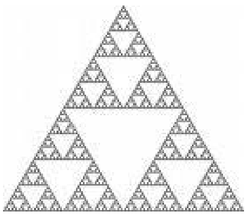
$$\alpha(A) = A^*$$
$$\alpha(B) = B^*$$
$$\alpha(C) = C^*$$
$$\alpha(D) = D^*$$
$$\alpha(E) = E^*$$
$$\alpha(F) = F^*$$

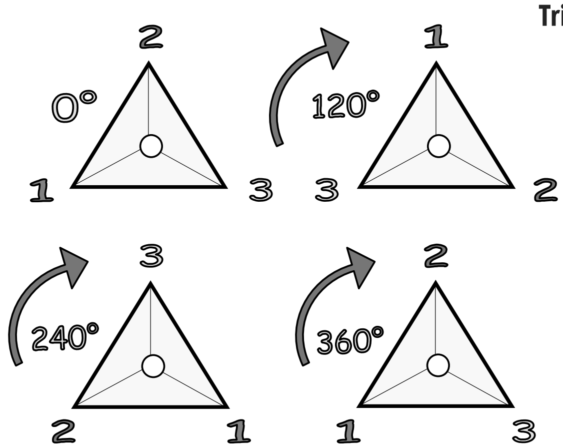
2. Simetrías en algunas figuras planas.

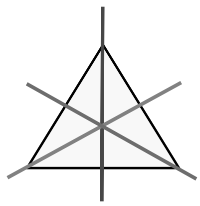
La **simetría** es una propiedad geométrica que se encuentra en todos los polígonos regulares. Una figura es simétrica si existe una isometría que la deje invariante.

Por ejemplo: En el triángulo equilátero la reflexión en cualquiera de las líneas indicadas es una simetría pues al reflejar el triángulo cae sobre sí mismo. Tiene además rotaciones de 120°, 240°, 360°.

Triángulo equilátero

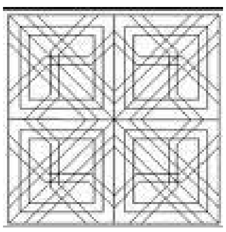


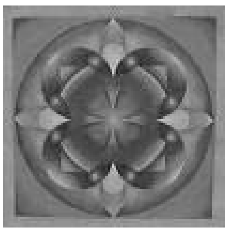


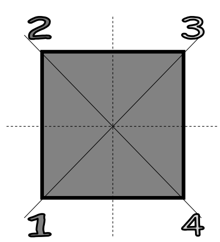


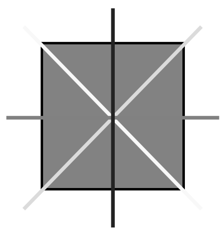
Cuadrado

En el cuadrado hay ocho simetrías, cuatro corresponden a reflexiones distintas, una horizontal, una vertical y dos diagonales. El centro de giro que está justo en el punto donde se cruzan los cuatro ejes de simetría y corresponde a rotaciones de 90°, 180°, 270° y 360°.







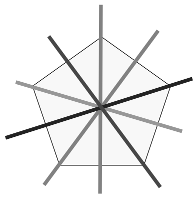


Si le aplicamos rotaciones o reflexiones al cuadrado, las figuras que aquí aparecen permanecen invariantes, es decir, no cambian.

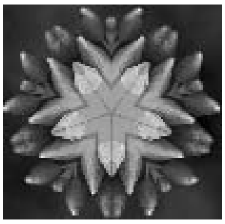
Pentágono equilátero

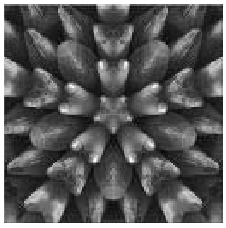
En el pentágono regular encontramos cinco reflexiones y el centro de giro que determina rotaciones de 72°, 144°,216°, 288° y 360° se localiza en el punto donde se cruzan los cinco ejes de reflexión.





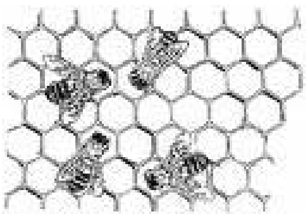
La forma pentagonal se encuentra de manera natural en las flores y también la encontramos en construcciones. Hay figuras que tienen simetría pentagonal.

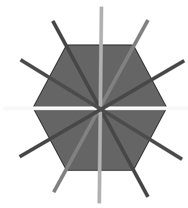




Hexágono equilátero

El hexágono regular tiene su centro de giro en el punto de intersección de todas las líneas de reflexión con rotaciones de orden seis (60°, 120°, 180°, 240°, 300° y 360°), sus seis ejes de simetría marcan las distintas reflexiones, tres de ellas se obtienen al unir vértices opuestos del hexágono y las otras tres al unir los puntos medios de los lados opuestos correspondientes.

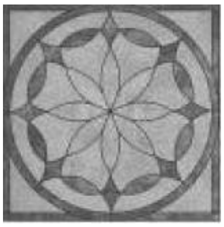
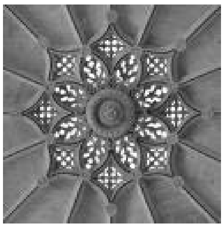
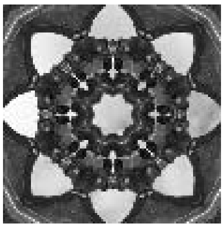
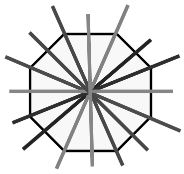





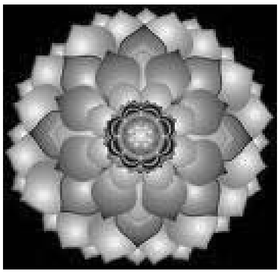
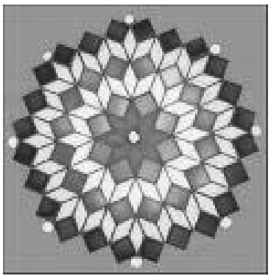
En la naturaleza aparecen formas hexagonales como estas.

Octágono equilátero

El octágono regular tiene un centro de rotación de orden ocho (45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°, 360°) en el punto de intersección de las ocho líneas de reflexión.

La simetría octagonal aparece en obras de arte, murales, obras arquitectónicas.

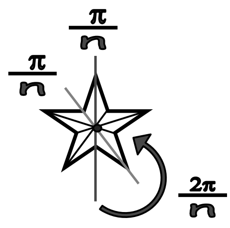

Cualquier polígono regular tiene ejes de simetría y centros de giro dado que sus lados y ángulos son iguales, entre más pequeño sea el ángulo más ejes de simetría tendrá. Pero… ¿Por qué rotaciones y reflexiones son todas las simetrías en un polígono y no hay más?…

Un polígono sólo acepta rotaciones y reflexiones como simetrías ya que toda simetría de un polígono deja al menos un punto fijo, por lo tanto ni translaciones ni deslizamientos pueden ser simetrías de ellos.

Teorema de Leonardo:

Un grupo finito de isometrías es

- Cíclico (generado por una **rotación** de **2π/n**).
- Diédrico (generado por dos **reflexiones** en espejos con ángulo **π/n**).



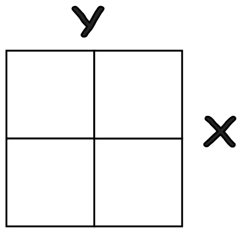
Por cierto, ¿la circunferencia tendrá simetrías?, ¿cuántos ejes de simetría hay en ella?, ¿cuántos centros de rotación tiene?...

Claro que sí, la circunferencia tiene una infinidad de simetrías, cada uno de los diámetros de la circunferencia será un eje de simetría y el punto medio del diámetro será el centro de rotación.

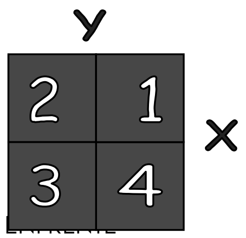
3. Grupo de simetrías del cuadrado.

Actividad: "Grupo de simetrías del cuadrado"

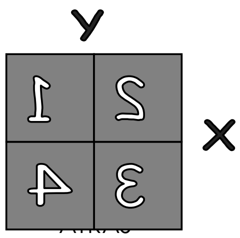
Dibuja en una cartulina un par de ejes perpendiculares, llámale eje X al eje horizontal y al vertical llámale eje Y. Enseguida dibuja un cuadrado que tenga sus lados paralelos a los ejes y su centro sea en el punto de intersección del eje X con el eje Y.



Vamos a construir otro cuadrado del mismo tamaño también con cartulina, dibújalo y recórtalo. Ahora numera los vértices por ambos lados y coloca el cuadrado sobre el sistema de ejes perpendiculares que ya habías dibujado en otra cartulina.



enfrente



atrás

Haz que coincida el centro del cuadrado con el punto de intersección de los dos ejes y que los lados del cuadrado sean paralelos a los ejes, dos al eje horizontal (el eje X) y dos al eje vertical (el eje Y).

Comencemos a identificar las simetrías del cuadrado, para ello hay que considerar todos los posibles movimientos del cuadrado que recortamos, sobre el plano que contiene los ejes perpendiculares y el cuadrado dibujado. Cada movimiento que haga coincidir el cuadrado consigo mismo será una **isometría**.

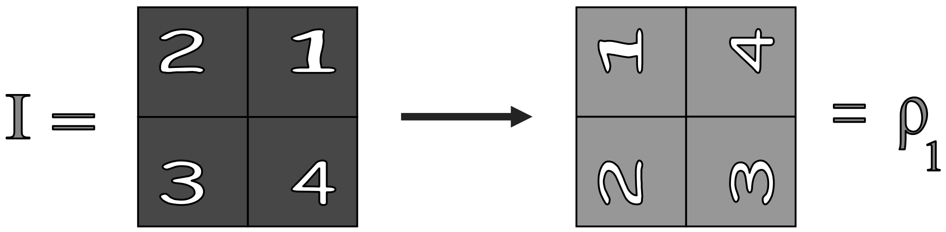
Se vale mover el cuadrado sobre el plano que está dibujado en la cartulina, también se vale levantarlo y voltearlo al revés, recuerda que el cuadrado que recortaste tiene marcados los vértices por ambos lados.

Rotaciones

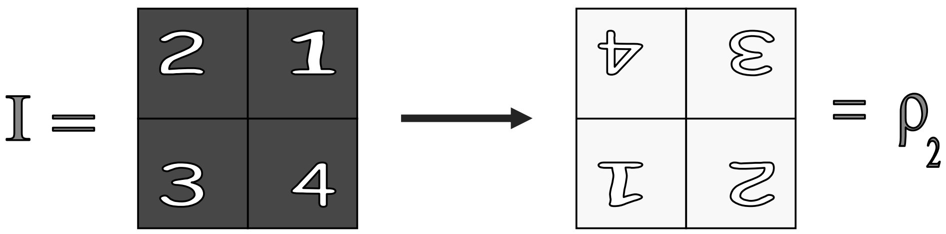
Si usamos un pedazo de unicel como base para pegar la cartulina con los ejes perpendiculares y fijamos el centro del cuadrado que recortamos en el cruce de ambos ejes con una chinche o un alfiler con cabeza ancha, podemos encontrar las simetrías por rotaciones ya que cada rotación con centro de giro en ese punto de intersección de los ejes coincide con el cuadrado.

Ahora pongámosle nombre a las cuatro rotaciones del cuadrado que se obtienen al girarlo en contra de las manecillas del reloj.

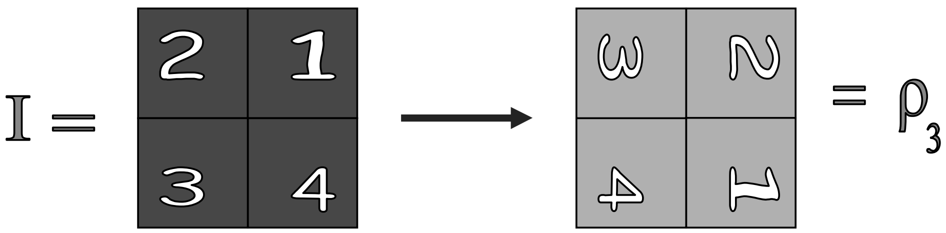
- Sea I la rotación de 0°, es decir al no girar nada queda idéntico.
- Sea ρ_1 la rotación de 90°.
- Sea ρ_2 la rotación de 180°.
- Sea ρ_3 la rotación de 270°.
- Sea ρ_4 a la rotación de 360°.



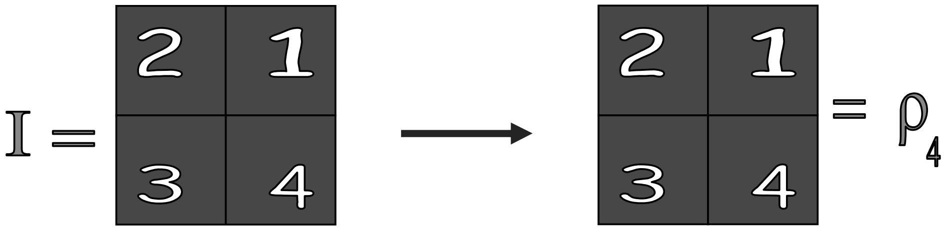
Al girar I 90° obtengo ρ_1.



Al girar I 180° obtengo ρ_2.



Al girar I 270° obtengo ρ_3.



Al girar I 360° obtengo $\rho 4$.

De esta forma observamos que I es igual a ρ_4, hemos dado una vuelta completa al cuadrado y los vértices coinciden, por ello, ρ_4 será I, la identidad. El centro de rotación en este caso es el centro del cuadrado que es el único punto fijo durante todas las rotaciones y coincide con ser el punto de intersección de sus diagonales.

Ahora tenemos todas las rotaciones del cuadrado, son cuatro, (ρ_1, ρ_2, ρ_3, $\rho_{4=}$ I).

Reflexiones

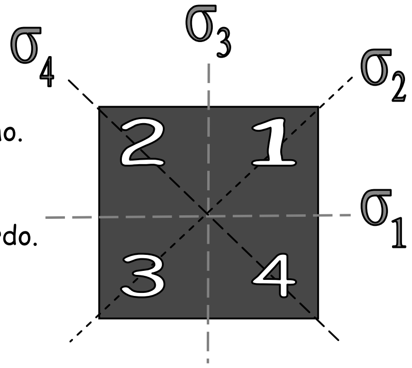
Ahora marquemos los ejes de reflexión del cuadrado y pongámosle nombres.

σ_1 será el eje de reflexión horizontal.

σ_2 será la diagonal que toca el vértice superior derecho.

σ_3 será el eje de reflexión vertical.

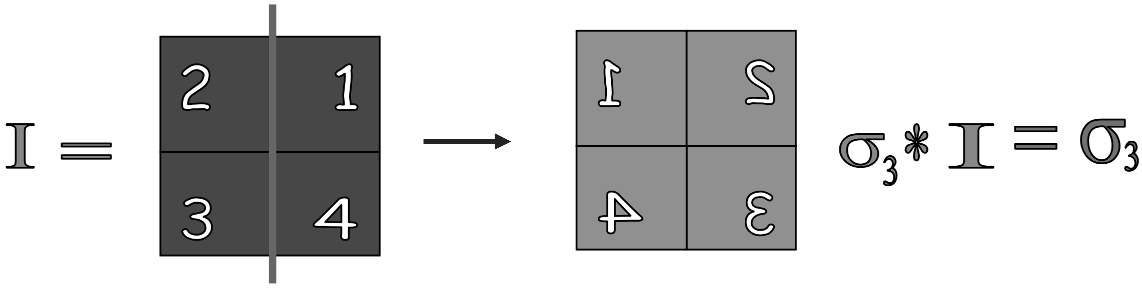
σ_4 será la diagonal que toca el vértice superior izquierdo.



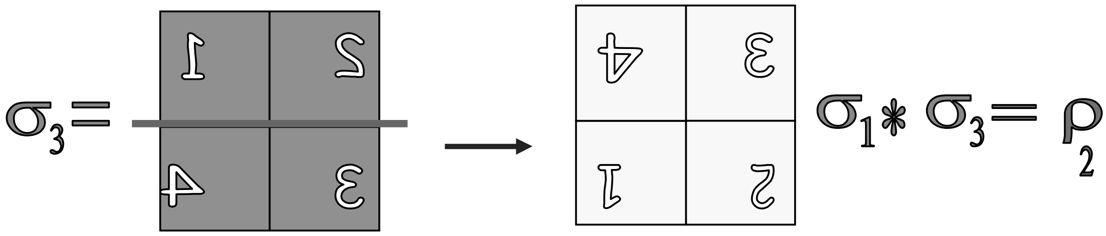
Los movimientos sobre las líneas de reflexión también son simetrías y son válidos porque al orientar, voltear, invertir y girar el cuadrado sobre los ejes y las diagonales, no se altera nuestra figura original, obtenemos nuevamente un cuadrado. Estas simetrías provocan el mismo efecto que si vemos el reflejo de la figura en un espejo colocado en el eje de reflexión.

Así tenemos las ocho simetrías del cuadrado, cuatro rotaciones y cuatro reflexiones, todas las demás, serán combinaciones de estas al aplicar una seguida de otra.

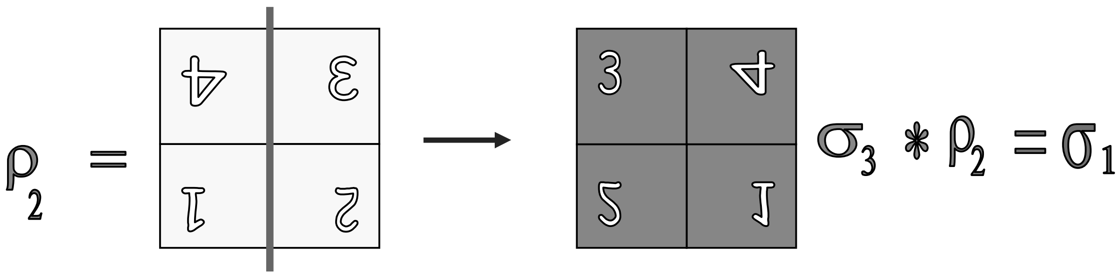
A continuación mostramos varios ejemplos que resultan de combinar rotaciones con reflexiones y viceversa.



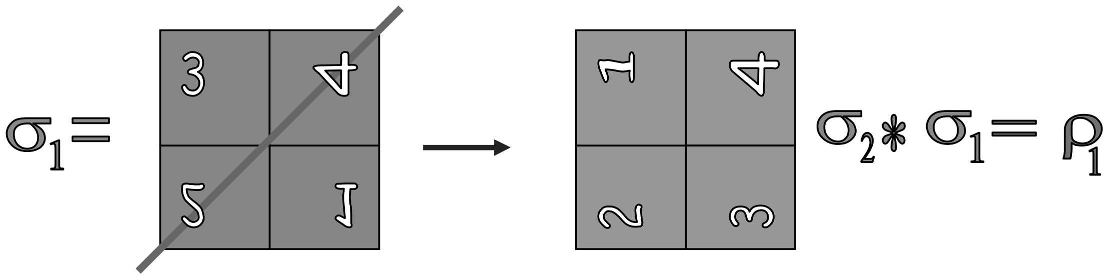
Aplicando una reflexión a I sobre σ_3 nos da $\sigma_3 * I = \sigma_3$.



Aplicando una reflexión a σ_3 sobre σ_3 nos da $\sigma 1 * \sigma_3 = \rho_2$.

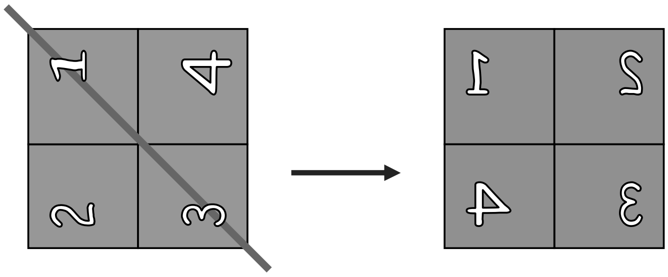


Aplicando una reflexión a ρ_2 sobre σ_3 nos da $\sigma_3 * \rho_2 = \sigma_1$.



Aplicando una reflexión a σ_1 sobre σ_2 nos da $\sigma_2 * \sigma_1 = \rho_1$.

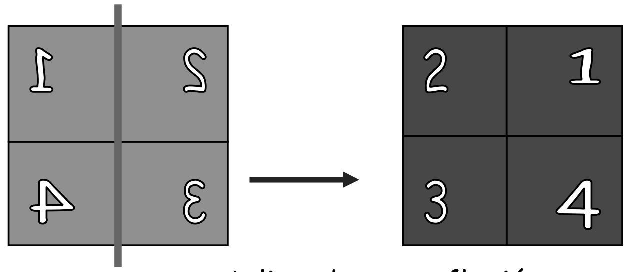
$\rho_1 =$



$\sigma_4 * \rho_1 = \sigma_3$

Aplicando una reflexión a ρ_1 sobre σ_4 nos da $\sigma_4*\rho_1 = \rho_1$.

$\sigma_3 =$



$\sigma_3 * \sigma_3 = I$

Aplicando una reflexión a σ_3 sobre σ_3 nos da $\sigma_3*\sigma_3 = I$.

