



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DISIPACIÓN Y TRANSPORTE DE ENERGÍA
EN MATERIALES CON REFRACCIÓN NEGATIVA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

CARLOS PRIETO LÓPEZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

TUTOR
DR. RUBÉN GERARDO BARRERA PÉREZ

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hola de Datos del Jurado

<p>1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta</p>	<p>1. Datos del alumno Prieto López Carlos 24874770 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 301897279</p>
<p>2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>2. Datos del tutor Dr. Rubén Gerardo Barrera Pérez</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>3. Datos del sinodal 1 Dr. Eugenio Ley Koo</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>4. Datos del sinodal 2 M. en C. Ignacio Campos Flores</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>5. Datos del sinodal 3 Dra. Karen Volke Sepúlveda</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>6. Datos del sinodal 4 M. en C. José Luis Jiménez Ramírez</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito Título Subtítulo Número de páginas Año</p>	<p>7. Datos del trabajo escrito Disipación y transporte de energía en materiales con refracción negativa 123 2009</p>

A Virginia.

“Juntarse: esta es la palabra del mundo.”

José Martí

Agradecimientos

Me resisto a realizarlos por escrito. Tiempo y Conciencia dirán si mis actos fueron de gratitud.

Índice general

Introducción	1
1. Electrodinámica en medios materiales	3
1.1. El problema de los materiales	3
1.2. La visión macroscópica	4
1.2.1. Cargas, corrientes y momentos inducidos	6
1.3. Interpretación de \vec{P} y \vec{M}	8
1.3.1. Caso estático	8
1.3.2. Caso dinámico	9
2. Medios disipadores	13
2.1. Modelo de respuesta lineal	13
2.2. Los campos electromagnéticos en el espacio de frecuencias	15
2.3. El transporte de la energía electromagnética	18
2.3.1. El balance de energía en el vacío	18
2.3.2. El vector de Poynting en medios materiales	19
2.3.3. El flujo promedio de energía. Intensidad luminosa	20
2.4. La ecuación de onda	21
2.5. Ondas electromagnéticas en medios absorbentes	22
2.5.1. La relación de dispersión	23
2.6. Electrodinámica en presencia de disipación	25
2.6.1. Los campos	25
2.6.2. La disipación	27
2.6.3. Atenuación. Longitud de penetración	28

2.6.4. Signos de ϵ' y μ'	29
2.6.5. Índice de refracción	30
2.6.6. Dirección del flujo de energía	32
3. Refracción en medios disipadores	35
3.0.7. Ángulos de incidencia y de refracción	37
3.0.8. Atenuación normal	37
3.0.9. Magnitud de $\mu' \vec{k}' + \mu'' \vec{k}''$	38
3.1. n_1 real, n_2 real	38
3.2. n_1 real, n_2 complejo	40
3.3. n_1 complejo, n_2 real	51
4. Electrodinámica en medios inhomogéneos	57
4.1. Teoría del medio efectivo	57
4.1.1. La relación de Clausius-Mosotti	59
4.2. Metamateriales	62
5. Aplicaciones	73
5.1. La esfera	73
5.2. La lente perfecta	82
6. ¿Está todo mal?	95
Conclusiones	99
Anexos	101
A1. Interpretación física de \vec{P} y \vec{M}	101
A2. Transformada de Fourier	104
A3. Relación (3.9) en términos de Θ_1	105
A4. Solución al sistema de ecuaciones (3.9)	107
A5. Solución al sistema de ecuaciones (3.19)	108
A6. La función sgn	108
A7. $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ ¿ \vec{u} , \vec{w} ?	109
Bibliografía	110

Introducción

En ocasiones, el amplio desarrollo de algunas teorías físicas puede hacer pensar que todo lo importante acerca de ciertos problemas está dicho, y que, si bien estos pueden plantearse de una manera más realista o general, su comportamiento esencial está comprendido.

Los fenómenos luminosos, que han sido observados y han sido objeto de admiración para el hombre desde tiempos muy antiguos, fueron estudiados en términos científicos desde antes del siglo XVII, en el cual se estableció experimentalmente la descripción cuantitativa de los fenómenos de reflexión y refracción. La gran revolución que constituyó la teoría de Maxwell en el XIX logró recuperar estos resultados, predecir muchos otros, y examinar estos fenómenos desde una perspectiva increíblemente general y elegante.

Fue sin embargo hasta 1967 que alguien tuvo la idea de imaginar –en el contexto científico– la existencia de materiales con propiedades ópticas interesantemente distintas, bajo una suposición matemáticamente sencilla. En ese año, Víctor Veselago se pregunta en un artículo [1] qué sucedería con un material transparente en el cual la permisividad eléctrica ϵ y la permeabilidad magnética μ fueran simultáneamente negativas. Muestra que, contrario a lo que podría esperarse, en tales materiales el vector de Poynting de una onda plana apunta en dirección opuesta al vector de onda, y, en consecuencia, estos deberían exhibir ángulos de refracción negativos al paso de la luz desde medios usuales.

Naturalmente no conocemos materiales con propiedades como las que supuso Veselago, así que su escrito fue tomado por un bonito ejercicio teórico. Tres décadas más tarde, John Pendry, del Imperial College del Reino Unido, hace una propuesta para construir un dispositivo, compuesto de una serie de alambres y anillos de cobre, abiertos y de tamaño submilimétrico, acomodados periódicamente en una resina inerte; el diseño de ese dispositivo debería permitir, según sus predicciones, que luz en la región de microondas *viera* a esta construcción como un medio con las propiedades supuestas por el físico ruso.

Se vio entonces como una posibilidad real la fabricación de dispositivos ópticos muy especiales, como lentes con enfoque perfecto y capas de invisibilidad. Al nuevo campo de estudio llegó una pléyade de investigadores, entusiasmados con el potencial de estas y otras predicciones. Desde entonces se han realizado y pu-

blicado diversos experimentos en los que se mide la refracción negativa en estos *metamateriales*.

En el mismo sentido hubo voces críticas que mostraron que dichos resultados experimentales podían no tener la contundencia y claridad que se postulaba, y se ha generado una candente discusión, encabezada de un lado por [el ahora Sir.] John Pendry. Algunas de las objeciones han sido solucionadas exitosamente; sin embargo, hay algunos planteamientos importantes aún no respondidos. Los más relevantes cuestionan la validez de los resultados de Veselago en la inevitable presencia de disipación, y la aplicabilidad de la asignación de parámetros promedio a los metamateriales cuando las dimensiones características de sus componentes no son mucho más pequeñas que la longitud de la onda de la luz incidente. En el sentido de la primera objeción, un trabajo reciente [Barrera et. al] muestra que los efectos de esparcimiento, al ser tomados en cuenta para calcular parámetros *efectivos* de un medio, contribuyen a la disipación.

Dada la importancia y actualidad del tema, en el presente trabajo se decidió determinar si tiene sentido hablar de refracción negativa en un material con disipación arbitraria, analizar bajo qué condiciones podría observarse, y estudiar cuantitativa y conceptualmente los efectos que conlleva la pérdida de energía en la refracción. Para ese fin, fue necesario realizar una revisión rigurosa de los conceptos indispensables para plantear dicho problema óptico, para determinar la generalidad de ciertos resultados, y observar los cambios que en el desarrollo se presentan al permitir los cambios de signo que requirió Veselago.

Así, en el texto reviso primero las aproximaciones que están detrás de la teoría electromagnética macroscópica, y la interpretación y propiedades de las funciones respuesta de los medios materiales. Después estudio las modificaciones que se dan a la electrodinámica en presencia de disipación, por ejemplo, en el vector de Poynting. Suponiendo posteriormente la existencia de los materiales izquierdos, analizo la refracción en materiales absorbentes y las correcciones que se deben hacer en la Ley de Snell, y lo aplico en algunos cálculos numéricos. Posteriormente, presento una introducción a los metamateriales y la teoría del medio efectivo. Hecho esto, aplico los resultados obtenidos a dos arreglos ópticos específicos, simulando los efectos de la disipación, y utilizando los valores de esta reportada para algunos metamateriales reales.

Mientras finalizaba este trabajo, apareció un artículo de Vadim A. Markel, quien argumenta muy sólidamente que la definición usual del vector de Poynting es incorrecta en los medios materiales, lo que reduce la refracción negativa a una contradicción termodinámica. No habiendo hasta el momento encontrado un error en la exposición, presento sus argumentos principales y sugiero una manera de detectar, en base a los resultados del trabajo, diferencias que podrían determinar la validez de una u otra definición.

Capítulo 1

Electrodinámica en medios materiales

1.1. El problema de los materiales

Las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{e} &= \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \vec{b} &= 0 \\ \nabla \times \vec{e} + \partial_t \vec{b} &= \vec{0} \\ \nabla \times \vec{b} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{e} &= \mu_0 \rho \vec{v}\end{aligned}$$

describen el comportamiento de los campos eléctricos \vec{e} y magnéticos \vec{b} en el vacío, dadas sus fuentes: las cargas ρ moviéndose a velocidad \vec{v} . La fuerza de Lorentz \vec{f} describe la interacción de estos campos con partículas cargadas.

$$\vec{f} = q(\vec{e} + \vec{v} \times \vec{b})$$

Para conocer la respuesta de un material a un campo aplicado, se puede partir del hecho de que la materia está formada por partículas cargadas. Visto así, desde el punto de vista microscópico, hay un problema dinámico a resolver, en el que se deben plantear las ecuaciones de movimiento para cada partícula (o las ecuaciones de onda, en el caso cuántico), considerando tanto el efecto de los campos externos sobre éstas, como los efectos del campo generado por ellas mismas.

Bajo ciertas circunstancias teóricas o experimentales, se puede considerar que el efecto de los campos generados por las partículas que componen el material sobre las fuentes del campo aplicado no es relevante; por ejemplo, si hay una distribución de cargas ajenas al material obligadas mecánicamente a permanecer en una configuración predeterminada, o se tiene una fuente de corriente que genera un campo

con una intensidad mucho mayor a la respuesta del material, o simplemente, se supone que se tiene un campo dado. No obstante, aún bajo esta suposición debe resolverse el problema de la interacción del campo externo con las partículas que constituyen el material, y la interacción de éstas. Esto representa un problema de enorme complejidad, no sólo por ser una situación de interacción de muchos cuerpos, sino porque los campos electromagnéticos dependen tanto de la posición como del tiempo -y además en forma retardada-.

En el caso clásico, las ecuaciones de movimiento para N partículas con masas m_k , posiciones \vec{r}_k y cargas q_k expuestas a campos externos \vec{e}_0 y \vec{b}_0 toman la siguiente forma [2, 26.3]:

$$\begin{aligned} \frac{m_k}{q_k} \ddot{\vec{r}}_k(t) &= \vec{e}_0(\vec{r}_k(t), t) + \dot{\vec{r}}_k(t) \times \vec{b}_0(\vec{r}_k(t), t) \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq k} q_i \left(\frac{\vec{r}_{i,k}(t_r)}{r_{i,k}^3(t_r)} + \frac{r_{i,k}}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}_{i,k}(t_r)}{r_{i,k}^3(t_r)} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{r}_{i,k}(t_r)}{dt^2} \right) \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi c} \sum_{i \neq k} q_i \left(\frac{\vec{r}_{i,k}(t_r)}{c} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}_{i,k}(t_r)}{r_{i,k}^3(t_r)} \right) + \frac{\vec{r}_{i,k}(t_r)}{r_{i,k}(t_r)c^2} \times \frac{d^2 \vec{r}_{i,k}(t_r)}{dt^2} \right) \times \dot{\vec{r}}_k(t) \\ k &\in \{1, \dots, N\} \end{aligned}$$

En donde, para abreviar, hemos llamado $\vec{r}_{i,k}$ al vector que apunta de la posición de la partícula i a la de la partícula k , es decir $\vec{r}_k - \vec{r}_i$, y t_r al *tiempo retardado*: el tiempo presente, menos el que le tomaría a la luz viajar la distancia que separa dichas partículas:

$$t_r(t, r_{i,k}) := t - \frac{r_{i,k}}{c}$$

En suma, aún en el caso clásico, tenemos un conjunto de N ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales, acopladas. Además, a diferencia de un problema típico en donde se requieren conocer posición y velocidad en algún instante del movimiento para resolver el sistema de manera única, esta dependencia con los tiempos anteriores obliga a conocer la historia del movimiento de cada partícula para poder determinar su movimiento en el futuro.

Aunque hay esfuerzos por resolver el problema así planteado, existen otras formas de abordarlo, que tienen en cuenta además que las propiedades de un sistema *grande* no requieren del conocimiento detallado de los componentes.

1.2. La visión macroscópica

Nuestros sentidos, así como los aparatos que utilizamos para medir, tienen limitaciones de funcionamiento: en escalas, en tiempos de respuesta, en alcance. Por ejemplo, en el problema dinámico de los componentes fundamentales de la materia que recién enunciamos, la carga de cada partícula está concentrada en un punto (y así es, hasta donde sabemos, para las partículas como el electrón), lo que lleva a

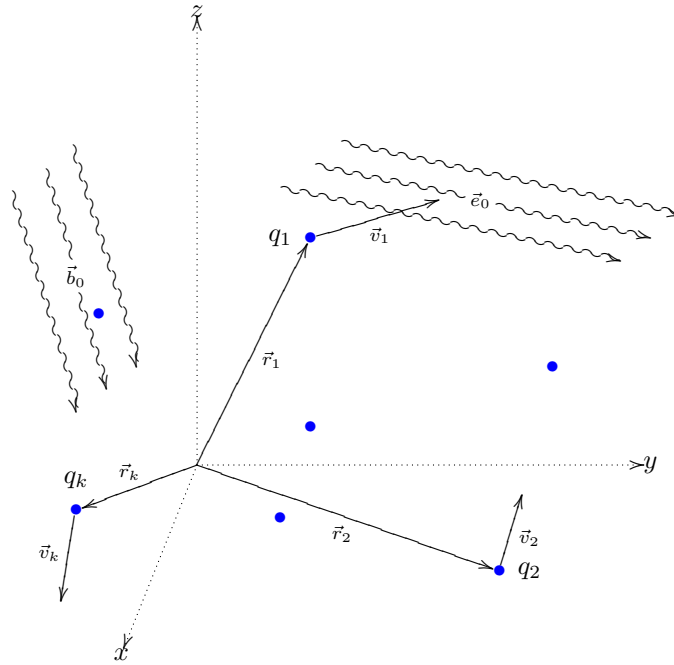


Figura 1.1: El material, sujeto a campos externos \vec{e}_0 y \vec{b}_0 , visto microscópicamente.

que la densidad microscópica ϱ siempre esté dada por

$$\varrho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

siendo δ la distribución de Dirac.

Hay varios efectos que nos impiden medir esta densidad en una situación no controlada. Por ejemplo, los diminutos valores de las cargas fundamentales hace difícil detectarlas si no hay acumulación de estas; el movimiento continuo de los constituyentes de la materia y la consecuente imposibilidad práctica de seguirlos; y la modificación de sus trayectorias al realizar una medición. Esto tiene como consecuencia que las variaciones en esta densidad microscópica, así como en la corriente y los campos, no sean detectadas en detalle, sino como una acumulación de los efectos ocurridos en un intervalo de tiempo y un espacio determinados por el experimento.

Estos procesos de medición nos dan versiones macroscópicas, promedio de las cantidades originales. El proceso específico por el cual se realiza dicho promedio depende de cada medición, pero siempre tiene como consecuencia un suavizamiento. En adelante nos ocuparemos de las cantidades macroscópicas asociadas a las

ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\rho &= \langle \varrho \rangle \\ \vec{J} &= \langle \varrho \vec{v} \rangle \\ \vec{E} &= \langle \vec{e} \rangle \\ \vec{B} &= \langle \vec{b} \rangle\end{aligned}$$

Atender estas cantidades no sólo es necesario para hacer compatibles las observaciones y las predicciones, sino útil para hablar de propiedades que microscópicamente podrían ni siquiera tener sentido, y para las cuales el detalle del movimiento de cada partícula es irrelevante.

Cada uno de estos procesos de medición van acompañados de fluctuaciones, relacionadas con la desviación estadística de las cantidades microscópicas. La electrodinámica clásica no se ocupa de estudiar estas fluctuaciones, pues siempre son despreciables en comparación de los promedios.

1.2.1. Cargas, corrientes y momentos inducidos

Un efecto que se da por la proporción de las escalas atómicas y moleculares a las nuestras, es que lo que vemos y medimos cotidianamente es materia neutra. La exposición de esta a un campo se manifiesta, sin embargo, como una carga y corriente inducida, o, equivalentemente, densidades de ellas. Estas, por supuesto, son fuentes -junto con las fuentes externas- del campo neto. Bajo la hipótesis de que las fuentes externas no se combinan con las inducidas, la densidad de carga y corriente en cada punto se pueden escribir como la suma de la externa y la inducida:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{ext} + \rho_{ind} \\ \vec{J} &= \vec{J}_{ext} + \vec{J}_{ind}\end{aligned}$$

La ley de Ampère-Maxwell implica la conservación de la carga, expresada en la ecuación de continuidad:

$$0 = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{J} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}) = \nabla \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \partial_t (\nabla \cdot \vec{E}) = \nabla \cdot \vec{J} + \partial_t \rho$$

En situaciones en las que las cargas inducidas y externas no se intercambian, se cumple esta ecuación de continuidad para cada uno de los tipos de carga y corriente:

$$\begin{aligned}0 &= \nabla \cdot \vec{J}_{ext} + \partial_t \rho_{ext} \\ 0 &= \nabla \cdot \vec{J}_{ind} + \partial_t \rho_{ind}\end{aligned}$$

Con estas condiciones, siempre es posible buscar una función cuya divergencia sea igual a la densidad de carga inducida (o su negativo), digamos

$$-\rho_{ind} = \nabla \cdot \vec{P}$$

Dado que se busca que este vector tenga un significado relevante para el problema de la respuesta del material, se puede pedir además que fuera del mismo se anule. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de continuidad para la carga inducida, se tiene que

$$0 = \nabla \cdot \vec{J}_{ind} + \partial_t(-\nabla \cdot \vec{P}) \Rightarrow 0 = \nabla \cdot (\vec{J}_{ind} - \partial_t \vec{P})$$

Esto se satisface en particular si $\vec{J}_{ind} - \partial_t \vec{P}$ es el rotacional de alguna función \vec{M} , por lo que

$$\vec{J}_{ind} = \nabla \times \vec{M} + \partial_t \vec{P}$$

Esto nos dice que la corriente inducida se puede expresar como la suma de dos corrientes; la debida a M es siempre cerrada.

De la ley de Gauss se deduce entonces que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) &= \rho_{ext} - \nabla \cdot \vec{P} \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) &= \rho_{ext} \end{aligned}$$

A esta función cuya divergencia produce la densidad de carga externa se le llama *campo de desplazamiento* y se denota por \vec{D} . Teniendo esto en cuenta, y considerando la ecuación de Ampère-Maxwell, se obtiene también lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0(\vec{J}_{ext} + \vec{J}_{ind} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}) \\ &= \mu_0(\vec{J}_{ext} + \nabla \times \vec{M} + \partial_t \vec{P} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}) \\ &= \mu_0(\vec{J}_{ext} + \nabla \times \vec{M} + \partial_t \vec{D}) \end{aligned}$$

ó

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{ext} + \partial_t \vec{D}$$

Esta cantidad cuyo rotacional tiene como fuente las corrientes externas y la variación temporal del campo de desplazamiento se denota por \vec{H} .

Hasta el momento, lo único que se ha hecho es intercambiar el problema de calcular las cargas y corrientes inducidas por el de encontrar \vec{P} y \vec{M} . Más aún, se le ha dado al problema un grado más de indeterminación, pues no es claro que las cantidades de las que se ha hablado estén únicamente definidas, dado que hay más de una función vectorial cuya divergencia o rotacional tienen el mismo valor. Puede parecer entonces que seguir por este camino resulta en una mayor complejidad del problema; sin embargo, veremos que estas cantidades tienen una utilidad, que radica en la interpretación que se puede hacer de ellas, la cual mostraremos a continuación.

Para dar una idea del procedimiento a seguir en el caso más general, en vías de dar una interpretación física de \vec{P} y \vec{M} , conviene que analicemos primero los casos estáticos.

1.3. Interpretación de \vec{P} y \vec{M}

1.3.1. Caso estático

Utilizando la Ley de Coulomb, tenemos que el potencial escalar electrostático producido en cualquier punto \vec{r}_0 por la carga inducida es

$$\phi_{ind}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{ind}(\vec{r})}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} dV$$

Este potencial, dado que las cargas inducidas sólo se manifiestan en el material (es decir, ρ_{ind} es cero fuera del material), puede calcularse tomando V como el volumen ocupado por éste, o cualquier volumen que lo contenga, sin afectar el resultado. Tomando un volumen que contenga al material en su interior, y considerando además que $\rho_{ind} = -\nabla \cdot \vec{P}$ y que $\nabla \cdot (f \vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \nabla \cdot \vec{F}$ para cualesquiera funciones escalar f y vectorial \vec{F} , obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} -4\pi\epsilon_0\phi_{ind}(\vec{r}_0) &= \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} dV \\ &= \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r})}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \right) dV - \int_V \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \right) \cdot \vec{P} dV \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Gauss para el primer término, y calculando que $\nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \right) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3}$, esto se reduce a

$$-4\pi\epsilon_0\phi_{ind}(\vec{r}_0) = \int_{\partial V} \frac{P(\vec{r})}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \cdot d\vec{a} + \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3} \cdot \vec{P} dV$$

como \vec{P} se anula fuera del material, el primer término es cero y al segundo sólo contribuye lo que queda dentro de él. Así

$$\phi_{ind}(\vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3} \cdot \vec{P} dV$$

Si recordamos, un dipolo puntual \vec{p} en el origen produce en la posición \vec{r} un potencial $\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}$. Por comparación, vemos que la expresión obtenida coincide con la forma continua de este potencial, en la que reemplazamos el dipolo puntual por un dipolo infinitesimal $\vec{P} dV$ en la posición \vec{r}_0 .

Similarmente, veremos la contribución a los potenciales debida a la corriente inducida. Por ser estática, la única contribución a ésta es la debida a \vec{M} . El potencial vectorial magnético será entonces

$$\vec{A}_{ind}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_{ind}(\vec{r})}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} dV$$

Al ser \vec{M} nulo fuera del material, podemos, al igual que en el caso eléctrico, tomar V como un volumen que contenga propiamente al material. Así, utilizando las propiedades de \vec{M} y la identidad $\nabla \times (f\vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f\nabla \times \vec{F}$, podemos manipular el potencial de manera análoga a la anterior

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}_{ind}(\vec{r}_0) &= \int_V \frac{\nabla \times \vec{M}(\vec{r})}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} dV \\ &= \int_V \nabla \times \left(\frac{\vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \right) dV - \int_V \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \right) \times \vec{M} dV \end{aligned}$$

Pero la integral de $\nabla \times \vec{F}$ en V se puede intercambiar por la integral de superficie de $\vec{\epsilon} \vec{F}$ sobre su frontera, siendo $\vec{\epsilon}$ el tensor de Levi-Civita,

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}_{ind}(\vec{r}_0) = \int_{\partial V} \vec{\epsilon} \frac{\vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \cdot d\vec{a} - \int_V \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \right) \times \vec{M} dV$$

Y, al anularse \vec{M} sobre la frontera de V , obtenemos finalmente el potencial vectorial:

$$\vec{A}_{ind}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3} \times \vec{M} dV$$

que corresponde a la forma continua del potencial generado por un dipolo magnético puntual $\vec{M} dV$ situado en la posición \vec{r} .

En ambos casos, lo que hemos mostrado es que \vec{P} y \vec{M} tienen un significado físico muy concreto, la densidad de momento dipolar eléctrico y magnético, respectivamente. Esto hace completa la definición que matemáticamente se había dado para ellos, y les da un carácter único, al menos en el caso estático. Habiendo hecho esta introducción, veremos lo que sucede cuando hay una dependencia temporal de los campos.

1.3.2. Caso dinámico

El procedimiento a seguir es similar a lo que recién hemos mostrado; sin embargo, los cálculos son más pesados y largos, así que, con el fin de no desviarnos del objetivo principal, los desarrollamos en un anexo y presentamos aquí los resultados.

Hay que recordar que las soluciones a las ecuaciones de Maxwell con fuentes $\rho(\vec{r}, t)$ y $\vec{J}(\vec{r}, t)$ se pueden obtener a través de los potenciales retardados, dados, en

la *norma de Lorentz*, por

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}_0, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}{c}\right)}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|} dV \\ \vec{A}(\vec{r}_0, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}, t - \frac{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}{c}\right)}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|} dV\end{aligned}\quad (1.1)$$

Una vez calculados los potenciales, los campos eléctrico y magnético se pueden encontrar utilizando las relaciones

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= -\nabla\phi(\vec{r}, t) - \partial_t\vec{A}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Para encontrar los potenciales electrodinámicos de un dipolo puntual oscilante, se requieren, entonces, su densidad de momento dipolar y la corriente asociada. Si tenemos un dipolo \vec{p} situado en la posición \vec{R} , esta densidad resulta ser, en su parte espacial,

$$\rho_p(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R})$$

Siendo δ la distribución de Dirac. Consideraremos situaciones en las que la función de densidad es separable en la posición y el tiempo, es decir $\rho_p(\vec{r}, t) = \rho_p(\vec{r})T(t)$ y con T una función desarrollable en serie de Fourier, y examinaremos la componente ω :

$$\rho_{p,\omega}(\vec{r}, t) = \rho_p(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

Utilizando la ecuación de continuidad, se muestra que la correspondiente corriente dipolar eléctrica debe ser

$$\vec{J}_{p,\omega}(\vec{r}, t) = i\omega\vec{p} \delta(\vec{r} - \vec{R}) e^{i\omega t}$$

Al introducir estas densidades en las soluciones (1.1), obtenemos que, siendo $k_0 = \omega/c$ el número de onda en el vacío correspondiente a la componente ω , y $G(\vec{r}) = e^{ik_0 r}/r$ la función de Green, los potenciales del dipolo eléctrico oscilante en cualquier punto \vec{r}_0 son

$$\begin{aligned}\phi_{p,\omega}(\vec{r}_0, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^{i\omega t} \vec{p} \cdot \nabla G(\vec{r} - \vec{r}_0) \Big|_{\vec{r}=\vec{R}} \\ \vec{A}_{p,\omega}(\vec{r}_0, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega e^{i\omega t} \vec{p} G(\vec{R} - \vec{r}_0)\end{aligned}\quad (1.2)$$

Análogamente, se encuentra que los potenciales del dipolo magnético puntual oscilante son:

$$\begin{aligned}\phi_{m,\omega}(\vec{r}_0, t) &= 0 \\ \vec{A}_{m,\omega}(\vec{r}_0, t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} e^{i\omega t} \nabla G(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{m} \Big|_{\vec{r}=\vec{R}}\end{aligned}\quad (1.3)$$

Por otro lado, resolvemos los mismos potenciales para las densidades de carga y corriente inducidas $\rho_{ind}(\vec{r}, t) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)$ y $\vec{J}_{ind}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}, t) + \partial_t \vec{P}$, asumiendo igualmente una dependencia armónica para la parte temporal de \vec{P} y \vec{M} ; utilizando las propiedades que los definen y haciendo una integración por partes, encontramos que las componentes ω de los potenciales electrodinámicos inducidos son

$$\begin{aligned}\phi_{ind,\omega}(\vec{r}_0, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla G(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{P}_\omega(\vec{r}, t) dV \\ \vec{A}_{ind,\omega}(\vec{r}_0, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(i\omega \vec{P}_\omega(\vec{r}, t) G(\vec{r} - \vec{r}_0) - \nabla G(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{M}_\omega(\vec{r}, t) \right) dV\end{aligned}\quad (1.4)$$

Como esto es válido para cada componente ω , los potenciales electrodinámicos inducidos, corresponden a la forma continua de una superposición de los potenciales eléctricos (1.2) y magnéticos (1.3) producidos por dipolos eléctricos $\vec{P}(\vec{r}, t)dV$ y magnéticos $\vec{M}(\vec{r}, t)dV$.

En conclusión, aún en el caso dinámico, los campos materiales -que ahora llamaremos con toda justicia *polarización* y *magnetización*- se pueden seguir interpretando como la densidad de momento dipolar eléctrico y magnético, independientemente de la frecuencia de oscilación del campo.

Es notable que, siendo todos los resultados que hemos derivado exactos (bajo hipótesis bien definidas, pero no excesivamente restrictivas), obtengamos que \vec{P} y \vec{M} estén relacionados con la primera aproximación a los potenciales asociados a la configuración electromagnética macroscópica del material.

Un error frecuente, que se puede encontrar aún en referencias muy importantes, como [3, 269] y [4, 242], es restringir la validez de esta interpretación a rangos de frecuencias bajas. Haber mostrado que la interpretación es válida independientemente de la frecuencia, no es sólo una cuestión de satisfacción intelectual o como un problema de completitud de los campos involucrados en las ecuaciones de Maxwell; más adelante nos permitirán establecer algunas propiedades importantes sobre la respuesta de los materiales al campo externo, asegurando su validez en cualquier rango de frecuencias.

Capítulo 2

Medios disipadores

2.1. Modelo de respuesta lineal

Ya que hemos establecido el papel que juegan la polarización y la magnetización, y habiendo definido \vec{D} y \vec{H} sin ambigüedad, escribimos las ecuaciones de Maxwell macroscópicas en cualquier medio como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho_{ext} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{0} \\ \nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{J}_{ext}\end{aligned}$$

Estas relaciones, exactas bajo las consideraciones expuestas anteriormente, son sin embargo, inútiles hasta que se establece una conexión entre los campos auxiliares \vec{D} y \vec{H} y los campos reales \vec{E} y \vec{B} o, equivalentemente, entre estos y los campos materiales \vec{P} y \vec{M} . Como dijimos antes, esta información no la puede proporcionar el electromagnetismo por sí mismo.

De aquí en adelante consideraremos materiales lineales, homogéneos e isotrópicos. Para materiales con estas propiedades es claro, por ejemplo, que, para campos estáticos, la polarización debe apuntar en dirección del campo eléctrico aplicado en cualquier punto; si no fuera así, habría una dirección especial en cada punto —la de la polarización— que rompería la hipótesis de isotropía. Lo mismo es válido para la magnetización y el campo magnético.

En la situación dinámica no tiene porqué cumplirse esto. Sabemos que la configuración de los campos eléctricos y magnéticos en un momento dado depende de lo sucedido en todos los tiempos anteriores al mismo. Así, la relación entre la respuesta (\vec{P} ó \vec{M}) y el campo (\vec{E} ó \vec{B}) a un momento dado debe tener esta memoria de lo ocurrido anteriormente. Como el material es lineal, la contribución del campo a la respuesta en cada momento se da por un operador lineal de proporcionalidad Ξ .

\vec{E} , que induce la distribución macroscópica de dipolos eléctricos, tendrá un factor Ξ_e y \vec{B} , que hace lo análogo para el caso magnético, un factor Ξ_m . La isotropía postulada sólo permite que dichos operadores sean escalares, mientras que la homogeneidad requiere que sean independientes de la posición. La respuesta a un tiempo dado será entonces la suma de las contribuciones del campo en todos los tiempos anteriores. Esto se escribe en su forma más general como

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \Xi_e(t, t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt'$$

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \Xi_m(t, t') \vec{B}(\vec{r}, t') dt'$$

Tácitamente, al no incluir una dependencia de la respuesta con tiempos posteriores al considerado, hemos utilizado el *principio de causalidad*. Si las funciones Ξ lo cumplen, es decir, $\Xi(t, t') = 0$ si $t' > t$, el límite superior de la integral se puede extender hasta $+\infty$.

Cuando vamos al caso estático, $\vec{E}(\vec{r})$ y $\vec{B}(\vec{r})$ pueden salir de las integrales, de modo que, para que el problema esté bien planteado, es necesario que la integral de Ξ sea independiente de t :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Xi(t, t') dt' = \Xi_0$$

Esto se logra si $\Xi(t, t')$ es una función de $t - t'$, es decir, si sólo depende del lapso transcurrido entre el presente y los estados pasados. Escribiendo

$$\Xi_e(t, t') = \epsilon_0 \chi_e(t - t')$$

$$\Xi_m(t, t') = \frac{1}{\mu_0} \chi_m(t - t')$$

obtenemos finalmente que

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t - t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \quad (2.1)$$

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_m(t - t') \vec{B}(\vec{r}, t') dt' \quad (2.2)$$

χ recibe el nombre de *susceptibilidad*, eléctrica para la relación entre \vec{P} y \vec{E} , y magnética para la relación entre \vec{M} y \vec{B} .

Este modelo resulta una buena aproximación a un material real homogéneo e isotrópico cuando los campos electromagnéticos no son muy intensos en comparación con los campos microscópicos propios del material.

2.2. Los campos electromagnéticos en el espacio de frecuencias

Es conveniente, conceptualmente y como herramienta matemática, estudiar la distribución de frecuencias de los campos electromagnéticos. Empezaremos considerando la relación entre los campos de respuesta y los campos promedio.

El campo de polarización, transformado al espacio de Fourier en la variable temporal,¹ está dado por

$$\widehat{P}(\vec{r}; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

Utilizando la conexión temporal entre \vec{P} y \vec{E} (2.1), podemos escribirlo como

$$\widehat{P}(\vec{r}; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 \chi_e(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \right) e^{i\omega t} dt$$

ya que $e^{i\omega t}$ no depende de t' , puede entrar como factor a la primera integral; como hemos supuesto que $\chi(t)$ es una función continua, y buscamos soluciones continuas para \vec{E} , podemos intercambiar el orden de integración y sacar $\vec{E}(\vec{r}, t')$ de la primera integral:

$$\begin{aligned} \widehat{P}(\vec{r}; \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t-t') e^{i\omega t} dt \right) \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \\ &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t-t') e^{i\omega t} e^{-i\omega t'} dt \right) \vec{E}(\vec{r}, t') e^{i\omega t'} dt' \\ &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\chi}_e(\omega) \vec{E}(\vec{r}, t') e^{i\omega t'} dt' \\ &= \epsilon_0 \widehat{\chi}_e(\omega) \widehat{E}(\vec{r}; \omega) \end{aligned}$$

Así, en el espacio de frecuencias, \widehat{P} es proporcional a \widehat{E} , por un factor

$$\widehat{\chi}_e = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t) e^{i\omega t} dt$$

lo cual constituye una relación mucho más simple que la correspondiente relación integral entre \vec{P} , \vec{E} y χ_e . Dado que la dependencia funcional entre \widehat{M} y \widehat{B} (2.2) es del mismo tipo, la relación entre estas en dicho espacio es

$$\widehat{M}(\vec{r}; \omega) = \frac{\widehat{\chi}_m(\omega)}{\mu_0} \widehat{B}(\vec{r}; \omega)$$

Por las definiciones de \widehat{D} y \widehat{H} , se cumple

$$\widehat{D}(\vec{r}; \omega) = \epsilon_0 \widehat{E}(\vec{r}; \omega) + \epsilon_0 \widehat{\chi}_e(\omega) \widehat{E}(\vec{r}; \omega) = \epsilon_0 (1 + \widehat{\chi}_e(\omega)) \widehat{E}(\vec{r}; \omega) \quad (2.3)$$

$$\widehat{H}(\vec{r}; \omega) = \frac{\widehat{B}(\vec{r}; \omega)}{\mu_0} - \frac{\widehat{\chi}_m(\omega)}{\mu_0} \widehat{B}(\vec{r}; \omega) = \frac{1 - \widehat{\chi}_m(\omega)}{\mu_0} \widehat{B}(\vec{r}; \omega) \quad (2.4)$$

¹ Ver el anexo A2 para consultar la definición, la notación utilizada, y sus propiedades.

de manera que, si definimos

$$\begin{aligned}\epsilon(\omega) &:= \epsilon_0(1 + \hat{\chi}_e(\omega)) \\ \mu(\omega) &:= \frac{\mu_0}{1 - \hat{\chi}_m(\omega)},\end{aligned}$$

las relaciones entre los campos auxiliares \vec{D} y \vec{H} y los reales \vec{E} y \vec{B} se traducen en

$$\begin{aligned}\widehat{D}(\vec{r}; \omega) &= \epsilon(\omega)\widehat{E}(\vec{r}; \omega) \\ \mu(\omega)\widehat{H}(\vec{r}; \omega) &= \widehat{B}(\vec{r}; \omega)\end{aligned}$$

Es importante recalcar que la interpretación física de \vec{P} y \vec{M} nos permitió establecer un modelo lineal de respuesta electromagnética, válido para cualquier frecuencia. Éste tuvo como consecuencia, a su vez, que $\hat{\chi}_e(\omega)$ y $\hat{\chi}_m(\omega)$ sean transformadas de Fourier (complejas, en general) de funciones temporales reales. A continuación deduciremos algunas propiedades que se siguen de este hecho y algunas otras consideraciones físicas.

