



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sistemas Textiles y Teorema de
Descomposición para Espacios de Corrimiento
de Tipo Finito Bidimensionales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
DARÍO ALATORRE GUZMÁN

DIRECTOR DE TESIS:
RICARDO GÓMEZ AÍZA



2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A la memoria de Tita

Agradecimientos

Quisiera agradecer principalmente a mis padres Gabriela y Gerardo por ser los causantes de todo este alboroto, a mi hermano Diego por su “paciencia” cuando intento hablarle de matemáticas, a mi tía y colega Ana y a mi abuelo Jesús por todo su apoyo; a los profesores Paco Struck, Rafa Rojas, Carlos Prieto, César Hernández, Juan José Montellano y Ricardo Gómez por todas sus enseñanzas; a mi familia putativa Aleister, Alicia, Ana, las Andreas, Bárbara, Claudio, Diego, Draculín, Laura, María, Mariana, Nacho, Nadir, Pancho, Pandris, Paris, Paulina y Sebastián por su incondicional compañía en este proceso; a mis compañeros de carrera y amigos Ángel, Bere, Bernardo, Carlos, Chucho, Diego, Galo y Noriko con quienes logré generar una dinámica de discusión y retroalimentación fundamental en mi aprendizaje; a ti por estar leyendo esto.

Índice general

Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Espacios de Corrimiento Bidimensionales	1
1.2. Presentaciones en Bloques	6
1.3. Códigos de Bloques	8
1.4. Conjugación e Invariantes	13
1.5. Sobre la no vacuidad de un SFT	15
2. Sistemas Textiles	19
2.1. Sistemas Textiles	19
2.2. Operaciones sobre Sistemas Textiles	24
2.2.1. Inversión	24

2.2.2. Escisiones	24
3. Teorema de Descomposición	30

Introducción

La dinámica simbólica surgió originalmente como una herramienta para estudiar sistemas dinámicos analizando su evolución en tiempo discreto, esto significa que por cada unidad de tiempo hay un único estado del sistema. Su primera aparición data de finales del siglo XIX cuando Jacques Hadamard codificó un objeto matemático llamado flujo geodésico en una superficie de curvatura negativa, en una sucesión de símbolos. En la segunda década del siglo XX las ideas de Hadamard fueron retomadas por Morse y Hedlund, quienes fundaron las bases actuales de la teoría.

La idea básica es dividir el conjunto de posibles estados de un sistema en un número finito de piezas, y seguir la pista de qué pieza le corresponde a cada estado en cada momento. Cada pieza está asociada con un símbolo, de manera que la evolución del sistema queda descrito por una sucesión infinita de símbolos. A este conjunto finito de símbolos le llamaremos *alfabeto*.

El objeto básico de estudio de la dinámica simbólica es el *espacio de corrimiento* (en inglés *shift space*), que se construye de la siguiente manera:

Si \mathcal{A} es un alfabeto finito, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es el conjunto de todas las sucesiones bi-infinitas de símbolos de \mathcal{A} , es decir

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{Z}\},$$

donde cada sucesión es un punto del espacio. Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, entonces

$$x = \dots x_{-2}x_{-1}x_0.x_1x_2\dots \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}.$$

La *función de corrimiento (shift)* σ , sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, manda al punto x al punto $y = \sigma(x)$ cuyo i -ésimo término es $y_i = x_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{c} x = \dots x_{-2}x_{-1}x_0.x_1x_2\dots \\ \downarrow \\ y = \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1}.x_0x_1\dots = \sigma(x). \end{array}$$

A la pareja $\langle \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma \rangle$ le llamaremos el \mathcal{A} -*espacio de corrimiento completo*. Por ejemplo, si $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es el conjunto de todas las sucesiones binarias, y lo podemos ver como el conjunto de todos los caminos bi-infinitos en la siguiente gráfica dirigida:



La pareja $\langle \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma \rangle$ es un sistema dinámico en el siguiente sentido: si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ describe el sistema en la unidad de tiempo 0, entonces $\sigma(x)$ en la unidad de tiempo 1, $\sigma^2(x)$ en la 2, en general $\sigma^n(x)$ describe al sistema en una unidad arbitraria de tiempo entera n .

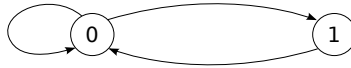
Cada lenguaje tiene sus reglas y restricciones, si tomamos a \mathcal{A} como nuestro abecedario tendríamos que poner un sinfín de reglas para elaborar sucesiones con elementos de \mathcal{A} permitidas en nuestro lenguaje. Otro ejemplo en nuestra vida cotidiana son los aparatos electrónicos digitales, estos leen y escriben información a través de sucesiones de 0 y 1, sin embargo, no todos permiten cualquier tipo de sucesión. La información en las superficies de los discos compactos audibles está escrita en largas sucesiones en las que entre cada 1 hay al menos dos 0's y no más de diez.

Un *bloque* (o *palabra*) de x es una subsucesión finita de símbolos consecutivos en $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, por ejemplo si $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ un bloque de algún punto en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ se ve como $bbcaccabaacbc$. La *longitud* de un bloque es el número de símbolos del alfabeto que aparecen en él.

Un *espacio de corrimiento* X (también llamado σ -*espacio*) es un subconjunto del espacio de corrimiento completo descrito por una colección \mathcal{F} de *bloques prohibidos*. Es decir, dado \mathcal{A} un alfabeto finito y \mathcal{F} una colección de bloques sobre el alfabeto \mathcal{A} , $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es el conjunto formado por

todas las sucesiones de elementos de \mathcal{A} en las que no aparece ningún bloque de \mathcal{F} . Nuestro estudio se restringirá a aquellos espacios que puedan ser descritos por un conjunto de restricciones \mathcal{F} finito. A este tipo de espacios les llamaremos *espacios de corrimiento de tipo finito*.

Los espacios de corrimiento de tipo finito pueden ser vistos como el conjunto de todos los caminos bi-infinitos de una gráfica dirigida, cuyos vértices son los símbolos del alfabeto \mathcal{A} y las flechas nos indican los bloques de longitud 2 permitidos. Por ejemplo, si $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ y $\mathcal{F} = \{11\}$ entonces $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ es conocido como el espacio de corrimiento áureo y lo podemos ver como el conjunto de caminos bi-infinitos de la siguiente gráfica dirigida:



En cualquier camino dirigido de esta gráfica, después de cada 1 debe de aparecer un 0 porque no hay lazos en el vértice correspondiente al 1.

Supongamos que $x = \dots x_{-1}x_0x_1\dots$ es un punto de un espacio de corrimiento X sobre un alfabeto \mathcal{A} . Podemos transformar x en otra sucesión $y = \dots y_{-1}y_0y_1\dots$ de un espacio distinto Y con otro alfabeto \mathcal{A}' de la siguiente manera: para una longitud fija de bloques que aparecen X definimos una *regla local* ϕ cuya acción es a cada bloque de x asignarle un símbolo del alfabeto \mathcal{A}' . Es decir, para los bloques de longitud $m + n + 1$ de X tenemos que

$$y_i = \phi(x_{i-m}x_{i-m+1}\dots x_i\dots x_{i+n-1}x_{i+n}).$$

Aplicando ϕ a cada bloque de longitud $n + m + 1$ obtenemos los símbolos correspondientes a cada coordenada de $y \in Y$, es decir, tenemos otra función $\Phi : X \rightarrow Y$ definida por la regla local ϕ . A la función Φ le llamaremos código de bloques y la podemos visualizar como:

$$\begin{array}{c}
 x = \dots \boxed{x_{i-m}x_{i-m+1}\dots x_i\dots x_{i+n-1}x_{i+n}} \dots \\
 \downarrow \phi \\
 \Phi(x) = y = \dots y_{i-1} \boxed{y_i} y_{i+1} \dots
 \end{array}$$

Si X y Y son dos espacios de corrimiento y existen códigos de bloques $\Phi : X \rightarrow Y$ y $\Psi : Y \rightarrow X$ tales que $\Psi(\Phi(x)) = x$ para toda $x \in X$ y $\Phi(\Psi(y)) = y$ para toda $y \in Y$ entonces diremos que X y Y son conjugados, y escribiremos $X \cong Y$.

El teorema de descomposición para espacios de corrimiento de tipo finito dice que cualquier conjugación entre espacios de este tipo puede ser vista como composición de ciertas operaciones sobre las gráficas que definen a cada espacio. Sin embargo, el concepto “gráfica que define a cada espacio” en dimensiones superiores no es tan inmediato. Para evitar dificultades de este tipo usaremos la noción de Sistemas Textiles, una manera alternativa de ver a los espacios de corrimiento de tipo finito bidimensionales y, para los cuales, el teorema de descomposición es muy similar al de una dimensión.

Un estudio amplio y detallado de espacios de corrimiento unidimensionales puede ser encontrado en [5].

Capítulo 1

Preliminares

El concepto de espacio de corrimiento puede ser generalizado a dimensiones superiores. En el presente capítulo estudiaremos algunas propiedades básicas de los espacios de corrimiento bidimensionales, así como construcciones y ejemplos.

1.1. Espacios de Corrimiento Bidimensionales

Si \mathcal{A} es un alfabeto finito, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ es el conjunto de todas las retículas (lattices, arreglos) infinitas de símbolos de \mathcal{A} , es decir

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} = \{x = (x_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2} : x_{\mathbf{a}} \in \mathcal{A}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, entonces

$$x = \begin{array}{c|ccc|c} & & \vdots & & \\ \hline & x_{-1,1} & x_{0,1} & x_{1,1} & \\ \hline \dots & x_{-1,0} & x_{0,0} & x_{1,0} & \dots \\ \hline & x_{-1,-1} & x_{0,-1} & x_{1,-1} & \\ \hline & & \vdots & & \end{array} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}.$$

De igual manera que en una dimensión, la *función de corrimiento* $\sigma_{\mathbf{a}}$ sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, manda al punto x al punto $y = \sigma_{\mathbf{a}}(x)$ cuyo \mathbf{b} -ésimo término es $y_{\mathbf{b}} = x_{\mathbf{b}+\mathbf{a}}, \forall \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^2$.

Definición 1.1.1 Llamaremos a $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, junto con las funciones $\sigma_{\mathbf{a}}$ definidas para toda $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2$, el *A-espacio de corrimiento completo bidimensional* o simplemente *espacio de corrimiento completo* y se sobreentenderá que se refiere al espacio de corrimiento bidimensional.

Sea W un subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 el cual pensaremos como una *ventana* por la cual vemos una porción finita de un arreglo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$. Un patrón f en una ventana W es una función $f : W \rightarrow \mathcal{A}^W$, donde \mathcal{A}^W es el conjunto de todos los acomodos posibles de elementos de \mathcal{A} en la ventana W . Denotaremos por $x|_W$ a la restricción de x al conjunto W .

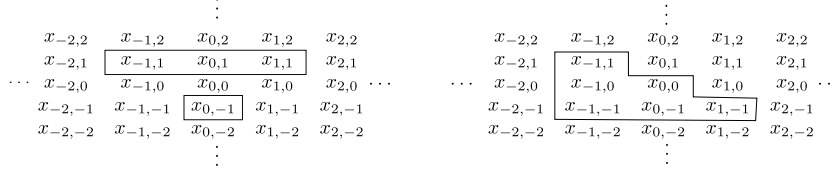


Figura 1.1: Las ventanas $\{(i-1, j), (i, j), (i+1, j), (i, j-2)\}$ (izq.) y $\{(i, j), (i, j-1), (i+1, j-1), (i, j-2), (i+1, j-2), (i+2, j-2)\}$ (der.).

Dada una familia \mathcal{F} de patrones, definimos

$$X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} : \sigma_{\mathbf{a}}(x)|_W \notin \mathcal{F}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2 \text{ para cualquier ventana } W \subset \mathbb{Z}^2\}.$$

En palabras, $X_{\mathcal{F}}$ es el conjunto formado por todos los arreglos y sus traslaciones, en las que no *aparece* ningún patrón de \mathcal{F} . X es un espacio de corrimiento caracterizado por los patrones prohibidos de \mathcal{F} .

Definición 1.1.2 Un *espacio de corrimiento* es un subconjunto X del espacio de corrimiento completo sobre el alfabeto \mathcal{A} , tal que $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ para alguna colección \mathcal{F} de patrones prohibidos sobre \mathcal{A} .

1.1. ESPACIOS DE CORRIMIENTO BIDIMENSIONALES 3

Un espacio de corrimiento bidimensional X es un subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ σ -invariante, es decir $\sigma_{\mathbf{a}}(X) = X$, equivalentemente, $\sigma_{\mathbf{a}}(x) \in X$ para todas $x \in X$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2$.

En ocasiones será conveniente trabajar con patrones rectangulares formados por símbolos consecutivos en $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, a éstos les llamaremos *bloques*. La *extensión* de un bloque es el producto de su longitud horizontal por su longitud vertical. Llamaremos un $m \times n$ -bloque a un bloque de extensión $m \times n$. A la familia de bloques de extensión $m \times n$ que aparecen en x lo denotaremos como $\mathcal{B}_{m \times n}(x)$. Es decir para $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_{(i,j+l)} & x_{(i+1,j+l)} & \cdots & x_{(i+k,j+l)} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline x_{(i,j+1)} & x_{(i+1,j+1)} & \cdots & x_{(i+k,j+1)} \\ \hline x_{(i,j)} & x_{(i+1,j)} & \cdots & x_{(i+k,j)} \end{array} = x_{[i,j;i+k,j+l]} \in \mathcal{B}_{k+1 \times l+1}(x).$$

La notación $x_{[i,j;k,l]}$ se refiere al bloque cuya esquina inferior izquierda es la coordenada $x_{(i,j)}$ y su esquina superior derecha la $x_{(k,l)}$.