Aquí sólo aparece una muestra de cómo realizar los movimientos en el plano para obtener el grupo de simetrías del cuadrado. Al girar 90°, 180°, 270°, 360° con centro de rotación en el centro del cuadrado o reflejar el cuadrado sobre alguno de los ejes de simetría siempre se obtiene otro cuadrado, lo que cambia es la posición de los cuatro vértices. Para encontrar las composiciones que faltan hay que hacer las combinaciones posibles entre rotaciones y reflexiones, así como darnos cuenta que al aplicar dos movimientos distintos uno seguido de otro, el resultado no es el mismo si aplicamos primero el movimiento uno y luego el movimiento dos que si aplicamos primero el movimiento dos y luego el uno, esto quiere decir que el grupo de simetrías del cuadrado no es conmutativo, es decir, los resultados que se obtienen son distintos.

La tabla siguiente muestra el **grupo de simetrías del cuadrado** donde se pueden observar todos los resultados obtenidos de haber realizado todas las composiciones posibles con rotaciones y reflexiones del cuadrado. Se observa también que el grupo de simetrías del cuadrado no es conmutativo.

Gs_4	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1
ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_1	ρ_2	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
ρ_3	ρ_4	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_4	ρ_1	ρ_2	ρ^{3}	ρ_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
σ_1	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	ρ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1
σ_2	σ_1	σ_4	σ_3	σ_2	ρ_1	ρ_4	ρ_3	ρ_2
σ_3	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3	ρ_2	ρ_1	ρ_4	ρ_3
σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	σ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1	ρ_4

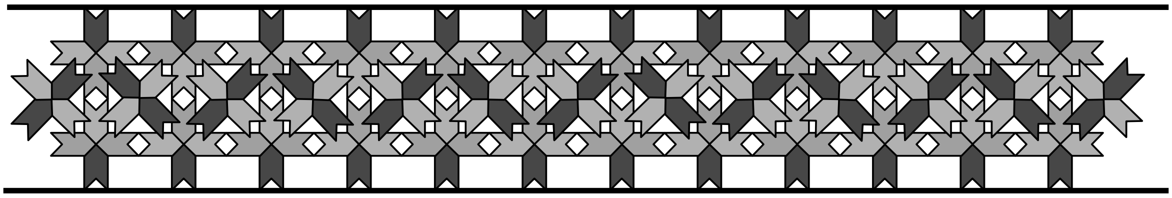
Haciendo un pequeño análisis de la tabla podemos observar varias cosas:

- La composición de dos rotaciones es siempre una rotación.
- La composición de dos reflexiones nos da siempre una rotación.
- La composición de una rotación seguida de una reflexión da una reflexión.
- La composición de una reflexión seguida de una rotación da una reflexión.
- La composición de una rotación con la identidad (ρ_4.) siempre la deja igual.
- La composición de una reflexión con la identidad (ρ_4.) siempre la deja igual.

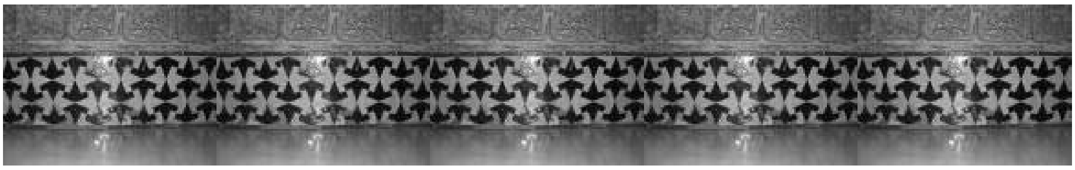
Nota. Se espera que los estudiantes de bachillerato obtengan los mismos resultados de la tabla, podrán comprobarlos al finalizar la actividad.

4. Encontrando simetrías en frisos.

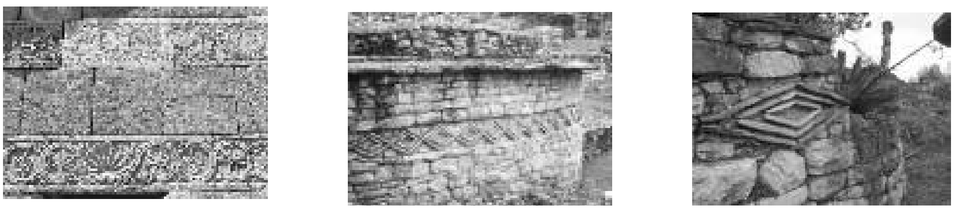
Las matemáticas están presentes en muchas cosas que nos rodean, como en el diseño y decorado de algunas superficies en las que suele pintarse la parte inferior de las paredes en una franja más o menos ancha usando diversas formas geométricas y colores. Se trabaja en una región limitada por dos rectas paralelas trazando motivos geométricos, por lo cual están contenidos en regiones de longitud infinita pero de anchura finita. Si repetimos un diseño o motivo geométrico mediante traslaciones en una misma dirección obtenemos un conjunto decorativo al que llamaremos **friso**.



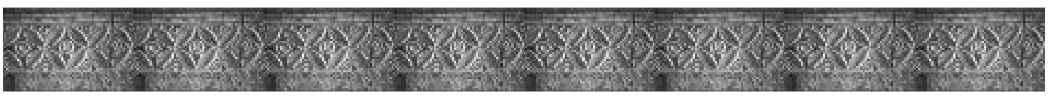
También es posible diseñar frisos con figuras geométricas dándole cualquier forma en diversos materiales como tejido en petate de junco, papel pintado, azulejos, mármol, lo importante es que sólo se utilice un borde, cenefa o tira. Si nos fijamos, a nuestro alrededor los frisos están presentes de forma decorativa en muchas cosas.



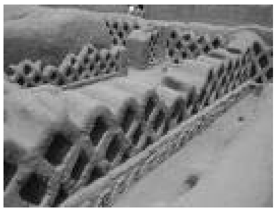
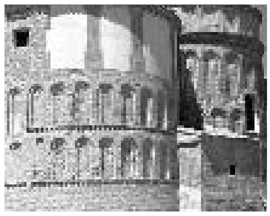
En las grecas que adornan algunas paredes, en el borde de un mueble, en los restos de las construcciones de culturas antiguas como la maya, egipcia, romana o griega, en el marco de una pintura, en la fachada de una iglesia, en una pulsera, entre muchos otros lugares y objetos con motivos decorativos.



Frisos de una iglesia y de unas ruinas del Perú.





Frisos de construcciones viejas en España.

Habitación interior Egipcia, decorada con motivos naturales a manera de friso en las columnas.

Los frisos pueden tener las siguientes simetrías:

1. Traslaciones
2. Giros de 180º cuyo centro equidista de los bordes de la región.
3. Las simetrías cuyo eje es la recta que equidista de los bordes de la región o es perpendicular a dicha recta.
4. Las simetrías en deslizamiento cuyo eje es la recta que equidista de los bordes de la región.

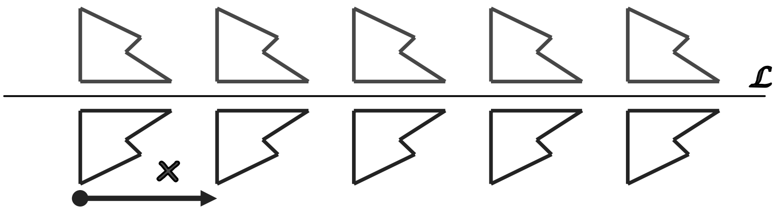
Los frisos se pueden clasificar según las **simetrías** que hay en cada diseño.

Analizando las posibles combinaciones de estos movimientos, se puede demostrar que hay exactamente **siete tipos** de **frisos esencialmente diferentes**. Es decir, cualquier friso que tenga simetrías tiene las mismas simetrías que alguno de los siguientes ejemplos.

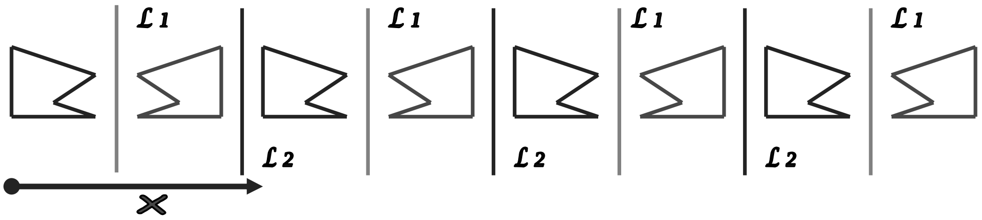
i) Friso con traslaciones.

El vector x indica la dirección y magnitud de la traslación.

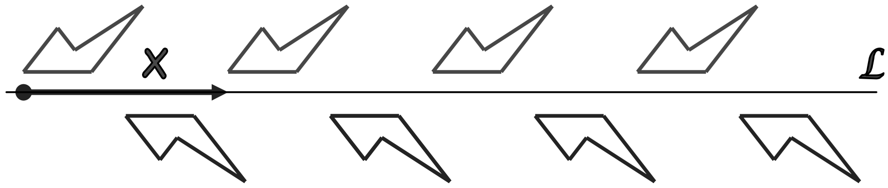
ii) Friso con traslaciones y reflexión horizontal.



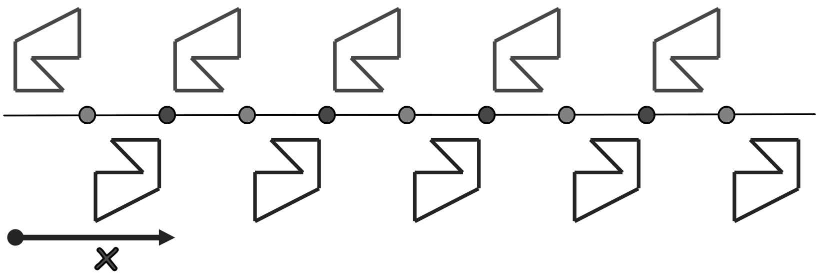
iii) Friso con traslaciones y reflexiones verticales.



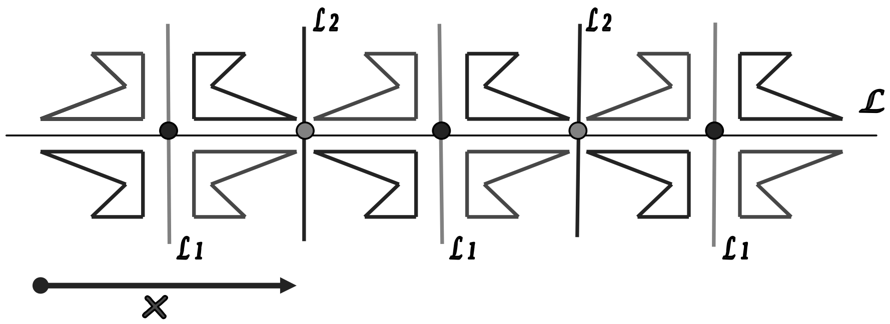
iv) Friso con traslaciones y con deslizamiento.



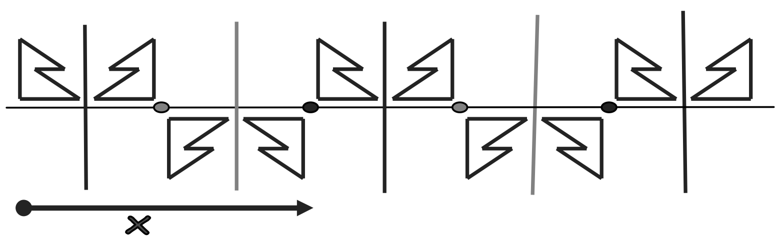
v) Friso con traslaciones y giros de 180º.



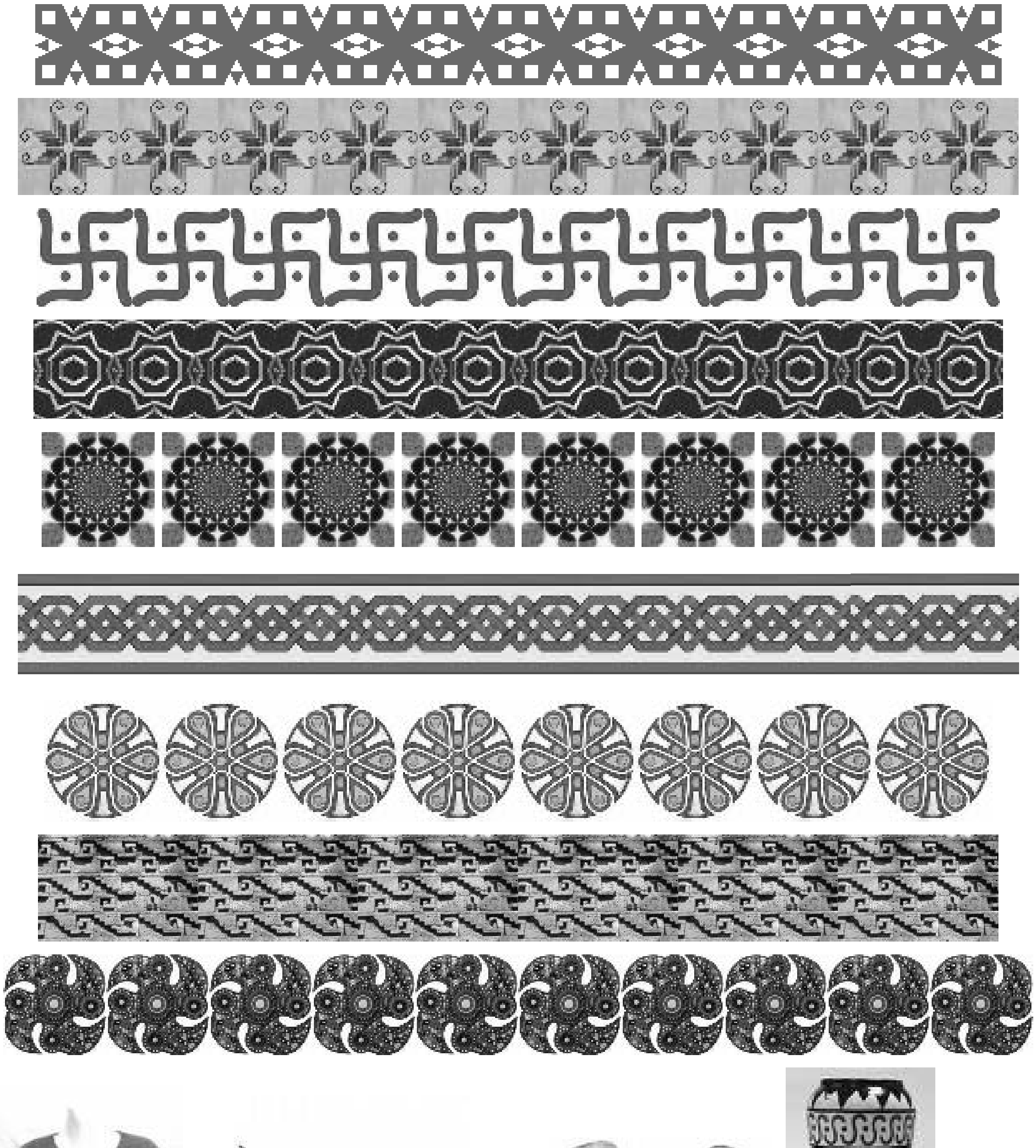
vi) Friso con traslaciones, giros de 180º, reflexiones horizontales y verticales.



vii) Friso con traslaciones, reflexiones verticales y deslizamientos.



Estos siete diferentes tipos de frisos aparecen trabajados en construcciones, grabados en fachadas, iglesias, paredes, puentes, y bordados en tela, además se ven en la decoración de interiores tanto en construcciones antiguas como modernas, algunas han sido consideradas como obras artísticas de nuestros antepasados…



Suéter, artesanía, pulsera y floreo con frisos.

5. Descubriendo simetrías en algunas teselaciones.

A diferencia de un friso que únicamente acepta translaciones colineales porque su diseño aparece entre dos líneas paralelas, las teselaciones son diseños de rompecabezas cuyas piezas cubren todo el plano, el proceso de teselar es infinito, recordemos que las teselas deben embonar perfectamente sin encimarse ni dejar huecos. Una teselación no siempre tiene los cuatro movimientos rígidos, traslaciones, rotaciones, reflexiones ni deslizamientos. En el caso de tener traslaciones, éstas pueden ser o no colineales debido a que estamos cubriendo todo el plano. Las rotaciones son de cierto orden según el ángulo de giro, por ejemplo, una rotación de orden 2 es aquella cuyo giro es de 180°, una rotación de orden 3 es aquella cuyo giro es de 120°, una rotación de orden 4 es aquella cuyo giro es de 90°, una rotación de orden 6 es aquella cuyo giro es de 60°. Las reflexiones pueden ser paralelas, ortogonales, diagonales, según la inclinación de las líneas en el plano, de igual forma sucede con los deslizamientos.

En esta sección aparecerán algunas teselaciones elaboradas con diversos patrones, es importante que sepamos comprobar qué tipo de isometrías se observan en sus diseños para así identificar y clasificar cada teselación de acuerdo al grupo de simetrías al que pertenece. Es necesario aclarar que para analizar las isometrías válidas en cada diseño de una teselación podemos permitir o no que las teselas con la misma forma y tamaño vayan a dar a piezas con la misma forma y tamaño pero de diferente color, de tal forma que si lo permitimos, tendremos mayor cantidad de isometrías del plano en el plano.

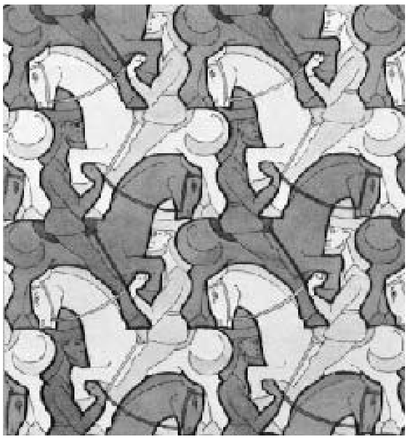
En este caso, en los ejemplos que aparecen aquí vamos a permitir que tras una isometría, una figura vaya a dar a otra con la misma forma y tamaño pero que tenga diferente color.

El cuadro siguiente contiene varias preguntas sobre el tipo de isometrías que hay en cada teselación, éstas sirven para identificar cada grupo de simetría. La clasificación de los 17 grupos está dada de acuerdo a los movimientos rígidos (isometrías) permitidos que aparecen en el diseño de cada teselación.

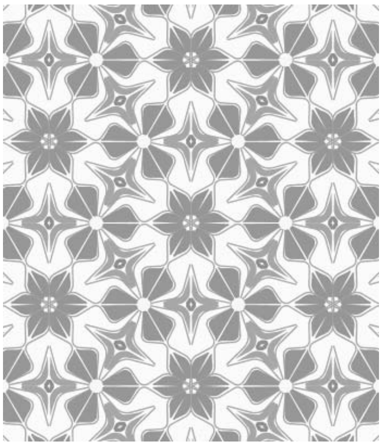
Ángulo de rotación menor	¿Tiene ejes de reflexión o simetría?				
	Sí			**No**	
Sin rotaciones	¿Los ejes de reflexión y la dirección de deslizamiento son paralelos?			¿Tiene reflexión con deslizamiento?	
	Sí		No	Sí	No
	cm		**pm**	**pg**	**p1**
360°/2 = 180°	¿Los ejes de reflexión son perpendiculares?			¿Tiene reflexión con deslizamiento?	
	Sí		No	Sí	No
	¿Existen centros de rotación que no están en los ejes?				
	Sí	No			
	cmm	**pmm**	**pmg**	**pgg**	**p2**
360°/3 = 120°	¿Los ejes de reflexión pasan por todos los centros de rotación?				
	Sí		No		
	p3m1		**p31m**	**p3**	
360°/4 = 90°	¿Los centros de rotación están sobre los ejes de reflexión a 45°?				
	Sí		No		
	p4m		**p4g**	**p4**	
360°/6 = 60°	**p6m**			**p6**	

La finalidad es que sirva para identificar cada grupo de simetría de los ejemplos que se presentan a continuación, así como otros ejemplos que se darán en fotocopias a los estudiantes de bachillerato.

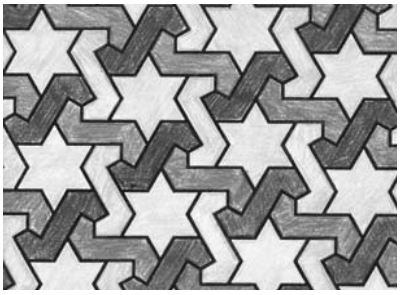
Ejemplos de algunas teselaciones y el grupo de simetría al que pertenecen.



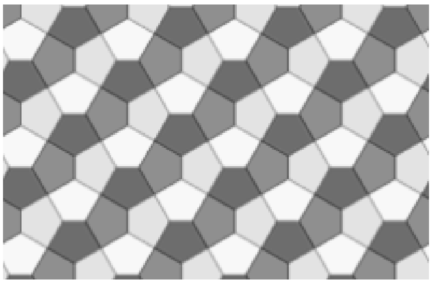
pg



p6m



p6



pmg

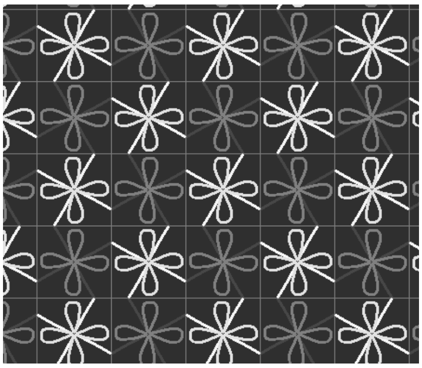
pg tiene translaciones y deslizamientos.