Por ser $\chi(t)$ una función real, la definición de la transformada, y la paridad de las funciones seno y coseno, $\hat{\chi}(\omega)$ tiene la siguiente propiedad con respecto al cambio de signo del argumento:

$$\hat{\chi}(-\omega) = \hat{\chi}^*(\omega) \quad (2.5)$$

Es claro que $\epsilon(\omega)$ también es transformada de Fourier de una función temporal real (a saber, $\epsilon_0(\delta(t) + \chi(t))$), lo que le hereda esta misma propiedad. Lo que no es tan claro es que exista una función temporal real tal que su transformada sea $\mu(\omega)$. No obstante, también cumple la propiedad (2.5):

$$\mu(-\omega) = \frac{\mu_0}{1 - \hat{\chi}(-\omega)} = \frac{\mu_0}{1 - \hat{\chi}^*(\omega)} = \frac{\mu_0}{(1 - \hat{\chi}(\omega))^*} = \mu^*(\omega)$$

Las funciones respuesta deben recuperar, por un lado, el caso estático —en el cual ϵ y μ son constantes reales— en el límite de bajas frecuencias. Esto pasa si la parte imaginaria de susceptibilidad cumple que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im} \hat{\chi}''(\omega) = 0$$

Por otro lado, la inercia de las cargas que componen a un material le impide *responder* generando cargas y corrientes inducidas cuando las frecuencias del campo externo son suficientemente altas, es decir, para que la susceptibilidad sea físicamente realista, debe cumplir que

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{\chi}(\omega) = 0$$

Esta propiedad, junto con el principio de causalidad, nos permitirá establecer una conexión entre las partes real e imaginaria de la susceptibilidad. Para ello, consideremos la siguiente integral en el plano complejo:

$$\int_C \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$$

Y tomemos \mathcal{C} como una semicircunferencia de radio R , unida al eje real, y excluyendo el polo $\omega = \omega_0$ con otra semicircunferencia de radio r , todas en el semiplano inferior. Siendo $\omega \in \mathbb{C}$, con $\omega = \omega' + i\omega''$, vemos que la transformada

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) e^{i\omega' t} e^{-\omega'' t} dt$$

está bien definida para $\omega'' < 0$, por ser $\chi(t) = 0$ a partir de cierto valor de t , es decir, por el principio de causalidad. Así, el integrando es analítico en el interior de \mathcal{C} , y la integral vale 0. Conforme R crece, la integral sobre la semicircunferencia mayor se desvanece, y nos queda el valor principal sobre el eje real, más el residuo sobre el polo:

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega - i\pi \hat{\chi}(\omega_0) = 0$$

Escribiendo $\hat{\chi}(\omega) = \hat{\chi}'(\omega) + i\hat{\chi}''(\omega)$, obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \hat{\chi}'(\omega_0) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}''(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \\ \hat{\chi}''(\omega_0) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}'(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \end{aligned}$$

Estas son llamadas *relaciones de Kramers-Krönig*. Nos dicen que la parte real e imaginaria de estas funciones no son independientes. Tienen como consecuencia clara que si uno conoce alguna de las dos para todas las frecuencias, entonces puede recuperar la otra.

Considerando que $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$, $\epsilon' = \epsilon_0(1 + \chi'_e)$ y $\epsilon'' = \epsilon_0\chi''_e$, estas relaciones se traducen en

$$\begin{aligned} \epsilon'(\omega_0) &= \epsilon_0 - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \\ \epsilon''(\omega_0) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

para la permisividad eléctrica, y en

$$\begin{aligned} \mu'(\omega_0) &= \frac{\mu''(\omega_0)}{\chi''_m(\omega_0)} \left(1 - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''_m(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \right) \\ \mu''(\omega_0) &= \frac{\mu'(\omega_0)}{1 - \chi'_m(\omega_0)} \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'_m(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \end{aligned} \quad (2.7)$$

para la permeabilidad magnética. Por el momento, parecen una curiosidad, pero veremos su utilidad una vez que hayamos establecido el papel que juegan la parte real e imaginaria de estas dos importantes funciones. Antes necesitaremos sentar algunas bases sobre la energía y la propagación de los campos electromagnéticos en medios materiales.

2.3. El transporte de la energía electromagnética

2.3.1. El balance de energía en el vacío

Dada una distribución microscópica de carga² $\rho(\vec{r}, t)$ y de corriente $\vec{j}(\vec{r}, t)$ en un volumen V en el vacío, el trabajo dw realizado por un campo electromagnético sobre un elemento de carga ρdV de ésta es

$$dw = \vec{f} \cdot d\vec{r} = (\rho dV \vec{c}) \cdot \vec{v} dt$$

dado que el campo magnético “no trabaja”. Teniendo en cuenta que $\vec{j} = \rho \vec{v}$, obtenemos que la potencia total transferida por el campo eléctrico hacia la distribución de cargas y corrientes es

$$\frac{dw}{dt} = \int_V \vec{c} \cdot \vec{j} dV \quad (2.8)$$

sustituyendo el valor de \vec{j} dado por la ecuación de Ampère-Maxwell, la densidad de potencia $\vec{c} \cdot \vec{j}$ también se puede escribir

$$\vec{c} \cdot \vec{j} = \vec{c} \cdot \left(\nabla \times \frac{\vec{b}}{\mu_0} - \epsilon_0 \partial_t \vec{c} \right) \quad (2.9)$$

y dada la identidad $\nabla \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{c} - \vec{c} \cdot \nabla \times \vec{b}$, y el valor de $\nabla \times \vec{c}$ dado por la ley de Faraday,

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{j} &= \frac{\vec{b}}{\mu_0} \cdot \nabla \times \vec{c} - \nabla \cdot \left(\vec{c} \times \frac{\vec{b}}{\mu_0} \right) - \vec{c} \cdot \epsilon_0 \partial_t \vec{c} \\ &= -\frac{\vec{b}}{\mu_0} \cdot \partial_t \vec{c} - \vec{c} \cdot \epsilon_0 \partial_t \vec{c} - \nabla \cdot \left(\vec{c} \times \frac{\vec{b}}{\mu_0} \right) \\ &= -\partial_t \left(\frac{\mu_0^{-1} b^2 + \epsilon_0 c^2}{2} \right) - \nabla \cdot \left(\vec{c} \times \frac{\vec{b}}{\mu_0} \right) \end{aligned}$$

La cantidad dentro de la derivada temporal es la densidad volumétrica de energía electromagnética u_{em} . Por otro lado, el trabajo es la integral de la densidad de energía mecánica u_{mec} ; con estas dos observaciones, la ecuación (2.8) se puede leer así:

$$\partial_t (u_{mec} + u_{em}) = -\nabla \cdot \left(\vec{c} \times \frac{\vec{b}}{\mu_0} \right)$$

La cantidad $\vec{s} = \vec{c} \times \vec{b}/\mu_0$, conocida como el *vector de Poynting*, es la densidad de flujo de energía. Este resultado nos dice que el cambio en la energía almacenada en

²Esta deducción está motivada por la de David Griffiths [5, 346]

el campo se debe al flujo de ésta a través del espacio, y al trabajo realizado por el campo sobre las cargas. Visto de otra manera, que la energía total, mecánica más electromagnética, sólo cambia en una región dada, por el transporte de la segunda por medio de los campos.

Esta energía también podría cambiar si las partículas abandonan la región, pues llevan consigo energía cinética, pero esta situación no la hemos considerado. En un planteamiento más general podría hacerse dicha consideración, pero, tal y como está formulado, en el teorema la energía cinética no *fluye* fuera de la región.

Hay que notar también que este teorema de conservación sigue siendo válido si al vector de Poynting se le suma, por ejemplo, un campo solenoidal, pues el único término que aparece es su divergencia. Esto hace, que el vector de Poynting, dadas estas consideraciones, no esté únicamente definido. Una consecuencia de ello es que la ubicación espacial de la energía electromagnética tampoco esté bien definida. Las expresiones aquí mostradas sólo nos hablan del balance entre ella y la energía mecánica en volúmenes dados.

Esta deducción no podría hacerse con el mismo procedimiento para las cantidades macroscópicas asociadas a las ecuaciones de Maxwell, pues, en general, $\rho\langle\vec{v}\rangle$ no es $\langle\rho\vec{v}\rangle$, $\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2$ no es $\langle\epsilon_0 e^2 + \mu_0^{-1} b^2\rangle$ y $\vec{E} \times \vec{B}$ no es $\langle\vec{e} \times \vec{b}\rangle$. Sucede entonces, que, si uno intenta verificar el teorema de Poynting macroscópicamente, sustituyendo las cantidades microscópicas por sus promedios, la identidad

$$\partial_t \left(U_{mec} + \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)$$

no se cumpla en general; es necesario que las fluctuaciones del campo sean suficientemente pequeñas.

2.3.2. El vector de Poynting en medios materiales

Al aplicar un campo electromagnético a un medio material, en él se inducen cargas y corrientes que, a su vez, producen nuevos campos electromagnéticos. Sin embargo, estos últimos no necesariamente contribuyen al campo total con las mismas frecuencias de los campos aplicados. Por ejemplo, el material puede ser excitado con frecuencias en el visible y las cargas y corrientes inducidas pueden reemitir en el infrarrojo. Puede suceder también que la energía electromagnética del campo aplicado sea transferida a los modos vibracionales del material.

Tomar en cuenta la transferencia de energía electromagnética en energía mecánica de los componentes del material sólo puede hacerse microscópicamente. A nuestra escala esa transferencia se manifiesta como un calentamiento del material. Si adicionalmente estamos fijando la atención en la intensidad del campo en un cierto rango de frecuencias, no apreciamos la reemisión electromagnética, sino que notamos una disminución de la intensidad del campo promedio. Llamamos *disipación* a esta transferencia de la energía del campo en otras formas de energía. Si existe

disipación, no tiene sentido hablar de la energía electromagnética como una variable de estado, pero sí puede intentar hacerse un balance que tome en cuenta esta transferencia.

Para saber cómo debe definirse el vector de Poynting en un medio material, de manera que siga representando el flujo de energía, podemos considerar el problema de la transmisión de una onda desde el vacío, con cargas superficiales externas σ_{ext} y corrientes superficiales externas \vec{K}_{ext} . Para una superficie en donde se puede definir la normal \hat{e}_n , cualquier vector se puede descomponer como la suma de su proyección sobre esta y sobre el plano tangente a la misma. Si denotamos con subíndices numerados los campos en el vacío y en el medio, y con etiquetas \perp a la componente normal y \parallel a la componente tangencial, las ecuaciones de Maxwell imponen las siguientes condiciones de frontera sobre los campos [6, 18]:

$$\begin{aligned}\vec{D}_1^\perp - \vec{D}_2^\perp &= \sigma_{ext} \hat{e}_n \\ \vec{B}_1^\perp - \vec{B}_2^\perp &= \vec{0} \\ \vec{E}_1^\parallel - \vec{E}_2^\parallel &= \vec{0} \\ \vec{H}_1^\parallel - \vec{H}_2^\parallel &= \vec{K}_{ext} \times \hat{e}_n\end{aligned}$$

\vec{S} , definido como $\vec{E} \times \vec{H}$, tiene la propiedad de que su componente normal queda expresada sólo en términos de \vec{E}^\parallel y \vec{H}^\parallel :

$$\begin{aligned}\vec{S} &= (\vec{E}^\perp + \vec{E}^\parallel) \times (\vec{H}^\perp + \vec{H}^\parallel) \\ &= \vec{E}^\perp \times \vec{H}^\perp + \vec{E}^\perp \times \vec{H}^\parallel + \vec{E}^\parallel \times \vec{H}^\perp + \vec{E}^\parallel \times \vec{H}^\parallel \\ &= (\vec{E}^\perp \times \vec{H}^\perp + \vec{E}^\parallel \times \vec{H}^\perp) + \vec{E}^\parallel \times \vec{H}^\parallel \\ &= \vec{S}^\parallel + \vec{S}^\perp\end{aligned}$$

y reducirse a $\vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ en el vacío. Landau argumenta [3, 271] que el flujo de energía debe ser continuo al cruzar la frontera. La continuidad de las componentes paralelas de \vec{E} , y de \vec{H} cuando las corrientes superficiales externas son nulas, hace que la componente perpendicular de \vec{S} sea continua en ausencia de ellas:

$$\vec{S}_1^\perp - \vec{S}_2^\perp = \vec{0} \text{ si } \vec{K}_{ext} = \vec{0} \quad (2.10)$$

Así que, dado que fuera el flujo está representado por \vec{S} , dentro también debe ser así.

A diferencia del vacío, al existir disipación, el valor de $\nabla \cdot \vec{S}$ no puede ser calculado en general. Veremos cuánto vale en el caso de medios lineales, pero antes necesitamos establecer algunos resultados.

2.3.3. El flujo promedio de energía. Intensidad luminosa

El transporte de energía del campo electromagnético, descrito por el vector de Poynting, puede ser muy complicado en detalle. Por ejemplo, en el caso de campos

oscilantes en el vacío en los que \vec{S} va como un coseno cuadrado en el tiempo, la energía es transportada en la misma dirección siempre, pero no al mismo ritmo. En un período cualquiera, se transporta una cantidad u fija. Supongamos ahora que queremos medir el transporte total en un tiempo en el que caben n períodos, este será simplemente nu , de modo que el detalle del transporte durante cada uno se habrá perdido. En un tiempo de medición arbitrario, el transporte total sólo tendrá parte del detalle del período que no *quepa* completamente. Si el tiempo durante el cual se mide es muy grande en comparación con el período, entonces n también es muy grande, y un valor entre 0 y u , comparado con nu será despreciable.

Esta situación se manifiesta con los aparatos que utilizamos, pues estos no hacen mediciones instantáneas. En cambio, acumulan los efectos que suceden durante su tiempo característico de respuesta T . Por ejemplo, para experimentos en el espectro visible, las frecuencias son mayores a $10^{14} Hz$, lo que hace imperceptibles en la medición las variaciones en los correspondientes períodos de oscilación. Todo esto nos lleva a considerar en situaciones de altas frecuencias, más que el vector de Poynting por sí mismo, su promedio temporal

$$\langle \vec{S} \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(\vec{r}, t - t_0) dt$$

en el cual integramos considerando el caso extremo en el que el tiempo de respuesta, en comparación a los períodos de oscilación es infinito. Este promedio es importante además, porque su norma coincide con la intensidad luminosa:

$$I = \|\langle \vec{S} \rangle\|$$

Esto es importante para la óptica geométrica, pues la noción intuitiva que tenemos de *rayo luminoso* correspondería a las líneas de campo del vector de Poynting.

2.4. La ecuación de onda

Nos dirigimos a estudiar los problemas de transmisión del campo electromagnético entre medios; para ese fin, nos interesa únicamente la propagación de los campos, sin considerar sus fuentes. Las ecuaciones de Maxwell, en ausencia de cargas y corrientes externas, transformadas al espacio de las frecuencias son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \hat{B} &= 0 \\ \nabla \times \hat{E} - i\omega \hat{B} &= \hat{0} \\ \nabla \times \hat{H} + i\omega \hat{D} &= \hat{0} \end{aligned}$$

Usando la identidad $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla \nabla \cdot \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}$, tenemos que

$$\nabla \nabla \cdot \hat{E} - \nabla^2 \hat{E} = \nabla \times (\nabla \times \hat{E}) = i\omega \nabla \times \hat{B}$$

Como el medio es homogéneo, $\nabla \cdot \hat{D} = \epsilon(\omega)\nabla \cdot \hat{E}$ y $\mu(\omega)\nabla \times \hat{H} = \nabla \times \hat{B}$, así

$$-\nabla^2 \hat{E} = i\omega\mu(\omega)\nabla \times \hat{H} = i\omega\mu(\omega)(-i\omega\hat{D})$$

y, por tanto,

$$\nabla^2 \hat{E} + \mu(\omega)\epsilon(\omega)\omega^2 \hat{E} = \hat{0} \quad (2.11)$$

Esta es la *ecuación de onda* para el campo eléctrico en el espacio de las frecuencias, en ausencia de cargas y corrientes externas y en un medio lineal, homogéneo e isotrópico. Es conveniente porque desacopla a \hat{B} , el cual se puede calcular, una vez resuelta la ecuación, utilizando la ley de Faraday; además, es algebraica en ω .

Aunque esta expresión es el análogo a la ecuación de onda real, hay que notar que no hay una traducción directa a esa versión, pues, al ser ϵ y μ funciones de la frecuencia, el producto $\epsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2 \hat{E}(\omega)$ no se puede transformar, en general.

La ecuación de onda hace evidente que el modo en que se propagan los campos electromagnéticos en un medio depende tanto de la distribución de frecuencias de los mismos como de la respuesta del material a esa frecuencia, expresada en la dependencia funcional de $\epsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$.

2.5. Ondas electromagnéticas en medios absorbentes

Para estudiar la propagación de una onda en un medio disipador, las ondas planas no son el mejor modelo, ni son una solución completa a las ecuaciones de Maxwell. Si, como hemos establecido, el campo pierde energía, se espera que la amplitud de la onda decaiga. El modelo más sencillo que refleja esto es aquél en donde la pérdida de energía del campo tras cruzar un ancho determinado del medio es proporcional a la propia energía del campo; por la homogeneidad del medio, la atenuación debe ser exponencial. Esto nos lleva a estudiar funciones del tipo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)$$

que son ondas planas con una amplitud modulada exponencialmente. Llamaremos a \vec{k}' el *vector de onda* y a \vec{k}'' el *vector de atenuación*. Hay que notar que, visto con notación compleja,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \operatorname{Re}[e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}] = \operatorname{Re}[E_0 e^{i((\vec{k}' + i\vec{k}'') \cdot \vec{r} - \omega t)}]$$

corresponde a una función de *tipo* onda plana, pero con un vector de onda complejo $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$. En el caso en el que $k'' = 0$, las ondas tienen amplitud constante en el espacio, y se llaman *homogéneas*. Si $\vec{k}' \neq \vec{0}$, cada plano normal a \vec{k}'' tiene amplitud constante; en dirección paralela al vector de atenuación la amplitud tiene su máximo cambio, siendo decreciente en el mismo sentido, y creciente en el opuesto; estas son ondas *inhomogéneas*. Permitiremos además que \vec{E}_0 sea complejo, por lo cual en

lo sucesivo lo dejaremos dentro de la parte real; esto le da al vector eléctrico una componente fuera de fase.

La onda plana por sí misma y las propiedades obtenidas a partir de su análisis, proporcionan adecuadamente muchos resultados cuantificables. No obstante, las ondas planas homogéneas no existen (lo que se puede mostrar con el simple cálculo de su energía, infinita), pero, bajo ciertas condiciones, a ciertas escalas, y en ciertas regiones, una onda puede considerarse como tal; es decir, la onda plana es un modelo, y, como cualquier modelo, debe tomarse en cuenta que hay circunstancias que limitan su validez.

Lo mismo sucede con una onda inhomogénea. No sólo la energía es infinita, sino que su amplitud es arbitrariamente grande en cierta dirección. Esto no quiere decir que en algún experimento podamos ver, por ejemplo, un aumento espacial sin límite de la amplitud; por ejemplo, el campo eléctrico podría comportarse como una onda homogénea hasta una cierta región, en donde su amplitud empiece a decaer. Lo que es claro es que en el experimento las regiones válidas para estas ondas no están extendidas indefinidamente en cualquier dirección.

Está implícito aquí que la atenuación no depende del tiempo, lo que se traduce en que la frecuencia sea real. Esto depende tanto del material como del dispositivo experimental. Existen otro tipo de ondas inhomogéneas en las cuales el vector de onda es real y la frecuencia es compleja. Estas corresponden a una situación física en la que la absorción en vez de comenzar a partir de una cierta región, comienza a partir de un cierto instante.

Los siguientes cálculos nos ayudarán a ver que estas ondas efectivamente son soluciones de las ecuaciones de Maxwell, y a estudiar las restricciones que impone el medio sobre ellas.

2.5.1. La relación de dispersión

Una función del tipo

$$\hat{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot r} f(\omega) \quad (2.12)$$

al ser introducida en la ecuación de onda (2.11), la simplifica en

$$-\vec{k} \cdot \vec{k} \vec{E}_0 f(\omega) + \mu(\omega) \epsilon(\omega) \omega^2 \vec{E}_0 f(\omega) = \vec{0}$$

para que la igualdad se cumpla en el caso general, es necesario que

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \omega^2 \mu \epsilon$$

siempre que $f(\omega) \neq 0$. Esta igualdad se llama *relación de dispersión*. Determina, del conjunto de las ondas posibles, cuáles pueden propagarse dadas las propiedades eléctricas y magnéticas del medio, expresadas en ϵ y μ . Es una condición necesaria para que una onda del tipo (2.12) sea solución de las ecuaciones de Maxwell.

Una superposición de funciones de este tipo puede representar, como veremos, la transformada de una onda inhomogénea, pero no está limitada a ello. Podemos

pensar también en funciones que están extendidas espacialmente, pero varían en el tiempo de manera uniforme; por ejemplo, un "pulso temporal".

Utilizando el índice de refracción $n(\omega)$, cuyo cuadrado cumple la relación

$$n^2(\omega) = \frac{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}{\epsilon_0\mu_0}$$

la velocidad de la luz $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}}$ y el número de onda en el vacío $k_0 = \frac{\omega}{c}$, la relación de dispersión puede escribirse como

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0} = k_0^2 n^2$$

Llamaremos α y β a las partes real e imaginaria de n^2 , respectivamente. Separando el vector \vec{k} y el índice de refracción en partes real e imaginaria, vemos que la relación de dispersión es equivalente a dos ecuaciones reales:

$$k'^2 - k''^2 = k_0^2(n'^2 - n''^2) = k_0^2\alpha \quad (2.13)$$

$$\vec{k}' \cdot \vec{k}'' = k_0^2 n' n'' = k_0^2 \beta \quad (2.14)$$

Considerando que los vectores \vec{k}' y \vec{k}'' forman un ángulo ψ , y que no son ortogonales, esta relación tiene solución. Multiplicando la ecuación (2.13) por k'^2 , y utilizando la ecuación (2.14),

$$0 = k'^4 - k''^2 k'^2 - k_0^2 \alpha k'^2 = k'^4 - k'^2 k_0^2 \alpha - k_0^4 \frac{\beta^2}{4 \cos^2(\psi)}$$

obtenemos una ecuación de segundo grado para k'^2 , con solución

$$k'^2 = k_0^2 \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sec^2(\psi)}}{2} \quad (2.15)$$

en donde escogemos el signo más para la raíz para cumplir el requisito de que k' sea un real positivo. Sustituyendo esta solución en la ecuación (2.13), obtenemos el valor de k''^2 :

$$k''^2 = k_0^2 \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sec^2(\psi)}}{2} \quad (2.16)$$

el cual también cumple con la condición de que k'' sea real y positivo.

Puede parecer que los valores de k' y k'' pueden crecer arbitrariamente, por la presencia de la secante; hay que notar, sin embargo, que si el producto escalar de \vec{k}' y \vec{k}'' se va a cero, necesariamente lo hace β . Este es precisamente el caso de ortogonalidad, en el que sólo tenemos una ecuación. Veremos más adelante que hay otras condiciones que nos permiten resolver ese problema.

2.6. Electrodinámica en presencia de disipación

2.6.1. Los campos

Los resultados anteriores nos dan ya elementos suficientes para analizar las ondas en un medio disipador. Empezaremos llevando al espacio de Fourier una onda inhomogénea $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}]$,

$$\hat{E}(\vec{r}, \omega) = \pi \left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta(\omega - \omega_0) + \vec{E}_0^* (e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}})^* \delta(\omega + \omega_0) \right)$$

No olvidemos que utilizamos el símbolo $\hat{}$ para denotar la transformada de Fourier, aún cuando no incluyamos ω como su argumento. Ahora bien, los sumandos que forman a \hat{E} corresponden a una función del tipo (2.12); la linealidad de las ecuaciones de Maxwell homogéneas garantiza que esta es una solución si cada uno cumple la relación de dispersión. Ambas condiciones se traducen en $\vec{k} \cdot \vec{k} = k_0^2 n^2(\omega_0)$.

La relación $\hat{D} = \epsilon(\omega) \hat{E}$ nos permite obtener directamente \vec{D} , calculando su transformada inversa:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta(\omega - \omega_0) + \vec{E}_0^* (e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}})^* \delta(\omega + \omega_0) \right] \pi \epsilon(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t} \epsilon(\omega_0) + \vec{E}_0^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t} \epsilon(-\omega_0)}{2} \end{aligned}$$

La propiedad (2.5), $\epsilon^*(\omega_0) = \epsilon(-\omega_0)$ nos permite simplificar esta última expresión:

$$\vec{D} = \text{Re}[\epsilon(\omega_0) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}]$$

Como vemos, la expresión dentro de la parte real es la función de la cual \vec{E} es parte real, multiplicada por el valor de ϵ justo en la frecuencia de oscilación del campo eléctrico.

Dado que no hay cargas externas, $\nabla \cdot \vec{D} = 0$. Esta condición, la homogeneidad eléctrica del medio $\nabla \epsilon = \vec{0}$ y la relación lineal entre \hat{D} y \hat{E} implican que

$$0 = \nabla \cdot \hat{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta(\omega - \omega_0) + (i\vec{k} \cdot \vec{E}_0^* e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}})^* \delta(\omega + \omega_0)$$

La primera parte de la igualdad, transformada al tiempo, nos dice que en el interior del material no hay cargas inducidas; en estos materiales, las cargas inducidas son únicamente superficiales. La segunda parte de la igualdad es válida en particular cuando $\omega = \omega_0$, en cuyo caso $\delta(\omega + \omega_0)$ se anula. Para mantener la igualdad, se requiere

$$0 = \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = (\vec{k}' + i\vec{k}'') \cdot \vec{E}_0$$

Por otro lado, ya que $\nabla(e^{\vec{u} \cdot \vec{r}}) = \vec{u} e^{\vec{u} \cdot \vec{r}}$, la Ley de Faraday nos dice

$$\nabla \times \hat{E} = i\pi \left(\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta(\omega - \omega_0) - (\vec{k} \times \vec{E}_0^* e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}})^* \delta(\omega + \omega_0) \right) = i\omega \hat{B}$$

con lo cual el campo magnético es

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} + [\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}]^*}{2\omega_0} \\ &= \text{Re} \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \frac{\vec{k}}{\omega_0} \times \vec{E}_0 \right]\end{aligned}$$

Por último, utilizamos la relación $\mu(\omega)\hat{H} = \hat{B}$, y el hecho de que μ también cumple la propiedad (2.5) para calcular \vec{H} ,

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}}{\mu(\omega_0)} \vec{k} \times \vec{E}_0 + \frac{(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)})^*}{\mu(-\omega_0)} (\vec{k} \times \vec{E}_0)^* \right] \\ &= \text{Re} \left[\frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)}}{\mu(\omega_0)} \frac{\vec{k}}{\omega_0} \times \vec{E}_0 \right]\end{aligned}$$

En resumen, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \\ \vec{D}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\epsilon(\omega) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\frac{\vec{k}}{\omega \mu(\omega)} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right]\end{aligned} \tag{2.17}$$

Podemos notar un efecto interesante que las partes imaginarias de las funciones de respuesta tienen sobre estas soluciones a las ecuaciones de Maxwell. Si escribimos sus argumentos $\eta_\epsilon = \arccos\left(\frac{\epsilon'}{|\epsilon|}\right)$ y $\eta_\mu = \arccos\left(\frac{\mu'}{|\mu|}\right)$, ϵ y μ se expresan en forma polar como $\epsilon = |\epsilon| e^{i\eta_\epsilon}$, $\mu = |\mu| e^{i\eta_\mu}$. Con esto, los campos auxiliares se pueden expresar como

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = |\epsilon| \text{Re} \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \eta_\epsilon)} \right] = |\epsilon| \vec{E} \left(\vec{r}, t - \frac{\eta_\epsilon}{\omega} \right) \tag{2.18}$$

$$|\mu| \vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \eta_\mu)} \right] = \vec{B} \left(\vec{r}, t + \frac{\eta_\mu}{\omega} \right) \tag{2.19}$$

en donde vemos que el módulo juega el papel de un factor de proporcionalidad, lo que recuerda el caso estático en el que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$. En el caso en el que ϵ es real, $\eta_\epsilon = \text{sgn}(\epsilon)$ y sólo hay dos opciones: o bien \vec{D} va en fase con \vec{E} ($\epsilon > 0$), o bien hay un desfase de π entre \vec{D} y \vec{E} ($\epsilon < 0$). Lo mismo se aplica para μ , \vec{B} y \vec{H} .

Si las partes imaginarias no son cero, el desfase ya no podrá valer ni 0 ni π . Conforme ϵ'' (μ'') crece, este tiende hacia $\pi/2$, independientemente del signo de ϵ' (μ').

2.6.2. La disipación

Como se dijo antes, la densidad de energía no puede ser calculada en general en presencia de disipación, pues la energía no es ya una variable de estado. La obtendremos en el caso de campos monocromáticos en un medio lineal. Para ello, consideraremos una onda homogénea en un medio disipador. Si esperamos que se respete la termodinámica, es necesario introducir la presencia de una fuente que compense las pérdidas del medio para mantener la amplitud de la onda. En un medio con disipación, dichos campos electromagnéticos corresponden a los que acabamos de calcular, con $k'' = 0$, que se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \omega \vec{B} &= \vec{k}' \times \vec{E} \\ \vec{D} &= \epsilon' \vec{E} - \epsilon'' \partial_{\omega t} \vec{E} \\ |\mu|^2 |\vec{H}| &= \mu' \vec{B} + \mu'' \partial_{\omega t} \vec{B}\end{aligned}$$

En el caso del vacío (que se obtiene sustituyendo $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$), el promedio temporal $\langle \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot \partial_t D \rangle$ es claramente cero, así que el mismo promedio en el caso disipador será proporcional a la pérdida de energía, es decir, al calor disipado. Veamos que

$$\begin{aligned}\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} &= \frac{(\vec{k}' \times \vec{E}_0)^2}{\omega |\mu|^2} \sin(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t) (\mu' \cos(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t) + \mu'' \sin(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} &= E_0^2 \omega \cos(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t) (\epsilon' \sin(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t) + \epsilon'' \cos(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t))\end{aligned}$$

Ya que $\vec{k}' \cdot \vec{E} = 0$, $(\vec{k}' \times \vec{E}_0)^2 = k'^2 E_0^2$. El promedio temporal queda

$$\langle \nabla \cdot \vec{S} \rangle = \langle \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot \partial_t D \rangle = \omega \frac{E_0^2}{2} \left(\frac{1}{|\mu|^2} k'^2 \mu'' + \omega^2 \epsilon'' \right)$$

La energía externa de compensación puede provenir del propio material, si este es excitado artificialmente en el modo apropiado; estos son materiales *activos*. Si esta no es la situación, entonces la termodinámica restringe la dirección del flujo de calor, siempre hacia el material, de tal manera que esta cantidad nunca puede ser negativa. Así, tenemos una condición de signo sobre las partes imaginarias de la permisividad eléctrica y la permeabilidad magnética para materiales *pasivos*:

$$\epsilon'' \geq 0 \leq \mu''$$

Vemos también que en la disipación no están involucradas las partes reales de estas cantidades. No obstante, dadas las igualdades (2.6) y (2.7), podemos ver que no se puede tener al mismo tiempo una disipación nula para todas las frecuencias, y una dispersión dependiente de la frecuencia, así como no se puede tener una dispersión constante con disipación variable.

En conclusión, la existencia de dispersión en un material lo hace necesariamente disipador, y todos los materiales disipadores presentan dispersión. El hablar de medios no disipadores distintos al vacío es sólo una aproximación, que debe restringirse

a regiones de frecuencias donde las partes imaginarias de las funciones de respuesta son cercanas a cero. A estas regiones se les llama *de transparencia*.

2.6.3. Atenuación. Longitud de penetración

Un hecho importante de la relación de dispersión (2.13) y (2.14) es que, aún en ausencia de disipación, permite la existencia de soluciones inhomogéneas: si $\epsilon'' = \mu'' = 0$, n^2 es real, en cuyo caso los vectores de onda \vec{k}' y de atenuación \vec{k}'' son ortogonales, según la ecuación (2.14). Un caso particular de esta situación es cuando $k'' = 0$, que son las ondas planas usuales; sin embargo, la misma ecuación nos muestra que esta no es una condición necesaria: se puede encontrar más de una combinación de valores de k' y k'' que la satisfagan.

La pregunta que surge inmediatamente es cómo puede atenuarse una onda si el medio no está disipando energía. Igualmente, cómo conocer en un problema de transmisión en este medio, los valores de k' y k'' . Conocemos la frecuencia de la onda (que depende de la fuente, y se expresa en k_0) y las propiedades del medio (sintetizadas en n) pero las magnitudes de \vec{k}' y \vec{k}'' parecen no estar restringidas. Visto de otra manera, la relación de dispersión son dos ecuaciones, y tenemos tres incógnitas: las normas de \vec{k}' y \vec{k}'' y el ángulo entre ellos (que está implícito en el producto escalar).

Es factible considerar, dados estos hechos, que la atenuación tiene dos componentes, una debida a la disipación, y otra que no depende de esta. Si en el problema usual, no disipador, podemos pensar en una onda incidente homogénea, no hay razón para no considerarla ahora como tal si incide desde un medio sin disipación. En el caso de incidencia desde un medio disipador, no hay otra dirección especial en el medio, por lo que es suficiente pensar en que el vector de onda y de atenuación son colineales.

El caso en el que hay dos medios fija otra dirección especial, que es la de la superficie entre ellos. Mostraremos en su momento que el tener dos medios fija condiciones suficientes para resolver el problema general, y que la otra componente de la atenuación se debe a diferencia de amplitudes sobre dicha superficie.

Si tomamos el caso de una onda en un medio homogéneo, hay que considerar, además, que la disminución de la amplitud conlleva una disminución en la intensidad de la misma. En el caso de mínima atenuación descrito anteriormente, si en $r = 0$ un haz tiene intensidad I_0 , al propagarse una distancia r tendrá intensidad $I_0 e^{-2k''r} = I_0 e^{-2k_0 |n''| r}$. A una distancia $r = l_p := \frac{1}{2k_0 |n''|}$, conocida como la *longitud de penetración* la intensidad de la onda habrá caído a $\frac{I_0}{e}$. Esta distancia constituye un criterio para determinar cuánto puede propagarse en el medio una onda conservando una intensidad medible, y caracteriza la atenuación en el material.

Como ejemplo, para la luz visible, cuya longitud de onda en el vacío es del orden de 10^2 nm la longitud de penetración es $l_p \sim \frac{1}{2k_0 |n''|} = \frac{\lambda_0}{4\pi |n''|}$. Para que luz de esta longitud de onda penetre unos centímetros en un material, la parte imaginaria de

su índice de refracción debe ser del orden de 10^{-6} .

