UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

RADIO ESPECTRAL EXTENDIDO E INVERTIBILIDAD TOPOLÓGICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A

M. en C. JAIRO ROA FAJARDO

DIRECTOR DE TESIS: DR. HUGO ARIZMENDI PEIMBERT

MÉXICO, D.F. **JUNIO, 2009**

Radio Espectral Extendido e Invertibilidad Topológica

Jairo Roa Fajardo

Junio de 2009

A mi hija Natalia:
Todo es posible con dedicación
y perseverancia.

A Hernando y Jhonatan:
Siempre estarán con nosotros.

AGRADECIMIENTOS

El haber culminado con los estudios de doctorado es algo que me llena de mucha satisfacción. En este proceso participaron directa o indirectamente muchas personas. Es por eso que deseo dirigir mis agradecimientos:

A mis padres porque por ellos estoy aquí; les debo mi existencia y el haberme inculcado que las metas que uno se traza son posibles llevarlas a cabo.

A mis hermanos porque siempre he sentido su apoyo moral todo este tiempo.

A Edith por su apoyo incondicional.

Al doctor Hugo Arizmendi por sus enseñanzas y el tiempo dedicado para la realización de esta tesis.

A los sinodales por sus valiosos comentarios y sugerencias hacia el trabajo. En particular, agradezco al doctor Armando García por sus contribuciones para la escritura final.

A la Univesidad Nacional Autónoma de México y en particular al Instituto de Matemáticas por haber tenido el privilegio de ser uno de sus estudiantes.

A la Universidad del Cauca y al departamento de Matemáticas por su apoyo para la realización de este doctorado.

A todas las personas que de una u otra forma contribuyeron a la realización de esta tesis.

Índice general

INTRODUCCIÓN

Para un elemento x en un álgebra de Banach A se define el *espectro* como un subconjunto del plano complejo dado por

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda e) \text{ no es invertible}\}$$

y el *radio espectral* como

$$R(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} \tag{1}$$

El radio espectral es una de las características más importante de la teoría de las álgebras de Banach. Si A es unitaria y compleja se tienen algunas definiciones equivalentes con el radio espectral:

$$R(x) = \lim_{n} \sqrt[n]{||x^n||} = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{||x^n||} \tag{2}$$

Y si A es conmutativa, entonces también tenemos

$$R(x) = \sup\{|f(x)| : f \text{ un funcional lineal, multiplicativo y continuo}\} \tag{3}$$

En [1], G.R. Allan desarrolla una teoría espectral para álgebras localmente convexas usando el espectro de un elemento el cual es un subconjunto del plano complejo extendido y considera el correspondiente radio espectral R. Él estudia, entre otras cosas, las relaciones entre R y el *radio de acotación*

$$\beta(x) = \inf\left\{\lambda > 0 : \left\{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\}_{n\geq 1} \text{ es acotado en } A\right\} \tag{4}$$

En algunas álgebras no normadas estos radios juegan el papel de la norma en el sentido que si $R(x) < 1$ o $\beta(x) < 1$, entonces la serie $\sum x^n$ es convergente. Una parte del estudio sobre el radio espectral se realiza en álgebras no completas.

Entre los objetivos de esta tesis se encuentran los de definir un radio espectral extendido y un radio de acotación, en álgebras topológicas más generales, en relación con la *invertibilidad topológica.* Nosotros presentamos estos radios, estudiamos las relaciones entre ellos y los comparamos con el *radio espectral extendido inferior* R_* definido en [4].

En el primer capítulo de la tesis presentamos algunos de los principales resultados de las álgebras de Banach y vemos la equivalencia de las fórmulas (1), (2) y (3). También estudiamos estos mismos resultados para las álgebras normadas y las $Q-$álgebras. Entre otros, el teorema de Gelfand-Mazur en álgebras normadas. Así mismo obtenemos algunos resultados originales como son los corolarios (1.1.14) y (1.2.4), y las proposiciones (1.2.10), (1.2.12), (1.2.20), (1.3.6) y (1.3.12). Damos un ejemplo de un álgebra de Banach no conmutativa sin funcionales lineales multiplicativos, así como también un álgebra de Banach no conmutativa con funcionales lineales multiplicativos.

En el capítulo dos estudiamos las álgebras $m-$convexas y localmente convexas. Para las primeras tenemos la misma definición de espectro y radio espectral de un elemento de un álgebra topológica. Sin embargo, en éstas álgebras se tienen otras expresiones para el radio espectral y se prueba en [19] que si el álgebra es completa entonces todos los radios son iguales e iguales al radio de acotación (4). También obtenemos un resultado original en la proposición (2.2.4).
En álgebras localmente convexas, tenemos el espectro y radio espectral extendido R definido por W. Żelazko y la igualdad con algunos de los radios dados en un álgebra $m-$convexa, así como con el radio de acotación (4) definido por G.R. Allan. La proposición (2.4.2) es un resultado muy importante que obtenemos ya que nos relaciona los espectros de W. Żelazko y de G.R. Allan. Además, damos un ejemplo que ilustra por qué el radio de acotación y el radio espectral usual no siempre son comparables.

En el capítulo tres estudiamos el concepto de invertibilidad topológica, definiendo el espectro topológico de Harte, el radio espectral topológico R_t y un radio de acotación β_t, análogo al definido por G.R. Allan pero utilizando la invertibilidad topológica. Comparamos éstos radios entre sí y con el radio R_*, definido en [4].
Para los radios estudiados tenemos que para un elemento x en un álgebra localmente convexa arbitraria

$$R_t(x) \leq R_*(x) = \beta_t(x) \leq \beta(x) \leq R(x)$$

Demostramos que si el álgebra localmente convexa es invertiva (esto es, el conjunto de elementos invertibles y topológicamente invertibles son iguales), entonces para cada x del álgebra se tiene

$$R_t(x) = R_*(x) = \beta_t(x) = \beta(x) = R(x)$$

Damos un ejemplo de un álgebra donde R_t y R_* son iguales y uno donde la desigualdad entre R_* y R puede ser estricta. Finalmente demostramos que en un álgebra localmente convexa y metrizable el inverso topológico de $(x - \lambda e)$ tiene una forma similar al inverso en álgebras en Banach; esto es

$$(x - \lambda e)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

siempre que $|\lambda| > \beta_t(x)$, para x un elemento del álgebra topológica.

En el capítulo cuatro estudiamos el radio espectral en $(C_b(X), \beta)$, el álgebra de todas las funciones complejas, continuas y acotadas definidas sobre un espacio de Hausdorff completamente regular, dotada de la topología localmente convexa dada por las seminormas

$$||f||_\varphi = \sup_{x \in X} |f(x)\varphi(x)|$$

donde φ es una función de $B_0(X)$, el conjunto de todas las funciones acotadas sobre X que se anulan en infinito (es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K(\epsilon) \subset X$ tal que $|\varphi(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K(\epsilon)$)

Para $f \in C_b(X)$ definimos su radio espectral extendido (análogo al caso de las álgebras localmente convexas) por

$$R(f) = \sup_{\varphi \in B_0(X)} \limsup_n \sqrt[n]{||f^n||_\varphi}$$

Probamos además que para $f \in C_b(X)$ y $\varphi \in B_0(X)$

$$\limsup_n \sqrt[n]{||f^n||_\varphi} = \lim_n \sqrt[n]{||f^n||_\varphi} = \sup_{x \in sop(\varphi)} |f(x)| = \sup_{||g||_\varphi \leq 1} ||fg||_\varphi$$

Sin embargo, mostramos que a diferencia del caso normado

$$\lim_n \sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi} \neq \inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi}.$$

Capítulo 1

Radio espectral en álgebras de Banach

1.1. Álgebras normadas y álgebras de Banach

La teoría de las álgebras de Banach ha contribuído al desarrollo tanto del análisis funcional como el de álgebras topológicas más generales. Gelfand fundamentó la teoría de éstas álgebras. Su principal punto de partida fue el teorema de Mazur anunciado en 1938 y que ahora es conocido como el teorema de Gelfand-Mazur. En este capítulo estudiaremos algunos de los principales resultados de la teoría de las álgebras normadas y de Banach los cuales nos ayudarán a abordar la teoría espectral en álgebras localmente convexas.

Definición 1.1.1. Sea A un álgebra sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$ provista con una topología Hausdorff τ. Decimos que la multiplicación es *separadamente continua* si el mapeo de Ax$A \to A$ dado por $(x, y) \mapsto xy$ es continuo con respecto a cada variable; es *conjuntamente continua* si el mapeo anterior es continuo con respecto a la topología del producto AxA.

Definición 1.1.2. Un álgebra A provista con una topología τ es un *álgebra topológica* si es un espacio vectorial topológico y tiene una multiplicación asociativa conjuntamente continua.

Lema 1.1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \in \tau$, $B \subset X$. Entonces*

$$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$$

Demostración: Si $x \in A \cap \overline{B}$ entonces para toda vecindad V_x de x, el conjunto $V_x \cap A$ es una vecindad de x. Luego, $(V_x \cap A) \cap B \neq \emptyset$; es decir, $x \in \overline{A \cap B}$. ■

Nota 1.1.4. Sea (A, τ) un espacio topológico y $\mathfrak{N}$ un sistema fundamental de vecindades de cero en A. Demostremos que $\overline{\mathfrak{N}} = \{\overline{V_i}^{\widehat{A}} : i \in I\}$ es un sistema fundamental de vecindades de cero en la completación de A, que denotaremos por $\widehat{A}$, donde $\overline{V_i}^{\widehat{A}}$ denota la cerradura de V_i con respecto a $\widehat{A}$. Sea $\widehat{U}$ una vecindad cerrada de cero en $\widehat{A}$ y $U = \widehat{U} \cap A$. Entonces U es una vecindad del cero en A lo que implica que existe $V \in \mathfrak{N}$ tal que $V \subset U$ y por lo tanto, $\overline{V}^{\widehat{A}} \subset \widehat{U}$. Sea $W \in \tau$ tal que $W \subset V$. Existe $\widehat{W}$, vecindad de cero en $\widehat{A}$, tal que $W = \widehat{W} \cap A$. Por el lema anterior, $\widehat{W} = \widehat{W} \cap \widehat{A} \subset \overline{W}^{\widehat{A}} \subset \overline{V}^{\widehat{A}}$. Esto implica que $\overline{V}^{\widehat{A}}$ es una vecindad de cero en $\widehat{A}$.

Así, para álgebras topológicas tenemos el siguiente

Teorema 1.1.5. *Si (A, τ) es un álgebra topológica entonces su completación también lo es.*

Demostración: Sea $V \in \mathfrak{N} \subset \tau_{\widehat{A}}$. Entonces $\overline{V'}^{\widehat{A}} \subset V$, con $V' \in \mathfrak{N}$. Existe U tal que $UU \subset V'$. Demostremos que $\overline{UU}^{\widehat{A}} \subset \overline{V'}^{\widehat{A}} \subset V$. Sean $x, y \in \overline{U}^{\widehat{A}}$. Entonces existen $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ y $(y_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ en U tales que $x_\alpha \to x$, $y_\alpha \to y$. Por la continuidad de la multiplicación, $(x_\alpha y_\alpha) \to xy$, y como $(x_\alpha y_\alpha) \in UU$ se sigue que $xy \in \overline{UU}^{\widehat{A}}$. ■

Definición 1.1.6. Decimos que A es un *álgebra normada* si tiene una norma $\|\cdot\|$ tal que la topología inducida por ella la hace un álgebra topológica. Y si el álgebra normada es completa entonces decimos que A es un *álgebra de Banach*.

Para álgebras de Banach tenemos el siguiente (véase [17], teo. (2.4))

Teorema 1.1.7. *Sea A un álgebra de Banach con unidad e. Entonces existe un espacio de Banach X y un isomorfismo (biyectivo y bicontinuo) de A en una subálgebra cerrada del álgebra $B(X)$ de todos los operadores acotados $T : X \to X$ con la norma operador*

$$\|T\|_{op} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$$

Demostración: Sea $X = A$. Definamos la aplicación

$$\varphi : A \to B(A); \quad x \mapsto \varphi(x) = T_x$$

donde $T_x \in B(X)$ es el operador de multiplicación a izquierda; es decir, $T_x(y) = xy$, $y \in A$. Entonces φ es lineal y multiplicativa:

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = T_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}(y) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(y) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2)$$

para todo λ_1, λ_2 en $\mathbb{C}$ y para todo y, x_1, x_2 en A.

$$\varphi(x_1 x_2) = T_{x_1}(T_{x_2}(y)) = T_{x_1}(x_2 y) = x_1(x_2 y) = (x_1 x_2)y = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$$

para todo y, x_1, x_2 en A.
φ es inyectiva y suprayectiva sobre su imagen. En efecto, si $\varphi(x) = 0$ entonces $T_x(y) = xy = 0$ para todo $y \in A$. En particular, para $y = e$, $xe = x = 0$. Por lo tanto, φ es un isomorfismo algebraico.

Resta probar que φ es un homeomorfismo, o equivalentemente, que la norma en A dada por $|x| = |T_x|_{op}$ es equivalente a la norma $\| \cdot \|$ original de A. Si $x \in A$ entonces

$$|x| = |T_x|_{op} = \sup_{\|y\| \leq 1} |T_x(y)| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|xy\| \geq \left\| \frac{xe}{\|e\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|e\|}$$

Por lo tanto, $\|x\| \leq \|e\| \; |x|$. Luego, las normas $| \cdot |$ y $|| \cdot ||$ son comparables y la equivalencia será probada si mostramos que el álgebra A es completa con la norma $| \cdot |$ o que el conjunto $\widetilde{A} = \{T_x \in B(A) : x \in A\}$ es cerrado en $B(A)$ (por el teorema de la aplicación inversa). Para ello, supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A tal que $(T_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $B(A)$ a T. Entonces $(T_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $B(A)$ y como $|T_x| \geq ||x||$, $x \in A$, se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en A que por ser completo existe $x \in A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$. Por la continuidad de la multiplicación en A tenemos que

$$\begin{aligned} ||T(y) - T_x(y)|| &\leq ||T(y) - T_{x_n}(y)|| + ||T_{x_n}(y) - T_x(y)|| \\ &= ||T(y) - T_{x_n}(y)|| + ||x_n y - xy|| \end{aligned}$$

lo que implica que $T(y) = T_x(y)$ para cada $y \in A$. Así, $T = T_x$ y $\widetilde{A}$ es cerrado. ■

De este teorema tenemos el siguiente

Corolario 1.1.8. *Toda álgebra de Banach A tiene una norma equivalente a la original que satisface*

(i) $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$

(ii) $\|e\| = 1$, *siempre que* $e \in A$

Demostración: (i) Definamos el operador lineal de multiplicación a izquierda como en la demostración del teorema anterior. De la teoría de operadores tenemos que $||T_x T_y||_{op} \leq ||T_x||_{op} \, ||T_y||_{op}$. Así, existe una norma en A, $||T_x||_{op}$, $x \in A$, que es equivalente a su norma original y satisface que $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$.

(ii) $\|T_e\|_{op} = \sup\limits_{\|y\| \leq 1} \|ey\| = \sup\limits_{\|y\| \leq 1} \|y\| = 1$ ■

Tenemos un resultado análogo para el caso normado.

Corolario 1.1.9. *Sea A un álgebra normada. Entonces existe una norma equivalente a la norma original tal que*

(i) $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$

(ii) $\|e\| = 1$, *siempre que* $e \in A$

Demostración: El álgebra A se completa a $\widehat{A}$, la cual es un álgebra de Banach. Por el corolario anterior existe una norma equivalente a la original que satisface i) y ii). Ésta norma restringida al álgebra A es la buscada. ■

Notas 1.1.10.

(1) A lo largo del trabajo consideraremos álgebras *reales* ó *complejas* si su campo de escalares son los numeros reales ó complejos respectivamente.

(2) Sea A un álgebra de Banach sin unidad y definamos $A[e] := \{(x, \alpha) : x \in A, \ \alpha \in \mathbb{C}\}$, llamada la *unización* de A, dotado con las operaciones puntuales y la multiplicación

$$(x, \alpha)(y, \beta) := (xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta),$$

y la norma extendida de A dada por

$$||(x, \alpha)|| := ||x|| + |\alpha|; \quad e = (0, 1)$$

Se puede probar fácilmente que la unización $A[e]$ de A es un álgebra de Banach.

La aplicación $x \mapsto (x, 0)$ es un isomorfismo isométrico de A sobre un subespacio de $A[e]$, y así A es una subálgebra cerrada de $A[e]$.

(3) Denotemos por $B(A[e])$ al álgebra de todos los operadores lineales y acotados en el álgebra $(A[e], ||\cdot||)$. Entonces $A[e]$ es una subálgebra cerrada de $B(A[e])$. La norma $|\cdot|$ en $A[e]$ equivalente a la original $||\cdot||$ es la norma operador en $A[e]$ restringida a A; es decir,

$$|x| = (||(x,0)||_e)_{op(e)} = \sup_{||y||+|\beta|\leq 1} ||xy + \beta x||$$

Con $op(e)$ nos referimos a la norma operador en $A[e]$. Notemos simplemente que esta norma incluye una componente escalar extra que proviene de fuera del álgebra A la cual la hace menos atractiva. Para el álgebra unitizada podemos aplicar el teorema anterior.

(4) Observemos que la unización para el caso de álgebras sin unidad es necesaria, ya que de otro modo la función $\varphi : A \to B(A)$, dada por $x \mapsto T_x$ no necesariamente es un isomorfismo algebraico, no habiendo relación entre $||\cdot||$ y $||\cdot||_{op}$. Por ejemplo, si hacemos $xy = 0$, para todo $x, y \in A$, donde A es un álgebra de Banach con la multiplicación trivial, entonces es claro que $T_x = 0$ para todo $x \in A$.

De este modo, si A es un álgebra con o sin unidad, el teorema anterior es válido, tomando al álgebra como tal si tiene unidad y su unización si carece de la misma.

(5) La unización suele, en algunos casos, complicar la situación. En este sentido se puede encontrar una norma equivalente a $(||(\cdot, 0)||_e)_{op(e)}$, en la que sólo aparecen elementos del álgebra A. Ésta es

$$||x||_M = \text{máx}\{||x||, ||x||_{op}\}, \quad x \in A$$

Esta norma puede utilizarse para demostrar el teorema anterior y en particular, la norma $(||(\cdot, 0)||_e)_{op(e)}$, proveniente de la unización, es equivalente a $||\cdot||_M$, lo cual se sigue de las desigualdades

$$||\cdot||_M \leq (||(\cdot,0)||_e)_{op(e)} \leq ||\cdot|| + ||\cdot||_{op} \leq 2||\cdot||_M$$

De esta manera, al hacer uso de la norma $||\cdot||_M$ en lugar de $(||(\cdot,0)||_e)_{op(e)}$ podemos evitar el escalar extra que define esta norma.