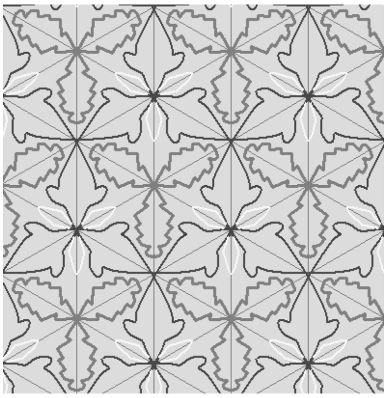
p6 tiene translaciones, rotaciones de orden 6 (60°), rotaciones de orden 3 (120°), rotaciones de orden 2 (180°).

p6m tiene translaciones, rotaciones de orden 2 (180°), rotaciones de orden 3 (120°), rotaciones de orden 6 (60°), reflexiones perpendiculares, reflexiones diagonales, deslizamientos.

pmg tiene translaciones, rotaciones de orden 2 (180°), reflexiones horizontales, reflexiones verticales, deslizamientos perpendiculares.

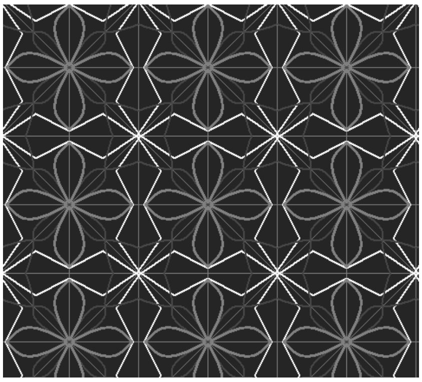
A continuación aparecen varios diseños de teselaciones que elaboré con KALI, un programa que permite construir diversos tipos de teselaciones con simetrías por computadora:

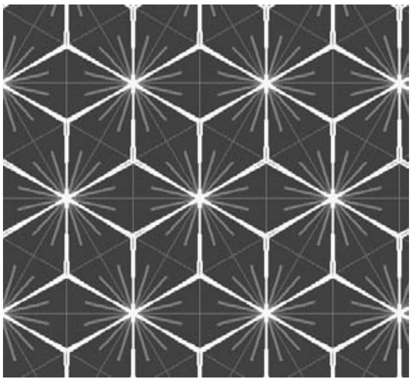

p4g


p3ml

p4g tiene translaciones, rotaciones de orden 4 (90°), rotaciones de orden 2 (180°), reflexiones verticales reflexiones horizontales y deslizamientos.

P3ml tiene translaciones, rotaciones de orden 3 (120°), reflexiones verticales, reflexiones diagonales, deslizamientos.


p4m


p6m

p4m tiene translaciones rotaciones de orden 4 (90°), rotaciones de orden 2 (180°), reflexiones verticales, reflexiones horizontales, reflexiones diagonales.

p6m tiene translaciones, rotaciones de orden 2 (180°), rotaciones de orden 3 (120°), rotaciones de orden 6 (60°), reflexiones perpendiculares, reflexiones diagonales y deslizamientos.

6. Teselando con reptiles.
¡Todo reptil te cela!

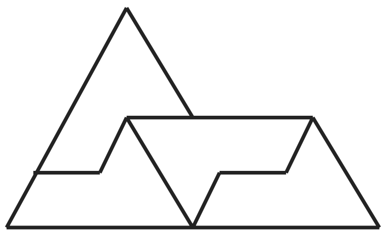
En nuestro recorrido por el extraño mundo de las teselaciones hemos conocido ya varios tipos de teselas con las cuales es posible diseñar una o más teselaciones. Ahora veremos varios ejemplos de teselaciones, algunas con y otras sin traslaciones. El hecho de que algunas teselaciones no tengan traslaciones, no asegura que no tengan simetrías, incluso más adelante mostraré algunos ejemplos de teselaciones sin translaciones que tienen rotaciones o reflexiones.

En esta sección y la siguiente mencionaré y usaré varios resultados importantes, algunos teoremas cuya demostración no aparecerá en este trabajo pero cito el libro de Grünbaum “Tilings and patterns” para cualquier consulta referente al tema. La intención de esta tesis es presentar dichos resultados para que estudiantes de bachillerato conozcan más detalles sobre teselaciones.

Conozcamos entonces algunas teselas que reciben el nombre de **reptiles** pero no son, ni tienen forma de animales, el nombre se debe a una traducción del inglés al español que propone pensar en que la forma de la tesela se repite al lograr dividirla en exactamente varias piezas iguales pero de menor tamaño.

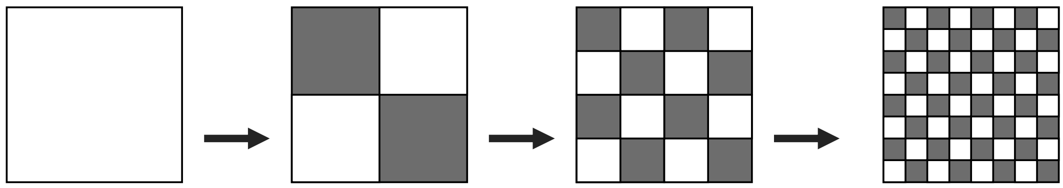
Pero cómo saber si una tesela es o no un reptil, eso depende de si la forma de ese polígono tiene o no la propiedad de que k copias de él teselen un polígono semejante a él mismo. El nombre de **k–reptil** se origina de la frase **“replicating tiles”** que significa algo así como repitiendo teselas.

Matemáticamente se le conoce como **un reptil de orden n** si es posible **dividir ese polígono o tesela exactamente en “n” piezas iguales entre ellas y semejantes a la tesela original.**

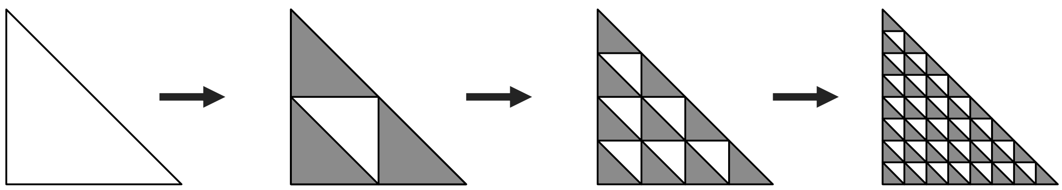
Por ejemplo, un reptil de orden 4 es aquella tesela que puede dividirse exactamente en cuatro teselas iguales entre ellas y semejantes a la original.

Si imaginamos un cuadrado y lo dibujamos en el plano, es posible dividirlo exactamente en cuatro cuadrados iguales. El segundo paso consiste en dividir cada uno de los cuatro cuadrados, en cuatro cuadrados, obteniendo así un cuadrado dividido en dieciséis cuadrados. En el tercer paso tendremos que dividir cada cuadrado obtenido en el paso anterior, en cuatro cuadrados, teniendo como resultado un tablero de ajedrez con sesenta y cuatro cuadrados, cada uno de ellos sería una casilla.



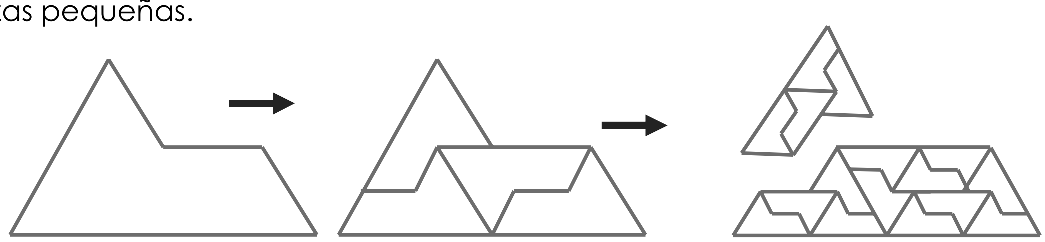
Es un 4-reptil porque en cada paso se repite cuatro veces la teselación anterior. Es posible seguir repitiendo ese proceso una infinidad de veces.

Ahora pensemos en un triángulo rectángulo, para teselar ese polígono con cuatro piezas que sean triángulos rectángulos, dividimos el polígono en cuatro piezas iguales de tal forma que las figuras que obtenemos sean triángulos rectángulos semejantes al original. También es un 4-reptil.



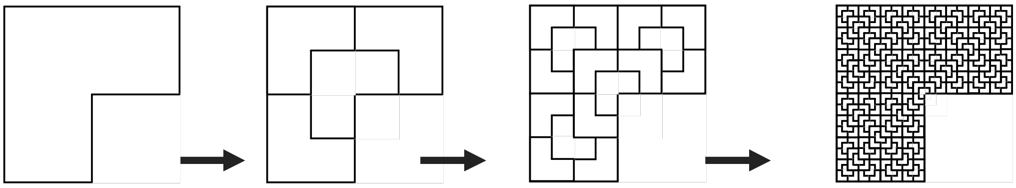
En ambos casos, las teselaciones formadas por reptiles de orden 4 tienen traslaciones ya que cada pieza chica está en al menos dos piezas grandes.

El siguiente pentágono irregular, mejor conocido como la esfinge también es un reptil de orden 4, por ello es posible dividirlo en cuatro piezas iguales entre ellas y semejantes a la pieza original, misma que contiene exactamente a las cuatro piezas pequeñas.



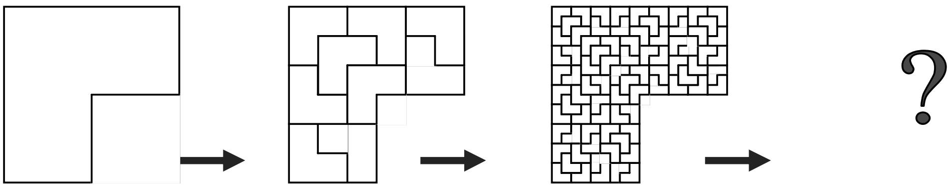
En el caso de la esfinge, la teselación formada por reptiles de orden 4 no tiene traslaciones ya que cada pieza chica está en exactamente una pieza grande.

En el caso de la siguiente pieza reptil, tenemos un hexágono irregular que se puede dividir exactamente en cuatro piezas iguales (4-reptil) pero también en nueve piezas a menor escala (9-reptil), de tal forma que esas piezas que teselan el polígono original también son hexágonos irregulares con la misma forma y semejantes al original.



Es un 4-reptil.

En este caso, la teselación construida con un 4-reptil es distinta a la que se construye con el 9-reptil. En ellas no encontramos translaciones pero lo que si se puede ver es que ambas teselaciones tienen un eje de reflexión.



Es un 9-reptil.

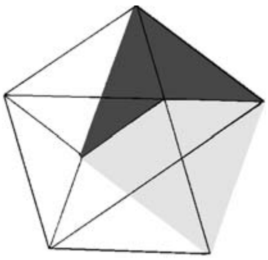
De este modo, hemos visto que teselar con reptiles es otro ejemplo de teselaciones que cubren el plano que pueden o no tener simetría. Hay reptiles de todo tipo, los que tienen traslaciones y los que no, los que tienen reflexiones y no tienen traslaciones, los que tienen rotaciones sin tener traslaciones y muchos otros que seguramente no tienen simetrías o tienen más de una como el tablero de ajedrez.

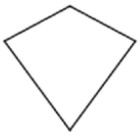
Es posible teselar tanto el interior de la pieza reptil como el exterior logrando así una teselación infinita con piezas semejantes a la tesela original, donde la manera de colocar las piezas correctamente determina si hay o no simetría en ellas.

7. Teselaciones de Penrose, un ejemplo interesante…

Hasta ahora hemos visto cómo construir teselaciones con polígonos regulares e irregulares, en ellas encontramos translaciones, rotaciones, reflexiones y deslizamientos. Sabemos además que el grupo de simetrías al que pertenecen los diferentes diseños de éstas, queda determinado por el tipo de simetrías que tienen. Pero, será cierto que existe simetría en todas las teselaciones. La afirmación es falsa, hay una gran variedad de teselaciones que no tienen simetrías.

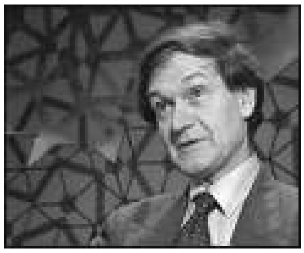
Un ejemplo interesante son las teselaciones del físico matemático y cosmólogo británico Roger Penrose, quién en 1974 describe un par de teselas básicas la **flecha** y el **papalote** que sirven para construir diferentes tipos de teselaciones diédricas en el plano sin traslaciones, algunas con y otras sin simetría.



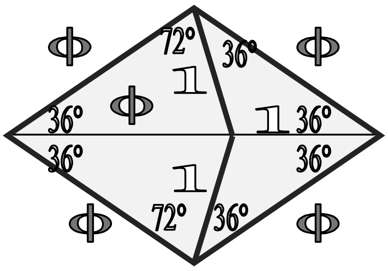


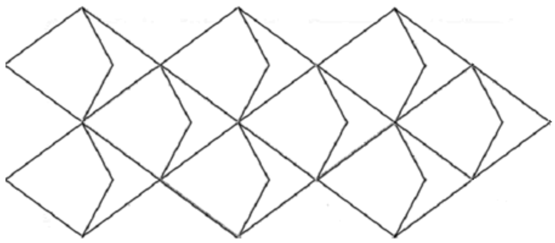
PAPALOTE

FLECHA



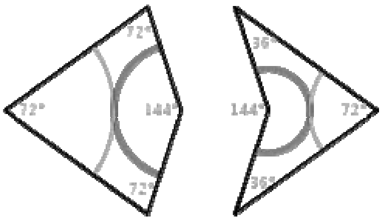
La construcción de la flecha y el papalote depende del número $\phi = 1.618...$ ya que ambos cuadriláteros se obtienen a partir de un paralelogramo de lado ϕ.

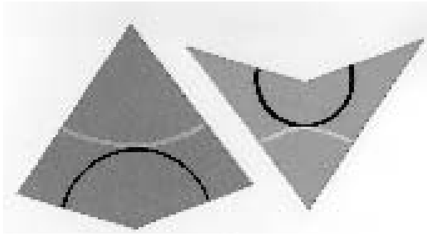




Con la flecha y el papalote colocados de esta forma podríamos teselar periódicamente o sea, que nos falta hacer algo para volverlas un conjunto aperiódico, es decir, sin traslaciones.

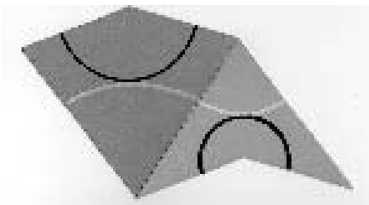
Por ello, restringimos la manera de colocar las teselas en el plano, todas las piezas congruentes serán marcadas de la misma forma con arcos de círculos de diferentes diámetros cuyos radios están en proporción áurea.

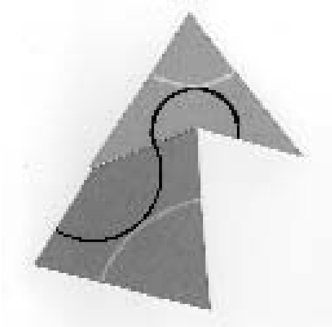


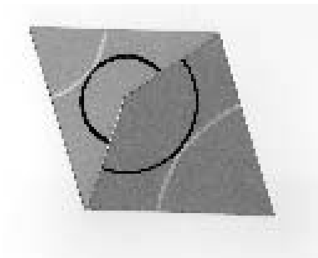


Papalote Flecha

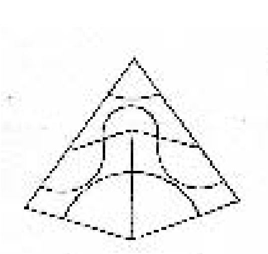
De modo que, al unir flechas con flechas, papalotes con papalotes y papalotes con flechas cumplan la condición de pegado, dos teselas sólo pueden unirse si se pegan lados iguales con lados iguales y forman líneas curvas continuas. Una vez marcadas las piezas, comenzamos a armar la teselación de tal manera que las curvas marcadas forman una trayectoria continua.

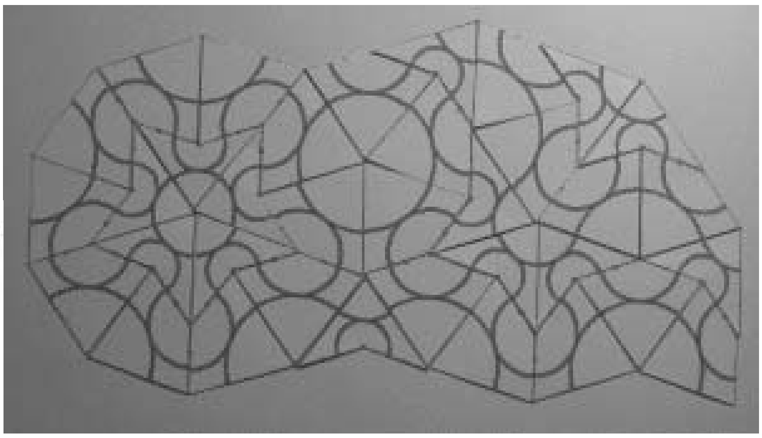






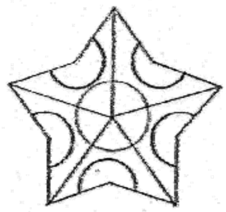
Al pegar flechas y papalotes es preciso formar trayectorias continuas con líneas curvas. En caso de que los lados coincidan pero las curvas no formen una trayectoria continua, estaremos teselando incorrectamente.



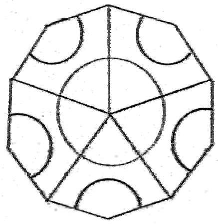


Es importante señalar, como lo indica Martin Garner en su libro Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas, que existen sólo **siete opciones** de colocar **flechas y papalotes rodeando un vértice** de ellas. Siguiendo las reglas de pegado como se vio anteriormente, se logran completar los 360° de tal forma que las piezas no se enciman ni dejan huecos, además los arcos de circunferencia cumplen con seguir trayectorias continuas en cualquier parte de la teselación.

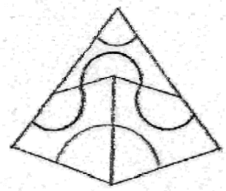
Las siete formas de rodear un vértice, determinan figuras (sol, estrella, diablo, as, jack, reina, rey) que aparece una infinidad de veces en cualquier teselación de Penrose.



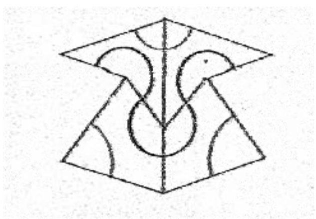
Estrella



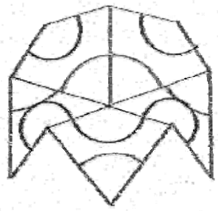
Sol



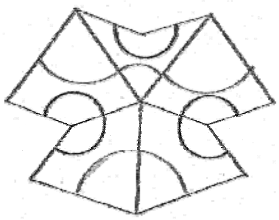
As



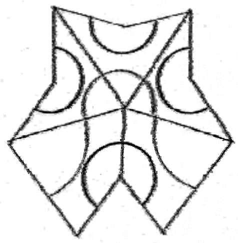
Diablo



Jack

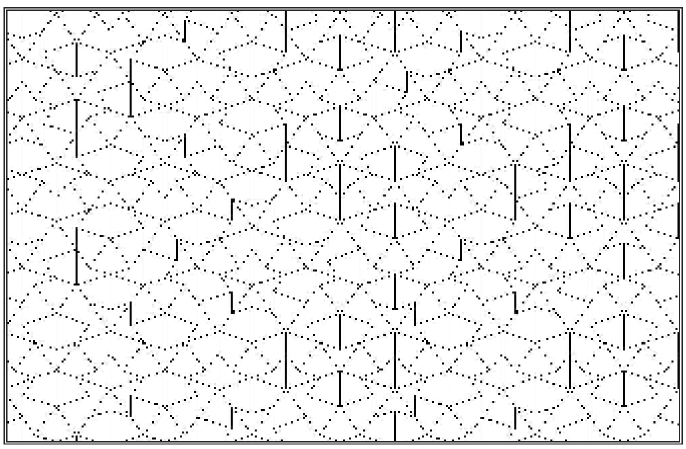


Reina



Rey

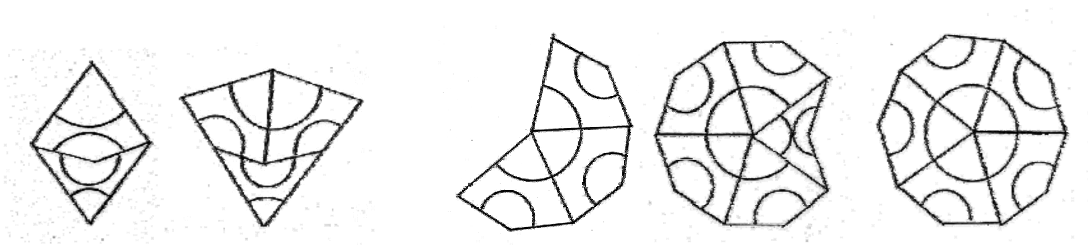
Cada una de ellas recibe un nombre según su forma. La **estrella** se construye con cinco flechas, el **sol** con cinco papalotes, el **as** con una flecha y dos papalotes, el dos o también conocido como el **diablo** con dos flechas y dos papalotes, el **jack** se forma con tres flechas y dos papalotes, la **reina** con una flecha y cuatro papalotes, y el **rey** con tres flechas y dos papalotes.