2.6.4. Signos de ϵ' y μ'

Para una onda homogénea $\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ en un medio con ϵ y μ reales para esa frecuencia, las leyes de Faraday y de Ampère-Maxwell implican

$$\begin{aligned}\vec{k} \times \vec{E} &= \omega\mu\vec{H} \\ \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega\epsilon\vec{E}\end{aligned}$$

Lo que implica la ortogonalidad de \vec{k} , \vec{E} y \vec{H} . Los signos de ϵ y μ nos dan la dirección: si situamos \vec{E} en el eje z y \vec{k} en el eje y , entonces $\mu\vec{H}$ apunta en la dirección de x (como en la figura). En el caso en el que $\mu > 0$, \vec{H} está sobre

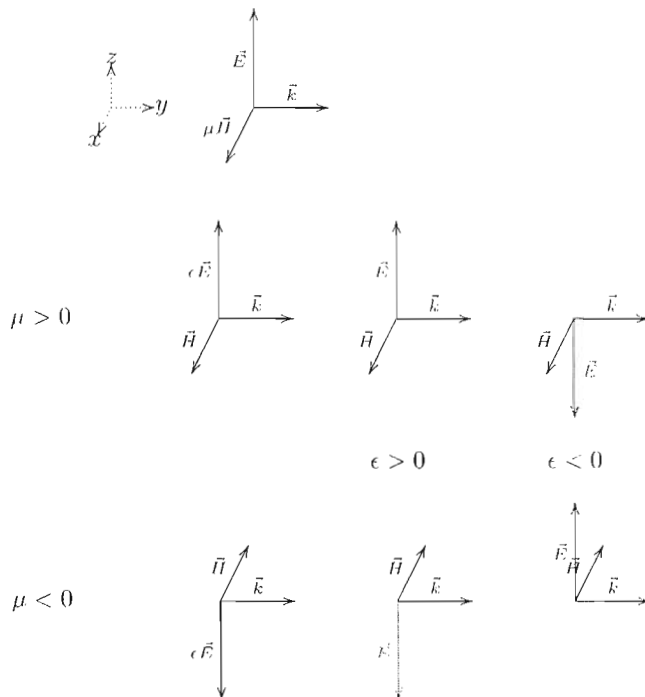


Figura 2.1: En un medio con $\epsilon\mu < 0$, el vector eléctrico de una onda homogénea debería apuntar al mismo tiempo en dirección z y dirección $-z$.

x ; a su vez, esto implica que $\epsilon\vec{E}$ va en la dirección de $+z$, lo cual sólo nos deja dos posibilidades: ó $\epsilon > 0$, ó $\vec{E} = \vec{0}$. Si $\mu < 0$, la situación es opuesta: \vec{H} va en la dirección de $-x$, y $\epsilon\vec{E}$ en la de $-z$, por lo cual, se cumple únicamente $\vec{E} = \vec{0}$ ó $\epsilon < 0$.

En cualquier caso, si $\epsilon\mu < 0$ el vector eléctrico debe ser nulo, y consecuentemente \vec{H} . Esto nos dice que una onda homogénea no se puede propagar en un medio con funciones eléctricas y magnéticas reales de signos opuestos; una onda que incidiera sobre un medio como este, sufriría reflexión total. Esta situación corresponde a $n^2 < 0$, o sea, un índice de refracción imaginario.

La presencia de disipación modifica naturalmente estas condiciones, pero, como veremos a continuación, aún cuando ϵ y μ son complejas, el signo de $\epsilon'\mu'$ sigue teniendo importancia.

2.6.5. Índice de refracción

La relación de dispersión deducida anteriormente nos da una primera restricción del medio sobre la propagación de las ondas en él. En esta sección veremos algunas otras propiedades y relaciones entre las propiedades del medio y las de la onda, habiendo identificado ya las propiedades relacionadas con la disipación del medio.

Las partes real e imaginaria de ϵ y μ , se relacionan de la siguiente manera con el índice de refracción:

$$n^2 = \frac{\epsilon'\mu' - \epsilon''\mu'' + i(\epsilon'\mu'' + \epsilon''\mu')}{\epsilon_0\mu_0}$$

Lo cual hace claro lo que afirmamos anteriormente, que en ausencia de disipación ($\epsilon'' = \mu'' = 0$) el índice de refracción sólo puede ser real o imaginario.

Si, por otro lado, n^2 es real, se cumple la relación

$$\epsilon'\mu'' = -\epsilon''\mu'$$

El medio tiene índice de refracción real si $\epsilon'\mu' - \epsilon''\mu'' \geq 0$. Dado que ϵ'' y μ'' no pueden ser negativos, ϵ' y μ' deben tener el mismo signo. Además, por ser real, $\epsilon'\mu'' = -\epsilon''\mu'$, lo cual sólo puede suceder si $\epsilon'' = \mu'' = 0$. Así, un medio con índice de refracción real es necesariamente no disipador.

Cuando \vec{k} es real, n^2 debe ser real, ya que la relación de dispersión nos dice $n'n'' = 0$; n' no puede ser cero, pues en ese caso, k' tendría que ser negativo, lo que nos lleva a concluir que \vec{k} real implica n real. Dicho de otra manera, acabamos de ver que toda onda en un medio disipador es inhomogénea.

Las afirmaciones inversas a estos dos hechos no son ciertas en general. Primero, ondas inhomogéneas pueden existir en un medio no disipador. Segundo, un medio puede no tener disipación, y no tener índice de refracción real, si ϵ' y μ' tienen signos opuestos. Como vimos, en un medio no disipador, eso implica que la onda no se pueda propagar.

En este último caso, de signos opuestos entre ϵ' y μ' , puede existir disipación con $n' = 0$. En este caso, según recién mostramos, la solución es inhomogénea, y,

además, debe cumplir la relación de dispersión:

$$\begin{aligned} k'^2 - k''^2 &= -k_0^2 n''^2 \\ \vec{k}' \cdot \vec{k}'' &= 0 \end{aligned}$$

Lo que implica que la atenuación debe ser mayor al número de onda. Esto se traduce en una longitud de penetración extremadamente pequeña, por lo cual, aunque estrictamente la onda sí puede propagarse en el medio, se atenúa tan rápidamente que no podemos verla.

Este último efecto, de alta atenuación, se da por supuesto en todos los casos en los que $n''^2 > n'^2$. Si escribimos estos números

$$\begin{aligned} n'^2 &= \frac{\epsilon' \mu' - \epsilon'' \mu'' + |\epsilon \mu|}{2\epsilon_0 \mu_0} \\ n''^2 &= \frac{\epsilon'' \mu'' - \epsilon' \mu' + |\epsilon \mu|}{2\epsilon_0 \mu_0} \end{aligned} \quad (2.20)$$

y manipulamos la desigualdad, vemos que esta condición se da siempre que

$$\epsilon'' \mu'' > \epsilon' \mu'$$

En particular, sucede siempre que las partes reales de ϵ y μ tienen signos opuestos. Así, también en el caso disipador, el signo de $\epsilon' \mu'$ otorga propiedades muy distintas a los medios, que están relacionadas directamente con la magnitud de la disipación.

La ecuación (2.20) nos permite ver también que, en el caso de ϵ' y μ' fijas y de signos iguales, la parte imaginaria del índice de refracción es también una medida de la disipación total, en el sentido de que, en este caso, $\epsilon'' = \mu'' = 0$ implica $n'' = 0$; n'^2 es una función creciente de ϵ'' y μ'' ; y, el límite de n''^2 cuando cualquiera de las dos tiende a infinito es infinito.

2.6.6. Dirección del flujo de energía

Con los resultados (2.17), calcularemos la relación entre el promedio del vector de Poynting y el vector \vec{k} . Aprovecharemos el hecho de que \vec{S} está dado por

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \text{Re} \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \times \text{Re} \left[\frac{\vec{k}}{\mu \omega} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right]$$

y que, para formas bilineales del tipo $\text{Re}[e^{a_1 t}] \text{Re}[e^{a_2 t}]$ el promedio sobre la variable t está dado simplemente por $\frac{1}{2} \text{Re}[e^{a_1 t} (e^{a_2 t})^*]$. Aplicando este resultado a cada componente de \vec{S} , obtenemos que

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E}_0 \times \left(\frac{\vec{k}}{\mu \omega} \times \vec{E}_0 \right)^* \right]$$

En vista de la igualdad $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$,

$$\vec{E}_0 \times \left(\frac{\vec{k}}{\mu\omega} \times \vec{E}_0 \right)^* = \left(\frac{\vec{k}}{\mu\omega} \right)^* |\vec{E}_0|^2 - \vec{E}_0^* \left(\vec{E}_0 \cdot \left(\frac{\vec{k}}{\mu\omega} \right)^* \right)$$

y como $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ por la condición de ausencia de cargas externas, el segundo sumando es nulo, y

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|\vec{E}_0|^2}{2|\mu|^2\omega} e^{-2\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \text{Re}[\mu^* \vec{k}] = \frac{|\vec{E}_0|^2}{2|\mu|^2\omega} e^{-2\vec{k}'' \cdot \vec{r}} (\mu' \vec{k}' + \mu'' \vec{k}'') \quad (2.21)$$

En el vacío, la dirección del vector de Poynting y el vector de onda siempre coinciden para ondas planas del tipo $\cos(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)$. Como $\frac{|\vec{E}_0|^2}{2|\mu|^2\omega} e^{-2\vec{k}'' \cdot \vec{r}}$ es siempre una cantidad positiva, lo que este resultado nos dice es que, en un medio sin disipación magnética, coinciden en dirección, pero el sentido lo determina el signo de μ . Si hay disipación magnética, entonces la dirección de $\langle \vec{S} \rangle$ y \vec{k}' sólo coincide si \vec{k}' y \vec{k}'' son paralelos, pues el vector de Poynting tiene una componente en la dirección de la atenuación (lo cual es natural, pues hay un flujo de energía en esa dirección debido a la disipación).

Si existe disipación, la proyección de $\langle \vec{S} \rangle$ sobre \vec{k}'' , no puede ser negativa, pues esto nos diría que el medio proporciona energía a la onda; en consecuencia, tiene que cumplirse siempre que $\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{k}'' \geq 0$. Esto a su vez hace que la proyección del vector de onda sobre el vector de atenuación no pueda ser cualquiera. Tomemos, por ejemplo, el caso en el que el tamaño de la componente de $\mu' \vec{k}'$ sobre $\mu'' \vec{k}''$ es mayor a la magnitud del último; en ese caso, $\mu' \vec{k}' \cdot \mu'' \vec{k}''$ no puede ser negativo, pues $\langle \vec{S} \rangle$ tendría proyección negativa con \vec{k}'' .

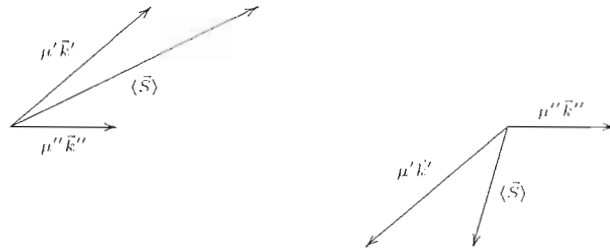


Figura 2.2: Si la proyección de $\mu' \vec{k}'$ sobre $\mu'' \vec{k}''$ es positiva (izquierda), el vector de Poynting tiene proyección escalar positiva con \vec{k}'' . En el caso contrario (derecha), la proyección puede ser negativa, lo cual no es termodinámicamente aceptable.

Dicho en otras palabras, la proyección escalar de \vec{k}' sobre \vec{k}'' debe tener -al menos en este caso- el signo de μ' . Por otro lado, la proyección $\vec{k}' \cdot \vec{k}''$ es, por la relación de dispersión (2.14), igual a $k_0^2 n' n''$. Como n' y n'' son propiedades del medio, el signo de dicha proyección tiene que ser la misma (incluido el signo) para

cualquier onda. Por la misma razón, el producto $n'n''$ debe tener el signo de μ' . Siendo así, y estando $\langle \vec{S} \rangle$ dado por (2.21), tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{k}'' &= \mu' k_0^2 n' n'' + \mu'' k''^2 \\ \langle \vec{S} \rangle \cdot (\mu' \vec{k}') &= \mu'^2 k'^2 + \mu'' \mu' k''^2 n' n''\end{aligned}$$

son efectivamente cantidades positivas. En consecuencia, es necesario que n' ó n'' tenga el signo de μ' . En el próximo capítulo veremos que el signo se le puede asignar naturalmente a uno de los dos, sin suponer previamente sus signos.³

³Esto tendrá como consecuencia -entre otras cosas- que, cuando tengamos términos de la forma $\sqrt{n'^2}$ ó $\sqrt{n''^2}$, los dejemos como $|n'|$ ó $|n''|$, respectivamente.

Capítulo 3

Refracción en medios disipadores

Consideraremos dos semiespacios con índices de refracción n_1 y n_2 , que se tocan en $z = 0$ (la *interfaz*). Estudiaremos la propagación de una onda $\vec{E}_i = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)}$] a través de ambos medios. La solución para todo el espacio debe cumplir los requisitos de continuidad impuestos por las ecuaciones de Maxwell.

En cada semiespacio, estas ondas deben cumplir la relación de dispersión, y además, en la interfaz, las componentes tangenciales del vector eléctrico deben ser continuas

$$\text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t)}]_{\parallel} = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)}]_{\parallel} \text{ cuando } z = 0$$

Esto sólo puede cumplirse para todo el plano xy y a todo tiempo t si $\omega_1 = \omega_2 (= \omega)$ y

$$\vec{k}_1 \cdot (x, y, 0) = \vec{k}_2 \cdot (x, y, 0)$$

es decir, la proyección del vector de onda sobre la interfaz debe ser la misma en ambos medios, así como la proyección del vector de atenuación. Esto tiene como consecuencia que \vec{k}'_1 , \vec{k}'_2 y la normal a la superficie en el punto de incidencia estén en un mismo plano, que escogeremos como el xz . Análogamente, el plano generado por \vec{k}''_1 y \vec{k}''_2 contiene a la normal.

Si la normal forma ángulos Θ_i y φ_i con los vectores \vec{k}'_i y \vec{k}''_i respectivamente, la ecuación anterior es equivalente a

$$k'_1 \text{sen}(\Theta_1) = k'_2 \text{sen}(\Theta_2) \quad (3.1)$$

$$k''_2 \text{sen}(\varphi_1) = k''_1 \text{sen}(\varphi_2) \quad (3.2)$$

El problema de la refracción, visto geoméricamente, es el de encontrar, dado un vector en el medio 1, otro vector que se proyecte igual en cualquier punto de la

superficie. La dirección del primero está dada, lo que restringe los vectores posibles a todos los que quepan en una misma “franja”.

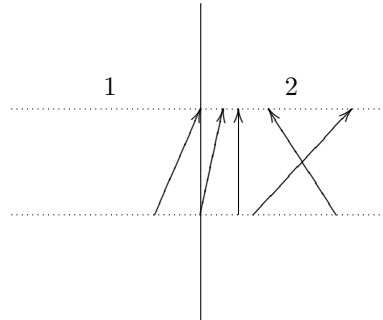


Figura 3.1: Dado un vector en el medio 1, hay muchos vectores en el medio 2 que tienen la misma proyección sobre la superficie.

El medio restringe, de todos estos vectores, a aquellos que no tienen el tamaño adecuado, que es lo que nos da la relación de dispersión. Así, sólo quedan dos posibilidades a elegir, como se puede ver en la figura (3.2).

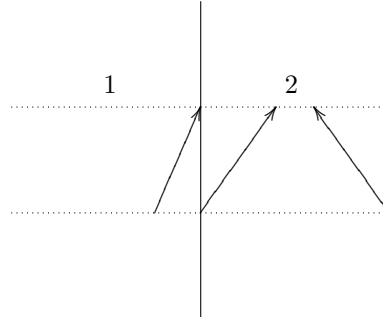


Figura 3.2: Seleccionado el tamaño, quedan dos vectores posibles en el medio 2 con la misma proyección.

Cualquiera de estos dos vectores hace que se cumplan las condiciones de frontera. Para elegir entre ellos, hace falta una consideración física. Si la onda incide desde el medio 1, entonces el flujo de energía debe ser hacia la superficie, pues, de otra manera, la luz nunca llegaría a esta. Esto se traduce en que la componente normal del vector de Poynting deba apuntar hacia la interfaz desde el medio 1 (al igual que el vector de onda, en el caso de la figura); del otro lado de esta, \vec{S} debe apuntar en la misma dirección (en este sistema coordenado, esto quiere decir $S_z > 0$).

La dirección relativa de \vec{S} y \vec{k} en ondas inhomogéneas que obtuvimos en (2.21) nos dice que hay que elegir el vector de onda que apunta hacia la derecha si $\mu_2' > 0$,

y el que apunta a la izquierda si $\mu'_2 < 0$. Este último caso daría lugar a que el rayo luminoso se *volteara* al pasar de un medio a otro. Esto es lo que llamamos *refracción negativa*.

A los materiales cuya parte real de la permeabilidad es negativa los llamaremos *izquierdos*; a los otros, *derechos*. En el ejemplo, asumimos que el medio 1 es derecho. Si el caso hubiera sido el opuesto, la refracción negativa se hubiera dado si el medio 2 hubiera sido derecho; es decir, para observar la refracción negativa, es necesario fijarse en la transmisión entre un derecho y un izquierdo.

Como mostramos antes, en el caso no disipador, es necesario que el signo de ϵ coincida con el de μ para que la onda pueda propagarse, y en el caso disipador, si $\epsilon'\mu' < 0$, la atenuación de la onda es muy grande; al menos en el caso óptico, es suficientemente grande como para impedir la visualización del efecto de refracción. En adelante centraremos la atención en los medios con $\epsilon'\mu' > 0$.

3.0.7. Ángulos de incidencia y de refracción

Llamamos *ángulo de incidencia* al que forma un rayo luminoso con la normal de una superficie. Análogamente, llamamos *ángulo de refracción* al formado por la normal interior de la misma superficie y el rayo que la cruza. Estos ángulos coinciden con los formados por el vector de Poynting en la interfaz, que denotaremos por θ . La refracción es positiva si el ángulo de refracción tiene el mismo signo que el de incidencia y negativa en el caso opuesto.

Como veremos, los materiales izquierdos que se han construido para intentar medir la refracción, tienen valores considerables de la disipación; dado que tanto la dirección de \vec{S} como la relación de dispersión se ven modificados en presencia de ella, los ángulos de refracción también cambian con respecto al caso usual. Cuantificaremos el efecto de la disipación sobre las reglas de la óptica geométrica para este tipo de medios, y para algunos casos importantes, para lo cual encontraremos primero la relación entre los ángulos Θ_1 y Θ_2 . Todos los casos “no disipadores” –que se pueden recuperar en regiones de transparencia cuando ϵ'' y μ'' son suficientemente pequeñas– los veremos como casos especiales de los disipadores.

3.0.8. Atenuación normal

Un hecho que utilizaremos más de una vez, es que, cuando la onda incidente es homogénea, es decir, $k'_1 = 0$, la atenuación en el medio 2 sólo puede ir en dirección de la normal (pues su proyección sobre la interfaz tiene que ser nula). Esto es de esperarse, pues la amplitud de la onda sobre la interfaz tiene que ser constante.

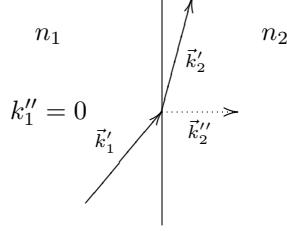


Figura 3.3: Si la onda incidente no tiene atenuación, la onda refractada tiene atenuación ortogonal a la interfaz.

3.0.9. Magnitud de $\mu' \vec{k}' + \mu'' \vec{k}''$

La magnitud del vector $\mu' \vec{k}' + \mu'' \vec{k}''$ será una cantidad geoméricamente importante para las siguientes secciones. Esta se puede escribir exclusivamente en términos de k' utilizando la relación de dispersión,

$$\begin{aligned} \|\mu' \vec{k}' + \mu'' \vec{k}''\|^2 &= \mu'^2 k'^2 + \mu' \mu'' (2\vec{k}' \cdot \vec{k}'') + \mu''^2 k''^2 \\ &= \mu'^2 k'^2 + \mu' \mu'' k_0^2 \beta + (\mu''^2 k''^2 - \mu''^2 k'^2) + \mu''^2 k'^2 \\ &= |\mu|^2 k'^2 + k_0^2 \mu'' (\mu' \beta - \mu'' \alpha) \end{aligned}$$

y ya que $\alpha = \text{Re}[n^2]$ y $\beta = \text{Im}[n^2]$,

$$\mu' \beta - \mu'' \alpha = \text{Im}[\mu^* n^2] = \text{Im}[\mu^* \epsilon \mu] = |\mu|^2 \epsilon''$$

con lo cual

$$\|\mu' \vec{k}' + \mu'' \vec{k}''\| = |\mu| \sqrt{k'^2 + k_0^2 \mu'' \epsilon''} \quad (3.3)$$

Con estos resultados establecidos, ya podemos analizar los diversos casos de refracción.

Notación

En todos los casos alguno de los medios tendrá índice de refracción real, y en ocasiones trabajaremos con las propiedades del otro medio relativas a este, \tilde{n} , $\tilde{\epsilon}$ y $\tilde{\mu}$ que son las propiedades del medio divididas entre las correspondientes del otro.

3.1. n_1 real, n_2 real

Repasaremos primero el caso usual de refracción entre dos medios con índice de refracción real, que son, en consecuencia, no disipadores.

Como vimos, la atenuación en el medio 2 sólo puede ir en dirección de la normal. La relación de dispersión (2.14) nos dice que \vec{k}'_2 y \vec{k}''_2 son ortogonales. Si $k''_2 \neq 0$ entonces $\Theta_2 = \pi/2$, y, por las condiciones de continuidad de la proyección de \vec{k}' (3.1), $k'_2 = k'_1 \text{sen}(\Theta_1)$; esto, junto con la relación de dispersión (2.13), nos diría que, en particular en incidencia normal, $k''_2 < 0$. Así, la única posibilidad es que $k''_2 = 0$, como era de esperarse.

Con esto, la relación de dispersión para cada medio queda como

$$k'_i = k_0 |n_i|$$

sustituyendo en las condiciones de continuidad (3.1), y dividiendo entre k_0 tenemos que

$$|n_1| \text{sen}(\Theta_1) = |n_2| \text{sen}(\Theta_2)$$

La convención que hemos tomado para el ángulo de incidencia, y la condición de continuidad de S_z restringen el ángulo de refracción a tener un valor entre $-\pi/2$ y $\pi/2$; además, las relaciones (2.21) nos dicen, en este caso en el que el índice de refracción es real, que

$$\text{sen}(\theta_i) = \text{sgn}(\mu_i) \text{sen}(\Theta_i)$$

Con lo cual, el ángulo de refracción en términos del ángulo de incidencia nos queda como

$$\text{sgn}(\mu_1) |n_1| \text{sen}(\theta_1) = \text{sgn}(\mu_2) |n_2| \text{sen}(\theta_2)$$

Esta relación, del ángulo de refracción y de incidencia involucrando sólo las propiedades del medio y no las de la onda, es la *Ley de Snell*. En términos de las propiedades relativas entre ambos medios, la podemos escribir como

$$\text{sen}(\theta_1) = \text{sgn}(\tilde{\mu}) |\tilde{n}| \text{sen}(\theta_2) \quad (3.4)$$

Dado el ángulo de incidencia siempre es positivo, el ángulo de refracción tendrá el signo de la permeabilidad relativa. Ahora, si despejamos el ángulo de refracción:

$$\theta_2 = \text{arc sen} \left(\frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sgn}(\tilde{\mu}) |\tilde{n}|} \right)$$

vemos que, cuando $|\tilde{n}| \geq 1$, θ_2 está bien definido, pues el argumento del arcoseno siempre es menor que uno. Si, por el contrario, $|\tilde{n}| < 1$ entonces habrá un ángulo de incidencia, dado por $\theta_c = \text{arc sen}(|\tilde{n}|)$ (el *ángulo crítico*) para el cual el rayo transmitido va en dirección de la interfaz. Dado que el seno es creciente, para todos los ángulos mayores a θ_c , el ángulo de refracción no está bien definido (formalmente, es un ángulo complejo). Este es el fenómeno de la reflexión total, en el cual el rayo transmitido desaparece.

Índice de refracción, nuevamente

En este caso es claro que, si a n_i le damos el signo de μ_i , la ley de Snell (3.5) queda naturalmente escrita como

$$\text{sen}(\theta_1) = \tilde{n} \text{sen}(\theta_2) \quad (3.5)$$

Además, independientemente de los detalles, los casos disipadores deben recuperar éste en el límite en el que $\mu'' = \epsilon'' = 0$; $n'n''$ debe tener, por las razones termodinámicas expuestas anteriormente, el signo de μ' en el caso general. Si bien es cierto que cualquiera de los dos factores puede tener el signo, la naturaleza de n'' es muy distinta que la de n' ; mientras que el primero mide la atenuación, que siempre tiene una dirección, el otro mide la refracción, que sí puede tener más de un comportamiento direccional; por otro lado, si el signo se le adjudicara a n'' , simplemente se perdería a lo largo de las expresiones, pues siempre aparece su valor absoluto, mientras que los cálculos dejan siempre los productos $\text{sgn}(\mu')|n'|$.

Esto nos sugiere muy fuertemente que debemos definir el índice de refracción, que sólo habíamos introducido a través de su cuadrado, de manera precisa como:

$$n(\omega) := \text{sgn}(\mu') \sqrt{\frac{\epsilon'\mu' - \epsilon''\mu'' + |\epsilon\mu|}{2\epsilon_0\mu_0}} + i \sqrt{\frac{\epsilon''\mu'' - \epsilon'\mu' + |\epsilon\mu|}{2\epsilon_0\mu_0}} \quad (3.6)$$

y será esta la definición que tomemos en adelante.

3.2. n_1 real, n_2 complejo

Veremos qué sucede en el caso en el que la onda incide sobre un medio absorbente. En este caso, definiremos las propiedades relativas del medio como

$$\begin{aligned} \tilde{n} &:= \frac{n_2}{n_1} \\ \tilde{\epsilon} &:= \frac{\epsilon'_2}{\epsilon_1} + i \frac{\epsilon''_2}{|\epsilon_1|} \\ \tilde{\mu} &:= \frac{\mu'_2}{\mu_1} + i \frac{\mu''_2}{|\mu_1|} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Con lo que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$, las partes real e imaginaria de \tilde{n}^2 , quedan dadas por

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta} = \text{Re}[\tilde{\epsilon}\tilde{\mu}] + i \text{sgn}(\mu_1) \text{Im}[\tilde{\epsilon}\tilde{\mu}] = \frac{\alpha_2}{n_1^2} + i \text{sgn}(n_1) \frac{\beta_2}{n_1^2} \quad (3.8)$$

Una vez más usaremos el hecho de que la atenuación y la normal tienen la misma dirección; esto hace que Θ_2 sea también el ángulo que forman \vec{k}'_2 y \vec{k}''_2 . Como en general este ángulo no será $\pi/2$, podemos utilizar la solución (2.13) que derivamos para la relación de dispersión, con $\psi = \Theta_2$, lo cual nos dice que el valor de k'_2 es

$$k_2'^2(\Theta_2) = k_0^2 \frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 \sec^2(\Theta_2)}}{2}$$

Tomando esto y la relación de dispersión para el medio 1 en cuenta, las condiciones de refracción (3.1), quedan como

$$|n_1| \text{sen}(\Theta_1) = \sqrt{\frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 \sec^2(\Theta_2)}}{2}} \text{sen}(\Theta_2) \quad (3.9)$$

Que es nuevamente una relación entre Θ_1 , Θ_2 y las propiedades del medio. Siguiendo la forma de esta relación en el caso no disipador, podemos interpretar el factor que multiplica a $\text{sen}(\Theta_2)$ como un “índice de refracción” funcional para los vectores de onda. En términos de las propiedades relativas del medio, podemos definir esta función como

$$N(\Theta_2) := \frac{k_2'(\Theta_2)}{k_0 |n_1|} \quad (3.10)$$

para escribir

$$\text{sen}(\Theta_1) = N(\Theta_2) \text{sen}(\Theta_2)$$

El problema con esta relación es que Θ_2 está dado de manera implícita; se necesita conocer Θ_2 para calcular $N(\Theta_2)$. Un poco de álgebra^{A3} nos permite poner N en términos de Θ_1 , quedando como sigue

$$N(\Theta_1) = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\Theta_1) + \tilde{\alpha} + \sqrt{(\text{sen}^2(\Theta_1) - \tilde{\alpha})^2 + \tilde{\beta}^2}}{2}}$$

para escribir

$$\text{sen}(\Theta_1) = N(\Theta_1) \text{sen}(\Theta_2) \quad (3.11)$$

A diferencia del caso no disipador, este número que aparece como factor entre los senos de los ángulos formados por los vectores de onda y la normal no es una constante. Además, hay que considerar que en presencia de disipación magnética, estos ángulos y los de incidencia y refracción pueden diferir en algo más que el signo.

Dado nuestro sistema coordenado, tenemos que $\vec{S}_2 = S_2(\text{sen}(\theta_2), 0, \cos(\theta_2))$. La dirección de este, por el resultado (2.21), es también la dirección de

$$\mu_2' \vec{k}_2' + \mu_2'' \vec{k}_2'' = \mu_2' k_2' (\text{sen}(\Theta_2), 0, \cos(\Theta_2)) + \mu_2'' (0, 0, k_2'')$$

con lo cual,

$$\text{sen}(\theta_2) = \frac{\mu_2' k_2'}{\|\mu_2' \vec{k}_2' + \mu_2'' \vec{k}_2''\|} \text{sen}(\Theta_2) \quad (3.12)$$

La norma que aparece en el denominador es la correspondiente al resultado (3.3), que en este caso se puede escribir, tomando en cuenta la relación (3.10) y las propiedades relativas del medio (3.7) como

$$\begin{aligned} \|\mu_2' \vec{k}_2' + \mu_2'' \vec{k}_2''\|^2 &= |\mu_2'|^2 (k_2'^2 + k_0^2 \mu_2''^2 \epsilon_2'') \\ &= k_0^2 n_1^2 \mu_1^2 |\tilde{\mu}'|^2 (N^2 + \tilde{\epsilon}'' \tilde{\mu}''') \end{aligned}$$

Con lo cual la ecuación (3.12) queda como

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_2) &= \frac{\mu_2' k_2'}{k_0 |n_1| |\mu_1| |\tilde{\mu}'| \sqrt{N^2(\Theta_1) + \tilde{\epsilon}'' \tilde{\mu}''}} \text{sen}(\Theta_2) \\ &= \frac{\tilde{\mu}'}{|\tilde{\mu}'| \sqrt{N^2(\Theta_1) + \tilde{\epsilon}'' \tilde{\mu}''}} \text{sgn}(\mu_1) N(\Theta_1) \text{sen}(\Theta_2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Utilizando la ecuación (3.11), y siendo en este caso $\text{sen}(\theta_1) = \text{sgn}(\mu_1) \text{sen}(\Theta_1)$, tenemos que

$$\text{sen}(\theta_2) = \frac{\tilde{\mu}'}{|\tilde{\mu}| \sqrt{N^2(\Theta_1) + \tilde{\mu}'' \tilde{\epsilon}''}} \text{sen}(\theta_1)$$

Notamos que $N(\Theta_1) = N(\theta_1)$, con lo cual obtenemos el índice de refracción funcional para incidencia de un medio con índice de refracción real a un medio disipador:

$$\nu(\theta_1) = \frac{|\tilde{\mu}|}{\tilde{\mu}'} \sqrt{N^2(\theta_1) + \tilde{\mu}'' \tilde{\epsilon}''} \quad (3.14)$$

que nos permite escribir una vez más la Ley de Snell,

$$\text{sen}(\theta_1) = \nu(\theta_1) \text{sen}(\theta_2)$$

En el límite usual, es decir, cuando $\tilde{n}'' \rightarrow 0$ y $\tilde{n}' \rightarrow \tilde{n}$, tenemos que

$$\begin{aligned} N^2(\Theta_1) &\rightarrow \frac{\text{sen}^2(\Theta_1) + \tilde{n}^2 + |\text{sen}^2(\Theta_1) - \tilde{n}^2|}{2} \\ \nu(\theta_1) &\rightarrow \text{sgn}(\tilde{\mu}) N(\theta_1) \end{aligned}$$

en este límite tenemos dos posibilidades, la primera, que $\tilde{n}^2 \geq 1$. Si esto pasa, sin importar el valor de θ_1 , $|\text{sen}^2(\theta_1) - \tilde{n}^2| = \tilde{n}^2 - \text{sen}^2(\theta_1)$ y

$$\nu(\theta_1) = \text{sgn}(\tilde{\mu}) \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\theta_1) + \tilde{n}^2 - \text{sen}^2(\theta_1) + \tilde{n}^2}{2}} = \text{sgn}(\tilde{\mu}) |\tilde{n}|$$

recuperando, como se espera, el caso anterior. Cuando $\tilde{n}^2 < 1$, habrá ángulos que hagan que $\text{sen}^2(\theta_1) - \tilde{n}^2 > 0$, en cuyo caso

$$\nu(\theta_1) = \text{sgn}(\tilde{\mu}) \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\theta_1) + \tilde{n}^2 + \text{sen}^2(\theta_1) - \tilde{n}^2}{2}} = \text{sgn}(\tilde{\mu}) |\text{sen}(\theta_1)|$$

Tenemos nuevamente el fenómeno del ángulo crítico, siendo una vez más $\theta_c = \arcsen(\tilde{n})$ el ínfimo de los ángulos para los cuales pasa esto. A diferencia del caso no disipador, en el que se dice que el ángulo de refracción se indetermina, este límite deja la Ley de Snell como

$$\text{sen}(\theta_1) = \text{sgn}(\tilde{\mu}) |\text{sen}(\theta_1)| \text{sen}(\theta_2)$$

para ángulos mayores al crítico, lo que nos dice que el ángulo de refracción aumenta como función del de incidencia, hasta llegar a $\pi/2$ si $\tilde{\mu} > 0$ o $-\pi/2$ si $\tilde{\mu} < 0$, en donde se *estaciona*.

Veamos algunas otras propiedades de la refracción entre estos medios. Notemos primero que la derivada de N

$$\frac{dN}{d\Theta_1} = \frac{\text{sen}(\Theta_1) \cos(\Theta_1)}{2N} \left(1 + \frac{\text{sen}^2(\Theta_1) - \tilde{\alpha}}{\sqrt{(\text{sen}^2(\Theta_1) - \tilde{\alpha})^2 + \tilde{\beta}^2}} \right)$$

se anula, en el intervalo $[0, \pi/2]$ en los extremos. Uno de los casos es el de *incidencia normal* ($\theta_1 = 0$), en donde N coincide exactamente con $|\tilde{n}'|$; el segundo es el límite de *incidencia rasante* ($\theta_1 \rightarrow \pi/2$). Para cualesquiera otros ángulos, los ceros de la derivada se dan cuando $\tilde{\beta} = 0$ y $\tilde{\alpha} > \text{sen}^2(\Theta_1)$. Esto corresponde al caso no disipador. Aquí además $dN/d\Theta_1$ es cero para todos los ángulos a partir de uno, lo cual corresponde nuevamente al ángulo crítico.

Si $\tilde{\beta} \neq 0$, entonces la derivada siempre es positiva en el intervalo $(0, \pi/2)$, y así, en el caso disipador N es una función creciente del ángulo, lo que hace a ν en presencia de disipación, una función estrictamente creciente para materiales derechos y estrictamente decreciente para materiales izquierdos.