(6) Por las observaciones anteriores en este trabajo **siempre consideraremos álgebras con unidad** e**.**

Ejemplos 1.1.11. Álgebras normadas y álgebras de Banach

(1) El espacio de todos los polinomios $\mathbb{P}[X]$ en una variable $x \in X$ con la norma $\|p\| = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |p(x)|$. Es un álgebra normada no completa, conmutativa y con unidad. Por el teorema de Stone-Weierstrass, su completación es el álgebra de todas las funciones continuas $C[0,1]$ con la norma infinito; es decir, la norma definida por

$$\|f\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

(2) Sea $K \neq \emptyset$ un espacio compacto de Hausdorff y

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{C},\ f \text{ es continua}\}$$

con la norma $||f|| = \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$. Para f y g en $C(K)$ definimos la multiplicación $(fg)(x) := f(x)g(x)$. Entonces $C(K)$ es un álgebra de Banach conmutativa donde la identidad es la función constante 1. Si K es un conjunto finito que consiste de n puntos entonces $C(K) = \mathbb{C}^n$ con la multiplicación coordenada a coordenada.

(3) Sea X un espacio de Banach. Entonces $B(X)$, el álgebra de todos los operadores lineales y acotados sobre X, es un álgebra de Banach con respecto a la norma usual de operadores. Su unidad es la identidad I. Si $dimX = n < \infty$ entonces $B(X)$ es isomorfa al álgebra de todas las matrices complejas nxn. Si $dimX > 1$ entonces $B(X)$ no es conmutativa.

(4) Sea $L_1(-\infty,\infty)$ el espacio de Banach de las funciones absolutamente integrables con la norma

$$||x|| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt$$

La multiplicación está definida como la convolución

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

La convolución es conmutativa y asociativa. Además, la norma es sub-multiplicativa:

$$\begin{aligned}
\|x * y(t)\| &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau \Big| dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)||y(\tau)|d\tau dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |y(\tau)| \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)|dt d\tau \\
&= \|x\| \, \|y\|
\end{aligned}$$

$L_1(-\infty, \infty)$ es un álgebra de Banach que no tiene unidad puesto que la función $f = 1$ no es integrable.

Para más ejemplos de álgebras de Banach véase [17].

Denotemos por $G(A)$ al conjunto de elementos invertibles de A.
El siguiente teorema es quizás uno de los resultados más utilizados en la teoría de las álgebras de Banach.

Teorema 1.1.12. *Sea A un álgebra de Banach, $x \in A$ y $||x|| < 1$. Entonces $(e - x) \in G(A)$.*

Demostración: Como $||x^n|| \leq ||x||^n$ y $||x|| < 1$ entonces

$$s_n = e + x + x^2 + ... + x^n$$

forma una sucesión de Cauchy en A, y como es completa, existe $s \in A$ tal que $s_n \to s$. Puesto que $x^n \to 0$ y $s_n(e - x) = e - x^{n+1} = (e - x)s_n$, la continuidad de la multiplicación en A implica que

$$s(e - x) = \lim_{n\to\infty} (e - x^{n+1}) = e.$$

Análogamente, $(e - x)s = e$. Por lo tanto, s es el inverso de $(e - x)$. ∎

En cuanto a las propiedades de los elementos invertibles tenemos

Proposición 1.1.13. *Sea A un álgebra de Banach. Entonces $G(A)$ es abierto y la aplicación $\varphi : G(A) \to G(A)$ dada por $x \mapsto x^{-1}$ es continua.*

Demostración: Por el teorema anterior tenemos que los elementos del conjunto $U = \{x \in A : ||e - x|| < 1\}$ son invertibles. Sea $x \in G(A)$ arbitrario. La aplicación $y \mapsto xy$ es un homeomorfismo de A sobre si mismo. Luego, xU es abierto en A el cual consiste de elementos invertibles y contiene a x puesto que $e \in U$. Así, cualquier elemento invertible tiene una vecindad que consiste estrictamente de elementos invertibles.
Demostremos ahora que la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es continua. Supongamos que $x \in G(A)$. Si $y = e - x$ entonces $x = e - y$, y por lo tanto

$$x^{-1} = (e - y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n$$

Luego, tenemos que si $\|e - x\| < \frac{1}{2}$ entonces

$$\|x^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

y

$$\|x^{-1} - e\| = \|x^{-1} - x^{-1}x\| \leq \|x^{-1}\| \; \|e - x\| \leq 2\|e - x\|$$

Así, si x tiende a e entonces x^{-1} también.

Ahora, si $\|y - x\| < \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$ entonces

$$\|yx^{-1} - e\| = \|yx^{-1} - xx^{-1}\| \leq \|y - x\| \; \|x^{-1}\| < \frac{1}{2}$$

Esto implica que $(yx^{-1}) \in G(A)$ y por lo tanto, $y \in G(A)$.

Como $(yx^{-1})^{-1} = xy^{-1}$ entonces $\|xy^{-1}\| < 2$ y $\|xy^{-1} - e\| < 2\|yx^{-1} - e\|$. Luego,

$$\|y^{-1} - x^{-1}\| = \|x^{-1}xy^{-1} - x^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \; \|xy^{-1} - e\| \leq 2\|x^{-1}\|^2 \|y - x\|$$

■

Sin embargo, podemos eliminar la completitud como lo muestra el siguiente

Corolario 1.1.14. *Si la norma* $\|\cdot\|$ *satisface la desigualdad multiplicativa*

$$||xy\| \leq \|x\| \ \|y\|, \quad \textit{para todo } x, y \in A$$

entonces la aplicación $\varphi : G(A) \to G(A)$ *dada por* $x \mapsto x^{-1}$ *es continua.*

Demostración: Primero se completa A a $\widehat{A}$ y ahí la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es continua. Esta función restringida a A es continua. ∎

Uno de los teoremas más importante en las álgebras de Banach es el teorema de Gelfand-Mazur, el cual nos permite, entre otras cosas, caracterizar las álgebras de división.

Teorema 1.1.15. *Sea* A *un álgebra de Banach compleja en la cual cada elemento distinto de cero es invertible. Entonces* A *es isométricamente isomorfa a* $\mathbb{C}$*.*

Demostración: Es suficiente mostrar que cada elemento $x \in A$ tiene la forma $x = \lambda e$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Supongamos que no es así. Es decir, existe $x \neq \lambda e$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $(x - \lambda e) \neq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego, $(x - \lambda e)^{-1}$ existe para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea f un funcional lineal continuo en A tal que $f(x^{-1}) \neq 0$. Definamos la función compleja

$$\varphi(\lambda) = f[(x - \lambda e)^{-1}]$$

Probemos que φ es analítica, por lo tanto, entera por su dominio.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f[(x - ((\lambda + h)e)^{-1}] - f[(x - \lambda e)^{-1}]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f\left[\frac{h(x - \lambda e)^{-1}(x - (\lambda + h)e)^{-1}}{h}\right]
\end{aligned}$$

el cual existe ya que la aplicación x^{-1} es continua en A por la proposición anterior. Además,

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} f\left[\left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1}\right], \quad \text{para todo } \lambda \neq 0,$$

y como $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} (\frac{x}{\lambda} - e)^{-1} = -e$, entonces $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} |\varphi(\lambda)| = 0$. Por el teorema de Liouville, $\varphi(\lambda) = 0$ lo cual es una contradicción ya que $\varphi(0) = f(x^{-1}) \neq 0$. Por lo tanto, $x = \lambda e$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, Así, $x \mapsto \lambda(x)$ es un isomorfismo isométrico. ∎

1.2. Espectro e Ideales en álgebras normadas y álgebras de Banach

Vamos ahora a definir y estudiar el espectro y sus propiedades, así como resultados sobre ideales en álgebras normadas y álgebras de Banach. En particular, veremos la correspondencia uno a uno que existe entre los ideales máximos y los núcleos de funcionales lineales multiplicativos en un álgebra de Banach.

Definición 1.2.1. Sea A un álgebra topológica. Para un elemento $x \in A$ definimos *el espectro* de x como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - x) \text{ no es invertible en A}\}$$

El radio espectral de $x \in A$ como el número

$$R(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

si $\sigma(x)$ es acotado, ó $R(x) = \infty$ si no lo es.

El espectro tiene, entre otras propiedades, la siguiente

Proposición 1.2.2. *Sea A un álgebra de Banach. Entonces para cada elemento $x \in A$, $\sigma(x) \neq \emptyset$ y compacto.*

Demostración: Veamos inicialmente que $\sigma(x)$ es compacto. Si $|\lambda > ||x||$ entonces $||\frac{x}{\lambda}|| < 1$ lo que implica que $(e - \lambda^{-1}x) \in G(A)$, por el teorema (1.1.12). Luego, $\lambda \notin \sigma(x)$ y por lo tanto, el espectro $\sigma(x)$ es un subconjunto de $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq ||x||\}$. Es decir, $\sigma(x)$ es acotado. Resta probar que es cerrado. Definamos la función $g : \mathbb{C} \to A$ por $g(\lambda) = (\lambda e - x)$. Entonces g es una función continua y el complemento del espectro es $g^{-1}(G(A))$ que es abierto por la proposición (1.1.13). Por lo tanto, $\sigma(x)$ es cerrado.
El mismo argumento utilizado en la prueba del teorema de Gelfand-Mazur nos muestra que $\sigma(x) \neq \emptyset$, ya que en caso contrario $(\lambda e - x)$ sería invertible para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y entonces $(\lambda e - x) \neq 0$. Luego, existiría un funcional lineal y continuo f tal que $f(x^{-1}) \neq 0$ y se sigue lo mismo para la función φ definida como $\varphi(\lambda) = f[(x - \lambda e)^{-1}]$ en dicho teorema. ■

En las álgebras normadas también se tiene el teorema Gelfand-Mazur.

Proposición 1.2.3. *Sea A un álgebra normada de división. Entonces A es isométricamente isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Demostración: Como A es normada entonces la podemos completar a $\widehat{A}$. Para todo $x \in \widehat{A}$, $\sigma_{\widehat{A}}(x) \neq \emptyset$ y $\sigma_{\widehat{A}}(x) \subset \sigma_A(x)$. Entonces en un álgebra normada $\sigma_A(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in A$. Por hipótesis $e \in A$ y para todo $x \in A$, $x \neq 0$, x es invertible en A. Esto implica que $0 \notin \sigma_A(x)$ para todo $x \neq 0$. Pero como $\sigma_A(x) \neq \emptyset$ entonces existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \in \sigma_A(x)$. Luego, $(x - \lambda e) \notin G(A)$ de donde $(x - \lambda e) = 0$. Es decir, $x = \lambda$ y por lo tanto, A es isomorfa a $\mathbb{C}$. ∎

Corolario 1.2.4. *Sea A un álgebra normada. Cada ideal máximo bilateral cerrado $M \subset A$ es de codimensión uno.*

Demostración: Sea $M \subset A$ un ideal máximo bilateral cerrado. M es un subespacio vectorial. Entonces A/M es un álgebra normada que es un anillo de división. Por el teorema anterior $A/M \cong \mathbb{C}$. ∎

Proposición 1.2.5. *Sea A un álgebra de Banach. Entonces cada ideal máximo bilateral de A es cerrado.*

Demostración: Sea M un ideal máximo bilateral del álgebra A. Entonces $M \cap G(A) = \emptyset$ y puesto que $G(A)$ es abierto, $\overline{M} \cap G(A) = \emptyset$. Así, $\overline{M}$ es un ideal propio de A y por ser M máximo se tiene que $M = \overline{M}$. ∎

Teorema 1.2.6. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa y*

$$H = \{f : A \to \mathbb{C},\ f \text{ es un funcional lineal y multiplicativo no nulo}\}$$

Entonces

(1) Si $f \in H$ entonces el núcleo de f, $Z(f) = \{x \in A : f(x) = 0\}$, es un ideal máximo de A.

(2) Cada ideal máximo de A es el núcleo de algún $f \in H$.

Demostración: (1) Si $f \in H$ entonces $Z(f)$ es un subespacio lineal de A, $Z(f) \neq A$. Si $y \in (A \setminus Z(f))$ entonces la envolvente lineal de $Z(f) \cup \{y\}$ es A, ya que $\left(a - \frac{f(a)}{f(y)}y\right) \in Z(f)$. Tenemos además que $f(ax) = f(xa) = f(a)f(x) = 0$, $a \in A$, $x \in Z(f)$. Por tanto, $Z(f)$ es un ideal máximo bilateral.

(2) Sea $M \subset A$ un ideal máximo. Entonces M es cerrado y así el álgebra cociente A/M es un álgebra de Banach de división. Por el teorema de Gelfand-Mazur, $A/M \cong \mathbb{C}$. Luego, el homomorfismo $A \to A/M$, que denotaremos como f_M, define un funcional lineal multiplicativo en A y $Z(f_M) = M$. ∎

Así, tenemos una correspondencia uno a uno entre los ideales máximos cerrados de A y sus funcionales lineales multiplicativos dada por

$$f \leftrightarrow Z(f) \qquad (M \leftrightarrow f_M)$$

Puesto que los ideales máximos de un álgebra de Banach A son cerrados y ellos son precisamente los núcleos de funcionales lineales multiplicativos en A, entonces tenemos el siguiente

Teorema 1.2.7. *Cada funcional lineal multiplicativo en un álgebra de Banach es continuo.*

Corolario 1.2.8. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces existe al menos un funcional lineal multiplicativo y continuo.*

Demostración: Si A es el campo de los números complejos entonces la identidad es tal funcional. Si A no es un campo entonces existe un elemento $x \in A \setminus \{0\}$ que no es invertible y el conjunto xA es un ideal el cual está contenido en un ideal máximo. Así, el álgebra A tiene un ideal máximo, o equivalentemente, A tiene un funcional lineal multiplicativo y continuo. ■

Denotaremos por $\mathcal{M}(A)$ al conjunto de todos los funcionales lineales multiplicativos y continuos sobre A.

Nota 1.2.9. Sea A un álgebra normada. Entonces $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(\widehat{A})$, donde $\widehat{A}$ es la completación de A. En efecto, sea $f : A \to \mathbb{C}$ lineal, multiplicativo y continuo. Como A es densa en $\widehat{A}$ entonces podemos extender continuamente f sobre $\widehat{A}$.

Proposición 1.2.10. *Sea A un álgebra normada conmutativa. Cada ideal cerrado de A está contenido en un ideal máximo cerrado.*

Demostración: Sea $I \subset A$ un ideal cerrado. Entonces A/I es un álgebra normada conmutativa y por lo tanto, $\mathcal{M}(A/I) \neq \emptyset$. Sea $f \in \mathcal{M}(A/I)$. Si $\pi : A \to A/I$ es el homomorfismo canónico entonces $F(x) = f(\pi(x))$ es un miembro de $\mathcal{M}(A)$ e $I \subset F^{-1}(0) = Z(f \circ \pi)$. ■

Definición 1.2.11. Decimos que un álgebra topológica A es una $Q-$*álgebra* si $G(A)$ es un conjunto abierto de A.

En una $Q-$álgebra normada se tiene

Proposición 1.2.12. *Sea A una $Q-$álgebra normada conmutativa. Entonces*

$$\sigma(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\}$$

Demostración: Sea $\lambda \in \sigma(x)$. Entonces $(x-\lambda e) \notin G(A)$ lo que implica que existe un ideal máximo cerrado M de codimensión uno tal que $A(x-\lambda e) \subset M$. Así, existe $f \in \mathcal{M}(A)$ tal que $f(x-\lambda e) = 0$ y por lo tanto, $f(x) = \lambda$, de donde $\lambda \in \{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\}$. Si $f(x) = \lambda$ entonces $(x-\lambda e) \notin G(A)$, así que $\{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\} \subset \sigma(x)$. ■

En álgebras normadas, como por ejemplo $(\mathbb{P}(X);\ ||p|| = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |p(x)|)$, el espectro de un polinomio no constante es todo el plano complejo. Por lo tanto, no tenemos un resultado análogo al anterior. Sin embargo, modificando un poco el espectro en ellas tenemos la siguiente

Proposición 1.2.13. *Sea A un álgebra normada conmutativa. Entonces*

$$\widetilde{\sigma}(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(x-\lambda e)A} \text{ es propio en } A\} = \{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\}$$

Demostración: Sea $\lambda \in \widetilde{\sigma}(x)$. Entonces $\overline{(x-\lambda e)A} \subset M$, un ideal máximo cerrado de codimensión uno. Así, existe $f \in \mathcal{M}(A)$ tal que $f(x-\lambda e) = 0$, de donde, $\lambda \in \{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\}$. Veamos la otra inclusión. Observemos que $(f(x)e - x) \in ker(f)$ que es un ideal máximo cerrado. Luego, como $(f(x)e - x) \notin G(A)$ entonces $\overline{(f(x)e-x)A} \subseteq ker(f)$ lo que implica que el ideal $\overline{(f(x)e-x)A}$ es propio en A. ■

Toda álgebra de Banach es $Q-$álgebra (prop. (1.1.13)). Existen $Q-$álgebras normadas que no son completas, como lo podemos ver en el siguiente

Ejemplo 1.2.14. Denotemos por $D_1(0)$ el disco cerrado unitario con centro en el origen y sea B el conjunto que consiste de todas las funciones holomorfas definidas sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ (que depende de cada función) y contiene al disco anterior.
Definamos las normas

$$||f||_1 = \max_{|z|\leq 1} |f(z)| \quad y \quad ||f||_2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|;$$

donde $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Entonces $(B, ||\cdot||_2)$ es un álgebra normada y es claro que $||f||_1 \leq ||f||_2$. Observemos que $f \in B$ es invertible si $f(z) \neq 0$ para todo

$z \in \Omega$.

Demostremos que B es una $Q-$álgebra. En efecto, si $||f-1||_2 < 1$, f holomorfa en $D_1(0)$, entonces $||f-1||_1 < 1$ lo que implica que $|f(z)| > 0$, para todo $z \in D_1(0)$. Más aún, $|f(z)| > 0$ para todo z en un disco abierto que contiene al disco unitario. Por lo tanto, f es invertible. Es decir, existe una función $g \in B$ tal que $f(z)g(z) = 1$, para todo $z \in \overline{D_1(0)}$. Así, B es una $Q-$álgebra (véase [15]).

Sin embargo, B no es completa puesto que la función $h(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge sólo en $\overline{D_1(0)}$. Es decir, $h \notin B$.

