



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**“Estudio moderno de la teoría de J.C. Maxwell
acerca de los Anillos de Saturno: caso del
cuerpo rígido”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

ENRIQUE ISIDORO GALINDO NAVA



DIRECTOR DE TESIS:

DR. JORGE ANDRÉS IZE LAMACHE

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales





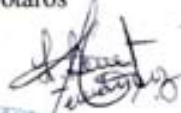
Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Estudio moderno de la teoría de J. C. Maxwell acerca de los Anillos de Saturno: Caso del cuerpo rígido

realizado por **Galindo Nava Enrique Isidoro** con número de cuenta **3-0055298-6** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Arturo Olvera Chávez	
Propietario	Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña	
Propietario Tutor	Dr. Jorge Andrés Ize Lamache	
Suplente	Dr. Panayiotis George Panayotaros	
Suplente	Dr. Luis Benet Fernández	



Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 11 de mayo de 2009
EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS
FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.
mnl

Estudio moderno de la teoría de J.C. Maxwell
acerca de los Anillos de Saturno: caso del
cuerpo rígido

Enrique Isidoro Galindo Nava

2009

Dedicatoria

Esta tesis va dedicada a todas aquellas personas que estuvieron conmigo y creyeron en mí, sobre todo a mis Padres, mi familia, a Daniela y todos mis amigos. A mi director de tesis el Dr. Jorge Ize y a mis sinodales.

Agradecimientos

Agradezco a la UNAM por darme la oportunidad de realizar mis estudios en matemáticas y dejarme aprender más de lo que llegué a imaginar.

Al Dr. Jorge Ize por apoyarme y orientarme a lo largo de toda la tesis. Jorge gracias por guiarme gran parte de mi formación como matemático, por darme el tiempo, paciencia y atención para salir adelante.

Al Dr. Arturo Olvera por sus consejos, comentarios y motivación a realizar este trabajo.

A los doctores Manuel Falconi, Panayiotis Panayotaros y Luis Benet por aceptar ser mis sinodales y dar comentarios que enriquecieron a ésta tesis.

A mi Padre, Madre y Hermana, por estar siempre conmigo, apoyándome, queriéndome, darme todo lo que estaba en sus manos y sobre todo por ayudarme a ser mejor persona cada día.

A Daniela por todo su cariño y apoyo incondicional en todo este tiempo.

A mis amigos por tener siempre fé en mí y darme su apoyo.

A toda la gente que ha estado involucrada en esto que no pude mencionar por motivos de tiempo.

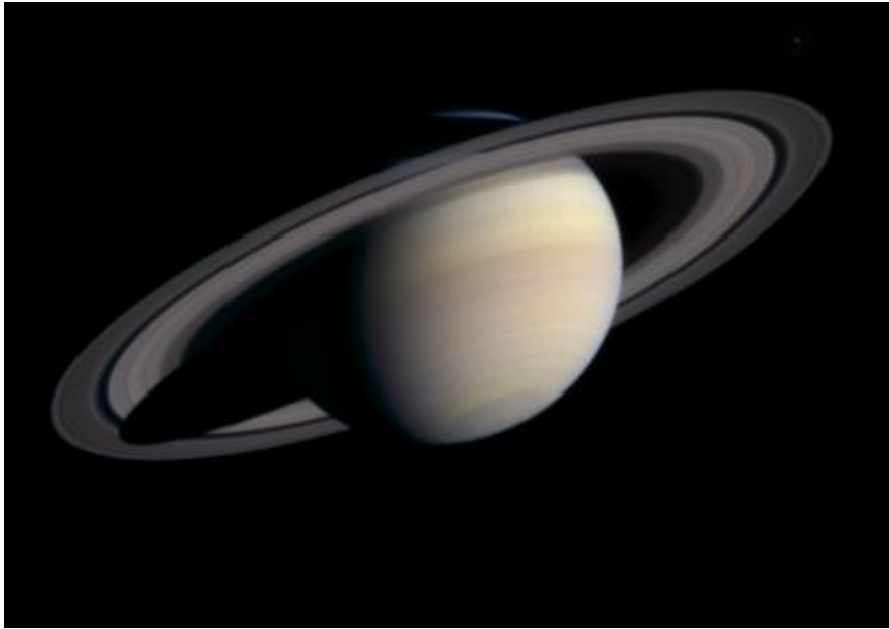


Imagen obtenida en la misión Cassini-Huygens a finales de 2003, cuyo objetivo es estudiar a Saturno y sus satélites naturales (science.nasa.gov).

Contents

Dedicatoria	vii
Agradecimientos	ix
	xi
I Movimiento de los anillos como cuerpo rígido	1
1 Introducción	3
2 Planteamiento de las ecuaciones físicas	7
2.1 Deducción de las ecuaciones	7
2.2 Caso particular: anillo circular	25
2.3 Comentarios al Capítulo	27
3 Estabilidad	29
3.1 Condiciones para que el sistema se mueva uniformemente.	29
3.1.1 Caso Particular: anillo circular	30
3.2 Movimiento perturbado.	31
3.2.1 Deducción de las ecuaciones	31
3.2.2 Condiciones de estabilidad.	34
3.2.3 Comportamiento del Potencial.	43
3.3 Comentarios al Capítulo	54

II	Movimiento con una masa unida a los anillos	57
4	Deducción de las ecuaciones	59
4.1	Comentarios al Capítulo	61
5	Estabilidad con la masa unida	63
5.1	Condiciones para movimiento uniforme	63
5.1.1	Caso particular: Saturno y los anillos concéntricos	67
5.1.2	Caso general	67
5.2	Movimiento perturbado	69
5.2.1	Deducción de las ecuaciones	69
5.2.2	Condiciones de estabilidad	71
5.2.3	Región de estabilidad	74
5.3	Comentarios al Capítulo	75
III	Análisis del Potencial	77
6	Cálculo de los coeficientes. Caso: anillo sin masa unida	79
6.1	Caso Particular: anillo circular	80
6.2	Comentarios al Capítulo	83
7	Potencial con masa unida a los anillos	85
7.1	Caso Particular: anillo circular	87
7.2	Condiciones bajo las cuales el movimiento es estable	89
7.3	Caso particular: Saturno y anillos concéntricos	92
7.3.1	Caso General	95
7.4	Comentarios al Capítulo	104
8	Estudio numérico de las condiciones de estabilidad	107
8.0.1	Función $\omega^2 = 0$	107
8.0.2	Función $L + N + 2\omega^2 = 0$	109
8.0.3	Función $8\omega^2(L + N) + (L - N)^2 = 0$	114
8.0.4	Comparación de funciones	123
8.1	Comentarios del Capítulo	126

9 Conclusiones	127
A Algoritmos numéricos	131
A.1 Integral doble	131
A.1.1 Función Integrald	132
A.1.2 Función II0	133
A.1.3 Función III1	133
A.2 Funciones de potencial	133
A.2.1 Función $V(r)$	134
A.2.2 Función auxiliar $V(r)$	134
A.2.3 Función $\frac{dV}{dr}$	134
A.2.4 Función $2I_0 + \frac{I_1}{r_0}$	135
A.3 Estudio numérico de las condiciones de estabilidad	136
A.3.1 Función $\omega^2 = 0$	136
A.3.2 Función $L + N + 2\omega^2 = 0$	136
A.3.3 Función $8\omega^2(L + N) + (L - N)^2$	137
A.3.4 Comparación de funciones	138
B Tablas de resultados de las simulaciones	141

Part I

Movimiento de los anillos como cuerpo rígido

Chapter 1

Introducción

A mediados del siglo *XIX*, el físico - matemático James Clerk Maxwell hizo un estudio acerca del movimiento de los anillos de Saturno, el cual se enfoca en encontrar las condiciones necesarias para tener un movimiento estable. El trasfondo básico de este problema es entender porque es posible que estos cuerpos celestes se mantuvieran girando alrededor de un planeta a lo largo de mucho tiempo, problema que no había sido resuelto hasta entonces. En este estudio, J.C. Maxwell considera a los anillos en los tres estados distintos: sólido rígido, fluido y un conjunto finito de partículas pequeñas, para los cuales, busca las condiciones necesarias para el movimiento uniforme.

Gracias a este estudio, Maxwell recibe el premio "Adams" en 1857, presea otorgada cada dos años por la Facultad de Matemáticas de la *Universidad de Cambridge* y el *Colegio St John 's* a un joven matemático británico por su investigación única en el área de Matemáticas y afines. Este premio fué establecido en 1848 en honor a J.C. Adams por su estudio en la predicción de la existencia de Neptuno, siendo los premios en un principio enfocados a problemas de Mecánica Celeste.

Al ver que en sus inicios el premio no tuvo mucho éxito, J.Challis, uno de los evaluadores del comité encargado del premio emprendió la meta de atraer más investigadores a ésta competencia, buscando temas relevantes de la época. Aquí es cuando Maxwell envía en Febrero de 1855 una carta a W. Thompson, jefe de Maxwell en ese momento, quién además estaba involucrado también en el comité de evaluadores (además, estaban S. Parkinson y J. Adams) comentándole¹:

" Los matemáticos de Cambridge no tienen experiencia en investigaciones que requieran cálculos matemáticos grandes."

haciendo alusión a la cantidad posible de cálculos que se necesitarían para estudiar la estabilidad de los anillos de Saturno ; además, agrega una sugerencia como posible tema del premio: realizar una " *investigación de las perturbaciones*

¹Ver [1], p.21

de las formas de los anillos de Saturno, considerándolos como un fluido". Al final, después de varias discusiones, el comité aprueba el título:

"El movimiento de los anillos de Saturno"

siendo considerado este problema como "el tenor general de las matemáticas de Cambridge" en ese momento, debido a las observaciones del "anillo interior obscuro" y los dos "anillos interiores brillantes" que hubo por parte de G.P. Bond y O. Struve en 1850. Una vez que sale la convocatoria, Maxwell se dedica a resolver el problema, empezando por la parte de cuerpo rígido, ya que ésta se juntó al mismo tiempo con su estudio de la "dinámica del trompo". En julio de 1856, Maxwell, en una carta a R. B.Litchfield, expresa su interés en estudiar la estabilidad de los anillos de Saturno, ya que lo considera como un "problema duro, pero curioso" ².

El 16 de Diciembre de 1856 (fecha límite), Maxwell entrega su estudio, siendo la única persona en participar (aparentemente), para que el 30 de Mayo de 1857, recibiera este prestigioso premio.

El informe oficial dictaminado por los evaluadores del premio fue ³:

El movimiento de los anillos de Saturno

"El problema es tratado bajo la suposición que el sistema de anillos es exactamente o muy aproximado a ser concéntrico con Saturno y puesto simétricamente en el plano de su Ecuador (Saturno), y diferentes hipótesis son hechas respecto a la constitución física de los anillos. Se suponen (1) que son rígidos; (2) que son fluidos, o en parte gaseosos; (3) que consisten en partículas de materia no conectadas. La pregunta será considerada a ser respondida mediante la comprobación de estas hipótesis, donde las condiciones de estabilidad mecánica se satisfacen por la atracción mutua y movimiento del Planeta y de los anillos.

Es deseable que una prueba (caso particular) pueda ser también determinada en las hipótesis anteriores para explicar de una mejor manera el brillo de los anillos y el reciente descubrimiento del anillo obscuro; y para indicar cualquier causa del cambio de forma, como se supone en la comparación de las observaciones modernas y las observaciones que se realizaron antes."

Entre 1857 y 1859, el estudio fue corregido y modificado para ser publicado en la revista "Proceedings of the Royal Society of Edinburgh" con el título⁴:

"Acerca de la estabilidad del movimiento de los anillos de Saturno"

²idem, p. 20, 411

³Ver [2], p. 288

⁴Ver [1], p.22

Cabe aclarar que, durante todo éste tiempo, Maxwell enfocó la mayoría de su tiempo en estudiar este problema, ya que hizo disparar su imaginación y fué un desafío para su intuición. Ésto lo hace evidente, cuando en la introducción de su artículo comenta ⁵:

"Hay algunas preguntas en la Astronomía, las cuales nos sentimos atraídos, si bien por su peculiaridad, como por la posible ilustración de un principio desconocido, que por cualquier ventaja directa que la solución pudiera permitir a la humanidad... Cuando contemplamos los anillos desde un punto de vista puramente científico, se convierten en los cuerpos más notables de los cielos, excepto, quizás, esos cuerpos aún menos útiles - Las nebulosas espirales. Cuando hemos visto pasar el gran arco sobre el ecuador del planeta sin ninguna conexión visible, no podemos dejar que nuestras mentes descansen en paz. No podemos simplemente admitir que tal es el caso y considerarlo como un hecho de la naturaleza, no admitiendo o requiriendo una explicación. Debemos entonces explicar su movimiento con los principios de la Mecánica, o admitir que, en los reinos de Saturno, puede haber movimiento regido por leyes que no son explicables."

Maxwell se enfoca en analizar el caso en que los anillos y Saturno son concéntricos. Este caso es el que de manera física se aproxima más a las condiciones reales para los anillos principales de Saturno. Además, para la hipótesis de los anillos rígidos, agrega un caso el cual considera a los anillos con una masa unida (que puede fungir como luna) y encuentra un resultado positivo en la estabilidad si se cumple una relación directa entre la masa unida y la masa total de los anillos.

En general, durante todo el estudio que hace Maxwell, hay cálculos que no quedan del todo claros o que, desde el punto de vista matemático no son formales, por lo que la intención de esta tesis es tratar de esclarecer el problema con las herramientas matemáticas que tenemos hoy en día, además de buscar la relación entre la masa unida y los anillos de manera más exacta. A lo largo de la tesis, iremos comparando los cálculos y resultados obtenidos.

En la tesis nos enfocaremos a plantear de nuevo el estudio hecho por Maxwell sólo para el caso de los anillos rígidos; la idea es plantear el problema y buscar sus condiciones de estabilidad con el lenguaje moderno y herramientas numéricas para así, buscar una mejor aproximación del estudio. Además de considerar el caso particular en que los anillos y Saturno son concéntricos, abarcaremos el caso general donde la configuración geométrica sea físicamente posible. Para ésto, buscaremos aproximar las condiciones y agregaremos cálculos numéricos para determinar las condiciones bajo casos particulares, dado que el problema no lo podemos resolver analíticamente.

⁵Ver [3], p. 82, 83

Por otro lado, a lo largo de la tesis, al final de algunos capítulos haremos referencia a los cálculos hechos por Maxwell.

La primera parte de la tesis comienza con el Capítulo 2, en donde plantearemos las ecuaciones de movimiento del Sistema que forma Saturno y los anillos; aquí comenzaremos a partir de las nociones básicas de mecánica clásica, donde iremos deduciendo las expresiones necesarias para poder plantear nuestro problema. Además, en el caso particular cuando los anillos tienen forma circular, obtendremos las ecuaciones de movimiento.

En el Capítulo 3 estaremos buscando, a partir de las ecuaciones obtenidas, las condiciones para que nuestro sistema pueda girar de manera uniforme; retomaremos el caso del anillo circular y veremos si puede existir movimiento uniforme o no. Posteriormente, buscaremos los parámetros para poder tener un movimiento estable, a partir de una aproximación a primer orden (serie de Taylor), buscando así, los intervalos donde se satisfacen las condiciones de estabilidad. Además, haremos un breve estudio del comportamiento del potencial y su derivada, para determinar si es posible o no un movimiento uniforme.

La segunda parte de la tesis empieza en el Capítulo 4, donde planteamos de nuevo el problema de los anillos rígidos, pero ahora con una masa unida a ellos.

Para el Capítulo 5, volvemos a estudiar las condiciones de estabilidad del problema.

En la tercera y última parte de la tesis, estudiamos el potencial gravitacional y sus derivadas para poder encontrar las condiciones de estabilidad de manera analítica. Para esto, en el Capítulo 6, calcularemos los coeficientes del caso sin masa unida.

En el Capítulo 7, encontraremos las condiciones bajo las cuales hay un movimiento estable, tomando en cuenta el caso particular en que Saturno y los anillos son concéntricos (caso estudiado por Maxwell) y el caso general, donde llegamos a una aproximación de la región de estabilidad, además de tener las condiciones de manera más general.

En el Capítulo 8, haremos un estudio numérico de las condiciones obtenidas en el Capítulo anterior y mostraremos resultados para diferentes casos, encontrando las condiciones de estabilidad numéricamente para el caso general.

Finalmente, establecemos las conclusiones generales de la tesis en el Capítulo 9.

Los apéndices están dedicados a la parte numérica, debido a que hay partes en el estudio donde no podemos llegar muy lejos analizando las fórmulas y es necesario apoyarnos en herramientas numéricas. Además, incluiremos tablas con los resultados numéricos obtenidos en el Capítulo 7.

Chapter 2

Planteamiento de las ecuaciones físicas

2.1 Deducción de las ecuaciones

En este capítulo deduciremos las ecuaciones que rigen el movimiento de los anillos, junto con Saturno, si son considerados como un solo anillo rígido. Para esto, definiremos ciertos conceptos físicos esenciales en el estudio de nuestro problema ¹.

Definición 1.0 .- Sea una partícula de masa m y posición en el espacio $x \in \mathbb{R}^3$, el momento p del cuerpo está definido como:

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$$

con $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\mathbf{x}$ la velocidad de la partícula.

Definición 1.1 (Segunda Ley de Newton) .- El movimiento de una partícula puntual de masa constante m queda dado por :

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}) = m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$$

con \mathbf{F} un campo vectorial real. A \mathbf{F} se le llama resultante de las fuerzas actuantes sobre la partícula.

Definición 1.2 .- Sea un sistema de n partículas puntuales, de masas constantes m_1, \dots, m_n respectivamente. Entonces el movimiento de las partículas queda dado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = m_i\ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde \mathbf{f}_{ij} es la fuerza que origina la partícula j -ésima sobre la partícula i -ésima en la dirección de $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$, y \mathbf{F}_i es la resultante de las fuerzas externas efectuadas por objetos externos al sistema.

¹Ver [4], p.8 - 14

Definición 1.3 (Tercera Ley de Newton) .- Por cada fuerza que ejerce sobre un cuerpo, éste realiza una fuerza igual pero de sentido opuesto sobre el cuerpo que la produjo, es decir:

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}.$$

Cabe aclarar que debido a que un cuerpo no ejerce fuerza sobre sí mismo, tenemos que $\mathbf{f}_{ii} = 0$.

Proposición 1.3 .- La suma de las derivadas de los momentos para un sistema es igual a la suma de las resultantes de las fuerzas externas sobre cada partícula.

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Demostración:

Tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{i,j}$$

pero por la definición 3 quedaría:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{ji} = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij}$$

y esto sólo se puede si:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = 0.$$

Por lo tanto la suma quedaría:

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

Q.E.D.

Otro concepto importante para establecer las ecuaciones de movimiento es el *centro de masa* y las propiedades que éste presenta.

Definición 1.4 .- El *centro de gravedad* o *centro de masa* de un sistema es el punto dado por :

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Para el caso de un cuerpo continuo con volumen V y masa M sería :

$$\left(\int_V dm \right) \bar{\mathbf{x}} = M \bar{\mathbf{x}} = \int_V \mathbf{x} dm.$$

Nota: Si el cuerpo se mueve, entonces tanto $\bar{\mathbf{x}}$ como V dependen del tiempo:

$$\left(\int_{V(t)} dm(t) \right) \bar{\mathbf{x}}(t) = M\bar{\mathbf{x}}(t) = \int_{V(t)} \mathbf{x} dm(t)$$

pero si el cuerpo es rígido, entonces $V(t) = \mathbf{T}(t)V(0)$ con $\mathbf{T}(t)$ un movimiento rígido, es decir $\|D\mathbf{T}(t)\| = 1$ y $\int_{V(t)} \mathbf{x} dm = \int_{V(0)} \mathbf{x} dm$ por lo que en las derivadas

$$\text{tendríamos } M\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \int_V \dot{\mathbf{x}} dm, \quad M\ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \int_V \ddot{\mathbf{x}} dm.$$

Definición 1.5 .- *El momento total de un sistema viene dado por la suma:*

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}_i.$$

Al igual que la definición anterior, para el caso de un cuerpo continuo sería:

$$\mathbf{P} = \int_V \dot{\mathbf{x}} dm.$$

Definición 1.6 .- *Un sistema se dice cerrado si no hay fuerzas externas actuantes.*

Teorema 1.1 (Centro de masa) .- *El centro de masa de un sistema tiene movimiento como si todas las masas estuvieran concentradas en él y todas las fuerzas externas fueran aplicadas a él:*

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\bar{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Demostración:

Por definición, el *momento total* está dado por $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}_i$, de donde, por la proposición 1.1, tenemos:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

Así, finalmente quedaría:

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\bar{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Q.E.D.

Corolario 1.1.- *Si no hay fuerzas externas en el sistema, el movimiento del centro de masa es uniforme y rectilíneo. En particular, se mantiene fijo si lo está al momento inicial.*

Definición 1.7.- *El momento angular de una partícula puntual de masa m está dado por:*

$$L = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$$

donde \wedge denota el producto vectorial usual.

Para un sistema, tendremos el concepto de *momento angular del sistema* que sería la suma de los momentos angulares de cada partícula $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n L_i$.

Teorema 1.2 (Conservación del momento angular) .- *El momento angular de un sistema con fuerzas centrales cerrado es constante.*

Demostración:

Tomemos la derivada del momento angular del sistema:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n \dot{L}_i = \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{x}}_i \wedge \mathbf{p}_i + \mathbf{x}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i)$$

pero por definición del momento, $\dot{\mathbf{x}}_i \wedge \mathbf{p}_i = \dot{\mathbf{x}}_i \wedge m_i \dot{\mathbf{x}}_i = 0$, con ésto:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \wedge \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{x}_i \wedge \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{x}_j \wedge \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{ji} \right) \\ &= - \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{x}_j \wedge \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \wedge \mathbf{f}_{ij}] = 0 \end{aligned}$$

porque \mathbf{f}_{ij} es paralelo al vector $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$. La derivada es cero, por lo que el momento angular del sistema se mantiene constante.

Q.E.D.

Definición 1.8 (Ley de gravitación universal) .- *La fuerza que ejerce una partícula puntual con masa m_2 sobre otra con masa m_1 es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:*

$$\mathbf{f}_{12} = - \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

con $\|\cdot\|$ la norma euclídeana entre vectores. A esta fuerza se le conoce como fuerza de gravitación.

Definición 1.9 (Trabajo) .- *El trabajo efectuado por una fuerza \mathbf{F} sobre una partícula durante una cierta trayectoria está definido por:*

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

En un sentido físico, el trabajo nos dice "cuánta energía costo" mover la partícula efectuando una fuerza F a lo largo de una trayectoria.

Definición 1.10 .- *Una fuerza F se dice que es conservativa si el trabajo efectuado por ella sólo depende de los puntos extremos de la trayectoria, es decir que la integral de la fuerza es independiente del camino que se tome.*

Teorema 1.3 .- *Si un sistema es conservativo, entonces existe una función escalar $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $U = U(\mathbf{x})$, tal que:*

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

Demostración:

Sea $U(\mathbf{x}) = -\int_1^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}'$, debido a que es conservativo, esta función está bien definida. Entonces, tenemos por el teorema fundamental del cálculo que:

$$-\nabla U(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Q.E.D.

A esta función escalar la llamaremos *el potencial* del sistema.

Proposición 1.2 .- Para la fuerza de gravitación entre dos partículas, el potencial entre ellas viene dado por:

$$U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}$$

Demostración:

Sólo basta con probar que el gradiente de esta función es justamente la fuerza gravitacional. Para la partícula 1 tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} (x_1 - x_2) \\ \frac{\partial U}{\partial y_1} &= \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} (y_1 - y_2) \\ \frac{\partial U}{\partial z_1} &= \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} (z_1 - z_2) \end{aligned}$$

con lo que llegamos a:

$$-\nabla_{\mathbf{x}_1} U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = f_{12}.$$

Para la partícula 2 se obtiene el mismo resultado de manera análoga.

Q.E.D.

Corolario 1.2 .- Para un sistema conservativo, el movimiento queda dado por:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} U.$$

Proposición 1.3 .- El movimiento entre dos partículas puntuales que interactúan entre sí, sin fuerzas externas, se efectúa en un plano.

Demostración:

Por el Teorema 1.2, tenemos que el momento angular es constante, es decir el vector perpendicular a la posición y a la velocidad. Ésto mismo nos indica que la velocidad y la posición están siempre en un mismo plano, perpendicular al vector constante L , por lo tanto el movimiento es plano.

Q.E.D.

Proposición 1.4 .- Sean m_1 la masa del cuerpo 1, m_2 la masa del cuerpo 2; Sean x_1 y x_2 las coordenadas de los mismos cuerpos respectivamente ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$), Entonces x_1 y x_2 pueden expresarse de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \end{aligned}$$

con $r = x_1 - x_2$, $r = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ y x_G el centro de masa de los dos cuerpos.

Demostración:

Tenemos por definición:

$$(m_1 + m_2) \mathbf{x}_G = m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2$$

además $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Resolviendo para \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_G + \frac{m_2}{m_1+m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_G - \frac{m_1}{m_1+m_2} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

En nuestro caso, la fuerza ejercida sobre un elemento del anillo \mathbf{x}_R con masa $\rho_R(\mathbf{x}_R) d\mathbf{x}_R^2$, debida a un elemento de Saturno \mathbf{x}_S de masa $\rho_S(\mathbf{x}_S) d\mathbf{x}_S$, como vemos en la Figura 1, sería:

$$\rho_R(\mathbf{x}_R) d\mathbf{x}_R \ddot{\mathbf{x}}_R = df_{RS} = \rho_R(\mathbf{x}_R) \rho_S(\mathbf{x}_S) \frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R\|^3} d\mathbf{x}_S d\mathbf{x}_R$$

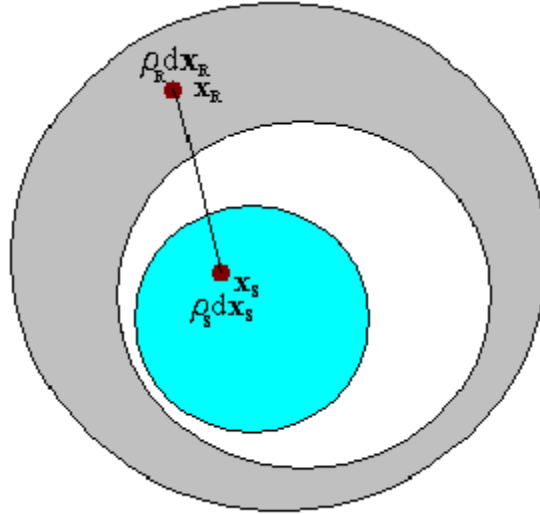


Fig.1

Ahora bien, si queremos obtener la fuerza ejercida por Saturno, sobre un elemento del anillo, tenemos que integrar la fuerza sobre todos los puntos de Saturno:

$$\begin{aligned} \rho_R(\mathbf{x}_R) d\mathbf{x}_R \ddot{\mathbf{x}}_R &= \iiint_S df_{RS} = \\ \rho_R(\mathbf{x}_R) d\mathbf{x}_R \ddot{\mathbf{x}}_R &= \iiint_S \rho_R(\mathbf{x}_R) \rho_S(\mathbf{x}_S) \frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R\|^3} d\mathbf{x}_S d\mathbf{x}_R. \end{aligned}$$

²Aquí $\rho(\mathbf{x})$ es la densidad del cuerpo rígido en el punto \mathbf{x} y la definimos como la cantidad de masa contenida en una unidad de área.