En presencia de disipación magnética no puede haber ángulo crítico, pues el vector de Poynting siempre tendrá una componente en la dirección de \vec{k}'' (que tampoco puede ser nulo, como ya mostramos). La única opción para que hubiera ángulo crítico con disipación sería $\tilde{\mu}'' = 0$ y $\tilde{\epsilon}'' > 0$. En esas condiciones, para que $\nu^2(\theta_1) = \text{sen}^2(\theta_1)$, sería necesario que $\mu' = 0$. Es decir, en presencia de disipación no hay ángulo crítico.

Aparentemente, para caracterizar ν dado un ángulo de incidencia son necesarios cuatro parámetros; por ejemplo, $(\tilde{\epsilon}, \tilde{\mu})$, $(\tilde{n}, \tilde{\mu})$ ó $(\tilde{n}, \tilde{\epsilon})$. En realidad, estas cuatro cantidades no son independientes, lo que se puede notar recordando que, para los casos que estamos considerando, $\tilde{n}'' = 0$ implica $\tilde{\epsilon}'' = \tilde{\mu}'' = 0$.

Fijémonos en las proporciones de las partes imaginarias a las reales de $\tilde{\epsilon}$ y $\tilde{\mu}$, y el producto de sus partes reales,

$$\begin{aligned}\pi_\epsilon &:= \frac{\tilde{\epsilon}''}{\tilde{\epsilon}'} \\ \pi_\mu &:= \frac{\tilde{\mu}''}{\tilde{\mu}'} \\ \pi_r &:= \tilde{\epsilon}' \tilde{\mu}'\end{aligned}\tag{3.15}$$

π_ϵ y π_μ se pueden ver como una medida de la disipación eléctrica y magnética respectivamente, que además tienen el signo de $\tilde{\epsilon}'$ y $\tilde{\mu}'$, por las definiciones de las mismas; es decir, son medidas de la disipación que además tienen la información del signo de la refracción. π_r es el cuadrado del índice de refracción relativo en el caso no disipador. Con ellas, podemos escribir

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}'' \tilde{\mu}'' &= \pi_r \pi_\mu \pi_\epsilon \\ \tilde{\alpha} &= \pi_r (1 - \pi_\mu \pi_\epsilon) \\ \tilde{\beta} &= \text{sgn}(\mu_1) \pi_r \pi_\mu + \text{sgn}(\epsilon_1) \pi_r \pi_\epsilon\end{aligned}$$

y, salvo en el caso de ausencia total de disipación magnética,

$$\frac{|\tilde{\mu}|}{\tilde{\mu}'} = \text{sgn}(\pi_\mu) \sqrt{1 + \pi_\mu^2}$$

pues, en esos casos, π_μ tiene el signo de $\tilde{\mu}'$. Como consideramos $\text{sgn}(\mu_1) = \text{sgn}(\epsilon_1)$, $\tilde{\beta} = \text{sgn}(\mu_1) \pi_r (\pi_\mu + \pi_\epsilon)$, y dado que este sólo aparece en forma cuadrática en las

expresiones, siempre que $\tilde{\mu}'' \neq 0$, $\nu(\theta_1)$ queda totalmente determinado con estos tres parámetros. No son parámetros totalmente independientes, pues $\pi_\mu \pi_\epsilon$ debe tener el signo de π_r .

Es notable que, bajo el cambio $\pi_\mu \mapsto -\pi_\mu$ y $\pi_\epsilon \mapsto -\pi_\epsilon$, $\nu(\theta_1)$ cambia por $-\nu(\theta_1)$. Esto quiere decir que, en medios izquierdos que estamos considerando (en los que $\pi_r > 0$), no hay una diferencia con los medios derechos en lo que se refiere a efectos de la disipación. La única manera de observar diferencias entre medios izquierdos y derechos, sería con $\pi_r < 0$, lo cual no consideraremos por las razones expuestas previamente.

Llamaremos $\Delta\tilde{n}$ a la diferencia entre el índice de refracción funcional y el índice en el caso no disipador, dividido entre este último,

$$\Delta\tilde{n} := \frac{\nu(\theta_1) - \operatorname{sgn}(\pi_\mu)\sqrt{\pi_r}}{\operatorname{sgn}(\pi_\mu)\sqrt{\pi_r}} = \frac{|\nu(\theta_1)|}{\sqrt{\pi_r}} - 1 \quad (3.16)$$

Conocer cómo se comporta esta diferencia es importante para saber cuáles serán las correcciones que proporciona la presencia de disipación a los ángulos de refracción. Veremos las gráficas de esta diferencia para distintos valores de π_r , para π_ϵ dado, como función de π_μ .

Estas gráficas representan más de una situación, dadas las definiciones de los parámetros; en particular podemos pensar en aquella en la que $\tilde{\epsilon}'$ y $\tilde{\mu}'$ están fijas, por lo cual variar π_ϵ y π_μ corresponde a variaciones en la disipación para valores fijos de un índice de refracción en ausencia de disipación.

Para incluir la dependencia angular, las gráficas aprovechan la monotonía de ν . La curva para $\theta_1 = 0$ no se puede intersectar con la curva para cualquier otro ángulo, así que las variaciones posibles para todos los ángulos intermedios están comprendidas entre las gráficas de estas. Veremos esas regiones entre $\theta_1 = 0$ y $\theta_1 = \pi/2$, salvo en el caso en el que existe ángulo crítico, en las que sólo llegan hasta este.

Hay que notar que, en incidencia normal, el valor de $\Delta\tilde{n}$,

$$\Delta\tilde{n}|_{\theta_1=0} = \operatorname{sgn}(\pi_\mu)\sqrt{1 + \pi_\mu^2} \sqrt{\frac{1 + \pi_\mu\pi_r + \sqrt{(1 + \pi_\mu\pi_\epsilon)^2 + (\pi_\mu + \pi_\epsilon)^2}}{2}} \quad (3.17)$$

es el mismo independientemente del valor de π_r , por lo que veremos todas las curvas de $\theta_1 = 0$ sobrepuestas.

También hay que recordar el fenómeno de la atenuación, que va en este caso como n_2'' , y aumenta con π_ϵ y π_μ . Esto hace importante estudiar con detalle el caso de baja disipación, que es en el cual se pueden apreciar directamente la refracción, y determinar qué magnitud pueden tener los efectos disipadores sobre el índice de refracción. Por ello se incluyen gráficas logarítmicas de los mismos valores de π_r .

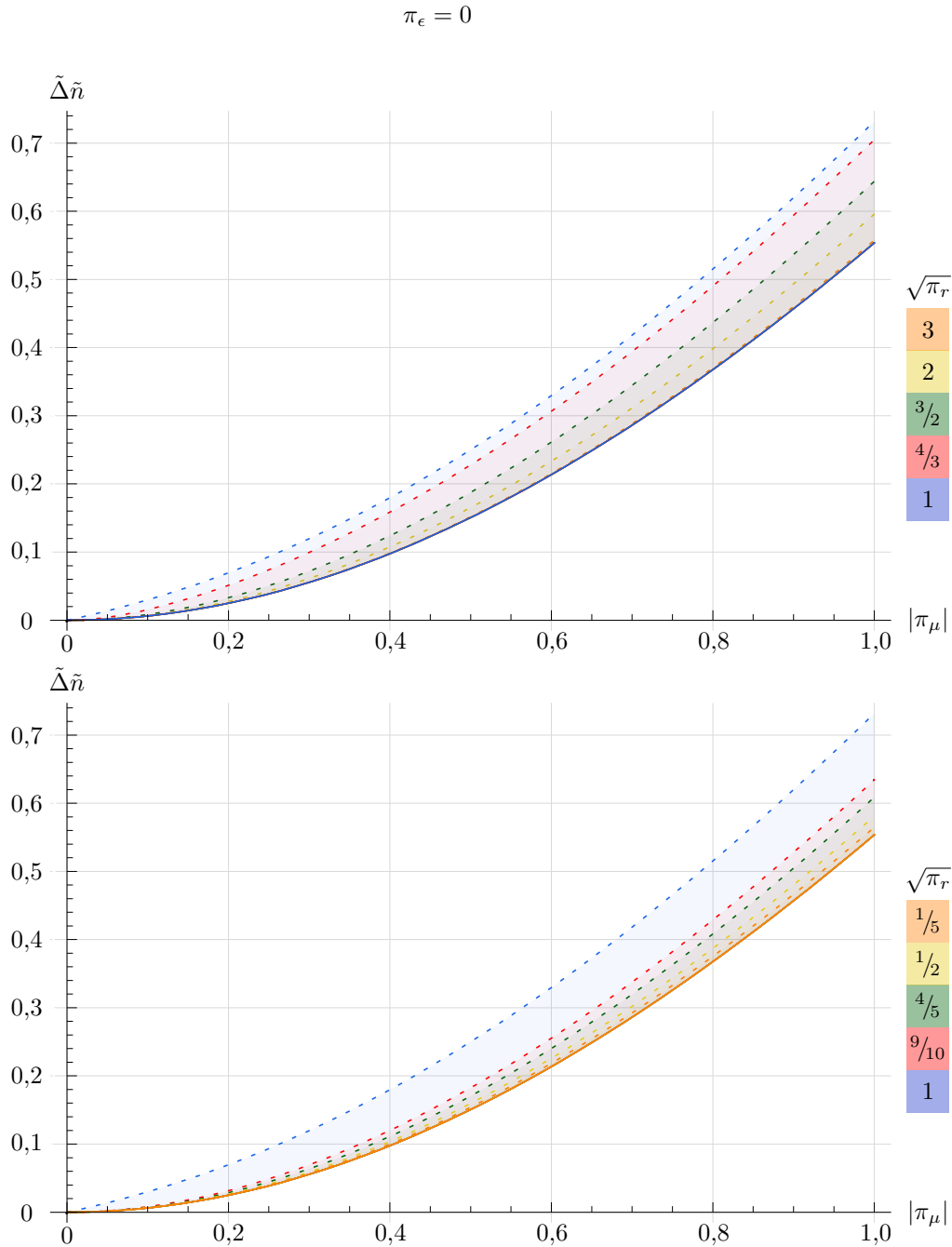


Figura 3.4: Gráficas de $\Delta \tilde{n}$ para diversos valores de π_r (en colores, con valores mayores a uno en la gráfica superior y menores a uno en la inferior) y $\pi_\epsilon = 0$ (sin disipación eléctrica). Estas gráficas incluyen el caso no disipador, en el límite en el que $\pi_\mu = 0$. Como se espera, la gráfica se va a cero conforme se acerca al eje vertical. La gráfica superior incluye todos los ángulos entre cero (línea sólida) y $\pi/2$ (línea punteada) En este límite, la gráfica inferior tiene ángulo crítico, por lo cual se grafica hasta este.

$$\pi_\epsilon = 1/2$$

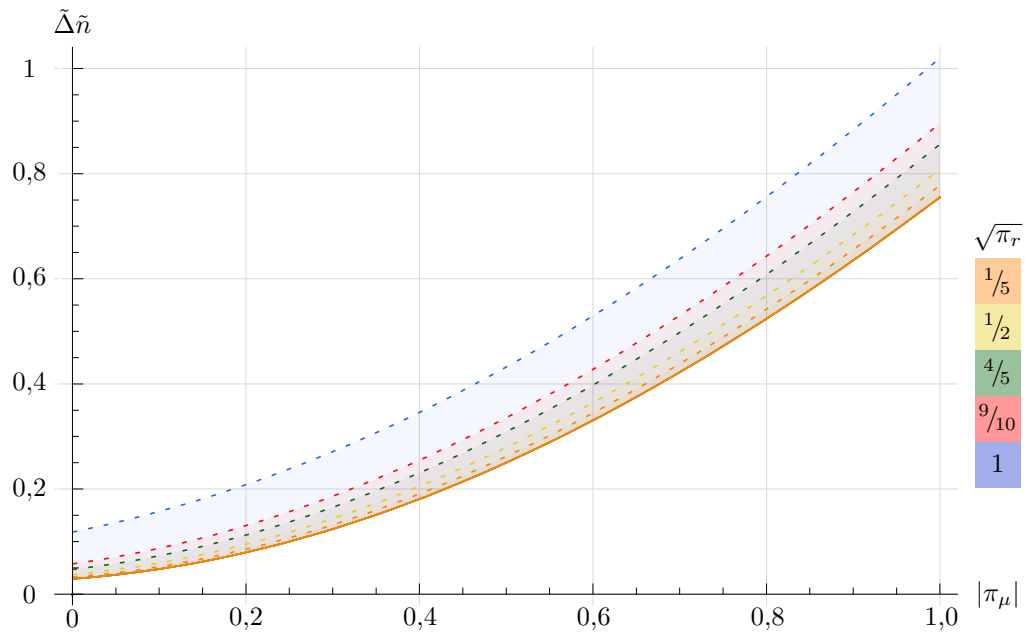
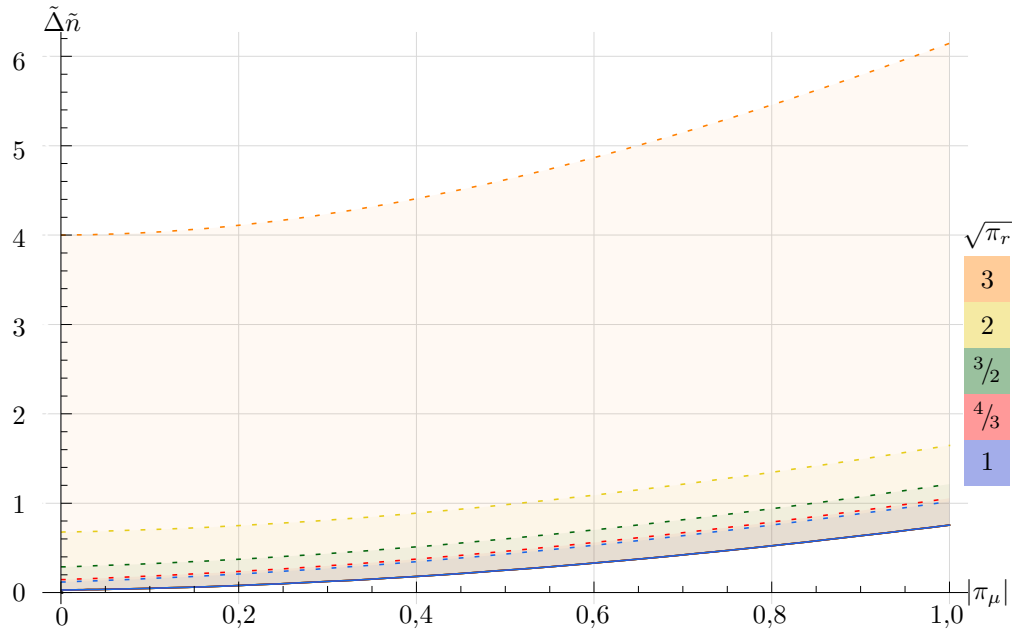


Figura 3.5: Gráficas de $\tilde{\Delta n}$ para diversos valores de π_r , con $\pi_\epsilon = 1/2$. En este caso no hay ángulo crítico, y todos los ángulos están entre 0 (línea sólida) y $\pi/2$ (línea punteada). Los valores de la gráfica no van a cero conforme π_μ va a cero, pues, aunque la disipación magnética disminuye, no deja de haber disipación eléctrica.

$$\pi_\epsilon = 1$$

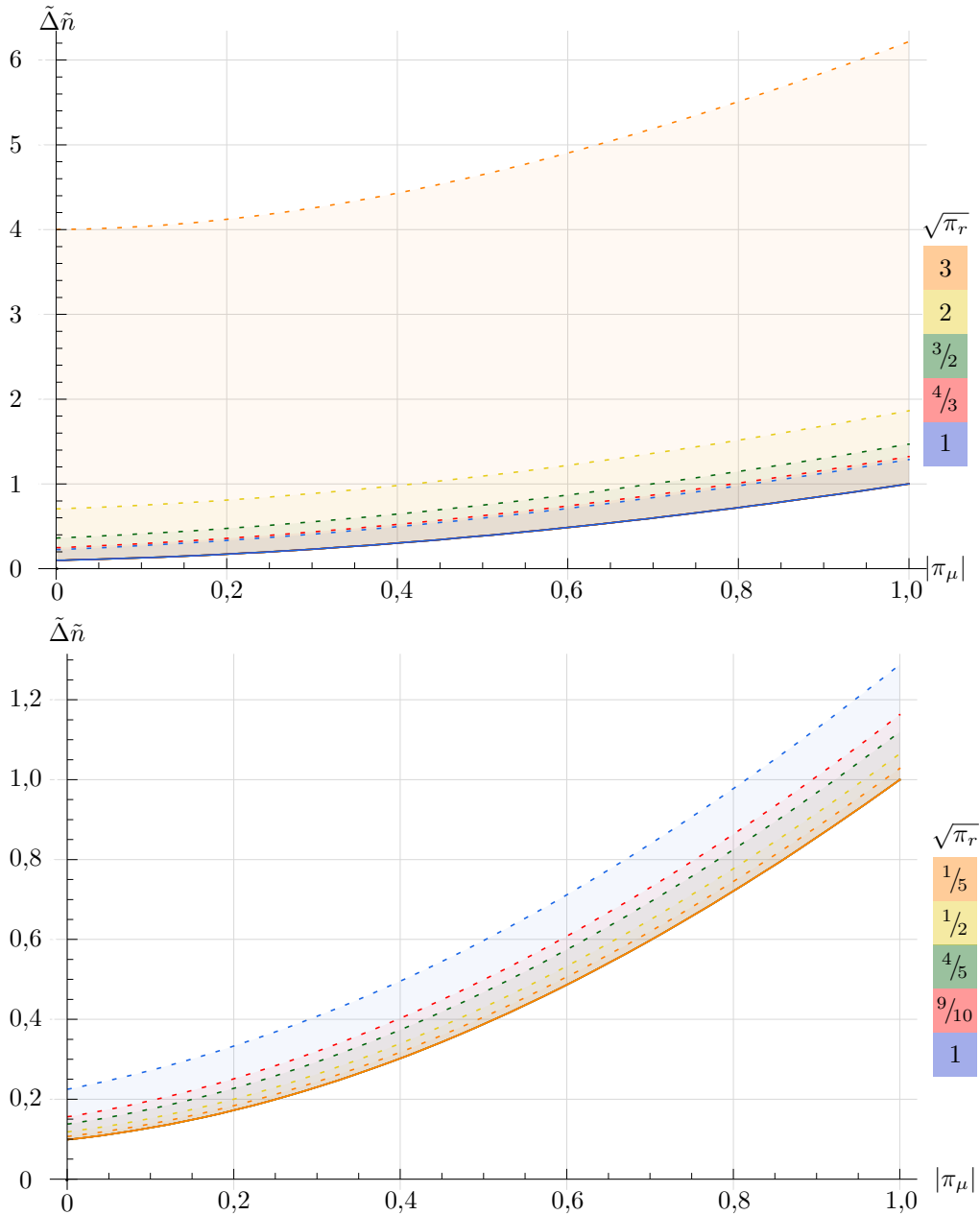


Figura 3.6: Las mismas gráficas para $\pi_\epsilon = 1$. Representan casos de muy alta disipación. La diferencia puede ser hasta seis veces mayor que el índice de refracción en ausencia de disipación, aunque la atenuación es muy alta.

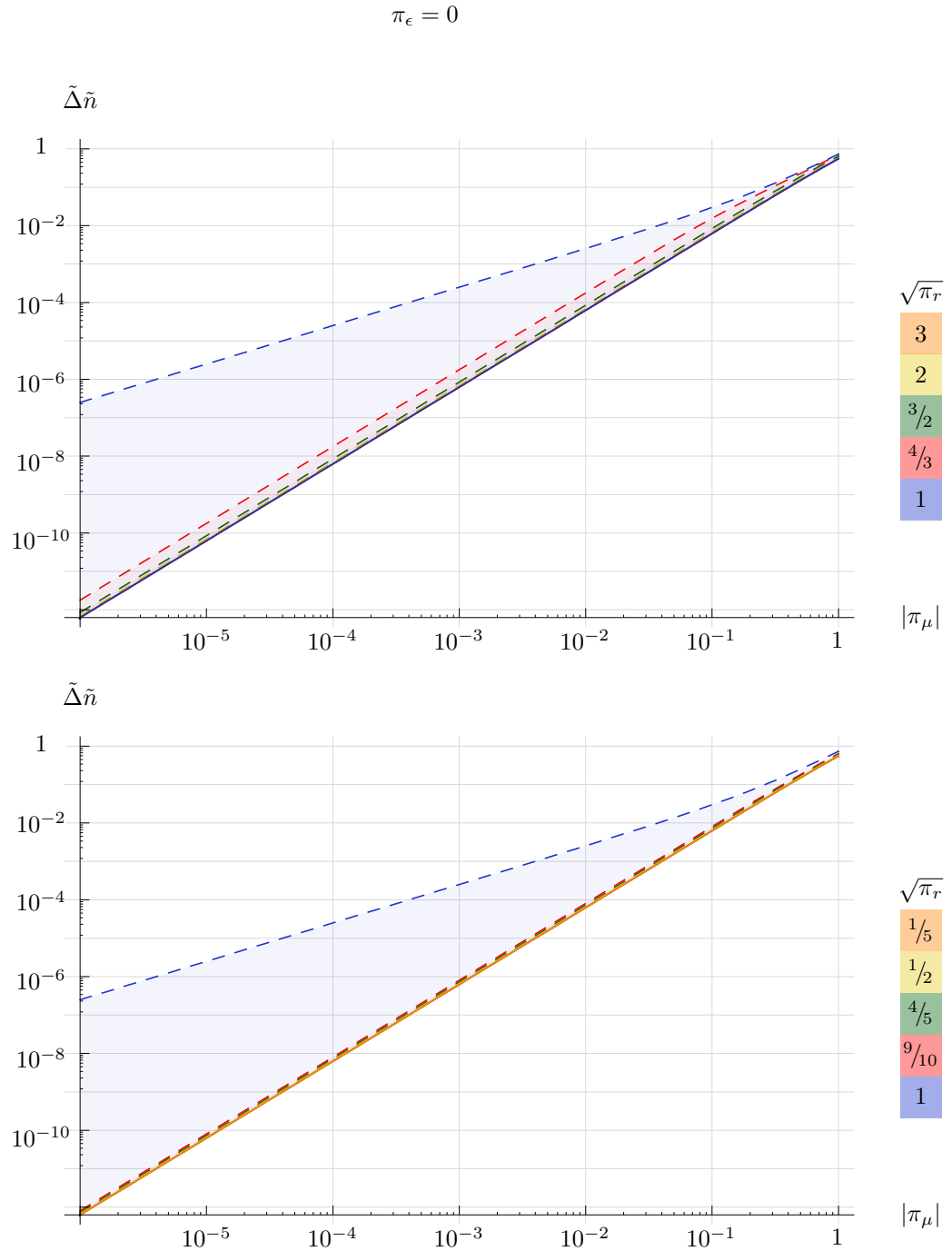


Figura 3.7: Estas gráficas muestran en detalle el comportamiento de baja disipación magnética, con nula disipación eléctrica. Nuevamente, la gráfica superior tiene valores de π_r mayores que uno, y la inferior menores que uno, por lo que la segunda está graficada hasta los ángulos críticos. Los cambios para $\pi_\mu = 10^{-6}$ son del orden de 10^{-7}

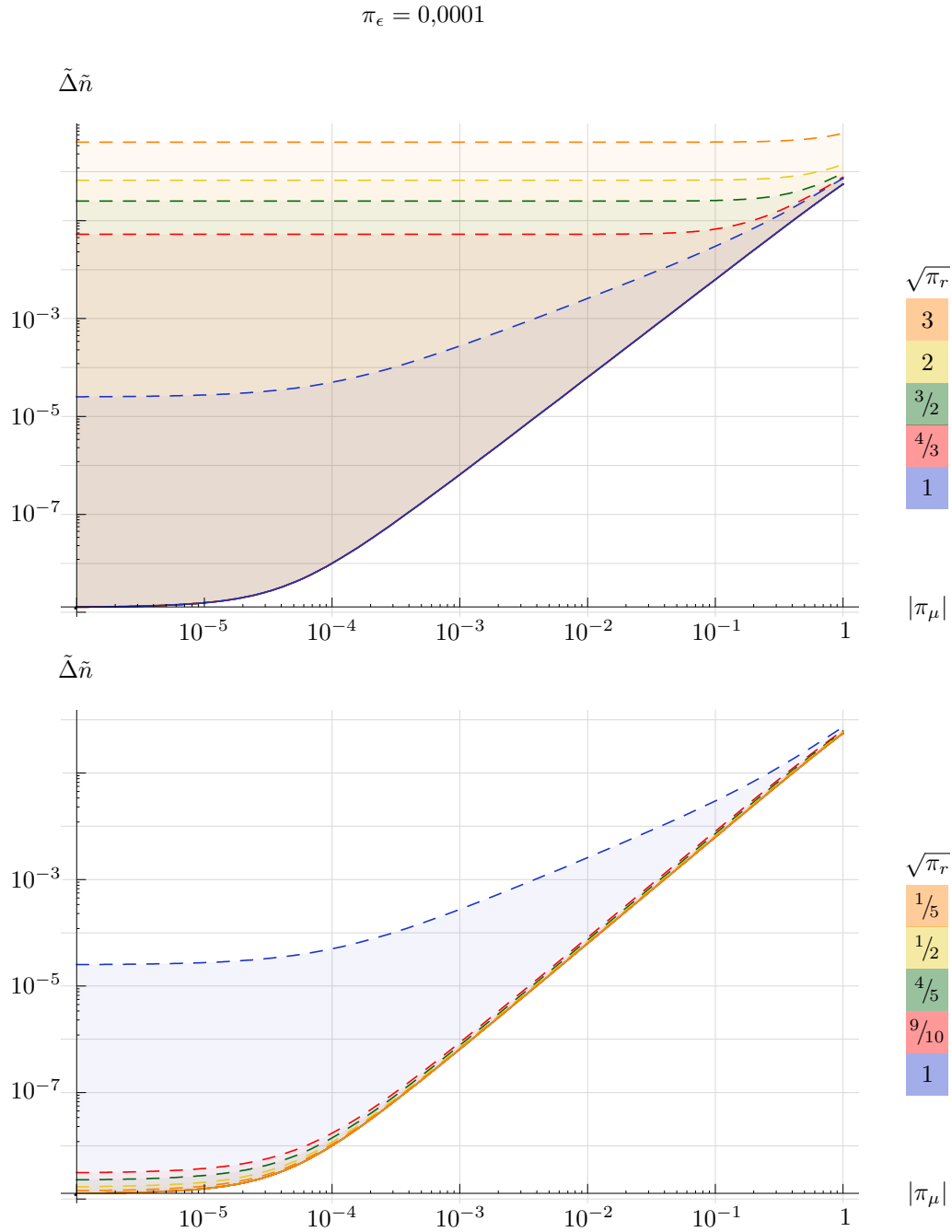


Figura 3.8: Podemos ver que, aunque sigue habiendo baja disipación se logran cambios en el índice de refracción, para $\pi_\mu = 10^{-6}$, de hasta el orden de la unidad, para los valores de π_r mayores que uno. En contraste, en las gráficas para $\pi_\epsilon = 10^{-6}$ que se iban a incluir en lugar de estas, no logran apreciarse cambios con respecto a $\pi_\epsilon = 0$.

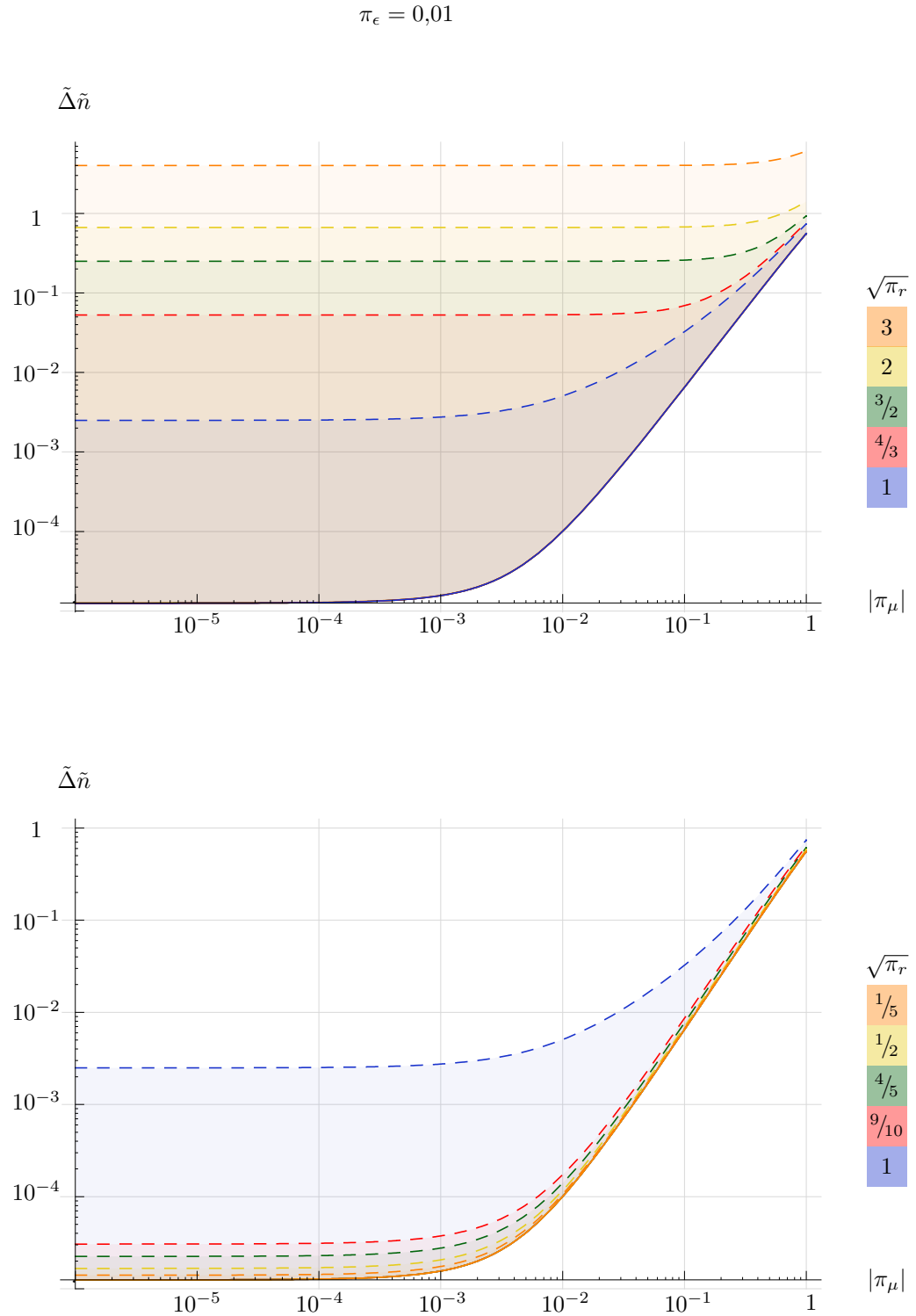


Figura 3.9: Finalmente, las gráficas de mediana disipación, para $\pi_\epsilon = 0,01$. Hay cambios importantes, aún para valores de π_r que corresponderían a, por ejemplo, el agua (región roja de la gráfica superior), de cerca del 10% del valor del índice en el caso no disipador.

3.3. n_1 complejo, n_2 real

En la óptica sin disipación puede determinarse cuándo un haz es incidente o refractado dada una interfaz, si se observa de qué lado de esta hay un rayo reflejado, o si se puede comparar la intensidad de ambos haces. Sin embargo, si la reflexión es suficientemente pequeña, no se puede saber, de la simple observación de los mismos, cuál es el haz incidente; si se emite un rayo hacia la interfaz en la dirección del refractado, seguirá la dirección del incidente. Esta es una situación reversible en la que ambos medios son intercambiables.

La presencia de disipación en un medio rompe esta simetría, pues la dirección de la atenuación con relación a la normal debe apuntar siempre en dirección del medio sobre el que incide la onda. Eso hace claro que este caso de incidencia desde un medio disipador hacia un no disipador es diferente al caso inverso.

Dado que no estamos considerando materiales con $\epsilon'\mu' < 0$, la onda incidente desde un medio con índice de refracción complejo no es homogénea, pues el medio es disipador. Como el vector de Poynting tiene componente z positiva, también la tiene el vector de atenuación, y, en consecuencia, la onda aumenta su amplitud indefinidamente conforme z decrece. Es claro que esta situación no es físicamente posible, y que en algún lado debe existir otra interfaz que delimite al medio disipador, pero, dado que por el momento sólo estamos analizando los ángulos, y no las amplitudes, no es relevante.