Definición 1.2.15. Decimos que un elemento x de un álgebra topológica A es *topológicamente invertible* si $\overline{xA} = \overline{Ax} = A$. Es decir, existen dos redes $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ y $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ en A tal que $a_\gamma x \to e$ y $xb_\gamma \to e$. El conjunto de elementos topológicamente invertibles de A lo denotaremos por $G_t(A)$. Se dice que A es una Q_t-álgebra si $G_t(A)$ es abierto.

De la definición anterior podemos observar que $G(A) \subset G_t(A)$.

En [6] se obtiene la equivalencia $(1)-(3)$ de la siguiente proposición. Nosotros tenemos además (4).

Proposición 1.2.16. *Sea A un álgebra topológica. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) A es Q_t-álgebra.

(2) $intG_t(A) \neq \emptyset$.

(3) $e \in intG_t(A)$

(4) $B = \{x \in A : R_t(x) \leq 1\}$ es una vecindad del cero; donde

$$R_t(x) = \sup\{|\lambda| : (\lambda e - x) \notin G_t(A)\}$$

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2) Por definición de Q_t-álgebra.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $a \in intG_t(A)$. Entonces existe una vecindad de cero V tal que $a+V \subset G_t(A)$. Por continuidad de la multiplicación en A existe una vecindad de cero U tal que $aU \subset V$ y $Ua \subset V$. Entonces $a(e+U) \subset a+V \subset G_t(A)$

y $(e+U)a \subset a+V \subset G_t(A)$. Esto implica que existen redes $(a_\gamma(U))_{\gamma\in\Gamma}$ y $(b_\gamma(U))_{\gamma\in\Gamma}$ en A tales que $(a_\gamma(U))[a(e+U)] \to e$ y $[(e+U)a](b_\gamma(U)) \to e$. Por lo tanto, $(e+U) \subset G_t(A)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Como $e \in intG_t(A)$ entonces existe una vecindad V de cero balanceada tal que $e+V \in G_t(A)$. Debemos probar que $V \in B$. Si no fuera así existiría $x \in V$ con $R_t(x) > 1$, y $\lambda \in \sigma_t(x)$, $|\lambda| > 1$, tal que $(\lambda e - x) \notin G_t(A)$; donde

$$\sigma_t(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - x) \notin G_t(A)\}$$

Luego, $(e - \frac{x}{\lambda}) \notin G_t(A)$. Como V es balanceada y $|\lambda| > 1$ entonces $-\frac{x}{\lambda} \in V$, de donde $(e - \frac{x}{\lambda}) \in e+V \subset G_t(A)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V \subset G_t(A)$ lo que implica que B es una vecindad del cero.

(4) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $0 \in intB$ y sea $V = \frac{1}{2}B$. V es una vecindad de cero. Supongamos que $e+V \nsubseteq G_t(A)$. Entonces existe $x \in V$ tal que $(e+x) \notin G_t(A)$. Como $x = \frac{1}{2}y$, para $y \in B$, entonces $(e+\frac{1}{2}y) \notin G_t(A)$, $(2e-y) \notin G_t(A)$ lo que implica que $R_t(y) \geq 2$. Pero por hipótesis $R_t(y) \leq 1$. Por lo tanto, $(e+V) \in G_t(A)$. Esto es, A es Q_t-álgebra. ■

La prueba del siguiente resultado es completamente análoga a la anterior.

Proposición 1.2.17. *Sea A un álgebra topológica. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) A es $Q-$álgebra.

(2) $intG(A) \neq \emptyset$.

(3) $e \in intG(A)$.

(4) $B = \{x \in A : R(x) \leq 1\}$ es una vecindad del cero.

De aquí podemos probar la siguiente

Proposición 1.2.18. *Sea A una $Q-$álgebra. Entonces $\sigma(x)$ es un conjunto compacto de $\mathbb{C}$ para cada $x \in A$.*

Demostración: Supongamos que A es una $Q-$álgebra y $\sigma(x)$ no es cerrado. Entonces existe un $\lambda \in \overline{\sigma(x)} \setminus \sigma(x)$. Esto implica que $(x - \lambda e) \in G(A)$. Pero como $\lambda \in \overline{\sigma(x)}$ entonces existe una red $(\lambda_\gamma) \subset \sigma(x)$ tal que $\lambda_\gamma \to \lambda$.

Luego, $(x-\lambda_\gamma e) \to (x-\lambda e)$ lo cual no es posible por ser A una $Q-$álgebra.

Demostremos que $\sigma(x)$ es acotado para cada $x \in A$. Por la observación anterior $e \in intG(A)$. Por lo tanto, existe una vecindad V de cero absorbente y balanceada tal que $e+V \subset G(A)$. Por ser V absorbente existe $\lambda > 0$ tal que para todo $\mu > \lambda$, y para todo $x \in A$, $-\frac{x}{\mu} \in V$, de donde se tiene que $(e-\frac{x}{\mu}) \in e+V \subset G(A)$. Luego, $(\mu e - x) \in G(A)$ lo que implica que $R(x) \leq \lambda$. ■

Existen álgebras normadas que no son $Q-$álgebras, como por ejemplo $A = (\mathbb{P}(X);\ ||p|| = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |p(x)|)$, ya que $\sigma(p(x)) = \mathbb{C}$ para todo polinomio no constante $p(x)$. Por la proposición anterior, A no es una $Q-$álgebra. Sin embargo, (véase [6], prop. (2.6))

Proposición 1.2.19. *Toda álgebra normada A es una Q_t-álgebra.*

Demostración: Por la proposición (1.2.16) es suficiente probar que el conjunto $U = \{x \in A : \|e-x\| < 1\} \subset G_t(A)$. Sea $x \in A$ con $\|e-x\| < 1$ y hagamos $y = e-x$. Cláramente $y \in U$. La sucesión $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} y^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que

$$\|(e-y)\sum_{k=0}^{n} y^k - e\| = \|y^{n+1}\| \leq \|y\|^{n+1} < 1$$

Por lo tanto, $\|(e-y)\sum\limits_{k=0}^{n} y^k - e\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así, $x = (e-y) \in G_t(A)$. ■

Proposición 1.2.20. *Sea A un álgebra normada. Todos los ideales máximos de A son cerrados si y sólo si A es una $Q-$álgebra.*

Demostración: $\Rightarrow$) Sea $x \in G_t(A) \setminus G(A)$. Esto implica que el ideal generado por x, xA, es denso en A. Es decir, $\overline{xA} = A$. Entonces existe un ideal máximo cerrado $M \subset A$ tal que $xA \subset M$. Pero $xA \subset \overline{xA} = A$ lo que implica que $M = A$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $G_t(A) = G(A)$ de donde se tiene que A es una $Q-$álgebra.

$\Leftarrow$) Sea $M \subset A$ un ideal máximo. Veamos que es cerrado. Por hipótesis $G(A)$ es abierto lo que implica que $M \cap G(A) = \emptyset$ y también $\overline{M} \cap G(A) = \emptyset$. Por lo tanto, $\overline{M} \subset (G(A))^c$ que es cerrado. Luego, $\overline{M}$ es propio y por ser M máximo, $\overline{M} = M$. ■

1.3. Propiedades del Radio Espectral

En las álgebras de Banach, y en general en la normadas, el $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ existe como lo podemos ver en la siguiente (véase [13], teo. (1.4.4))

Proposición 1.3.1. *Sea A un álgebra normada. Si $x \in A$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ existe y además*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

Corolario 1.3.2. *Sea A un álgebra normada. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \|x\|$$

En un álgebra de Banach podemos calcular el radio espectral de la siguiente manera (véase [9])

Proposición 1.3.3. *Sea A un álgebra de Banach. Entonces para $x \in A$,*

$$R(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

Demostración: Si $\lambda \in \sigma(x)$ entonces $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. En efecto, observemos que

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1} e + \lambda^{n-2} ex + ... + x^{n-1})$$

Si $(\lambda^n e - x^n)$ fuera invertible entonces $(\lambda e - x)$ también. Además, $|\lambda^n| = |\lambda|^n \leq \|x^n\|$, $n = 1, 2, ...$ Por lo tanto, $|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, para $n = 1, 2, ...$ y así $|\lambda| \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$. Es decir, $R(x) \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

Veamos la otra desigualdad. Sea $r := \lim_{n} \sqrt[n]{||x^n||}$. Para cada $f \in A'$, el dual topológico de A, la serie

$$\varphi(\lambda) := f[(\lambda e - x)^{-1}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}$$

converge para $|\lambda| > r$. Por lo tanto, la serie anterior es la serie de Laurent de la función φ para $|\lambda| > R(x)$, la cual es holomorfa en $|\lambda| \geq R(x)$. Luego, $\frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}} \to 0$ y entonces existe $K(f) > 0$ tal que $|\frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}| \leq K(f)$ para cada $f \in A'$. Así, existe una constante $M > 0$ tal que $\|\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\| \leq M$, para todo n, de donde

$$r = \lim_{n} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \lim_{n} \sqrt[n]{M|\lambda^{n+1}|} = |\lambda|.$$

Por lo tanto, $|\lambda| \geq r$. De esta manera si $|\lambda| > R(x)$ entonces $r \leq R(x)$. ∎

En el caso conmutativo tenemos

Proposición 1.3.4. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces*

$$R(x) = \sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{M}(A)\}$$

Demostración: Basta probar que $\sigma(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\}$ por la proposición (1.2.12). Sea $\lambda \in \sigma(x)$ entonces $(\lambda e - x) \notin G(A)$ lo que implica que existe un ideal M máximo cerrado de codimensión uno tal que $(\lambda e - x) \in M$. De esta manera existe un funcional lineal y multiplicativo f tal que $f(\lambda e - x) = 0$. Luego, $f(x) = \lambda$ y por tanto, $\lambda \in \{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\}$. Inversamente, si $f(x) = \lambda$ entonces $(\lambda e - x) \notin G(A)$ ya que en caso contrario existiría $y \in A$ tal que $(\lambda e - x)y = e$ y se tendría que $f(\lambda e - x)f(y) = f(e) = 1$, de donde $f(x) - \lambda \neq 0$ lo cual es una contradicción. ■

El siguiente resultado puede encontrarse en [9], teorema (5.7). Nos afirma que en un álgebra normada no tenemos la igualdad de la proposición (1.3.3).

Teorema 1.3.5. *Sea A un álgebra normada compleja. Entonces para $x \in A$,*

$$R(x) \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||x^n||}$$

Sin embargo, para $Q-$álgebras tenemos

Proposición 1.3.6. *Sea A un álgebra normada. A es $Q-$álgebra si y sólo si*

$$R(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||x^n||} = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{||x^n||}$$

Demostración: $\Rightarrow$) Resta probar que $R(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{||x^n||}$ por el teorema anterior y la proposición (1.3.1). Como A es una $Q-$álgebra entonces

$$\{y \in A : ||y|| < \epsilon < 1\} \subset \{y \in A : R(y) \leq 1\}$$

Supongamos que $||y|| \neq 0$. Si $||y|| < \epsilon$ entonces $R(y) < 1$. Tenemos que $R(\lambda y) = |\lambda| R(y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Así, $R(\epsilon \frac{y}{||y||}) < 1$ lo que implica que $R(y) < \frac{1}{\epsilon}||y||$. Luego, $\sup\limits_{||y||=1} R(y) \leq \frac{1}{\epsilon} < \infty$. Si $||\gamma y|| = 0$ para todo $\gamma \in \mathbb{C}$, entonces $R(\gamma y) \leq 1$, de donde $R(y) \leq \frac{1}{\gamma} \to 0$ cuando $|\gamma| \to \infty$.
Sea $|\lambda| > R(x^n)$. Entonces $(\lambda e - x^n) \in G(A)$. Definiendo $\alpha := \sqrt[n]{\lambda}$ tenemos que

$$(\lambda e - x^n) = (\alpha^n e - x^n) = (\alpha e - x)(\alpha^{n-1}e + \alpha^{n-2}ex + ... + x^{n-1})$$

Luego, $(\alpha e - x) \in G(A)$, de donde, $(\sqrt[n]{\lambda}e - x) \in G(A)$. Esto implica que $\sqrt[n]{\lambda} \geq R(x)$, $|\lambda| \geq (R(x))^n$. Por lo tanto, $R(x^n) \geq (R(x))^n$. Así

$$(R(x))^n \leq R(x^n) \leq \sup_{||y||=1} R(y)\ ||x^n||$$

lo cual equivale a que $R(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{||x^n||}$.

$\Leftarrow$) Como $R(x) \leq ||x||$, para todo $x \in A$, entonces

$$\{x \in A : ||x|| \leq 1\} \subset \{x \in A : R(x) \leq 1\}$$

Es decir, el conjunto $\{x \in A : R(x) \leq 1\}$ es una vecindad de cero, y por lo tanto, A es una $Q-$álgebra. ■

Recordemos que la *transformada de Gelfand*, que denotamos por $\widehat{x}$, es una aplicación lineal de $\mathcal{M}(A)$ en $\mathbb{C}$ definida como $\widehat{x}(f) = f(x)$. También se tiene que para cada x en un álgebra topológica A, $\widehat{x}(\mathcal{M}(A)) \subset \sigma(x)$. Si A es un álgebra de Banach entonces tenemos la igualdad.

En [15] se caracterizan las $Q-$álgebras normadas. Tenemos el siguiente resultado que las caracteriza vía la transformada de Gelfand.

Proposición 1.3.7. *Sea A un álgebra normada conmutativa. A es una $Q-$álgebra si y sólo si*

$$R(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \widehat{x}(\mathcal{M}(A))\}$$

Demostración: $\Leftarrow$) Como $\lambda \in \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$ entonces $\lambda = f(x)$ para alguna $f \in \mathcal{M}(A)$, y por lo tanto, $|\lambda| = |f(x)| \leq ||f||\ ||x|| \leq ||x||$. Por ([15], $(Q_4^{'})$), A es una $Q-$álgebra.

$\Rightarrow$) Por la proposición (1.2.12). ■

Nota 1.3.8. Existen álgebras de Banach no conmutativas sin funcionales lineales multiplicativos. Sea $A = M_{nxn}$ el álgebra de las matrices nxn reales ó complejas. Denotemos a las matrices canónicas por A_{ij} y su ij-ésima entrada por a_{ij}. Para el caso $n = 2$ tenemos:

$$\mathbf{A_{11}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_{12}} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A_{21}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix};$$

donde $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 1$. Entonces

$$A_{12}A_{21} + A_{21}A_{12} = a_{11} + a_{22} = I; \quad A_{12}^2 = A_{21}^2 = 0$$

Luego, $A = M_{2x2}$ no tiene funcionales lineales multiplicativos ya que en caso contrario $f(A_{12})f(A_{12}) = f(A_{12}^2) = 0$ lo que implica que $f(A_{12}) = 0$. Análogamente, $f(A_{21}) = 0$. Pero

$$f(A_{12}A_{21} + A_{21}A_{12}) = f(I) = 1 \Leftrightarrow 2f(A_{12})f(A_{21}) = 1 \Leftrightarrow 0 = 1,$$

lo cual es una contradicción.
En el caso general utilizando la misma notación anterior obtenemos una combinación (no única)

$$A_{12}A_{21} + A_{23}A_{32} + ... + A_{n-1n}A_{nn-1}A_{n1}A_{1n} = I; \quad A_{ij}^2 = 0,$$

para todo $i, j = 1, 2, ..., n$. Así, el álgebra A no posee funcionales lineales multiplicativos. El radio espectral lo podemos calcular sólo como

$$R(x) = \lim_n \sqrt[n]{\|x^n\|},$$

donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma sobre A (todas ellas son equivalentes).
Sin embargo, el álgebra de matrices nxn triangulares superiores o inferiores es un álgebra de Banach no conmutativa con n funcionales lineales multiplicativos definidos por $f(A_{ij}) = a_{ii}$.

En un álgebra de Banach el radio espectral tiene otras propiedades como:

Proposición 1.3.9. *Sea A un álgebra de Banach.*

(1) Si $(\frac{x}{\lambda})^n \to 0$ entonces $|\lambda| \geq R(x)$.

(2) Si $(\frac{x}{\lambda})^n \to 0$ entonces $(\lambda e - x)\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{\lambda^{k+1}} \to e$

(3) Si $|\lambda| > R(x)$ entonces $(x - \lambda e)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$

(4) Si $|\lambda| = R(x)$ entonces $(\frac{x}{\lambda})^n \nrightarrow 0$

Demostración: (1) Como $(\frac{x}{\lambda})^n \to 0$ entonces el conjunto $\{(\frac{x}{\lambda})^n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. Luego, existe $M > 0$ tal que

$$\left\| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\| \leq M \Leftrightarrow \|x^n\| \leq M|\lambda|^n \Leftrightarrow R(x) = \lim_n \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq |\lambda|.$$

(2) Es claro ya que

$$(\lambda e - x)\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{\lambda^{k+1}} = e - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n+1}$$

Sin embargo, $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{\lambda^{k+1}}$ puede no ser Cauchy.

(3) Como $R(x) = \lim\limits_n \sqrt[n]{\|x^n\|}$ entonces existe N tal que para todo $n \geq N$, $\sqrt[n]{\|x^n\|} < |\lambda|$. Así, existe α tal que para $n > N$, $\sqrt[n]{\|x^n\|} < \alpha < |\lambda|$; es decir, $\|x^n\| < \alpha^n < |\lambda|^n$, de donde $\|(\frac{x}{\lambda})^n\| < (\frac{\alpha}{|\lambda|})^n < 1$. Luego,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{|\lambda|}\right)^n$$

Esto implica que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\|$ converge absolutamente y como A es un álgebra completa, converge a $\left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1}$. Por lo tanto,

$$\left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1} = \lambda(\lambda e - x)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \Leftrightarrow (x - \lambda e)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

(4) Si el resultado fuera cierto entonces $(\frac{x}{R(x)})^n \to 0$ lo que implicaría que $\|(\frac{x}{R(x)})^n\| < \epsilon < 1$. Luego, $\|x^n\| < \epsilon(R(x))^n$, para todo $0 < \epsilon < 1$, de donde se tiene que $R(x) = \lim\limits_n \sqrt[n]{\|x^n\|} < R(x)$ lo cual es una contradicción. ■

Cabe anotar que no todos los inversos son de la forma que aparece en (3) como lo muestra el siguiente

Ejemplo 1.3.10. Sea $C([0,1], ||\cdot||_\infty)$ y $f(x) = x$. Entonces $\sigma(f) = [0,1]$ lo que implica que $R(f) = 1$. Si λ es tal que $|\lambda| < 1$ pero $\lambda \notin \sigma(f)$ entonces $\min\limits_{0 \leq x \leq 1} |x - \lambda 1| > 0$ y por tanto, $\frac{1}{x - \lambda 1}$ es el inverso de $x - \lambda 1$. Ahora,

$$\frac{1}{x-\lambda} = -\frac{1}{\lambda - x} = -\frac{1}{\lambda(1 - \frac{x}{\lambda})} = -\frac{1}{\lambda}\frac{1}{(1 - \frac{x}{\lambda})} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n$$

Sin embargo, $\|(\frac{x}{\lambda})^n\|_\infty = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |\frac{x}{\lambda}|^n = \frac{1}{|\lambda|^n} > 1$. Entonces $\lim\limits_{n} \|(\frac{x}{\lambda})^n\|_\infty \to \infty$, de donde se tiene que esta serie no converge para ningún λ, $|\lambda| < 1$ con $\lambda \notin \sigma(f)$.