Si queremos obtener la fuerza ejercida por Saturno, sobre todo el anillo (considerando al anillo como un cuerpo plano), con el mismo razonamiento:

$$F_{RS} = \iint_R \iiint_S df_{RS} =$$

$$F_{RS} = \iint_R \left(\iiint_S \rho_R(\mathbf{x}_R) \rho_S(\mathbf{x}_S) \frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R\|^3} d\mathbf{x}_S \right) d\mathbf{x}_R.$$

Así quedaría para el anillo:

$$\iint_R \rho_R(\mathbf{x}_R) \ddot{\mathbf{x}}_R d\mathbf{x}_R = F_{RS} = \iint_R \left(\iiint_S \rho_R(\mathbf{x}_R) \rho_S(\mathbf{x}_S) \frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R\|^3} d\mathbf{x}_S \right) d\mathbf{x}_R.$$

Como sabemos que la fuerza central es una fuerza conservativa:

$$-\nabla_{\mathbf{x}_R} dU = \rho_R(\mathbf{x}_R) \rho_S(\mathbf{x}_S) \frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R\|^3} d\mathbf{x}_S d\mathbf{x}_R.$$

Por lo que el potencial entre dos puntos sería:

$$dU = -\rho_R(\mathbf{x}_R) \rho_S(\mathbf{x}_S) \frac{1}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R\|} d\mathbf{x}_S d\mathbf{x}_R.$$

Así que el potencial entre Saturno y el anillo sería:

$$U = -\iint_R \left(\iiint_S \rho_R(\mathbf{x}_R) \rho_S(\mathbf{x}_S) \frac{1}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R\|} d\mathbf{x}_S \right) d\mathbf{x}_R. \quad (2.1)$$

Definición 1.11 .- Un cuerpo se dice homogéneo si su densidad ρ es constante.

Teorema 1.4 .- El potencial gravitacional de un cuerpo homogéneo perfectamente esférico de radio a es el mismo que si fuera una partícula puntual de la misma masa localizada en su centro de gravedad³:

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{M}{R}$$

donde M es la masa total del cuerpo y R es el radio de la esfera.

Demostración:

Sea R la distancia del centro de gravedad del cuerpo a un punto arbitrario. El cuerpo es homogéneo, luego: $dm = \rho dV'$. La integral sería:

³Ver [5], p. 397 - 399

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\rho \iiint_M \frac{dV'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = -\rho \iiint_M \frac{dV'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

Haciendo un cambio de variables a coordenadas esféricas, tenemos que:

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \theta \sin \phi \\ y' &= r \sin \theta \sin \phi \\ z' &= r \cos \phi \\ dV' &= r^2 \sin \phi d\phi d\theta dr. \end{aligned}$$

Notemos que para calcular el potencial gravitacional en un punto arbitrario \mathbf{x} , observamos que por simetría el potencial debe ser 'radial', es decir, su dirección debe ser paralela con la de la recta que pasa por \mathbf{x}' y el punto \mathbf{x} ; además, debe depender sólo de R y no de su dirección. Como el punto \mathbf{x} es fijo, podemos hacer una rotación de las coordenadas hasta el punto $(0, 0, R)$ sin afectar el valor del potencial, por lo tanto:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi}.$$

El potencial quedaría:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= -\rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \phi d\phi d\theta dr}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi}} = \\ &= -\rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{-\rho}{2Rr'} \left[\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi} \right] r^2 \Big|_0^\pi d\theta dr \\ U(\mathbf{x}) &= -\rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{2Rr} [R + r - R + r] r^2 \Big|_0^\pi d\theta dr = -\frac{\rho}{R} 4\pi \frac{1}{3} a^3 = -\frac{M}{R} \end{aligned}$$

Q.E.D.

Corolario 1.2 .- La fuerza ejercida por la esfera sólida homogénea (densidad constante) sobre el punto x con masa m es $-\nabla_{\mathbf{x}}U$.

Demostración:

Tenemos que la fuerza estaría dada por:

$$-\iiint_M m\rho \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^3} d\mathbf{x}' = \iiint_M m f_{\mathbf{x}'\mathbf{x}} d\mathbf{x}' = m \iiint_M f_{\mathbf{x}'\mathbf{x}} d\mathbf{x}' = -\nabla_{\mathbf{x}}U.$$

Q.E.D.

Si consideramos a Saturno como una esfera sólida perfecta y homogénea, tendríamos que el potencial se reduciría a:

$$U = - \iint_R \left(\iiint_S \rho_R(\mathbf{x}_R) \rho_S(\mathbf{x}_S) \frac{1}{\|\mathbf{x}_R - \mathbf{x}_S\|} d\mathbf{x}_S \right) d\mathbf{x}_R =$$

$$U = -m_S \iint_R \frac{\rho_R(\mathbf{x}_R)}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R\|} d\mathbf{x}_R \quad (2.2)$$

con m_S la masa de Saturno.⁴

Definimos el potencial del anillo V como $V = \frac{1}{m_S} U$.

Como Saturno tiene densidad constante, por la definición de centro de gravedad tenemos:

$$m_S \ddot{\mathbf{x}}_S = \iiint_S \rho_S \ddot{\mathbf{x}}_S d\mathbf{x}_S.$$

Sea \mathbf{x}_S el centro de gravedad de Saturno, \mathbf{x}_R el del anillo y \mathbf{x}_G el centro de gravedad de los dos cuerpos (Fig.2).

Por la definición de centro de gravedad:

$$(m_S + m_R) \mathbf{x}_G = m_S \mathbf{x}_S + m_R \mathbf{x}_R. \quad (2.3)$$

Por el *Corolario 1.1* tenemos que $\ddot{\mathbf{x}}_G = 0$. Por lo tanto se puede tomar el origen de coordenadas con respecto a G (con ésto tenemos que $\mathbf{x}_G = 0$) y A una dirección en el plano fija. Además tendríamos que por 2.3:

$$m_S \ddot{\mathbf{x}}_S = -m_R \ddot{\mathbf{x}}_R.$$

Así que $m_R \ddot{\mathbf{x}}_R = \nabla_{\mathbf{x}_S} U$; por lo tanto:

$$m_S \ddot{\mathbf{x}}_S = -\nabla_{\mathbf{x}_S} U = -m_S \nabla_{\mathbf{x}_S} V. \quad (2.4)$$

⁴Para el caso en tres dimensiones, véase [6], p. 277 - 285

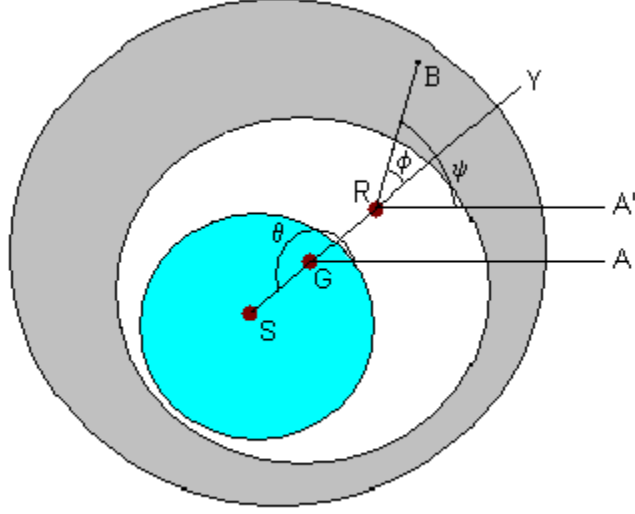


Fig.2

Definimos, en base a la figura 2, $AGS = \theta$ y $\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R = \mathbf{r}$. Con esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} GS = \mathbf{x}_S &= \frac{m_R}{m_S + m_R} \mathbf{r} \\ GR = \mathbf{x}_R &= -\frac{m_S}{m_S + m_R} \mathbf{r} \end{aligned}$$

Tomemos un punto fijo dentro del anillo, digamos en B , entonces $\phi = YRB$. Con este ángulo podremos saber todas las posiciones angulares dentro del anillo. Con los parámetros \mathbf{r} , θ y ϕ la configuración del sistema reducido está completa.

Además, tomamos el ψ ángulo entre las dos direcciones fijas y el centro de masa del anillo ($\psi = \angle A'RB$). De la definición de ψ observamos que:

$$\psi = A'RB = YRB + A'RY = \phi + \theta + \pi.$$

Para Saturno tenemos que sus coordenadas en polares estarían dadas por:

$$\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_S \cos \theta \\ r_S \sin \theta \end{bmatrix} = r_S \hat{\mathbf{r}}$$

con $r_S = \frac{m_R}{m_S + m_R} r$, $r = \|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R\|$. Entonces, la velocidad estaría dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}_S = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r}_S \cos \theta - r_S \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{r}_S \sin \theta + r_S \cos \theta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \dot{r}_S \hat{\mathbf{r}} + r_S \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

La aceleración sería:

$$\ddot{\mathbf{x}}_S = \begin{bmatrix} \ddot{x}_S \\ \ddot{y}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{r}_S \cos \theta - 2\dot{r}_S \sin \theta \dot{\theta} - r_S \cos \theta \dot{\theta}^2 - r_S \sin \theta \ddot{\theta} \\ \ddot{r}_S \sin \theta + 2\dot{r}_S \cos \theta \dot{\theta} - r_S \sin \theta \dot{\theta}^2 + r_S \cos \theta \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \\ \left(\ddot{r}_S - r_S \dot{\theta}^2 \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(2\dot{r}_S \dot{\theta} + r_S \ddot{\theta} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Expresemos el gradiente del potencial para Saturno en términos de coordenadas polares, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_S} &= \frac{\partial V}{\partial r_S} \frac{\partial r_S}{\partial x_S} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_S} = \frac{\partial V}{\partial r_S} \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r_S} \\ \frac{\partial V}{\partial y_S} &= \frac{\partial V}{\partial r_S} \frac{\partial r_S}{\partial y_S} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y_S} = \frac{\partial V}{\partial r_S} \sin \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r_S} \end{aligned}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_S} V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial r_S} \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r_S} \\ \frac{\partial V}{\partial r_S} \sin \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r_S} \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial r_S} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r_S} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Así, por el *Corolario 1.2*, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$m_S \ddot{\mathbf{x}}_S = -m_S \nabla_{\mathbf{x}_S} V$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} m_S \left[\left(\ddot{r}_S - r_S \dot{\theta}^2 \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(2\dot{r}_S \dot{\theta} + r_S \ddot{\theta} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] &= -m_S \left[\frac{\partial V}{\partial r_S} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r_S} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \\ m_S \left(\ddot{r}_S - r_S \dot{\theta}^2 \right) &= -m_S \frac{\partial V}{\partial r_S} \\ m_S \left(2\dot{r}_S \dot{\theta} + r_S \ddot{\theta} \right) &= m_S \frac{1}{r_S} \frac{d}{dt} \left(r_S^2 \dot{\theta} \right) = -m_S \frac{1}{r_S} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{aligned}$$

por lo que queda:

$$\begin{aligned} \left(\ddot{r}_S - r_S \dot{\theta}^2 \right) + \frac{\partial V}{\partial r_S} &= 0 \\ \left(2\dot{r}_S \dot{\theta} + r_S \ddot{\theta} \right) + \frac{1}{r_S} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que:

$$\frac{\partial V}{\partial r_S} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_S} = \frac{m_R + m_S}{m_R} \frac{\partial V}{\partial r}$$

por lo que si sustituimos el valor de r_S en función de r quedarían las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) + \frac{\partial V}{\partial r} &= 0 \\ \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \left(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora analizaremos el caso de las ecuaciones de movimiento del anillo.

Proposición 1.5 .- Las ecuaciones de movimiento para el anillo están dadas por:

$$m_R \ddot{\mathbf{x}}_R = \nabla_{\mathbf{x}_S} U$$

donde x_R es el centro de gravedad del anillo y U es el potencial dado por 2.2.

Demostración:

Tomamos dos puntos distintos dentro del anillo B_1 y B_2 separados desde el centro de masa del anillo (R) por un ángulo β , como se observa en la figura 3.

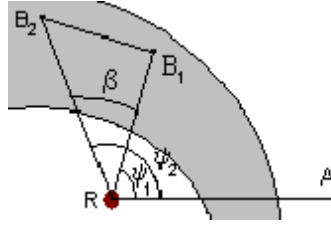


Fig.3

Notemos que, por la definición de cuerpo rígido, β es constante; así el triángulo $\Delta RB_2 B_1$ no cambia cuando el anillo gira; además $\psi_2 = \psi_1 + \beta$, por lo que:

$$\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}.$$

Con esto vemos que la velocidad de rotación alrededor del centro de masa del anillo es la misma para todos los puntos del anillo.

Por otro lado, si tomamos el centro de coordenadas G , podemos descomponer el vector que une ese punto al punto fijo B , y escribir \overline{GB} como :

$$\overline{GB} = \overline{GR} + \overline{RB}$$

pero:

$$\overline{RB} = \begin{bmatrix} \gamma \cos \psi \\ \gamma \sin \psi \end{bmatrix} = \gamma \hat{\gamma}.$$

Sabemos que γ es constante en el tiempo por ser el anillo un cuerpo rígido, por lo que:

$$\frac{d}{dt} (\overline{RB}) = \begin{bmatrix} -\gamma \sin \psi \dot{\psi} \\ \gamma \cos \psi \dot{\psi} \end{bmatrix} = \gamma \dot{\psi} \hat{\Psi}$$

entonces:

$$\bar{v}_{GB} = \frac{d}{dt} (\overline{GB}) = \frac{d}{dt} (\overline{GR}) + \frac{d}{dt} (\overline{RB}) = \bar{V}_{GR} + \gamma \dot{\psi} \hat{\Psi}.$$

Así, tendríamos que la velocidad para cualquier punto B , puede dividirse en la velocidad del centro de masa del anillo (\bar{V}_{GR} no dependiente de B) y la velocidad de giro del punto B con respecto al centro de masa del anillo ($\gamma\dot{\psi}\hat{\Psi}$ no dependiente de B).

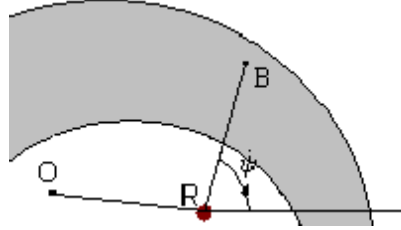


Fig.4

Si tomamos el vector \overline{RB} , tenemos que:

$$\|\overline{RB}\|^2 = cte.$$

Por lo que $\overline{RB} \perp \frac{d}{dt}(\overline{RB})$ y esto implica que $\hat{\Psi}$ puede verse como $\hat{\Psi} = \hat{k} \wedge \hat{\gamma}$, donde \hat{k} es el vector unitario en la dirección z .

Si suponemos que la densidad del punto B es $\rho_R(B)$, tendríamos:

$$\rho_R(B) \bar{v}_{GB} = \rho_R(B) \bar{V}_{GR} + \rho_R(B) \gamma \dot{\psi} (\hat{k} \wedge \hat{\gamma}). \quad (2.5)$$

Integramos sobre cada punto B perteneciente al anillo:

$$\begin{aligned} \int_R \rho_R(B) \bar{v}_{GB} d\mathbf{x}_B &= \int_R \rho_R(B) \bar{V}_{GR} d\mathbf{x}_B + \int_R \rho_R(B) (\gamma \dot{\psi} \hat{\Psi}) d\mathbf{x}_B = \\ &= \left(\int_R \rho_R(B) d\mathbf{x}_B \right) \bar{V}_{GR} + \dot{\psi} \hat{k} \wedge \left(\int_R \rho_R(B) \overline{RB} d\mathbf{x}_B \right). \end{aligned}$$

Pero $\int_R \rho_R(B) d\mathbf{x}_B = m_R$ y de la definición de centro de gravedad tenemos que $\int_R \rho_R(B) \overline{RB} d\mathbf{x}_B = 0$ (porque R es justo el centro de gravedad del anillo).

Así quedaría:

$$\int_R \rho_R(B) \bar{v}_{GB} d\mathbf{x}_B = m_R \bar{V}_{GR}.$$

Con esto, podemos concluir que el estudio del movimiento sobre el anillo rígido es equivalente a estudiar una masa puntual de masa m_R ubicada en el centro de gravedad del anillo, ya que por la definición de fuerza tenemos que:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \frac{d}{dt} \left(\int_R \rho_R(B) \bar{v}_{GB} d\mathbf{x}_B \right) = \frac{d}{dt} (m_R \bar{V}_{GR}) = m_R \dot{\bar{V}}_{GR}.$$

Por otro lado, analizando las fuerzas que actúan sobre cualquier punto del anillo B , sólo existe la fuerza $f_S(B)$ ejercida por Saturno, por lo que por la 2ª Ley de Newton y de 2.5 tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_R(B)\bar{v}_{GB}) &= \frac{d}{dt}\left(\rho_R(B)\bar{V}_{GR} + \rho_R(B)\dot{\psi}\left(\hat{k} \wedge \overline{RB}\right)\right) \\ &= \rho_R(B)\dot{\bar{V}}_{GR} + \rho_R(B)\ddot{\psi}\left(\hat{k} \wedge \overline{RB}\right) + \rho_R(B)\dot{\psi}\left(\hat{k} \wedge \frac{d}{dt}\left(\overline{RB}\right)\right) \\ &= \rho_R(B)\dot{\bar{V}}_{GR} + \rho_R(B)\ddot{\psi}\left(\hat{k} \wedge \overline{RB}\right) + \rho_R(B)\dot{\psi}\left[\hat{k} \wedge \left(\dot{\psi}\left(\hat{k} \wedge \overline{RB}\right)\right)\right] = f_S(B). \end{aligned}$$

Integrando esta igualdad sobre todo el anillo quedaría:

$$\begin{aligned} \int_R \int f_S(B) d\mathbf{x}_B &= \int_R \int \rho_R(B) \dot{\bar{V}}_{GR} d\mathbf{x}_B + \int_R \int \rho_R(B) \ddot{\psi} \left(\hat{k} \wedge \overline{RB} \right) d\mathbf{x}_B + \\ &\quad \dot{\psi}^2 \int_R \int \rho_R(B) \left[\hat{k} \wedge \left(\hat{k} \wedge \overline{RB} \right) \right] d\mathbf{x}_B \\ &= \left(\int_R \rho_R(B) d\mathbf{x}_B \right) \dot{\bar{V}}_{GR} + \ddot{\psi} \hat{k} \wedge \left(\int_R \rho_R(B) \overline{RB} d\mathbf{x}_B \right) + \\ &\quad \dot{\psi}^2 \left[\hat{k} \wedge \hat{k} \wedge \left(\int_R \rho_R(B) \overline{RB} d\mathbf{x}_B \right) \right] \end{aligned}$$

ya que $\dot{\psi}$ y $\ddot{\psi}$ no dependen de B .

Simplificando esta expresión finalmente nos quedaría:

$$\int_R \int f_S(B) d\mathbf{x}_B = m_R \dot{\bar{V}}_{GR}.$$

pero $f_S(B) = \frac{\rho_R(\mathbf{x}_B)m_s}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_B\|^3} (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_B)$, así que:

$$\int_R \int f_S(B) d\mathbf{x}_B = m_s \int_R \int \frac{\rho_R(\mathbf{x}_B)}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_B\|^3} (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_B) d\mathbf{x}_B.$$

El potencial de Saturno sobre el anillo es:

$$U(\mathbf{x}_S) = -m_s \int_R \int \frac{\rho_R(\mathbf{x}_B)}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_B\|} d\mathbf{x}_B$$

por lo que tenemos:

$$m_R \dot{\bar{V}}_{GR} = m_R \ddot{\mathbf{x}}_R = \nabla_{\mathbf{x}_S} U.$$

Con esto, queda justificada la fórmula para $\ddot{\mathbf{x}}$.

Q.E.D.

Lo siguiente es obtener las ecuaciones de movimiento del anillo visto como un cuerpo puntual.

Las coordenadas en polares para centro de gravedad del anillo serían:

$$\overline{GR} = \mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_R \cos(\theta - \pi) \\ r_R \sin(\theta - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_R \cos \theta \\ -r_R \sin \theta \end{bmatrix} = -r_R \hat{\mathbf{r}}.$$

Tomando en cuenta que:

$$\nabla_{\mathbf{x}_R} V = -\nabla_{\mathbf{x}_S} V$$

el gradiente del potencial para el anillo sería:

$$\nabla_{\mathbf{x}_R} V = \begin{bmatrix} -\frac{\partial V}{\partial r_S} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r_S} \\ -\frac{\partial V}{\partial r_S} \sin \theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r_S} \end{bmatrix} = -\frac{\partial V}{\partial r_S} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r_S} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación:

$$m_R \ddot{\mathbf{x}}_R = -m_S \nabla_{\mathbf{x}_R} V = m_S \nabla_{\mathbf{x}_S} V$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} m_R \left[\left(\ddot{r}_R - r_R \dot{\theta}^2 \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(2\dot{r}_R \dot{\theta} + r_R \ddot{\theta} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] &= -m_S \left[-\frac{\partial V}{\partial r_S} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r_S} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \\ m_R \left(\ddot{r}_R - r_R \dot{\theta}^2 \right) &= m_S \frac{\partial V}{\partial r_S} \\ m_R \left(2\dot{r}_R \dot{\theta} + r_R \ddot{\theta} \right) &= \frac{m_S}{r_S} \frac{\partial V}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de r_R y r_S en función de r quedaría:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) + \frac{\partial V}{\partial r} &= 0 \\ \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \left(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned}$$

Son las mismas ecuaciones obtenidas para Saturno, que era justo lo que se esperaba.

Queda una ecuación por deducir, la cual la obtendremos con la consideración del anillo como un cuerpo rígido⁵.

Definición 1.12 .- *El momento de inercia de un sistema con respecto a un eje fijo se define por:*

$$I = \sum m_i r_i^2$$

con m_i la masa de la partícula i del sistema, y r_i la distancia de la partícula i al eje.

Definición 1.13 .- *El momento de inercia de un cuerpo continuo con respecto a un eje fijo se define por:*

⁵Ver [5], p. 396 - 399

$$I = \int r^2 dm$$

con r_i la distancia de cada punto del cuerpo al eje.

Definición 1.14 .- El torque de una fuerza \mathbf{F} respecto a un eje fijo O se define por:

$$\tau = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$$

con r la distancia del eje O a la fuerza aplicada (radio de giro).

Proposición 1.5 .- La derivada del momento angular de un sistema de partículas es igual al torque de las fuerzas exteriores que actúan sobre las partículas del sistema.

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n \tau_i.$$

Demostración:

Tomemos la derivada del momento angular del sistema:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n \dot{L}_i = \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{x}}_i \wedge \mathbf{p}_i + \mathbf{x}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i).$$

Pero por definición del momento, $\dot{\mathbf{x}}_i \wedge \mathbf{p}_i = \dot{\mathbf{x}}_i \wedge m_i \dot{\mathbf{x}}_i = 0$, con esto:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \wedge \left(F_i + \sum_{j=1}^n f_{ij} \right).$$

Por el Teorema 1.2 se tiene que el torque total de las fuerzas internas es cero:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \wedge F_i = \sum_{i=1}^n \tau_i$$

Q.E.D.

Proposición 1.6.- El momento angular para un sistema de partículas que rotan rígidamente en un plano XY viene dado por:

$$L = I \dot{\psi} \hat{k}$$

con $\dot{\psi}$ la velocidad de rotación de todas las partículas e I el momento de inercia de todo el sistema.

Demostración:

Supongamos que $\mathbf{x}_i = (r_i \cos(\psi + \alpha_i), r_i \sin(\psi + \alpha_i), 0)$ entonces

$$\mathbf{p}_i = \left(-m_i r_i \dot{\psi} \sin(\psi + \alpha_i), m_i r_i \dot{\psi} \cos(\psi + \alpha_i), 0 \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

luego, por definición:

$$L = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{p}_i = \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 m_i \dot{\psi} \right) \hat{k} = I \dot{\psi} \hat{k}.$$

Q.E.D.

Corolario 1.3 .- *El momento angular para un cuerpo rígido que rota en un plano XY viene dado por:*

$$L = I \dot{\psi} \hat{k}$$

con $\dot{\psi}$ la velocidad de rotación del cuerpo e $I = \int r^2 dm$ su momento de inercia.

Aquí hagamos notar que todo punto del cuerpo se mueve a la misma velocidad angular $\dot{\psi}$.

Definición 1.15 .- *Definimos el radio de giro k de un cuerpo rígido de masa M y momento de inercia I que gira con respecto a un eje dado de la forma:*

$$k^2 = \frac{I}{M}.$$

El radio de giro representaría la magnitud de la distancia al eje dado si el cuerpo rígido fuera una masa puntual concentrada en el centro de masa.

Teorema 1.5 .- *Para un cuerpo que rota en un plano se tiene la ecuación:*

$$I \ddot{\psi} = \sum_{i=1}^n \tau_i$$

con τ_i los torques de las fuerzas externas sobre el cuerpo en la dirección \hat{k} y $\ddot{\psi}$ la aceleración angular del cuerpo.

En el caso del torque de los anillos sobre Saturno, físicamente nos diría que la tendencia a girar de los centros de masa de Saturno y los anillos es la aceleración del ángulo de giro por el momento de inercia de los anillos.

Demostración:

Por el *Corolario 1.3* tenemos la relación:

$$L = I \dot{\psi} \hat{k}.$$

Además, por la proposición 1.6 si tomamos la derivada del momento angular:

$$\dot{L} = I \ddot{\psi} \hat{k} = \sum_{i=1}^n \tau_i \hat{k}$$

ya que I es constante en el tiempo.

Q.E.D.

Proposición 1.7 .- *El torque del anillo homogéneo está dado por:*

$$m_R k^2 \ddot{\psi} = m_S \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Demostración:

Para el anillo, el momento de inercia viene dado por:

$$I = \int_R \int \rho_R(B) \|\overline{RB}\|^2 d\mathbf{x}_B = m_R k^2.$$

Por otro lado, para cada punto B del anillo, la fuerza ejercida por Saturno $f_S(B)$ hace un torque con respecto al centro de gravedad del anillo R :

$$\tau_B = \overline{RB} \wedge f_S(B) = (\overline{RS} + \overline{RB} - \overline{RS}) \wedge f_S(B).$$

pero $\overline{RB} - \overline{RS} = \overline{SB} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_S$ y $\overline{RS} = r_S \hat{\mathbf{r}}$:

$$\tau_B = r_S \hat{\mathbf{r}} \wedge f_S(B) + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_S) \wedge f_S(B) = r_S \hat{\mathbf{r}} \wedge f_S(B)$$

ya que $\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_B$ es paralelo a $f_S(B)$. Por el *Teorema 1.5*:

$$\left(I_B \ddot{\psi}_B \right) \hat{\mathbf{k}} = \left(\rho_R(B) \|\overline{RB}\|^2 \ddot{\psi}_B \right) \hat{\mathbf{k}} = r_S \hat{\mathbf{r}} \wedge f_S(B).$$

Integrando sobre todos los puntos del anillo:

$$\begin{aligned} \left(\int_R \int I_B \ddot{\psi}_B d\mathbf{x}_B \right) \hat{\mathbf{k}} &= \left(\int_R \int \ddot{\psi}_B \rho_R(B) \|\overline{RB}\|^2 d\mathbf{x}_B \right) \hat{\mathbf{k}} = \int_R \int r_S \hat{\mathbf{r}} \wedge f_S(B) d\mathbf{x}_B \\ &= \left(\int_R \int I_B \ddot{\psi}_B d\mathbf{x}_B \right) \hat{\mathbf{k}} = r_S \hat{\mathbf{r}} \wedge \left(\int_R \int f_S(B) d\mathbf{x}_B \right) \end{aligned}$$

pero $\ddot{\psi}_B$ es independiente del punto tomado por lo que $\ddot{\psi}_B = \ddot{\psi}$, además, por la *Definición 1.15*:

$$\left(\int_R \int I_B \ddot{\psi}_B d\mathbf{x}_B \right) \hat{\mathbf{k}} = I \ddot{\psi} = m_R k^2 \ddot{\psi}.$$

Ahora bien, sabemos que $\int_R \int f_S(B) d\mathbf{x}_B = m_S \nabla_{\mathbf{x}_S} V$ y poniendo el potencial en coordenadas polares:

$$\left(m_R k^2 \ddot{\psi} \right) \hat{\mathbf{k}} = r_S \hat{\mathbf{r}} \wedge m_S \left(\frac{\partial V}{\partial r_S} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r_S} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) = \left(m_S \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

por lo que finalmente quedaría:

$$m_R k^2 \ddot{\psi} = m_S \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Q.E.D.