Por otro lado, si tuviéramos una fuente inmersa en el medio disipador, la ubicación de esta determinaría la amplitud máxima, siempre finita, de la onda. Si además esta fuente emite ondas homogéneas en un medio no disipador, al estar en un medio disipador la onda inhomogénea tendría vectores de onda y de atenuación colineales. Esto deja la solución a la relación de dispersión (con $\psi = 0$) como

$$\begin{aligned} k_1'^2 &= k_0^2 n_1'^2 \\ k_1''^2 &= k_0^2 n_1''^2 \end{aligned}$$

Además, como el medio 2 es no disipador, el vector de atenuación es perpendicular al de onda, y las condiciones de frontera (3.1) y (3.2) se simplifican:

$$\begin{aligned} k_0^2 n_1'^2 \sin^2(\Theta_1) &= k_2'^2 \sin^2(\Theta_2) \\ k_0^2 n_1''^2 \sin^2(\Theta_1) &= k_2''^2 \cos^2(\Theta_2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución^{A4}:

$$|n_2| \sin(\Theta_2) = \sqrt{\frac{|n_1^2| \sin^2(\Theta_1) + n_2^2 - \sqrt{(|n_1^2| \sin^2(\Theta_1) + n_2^2)^2 - 4n_2^2 n_1'^2 \sin^2(\Theta_1)}}{2}}$$

Definiremos las propiedades relativas del medio como en la sección anterior, (3.7), pero intercambiando los subíndices 1 y 2, de tal manera que el índice de refracción funcional para los vectores de onda es en este caso

$$N(\Theta_1) = \sqrt{\frac{|\tilde{n}_1^2| + \csc^2(\Theta_1) - \sqrt{(|\tilde{n}_1^2| + \csc^2(\Theta_1))^2 - 4\tilde{n}_1'^2 \csc^2(\Theta_1)}}{2}}$$

y

$$N(\Theta_1) \operatorname{sen}(\Theta_1) = \operatorname{sen}(\Theta_2)$$

Finalmente, dado que la proyección del vector de Poynting promedio y el de onda debe tener el signo de μ'_1 (y, bajo nuestra definición, el de n'_1), tenemos que

$$\operatorname{sen}(\theta_1) = \operatorname{sgn}(\mu'_1) \operatorname{sen}(\Theta_1) = \operatorname{sgn}(n'_1) \operatorname{sen}(\Theta_1)$$

Y, como el ángulo de refracción es $\operatorname{sen}(\theta_2) = \operatorname{sgn}(\mu_2) \operatorname{sen}(\Theta_2)$, el índice de refracción funcional y la ley de Snell son en este caso

$$\begin{aligned} \nu(\theta_1) &= \operatorname{sgn}(\tilde{\mu}) N(\theta_1) \\ \nu(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_1) &= \operatorname{sen}(\theta_2) \end{aligned}$$

Si los vectores de onda y de atenuación en el medio 1 no son colineales, el problema es en general tridimensional. Generalizaremos este resultado cuando los vectores de onda y atenuación están en el mismo plano que la normal, en cuyo

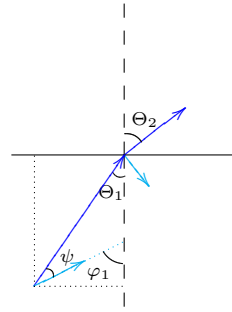


Figura 3.10: Incidencia desde un medio disipador a uno no disipador, cuando los vectores de onda y de atenuación no son colineales pero la normal permanece en el plano generado por ellos.

caso las condiciones de frontera son

$$\begin{aligned} k'_1 \operatorname{sen}(\Theta_1) &= k'_2 \operatorname{sen}(\Theta_2) \\ k''_1 \operatorname{sen}(\Theta_1 + \psi) &= k''_2 \cos(\Theta_2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

k'_1 y k''_1 son fijos y están determinados por las soluciones (2.15) y (2.14). Definiremos

$$\begin{aligned} N' &:= \frac{k'_1}{k_0 |n_2|} = \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 \sec^2(\psi)}}{2}} \\ N'' &:= \frac{k''_1}{k_0 |n_2|} = \sqrt{\frac{-\tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 \sec^2(\psi)}}{2}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

con esto, y abreviando $s := \text{sen}(\Theta_1)$ y $s_\psi := \text{sen}(\Theta_1 + \psi)$, podemos expresar^{A5}:

$$\text{sen}^2(\Theta_2) = \frac{N'^2 s^2 + N''^2 s_\psi^2 + 1 - \sqrt{(N'^2 s^2 + N''^2 s_\psi^2 + 1)^2 - 4N'^2 s^2}}{2}$$

o, definiendo

$$N := \sqrt{\frac{N'^2 + (1 + N''^2 s_\psi^2) s^{-2} - \sqrt{(N'^2 + (1 + N''^2 s_\psi^2) s^{-2})^2 - 4N'^2 s^{-2}}}{2}} \quad (3.21)$$

como

$$\text{sen}(\Theta_2) = N(\Theta_1) \text{sen}(\Theta_1) \quad (3.22)$$

Ahora hay que encontrar la relación entre el vector de Poynting promedio en el medio 1 y el vector \vec{k}_1 . Para ello consideraremos el problema de encontrar, dado un vector \vec{v} que se escribe como la suma de vectores \vec{u} y \vec{w} , cuyas normas y producto escalar se conocen, cuáles son esos vectores \vec{v} y \vec{w} . En el anexo A7 se muestra que, si \vec{v} apunta en la dirección positiva de z y \vec{u} y \vec{w} tienen componente z positiva y forman ángulos γ entre ellos, entonces los dos ángulos que puede formar el vector \vec{u} con el vector \vec{v} son $\theta_u = \pm \text{arc sen}\left(\frac{w}{v} \text{sen}(\gamma)\right)$, y

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u (\text{sen}(\theta_u), \cos(\theta_u)) \\ \vec{w} &= (-u \text{sen}(\theta_u), v - u \cos(\theta_u)) \end{aligned}$$

Como $\langle \vec{S} \rangle = a(\mu' \vec{k}' + \mu'' \vec{k}'')$, con a una constante positiva dada por la ecuación (2.21), podemos utilizar este resultado para encontrar la componente z de \vec{k}'_1 , identificando \vec{v} con $\langle \vec{S}_1 \rangle$, \vec{u} con $a\mu'_1 \vec{k}'_1$ y \vec{w} con $a\mu''_1 \vec{k}''_1$. Para que coincidan las direcciones, hay que rotar los vectores por un ángulo θ_1 , lo que deja a \vec{u} como

$$\vec{u} = u (\text{sen}(\theta_1 + \theta_u), \cos(\theta_1 + \theta_u))$$

y entonces, siendo $v = a\|\mu'_1 \vec{k}'_1 + \mu''_1 \vec{k}''_1\|$, $u = a|\mu'_1| |\vec{k}'_1|$ y $w = a\mu''_1 |\vec{k}''_1|$, tenemos que, utilizando el resultado (3.3) y las definiciones (3.20), el ángulo

$$\theta_{\mu'_1 k'_1} = \pm \text{arc sen} \left(\frac{\mu''_1 N''}{|\mu_1| \sqrt{N'^2 + \tilde{\mu}'' \tilde{\epsilon}''}} \text{sen}(\gamma) \right)$$

hace que $a\mu'_1 \vec{k}'_1$ cumpla la igualdad

$$a\mu'_1 k'_1 \begin{pmatrix} \text{sen}(\Theta_1) \\ \cos(\Theta_1) \end{pmatrix} = a|\mu'_1| k'_1 \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta_1 + \theta_{\mu'_1 k'_1}) \\ \cos(\theta_1 + \theta_{\mu'_1 k'_1}) \end{pmatrix}$$

lo que nos da la relación entre los ángulos Θ_1 y θ_1 :

$$\Theta_1 = \text{sgn}(\mu'_1)(\theta_1 + \theta_{\mu'_1 k'_1}) \quad (3.23)$$

Falta por elegir el signo de $\theta_{\mu'_1 k'_1}$ y el valor de γ . En ángulo entre \vec{k}'_1 y \vec{k}''_1 es ψ , así que, como μ'_1 nunca es negativo, γ es ψ cuando $\mu'_1 > 0$, y $\psi - \pi$ cuando $\mu'_1 < 0$. Entonces, $\text{sen}(\gamma) = \text{sgn}(\mu'_1) \text{sen}(\psi)$, y

$$\theta_{\mu'_1 k'_1} = \pm \text{arc sen} \left(\frac{\text{sgn}(\mu'_1) \mu''_1 N''}{|\mu_1| \sqrt{N'^2 + \tilde{\mu}'' \tilde{\epsilon}''}} \text{sen}(\psi) \right)$$

Para saber si debemos escoger el signo positivo o el negativo, utilizaremos un hecho interesante de este problema, que es que, aún en incidencia normal, el ángulo de refracción puede ser distinto de cero, pues si el vector de onda en el medio 1 tiene componente tangencial, el del medio 2 debe tenerla.

Entonces, con $\theta_1 = 0$, supongamos que el vector de Poynting sale con un ángulo positivo; la proyección del vector de onda en el medio 2 tiene entonces el signo de μ_2 . Entonces, si μ'_1 es positivo, el ángulo tiene el signo de la proyección, y si es negativo, el ángulo tiene el signo opuesto. Si el vector de Poynting sale con un ángulo negativo, reflejamos sobre el eje z , y nos queda el mismo caso. Por tanto, el ángulo debe tener el signo de $\tilde{\mu}'$. Utilizando las propiedades relativas del medio, y el hecho de que el arcoseno es impar, escribimos finalmente

$$\theta_{\mu'_1 k'_1} = \text{arc sen} \left(\frac{\text{sgn}(\tilde{\mu}') \tilde{\mu}'' N''}{|\tilde{\mu}| \sqrt{N'^2 + \tilde{\mu}'' \tilde{\epsilon}''}} \text{sen}(\psi) \right) \quad (3.24)$$

Con esto, el ángulo Θ_1 queda bien determinado por la ecuación (3.23) en términos de cantidades conocidas, y el índice de refracción funcional para los vectores de onda (3.21) se puede poner en términos de θ_1 . En el medio 2, $\text{sen}(\Theta_2) = \text{sgn}(\mu_2) \text{sen}(\theta_2)$, y junto con las ecuaciones (3.23) y (3.24), la ecuación (3.22) escrita como

$$\text{sen}(\theta_2) = \text{sgn}(\tilde{\mu}') N(\theta_1) \text{sen}(\theta_1 + \theta_{\mu'_1 k'_1}) \quad (3.25)$$

nos da el ángulo de refracción en términos del de incidencia, el ángulo entre los vectores de onda y de atenuación en el medio 1, y las propiedades relativas de los medios. En este caso, para escribir un índice de refracción funcional hay que expandir el seno de la suma,

$$\nu(\theta_1) = \text{sgn}(\tilde{\mu}') N(\theta_1) (\cos(\theta_{\mu'_1 k'_1}) + \text{sen}(\theta_{\mu'_1 k'_1}) \cot(\theta_1)) \quad (3.26)$$

De las cantidades involucradas en estas ecuaciones, $\theta_{\mu'_1 k'_1}$, N' , N'' y s_ψ , todas, excepto la última, se expresan en términos de las propiedades relativas entre los medios. Θ_1 depende del signo de μ'_1 , y no sucede lo que en el caso de incidencia desde un medio no disipador, en el que estos términos se perdían al tomar cuadrados. Esto tiene una consecuencia muy interesante, y es que, al contrario del caso tratado en la sección anterior, hay una diferencia en los efectos disipadores entre medios izquierdos y derechos, más allá de un cambio global de signo.

Esto es geoméricamente claro, pues, en el caso en el que el vector de Poynting y \vec{k}'_1 están en la misma dirección y el ángulo es 0 ó π , el ángulo que forma \vec{k}'_1 con

la normal sólo cambia de signo entre medios derechos e izquierdos. Cuando éstos forman ángulos distintos de 0 ó π el ángulo entre ellos cambia de signo para signos distintos de μ'_1 , pero el ángulo que forma \vec{k}'_1 con la normal no puede cambiar de la misma manera, a menos que $\theta_1 = 0$.

Si utilizamos nuevamente las combinaciones adimensionales (3.15) presentadas en la sección anterior, y el signo de μ'_1 , podemos escribir todas las cantidades involucradas en la Ley de Snell en términos de ellas, de manera muy parecida, siempre que $\tilde{\mu}'' \neq 0$.

El caso tridimensional puede obtenerse con un procedimiento similar, pues el problema tratado en el anexo A7 sigue siendo válido para el plano en el que están $\langle \vec{S} \rangle$, \vec{k}' y \vec{k}'' ; para llevarlo al sistema donde la normal coincide con z , habría que hacer una rotación en el espacio, con dos ejes distintos, lo que también modificaría la expresión en términos de Θ_1 para el ángulo formado por la normal y el vector de atenuación.

Como vemos, este caso se complica mucho con respecto a los anteriores, pero sin embargo es soluble exactamente. El único caso más general es el de refracción entre dos medios disipadores, que no tiene mucho sentido para fines prácticos.

Capítulo 4

Electrodinámica en medios inhomogéneos

4.1. Teoría del medio efectivo

“Consideremos un medio continuo, homogéneo e isotrópico...”. Frase tan frecuente y común en la Física que muy seguramente a nadie con un poco de experiencia en la misma le suena ajena. No sólo común, sino completamente entendible; al observar un material, no vemos *hoyos*, ni cambios abruptos que no se suavicen con una mirada suficientemente cuidadosa. Al menos lo es así para nuestra experiencia sensorial, y lo fue para la Física hasta antes del descubrimiento de los átomos.

La revolución que trajo el mundo microscópico, tuvo necesariamente efectos también sobre esta visión continua del mundo, antes poco cuestionada. Hasta donde sabemos ahora, no sólo no hay medios continuos, sino que las inhomogeneidades, por ejemplo, en la masa de un objeto, son tan extremas que, en la mayoría del volumen (concepto también común, que se torna más difícil de definir), no hay masa, y en unos cuantos puntos hay concentraciones enormes de ella.

Si bien estas consideraciones son ciertas, también lo es que las matemáticas elaboradas para describir la naturaleza continua, y las teorías físicas subyacentes fueron y seguirán siendo de gran éxito, en el sentido de que tienen un acuerdo con las observaciones, en el escenario correcto. En este contexto es claro que, de alguna manera, las observaciones de un sistema discreto, pueden, a una escala apropiada, reemplazarse por un sistema con un conjunto de propiedades continuas, que lo describen apropiadamente.

Como ejemplo puede tomarse el agua y luz incidiendo desde el vacío. Al entrar la luz en contacto con las moléculas del agua, estas la absorben y la reemiten, en general en cualquier dirección. Además, el viaje de la luz entre una molécula y otra es en vacío, por lo que la luz reemitida viaja a velocidad c . Sin embargo, a nuestra

escala, vemos una onda viajando en una dirección bien definida y con una velocidad $v \neq c$, que además caracteriza a lo que llamamos índice de refracción.

Los materiales izquierdos nacieron teóricamente en el escrito de Veselago, a finales del milenio pasado. Muy seguramente, una razón para que en tantos siglos del estudio de la óptica no se les hubiera considerado, fue la carencia de ellos en la naturaleza explorada. Hubo de llegar el nuevo milenio para que se pudiera medir una refracción negativa, en un artefacto curioso: un cubo, hecho de espiras y alambres metálicos, el “cubo Boeing”. ¿De qué está hecho? Cobre. ¿Qué material es? Cobre,

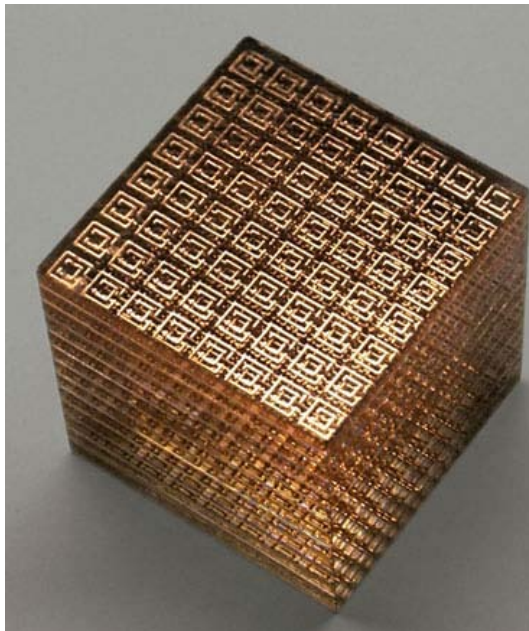


Figura 4.1: El “cubo Boeing”. Tomado de “Reversing light: negative refraction” (John Pendry, David Smith), *Physics today*, 2003.

no. No conocemos frecuencia alguna en la que este metal (o algún otro) tenga permisividad y permeabilidad simultáneamente negativas, que, como hemos visto, es una condición necesaria para invertir la refracción. A este artefacto, como a los construidos subsecuentemente, se les ha llamado *metamateriales*.

Las discontinuidades e inhomogeneidades en ellos son mucho más evidentes que las del mundo microscópico. Siguiendo el razonamiento hecho para los materiales usuales, cabe preguntarse si hay una manera de encontrar un sistema continuo equivalente, con propiedades ópticas características. De ser así, ¿cuál es la conexión entre las propiedades de los componentes del material con las propiedades *efectivas* de tal medio? y ¿bajo qué condiciones es válido estudiar dicho sistema?

Estas preguntas, que son las mismas que se plantean para el problema mi-

microscópico, son temas de la *teoría del medio efectivo*. La teoría es enorme, y es, por sí misma, asunto de grandes libros y largas investigaciones. El propósito de esta sección no es desarrollarla ni presentar resultados extensos, sino simplemente mostrar que es posible establecer esta conexión entre propiedades microscópicas y efectivas, y hacerlo para un caso importante. Las respuestas serán las que nos permitan justificar la aplicación a los metamateriales de los mismos modelos teóricos utilizados para los materiales convencionales, como lo hemos desarrollado en el presente trabajo, y tratar de determinar intervalos de validez de los resultados.

Mostraremos primero cómo se puede encontrar, en el caso de un arreglo periódico de átomos, una relación entre la respuesta microscópica a un campo externo y la susceptibilidad eléctrica macroscópica del material.

4.1.1. La relación de Clausius-Mosotti

Presentaremos la deducción hecha por Purcell [7]. Consideraremos un material formado por átomos equiespaciados. Un material así, puede ser dividido imaginariamente en una red en la que cada átomo queda encerrado en un cubo C de arista d , y ubicado en el centro del mismo. El campo que siente un átomo es la suma

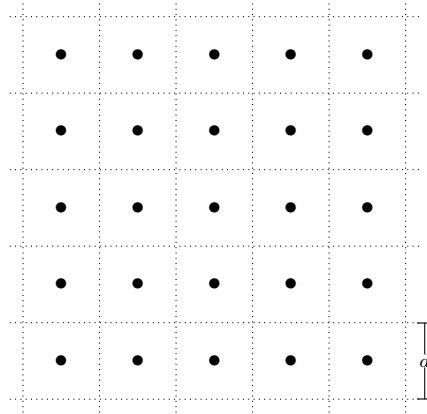


Figura 4.2: Una sección lateral del arreglo periódico de átomos equiespaciados.

del campo aplicado al material y el campo generado por los demás átomos de la distribución, que llamaremos el *campo ajeno* \vec{e}_{aj} , es decir, el campo neto \vec{e} menos el campo debido a sí mismo, que denotaremos como *propio* \vec{e}_{pr} .

$$\vec{e}_{aj} = \vec{e} - \vec{e}_{pr} \quad (4.1)$$

En ausencia de campo externo, el campo promedio del material debería ser, dadas nuestras suposiciones, nulo, en cuyo caso, la densidad de carga de un átomo en particular debería ser simétrica al distribuirse los electrones homogéneamente alrededor del núcleo. En este caso, el promedio del campo de cada átomo sobre el cubo

que lo contiene también debería ser cero $\langle \vec{e}_{pr} \rangle_C = \vec{0}$. Al aplicar un campo externo al material, los componentes del átomo, que a la escala de interés son únicamente núcleo y electrones, sentirán una fuerza, que en general será distinta para cada uno, lo que deformará la distribución de carga. Esto producirá un campo propio promedio distinto de cero en cada cubo.

Primero pensaremos en la situación de una sola carga positiva, situada al centro del cubo, en donde colocamos nuestro origen de coordenadas. El campo de ésta cumple también con que $\langle \vec{e}_q \rangle_C = \vec{0}$, pues cada línea de campo en un punto \vec{r} tiene una correspondiente en $-\vec{r}$ de igual magnitud y signo opuesto.

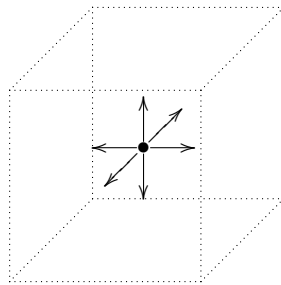


Figura 4.3: Una carga positiva, centrada en el cubo. El campo promedio producido por ella en el cubo es cero.

Colocamos nuestros ejes de manera que las aristas de los cubos coincidan con alguno de ellos y suponemos que, en algún eje (digamos, el z), la carga se desplazó a la posición $z_0 > 0$, por el efecto del campo ajeno (que, dado el signo de la carga, estamos suponiendo con componente z positiva).

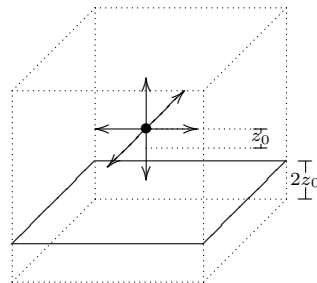


Figura 4.4: La carga, desplazada a una posición z_0 , no tiene campo promedio cero en el cubo. El campo promedio será el promedio sobre la parte inferior del mismo.

Ahora el promedio sobre el cubo C ya no será cero, pues hay una parte del campo en el cubo (correspondiente al desplazamiento de la carga) que no está compensada. El campo promedio será entonces el promedio sobre este trozo de cubo C' de altura $2z_0$. Las componentes x y y del campo propio, promediados sobre el cubo, siguen

siendo cero, de manera que la única contribución será la debida a la componente z del campo propio e_{qz} . Si además el campo ajeno no es demasiado intenso, la distancia desplazada no será muy grande comparada con el tamaño del cubo, en cuyo caso podemos considerar constante esta componente, e intercambiar la integral de volumen sobre C' por $2z_0$ veces la integral de superficie sobre la cara superior de C' :

$$\int e_{qz} dV \simeq \int e_{qz} d(2z_0 a) = 2z_0 \int e_{qz} da$$

Para calcular la integral sobre esta cara, consideramos un cubo también con aristas de longitud d , que tiene como centro a la carga desplazada. Dado que $z_0 < b$, dentro del cubo no hay otra carga, y, utilizando la Ley de Gauss, la integral sobre todo el cubo es $-q/\epsilon_0$ (con un signo menos pues todas las líneas de campo salen del cubo). Por simetría, la contribución sobre cualquiera de las seis caras del cubo es la misma, con lo cual $\int e_{qz} da = -\frac{q}{3\epsilon_0}$.

Con esto recuperamos la componente z del campo propio promedio de una carga:

$$\langle e_{qz} \rangle_C = \langle e_{qz} \rangle_{C'} = \frac{1}{d^3} \int_{C'} e_{qz} dV \simeq -\frac{z_0 q}{3\epsilon_0 d^3}$$

Si ahora desplazamos la carga a una posición \vec{r} desde el origen, y aplicamos este resultado para cada dirección, tendremos que, para una carga, $\langle \vec{e}_q \rangle_C \simeq -\frac{q\vec{r}}{3\epsilon_0 d^3}$. En el caso general, tendremos una distribución de cargas ρdV , por lo que, para el átomo completo, el resultado es

$$\langle \vec{e}_{pr} \rangle_C \simeq -\frac{1}{3\epsilon_0 d^3} \int \vec{r} \rho dV$$

La integral es justamente el momento dipolar \vec{p} del átomo. Con esto, escribimos el promedio de (4.1) de la siguiente manera

$$\langle \vec{e}_{aj} \rangle_C \simeq \langle \vec{e} \rangle_C + \frac{\vec{p}}{3\epsilon_0 d^3} \quad (4.2)$$

La polarización de cada átomo fue inducida únicamente por el campo ajeno. En el límite de bajas frecuencias, el momento dipolar del mismo es proporcional a este último y la relación entre ellos se llama *polarizabilidad atómica*, α :

$$\vec{p} = \alpha \langle \vec{e}_{aj} \rangle_C$$

El campo eléctrico macroscópico \vec{E} es, como lo hemos dicho anteriormente, el promedio de \vec{e} . La región sobre la que se promedia, sin embargo, no es el cubo, que es en cualquier caso práctico extremadamente pequeño. Sin embargo, una región realista en la que se promedie \vec{E} , contendrá muchos cubos. Como consideramos cada cubo idéntico, el promedio sobre dicha región es muy parecido al promedio

sobre alguno de ellos, es decir $\vec{E} \simeq \langle \vec{e} \rangle_C$ con lo cual, podemos combinar las dos últimas relaciones para escribir

$$\vec{p} \simeq \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\epsilon_0 d^3}} \vec{E}$$

El campo de polarización macroscópico \vec{P} es, como hemos visto, la densidad promedio de momento dipolar inducido. Además, a escalas mayores que las de los cubos, la densidad volumétrica de número de átomos es simplemente $m = 1/b^3$, de manera que $m\vec{p} = \vec{p}/b^3 = \vec{P}$, lo que permite escribir finalmente

$$\vec{P} \simeq \frac{\alpha m}{1 - \frac{\alpha m}{3\epsilon_0}} \vec{E}$$

Con lo que obtenemos que el campo de polarización es proporcional al campo eléctrico macroscópico. La constante de proporcionalidad es, por definición, ϵ_0 veces la susceptibilidad eléctrica χ_e ,

$$\chi_e = \frac{\alpha m}{\epsilon_0 - \frac{\alpha m}{3}}$$

Así, tenemos una conexión entre una propiedad microscópica del sistema (la polarizabilidad atómica) y una propiedad efectiva del medio (la susceptibilidad eléctrica), que tiene sentido como parámetro efectivo, a escalas grandes en comparación con los parámetros espaciales del problema microscópico.

Esta deducción puede ampliarse para incluir campos variables en el tiempo, que tendrían como consecuencia la introducción de disipación en los parámetros efectivos, y también para considerar modelos más cercanos a un material real que un arreglo periódico. Sin embargo, los metamateriales son arreglos periódicos por construcción, lo que hace innecesaria esa última extensión.

Algo importante de hacer notar es que, para poder hablar de propiedades efectivas, se debe cumplir la hipótesis de que la región sobre la que se realiza el promedio para obtener el campo macroscópico debe contener muchos cubos; esto puede no cumplirlo cualquier metamaterial, en especial los construidos para operar con grandes longitudes de onda, lo que siempre debe ser tomado en cuenta.

4.2. Metamateriales

Una de las acepciones del prefijo *meta* en el diccionario de la Real Academia Española es “después de”. Como hemos sugerido al inicio de este capítulo, existen construcciones artificiales que poseen propiedades efectivas distintas a las de los materiales de los que están fabricados. Un metamaterial se caracteriza porque sus propiedades *extienden*, van “más allá”, o están “después de” las propiedades de un material natural.

El término fue utilizado por primera vez en 1999 [8] por Rodger M. Walser, de la Universidad de Austin, Texas, quien definió metamaterial como

un compuesto macroscópico hecho por el hombre, que posee una arquitectura periódica celular y tridimensional, diseñado para producir una combinación óptima, no disponible en la naturaleza, de dos o más respuestas a una excitación específica.

Aunque la construcción de metamateriales no es reciente, estos han cobrado mucha importancia desde la propuesta teórica de Pendry para la elaboración de un metamaterial izquierdo, a tal punto que ahora parece utilizarse el término predominantemente para hablar de esta clase particular de ellos.

Esta propuesta, presentada en el artículo de Pendry, Holden Robbins y Stewart [9] analiza diversos arreglos geométricos de conductores, a los cuales les calcula sus propiedades efectivas.¹

Las propiedades electromagnéticas efectivas de un medio lineal, homogéneo e isotrópico, son aquellas que cumplen las relaciones

$$\begin{aligned}\langle \vec{B} \rangle &= \mu_{ef} \mu_0 \langle \vec{H} \rangle \\ \langle \vec{D} \rangle &= \epsilon_{ef} \epsilon_0 \langle \vec{E} \rangle\end{aligned}$$

Por otro lado, ecuaciones de Maxwell en forma integral para una superficie \mathcal{C} de frontera $\partial\mathcal{C}$ son

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{r} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \vec{D} \cdot d\vec{a} \\ \int_{\partial\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{a}\end{aligned}$$

Si estas ecuaciones se le aplican a una celda unitaria de arista a a un sistema como el descrito en la deducción de la relación de Clausius-Mosotti, y se selecciona una cara de la celda, entonces los campos promedio sobre esa cara pueden calcularse como

$$\begin{aligned}\langle H \rangle &= \frac{1}{a} \int \vec{H} \cdot d\vec{r} \\ \langle B \rangle &= \frac{1}{a^2} \int \vec{B} \cdot d\vec{a}\end{aligned}$$

en donde el primer promedio se toma sobre una de las aristas del cubo y el segundo se toma sobre toda la cara. El cociente del segundo y el primero será el valor de la permeabilidad magnética.

El primer arreglo que analiza es el de cilindros infinitos de superficie conductora, radio r , separados sus ejes una distancia a y con una corriente j circulando sobre la superficie de los cilindros perpendicularmente al eje. Entonces aplica un campo

¹Como simplemente estamos presentando los argumentos principales del mismo, preservaremos el sistema de unidades original (C.G.S.), y la nomenclatura, que no siempre coincide con la utilizada hasta ahora en este texto.

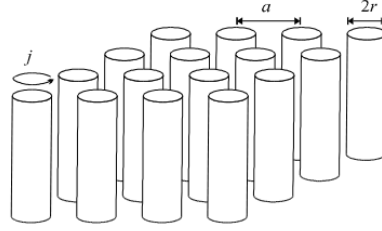


Figura 4.5: El arreglo de cilindros de superficie conductora. Imagen tomada del artículo.

externo H_0 paralelo a los ejes de los cilindros, y calcula el campo dentro de ellos:

$$H = H_0 + j + \frac{\pi r^2}{a^2} j$$

en donde el segundo término es el causado por la propia corriente y el tercero es debido al campo de despolarización, cuyas fuentes están en los extremos de los cilindros. Añade que, si éstos son suficientemente grandes, entonces este campo será uniforme en cada celda. Suponiendo que la superficie conductora es óhmica y que tiene una resistividad σ , obtiene la “fuerza electromotriz” inducida alrededor de una de las circunferencias del cilindro:

$$fem = i\omega\pi r^2 \mu_0 \left(H_0 + j - \frac{\pi r^2}{a^2} j \right) - 2\pi r \sigma j$$

y en base a esta ecuación, asumiendo una dependencia armónica a frecuencia ω de la corriente, utilizando la ley de Faraday y el hecho de que la fem total se balancea, obtiene el valor de la corriente circulando por los cilindros:

$$j = -\frac{H_0}{1 - \frac{\pi r^2}{a^2} + i\frac{2r\sigma}{\omega r^2 \mu_0}}$$

El arreglo está pensado de forma que cilindros distintos no se intersequen, lo que le permite calcular $\langle H \rangle$ sobre una línea estrictamente ajena a ellos,

$$\langle H \rangle = H_0 \frac{1 + i\frac{2\sigma}{\omega r \mu_0}}{1 - \frac{\pi r^2}{a^2} + i\frac{2r\sigma}{\omega r^2 \mu_0}}$$

y, siendo el campo promedio $\langle B \rangle = \mu_0 \langle H \rangle$, obtiene finalmente que, si la medición del campo se hace a lo largo de los ejes de los cilindros, el cociente entre $\langle B \rangle$ y $\mu_0 \langle H \rangle$ es

$$\mu_{ef} = 1 - \frac{\pi r^2}{a^2} \left(1 + i\frac{2\sigma}{\omega r \mu_0} \right)^{-1}$$

En un conductor perfecto, o en el límite de altas frecuencias, μ_{ef} se reduce al cociente entre los volúmenes del cilindro y la celda, lo que —señala— será importante

para la medición del efecto en diversos modelos. Esto sugiere que es conveniente modificar la geometría de los componentes, por ejemplo, por prismas rectangulares para aumentar esta proporción. Aunque en este modelo la parte real de μ_{ef} no puede ser negativa, estas observaciones serán importantes posteriormente. También menciona que se puede hacer una estimación de la permisividad eléctrica por

$$\epsilon_{ef} = \frac{1}{1 - \frac{\pi r^2}{a^2}}$$

Lo que hace que la velocidad de la luz en el medio siga siendo menor que la que tiene en el vacío.

En el siguiente paso, hace un corte a los cilindros paralelamente a su eje, e introduce en éstos otro cilindro del mismo estilo, pero de menor diámetro y con el corte en el extremo opuesto. El corte en el cilindro impide a la corriente circular



Figura 4.6: El cilindro con un corte, y, en su interior, otro igual de menores dimensiones y rotado. Figura tomada del artículo.

alrededor del mismo e introduce un elemento extra en juego, la capacitancia del elemento. En ese caso obtiene que, si F es la fracción del volumen de la celda que ocupa el interior del cilindro, $\pi r^2/a^2$, y $C = (dc_0^2\mu_0)^{-1}$ (c_0 es la velocidad de la luz en el vacío) es la densidad superficial de capacitancia entre las dos hojas, entonces la permeabilidad efectiva está dada por

$$\mu_{ef} = 1 - \frac{F}{1 - \frac{3}{\pi^2\mu_0\omega^2 Cr^2} + i\frac{2\sigma}{\mu_0\omega r}}$$

Algo muy importante de esta configuración es que, para $\sigma = 0$ hay una resonancia en $\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{\pi^2\mu_0 Cr^3}}$. En consecuencia, hay una región de frecuencias $\omega > \omega_0$ para las cuales μ_{ef} toma valores negativos, como se puede ver en la gráfica: El tamaño de esta región depende de la diferencia entre la frecuencia resonante y lo que llama “frecuencia del plasma magnético”, ω_{mp} , que es el valor de ω para el cual $\mu_{ef} = 0$; esta diferencia es proporcional a su vez a F . Teniendo esto en mente, calcula posteriormente las propiedades magnéticas de una espiral cilíndrica: encontrando que $C = \epsilon_0/d(N - 1)$ y

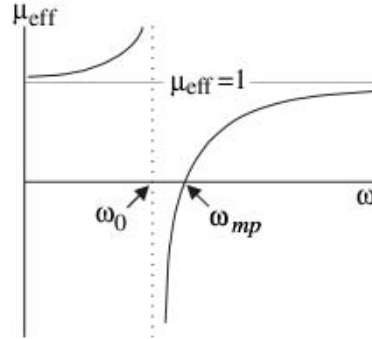


Figura 4.7: Gráfica de μ_{ef} como función de la frecuencia. Hay una resonancia en ω_0 , lo que hace que μ_{ef} tome valores negativos en una cierta región. Figura original del artículo.

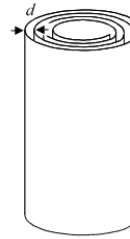


Figura 4.8: Una espiral cilíndrica, con N vueltas y separación d entre las hojas. Figura tomada del artículo.

$$\mu_{ef} = 1 - \frac{F}{1 - \frac{1}{2\pi^2 r^3 \mu_0 (N-1)^2 \omega^2 C} + i \frac{2\sigma}{\omega r \mu_0 (N-1)}}$$

en donde la frecuencia de resonancia es

$$\omega_0 = \frac{dc_0^2}{2\pi^2 r^3 (N-1)}$$

La presencia del término imaginario impide la divergencia de μ_{ef} , suavizando las curvas de μ'_{ef} y μ''_{ef} alrededor de la resonancia; sin embargo, no impide, en principio, encontrar una frecuencia para la cual $\mu'_{ef} < 0$.

Para que estos cálculos sean válidos en cualquier dirección, el artículo propone que secciones de los cilindros sean colocadas en las caras de las celdas de manera periódica, como podemos ver en la figura 4.9.

Sin demora se comenzaron a reportar experimentos sobre la medición de refracción negativa en metamateriales. Por ejemplo, en [10] se muestra un metamaterial

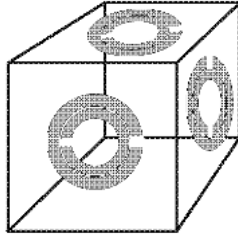


Figura 4.9: Secciones del arreglo cilíndrico, colocadas en las caras de la celda del arreglo. Figura tomada del artículo.

bidimensional con índice de refracción negativo para las microondas, formado de celdas de cobre (no circulares, sino cuadradas, como en la sugerencia del artículo de Pendry) y resonadores en forma de anillo.



Figura 4.10: Un metamaterial bidimensional izquierdo en la región de microondas. Imagen tomada de [10].

El experimento consistió en una muestra en forma de prisma de este material. Se colocó una fuente de microondas emitiendo un haz perpendicular a una cara del prisma. Alrededor del dispositivo se colocó una guía de aluminio circular sobre la que se movió un detector de microondas a diversos ángulos, registrando la potencia transmitida (figura 4.11).

Para fines comparativos, se fabricó un prisma de teflón de las mismas dimensiones, y se realizaron las mismas medidas sobre este. Los resultados que se obtuvieron para los índices de refracción se pueden ver en la figura 4.12.

Como se puede ver, hay una región entre los 10 y 11 Gigahertz para la cual el índice de refracción es negativo. Por supuesto, aquí no se está tomando en cuenta la disipación.

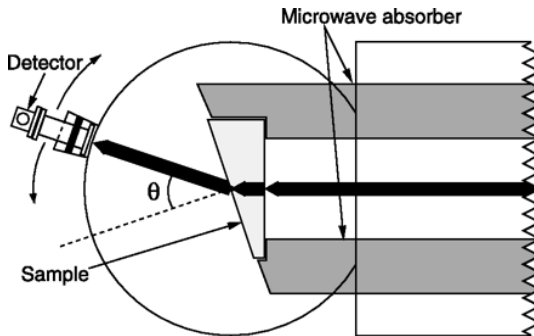


Figura 4.11: El dispositivo experimental de [10].

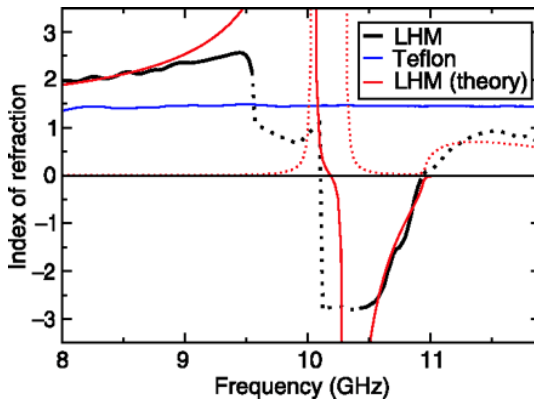


Figura 4.12: Resultados experimentales del índice de refracción del metamaterial de [10], comparados con la predicción teórica (línea roja continua) y los del teflón. Las secciones punteadas representan regiones inaccesibles a la medición.