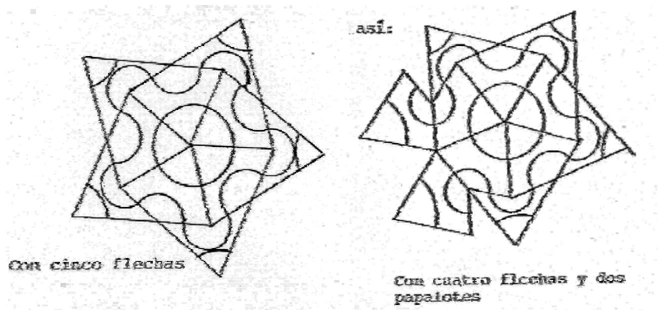
Encuentra los siete vértices en esta teselación.

Si observamos con atención, en una teselación de Penrose existen algunas piezas que son forzadas por las reglas de pegado, a las teselas que deben ser colocadas necesariamente en una posición específica ya sean flechas o papalotes, se les llama **"piezas obligadas"**.

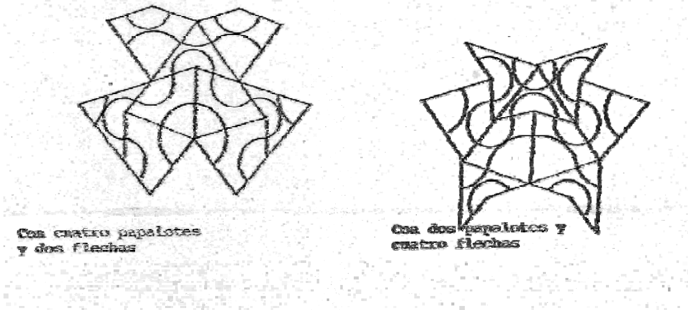
Por ejemplo, la flecha obliga dos papalotes. Tres papalotes obligan otros dos y estas dos piezas son obligadas porque si intentamos cambiarlas por flechas o papalotes en otra posición, se encimarían piezas, dejaríamos huecos o las líneas curvas ya no serían continuas, como se ve en estos ejemplos, por lo que no estaríamos teselando adecuadamente.



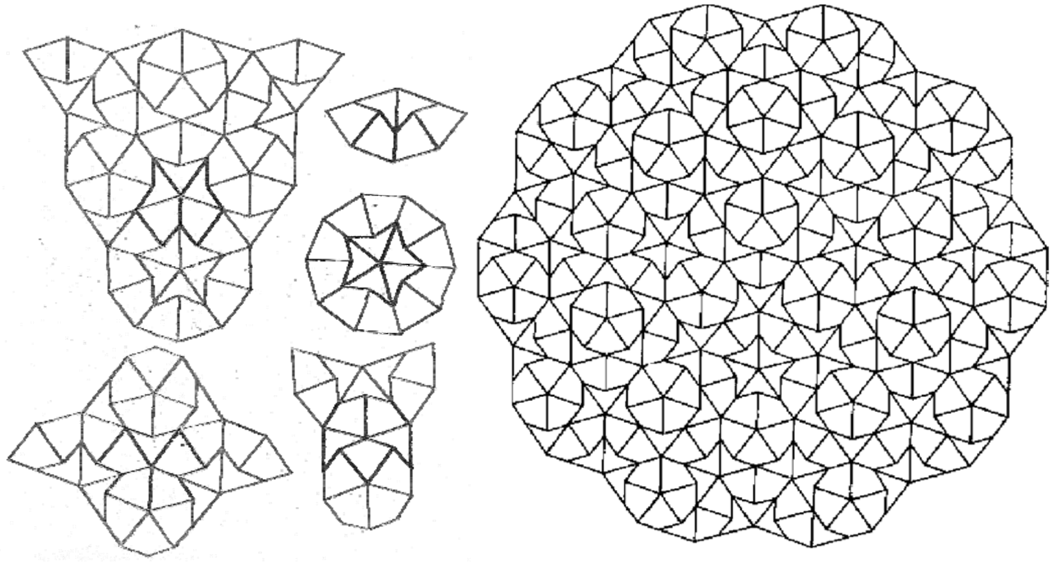
Roger Penrose, descubrió cómo es posible teselar con flechas y papalotes generando distintas teselaciones que cubren el plano a pesar de tener algunas piezas obligadas. Todas aquellas piezas que se obligan a rodear un vértice forman los llamados **"imperios"**. De las siete configuraciones con flechas y papalotes, únicamente el Sol y el As son su propio imperio por no tener piezas obligadas ya que se pueden rodear de diferente forma.



El Sol y el As rodeados de dos maneras diferentes.



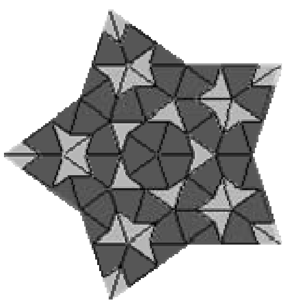
Estos son los **imperios** de las configuraciones con flechas y papalotes que sí tienen piezas obligadas. Por ejemplo, al armar la estrella con cinco flechas, las piezas obligadas son los diez papalotes pues es la única forma de rodear la estrella. El imperio del Diablo son dos papalotes.



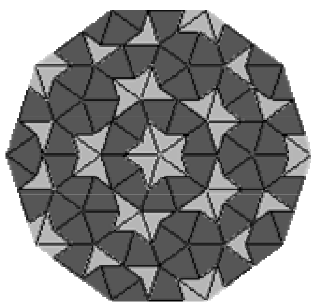
El imperio del Rey contiene a todos los imperios, el de la reina, el del jack, el de la estrella y el del diablo, además están el sol y el as aunque estos dos últimos son su propio imperio.

Con una infinidad de flechas y papalotes se pueden construir muchísimas teselaciones distintas, esto sucede porque la forma de ir colocando las piezas en el plano nos indica en qué momento hay piezas obligadas y cuándo podemos elegir cómo rodear un vértice. Cada una de las teselaciones de Penrose cumple matemáticamente con un orden y reglas especiales para lograr una combinación de flechas y papalotes muy bien definida que tesele correctamente.

Al teselar con flechas y papalotes siguiendo las reglas de pegado que ya conocemos, las teselaciones de Penrose no tienen translaciones pero eso no asegura que no tengan simetría, inclusive hay teselaciones de Penrose con simetrías ya sean rotaciones o reflexiones.

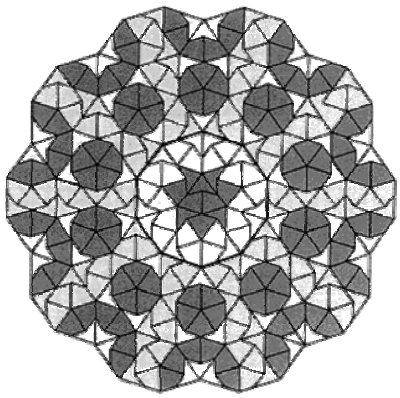


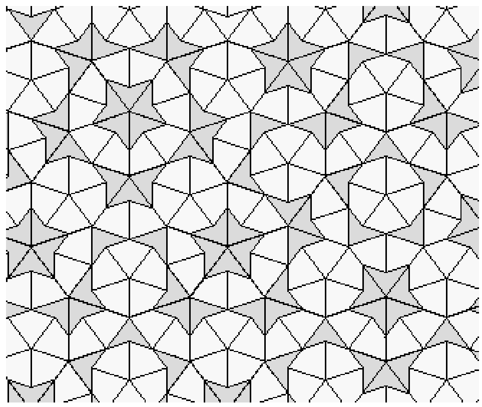
Rodeando el sol



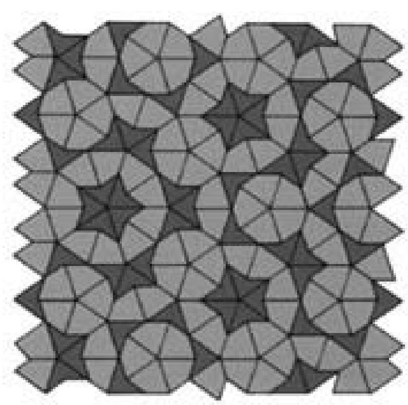
Rodeando la estrella

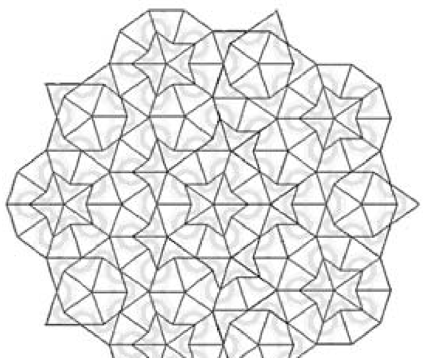
Los múltiples diseños de teselaciones que pueden surgir siguiendo la regla de pegado son infinitos, tanto como números reales. Aquí sólo podremos apreciar varios ejemplos que reciben nombres concretos según su colocación en el plano.





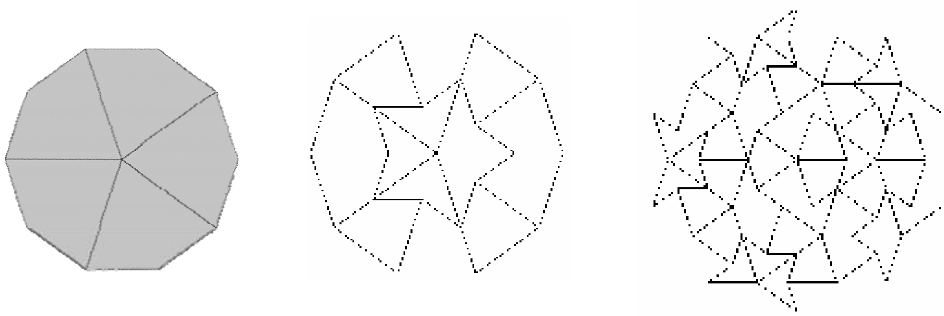
Rueda de carro que rodea a Batman



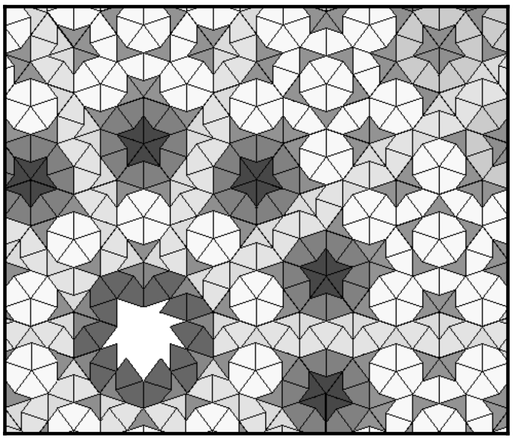


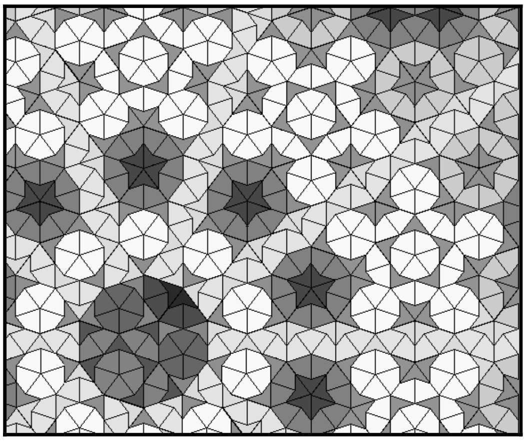
Teselaciones de Penrose con flechas y papalotes.

Las teselaciones de Penrose tienen una gran similitud con los reptiles porque es posible dividir las piezas grandes en otras más pequeñas (papalotes y medias flechas) que resultan ser semejantes a las de la teselación original. De este modo es posible construir un sol con cinco papalotes y dividir cada uno en dos papalotes más pequeños y dos medias flechas. Repitiendo este proceso muchas veces se va formando una de las teselaciones de Penrose.

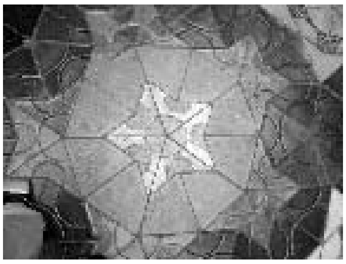


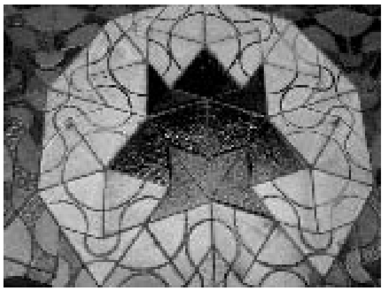
Es importante recordar que debemos tener cuidado al teselar porque si no se sigue un método para hacerlo, sucede que aunque una parte nos vaya quedando bien, pueden ir quedando espacios en blanco como se ve en la siguiente imagen. Al quedar ese hueco se ha teselado de forma incorrecta, es necesario quitar varias flechas y papalotes para cubrir ese espacio correctamente.

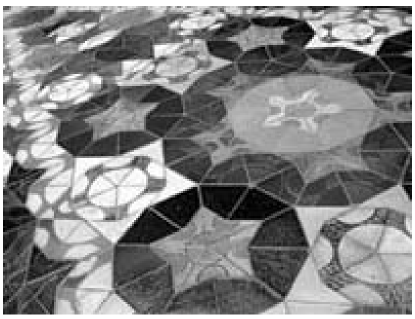


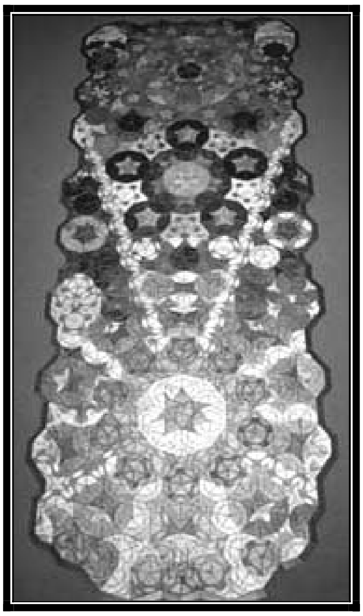


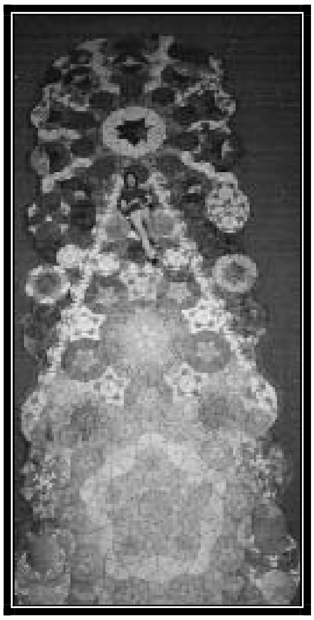
El mosaico de Penrose en UNIVERSUM, el Museo de las Ciencias de la UNAM









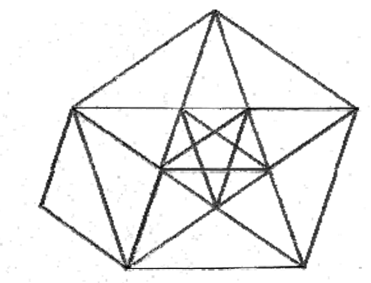
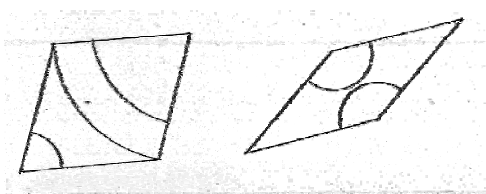


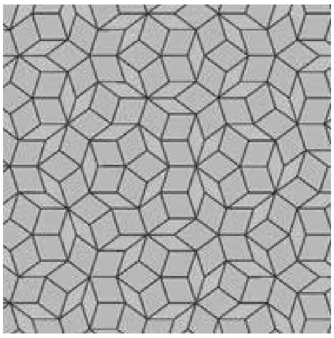
El mosaico de Penrose en la sala de matemáticas del museo y en el piso de una recámara.

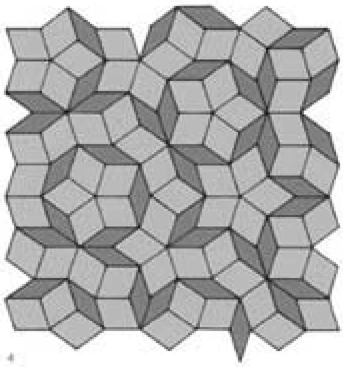
Rombos gordos y rombos flacos

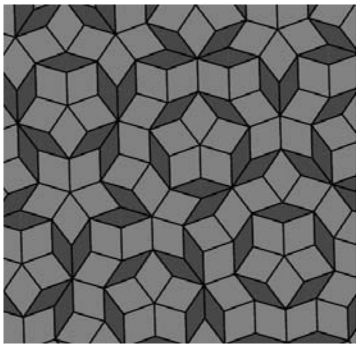
Otro mosaico que carece de traslaciones es la teselación de Penrose formada por un conjunto infinito de dos teselas: el rombo gordo y el rombo flaco, es una teselación no periódica y diédrica.

Al igual que la flecha y el papalote, el rombo gordo y el flaco también se obtienen del pentagrama pitagórico y ambas piezas deben marcarse con líneas curvas que nos indican cómo armar el mosaico correctamente para obtener siempre líneas continuas.

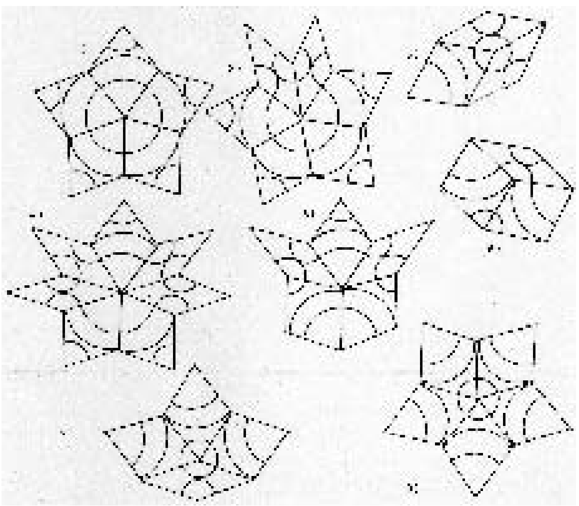



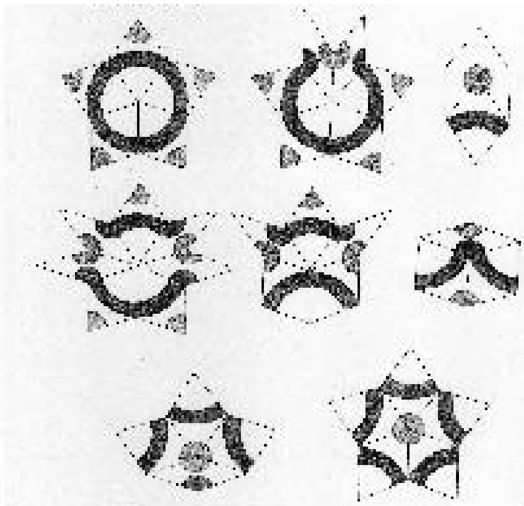


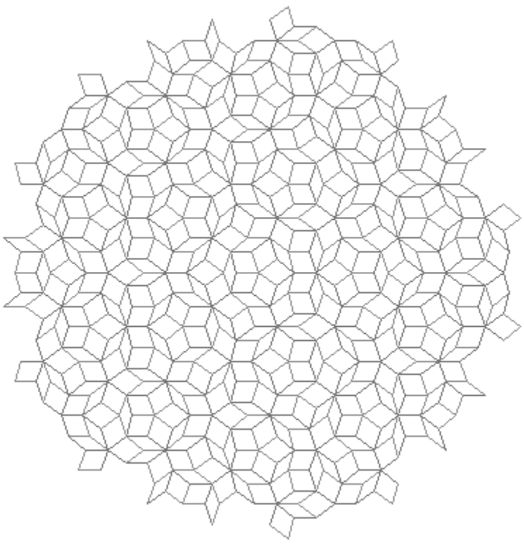


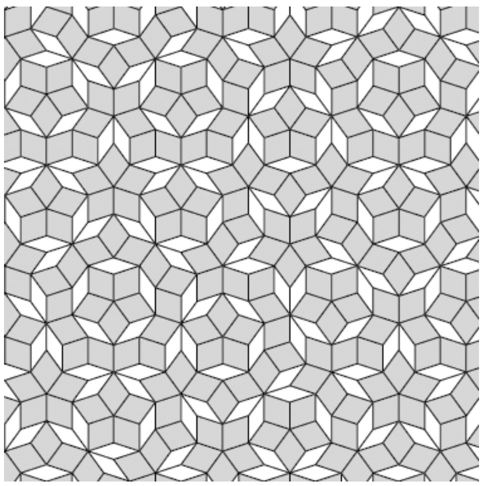


Usando rombos gordos y rombos flacos para construir teselaciones existen ocho maneras distintas de rodear un vértice de una teselación.