El mismo ejemplo nos muestra que si $|\lambda| = R(x)$ entonces $(\frac{x}{\lambda})^n \nrightarrow 0$. En efecto, si $\lambda = -1$ entonces $\|(\frac{x}{\lambda})^n\|_\infty = \|(-1)^n x^n\|_\infty = 1 \nrightarrow 0$.
Por lo tanto, en un álgebra de Banach A,

$$R(x) = \inf\left\{|\lambda| : \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \to 0\right\}$$

Definición 1.3.11. Diremos que un álgebra es A-*normada* si existe una constante $M(x) > 0$ tal que $\|xy\| \leq M(x)\|y\|$, para todo $x, y \in A$.

De manera análoga se demuestra un resultado similar al anterior para éstas álgebras y las álgebras normadas.

Proposición 1.3.12. *Sea A un álgebra normada ó un álgebra $A-$normada*

(1) Si $(\frac{x}{\lambda})^n \to 0$ entonces $|\lambda| \geq R(x)$.

(2) Si $(\frac{x}{\lambda})^n \to 0$ entonces $(\lambda e - x)\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{\lambda^{k+1}} \to e$

(3) Si $|\lambda| = R(x)$ entonces $(\frac{x}{\lambda})^n \nrightarrow 0$.

Capítulo 2

Álgebras localmente convexas

Las álgebras localmente convexas y en particular las $m-$convexas has sido ampliamente estudiadas desde los años 1940 por autores como Richard Arens e Israil M. Gelfand, y posteriormente por Wieslaw Żelazko. Las álgebras $m-$convexas tienen propiedades similares a las álgebras de Banach en lo que se refiere al espectro. Esto es debido a que esencialmente toda álgebra $m-$convexa completa es el límite inverso de álgebras de Banach. Así se tiene, entre otras propiedades, que para un elemento x en un álgebra $m-$convexa A, $\sigma(x) \neq \emptyset$; la inversión $x \mapsto x^{-1}$ es una función continua sobre $G(A)$; en A se tiene un teorema de Gelfand-Mazur. Por su parte, las álgebras localmente convexas no tienen en general estas propiedades.
En este capítulo estudiamos algunos elementos de la teoría de las álgebras $m-$convexas, el radio de acotación definido por G.R. Allan y el radio espectral extendido definido por W. Żelazko.

2.1. Definiciones y ejemplos

Definición 2.1.1. Un álgebra topológica A es *localmente convexa* si su estructura de espacio vectorial topológico es localmente convexo.

La topología en tales álgebras puede ser dada por medio de una familia de seminormas $(||\cdot||_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ tales que para cada índice α existe un índice β tal que para todo x, y en A

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta \tag{2.1}$$

En efecto, sea $\{U\}$ una base de vecindades convexas y balanceadas de cero en A. Para cada U definimos la funcional de Minkowski $\rho_U : A \to \mathbb{C}$ como sigue

$$\rho_U(x) = \text{ínf}\{t > 0 : \frac{x}{t} \in U\}$$

Esta función está bien definida en A puesto que U es balanceada.

Afirmamos que ρ_U es una seminorma submultiplicativa en A.

1. $\rho_U \geq 0$ por definición.

2. Para cada $\gamma \in \mathbb{C}$, $\rho_U(\gamma x) = \gamma \rho_U(x)$.
   Sean $\rho_U(\gamma x) = \alpha$ y $\rho_U(x) = \beta$. Entonces

   $$|\lambda| > \alpha \Rightarrow \frac{\gamma x}{\lambda} \in U \Rightarrow \frac{x}{\lambda/\gamma} \in U \Rightarrow |\frac{\lambda}{\gamma}| \geq \beta \Rightarrow |\lambda| \geq |\gamma|\beta \Rightarrow \alpha \geq \beta|\gamma|;$$

   $$|\lambda| > \beta \Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in U \Rightarrow \frac{\gamma x}{\gamma\lambda} \in U \Rightarrow |\gamma\lambda| \geq \alpha \Rightarrow |\gamma|\ |\lambda| \geq \alpha \Rightarrow |\lambda| \geq \frac{\alpha}{|\gamma|}$$

   $$\Rightarrow \beta \geq \frac{\alpha}{|\lambda|} \Rightarrow \beta|\gamma| \geq \alpha$$

   De esta manera tenemos que $|\gamma|\beta = \alpha$, es decir, $\rho_U(\gamma x) = \gamma \rho_U(x)$.

3. Para todo $x, y \in A$, $\rho_U(x+y) \leq \rho_U(x) + \rho_U(y)$
   Sean $\rho_U(x+y) = \alpha$, $\rho_U(x) = \beta$ y $\rho_U(y) = \gamma$. Sean t y s tales que $\frac{x}{t} \in U$ y $\frac{y}{s} \in U$. Entonces $t \geq \beta$ y $s \geq \gamma$. Como

   $$\frac{x}{t+s} = \frac{t}{t+s}\ \frac{x}{t} \quad \text{y} \quad \frac{y}{t+s} = \frac{s}{t+s}\ \frac{y}{s}$$

   tenemos que

   $$\frac{x}{t+s} + \frac{y}{t+s} = \frac{t}{t+s}\ \frac{x}{t} + \frac{s}{t+s}\ \frac{y}{s} \in U$$

   puesto que U es convexa y $\frac{t}{t+s} + \frac{s}{t+s} = 1$. Esto quiere decir que $\frac{x+y}{t+s} \in U$. Luego, $s + t \geq \alpha$ y entonces $\beta + \gamma \geq \alpha$. De esta manera tenemos que $\rho_U(x) + \rho_U(y) \geq \rho_U(x+y)$.

4. Para todo $x, y \in A$, $\rho_{U_\alpha}(xy) \leq \rho_{U_\beta}(x)\ \rho_{U_\beta}(y)$.
   Sea $U_\alpha \in \{U\}$ y $U_\beta \in \{U\}$ tal que $(U_\beta)^2 \subset U_\alpha$. Sean

   $$\rho_{U_\alpha}(xy) = \text{ínf}\{t > 0 : \frac{xy}{t} \in U_\alpha\} = a$$

$$\rho_{U_\beta}(x) = \text{ínf}\{t > 0 : \frac{x}{t} \in U_\beta\} = b$$

$$\rho_{U_\beta}(y) = \text{ínf}\{t > 0 : \frac{y}{t} \in U_\beta\} = c$$

Entonces

$$\frac{x}{t} \in U_\beta \quad \text{y} \quad \frac{y}{s} \in U_\beta \Rightarrow \frac{xy}{ts} \in U_\alpha \Rightarrow ts \geq a \Rightarrow bc \geq a \quad \Rightarrow$$
$$\rho_{U_\alpha}(xy) \leq \rho_{U_\beta}(x)\ \rho_{U_\beta}(y).$$

Finalmente vemos que la topología está dada por la familia de seminormas antes mencionada: si $U_\alpha \in \{U\}$ entonces $\{x \in A : \rho_{U_\alpha}(x) < 1\} \subset U_\alpha$. Esto implica que la topología inducida por $\{U\}$ y por $\{\rho_U\}$ es la misma.

Definición 2.1.2. Decimos que A es un *álgebra localmente multiplicativamente convexa* o un *álgebra m-convexa* si (2.1) puede ser reemplazado por

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha \tag{2.2}$$

para todo $x, y \in A$.

Definición 2.1.3. Una B_0-álgebra es un álgebra localmente convexa metrizable y completa. Su topología puede ser dada por medio de una sucesión de seminormas $(||.||_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (véase [18], teo. 24) que satisfacen

$$\|x\|_n \leq \|x\|_{n+1}, \qquad n = 1, 2, ...$$

para todo $x \in A$, el cual corresponde a la relación (2.2), y

$$\|xy\|_n \leq \|x\|_{n+1}\|y\|_{n+1}, \qquad n = 1, 2, ...$$

para todo $x, y \in A$.

Ejemplos 2.1.4. Álgebras $m-$convexas y B_0-álgebras

1. El álgebra $C(-\infty, \infty)$ de todas las funciones continuas con valores complejos con operaciones puntuales y las seminormas

$$\|f\|_n = \max_{-n \leq x \leq n} |f(x)|$$

es un álgebra $m-$convexa. En efecto,

$$\begin{aligned} ||fg||_n &= \max_{-n\le x\le n} |(fg)(t)|| \\ &= \max_{-n\le x\le n} |f(x)||g(x)| \\ &\le \max_{-n\le x\le n} |f(x)| \max_{-n\le x\le n} |g(x)| \\ &= ||f||_n \; ||g||_n \end{aligned}$$

2. Sea L^w el conjunto de todas las funciones medibles sobre el intervalo unitario $[0,1]$ tales que

$$\|f\|_n = \left(\int_0^1 |f(x)|^n dx \right)^{\frac{1}{n}} < \infty, \quad n = 1, 2...$$

es un álgebra bajo las operaciones puntuales. Además, por la desigualdad generalizada de Hölder (si $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ entonces para $f \in L_p$ y $g \in L_q$, $fg \in L_r$ y $||fg||_r \le ||f||_p \; ||g||_q$) tenemos que

$$\begin{aligned} ||fg||_n &= \left(\int_0^1 |f(x)|^n |g(x)|^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\le \left(\int_0^1 |f(x)|^{2n} dx \right)^{\frac{1}{2n}} \left(\int_0^1 |g(x)|^{2n} dx \right)^{\frac{1}{2n}} \\ &= ||f||_{2n} \; ||g||_{2n} \end{aligned}$$

de donde se sigue que L^w es una B_0-álgebra, pero que no es $m-$convexa.

Describamos algunos elementos de la teoría de las álgebras $m-$convexas. Sea $(A, \{|| \cdot ||_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma})$ un álgebra $m-$convexa. Para cada $\alpha \in \Gamma$ definamos el conjunto $N_\alpha = \{x \in A : ||x||_\alpha = 0\}$. Éste es un ideal cerrado de A ya que si $x, y \in A$ entonces

$$||x - y||_\alpha \le ||x||_\alpha + ||y||_\alpha = 0,$$

lo cual implica que $(x - y) \in N_\alpha$. Además, si $x \in N_\alpha$ y $y \in A$ entonces $||xy|| \le ||x||_\alpha \; ||y||_\alpha = 0$, de donde se tiene que $xy \in N_\alpha$. Finalmente, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en N_α que converge a $x \in A$ entonces $0 = ||x_n||_\alpha \to ||x||_\alpha$, y por lo tanto, $x \in N_\alpha$.

Consideremos el álgebra normada A/N_α, con la topología cociente generada por la familia de seminormas $||\pi_\alpha(\cdot)||_\alpha^{'}$; donde π_α son los homorfismos canónicos definidos por

$$\pi_\alpha : A \to A/N_\alpha; \quad \pi_\alpha(x) = x + N_\alpha.$$

y

$$||\pi_\alpha(x)||'_\alpha = \inf_{y \in N_\alpha} ||x+y||_\alpha$$

Se tiene que $||\pi_\alpha(x)||'_\alpha = ||x||_\alpha$. En efecto, $||\pi_\alpha(x)||'_\alpha \leq ||x+y||_\alpha \leq ||x||_\alpha + ||y||_\alpha = ||x||_\alpha$. Por otro lado, $||x||_\alpha = |||x||_\alpha - ||y||_\alpha| \leq ||x-y||_\alpha \leq ||x+y||_\alpha$. Luego, $||x||_\alpha \leq ||\pi_\alpha(x)||'_\alpha$.

Denotaremos la completación del álgebra normada $(A/N_\alpha, ||\cdot||'_\alpha)$ por A_α. Se tiene el siguiente

Teorema 2.1.5. *(W. Żelazko) Sea A un álgebra $m-$convexa. Entonces A es isomorfa a una subálgebra B de un producto cartesiano de álgebras de Banach. Si A es completa, entonces el álgebra B es cerrada en ese producto.*

Demostración: Sea $\{||\cdot||_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de seminormas que definen la topología de A. Consideremos las álgebras A_α y los homomorfismos canónicos π_α. Sea $\tilde{A} = \prod A_\alpha$ con operaciones coordenada a coordenada y la topología producto. La aplicación $\pi : A \to \tilde{A}$ dada por $\pi(x) = (\pi_\alpha(x))_\alpha$ es el homomorfismo deseado. En efecto, π es inyectiva ya que si $(\pi_\alpha(x)) = 0$ entonces $\pi_\alpha(x) = 0$ para todo $\alpha \in \Gamma$, lo cual implica que $||x||_\alpha = 0$, para todo $\alpha \in \Gamma$, y por lo tanto, $x = 0$.
Sea V un abierto básico de $\tilde{A}$. Entonces existen $U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}$ abiertos de $A_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq n$, respectivamente tales que

$$V = \{x \in \tilde{A} : x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Como π_{α_i} es continua, $\pi^{-1}_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$ es abierto en A. Así, $\pi^{-1}(V) = \cap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$ también es abierto en A, de donde π es continua. Si A es completa, entonces $A/N_\alpha = A_\alpha$, y por lo tanto, $\pi(A)$ es cerrada en $\tilde{A}$. ■

Corolario 2.1.6. *Sea A un álgebra $m-$convexa. Entonces su topología puede darse por medio de una familia de seminormas $\{||\cdot||_\alpha||\}_{\alpha\in\Gamma}$ tal que para todo $\alpha \in \Gamma$,*

$$||e||_\alpha = 1$$

Demostración: $\pi_\alpha(x)$ es unidad de A_α, la cual es un álgebra de Banach. Por el corolario (1.1.9) podemos dar una nueva seminorma en A_α tal que $||\pi(e)||_\alpha = 1$. Luego, para $x \in A$ y cada $\alpha \in \Gamma$ definimos $||x||''_\alpha = ||\pi_\alpha(x)||'_\alpha$. Así obtenemos la familia de seminormas con la propiedad deseada. ■

Podemos además suponer que $(||\cdot||_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ es un sistema saturado de seminormas. Esto es, para cada subconjunto finito $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ de Γ existe un índice $\beta \in \Gamma$ tal que

$$\|x\|_{\alpha_i} \leq \|x\|_\beta \tag{2.3}$$

para todos los elementos x en A, $i = 1, 2, ..., n$

Sea A un álgebra $m-$convexa. Para $\alpha, \beta \in \Gamma$, decimos que $\alpha \preceq \beta$ si $||\cdot||_\alpha$ es continua respecto a $||\cdot||_\beta$. Es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $||x||_\alpha \leq C||x||_\beta$. Por (2.3), $(\Gamma, \preccurlyeq)$ es un sistema dirigido.

Sean A_α las álgebras de Banach y $\pi_\alpha : A \to A_\alpha$ los homomorfismos canónicos. Para $\alpha \preccurlyeq \beta$ definimos las aplicaciones

$$\pi_{\alpha\beta} : (A/N_\beta;\ ||\cdot||_\beta) \longrightarrow (A/N_\alpha;\ ||\cdot||_\alpha),$$

dadas por $\pi_{\alpha\beta}(\pi_\beta(x)) = \pi_\alpha(x)$. Como $\pi_\alpha(xy) = \pi_\alpha(x)\pi_\alpha(y)$, para todo $\alpha \in \Gamma$ y todo $x, y \in A$, entonces es fácil probar que $\pi_{\alpha\beta}$ es un homomorfismo continuo y se puede extender a un homomorfismo continuo de A_β en A_α.

Definición 2.1.7. El *límite inverso* de $(A_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$, denotado $\varprojlim A_\alpha$, es un subconjunto del producto cartesiano $\prod A_\alpha$ definido como

$$\{(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} : \pi_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha, \quad \alpha < \beta\}$$

Tenemos el siguiente resultado que caracteriza a las álgebras $m-$convexas completas (véase [19], teo. (11.6))

Teorema 2.1.8. *Sea A un álgebra $m-$convexa y completa. Entonces A es homeomorfa e isomorfa con el límite inverso de álgebras de Banach A_α, con aplicaciones $\pi_{\alpha\beta}$.*

Demostración: Por el teorema (2.1.5), A es una subálgebra de $\tilde{A} = \prod A_\alpha$. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} = (\pi_\alpha(x))_{\alpha\in\Gamma}$. Entonces para todo $\alpha, \beta \in \Gamma$

$$\pi_{\alpha\beta}(x_\beta) = \pi_{\alpha\beta}(\pi_\beta(x)) = \pi_\alpha(x) = x_\alpha$$

Por lo tanto, $A \subset \varprojlim A_\alpha = \tilde{A}$.

Resta probar que A es densa en $\varprojlim A_\alpha$. Sea $\overline{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \in \varprojlim A_\alpha$ y $\beta \in \Gamma$. Como los básicos V en $\tilde{A}$ son intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$V_i(\overline{x}) = \{y \in A : ||x_{\beta_i} - y_{\beta_i}||_{\beta_i} < \epsilon\}$$

entonces

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i(\overline{x})$$

Sea $||\cdot||_{\beta'}$ la seminorma que se define como en (2.3) y

$$V(\overline{x}) = \{y \in \tilde{A} : ||x_\beta - y_\beta||_\beta^{'} < \epsilon\}$$

Sea $y \in A$ tal que $||\pi_\beta(y) - x_\beta||_\beta^{'} < \epsilon$. Entonces $(\pi_\alpha(y))_{\alpha\in\Gamma} \in \tilde{A} \cap V(\overline{x})$. ■

Análogamene al caso normado, en álgebras $m-$convexas también tenemos la continuidad de la inversión (véase [19], teo (12.4)).