Como es usual, se han propuesto muchas modificaciones, mejoras y sutilezas en nuevos experimentos, lo que ha dado lugar a numerosísimos reportes de metamateriales izquierdos. También han habido nuevas propuestas para encontrar otras configuraciones esencialmente distintas que den lugar a ϵ' y μ' simultáneamente negativos. Entre otras razones, esto se debe a que, aunque en principio se podría fabricar la configuración recientemente discutida a cualquier escala para obtener metamateriales izquierdos para frecuencias cada vez más altas, existe un límite práctico mínimo en las dimensiones de los resonadores, lo que impide ir mucho más allá del infrarrojo lejano.

Un intento más reciente [11] exploró la fabricación de un metamaterial de esferas no magnéticas. Estas se proponen ser compuestas de un cristal de $LiTaO_3$ y recubiertas de un semiconductor particular que obedece el modelo de Drude.

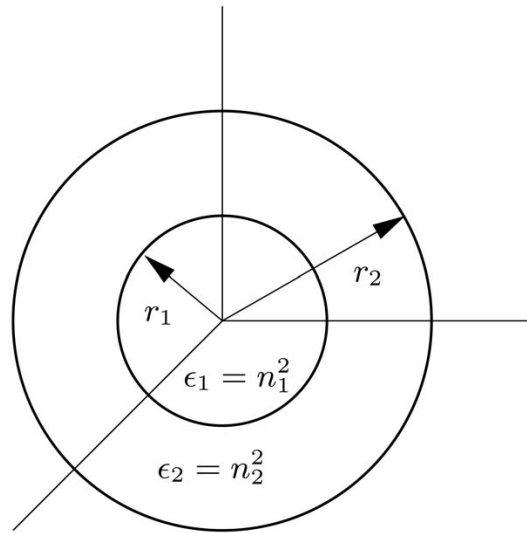


Figura 4.13: Esferas no magnéticas recubiertas, propuestas como componentes de un metamaterial izquierdo en [11].

Utilizando elementos teóricos más elaborados, incluyendo la teoría del espaciamiento de Mie, calculan los valores esperados de las funciones respuesta efectivas de un metamaterial formado por tales esferas, encontrando que deben ser como en las gráficas siguientes.

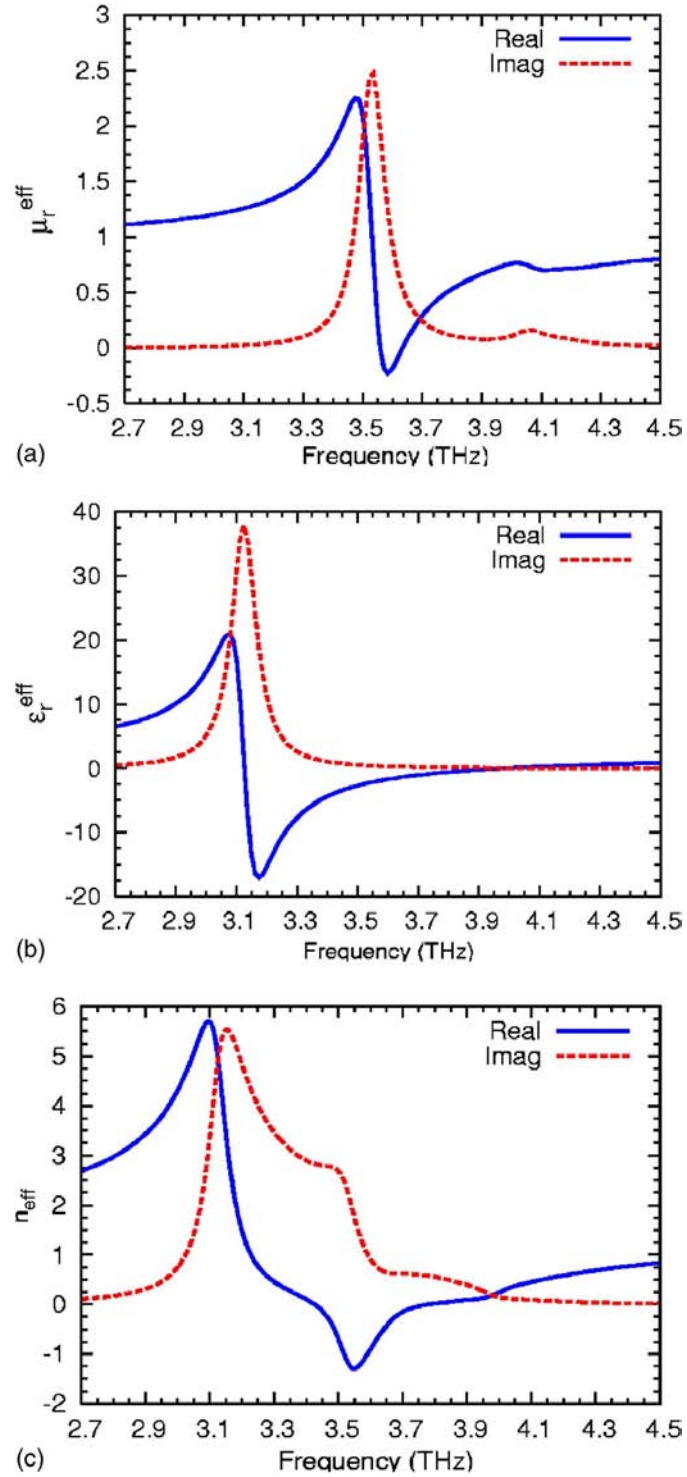


Figura 4.14: Predicciones de ϵ , μ y n según [11] para el metamaterial formado de esferas no magnéticas.

Algo novedoso de esta construcción es que los cálculos sugieren que las frecuencias para las cuales el metamaterial es izquierdo corresponden a la luz infrarroja. Un inconveniente de esta propuesta particular es que, según podemos apreciar en las gráficas, en la región donde ϵ' y μ' son simultáneamente negativas las partes imaginarias se disparan. No obstante, es claro que hay muchos más parámetros que entran en juego en el diseño específico del dispositivo, y otras tantas propuestas que se investigan en este momento. También se puede apreciar que obtener una permeabilidad efectiva negativa resulta más complicado que obtener el equivalente eléctrico.

Lo importante de toda esta presentación es ilustrar que existen reportes de experimentos sobre la refracción negativa, y que hay un creciente número de grupos de investigación trabajando árdamente en el tema de la elaboración de metamateriales y predicción de sus propiedades.

Por último, no está de más mencionar que, en el fondo, si recordamos los efectos (2.18) que producen los signos negativos y la disipación entre los campos materiales y los reales, podemos entender el problema de la construcción de un metamaterial izquierdo como la pregunta ¿cómo lograr que el campo material y el campo neto se desfasen totalmente?.

Capítulo 5

Aplicaciones

5.1. La esfera

Comparemos las propiedades de la refracción en una esfera de un material usual, con las de un material izquierdo. Consideremos una serie de rayos paralelos que inciden sobre la esfera, de índice de refracción n_2 , sumergida en un medio de índice de refracción $n_1 \in \mathbb{R}$ y de radio R . Un corte plano que pasara por el centro de la esfera se vería como la figura 5.1.

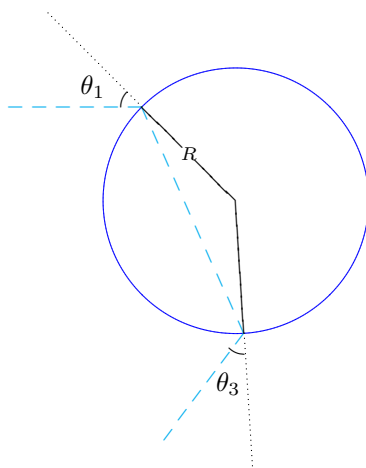


Figura 5.1: Diagrama de rayos de una esfera

El rayo incide a una altura aR con respecto a la horizontal que pasa por el centro, y forma un ángulo θ_1 con la normal, que coincide con el vector que apunta del centro de la esfera al punto de incidencia. Interiormente, el rayo forma un ángulo

θ_2 con la esfera en el punto de entrada. El triángulo que vemos en la figura, formado por el rayo dentro de la esfera y los dos radios es isósceles, por lo que el ángulo que forma el rayo con la normal interior en el punto de salida también es θ_2 . El ángulo de salida es θ_3 .

Calcularemos la *longitud de camino óptico*, es decir, la suma de las distancias recorridas por un rayo, multiplicadas por el índice de refracción del medio en el que se encuentra. Esto nos ayudará a visualizar el frente de onda. Supondremos que los rayos son emitidos desde una superficie plana, que en la figura correspondería a una línea vertical situada a la izquierda del círculo, a una distancia d .

La distancia recorrida por diferentes rayos, antes de llegar a la esfera será la misma para todos. Después de que el rayo central toca la esfera, el rayo emitido a altura aR recorrerá una distancia extra $l_1 = R(1 - a)$. Dentro de la esfera, la distancia recorrida es simplemente $l_2 = 2R|\cos(\theta_2)|$. Fuera, la distancia recorrida es l_3 . Con esto, la longitud de camino óptico cuando $n_2 \in \mathbb{R}$ para un rayo dado es

$$\begin{aligned} l &= |n_1|(d + l_1) + |n_2|l_2 + |n_1|l_3 \\ &= |n_1|(d + R(1 - a)) + |n_2|2R|\cos(\theta_2)| + |n_1|l_3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Si buscamos los puntos que cumplen que l tiene un valor constante l_0 , tendremos la ubicación geométrica del frente de onda para algún momento. Como l debe ser constante, $l/|n_1| - d - R$ también debe ser constante, así que esta condición es equivalente a

$$c = -aR + 2R|\tilde{n}|\cos(\theta_2) + l_3 \quad (5.2)$$

para alguna constante c . Si $n_2 \in \mathbb{C}$, entonces esto se puede reemplazar por

$$c = R(2|\nu(\theta_1)|\cos(\theta_2) - a) + l_3 \quad (5.3)$$

pues, para cada rayo, el índice de refracción operativo ν , dado por (3.14) es constante. Finalmente, utilizando la Ley de Snell (3.2) y notando que $a = \cos(\theta_1)$, escribimos esta condición como

$$c = R(2\sqrt{\nu^2(\theta_1) - \text{sen}^2(\theta_1)} - \cos(\theta_1)) + l_3 \quad (5.4)$$

Así, para cada rayo, encontramos la distancia l_3 que cumple con la condición de longitud de camino óptico constante. Poniendo además θ_2 y θ_3 en función de θ_1 , se pueden encontrar los puntos que cumplen con tal condición. A continuación podemos ver el diagrama de rayos y el frente de onda para una gota esférica de agua:

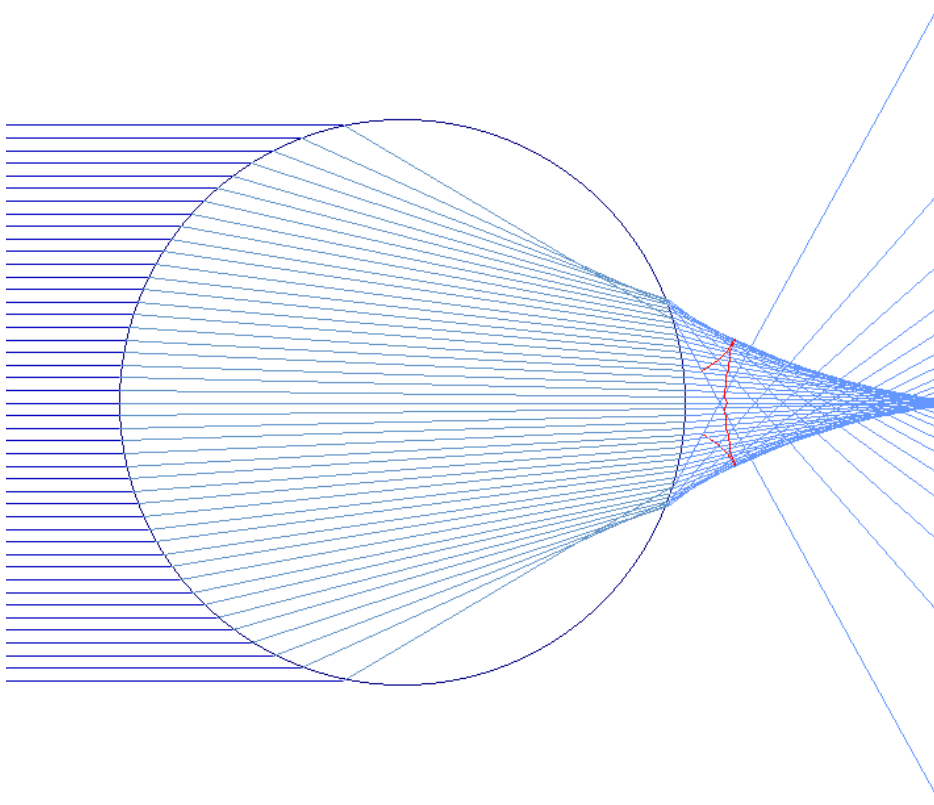


Figura 5.2: Diagrama de rayos para una gota de agua. Uno de los frentes de onda se puede ver en color rojo.

Rotando esta imagen con respecto al eje horizontal, obtendríamos la esfera tridimensional. Como se puede ver, en cierta aproximación, la gota enfoca los rayos paralelos que inciden sobre ella. Por el contrario, una gota de “agua izquierda” se vería como la figura 5.3.

Como se puede ver, en el caso izquierdo los rayos son emitidos para todos lados, y el frente de onda es aproximadamente uniforme alrededor de la esfera.

El resultado sería el mismo en el primer caso si tuviéramos una gota de agua izquierda en aire izquierdo, y en el segundo si fuera una gota de agua en aire izquierdo. Si ahora añadimos disipación a la gota, ¿cómo difieren estos resultados?.

La esfera es un caso en donde los vectores de onda y de atenuación dentro no forman un ángulo cero en general. Al incidir en la primera superficie, el vector de atenuación sigue la dirección de la normal (la dirección del radio en ese punto) y el

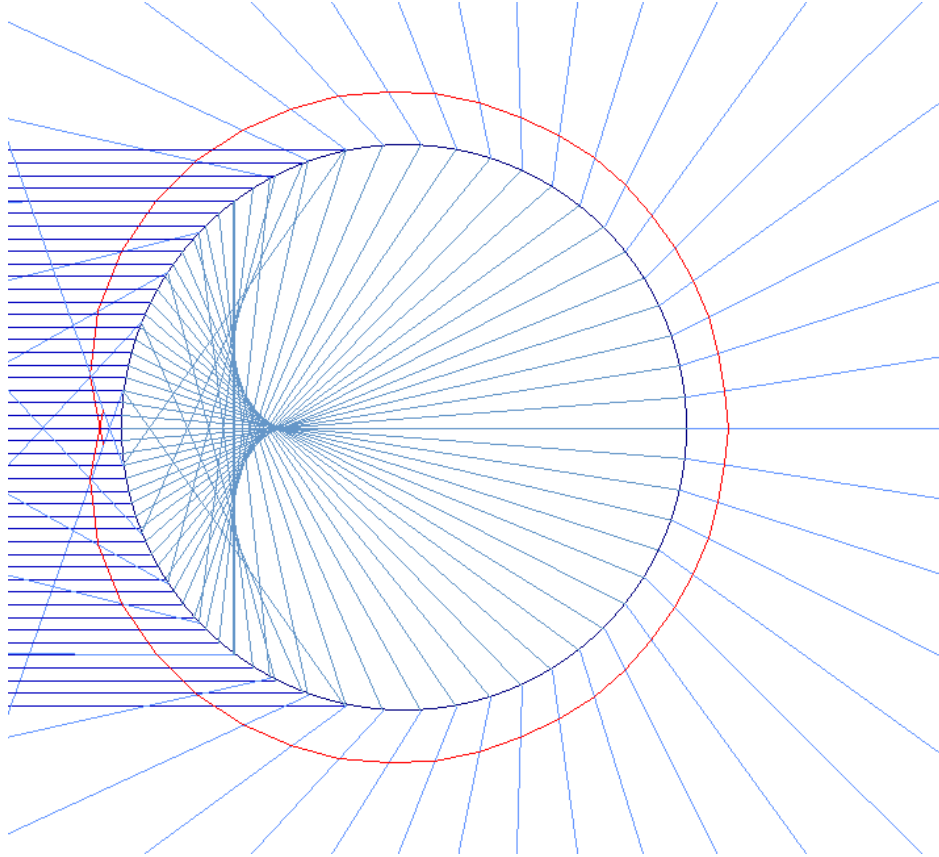


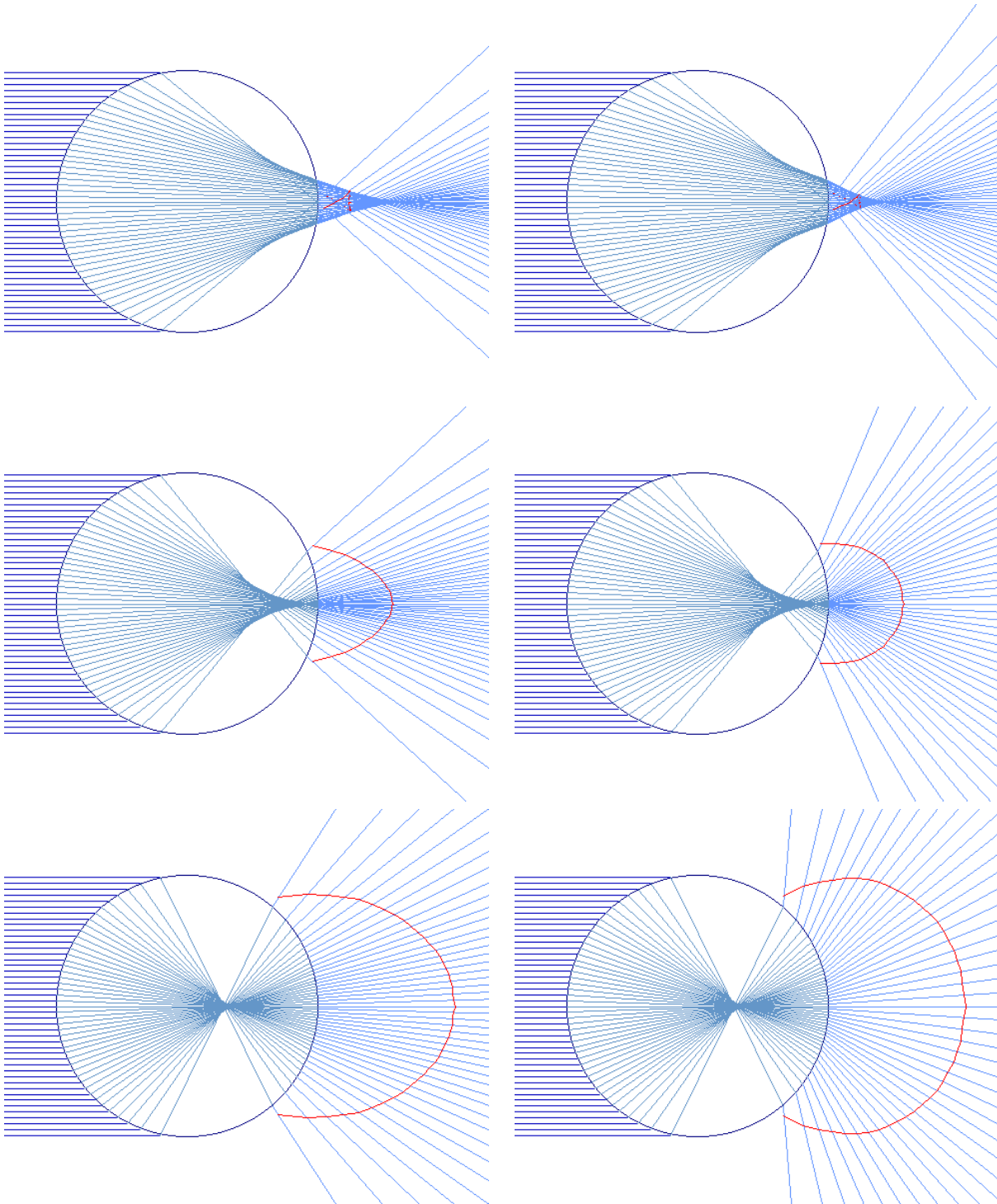
Figura 5.3: Diagrama de rayos y frente de onda para una gota de “agua izquierda”.

vector de onda toma un ángulo Θ_1 . En el capítulo de refracción, mostramos que aún si las propiedades relativas entre dos medios no cambian, en presencia de disipación sí hay una diferencia cuando el rayo va de un medio izquierdo a un derecho con respecto al caso inverso. Este es un buen ejemplo en donde puede notarse este efecto.

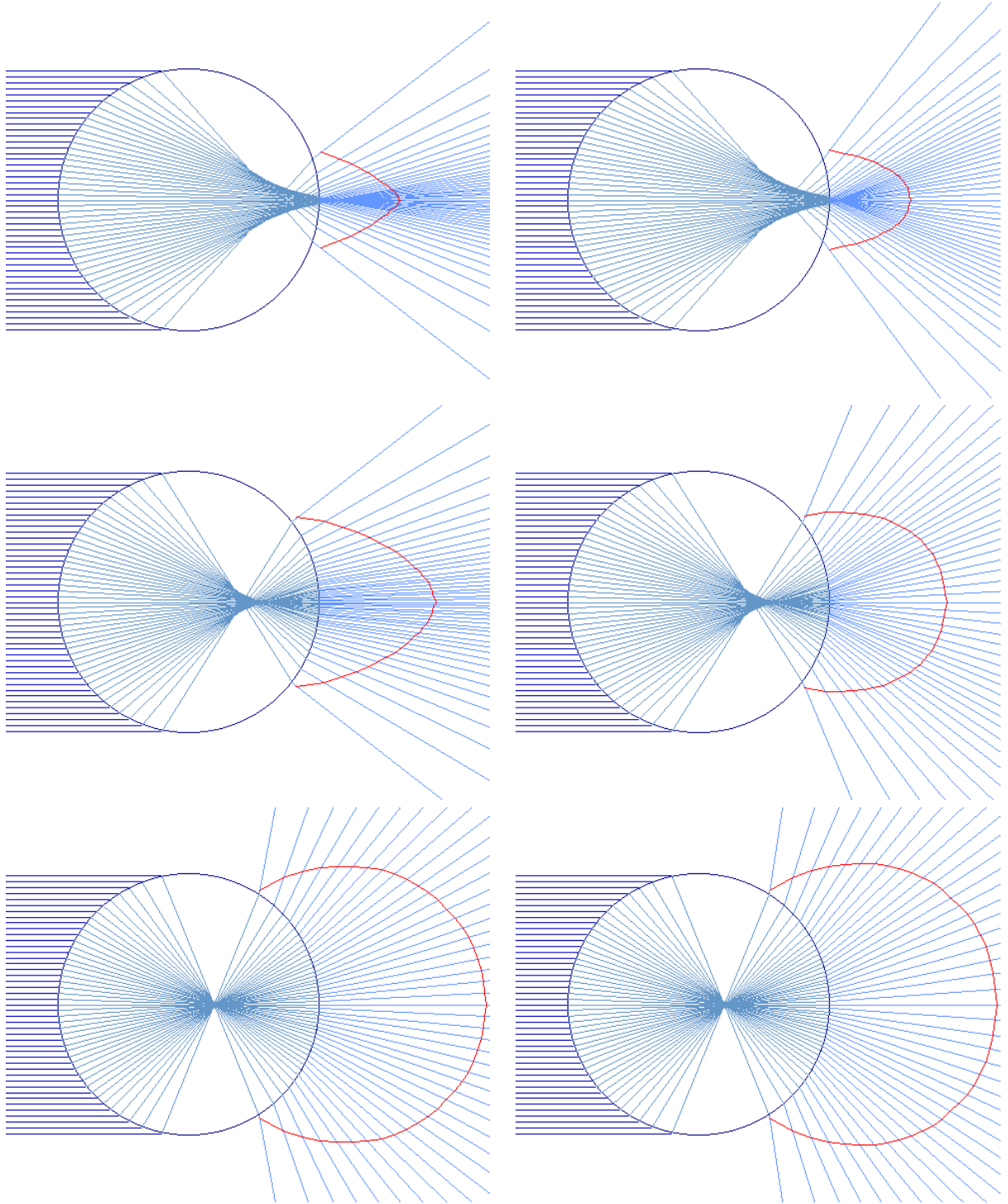
Para que los cambios fueran visualmente significativos, se escogieron disipaciones altas para los diagramas.

Los cambios en todos los casos son mucho más sensibles a la variación de π_μ que a la de π_ϵ , lo que es entendible, pues, aunque en la relación de dispersión $\tilde{\epsilon}''$ y $\tilde{\mu}''$ son intercambiables, hay una contribución de $\tilde{\mu}'$ y $\tilde{\mu}''$ al vector de Poynting en la que no interviene la parte eléctrica.

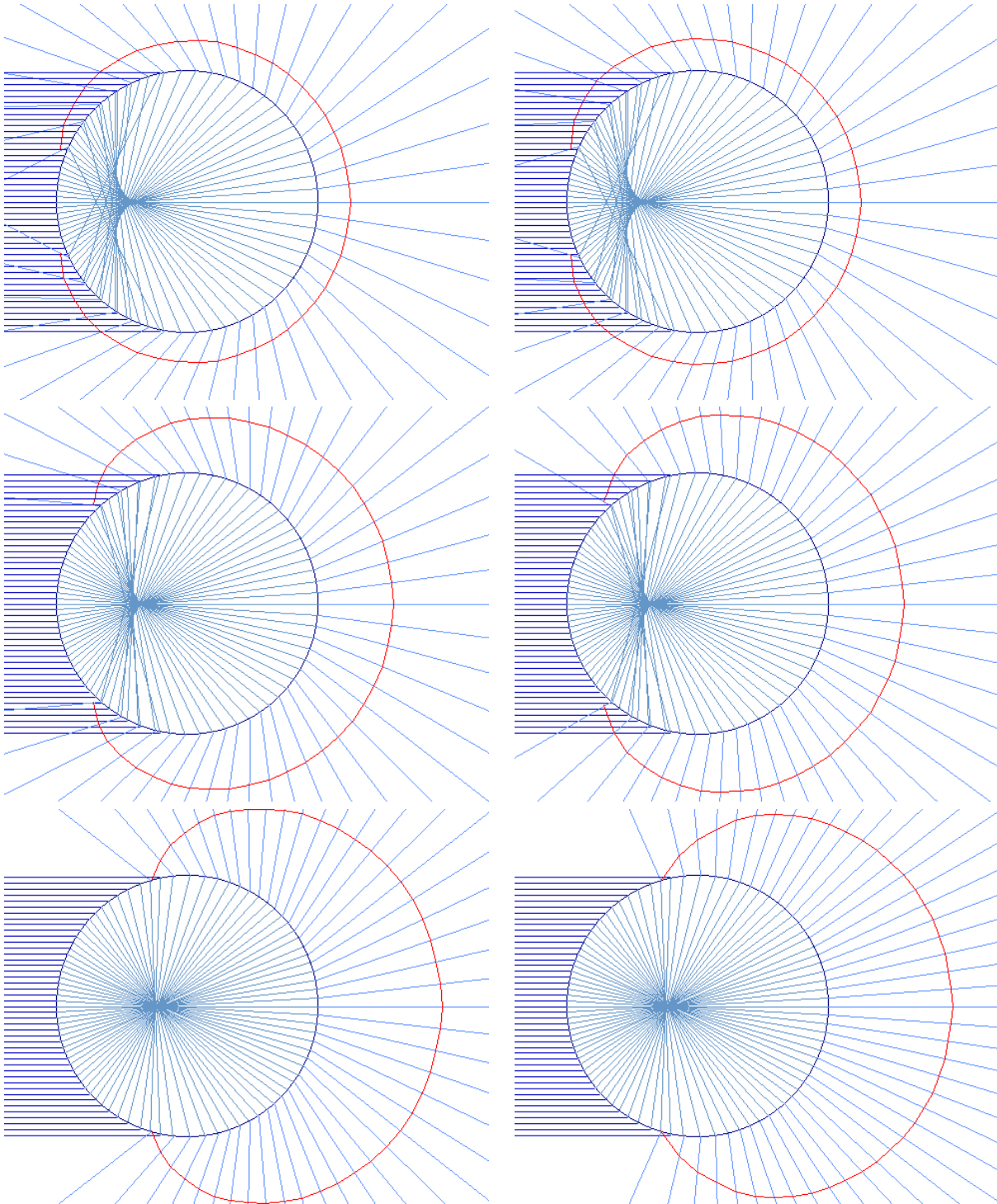
Cuando las propiedades relativas de los medios tienen signo positivo, podemos ver que, al aumentar la disipación, la región en donde se concentran los rayos se va



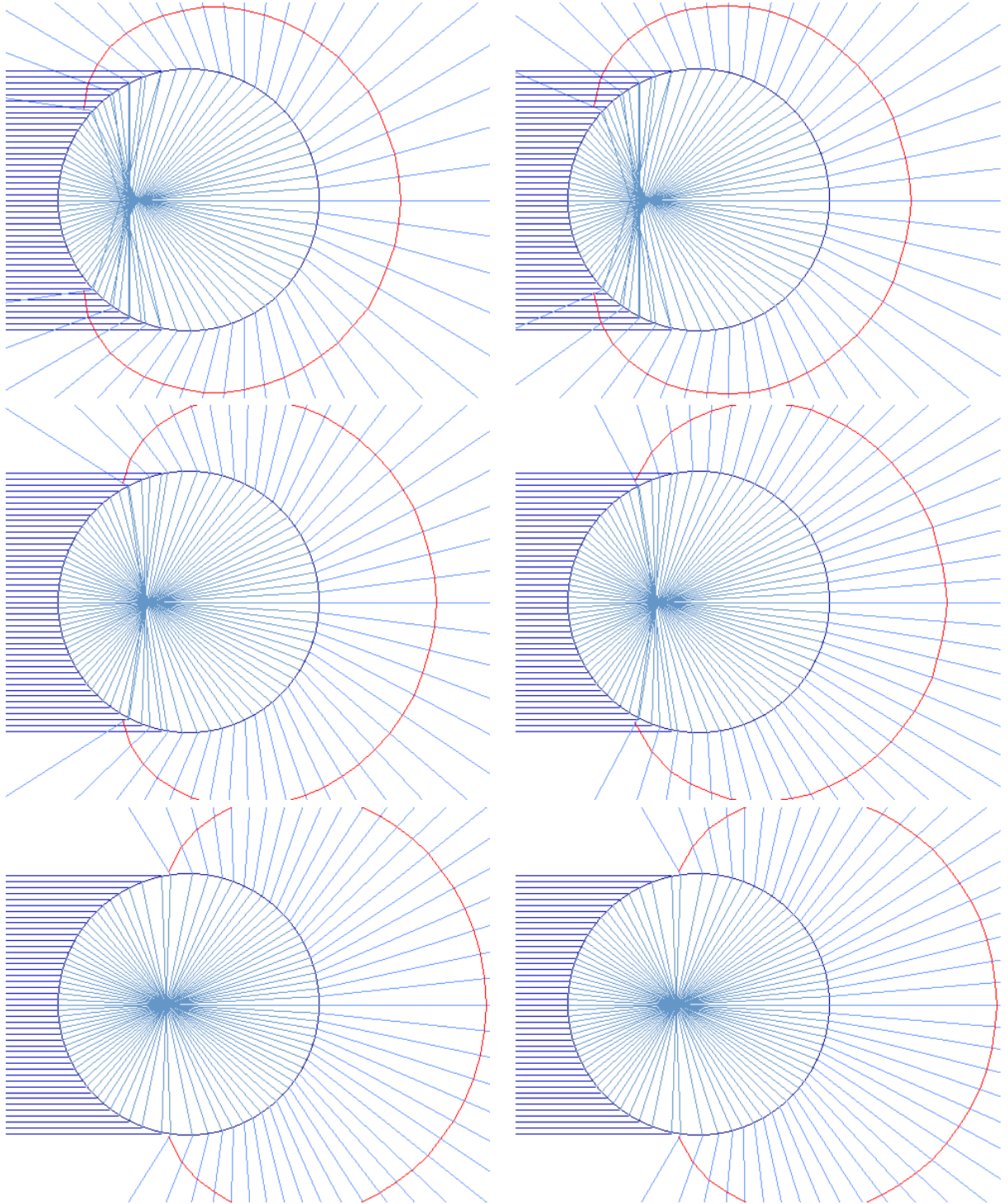
Esta es la gota de agua con disipación, $\pi_\epsilon = 0$ y π_μ con valores $1/2$, 1 y 2 , de arriba a abajo. A la izquierda se muestran los diagramas de rayos cuando la gota y el medio son izquierdos; a la derecha, cuando ambos son derechos.



Así se modifican los resultados anteriores cuando hay disipación eléctrica, con $\pi_\epsilon = 1$.



Si ahora la gota y el medio son uno izquierdo y otro derecho, los diagramas de rayos se ven así. A la izquierda, es el resultado cuando la gota es izquierda y a la derecha cuando el medio es izquierdo. Aquí tenemos $\pi_\epsilon = 0$ y π_μ con valores $-1/2$, -1 y -2 , de arriba a abajo.



Los mismos resultados con disipación eléctrica $\pi_\epsilon = -1$.

desplazando hacia el interior de la esfera, y el frente de onda se suaviza. Cuando la disipación no es tan alta sigue habiendo una cierta propiedad de enfoque (mejor cuando la esfera es derecha), pero, conforme esta crece, y la región entra a la esfera, los rayos se vuelven divergentes. En estos últimos casos, es menor la divergencia cuando la esfera es izquierda.

En el otro caso, cuando los medios tienen propiedades de signos opuestos, se puede apreciar que, conforme aumenta la disipación, los rayos tienden a ocupar más el lado opuesto al de incidencia, y que, además hay una región de mayor concentración de los rayos, que se acerca al centro de la esfera.

En ambas situaciones sucede además que, para las disipaciones más altas, la diferencia en los rayos cuando la esfera es izquierda o derecha se hace menos perceptible.

Por otro lado, al crecer la disipación, el vector de Poynting dentro de la gota se parece cada vez más al de atenuación, que siempre apunta en dirección del centro de esta. Esto hace imaginar que, si en el caso de muy alta disipación lográramos que el rayo en la segunda interfaz no se desviara (por ejemplo, con $\pi_r = 1$), desde fuera de la esfera, veríamos (suponiendo que la atenuación lo permitiera) rayos viniendo desde un mismo punto. En efecto, esa configuración se ve así:

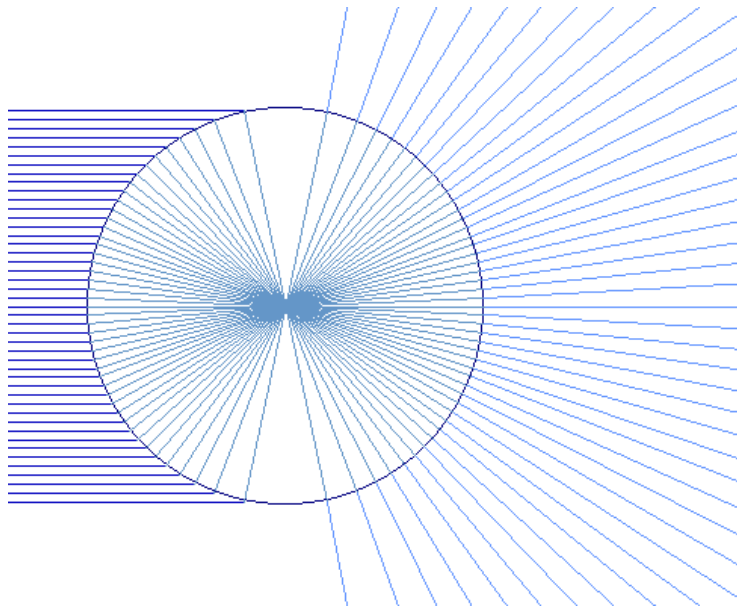


Figura 5.4: En el caso de muy alta disipación para una esfera con $\pi_r = 1$

Es decir, si el medio y la esfera fueran ambos derechos o ambos izquierdos la esfera crearía una imagen puntual virtual de rayos paralelos.