En el presente trabajo concentraremos nuestra atención a aquellos espacios con restricciones finitas, es decir, los espacios de corrimiento X para los que **existe** \mathcal{F} finito tal que $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$. A estos espacios les llamaremos *espacios de corrimiento de tipo finito*, o en forma abreviada, *SFT* por sus siglas en inglés. Se hace énfasis en la existencia de un \mathcal{F} finito, ya que un mismo SFT puede ser descrito por distintos conjuntos de restricciones.

Ejemplo 1.1.3 $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, el espacio de corrimiento completo sobre cualquier alfabeto, es claramente un SFT ya que si tomamos $\mathcal{F} = \emptyset$ entonces $\mathbf{X}_{\mathcal{F}} = X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$.

Ejemplo 1.1.4 Sea $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ y $\mathcal{F} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} , 11 \right\}$, entonces $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ es el conjunto de arreglos en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ en los que nunca hay dos 1's consecutivos ni horizontalmente ni verticalmente. Este espacio es comúnmente conocido como el *espacio de corrimiento áureo bidimensional* y es un SFT de suma importancia en la dinámica simbólica. Una buena manera de caracterizar

este espacio es tomando tomando la ventana $W = \{(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1)\}$ en forma de L. Si la coordenada (i, j) tiene un 0 entonces podemos poner cualquier cosa en las coordenadas $(i + 1, j)$ y $(i, j + 1)$, pero, si en la coordenada (i, j) hay un uno, necesariamente las $(i + 1, j)$ y $(i, j + 1)$ deben tener 0's. Si tomamos \mathcal{F}' como un conjunto de patrones prohibidos en la ventana W ,

$$\mathcal{F}' = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & , & 1 & 0 & , & 1 & 1 \end{array} \right\},$$

entonces $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}} = \mathbf{X}_{\mathcal{F}'}$.

Ejemplo 1.1.5 (*Ejemplo de Ledrappier. François Ledrappier, 1978*) Tomemos nuevamente $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ y la ventana $W = \{(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1)\}$. En este caso no permitimos que dentro de una misma ventana haya un número impar de 1's, es decir, en cada ventana, o hay únicamente 0's o hay dos 1's y un 0. Consideremos a la función $g(x_{ij}, x_{i+1j}, x_{ij+1}) = x_{ij} + x_{i+1j} + x_{ij+1} \pmod{2}$. Así podemos tomar $\mathcal{F} = \{(x_{ij}, x_{i+1j}, x_{ij+1}) : g(x_{ij}, x_{i+1j}, x_{ij+1}) = 1\}$ de manera que $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ describe el espacio que buscábamos.

Ejemplo 1.1.6 (*Teselaciones de Wang. Hao Wang 1961*) Tomemos un conjunto \mathcal{L} de n cuadrados iguales, cuyas aristas estén coloreadas con varios colores (distintas aristas de un cuadrado pueden ser del mismo color). El conjunto \mathcal{L} es un conjunto de *teselas de Wang*. De lo que se trata es de llenar el plano usando un sinfín de copias de cada tesela del conjunto \mathcal{L} acomodando los cuadrados arista con arista y haciendo coincidir sus colores, partiendo de que un cuadrado sólo puede ser trasladado (no rotado ni reflejado). Una *teselación de Wang* es una cubierta de \mathbb{R}^2 hecha bajo las reglas previamente establecidas.

Pensando a \mathcal{L} como un alfabeto, una teselación de Wang es un punto x en $\mathcal{L}^{\mathbb{Z}^2}$ y $x_{\mathbf{n}}$ es la tesela cuya esquina inferior izquierda está en el punto \mathbf{n} de la rejilla \mathbb{Z}^2 . Claramente podemos definir a \mathcal{F} como aquellos bloques de 2×1 y 1×2 tales que **no** coincidan los colores de sus aristas correspondientes, es decir, que no obedezcan las reglas de pegado. El conjunto $X_{\mathcal{F}}$ es un SFT llamado *espacio de Wang* para el conjunto de teselas \mathcal{L} .

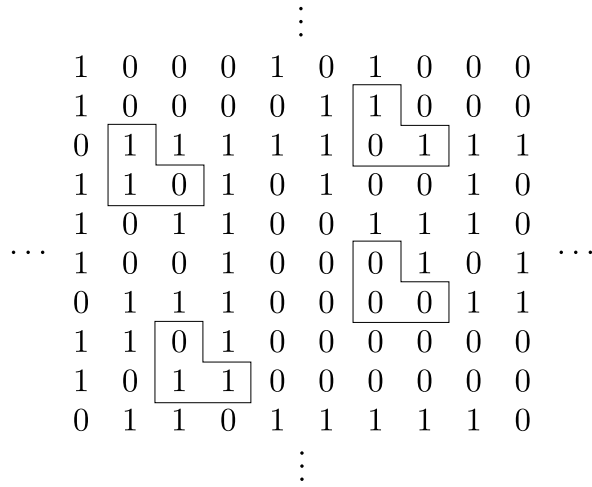


Figura 1.2: Las cuatro ventanas permitidas de un punto en el ejemplo de Ledrappier.

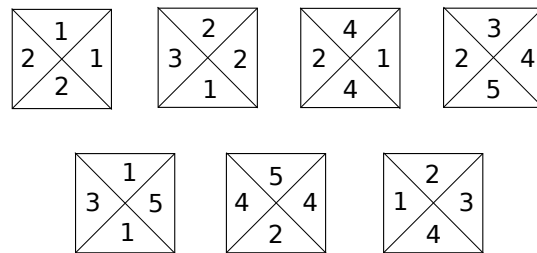


Figura 1.3: Conjunto de teselas de Wang con cinco colores.

1.2. Presentaciones en Bloques

Si se tiene un SFT con un alfabeto \mathcal{A} , a veces resulta más conveniente estudiarlo generando un nuevo espacio cuyo alfabeto \mathcal{A}' sea un conjunto de bloques del alfabeto \mathcal{A} .

Sea X un SFT con alfabeto \mathcal{A} y $\mathcal{A}_X^{[n \times m]} = \mathcal{B}_{n \times m}(X)$, podemos considerar a $\mathcal{A}_X^{[n \times m]}$ como un nuevo alfabeto y formar un nuevo espacio de corrimiento $(\mathcal{A}_X^{[n \times m]})^{\mathbb{Z}^2}$. Definimos la $n \times m$ -ésima *presentación en bloques*

$$\beta_{n \times m} : X \rightarrow (\mathcal{A}_X^{[n \times m]})^{\mathbb{Z}^2}$$

como

$$(\beta_{n \times m}(x))_{(i,j)} = x_{[i,j;i+n-1,j+m-1]}.$$

La acción de $\beta_{n \times m}$ es: a cada símbolo de un punto $x \in X$ asignarle un bloque rectangular generado por él y los siguientes $n - 1$ símbolos de la horizontal y los siguientes $m - 1$ símbolos de la vertical, para obtener un punto $y \in (\mathcal{A}_X^{[n \times m]})^{\mathbb{Z}^2}$ cuyos símbolos son bloques en $\mathcal{B}_{n \times m}(X)$. Por ejemplo, la acción de $\beta_{3 \times 2}(x) \in (\mathcal{A}_X^{[3 \times 2]})^{\mathbb{Z}^2}$ se ve como en la figura 1.4.

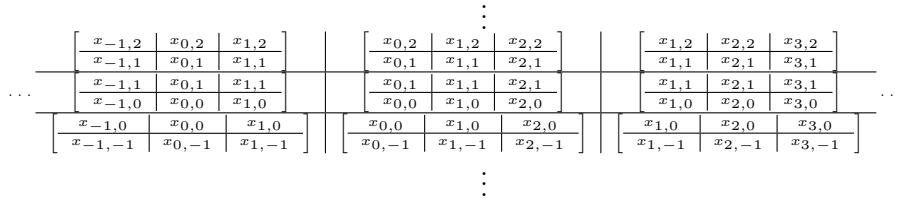


Figura 1.4: Acción de $\beta_{3 \times 2}(x)$

Notemos que en la figura 1.4 los símbolos consecutivos de $\mathcal{A}_X^{[n \times m]}$ se yuxtaponen. Esto es, sean $u = x_{[i,j;k,l]}$, $v = x_{[i+1,j;k+1,l]}$, $w = x_{[i,j+1;k,l+1]}$, $z = x_{[i+1,j+1;k+1,l+1]}$, $u, v, w, z \in \mathcal{B}_X^{[n \times m]}$. Diremos que u y v se *yuxtaponen progresivamente* en la horizontal, u y w en la vertical, y u y z en la diagonal.

Si el patrón uv aparece en algún punto de la imagen $\beta_{n \times m}(X)$, es claro a partir de la figura 1.4 que uv se yuxtaponen progresivamente en alguna dirección.

Definición 1.2.1 Sea X un espacio de corrimiento, la $n \times m$ -ésima presentación en bloques de X es la imagen $X^{[n \times m]} = \beta_{n \times m}(X)$ en el espacio de corrimiento completo sobre $\mathcal{A}_X^{[n \times m]}$.

Vale la pena observar en la figura 1.4 que basta con conocer la letra inferior izquierda de cada símbolo en $\beta_{n \times m}(x)$ para poder reconstruir toda la imagen, así como el punto original x . Por lo que $X^{[n \times m]}$ es simplemente otra manera de describir al mismo espacio X .

Proposición. 1.2.2 Sea X un SFT, la $n \times m$ -ésima presentación de bloques de X , $X^{[n \times m]}$, es un espacio de corrimiento.

Demostración. Sean X un SFT y \mathcal{F} finito tal que $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$. Construimos una nueva familia $\tilde{\mathcal{F}}$ de la siguiente manera: sea $f \in \mathcal{F}$, si f es de extensión mayor que $n \times m$ ponemos en $\tilde{\mathcal{F}}$ todos los bloques rectangulares de extensión mínima que contengan a f ; y si f es de extensión menor o igual que $n \times m$ ponemos en $\tilde{\mathcal{F}}$ todos los bloques rectangulares de extensión $n \times m$ que contienen a f . De esta manera tenemos que $X = \mathbf{X}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ y todos los bloques de $\tilde{\mathcal{F}}$ son de extensión mayor o igual que $n \times m$. Ahora, para cada $u = x_{[1,1;k,l]} \in \tilde{\mathcal{F}}$ ponemos $u^{[n \times m]} =$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_{[1,l-m+1;n,l]} & x_{[2,l-m+1;n+1,l]} & \cdots & x_{[k-n+1,l-m+1;k,l]} \\ \hline \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \hline x_{[1,2;n,m+1]} & x_{[2,2;n+1,m+1]} & \cdots & x_{[k-n+1,2;k,m+1]} \\ \hline x_{[1,1;n,m]} & x_{[2,1;n+1,m]} & \cdots & x_{[k-n+1,1;k,m]} \end{array} \in \mathcal{A}^{n \times m},$$

es decir, ponemos a los bloques de $\tilde{\mathcal{F}}$ como concatenación de $n \times m$ -bloques. Sea \mathcal{F}_1 el conjunto de todos los bloques sobre el alfabeto $\mathcal{A}^{n \times m}$ de la forma $u^{[n \times m]}$ para algún $u \in \tilde{\mathcal{F}}$, éste representa el conjunto de restricciones en $X^{[n \times m]}$ provenientes del espacio original, entonces $X^{[n \times m]} \subseteq \mathbf{X}_{\mathcal{F}_1}$. Pero los bloques de $X^{[n \times m]}$ se deben yuxtaponer como en figura 1.4 por lo que consideramos

$\mathcal{F}_2 = \{uv : u, v \in \mathcal{A}^{n \times m}, \text{ y } u \text{ y } v \text{ no se juxtaponen progresivamente}\}.$

De esta manera tenemos que $X^{[n \times m]} \subseteq \mathbf{X}_{\mathcal{F}_2}$, por lo tanto

$$X^{[n \times m]} \subseteq \mathbf{X}_{\mathcal{F}_1} \cap \mathbf{X}_{\mathcal{F}_2} = \mathbf{X}_{\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_1},$$

la última igualdad se da ya que en $\mathbf{X}_{\mathcal{F}_1} \cap \mathbf{X}_{\mathcal{F}_2}$ están prohibidos tanto los bloques de \mathcal{F}_1 como los de \mathcal{F}_2 ; y en $\mathbf{X}_{\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_1}$ se encuentran los puntos de $\mathbf{X}_{\mathcal{F}_1}$ en los que no aparecen bloques de \mathcal{F}_2 y los puntos de $\mathbf{X}_{\mathcal{F}_2}$ en los que no aparecen bloques de \mathcal{F}_1 .

Por el otro lado, consideremos $y \in \mathbf{X}_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$ y sea x el punto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ reconstruido desde la letra inferior izquierda de un bloque, como en la discusión previa a esta proposición. Entonces $x \in X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ ya que y cumple con las restricciones de \mathcal{F}_1 , y $y = \beta_{n \times m}(x)$ por las restricciones de juxtaposición de \mathcal{F}_2 . Por lo tanto $X^{[n \times m]} \supseteq \mathbf{X}_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$, entonces $X^{[n \times m]} = \mathbf{X}_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$ es un espacio de corrimiento.

□

En la demostración anterior se usó una técnica para pasar de patrones a bloques que será de mucha utilidad, por lo que no habrá problema en pensar a los conjuntos de restricciones \mathcal{F} como conjuntos de bloques.