Proposición 2.1.9. *Sea A un álgebra $m-$convexa compleja. Entonces la inversión $x \mapsto x^{-1}$ es continua sobre $G(A)$.*

Demostración: Sin perdida de generalidad podemos suponer que A es completa ya que en caso contrario la sumergimos en su completación $\widehat{A}$. Entonces si mostramos que la inversión es continua sobre $G(\widehat{A})$ y la restringimos a $G(A)$, tenemos que la inversión es continua sobre $G(A)$ ya que A es densa en $\widehat{A}$. Sea $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ una red en $G(A)$ tal que $x_\gamma \to x_0$ en $G(A)$. Entonces para cada α, $\pi_\alpha(x_\gamma) \to \pi_\alpha(x_0)$ en A_α, que por ser un álgebra de Banach la inversión es continua y así $(\pi_\alpha(x_\gamma))^{-1} \to (\pi_\alpha(x_0))^{-1}$. Pero

$$(\pi_\alpha(x_\gamma))^{-1} = \pi_\alpha(x_\gamma^{-1})$$

y por lo tanto, $x_\gamma^{-1} \to x_0^{-1}$ en A. ■

Proposición 2.1.10. *Sea A un álgebra $m-$convexa, conmutativa y compleja. Entonces $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$.*

Demostración: $\mathcal{M}(A) = \bigcup \mathcal{M}(A_\alpha)$. En efecto, si $f \in \mathcal{M}(A)$ entonces $|f(x)| \leq ||x||_\alpha$, para algún α. Luego, f define un funcional lineal multiplicativo y continuo sobre A_α dado por $f_\alpha(\pi_\alpha(x)) = f(x)$. Este funcional está bien definido ya que si $\pi_\alpha(x) = \pi_\alpha(y)$ entonces $\pi_\alpha(x-y) = 0$ de donde $(x-y) \in N_\alpha$. Esto implica que $|f(x-y)| \leq ||x-y||_\alpha = 0$ y por lo tanto, $f(x) = f(y)$. Es decir, $\mathcal{M}(A) \subset \bigcup \mathcal{M}(A_\alpha)$. Inversamente, si $f \in \mathcal{M}(A_\alpha)$ entonces éste define un funcional lineal multiplicativo y continuo sobre A dado por $F = f \circ \pi_\alpha$. Así, como $\mathcal{M}(A_\alpha) \neq \emptyset$ para todo α entonces tenemos el resultado. ■

De las dos proposiciones anteriores tenemos también un teorema de Gelfand-Mazur para álgebras $m-$convexas. (véase [19], teo. (12.5))

Teorema 2.1.11. *Sea A un álgebra $m-$convexa, conmutativa y compleja en la cual cada elemento distinto de cero es invertible. Entonces A es isomorfa al campo de los números complejos.*

Demostración: La demostración es completamente análoga al caso de un álgebra de Banach. Supongamos que $x \neq \lambda e$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $(x - \lambda e) \in G(A)$. Sea $f \in \mathcal{M}(A)$ tal que $f(x^{-1}) \neq 0$. Definamos la función

$$\varphi(\lambda) = f[(x - \lambda e)^{-1}]$$

Probamos que φ es entera y que $0 = \varphi(0) = f(x^{-1}) \neq 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x = \lambda e$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. ■

De este teorema se siguen proposiciones análogas a las que obtuvimos en álgebras normadas.

Proposición 2.1.12. *Sea A un álgebra $m-$convexa. Entonces cada ideal bilateral máximo cerrado es de codimensión uno.*

Demostración: Sea $M \subset A$ un ideal bilateral máximo cerrado. M es un subespacio vectorial. Entonces A/M es un álgebra $m-$convexa que es un anillo de división. Por el teorema anterior, $A/M \cong \mathbb{C}$. ■

Proposición 2.1.13. *Sea A un álgebra $m-$convexa conmutativa. Entonces cada ideal cerrado está contenido en un ideal máximo cerrado.*

Demostración: Se sigue del hecho que $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(\widehat{A})$ y la demostración de la proposición (1.2.10). ■

En la proposición (1.2.20) tenemos que un álgebra normada A es una $Q-$álgebra si y sólo si todos sus ideales máximos son cerrados. Sin embargo, la condición necesaria de ésta proposición no es cierta, en general, en álgebras $m-$convexas. Para ello examinemos el siguiente ejemplo el cual puede verse en [10]. Sea el álgebra A de las fracciones racionales con coeficientes complejos definida asi:

$$A = \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} : Q(n) \neq 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Definamos la familia de seminormas $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por $p_n(f) = |f(n)|$, $f \in A$. Es una familia submultiplicativa y por lo tanto, A es $m-$convexa y metrizable.

Observemos que $\ker(p_n) = (x-n)A$. En efecto, si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, está en $ker(p_n)$ entonces $p_n(f) = 0$ si y sólo si $|f(n)| = 0$, si y sólo si $P(n) = 0$, de donde $P(x) = (x-n)H(x)$, $H \in A$. Luego, $\ker(p_n) \subset (x-n)A$. Ahora, si tomamos un elemento de $(x-n)A$ entonces $p_n[(x-n)f(x)] = 0$ lo que implica que $(x-n)A \subset \ker(p_n)$.

Por otro lado, $(x-n)A$ es máximo y cerrado. Veamos que todos los ideales máximos de A son de esta forma. Sea $I = (x-s)A$, $s \notin \mathbb{N}$. Entonces $\frac{1}{x-s} \in A$ de donde $1 \in I$ lo que implica que $I = A$.

Sin embargo, A no es $Q-$álgebra puesto que el espectro de cualquier $f \in A$ no es acotado. De hecho, $\mathbb{N} \subset \sigma(f)$.

2.2. Radio espectral en álgebras $m-$convexas

Sea $(A, \{||\cdot||_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma})$ un álgebra $m-$convexa. El *espectro* $\sigma(x)$ y el *radio espectral* $r(x)$ de un elemento $x \in A$ se definen de la misma forma como se hizo en las álgebras topológicas.

Definición 2.2.1. Sea A un álgebra localmente convexa. Definimos los siguientes radios

$$r_1(x) = \sup_\alpha \lim_n \sqrt[n]{||x^n||_\alpha}$$

$$r_2(x) = \sup_{|\cdot|} \limsup_n \sqrt[n]{|x^n|}; \text{ donde } \sup_{|\cdot|} \text{ denota el supremo con respecto a todas las seminormas continuas sobre } A$$

$$r_3(x) = \sup_{f\in A'} \limsup_n \sqrt[n]{|f(x^n)|}$$

$$r_4(x) = \sup_{f\in\mathcal{M}(\mathcal{A})} |f(x)|$$

$$r_5(x) = \inf\{r : (x-\lambda e) \in G(A),\ \forall\lambda \text{ tal que } |\lambda| > r\}$$

$$r_6(x) = \inf\{r > 0 : \exists(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C},\ \text{tal que } \textstyle\sum_{n=0}^\infty a_n\lambda^n \text{ tiene radio de convergencia } r \text{ se tiene que } \displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n \text{ converge en } A\}$$

$$r_7(x) = \inf\{r > 0 : \forall(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C},\ \text{tal que } \textstyle\sum_{n=0}^\infty a_n\lambda^n \text{ tiene radio de convergencia } r \text{ se tiene que } \displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n \text{ converge en } A\}$$

Tenemos el siguiente resultado (véase [19], teo. (12.10) para la demostración)

Teorema 2.2.2. *Sea A un álgebra $m-$convexa, completa, compleja y conmutativa. Entonces $r_1(x) = r_2(x) = ... = r_7(x) = r(x)$*

Notas 2.2.3. (1) Si el álgebra A no es conmutativa entonces $\mathcal{M}(A)$ puede ser vacío y así $r_4(x)$ no tiene sentido.

(2) Si A es un álgebra $m-$convexa, conmutativa no completa entonces se tiene en general, como en el caso normado, que

$$r(x) \geq \sup_{\alpha} \lim_{n} \sqrt[n]{||x^n||_\alpha}$$

En efecto, si $|\lambda| > r(x)$ entonces $(\lambda e - x) \in G(A)$ y por lo tanto, existe $y \in A$ tal que $(\lambda e - x)y = e_A$. Así, para cada α,

$$\pi_\alpha(\lambda e - x)\pi_\alpha(y) = e_{A_\alpha} \Leftrightarrow (\lambda e_{A_\alpha} - \pi_\alpha(x))\pi_\alpha(y) = e_{A_\alpha}$$

luego, $\pi_\alpha(x) \in G(A_\alpha)$ y entonces $|\lambda| > r_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \lim_{n} \sqrt[n]{||x^n||_\alpha}$

Tenemos una proposición análoga a (1.3.6) para álgebras $m-$convexas.

Proposición 2.2.4. *Sea A un álgebra $m-$convexa. A es $Q-$álgebra si y sólo si existe $||\cdot||_\beta$ tal que*

$$r(x) = \lim_{n} \sqrt[n]{||x^n||_\beta} = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{||x^n||_\beta}$$

Demostración: $\Rightarrow$) Resta probar que $r(x) \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||x^n||_\beta}$ por la nota anterior y la proposición (1.3.1). Como en la demostración de la proposición (1.3.6) tenemos que $(r(x))^n \leq r(x^n)$. Si A es una $Q-$álgebra entonces existe $||\cdot||_\beta$ tal que

$$\{x \in A : ||x||_\beta < \epsilon < 1\} \subset \{x \in A : r(x) \leq 1\}$$

Supongamos que $||x||_\beta \neq 0$, para todo $x \in A$. Entonces si $||x^n||_\beta < \epsilon$ tenemos que $r(x^n) \leq 1$. Así, $r\left(\epsilon \frac{x^n}{||x^n||_\beta}\right) < 1$ lo cual implica que

$$(r(x))^n \leq r(x^n) \leq \frac{1}{\epsilon}||x^n||_\beta$$

Luego, $r(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{||x^n||_\beta}$.
Si $||\gamma x||_\beta = 0$ para todo $\gamma \in \mathbb{C}$, entonces $r(\gamma x) \leq 1$, de donde $r(x) \leq \frac{1}{\gamma} \to 0$ cuando $|\gamma| \to \infty$.

$\Leftarrow$) Por hipótesis tenemos que $r(x) \leq ||x||_\beta$, para todo $x \in A$ y alguna β. Entonces $\{x \in A : ||x||_\beta \leq 1\} \subset \{x \in A : r(x) \leq 1\}$. Es decir, el conjunto $\{x \in A : r(x) \leq 1\}$ es una vecindad del cero y por lo tanto, A es una $Q-$álgebra. ■

Nota 2.2.5. Recordemos que un álgebra A es *localmente A-convexa* si es localmente convexa y existe una constante $M(\alpha, x) > 0$ tal que para todo $x, y \in A$, $||xy||_\alpha \leq M(\alpha, x)||y||_\alpha$. La proposición (1.3.12) es válida para álgebras localmente A-convexas y en particular, para álgebras $m-$convexas.

Además de los radios ya definidos en (2.2.1), estudiamos dos importantes radios en las álgebras localmente convexas.

2.3. Radio de acotación

En las álgebras localmente convexas el radio de acotación, según G.R. Allan, definido como

$$\beta(x) = \inf\left\{\lambda > 0 : \left\{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\}_{n\geq 1} \text{ es acotado en } A\right\}$$

juega el papel análogo al radio espectral para álgebras de Banach (ver prop. 2.3.9). Además, se define un espectro en términos de tener inverso no acotado. Por ello, si A es un álgebra localmente convexa, el primer problema es encontrar una definición adecuada para un *elemento acotado* de A. Tenemos entonces las siguientes definiciones debidas a G.R. Allan:

Definición 2.3.1. Sea A un álgebra localmente convexa. Un elemento $x \in A$ es *acotado* si y sólo si para algún número complejo λ no cero, el conjunto $E = \{(\lambda x)^n : n = 1, 2, ...\}$ es un subconjunto acotado de A. Esto es, si a cada vecindad V de cero le corresponde un número $s > 0$ tal que $E \subset tV$, para cada $t > s$. Equivalentemente, x es acotado si existe una constante $M_\alpha > 0$ tal que $\|(\frac{x}{\lambda})^n\|_\alpha \leq M_\alpha$, para todo $\alpha \in \Gamma$.

Es claro que cada elemento de un álgebra normada es acotado.

Definición 2.3.2. Por $\mathcal{B}$ denotamos la colección de todos los subconjuntos B de A tales que B es convexo, absorbente, idempotente, cerrado y acotado.

Definición 2.3.3. Para cada $B \in \mathcal{B}$ denotamos por $A(B)$ la subálgebra de A generada por B. Es decir,

$$A(B) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C},\ x \in B\},$$

y la funcional de Minkowski

$$\|x\|_B = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\} \quad (x \in A(B))$$

define una norma sobre $A(B)$ que hace de $A(B)$ un álgebra normada.

Respecto a esta norma tenemos la siguiente (véase [1])

Proposición 2.3.4. *La topología de $A(B)$ es más fina que la topología de A.*

Demostración: Demostremos que para todo $y \in A(B)$ y todo $\alpha \in \Gamma$ existe una constante $K_\alpha > 0$ tal que $\|y\|_B \geq K_\alpha \|y\|_\alpha$. Sea $y \in A(B)$ y $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\mu > \|y\|_B$. Entonces $y \in \mu B$. Luego, $y = \mu x$ para algún $x \in B$, que por ser es acotado existe una constante $M_\alpha > 0$ tal que $\|x\|_\alpha \leq M_\alpha$. Por lo tanto, $\|y\|_\alpha \leq \mu M_\alpha$, de donde, $\frac{\|y\|_\alpha}{M_\alpha} \leq \mu$. Como μ es arbitrario entonces $\|y\|_B \geq \frac{\|y\|_\alpha}{M_\alpha} \geq K_\alpha \|y\|_\alpha$, donde $K_\alpha = \frac{1}{M_\alpha}$. ■

Definición 2.3.5. Diremos que el álgebra localmente convexa A es *seudo-completa* si cada una de las álgebras normadas $A(B)$, $B \in \mathcal{B}$, es un álgebra de Banach.

Definición 2.3.6. Un álgebra A es *secuencialmente completa* si toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en A.

Proposición 2.3.7. *Sea A un álgebra localmente convexa. Si A es secuencialmente completa entonces A es seudo-completa.*

Demostración: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $A(B)$. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe un N tal que si $m, n > N$ entonces $\|x_m - x_n\|_B < \epsilon$. Esto implica que $x_n - x_m \in \epsilon B$, o que $x_n \in x_m + \epsilon B$. Por hipótesis sabemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a alguna $x \in A$. Como B es cerrado entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in x_m + \epsilon B \Leftrightarrow x \in x_m + \epsilon B$$

Luego, $\|x - x_m\|_B < \epsilon$ y por lo tanto, $x_n \to x$ en la norma $\|\cdot\|_B$. ■

Definición 2.3.8. La *envolvente convexa* de un conjunto B de un espacio vectorial A, que denotaremos $convB$, es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de B. Esto es, el conjunto de todas las sumas

$$t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n,$$

donde $x_i \in B, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ y n es arbitrario.

El radio de acotación β tiene una propiedad análoga a la enunciada en (3), prop. (1.3.9).

Proposición 2.3.9. *Si A es un álgebra localmente convexa, seudo-completa y $|\lambda| > \beta(x)$ entonces*

$$(x - \lambda e)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \tag{2.4}$$

Demostración: En efecto, si $|\lambda| > \beta(x)$ entonces $\beta(x) < r < |\lambda|$, para algún r, y por lo tanto, $\left(\frac{x}{r}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Observemos que $(\frac{x}{\lambda})^n = (\frac{x}{r})^n(\frac{r}{|\lambda|})^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sea

$$B = \overline{conv\left(\left\{\left(\frac{x}{r}\right)^n\right\}_{n\geq 1}\right)}$$

Es decir, la cerradura de la envolvente convexa del conjunto $\{(\frac{x}{r})^n\}_{n\geq 1}$. Entonces B es acotado, idempotente, absolutamente convexo y cerrado [2]. Consideremos $A(B) = \{\lambda x : x \in B, \lambda \in \mathbb{C}\}$ el álgebra generada por B con la norma dada por $\|x\|_B = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}$. Entonces $(A(B), || \cdot ||_B)$ es un álgebra de Banach y como $\|\frac{x}{\lambda}\|_B < 1$ tenemos que $(e - \frac{x}{\lambda}) \in G(A(B))$ lo que implica que

$$\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n$$

Luego, $(\lambda e - x)^{-1}\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n$ y entonces

$$(x - \lambda e)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \in A(B)$$

Es decir, la serie encontrada es el inverso de $(\lambda e - x)$ en $A(B)$. Como la topología de $A(B)$ es más fina que la topología de A (prop. (2.3.4)) entonces ésta serie es el inverso de $(x - \lambda e)$ en A. ■

Corolario 2.3.10. *Si el álgebra A es localmente convexa y completa, entonces también se tiene (2.4).*

Demostración: En este caso A es secuencialmente completa y por lo tanto, seudo-completa. ■

2.4. Radio Espectral Extendido

El otro radio a estudiar en un álgebra localmente convexa A es el definido por W. Żelazko. Para un elemento $x \in A$ define su espectro, denotado por $\sum(x)$, como

$$\sum (x) = \sigma (x) \cup \sigma_d (x) \cup \sigma_\infty (x)$$

donde

$$\sigma (x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda e) \text{ no es invertible en } A\},$$
$$\sigma_d (x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma (x) : \rho_\lambda (x) = (\lambda e - x)^{-1} \text{ es discontinua en } \lambda = \lambda_0\},$$
$$\sigma_\infty(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{si } \lambda \mapsto \rho(1, \lambda x) \text{ es continua en } \lambda = 0 \\ \infty & \text{si } \lambda \mapsto \rho(1, \lambda x) \text{ es discontinua en } \lambda = 0 \end{array} \right\},$$

y el *radio espectral extendido* de $x \in A$ por el número

$$R(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sum (x)\}$$

Notas 2.4.1. (1) Si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ es tal que $|\lambda_0| > R(x)$ entonces $(x - \lambda_0 e)$ es invertible y la función $\rho_\lambda(x) = (\lambda e - x)^{-1}$ es continua en λ_0. Esto se sigue de la definición del espectro extendido de W. Żelazko.

(2) Si A es un álgebra $m-$convexa entonces $\sigma_d(x) = \sigma_\infty(x) = \emptyset$ para todo $x \in A$, ya que la inversión $x \mapsto x^{-1}$ es continua sobre $G(A)$.

(3) Si A es un álgebra localmente convexa con inversión continua entonces $\sum(x) = \sigma(x)$ y $\sum(x)$ es un subconjunto del espectro definido por G.R. Allan:

$$\sigma_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda \neq \infty, & \Leftrightarrow (\lambda e - x) \text{ no tiene inverso acotado en } A \\ \infty, & \Leftrightarrow x \text{ no es acotado en } A \end{array} \right\}$$

Si además A es seudo-completa entonces $\sum(x) = \sigma_A(x)$ ya que en este caso $\sigma(x) = \sigma_A(x)$ (véase [1], teo. (4.1)).