Encuentra los ocho vértices en la teselación.

8. Actividades y ejercicios con teselaciones, isometrías y frisos…

Para concluir el capítulo presento una serie de ejercicios y actividades relacionadas con el extraño mundo de teselaciones, isometrías, simetrías, frisos, reptiles, entre otros que han sido elaborados para realizar mi práctica docente en los bachilleratos de la UNAM, con estudiantes de primer año de la Escuela Nacional Preparatoria, plantel seis, y de segundo semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel sur.

Actividad 1

Crucigrama matemático sobre el extraño mundo de las teselaciones

Lee con cuidado cada frase y encuentra las respuestas correctas, luego completa el crucigrama.

HORIZONTALES

1.- Polígono regular cuyo ángulo interno no es múltiplo de 360° ya que mide 108°.

6.- Para armar una teselación diédrica ¿cuántos diseños diferentes teselas se necesitan?

8.- Propiedad de un polígono que tiene todos sus lados y ángulos iguales.

12.- Nombre que también recibe un número impar.

13.- Palacio en Granada España que contiene gran parte de las teselaciones que le sirvieron de inspiración a Escher para crear sus propias obras, (dos primeras letras).

15.- Los únicos tres polígonos regulares que cumplen que la medida de sus ángulos son múltiplos de 360° son el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular.

16.- ¿Cuántos lados tiene un pentágono irregular?

17.- La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es igual a 360°.

18.- ¿La cantidad de piezas que se necesitan para teselar un plano es infinita?, si o no.

19.- Parte de la matemática que se encarga de estudiar las características, propiedades y aplicaciones de figuras en varias dimensiones.

21.- Espacio geométrico de dos dimensiones donde se localizan puntos y rectas.

22.- Iniciales de “número irracional”.

23.- ¿Qué nombre recibe el polígono que al trazar todas sus diagonales no quedan todas en su interior?

VERTICALES

1.- Nombre que recibe una figura plana formada por lados y ángulos (singular).

2.- ¿La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 270°?

3.- Al colocar las teselas en el plano sin dejar huecos ni encimar piezas armamos una…

4.- ¿Qué nombre recibe el polígono que al trazar sus diagonales todas quedan en su interior? (invertido).

5.- Queda determinado por dos semirrectas que al intersectarse forman un origen común llamado vértice, mismas que se pueden superponer mediante un giro, la medida de ese giro indica su magnitud (invertido).

6.- Animal mitológico, criatura voladora con forma de reptil que escupe fuego por el hocico.

7.- ¿Un hexágono regular tiene seis ejes de simetría?

9.- Movimiento que permite girar una figura plana y queda determinado por el ángulo y el centro de giro.

10.- Escher ha dejado un legado impresionante de obras artísticas con gran contenido e interés matemático, ¿en sus diseños encontramos equilibrio entre la ciencia y el arte?

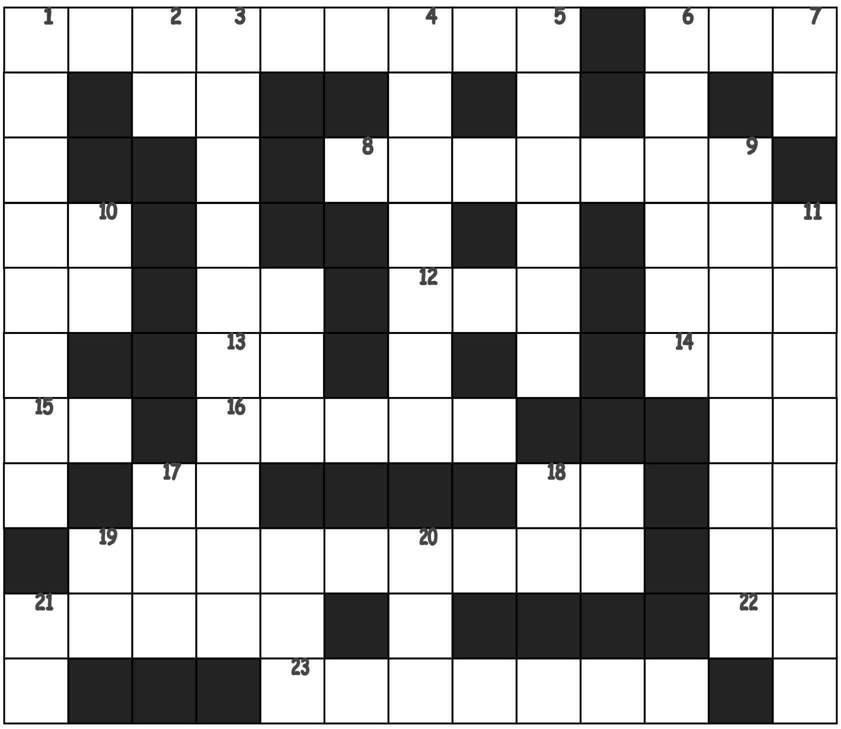
11.- Propiedad matemática que poseen las figuras que al reflejarlas sobre un eje no cambian recibe el nombre de…

14.- Escribe "hombre" (en inglés, invertido).

18.- ¿El paralelogramo tiene lados opuestos iguales y paralelos, sus ángulos opuestos son iguales, por lo tanto es un polígono irregular?

20.- Nombre que recibe una figura plana cuyos ángulos interiores suman 180° (primera, segunda y quinta letra)

21.- Número irracional cuyo valor es 3.1415…



SOLUCIÓN DEL CRUCIGRAMA MATEMÁTICO

EL EXTRAÑO MUNDO DE LAS TESELACIONES

1 p	e	2 n	3 t	a	g	4 o	n	5 o	■	6 d	o	7 s
o	■	o	e	■	■	x	■	l	■	r	■	i
l	■	■	s	■	8 r	e	g	u	l	a	9 r	■
i	10 s	■	e	■	■	v	■	g	■	g	o	11 s
g	i	■	l	■	■	12 n	o	n	■	o	t	i
o	■	■	13 a	l	■	o	■	a	■	14 n	a	m
15 n	o	■	16 c	i	n	c	o	■	■	■	c	e
o	■	17 s	i	■	■	■	■	18 s	i	■	i	t
■	19 g	e	o	m	e	20 t	r	i	a	■	o	r
21 p	l	a	n	o	■	r	■	■	■	■	22 n	i
i	■	■	■	23 c	o	n	c	a	v	o	■	a

La actividad se realizó después de haber dado una introducción al tema de las teselaciones y los conocimientos necesarios para teselar el plano mediante tres presentaciones en power point previamente elaboradas para dar a conocer el tema con muchos ejemplos visuales e información referente a las preguntas que aparecen en este crucigrama.

Actividad 2

Teselas, teselaciones y patrones

Dibuja en cartón o cartulina varios polígonos regulares e irregulares de diferentes tamaños, al menos unas seis piezas de cada uno. Recórtalas y trata de armar diferentes diseños de teselaciones con esas piezas, recuerda que no se vale encimar piezas ni dejar huecos.

Después contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo debes de elegir y colocar las piezas para teselar?

   ____

2. ¿Con qué piezas puedes construir teselaciones fácilmente?

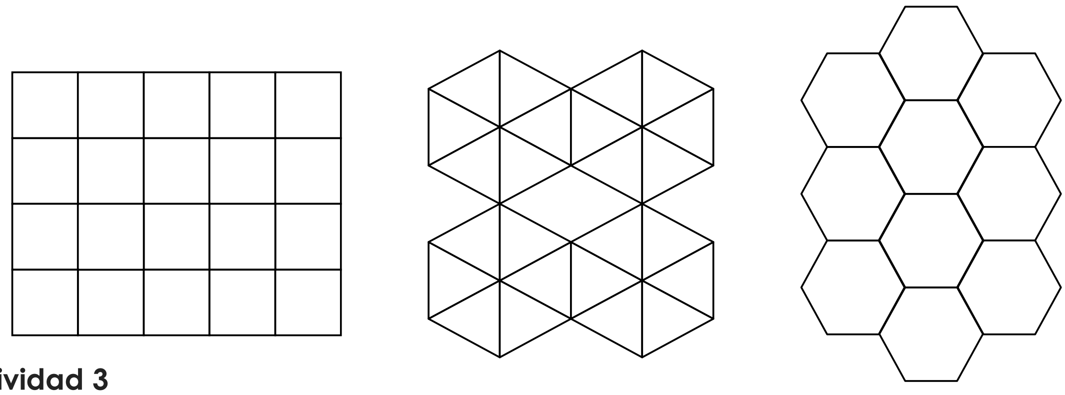
   ____

3. ¿Con qué piezas no puedes construir teselaciones fácilmente?

   ____

Utiliza las piezas de cartón o cartulina como molde para dibujar cada tesela que será parte de una teselación. Construye así diferentes teselaciones en las hojas blancas.

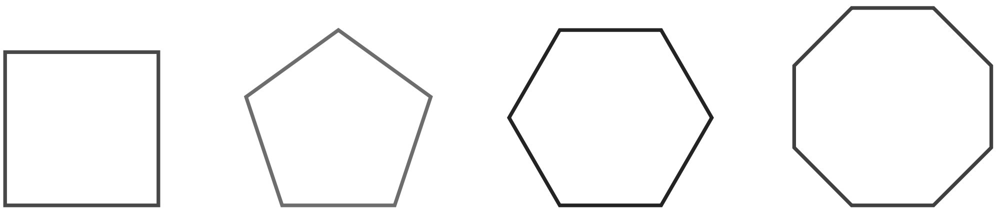
Explica qué tipo de teselaciones aparecen aquí y el patrón que indica cómo colocar las teselas.



Actividad 3

En busca de simetrías en polígonos regulares

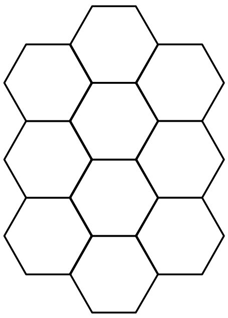
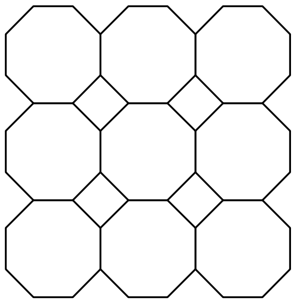
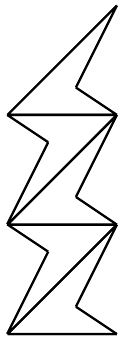
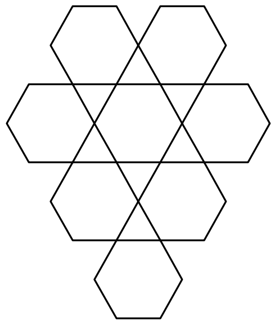
Encuentra las rotaciones y reflexiones de los siguientes polígonos regulares. Marca el ángulo de rotación en cada caso y los ejes de simetría.

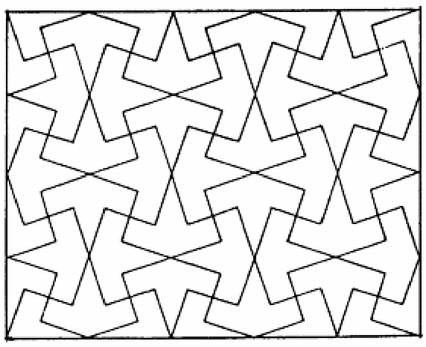
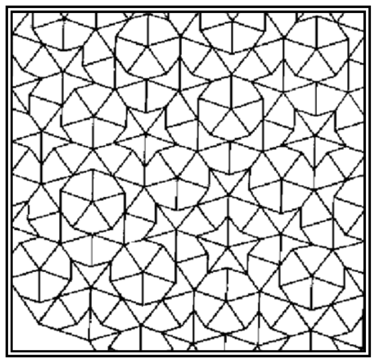


Actividad 4

Teselaciones y simetrías

En equipos de tres integrantes, analicen los siguientes ejemplos y expliquen de qué tipo de teselación se trata en cada caso, monoédrica o diédrica, iluminen de un color las monoédricas y de dos colores las diédricas. Encuentren todas las simetrías en cada una de ellas y márquenlas con diferentes colores.

¿Todas las teselaciones tienen simetría? ______________________

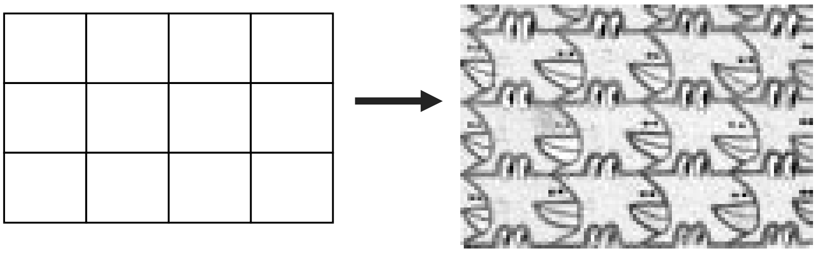
¿Qué tipo de simetrías encontraste en ellas? ________________

Explica cómo darse cuenta de ello.

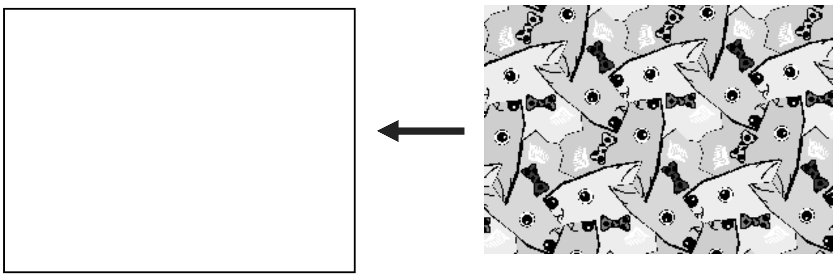
Actividad 5

Teselando con polígonos regulares

Realiza diferentes diseños de teselaciones con polígonos regulares, modifica la pieza para teselar de tal manera que tenga forma de algo. Por ejemplo aquí tenemos una teselación con rectángulos y se transforma en una teselación con ranas.



En la teselación de la derecha formada por perritos de colores identifica qué polígono regular es el se usa para transformarlo en esa figura y dibújalo en el rectángulo de la izquierda.

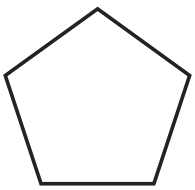


Actividad 6

¿Es posible teselar usando sólo pentágonos regulares?

Dibuja en cartulina al menos cinco pentágonos regulares del mismo tamaño, recorta las cinco piezas y trata de teselar con ellas.

Marca el borde de las piezas con las que has intentado armar tu teselación.

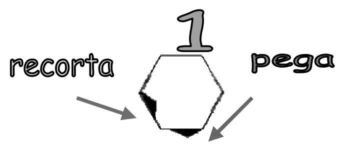


Explica qué sucede.

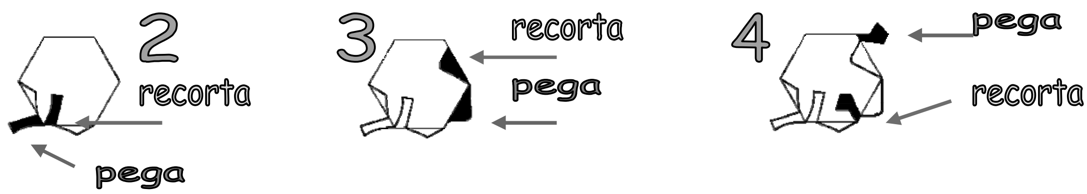
Actividad 7

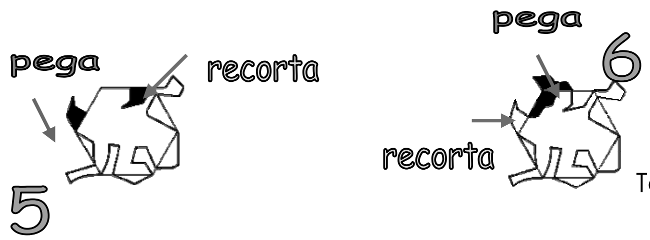
Transformando teselas al estilo Escher.

Dibuja dos hexágonos del mismo tamaño en una cartulina o cartón. Luego recorta uno de ellos. En el hexágono que has recortado marca la parte oscura que aparece en el interior del primer esquema, ilumina la parte sombreada del color que prefieras y recorta esa pieza, posteriormente pega esa parte en el otro hexágono que no has recortado como se muestra en el exterior del primer esquema.

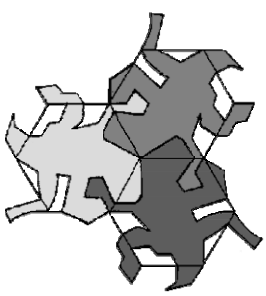


Realiza lo mismo con el mismo hexágono que ya recortaste siguiendo los esquemas del dos al seis de tal forma que cuando pegues todas las piezas sombreadas sobre el otro hexágono e ilumines del mismo color el interior tendrás un lagarto tipo Escher. Usarás esta pieza de cartón como molde para dibujar una teselación con lagartos.





Teselando con lagartos.



Actividad 8

Descubre el grupo de simetrías del cuadrado.

1. Dibuja un cuadrado en una cartulina y marca los ejes de simetría.
2. Dibuja otro cuadrado del mismo tamaño y recórtalo por el perímetro.
3. Marca todos los dobleces de los ejes de simetría.
4. Numera los vértices por el anverso y reverso de modo que en el anverso aparezca el número correspondiente y en el reverso el mismo número visto al revés.
   - σ_1 será el eje de reflexión horizontal
   - σ_2 será la diagonal que pasa por los vértices 1 y 3
   - σ_3 será el eje de reflexión vertical
   - σ_4 será la diagonal que pasa por los vértices 2 y 4
   - ρ_1 será la rotación de 90° en contra de las manecillas del reloj.
   - ρ_2 será la rotación de 180° en contra de las manecillas del reloj.
   - ρ_3 será la rotación de 270° en contra de las manecillas del reloj.
   - ρ_4 será la rotación de 360° en contra de las manecillas del reloj.

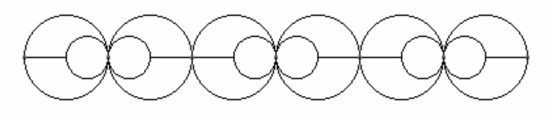
Aplicando todas las simetrías del cuadrado (rotaciones y reflexiones) confirma tu resultado con el de la tabla según lo que obtengas en cada caso.

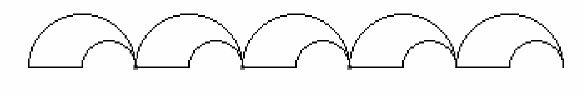
Gs_4	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1
ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_1	ρ_2	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
ρ_3	ρ_4	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_4	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
σ_1	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	ρ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1
σ_2	σ_1	σ_4	σ_3	σ_2	ρ_1	ρ_4	ρ_3	ρ_2
σ_3	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3	ρ_2	ρ_1	ρ_4	ρ_3
σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	σ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1	ρ_4

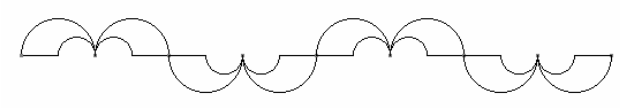
Ejercicio 1

Clasificando frisos.

Indica a qué tipo de friso corresponde cada diseño y explica cuáles son las isometrías que hay en él.



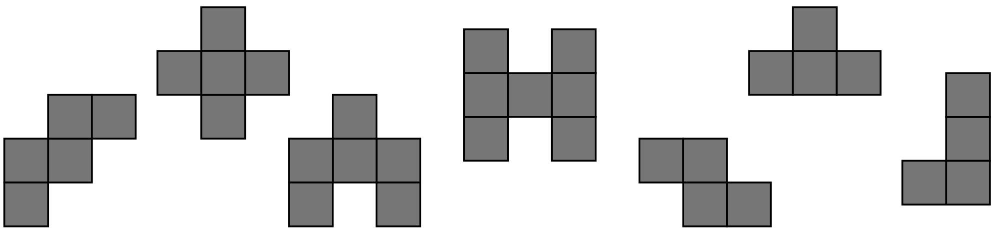




Ejercicio 2

Armando teselaciones.

Construye diferentes teselaciones monoédricas con cada una de estas teselas.



a) ¿Con cuáles piezas si se puede armar diferentes teselaciones? Explica por qué.