5.2. La lente perfecta

En un medio no disipador, se coloca un bloque de un material izquierdo de ancho a con índice de refracción relativo \tilde{n} . A una distancia s_0 del bloque se sitúa una fuente luminosa puntual. El rayo que incide normalmente no se desvía. Otro

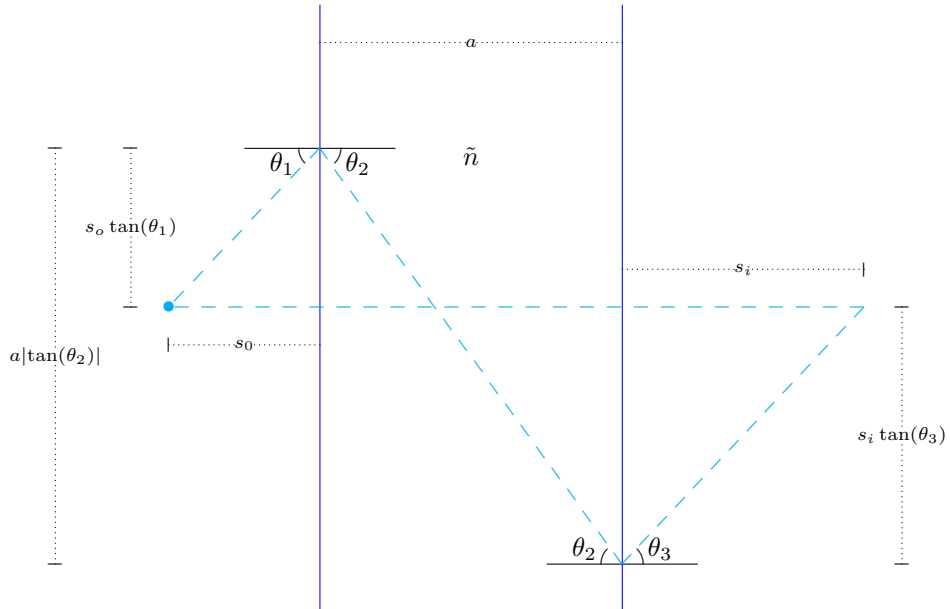


Figura 5.5: Diagrama de rayos del bloque de material izquierdo.

rayo, incidiendo a un ángulo θ_1 con respecto a la normal, invierte su dirección en la primera interfaz por un ángulo θ_2 , e incide con el mismo en la segunda, saliendo con un ángulo θ_3 .

Llamaremos s_i a la distancia a la cual el rayo refractado interseca al rayo de incidencia normal. La distancia sobre la superficie de la lente entre el punto de intersección de éste y otro rayo que sale con un ángulo θ_3 es $s_i \tan(\theta_3)$. La distancia vertical que recorre el rayo dentro del bloque es $a |\tan(\theta_2)|$, de manera que, de la figura, $s_i \tan(\theta_3) = a |\tan(\theta_2)| - s_0 \tan(\theta_1)$ (donde escribimos el valor absoluto por ser θ_2 negativo) ó

$$s_i = a \frac{|\tan(\theta_2)|}{\tan(\theta_3)} - s_0 \frac{\tan(\theta_1)}{\tan(\theta_3)}$$

Fuera del bloque, el vector de onda y el vector de Poynting coinciden en dirección y sentido, y los ángulos que forman con la normal son los mismos. Dentro, llamaremos Θ_2 al ángulo formado por el vector de onda y la normal.

Como la proyección del vector de onda debe ser la misma en cada interfaz, y las caras del bloque son paralelas,

$$k'_1 \text{sen}(\theta_1) = k'_2 \text{sen}(\theta_2) = k'_3 \text{sen}(\theta_3)$$

los ángulos de entrada θ_1 y de salida θ_3 son iguales, con lo cual,

$$s_i = a \frac{|\tan(\theta_2)|}{\tan(\theta_1)} - s_o \quad (5.5)$$

Si \tilde{n} es real, la ley de Snell (3.5), aplicada a la primera interfaz,

$$\text{sen}(\theta_1) = \tilde{n} \text{sen}(\theta_2)$$

nos permite escribir la ecuación (5.5) como

$$s_i = a \frac{|\text{sen}(\theta_2)| \cos(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_1) |\cos(\theta_2)|} - s_o = \frac{a}{|\tilde{n}|} \frac{\cos(\theta_1)}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_2)}} - s_o = \frac{a}{|\tilde{n}|} \frac{\cos(\theta_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\text{sen}(\theta_1)}{\tilde{n}}\right)^2}} - s_o$$

Si $\tilde{n} = -1$, entonces s_i no depende del ángulo:

$$s_i = a - s_o$$

por lo que, si el punto está situado a una distancia del bloque menor al ancho de éste, todos los rayos se intersecan en un mismo punto, creando una imagen perfecta de la fuente puntual¹. Un plano colocado paralelamente a las caras del bloque proyectaría una imagen sin distorsión y derecha, en una pantalla plana orientada de la misma manera, que se colocara del lado opuesto de la lente a esta distancia. Además, se puede mostrar que si $\tilde{\epsilon} = \tilde{\mu} = -1$, no existiría rayo reflejado lo que haría además que se enfocara toda la luz que llegara a la lente.

Lo que veremos ahora es qué sucede con la lente perfecta cuando no estamos en una región de transparencia. Es claro que sólo un índice de refracción relativo -1 produce este efecto. Por otro lado, sólo la condición $\tilde{\epsilon}' = \tilde{\mu}' = -1$ evitaría un rayo reflejado, pero en presencia de disipación estas no son condiciones compatibles. Para construir la lente tomando en cuenta la disipación, habría que decidir cuál de las dos condiciones es más importante. Nosotros nos centraremos en las propiedades del enfoque, así que veremos las modificaciones que se dan al admitir una parte compleja del índice de refracción $\tilde{n} = -1 + i\tilde{n}''$.

El índice de refracción funcional y la Ley de Snell para la transmisión entre la primera interfaz y la lente, es el que obtuvimos en (3.14)

$$\nu(\theta_1) = \frac{|\tilde{\mu}|}{\tilde{\mu}'} \sqrt{N^2(\theta_1) + \tilde{\mu}'' \tilde{\epsilon}''}$$

$$\text{sen}(\theta_1) = \nu(\theta_1) \text{sen}(\theta_2)$$

¹Veselago [1] fue el primero en proponer la configuración que da lugar a la lente perfecta. Posteriormente, Pendry [12] mostró que además del enfoque perfecto esta lente debería poseer otras cualidades, como un poder de resolución más allá de la longitud de onda.

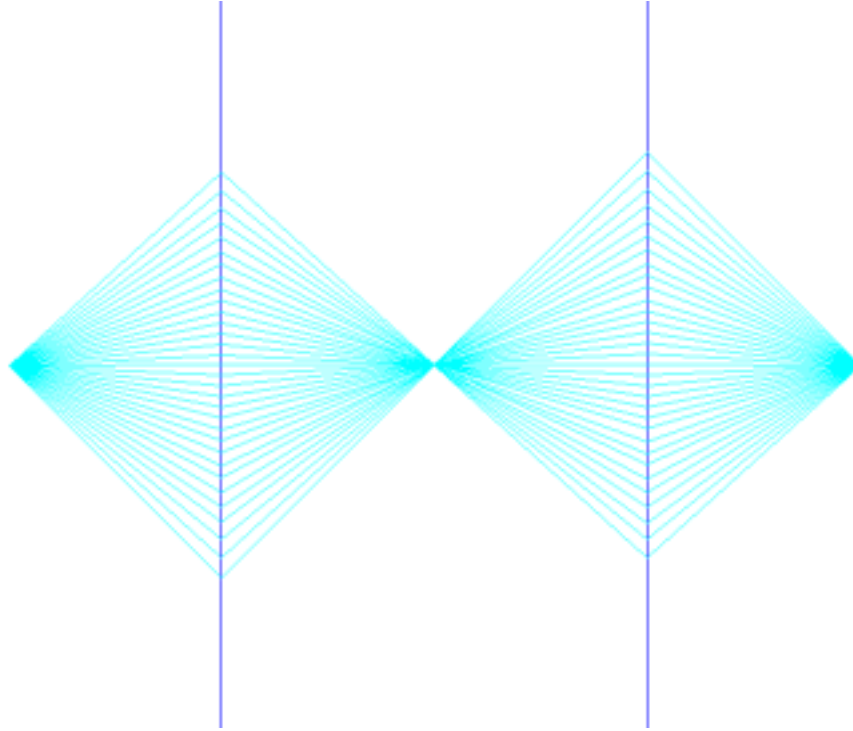


Figura 5.6: Diagrama de rayos que representa el enfoque de la lente perfecta. La imagen de un punto en $z = -a/2 - s_i$ es un punto en $z = 3a/2 - s_i$

Con estos, la distancia de enfoque (5.5) queda

$$s_i = \frac{a}{|\nu(\theta_1)|} \frac{\cos(\theta_1)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_2)}} - s_o = a \frac{\cos(\theta_1)}{\sqrt{\nu^2(\theta_1) - \sin^2(\theta_1)}} - s_o \quad (5.6)$$

En general, esta distancia de enfoque no es constante. La imperfección en la imagen dependerá de qué tanto se desvía $\nu(\theta_1)$ de la unidad.

Sin importar los valores de la disipación, dado que $\nu(\theta_1)$ tiende a infinito cuando θ_1 tiende a $\pi/2$, siempre habrá un ángulo a partir del cual la distancia de intersección es negativa. Esto no quiere decir realmente haya dicha intersección, simplemente es la que habría si prolongáramos el rayo dentro de la lente, es decir, la lente con disipación siempre tiene *rayos divergentes*. Más aún, conforme la disipación crece, todos los rayos se vuelven divergentes y s_i tiende a $-s_o$; curiosamente, la lente totalmente disipativa crearía una imagen puntual virtual perfecta.

A continuación podemos ver la distancia s_i/a graficada como función del ángulo para distintos valores de la disipación:

Podemos apreciar que, para valores casi nulos de la disipación no hay diferencia

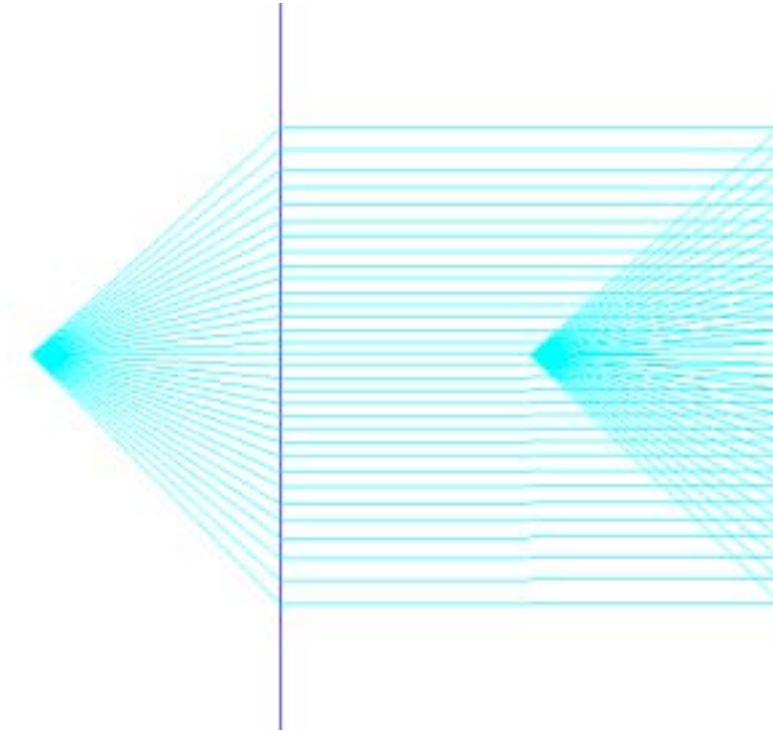


Figura 5.7: En el límite de muy alta disipación, la lente se vuelve perfectamente divergente. Los rayos que se intersecan dentro de la lente son la prolongación de los rayos reales refractados.

entre una recta horizontal y la curva hasta ángulos muy pronunciados. Aún para valores de la disipación $\pi_\epsilon = \pi_\mu = 1/10$, s_i varía muy poco hasta ángulos alrededor de $\pi/4$. En una lente real, con dimensiones finitas, serían descartados todos los ángulos a partir de uno, determinado tanto por la distancia objeto s_0 como por la altura de la lente, lo que disminuiría el problema. Conforme aumentamos la disipación, la región en donde s_i se aproxima a una recta es mucho más estrecha, lo que haría imposible decir que hay un enfoque.

Una segunda fuente de imperfección será la absorción del medio. Si la fuente emite luz con intensidad I_0 , cada rayo, al salir del bloque tendrá intensidad

$$I_0 e^{-2k_2'' a}$$

pues \vec{k}_2'' siempre apunta en dirección horizontal. Siendo k_2'' una función del ángulo, dada por la solución a la relación de dispersión,

$$k_2''(\Theta_2) = k_0 \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sec^2(\Theta_2)}}{2}} \quad (5.7)$$

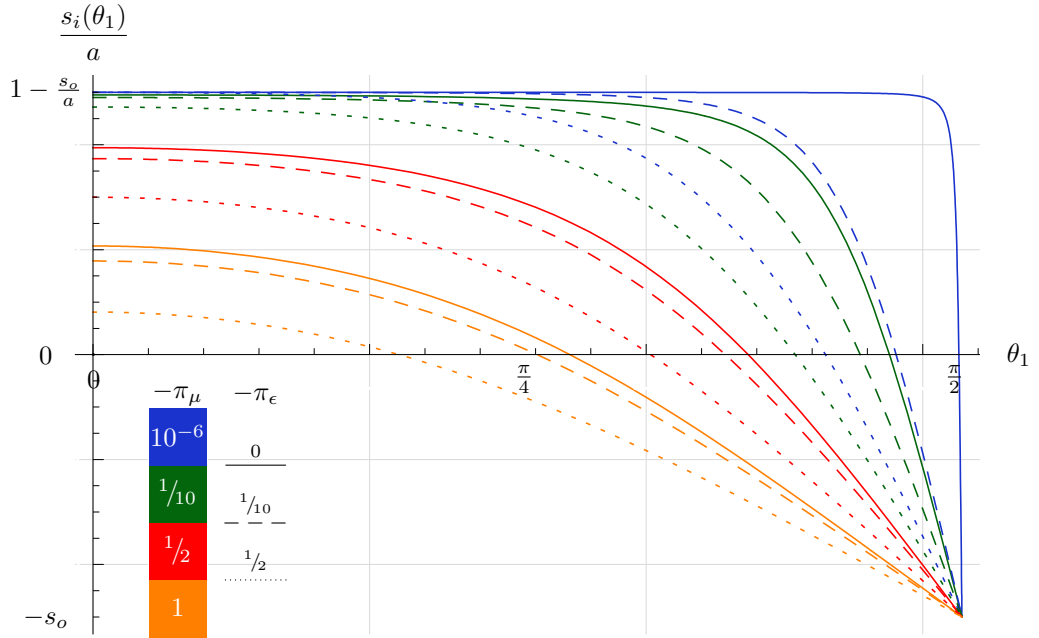


Figura 5.8: Se muestra la proporción entre la distancia imagen y el ancho de la lente para cada ángulo de incidencia. Los colores corresponden a valores de π_μ y los estilos de línea a valores de π_ϵ . Naturalmente, modificar s_o sólo desplaza la posición del eje horizontal.

cada rayo tendrá una atenuación distinta. k'' es una función estrictamente creciente de Θ_2 en el intervalo $[0, \pi/2]$, el cual a su vez es una función creciente de θ_1 , así que el rayo central será el de menor atenuación. Al salir del bloque, este tendrá una intensidad

$$I_c = I_0 e^{-2k_0 n_2'' a}$$

Aunque la intensidad en un punto dependerá de cuántos rayos llegan a él, consideraremos en primera aproximación que la intensidad del rayo con θ_1 domina sobre las otras.

El lugar natural para buscar el enfoque de la lente con disipación sería aquella en la que convergen los rayos con ángulo de salida tendiendo a cero, pues son los de mayor intensidad,

$$s_p = \lim_{\theta_1 \rightarrow 0} s_i(\theta_1) = a \frac{|\tilde{\mu}'|}{|\tilde{\mu}| \sqrt{1 + \tilde{\mu}'' \tilde{\epsilon}''}} - s_o \quad (5.8)$$

En el plano situado a esa distancia de la lente, se formará una imagen, que puede ocupar incluso todo el plano. Sin embargo, dada la atenuación, sólo será visible

una parte de ella. La intensidad de cualquier rayo será $I = I_c e^{2a(k_0 n_2'' - k_2')}$. Como parámetro de medida, consideraremos aquellos que tengan una intensidad mayor a $1/e$ de la del rayo central. La igualdad se da si

$$I = I_c e^{-1} = I_c e^{2a(k_0 n_2'' - k_2')} \Rightarrow k_2'' = k_0 n_2'' + \frac{1}{2a} \quad (5.9)$$

Llamaremos θ_d al ángulo de incidencia positivo para el cual se cumple esta igualdad, y abreviaremos

$$\gamma := \tilde{n}'' + \frac{1}{2ak_0 |n_1|}$$

que resulta de dividir la última parte de la ecuación (5.9) entre $k_0 |n_1|$. De la relación de dispersión, sabemos que $k_2'^2 = k_2''^2 + k_0^2 \alpha_2$. Esto nos dice que

$$\frac{k_2'}{k_0 |n_1|} = \gamma^2 + \tilde{\alpha}$$

Por otro lado, sustituyendo el valor de k_2'' de (5.7) y despejando $\text{sen}(\Theta_2)$ de (5.9), tenemos que

$$\text{sen}^2(\Theta_2) = 1 - \frac{\tilde{\beta}^2}{(2\gamma^2 + \tilde{\alpha})^2 - \tilde{\alpha}^2}$$

Sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en (3.9), obtenemos el valor del ángulo de incidencia que buscábamos

$$\begin{aligned} \theta_d &= \arcsen \left(\sqrt{(\gamma^2 + \tilde{\alpha}) \left(1 - \frac{\tilde{\beta}^2}{(2\gamma^2 + \tilde{\alpha})^2 - \tilde{\alpha}^2} \right)} \right) \\ &= \arcsen \left(\frac{\sqrt{4\gamma^2(\gamma^2 + \tilde{\alpha})^2 + \tilde{\beta}^2}}{2\gamma\sqrt{\gamma^2 + \tilde{\alpha}}} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Dado este ángulo, y la distancia de proyección (5.8), queda determinado un círculo sobre el plano situado a distancia s_p de la lente. De la figura 5.5 podemos ver que el radio R de este círculo está dado por

$$R = \tan(\theta_d)(s_p - s_i(\theta_d))$$

Debemos notar que la ecuación (5.9) siempre tiene solución en términos del ángulo que forma k_2' con la normal dentro de la lente, por ser k_2'' una función creciente no acotada de Θ_2 , que vale $k_0 n_2''$ en 0. Sin embargo, en presencia de disipación no siempre puede encontrarse un ángulo de incidencia que produzca un Θ_2 dado; esto puede verse recordando que en presencia de disipación no hay ángulo crítico, y tomando el caso $\tilde{\mu}'' = 0$ en donde el vector de Poynting y k_2' coinciden en dirección. Más aún, hay todo un intervalo de ángulos que es inaccesible a la refracción.

En consecuencia, para valores de γ suficientemente altos, θ_d –al igual que R – no estará definido. Valores altos de γ implican valores pequeños de $k_0 a$, es decir, que la longitud de onda de la luz incidente es mayor que las dimensiones de la lente. En este caso la aproximación de la óptica geométrica (y en el fondo, la del medio efectivo) no sería válida. Por otro lado, para longitudes de onda grandes (aunque no sean mayores que a), la atenuación del medio es poca, y no tiene porqué haber una circunferencia de intensidad como la que hemos propuesto.

Veamos cómo varía este radio para diversos valores de la disipación y diversas longitudes de onda. Tomaremos el número de onda en el vacío en unidades de $1/a$.

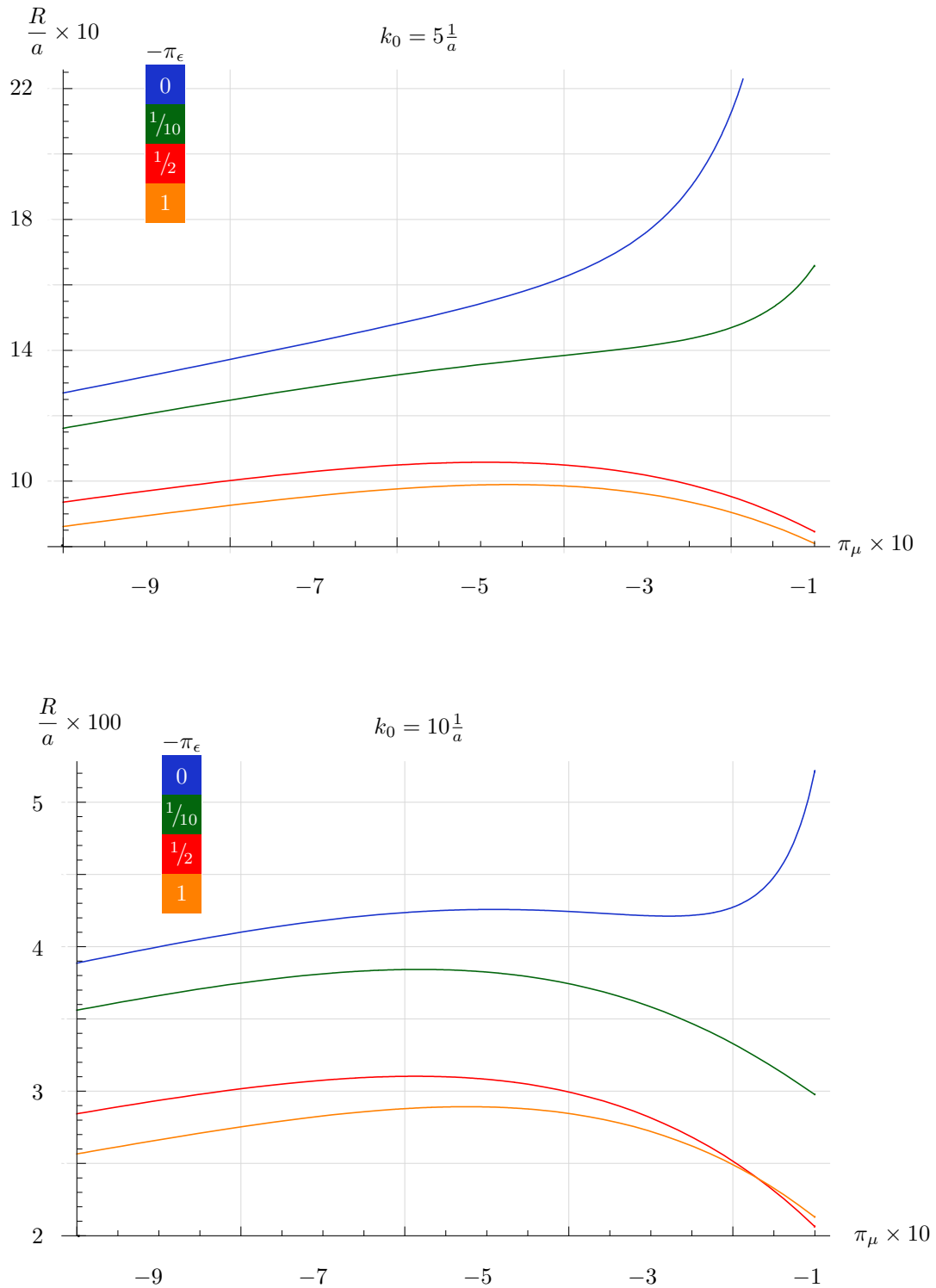


Figura 5.9: R como función de π_μ para diversos valores de π_ϵ . Arriba, para $k_0 = 5\frac{1}{a}$ y abajo para $k_0 = 10\frac{1}{a}$. El eje horizontal está ampliado diez veces, y el vertical, diez veces en la gráfica superior, y cien en la inferior.

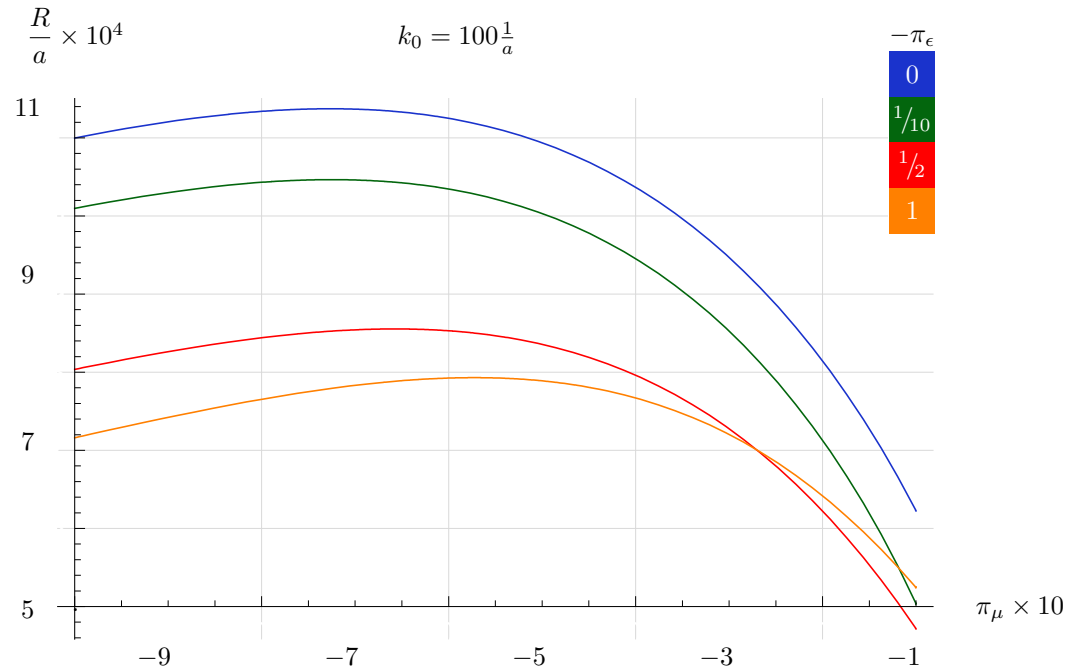


Figura 5.10: R como función de π_μ para diversos valores de π_ϵ , con un valor de k_0 igual a $100\frac{1}{a}$. El eje vertical tiene una ampliación de 10^4 y el horizontal una de diez. Los valores de R son entre tres y cuatro órdenes menores que a .

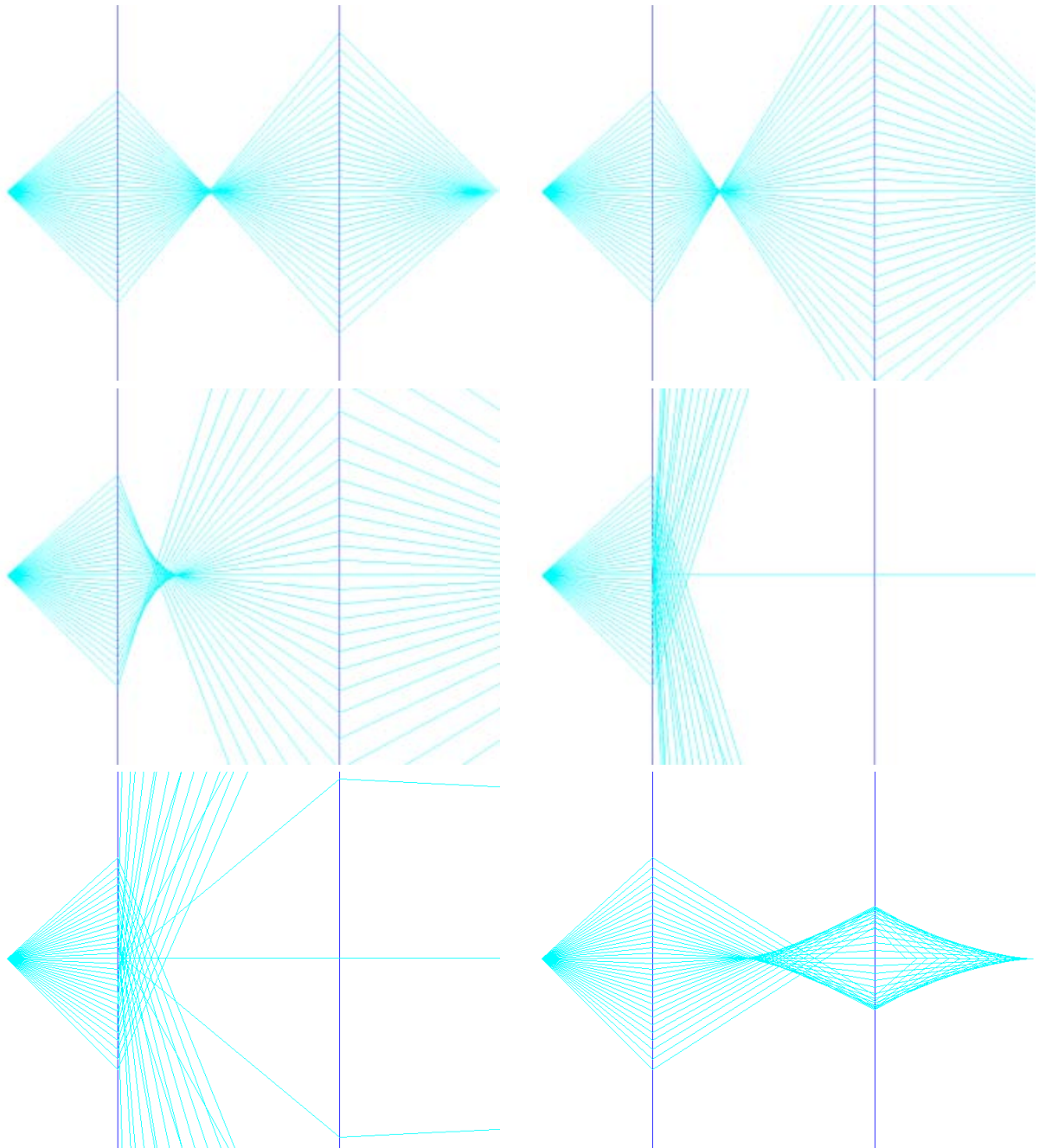
Podemos ver que cuando k_0 no es muy lejano a a , R puede volverse muy grande cuando la disipación es pequeña. Esto no es raro, pues, con disipación baja, los rayos se atenúan poco; esto tiene como consecuencia que el ángulo para el cual la intensidad relativa tenga un valor $1/e$ sea uno cercano a $\pi/2$ y salga refractado muy lejos del rayo central. Esta situación no sería importante en la situación de una lente real, con dimensiones finitas, como lo hemos establecido.

También puede notarse que, cuando el número de onda crece, el radio del círculo aumenta, para π_ϵ fija, como función de π_μ , hasta llegar a un máximo, después del cual decrece nuevamente. Esto puede entenderse recordando que los rayos dentro de la lente, al aumentar la disipación tienden hacia la dirección de la normal; si la atenuación fuera constante, el radio del círculo tendería a una constante, pero, como la atenuación aumenta, la intensidad se da para ángulos menores cada vez.

Quizá lo más interesante que se puede observar en estas gráficas es la enorme diferencia que hay al disminuir la longitud de onda. Mientras que con $k_0 = 5/a$ el radio es del orden de a , con $k_0 = 10/a$ es dos órdenes menor, y con $k_0 = 100/a$ es entre tres y cuatro órdenes menor. En el primer caso lo que se observaría es realmente una gran mancha. Es en los otros dos casos en los que se puede hablar realmente

de una propiedad de enfoque, y esto nos permite ver que hay un compromiso entre el tamaño de la longitud de onda y el desenfoque. Para una disipación dada, a longitudes de onda grandes habrá atenuación baja pero mal enfoque, mientras que en longitudes de onda pequeñas puede haber un mejor enfoque, pero hay una mayor atenuación.

Para finalizar, observaremos algunos diagramas de la lente con disipación.



Diagramas de rayos de la lente imperfecta. Los del lado izquierdo tienen $\pi_\epsilon = 0$ y los del derecho $\pi_\epsilon = 1$, y de arriba a abajo, π_μ vale $1/2$, 1 y $3/2$.

Estos diagramas no toman en cuenta la atenuación, pero aún así dejan claro que no es muy difícil destruir el enfoque de la lente. En particular puede verse que con los valores de la disipación de cualquiera de los metamateriales que mencionamos en la sección anterior sería imposible construir la lente.

Capítulo 6

¿Está todo mal?

Aunque pasaron muchos años entre la predicción de Veselago y la propuesta de Pendry, la espera entre los primeros reportes de experimentos con refracción negativa y las objeciones al respecto fue despreciable.

Como hemos dicho, un metamaterial en concreto tiene propiedades ϵ y μ efectivas sólo cuando la longitud de onda de la luz utilizada en el experimento es suficientemente grande en comparación con los componentes del mismo. Esto conlleva una dificultad práctica para fabricar estos dispositivos si la finalidad es realizar experimentos de refracción con luz visible. Como consecuencia, las primeras construcciones exitosas se realizaron para otras frecuencias; al principio, del rango de las microondas. No es posible una visualización directa del efecto en ese caso. Una manera de medir los parámetros de la reflexión en dichos experimentos, es a través de los coeficientes de transmisión y reflexión.

Hay más de un artículo que se refiere a la posible malinterpretación de los resultados de estos experimentos; por el momento no nos concentraremos en estas objeciones, pues esta discusión va cambiando rápidamente, conforme se logra construir metamateriales con componentes más pequeños. Es muy probable que dentro de poco logren llegar a las frecuencias del espectro visible.

Otras objeciones provienen de la física teórica. Se ha discutido sobre el problema de que los materiales izquierdos permitan la transmisión de señales superlumínicas, que la velocidad de fase esté mal definida para materiales izquierdos, que la presencia de disipación impida hablar del signo de la refracción, entre otras. Existen numerosas respuestas –sobre todo provenientes del grupo de Pendry– a estas objeciones, y al respecto de la disipación, este trabajo aclara algunas cosas. Me gustaría centrarme en un artículo con argumentos muy fuertes en contra de la refracción negativa que provienen de primeros principios; dicho artículo tiene dos resultados centrales para materiales lineales, que parecen mostrar que la refracción negativa es imposible. Aunque extiende también su análisis para materiales anisotrópicos, me limitaré al primero.

La primera objeción del artículo, de Vadim A. Markel [13] puede plantearse de la siguiente manera: si, siguiendo la misma línea utilizada para la deducción del teorema de Poynting en el vacío, consideramos el trabajo realizado por los campos sobre las cargas inducidas en el material

$$\vec{E} \cdot \vec{J}_{ind} = \vec{E} \cdot \left(\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \right) \quad (6.1)$$

en ausencia de cargas externas, es claro que no hay diferencia matemática con el trabajo realizado sobre las corrientes externas (2.9) y, en consecuencia, la misma deducción que se hizo en el vacío es válida dentro del material, y podríamos escribir

$$\vec{E} \cdot \vec{J}_{ind} = -\partial_t \left(\frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2}{2} \right) - \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (6.2)$$

lo que da lugar a pensar que el vector de Poynting debería definirse como

$$\vec{S} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (6.3)$$

En tal situación, sin importar el valor de ϵ y μ , el vector de onda y el vector de Poynting promedio siempre serán paralelos, y, como consecuencia, aún cuando exista un material con una región en la que $\mu' < 0$, no puede haber refracción negativa.