Así, las tres ecuaciones que describen el movimiento de nuestro sistema serían:

$$\left(\frac{m_R}{m_R + m_S}\right)^2 \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{m_R}{m_R + m_S}\right)^2 \left(2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad (2.7)$$

$$m_R k^2 \ddot{\psi} = m_S \frac{\partial V}{\partial \theta}. \quad (2.8)$$

donde $\psi = \theta + \phi - \pi$.

Ahora bien, a partir de este momento, nuestro estudio se enfocará en el caso en que el anillo tiene forma circular.

2.2 Caso particular: anillo circular

Tomando el caso particular de que el anillo fuera un disco circular homogéneo, con ésto, el centro de gravedad del anillo va a coincidir con su centro geométrico (Fig.5):

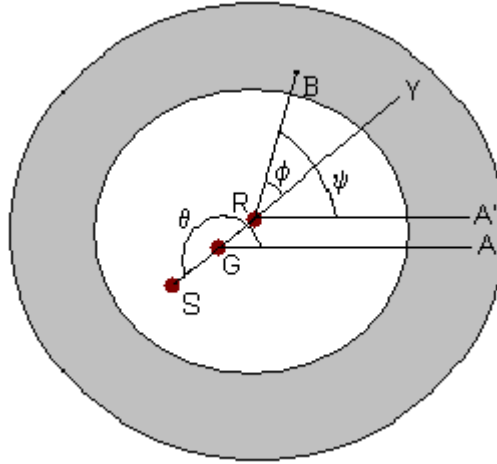


Fig.5

Así, para cada elemento \mathbf{x}_R del anillo, tendríamos que:

$$\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_R = (\mathbf{x}_S - \mathbf{R}) - (\mathbf{x}_R - \mathbf{R}) = \mathbf{r} - \gamma \hat{\boldsymbol{\gamma}}$$

donde \mathbf{R} es el centro del anillo. Además notemos que $\gamma\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \gamma \cos \psi \\ \gamma \sin \psi \end{bmatrix}$ con γ el radio del centro al punto. Por lo que quedaría la distancia:

$$\|\mathbf{x}_R - \mathbf{x}_S\|^2 = r^2 + \gamma^2 - 2r\gamma \cos(\pi - \phi) = r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi.$$

Así que el potencial del anillo V vendría expresado por:

$$V(r) = -\rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi}} d\phi d\gamma$$

donde vemos que no depende de θ , por lo que $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$. Por lo que el potencial sólo es dependiente de r . Así, las ecuaciones de movimiento quedarían:

$$\left(\frac{m_R}{m_R + m_S}\right)^2 \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{m_R}{m_R + m_S}\right)^2 \left(2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = 0 \quad (2.10)$$

$$m_R k^2 \ddot{\psi} = 0. \quad (2.11)$$

Teorema 1.6 .- *La energía de Saturno dada por:*

$$E = \frac{1}{2} \left(\dot{r}_S^2 + r_S^2 \dot{\theta}^2 \right) + V$$

se conserva, es decir, $\dot{E} = 0$.

Demostración:

Si multiplicamos la ecuación 2.10 por r :

$$2r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0$$

por lo que tendríamos que:

$$r^2\dot{\theta} = C.$$

Ésta expresión la conocemos como el "Momento angular".

Ahora bien, para 2.11 tenemos:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\psi}) = 0$$

por lo que:

$$\dot{\psi} = \psi_0.$$

Así tenemos:

$$\psi = \psi_0 t + \phi_0$$

si sustituimos la ecuación en 2.9:

$$\left(\frac{m_R}{m_R+m_S}\right)^2 \left(\ddot{r} - C^2 \frac{1}{r^3}\right) + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

multiplicando la ecuación por \dot{r} e integrando:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_R}{m_R+m_S}\right)^2 \left(\dot{r}\ddot{r} - \dot{r}C^2 \frac{1}{r^3}\right) + \dot{r} \frac{\partial V}{\partial r} &= 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{m_R}{m_R+m_S}\right)^2 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) + V &= cte. \end{aligned}$$

Si regresamos a términos de r_S :

$$\frac{1}{2} \left(\dot{r}_S^2 + r_S^2 \dot{\theta}^2\right) + V = E = cte.$$

Q.E.D.

2.3 Comentarios al Capítulo

En este capítulo dedujimos las ecuaciones de movimiento del sistema para el anillo como un cuerpo rígido con distribución de masa homogénea y Saturno como una esfera perfecta y de densidad homogénea, partiendo de las leyes de Newton y deduciendo las expresiones necesarias para las ecuaciones de movimiento. Además, pudimos demostrar que el problema de los anillos rígidos homogéneos alrededor de Saturno es equivalente a estudiar un problema de masas puntuales junto con la ecuación de inercia de los anillos. Estudiamos el caso particular en que los anillos son circulares y obtuvimos sus ecuaciones de movimiento.

Por la parte del estudio de Maxwell, el planteamiento de las ecuaciones es muy similar al nuestro, dado que es un problema clásico y desde el punto de vista de la mecánica de sólidos no es complejo (su planteamiento).

Maxwell comienza definiendo r y θ , junto con las relaciones geométricas entre el centro de masa de Saturno y de los anillos. Después define las fuerzas que se encuentran inmersas en el problema (fuerza potencial de cada partícula de los anillos hacia Saturno y viceversa), para una vez definidas, proceder a plantear las ecuaciones mediante las leyes de Newton. Las ecuaciones que él obtiene son⁶:

⁶Ver [2], p. 298

$$\begin{aligned}
m_R \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) - (m_R + m_S) \frac{\partial V}{\partial r} &= 0 \\
m_R \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) + (m_R + m_S) \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0 \\
m_R k^2 \ddot{\phi} - m_S \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0
\end{aligned}$$

donde ϕ es el ángulo que forma un punto fijo en el anillo y la línea que gira entre los centros de masa ⁷

Vemos aquí, que difieren las ecuaciones obtenidas por Maxwell, de las nuestras. Esto se debe a que Maxwell cuando plantea las fuerzas dentro del sistema, toma en cuenta la dirección tangencial de ϕ , por lo que la fuerza tangencial del potencial la considera como $(m_R + m_S) \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi}$. Caso similar para la ecuación del momento de inercia.

A pesar de que a primera vista se puede pensar que las ecuaciones de Maxwell son erróneas, a lo largo del estudio cambia arbitrariamente ϕ por θ , por lo que no podemos estar totalmente seguros de que sea un error en el planteamiento de las ecuaciones o un error tipográfico.

Tenemos además que hay un error en la relación de masas, ya que hace falta un término $\left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)$ que multiplica a las aceleraciones radial y tangencial, el cual sale al cambiar r_S ó r_R por r en el gradiente del potencial.

A partir de este momento, vemos que hay diferencias en el cálculo que hizo Maxwell y el que hemos planteado nosotros utilizando razonamientos matemáticos modernos. Más adelante veremos las diferencias notables en los resultados que obtenemos las dos partes.

⁷Ver Fig. 2

Chapter 3

Estabilidad

3.1 Condiciones para que el sistema se mueva uniformemente.

Una de las condiciones para que el sistema sea estable, es que tenga movimiento uniforme, lo que implica que gire a una velocidad constante, es decir una rotación uniforme ($\dot{\theta} = cte = \omega^2$), durante la cual, la posición del centro de Saturno con respecto al anillo no cambie.

Proposición 1.8 .- *Las soluciones con movimiento uniforme del sistema 2.9, 2.10 y 2.11 son de la forma:*

$$\begin{aligned}r &= r_0 \\ \theta &= \omega t \\ \psi &= \psi_0 t + \phi_0.\end{aligned}$$

Demostración:

Como $\dot{\theta} = cte$, tenemos que para la ecuación 2.10:

$$\left(\frac{m_R}{m_R+m_S}\right)^2 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

esto implica que:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0 \\ r &= r_0\end{aligned}$$

de la ecuación 2.11 quedaría:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \psi_0 \\ \psi &= \psi_0 t + \phi_0.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Por otro lado, la ecuación 2.9 se reduciría a:

$$\left(\frac{m_R}{m_R+m_S}\right)^2 r \dot{\theta}^2 = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Así, las condiciones necesarias para que el movimiento se mueva uniformemente serían:

$$\omega^2 = \left(\frac{m_R + m_S}{m_R}\right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} > 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad (3.2)$$

3.1.1 Caso Particular: anillo circular

Para el caso del anillo circular, obtendremos los parámetros para tener un movimiento uniforme. Cuando el centro del anillo coincide con el centro de Saturno tendríamos $r_0 = 0$ y por tanto podemos ver que la θ no estaría definida en este caso.

Proposición 1.9: $r = 0$ y $\dot{\psi} = \psi_0$ es solución para el sistema 2.9, 2.10 y 2.11, pero el movimiento no puede ser uniforme.

Demostración:

Considerando que $\frac{\partial V}{\partial r} |_{r=0} = 0$, para r muy pequeña, tendríamos que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} |_{r=0}.$$

Lo cual, para $r = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} |_{r=0} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{-3\gamma(\gamma \cos \phi)^2}{(\gamma^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\gamma}{(\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \right) d\phi d\gamma \\ &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{-3 \cos^2 \phi}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) d\phi d\gamma \\ &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{-3 \cos 2\phi}{2\gamma^2} - \frac{1}{2\gamma^2} \right) d\phi d\gamma \\ &= \pi \rho_R \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) < 0 \end{aligned}$$

por lo que:

$$\omega^2 |_{r=0} = \left(\frac{m_R+m_S}{m_R}\right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} |_{r=0} < 0.$$

Entonces no podría haber un movimiento uniforme, en el sentido de que ω no está definido.

Q.E.D.

De manera general, para ver si podemos tener movimiento uniforme, necesitamos saber los valores de $\frac{\partial V}{\partial r}$ para ver si son positivos.

Esta solución lo que nos dice en un sentido físico, es que es posible tener movimiento cuando los anillos y Saturno son concéntricos y los anillos giran uniformemente alrededor de Saturno para todo tiempo; ω no estaría definida, porque ni Saturno ni los anillos se trasladarían¹.

3.2 Movimiento perturbado.

Una vez que obtuvimos las condiciones para que el sistema se mueva de manera uniforme, lo siguiente es verificar que sea estable, esto es, que bajo perturbaciones pequeñas, el sistema se pueda mantener girando sin colapsar o desintegrarse. Ésto lo aplicamos además, porque en la realidad, los sistemas nunca están aislados y siempre están sujetos a perturbaciones externas, las cuales pueden sacarlos de estabilidad para que choquen.

En el caso de Saturno y los anillos, es importante estudiar el movimiento perturbado, ya que buscamos soluciones que sean válidas para todo momento.

3.2.1 Deducción de las ecuaciones

Para estudiar el movimiento perturbado, haremos un cambio de variable para \mathbf{x} en coordenadas cartesianas introduciendo un nuevo sistema de coordenadas (ξ, η) que está rotando a la velocidad angular ω :

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t \\y &= \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t.\end{aligned}$$

Teorema 1.7: *el sistema 2.9, 2.10 y 2.11 es equivalente, en coordenadas rotantes (ξ, η) a las ecuaciones:*

$$\begin{aligned}\left(\frac{m_R}{m_R+m_S}\right)^2 (\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi) &= -\frac{\partial V}{\partial \xi} \\ \left(\frac{m_R}{m_R+m_S}\right)^2 (\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta) &= -\frac{\partial V}{\partial \eta} \\ m_R k^2 \ddot{\psi} &= 0.\end{aligned}$$

Demostración:

La ecuación 2.11 se mantiene igual, ya que en este caso, V no depende de ψ .

Tomando la primera y segunda derivadas de \mathbf{x} :

¹Ver Fig. 5

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{\xi} \cos \omega t - \dot{\eta} \sin \omega t - \omega \xi \sin \omega t - \omega \eta \cos \omega t \\
\dot{y} &= \dot{\xi} \sin \omega t + \dot{\eta} \cos \omega t + \omega \xi \cos \omega t - \omega \eta \sin \omega t \\
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi} + \omega \xi \\ \dot{\eta} - \omega \eta \end{bmatrix} \\
\ddot{x} &= \ddot{\xi} \cos \omega t - 2\omega \dot{\xi} \sin \omega t - \ddot{\eta} \sin \omega t - 2\omega \dot{\eta} \cos \omega t - \omega^2 \xi \cos \omega t + \omega^2 \eta \sin \omega t \\
\ddot{y} &= \ddot{\xi} \sin \omega t + 2\omega \dot{\xi} \cos \omega t + \ddot{\eta} \cos \omega t - \omega \dot{\eta} \sin \omega t - \omega^2 \xi \sin \omega t - \omega^2 \eta \cos \omega t \\
\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} - 2\omega \dot{\eta} - \omega^2 \xi \\ \ddot{\eta} + 2\omega \dot{\xi} - \omega^2 \eta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

para el potencial:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \cos \omega t - \frac{\partial V}{\partial \eta} \sin \omega t \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \sin \omega t + \frac{\partial V}{\partial \eta} \cos \omega t \\
\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \xi} \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

sustituyendo en las ecuaciones 2.10 y 2.11:

$$\left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} - 2\omega \dot{\eta} - \omega^2 \xi \\ \ddot{\eta} + 2\omega \dot{\xi} - \omega^2 \eta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \xi} \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Eliminando la matriz de rotación:, quedarían las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \left(\ddot{\xi} - 2\omega \dot{\eta} - \omega^2 \xi \right) &= - \frac{\partial V}{\partial \xi} \\
\left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \left(\ddot{\eta} + 2\omega \dot{\xi} - \omega^2 \eta \right) &= - \frac{\partial V}{\partial \eta} \\
m_R k^2 \ddot{\psi} &= 0.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Las condiciones de movimiento uniforme: $r = r_0$ y $\theta = \omega t$ en coordenadas rotantes serían $\xi = \xi_0$ y $\eta = \eta_0$, por lo que las derivadas en ξ y η serían cero y quedaría la condición:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} \Big|_{(\xi_0, \eta_0)} = \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \omega^2 \xi_0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} \Big|_{(\xi_0, \eta_0)} = \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \omega^2 \eta_0. \quad (3.4)$$

Sean (ξ_0, η_0) las soluciones del movimiento uniforme, y sean (ξ_1, η_1) las soluciones del problema perturbado a primer orden; con ésto, podemos escribir la solución de la forma:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \xi_1 \\ \eta &= \eta_0 + \eta_1.\end{aligned}$$

Desarrollando $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ y $\frac{\partial V}{\partial \eta}$ en sus series de Taylor²:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} |_{(\xi_0, \eta_0)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} |_{(\xi_0, \eta_0)} \xi_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} |_{(\xi_0, \eta_0)} \eta_1 + O_1(\xi_1^2, \eta_1^2) \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \frac{\partial V}{\partial \eta} |_{(\xi_0, \eta_0)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} |_{(\xi_0, \eta_0)} \xi_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} |_{(\xi_0, \eta_0)} \eta_1 + O_2(\xi_1, \eta_1^2).\end{aligned}$$

Definamos $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} |_{(\xi_0, \eta_0)} = L \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} |_{(\xi_0, \eta_0)} = M \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = N \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2$. Sustituyendo 3.3 y 3.4 en las series y despreciando los términos de orden mayor:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \xi} &= \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \omega^2 \xi_0 + L \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \xi_1 + M \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \eta_1 \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \omega^2 \eta_0 + M \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \xi_1 + N \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \eta_1.\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones del *Teorema 1.7*:

$$\begin{aligned}\left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} (\xi_0 + \xi_1) - 2\omega \frac{d}{dt} (\eta_0 + \eta_1) - \omega^2 (\xi_0 + \xi_1) \right) &= \\ - \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 (\omega^2 \xi_0 + L\xi_1 + M\eta_1) & \\ \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} (\eta_0 + \eta_1) + 2\omega \frac{d}{dt} (\xi_0 + \xi_1) - \omega^2 (\eta_0 + \eta_1) \right) &= \\ - \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 (\omega^2 \eta_0 + M\xi_1 + N\eta_1) & \\ \left(\ddot{\xi}_1 - 2\omega \dot{\eta}_1 - \omega^2 \xi_1 - \omega^2 \xi_0 \right) &= - (\omega^2 \xi_0 + L\xi_1 + M\eta_1) \\ \left(\ddot{\eta}_1 + 2\omega \dot{\xi}_1 - \omega^2 \eta_1 - \omega^2 \eta_0 \right) &= - (\omega^2 \eta_0 + M\xi_1 + N\eta_1)\end{aligned}$$

$$\ddot{\xi}_1 - 2\omega \dot{\eta}_1 - \omega^2 \xi_1 + L\xi_1 + M\eta_1 = 0 \quad (3.5)$$

$$\ddot{\eta}_1 + 2\omega \dot{\xi}_1 - \omega^2 \eta_1 + M\xi_1 + N\eta_1 = 0. \quad (3.6)$$

Con lo que tenemos un sistema de dos ecuaciones de segundo orden.

²Ver [10], p. 320 - 325

3.2.2 Condiciones de estabilidad.

Ahora bien, mostraremos algunas propiedades y condiciones para que el sistema 3.3 y 3.4 pueda ser estable.

Teorema 1.8 .- Sea el sistema lineal de primer orden ($\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$):

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = A\bar{\mathbf{x}}$$

con condiciones iniciales $\bar{\mathbf{x}}(0) = x_0$ y A una matriz de $n \times n$. Entonces el sistema tiene una solución exponencial $e^{At}x_0$ para todo t y es única³.

Este teorema nos ayudará para garantizar que el sistema 3.3 y 3.4 tiene una única solución, dado que podemos definir dos variables auxiliares para reducir el orden de la derivada y así, tener un sistema lineal de cuatro variables.

Proposición 1.10 .- Sea el sistema lineal de primer orden:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = A\bar{\mathbf{x}}$$

entonces el sistema tiene n soluciones linealmente independientes.

Para nuestro problema de los anillos, la proposición nos dice que siempre tendremos 4 soluciones linealmente independientes.

Demostración:

Sea $\phi^j(t) \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, n$ la solución al problema

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = A\bar{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{e}^j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ - } j\text{-ésimo renglón.}$$

Por el Teorema 1.8, vemos que $\phi^j(t)$ existe para todo t y es única. Para determinar si $\phi^1(t), \phi^2(t), \dots, \phi^n(t)$ son o no linealmente independientes, consideremos la ecuación para todo t :

$$c_1\phi^1(t) + c_2\phi^2(t) + \dots + c_n\phi^n(t) = 0$$

evaluándola en $t = 0$:

$$\begin{aligned} c_1\phi^1(0) + c_2\phi^2(0) + \dots + c_n\phi^n(0) &= 0 \\ c_1\mathbf{e}^1 + c_2\mathbf{e}^2 + \dots + c_n\mathbf{e}^n &= 0, \end{aligned}$$

³Siempre y cuando no haya raíces repetidas o bloques de Jordan mayores que 1. Ver [7], p. 393 - 398, [8], p. 353 - 355 y [9], p. 256

pero $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^n por lo que implica que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ y por tanto $\phi^1(t), \phi^2(t), \dots, \phi^n(t)$ son linealmente independientes.

Sólo falta probar que cualquier solución del sistema se puede escribir como combinación lineal del conjunto propuesto. Tomemos:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix},$$

sea \mathbf{y} solución del problema:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = A\bar{\mathbf{x}} \text{ con } \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{c}.$$

Definimos la función:

$$\phi(t) = c_1\phi^1(t) + c_2\phi^2(t) + \dots + c_n\phi^n(t)$$

$\phi(t)$ satisface (70) también por ser una combinación lineal de soluciones. Observemos que \mathbf{y} y $\phi(t)$ satisfacen el mismo sistema homogéneo y tienen el mismo valor en $t = 0$, por lo tanto por el teorema 1.6 \mathbf{y} y $\phi(t)$ son idénticas, es decir:

$$\mathbf{y} \equiv \phi(t) = c_1\phi^1(t) + c_2\phi^2(t) + \dots + c_n\phi^n(t)$$

por lo tanto, el sistema tiene n soluciones linealmente independientes.

Q.E.D.

Si nombramos $v = \dot{\xi}_1$ y $w = \dot{\eta}_1$, podríamos reescribir las ecuaciones 3.5 y 3.6 de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 - L & -M & 0 & 2\omega \\ -M & \omega^2 - N & -2\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ v \\ w \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

por lo que las ecuaciones 3.5 y 3.6 son equivalentes a un sistema de cuatro ecuaciones lineales de primer orden. Así, la *Proposición 1.10* nos dice que tiene 4 soluciones linealmente independientes.

Probemos con soluciones de la forma:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \bar{\mathbf{v}}$$

con $\bar{\mathbf{v}}$ un vector constante. Si ponemos las ecuaciones 3.5 y 3.6 en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\eta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2\omega \\ 2\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\eta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L - \omega^2 & M \\ M & N - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Derivando $\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\eta}_1 \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t \bar{v}}$, $\begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\eta}_1 \end{bmatrix} = \lambda^2 e^{\lambda t \bar{v}}$ y sustituyendo:

$$\lambda^2 e^{\lambda t \bar{v}} + \begin{bmatrix} 0 & -2\omega \\ 2\omega & 0 \end{bmatrix} \lambda e^{\lambda t \bar{v}} + \begin{bmatrix} L - \omega^2 & M \\ M & N - \omega^2 \end{bmatrix} e^{\lambda t \bar{v}} = \begin{bmatrix} \lambda^2 I + \begin{bmatrix} 0 & -2\omega \\ 2\omega & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} L - \omega^2 & M \\ M & N - \omega^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} e^{\lambda t \bar{v}} = 0.$$

Como buscamos una solución no trivial, entonces necesitamos que el determinante del sistema sea nulo:

$$\det \left(\lambda^2 I + \begin{bmatrix} 0 & -2\omega \\ 2\omega & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} L - \omega^2 & M \\ M & N - \omega^2 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda^2 + L - \omega^2 & -2\omega\lambda + M \\ 2\omega\lambda + M & \lambda^2 + N - \omega^2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

con lo que quedaría:

$$(\lambda^2 + L - \omega^2)(\lambda^2 + N - \omega^2) - (-2\omega\lambda + M)(2\omega\lambda + M) = 0$$

y simplificado:

$$\lambda^4 + (L + N + 2\omega^2)\lambda^2 + [(L - \omega^2)(N - \omega^2) - M^2] = 0. \quad (3.7)$$

Tenemos cuatro raíces, que significarían cuatro posibles soluciones linealmente independientes, si son distintas las raíces. Sólo basta ver cómo son las raíces de λ para ver bajo qué condiciones es estable el sistema lineal.

Definamos primero:

$$z = \lambda^2$$

$$b = -(L + N + 2\omega^2) \\ c = (L - \omega^2)(N - \omega^2) - M^2.$$

Sustituyendo en el polinomio:

$$z^2 - bz + c = 0$$

cuyas raíces son:

$$z_{\pm} = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}.$$

Notemos que λ y $-\lambda$ son soluciones. Además, por ser un polinomio de segundo orden para λ^2 con coeficientes reales, tenemos que $\bar{\lambda}$ y $-\bar{\lambda}$ serían soluciones también si $\lambda \in \mathbb{C}$, por lo que las cuatro raíces serían λ , $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ y $-\bar{\lambda}$.

i) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(\lambda) > 0$:

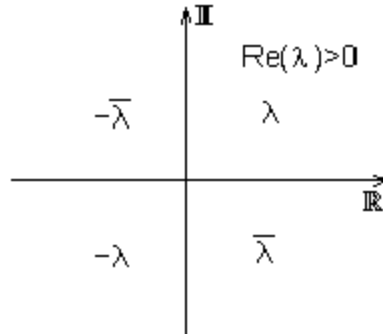


Fig. 6

La parte real positiva significaría un exponente positivo en la exponencial que haría crecer indefinidamente a lo largo del tiempo, por lo que sería inestable el problema.

ii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(\lambda) < 0$:

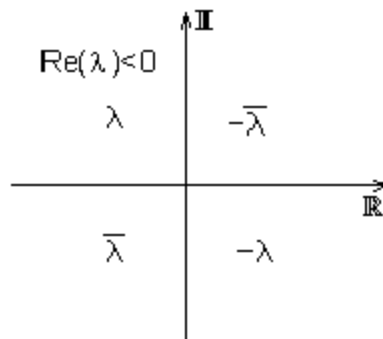


Fig. 7

Aquí como $-\lambda$ también es solución, su parte real sería positiva, y al igual que *i*) crecería indefinidamente a lo largo del tiempo, por lo tanto es inestable el problema.

iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $b^2 - 4c \neq 0$

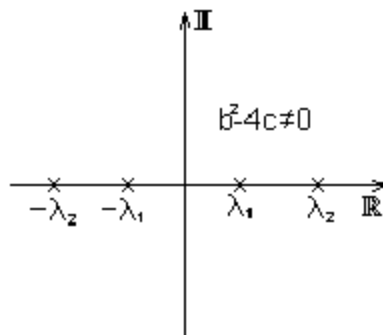


Fig. 8

Tendríamos dos lambdas distintas λ_1, λ_2 y sus negativos $-\lambda_1, -\lambda_2$, por lo que también este caso resultaría inestable, ya que sin importar el signo de λ_1 o λ_2 , sus negativos también son soluciones y por lo tanto tendríamos dos coeficientes positivos en la exponencial.

iv) Si $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in i\mathbb{R}$

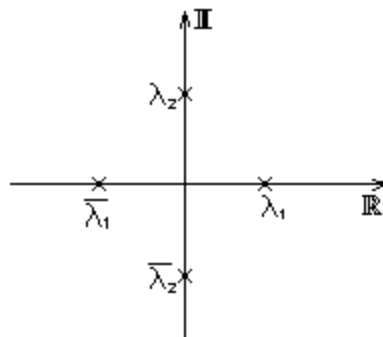


Fig.9

Tendríamos dos raíces reales $\lambda_1, -\lambda_1$ y dos imaginarias $\lambda_2, \bar{\lambda}_2$. Aquí vemos que siempre habrá una raíz real positiva, por lo que habrá un coeficiente positivo en la exponencial que crecería indefinidamente, resultando inestable el movimiento.

v) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $b^2 - 4c = 0$

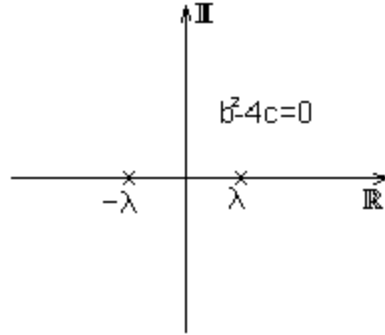


Fig. 10

Entonces tendríamos sólo dos lambdas λ , $-\lambda$, así que proponemos las otras

dos soluciones de la forma
$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = (e^{\lambda t} + te^{\lambda t} (A - \lambda I)) \bar{v}$$
 y

$$\begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = (e^{-\lambda t} + te^{-\lambda t} (A - \lambda I)) \bar{v}; \bar{v} \neq 0$$
 tal que $(A - \lambda I)^2 \bar{v} = 0$, las cuales comprobamos que efectivamente son soluciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{w}_1 \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \bar{v} + (\lambda t + 1) e^{\lambda t} (A - \lambda I) \bar{v}.$$

Sustituyendo en el sistema:

$$\begin{aligned} & \lambda e^{\lambda t} \bar{v} + (\lambda t + 1) (A - \lambda I) e^{\lambda t} \bar{v} = \\ & \lambda e^{\lambda t} \bar{v} - \lambda e^{\lambda t} \bar{v} + A e^{\lambda t} \bar{v} + \lambda t (A - \lambda I) e^{\lambda t} \bar{v} = A (e^{\lambda t} + e^{\lambda t} t (A - \lambda I)) \bar{v} \end{aligned}$$

Por lo tanto, también es solución del sistema. El otro caso es análogo.