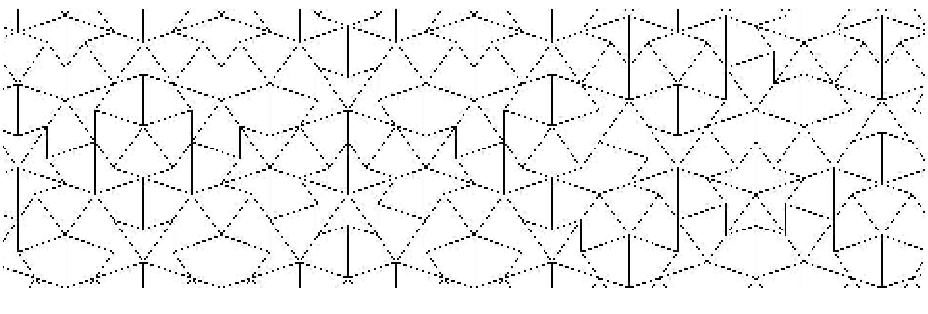
b) ¿Con cuáles teselas no es posible? Explica por qué.

c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Ejercicio 3

Encontrando vértices diferentes en las teselaciones de Penrose.

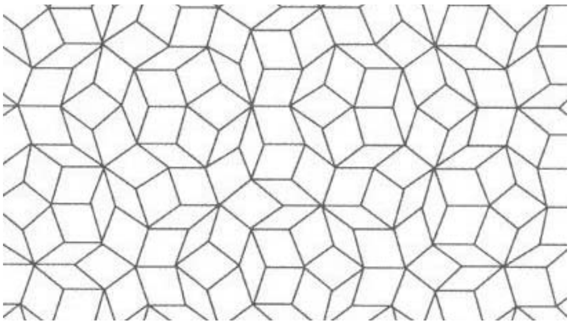
Encuentra los siete vértices en la siguiente teselación, recuerda son la estrella, el diablo, el as, el sol, el jack, el rey y la reina.



Ejercicio 4

Encontrando vértices diferentes en las teselaciones de Penrose.

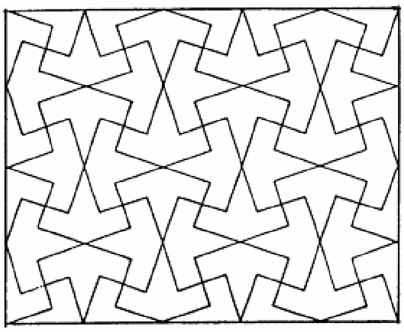
Encuentra los ocho vértices en la siguiente teselación con rombos gordos y rombos flacos.

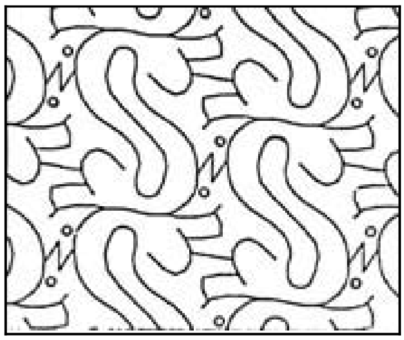


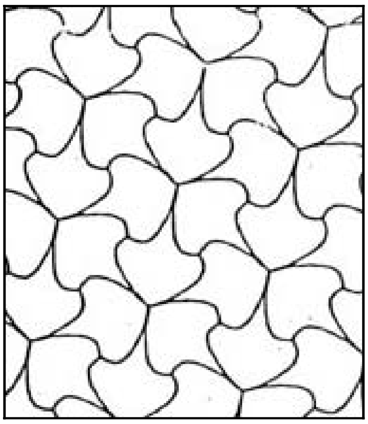
Ejercicio 5

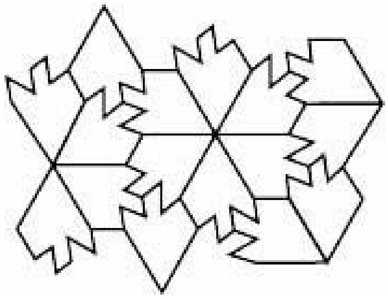
Encontrando simetrías en teselaciones.

Marca los movimientos rígidos (ejes de reflexión, centros de rotación, ejes de deslizamiento y translaciones) que tiene cada una de las siguientes teselaciones.









EXAMEN

Nombre ______________________________ Calificación ________

Materia ______________________ Grupo _____________

Fecha _________________________ No. de lista ________

ESCRIBE TUS DATOS Y LEE TODO EL EXAMEN ANTES DE EMPEZAR A CONTESTAR.

1.- ¿Cuál es la condición que deben cumplir los ángulos de un polígono para teselar el plano?

2.- ¿Cuáles son los únicos polígonos regulares con los que es posible teselar el plano?

3.- ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera y cuál es falsa? Explica por qué.

a) Todos los pentágonos regulares teselan el plano. (   )

b) Cualquier polígono regular tesela el plano. (   )

c) Cualquier triángulo tesela el plano. (   )

d) Todos los hexágonos teselan el plano. (   )

e) Los cuadriláteros irregulares no teselan el plano. (   )

f) Hay algunos pentágonos que si teselan el plano. (   )

4.- ¿Todas las teselaciones tienen simetrías? Explica por qué.

5.- ¿Qué propiedades matemáticas podemos analizar al interpretar una teselación?

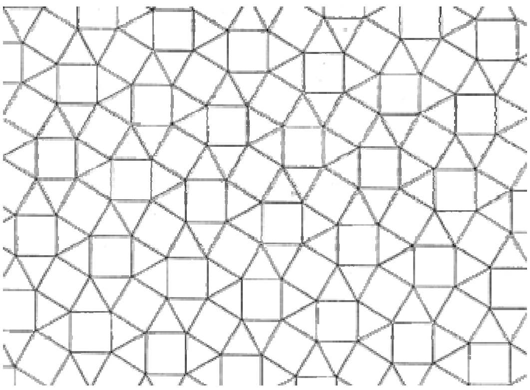
6.- Dibuja un polígono convexo que sirva para teselar el plano. Explica por qué es convexo.

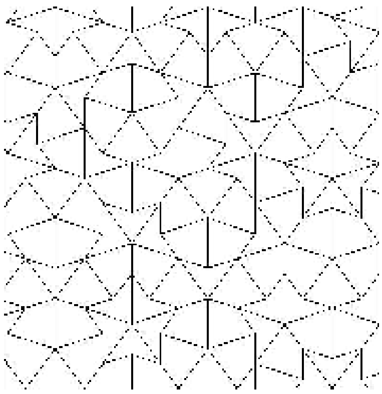
7.- Dibuja un polígono cóncavo que sirva para teselar el plano. Explica por qué es cóncavo.

8.- ¿Qué se debe cumplir al colocar las piezas el plano para teselar correctamente?

9.- Explica por qué una teselación es infinita.

10.- Elige una teselación de Penrose, al azar marca un vértice y contesta las preguntas.





a) ¿Qué tipo de polígonos lo rodean, regulares o irregulares, cóncavos o convexos?

____

b) ¿Cuáles y cuántos polígonos son? ____

c) ¿Cuánto vale cada ángulo que rodea a ese vértice? ___________________________

d) ¿Cuánto suman todos los ángulos que rodean a ese vértice? ____________________

e) Ilumina la teselación de dos colores si es diédrica, de tres si es tiédrica o de un solo color si es monoédrica.

11.- Dibuja una pieza que sirva para teselar el plano que tenga un diseño original.

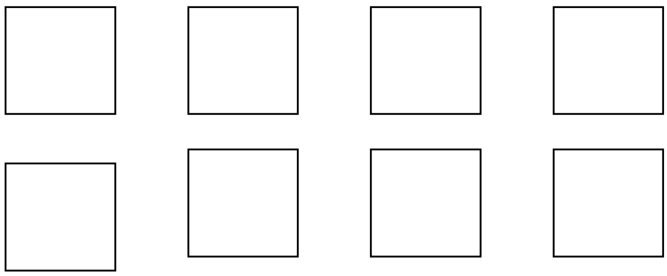
a) Arma y colorea una teselación con esa pieza.

b) Explica el patrón que usas para construir la teselación.

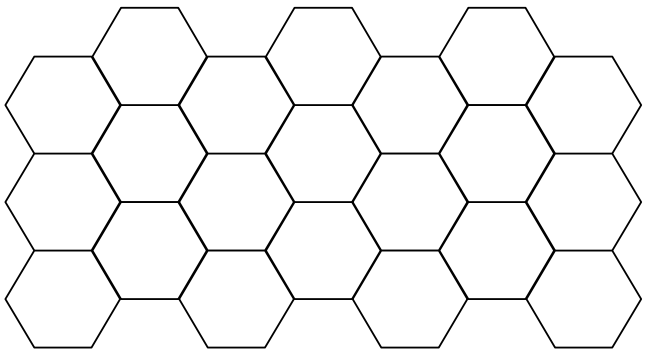
c) ¿Tu teselación es simétrica? _________

d) ¿Qué tipo de simetrías encuentras en ella? _______________________

12.- Dibuja las simetrías del cuadrado, las cuatro rotaciones y las cuatro reflexiones. Coloca los números 1, 2, 3, 4 en los vértices según cada movimiento que realices.



13.- Marca los centros de giro y los ejes de reflexión de la teselación que simula un panal de abejas.



14.- ¿Cuáles son los cuatro movimientos rígidos del plano? Explica en qué consiste cada uno.

Nota: Contesta solamente las preguntas pares o las impares.

SUERTE!!!

Capítulo 4

Experiencia docente, las teselaciones en los bachilleratos de la UNAM

"Las matemáticas pueden ser definidas como aquel tema del cual no sabemos nunca lo que decimos ni si lo que decimos es verdadero"
(Bertrand Russell)

1. Presentación en el bachillerato de

"El extraño mundo de las teselaciones, un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato"

En nuestra formación docente, planear las sesiones frente a grupo, diseñar y elaborar material de apoyo tomando en cuenta los aprendizajes que se desean alcanzar y poner en marcha estrategias de enseñanza–aprendizaje de acuerdo al nivel intelectual, cultural, social y emocional de nuestros estudiantes es lo que nos permite mejorar y actualizarnos como profesores de nivel bachillerato.

Sin saber bien a bien la razón por la cual se ha evitado ver más geometría en secundaria y preparatoria, notamos que se ha descartado en forma drástica su estudio, ya no se habla de geometría euclidiana en estos niveles a pesar de ser algo útil, interesante y formativo para el alumno de bachillerato.

El tema de las teselaciones no está incluido en ningún plan de estudios de manera formal, ni en la ENP, ni en los CCH, ni en ningún sistema escolarizado incorporado a la UNAM o a la SEP, pero, como ya lo expliqué antes, es un material apropiado e interesante para que los estudiantes adolescentes no pierdan el contacto con la geometría y desarrollen su intuición, imaginación y creatividad logrando acercarse al mundo de las teselaciones.

Para darle estructura general a los temas que forman parte del material presentado a los estudiantes de ambos bachilleratos de la UNAM durante las sesiones en el aula, mi propuesta requiere partir del conocimiento previo de geometría con el que cuenta cada estudiante. Por ello, el papel del estudiante participativo, crítico y activo juega un papel decisivo en los alcances de su propio aprendizaje.

Sin embargo ello, en base a las estrategias de enseñanza y de aprendizaje que se llevan a cabo en el aula y fuera de ella, desde la apertura, desarrollo y cierre del tema, el estudiante puede ampliar su visión e intuición de la geometría y relacionarla con la parte artística y estética en nuestro entorno.

Las actividades que se presentaron a estudiantes adolescentes de primer año de preparatoria y segundo semestre de CCH, son aplicaciones de la geometría euclidiana a situaciones de la vida cotidiana. El objetivo de estas actividades es entonces, conocer y entender cómo la geometría sirve para interpretar el mundo que nos rodea, nos permiten desarrollar nuestra intuición geométrica y ampliar cierta capacidad de abstracción para observar e interpretar algunas teselaciones.

Así, se logrará aplicar el conocimiento matemático, determinar la relación entre el arte y la ciencia, analizar diseños de rompecabezas infinitos llamados teselaciones y a partir de de posibles argumentos y conclusiones, llegar a las soluciones factibles.

Los objetivos generales, los objetivos particulares, los temas a impartir y algunas estrategias didácticas se mantuvieron en ambos planteles, preparatoria 6 y CCH Sur, dado que una de las expectativas era dar a conocer el tema a estudiantes adolescentes y hacer un análisis comparativo de la experiencia docente en ambos planteles.

Objetivos generales:

- Que el alumno se acerque de forma distinta al mundo de la geometría, relacionando formas, patrones, descubriendo propiedades interesantes en las figuras y armando teselaciones.
- Que el alumno recuerde y confirme algunos temas de geometría vistos en la secundaria y relacione esos temas con conocimiento nuevo.
- Que el alumno aprenda algunos conceptos geométricos de gran interés como movimientos rígidos en el plano y otras propiedades geométricas para comprender el tema de teselaciones.
- Que el alumno realice algunas actividades que tienen como temas principales, aquellos que sirven para entender el mundo de las teselaciones.

Temas a impartir:

- Antecedentes históricos de las teselaciones.
- Conceptos previos necesarios para teselar.
- Teselar con polígonos regulares y con polígonos irregulares.
- Tipos de teselaciones en el plano y sus características.
- Figuras que teselan y otras figuras que no teselan el plano.
- Construcción y diseño de teselas. Armado de teselaciones.
- Isometrías, tipos de movimientos rígidos en el plano.
- Simetrías en las teselaciones.
- Geometría estética en el mundo actual.

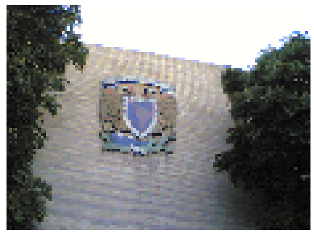
Objetivos específicos:

- Que el alumno conozca varios ejemplos de teselaciones.
- Que el alumno sea capaz de relacionar el concepto de teselación con su experiencia previa.
- Que el alumno aprenda con qué tipo de piezas se puede teselar el plano.
- Que el alumno descubra cómo identificar si una teselación es periódica o aperiódica.
- Que el alumno identifique qué tipo de triángulos y cuadriláteros teselan el plano.
- Que el alumno descubra cómo se generan los patrones para cubrir el plano.
- Que el alumno realice teselaciones con polígonos regulares e irregulares, con una tesela.
- Que el alumno logre detectar los movimientos que hay en algunas teselaciones.
- Que el alumno conozca los cuatro tipos de isometrías.
- Que el alumno identifique qué tipo de isometrías tiene una teselación periódica.
- Que el alumno de varios ejemplos donde encontramos simetrías ya sea del mundo real o no.
- Que el alumno identifique si una teselación no tiene simetrías es aperiódica.
- Que el alumno identifique qué tipo de polígonos de los que teselan tienen simetrías.
- Que el alumno realice teselaciones con piezas que generen una teselación periódica.

2. La práctica Docente en la Escuela Nacional Preparatoria, plantel 6.

DESCRIPCIÓN DEL CENTRO DE PRÁCTICAS

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA No. 6 "ANTONIO CASO", UNAM



- El centro de prácticas se encuentra ubicado en Corina No. 3 Col. Del Carmen Coyoacán, CP. 04100. TEL. 56 01 35 59, 62 y 68.
- Cuenta con vigilancia que permite el ingreso de alumnos, profesores y trabajadores al presentar identificación del mismo.
- Tiene actividad académica en turno matutino y vespertino.
- Por ser un plantel no muy grande, logran ingresar un número pequeño de alumnos, en comparación a la demanda que tiene este plantel, por ser considerado uno de los mejores.
- Conserva áreas verdes, jardineras, pasillos, escaleras y espacios abiertos que permiten el desplazamiento de un edificio a otro sin riesgo alguno.
- Hay tres edificios en cuyas aulas se imparten las clases a nivel bachillerato, cuenta con biblioteca, sanitarios para alumnos y para profesores, laboratorios de física, química y biología. Las oficinas académico-administrativas están en la planta baja cerca de la sala de profesores y la dirección.
- Cada una de las aulas tiene a un lado de la puerta el número del grupo que ingresa en el turno matutino y el del vespertino, así como una clave para ubicarla.
- El aula posee buena ventilación, buena iluminación pero el espacio es poco adecuado para grupos de a lo más 40 alumnos, tanto por el espacio como por la forma circular del salón.
- Las bancas no están alineadas ni pegadas al piso lo cual permite generar dinámicas de trabajo en equipo, moverlas y acomodarlas libremente.
- El pizarrón es de muy buen tamaño, se encuentra en buenas condiciones para ser usado por el docente y los estudiantes. El escritorio no se encontraba en buenas condiciones porque la madera estaba despegada y la superficie se movía al escribir, la silla se encontraba en buen estado.
- La plataforma donde se desplaza el profesor mientras escribe en el pizarrón tiene dimensiones poco apropiadas y al mismo tiempo suele ser muy incómodo subir y bajar durante la clase, además representa cierto autoritarismo por parte del profesor ante el grupo.

DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN ESCOLAR

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA No. 6 "ANTORIO CASO", UNAM

- A cada estudiante que ingresa a algún plantel de la UNAM, se le asigna un único número de cuenta con el cual se identifica como alumno universitario.
- Por ser alumnos universitarios, no tienen que ir con uniforme, van vestidos de civil, según el gusto y preferencia de cada estudiante. Hay gran variedad en estilos: el deportivo, el casual, el formal y el informal.
- La población estudiantil oscila entre 16 y 20. Aunque no se tiene un dato exacto, en cada grupo suele haber recursadores.
- En cada grupo de aproximadamente 40 o 50 alumnos, el 65% son mujeres.
- La capacidad de razonamiento lógico del alumno entre los 16 y 20 años es indispensable pero, si se encentra motivado, es más fácil lograr un aprendizaje significativo del tema matemático.
- Aunque la materia de matemáticas es muy satanizada, hay un porcentaje considerable de alumnos interesados por conocer y aprender más de esta ciencia.
- A esta edad, algunos estudiantes no toman en serio que parte de su aprendizaje en nivel preparatoria será determinante para alcanzar otras expectativas en su vida a futuro.
- Entre los alumnos adolescentes, hay quienes por prejuicios, malas experiencias con profesores de cursos pasados y por el miedo a las matemáticas mismas, se bloquean y se sienten incapaces de entenderlas. Rechazan cualquier acercamiento con ellas y desertan del curso.

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA PLANTEL 6

3. Descripción de la práctica docente en la Escuela Nacional Preparatoria, plantel 6.

En esta sección comparto algunos aspectos relevantes de mi trabajo realizado como alumna madems durante mi Práctica Docente en la Escuela Nacional Preparatoria, plantel 6, donde tuve la oportunidad de trabajar con estudiantes de primer año en el turno vespertino y presentarles mi tema de tesis.

La práctica docente que realicé en este plantel, comprende once sesiones frente a grupo, algunas con duración de 50 minutos y otras de 100 minutos a partir del 8 de noviembre y hasta el 3 de diciembre de 2007, de las cuales, sólo en tres de ellas pude trabajar mi tema de tesis.

Durante esta breve presentación del tema frente a un grupo de 47 estudiantes, se pretende que el alumno conozca las teselaciones cuyas bases o conocimientos previos necesarios son adquiridos por el alumno en primaria y secundaria, tales como figuras geométricas, polígonos regulares e irregulares y simetrías. A partir de esa experiencia previa, conocerá ejemplos de teselaciones, sus características y propiedades desde el punto de vista matemático y artístico.

Para iniciar el tema de **"teselaciones"** les mostré cuatro presentaciones que elaboré previamente en power point dando una breve semblanza histórica y mostrando muchos ejemplos de teselaciones en el plano realizadas por personas de distintas épocas y lugares del mundo, así como varios diseños de Escher. Sin darles ninguna definición, ellos iban identificando las características esenciales y comentaban las semejanzas y diferencias entre ellos. También les hablé de la relación que hay entre el arte y las matemáticas, se discutió por qué ambas complementan el estudio y análisis de las teselaciones. Al final de las presentaciones lograron determinar las características de las teselaciones. Enseguida repartí a los estudiantes un crucigrama cuyas preguntas se relacionan con lo visto, discutido y analizado en las presentaciones, mismo que se dejo de tarea para la siguiente sesión.

A continuación, se organizaron por equipos de a lo más cuatro integrantes, cada equipo trabajó con piezas en cartón o cartulina, como polígonos regulares e irregulares, tendrán al menos doce piezas iguales, mismas que les servirán para ver con cuáles si se puede cubrir el plano sin que se encimen ni dejen huecos y con cuáles no. Al ir armando teselaciones con piezas iguales, ellos son capaces de distinguir tipos de teselaciones, monoédricas, diédricas, triédricas, etcétera. Se dan cuenta que para armar teselaciones con dos o más teselas, sus lados deben ser del mismo tamaño para poder pegar lado con lado. Se les pide hagan varios diseños de teselaciones con esas piezas y utilicen una pieza como molde para dibujar la teselación en una hoja blanca.

Posteriormente, se trabaja el diseño de una pieza que tesele a partir de un polígono que sabemos que sí tesela. Se dan las instrucciones de que el polígono original, en este caso un rectángulo hecho en cartulina, se transformará en una figura irregular haciendo un corte en un lado del rectángulo y pegándolo en otro lado del mismo. Así, tras cortar y pegar áreas iguales se llega a la conclusión de que ambas piezas tienen la misma área. El estudiante de manera individual, utiliza su pieza como molde para marcar el contorno en una hoja blanca y al final explica cómo logró que esa pieza también funcionara para teselar toda la hoja. Algunos alumnos pasaban al pizarrón para dibujar varias teselas y mostraron el patrón con el cual se construye cada una de sus teselaciones. Al ver los distintos diseños de teselaciones se hicieron varias observaciones y preguntas respecto al tema y los mismos alumnos eran quienes encontraban características de las teselaciones.