1.3. Códigos de Bloques

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} alfabetos, posiblemente el mismo. Sea W un subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 , y $\phi : \mathcal{A}^W \rightarrow \mathcal{B}$ una función definida para cada patrón de la ventana W con símbolos de \mathcal{A} que toma valores en \mathcal{B} . Definimos una función $\Phi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^2}$ como

$$\Phi(x)_{\mathbf{n}} = \phi(x|_{W+\mathbf{n}}).$$

Esto es, para conocer la \mathbf{n} -ésima coordenada de la imagen bajo Φ , recorremos la ventana W por \mathbf{n} , vemos a través de ella y a esto le aplicamos ϕ para obtener un símbolo de \mathcal{B} . A la función ϕ le llamaremos *regla local* que define a Φ .

Definición 1.3.1 A la función $\Phi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^2}$ le llamaremos *código de bloques* (o *función de bloques*). Un $((m, n)-(r, s))$ -código de bloques $\Phi : X \rightarrow \tilde{X}$ es definido por

$$\Phi(x)_{(i,j)} = \phi \left(\begin{array}{cccc} x_{(i-m,j+s)} & \cdots & x_{(i,j+s)} & \cdots & x_{(i+n,j+s)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{(i-m,j)} & \cdots & x_{(i,j)} & \cdots & x_{(i+n,j)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{(i-m,j-r)} & \cdots & x_{(i,j-r)} & \cdots & x_{(i+n,j-r)} \end{array} \right),$$

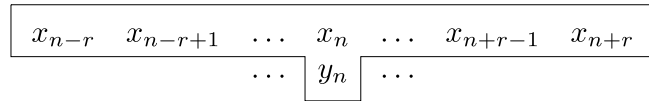
donde ϕ es una regla local de $((m, n)-(r, s))$ -bloques de símbolos de \mathcal{A} en símbolos de \mathcal{B} . Un $((0, 0)-(0, 0))$ -código de bloques es definido usando una regla local ϕ que manda símbolos en símbolos. Llamaremos a m (r) *memoria* horizontal (vertical) y a n (s) *anticipación* horizontal (vertical).

Ejemplo 1.3.2 (*Autómatas celulares*) Sea \mathcal{A} un alfabeto finito, a cada símbolo del alfabeto le asignaremos un color distinto. Cada punto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ representa una hilera bi-infinita coloreada. Generamos un nuevo punto del mismo espacio usando una regla local en cada coordenada. Una regla local de rango r es una función $\phi : \mathcal{A}^{2r+1} \rightarrow \mathcal{A}$, donde \mathcal{A}^{2r+1} es el conjunto de $2r+1$ -adas de símbolos de \mathcal{A} que aparecen consecutivamente en algún punto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Definimos $\Phi(x) = y$ dado por

$$y_n = \Phi(x)_n = \phi(x_{n-r}, x_{n-r+1}, \dots, x_{n+r-1}, x_{n+r}).$$

Podemos repetir esta operación para obtener $\Phi(y) = \Phi^2(x)$ y continuarlo hasta infinito. El punto $\Phi(x)$ será colocado inmediatamente abajo del punto x y así sucesivamente, creando un arreglo bidimensional de cuadrados coloreados. La regla local nos muestra que este arreglo obedece una restricción bidimensional: la ventana es $W = \{(-r, 0), (-r+1, 0), \dots, (r-1, 0), (r, 0), (0, -1)\}$, y un patrón en \mathcal{A}^W es permitido cuando el símbolo en $(0, -1)$ es la imagen bajo ϕ de las coordenadas desde $(-r, 0)$ hasta $(r, 0)$.

Esto no es propiamente un SFT bidimensional ya que no está indexado por \mathbb{Z}^2 sino por $\mathbb{Z} \times \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$. Sin embargo podemos, incluirlo en nuestra discusión porque podemos fácilmente completar la indexación a \mathbb{Z}^2 colocando en la línea $\mathbb{Z} \times i$ lo que aparezca en la línea $\mathbb{Z} \times -i$ del arreglo original.

Figura 1.5: La ventana W .

Uno de los autómatas celulares más conocidos es el juego de la vida (John Conway, 1970. Figura 1.6).

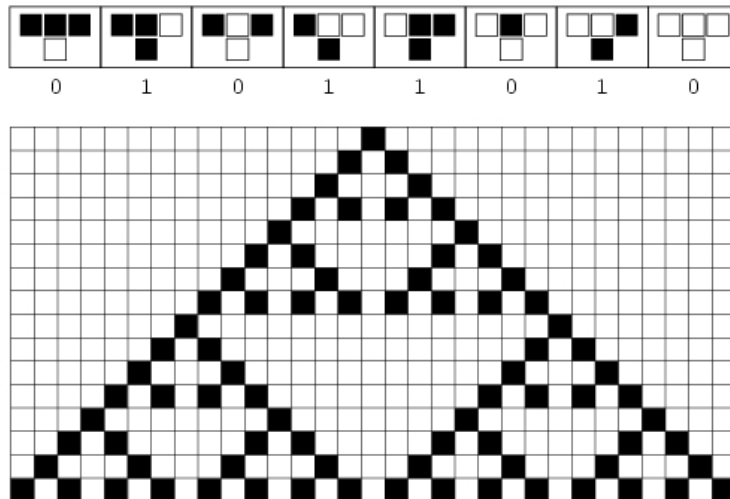


Figura 1.6: $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, asignamos a 0 el color blanco y a 1 negro. Definimos $\phi : \mathcal{A}^3 \rightarrow \mathcal{A}$ por $\phi(111) = \phi(101) = \phi(010) = \phi(000) = 0$ y $\phi(110) = \phi(100) = \phi(011) = \phi(001) = 1$.

Definición 1.3.3 Diremos que un SFT es de *memoria* $n \times m$ si puede ser descrito por bloques prohibidos de extensión $n - 1 \times m$ ó $n \times m - 1$.

Un espacio de corrimiento de tipo finito X también puede ser definido usando dos matrices A_1 y A_2 indexadas por elementos de \mathcal{A} que llamaremos *matrices de transición*. Éstas son cuadradas de $|\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$, con entradas 0 ó

1. De manera que

$$X = X(A_1, A_2) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} : A_i(x_{\mathbf{a}}, x_{\mathbf{a}+e_i}) = 1, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2, i = 1, 2\}.$$

donde $A_i(x_{\mathbf{a}}, x_{\mathbf{a}+e_i})$ denota la (k, l) -ésima entrada de la matriz A_i , con k la columna de A_i correspondiente al símbolo $x_{\mathbf{a}}$ y l la fila correspondiente al símbolo $x_{\mathbf{a}+e_i}$.

Para probar que ambas definiciones de un SFT son equivalentes es necesario introducir el siguiente concepto:

Definición 1.3.4 Diremos que un SFT es de *memoria* $n \times m$ si puede ser descrito por bloques prohibidos de extensión $n - 1 \times m$ ó $n \times m - 1$.

Proposición. 1.3.5 Sean \mathcal{A} un alfabeto finito, y A_1, A_2 matrices de transición indexadas por elementos de \mathcal{A} , entonces $X = X(A_1, A_2)$ es un SFT.

Demostración. Sea X un SFT con matrices de transición A_1 y A_2 , sea $\mathcal{F} = \{x_{\mathbf{a}}x_{\mathbf{a}+e_i} : A_i(x_{\mathbf{a}}, x_{\mathbf{a}+e_i}) = 0, \text{ p.a. } i \in \{1, 2\}\}$, así, un punto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ está en $\mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ si y sólo si ningún bloque de \mathcal{F} aparece en x . Por lo tanto $\mathbf{X}_{\mathcal{F}} = X$, y claramente, como las matrices son finitas \mathcal{F} es finito. Consideremos ahora $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ y veamos que X tiene una representación matricial. Supongamos que X es un SFT de memoria $m \times n$ (ésto es posible por la discusión posterior a la Proposición 1.2.2), entonces $X^{[m \times n]}$ es un SFT de memoria 1×1 , ya que si los bloques prohibidos en X son de extensión $(m+1) \times n$ o $m \times (n+1)$ entonces los bloques prohibidos en $X^{[m \times n]}$ son de extensión 2×1 ó 1×2 . Definimos A_1 la matriz horizontal indexada por elementos de $\mathcal{A}_X^{[m \times n]}$ como $A_1(i, j) = 0$ si ij aparece en filas de bloques de \mathcal{F} , y 1 si no. Y definimos la matriz vertical como $A_2(i, j) = 0$ si ij aparece en columnas de bloques de \mathcal{F} , y 1 si no. Claramente por la definición de A_1 y A_2 tenemos que $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}} = X(A_1, A_2)$. \square

Definición 1.3.6 Una *gráfica* G consiste de un conjunto finito $\mathcal{V} = \mathcal{V}_G$ de *vértices* y un conjunto finito $\mathcal{E} = \mathcal{E}_G$ de *flechas* (o *aristas*). Cada flecha $\alpha \in \mathcal{E}_G$ *inicia* en un vértice denotado por $i_G(\alpha) \in \mathcal{V}_G$ y *termina* en el vértice $t_G(\alpha) \in \mathcal{V}_G$. Puede haber más de una flecha entre dos vértices, en este caso les llamaremos *flechas múltiples*. Si una flecha α tiene $i_G(\alpha) = t_G(\alpha)$ se llamará *lazo*.

La matriz de incidencia A de una gráfica G es una matriz cuadrada de $|\mathcal{V}_G| \times |\mathcal{V}_G|$ con entradas 0 ó 1, tal que $A_{ij} = 1 \Leftrightarrow t_G(i) = i_G(j)$.

La representación matricial de los SFT resulta ser muy útil pues podemos pensar a las matrices de transición como matrices de incidencia de dos gráficas con el mismo número de vértices. La matriz A_1 controla la transición en dirección horizontal y A_2 en la vertical.

Ejemplo 1.3.7 Sea $\mathcal{A} = \{e, f, g\}$ y

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A_1 y A_2 son matrices de incidencia de las gráficas G_1 y G_2 de la figura 1.7, respectivamente.

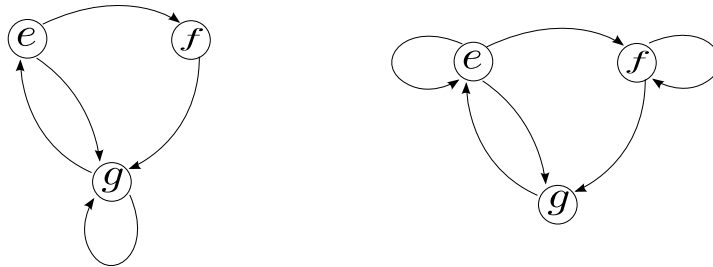


Figura 1.7: Las gráficas G_1 y G_2 .

Si definimos a \mathcal{F} como

$$\mathcal{F} = \left\{ ee, fe, ff, gf, \begin{matrix} e \\ f \end{matrix}, \begin{matrix} f \\ g \end{matrix}, \begin{matrix} g \\ g \end{matrix} \right\},$$

leyendo los bloques verticales de abajo hacia arriba, tenemos que $X(A_1, A_2) = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$.

1.4. Conjugación e Invariantes

Una pregunta básica en cualquier rama de las matemáticas es ¿cuándo dos espacios, posiblemente definidos de manera distinta, son esencialmente el mismo? Por ejemplo, dos espacios topológicos son “el mismo” si son homeomorfos. En la presente sección estudiaremos esta idea para espacios de corrimiento:

Definición 1.4.1 Sean X y Y dos espacios de corrimiento y $\theta : \langle X, \sigma_X \rangle \rightarrow \langle Y, \sigma_Y \rangle$. Diremos que θ es un *homomorfismo* siempre que satisfaga $\theta \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \theta$.

Los homomorfismos entre espacios de corrimiento son precisamente los códigos de bloques, pues para cualquier código de bloques Φ , recorrer y después aplicar el Φ es lo mismo que recorrer la imagen bajo Φ .

Definición 1.4.2 Sean \mathcal{F} y \mathcal{G} familias de patrones sobre los alfabetos \mathcal{A} y \mathcal{B} , respectivamente. Diremos que dos SFT $\mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ y $\mathbf{X}_{\mathcal{G}}$ son *conjugados* si existe un código de bloques $\Phi : X_{\mathcal{F}} \rightarrow X_{\mathcal{G}}$ invertible, es decir, un código de bloques cuya inversa es también un código de bloques. Si existe dicha función escribiremos $\mathbf{X}_{\mathcal{F}} \cong \mathbf{X}_{\mathcal{G}}$.

Proposición. 1.4.3 Sea X un SFT sobre el alfabeto \mathcal{A} y $X^{[n \times m]}$ su $n \times m$ -ésima presentación en bloques, entonces $X \cong X^{[n \times m]}$.

Demostración. Claramente $\beta_{n \times m} : X \rightarrow X^{[n \times m]}$ es un código de bloques. Definimos la regla local $\psi : \mathcal{A}_X^{[n \times m]} \rightarrow \mathcal{A}$ por $\psi(x_{[i,j;i+n-1,j+m-1]}) = x_{(i,j)}$, es decir, a cada $n \times m$ -bloque en $X^{[n \times m]}$ le asignamos el símbolo correspondiente a su esquina inferior izquierda. La función ψ nos induce el código de bloques $\Psi : X^{[n \times m]} \rightarrow X$ de manera que (abusando un poco de la notación, usaremos $\beta_{n \times m}$ para denotar tanto la regla local de símbolos de \mathcal{A} en símbolos de $\mathcal{A}_X^{[n \times m]}$ como el código de bloques $\beta_{n \times m} : X \rightarrow X^{[n \times m]}$)

$$\Psi \circ \beta_{n \times m}(x_{(i,j)}) = \Psi(x_{[i,j;i+n-1,j+m-1]}) = x_{(i,j)}$$

y

$$\beta_{n \times m} \circ \Psi(x_{[i,j;i+n-1,j+m-1]}) = \beta_{n \times m}(x_{(i,j)}) = x_{[i,j;i+n-1,j+m-1]}$$

por lo tanto Ψ y $\beta_{n \times m}$ son códigos de bloques inversos, entonces $X \cong X^{[n \times m]}$. □

En ocasiones no es tan sencillo decidir cuándo dos espacios son conjugados. Una buena manera para contestarse negativamente es el uso de *invariantes*. Por ejemplo, el espacio de corrimiento completo $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ tiene exactamente dos puntos fijos, uno cuyos símbolos son todos 0's y el otro formado sólo por 1's. El ejemplo de Ledrappier y el espacio áureo tienen únicamente un punto fijo cada uno, aquel que todos sus símbolos son 0's. Por lo tanto ninguno de estos dos espacios puede ser conjugado al espacio de corrimiento completo.