Vemos aquí, que también resulta inestable el problema, ya que tendremos el exponente positivo para la exponencial, la cual crecería indefinidamente.

vi) Si $\lambda \in i\mathbb{R}$ y $b^2 - 4c = 0$

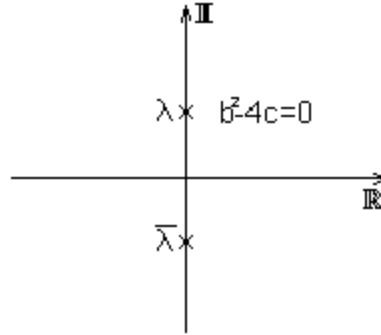


Fig. 11

Entonces tendríamos sólo dos lambdas $\lambda, \bar{\lambda}$, así que, al igual que en *iv*), proponemos las otras dos soluciones de la forma $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = (e^{\lambda t} + te^{\lambda t} (A - \lambda I)) \bar{w}$

y $\begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = (e^{-\bar{\lambda} t} + te^{-\bar{\lambda} t} (A - \lambda I)) \bar{w}$; con $\bar{w} \neq 0$ tal que $(A - \lambda I)^2 \bar{w} = 0$. Al

igual que el caso anterior, se puede probar que estas son las otras dos soluciones faltantes. Aquí vemos que aunque la exponencial es acotada por ser compleja, el término lineal del tiempo va a crecer indefinidamente, por lo que también resulta inestable.

vi) Si $\lambda \in i\mathbb{R}$ y $b^2 - 4c \neq 0$

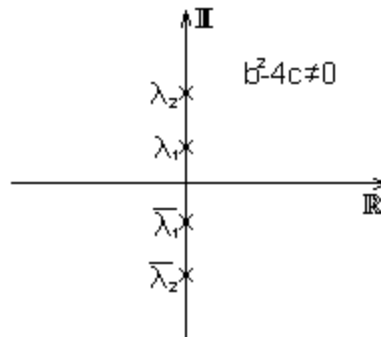


Fig. 12

Entonces tendríamos dos lambdas distintas λ_1, λ_2 , al igual que sus conjugados $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ por lo que las soluciones serían exponenciales complejas, las cuales

están acotadas para todo tiempo. Por lo que en este caso sería **linealmente estable** el movimiento para todo tiempo.

Por lo que las condiciones que nos quedarían para estabilidad serían:

$$b^2 - 4c > 0 \quad (3.8)$$

$$b < 0 \quad (3.9)$$

$$c > 0 \quad (3.10)$$

En términos del problema inicial, tenemos para la condición 3.8:

$$\begin{aligned} b^2 - 4c &= (L + N + 2\omega^2)^2 - 4[(L - \omega^2)(N - \omega^2) - M^2] \\ &= L^2 + N^2 + 4\omega^4 + 4\omega^2L + 4\omega^2N + 2LN - 4\omega^4 - 4LN + 4\omega^2L + 4\omega^2N + 4M^2 \\ &= L^2 + N^2 + 8\omega^2L + 8\omega^2N - 2LN + 4M^2 \\ &= (L - N)^2 + 8\omega^2(L + N) + 4M^2 > 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

para 3.9 y 3.10:

$$L + N + 2\omega^2 > 0 \quad (3.12)$$

$$(L - \omega^2)(N - \omega^2) - M^2 > 0$$

$$\omega^4 - (L + N)\omega^2 + LN - M^2 > 0 \quad (3.13)$$

Ahora bien, veamos cuales son las regiones bajo las cuales las condiciones 3.11, 3.12 y 3.13 se cumplen.

Tomemos el caso en que $L + N < 0$:

$$i) - \frac{1}{8(L+N)} [(L - N)^2 + 4M^2] < -\frac{L+N}{2}$$

de otra forma:

$$(L - N)^2 - 4(L + N)^2 + 4M^2 < 0.$$

Tenemos que, por la condición 3.12:

$$0 > (L - N)^2 - 4(L + N)^2 + 4M^2 > (L - N)^2 + 8\omega^2(L + N) + 4M^2 > 0$$

Por lo que no puede ser posible este caso.

$$ii) -\frac{1}{8(L+N)} \left[(L - N)^2 + 4M^2 \right] > -\frac{L+N}{2}$$

Entonces:

$$(L - N)^2 + 4M^2 > 4(L + N)^2 \quad \text{para } L + N < 0$$

luego:

$$\sqrt{(L - N)^2 + 4M^2} > -2(L + N). \quad (3.14)$$

Para determinar la cota inferior del intervalo de estabilidad, tomamos el caso mínimo, que sería $\beta = 0$, por lo que sus raíces serían:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(L + N) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(L - N)^2 + 4M^2}$$

pero ω_{-}^2 sería negativo, así que descartamos esa solución. Para ω_{+}^2 , tomando 3.14 quedaría:

$$\omega_{+}^2 = \frac{1}{2}(L + N) + \frac{1}{2}\sqrt{(L - N)^2 + 4M^2} > -\frac{1}{2}(L + N) > 0$$

por lo que $\omega_{+}^2 > 0$.

Para determinar la cota superior el intervalo de estabilidad elevamos al cuadrado 3.14:

$$\left(\sqrt{(L - N)^2 + 4M^2} + 2(L + N) \right)^2 > 0$$

$$\left[(L - N)^2 + 4M^2 \right] + 4(L + N)\sqrt{(L - N)^2 + 4M^2} + 4(L + N)^2 > 0$$

entonces:

$$-\frac{1}{8(L+N)} \left[(L - N)^2 + 4M^2 \right] > -\frac{1}{2}(L + N) + \frac{1}{2}\sqrt{(L - N)^2 + 4M^2}$$

$$-\frac{1}{8(L+N)} \left[(L - N)^2 + 4M^2 \right] > \omega_{+}^2.$$

Así, el intervalo de estabilidad sería:

$$\omega^2 \in \left(\frac{1}{2}(L + N) + \frac{1}{2}\sqrt{(L - N)^2 + 4M^2}, -\frac{1}{8(L + N)} \left[(L - N)^2 + 4M^2 \right] \right). \quad (3.15)$$

Si tomamos el caso de $L + N > 0$, las condiciones 3.11 y 3.12 se cumplen siempre. Para 3.13, los casos mínimos (3.13= 0):

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} (L + N) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(L + N)^2 - 4(LN - M^2)}.$$

Así, tendríamos que para el movimiento sea estable:

i) Si $LN - M^2 < 0$

$$\omega^2 > \frac{1}{2} (L + N) + \frac{1}{2} \sqrt{(L + N)^2 - 4(LN - M^2)}.$$

ii) Si $LN - M^2 > 0$

$$0 \leq \omega^2 < \frac{1}{2} (L + N) - \frac{1}{2} \sqrt{(L + N)^2 - 4(LN - M^2)}$$

6

$$\omega^2 > 0$$

$$\omega^2 > \frac{1}{2} (L + N) + \frac{1}{2} \sqrt{(L + N)^2 - 4(LN - M^2)}.$$

En esta tesis abarcaremos sólo el caso en que el anillo es homogéneo, por lo que no profundizaremos más este último análisis. Así, tenemos los intervalos donde puede haber estabilidad en función de la velocidad de giro del sistema.

3.2.3 Comportamiento del Potencial.

Tenemos que el potencial del anillo y Saturno viene dado por:

$$V(r) = -\rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi}} d\phi d\gamma$$

derivando con respecto a r :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(r + \gamma \cos \phi)}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma$$

la segunda derivada quedaría:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\gamma^2 \sin^2 \phi}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{5}{2}}} \right) \gamma d\phi d\gamma \\
&= \rho_R \int_a^b \left[\int_0^{2\pi} -\frac{2}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi + \frac{\gamma \sin \phi}{r(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \Big|_0^{2\pi} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\gamma \cos \phi}{r(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right) d\phi \right] \gamma d\gamma \\
\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{-2\gamma r - \gamma^2 \cos \phi}{r(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma
\end{aligned}$$

Ahora bien, $V(r)$ es una integral elíptica, ya que:

$$\begin{aligned}
r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi &= r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma - 4r\gamma \sin^2 \frac{\phi}{2} \\
&= (r + \gamma)^2 - 4r\gamma \sin^2 \frac{\phi}{2}
\end{aligned}$$

si definimos $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{r\gamma}}{(r+\gamma)}$, tendríamos:

$$r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi = (r + \gamma)^2 \left(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\phi}{2} \right)$$

haciendo el cambio de variable $\lambda = \frac{\phi}{2}$ quedaría el potencial:

$$\begin{aligned}
V(r) &= -\rho_R \int_a^b \int_0^\pi \frac{2\gamma}{(r+\gamma)\sqrt{1-\sin^2 \alpha \sin^2 \lambda}} d\lambda d\gamma \\
V(r) &= -\rho_R \int_a^b \frac{4\gamma}{(r+\gamma)} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha \sin^2 \lambda}} d\lambda \right) d\gamma \\
V(r) &= -\rho_R \int_a^b \frac{4\gamma}{(r+\gamma)} K(\alpha) d\gamma
\end{aligned}$$

donde vemos que $K(\alpha)$ es una integral elíptica de primera especie⁵.

Dado que las integrales elípticas no se pueden resolver analíticamente, procederemos a resolverlas de manera numérica. Para esto, utilizamos una regla compuesta de Simpson. El algoritmo numérico será detallado en el Apéndice A. En este caso, consideramos la densidad unitaria.

Además, definimos:

⁴ Aquí, $\sin \alpha$ está bien definido, ya que tenemos que la relación $2\sqrt{r\gamma} < (r + \gamma)$ para $r, \gamma > 0$.

⁵ Ver [10], p.322-323

$$I_0(r_0) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma$$

$$I_1(r_0) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma^2 \cos \phi}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} I_0(r_0) &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma > 0 \\ I_0(-r_0) &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{((-r_0)^2 + \gamma^2 - 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos(\phi + \pi))^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\gamma}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \chi)^{\frac{3}{2}}} d\chi d\gamma = \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \chi)^{\frac{3}{2}}} d\chi d\gamma = I_0(r_0) \\ I_0(0) &= I_0(r_0) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{(\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma > 0 \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma^2} d\phi d\gamma = 2\pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ I_1(-r_0) &= -I_1(r_0) \quad (\phi \rightarrow \phi + \pi) \\ I_1(-r_0) &= -I_1(r_0) \\ \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{I_1(r_0)}{r_0} &= \frac{d}{dr_0} I_1(0) = \left(-3 \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma^2 \cos \phi (r_0 + \gamma \cos \phi)}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \right) \Big|_{r_0=0} \\ &= -3 \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \phi}{\gamma^2} d\phi d\gamma = -\frac{3}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\phi}{\gamma^2} d\phi d\gamma = \\ &= -3\pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \end{aligned}$$

Para el caso de $\frac{1}{r_0} \frac{\partial V}{\partial r}$:

$$\frac{\partial V}{\partial r} \frac{1}{r_0} = \rho_R \left(I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right)$$

donde verificamos que para $r_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r}|_{r_0=0} &= \rho_R \left(I_0(0) + \frac{dI_1(r_0)}{dr_0}|_{r_0=0} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial r}|_{r_0=0} &= -\pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).\end{aligned}$$

Estas últimas definiciones nos servirán para simplificar los algoritmos numéricos, además de utilizarlas posteriormente para el análisis de estabilidad.

Propiedades de dilatación del Potencial

En esta parte, obtendremos una propiedad del potencial y sus derivadas que nos serán de mucha utilidad en el estudio numérico. Primero, haremos el cambio de variable para todas las integrales:

$$\begin{aligned}r_0 &= a\rho \\ \gamma &= a\gamma' \\ d\gamma &= a d\gamma' \\ b &= ka\end{aligned}$$

donde vemos que con este cambio de variables, parametrizamos todo en función de a .

Ahora bien, vemos que para el potencial:

$$\begin{aligned}V &= -\rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi}} d\phi d\gamma \\ V &= -\rho_R \int_0^1 \int_0^k \frac{a\gamma'}{\sqrt{(a\rho)^2 + (a\gamma')^2 + 2a^2\rho\gamma' \cos \phi}} d\phi d\gamma' \\ V &= -\rho_R \int_0^1 \int_0^k \frac{a\gamma'}{a\sqrt{\rho^2 + \gamma'^2 + 2\rho\gamma' \cos \phi}} d\phi d\gamma' \\ V &= -\rho_R \int_0^1 \int_0^k \frac{\gamma'}{\sqrt{\rho^2 + \gamma'^2 + 2\rho\gamma' \cos \phi}} d\phi d\gamma'\end{aligned}$$

donde vemos que tenemos la misma fórmula, pero si consideráramos $a = 1$.

Por otro lado, para la derivada del potencial:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(r + \gamma \cos \phi)}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= \rho_R \int_0^1 \int_0^k \frac{a^2 \gamma' (a\rho + a\gamma' \cos \phi)}{((a\rho)^2 + (a\gamma')^2 + 2a^2\rho\gamma' \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma' \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= \rho_R \int_0^1 \int_0^k \frac{\gamma' (\rho + \gamma' \cos \phi)}{(\rho^2 + \gamma'^2 + 2\rho\gamma' \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma'\end{aligned}$$

al igual que con el potencial, resulta la misma fórmula considerando $a = 1$.

Además, haciendo el cambio de variables para I_0 e I_1 :

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \\
 I_0 &= \int_0^{2\pi} \int_a^{ka} \frac{a^2 \gamma'}{((a\rho)^2 + (a\gamma')^2 + 2a^2 \rho \gamma' \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma' \\
 I_0 &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_1^k \frac{\gamma'}{(\rho^2 + \gamma'^2 + 2\rho\gamma' \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma' \\
 I_1 &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma^2 \cos \phi}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \\
 I_1 &= \int_0^{2\pi} \int_1^k \frac{a(a\gamma')^2 \cos \phi}{((a\rho)^2 + (a\gamma')^2 + 2a^2 \rho \gamma' \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma' \\
 I_1 &= \int_0^{2\pi} \int_1^k \frac{\gamma'^2 \cos \phi}{(\rho^2 + \gamma'^2 + 2\rho\gamma' \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma'.
 \end{aligned}$$

Notemos que, para I_1 se cumple el caso del potencial y su derivada, pero para I_0 , tenemos un factor de $\frac{1}{a}$ de diferencia.

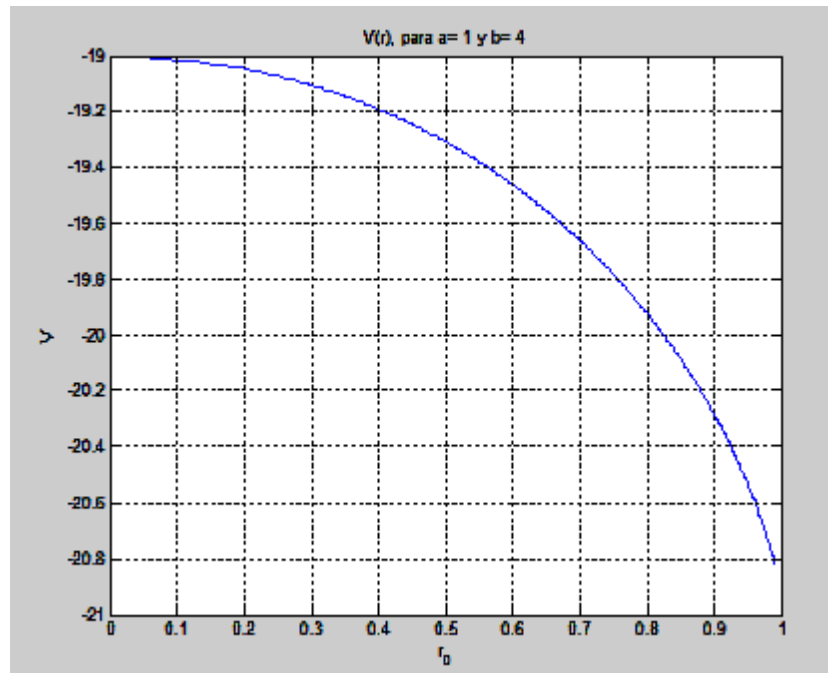
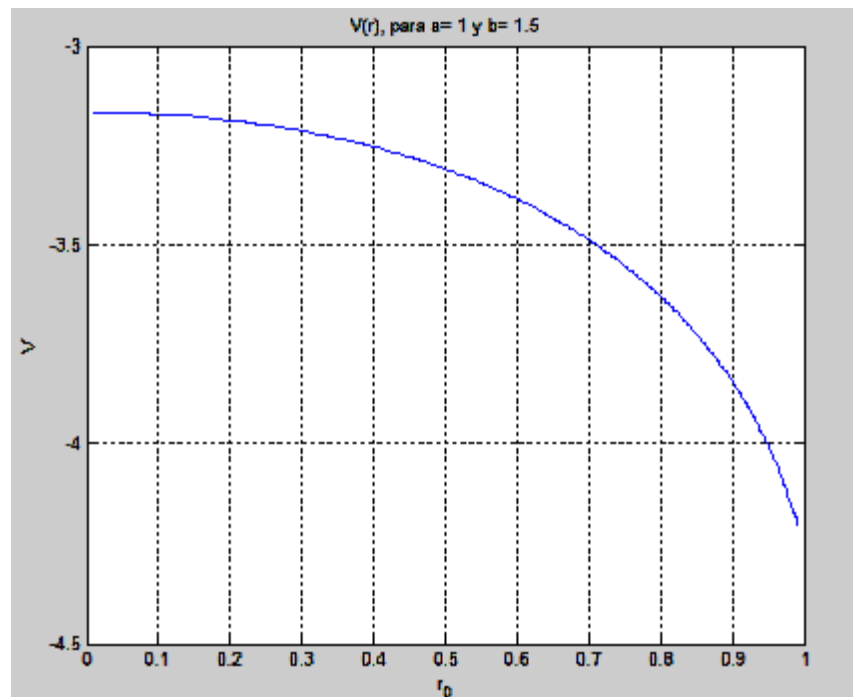
Con esto vemos que de manera general para cualquier valor de a , podemos calcular las integrales con el caso $a = 1$ y meter el factor de k para V , $\frac{\partial V}{\partial r}$ e I_1 , y en el caso de I_0 , después de calcular, dividir entre el valor original de a . Con este resultado, simplificamos los cálculos numéricos tomando $a = 1$, decir, adimensionamos el problema.

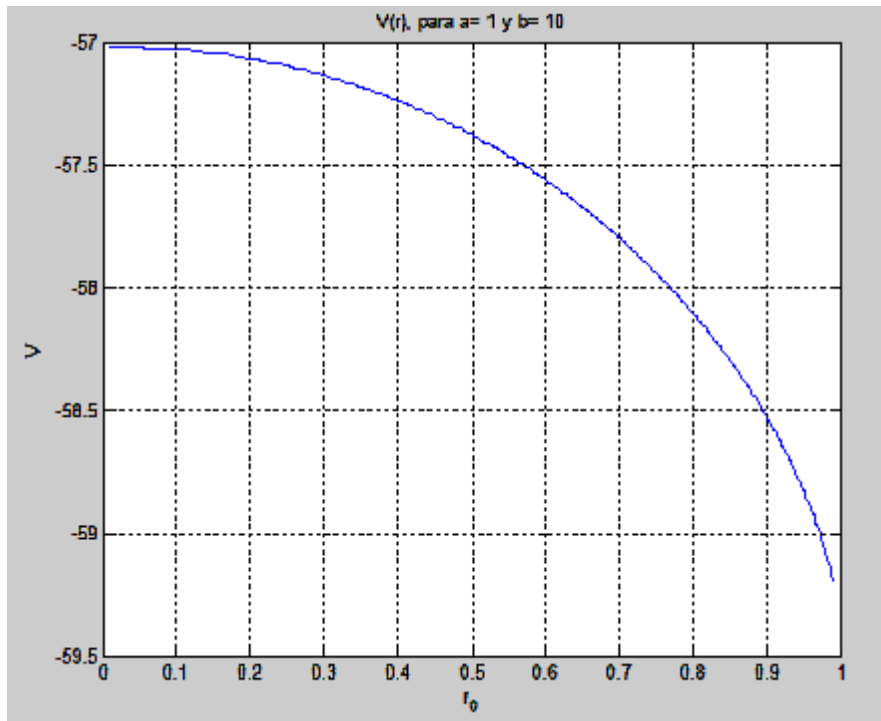
Por otra parte, en los cálculos de los coeficientes de los polinomios para determinar la estabilidad, se puede adimensionalizar también y sólo considerar el caso $a = 1$, dado que dependen directamente de I_0 e I_1 .

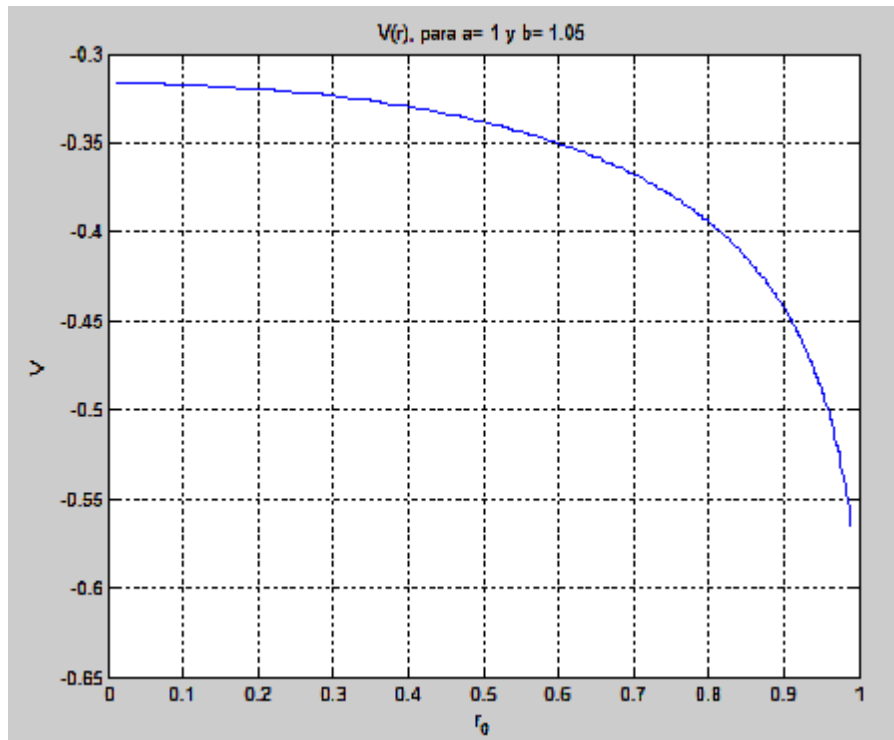
Cálculo numérico

En los cálculos se considera una malla de 100×150 particiones en la integral. Además, para la malla en r tomamos espacios de 0.01, así queda el intervalo $r \in [0.01, 0.99]$.

Los resultados para distintos valores de b :

Fig. 13. $V(r)$ para $a=1$ y $b=4$ Fig. 14. $V(r)$ para $a=1$ y $b=1.5$

Fig. 15. $V(r)$ para $a=1$ y $b=10$

Figure 3.1: Fig. 16. $V(r)$ para $a=1$ y $b=1.05$

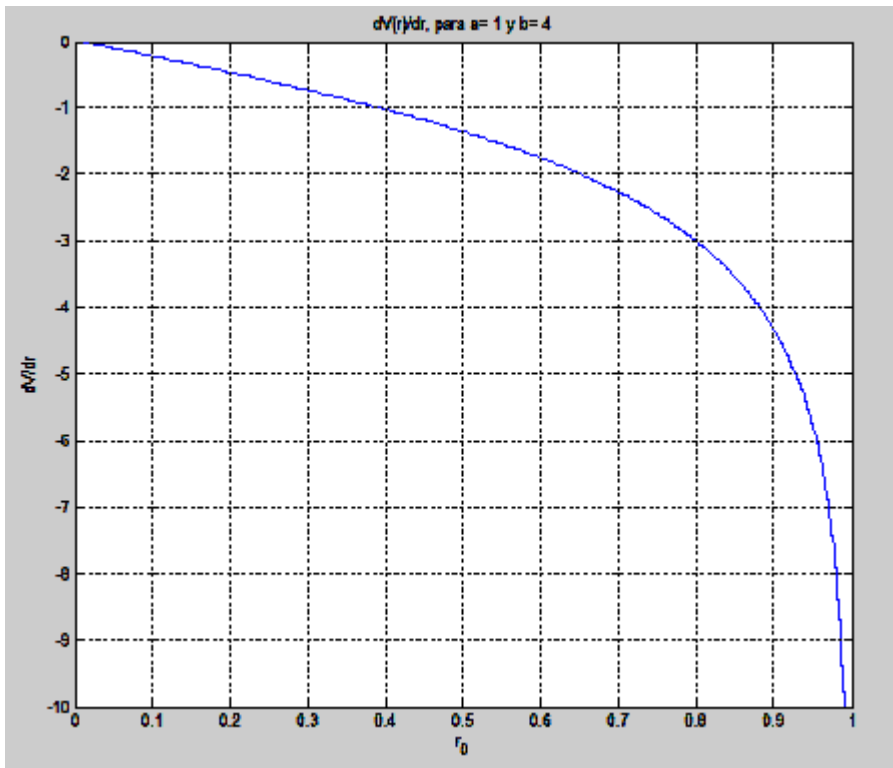
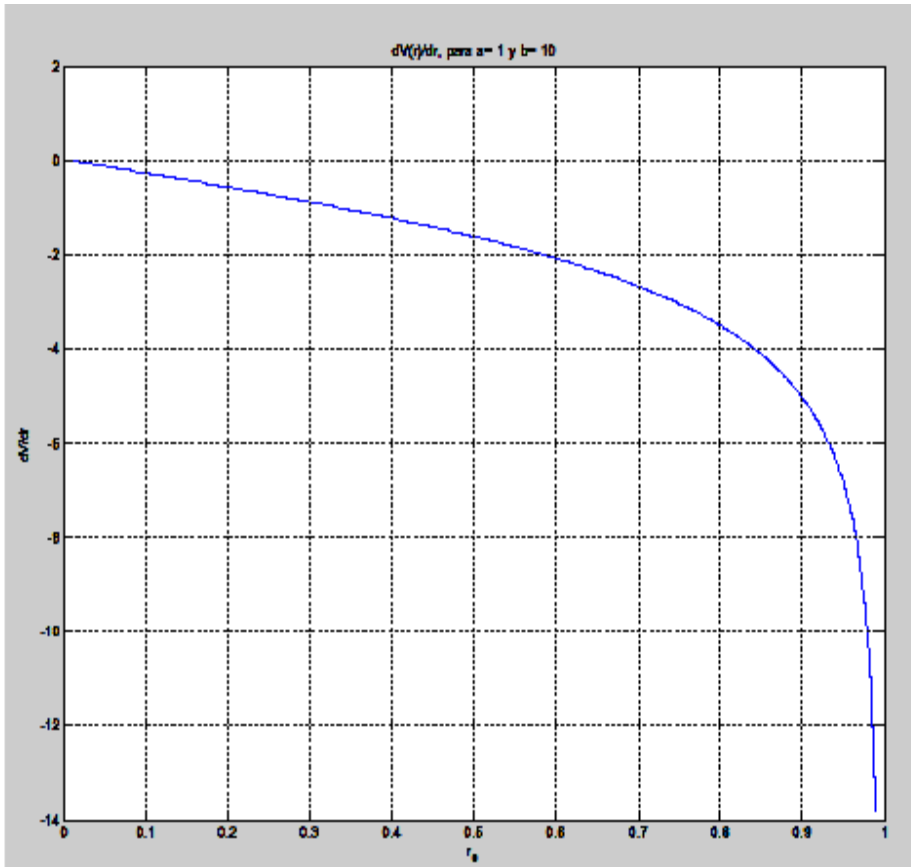
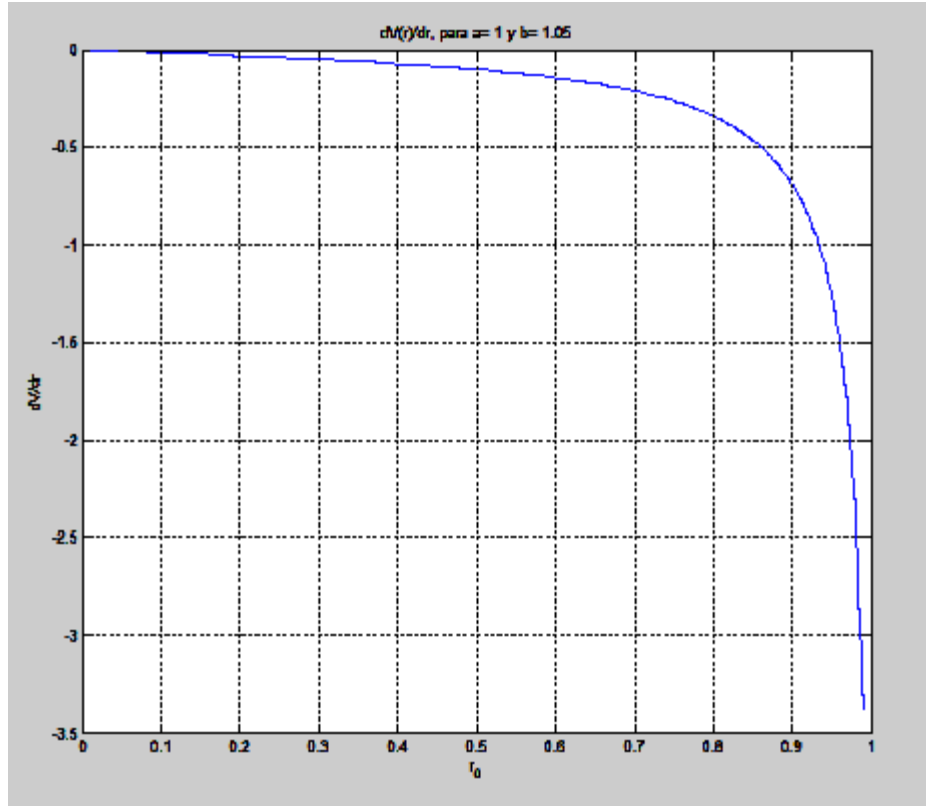
Fig. 17. $dV(r)/dr$ para $a=1$ y $b=4$

Fig. 18. $dV(r)/dr$ para $a=1$ y $b=1.5$

Fig. 19. $dV(r)/dr$ para $a=1$ y $b=10$

Fig. 20. $dV(r)/dr$ para $a=1$ y $b=1.05$

Donde vemos que para distintos valores de b el potencial y su derivada son negativos, mantienen la misma forma decreciente, sólo cambia en la velocidad que decrecen. Con esto vemos numéricamente que no puede existir movimiento uniforme, ya que ω^2 sería negativa.