Se explicó por qué hay piezas que no sirven para teselar el plano, como ejemplo, un pentágono regular no tesela el plano ya que sus ángulos no son múltiplos de 360°, de ello el alumno tendría que deducir que no todos los polígonos regulares teselan el plano.

Me detuve un poco a explicar algunos argumentos que serán claves para detectar piezas que teselan y piezas que no, así como aclarar dudas respecto a las teselaciones. También mostré algunos ejemplos de teselaciones en diapositivas, de modo que el alumno encuentre varios tipos de isometrías, rotaciones, reflexiones, translaciones y deslizamientos. Cuando los alumnos pasaban al pizarrón a dibujar varios ejemplos de teselaciones, de algún modo experimentaban y mostraban porque era posible teselar con esas piezas.

Se logró interacción entre los alumnos al observar, comparar e identificar el patrón en los diferentes tipos de ejemplos que aparecían en las presentaciones en power point. Se repartieron fotocopias con varios diseños de teselaciones para que los estudiantes marcaran las simetrías que encontraran en ellas.

Se les había pedido un cuadrado de cartulina para encontrar el grupo de simetrías del cuadrado pero el tiempo de clase no lo permitió. Se llevó más tiempo explicar por qué hay varios tipos de teselaciones, es decir, con y sin simetrías.

Al final se aplicó un examen sobre lo visto en clase y un cuestionario donde el estudiante daba su opinión acerca del tema y de cómo lo había impartido el profesor madems.

4. Reflexiones y conclusiones de la Práctica Docente II

Considero que el tema no representó dificultades de aprendizaje, además de que el alumno logró relacionarlo con su vida cotidiana. Al trabajar el tema de las teselaciones con ellos, observé que participaban y se involucraban con las respuestas y comentarios del otro.

Presentar varios ejemplos de teselaciones por medio de presentaciones en power point permitió a los estudiantes conocer y aprender temas de geometría elemental de forma distinta a la tradicional cuya utilidad y aplicaciones en el arte y en la ciencia son poco conocidas por el público de nivel bachillerato. Además, pienso que este tipo de recursos tecnológicos son de gran ayuda. El conocimiento no se le da hecho al estudiante, este recurso le permite descubrir el concepto, encontrar las características principales de una teselación y despierta su curiosidad e interés sobre este tema de geometría que no se encuentra en el plan de estudios. Esta forma de presentarles las teselaciones es una buena estrategia de enseñanza dado que genera el acercamiento de ellos hacia un tema nuevo. La parte visual ayuda a entender mejor la geometría y a relacionar los conocimientos previos que son conocidos por ellos desde la educación primaria y secundaria con el concepto de teselaciones.

Entre muchas otras cosas, se busca que los estudiantes intercambien ideas, comentarios, dudas y puntos de vista con sus compañeros, esto se logró dejando de tarea preguntas abiertas para pensar sobre el tema y comentarlo en clase. El grupo se mostró muy interesado en las teselaciones, tanto que algunos me preguntaron por páginas en Internet donde encontrar otros diseños y más sobre ese tipo de rompecabezas infinitos.

En esta práctica docente, fue poco tiempo clase, el que pude dedicarle al tema de teselaciones, aunque el tema es muy extenso y se presta para trabajar muchas otras actividades con temas de geometría, el tiempo efectivo de clase no permite que se desarrollen con más detalle. Considero que más de uno de los objetivos planteados como meta se alcanzaron durante la presentación, desarrollo y exposición del tema. Me habría gustado proponer más tiempo para presentar otras actividades que complementan y fomentan la cultura e intuición geométrica al armar, diseñar y analizar algunas teselaciones.

5. La Práctica Docente en el Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel sur.

DESCRIPCIÓN DEL CENTRO DE PRÁCTICAS

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL SUR



- El centro de prácticas se encuentra ubicado en Cataratas y Llanura sin número, Colonia Jardines del Pedregal de Coyoacán, código postal, 04500, en México DF.
- Tiene actividad académica sólo en dos turnos, el matutino y el vespertino.
- Cabe mencionar que el plantel es muy grande, en comparación con otros CCH, preparatorias y planteles de la UNAM.
- Logra ingresar una gran cantidad de alumnos, en comparación a la demanda que tiene este plantel, por ser considerado uno de los mejores.
- Conserva áreas verdes, jardineras, pasillos, escaleras y espacios abiertos que permiten el desplazamiento de un edificio a otro sin riesgo alguno.
- Cuenta con cafetería, biblioteca, sanitarios para alumnos y para profesores, laboratorios de física, química y biología.
- Las oficinas académico-administrativas, la dirección, la academia de matemáticas y la sala de vanguardia para el aprendizaje de las matemáticas.
- Hay varios edificios (desde el B hasta el Z) en cuyas aulas se imparten las clases.
- Cada una de las aulas donde se imparten las clases de matemáticas tiene asignado un número para ubicarla según el edificio donde se encuentre.
- Las aulas son muy pequeñas, no hay más de 25 alumnos por grupo ya sea en el turno matutino o en el turno vespertino.
- El aula posee un espacio reducido, no muy buena ventilación, buena iluminación, mesas y asientos pero el espacio es poco adecuado para un trabajo apropiado entre profesor y alumnos con grupos de a lo más 25 estudiantes.
- Las bancas no están alineadas ni pegadas al piso lo cual permite generar dinámicas de trabajo en equipo, moverlas y acomodarlas libremente.
- El pizarrón es de muy buen tamaño, se encuentra en buenas condiciones para ser usado por el docente. El profesor cuenta con escritorio y silla.

DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN ESCOLAR

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES DE LA UNAM PLANTEL SUR

- A cada estudiante que ingresa a algún plantel de la UNAM, se le asigna un único número de cuenta con el cual se identifica como alumno universitario.
- Por ser alumnos universitarios, no tienen que ir con uniforme, van vestidos de civil, según el gusto y preferencia de cada estudiante o del grupo al que pertenece. Hay gran variedad en maneras de vestir: el deportivo, el casual, el formal. el informal etc.
- La población estudiantil oscila entre 16 y 20 años.
- Existe la opción de recursamiento para aquellos alumnos que no han aprobado la materia.
- En el grupo de aproximadamente 25 alumnos que me fue proporcionado para efectuar mi práctica docente al impartir algunas clases de matemáticas, se estima que el 65% son hombres y el 35% son mujeres.
- Aunque la materia de matemáticas es muy satanizada, hay un porcentaje considerable de alumnos interesados por conocer y aprender más de esta ciencia.
- La capacidad de razonamiento lógico del alumno entre los 16 y 20 años es indispensable pero, si se encuentra motivado, es más fácil lograr un aprendizaje significativo del tema matemático, lograrlo, es una de las tareas más importantes del docente.
- A esta edad, algunos estudiantes no toman en serio que parte de su aprendizaje en nivel preparatoria será determinante para alcanzar otras expectativas, éxito y mejor desenvolvimiento en su vida a futuro.
- Entre los alumnos adolescentes, hay quienes por prejuicios, malas experiencias con profesores de cursos pasados y por el miedo a las matemáticas mismas, se bloquean y se sienten incapaces de entenderlas. Rechazan cualquier acercamiento con ellas, esto se convierte en un obstáculo para lograr que su aprendizaje sea significativo.
- El ambiente de trabajo y compañerismo entre alumnos del CCH es muy diverso, algunos pertenecen a grupos en busca de ideales, otros se preocupan por las inquietudes propias de los adolescentes como diversión, ser reconocidos por los demás, existe convivencia entre ellos y sus profesores, se reúnen para hacer tareas y trabajos en equipo, el líder del grupo logra manejar al resto y cuando hay acuerdo entre ellos y el profesor para trabajar el tema en clase se logra adquisición de conocimiento matemático.



6. Descripción de la Práctica Docente en CCH, plantel Sur.

Parte de mi formación docente como alumna madems en el área de matemáticas me lleva a realizar algunas actividades que serán de gran apoyo para impartir el tema de las teselaciones frente a grupos de bachillerato. Por mencionar algunas de ellas: elaboré las planeaciones, diseñé las presentaciones en power point, revisé algunos materiales para elaborar los cuestionarios con preguntas acerca de cómo percibe el estudiante el tema presentado por el docente, material que fue entregado a los alumnos de segundo semestre del CCH Sur al terminar mi práctica docente para saber su opinión sobre el curso de teselaciones y así mejorar el presente trabajo de tesis.

En esta ocasión, presento algunos aspectos relevantes de mi trabajo realizado en CCH plantel Sur, durante mi Práctica Docente, donde tuve la oportunidad de trabajar con estudiantes de segundo semestre en el turno vespertino mostrándoles el extraño mundo de las teselaciones.

La práctica docente que realicé durante el semestre 2008-2 comprende ocho sesiones frente a grupo, los lunes y los miércoles eran sesiones de 120 minutos y los viernes de 60 minutos salvo el tiempo real frente a grupo por cuestiones del quehacer cotidiano dentro del aula. Estas sesiones se llevaron a cabo a partir del lunes 10 de marzo de 2008 y hasta el viernes 4 de abril de 2008. En todas ellas trabajé mi tema de tesis con 25 estudiantes del grupo 0240 que cursaban la materia de álgebra y geometría II con el profesor Roberto Robledo Arana.

Los objetivos tanto generales como particulares y los temas a impartir no cambian, se pretende que el alumno conozca las teselaciones cuyas bases o conocimientos previos necesarios los adquiere desde el nivel básico y el nivel medio.

El estudiante conoció muchos ejemplos de teselaciones, sus características y propiedades desde el punto de vista matemático y artístico. Básicamente utilicé el mismo esquema de trabajo con los estudiantes de ambos planteles de la UNAM pero en ésta ocasión tuve más tiempo para trabajar todas las actividades. Además, por el tipo de formación académica que se le da a los estudiantes en cada plantel, el enfoque de cómo se trabaja con ellos es diferente, algunas estrategias de enseñanza que funcionan con alumnos de preparatoria, pueden no tener el mismo impacto con los estudiantes del CCH y viceversa, incluso la respuesta por parte de estudiantes de distintos grupos del mismo plantel no es siempre la misma. Son estos y muchos otros elementos que hacen la diferencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

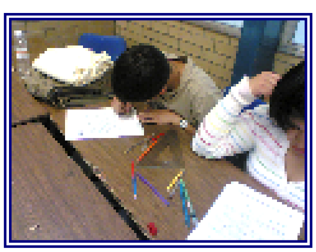
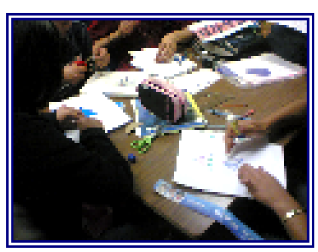
Mediante el uso de la tecnología computacional, les mostré cuatro presentaciones en power point, mismas que han servido como apoyo visual, ellos observaron gran variedad de teselaciones en las que lograron apreciar características que nos indican a qué grupo de simetrías pertenecen o si se trata de una teselación que no posee simetrías.

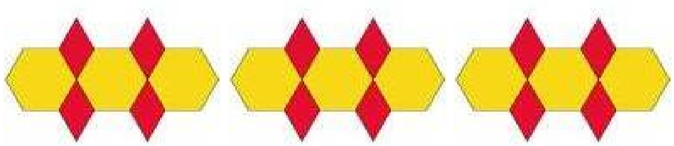
Se dio una breve semblanza de los antecedentes históricos de las teselaciones en varias culturas. Dada la relación entre el arte y la ciencia en las teselaciones, es necesario destacar la importancia de encontrar las matemáticas en el ambiente artístico. El alumno logró descubrir y observar patrones que ayudan a determinar una teselación, y en base a esto, hacer conjeturas y generalizar.

Utilicé varias estrategias de enseñanza para promover la participación de los adolescentes al interesarlos en el tema, entre ellas, lluvia de ideas, confirmar aciertos y detectar fallas en los comentarios de los alumnos durante la discusión del tema, detectar confusiones y en la medida de lo posible dar el concepto adecuado. Se recordaron, aclararon y explicaron conocimientos previos reafirmando aquellos que estaban poco claros como explicar por qué un rombo no es un polígono regular.

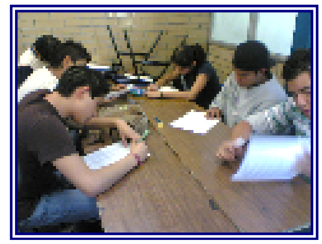
Se repartió en fotocopias un crucigrama matemático que incluye conceptos previos de geometría y de teselaciones en el plano, se dio un poco más de tiempo de lo planeado para que terminara la mayoría, al concluir el tiempo se revisaron y se analizaron las respuestas. Los estudiantes mostraron interés, buena participación durante la revisión de las respuestas del crucigrama, casi todos ellos reconocen y dominan los conceptos previos necesarios para entender el tema de teselaciones.

Propuse una serie de preguntas que inducen a detectar cuáles piezas teselan y cuáles no, si hay simetría o no y qué tipo de movimientos pueden encontrarse en cada teselación. Los estudiantes diseñan piezas en cartulina o cartón para armar teselaciones, se organizan equipos de a lo más tres integrantes, cada equipo debe contar con su material, teselas de cartón o cartulina, hojas blancas, lápiz y colores. Analizan tamaño, forma y ángulos de polígonos regulares e irregulares, detectan patrones para colocar las teselas correctamente, rodean un vértice con diferentes piezas completando los 360°, encuentran simetrías en polígonos regulares. Se introduce la noción de patrones cuando los adolescentes trabajan con las piezas para ver cuáles teselan o no el plano. Durante el tiempo estimado para que los estudiantes armaran y dibujaran varios tipos de teselaciones usando como molde las piezas de cartón que llevaban, yo observaba, revisaba y les hacía observaciones sobre su trabajo, al mismo tiempo respondía dudas de otros alumnos.

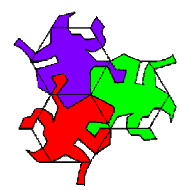


Mientras los estudiantes trabajaban por equipos, yo revisaba el trabajo terminado de otros, durante la clase expresaban su opinión, aportando ideas adecuadas y acordes a los temas vistos aunque también hubo ideas confusas que se aclararon oportunamente. Los alumnos lograron construir y diseñar varias teselaciones con polígonos regulares e irregulares, determinando qué tipo de teselación habían formado y cuántas piezas diferentes usaron para armar sus teselaciones.



Se puede lograr que el estudiante se sienta motivado y muestre atención e interés por las teselaciones que despiertan su curiosidad e imaginación al relacionar la ciencia con el arte.

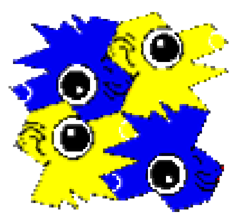
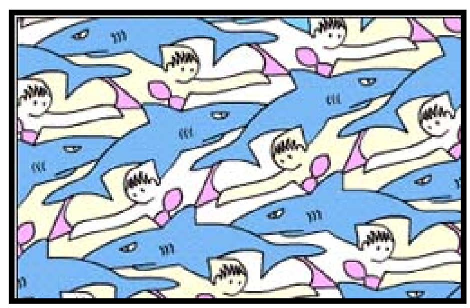
Se abordó el tema de diseño de teselas y los estudiantes pudieron observar cómo se transforma el hexágono regular en un lagarto y así buscar el patrón de armado para teselar con una pieza que tiene forma irregular. Los estudiantes explicaron por qué ambas piezas tienen áreas iguales. Recortaron el lagarto que se obtiene al transformar el hexágono y dibujaron la teselación con esa pieza.



Se utilizó material de apoyo visual, el proyector de acetatos, para observar varias diapositivas que muestran paso a paso la transformación del lagarto, y cómo teselar con esa pieza.

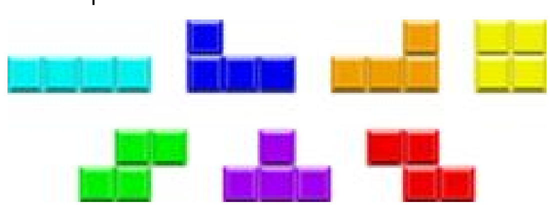
A partir de la actividad anterior, algunos adolescentes lograron construir y diseñar su propia pieza teselante, partiendo de un polígono y transformarlo hasta darle una forma interesante. Mientras tanto, otros alumnos pasaron al pizarrón a dibujar algunas de sus piezas indicando cómo colocarlas para que sí teselen.

Se desarrolló una actividad que le permitió al alumno detectar las simetrías del cuadrado, las 4 rotaciones y las 4 reflexiones. Cada estudiante marcó los ejes de simetría en su cuadrado de cartulina de ambos lados y en cada vértice copio los números cómo lo indicaba el esquema del pizarrón tanto en la parte de atrás. Una vez que los estudiantes habían identificado cómo quedaban los números en los vértices del cuadrado al aplicar una rotación o una reflexión, se les pidió que completaran una tabla con los resultados de aplicar dos movimientos de esos ocho que ya reconoce cómo simetrías del cuadrado. Se les explica cómo hacerlo en un par de ejemplos y posteriormente lo hacen ellos de manera individual. Surgen dudas de cuál movimiento va primero pues se percatan que no da lo mismo aplicar primero el movimiento uno y luego el movimiento dos que primero el movimiento dos y luego el movimiento uno. Los estudiantes pasan al pizarrón a completar la tabla del grupo de simetrías del cuadrado y les propuse que la actividad fuera individual para que cada estudiante se enfrente a encontrar el resultado correcto de haber aplicado dos simetrías al cuadrado. Surgieron preguntas, dudas y comentarios sobre cómo completar la tabla correctamente, mismas que se aclaraban en ese momento.

Algunos alumnos mostraron mayor interés que otros, además reconocen que es posible completar la tabla y siempre da como resultado una simetría del cuadrado de las ocho que ya conocen, con lo cual se tiene una de las condiciones para que las simetrías del cuadrado formen grupo.

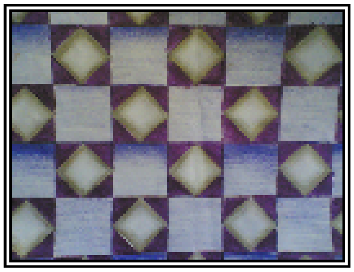
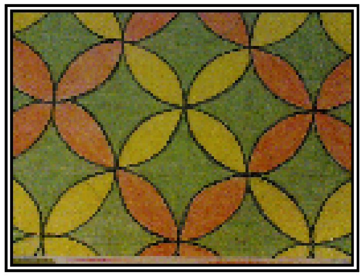
Una de las actividades en el aula que causó gran expectativa fue que armaran teselaciones monoédricas, diédricas y triédricas con teselas en forma de piezas como las que aparecen aquí:

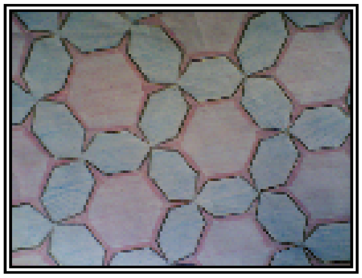
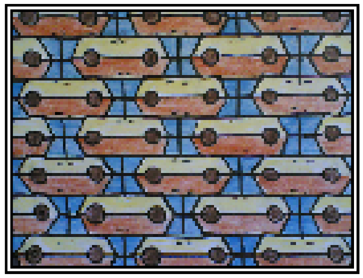
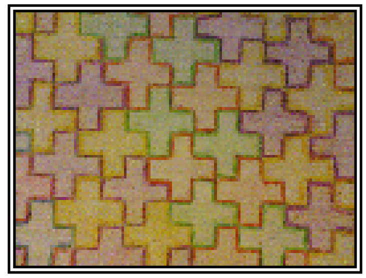


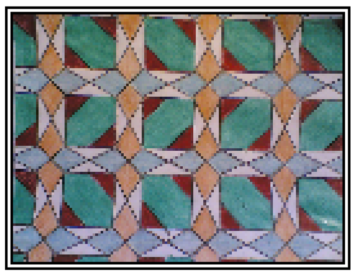
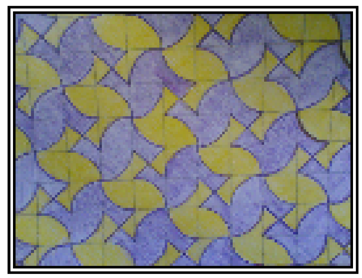
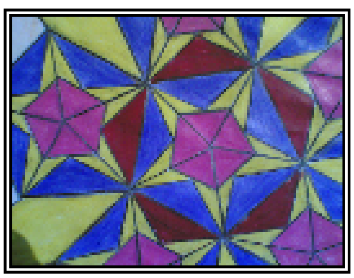
Se entregaron fotocopias con varias teselaciones y se dejo de tarea analizar qué tipo de teselación es cada una, encontrar sus simetrías si es que tienen y si no, explicar por qué.