La idea de puntos fijos como invariantes puede ser generalizada a puntos periódicos. Un punto $x \in X_{\mathcal{G}}$ es periódico bajo una transformación σ si el conjunto de imágenes $\{\sigma^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ es finito. Para probar que el número de puntos periódicos es un invariante tomamos $\theta : \langle X, \sigma_X \rangle \cong \langle Y, \sigma_Y \rangle$, entonces

$$\sigma_X^n(x) = x \Leftrightarrow \theta(x) = \theta(\sigma_X^n(x)) = \sigma_Y^n(\theta(x)).$$

Por lo tanto existe una correspondencia biunívoca entre los puntos periódicos de σ_X y los de σ_Y .

Otro invariante, de carácter cuantitativo, bastante común en la dinámica simbólica es la *entropía*. Este mide la razón de crecimiento de la cantidad de patrones distintos posibles en una ventana de $n \times n$. El valor $r_n = |\mathcal{B}_{n \times n}(X)|$ se asemeja a e^{cn^2} , donde la constante c es la entropía del espacio. Formalmente, se define la entropía de X como

$$h(X) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log r_n.$$

Dos SFTs conjugados deben tener la misma entropía ya que los bloques cuadrados de un espacio pueden ser codificados por bloques cuadrados del otro, que son mayores por una cantidad fija. Pero ese valor resulta despreciable junto a n^2 mientras crece n .

Ejemplo 1.4.4 En el espacio de corrimiento completo $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ cualquier bloque cuadrado es permitido, entonces $r_n = 2^{n^2}$. Por lo tanto su entropía es $\log 2$.

Ejemplo 1.4.5 En el ejemplo de Ledrappier, un bloque de extensión $2n \times 1$ determina el bloque de arriba de extensión $(2n - 1) \times 1$ usando la ventana en forma de L . De igual manera, determina un bloque de extensión $(2n - 2) \times 1$ en el segundo escalón. Entonces en el n -ésimo escalón se tiene un bloque cuadrado de $n \times n$. Es decir, el bloque de extensión $2n \times 1$ determina el cuadrado de $n \times n$. Por lo tanto $r_n \leq 2^{2n}$, y dividiendo $\log r_n$ entre n^2 se nulifica, por lo tanto la entropía de este espacio es cero.

1.5. Sobre la no vacuidad de un SFT

Dado un alfabeto \mathcal{A} , una ventana $W \subset \mathbb{Z}^2$ y un conjunto de patrones prohibidos \mathcal{F} en \mathcal{A}^W queda definido el espacio $\mathbf{X}_{\mathcal{F}}$, pero, ¿existe algún punto en $\mathbf{X}_{\mathcal{F}}$?

Desafortunadamente no existe respuesta para esta pregunta en general: el problema de la no vacuidad de un SFT en dimensiones superiores es *indecidible*. Evidentemente existen espacios en los que sabemos que hay infinidad de puntos y podemos determinarlos. Sin embargo, no existe ningún procedimiento para esta situación en general que nos de una respuesta definitiva en tiempo finito. Pensemos en teselaciones del plano, dado un conjunto de teselas de Wang, no existe ningún algoritmo general que nos diga cómo acomodar dichas piezas para crear una teselación infinita.

Este hecho fue demostrado por Berger en 1966 (ver [2]). Posteriormente Robinson (en [9]) simplificó y amplió el estudio de Berger. Encontró un conjunto de teselas para el cual el problema de extensión también es indecidible: no existe ningún algoritmo que conteste en tiempo finito cuándo una configuración finita (un patrón) puede ser extendido a una teselación infinita del plano.

Para SFT unidimensionales es fácil saber cuándo un SFT es no vacío, analizando los puntos periódicos de una transformación: $X_{\mathcal{F}}$ es no vacío si

y sólo si $X_{\mathcal{T}}$ tiene puntos periódicos. Los resultados de Robinson y Berger nos dicen que para dimensiones superiores esto no es cierto.

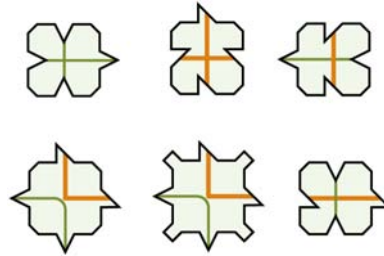


Figura 1.8: Teselas de Robinson.

Ejemplo 1.5.1 Consideremos el conjunto de seis teselas de Robinson de la figura 1.8, sea \mathcal{T} el conjunto formado por estas seis teselas, sus reflexiones horizontales y verticales y sus rotaciones por múltiplos de 90° . Con esto obtenemos un espacio $X_{\mathcal{T}}$ muy similar a las teselaciones de Wang, donde las cuñas y muescas juegan el papel de los colores. Claramente $X_{\mathcal{T}}$ es un SFT. Robinson probó que $X_{\mathcal{T}}$ es no numerable y no tiene ningún punto periódico. La figura 1.9 muestra una porción de una teselación de Robinson.

El panorama que nos queda se ve bastante oscuro al no poder contestar con un procedimiento finito ninguna de las tres preguntas siguientes:

1. La existencia de puntos,
2. La extensión de configuraciones finitas,
3. La existencia de puntos periódicos.

Existen algunas vías alternas para no encontrarse con estas dificultades, una de ellas es poner alguna estructura adicional a un SFT. La manera más satisfactoria de hacer esto es tomar a los espacios como grupos, de manera que exista el concepto de suma de puntos en el espacio y las acciones de corrimiento sean automorfismos de grupo. A continuación veremos algunos ejemplos de cómo hacer ésto.

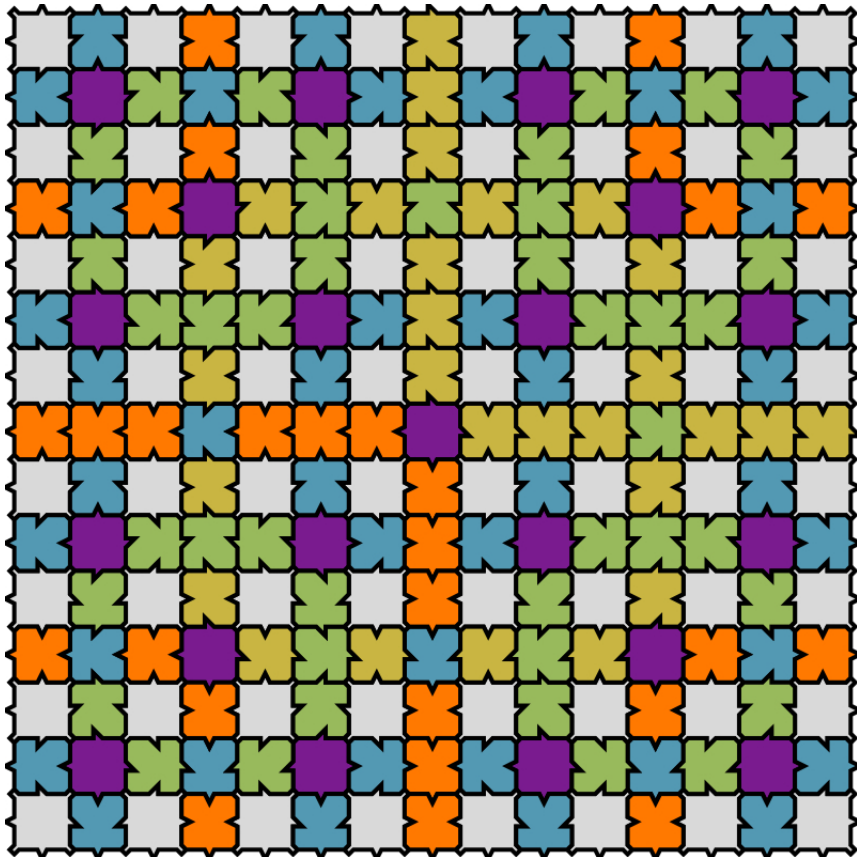


Figura 1.9: Teselación de Robinson

Ejemplo 1.5.2 Si consideramos $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ como el grupo \mathbb{Z}_2 con la suma módulo 2, el espacio de corrimiento completo $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ es un grupo abeliano bajo la operación coordenada a coordenada $(x + y)_{\mathbf{n}} = x_{\mathbf{n}} + y_{\mathbf{n}}$. Además, las funciones de corrimiento $\sigma_{\mathbf{a}}$ con $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2$, son homomorfismos de grupos ya que sumar coordenada a coordenada y luego recorrer, es lo mismo que recorrer y después sumar, es decir, $\sigma_{\mathbf{a}}^k(x + y) = \sigma_{\mathbf{a}}^k(x) + \sigma_{\mathbf{a}}^k(y), \forall k \in \mathbb{Z}$. Más aún, todos los corrimientos son isomorfismos ya que son evidentemente funciones biyectivas. Tomando cualquier ventana $W \subseteq \mathbb{Z}^2$ y requiriendo que cuando se sumen las entradas de dicha ventana se obtenga 0 (mod 2), se genera un espacio de corrimiento que a su vez es subgrupo del grupo producto $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}^2} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$. Todos los ejemplos de la sección 1.1, con excepción de las teselaciones de Wang, son ejemplos de este tipo.

Ejemplo 1.5.3 Otro ejemplo de naturaleza similar al anterior se obtiene tomando al alfabeto \mathcal{A} como el grupo especial unitario de orden 2, $SU(2) = \{A \in \mathbb{M}_{2 \times 2} : \det A = 1\} = \mathcal{A}$ y la acción de corrimiento $\sigma_{SU(2)}$ sobre

$$X^{SU(2)} = \{x = (x_{\mathbf{m}}) \in SU(2)^{\mathbb{Z}^2} : x_{(m_1, m_2)} \cdot x_{(m_1+1, m_2)} \cdot x_{(m_1, m_2+1)} = 1,$$

$$\forall \mathbf{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2\},$$

donde 1 representa la matriz identidad del grupo $SU(2)$.

Capítulo 2

Sistemas Textiles

2.1. Sistemas Textiles

Recordamos que una gráfica consiste de un conjunto de vértices \mathcal{V} y un conjunto de flechas \mathcal{E} . Para cada $v \in \mathcal{V}$, denotaremos por \mathcal{E}_v al conjunto de flechas que salen de v , y por \mathcal{E}^v al conjunto de flechas que llegan a v y les llamaremos *exvecindad* e *invecindad*, respectivamente. $|\mathcal{E}_v|$ es el *exgrado* y $|\mathcal{E}^v|$ el *ingrado* de $v \in \mathcal{V}_G$. Diremos que una gráfica es *esencial* si todos sus vértices tienen ingrado y exgrado positivo.

Un homomorfismo de gráficas Γ y G es un par de funciones $\phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{E}_G$ y $\phi_{\mathcal{V}} : \mathcal{V}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{V}_G$ tales que:

$$i_G \circ \phi_{\mathcal{E}} = \phi_{\mathcal{V}} \circ i_{\Gamma}$$

$$t_G \circ \phi_{\mathcal{E}} = \phi_{\mathcal{V}} \circ t_{\Gamma}.$$

Definición 2.1.1 (*Masakazu Nasu, 1995*). Un **Sistema Textil** consiste de una gráfica esencial Γ , una gráfica de un solo vértice G , y dos homomorfismos de gráficas $p, q : \Gamma \rightarrow G$ tales que el cuarteto $(i_{\Gamma}(\alpha), t_{\Gamma}(\alpha), p(\alpha), q(\alpha))$

queda únicamente determinado, es decir, la función que manda $\alpha \in \mathcal{E}_\Gamma \mapsto (i_\Gamma(\alpha), t_\Gamma(\alpha), p(\alpha), q(\alpha))$ es inyectiva.

La gráfica Γ de un sistema textil controla la transición de símbolos en dirección horizontal como en el Ejemplo 1.3.7. Para controlar la transición en la vertical es necesario introducir el siguiente concepto:

Definición 2.1.2 Un **Tejido Textil** es un arreglo bidimensional

$$(\alpha_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_\Gamma^{\mathbb{Z}^2}$$

donde $(\alpha_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}} \in X_T$ para toda $j \in \mathbb{Z}$ y $q(\alpha_{i,j-1}) = p(\alpha_{i,j})$ para todas $i, j \in \mathbb{Z}$. X_T denota el *sistema dinámico textil* dado por el sistema textil T con un tejido textil.

Un sistema dinámico textil es una manera alternativa de tratar a un espacio de corrimiento bidimensional. Antes de ver cómo funciona esto analizaremos algunos detalles de los sistemas textiles.

En la definición original de Nasu no se pide que Γ sea una gráfica esencial ni G sea de un solo vértice. En la siguiente proposición veremos que no nos causará problema tomarlo así.