3.3 Comentarios al Capítulo

En este capítulo revisamos las soluciones particulares del sistema para tener un movimiento uniforme del sistema, junto con el caso particular de los anillos y Saturno concéntricos, el cual nos llevan a que no puede haber un movimiento uniforme para este caso (mismo resultado obtenido que Maxwell).

Además, como nuestro interés va más allá del caso particular, analizamos el caso del sistema perturbado, tomando la consideración de que la dinámica del sistema es rotante; en ésta parte Maxwell también analiza el caso perturbado pero en coordenadas polares. Para analizar la estabilidad, hicimos una aproximación en series de Taylor a primer orden del sistema rotante y así, recurriendo a la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, obtuvimos las condiciones para tener un movimiento uniforme, que en este caso sería el tener los

valores propios de la matriz asociada puramente imaginarios. Una vez obtenidas las condiciones, buscamos dejar estos términos en función del cuadrado de la velocidad de giro del sistema (ω^2) y buscamos los intervalos donde la ω^2 puede existir para ser estable.

Por último, para conocer un poco más el comportamiento del sistema, hicimos un estudio numérico del potencial de los anillos y su derivada, para así conocer el comportamiento del mismo para todas las posibles condiciones iniciales.

Una vez obtenidas las gráficas numéricas, nos dimos cuenta que no es posible tener un movimiento uniforme para el caso de los anillos homogéneos debido a que la velocidad de giro resulta siempre negativa, por lo que este caso no es físicamente posible.

Por otro lado, Maxwell hace un análisis de la estabilidad tomando la aproximación de Taylor en coordenadas polares y en lugar de estudiar el problema como un sistema, lo transforma en una sola ecuación diferencial de cuarto orden⁶.

"Proposición III. Reducir las tres ecuaciones de movimiento a una sola ecuación lineal.

Escribamos n en lugar del símbolo $\frac{d}{dt}$, luego arreglemos las ecuaciones en términos de r_1, θ_1 y ϕ_1 ... Tenemos ahora tres ecuaciones para determinar tres variables r_1, θ_1 y ϕ_1 ; pero es evidente que solo una relación puede ser determinada, y que en el proceso de encontrar sus valores absolutos, las tres cantidades desaparecerán juntas, y quedará la relación siguiente:

$$An^4 + Bn^2 + C = 0$$

con:

$$A = (m_R r_0 k)^2$$

$$B = 3(m_R r_0 k \omega)^2 - m_R (m_S + m_R) L (r_0 k)^2 - m_R [(m_S + m_R) k^2 + m_S r_0^2] N$$

$$C = m_R [(m_S + m_R) k^2 - 3m_S r_0^2] \omega^2 + (m_S + m_R) [(m_S + m_R) k^2 + m_S r_0^2] (LN - M^2)$$

$$L = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

$$M = \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \phi}$$

$$N = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} "$$

donde vemos que el polinomio que obtiene tiene las mismas potencias, pero

los coeficientes son distintos a los que obtuvimos (cosa esperada por ser un planteamiento de perturbación con diferentes variables).

Para definir el comportamiento de las soluciones, ambos utilizamos funciones exponenciales, revisa los diferentes casos (raíces reales, complejas, imaginarias, etc.) y procede a encontrar soluciones imaginarias del polinomio que encuentra.

⁶Ver [2], p.300-301

Además, para el tema de estabilidad, Maxwell desarrolla en series de Fourier la densidad del anillo, tomando la hipótesis de ser una función periódica (esto es porque gira el anillo y regresa a la misma posición periódicamente)⁷:

"Sea a el radio del anillo, y sea θ el ángulo que se forma entre el radio del centro de gravedad y la línea a través de un punto dado. Entonces, si ρ_R es la densidad del anillo cerca del punto dado, entonces ρ_R será una función periódica en θ , y puede ser desarrollada por el teorema de Fourier en la serie:

$$\rho_R = \frac{m_R}{2\pi a} \left[1 + 2f \cos \theta + \frac{2}{3}g \cos 2\theta + \frac{2}{3}h \sin 2\theta + 2i \cos(3\theta + \alpha) + \dots \right]$$

...El momento del anillo sobre el diámetro perpendicular del radio inicial es:

$$m_R r_0 = \int_0^{2\pi} \rho_R a^2 \cos \theta d\theta = m_R a f$$

...ahora tenemos que determinar el valor de la integral⁸:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_R}{\rho} a d\theta^9$$

...En éste sentido encontramos:

$$V = \frac{m_R}{a} \left[1 - f \frac{r_1}{a} + \frac{1}{4} \frac{r_1^2}{a^2} (1 + g) + \frac{1}{2} \frac{h}{a} f r_1 \phi_1 + \frac{1}{4} f^2 \phi_1^2 (3 - g) \right] \dots "$$

Una vez que obtiene este valor, compara estos coeficientes con los coeficientes del desarrollo de Taylor del potencial:

"...de donde encontramos:

$$\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{x_0} = -\frac{m_R}{a^2} f, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \Big|_{x_0} = L = \frac{m_R}{2a^2} (1 + g), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \phi} \Big|_{x_0} = M = \frac{m_R}{2a^2} f h, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{x_0} = N = \frac{m_R}{2a} f^2 (3 - g). "$$

Con éstos coeficientes, obtiene los demás valores necesarios para calcular las raíces del polinomio (en los siguientes capítulos seguiremos haciendo la comparación de ambos resultados).

El siguiente problema a analizar será agregando una masa que se encuentra sujeta al anillo y ver bajo qué condiciones puede existir un movimiento estable.

⁷Ver [2], p. 303-304

⁸Aquí, Maxwell expande $\frac{1}{\rho}$ con polinomios de Legendre: $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a} \left[1 + \frac{r'}{a} \cos(\psi - \theta) + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 \cos 2(\psi - \theta) + \dots \right]$ donde r' y ψ son las coordenadas del mismo punto dado.

⁹Seguendo la notación inicial que define, Maxwell cambia el ángulo a integrar por θ , en lugar de ser ϕ .

Part II

Movimiento con una masa unida a los anillos

Chapter 4

Deducción de las ecuaciones

Ahora bien, el siguiente paso de nuestro estudio es considerar el sistema con la adición de un cuerpo de masa m_u unido al anillo a una distancia u del centro de gravedad del anillo. Para el resto de nuestro estudio consideraremos al anillo como un cuerpo homogéneo:

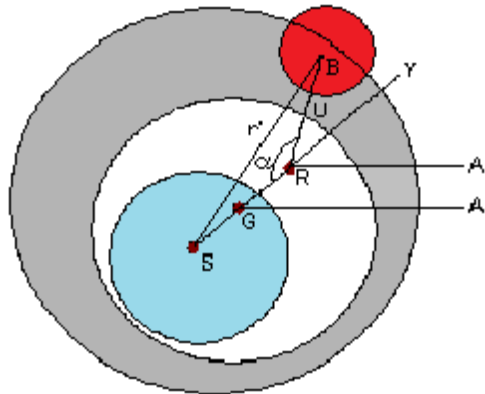


Fig. 21

Notemos que en el potencial gravitacional, la masa no ejerce una fuerza sobre el anillo (ya que es parte de él), quedaría igual, sólo que hay que agregar el término de atracción de Saturno sobre el cuerpo:

$$\tilde{V} = V - \frac{m_u}{r'}$$

pero $\mathbf{r}' = r\hat{\mathbf{r}} - u\hat{\mathbf{u}}$. Escrito de otra manera:

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x - u_x \\ y - u_y \end{bmatrix}.$$

Sin pérdida de generalidad, para el ángulo ϕ podemos tomar como referencia el centro de la masa m_u por lo que $\alpha = \theta - \psi$.

Aclaremos que, como se agrega la masa m_u , el centro de gravedad del anillo cambiará a $\tilde{R} = R + \frac{m_u}{m_R + m_u} \bar{u}$. Con $\tilde{r} = |S\tilde{R}|$ y $\tilde{\theta} = A''\tilde{R}S$.

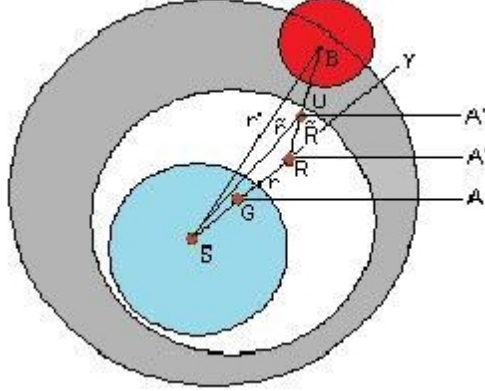


Fig. 22

Además, para no confundir variables, el potencial del anillo le llamaremos V_0 y al potencial total lo dejaremos como V . Así, el potencial sería:

$$V = V_0 - \frac{m_u}{\sqrt{\tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)^2 - 2u\tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\tilde{\theta} - \psi)}}$$

Definamos $\tilde{m}_R = m_R + m_u$. Dado que sólo se traslada el valor del centro de masa del anillo, el procedimiento de deducción es el mismo, así que tendríamos las mismas ecuaciones antes obtenidas del movimiento, pero con las nuevas variables \tilde{r} y $\tilde{\theta}$, además del valor de \tilde{m}_R . Las nuevas ecuaciones de movimiento serían:

$$\left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S}\right)^2 \left(\ddot{\tilde{r}} - \tilde{r}\dot{\tilde{\theta}}^2\right) + \frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} = 0 \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S}\right)^2 \left(2\dot{\tilde{r}}\dot{\tilde{\theta}} + \tilde{r}\ddot{\tilde{\theta}}\right) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} = 0 \quad (4.2)$$

$$\tilde{m}_R k^2 \ddot{\psi} = m_S \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} \quad (4.3)$$

4.1 Comentarios al Capítulo

En este capítulo dedujimos las ecuaciones, echando mano del Capítulo 2, ahora con la masa unida. En este caso vimos que básicamente son las mismas ecuaciones, pero con cambios en el potencial.

Por otro lado, Maxwell no deduce de nuevo las ecuaciones, sino sólo agrega el término de la masa unida al potencial del sistema. Además, lo que hace para integrar este caso a las condiciones de estabilidad, es suponer que con el hecho de tener un cuerpo pegado, un coeficiente de la serie de Fourier es mayor¹:

"Sea P la masa de la partícula (masa unida), y Q la masa del anillo uniforme, entonces $\tilde{m}_R = P + Q$,

$$f = \frac{P}{Q}$$

$$L = 2\frac{P}{a^3} + \frac{Q}{2a^3} = \frac{P+Q}{2a^3} \left(1 + 3\frac{P}{m_R}\right) = \frac{R}{2a^3} (1 + g)$$

por tanto:

$$g = 3\frac{P}{m_R} = 3f."$$

En el siguiente capítulo haremos un análisis de la estabilidad de este nuevo sistema.

¹Ver [2], p. 306

Chapter 5

Estabilidad con la masa unida

5.1 Condiciones para movimiento uniforme

Para las condiciones de movimiento uniforme y anillo circular tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} = 0 \quad (5.1)$$

$$\omega^2 = \left(\frac{\tilde{m}_R + m_S}{\tilde{m}_R} \right)^2 \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} > 0 \quad (5.2)$$

Proposición 1.12: *En el caso del anillo circular, una condición necesaria para que el sistema pueda moverse uniformemente (sin contar la configuración del sistema) es:*

$$\tilde{\theta} - \psi = \pi$$

Demostración:

La primera condición para tener movimiento uniforme es que el potencial no dependa de $\tilde{\theta}$. Derivando el potencial con respecto a $\tilde{\theta}$:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} = \frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{m_u u \tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \sin(\tilde{\theta} - \psi)}{\left(\tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)^2 - 2u \tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \right)^{3/2}}$$

como el anillo es homogéneo, tenemos que $\frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial \tilde{\theta}} = 0$, así quedaría:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} = \frac{m_u u \tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \sin(\tilde{\theta} - \psi)}{\left(\tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)^2 - 2u \tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \right)^{3/2}} = 0$$

la independencia de $\tilde{\theta}$ ($\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} = 0$) tiene que ser válida para todo $\tilde{r} \geq 0$, por lo que necesitamos que:

$$\tilde{\theta} - \psi = 0$$

$$\tilde{\theta} - \psi = \pi.$$

Tenemos cuatro posibles casos de estas condiciones:

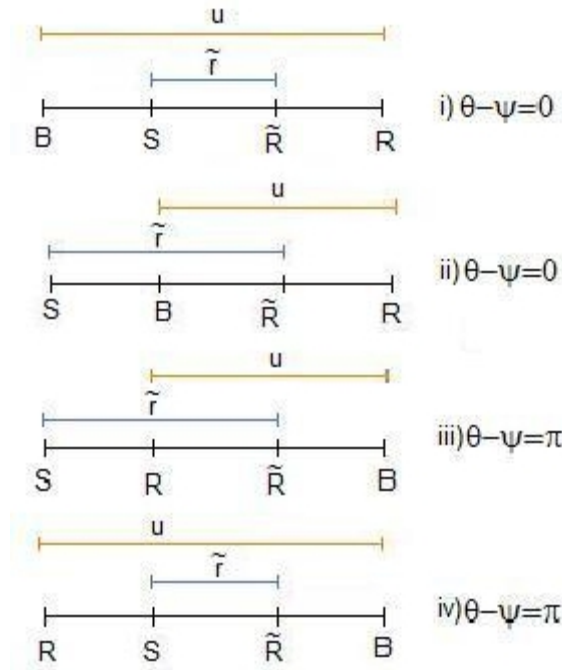


Fig. 23

i) $\tilde{\theta} - \psi = 0$. Saturno estaría entre la masa y el centro de gravedad del anillo

ii) $\tilde{\theta} - \psi = 0$. Saturno estaría fuera del anillo, con lo que descartamos este caso, ya que físicamente no es posible.

iii) $\tilde{\theta} - \psi = \pi$. La masa estaría alineada del mismo lado que del centro de gravedad del anillo.

iv) $\tilde{\theta} - \psi = \pi$. El centro de gravedad estaría del lado de la masa (la masa es más pesada que el anillo).

Los 3 potenciales posibles serían:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 - \frac{m_u}{u \left(\frac{m_R}{m_R+m_u} \right) - \tilde{r}} \\ V_3 &= V_0 - \frac{m_u}{\tilde{r} + u \left(\frac{m_R}{m_R+m_u} \right)} \\ V_4 &= V_0 - \frac{m_u}{u \left(\frac{m_R}{m_R+m_u} \right) + \tilde{r}}. \end{aligned}$$

Para la condición 5.2, necesitamos que:

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} > 0$$

así, derivando el potencial para todos los casos:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial V_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{m_u}{\left(\tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R+m_u} \right)^2 - 2u\tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R+m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \right)^{3/2}} \left(\tilde{r} - u \left(\frac{m_R}{m_R+m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \right).$$

Expresando $\frac{\partial V_0}{\partial \tilde{r}}$ en función de \tilde{r} :

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial V_0}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}}.$$

Para *i*) tenemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{r}^2 &= r^2 + u^2 \left(\frac{m_u}{m_R+m_u} \right)^2 - 2ru \left(\frac{m_u}{m_R+m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \\ \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} &= \frac{\tilde{r}}{r - u \left(\frac{m_u}{m_R+m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi)} \end{aligned}$$

así:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial V_0}{\partial r} \frac{\tilde{r}}{r - u \left(\frac{m_u}{m_R+m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi)}$$

pero tenemos que $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{u} \left(\frac{m_u}{m_R+m_u} \right)$, por lo que cuando $\tilde{\theta} - \psi = 0$, tendríamos:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{\theta} - \psi = 0} = \frac{\partial V_0}{\partial r} \frac{1}{r - u \left(\frac{m_u}{m_R+m_u} \right)} \left(r - u \left(\frac{m_u}{m_R+m_u} \right) \right) = \frac{\partial V_0}{\partial r}.$$

Para *iii*) tenemos el caso parecido:

$$\begin{aligned} \tilde{r}^2 &= r^2 + u^2 \left(\frac{m_u}{m_R+m_u} \right)^2 - 2ru \left(\frac{m_u}{m_R+m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \\ \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} &= \frac{\tilde{r}}{r - u \left(\frac{m_u}{m_R+m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi)} \end{aligned}$$

así:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial V_0}{\partial r} \frac{\tilde{r}}{r - u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi)}$$

para este caso sería $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u} \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right)$, por lo que cuando $\tilde{\theta} - \psi = \pi$, tendríamos:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{\theta} - \psi = \pi} = \frac{\partial V_0}{\partial r} \frac{1}{r + u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right)} \left(r + u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right) \right) = \frac{\partial V_0}{\partial r}.$$

Para el caso *iv*) tendríamos la relación:

$$\begin{aligned} r^2 &= \tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right)^2 - 2\tilde{r}u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \\ \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} &= \frac{1}{r} \left(\tilde{r} - u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \right). \end{aligned}$$

En este caso particular, notamos que r se encuentra en dirección opuesta a los demás casos (R está a la izquierda de S), por lo que $\frac{\partial V_0}{\partial r}$ tendría signo opuesto. Además, se cumple la relación $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{u} \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right)$, así:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tilde{r}} = -\frac{\partial V_0}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\tilde{r} - u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \right)$$

luego:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{\theta} - \psi = \pi} = -\frac{\partial V_0}{\partial r} \frac{1}{\tilde{r} + u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right)} \left(\tilde{r} + u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right) \right) = -\frac{\partial V_0}{\partial r}.$$

Analizando el signo de las derivadas en los tres casos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial \tilde{r}} &= \frac{\partial V_0}{\partial r} - \frac{m_u}{(u - r)^2} < 0 \\ \frac{\partial V_3}{\partial \tilde{r}} &= \frac{\partial V_0}{\partial r} + \frac{m_u}{(r + u)^2} \\ \frac{\partial V_4}{\partial \tilde{r}} &= -\frac{\partial V_0}{\partial r} + \frac{m_u}{(r - u)^2} > 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Vemos que en el caso *i*) no podríamos tener un movimiento uniforme. Sólo nos quedan los casos *iii*) y *iv*).

Q.E.D.

Ahora bien, tratemos de aproximar el rango donde $\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} > 0$ para los casos *iii*) y *iv*).

5.1.1 Caso particular: Saturno y los anillos concéntricos

Para $r = 0$ tenemos $\frac{\partial V_0}{\partial r} = 0$, así los dos casos se reducen a uno sólo. Por lo que tendríamos que $\tilde{r} = u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right)$:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} \Big|_{r=0} = \frac{m_u}{\left(\tilde{r} + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^2} = \frac{m_u}{u^2} > 0$$

y para que $\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} = cte$ necesitamos:

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{m_u}{\left(\tilde{r} + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^2} = \frac{m_R + m_u}{u^3} = cte.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \left(\frac{\tilde{m}_R + m_S}{\tilde{m}_R} \right)^2 \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} = \left(\frac{\tilde{m}_R + m_S}{\tilde{m}_R} \right)^2 \left(\frac{1}{u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right)} \right) \frac{m_u}{u^2} \\ \omega^2 &= \frac{(\tilde{m}_R + m_S)^2}{\tilde{m}_R^2} \frac{1}{u^3} > 0. \end{aligned}$$

Así, para $r = 0$ y $\tilde{r} = u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right)$ se cumplen las condiciones de movimiento uniforme. En un sentido físico, este caso sería una homologación al problema de dos cuerpos.

5.1.2 Caso general

Para el caso *iii*), notemos que por definición, $\tilde{r} \neq 0$, ya que $r = \tilde{r} - u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right)$ por lo que $\tilde{r} \in \left[u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right), a + u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right) \right)$. Así, 5.2 está bien definido.

Ahora bien, definimos:

$$Q_3 = \frac{\partial V_0}{\partial r} + \frac{m_u}{\left(\tilde{r} + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^2} = \rho_R \int \int_R \frac{\gamma(r + \gamma \cos \phi)}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma + \frac{m_u}{\left(\tilde{r} + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^2}$$

sustituyendo el valor de \tilde{r} en función de r, m_u y m_R :

$$Q_3(r, m_u, m_R) = \rho_R \int \int_R \frac{\gamma(r + \gamma \cos \phi)}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma + \frac{m_u}{\left(r + u \left(\frac{m_u}{m_R + m_u} \right) + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^2}.$$

Si tomamos la relación $m_R = \varepsilon m_u$, además de $\rho_R = \frac{m_R}{A_R}$:

$$\begin{aligned} Q_3(r, m_u, \varepsilon m_u) &= \frac{\varepsilon m_u}{A_R} \int \int_R \frac{\gamma(r + \gamma \cos \phi)}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma + \frac{m_u}{(r + u)^2} \\ Q_3(r, m_u, \varepsilon) &= \frac{m_u}{A_R} \left[\varepsilon \int \int_R \frac{\gamma(r + \gamma \cos \phi)}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma + \frac{A_R}{(r + u)^2} \right]. \end{aligned}$$

Por lo que, tenemos que encontrar los valores en los que $Q_3 \geq 0$. Podemos quitar la dependencia de m_u en Q_3 , ya que sólo aparece multiplicada y no afecta en los ceros de Q_3 . Nos enfocaremos en la función:

$$\tilde{Q}_3(r, \varepsilon) = \varepsilon \int_R \int \frac{\gamma(r+\gamma \cos \phi)}{(r^2+\gamma^2+2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma + \frac{A_R}{(r+u)^2}.$$

Así, el problema a resolver sería encontrar la región donde la función \tilde{Q}_3 es mayor o igual a cero en $r \in [0, a)$ y $\varepsilon \in [0, \infty)$.

Para $r = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_3(0, \varepsilon) &= \varepsilon \int_R \int \frac{\cos \phi}{\gamma} d\phi d\gamma + \frac{A_R}{u^2} \\ \tilde{Q}_3(0, \varepsilon) &= \frac{A_R}{u^2} > 0, \quad \varepsilon \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Para $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{Q}_3(r, 0) = \frac{A_R}{(r+u)^2} > 0.$$

Si $\varepsilon \rightarrow \infty$, como la integral es negativa:

$$\tilde{Q}_3(r, \varepsilon) \rightarrow -\infty, \quad r \in (0, a).$$

Encontremos los ceros de \tilde{Q}_3 :

$$\tilde{Q}_3 = 0 = \varepsilon \int_R \int \frac{\gamma(r+\gamma \cos \phi)}{(r^2+\gamma^2+2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma + \frac{A_R}{(r+u)^2}$$

entonces:

$$\varepsilon_u(r) = \frac{-\frac{A_R}{(r+u)^2}}{\int_R \int \frac{\gamma(r+\gamma \cos \phi)}{(r^2+\gamma^2+2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma}, \quad r \in (0, a). \quad (5.4)$$

Vemos que esta función es univaluada sobre $r \in (0, a)$.

Nota: Ésta relación entre la masa de los anillos y del cuerpo unido la hacemos para simplificar el problema, reduciendo variables y para seguir la línea de estudio de Maxwell, ya que al final, encuentra una relación directa entre las masas, es decir, encuentra un valor específico de ε .

Esta función es la frontera de la región donde la condición 5.2 se cumple para el caso *iii*). Por lo que vemos que $\omega^2 > 0$ para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_u)$.

Ahora estudiaremos el caso *iv*). Para $\tilde{r} \neq 0$, tenemos que:

$$-\frac{\partial V_0}{\partial r} + \frac{m_u}{\left(u\left(\frac{m_R}{m_R+m_u}\right) + \tilde{r}\right)^2} > 0$$

para todo $r > 0$, por lo que en este caso, tenemos siempre movimiento uniforme.

Para $\tilde{r} \rightarrow 0$ (El centro de gravedad de Saturno coincide con el centro de gravedad del anillo y masa como sistema), para la condición 5.2 tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} &= \rho_R \int \int_R \frac{\gamma}{\left(u^2 \left(\frac{m_u}{m_R+m_u}\right)^2 + \gamma^2 + 2u \left(\frac{m_u}{m_R+m_u}\right) \gamma \cos \phi\right)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \\ -\rho_R \int \int_R \frac{3\gamma \left(u \left(\frac{m_u}{m_R+m_u}\right) + \gamma \cos \phi\right)^2}{\left(u^2 \left(\frac{m_u}{m_R+m_u}\right)^2 + \gamma^2 + 2u \left(\frac{m_u}{m_R+m_u}\right) \gamma \cos \phi\right)^{\frac{5}{2}}} d\phi d\gamma &- \frac{m_u}{u^3 \left(\frac{m_R}{m_R+m_u}\right)^3} \end{aligned}$$

está bien definido, aunque el signo no queda claro. Por lo que en este caso, $\omega^2 > 0$ para $\varepsilon \geq 0$.