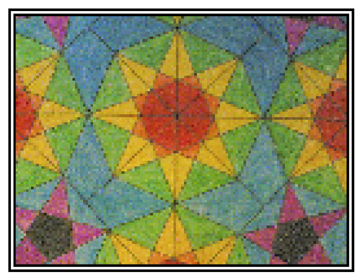
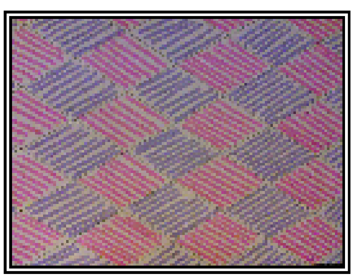
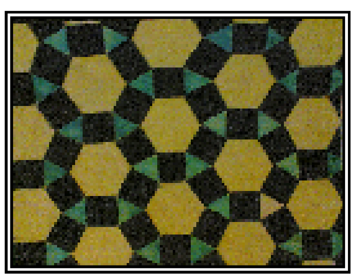
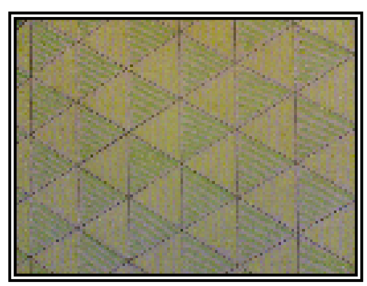
A modo de cierre del tema de teselaciones, se realizó un concurso en una sesión de exposiciones por equipo, los alumnos fueron capaces de diseñar, elaborar, presentar y explicar sus teselaciones, argumentando qué propiedades tienen las piezas que eligieron para cada una de ellas. Al final de cada exposición, los estudiantes otorgaban puntos a los mejores diseños de sus compañeros, esto los animaba a poner atención y seguir participando. Este tipo de actividades motivan al estudiante a trabajar y refleja qué tanto o tan poco ha comprendido del tema ya que diseñan, elaboran y explican sus propias teselaciones.

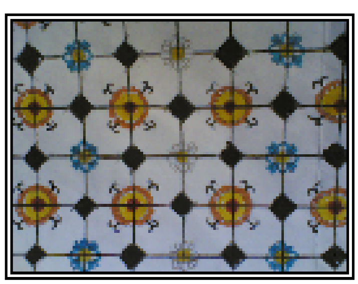
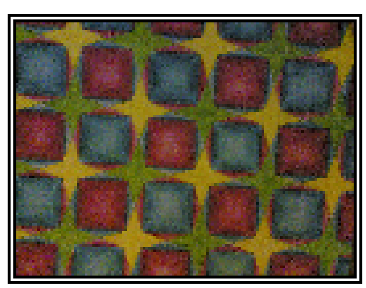
Trabajos realizados por los estudiantes de CCH Sur en Práctica Docente III

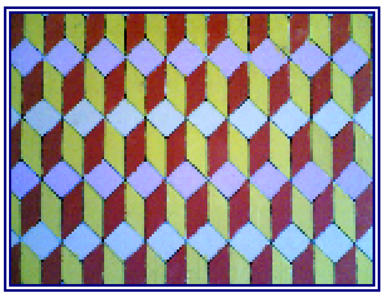
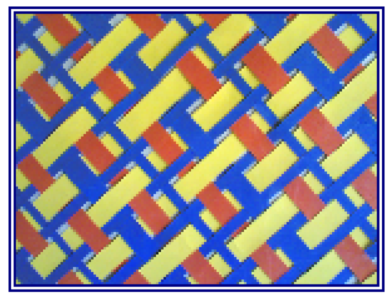




Esta es una pequeña muestra de teselaciones elaboradas por los estudiantes. Tras haber trabajado en equipo, destacaron algunas propiedades que les permiten describir geométrica y artísticamente su trabajo. Cada uno ellos tuvo la oportunidad de explicar con sus propias palabras aquello que había realizado, qué figuras y patrones utilizó para construir su teselación. También hubo gran variedad en los trabajos individuales. Para mí, fue una buena y grata experiencia notar el avance de los estudiantes debido a que dominaban el conocimiento adquirido sobre teselaciones. El tema de tesis fue aceptado por ellos satisfactoriamente y eso da pie a que alumnos interesados en las teselaciones sigan investigando por su cuenta y logren adentrarse un poco más en ese mundo antes desconocido para ellos.

Las últimas dos imágenes muestran dos trabajos que realicé cuando cursaba dibujo constructivo en el bachillerato, pero en aquel entonces yo no sabía que podían verse como teselaciones, ni las propiedades tan interesantes que tienen como la simetría. Por ello, debemos darles oportunidad a los estudiantes de bachillerato, de conocer más sobre temas geométricos que despiertan la imaginación, la creatividad y la motivación por trabajar con otros temas matemáticos que aunque no aparecen en el programa son interesantes e importantes para nuestra visión, intuición y percepción geométrica.

Una estrategia de aprendizaje que utilicé fue pedirles que realizaran un acordeón con información relevante sobre teselaciones, al revisarlos me di cuenta que ese tema había sido significativo para la mayoría porque logaron explicar con sus propias palabras mucho de los conocimientos nuevos que habían adquirido. Otra estrategia utilizada después de aplicar el examen, fue resolverlo en el pizarrón y hacer participar constantemente a aquellos alumnos que no supieran la respuesta correcta. Esto sirve como retroalimentación para los alumnos ya que de ese modo se reafirma lo aprendido.

Finalmente los estudiantes contestaron dos cuestionarios donde pudieron evaluar el trabajo realizado por mi parte con total libertad, sin que sus comentarios y opiniones influyeran en su calificación ni a favor, ni en contra, ésta depende únicamente de los criterios que se presentaron el primer día de clase.

7. Reflexiones y conclusiones de la Práctica Docente III

Los estudiantes de segundo semestre de CCH Sur atendían las explicaciones que presenté desde el principio donde les comenté la forma de trabajo en el aula. Me dio una gran satisfacción ver que hubo mucho interés y expectativa por conocer qué era eso de las teselaciones y tan pronto se dieron cuenta de qué se trataba, para muchos de ellos fue una experiencia sorprendente e interesante. Participaron activamente haciendo preguntas y relacionaban su experiencia previa con el arte y las matemáticas después de ver las presentaciones en power point. Las imágenes y ejemplos de las teselaciones que aparecen en esas presentaciones son las mismas que aparecen en este trabajo de la página 40 a la 50.

Aunque la actividad de resolver el crucigrama era individual, la experiencia en el aula de que algunos estudiantes lo hayan trabajado en equipo promueve la participación activa, se da mayor retroalimentación a los conceptos que no se tienen claros. Además los estudiantes hicieron varias observaciones sobre algunos errores de dedo y de redacción que aparecían en el crucigrama, ello me sirvió para mejorar el diseño y eliminar los errores encontrados. Pienso que el desempeño de los estudiantes fue muy significativo porque lograron recordar datos, conceptos e ideas importantes de la clase anterior que estaban relacionados con las preguntas del crucigrama.

Considero que tanto el trabajo en equipo como el individual es fundamental ya que en la actualidad el docente se ocupa de fomentar la participación activa de los estudiantes tanto en el trabajo cooperativo como en el desarrollo de destrezas individuales que ayudan al estudiante a involucrarse aún más con su propio aprendizaje. Nuestros alumnos deben dejar el papel de oyente pasivo, ese que por tomar notas muchas veces se pierde del aprendizaje porque su atención no se concentra en entender el tema y seguir un proceso de comunicación y diálogo con el profesor y sus compañeros dentro del aula.

Debemos inculcar en nuestros estudiantes mejores estrategias de trabajo que propicien mayor acercamiento al aprendizaje de la geometría despertando su interés y curiosidad por aprender más y mejor. Se promueve el aprendizaje significativo del alumno cuando interactúan en equipo para armar sus teselaciones creando diferentes diseños con las mismas piezas, existe mayor comunicación entre ellos cuando descubren patrones para teselar. Es motivante ver cómo los estudiantes descubren e inventan nuevas formas de colocar las piezas en el plano consiguiendo diseños originales y diferentes unos de otros.

El trabajo cooperativo permite al estudiante exteriorizar lo que ha comprendido y aprendido, así puede compartir sus conocimientos, pensamientos, destrezas y habilidades con los otros, es sin duda, parte de lo que se desea cuando se lleva a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en el bachillerato.

Este trabajo en el aula entre estudiantes, es muy importante ya que cada alumno aporta al equipo sus conocimientos, sus habilidades y exige un compromiso con el otro. Aún así, cabe aclarar que el trabajo en equipo debe ser supervisado por el docente y los equipos deben ser a lo más de tres alumnos ya que de lo contrario será difícil asegurar que todos los integrantes han aprovechado al máximo la experiencia del trabajo en equipo.

Al realizar diversas actividades con los estudiantes de segundo semestre de CCH, me di cuenta que van adquiriendo mayor destreza y dominio de con las teselaciones y el tema de simetrías. La práctica del trabajo individual también promueve el aprendizaje significativo porque el alumno es capaz de darse cuenta qué tanto ha aprendido, puede detectar sus aciertos y fallas, se promueve el aprendizaje por descubrimiento ya que el alumno se enfrenta a sí mismo.

Los estudiantes que participaron en este pequeño curso ahora tienen las ideas y conceptos básicos para trabajar y entender más a fondo sobre teselaciones, tema de geometría desconocido incluso por muchos profesores a los que les gustan la matemáticas y dan clases en bachillerato.

Conclusiones finales

La elaboración de este trabajo fue motivo de una amplia reflexión sobre mi labor y desempeño docente con dos grupos de adolescentes, uno de primer año en la Escuela Nacional Preparatoria, plantel 6 y el otro de segundo semestre en el Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur. A pesar de que esta fue la segunda experiencia como profesor de matemáticas frente a un grupo de adolescentes, me ayudó a analizar detalladamente cada una de las etapas que son fundamentales para presentar un tema en el aula, desde la revisión del plan de estudios del programa al que pertenece el plantel, la planeación de clases, el diseño de materiales y actividades hasta la evaluación del tema. Así como también lo es, preparar, guiar, mostrar y exponer durante las sesiones, evaluar constantemente lo que sucede en el transcurso de las mismas, reportarlo en la bitácora, revisar tareas, obtener retroalimentación por parte de los estudiantes y proponer en base a eso, algunas acciones para mejorar mi desempeño docente en un futuro.

Considero que en ambas prácticas docentes obtuve verdaderamente una experiencia significativa porque pude vivir y experimentar tanto académica como personalmente cada una de estas etapas, ello implica un mayor compromiso para lograr disminuir y si es posible evitar las fallas detectadas en el desempeño docente, así como fortalecer aquellas que se desarrollaron adecuadamente en las sesiones que se presentaron a los estudiantes adolescentes.

En ambas prácticas docentes realizadas en los bachilleratos de la UNAM, los grupos que tuve a mi cargo para trabajar fueron otorgados por el profesor titular, mismo que a su vez fue mi supervisor durante la presentación del tema frente a grupo. El desempeño de los estudiantes depende también de la información y reglas que reciban del profesor titular sobre cómo y bajo qué condiciones van a trabajar con el alumno MADEMS. Las sesiones fueron video grabadas tanto las de la preparatoria 6 como las de CCH Sur, haciendo constar el trabajo realizado en ambos planteles.

Después de realizar las prácticas docentes, revisamos los videos de algunas sesiones, recibí comentarios y observaciones sobre las fortalezas y debilidades que se vieron reflejadas durante las clases frente grupo en ambos planteles.

Es importante mencionar que cuando se esta trabajando frente a grupo, hay muchos factores que pueden propiciar un mejor desempeño en el aula o en su defecto, hacer que los resultados obtenidos no sean los esperados por el docente o por los alumnos de bachillerato.

Los intereses del alumno y el compromiso por aprender durante las clases de matemáticas están directamente vinculados con la motivación que este tenga acerca de la materia, las expectativas de aquello que va a aprender, las estrategias de enseñanza que utilice el profesor para trabajar conocimiento nuevo a partir de la experiencia previa del estudiante y las actividades que promuevan participación activa por parte del adolescente.

La labor docente es un compromiso constante por aprender y superarse día con día. Es más fácil lograr que un profesor con vocación se preocupe por mejorar su desempeño docente que un profesor que llegó a ese trabajo por accidente. Pero ciertamente un aspecto fundamental es la experiencia que se adquiere a través de los años, misma que debe hacernos mejores docentes. Es necesario tomar en cuenta que nuestros alumnos aprenderán de nosotros no sólo conceptos matemáticos sino también, actitudes, valores, destrezas, habilidades y experiencias que les servirán para enfrentarse a la vida.

Considero que el presente proyecto de tesis, con el que se ha enseñado en dos planteles de los bachilleratos de la UNAM una de las aplicaciones que tiene la geometría euclidiana, sirve para ayudar al estudiante a pensar y ordenar sus ideas adecuadamente, ayuda a saber deducir y argumentar para construir un discurso paso a paso. Al trabajar con el concepto de teselaciones tanto el docente como el alumno tiene la oportunidad de observar, explorar, analizar, investigar, conjeturar, inducir, deducir, desarrollar su imaginación y creatividad, argumentar, explicar, interpretar y crear diseños de teselaciones. Por ello buscaré más oportunidades de dar a conocer el material aquí presentado, ya sea en conferencias o charlas de divulgación matemática.

En los comentarios e interés de los alumnos por el tema de tesis, me doy cuenta de que hay mucho por hacer en la enseñanza de la matemática, sobre todo en la parte de la geometría. Esta propuesta es un pequeño granito de arena.

Espero también que este trabajo sirva como motivación a otros profesores para desarrollar otras propuestas que logren mejorar la enseñanza de la geometría en el nivel medio superior. Como limitación para enseñar esta pequeña introducción a las teselaciones sólo tendríamos el tiempo ya que frente a grupo no se trabaja muy rápido y a veces no se profundiza tanto como para que el estudiante adolescente conozca detalladamente estos temas.

El tiempo que me llevó este trabajo desde sus inicios a la fecha, casi dos años, me deja una gran satisfacción personal y profesional por la experiencia compartida en incontables reuniones de varias horas con Paco Struck y otras tantas con Michael Barot, en cada una de las que los comentarios, observaciones y sugerencias que me daban me servían para seguir trabajando en este proyecto. Sin duda son momentos en los que aprendí mucho más, gracias al intercambio de ideas, opiniones, preguntas y sugerencias de ambos, mismas que me motivaron a leer e investigar más del tema, es sorprendente todo aquello que puedes encontrar en los mejores libros.

Los logros alcanzados en ambas prácticas docentes al presentar **"El extraño mundo de las teselaciones, un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato"** en los dos planteles de la UNAM me permitió vivir y compartir experiencias con estudiantes adolescentes que tuvieron una actitud positiva y mostraron gran interés por el tema, mismo que les dejó una grata impresión sobre lo que hay de geometría que no aparece en el plan de estudios del bachillerato.

También me deja muchas inquietudes porque a medida que vas adentrándote más y más al tema te das cuenta que es más lo que desconoces que lo que sabes del mismo, así que me gustaría seguir trabajando y aprendiendo más sobre teselaciones.

Agradezco sinceramente a todos aquellos que hicieron posible la realización de este proyecto "El extraño mundo de las teselaciones, un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato".

Mil gracias…!!!

Bibliografía

- Acuña Soto Claudia Margarita, ¿Qué es una teselación?, revista del seminario de enseñanza y titulación, vol. VIII, núm. 67, UAM Azcapotzalco, México, 1993.
- Bishop, Alan J., Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural, Barcelona, Ediciones Paidós Ibérica, 1999.
- Bishop, Alan J., ¿Cuáles son algunos de los obstáculos para el aprendizaje de geometría?, estudios en educación matemática: la geometría en las escuelas, Montevideo, UNESCO, 1986.
- Bosco Hernández Martha Diana, Selección de Lecturas Didáctica General I, UNAM, México, 2003.
- Castelnuovo Emma, Didáctica de la matemática moderna, ed. Trillas, México, 1980.
- Chamoso José, Rawson William, Contando la geometría, 3 Diálogos de matemáticas, Nivela Libros Ediciones, España, 2004.
- Díaz-Barriga Arceo Frida, Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista, 2da. Edición, Mc Graw Hill, México, 2006.
- Delval Juan, Crecer y pensar, Editorial Paidós Mexicana, S.A., México DF, 1991.
- Falcini Magaña Manuel, Hoyos Aguilar Verónica, Instrumentos y Matemáticas, historia, fundamentos y perspectivas educativas, 1ra edición, UNAM/UPN, México, 2005.
- Ferrero Luis, El juego y la Matemática, 5ta edición, Editorial La Muralla SA, Madrid, 2004.
- Garner Martin, Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas, 1ra reimpresión de la primera edición, Editorial Labor, Barcelona, 1990.
- Gómez Chacón Inés María, Matemática Emocional, los afectos en el aprendizaje matemático, Nancea, s. a. de ediciones, Madrid, 2000.
- Grünbaum Branko, Tilings and patterns, W.H. Freeman and Company, New York, 1986.
- Gutiérrez A. Jaime, El grupo de las isometrías del plano. Ed. Síntesis, Madrid, 1996.
- Hidalgo Solís Laura, Temas para bachillerato 7 Mosaicos, IMATE UNAM, México, 2007.
- Kline Morris, El fracaso de la Matemática Moderna, ¿por qué Juanito no sabe sumar?, Siglo XXI Editores, México, 1976.
- Labinowicz Ed, Introducción a Piaget, Pensamiento Aprendizaje Enseñanza, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, EUA, 1987.
- Mora José Antonio, Rodrigo Julio, Mosaicos I, Proyecto Sur de Ediciones S.A.L., Granada, 1995.
- Mora José Antonio, Rodrigo Julio, Mosaicos II, Proyecto Sur de Ediciones S.A.L., Granada, 1995.
- Nunes Teresina, Bryan Meter, Las matemáticas y su aplicación, La perspectiva del niño, Siglo XXI Editores, México, 1997.
- Ortiz Rodríguez Francisca, Matemática, estrategias de enseñanza y aprendizaje, Editorial Pax México, 2001.
- R. Shaffer, David, Psicología del desarrollo: infancia y adolescencia, 5ta edición, Cengage Learning Editores, 2000.
- Seymour Dale and Britton Jill, Introduction to tessellations, Dale Seymour Publications, EUA, 1989.
- Steen Lynn Arthur, La enseñanza agradable de las matemáticas, Ed. Limusa Noriega Editores, México, 1999.
- Struik Dirk Jan, Historia concisa de las matemáticas, traducción, Instituto Politécnico Nacional, México, 1994.
- Zarzar Charur Carlos, Habilidades básicas para la Docencia, Editorial Patria, México, 1993.
- Zubieta Russi Francisco, La moderna enseñanza dinámica de las matemáticas, ed. Trillas, México, 1975.

Web grafía

En Internet existen suficientes sitios dedicados a tratar alguno o todos las temas sobre teselaciones. Algunas páginas tratan estos temas desde un punto de vista matemático básico, otras abordan el tema desde una perspectiva más avanzada, mientras que en otros sitios se hace mayor hincapié en elementos artísticos.

http://interactiva.matem.unam.mx/
http://www.alhambradegranada.org/
http://www.mcescher.com/
http://www.iescomercio.com/cursos/Russell_en_%20Atenas/teselaciones.htm
http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar2008/educontinua/mate/nombres/penrose_01.htm
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teselaciones.html
http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates12/dematesna0001/opciones/Teselaciones.htm
http://lauradelafuente.wordpress.com/2007/11/08/acerca-de-las-teselaciones/
http://origametria.blogspot.com/2007/01/teselaciones-escher-matemtica.html
http://www.comenius.usach.cl/webmat2/proyectos/TESELACIONES.htm
http://puemac.matem.unam.mx/teselados/html/index.html
http://belengf.wordpress.com/2007/11/18/teselaciones/
http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/escher.htm
http://geometriadinamica.org/otrateselasionpropia.htm
http://www.cnice.mecd.es/Descartes/4a_eso/Movimientos_en_el_plano_4/Movimi0.htm
http://webp.cnice.mecd.es/eos/MaterialesEducativos/mem2003/movimientos/index.html
http://www.educared.net/concurso2003/1095/webconcurso/webconcurso/hablamos_simetria.htm
http://www.imposible.cl/dru/?q=node/33
http://www2.spsu.edu/math/tile/grammar/index.htm
http://jmora7.com/miWeb8/Mitad/Amosai.htm
http://www.acorral.es/index3.htm
http://www.oswego.edu/~baloglou/103/seventeen.html
http://acorral.es/tramas/simeg17.htm
http://usuarios.lycos.es/acericotri/index3.htm
http://www.geocities.com/SiliconValley/Vista/2212/tesela.html

Artículos

http://www.keymath.com/documents/dg4/GP_Spanish/DG4GP_SPN_07.pdf
http://www.utadeo.edu.co/comunidades/estudiantes/ciencias_basicas/geometria/operaciones_cabri_2_plus_08.pdf
http://www.corazonistas.com/documentos/rinconmaestro/matematicas/geometria/geometria11.pdf
http://edrev.asu.edu/reviews/revs92.pdf

Videos

http://www.youtube.com/watch?v=mnFeiWISKog
http://www.youtube.com/watch?v=XflF2gMEltA
http://www.youtube.com/watch?v=EymU_8ZVEzA