Proposición. 2.1.3 *Sea $T = (p, q : \Gamma \rightarrow G)$ un sistema textil, entonces existe $T' = (p', q' : \Gamma' \rightarrow G')$ tal que Γ' es esencial, G es de un solo vértice y $X_T = X_{T'}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{E}_\Gamma^* = \{\alpha \in \mathcal{E}_\Gamma : \alpha \in \mathcal{B}_{1 \times 1}(X_T)\}$. Si $\mathcal{E}_\Gamma^* \neq \emptyset$ entonces restringiéndonos a $\mathcal{E}_\Gamma^* \subseteq \mathcal{E}_\Gamma$ obtenemos la subgráfica Γ' , es decir, $\mathcal{E}_{\Gamma'} = \mathcal{E}_\Gamma^*$, además $\mathcal{V}_{\Gamma'} = i_\Gamma(\mathcal{E}_{\Gamma'})$, $i_{\Gamma'} = i_\Gamma|_{\mathcal{E}_{\Gamma'}}$ y $t_{\Gamma'} = t_\Gamma|_{\mathcal{E}_{\Gamma'}}$, de manera que Γ' es una gráfica esencial. Para obtener la gráfica G' de un solo vértice tomamos tantos lazos como aristas tenga G , es decir $\mathcal{E}_{G'} = \mathcal{E}_G$ y definimos $p'(\alpha) = p(\alpha)$ y $q'(\alpha) = q(\alpha)$. Claramente $T' = (p', q' : \Gamma' \rightarrow G')$ es un sistema textil. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{1 \times 1}(X_T)$ entonces tenemos que

$$\alpha\beta \in \mathcal{B}_{2 \times 1}(X_T) \Leftrightarrow t_\Gamma(\alpha) = i_\Gamma(\beta) \Leftrightarrow t_{\Gamma'}(\alpha) = i_{\Gamma'}(\beta) \Leftrightarrow \alpha\beta \in \mathcal{B}_{2 \times 1}(X_{T'})$$

y

$$\frac{\beta}{\alpha} \in \mathcal{B}_{1 \times 2}(X_T) \Leftrightarrow q(\alpha) = p(\beta) \Leftrightarrow q'(\alpha) = p'(\beta) \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} \in \mathcal{B}_{1 \times 2}(X_{T'})$$

por lo tanto $X_T = X_{T'}$. \square

Una buena manera de visualizar un sistema textil es asignarle a las aristas de Γ un conjunto de teselas de Wang. Un punto en un sistema dinámico textil es una teselación de Wang. La tesela asociada a la arista α se ve como en figura 2.1

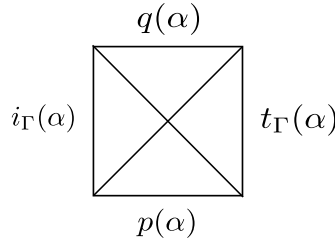


Figura 2.1: Tesela de Wang asociada a la arista $\alpha \in \mathcal{E}_\Gamma$.

Como vimos en el capítulo anterior, dado un conjunto de teselas de Wang podemos generar su espacio de Wang. Es decir, a cada sistema dinámico textil podemos asociarle un SFT. El recíproco también es cierto, como veremos en la siguiente

Proposición. 2.1.4 *Sea X un espacio de corrimiento de tipo finito dado por las matrices de transición A_1 y A_2 . Entonces, moviéndose a alguna presentación en bloques, en caso de ser necesario, existe un sistema textil $T = (p, q : \Gamma \rightarrow G)$ tal que $X = X_T$.*

Demostración. Sea \tilde{X} una presentación en bloques de X dado por el $((0, 1)-(0, 1))$ -código de bloques $\Phi : X \rightarrow \tilde{X}$, donde

$$\Phi(x)_{i,j} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{pmatrix} x_{i,j+1} & x_{i+1,j+1} \\ x_{i,j} & x_{i+1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Consideremos al conjunto $S = \{\text{bloques de } 2 \times 2 \text{ admisibles en } X(A_1, A_2)\}$ y definamos a la gráfica Γ de la siguiente manera: $\mathcal{E}_\Gamma = S$ y $\mathcal{V}_\Gamma = \{\text{columnas de bloques de } 2 \times 2 \text{ en } S\}$. Así, tenemos que

$$i_\Gamma(B) = \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} \text{ y } t_\Gamma(B) = \begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix}, \text{ con } B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_\Gamma.$$

Ahora construimos a G de un solo vértice y con aristas $\mathcal{E}_G = \{\text{filas de bloques de } 2 \times 2 \text{ en } S\}$. Definimos $p, q : \Gamma \rightarrow G$ como

$$p(B) = ab \text{ y } q(B) = cd, \text{ con } B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_\Gamma.$$

Sean $B, B' \in \mathcal{E}_\Gamma$ dadas por

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \text{ y } B' = \begin{pmatrix} c' & d' \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

tales que $(i_\Gamma(B), t_\Gamma(B), p(B), q(B)) = (i_\Gamma(B'), t_\Gamma(B'), p(B'), q(B'))$, como $i_\Gamma(B) = i_\Gamma(B')$ y $t_\Gamma(B) = t_\Gamma(B')$ entonces

$$\begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' \\ a' \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' \\ b' \end{pmatrix},$$

por lo tanto $B = B'$, es decir la función que manda $B \in \mathcal{E}_\Gamma \rightarrow (i_\Gamma(B), t_\Gamma(B), p(B), q(B))$ es inyectiva. Si además las matrices de transición para \tilde{X} están dadas por $\tilde{A}_1(\alpha, \beta) = 1 \Leftrightarrow i_\Gamma(\alpha) = t_\Gamma(\beta)$ y $\tilde{A}_2(\alpha, \beta) = 1 \Leftrightarrow p(\alpha) = q(\beta)$, tenemos entonces que $T = (p, q : \Gamma \rightarrow G)$ es un sistema textil y $\tilde{X} = X_T$. \square

Ejemplo 2.1.5 Sea $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ con

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

construimos el sistema textil que describe a X . Definimos a la gráfica Γ (figura 2.2) como $\mathcal{E}_{\Gamma} = \{\text{bloques de } 2 \times 2 \text{ permitidos en } \mathbf{X}_{\mathcal{F}}\}$ y $\mathcal{V}_{\Gamma} = \{\text{columnas de bloques de } 2 \times 2 \text{ permitidos en } \mathbf{X}_{\mathcal{F}}\}$,

$$\mathcal{V}_{\Gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La gráfica G de un solo vértices tendrá aristas $\mathcal{E}_G = \{\text{filas de bloques de } 2 \times 2 \text{ permitidos en } \mathbf{X}_{\mathcal{F}}\} = \{00, 01, 10, 11\}$ y definimos $p, q : \Gamma \rightarrow G$ como

$$p \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ab \text{ y } q \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = cd.$$

Así si $T = (p, q : \Gamma \rightarrow G)$ tenemos que $X_T = X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$.

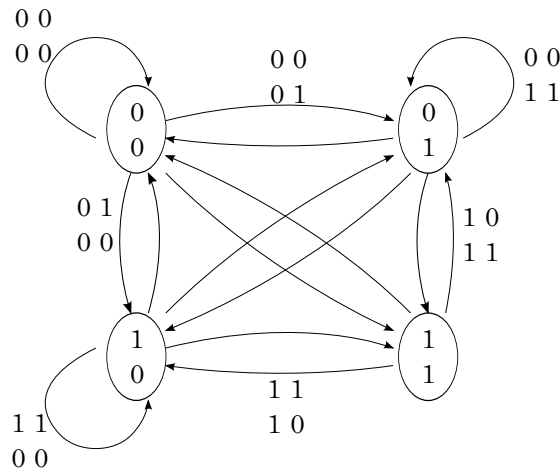


Figura 2.2: La gráfica Γ .

Una gráfica Γ es *fuertemente conexa* si para cualesquiera $u, v \in \mathcal{V}_{\Gamma}$ existe un camino que comienza en u y termina en v o comienza en v y termina en u .

Sea $T = (p, q : \Gamma \rightarrow G)$ un sistema textil, y supongamos que Γ no es fuertemente conexa. Sean Γ_i las gráficas inducidas por las componentes fuertemente conexas de Γ , y sean p_i, q_i las restricciones de los morfismos p, q a la componente Γ_i . Entonces $T_i = (p_i, q_i : \Gamma_i \rightarrow G)$ son sistemas textiles, es decir, podemos estudiar la dinámica de T estudiando por separado la dinámica de sus componentes. Cuando ésto suceda diremos que T es un sistema textil *reducible*, de lo contrario será *irreducible*.

2.2. Operaciones sobre Sistemas Textiles

2.2.1. Inversión

La inversión de un sistema dinámico textil X_T también está dado por un sistema textil conocido como el *dual* T^* de T . Este espacio es producto de intercambiar filas por columnas de X_T . Definimos el dual Γ^T de Γ por

$$\mathcal{E}_{\Gamma^T} = \mathcal{E}_{\Gamma}$$

$$\mathcal{V}_{\Gamma^T} = \mathcal{E}_G$$

y para $\alpha \in \mathcal{V}_{\Gamma^T} = \mathcal{E}_G$

$$i_{\Gamma^T}(\alpha) = p(\alpha)$$

$$t_{\Gamma^T}(\alpha) = q(\alpha).$$

La gráfica de un solo vértice G^T tiene flechas indexadas por \mathcal{V}_{Γ} . La inversión del sistema dinámico textil estará entonces dado por el sistema textil $T^* = (p^T, q^T : \Gamma^T \rightarrow G^T)$ donde

$$p^T(\alpha) = i_{\Gamma}(\alpha),$$

$$q^T(\alpha) = t_{\Gamma}(\alpha).$$

2.2.2. Escisiones

Sea Γ una gráfica y $v \in \mathcal{V}_{\Gamma}$, pensemos por ahora que v no tiene lazos. Partimos \mathcal{E}_v en dos conjuntos ajenos \mathcal{E}_v^1 y \mathcal{E}_v^2 y construimos una nueva

gráfica $\tilde{\Gamma}$ utilizando esta partición. Los vértices de $\tilde{\Gamma}$ serán los mismos que los de Γ excepto v , que pasará a $\tilde{\Gamma}$ como dos vértices distintos v^1 y v^2 , es decir

$$\mathcal{V}_{\tilde{\Gamma}} = \mathcal{V}_{\Gamma} \setminus \{v\} \cup \{v^1, v^2\}$$

Las aristas de $\tilde{\Gamma}$ serán de la siguiente manera: para cada $e \in \mathcal{E}_v^i$, donde i es 1 ó 2, ponemos una flecha en $\tilde{\Gamma}$ con inicio en v^i y cuyo término sea el mismo que el término en Γ , nótese que supusimos que $t_{\Gamma}(e) \neq v$ entonces $t_{\Gamma}(e) \in \mathcal{V}_{\tilde{\Gamma}}$. Para cada $f \in \mathcal{E}_{\Gamma}$ tal que $t_{\Gamma}(f) = v$ colocamos las flechas f^1 y f^2 de manera que $t_{\tilde{\Gamma}}(f^i) = v^i$ y $i_{\tilde{\Gamma}}(f^i) = i_{\Gamma}(f)$ para $i \in \{1, 2\}$. Todos las demás flechas de Γ las copiaremos tal cual a $\tilde{\Gamma}$.

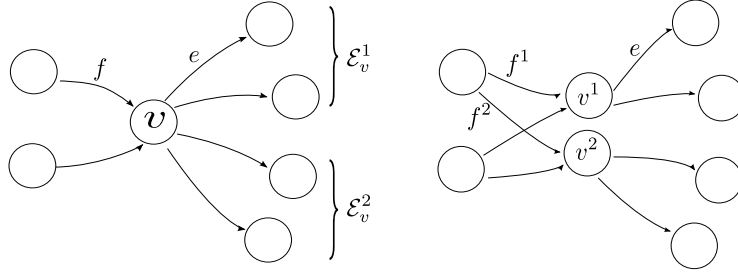


Figura 2.3: Escisión de un vértice.

Este proceso puede ser doblemente generalizado: primero, es posible particionar la ex-vecindad de v en m conjuntos ajenos, en lugar de únicamente dos; y segundo, podemos llevar a cabo este procedimiento para todos los vértices de Γ , incluyendo aquellos con lazos.

Definición 2.2.1 Sea Γ una gráfica, para cada $v \in \mathcal{V}_{\Gamma}$ partimos $\mathcal{E}_v = \{\alpha \in \mathcal{E}_{\Gamma} : i_{\Gamma}(\alpha) = v\}$ en conjuntos ajenos no vacíos $\mathcal{E}_v^1, \dots, \mathcal{E}_v^{m_v}$. Definimos la *ex-escisión por vértices* de Γ como la gráfica $\tilde{\Gamma}$ tal que

$$\mathcal{V}_{\tilde{\Gamma}} = \{v_1^1, \dots, v_1^{m_{v_1}}, v_2^1, \dots, v_2^{m_{v_2}}, \dots, v_n^1, \dots, v_n^{m_{v_n}}\}$$

y

$$\mathcal{E}_{\tilde{\Gamma}} = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^{m_{t_{\Gamma}(\alpha_1)}}, \dots, \alpha_r^1, \dots, \alpha_r^{m_{t_{\Gamma}(\alpha_r)}}\}$$

y si $\alpha_i \in \mathcal{E}_{i_{\Gamma}(\alpha_i)}^l$ entonces $i_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_i^j) = i_{\Gamma}(\alpha_i)^l$ y $t_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_i^j) = t_{\Gamma}(\alpha_i)^j$. Cuando la partición $\mathcal{P} = \{\mathcal{E}_v^1, \dots, \mathcal{E}_v^{m_v}\}$ consista de conjuntos unitarios llamaremos a $\tilde{\Gamma}$ la *ex-escisión completa* de Γ .