Así, ahora en adelante, para mantener una sólo fórmula del potencial, definiremos el término σ (5.3), donde $\sigma = 1$ si es el caso *iii*) y $\sigma = -1$ si es el caso *iv*):

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} = \sigma \frac{\partial V_0}{\partial r} + \frac{m_u}{(u + \sigma \tilde{r})^2}.$$

5.2 Movimiento perturbado

5.2.1 Dedución de las ecuaciones

Regresando al sistema 4.1, 4.2 y 4.3, el potencial V depende de las tres variables $(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \psi)$. Cambiando de variables a las coordenadas rotantes, tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} = -\frac{\partial V}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi$$

por lo que en estas coordenadas quedarían las ecuaciones:

$$\left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S}\right)^2 \left(\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi\right) = -\frac{\partial V}{\partial \xi} \quad (5.5)$$

$$\left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S}\right)^2 \left(\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta\right) = -\frac{\partial V}{\partial \eta} \quad (5.6)$$

$$\tilde{m}_R k^2 \ddot{\psi} = m_S \left(-\frac{\partial V}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi\right). \quad (5.7)$$

Al igual que el caso anterior, las soluciones $\xi = cte, \eta = cte$ y $\dot{\psi}_0 = cte$ son soluciones del sistema 5.5, 5.6 y 5.7.

Sean $(\xi_0, \eta_0, \psi_0) = x_0$ las soluciones en el caso de movimiento uniforme ($\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2} = \tilde{r}_0 = cte, \tilde{\theta} = \omega t$ y $\psi = \omega t + \pi$), y sean (ξ_1, η_1, ψ_1) las soluciones del problema perturbado a primer orden; con esto, podemos escribir la solución de la forma:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \xi_1 \\ \eta &= \eta_0 + \eta_1 \\ \psi &= \psi_0 + \psi_1.\end{aligned}$$

Desarrollando $\frac{\partial V}{\partial \xi}$, $\frac{\partial V}{\partial \eta}$ y $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ en su serie de Taylor:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \Big|_{x_0} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \Big|_{x_0} \xi_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{x_0} \eta_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \psi} \Big|_{x_0} \psi_1 + O_1(\xi_1^2, \eta_1^2, \psi_1^2) \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \frac{\partial V}{\partial \eta} \Big|_{x_0} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{x_0} \xi_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \Big|_{x_0} \eta_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \psi} \Big|_{x_0} \psi_1 + O_2(\xi_1^2, \eta_1^2, \psi_1^2) \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \left(-\frac{\partial V}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi \right) \Big|_{x_0} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\frac{\partial V}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi \right] \Big|_{x_0} \xi_1 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial V}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi \right] \Big|_{x_0} \eta_1 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[-\frac{\partial V}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi \right] \Big|_{x_0} \psi_1 + O_3(\xi_1^2, \eta_1^2, \psi_1^2) \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \left(-\frac{\partial V}{\partial \xi} \eta_0 + \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi_0 \right) \Big|_{x_0} + \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \eta_0 + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \xi_0 + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \Big|_{x_0} \xi_1 \\ &+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \xi_0 - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \eta_0 - \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \Big|_{x_0} \eta_1 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \psi} \xi_0 - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \psi} \eta_0 \right) \Big|_{x_0} \psi_1 + O_3(\xi_1^2, \eta_1^2, \psi_1^2)\end{aligned}$$

con $\tilde{\omega} = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$. Pero como $\frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_{x_0} = 0$, quedaría:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \theta} &= \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \eta_0 + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \xi_0 + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \Big|_{x_0} \xi_1 + \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \eta_0 - \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \xi_0 \right) \Big|_{x_0} \eta_1 + \\ &\quad \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \psi} \eta_0 + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \psi} \xi_0 \right) \Big|_{x_0} \psi_1 + O_3(\xi_1^2, \eta_1^2, \psi_1^2)\end{aligned}$$

Retomando las definiciones $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \Big|_{x_0} = L \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{x_0} = M \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \Big|_{x_0} = N \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$, $\frac{\partial V}{\partial \xi} \Big|_{x_0} = \omega^2 \xi_0 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$, $\frac{\partial V}{\partial \eta} \Big|_{x_0} = \omega^2 \eta_0 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \psi} \Big|_{x_0} = Q \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \psi} \Big|_{x_0} = R \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$, sustituyéndolas en las series y despreciando los términos de orden mayor:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \xi} &= \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \omega^2 \xi_0 + L \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \xi_1 + M \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \eta_1 + Q \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \psi_1 \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \omega^2 \eta_0 + M \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \xi_1 + N \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \eta_1 + R \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \psi_1 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 (-L\eta_0 + M\xi_0 + \omega^2\eta_0) \xi_1 + \\ &\quad \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 (-M\eta_0 + N\xi_0 - \omega^2\xi_0) \eta_1 + \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 (-Q\eta_0 + R\xi_0) \psi_1.\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} (\xi_0 + \xi_1) - 2\omega \frac{d}{dt} (\eta_0 + \eta_1) - \omega^2 (\xi_0 + \xi_1) \right) = \\
& \quad - \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 (\omega^2 \xi_0 + L\xi_1 + M\eta_1 + Q\psi_1) \\
& \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} (\eta_0 + \eta_1) + 2\omega \frac{d}{dt} (\xi_0 + \xi_1) - \omega^2 (\eta_0 + \eta_1) \right) = \\
& \quad - \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 (\omega^2 \eta_0 + M\xi_1 + N\eta_1 + R\psi_1) \\
& \quad \quad \quad \tilde{m}_R k^2 \frac{d^2}{dt^2} (\psi_0 + \psi_1) = \\
m_S \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 & [(M\xi_0 - L\eta_0 + \omega^2 \eta_0) \xi_1 + (N\xi_0 - M\eta_0 - \omega^2 \xi_0) \eta_1 + (R\xi_0 - Q\eta_0) \psi_1] \\
& \left(\ddot{\xi}_1 - 2\omega \dot{\eta}_1 - \omega^2 \xi_1 - \omega^2 \xi_0 \right) = -(\omega^2 \xi_0 + L\xi_1 + M\eta_1 + Q\psi_1) \\
& \left(\ddot{\eta}_1 + 2\omega \dot{\xi}_1 - \omega^2 \eta_1 - \omega^2 \eta_0 \right) = -(\omega^2 \eta_0 + M\xi_1 + N\eta_1 + R\psi_1) \\
& \quad \quad \quad \ddot{\psi}_1 = \\
\frac{m_S}{m_R k^2} \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 & ((M\xi_0 - L\eta_0 + \omega^2 \eta_0) \xi_1 + (N\xi_0 - M\eta_0 - \omega^2 \xi_0) \eta_1 + (R\xi_0 - Q\eta_0) \psi_1).
\end{aligned}$$

Así, quedarían las ecuaciones:

$$\ddot{\xi}_1 - 2\omega \dot{\eta}_1 - \omega^2 \xi_1 + L\xi_1 + M\eta_1 + Q\psi_1 = 0 \quad (5.8)$$

$$\ddot{\eta}_1 + 2\omega \dot{\xi}_1 - \omega^2 \eta_1 + M\xi_1 + N\eta_1 + R\psi_1 = 0 \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi}_1 &= \frac{m_S}{\tilde{m}_R k^2} \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 [(M\xi_0 - L\eta_0 + \omega^2 \eta_0) \xi_1 + (R\xi_0 - Q\eta_0) \psi_1] \\
& \quad + \frac{m_S}{\tilde{m}_R k^2} \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 (N\xi_0 - M\eta_0 - \omega^2 \xi_0) \eta_1.
\end{aligned} \quad (5.11)$$

5.2.2 Condiciones de estabilidad

Al igual que el caso anterior, podemos tomar soluciones de la forma:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \bar{v}$$

Definimos $\nu = \frac{m_S}{\tilde{m}_R k^2} \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$.

Sustituyendo en las ecuaciones 5.8, 5.9 y 5.10:

$$0 = \lambda^2 e^{\lambda t \bar{v}} + \begin{bmatrix} 0 & -2\omega & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda e^{\lambda t \bar{v}} +$$

$$\begin{bmatrix} L - \omega^2 & M & Q \\ M & N - \omega^2 & R \\ \nu(L\eta_0 - M\xi_0 - \omega^2\eta_0) & \nu(M\eta_0 - N\xi_0 + \omega^2\xi_0) & \nu(Q\eta_0 - R\xi_0) \end{bmatrix} e^{\lambda t \bar{v}}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 + L - \omega^2 & M - 2\omega\lambda & Q \\ M + 2\omega\lambda & \lambda^2 + N - \omega^2 & R \\ \nu(L\eta_0 - M\xi_0 - \omega^2\eta_0) & \nu(M\eta_0 - N\xi_0 + \omega^2\xi_0) & \lambda^2 + \nu(Q\eta_0 - R\xi_0) \end{bmatrix} e^{\lambda t \bar{v}}.$$

Como buscamos una solución no trivial, entonces necesitamos que el determinante de la matriz sea nulo.

El determinante de la matriz sería:

$$\lambda^6 + [-\nu(R\xi_0 - Q\eta_0) + L + N + 2\omega^2] \lambda^4 +$$

$$\left[\nu((QM - LR - 3\omega^2 R)\xi_0 + (NQ - RM + 3\omega^2 Q)\eta_0) \right] \lambda^2$$

$$+ ((-NQ + RM + \omega^2 Q)\xi_0 + (MQ - LR + \omega^2 R)\eta_0) 2\nu\omega\lambda = 0$$

Así, obteniendo las seis raíces de esta ecuación, obtendríamos las soluciones para el problema perturbado y definiríamos si es estable el movimiento o no.

Para simplificar un poco el problema, sin pérdida de generalidad, para el movimiento rotante, podemos suponer que el movimiento inicial se da sobre el eje horizontal; así $\eta_0 = 0$ y $\xi_0 = \tilde{r}_0$, ya que se puede hacer una rotación de tal manera que queden las mismas condiciones y la solución no cambie. Con esto el determinante quedaría:

$$\lambda^6 + [-\nu R\tilde{r}_0 + L + N + 2\omega^2] \lambda^4 +$$

$$[\nu(QM - LR - 3\omega^2 R)\tilde{r}_0 + (L - \omega^2)(N - \omega^2) - M^2] \lambda^2 +$$

$$(-NQ + RM + \omega^2 Q) 2\nu\omega\tilde{r}_0\lambda = 0.$$

Si queremos que nuestro problema sea estable, necesitamos que **todas** las raíces tengan parte real negativa, o en su defecto igual a cero; además, vemos que $\lambda = 0$ es raíz, por lo que el polinomio puede factorizarse:

$$p(\lambda) = \lambda \left[\prod_{i=1}^5 (\lambda - \lambda_i) \right] \quad \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Además, por la teoría de polinomios, un polinomio de grado 5 siempre tiene cuando menos una raíz real, entonces, para que el problema sea estable, necesitaríamos que esta raíz sea igual a cero. Esta condición no es suficiente para que sea estable. Así, necesitamos que el término lineal del polinomio se anule, por lo que la primera condición de estabilidad es:

$$(-NQ + RM + \omega^2 Q) 2\nu\omega\tilde{r}_0 = 0. \quad (5.12)$$

Si se cumple esta condición de estabilidad, tendríamos el polinomio:

$$\lambda^2 \left[\lambda^4 + (-\nu R\tilde{r}_0 + L + N + 2\omega^2) \lambda^2 + \left(\begin{array}{c} \nu(QM - LR - 3\omega^2 R) \tilde{r}_0 \\ + (L - \omega^2)(N - \omega^2) - M^2 \end{array} \right) \right] = 0$$

donde tenemos una raíz doble $\lambda = 0$ y un polinomio de grado dos en λ^2 .

Definimos de nuevo:

$$z = \lambda^2$$

$$b = -(-\nu R\tilde{r}_0 + L + N + 2\omega^2)$$

$$c = (\nu(QM - LR - 3\omega^2 R) \tilde{r}_0 + (L - \omega^2)(N - \omega^2) - M^2)$$

Sustituyendo en el polinomio:

$$z^2 - bz + c = 0$$

así, las raíces serían:

$$z_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$$

Del capítulo 3, sabemos que para tener raíces imaginarias en λ debe cumplirse que:

$$b^2 - 4c > 0 \quad (5.13)$$

$$b < 0 \quad (5.14)$$

$$c > 0. \quad (5.15)$$

En términos de nuestro problema, tenemos para la condición 5.13:

$$\begin{aligned}
b^2 - 4c &= (-\nu R\tilde{r}_0 + L + N + 2\omega^2)^2 - \\
&4 [(\nu(QM - LR - 3\omega^2 R)\tilde{r}_0 + (L - \omega^2)(N - \omega^2) - M^2)] \\
&= L^2 + N^2 + 4\omega^4 + 4\omega^2 L + 4\omega^2 N + 2LN + (\nu R\tilde{r}_0)^2 - 2\nu LR\tilde{r}_0 - 2\nu NR\tilde{r}_0 - 4\nu R\tilde{r}_0\omega^2 \\
&\quad - 4\omega^4 - 4LN + 4\omega^2 L + 4\omega^2 N + 4M^2 - 4\nu QM\tilde{r}_0 + 4\nu LR\tilde{r}_0 + 12\nu\omega^2 R\tilde{r}_0 \\
&= 8\omega^2(L + N + \nu R\tilde{r}_0) + (\nu R\tilde{r}_0 + L - N)^2 + 4M(M - \nu Q\tilde{r}_0) > 0 \quad (5.16)
\end{aligned}$$

para 5.14 y 5.15:

$$-\nu R\tilde{r}_0 + L + N + 2\omega^2 > 0 \quad (5.17)$$

$$\nu(QM - LR - 3\omega^2 R)\tilde{r}_0 + (L - \omega^2)(N - \omega^2) - M^2 > 0$$

$$\omega^4 - (L + N + 3\nu R\tilde{r}_0)\omega^2 + LN - M^2 + \nu(QM - LR)\tilde{r}_0 > 0 \quad (5.18)$$

5.2.3 Región de estabilidad

Ahora bien, veamos cual es la región bajo las cuales las condiciones 5.16, 5.17 y 5.18 se cumplen.

De 5.16: debe cumplirse que:

$$\omega^2 > \frac{1}{2}(\nu R\tilde{r}_0 - (L + N)) \quad (5.19)$$

Para 5.17:, tenemos dos casos:

i) $L + N + \nu R\tilde{r}_0 > 0$. Por lo que necesitaríamos:

$$\omega^2 > -\frac{1}{8(L+N+\nu R\tilde{r}_0)} [(\nu R\tilde{r}_0 + L - N)^2 + 4M(M - \nu Q\tilde{r}_0)].$$

ii) $L + N + \nu R\tilde{r}_0 < 0$. Por lo que necesitaríamos:

$$\omega^2 < -\frac{1}{8(L+N+\nu R\tilde{r}_0)} [(\nu R\tilde{r}_0 + L - N)^2 + 4M(M - \nu Q\tilde{r}_0)].$$

Para determinar las cotas del intervalo de estabilidad para 5.18, tomamos el caso mínimo, que sería $5.18=0$, por lo que sus raíces serían:

$$\begin{aligned}
\omega_{\pm}^2 &= \\
&\frac{1}{2}(L + N + 3\nu R\tilde{r}_0) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(L + N + 3\nu R\tilde{r}_0)^2 - 4(LN - M^2 + \nu(QM - LR)\tilde{r}_0)}
\end{aligned}$$

i) $LN - M^2 + \nu(QM - LR)\tilde{r}_0 < 0$. Tenemos la cota:

$$\omega^2 > \omega_+^2$$

donde:

$$\omega_+^2 = \frac{1}{2}(L + N + 3\nu R\tilde{r}_0) + \frac{1}{2}\sqrt{(L + N + 3\nu R\tilde{r}_0)^2 - 4(LN - M^2 + \nu(QM - LR)\tilde{r}_0)}$$

ii) $LN - M^2 + \nu(QM - LR)\tilde{r}_0 > 0$. Tenemos dos posibles casos:

a) $L + N + 3\nu R\tilde{r}_0 > 0$. Si el discriminante es positivo, implicaría:

$$\begin{aligned} \omega^2 &> \omega_+^2 \\ &\text{ó} \\ 0 &\leq \omega^2 < \omega_-^2 \end{aligned}$$

donde:

$$\omega_-^2 = \frac{1}{2}(L + N + 3\nu R\tilde{r}_0) - \frac{1}{2}\sqrt{(L + N + 3\nu R\tilde{r}_0)^2 - 4(LN - M^2 + \nu(QM - LR)\tilde{r}_0)}$$

b) $L + N + 3\nu R\tilde{r}_0 < 0$. Si el discriminante es positivo:

$$\omega^2 > 0$$

Así, podemos tener los intervalos posibles donde puede haber estabilidad en función de la velocidad de giro del sistema.

5.3 Comentarios al Capítulo

En este capítulo obtuvimos las condiciones necesarias para que el movimiento pueda ser uniforme, así como para que pueda moverse establemente. Al igual que el Capítulo 3, dejamos las condiciones en función de la velocidad de giro del sistema; además introdujimos una nueva variable $\varepsilon = \frac{m_R}{m_u}$, la cual define una relación directa entre los anillos y la masa unida, además de que en el futuro ε será la variable central de nuestro análisis.

Por otro lado, con las expresiones obtenidas anteriormente (resultado de desarrollar la integral del potencial en series de Fourier y combinar con los coeficientes de Taylor), Maxwell obtiene los valores de las variables en función de los coeficientes de Fourier:

"...Las cantidades que deben ser introducidas en la ecuación diferencial del movimiento son: $m_R, m_S, k^2, r_0, \omega^2, L, M, N$. Debemos observar que m_S es muy grande comparado con m_R ¹, entonces eli-

¹Ésta misma hipótesis la usaremos más adelante para simplificar los cálculos

minamos m_R en los términos en que va sumado con m_R y tendríamos:

$$\begin{aligned} m_S &= a^2 \omega^2 \\ k^2 &= a^2 (1 - f^2) \\ r_0 &= af \\ L &= \frac{m_R}{2a^2} (1 + g) \\ M &= \frac{m_R}{2a^2} fh \\ N &= \frac{m_R}{2a^2} f^2 (3 - g) \end{aligned}$$

substituyendo éstos valores en la ecuación obtenida y dividiendo por $m_R^2 a^4 f^2$:

$$(1 - f^2) n^4 + \left(1 - \frac{5}{2} f^2 + \frac{1}{2} f^2 g\right) n^2 \omega^2 + \left(\frac{9}{4} - 6f^2 - \frac{1}{4} g^2 - \frac{1}{4} h^2 + 2f^2 g\right) \omega^4 = 0$$

la condición de estabilidad es que esta ecuación deba tener ambos valores de n^2 negativos, y esto hace necesario que todos los coeficientes tengan el mismo signo, y que el cuadrado del segundo deba exceder cuatro veces el producto del primero y tercer términos.²

En la siguiente y última parte procederemos a analizar de manera más profunda el Potencial y buscar obtener del sistema bajo las cuales es estable el movimiento.

²Maxwell se refiere a que el discriminante sea positivo, para tener raíces reales.

Part III

Análisis del Potencial

Chapter 6

Cálculo de los coeficientes. Caso: anillo sin masa unida

En este capítulo, analizaremos el potencial del anillo y calcularemos los distintos coeficientes que obtuvimos a lo largo de los capítulos anteriores, ya que es necesario calcularlos para poder conocer las condiciones de estabilidad del sistema.

Aunque vimos en la primera parte que no es posible tener un movimiento uniforme en el caso del anillo sin masa, para fines del segundo problema, estudiaremos el comportamiento del potencial.

Recordando que el potencial del anillo (sin la masa unida) y Saturno V_0 es:

$$V_0 = -\rho_R \int \int_R \frac{1}{((x-x')^2+(y-y')^2)^{\frac{1}{2}}} dx' dy'$$

derivando hasta segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial x} &= \rho_R \int \int_R \frac{(x-x')}{((x-x')^2+(y-y')^2)^{\frac{3}{2}}} dx' dy' \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} &= \rho_R \int \int_R \frac{(y-y')}{((x-x')^2+(y-y')^2)^{\frac{3}{2}}} dx' dy' \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} &= \rho_R \int \int_R \left(\frac{1}{((x-x')^2+(y-y')^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(x-x')^2}{((x-x')^2+(y-y')^2)^{\frac{5}{2}}} \right) dx' dy' \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} &= \rho_R \int \int_R \left(\frac{1}{((x-x')^2+(y-y')^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(y-y')^2}{((x-x')^2+(y-y')^2)^{\frac{5}{2}}} \right) dx' dy' \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} &= -\rho_R \int \int_R \frac{3(x-x')(y-y')}{((x-x')^2+(y-y')^2)^{\frac{5}{2}}} dx' dy'. \end{aligned}$$

Estos coeficientes nos servirán para poder determinar los valores exactos de las condiciones establecidas en el Capítulo anterior.

6.1 Caso Particular: anillo circular

Ahora bien, a partir de este momento, nuestro estudio se enfocará en el caso en que el anillo tiene forma circular. Entonces, la segunda derivada con respecto a r quedaría (Capítulo 3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{\partial r^2} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\gamma^2 \sin^2 \phi}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{5}{2}}} \right) \gamma d\phi d\gamma \\
&= \rho_R \int_a^b \left[\int_0^{2\pi} -\frac{2}{(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi + \frac{\gamma \sin \phi}{r(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \Big|_0^{2\pi} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\gamma \cos \phi}{r(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right) d\phi \right] \gamma d\gamma \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial r^2} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{-2\gamma r - \gamma^2 \cos \phi}{r(r^2 + \gamma^2 + 2r\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma. \tag{6.1}
\end{aligned}$$

Para el caso de las coordenadas rotantes, sabemos que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'\|$, por lo que el potencial en estas coordenadas sería:

$$V_0 = -\rho_R \int_R \int \frac{1}{((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi' d\eta'$$

con:

$$\begin{aligned}
x' &= \xi' \cos \omega t - \eta' \sin \omega t \\
y' &= \xi' \sin \omega t + \eta' \cos \omega t.
\end{aligned}$$

Así, calculando sus derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \xi} &= \rho_R \int_R \int \frac{(\xi - \xi')}{((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi' d\eta' \\
\frac{\partial V_0}{\partial \eta} &= \rho_R \int_R \int \frac{(\eta - \eta')}{((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi' d\eta' \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} &= \rho_R \int_R \int \left(\frac{1}{((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(\xi - \xi')^2}{((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2)^{\frac{5}{2}}} \right) d\xi' d\eta' \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} &= \rho_R \int_R \int \left(\frac{1}{((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(\eta - \eta')^2}{((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2)^{\frac{5}{2}}} \right) d\xi' d\eta'
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \eta} = -\rho_R \int_R \int \frac{3(\eta-\eta')(\xi-\xi')}{((\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2)^{\frac{5}{2}}} d\xi' d\eta'.$$

Ahora bien, para obtener L , M y N tendríamos las condiciones $(\xi_0, \eta_0) = (r_0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial \xi} |_{(r_0,0)} &= \rho_R \int_R \int \frac{(r_0-\xi')}{(r_0^2-2r_0\xi'+\xi'^2+\eta'^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi' d\eta' \\ \frac{\partial V_0}{\partial \eta} |_{(r_0,0)} &= -\rho_R \int_R \int \frac{\eta'}{(r_0^2-2r_0\xi'+\xi'^2+\eta'^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi' d\eta' \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} |_{(r_0,0)} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{(r_0^2-2r_0\xi'+\xi'^2+\eta'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(r_0-\xi')^2}{(r_0^2-2r_0\xi'+\xi'^2+\eta'^2)^{\frac{5}{2}}} \right) d\xi' d\eta' \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} |_{(r_0,0)} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{(r_0^2-2r_0\xi'+\xi'^2+\eta'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\eta'^2}{(r_0^2-2r_0\xi'+\xi'^2+\eta'^2)^{\frac{5}{2}}} \right) d\xi' d\eta' \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \eta} |_{(r_0,0)} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{3\eta'(r_0-\xi')}{(r_0^2-2r_0\xi'+\xi'^2+\eta'^2)^{\frac{5}{2}}} d\xi' d\eta'. \end{aligned}$$

Sabemos que $r = \|(\xi, \eta)\|$ y $\gamma = \|(\xi', \eta')\|$ y por tanto:

$$\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \xi\xi' + \eta\eta' = -\gamma r \cos \phi$$

con las condiciones dadas quedaría:

$$\begin{aligned} r_0\xi' &= -\gamma r_0 \cos \phi \\ \xi' &= -\gamma \cos \phi \\ \eta' &= -\gamma \sin \phi \end{aligned}$$

Así, las derivadas en coordenadas polares serían:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \xi} |_{(r_0,0)} = \rho_R \int_R \int \frac{(r_0 + \gamma \cos \phi)}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \gamma d\phi d\gamma \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial \eta} |_{(r_0,0)} = \rho_R \int_R \int \frac{\gamma \sin \phi}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} \Big|_{(r_0,0)} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(r_0 + \gamma \cos \phi)^2}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{5}{2}}} \right) \gamma d\phi d\gamma \\
&= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi - 3r_0^2 - 6r_0\gamma \cos \phi - 3\gamma^2 \cos^2 \phi}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{5}{2}}} \right) \gamma d\phi d\gamma \\
&= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{-2r_0^2 - 4r_0\gamma \cos \phi - 2\gamma^2 - 3\gamma^2(-1 + \cos^2 \phi)}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{5}{2}}} \right) \gamma d\phi d\gamma \\
&= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\gamma^2 \sin^2 \phi}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{5}{2}}} \right) \gamma d\phi d\gamma \\
&= \rho_R \int_a^b \left[\int_0^{2\pi} -\frac{2}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi + \frac{\gamma \sin \phi}{r_0 (r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \Big|_0^{2\pi} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\gamma \cos \phi}{r_0 (r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right) d\phi \right] \gamma d\gamma \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} \Big|_{(r_0,0)} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{-2\gamma r_0 - \gamma^2 \cos \phi}{r_0 (r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \quad (6.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} \Big|_{(r_0,0)} &= \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(\gamma \sin \phi)^2}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{5}{2}}} \right) \gamma d\phi d\gamma \\
&= \rho_R \int_a^b \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi - \frac{3\gamma^2 \sin \phi}{r_0 (r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \Big|_0^{2\pi} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{2\pi} \left(\frac{\gamma \cos \phi}{r_0 (r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right) d\phi \right] \gamma d\gamma \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} \Big|_{(r_0,0)} &= \frac{1}{r_0} \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma (r_0 + \gamma \cos \phi)}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \quad (6.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{(r_0,0)} &= -3\rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma^2 \sin \phi (r_0 + \gamma \cos \phi)}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{5}{2}}} d\phi d\gamma \\
&= \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma^2 \sin \phi}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{1}{r_0} \rho_R \int_a^b \frac{\gamma}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^{2\pi} d\gamma \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{(\bar{r}_0, 0)} = 0 \quad (6.6)$$

por tanto:

$$L \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 = \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{-2\gamma r_0 - \gamma^2 \cos \phi}{r_0 (r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma \quad (6.7)$$

$$M = 0 \quad (6.8)$$

$$N \left(\frac{m_R}{m_R + m_S} \right)^2 = \frac{1}{r_0} \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma (r_0 + \gamma \cos \phi)}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma. \quad (6.9)$$

6.2 Comentarios al Capítulo

En este capítulo obtuvimos las expresiones de los coeficientes para el caso de los anillos sin masa, los cuales los utilizaremos a continuación en la última parte de la tesis.