Markel se pregunta posteriormente qué sucede si la corriente inducida es de la forma

$$\vec{J}_{ind} = \text{Re}[\vec{J}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] \quad (6.4)$$

Si utilizamos la ecuación

$$\vec{J}_{ind} = \partial_t \vec{P} + \nabla \times \vec{M} \quad (6.5)$$

en el espacio de las frecuencias, y las definiciones de μ , ϵ , \vec{P} y \vec{M} , tenemos que, para un campo armónico $\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}]$,

$$\hat{J}_{ind} = -i\omega(\epsilon - \epsilon_0)\hat{E} + \nabla \times \left(\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{\vec{k}}{\omega} \times \hat{E} \right) \quad (6.6)$$

y utilizando la identidad $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{F}) = \vec{a} \nabla \cdot \vec{F} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{F}$ y la condición $\vec{k} \cdot \hat{E} = 0$, obtenemos la densidad de corriente inducida en términos del campo eléctrico y las propiedades del medio:

$$\vec{J}_{ind} = \text{Re} \left[\left(i(\epsilon_0 - \epsilon) + \epsilon \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0} \right) \right) \omega \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \quad (6.7)$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \langle \vec{E} \cdot \vec{J}_{ind} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[-i\omega \left(\frac{\epsilon\mu}{\mu_0} - \epsilon_0 \right) E_0^2 e^{-2\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \right] \\ &= \frac{\omega E_0^2}{2\mu_0} e^{-2\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \text{Im}[\epsilon\mu] \end{aligned} \quad (6.8)$$

Markel argumenta que, como esta cantidad es proporcional al calor disipado, entonces $\text{Im}[\epsilon\mu]$ tiene un signo siempre positivo. Si tomamos en cuenta la parte imaginaria de la relación de dispersión (2.14), esta cantidad es una medida del producto escalar entre los vectores de onda y de atenuación. Como consecuencia, estos nunca pueden formar un ángulo negativo, lo cual enfrenta la refracción negativa con la segunda ley de la termodinámica.

El problema está aún abierto, pero lo que sí podemos ver es la diferencia que produce la definición de Markel con respecto a la tradicional sobre los valores del calor. Si llamamos

$$\vec{S}_0 = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

entonces, dado que $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$,

$$\vec{S} = \vec{S}_0 - \vec{E} \times \vec{M}$$

y, al tomar la divergencia,

$$\nabla \cdot \vec{S} = \nabla \cdot \vec{S}_0 - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{M})$$

y ya que

$$\langle \nabla \cdot \vec{S}_0 \rangle = \langle \vec{E} \cdot \vec{J} \rangle$$

obtenemos que

$$\langle \nabla \cdot \vec{S} \rangle = \langle \vec{E} \cdot \vec{J} \rangle - \langle \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{M}) \rangle$$

Lo que nos hace ver que la diferencia en los valores observables entre la definición convencional y la propuesta por Markel es el segundo término del lado derecho de la ecuación. Si integramos esta última sobre un volumen finito V de superficie A y utilizamos el teorema de la divergencia, obtenemos que

$$\int_A \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a} = \int_V \langle \vec{E} \cdot \vec{J} \rangle dV - \int_A \langle \vec{E} \times \vec{M} \rangle \cdot d\vec{a}$$

lo cual se puede escribir como

$$\int_A \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a} = \int_V \langle \vec{E} \cdot \vec{J} \rangle dV - \int_A \langle \vec{E} \cdot \vec{M} \times \hat{n} \rangle \cdot d\vec{a}$$

con \hat{n} la normal a la superficie. Si suponemos que en el volumen μ es constante y cambia a $\mu = \mu_0$ en la superficie, entonces aparece una densidad de corriente superficial, dada por

$$\vec{J}^S = \vec{M} \times \hat{n}$$

con lo cual

$$\left\langle \int_A \vec{S} \cdot d\vec{a} \right\rangle = \left\langle \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \right\rangle - \left\langle \int_A \vec{E} \cdot \vec{J}^S \cdot d\vec{a} \right\rangle$$

el lado derecho de la ecuación se puede identificar como $Q^V + Q^S$, un término volumétrico de calor más un término superficial. Es decir, los valores proporcionados por $\nabla \cdot \vec{S}$ y $\nabla \cdot \vec{S}_0$ difieren en un término superficial. Markel está consciente de ello y sus argumentos muestran que ese calor debe ser tomado en cuenta por separado.

Es decir, aunque no habría diferencia en las mediciones en cuanto a los términos termodinámicos, es claro que la propagación de las ondas quedaría descrita de manera muy distinta en el caso general por las dos definiciones. Esto por supuesto no ha sido relevante en los experimentos ópticos, pues los materiales tienen para estas frecuencias $\mu = \mu_0$.

Por el momento no hay aún respuestas a estas objeciones, lo que ha sentado una duda razonable en el caso general sobre si el vector de Poynting realmente representa lo que creemos, y que ha sido traída de nuevo a discusión por el tema de los materiales izquierdos, esto a pesar de ser una cantidad conocida y estudiada hace más de un siglo. Esta discusión tendrá una importante contribución experimental cuando haya metamateriales operando en la región del espectro visible.

Algo interesante sobre los resultados obtenidos en este trabajo sobre la refracción en medios disipadores es que, de conocerse las funciones ϵ y μ para algún material por medios que no involucraran al vector de Poynting (como sí lo hacen los experimentos basados en coeficientes de transmisión y reflexión), se podría determinar si este representa el flujo de energía en un medio disipador, teniendo en cuenta que, si este es proporcional a $\vec{E} \times \vec{B}$, los índices de refracción funcionales a medirse deberían ser los que denotamos por N , mientras que, si es proporcional a $\vec{E} \times \vec{H}$, los índices de refracción que llamamos ν son los que deben reproducir los experimentos. Curioso y notable también es que ¡para ello no se necesita de un material izquierdo!...

Conclusiones

Un material con ϵ y μ reales y ambas negativas tiene la propiedad, según predijo Víctor Veselago, de exhibir ángulos de refracción θ_2 opuestos en signo a los ángulos de incidencia θ_1 de la luz. Esto se llama refracción negativa. El hecho fundamental detrás de ello es que en dichos materiales el vector de Poynting y el vector de onda de una onda homogénea son antiparalelos.

$$\langle \vec{S} \rangle \parallel -\vec{k}$$

La refracción en tales materiales obedece la Ley de Snell,

$$\text{sen}(\theta_1) = \tilde{n} \text{sen}(\theta_2)$$

con el índice de refracción relativo \tilde{n} y el ángulo de refracción θ_2 negativos.

En años recientes, la construcción de metamateriales se ha enfocado en lograr la obtención de propiedades efectivas como las del problema de Veselago. Si bien numerosos experimentos reportan mediciones de funciones respuesta ϵ y μ efectivas con partes reales negativas, también reportan partes imaginarias –y consecuentemente valores de la disipación de energía– considerablemente grandes.

En este trabajo se analizó el efecto de la disipación de energía sobre la refracción en estos medios. Se consideró la consecuente atenuación de ondas electromagnéticas propagándose en un medio disipador, por lo que hubo que caracterizarlas no sólo por un vector de onda \vec{k}' , sino también por un vector de atenuación \vec{k}'' . Se encontró que, para una onda así, en un medio con permeabilidad $\mu = \mu' + i\mu''$, la presencia de disipación tiene como consecuencia que el vector de Poynting en general no esté en la misma línea que el vector de onda

$$\langle \vec{S} \rangle \parallel \mu' \vec{k}' + \mu'' \vec{k}''$$

lo que tiene como consecuencia la modificación de los teoremas de refracción. Se mostró que, aún en presencia de disipación, tiene sentido hablar de refracción negativa. También que ha de tenerse siempre en cuenta que una atenuación muy alta puede de manera práctica impedir el paso de la luz a través de un medio disipador.

Asimismo, se hizo ver que el caso de luz incidente desde un medio disipador hacia un no disipador es diferente al caso opuesto. Se mostró que, en ambos casos,

se puede determinar los ángulos Θ formados por el vector de onda con la normal a la superficie por medio de una expresión que preserva la forma de la Ley de Snell,

$$\text{sen}(\Theta_1) = N(\Theta_1) \text{sen}(\Theta_2)$$

pero que tiene un “índice de refracción” N dependiente del ángulo de incidencia.

Siendo los ángulos de incidencia y refracción los determinados por el vector de Poynting y no los determinados por el vector de onda, se tuvo que buscar una expresión para los primeros. Se encontró que también se puede escribir un teorema de refracción del estilo de la Ley de Snell para estos ángulos,

$$\text{sen}(\theta_1) = \nu(\theta_1) \text{sen}(\theta_2)$$

tomando en cuenta la no colinealidad de $\langle \vec{S} \rangle$ y \vec{k}'' en presencia de disipación magnética, y dando como resultado un índice de refracción funcional ν que no siempre coincide con N .

Se utilizaron estos resultados para estudiar dos problemas de refracción. El primero, el de una gota de agua, en el que se analizó la diferencia entre la refracción izquierda y derecha. El segundo, el de la “lente perfecta”, en el que el cálculo tanto de los efectos de atenuación (caracterizados por el tamaño de la imagen de una fuente puntual) como de desenfoque (determinados por medio de la distancia de intersección de rayos) producidos por la disipación permitieron ver que, para poder considerar que hay enfoque, es necesario que las partes imaginarias de ϵ y μ sean extremadamente pequeñas.

Finalmente, se trajo a discusión una controversia fundamental, en la que, de acuerdo a un artículo reciente, la definición usual del vector de Poynting, $\vec{E} \times \vec{H}$, no representa el flujo de energía, mientras que sí lo hace la cantidad $\vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$; siendo un tema aún no resuelto, se decidió exponer los argumentos principales del artículo y realizar algunas consideraciones al respecto. Se sugirió que los resultados del presente trabajo pueden plantear una resolución experimental del problema, pues, si el vector de Poynting es proporcional a $\vec{E} \times \vec{B}$, coincidiría siempre en dirección con \vec{k}' , en cuyo caso, los ángulos de refracción deben obedecer la expresión $\text{sen}(\theta_1) = N(\theta_1) \text{sen}(\theta_2)$, mientras que, en presencia de disipación magnética, deben comportarse de acuerdo a $\text{sen}(\theta_1) = \nu(\theta_1) \text{sen}(\theta_2)$.

Anexos

A1. Interpretación física de \vec{P} y \vec{M}

Mostramos en detalle los cálculos que permiten establecer los resultados relativos a la interpretación física de \vec{P} y \vec{M} .

El dipolo puntual eléctrico

Consideremos una configuración de dos cargas opuestas, q y $-q$, situadas en \vec{R} y $\vec{R}+\vec{d}$ respectivamente. El momento dipolar eléctrico de esta configuración es

$$\vec{p} = q\vec{R} + (-q)(\vec{R} + \vec{d}) = -q\vec{d}$$

La densidad de carga de esta configuración en un punto \vec{r} se obtiene dividiendo la carga total encerrada en un volumen V , en el límite cuando el volumen se va a cero; como sólo hay carga en los puntos \vec{R} y $\vec{R}+\vec{d}$, esto se puede escribir, utilizando la distribución de Dirac como

$$\begin{aligned}\rho_p(\vec{r}) &= q(\delta(\vec{r} - \vec{R}) - \delta(\vec{r} - (\vec{R} + \vec{d}))) \\ &= qd \frac{\delta(\vec{r} - \vec{R}) - \delta(\vec{r} - \vec{R} - \vec{d})}{d}\end{aligned}$$

En el límite en el que $d \rightarrow 0$ (un dipolo puntual), el cociente tiende a la derivada de δ en la dirección de \vec{d} , que se puede obtener como un vector unitario en esa dirección multiplicado escalarmente por el gradiente de δ :

$$\rho_p(\vec{r}) = qd \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \frac{\vec{d}}{d} = \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}) \cdot q\vec{d} = -\nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{p}$$

Para incluir la dependencia temporal de la densidad, consideraremos situaciones en las que la densidad de carga es una función separable de la posición y del tiempo, es decir $\rho_p(\vec{r}, t) = \rho_p(\vec{r})T(t)$, con T una función expandible en serie de Fourier y veremos qué sucede con la componente ω :

$$\rho_{p,\omega}(\vec{r}, t) = -\vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}) e^{i\omega t}$$

La ecuación de continuidad nos proporciona la conexión entre la densidad de carga y la densidad de corriente. Dado que \vec{p} es constante, $\nabla \cdot (\vec{p} \delta(\vec{r} - \vec{R})) = \vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R})$; además, $\partial_t \rho_{p,\omega} = -i\omega \vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}) e^{i\omega t}$. De estos dos hechos, obtenemos que $\nabla \cdot (i\omega \vec{p} \delta(\vec{r} - \vec{R}) e^{i\omega t}) = -\partial_t \rho_{p,\omega}$, así que

$$\vec{J}_{p,\omega}(\vec{r}, t) = i\omega \vec{P} \delta(\vec{r} - \vec{R}) e^{i\omega t}$$

Potenciales dinámicos del dipolo eléctrico puntual

Ya podemos calcular los potenciales electrodinámicos asociados al dipolo eléctrico puntual oscilante. El potencial escalar en un punto \vec{r}_0 será

$$\phi_{p,\omega}(\vec{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\vec{P} \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}) e^{i\omega(t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}{c})}}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} dV$$

Separando el argumento de la exponencial, y puesto que \vec{P} no depende de las variables de integración, esto se puede escribir como

$$\phi_{p,\omega}(\vec{r}_0, t) = -\frac{e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \cdot \int_V \frac{\nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}) e^{ik_0 \|\vec{r} - \vec{r}_0\|}}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} dV$$

siendo $k_0 = \omega/c$ el número de onda de esta componente en el vacío. Hay que notar que se puede tomar cualquier volumen que contenga a \vec{R} en su interior. Haciendo $G(\vec{r}) = e^{ik_0 r}/r$ (una función de Green para este problema), nos queda la cuestión de evaluar la integral de $\nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}) G(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Usando el hecho de que $\int_V \nabla f(\vec{r}) dV = \int_{\partial V} f(\vec{r}) d\vec{a}^*$ y que $f \nabla g = \nabla(fg) - g \nabla f$, tenemos que

$$\int_V \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}) G(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \int_{\partial V} \delta(\vec{r} - \vec{R}) G(\vec{r} - \vec{r}_0) d\vec{a} - \int_V \delta(\vec{r} - \vec{R}) \nabla G(\vec{r} - \vec{r}_0) dV$$

Ya que \vec{R} no está en la frontera de V , la primera integral se anula. La segunda integral es simplemente la evaluación de $\nabla G(\vec{r} - \vec{r}_0)$ en $\vec{r} = \vec{R}$, por lo que

$$\phi_{p,\omega}(\vec{r}_0, t) = \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \cdot \nabla G(\vec{r} - \vec{r}_0) \Big|_{\vec{r}=\vec{R}} \quad (6.9)$$

El potencial vectorial se obtiene por integración directa:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{p,\omega}(\vec{r}_0, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{i\omega \vec{P} \delta(\vec{r} - \vec{R}) e^{i\omega(t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}{c})}}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V i\omega \vec{P} \delta(\vec{r} - \vec{R}) e^{i\omega t} G(\vec{r} - \vec{r}_0) dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \vec{P} e^{i\omega t} G(\vec{r} - \vec{r}_0) \end{aligned}$$

Potencial debido al campo de polarización

Ahora falta ver cuál es el potencial electrodinámico producido por la densidad de carga inducida; si $\vec{P}_\omega = \vec{P}_0(\vec{r}) e^{i\omega t}$, esta es, por construcción, $\rho_{ind}(\vec{r}, t) = -\nabla \cdot \vec{P}_0(\vec{r}) e^{i\omega t}$. El tratamiento es análogo al del caso estático, salvo que esta vez tenemos el núcleo $G(\vec{r}-\vec{r}_0)$ en sustitución de $\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^{-1}$. Tomando un volumen que contenga propiamente al material, y recordando que \vec{P} se anula fuera del mismo, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \phi_{ind,\omega}(\vec{r}_0, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla \cdot \vec{P}_0(\vec{r}) e^{i\omega(t-\frac{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}{c})}}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|} dV \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) G(\vec{r}-\vec{r}_0) dV \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_V \nabla \cdot (\vec{P}(\vec{r}) G(\vec{r}-\vec{r}_0)) dV - \int_V \vec{P}(\vec{r}) \cdot \nabla G(\vec{r}-\vec{r}_0) dV \right) \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{\partial V} \vec{P}(\vec{r}) G(\vec{r}-\vec{r}_0) \cdot d\vec{a} - \int_V \vec{P}(\vec{r}) \cdot \nabla G(\vec{r}-\vec{r}_0) dV \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla G(\vec{r}-\vec{r}_0) \cdot \vec{P}(\vec{r}) dV
 \end{aligned}$$

Potencial debido a las corrientes inducidas

De manera similar, nos interesa conocer el potencial generado por la corriente inducida, que, como vimos, está dada por $\vec{J}_{ind,\omega} = \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \nabla \times \vec{M} + i\omega \vec{P}$. Esto en particular permite ver que, el requisito de que fuera del material \vec{P} se anule y no existan corrientes inducidas, implica que el rotacional de \vec{M} se anule; para completar su definición, y con la misma justificación utilizada para \vec{P} , pediremos que también \vec{M} sea cero fuera. Con esto, el potencial asociado es

$$\vec{A}(\vec{r}_0, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{i\omega t} \int_V (\nabla \times \vec{M} + i\omega \vec{P}) G(\vec{r}-\vec{r}_0) dV$$

El segundo sumando es precisamente el potencial calculado previamente para una distribución de dipolos eléctricos \vec{P} . El primero, salvo constantes, puede integrarse como sigue:

$$\int_V G(\vec{r}-\vec{r}_0) \nabla \times \vec{M} dV = \int_V \nabla \times (G(\vec{r}-\vec{r}_0) \vec{M}(\vec{r})) dV - \int_V \nabla G(\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{M}(\vec{r}) dV$$

Ya que $\int_V \nabla \times \vec{F} dV = \int_{\partial V} \epsilon \vec{F} d\vec{a}^{**}$ -donde ϵ es el tensor de Levi-Civita- y $\vec{M} = \vec{0}$ en el exterior, la integral se reduce a

$$\int_V G(\vec{r} - \vec{r}_0) \nabla \times \vec{M} dV = - \int_V \nabla G(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{M}(\vec{r}) dV$$

por tanto,

$$\vec{A}(\vec{r}_0, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{i\omega t} \int_V (i\omega \vec{P}(\vec{r}) G(\vec{r} - \vec{r}_0) - \nabla G(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{M}(\vec{r})) dV$$

únicamente resta determinar la contribución del segundo término. Con un cálculo análogo al realizado para determinar los potenciales dipolares eléctricos, se obtiene que los correspondientes magnéticos para un dipolo \vec{m} situado en \vec{R} son

$$\begin{aligned} \vec{A}_m(\vec{r}_0, t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} e^{i\omega t} \nabla G(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{m} \Big|_{\vec{r}=\vec{R}} \\ \phi_m(\vec{r}_0, t) &= 0 \end{aligned}$$

Así que los potenciales producidos por la corriente inducida son equivalentes a la superposición de una distribución dipolar eléctrica \vec{P} y magnética \vec{M} . De aquí que los nombres de estos campos sean, con toda justicia, polarización y magnetización respectivamente.

Es de notarse que, siendo todos los resultados exactos, se obtenga que \vec{P} y \vec{M} sean la primera aproximación a los potenciales correspondientes la configuración electromagnética del material.

A2. Transformada de Fourier

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable e integrable en \mathbb{R} . Definimos la transformada de Fourier de f en un punto ω como

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Transformada inversa

La función f se puede recuperar si se conoce su transformada, a través de una relación integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Linealidad

Si a es una constante, y g es otra función con transformada de Fourier, de la definición se sigue la propiedad de linealidad:

$$\begin{aligned} \widehat{(af)}(\omega) &= a\widehat{f}(\omega) \\ \widehat{(f+g)}(\omega) &= \widehat{f}(\omega) + \widehat{g}(\omega) \end{aligned}$$

Derivada

La transformada de la derivada de f se puede obtener integrando por partes cuando la función tiende a cero en infinito:

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{i\omega t} dt = e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = -i\omega \widehat{f}(\omega)$$

De modo que el operador de derivada se transforma, para estas funciones, como el operador algebraico $-i\omega$.

Si consideramos la función

$$h_M(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } |t| \leq M; \\ 0 & \text{si } |t| > M. \end{cases}$$

vemos que su transformada está definida, al igual que la transformada de $h'_M(t)$, pues el límite cuando h_M tiende a infinito es cero para cualquier M . Como h_M coincide con f en un intervalo tan grande como se quiera, podemos concluir que la transformada de f' es $-i\omega \widehat{f}$ independientemente de su límite en infinito.

Funciones de varias variables

En el caso de tener una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se define la transformada de f con respecto a la variable x_i como

$$\widehat{f}(x_1, \dots, k_i, \dots, x_n) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) e^{ik_i x_i} dx_i$$

en este caso, se sigue de lo anterior, que el operador ∂_{x_i} debe reemplazarse por $-ik_i$.

Si la función además es separable, es decir, $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$, entonces $\widehat{f}(x_1, \dots, k_i, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots \widehat{f}_i(k_i) \cdots f_n(x_n)$.

A3. Relación (3.9) en términos de Θ_1

La relación (3.9) se puede modificar para obtener Θ_2 en términos de cantidades conocidas. Si escribimos $v := 2 \sin^2(\Theta_1)$ y $w := \sin^2(\Theta_2)$, esta queda, en términos

de las propiedades relativas del medio $\tilde{\alpha} := \alpha_2/n_1^2$, $\tilde{\beta} := \beta_2/n_1^2$ como

$$v = \left(\tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \frac{\tilde{\beta}^2}{1-w}} \right) w$$

Dividiendo entre w , restando $\tilde{\alpha}$, y elevando al cuadrado,

$$\frac{v^2 - 2v\tilde{\alpha}w + \tilde{\alpha}^2w^2}{w^2} = \left(\frac{v}{w} - \tilde{\alpha} \right)^2 = \tilde{\alpha}^2 + \frac{\tilde{\beta}^2}{1-w} = \frac{\tilde{\alpha}^2(1-w) + \tilde{\beta}^2}{1-w}$$

multiplicando por $w^2(1-w)$,

$$v^2 - 2v\tilde{\alpha}w + \tilde{\alpha}^2w^2 - v^2w + 2v\tilde{\alpha}w^2 - \tilde{\alpha}^2w^3 = \tilde{\alpha}^2w^2 - \tilde{\alpha}^2w^3 + \tilde{\beta}^2w^2$$

sumando $\tilde{\alpha}^2w^3 - \tilde{\alpha}^2w^2$ de ambos lados y agrupando,

$$w^2(\tilde{\beta}^2 - 2\tilde{\alpha}v) + w(v^2 + 2\tilde{\alpha}v) - v^2 = 0$$

por lo que

$$w = \frac{-v^2 - 2\tilde{\alpha}v \pm \sqrt{(v^2 + 2\tilde{\alpha}v)^2 + 4(\tilde{\beta}^2 - 2\tilde{\alpha}v)v^2}}{2(\tilde{\beta}^2 - 2\tilde{\alpha}v)} = v \frac{v + 2\tilde{\alpha} \pm \sqrt{(v - 2\tilde{\alpha})^2 + 4\tilde{\beta}^2}}{2(2\tilde{\alpha}v - \tilde{\beta}^2)}$$

Podemos notar que, por ser $\tilde{\beta}^2 \geq 0$, el discriminante es siempre positivo, así que w siempre es real. Lo que no es claro es qué signo debe tomarse para el radical; el requisito es que $w \geq 0$, y, de los coeficientes involucrados, sólo $\tilde{\alpha}$ puede cambiar de signo. Escribimos w en la forma

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde a , b y c están determinados por la ecuación (5), de tal manera que $c \leq 0$. Esto hace que $\sqrt{b^2 - 4ac} > |b|$ si $a > 0$ y $\sqrt{b^2 - 4ac} < |b|$ si $a < 0$. Utilizando esto se puede ver que, si escogemos el signo positivo, la combinación $a < 0 > b$ hace que w no sea positivo mientras que las otras tres sí; no obstante, puede verse que la primera condición implica que $\tilde{\alpha} < 0 < \tilde{\alpha}$, lo cual nunca ocurre. Si, por el contrario, escogemos el signo negativo, sólo la combinación $a < 0 < b$ nos da w positivo, mientras que las otras lo hacen negativo.

Habiendo escogido el signo, podemos simplificar w multiplicando por $\frac{v+2\tilde{\alpha}+\sqrt{(v-2\tilde{\alpha})^2+4\tilde{\beta}^2}}{v+2\tilde{\alpha}+\sqrt{(v-2\tilde{\alpha})^2+4\tilde{\beta}^2}}$,

$$\begin{aligned} w &= v \frac{(v + 2\tilde{\alpha})^2 - [(v - 2\tilde{\alpha})^2 + 4\tilde{\beta}^2]}{2(2\tilde{\alpha}v - 4\tilde{\beta}^2) \left[v + 2\tilde{\alpha} + \sqrt{(v - 2\tilde{\alpha})^2 + 4\tilde{\beta}^2} \right]} \\ &= v \frac{2}{v + 2\tilde{\alpha} + \sqrt{(v - 2\tilde{\alpha})^2 + 4\tilde{\beta}^2}} \end{aligned}$$

En resumen, tenemos que, si

$$N(\Theta_1) = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\Theta_1) + \tilde{\alpha} + \sqrt{[\text{sen}^2(\Theta_1) - \tilde{\alpha}]^2 + \tilde{\beta}^2}}{2}}$$

entonces

$$\text{sen}(\Theta_1) = N(\Theta_1) \text{sen}(\Theta_2)$$

A4. Solución al sistema de ecuaciones (3.9)

Resolveremos el sistema de ecuaciones

$$k_0^2 n_1'^2 \text{sen}^2(\Theta_1) = k_2'^2 \text{sen}^2(\Theta_2) \quad (6.10)$$

$$k_0^2 n_1''^2 \text{sen}^2(\Theta_1) = k_2''^2 \cos^2(\Theta_2) \quad (6.11)$$

Para abreviar, hacemos $v := \text{sen}^2(\Theta_1)$ y $w := \text{sen}^2(\Theta_2)$. Sumando las ecuaciones del sistema, tenemos que

$$k_0^2 |n_1^2| v = k_2'^2 w + k_2''^2 (1 - w) = (k_2'^2 - k_2''^2) w + k_2''^2$$

usando la parte real de la relación de dispersión para el medio 2, $k_2'^2 - k_2''^2 = k_0^2 n_2^2$, esto se puede escribir como

$$k_0^2 |n_1^2| v = k_0^2 n_2^2 w + k_2''^2$$

De la ecuación (6.11),

$$k_2''^2 = k_0^2 n_1''^2 \frac{v}{1 - w}$$

Por lo cual

$$n_2^2 w(1 - w) + n_1''^2 v = |n_1^2| v(1 - w)$$

Y, resolviendo,

$$\begin{aligned} w^2 n_2^2 - w(n_2^2 + |n_1^2| v) + n_1''^2 v &= 0 \\ \Leftrightarrow w &= \frac{n_2^2 + |n_1^2| v \pm \sqrt{(n_2^2 + |n_1^2| v)^2 - 4n_2^2 n_1''^2 v}}{2n_2^2} \end{aligned}$$

Para escoger el signo, nos fijamos en el caso límite en el que $n_1^2 = |n_1^2|$:

$$n_2^2 w = \frac{n_2^2 + n_1^2 v \pm |n_2^2 - n_1^2 v|}{2}$$

Aquí observamos que, si escogemos el signo negativo, antes del ángulo crítico se recupera la ley de Snell sin disipación para los vectores de onda; después del ángulo crítico, tenemos el mismo comportamiento que analizamos en el caso de incidencia desde un medio no disipador, en el que el ángulo de refracción se vuelve constante. Escogiendo el signo positivo, se obtiene el comportamiento opuesto, que no corresponde a la situación física. Así,

$$|n_2| \text{sen}(\Theta_2) = \sqrt{\frac{|n_1^2| \text{sen}^2(\Theta_1) + n_2^2 - \sqrt{(|n_1^2| \text{sen}^2(\Theta_1) + n_2^2)^2 - 4n_2^2 n_1''^2 \text{sen}^2(\Theta_1)}}{2}}$$

A5. Solución al sistema de ecuaciones (3.19)

Resolveremos el sistema (3.19):

$$\begin{aligned} k_1' \operatorname{sen}(\Theta_1) &= k_2' \operatorname{sen}(\Theta_2) \\ k_1'' \operatorname{sen}(\Theta_1 + \psi) &= k_2'' \cos(\Theta_2) \end{aligned}$$

haciendo $u := k_1'^2 \operatorname{sen}^2(\Theta_1)$, $v := k_1''^2 \operatorname{sen}^2(\Theta_1 + \psi)$ y $w := \operatorname{sen}^2(\Theta_2)$, podemos aprovechar el procedimiento utilizado en el anexo A4, para obtener

$$\begin{aligned} u + v &= k_0^2 n_2^2 w + k_2''^2 \\ k_2''^2 &= \frac{v}{1 - w} \end{aligned}$$

con estas dos ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} u + v \frac{w}{w - 1} &= k_0^2 n_2^2 w \\ w^2 k_0^2 n_2^2 - w(u + v + k_0^2 n_2^2) + u &= 0 \end{aligned}$$

y,

$$w = \frac{u + v + k_0^2 n_2^2 \pm \sqrt{(u + v + k_0^2 n_2^2)^2 - 4k_0^2 n_2^2 u}}{2k_0^2 n_2^2}$$

para reducirse al caso anterior cuando $\psi = 0$, hay que tomar el signo negativo para la raíz. Utilizando las propiedades relativas 3.20, y siendo $s := \operatorname{sen}(\Theta_1)$ y $s_\psi := \operatorname{sen}(\Theta_1 + \psi)$ tenemos finalmente que

$$\operatorname{sen}^2(\Theta_2) = \frac{N'^2 s^2 + N''^2 s_\psi^2 + 1 - \sqrt{(N'^2 s^2 + N''^2 s_\psi^2 + 1)^2 - 4N'^2 s^2}}{2}$$

A6. La función sgn

Aunque es una función muy simple, fue importante en muchas partes del texto, por lo que se incluye la definición de la función signo y las propiedades que se utilizan a lo largo del mismo.

Definición

Si $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$\operatorname{sgn}(a) := \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades

- $a = \text{sgn}(a) |a|$
- $|a| = \text{sgn}(a)a$
- $\text{sgn}(a) \text{sgn}(b) = \text{sgn}(ab)$
- $\text{sgn}(-a) = -\text{sgn}(a)$

$\forall a \neq 0$

- $\text{sgn}(a) = \text{sgn}(a^{-1})$
- $\text{sgn}(a) = \text{sgn}^{-1}(a)$
- $\text{sgn}(a) = \frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|}$
- $\text{sgn}(a^{-1}b) = \text{sgn}^{-1}(a) \text{sgn}(b)$

A7. $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ ¿ \vec{u}, \vec{w} ?

Supongamos que tenemos un vector \vec{v} y que sabemos que se escribe como la suma de otros dos vectores \vec{u} y \vec{w} , cuyos tamaños, u y w , y producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{w}$ (o equivalentemente, el ángulo entre ellos, γ) conocemos. ¿Se puede determinar quiénes son \vec{u} y \vec{w} ?

El problema geométrico se puede ver como el de un triángulo, con un lado conocido y dos lados por establecer, cuando se conoce su longitud. Es claro que el problema tiene solución, aunque esta no es única, como nos puede dar una idea la figura 6.1:

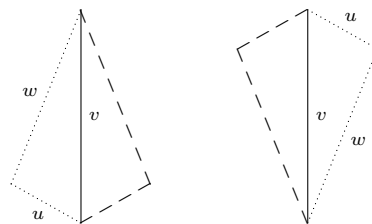


Figura 6.1: El problema de completar el triángulo con un lado dado y los tamaños de los otros dos conocidos está bien planteado, aunque la solución no es única.

Situaremos \vec{v} sobre el eje z y apuntando en la dirección positiva: $\vec{v} = (0, v)$. El problema en componentes queda entonces como

$$\begin{aligned}v &= u_z + w_z \\ 0 &= u_x + w_x\end{aligned}$$

y entonces $u_x = -w_x$. Para el problema que nos interesa, \vec{u} y \vec{w} tienen componente z positiva, lo que hace v igual a

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{u^2 - u_x^2} + \sqrt{w^2 - w_x^2} \\ &= \sqrt{u^2 - u_x^2} + \sqrt{w^2 - u_x^2}\end{aligned}$$

Como $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, $v^2 = u^2 + w^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{w}$, así que, elevando al cuadrado la ecuación y restando $u^2 + w^2$ nos queda que

$$\vec{u} \cdot \vec{w} + u_x^2 = \sqrt{(u^2 - u_x^2)(w^2 - u_x^2)}$$

y, resolviendo,

$$\begin{aligned}(\vec{u} \cdot \vec{w} + u_x^2)^2 &= u^2 w^2 - u_x^2 (u^2 + w^2) + u_x^4 \\ (\vec{u} \cdot \vec{w})^2 + u_x^2 2\vec{u} \cdot \vec{w} &= u^2 w^2 - u_x^2 (u^2 + w^2) \\ u_x^2 v^2 &= u^2 w^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = u^2 w^2 (1 - \cos^2(\gamma))\end{aligned}$$

Así, hay dos soluciones para u_x . Como $u_x > 0$, $u_x = \sqrt{u^2 - u_z^2}$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u \left(\pm \frac{w}{v} \operatorname{sen}(\gamma), \sqrt{1 - \frac{w^2}{v^2} \operatorname{sen}^2(\gamma)} \right) \\ \vec{w} &= \left(\mp \frac{w}{v} \operatorname{sen}(\gamma), v - u \sqrt{1 - \frac{w^2}{v^2} \operatorname{sen}^2(\gamma)} \right)\end{aligned} \tag{6.12}$$

Lo que nos da las dos posibilidades para el ángulo que forma \vec{u} con \vec{v} , θ_u :

$$\theta_u = \pm \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{w}{v} \operatorname{sen}(\gamma) \right)$$

y con lo cual \vec{u} y \vec{w} se escriben como

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u(\operatorname{sen}(\theta_u), \cos(\theta_u)) \\ \vec{w} &= (-u \operatorname{sen}(\theta_u), v - u \cos(\theta_u))\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] V. G. Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Soviet Physics Uspekhi*, 10, 1968.
- [2] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, y Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, 1964.
- [3] L. D. Landau y E.M. Lifshitz. *Electrodynamics of continuous media*. Pergamon Press, 1984.
- [4] M. Brédov, V. Rumiántsev, y I. Toptiguin. *Electrodinámica clásica*. Editorial Mir, 1986.
- [5] David J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [6] J. David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [7] E. M. Purcell. *Electricidad y magnetismo*. Reverté, 1990.
- [8] Akhlesh Lakhtakia y Werner S. Weiglhofer. *Introduction to complex mediums for optics and electromagnetics*. SPIE, 2004.
- [9] J. B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, y W.J. Stewart. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*, 47(11), 1999.
- [10] R. A. Shelby, D.R. Smith, y S. Schultz. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, 292(5514), 2001.
- [11] Mark S. Wheeler, J. Stewart Aitchison, y Mohammad Mojahedi. Coated nonmagnetic spheres with a negative index of refraction at infrared frequencies. *Physical review B*, 73(045105), 2006.
- [12] J. B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*, 85(3966-3969), 2000.
- [13] Vadim A. Markel. Correct definition of the poynting vector in electrically and magnetically polarizable medium reveals that negative refraction is impossible. *Optics Express*, 16(23), 2008.