Ejemplo 2.2.2 Para la gráfica G de la figura 2.4 se hace la ex-escisión usando la partición \mathcal{P} dada por $\mathcal{E}_v^1 = \{a\}$, $\mathcal{E}_v^2 = \{b, c\}$, $\mathcal{E}_u^1 = \{d\}$, $\mathcal{E}_w^1 = \{e\}$ y $\mathcal{E}_w^2 = \{f\}$.

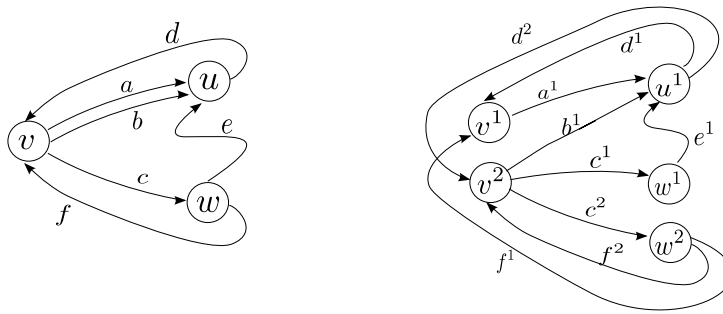


Figura 2.4: Ex-escisión de una gráfica.

Análogamente, podemos definir la *in-escisión* Γ' de Γ haciendo la partición \mathcal{P} para las in-vecindades \mathcal{E}^v de $v \in \Gamma$.

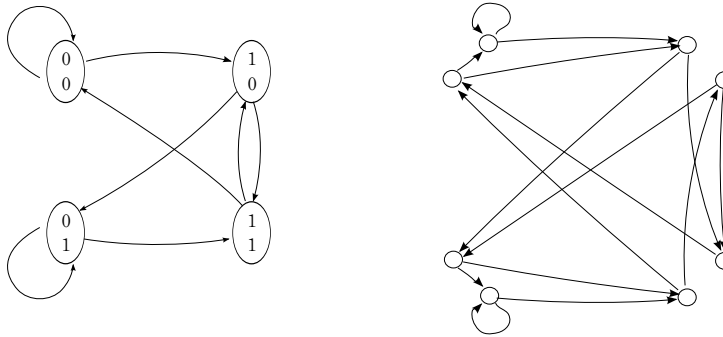


Figura 2.5: La gráfica que define el ejemplo de Ledrappier y su in-escisión completa.

Definición 2.2.3 Sea $T = (p, q : \Gamma \rightarrow G)$ un sistema textil. Definiremos a $\tilde{T} = (\tilde{p}, \tilde{q} : \tilde{\Gamma} \rightarrow G)$ como la *ex-escisión textil* de T , donde $\tilde{\Gamma}$ es la ex-escisión por vértices de Γ , $\tilde{p}(\alpha_i^j) = p(\alpha_i)$ y $\tilde{q}(\alpha_i^j) = q(\alpha_i)$ para toda $\alpha_i^j \in \mathcal{E}_{\tilde{\Gamma}}$.

Definición 2.2.4 Sea $T = (p, q : \Gamma \rightarrow G)$ un sistema textil. Definiremos a $T' = (p', q' : \Gamma' \rightarrow G)$ como la *in-escisión textil* de T , donde Γ' es la in-escisión por vértices de Γ , $p'(\alpha_i^j) = p(\alpha_i)$ y $q'(\alpha_i^j) = q(\alpha_i)$ para toda $\alpha_i^j \in \mathcal{E}_{\tilde{\Gamma}}$.

Lema. 2.2.5 $\tilde{T} = (\tilde{p}, \tilde{q} : \tilde{\Gamma} \rightarrow G)$ (resp. $T' = (p', q' : \Gamma' \rightarrow G)$) es un sistema textil.

Demostración. Sea $v_j^i \in \mathcal{V}_{\tilde{\Gamma}}$, $d_{\tilde{\Gamma}}^+(v_j^i) = d_{\Gamma}^+(v_i) \geq 1$ y $d_{\tilde{\Gamma}}^-(v_j^i) \geq 1$, ya que Γ es esencial y los \mathcal{E}_v^i son no vacíos, por lo tanto $\tilde{\Gamma}$ es esencial. Además \tilde{q} y \tilde{p} son homomorfismos porque p y q lo son. Sólo resta ver que la cuarteta $(i_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_i^j), t_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_i^j), \tilde{p}(\alpha_i^j), \tilde{q}(\alpha_i^j))$ queda únicamente determinada por $\alpha_i^j \in \mathcal{E}_{\tilde{\Gamma}}$. Supongamos $\alpha_i^j \neq \alpha_k^l$

Caso 1. Si $k = i$ entonces $j \neq l$ y $t_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_i^j) = t_{\Gamma}(\alpha_i)^j \neq t_{\Gamma}(\alpha_k)^l = t_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_k^l)$ ya que $\tilde{\Gamma}$ no tiene multiaristas y la partición fue en conjuntos ajenos.

Caso 2. Supongamos $i \neq k$, $\alpha_i \in \mathcal{E}_{i_{\Gamma}(\alpha_i)}^x$ y $\alpha_k \in \mathcal{E}_{i_{\Gamma}(\alpha_k)}^z$. Si $i_{\Gamma}(\alpha_i) \neq i_{\Gamma}(\alpha_k)$ ó $x \neq z$ entonces $i_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_i^j) = i_{\Gamma}(\alpha_i)^x \neq i_{\Gamma}(\alpha_k)^z = i_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_k^l)$ y las cuartetadas estarían diferenciadas por su primera entrada. Si $t_{\Gamma}(\alpha_i) \neq t_{\Gamma}(\alpha_k)$ ó $j \neq l$ entonces $t_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_i^j) = t_{\Gamma}(\alpha_i)^j \neq t_{\Gamma}(\alpha_k)^l = t_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_k^l)$ y las cuartetadas estarían diferenciadas en su segunda entrada. Por último si $i_{\Gamma}(\alpha_i) = i_{\Gamma}(\alpha_k)$, $x = z$, $t_{\Gamma}(\alpha_i) = t_{\Gamma}(\alpha_k)$ y $i = j$, como T es un sistema textil tenemos que $(i_{\Gamma}(\alpha_i), t_{\Gamma}(\alpha_i), p(\alpha_i), q(\alpha_i)) \neq (i_{\Gamma}(\alpha_k), t_{\Gamma}(\alpha_k), p(\alpha_k), q(\alpha_k))$ por lo tanto tenemos que

$$\tilde{p}(\alpha_k^j) = p(\alpha_i) \neq p(\alpha_k) = \tilde{p}(\alpha_k^l) \text{ ó } \tilde{q}(\alpha_k^j) = q(\alpha_i) \neq q(\alpha_k) = \tilde{q}(\alpha_k^l)$$

por lo tanto $\tilde{T} = (\tilde{p}, \tilde{q} : \tilde{\Gamma} \rightarrow G)$ es un sistema textil. \square

Sean $T = (p, q : \Gamma \rightarrow G)$ y $\tilde{T} = (\tilde{p}, \tilde{q} : \tilde{\Gamma} \rightarrow G)$ dos sistemas textiles tales que $\tilde{\Gamma}$ es la ex-escisión de un solo vértice v de la gráfica Γ , recordamos que \mathcal{E}^v denota el conjunto de aristas de la gráfica Γ que terminan en v . Veamos cómo construir una conjugación entre los sistemas textiles T y \tilde{T} . Definimos la regla local $\psi : \mathcal{B}_{1 \times 1}(X_{\tilde{T}}) \rightarrow \mathcal{B}_{1 \times 1}(X_T)$ por $\psi(\alpha^i) = \alpha$ si

$\alpha \in \mathcal{E}^v$ y $\psi(\beta) = \beta$ si $\beta \notin \mathcal{E}^v$. Es decir, la acción de ψ es simplemente quitar superíndices, y claramente manda caminos de $\tilde{\Gamma}$ en caminos de Γ . Por lo tanto la función ψ nos induce un código de bloques $\Psi : X_{\tilde{T}} \rightarrow X_T$.

Por el otro lado, definimos la regla local $\phi : \mathcal{B}_{2 \times 1}(X_T) \rightarrow \mathcal{B}_{1 \times 1}(X_{\tilde{T}})$ dada por

$$\phi(\alpha\beta) = \begin{cases} \alpha^0 & \text{si } \alpha \notin \mathcal{E}^v \\ \alpha^1 & \text{si } \alpha \in \mathcal{E}^v \text{ y } \beta \in \mathcal{E}_v^1 \\ \alpha^2 & \text{si } \alpha \in \mathcal{E}^v \text{ y } \beta \in \mathcal{E}_v^2 \\ \vdots & \\ \alpha^k & \text{si } \alpha \in \mathcal{E}^v \text{ y } \beta \in \mathcal{E}_v^k \end{cases} \quad (2.1)$$

Como ϕ “ve hacia adelante” un símbolo, puede añadir un superíndice dependiendo de lo que vea. Para ver que ϕ manda caminos de Γ en caminos de $\tilde{\Gamma}$ tomamos $\phi(\alpha\beta)$ y $\phi(\beta\gamma)$ y vemos que $t_{\tilde{\Gamma}}(\phi(\alpha\beta)) = i_{\tilde{\Gamma}}(\phi(\beta\gamma))$. Si $\phi(\alpha\beta) = \alpha$ entonces $\alpha \notin \mathcal{E}^v$ y $t_{\tilde{\Gamma}}(\phi(\alpha\beta)) = t_{\tilde{\Gamma}}(\alpha) = t_{\Gamma}(\alpha) = i_{\Gamma}(\beta)$ por hipótesis, entonces el vértice $i_{\Gamma}(\beta)$ no fue escindido por lo tanto $i_{\Gamma}(\beta) = i_{\tilde{\Gamma}}(\phi(\beta\gamma))$. Suponemos ahora que $\phi(\alpha\beta) = v^i$, con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ entonces $t_{\tilde{\Gamma}}(\alpha^i) = v^i = i_{\tilde{\Gamma}}(\phi(\beta\gamma))$ ya que $\beta \in \mathcal{E}_v^i$ y $t_{\Gamma}(\alpha) = i_{\Gamma}(\beta)$. Por lo tanto tenemos otro código de bloques $\Phi : X_T \rightarrow X_{\tilde{T}}$ de anticipación horizontal 1. El caso general de esta conjugación es muy similar:

Lema. 2.2.6 *Sea X_T un sistema textil y $X_{\tilde{T}}$ la ex-escisión por vértices de X_T entonces*

$$X_T \cong X_{\tilde{T}}.$$

Demostración. Tomemos el $((0, 0)-(0, 0))$ -código de bloques $\Phi : X_{\tilde{T}} \rightarrow X_T$ dado por la regla local $\phi(\alpha_i^j) = \alpha_i$. Nótese que si $\alpha_i^j \alpha_k^l$ es un camino en $\tilde{\Gamma}$ entonces $\alpha_i \alpha_k$ es un camino en Γ , es decir, ϕ manda caminos en caminos, por lo tanto $\Phi(X_{\tilde{T}}) \subseteq X_T$. Por el otro lado el $((0, 1)-(0, 0))$ -código de bloques $\Psi : X_T \rightarrow X_{\tilde{T}}$ dado por la regla local $\psi(\alpha_i \alpha_j) = \alpha_i^k$ donde $\alpha_j \in \mathcal{E}_{i_{\Gamma}(\alpha_j)}^k$ (como en ecuación 2.1), está bien definido porque α_j está en un único conjunto

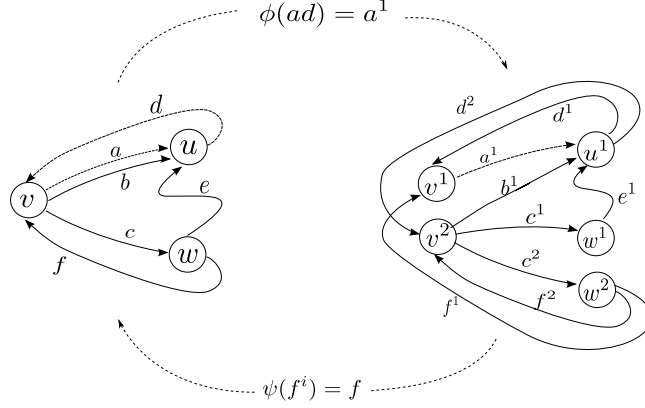


Figura 2.6: La acción de ϕ es agregar a a el superíndice correspondiente al elemento de la partición en el que se encuentre d .

de la partición, de igual manera, ψ manda caminos en caminos, por lo que $\Psi(X_T) \subseteq X_{\bar{T}}$. Veamos ahora que Φ y Ψ son funciones inversas. Sea $x = \dots \alpha_{-1} \alpha_0 \alpha_1 \dots \in X_T$, entonces $\Psi(x)$ es de la forma

$$\Psi(x) = \dots \alpha_{-1}^{j_{-1}} \alpha_0^{j_0} \alpha_1^{j_1} \dots,$$

entonces $\Phi(\Psi(x)) = x$. Por otro lado, sean $x_{i,j} = \alpha_m^k, x_{i+1,j} = \alpha_n^l \in \mathcal{E}_{\bar{T}}$, entonces si $(x_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}} \in X_{\bar{T}}$ tenemos que $t_{\bar{T}}(\alpha_m^k) = t_{\Gamma}(\alpha_m)^k = i_{\Gamma}(\alpha_n)^s = i_{\bar{T}}(\alpha_n^l)$, donde $\alpha_n \in \mathcal{E}_{i_{\Gamma}(\alpha_n)}^s$, por lo tanto $t_{\Gamma}(\alpha_m) = i_{\Gamma}(\alpha_n)$, $k = s$ y $\alpha_n \in \mathcal{E}_{i_{\Gamma}(\alpha_n)}^k$. De esta manera tenemos que $\psi(\phi(x_{i,j})\phi(x_{i+1,j})) = \psi(\phi(\alpha_m^k)\phi(\alpha_n^l)) = \psi(\alpha_m \alpha_n) = \alpha_m^k = x_{i,j}$. \square

La función $\Phi : X_{\bar{T}} \rightarrow X_T$ es la inversa de la *función ex-escisión* $\Psi : X_T \rightarrow X_{\bar{T}}$, y le llamaremos *función ex-fusión* (en algunos textos *ex-amalgamación*).