Chapter 7

Potencial con masa unida a los anillos

Para este caso, tenemos que el potencial viene dado por:

$$V = V_0 - \frac{m_u}{\sqrt{(\tilde{x}-u_x)^2+(\tilde{y}-u_y)^2}}$$

derivando hasta segundo orden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} &= \frac{\partial V_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{m_u(\tilde{x}-u_x)}{((\tilde{x}-u_x)^2+(\tilde{y}-u_y)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial V}{\partial \tilde{y}} &= \frac{\partial V_0}{\partial \tilde{y}} + \frac{m_u(\tilde{y}-u_y)}{((\tilde{x}-u_x)^2+(\tilde{y}-u_y)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{x}^2} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{m_u}{((\tilde{x}-u_x)^2+(\tilde{y}-u_y)^2)^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{m_u(\tilde{x}-u_x)^2}{((\tilde{x}-u_x)^2+(\tilde{y}-u_y)^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{y}^2} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{m_u}{((\tilde{x}-u_x)^2+(\tilde{y}-u_y)^2)^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{m_u(\tilde{y}-u_y)^2}{((\tilde{x}-u_x)^2+(\tilde{y}-u_y)^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}} - \frac{3m_u(\tilde{x}-u_x)(\tilde{y}-u_y)}{((\tilde{x}-u_x)^2+(\tilde{y}-u_y)^2)^{\frac{5}{2}}}.\end{aligned}$$

En coordenadas polares:

$$V = V_0 - \frac{m_u}{\sqrt{\tilde{r}^2+u^2\left(\frac{m_R}{m_R+m_u}\right)^2-2u\tilde{r}\left(\frac{m_R}{m_R+m_u}\right)\cos(\tilde{\theta}-\psi)}}$$

obteniendo su primera derivada:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial V_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{m_u\left(\tilde{r}-u\left(\frac{m_R}{m_R+m_u}\right)\cos(\tilde{\theta}-\psi)\right)}{\left(\tilde{r}^2+u^2\left(\frac{m_R}{m_R+m_u}\right)^2-2u\tilde{r}\left(\frac{m_R}{m_R+m_u}\right)\cos(\tilde{\theta}-\psi)\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Para el caso de las coordenadas rotantes, sabemos que $\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\| = \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}\|$ y $\|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{u}\| = \|\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}_u\|$, por lo que el potencial sería:

$$V = V_0 - \frac{m_u}{\sqrt{(\tilde{\xi} - \xi_u)^2 + (\tilde{\eta} - \eta_u)^2}}$$

con:

$$\begin{aligned} u_x &= \xi_u \cos \omega t - \eta_u \sin \omega t \\ u_y &= \xi_u \sin \omega t + \eta_u \cos \omega t. \end{aligned}$$

Así, calculando sus derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{\partial V_0}{\partial \xi} + \frac{m_u(\tilde{\xi} - \xi_u)}{\left((\tilde{\xi} - \xi_u)^2 + (\tilde{\eta} - \eta_u)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial V}{\partial \tilde{\eta}} &= \frac{\partial V_0}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{m_u(\tilde{\eta} - \eta_u)}{\left((\tilde{\xi} - \xi_u)^2 + (\tilde{\eta} - \eta_u)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{\xi}^2} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{\xi}^2} + \frac{m_u}{\left((\tilde{\xi} - \xi_u)^2 + (\tilde{\eta} - \eta_u)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{m_u(\tilde{\xi} - \xi_u)^2}{\left((\tilde{\xi} - \xi_u)^2 + (\tilde{\eta} - \eta_u)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{\eta}^2} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{\eta}^2} + \frac{m_u}{\left((\tilde{\xi} - \xi_u)^2 + (\tilde{\eta} - \eta_u)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{m_u(\tilde{\eta} - \eta_u)^2}{\left((\tilde{\xi} - \xi_u)^2 + (\tilde{\eta} - \eta_u)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \tilde{\eta}} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \tilde{\eta}} - 3 \frac{m_u(\tilde{\xi} - \xi_u)(\tilde{\eta} - \eta_u)}{\left((\tilde{\xi} - \xi_u)^2 + (\tilde{\eta} - \eta_u)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

ya que:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \tilde{x} \cos \omega t + \tilde{y} \sin \omega t \\ \tilde{\xi} &= \tilde{r} \cos(\tilde{\theta} - \omega t) \\ \tilde{\eta} &= -\tilde{x} \sin \omega t + \tilde{y} \cos \omega t \\ \tilde{\eta} &= \tilde{r} \sin(\tilde{\theta} - \omega t) \\ \xi_u &= u_x \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos \omega t + u_y \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \sin \omega t \\ \xi_u &= u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\psi - \omega t) \\ \eta_u &= -u_x \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \sin \omega t + u_y \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos \omega t \\ \eta_u &= u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \sin(\psi - \omega t). \end{aligned}$$

Para las parciales con respecto a ψ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{\partial V_0}{\partial \xi} + \frac{m_u(\tilde{r} \cos(\tilde{\theta} - \omega t) - u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\psi - \omega t))}{\left(\tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)^2 - 2u\tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\tilde{\theta} - \psi)\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial V}{\partial \tilde{\eta}} &= \frac{\partial V_0}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{m_u(\tilde{r} \sin(\tilde{\theta} - \omega t) - u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \sin(\psi - \omega t))}{\left(\tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)^2 - 2u\tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\tilde{\theta} - \psi)\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \psi} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \psi} + \frac{m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \sin(\psi - \omega t)}{\left(\tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)^2 - 2u\tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \right)^{\frac{3}{2}}} + \\ &\quad \frac{3m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \tilde{r} \left(\tilde{r} \cos(\tilde{\theta} - \omega t) - u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\psi - \omega t) \right) \sin(\tilde{\theta} - \psi)}{\left(\tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)^2 - 2u\tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \right)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{\eta} \partial \psi} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{\eta} \partial \psi} - \frac{m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\psi - \omega t)}{\left(\tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)^2 - 2u\tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \right)^{\frac{3}{2}}} + \\ &\quad \frac{3m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \tilde{r} \left(\tilde{r} \sin(\tilde{\theta} - \omega t) - u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \sin(\psi - \omega t) \right) \sin(\tilde{\theta} - \psi)}{\left(\tilde{r}^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)^2 - 2u\tilde{r} \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\tilde{\theta} - \psi) \right)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

7.1 Caso Particular: anillo circular

Para obtener L, M, N, Q y R tendríamos las condiciones $(\tilde{\xi}_0, \tilde{\eta}_0, \psi_0) = (\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)$ con lo que quedaría:

$$\begin{aligned}\xi_u &= -u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \\ \eta_u &= 0 \\ \frac{\partial V_0}{\partial \xi} &= \frac{\partial V_0}{\partial \xi} \\ \frac{\partial V_0}{\partial \tilde{\eta}} &= \frac{\partial V_0}{\partial \tilde{\eta}} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{\eta}^2} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{\eta}^2} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \tilde{\eta}} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \tilde{\eta}}\end{aligned}$$

por lo que los coeficientes serían:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} + \frac{m_u}{\left(\tilde{r}_0^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)^2 - 2u\tilde{r}_0 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\pi) \right)^{\frac{3}{2}}} - \\ &\quad 3 \frac{m_u \left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^2}{\left(\tilde{r}_0^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)^2 - 2u\tilde{r}_0 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\pi) \right)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} - 2 \frac{m_u}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{\eta}^2} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{\eta}^2} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} + \frac{m_u}{\left(\tilde{r}_0^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)^2 - 2u\tilde{r}_0 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\pi) \right)^{\frac{3}{2}}} - \\ &\quad 3 \frac{m_u (0)^2}{\left(\tilde{r}_0^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)^2 - 2u\tilde{r}_0 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \cos(\pi) \right)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{\eta}^2} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{\eta}^2} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} + \frac{m_u}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)\right)^3} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \tilde{\eta}} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \tilde{\eta}} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} - 3 \frac{m_u \left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)\right)^{(0)}}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)\right)^5} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \tilde{\eta}} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \tilde{\eta}} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} = 0 \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \psi} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \psi} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} + \frac{m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \sin(\pi)}{\left(\tilde{r}_0^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)^2 - 2u\tilde{r}_0 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\pi)\right)^{\frac{3}{2}}} + \\
&\quad \frac{3m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \tilde{r}_0 \left(\tilde{r}_0 \cos(0) - u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\pi)\right) \sin(\pi)}{\left(\tilde{r}_0^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)^2 - 2u\tilde{r}_0 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\pi)\right)^{\frac{5}{2}}} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \psi} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi \partial \psi} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} = 0 \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{\eta} \partial \psi} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{\eta} \partial \psi} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} \\
&\quad - \frac{m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\pi)}{\left(\tilde{r}_0^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)^2 - 2u\tilde{r}_0 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\tilde{\theta} - \psi)\right)^{\frac{3}{2}}} + \\
&\quad \frac{3m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \tilde{r}_0 \left(\tilde{r}_0 \sin(0) - u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \sin(\pi)\right) \sin(\pi)}{\left(\tilde{r}_0^2 + u^2 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)^2 - 2u\tilde{r}_0 \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right) \cos(\tilde{\theta} - \psi)\right)^{\frac{5}{2}}} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{\eta} \partial \psi} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tilde{\eta} \partial \psi} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} + \frac{m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)\right)^3} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{\eta} \partial \psi} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} &= \frac{m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)\right)^3}
\end{aligned}$$

así tendríamos los coeficientes:

$$L \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} - 2 \frac{m_u}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)\right)^3} \quad (7.1)$$

$$M = 0 \quad (7.2)$$

$$N \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} + \frac{m_u}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u}\right)\right)^3} \quad (7.3)$$

$$Q \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = 0 \quad (7.4)$$

$$R \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = \frac{m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^3} \quad (7.5)$$

Vemos además, que como M y Q son nulas, por lo que la relación 5.12 se cumple.

7.2 Condiciones bajo las cuales el movimiento es estable

Regresando al Capítulo 5, las condiciones 5.16, 5.17 y 5.18 deben satisfacerse para tener estabilidad, las cuales se reducen a:

$$8\omega^2 (L + N + \nu R \tilde{r}_0) + (\nu R \tilde{r}_0 + L - N)^2 > 0 \quad (7.6)$$

$$-\nu R \tilde{r}_0 + L + N + 2\omega^2 > 0 \quad (7.7)$$

$$\omega^4 - (L + N + 3\nu R \tilde{r}_0) \omega^2 + LN - \nu L R \tilde{r}_0 > 0 \quad (7.8)$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} (L + N + \nu R \tilde{r}_0) \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 &= \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} \right) |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} \\ &\quad - \frac{m_u}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^3} + \nu \frac{m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^3} \tilde{r}_0 \\ &= \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} \right) |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} - \frac{m_u}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^3} \left(1 - \nu u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \tilde{r}_0 \right) \\ (L + N + 3\nu R \tilde{r}_0) \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 &= \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} \right) |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} \\ &\quad - \frac{m_u}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^3} + 3\nu \frac{m_u u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right)}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^3} \tilde{r}_0 \\ &= \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} \right) |_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} - \frac{m_u}{\left(\tilde{r}_0 + u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \right)^3} \left(1 - 3\nu u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \tilde{r}_0 \right) \end{aligned}$$

además, recordando el valor de ν vemos que es del orden de $\frac{\tilde{m}_R}{m_S}$:

$$\nu = \frac{m_S}{\tilde{m}_R k^2} \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2. \quad (7.9)$$

Como una hipótesis física consideramos que la masa de Saturno es muy superior a la masa de los anillos o incluso de los anillos con la masa unida, por lo que $\frac{\tilde{m}_R}{m_S}$ sería muy pequeña en comparación a los demás coeficientes. La relación $\frac{m_R}{m_S}$ es del orden de 6×10^{-8} ¹, y para $\frac{m_u}{m_S}$ es del orden de 2.4×10^{-4} ². Entonces $3 \frac{m_S}{\tilde{m}_R k^2} \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \tilde{r}_0 \approx 7.5 \times 10^{-12} \frac{u \tilde{r}_0}{k^2}$. Así, por el valor muy pequeño, podemos considerar $3 \frac{m_S}{\tilde{m}_R k^2} \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 u \left(\frac{m_R}{m_R + m_u} \right) \tilde{r}_0 \sim 0$.

Con esto, podemos simplificar las condiciones 7.6, 7.7 y 7.8:

$$8\omega^2 (L + N + \nu R \tilde{r}_0) + (\nu R \tilde{r}_0 + L - N)^2 \approx 8\omega^2 (L + N) + (L - N)^2 > 0 \quad (7.10)$$

$$-\nu R \xi_0 + L + N + 2\omega^2 \approx L + N + 2\omega^2 > 0 \quad (7.11)$$

$$\omega^4 - (L + N + 3\nu R \tilde{r}_0) \omega^2 + LN - \nu LR \tilde{r}_0 \approx (\omega^2 - L) (\omega^2 - N) > 0 \quad (7.12)$$

Recordando el valor de $\omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$:

$$\omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{r}_0} \left(\sigma \frac{\partial V_0}{\partial r} \Big|_{(\tilde{r}_0, 0, \omega t + \pi)} + \frac{m_u}{(u + \sigma r_0)^2} \right)$$

además, retomamos la suposición que $m_R = \varepsilon m_u$ y recordando que $\rho_R = \frac{m_R}{A_R}$, por lo que $\omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$ quedaría expresada:

$$\begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 &= \frac{1}{[u(\frac{1}{1+\varepsilon}) + \sigma r_0]} \left(\sigma \frac{m_R}{A_R} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(r_0 + \gamma \cos \phi)}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma + \frac{m_u}{(u + \sigma r_0)^2} \right) \\ \omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 &= \frac{m_u(1+\varepsilon)}{[u + \sigma r_0(1+\varepsilon)]} \left(\sigma \frac{\varepsilon}{A_R} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(r_0 + \gamma \cos \phi)}{(r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0\gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma + \frac{1}{(u + \sigma r_0)^2} \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo las relaciones de m_R en 7.1 y 7.3:

¹Ver [12], p. 53, 73

²Tomando en cuenta la masa de la luna más grande que tiene Saturno: Titán (1346×10^{23} g), para las demás lunas éste valor será menor. Ver [12], p. 53, 73

7.2. CONDICIONES BAJO LAS CUALES EL MOVIMIENTO ES ESTABLE 91

$$L \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = \frac{m_R}{A_R} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{-2\gamma r_0 - \gamma^2 \cos \phi}{r_0 (r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0 \gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma - 2 \frac{m_u}{(u + \sigma r_0)^3}$$

$$L \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = m_u \left(\frac{\varepsilon}{A_R} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{-2\gamma r_0 - \gamma^2 \cos \phi}{r_0 (r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0 \gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma - 2 \frac{1}{(u + \sigma r_0)^3} \right)$$

$$N \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = \rho_R \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma (r_0 + \gamma \cos \phi)}{r_0 (r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0 \gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma + \frac{m_u}{(u + \sigma r_0)^3}$$

$$N \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = m_u \left(\frac{\varepsilon}{A_R} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\gamma (r_0 + \gamma \cos \phi)}{r_0 (r_0^2 + \gamma^2 + 2r_0 \gamma \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi d\gamma + \frac{1}{(u + \sigma r_0)^3} \right)$$

en términos de $I_0(r_0)$ y $I_1(r_0)$:

$$\omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = \frac{m_u(1+\varepsilon)}{[u + \sigma r_0(1+\varepsilon)]} \left[\sigma \frac{\varepsilon}{A_R} (r_0 I_0(r_0) + I_1(r_0)) + \frac{1}{(u + \sigma r_0)^2} \right]$$

$$L \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = m_u \left(-\frac{\varepsilon}{A_R} \left(2I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right) - 2 \frac{1}{(u + \sigma r_0)^3} \right)$$

$$N \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 = m_u \left(\frac{\varepsilon}{A_R} \left(I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right) + \frac{1}{(u + \sigma r_0)^3} \right)$$

donde vemos que $\omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$, $L \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$ y $N \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$ quedan en función de (ε, r_0) .

Para términos prácticos, dividimos todas las relaciones entre $\left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2$. A pesar de que éste término es del orden $\frac{1}{m_S^2} \ll 1$, dado que todos los términos van multiplicados por éste número, no afecta al comportamiento de las desigualdades.

Si $\varepsilon \sim 0$ tendríamos que los coeficientes serían:

$$\omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \sim m_u \frac{1}{(u + \sigma r_0)^3}$$

$$L \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \sim -2m_u \frac{1}{(u + \sigma r_0)^3}$$

$$N \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \sim m_u \frac{1}{(u + \sigma r_0)^3}$$

$$(L + N) \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \sim -m_u \frac{1}{(u + \sigma r_0)^3}$$

$$(L - N) \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \sim -3m_u \frac{1}{(u + \sigma r_0)^3}$$

Así, tendríamos que:

$$-\frac{1}{8(L+N)} (L - N)^2 \sim \frac{9}{8} \frac{m_u}{(u + \sigma r_0)^3}$$

$$-\frac{1}{2} (L + N) \sim \frac{1}{2} \frac{m_u}{(u + \sigma r_0)^3}$$

por lo que se cumpliría que:

$$\omega^2 \in \left(-\frac{1}{2}(L+N), -\frac{1}{8(L+N)}(L-N)^2 \right)$$

Y así sería estable el movimiento.

Por el otro lado, si $\varepsilon \rightarrow \infty$, tendríamos que:

$$\begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 &\sim m_u \frac{\varepsilon \sigma r_0}{A_R} (r_0 I_0(r_0) + I_1(r_0)) \\ L \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 &\sim -m_u \frac{\varepsilon}{A_R} \left(2I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right) \\ N \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 &\sim m_u \frac{\varepsilon}{A_R} \left(I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right) \\ (L+N) \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 &\sim -m_u \frac{\varepsilon}{A_R} I_0(r_0) \\ (L-N) \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 &\sim -m_u \frac{\varepsilon}{A_R} \left(3I_0(r_0) + 2\frac{I_1(r_0)}{r_0} \right) \end{aligned}$$

en el cual, recordando el análisis numérico del caso anterior, tenemos que

$\omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 < 0$ para $\sigma = 1$ y $\omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 > 0$ para $\sigma = -1$; por lo que el movimiento resulta inestable en el caso *iii*).

Así, podemos suponer que existen valores de (ε, r_0) para los cuales deja de haber estabilidad en el movimiento (cuando menos en el caso *iii*).

Ahora bien, en el caso *iii*) vemos que ω^2 forma una superficie, por lo que buscaremos el caso que $\omega^2 = 0$ para a su vez encontrar la región donde sea positivo y pueda existir movimiento uniforme.

7.3 Caso particular: Saturno y anillos concén-

tricos

Tomando el caso en que Saturno y los anillos son concéntricos, tendríamos cuando $r_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \Big|_{r_0=0} &= m_u \frac{(1+\varepsilon)}{u^3} \\ L \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \Big|_{r_0=0} &= m_u \left(-\frac{\varepsilon}{ab(a+b)} - \frac{2}{u^3} \right) \\ N \left(\frac{\tilde{m}_R}{\tilde{m}_R + m_S} \right)^2 \Big|_{r_0=0} &= m_u \left(-\frac{\varepsilon}{ab(a+b)} + \frac{1}{u^3} \right) \end{aligned}$$

así:

$$\begin{aligned} L+N &= m_u \left(-\frac{2\varepsilon}{ab(a+b)} - \frac{1}{u^3} \right) \\ L-N &= -m_u \frac{3}{u^3}. \end{aligned}$$

Para 7.10:

$$\begin{aligned} 8\omega^2 (L + N) + (L - N)^2 |_{r_0=0} &= (m_u)^2 \left[-8 \frac{(1+\varepsilon)}{u^3} \left(\frac{2\varepsilon}{ab(a+b)} + \frac{1}{u^3} \right) + \left(\frac{3}{u^3} \right)^2 \right] > 0 \\ &= \frac{(m_u)^2}{u^6} \left[-\varepsilon^2 \left(16 \frac{u^3}{ab(a+b)} \right) - \varepsilon \left(8 + 16 \frac{u^3}{ab(a+b)} \right) + 9 - 8 \right] > 0 \end{aligned}$$

lo que implica:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{2u^3}{ab(a+b)} \right) + \varepsilon \left(1 + \frac{2u^3}{ab(a+b)} \right) - \frac{1}{8} < 0.$$

Sacando los valores de ε donde se anula la expresión, tendríamos:

$$\varepsilon_{2,\pm} = -\frac{\left(1 + \frac{2u^3}{ab(a+b)}\right)}{\frac{2u^3}{ab(a+b)}} \pm \frac{1}{\frac{2u^3}{ab(a+b)}} \sqrt{\left(1 + \frac{2u^3}{ab(a+b)}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2u^3}{ab(a+b)}\right)}$$

pero como queremos que $\varepsilon > 0$ tendríamos sólo la raíz:

$$\varepsilon_{2,+} = -\frac{\left(1 + \frac{2u^3}{ab(a+b)}\right)}{\frac{2u^3}{ab(a+b)}} + \frac{1}{\frac{2u^3}{ab(a+b)}} \sqrt{\left(1 + \frac{2u^3}{ab(a+b)}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2u^3}{ab(a+b)}\right)}$$

Definimos:

$$x = \frac{2u^3}{ab(a+b)}$$

entonces:

$$\varepsilon_{2,+} = -\frac{1+x}{2x} + \frac{1}{2x} \sqrt{x^2 + \frac{5}{2}x + 1}.$$

También podemos escribir $\varepsilon_{2,+}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,+} &= \frac{1+x}{2x} \left(\frac{1}{(1+x)} \sqrt{x^2 + \frac{5}{2}x + 1} - 1 \right) \\ \varepsilon_{2,+} &= \frac{1+x}{2x} \left(\sqrt{1 + \frac{x}{2(1+x)^2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Notemos que el producto de las dos raíces es negativo, por lo tanto $\varepsilon_{2,+} > 0$, ya que $\varepsilon_{2,-} < 0$. Así, tendríamos el intervalo para que la desigualdad sea positiva:

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_{2,+})$$

Por otro lado, para 7.11:

$$\begin{aligned} (L + N + 2\omega^2) |_{r_0=0} &= m_u \left[-\left(\frac{2\varepsilon}{ab(a+b)} + \frac{1}{u^3} \right) + 2 \frac{(1+\varepsilon)}{u^3} \right] > 0 \\ \frac{m_u}{u^3} \left[\varepsilon \left(2 - \frac{2u^3}{ab(a+b)} \right) + 1 \right] &> 0 \\ \varepsilon_{1,+} &= \frac{1}{x-2} \end{aligned}$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \frac{1}{x-2} \text{ si } x > 2 \\ &\quad \text{ó} \\ \varepsilon &\geq 0 \text{ si } x \leq 2 \end{aligned}$$

Para 7.12:

$$\begin{aligned} & [(\omega^2 - L)(\omega^2 - N)]|_{r_0=0} = \\ (m_u)^2 & \left(\frac{(1+\varepsilon)}{u^3} + \left(\frac{\varepsilon}{ab(a+b)} + \frac{2}{u^3} \right) \right) \left(\frac{(1+\varepsilon)}{u^3} - \left(-\frac{\varepsilon}{ab(a+b)} + \frac{1}{u^3} \right) \right) \\ & \frac{(m_u)^2}{u^6} \left(3 + \varepsilon \left(1 + \frac{u^3}{ab(a+b)} \right) \right) \varepsilon \left(1 + \frac{u^3}{ab(a+b)} \right) > 0 \end{aligned}$$

la cual se cumple para toda $\varepsilon > 0$.

Pero, tenemos que si $x \geq 2$ implicaría que:

$$\varepsilon_{2,+} \leq \varepsilon_{1,+}$$

porque:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{x}{2(1+x)^2}} &\leq 1 + \frac{2x}{(1+x)(x-2)} \\ 1 + \frac{x}{2(1+x)^2} &\leq \left(1 + \frac{2x}{(1+x)(x-2)} \right)^2 = 1 + \frac{4x}{(1+x)(x-2)} + \frac{4x^2}{(1+x)^2(x-2)^2} \\ x(x-2)^2 &\leq 8x(1+x)(x-2) + 8x^2 \\ 0 &\leq 8x^2 + (x-2)(7x^2 + 10x) \text{ si } x \geq 2 \end{aligned}$$

por lo tanto, el segundo caso no puede ser posible.

Por lo que nos quedaría finalmente la condición para estabilidad:

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_{2,+})$$

Para el caso particular en que $u = \frac{a+b}{2}$, tenemos que $x = 1.5625 < 2$ y $\varepsilon_0 = -\frac{1+1.5625}{2(1.5625)} + \frac{1}{2(1.5625)} \sqrt{(1.5625)^2 + \frac{5}{2}(1.5625) + 1} = 0.047409$.

Busquemos aproximar el valor de $\varepsilon_{2,+}$. Notemos que $\frac{x}{(1+x)^2}$ tiene como derivada $\frac{1-x}{(1+x)^3}$ y que tiene un valor máximo en $x = 1$, con valor de $\frac{1}{4}$, por lo que $\sqrt{1 + \frac{x}{2(1+x)^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{8}}$. Además, por series de Taylor se cumple que:

$$1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{8} \leq \sqrt{1 + \eta} \leq 1 + \frac{\eta}{2}$$

entonces implica que:

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{2x} \left(\frac{x}{4(1+x)^2} - \frac{1}{8} \left[\frac{x}{2(1+x)^2} \right]^2 \right) &\leq \frac{1+x}{2x} \left(\sqrt{1 + \frac{x}{2(1+x)^2}} - 1 \right) \leq \left(\frac{x}{4(1+x)^2} \right) \frac{1+x}{2x} \\ &\frac{1}{8(1+x)} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{x}{(1+x)^2} \right) \leq \varepsilon_{2,+} \leq \frac{1}{8(1+x)} \end{aligned}$$

como $\frac{x}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{4}$, entonces:

$$\frac{1}{8(1+x)} \left(1 - \frac{1}{32}\right) \leq \varepsilon_{2,+} \leq \frac{1}{8(1+x)}$$

es decir, podemos aproximar:

$$\varepsilon_{2,+} \approx \frac{1}{8(1+x)}$$

con un error relativo aproximado de $\frac{3}{100}$ ³.

7.3.1 Caso General

Ahora bien, Maxwell en su estudio considera sólo el caso particular cuando son concéntricos, pero en esta tesis buscaremos llegar más adelante tratando de tomar el caso general y ver las condiciones para las cuales puede haber movimiento estable.

Vayamos ahora con $\omega^2 - N$:

$$\begin{aligned} \omega^2 - N &= \frac{m_u(1+\varepsilon)}{[u+\sigma r_0(1+\varepsilon)]} \left[\sigma \frac{\varepsilon}{A_R} (r_0 I_0(r_0) + I_1(r_0)) + \frac{1}{(u+\sigma r_0)^2} \right] - \\ &\quad m_u \left(\frac{\varepsilon}{A_R} \left(I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right) + \frac{1}{(u+\sigma r_0)^3} \right) \\ &= m_u \frac{\varepsilon}{A_R} \left(I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right) \left[\frac{\sigma r_0(1+\varepsilon)}{[u+\sigma r_0(1+\varepsilon)]} - 1 \right] + m_u \frac{1}{(u+\sigma r_0)^3} \left(\frac{(u+\sigma r_0)(1+\varepsilon)}{[u+\sigma r_0(1+\varepsilon)]} - 1 \right) \\ &= m_u \left[-\frac{\varepsilon}{A_R} \frac{u(1+\varepsilon)}{[u+\sigma r_0(1+\varepsilon)]} \left(I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right) + \frac{\varepsilon u}{(u+\sigma r_0)^3} \right] \end{aligned}$$

Pero sabemos del Capítulo 3 que $(r_0 I_0(r_0) + I_1(r_0)) < 0$, por lo que tenemos:

$$\omega^2 - N > 0$$

para toda $r_0 > 0$. Así, esta condición se satisface siempre y por ende podemos descartarla del estudio.