(4) De lo anterior se puede observar que $R(x)$ es una extensión de los radios espectrales usuales definidos en álgebras normadas y $m-$convexas, ya que en general la inversión no es continua en álgebras localmente convexas; ni aún en B_0-álgebras. Por ejemplo, sea $A = L^w$ el álgebra del ejemplo (2.1.2). Tomemos la sucesión de números no negativos $a_n = n^2$ y definamos la sucesión de funciones (véase [19], pág. 125)

$$f_n(x) = a_n \chi_{[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}]}(x) + 1;$$

donde χ denota la función característica. Podemos observar que $f_n \to 1$ casi en todo punto; $f_n \in G(A)$ y $f_n^{-1} = \frac{1}{f_n} \to 1$ casi en todo punto. Demostremos que $||f_n^{-1} - 1||_p \to 0$ pero $||f_n - 1||_p \to \infty$, lo que implica que la inversión no es continua.

$$\begin{aligned} ||f_n^{-1} - 1||_p^p &= \int_0^1 |f_n^{-1}(x) - 1|^p dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left(\frac{-a_n}{a_n+1}\right)^p dx \\ &= \frac{2}{n}\left(\frac{-a_n}{a_n+1}\right)^p \to 0, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, para todo $p > 1$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} ||f_n - 1||_p^p &= \int_0^1 |f_n(x) - 1|^p dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (a_n)^p dx \\ &= \frac{2(a_n)^p}{n} \to \infty, \text{ cuando } n \to \infty \end{aligned}$$

Podemos observar que en este caso $\sigma_\infty(f_n) = \infty$.

Uno de los resultados más importantes que encontramos en este trabajo es la relación entre el espectro de G.R. Allan y el de W. Żelazko en un álgebra localmente convexa y completa.

Proposición 2.4.2. *Sea A un álgebra localmente convexa y completa. $\sum(x)$ es cerrado si y sólo si $\sum(x) = \sigma_A(x)$.*

Demostración: $\Rightarrow$) Demostremos que $\sum(x) \subset \sigma_A(x)$. Para ello probemos que si $\lambda \notin \sigma_A(x)$ entonces $\lambda \notin \sum(x)$. Si $\lambda \notin \sigma_A(x)$, $\lambda \neq \infty$, entonces $\lambda \notin \sigma(x)$ y ρ_λ existe. Luego, $\rho_\lambda \in A(B)$ para algún $B \in \mathcal{B}$. Si $|\mu - \lambda| < ||\rho_\lambda||_B^{-1}$ entonces la sucesión de sumas parciales

$$S_n = \rho_\lambda - (\mu - \lambda)\rho_\lambda^2 + (\mu - \lambda)^2\rho_\lambda^3 - ...(\mu - \lambda)^n\rho_\lambda^{n+1}$$

forman una sucesión de Cauchy en el álgebra $A(B)$, y por lo tanto, converge. Veamos que la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ρ_μ.

Observemos que $(\mu e - x) = (\mu - \lambda)e + (\lambda e - x)$. Entonces

$$(\mu e - x)S_n = e + (-1)^{n+1}(\mu - \lambda)^{n+1}\rho_\lambda^{n+1}$$

Si $|\mu - \lambda| < ||\rho_\lambda||_B^{-1}$ entonces $|\mu - \lambda| < \gamma < ||\rho_\lambda||_B^{-1}$, para algún $\gamma > 0$, de donde tenemos que $|\mu - \lambda| \; ||\rho_\lambda||_B < \frac{\gamma}{||\rho_\lambda||_B^{-1}} < 1$. Luego,

$$\begin{aligned} ||(\mu e - x)S_n - e||_B &= |\mu - \lambda| \; ||\rho_\lambda^{n+1}||_B \\ &< \left(\frac{\gamma}{||\rho_\lambda||_B^{-1}}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

el cual tiende a cero cuando $n \to \infty$. Esto muestra que ρ_μ existe y además para λ fija

$$\begin{aligned} ||\rho_\mu - \rho_\lambda||_B &\leq |\mu - \lambda| \; ||\rho_\lambda||_B^2(1 + |\mu - \lambda|||\rho_\lambda||_B + |\mu - \lambda|^2||\rho_\lambda||_B^2 + ...) \\ &\leq |\mu - \lambda| \; ||\rho_\lambda||_B^2\left(\frac{1}{1 - \frac{\gamma}{||\rho_\lambda||_B^{-1}}}\right) \to 0, \text{ cuando } \mu \to \lambda \end{aligned}$$

Esto implica que $\rho_\mu \to \rho_\lambda$ en el álgebra $A(B)$. Pero como la topología de $A(B)$ es más fina que la topología de A entonces $\rho_\mu \to \rho_\lambda$ en A. Tenemos así que $\lambda \notin \sigma_d(x)$. Resta probar que $\sigma_\infty(x) = \emptyset$. Es decir, que la función $\rho(1, \lambda x) = (e - \lambda x)^{-1} \to e$ cuando $|\lambda| \to 0$. Equivalentemente, que $\rho(1, \frac{x}{\beta}) = (e - \frac{x}{\beta})^{-1} \to e$ cuando $|\beta| \to \infty$. Como $(\frac{x}{\beta})^n \to 0$ para β suficientemente grande, entonces haciendo la misma construcción del conjunto B de la proposición (2.3.9) tenemos que

$$\rho\left(1, \frac{x}{\beta}\right) = \left(e - \frac{x}{\beta}\right)^{-1} = e + \frac{x}{\beta} + \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{x^3}{\beta^3} + ...$$

en $A(B)$. Luego,

$$\begin{aligned}\left\|\rho\left(1,\frac{x}{\beta}\right)-\rho(1,0)\right\|_B &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\beta}\right)^n - e\right\|_B \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\left(\frac{x}{\beta}\right)^n\right\|_B \\ &= \frac{||x||_B}{|\beta|-||x||_B}\end{aligned}$$

Esto implica que $\rho \to 0$ en $A(B)$ cuando $|\beta| \to \infty$. Así, $\rho \to 0$ en A cuando $|\beta| \to \infty$. Es decir, $\rho(1, \lambda x)$ es continua en $\lambda = 0$ y por lo tanto, $\sigma_\infty(x) = \emptyset$.

Ahora, si $\infty \notin \sigma_A(x)$ entonces $x \in A(B)$ para algún $B \in \mathcal{B}$. Sea el conjunto $N = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\lambda| > ||x||_B\}$. Entonces para $\lambda \in (\mathbb{C}^* \smallsetminus \sigma_A(x)) \cap N$, ρ_λ existe en $A(B)$ y para $\lambda \neq \infty$

$$\rho_\lambda(x) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{e}{\lambda} + \frac{x}{\lambda^2} + \frac{x^2}{\lambda^3} + ...$$

la cual converge en $A(B)$ y por lo tanto, en A. Si $\lambda \neq \infty$ y $\lambda \in N$, ρ es holomorfa en λ y

$$\begin{aligned}||\rho_\lambda||_B &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{\lambda^n}\right\|_B \\ &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right\|_B \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\|_B \\ &= \frac{1}{|\lambda|-||x||_B}\end{aligned}$$

la cual tiende a 0 cuando $|\lambda| \to \infty$. Deducimos así que ρ es holomorfa en ∞, ó equivalentemente que es holomorfa en 0 (tomando $\beta = \frac{1}{\lambda}$), lo que implica que $\rho(1, \beta x)$ es continua en $\beta = 0$ y por lo tanto, $\sigma_\infty(x) = \emptyset$. Hemos así demostrado que si $\lambda \notin \sigma_A(x)$ entonces $\lambda \notin \sum(x)$.

Demostremos ahora que $\sigma_A(x) \subset \sum(x)$. Si $\lambda_0 \notin \sum(x)$, $\lambda_0 \neq \infty$, entonces $(\lambda_0 e - x) \in G(A)$ y la función $\rho_\lambda(x) = (\lambda e - x)^{-1}$ es continua en $\lambda = \lambda_0$. Como

$$(\lambda e - x)^{-1} - (\lambda_0 e - x)^{-1} = (\lambda - \lambda_0)(\lambda e - x)^{-1}(\lambda_0 e - x)^{-1}$$

y $\sum(x)$ es cerrado entonces existe una vecindad de λ_0 tal que para todo λ en dicha vecindad

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(\lambda e - x)^{-1} - (\lambda_0 e - x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} = [(\lambda_0 e - x)^{-1}]^2$$

Para $f \in A'$,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} f\left(\frac{(\lambda e - x)^{-1} - (\lambda_0 e - x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \right) = f[((\lambda_0 e - x)^{-1})^2]$$

Esto implica que $(\lambda_0 e - x)^{-1}$ es débilmente holomorfa en λ_0. Por [1], teo. (3.8), $(\lambda_0 e - x)^{-1}$ es acotado en A. De aquí tenemos que $\lambda_0 \notin \sigma_A(x)$.

Si $\infty \notin \sum(x)$ entonces la función $\rho(1, \lambda x) = (e - \lambda x)^{-1} \to e$ cuando $\lambda \to 0$. Por otro lado tenemos que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{(e - \lambda x)^{-1} - e}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda x (e - \lambda x)^{-1}}{\lambda} = x$$

Así, para $f \in A'$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} f\left(\frac{(e - \lambda x)^{-1} - e}{\lambda} \right) = f(x)$, lo que implica que la función $F(\lambda) = f[(e - \lambda x)^{-1}]$ es débilmente holomorfa en $|\lambda| < \delta$, donde δ no depende de f. Por [1], lema (3.7), $F^{(n)}(0) = n! f(x^{n-1})$, $n = 1, 2, ...$, y $F(0) = f(e)$. Luego, la expansión de Taylor válida para $|\lambda| < \delta$ está dada por

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} f(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda f(\lambda x)^n$$

Por lo tanto, $\{f(\lambda x)^n : n \geq 1\}$ es un conjunto acotado, lo que implica que $\{(\lambda x)^n : n \geq 1\}$ es acotado, de donde tenemos que x es acotado en A. Así, $\infty \notin \sigma_A(x)$.

$(\Leftarrow)$ Como el álgebra A es completa entonces es seudo-completa. El resultado se sigue ahora de [1], cor. (3.9). ∎

Recordemos que en un álgebra localmente convexa A hemos definido los radios

$$r_1(x) = \sup_{\alpha} \lim_{n} \sqrt[n]{||x^n||_\alpha}$$

$$r_3(x) = \sup_{f \in A'} \limsup_{n} \sqrt[n]{|f(x^n)|}$$

$$r_7(x) = \text{ínf}\{r > 0 : \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C},\ \text{tal que } \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n \text{ tiene radio de convergencia } r \text{ se tiene que } \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge en } A\}$$

La relación de estos con el radio espectral extendido definido por W. Żelazko está dado en el siguiente (véase [19], teo. (15.5))

Teorema 2.4.3. *Sea A un álgebra localmente convexa completa. Entonces $r_1(x) = r_3(x) = r_7(x) = R(x)$*

Demostración: $r_1 \geq r_3(x)$. Si $f \in A'$ entonces para toda seminorma $||\cdot||_\alpha$ existe una constante $M_\alpha > 0$ tal que $|f(x)| \leq M_\alpha ||x||_\alpha$. Luego,

$$\limsup_n \sqrt[n]{|f(x^n)|} \leq \limsup_n \sqrt[n]{M_\alpha ||x^n||_\alpha} = \limsup_n \sqrt[n]{||x^n||_\alpha}$$

Por lo tanto,

$$r_3(x) = \sup_{f\in A'} \limsup_n \sqrt[n]{|f(x^n)|} \leq \sup_\alpha \limsup_n \sqrt[n]{||x^n||_\alpha} = r_1(x)$$

$r_3(x) \geq r_7(x)$. Supongamos que $r_3(x) < \infty$. Sean r y s tales que $r_3(x) < r < s$. Luego, $||(\frac{x}{r})^n||_\alpha \leq M_\alpha$ para todo n. Entonces

$$\left\|\left(\frac{x}{s}\right)^n\right\|_\alpha = \left\|\left(\frac{x}{r}\right)^n\left(\frac{r}{s}\right)^n\right\|_\alpha \leq M_\alpha\left(\frac{r}{s}\right)^n,$$

lo que implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{x}{s}\right)^n\right\|_\alpha \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_\alpha\left(\frac{r}{s}\right)^n$$

Por lo tanto, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||(\frac{x}{s})^n||_\alpha$ converge. Supongamos que la serie $\sum a_n\lambda^n$ tiene radio de convergencia $t > s$. Entonces $\frac{1}{t} = \limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{s}$. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{s}$. Así, para todo $n > N$, $|a_n| < (\frac{1}{s})^n$ lo que implica que

$$||a_n x^n||_\alpha = |a_n|\ ||x^n||_\alpha < \left(\frac{1}{s}\right)^n M_\alpha r^n = \left(\frac{r}{s}\right)^n M_\alpha$$

y,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||a_n x^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_\alpha (\frac{r}{s})^n$$

Como A es completa la serie $\sum a_n x^n$ es convergente y entonces $r_7(x) \leq s$, de donde se sigue que $r_7(x) \leq r_3(x)$.

$r_7(x) \geq R(x)$. Supongamos que $r_7(x) < \infty$ y sea λ tal que $|\lambda| > r_7(x)$. La serie $\sum(\frac{t}{\lambda})^n$ tiene radio de convergencia $|\lambda|$, así que la serie $\sum(\frac{x}{\lambda})^n$ converge a $(e - \frac{x}{\lambda})^{-1} \in A$. Esto implica que $(\lambda e - x) \in G(A)$ y entonces $\lambda \notin \sigma(x)$. Si además, $|\lambda| > |\lambda_0| > r > r_7(x)$ entonces

$$\begin{aligned}
||\rho(\lambda, x) - \rho(\lambda_0, x)||_\alpha &= ||(\lambda - \lambda_0)\rho(\lambda, x)\rho(\lambda_0, x)||_\alpha \\
&\leq |\lambda - \lambda_0| \; ||\rho(\lambda, x)||_\beta \; ||\rho(\lambda_0, x)||_\beta \\
&\leq |\lambda - \lambda_0| \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\|_\beta \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_0|} \left(\frac{x}{\lambda_0}\right)^n \right\|_\beta \\
&\leq |\lambda - \lambda_0| \left(\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{x}{r}\right)^n \right\|_\beta \right)^2 \to 0, \text{ cuando } \lambda \to \lambda_0
\end{aligned}$$

Luego, $\rho(\lambda, x)$ es continua en λ_0 y así, si $|\lambda| > r_7(x)$ entonces tenemos que $\lambda \notin \sigma(x) \cup \sigma_d(x)$.

Veamos que $\infty \notin \sum(x)$. Para ellos probemos que $\rho(t, x) \to 0$ cuando $t \to \infty$, o equivalentemente que $\rho(1, tx) = (e - tx)^{-1} \to e$ cuando $t \to 0$. Para $t \geq r_7(x)$,

$$\begin{aligned}
||\rho(1, tx) - \rho(1, 0)||_\alpha &= ||\sum_{n=0}^{\infty} (tx)^n - e||_\alpha \\
&= ||\sum_{n=1}^{\infty} (tx)^n||_\alpha \\
&\leq |t| \sum_{n=1}^{\infty} ||t^{n-1} x^n||_\alpha \to 0, \text{ cuando } t \to 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $|\lambda| > r_7(x)$ entonces $\lambda \notin \sum(x)$. Luego, $r_7(x) \geq R(x)$.

$R(x) \geq r_1(x)$. Es claro el resultado si $R(x) = \infty$. Supongamos que $R(x) < \infty$. Entonces $(e - tx)^{-1}$ es continua en $t = 0$ si $|t| < \frac{1}{R(x)}$. Sea $f \in A'$ y definamos la función $F(t) = f[(e - tx)^{-1}]$. $F(t)$ es holomorfa para $|t| < \frac{1}{R(x)}$, así que

$$F(t) = f[(e - tx)^{-1}] = \sum_{n=0}^{\infty} f(x^n) t^n$$

debe ser convergente en este disco. Luego, $\lim_n f(xt)^n = 0$ para $f \in A'$ y $|t| < \frac{1}{R(x)}$. Como tiende débilmente a cero es una sucesión acotada y por lo tanto, para cada $\alpha \in \Gamma$ existe una constante $M(t)$ tal que $||x^n t^n||_\alpha \leq M(t)$. Así,

$$\limsup_n \sqrt[n]{||x^n||_\alpha} \leq \frac{1}{|t|}$$

para cada t tal que $|t| < \frac{1}{R(x)}$. De aquí tenemos que

$$r_1(x) = \sup_\alpha \limsup_n \sqrt[n]{||x^n||_\alpha} \leq R(x).$$

■

Notas 2.4.4. (1) En [1] proposición (2.18), G.R. Allan demuestra que en cualquier álgebra localmente convexa $\beta(x) = r_1(x) = r_3(x)$. También prueba en la proposición (3.12) que $\beta(x) \leq r_A(x)$, donde

$$r_A(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\},$$

y la igualdad se tiene si el álgebra es seudo-completa.

(2) ¿Qué pasa si usamos $\rho(x)$ en lugar de $R(x)$, donde

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}?$$

¿Cuál es la relación entre $\rho(x)$ y $\beta(x)$?

No siempre son comparables. Para ello veamos primero la siguiente

Proposición 2.4.5. *Sea E un espacio vectorial topológico, $A \subset E$ acotado tal que la dimensión de $Span(A) = \infty$. Entonces existe un funcional lineal f en E tal que $f(A)$ no es acotado.*

Demostración: Sea $\{x_1, x_2, ...\}$ un subconjunto linealmente independiente de $Span(A)$. Definamos el funcional lineal $f : A \to \mathbb{C}$ por $f(x_n) = n$. Está bien definido y cláramente no es acotado sobre A. Lo extendemos linealmente a todo E completando el subconjunto $\{x_1, x_2, ...\}$ a una base de Hamel sobre E, definiéndolo igual a cero por fuera de los elementos de la base $\{x_1, x_2, ...\}$. Así, obtenemos un funcional lineal sobre E que no es acotado sobre A. ■

De aquí obtenemos el siguiente

Corolario 2.4.6. *Sea E un espacio vectorial topológico. Para cada conjunto $A \subset E$ acotado tenemos que la dimensión de $Span(A) < \infty$ si y sólo si todo funcional lineal f sobre E es acotado.*

Demostración: $\Rightarrow$) Sea $f : E \to \mathbb{C}$ lineal y $A \subset E$ un subconjunto acotado. Debemos probar que $f(A)$ es acotado. Definamos $F := Span(A)$. Entonces F es de dimensión finita y $A \subset F$. Luego $f|_F$ es acotado y por lo tanto, $f(A)$ es acotado.