De manera análoga se construye la función in-escisión que, a diferencia de la ex-escisión, ésta “ve hacia atrás”, es decir, tiene memoria horizontal 1, por lo tanto es un código de $((1,0)-(0,0))$ -bloques. Su código de bloques inverso será la función in-fusión cuya definición es análoga a la ex-fusión de $((0,0)-(0,0))$ -bloques. De manera que $X_{T'} \cong X_T$.

Capítulo 3

Teorema de Descomposición

Ejemplo 3.0.7 Sea $T = (p, q : \Gamma \rightarrow G)$ un sistema textil y $\varphi = \sigma_{(1,0)} : X_T \rightarrow X_T$, es decir, tomamos a la función corrimiento como conjugación de X_T en sí mismo. Sea $\tilde{\Gamma}$ la ex-escisión completa de Γ , entonces tenemos el $((0,1)-(0,0))$ -código de bloques $\Psi : X_T \rightarrow X_{\tilde{\Gamma}}$ dado por la regla local $\psi(\alpha_i \alpha_j) = \alpha_i^j$ para $\alpha_i, \alpha_j \in \mathcal{E}_\Gamma$ y $\alpha_i^j \in \mathcal{E}_{\tilde{\Gamma}}$ (ésta es la misma función que se definió en la demostración del Lema 2.2.6, pero al utilizar la ex-escisión completa, no es necesario especificar en qué conjunto de la partición se encuentra α_j). Sea Γ' la in-escisión completa de Γ , esto nos da el $((1,0)-(0,0))$ -código de bloques $\Psi' : X_T \rightarrow X_{T'}$ dada por la regla local $\psi'(\alpha_i \alpha_j) = \alpha_j^i$, cuya función inversa está dada por $\psi'^{-1}(\alpha_j^i) = \alpha_j \in \Gamma$ para $\alpha_j^i \in \Gamma'$ que define el código de bloques $\Psi'^{-1} : X_{T'} \rightarrow X_T$. Consideramos la función $\Theta : X_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow X_{T'}$ definida por la regla local $\theta : \mathcal{B}_{1 \times 1}(X_{\tilde{\Gamma}}) \rightarrow \mathcal{B}_{1 \times 1}(X_{T'})$ dada por $\theta(\alpha_i^j) = \alpha_j^i$, es decir, la acción de θ es únicamente *renombrar* las aristas de Γ . Como $\tilde{\Gamma}$ y Γ' son la ex-escisión e in-escisión completas, tienen el mismo número de aristas y el mismo número de vértices, por lo que θ es un isomorfismo de gráficas.

$$\begin{array}{ccc}
 \dots \alpha_{-2} \alpha_{-1} \alpha_0 . \alpha_1 \alpha_2 \dots & \xrightarrow{\psi} & \dots \alpha_{-2}^{-1} \alpha_{-1}^0 \alpha_1^1 . \alpha_2^2 \alpha_3^3 \dots \\
 \varphi = \sigma_{\mathbf{a}} \downarrow & & \downarrow \theta \\
 \dots \alpha_{-1} \alpha_0 \alpha_1 . \alpha_2 \alpha_3 \dots & \xleftarrow{\psi'^{-1}} & \dots \alpha_{-1}^{-2} \alpha_0^{-1} \alpha_1^0 . \alpha_2^1 \alpha_3^2 \dots
 \end{array}$$

De esta manera tenemos una descomposición de la conjugación φ , como $\varphi = \Psi'^{-1} \circ \Theta \circ \Psi$.

En el ejemplo anterior factorizamos a la conjugación φ como producto de funciones de escisión, fusión y renombramientos. Podemos suponer que φ es de anticipación y memoria horizontal y vertical 0 (hecho que demostraremos más adelante), sin embargo si la función inversa φ^{-1} es de memoria y anticipación mayores, el problema resulta bastante más complicado. En los siguientes lemas veremos cómo, a través de escisiones y fusiones, podemos “reducir” la memoria y anticipación horizontal de φ^{-1} .

Lema. 3.0.8 Sean $T_k = (p_k, q_k : \Gamma_k \rightarrow G_k)$, $k \in \{1, 2\}$, sistemas textiles. Supongamos que $\varphi : X_{T_1} \rightarrow X_{T_2}$ es una conjugación de $((0, 0)-(0, 0))$ -bloques con inversa de $((m, n)-(r, s))$ -bloques. Entonces existen ex-escisiones textiles \tilde{T}_k de T_k tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X_{T_1} & \xrightarrow{\varphi} & X_{T_2} \\ \Psi_1 \downarrow & & \downarrow \Psi_2 \\ X_{\tilde{T}_1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & X_{\tilde{T}_2} \end{array}$$

donde Ψ_1, Ψ_2 son ex-escisiones y $\tilde{\varphi}$ es una conjugación de $((0, 0)-(0, 0))$ -bloques con inversa de $((m, n-1)-(r, s))$ -bloques.

Demostración. Sea $v \in \mathcal{V}_{\Gamma_1}$, definimos la relación \sim en \mathcal{E}_v como $a \sim b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$ (abusando un poco de la notación, estamos usando la misma φ para denotar tanto a la regla local que manda elementos de \mathcal{E}_{Γ_1} en elementos de \mathcal{E}_{Γ_2} , como a la conjugación definida por ésta) que claramente es una relación de equivalencia, por lo tanto nos induce una partición \mathcal{P} sobre \mathcal{E}_v . Consideramos la ex-escisión de la gráfica Γ_1 usando la partición \mathcal{P} de manera que

$$\mathcal{V}_{\tilde{\Gamma}_1} = \{v^\alpha : v \in \mathcal{V}_{\Gamma_1}, \alpha \in \mathcal{E}_{\Gamma_2} \text{ con } \varphi(\alpha) = a \text{ p.a. } a \in \mathcal{E}_{\Gamma_1}\},$$

$$\mathcal{E}_{\tilde{\Gamma}_1} = \{a^\beta : a \in \mathcal{E}_{\Gamma_1}, \varphi(b) = \beta \text{ p.a. } b \in \mathcal{E}_{\Gamma_2} \text{ con } t_{\Gamma_1}(a) = i_{\Gamma_1}(b)\}$$

y

$$i_{\tilde{\Gamma}_1}(a^\beta) = i_{\Gamma_1}(a)^{\varphi(a)}, t_{\tilde{\Gamma}_1}(a^\beta) = t_{\Gamma_1}(a)^\beta;$$

y para $a^\beta \in \mathcal{E}_{\tilde{\Gamma}_1}$, definimos $\tilde{p}_1(a^\beta) = p_1(a)$ y $\tilde{q}_1(a^\beta) = q_1(a)$.

Así, por Lemas 2.2.5 y 2.2.6 tenemos que $\tilde{T}_1 = (\tilde{p}_1, \tilde{q}_1 : \tilde{\Gamma}_1 \rightarrow G_1)$ es un sistema textil y $\Psi_1 : X_{T_1} \rightarrow X_{\tilde{T}_1}$ es una conjugación dada por $\Psi_1(x)_{(i,j)} = \psi_1(x_{(i,j)}x_{(i+1,j)}) = x_{(i,j)}^{\varphi(x_{(i+1,j)})}$.

Por otro lado, sea $\tilde{\Gamma}_2$ la ex-escisión completa de Γ_2 , así que

$$\mathcal{V}_{\tilde{\Gamma}_2} = \{v^\alpha : v \in \mathcal{V}_{\Gamma_2}, \alpha \in \mathcal{E}_{\Gamma_2}, i_{\Gamma_2}(\alpha) = v\},$$

$$\mathcal{E}_{\tilde{\Gamma}_2} = \{\alpha^\beta : \alpha, \beta \in \mathcal{E}_{\Gamma_2}, t_{\Gamma_2}(\alpha) = i_{\Gamma_2}(\beta)\},$$

y

$$i_{\tilde{\Gamma}_2}(\alpha^\beta) = i_{\Gamma_2}(\alpha)^\alpha, t_{\tilde{\Gamma}_2}(\alpha^\beta) = t_{\Gamma_2}(\alpha)^\beta.$$

Definimos, para $\alpha^\beta \in \mathcal{E}_{\tilde{\Gamma}_2}$, a $\tilde{p}_2(\alpha^\beta) = p_2(\alpha)$ y $\tilde{q}_2(\alpha^\beta) = q_2(\alpha)$.

Nuevamente tenemos que $\tilde{T}_2 = (\tilde{p}_2, \tilde{q}_2 : \tilde{\Gamma}_2 \rightarrow G_2)$ es un sistema textil y $\Psi_2 : X_{T_2} \rightarrow X_{\tilde{T}_2}$ es una conjugación dada por $\Psi_2(x)_{(i,j)} = \psi_2(x_{(i,j)}x_{(i+1,j)}) = x_{(i,j)}^{\varphi(x_{(i+1,j)})}$.

Ahora definimos la función $\tilde{\varphi} : X_{\tilde{T}_1} \rightarrow X_{\tilde{T}_2}$ por

$$\tilde{\varphi}(x)_{(i,j)} = \tilde{\varphi}(x_{(i,j)}^{\varphi(x_{(i+1,j)})}) = \varphi(x_{(i,j)})^{\varphi(x_{(i+1,j)})}.$$

Por la definición de $\tilde{\varphi}$ y la construcción de $X_{\tilde{T}_1}$, $\tilde{\varphi}$ hace conmutar el diagrama ya que $\tilde{\varphi}$ es biyectiva. Sólo resta ver que $\tilde{\varphi}^{-1} = \psi_1 \circ \varphi^{-1} \circ \psi_2^{-1}$ es un $((m, n-1)-(r, s))$ -código de bloques, esto es, tenemos que demostrar que un $((m, n-1)-(r, s))$ -bloque alrededor del símbolo $\tilde{y}_{(0,0)}$ de $\tilde{y} \in X_{\tilde{T}_2}$ determina la $(0, 0)$ -ésima coordenada de $\tilde{x} = \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{y}) \in X_{\tilde{T}_1}$. Para ésto, sean $y = \psi_2^{-1}(\tilde{y}) \in X_{T_2}$ y $x = \psi_1^{-1}(y) \in X_{T_1}$, notemos que $\tilde{x}_{(0,0)} = x_{(0,0)}^{y_{(1,0)}}$. Así tenemos que el bloque $\tilde{y}_{[-m, -r; n-2, s-1]}$ determina el bloque $y_{[-m, -r; n-1, s-1]}$

de $y \in X_{T_2}$, ya que como \tilde{X}_{T_2} es la ex-escisión textil completa de X_{T_2} entonces un camino de longitud $m + n - 1$ en $\tilde{\Gamma}_2$ es la imagen de un único camino de longitud $m + n$ en Γ_2 ; como φ^{-1} es un $((m, n)-(r, s))$ -código de bloques, entonces $y_{[-m, -r; n-1, s-1]}$ determina $x_{(0,0)}$, y este último determina $\tilde{x}_{(0,0)}$. Por lo tanto $\tilde{y}_{[-m, -r; n-2, s-1]}$ determina $\tilde{x}_{(0,0)}$. El siguiente diagrama ilustra la idea anterior.

$$\begin{array}{ccc} x_{(0,0)} & \xleftarrow{\varphi^{-1}} & y_{[-m, -r; n-1, s-1]} \\ \psi_1 \downarrow & & \uparrow \psi_2^{-1} \\ \tilde{x}_{(0,0)} & \xleftarrow{\tilde{\varphi}^{-1}} & \tilde{y}_{[-m, -r; n-2, s-1]} \end{array}$$

□

De manera completamente análoga se obtiene el siguiente

Lema. 3.0.9 Sean $T_k = (p_k, q_k : \Gamma_k \rightarrow G_k)$, $k \in \{1, 2\}$, sistemas textiles. Supongamos que $\varphi : X_{T_1} \rightarrow X_{T_2}$ es una conjugación de $((0, 0)-(0, 0))$ -bloques con inversa de $((m, n)-(r, s))$ -bloques. Entonces existen in-escisiones textiles T'_k de T_k tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X_{T_1} & \xrightarrow{\varphi} & X_{T_2} \\ \Psi_1 \downarrow & & \downarrow \Psi_2 \\ X_{T'_1} & \xrightarrow{\varphi'} & X_{T'_2} \end{array}$$

donde Ψ_1, Ψ_2 son in-escisiones y φ' es una conjugación de $((0, 0)-(0, 0))$ -bloques con inversa de $((m-1, n)-(r, s))$ -bloques. □

Inductivamente, a partir de los lemas 3.0.8 y 3.0.9, tenemos el siguiente

Corolario. 3.0.10 Sean $T_k = (p_k, q_k : \Gamma_k \rightarrow G_k)$, $k \in \{1, 2\}$, sistemas textiles. Supongamos que $\varphi : X_{T_1} \rightarrow X_{T_2}$ es una conjugación de $((0, 0)-(0, 0))$ -bloques con inversa de $((m, n)-(r, s))$ -bloques. Entonces existen sistemas textiles \tilde{T}_k tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
X_{T_1} & \xrightarrow{\varphi} & X_{T_2} \\
\bar{\eta}_1 \downarrow & & \downarrow \bar{\eta}_2 \\
X_{\bar{T}_1} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & X_{\bar{T}_2}
\end{array}$$

donde las $\bar{\eta}_k$ son la composición de una colección finita de in- y ex-escisiones y $\bar{\varphi}$ es una conjugación de $((0,0)-(0,0))$ -bloques con inversa de $((0,0)-(r,s))$ -bloques. \square

Usando herramientas muy similares podemos reducir la memoria y anticipación vertical de la inversa de una conjugación.