$\Leftarrow$) Sea $F := Span(A)$. Si $dim(F) = \infty$ entonces por la proposición anterior existe un funcional lineal $f : E \to \mathbb{C}$ no acotado sobre A. Por lo tanto, f no es acotado sobre E. ■

Veamos ahora porqué $\rho(x)$ y $\beta(x)$ no siempre son comparables.

Sea $A = (\mathbb{P}(x), || \cdot ||_\infty)$ en $I = [0, 1]$. Entonces si $|\lambda| > 1$ tenemos que $\| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \|_\infty = \frac{\|x^n\|_\infty}{|\lambda|^n} \leq \frac{1}{|\lambda|^n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, y por lo tanto, $\beta(x) = 1$. Pero $\rho(x) = \infty$, ya que los únicos polinomios invertibles son los constantes diferentes de cero.

Sea ahora $E = (C(X), \tau_{max}^{lc})$, donde $C(X)$ es el álgebra de las funciones racionales y τ_{max}^{lc} es la topología localmente convexa más fina definida sobre $C(X)$. Entonces $\sigma(x) = \emptyset$ lo que implica que $\rho(x) = 0$. Por otro lado, $\beta(x) = \infty$ ya que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n$ no converge para ningún $\lambda \in \mathbb{C}$; de lo contrario E contiene al subconjunto acotado $B = \{(\frac{x}{\lambda})^n : n \in \mathbb{N}\}$, lo cual no es posible por el corolario anterior, ya que en E todos los funcionales lineales son continuos y por lo tanto, acotados (en τ_{max}^{lc} todas las seminormas son continuas).

Sin embargo, sí los podemos comparar en casos como (véase [1] y [11]):

(1) A un álgebra localmente convexa seudo-completa ó una $Q-$álgebra: $\rho(x) \leq \beta(x)$

(2) A un álgebra normada, $\rho(x) \leq \beta(x) \Leftrightarrow A$ es Q-álgebra

(3) A un álgebra topológica, $\beta(x) \leq \rho(x) \Leftrightarrow$ la serie $\sum x^n$ converge siempre que $\rho(x) < 1$

Capítulo 3

Invertibilidad topológica y Radio espectral topológico

3.1. Invertibilidad topológica

Definición 3.1.1. Decimos que un elemento x en un álgebra localmente convexa A es *topológicamente invertible por la izquierda* si $\overline{Ax} = A$.

En este caso existe una red $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ en A, a la cual se le puede llamar *inverso topológico izquierdo*, tal que $a_\gamma x \to e$. Equivalentemente, si para cada $||\cdot||_\alpha$ y $\epsilon > 0$ exite u en A tal que $\|ux - e\|_\alpha < \epsilon$.

De la misma forma podemos definir *topológicamente invertible por la derecha*, y diremos que $x \in A$ es *topológicamente invertible* si es topológicamente invertible por la izquierda y por la derecha.

Así mismo definimos para $x \in A$ el *espectro topológico izquierdo* como:

$$\sigma_{t,izq}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda e) \text{ no es top. invertible por la izquierda}\}.$$

Análogamente el *espectro topológico derecho* y el *espectro de Harte* como $\sigma(x) = \sigma_{t,izq}(x) \cup \sigma_{t,der}(x)$.

Nota 3.1.2. Hemos visto que $G(A) \subseteq G_t(A)$. La inclusion puede ser estricta. En efecto, sea el álgebra normada no completa de los polinomios sobre el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, $A = (\mathbb{P}(X); ||p|| = \max\limits_{0\leq x\leq \frac{1}{2}} |p(x)|)$. El polinomio $p(x) = 1 - x$

no es invertible pero si topológicamente invertible y su inverso topológico es $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)_{n\in\mathbf{N}}$, ya que

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1} \to 1, \text{ cuando } n \to \infty$$

3.2. Radio espectral topológico

Pretendemos generalizar los radios $R(x)$ y $\beta(x)$ usando el concepto de invertibilidad topológica. Para este fin definimos:

$$R_t(x) = \sup\{|\lambda| : (x - \lambda e) \text{ no es topológicamente invertible}\}$$

y

$$\beta_t(x) = \text{ínf}\{|\lambda| : \text{ para cada seminorma continua } ||\cdot||_\alpha \text{ existe una sucesión } (n_k(\alpha))_{k\in\mathbf{N}} \text{ tal que } \left\| \left(\tfrac{x}{\lambda}\right)^{n_k} \right\|_\alpha \to 0\}$$

Nota 3.2.1. Observemos que

$$\beta_t(x) = \text{ínf}\{|\lambda| : \text{ para cada seminorma continua } ||\cdot||_\alpha \text{ existe una sucesión } (n_k(\alpha))_{k\in\mathbf{N}} \text{ tal que } \left\| \left(\tfrac{e}{\lambda} + \tfrac{x}{\lambda^2} + \ldots + \tfrac{x^{n_k - 1}}{\lambda^{n_k}}\right)(\lambda e - x) - e \right\|_\alpha < \epsilon\}$$

En efecto, para todo $\epsilon > 0$ y para toda seminorma $||\cdot||_\alpha$,

$$\left\| e - \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{x}{\lambda^2} + \ldots + \frac{x^{n_k - 1}}{\lambda^{n_k}}\right)(\lambda e - x) \right\|_\alpha < \epsilon \Leftrightarrow \left\| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n_k} \right\|_\alpha < \epsilon$$

Esto implica que si $|\lambda| > \beta_t(x)$ entonces $(\lambda e - x)$ es topológicamente invertible.

En [4] Arizmendi definió el radio espectral extendido inferior para $x \in A$ (álgebra localmente convexa, completa y compleja)

$$R_*(x) = \sup_\alpha \liminf_n \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha}$$

y demostró que $R_*(x) = r_6(x)$ si A es una B_0-álgebra (es decir, localmente convexa, metrizable y completa).

Proposición 3.2.2. *Sea A un álgebra localmente convexa y $x \in A$. Entonces* $R_*(x) = \beta_t(x)$

Demostración: Si $|\lambda| > R_*(x)$ entonces $\liminf_n \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha} < \mu < |\lambda|$, para todo $\alpha \in \Gamma$ y para algún μ. Para todo $\alpha \in \Gamma$ existe $(n_k(\alpha))_{k \in \mathbf{N}}$ tal que $\sqrt[n_k]{\|x^{n_k}\|_\alpha} < \mu < |\lambda|$. Entonces $\|(\frac{x}{\lambda})^{n_k}\|_\alpha < (\frac{\mu}{|\lambda|})^{n_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$ y por lo tanto, $|\lambda| > \beta_t(x)$. Luego, $R_*(x) \geq \beta_t(x)$.

Si $R_*(x) > \beta_t(x)$ entonces existe λ tal que $R_*(x) > \lambda > \beta_t(x)$. Ahora, $R_*(x) > \lambda$ implica que existe $\alpha_0 \in \Gamma$ tal que $\lambda < \liminf_n \sqrt[n]{\|x^n\|_{\alpha_0}}$. Luego, el conjunto $\{n : \sqrt[n]{\|x^n\|_{\alpha_0}} < \lambda\}$ es finito.
Por otro lado, $\lambda > \beta_t(x)$ implica que para toda $\alpha \in \Gamma$, en particular, para $\alpha_0 \in \Gamma$, existe $(n_k(\alpha_0))_{k \in \mathbf{N}}$ tal que $\|(\frac{x}{\lambda})^{n_k}\|_{\alpha_0} \to 0$. Así, $\sqrt[n_k]{||x^{n_k}||_{\alpha_0}} < \lambda$ lo cual es una contradición. Por lo tanto, $R_*(x) = \beta_t(x)$. ∎

Para R_t y R_* tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.3. *Sea A un álgebra localmente convexa y $x \in A$. Entonces* $R_t(x) \leq R_*(x)$

Demostración: Observemos que si $|\lambda| > \beta_t(x)$ entonces $(x - \lambda e)$ es topológicamente invertible (por la nota (3.2.1)) lo que implica que $|\lambda| > R_t(x)$, y por lo tanto, $R_t(x) \leq \beta_t(x) = R_*(x)$. ∎

Observación 3.2.4. El corolario anterior la podemos demostrar en forma directa. En efecto, si $|\lambda| > R_*(x)$ entonces $\liminf_n \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha} < \mu < |\lambda|$ para todo $\alpha \in \Gamma$ y para algún μ. Para todo $\alpha \in \Gamma$ existe $(n_k(\alpha))_{k \in \mathbf{N}}$ tal que $\sqrt[n_k]{\|x^{n_k}\|_\alpha} < \mu < |\lambda|$. Entonces $\|(\frac{x}{\lambda})^{n_k}\|_\alpha < (\frac{\mu}{|\lambda|})^{n_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$, lo que implica que $(\frac{x}{\lambda} - e) \in G_t(A)$ y por lo tanto, $(x - \lambda e) \in G_t(A)$. Así que, $|\lambda| > R_t(x)$ y entonces $R_t(x) \leq R_*(x)$.

El siguiente resultado nos relaciona todos los radios espectrales y de acotación estudiados.

Corolario 3.2.5. *Sea A un álgebra localmente convexa y $x \in A$. Entonces*

$$R_t(x) \leq R_*(x) = \beta_t(x) \leq \beta(x) \leq R(x)$$

Demostración: Resta probar las últimas dos desigualdades. Si $|\lambda| > \beta(x)$ entonces $||(\frac{x}{\lambda})^n||_\alpha \to 0$. Tomando $n_k(\alpha) = n$ tenemos que $|\lambda| \geq \beta_t(x)$. Luego, $\beta_t(x) \leq \beta(x)$.

Demostremos que $\beta(x) \leq R(x)$. Si $|\lambda| > R(x)$ entonces por definición la función $(e - \lambda x)^{-1}$ es continua en cero. Sea $f \in A'$. Definamos la función $F(\lambda) = f[(e - \lambda x)^{-1}]$. Esta función es holomorfa si $R(x) < \frac{1}{|\lambda|}$. En efecto, $\frac{1}{|\lambda|} > R(x)$ implica que $(\frac{e}{\lambda} - x)^{-1} = \lambda(e - \lambda x)^{-1}$ es continua en $\lambda = 0$. Luego,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{(e - \lambda x)^{-1} - e}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda x(e - \lambda x)^{-1}}{\lambda} = x$$

De aquí tenemos que si $f \in A'$ entonces $f[(e - \lambda x)^{-1}] = f(x)$ es holomorfa si $R(x) < \frac{1}{|\lambda|}$. Demostremos que $F^{(n)}(\lambda) = n! f[x^n(e - \lambda x)^{-(n+1)}]$, lo cual implica que $F^{(n)}(0) = n! f(x^n)$, $n = 1, 2, ...$; $F(0) = f(e)$. Procederemos por inducción.

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(\lambda + h) - F(\lambda)}{h} \\ &= f\left(\lim_{h \to 0} \frac{hx[e - (\lambda + h)x]^{-1}(e - \lambda x)^{-1}}{h} \right) \\ &= f[x(e - \lambda x)^{-2}] \end{aligned}$$

Supongamos que el resultado es válido para $k = 1, 2, ...(n - 1)$. Probemos ahora para $k = n$.

$$\begin{aligned} F^{(n)}(\lambda) &= \lim_{h \to 0} \frac{F^{(n-1)}(\lambda + h) - F^{(n-1)}(\lambda)}{h} \\ &= f\left(\lim_{h \to 0} \frac{n! x^n h[(e - \lambda x)^{n-1} + P(h, \lambda, x)][e - (\lambda + h)x]^{-n}(e - \lambda x)^{-n}}{h} \right) \\ &= n! f[x^n(e - \lambda x)^{n-1}(e - \lambda x)^{-2n}] \\ &= n! f[x^n(e - \lambda x)^{-(n+1)}]; \end{aligned}$$

donde $P(h, \lambda, x)$ es un polinomio sin término independiente y tal que

$$\lim_{h \to 0} P(h, \lambda, x) = 0.$$

Puesto que la función $F(\lambda)$ es holomorfa en el disco $R(x) < \frac{1}{|\lambda|}$ entonces

$$F(\lambda) = f[(e - \lambda x)^{-1}] = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f(x^n)$$

Por lo tanto, $\lim_n f[(\lambda x)^n] = 0$. Es decir, la sucesión converge débilmente a cero. Luego, existe $M(\lambda) > 0$ tal que $||(\lambda x)^n||_\alpha \leq M(\lambda)$. Así, $(\lambda x)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. De aquí tenemos que $\frac{1}{|\lambda|} \geq \beta(x)$. Como $\frac{1}{|\lambda|} > R(x)$ entonces concluímos que $\beta(x) \leq R(x)$. ■

Notas 3.2.6. (1) Si A es una álgebra localmente convexa invertiva (esto es, $G_t(A) = G(A)$) entonces todos los radios anteriores son iguales.

(2) Las desigualdades pueden ser estrictas.

a) En [4] Arizmendi construye un ejemplo en el cual $R_*(x) = 1$ y $R(x) = \infty$.

b) $R_t(x) < R_*(x)$. Para ello veamos el siguiente ejemplo. Sea la B_0-álgebra de Arens (ejemplo 2.1.2)

$$L^\omega[0,1] = \bigcap_{p=1}^{\infty} L_p[0,1],$$

y consideremos la función $f(x) = x$. Entonces $0 \notin \sigma_t(f)$. Para ver esto, definamos la sucesión de funciones

$$g_n(x) = \chi_{[\frac{1}{n},1]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} ||fg_n - e||_p^p &= \int_0^1 |fg_n(x) - 1|^p dx \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^1\right)(|fg_n(x) - 1|^p)dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} dx \\ &= \frac{1}{n} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty \end{aligned}$$

Luego, $\sigma_t(f) = \emptyset$, y por lo tanto, $R_t(f) = 0$.

Sin embargo, si $\lambda > 1$ entonces

$$\left\|\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right)^n\right\|_p = \left\|\frac{x^n}{\lambda^n}\right\|_p \leq \left\|\frac{1}{\lambda^n}\right\|_p = \frac{1}{\lambda^n}\|1\|_p = \frac{1}{\lambda^n}\int_0^1 dx = \frac{1}{\lambda^n} \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. Esto implica que $\beta_t(f) = 1$. De esta forma se tiene que $R_t(f) < \beta_t(f) = R_*(f)$.

c) En el álgebra de los polinomios $A = (\mathbb{P}(t), ||\cdot||_\infty)$ sobre el intervalo $I = [0,1]$, hemos visto que $\beta(x) = 1$ mientras que $R(x) = \infty$ para el polinomio $p(x) = x$.

(3) La igualdad $\beta(x)$ y $\beta_t(x)$ no se tiene en álgebras localmente convexas seudo-completas con inversión continua ya que en este caso (véase [1],[7])

$$\beta(x) = R(x) = r_7(x) \geq r_6(x) \geq R_*(x) = \beta_t(x)$$

(4) Tampoco se tiene en una B_0-álgebra (véase [1],[7])

$$\beta(x) = R(x) = r_7(x) \geq r_6(x) = R_*(x) = \beta_t(x)$$

(5) En algunas álgebras tenemos igualdad entre los radios R_t y R_*

a) Sea $(C_b[0,1], ||\cdot||_\varphi)$, donde

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En este caso tenemos que $R_*(\varphi) = \liminf_n \sqrt[n]{\|\varphi^n\|_\varphi}$. Como

$$\|\varphi^n\|_\varphi = \sup_{0\leq x\leq 1} |\varphi^{n+1}(x)| = 1$$

entonces $R_*(\varphi) = 1$. Por otro lado, $\sigma_t(\varphi) = [0,1]$ y entonces $R_t(\varphi) = 1$. Es decir, $R_t(x) = R_*(x)$.

b) Sea $A = (\mathbb{P}(t), ||\cdot||_\infty)$ en $[0,1]$. Es normada (por tanto, loc. conv.) pero no completa. $R_*(x) = \liminf_n \sqrt[n]{\|x^n\|_\infty} = \liminf_n \sqrt[n]{1} = 1$. Por otro lado, $(\lambda e - x)$ es top. invertible si y sólo si $\lambda \notin [0,1]$. Luego, $R_t(x) = 1$.

Recordemos que en la definición de β_t, la sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ depende de la seminorma $||\cdot||_\alpha$. En el caso metrizable tenemos la siguiente:

Proposición 3.2.7. *Sea A un álgebra metrizable y $x \in A$. Entonces existe una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\|(\frac{x}{\lambda})^{n_k}\|_i \to 0$ cuando $k \to \infty$ para todas las seminormas $||\cdot||_i$ que definen la topología de A.*

Demostración: Sea $(\{||\cdot||_i\})_{i\in\mathbf{N}}$ una familia de seminormas tales que $||x||_i \leq ||x||_{i+1}$ para todo $x \in A$ y definamos $R_i = \liminf\limits_n \sqrt[n]{\|x^n\|_i}$. Entonces R_i es una sucesión creciente que converge a $R_*(x) = \beta_t(x)$. Para cada $p \in \mathbb{N}$ existe $i_p \geq 1$ tal que

$$R_*(x) - \frac{1}{p} < R_i < R_*(x) < R_*(x) + \frac{1}{p}, \text{ si } i \geq i_p$$

Así,

$$R_*(x) - \frac{1}{p} < \sqrt[n]{\|x^n\|_{i_p}} < R_*(x) + \frac{1}{p}$$

para una infinidad de índices n. Como A es metrizable podemos encontrar dos sucesiones estrictamente crecientes (i_p) y (n_k) de números naturales tales que $\lim\limits_k \sqrt[n_k]{\|x^{n_k}\|_{i_p}} = R_*(x) = \beta_t(x)$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > R_*(x)$. Entonces $0 < \frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{R_*(x)}$. Así, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n_k} \|_{i_p}$ es convergente y como (i_p) y $(||\cdot||_i)$ son sucesiones crecientes de seminormas en A se sigue que para todo $i \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n_k} \|_i$ es convergente. Esto implica que para todo $i \in \mathbb{N}$, $\| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n_k} \|_i \to 0$ cuando $k \to \infty$. Como $|\lambda| > R_*(x) = \beta_t(x)$ entonces $(x - \lambda e)$ es topológicamente invertible. ■

Observación 3.2.8. Si A es un álgebra localmente convexa y metrizable podemos definir

$$\beta_t(x) = \inf \left\{ |\lambda| : \forall ||\cdot||_i \;\; \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ tal que } \| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n_k} \|_i \to 0 \right\}$$

Por lo tanto, si $|\lambda| > \beta_t(x)$ entonces $(x - \lambda e)$ es topológicamente invertible y su inverso es de la forma

$$(x - \lambda e)^{-1} = \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{x}{\lambda^2} + ... + \frac{x^{n_k}}{\lambda^{n_k+1}} \right)_{k\in\mathbb{N}}$$

Sin embargo, los inversos topológicos no siempre tienen esta forma. Por ejemplo, si $A = (\mathbb{P}(t), ||\cdot||_\infty)$ en $I = [0,1]$ y $p(t) = t$ entonces $(t-\lambda e)^{-1} = \frac{1}{t-\lambda}$ es continua en I y por el teorema de Stone-Wierstrass, para todo $\epsilon > 0$ existe una sucesión $P_n(t)$ de polinomios tales que

$$\|\frac{1}{t-\lambda} - P_n(t)\|_\infty < \epsilon' \Leftrightarrow \|e - (t-\lambda)P_n(t)\|_\infty < \|t-\lambda\|_\infty \epsilon' < \epsilon$$

donde $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\|t-\lambda\|_\infty}$. Cláramente $P_n(t)$ es el inverso topológico de $(t-\lambda e)$ pero no tiene la forma anterior.