Corolario. 3.0.11 Sean $T_k = (p_k, q_k : \Gamma_k \rightarrow G_k)$, $k \in \{1, 2\}$, sistemas textiles, $X_{T_k^*}$ inversiones de X_{T_k} dadas por el renombramiento θ . Supongamos que $\varphi : X_{T_1} \rightarrow X_{T_2}$ es una conjugación de $((0,0)-(0,0))$ -bloques con inversa de $((m,n)-(r,s))$ -bloques. Entonces existen sistemas textiles T'_k tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
X_{T_1} & \xrightarrow{\varphi} & X_{T_2} \\
\theta \downarrow & & \downarrow \theta \\
X_{T_1^*} & \xrightarrow{\theta \varphi \theta} & X_{T_2^*} \\
\bar{\eta}_1 \downarrow & & \downarrow \bar{\eta}_2 \\
X_{T'_1} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & X_{T'_2}
\end{array}$$

donde las $\bar{\eta}_k$ son la composición de una colección finita de in- y ex-escisiones, θ es un renombramiento y $\bar{\varphi}$ es una conjugación de $((0,0)-(0,0))$ -bloques con inversa de $((0,0)-(m,n))$ -bloques.

Demostración. Como φ es una conjugación de $((0,0)-(0,0))$ -bloques con inversa de $((m,n)-(r,s))$ -bloques y θ es un renombramiento, entonces $\theta \circ \varphi \circ \theta$ es una conjugación de $((0,0)-(0,0))$ -bloques con inversa $(\theta \circ \varphi \circ \theta)^{-1} = \theta \circ \varphi^{-1} \circ \theta$ de $((r,s)-(m,n))$ -bloques, de manera que el resultado se sigue inmediatamente del Corolario 3.0.10. \square

Aplicando dos veces el Corolario 3.0.11 tenemos el análogo al Corolario 3.0.10 para memoria y anticipación vertical.

Proposición. 3.0.12 Sean $T_k = (p_k, q_k : \Gamma_k \rightarrow G_k)$, $k \in \{1, 2\}$, sistemas textiles. Supongamos que $\varphi : X_{T_1} \rightarrow X_{T_2}$ es una conjugación de $((0, 0)$ - $(0, 0))$ -bloques con inversa de $((m, n)$ - $(r, s))$ -bloques. Entonces φ es composición de una sucesión finita de escisiones y fusiones textiles e inversiones.

Demostración. Usando corolarios 3.0.10 y 3.0.11 podemos obtener la descomposición $\varphi = \tilde{\eta}_2^{-1} \circ \theta \circ \bar{\eta}_2^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \bar{\eta}_1 \circ \theta \circ \tilde{\eta}_1$ donde las $\tilde{\eta}_k$ y $\bar{\eta}_k$ son composiciones de sucesiones finitas de in- y ex-escisiones textiles, θ un renombramiento y $\bar{\varphi}$ es una conjugación de $((0, 0)$ - $(0, 0))$ -bloques con inversa de $((0, 0)$ - $(0, 0))$ -bloques, es decir, un renombramiento. \square

Durante toda esta sección hemos tomado conjugaciones de $((0, 0)$ - $(0, 0))$ -bloques, pero en general no tienen por qué ser así. En el siguiente lema veremos que dada una conjugación de $((m, n)$ - $(r, s))$ -bloques, moviéndonos a alguna presentación en bloques del espacio, podemos pensarla como una conjugación de $((0, 0)$ - $(0, 0))$ -bloques.

Lema. 3.0.13 Sean $T_k = (p_k, q_k : \Gamma_k \rightarrow G_k)$, $k \in \{1, 2\}$, sistemas textiles. Sea $\varphi : X_{T_1} \rightarrow X_{T_2}$ una conjugación de $((m, n)$ - $(r, s))$ -bloques y sea \hat{X}_{T_1} la presentación en $((m, n)$ - $(r, s))$ -bloques de X_{T_1} . Entonces existe una función $\eta : X_{T_1} \rightarrow \hat{X}_{T_1}$ que es la composición de una sucesión finita de escisiones e inversiones, tal que $\varphi \circ \eta^{-1}$ es una conjugación de $((0, 0)$ - $(0, 0))$ -bloques.

Demostración. Claramente, por la Proposición 1.2.2, $\varphi \circ \eta^{-1}$ es una conjugación de $((0, 0)$ - $(0, 0))$ -bloques. Resta mostrar que η es una sucesión finita de escisiones e inversiones.

$$\begin{array}{ccc} X_{T_1} & \xrightarrow{\varphi} & X_{T_2} \\ \eta \downarrow & & \uparrow \varphi \circ \eta^{-1} \\ \hat{X}_{T_1} & \xlongequal{\quad} & \hat{X}_{T_1} \end{array}$$

Primero observemos que \hat{X}_{T_1} puede ser escrito como un sistema textil usando una idea similar a la de la Proposición 2.1.4. Las aristas de la gáfica $\hat{\Gamma}$ serán los bloques de $m+n \times r+s$ permitidos en \hat{X}_{T_1} , los vértices de $\hat{\Gamma}$ serán las columnas de los bloques permitidos de $m+n \times r+s$, es decir, bloques de $1 \times r+s$ permitidos en \hat{X}_{T_1} y las aristas de la gráfica \hat{G} corresponden a las filas de los bloques de $\mathcal{E}_{\hat{\Gamma}}$, es decir, bloques permitidos de $m+n \times 1$. Y definimos (ver figura 3.1):

- $i_{\hat{\Gamma}}(x_{[l-m, k-r; l+n-1, k+s-1]}) = x_{[l-m, k-r; l-m, k+s-1]}$
- $t_{\hat{\Gamma}}(x_{[l-m, k-r; l+n-1, k+s-1]}) = x_{[l-m+1, k-r; l-m+1, k+s-1]}$
- $\hat{p}(x_{[l-m, k-r; l+n-1, k+s-1]}) = x_{[l-m, k-r; l+n-1, k-r]}$
- $\hat{q}(x_{[l-m, k-r; l+n-1, k+s-1]}) = x_{[l-m, k-r+1; l+n-1, k-r+1]}$.

Como \hat{X}_{T_1} es la presentación en $((m, n)-(r, s))$ -bloques de X_{T_1} entonces basta con conocer la esquina inferior izquierda de cada bloque para poder determinarlo completo, con esto en mente se define $t_{\hat{\Gamma}}(\alpha)$ ($q(\alpha)$) como la columna (fila) siguiente de $i_{\hat{\Gamma}}$ ($p(\alpha)$), de manera que $t_{\hat{\Gamma}}(\alpha) = i_{\hat{\Gamma}}(\sigma_{(1,0)}(\alpha))$ y $\hat{q}(\alpha) = \hat{p}(\sigma_{(0,1)}(\alpha))$.

$i_{\Gamma}(\alpha)$	$t_{\Gamma}(\alpha)$				
$x_{(l-m, k+s-1)}$	$x_{(l-m+1, k+s-1)}$	\cdots	$x_{(l, k+s-1)}$	\cdots	$x_{(l+n-1, k+s-1)}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
$x_{(l-m, k)}$	$x_{(l-m+1, k)}$	\cdots	$x_{(l, k)}$	\cdots	$x_{(l+n-1, k)}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
$x_{(l-m, k-r+1)}$	$x_{(l-m+1, k-r+1)}$	\cdots	$x_{(l, k-r+1)}$	\cdots	$x_{(l+n-1, k-r+1)}$
$x_{(l-m, k-r)}$	$x_{(l-m+1, k-r)}$	\cdots	$x_{(l, k-r)}$	\cdots	$x_{(l+n-1, k-r)}$
					$q(\alpha)$
					$p(\alpha)$

Figura 3.1: La arista $\alpha = x_{[l-m, k-r; l+n-1, k+s-1]} \in \mathcal{E}_{\hat{\Gamma}}$.

Una ex-escisión completa de un sistema textil nos da lugar a una presentación en bloques dada por

$$\Psi(x)_{(i,j)} = x_{(i,j)}^{x_{(i+1,j)}};$$

y análogamente una in-escisión completa nos da

$$\Psi(x)_{(i,j)} = x^{(i-1,j)} x_{(i,j)}.$$

Por el Corolario 3.0.10 podemos encontrar Ψ_1 , una sucesión de escisiones tal que $\eta \circ \Psi_1^{-1}$ es una conjugación de $((0,0)-(r,s))$ -bloques.

$$\begin{array}{ccc} X_{T_1} & \xrightarrow{\eta} & \hat{X}_{T_1} \\ \Psi_1 \downarrow & & \uparrow \eta \circ \Psi_1^{-1} \\ X'_{T_1} & \xlongequal{\quad} & X'_{T_1} \end{array}$$

Además por el Corolario 3.0.11 tenemos que $\theta \circ \eta \circ \Psi_1^{-1} \circ \theta$ es una conjugación de $((r,s)-(0,0))$ -bloques en los espacios duales.

$$\begin{array}{ccc} X'_{T_1} & \xrightarrow{\eta \circ \Psi_1^{-1}} & \hat{X}_{T_1} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ X_{T_1^*} & \xrightarrow{\theta \eta \Psi_1^{-1} \theta} & \hat{X}_{T_1^*} \end{array}$$

Repetiendo este proceso encontramos Ψ_2 , una sucesión de escisiones tal que $\theta \circ \eta \circ \Psi_1^{-1} \circ \theta \circ \Psi_2^{-1}$ es una conjugación de $((0,0)-(0,0))$ -bloques, es decir, un renombramiento.

$$\begin{array}{ccc} X_{T_1^*} & \xrightarrow{\theta \eta \Psi_1^{-1} \theta} & \hat{X}_{T_1^*} \\ \Psi_2 \downarrow & & \uparrow \theta \eta \Psi_1^{-1} \theta \Psi_2^{-1} = \bar{\eta} \\ X''_{T_1^*} & \xlongequal{\quad} & X''_{T_1^*} \end{array}$$

Sea $\bar{\eta} = \theta \circ \Psi_1^{-1} \circ \theta \circ \Psi_2^{-1}$, entonces $\eta = \theta \circ \bar{\eta} \circ \Psi_2 \circ \theta \circ \Psi_1$ y obtenemos la descomposición buscada

$$X_{T_1} \xrightarrow{\Psi_1} X'_{T_1} \xrightarrow{\theta} X_{T_1^*} \xrightarrow{\Psi_2} X''_{T_1^*} \xrightarrow{\bar{\eta}} \hat{X}_{T_1^*} \xrightarrow{\theta} \hat{X}_{T_1}.$$

□

Ahora ya tenemos todos los elementos para enunciar y probar el teorema de descomposición bidimensional.

Teorema 3.0.14 (*Aimee Johnson, Kathleen Madden, 1999*)

Sean $T_k = (p_k, q_k : \Gamma \rightarrow G)$, $k \in \{1, 2\}$, sistemas textiles. Cualquier conjugación entre X_{T_1} y X_{T_2} es la composición de una sucesión finita de escisiones y fusiones textiles e inversiones.

Demostración. La demostración se sigue directamente de la Proposición 3.0.12 y el Lema 3.0.13. □

Como vimos al principio del capítulo anterior, cualquier SFT puede ser visto como un sistema dinámico textil, por lo que podemos enunciar el teorema anterior como:

Corolario. 3.0.15 *Sean X y Y dos SFTs, cualquier conjugación entre ellos es la composición de una sucesión finita de escisiones y fusiones textiles e inversiones.* □

Un resultado muy similar fue obtenido paralelamente por Hiroshi Aso en [1] usando códigos bipartitos. Nasu probó (en [7]) una variante del teorema de descomposición unidimensional usando estos códigos: cualquier conjugación entre espacios de corrimiento unidimensionales es la composición de un número finito de códigos bipartitas. Hiroshi Aso generalizó este resultado a dos dimensiones.

Bibliografía

- [1] Aso, H. *Conjugacy of \mathbb{Z}^2 -Subshifts and Textile Systems*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36**, 1 (2000), 1-18.
- [2] Berger, R. *The undecidability of the Domino Problem*. Mem, Amer. Math. Soc. **66** (1966).
- [3] Grünbaum, B., y Shephard, G. "Tilings and Patterns", Freeman, New York, 1987.
- [4] Johnson, A. y Madden, K., *The Decomposition Theorem for Two-Dimensional Shifts of Finite Type*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1999) 1533-1543.
- [5] Lind, D., y Marcus, B. "An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding". Cambridge University Press 1995.
- [6] Lind, D., *Multi-Dimensional Symbolic Dynamics*, Proc. Symp. App. Math., **60**, (2004). 20, 61-79.
- [7] Nasu, M., *Topological Conjugacy for Sofic Systems*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **6** (1986) 265-280.
- [8] Nasu, M., *Textile Systems for Endomorphisms and Automorphisms of the Shift*, Memoirs of the AMS 546, **114**, 1995.
- [9] Robinson, R., *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, Invent. Math. **12** (1971), 177-209.
- [10] Schmidt, K., "Dynamical Systems of Algebraic Origin", Birkhäuser Verlag, Basel-Berlin-Boston, 1995.