Capítulo 4

Radio espectral en $(C_b(X), \beta)$

Sea X un espacio de Hausdorff completamente regular. Denotemos por $(C_b(X), \beta)$ el álgebra localmente convexa de todas las funciones complejas y acotadas sobre X, dotada con la topología estricta β dada por la familia de seminormas

$$||f||_\varphi = \sup_{x \in X} |f(x)\varphi(x)|$$

donde φ es una función de $B_0(X)$, el conjunto de todas las funciones acotadas sobre X que se anulan en infinito (es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K(\epsilon) \subset X$ tal que $|\varphi(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K(\epsilon)$)

Probamos, entre otras cosas, que la topología dada por la familia de seminormas $\{(|| \cdot ||_\varphi)_{op},\ \varphi \in B_0(X)\}$ es tal que

$$(||f||_\varphi)_{op} = \sup\{|f(x)| : x \in sop(\varphi)\}$$

4.1. X un espacio completamente regular y φ una función de $B_0(X)$

Para $f \in C_b(X)$ definimos su radio espectral extendido por

$$R(f) = \sup_{\varphi \in B_0(X)} \limsup_n \sqrt[n]{||f^n||_\varphi}$$

Antes de enunciar el resultado principal demostremos el siguiente

Lema 4.1.1. *Sea $f \in C_b(X)$ y $\alpha > 0$. Entonces $||f||_\infty^\alpha = ||f^\alpha||_\infty$; donde $||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$*

Demostración: Como $||f||_\infty \geq |f(x)| \geq 0$ para toda $x \in X$ y la función t^α es creciente, entonces $||f||_\infty^\alpha \geq |f^\alpha(x)| \geq 0$ para toda $x \in X$ concluyendo así que $||f||_\infty^\alpha \geq ||f^\alpha||_\infty$. Veamos la otra desigualdad.
Observemos que $||f^\alpha||_\infty \geq |f^\alpha(x)|$ para toda $x \in X$ y como la función $t^{\frac{1}{\alpha}}$ es creciente, entonces $||f^\alpha||_\infty^{\frac{1}{\alpha}} \geq |f(x)| \geq 0$ para toda $x \in X$ de donde se sigue que $||f^\alpha||_\infty^{\frac{1}{\alpha}} \geq ||f||_\infty$, y por lo tanto, $||f^\alpha||_\infty \geq ||f||_\infty^\alpha$ ■

Proposición 4.1.2. *Sea $f \in C_b(X)$. Entonces*

(1) $R(f) = \sup\{|f(x)| : x \in sop(\varphi)\}$

(2) $R(f) = \lim_n \sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi}$

(3) $\sup\{R_\varphi : \varphi \in B_0(X)\} = \|f\|_\infty$

(4) $R(f) = (\|f\|_\varphi)_{op} := \sup_{||g||_\varphi \leq 1} ||fg||_\varphi$

Demostración: Demostremos (1) y (2). De la definición de $|| \cdot ||_\varphi$ y utilizando el lema anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi} &= \sqrt[n]{\sup_{x\in X} |f^n(x)\varphi(x)|} \\
&= \sqrt[n]{\sup_{x\in sop(\varphi)} |f^n(x)\varphi(x)|} \\
&\leq \sup_{x\in sop\varphi} |f(x)| \sqrt[n]{\sup_{x\in sop\varphi} |\varphi(x)|} \\
&\leq \sup_{x\in sop\varphi} |f(x)| \sqrt[n]{K_\varphi}
\end{aligned}$$

Luego,

$$R(f) = \limsup_n \sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi} \leq \sup_{x\in sop(\varphi)} |f(x)|$$

Sea ahora $M = \sup\{|f(x)| : x \in sop(\varphi)\}$, y consideremos r arbitraria tal que $M > r$. Sea $x_1 \in sop(\varphi) = \overline{\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}}$ y tal que $|f(x_1)| > s > r$. Por la continuidad de f existe un $\delta > 0$ tal que $|x - x_1| < \delta$ implica que $|f(x)| > s > r$. Como $x_1 \in sop(\varphi)$ entonces existe x_0 con $|x_0 - x_1| < \delta$ tal que $\varphi(x_0) \neq 0$. Como también $0 < \frac{r}{s} < 1$ entonces existe n tal que $\sqrt[n]{\varphi(x_0)} > \frac{r}{s}$. De ahí que , $|f(x_0)| \sqrt[n]{\varphi(x_0)} > s\frac{r}{s} = r$, concluyéndose así que,

$$\sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi} \geq \sqrt[n]{f^n(x_0)\varphi(x_0)} = |f(x_0)| \sqrt[n]{|\varphi(x_0)} > r$$

Por lo tanto, $\liminf_n \sqrt[n]{||f^n||_\varphi} \geq r$ para toda $M > r$ y entonces existe $\lim_n \sqrt[n]{||f^n||_\varphi}$ y además $\lim_n \sqrt[n]{||f^n||_\varphi} = M$

(3) Tenemos por (2) que $R(f) \leq \|f\|_\infty$ para toda $\varphi \in B_0(X)$, de aquí que

$$\sup_{\varphi \in B_0(X)} R(f) \leq \|f\|_\infty$$

Sea ahora r tal que $r < \|f\|_\infty$ y demostremos que existe $\varphi \in B_0(X)$ tal que $r < R(f) \leq ||f||_\infty$. Como $r < \|f\|_\infty$ existe $x_1 \in X$ tal que $r < |f(x_1)|$. Definamos $\varphi(x_1) = 1$ y $\varphi(x) = 0$ para todo $x \neq x_1$. Cláramente φ es una función acotada que se anula al infinito y cumple que $r < R(f) = |f(x_1)|$.

(4) Observemos que

$$\begin{aligned}
(\|f\|_\varphi)_{op} &:= \sup_{\|g\|_\varphi \leq 1} \sup_{x \in X} |(fg\varphi)(x)| \\
&= \sup_{\|g\|_\varphi \leq 1} \sup_{x \in sop(\varphi)} |(fg\varphi)(x)| \\
&\leq \sup_{\|g\|_\varphi \leq 1} \sup_{x \in sop(\varphi)} |f(x)| \sup_{x \in sop(\varphi)} |(g\varphi)(x)| \\
&= \sup_{x \in sop(\varphi)} |f(x)| \sup_{\|g\|_\varphi \leq 1} \sup_{x \in X} |(g\varphi)(x)| \\
&= R(f) \sup_{\|g\|_\varphi \leq 1} \|g\|_\varphi \\
&= R(f).
\end{aligned}$$

Para ver la otra desigualdad veamos que $\|f\|_\varphi \leq K_\varphi(\|f\|_\varphi)_{op}$ para toda $f \in C_b(X)$. En efecto, $(\|f\|_\varphi)_{op} = \sup_{\|g\|_\varphi \neq 0} \frac{\|fg\|_\varphi}{\|g\|_\varphi} \geq \frac{\|fg\|_\varphi}{\|g\|_\varphi}$. En particular, se cumple para $g \equiv 1$. Entonces $(\|f\|_\varphi)_{op} \geq \frac{\|f\|_\varphi}{\|1\|_\varphi}$, de donde tenemos que $\|f\|_\varphi \leq \|1\|_\varphi(\|f\|_\varphi)_{op}$ $(K_\varphi = \|1\|_\varphi)$.

Además, como $(C_b(X), (|| \cdot ||_\varphi)_{op})$ es un álgebra $m - convexa$ entonces

$$r_\varphi^{op}(f) = \lim_n \sqrt[n]{(||f^n||_\varphi)_{op}}$$

y por lo tanto, $r_\varphi^{op}(f) \leq (||f||_\varphi)_{op}$.

Luego,

$$\begin{aligned}
R(f) &= \limsup_n \sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi} \\
&\leq \limsup_n \sqrt[n]{K(\varphi)\|f^n\|_\varphi} \\
&= \limsup_n \sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi} \\
&= \lim_n \sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi} \\
&= r_\varphi^{op}(f) \\
&\leq (\|f\|_\varphi)_{op}
\end{aligned}$$

■

Es claro de (1) que

Corolario 4.1.3. *Sean f y g en $C_b(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces*

(1) $R(\lambda f) = |\lambda| R(f)$

(2) $R(f+g) \leq R(f) + R(g)$

(3) $R(fg) \leq R(f)R(g)$

Es decir, R es una seminorma submultiplicativa.

4.2. $X = [0,1]$ y φ una función dada

Sea

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Observemos que en esta álgebra los elementos invertibles son aquellos que no se anulan en ningún punto de $[0,1]$.

Demostremos la siguiente

Proposición 4.2.1. *Sea $f \in C_b(X)$. Entonces*

(1) $R(f) = \|f\|_\infty$

(2) $R(f) = \lim_n \sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi}$

(3) $(\|f\|_\varphi)_{op} = \|f\|_\infty$

Demostración: Veamos (1) y (2). Observemos que

$$\sqrt[n]{\|f^n\|\varphi} = \sqrt[n]{\max_{0\leq x\leq 1}|f^n(x)\varphi(x)} = \sqrt[n]{|f^n(x_0)\varphi(x_0)|} = |f(x_0)|\sqrt[n]{\varphi(x_0)},$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado la continuidad de f y de φ. Por lo tanto, $\limsup_n \sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi}$ existe y $R(f) := \limsup_n \sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi} \leq \|f\|_\infty$. Veamos ahora que $R(f) < \|f\|_\infty$ no puede darse. Supongamos que fuera cierto. Sea $\|f\|_\infty = |f(x_1)|$ para algún $x_1 \in [0,1]$. Sea r tal que $|f(x_1)| > r$. Entonces por la continuidad de f existe un $\delta > 0$ tal que $|x - x_1| < \delta$ implica que $|f(x)| > s > r$. Así mismo existe x tal que $|x - x_1| < \delta$ y $\varphi(x) \neq 0$. Como $0 < \frac{r}{s} < 1$, $\varphi(x) \neq 0$ y $\varphi(x) \leq 1$, entonces existe n tal que $\sqrt[n]{\varphi(x)} > \frac{r}{s}$ lo que implica que $|f(x)|\sqrt[n]{\varphi(x)} > s\frac{r}{s} = r$. Luego,

$$\sqrt[n]{\|f^n\|_\varphi} \geq \sqrt[n]{|f^n(x)|\varphi(x)} = |f(x)|\sqrt[n]{\varphi(x)} > r$$

Así, $R(f) > r$ para todo $r < \|f\|_\infty$ concluyendo de aquí que existe $\lim_n \sqrt[n]{||f^n||_\varphi}$ y $R(f) = ||f||_\infty$.

(3) $(\|f\|_\varphi)_{op} = \sup_{\|g\|_\varphi \leq 1} \|fg\|_\varphi = R(f)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sup_{\|g\|_\varphi\leq 1}\|fg\|_\varphi &= \sup_{\|g\|_\varphi\leq 1}\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)g(x)\varphi(x)| \\
&\leq \sup_{\|g\|_\varphi\leq 1}\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|\max_{0\leq x\leq 1}|g(x)\varphi(x)| \\
&= \max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|\sup_{\|g\|_\varphi\leq 1}\max_{0\leq x\leq 1}|g(x)\varphi(x)| \\
&= \|f\|_\infty \sup_{\|g\|_\varphi\leq 1}\|g\|_\varphi \\
&= \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

Sean ahora $I = [0,1]$, $I_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ y la función

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(x)} & \text{si } x \in I_n \\ \frac{1}{\varphi(\frac{1}{n})} & \text{si } \ x \in I \setminus I_n \end{cases}$$

Demostremos que:
(a) $\|\varphi_n\|_\varphi \leq 1$

(b) $f(\varphi_n \varphi) \to \|f\|_\infty$

Observemos que

$$\varphi_n(x)\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I_n \\ \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(\frac{1}{n})} & \text{si } x \in I \setminus I_n \end{cases}$$

Pero $\varphi(x) \leq \varphi(\frac{1}{n})$ y entonces $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(\frac{1}{n})} \leq 1$. Por lo tanto,

$$\|\varphi_n\|_\varphi = \max_{0 \leq x \leq 1} \varphi_n(x)\varphi(x) = 1$$

Esto prueba (a).

Por otro lado, si $x \in I_n$, $|f(x)| = |f(x)\varphi_n(x)\varphi(x)|$ y en otro caso $|f(x)\varphi_n(x)\varphi(x)| = |f(x)\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(\frac{1}{n})}| \leq |f(x)|$. Así, $|(f\varphi_n\varphi)(x)| \leq \|f\|_\infty$. Ahora, si $r < \|f\|_\infty$ entonces existe I_N tal que $r < \sup_{x \in I_N} f(x)$. Luego, para $n > N$ y para todo $x \in I_n \supset I_N$,

$$r < \sup_{x \in I_N} f(x) \leq \sup_{x \in I_n} f(x) \leq \|f\varphi_n\|_\varphi \leq (\|f\|_\varphi)_{op}$$

Pero $(\|f\|_\varphi)_{op} \leq \|f\|_\infty$ y como r es arbitraria entonces $(\|f\|_\varphi)_{op} = \|f\|_\infty$ ■

R es el radio espectral de $(C_b[0,1], \beta)$, ya que para $|\lambda| > ||f||_\infty$ se sigue que $(f - \lambda e)$ es invertible. Es decir, se cumple que

$$R(f) = \sup\{|\lambda| : (f - \lambda e) \text{ no es invertible}\}$$

y además se tiene que su inverso es de la forma

$$(f - \lambda e)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{\lambda^{n+1}}$$

Ejemplo 4.2.2. No necesariamente $R(f) = \inf_{m \geq 1} \sqrt[m]{\|f^m\|_\varphi}$
En efecto, definamos la función

$$f(x) = \begin{cases} -nx + (1 + \frac{1}{\varphi(\frac{1}{n})}) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\varphi(x)} & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ nx + (1 + \frac{1}{\varphi(\frac{1}{n})} - n) & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Entonces $R(f) = \|f\|_\infty = 1 + \frac{1}{\varphi(\frac{1}{n})} > 1$, mientras que $\inf_m \sqrt[m]{\|f^m\|_\varphi} \leq 1$. Para $m = 1$ se puede observar que $\max_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} f(x)\varphi(x) = 1$ ya que el único punto crítico de la función $f(x)\varphi(x)$ es $x = \frac{1}{2n}(1 + \frac{1}{\varphi(\frac{1}{n}}) \geq \frac{1}{2n}(1+1) = \frac{1}{n}$ y aquí tenemos que $f(x)\varphi(x) = 1$.

Por lo tanto, como $\inf_{m \geq 1} \sqrt[m]{\|f^m\|_\varphi} \leq \sqrt[m]{\|f^m\|_\varphi}$, para todo m, entonces en particular para $m = 1$, $\|f\|_\varphi = 1$.

Bibliografía

[1] G.R. Allan, A spectral theory for locally convex algebras, Proc. London Math. Soc. (3) 15, (1965), 399-421.

[2] E. A. Michael, Locally multiplicatively convex topological algebras, Memoirs Amer. Math. Soc. 11, Providence, 1952

[3] Richard Arens, Linear Topological Division Algebras, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. (1947), 623-630

[4] H. Arizmendi, On the spectral radius of a matrix algebras, Functiones et Approximatiao, Comment. Math.,vol XIX, (1990),167-176.

[5] H. Arizmendi, A. Carrillo, On the extended spectral radius in B_0-álgebras, Functiones et Approximatiao, Comment. Math.,vol XIX, (1990), 77-81.

[6] H. Arizmendi, A. Carrillo, L. Palacios, On Q_t-álgebras, Contemporany Mathematics, Vol. 427, (2007), 49-55.

[7] H. Arizmendi, K. Jarosz, Extended Spectral Radius in Topological algebras, Rocky Mountain, Journal of Mathematics, vol. 23, number 4, (1993), 1179-1195.

[8] H. Arizmendi, R. Pérez, J. Roa, On the spectral radii in $(C_b(X), \beta)$ and the $M(\beta)$ topology, Proc. of the Int. Conf. on Top. Alg. and Their Appli., ICTAA (2008), 29-33

[9] F.F Bonsall, J. Duncan, Complete normed algebras, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1973.

[10] R. Choukri, Sur Certains Questions Concernant Les $Q-$algebres, Extracta Mathematicae, Vol. 16, Num. 1, (2001), 79-82.

[11] A. El Kinani, L. Oubbi, M. Oudadess, Spectral and boundedness radii in locally convex algebras, Georgian Math. Journal, vol. 5, (1998), 233-241.

[12] E. El Kinani, M. Oudadess, $m-$convex properties in locally convex algebras, Bulletin of the Belgian Math. Soc.

[13] Ronald Larsen, Banach Algebras: An introduction, M. Dekker, New York, 1973

[14] A. Mallios, Topological algebras, selected topics, Elsevier Science Publisher B.V., 1986.

[15] Vania Mascioni, Some characterizations of complex normed $Q-$algebras, El. Math., vol. 42, (1987), 10-14

[16] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill publishing company LTD, New Delhi, (1973)

[17] W. Żelazko, Banach Algebras, Elsevier Publishing Company, (1973)

[18] W. Żelazko, On the locally bounded and $m-$convex topological algebras, Studia Mathematica, tomo XIX, (1960), 333-355.

[19] W. Żelazko, Selected topics in topological algebras, Lect. notes series 31, Matimatisk Institut Aarthus Universiet-Aarthus, (1971)