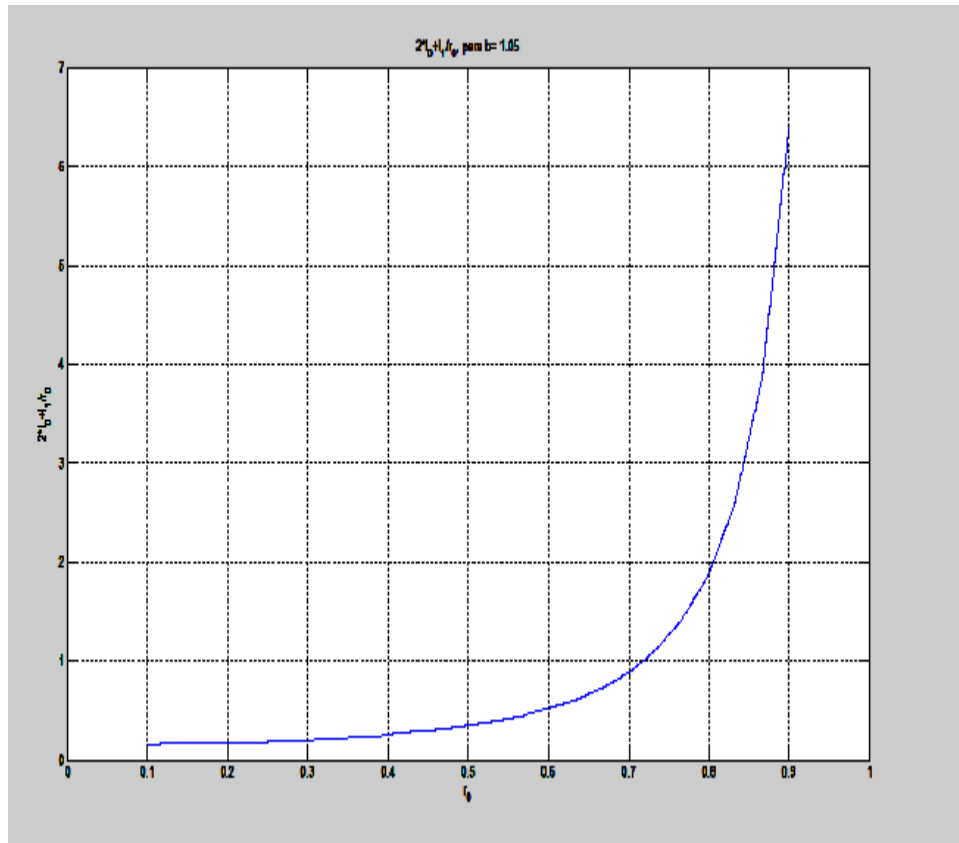
Para $\omega^2 - L$ consideramos primero que:

$$L = -\frac{\varepsilon}{A_R} \left(2I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right) - 2\frac{1}{(u+\sigma r_0)^3}$$

para este cálculo, nos apoyaremos de nuevo a la parte numérica. Calcularemos el signo de $2I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0}$. Tomamos una malla para la integral de $(m, n) = (300, 350)$ y un rango para $r_0 \in [0.1, 0.9]$ con 30 divisiones, donde observamos para diferentes valores de b^4 :

³Ver [11], p. 322, 323

⁴Ver Apéndice A

Fig. 24, $b=1.05$

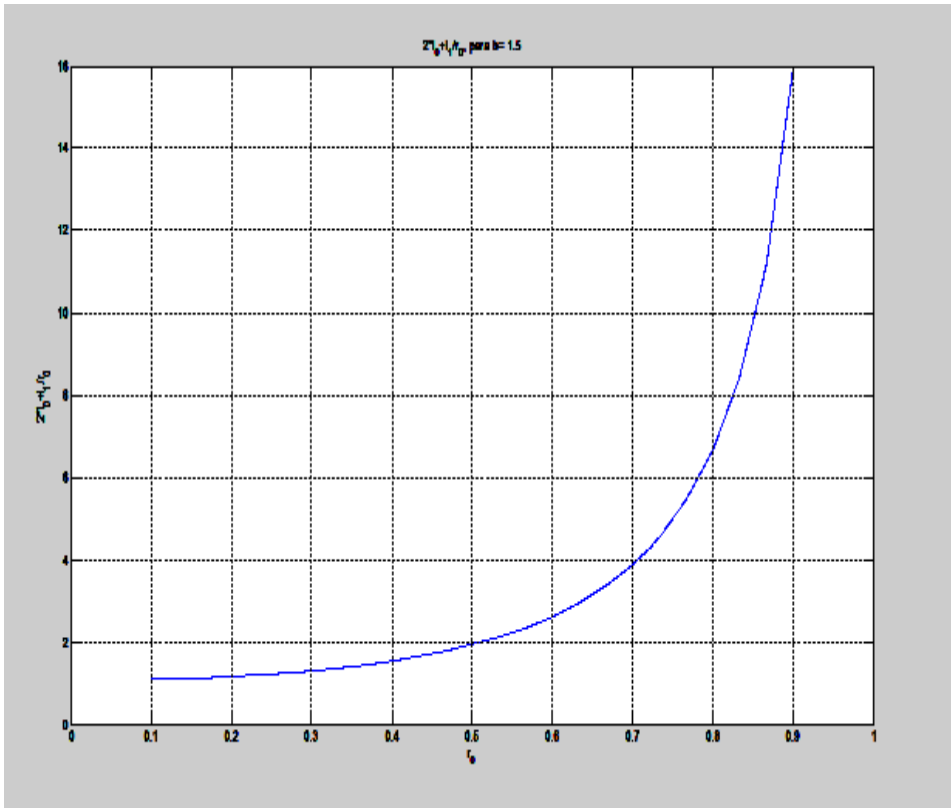
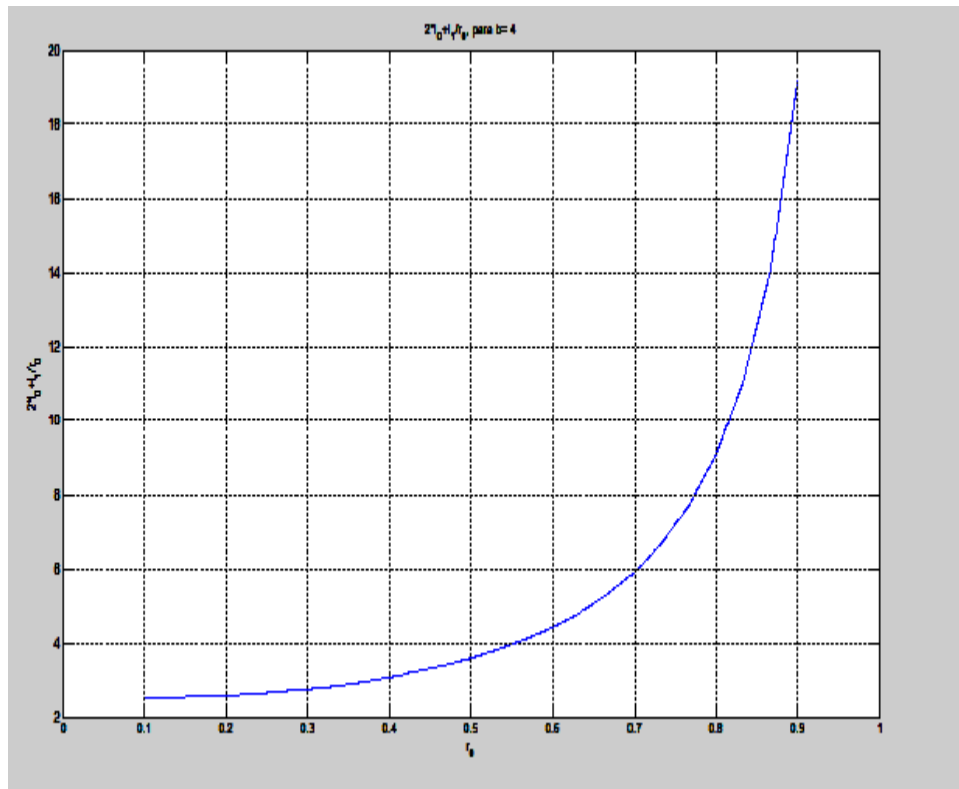


Fig. 25, $b=1.5$

Fig. 26, $b=4$

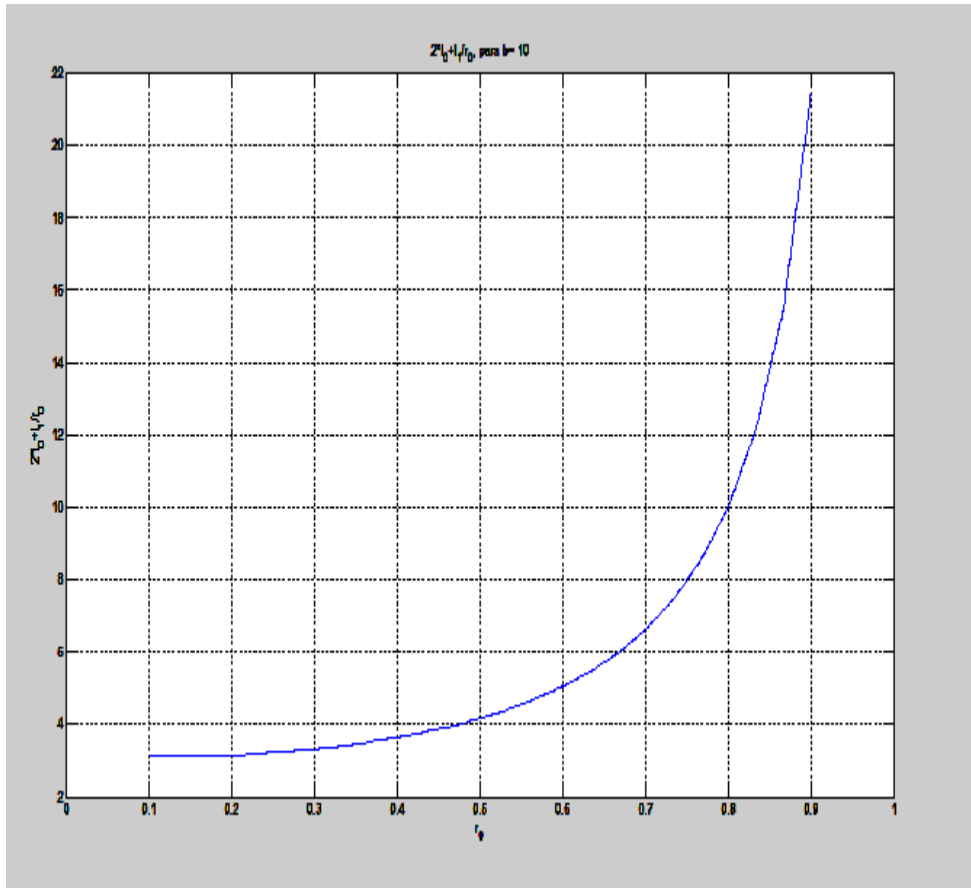


Fig. 27, b=10

Para los valores que tomamos de b , tenemos el mismo comportamiento de las curvas. Sabemos que si $r_0 = 0$, para que $L = 0$, necesitaríamos que $\varepsilon = -\frac{2ab(a+b)}{u^3} < 0$; además que si $\varepsilon = 0$, $L > 0$ para toda $r_0 \in [0, a)$, por lo que la curva $L = 0$ no corta el eje $\varepsilon = 0$. Con ésto podemos concluir a nivel numérico las curvas son positivas para $r_0 \in [0, a)$, es decir $\left(2I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0}\right) > 0$, por lo que $L < 0$.

Así, en este caso, sólo nos queda verificar que $\omega^2 > 0$. Y para ésto, recurrimos al Capítulo 5, donde tenemos la condición que en el caso que $\sigma = 1$, $\omega^2 > 0$ si $\varepsilon \in [0, \varepsilon_u)$ y para $\sigma = -1$, $\omega^2 > 0$ para toda $\varepsilon > 0$.

En $L + N + 2\omega^2$ nos quedaría el polinomio:

$$L + N + 2\omega^2 =$$

$$\frac{m_u}{[u+\sigma r_0(1+\varepsilon)]} \left[\begin{array}{c} \varepsilon^2 \left(\frac{\sigma r_0}{A_R} \left(I_0(r_0) + 2 \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right) \right) \\ + \varepsilon \left(\frac{1}{A_R} I_0(r_0) (\sigma r_0 - u) + \frac{2\sigma}{A_R} I_1(r_0) + \frac{2u+\sigma r_0}{(u+\sigma r_0)^3} \right) + \frac{1}{(u+\sigma r_0)^2} \\ 0 \end{array} \right] =$$

Definimos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sigma}{A_R} (r_0 I_0(r_0) + 2 I_1(r_0)) \\ b_1 &= \left(\frac{1}{A_R} I_0(r_0) (\sigma r_0 - u) + \frac{2\sigma}{A_R} I_1(r_0) + \frac{2u+\sigma r_0}{(u+\sigma r_0)^3} \right) \\ c_1 &= \frac{1}{(u+\sigma r_0)^2} > 0 \end{aligned}$$

Entonces tenemos las soluciones posibles:

$$\varepsilon_{1,\pm} = -\frac{b_1}{2a_1} \pm \frac{1}{2a_1} \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}.$$

Tenemos que $I_0(r_0) + 2 \frac{I_1(r_0)}{r_0} < 0$, por lo que, se tienen los casos:

i) $\sigma = 1$. Tendríamos que $a_1 < 0$, por lo que la solución positiva sería $\varepsilon_{1,-}$.

Si tomamos la función $\varphi_1(\varepsilon) = a_1\varepsilon^2 + b_1\varepsilon + c_1$, vemos que para $\varepsilon \rightarrow \pm\infty$, $\varphi_1(\varepsilon) \rightarrow -\infty$, ya que $a_1 < 0$, por lo que tendríamos que $\varphi_1(\varepsilon)$ es una parábola cóncava, y $\varphi_1(\varepsilon) > 0$ en $\varepsilon \in (\varepsilon_{1,+}, \varepsilon_{1,-})$, pero necesitamos que ε sea positivo. Por lo que la desigualdad es positiva para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{1,-})$.

ii) $\sigma = -1$. Tendríamos que $a_1 > 0$. Si $b_1 > 0$, no habría soluciones positivas a la ecuación cuadrática, es decir que esta desigualdad siempre se cumpliría. Si $b_1 < 0$, tendríamos dos soluciones positivas $\varepsilon_{1,-}$, $\varepsilon_{1,+}$.

La función $\varphi_1(\varepsilon) = a_1\varepsilon^2 + b_1\varepsilon + c_1$, vemos que para $\varepsilon \rightarrow \pm\infty$, $\varphi_1(\varepsilon) \rightarrow +\infty$, por lo que tendríamos que $\varphi_1(\varepsilon)$ es una parábola convexa, y $\varphi_1(\varepsilon) > 0$ en $\varepsilon \in (-\infty, \varepsilon_{1,-}) \cup (\varepsilon_{1,+}, +\infty)$, pero necesitamos que ε sea positivo. Por lo que la desigualdad es positiva para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{1,-}) \cup (\varepsilon_{1,+}, +\infty)$.

Si tomamos el caso para $r_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\varepsilon) |_{r_0=0} &= \left(-\frac{u}{A_R} I_0(0) + \frac{2}{u^2} \right) \varepsilon + \frac{1}{u^2} \\ &= \frac{1}{u^2} \left[\left(-\frac{2u^3}{ab(a+b)} + 2 \right) \varepsilon + 1 \right] \\ \varphi_1(\varepsilon) |_{r_0=0} &= \frac{1}{u^2} [(-x+2)\varepsilon + 1] = 0 \\ \varepsilon_{1,-} &= \frac{1}{x-2}. \end{aligned}$$

la cual coincide con el cálculo anterior. Para la otra raíz vemos que cuando $r_0 \rightarrow 0$, $a_1 \rightarrow 0$ y por tanto $\varepsilon_{1,+} \rightarrow \pm\infty$ dependiendo el caso ($\sigma = \pm 1$).

Para el caso de $8\omega^2(L+N) + (L-N)^2$ tendríamos un polinomio de tercer grado; eliminando el coeficiente $\frac{m_u}{[u+\sigma r_0(1+\varepsilon)]}$:

$$8\omega^2 (L + N) + (L - N)^2 = \left[\begin{aligned} & \varepsilon^3 \frac{\sigma r_0}{(A_R)^2} \left(I_0(r_0) + 2 \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right)^2 \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{(A_R)^2} \left[\sigma r_0 \left(I_0(r_0) + 2 \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right)^2 + u \left(3I_0(r_0) + 2 \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{A_R(u+\sigma r_0)^3} [I_0(r_0) (2\sigma r_0 - 8u) + 4\sigma I_1(r_0)] \right) + \\ & \varepsilon \left(\frac{-8\sigma}{A_R(u+\sigma r_0)^3} [r_0 I_0(r_0) + I_1(r_0)] + \frac{1}{A_R(u+\sigma r_0)^2} \left[10I_0(r_0) + 12 \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right] + \frac{-8u+\sigma r_0}{(u+\sigma r_0)^6} \right) \\ & \left. + \frac{1}{(u+\sigma r_0)^5} \right] \end{aligned} \right].$$

Definimos:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\sigma r_0}{(A_R)^2} \left(I_0(r_0) + 2 \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right)^2 \\ b_2 &= \frac{1}{(A_R)^2} \left[\sigma r_0 \left(I_0(r_0) + 2 \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right)^2 + u \left(3I_0(r_0) + 2 \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right)^2 \right] + \\ & \quad \frac{1}{A_R(u+\sigma r_0)^3} [I_0(r_0) (2\sigma r_0 - 8u) + 4\sigma I_1(r_0)] \\ c_2 &= \frac{-8\sigma}{A_R(u+\sigma r_0)^3} [r_0 I_0(r_0) + I_1(r_0)] + \frac{1}{A_R(u+\sigma r_0)^2} \left[10I_0(r_0) + 12 \frac{I_1(r_0)}{r_0} \right] + \frac{-8u+\sigma r_0}{(u+\sigma r_0)^6} \\ d_2 &= \frac{1}{(u+\sigma r_0)^5} > 0. \\ \varphi_2(\varepsilon) &= a_2 \varepsilon^3 + b_2 \varepsilon^2 + c_2 \varepsilon + d_2 \end{aligned}$$

Igual que el caso anterior, tomamos $r_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_2(\varepsilon)|_{r_0=0} &= \left(\frac{1}{(A_R)^2} u \left(3I_0(0) + 2 \frac{dI_1(r_0)}{dr_0} \Big|_{r_0=0} \right)^2 + \frac{1}{A_R u^3} [-8u I_0(0)] \right) \varepsilon^2 + \\ & \quad \left(\frac{1}{A_R u^2} 10I_0(0) + \frac{1}{A_R u^2} 12 \frac{dI_1(r_0)}{dr_0} \Big|_{r_0=0} \frac{-8}{u^5} \right) \varepsilon + \frac{1}{u^5} \\ &= - \left(8 \frac{1}{u^2} \frac{2}{ab(a+b)} \right) \varepsilon^2 + \left(8 \frac{1}{u^2} \frac{2}{ab(a+b)} + \frac{-8}{u^5} \right) \varepsilon + \frac{1}{u^5} \\ &= \frac{1}{u^5} \left[- \left(8 \frac{2u^3}{ab(a+b)} \right) \varepsilon^2 - \left(8 \frac{2u^3}{ab(a+b)} + 8 \right) \varepsilon + 1 \right] \\ &= - \frac{8}{u^5} \left[x \varepsilon^2 + (x+1) \varepsilon - \frac{1}{8} \right] \end{aligned}$$

donde también coincide con el cálculo anterior.

Por otro lado, para $\varepsilon = 0$ vemos que $\varphi_2(0) \neq 0$, es decir, $\varphi_2(\varepsilon)$ nunca cruza el eje $\varepsilon = 0$, por lo que nos dice que las raíces no cambian de signo en ε . Esto significa que $\varepsilon_{2,+}$ siempre será positiva y $\varepsilon_{2,-}$ negativa.

Recordemos que el producto de las tres raíces del polinomio es $-\frac{d_2}{a_2}$, por lo que hay 1 ó 3 raíces negativas para $\sigma = 1$. Como para $r_0 = 0$ hay una raíz positiva y una negativa ($\varphi_2(\varepsilon_{2,\pm})|_{r_0=0} = 0$), entonces hay una raíz negativa y dos positivas. La tercera raíz tiende a ∞x ya que cuando $r_0 \rightarrow 0$, $-\frac{d_2}{a_2} \rightarrow -\infty$.

Para $\sigma = -1$, tenemos el caso de que hay 1 ó 3 raíces positivas, con el mismo argumento, hay 1 raíz positiva y dos negativas, la tercera raíz va a $-\infty$ cuando $r_0 \rightarrow 0$.

Por lo que las raíces de $\varphi_2(\varepsilon)$ serían de la forma, para r_0 pequeño:

⁵Ver [13], p. 303, 304

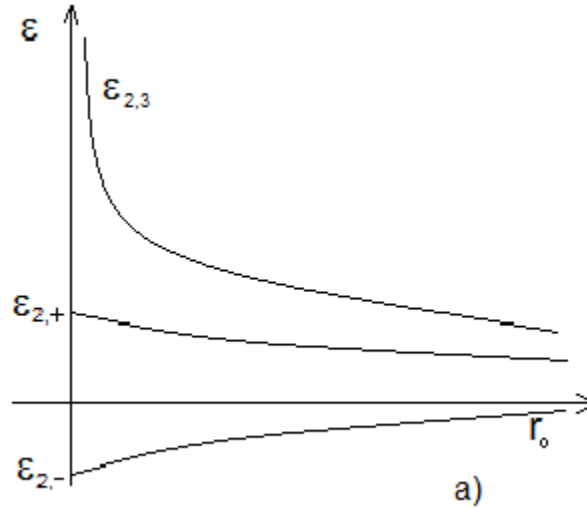


Fig. 28. a) Para $\sigma = 1$ y r_0 pequeño.

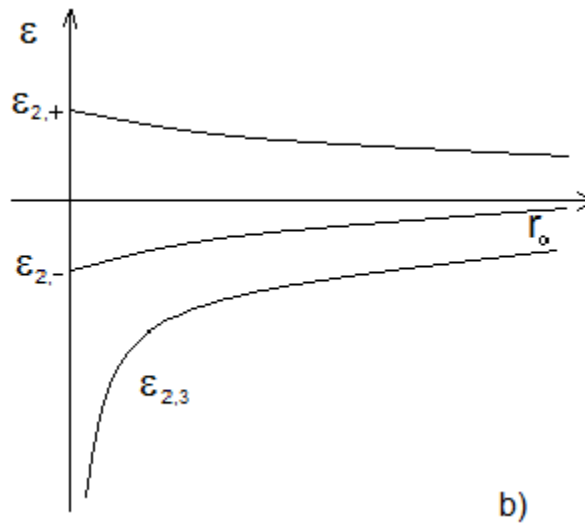


Fig. 29. b) Para $\sigma = -1$ y r_0 pequeño.

Vemos que tanto en la Figura 28, como la 29, se conserva la misma condición de estabilidad, es decir que $\varepsilon_{2,+}$ es la condición más débil de éste caso.

Ahora bien, para r_0 más grande, podemos tener el caso de tener raíces complejas en la ecuación, ya que conforme r_0 crece, el discriminante de la ecuación se haga más pequeño, hasta anularse y volverse negativo. Por lo que el comportamiento de las raíces podría ser también de la forma:

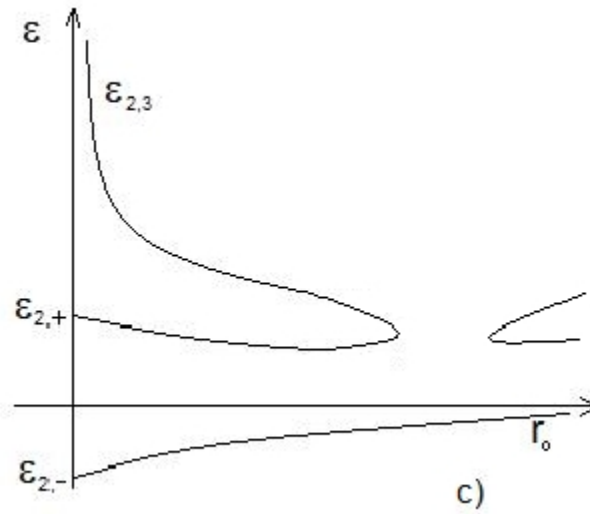


Fig. 30 c) Para $\sigma = 1$ en el caso de raíces complejas.

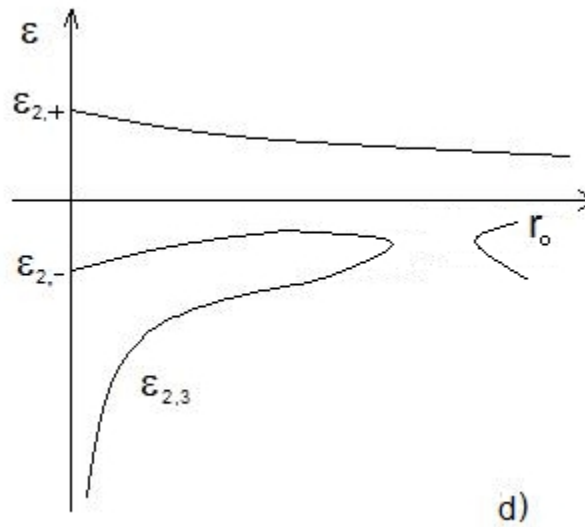


Fig. 31 d) Para $\sigma = -1$ en el caso de raíces complejas.

Veremos algunos ejemplos en el próximo Capítulo.

Teorema 1.9 .- *El movimiento del sistema de Saturno y los anillos con la masa unida, bajo la hipótesis de que son concéntricos, es estable si $\varepsilon = \frac{m_B}{m_u}$ cumple que:*

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_{2,+}) \quad (7.13)$$

donde $x = \frac{2u^3}{ab(a+b)}$ y $\varepsilon_{2,+} = -\frac{\left(1 + \frac{2u^3}{ab(a+b)}\right)}{2\frac{2u^3}{ab(a+b)}} + \frac{1}{2\frac{2u^3}{ab(a+b)}} \sqrt{\left(1 + \frac{2u^3}{ab(a+b)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2u^3}{ab(a+b)}\right)} \simeq \frac{1}{8(1+x)}$.

A manera de resumen, pondremos las condiciones que deben de satisfacerse para tener un movimiento estable para los dos casos posibles:

Condición	$\sigma = 1$	$\sigma = -1$
$\omega^2 > 0$	$[0, \varepsilon_u)$	—
$L + N + 2\omega^2 > 0$	$\varepsilon \in [0, \varepsilon_{1,-})$	Si $b_1 < 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{1,-}) \cup (\varepsilon_{1,+}, +\infty)$
$8\omega^2(L + N) + (L - N)^2 > 0$	$\varepsilon \in [0, \varepsilon_{2,+})$	$\varepsilon \in [0, \varepsilon_{2,+})$

De manera analítica, no nos es posible avanzar más, ya que los coeficientes de los polinomios están en función de las integrales del potencial y no las podemos resolver analíticamente, por lo que en el siguiente capítulo, daremos algunos resultados numéricos del comportamiento de éstas condiciones.

7.4 Comentarios al Capítulo

En este capítulo analizamos a profundidad los distintos coeficientes relacionados al potencial para los dos casos estudiados. Por otro lado, para el caso particular de concetricidad, encontramos una relación explícita entre la masa del anillo y de la masa unida, lo cual nos verifica que existe un intervalo en ε donde garantizamos estabilidad en el movimiento, pero depende directamente de las condiciones geométricas del problema.

Además, por hipótesis física, pudimos simplificar nuestro estudio considerando $\nu = 0$, ya que como un valor real, ν es del orden de $\frac{\tilde{m}_R}{m_S} \sim 2.4 \times 10^{-4}$. Si consideráramos $\nu \neq 0$ podríamos verlo como una pequeña perturbación al problema simplificado, la cual no cambiaría mucho el comportamiento de la solución que obtuvimos. Si regresamos al planetamiento del movimiento perturbado, considerando $\nu = 0$, veríamos que la perturbación del ángulo de giro del anillo (ψ_1) sería de orden lineal, es decir, que tiene el mismo comportamiento que la solución al movimiento uniforme⁶.

Después, buscamos extender el estudio para el caso general que no fueran concéntricos los anillos, por lo que aplicamos algoritmos numéricos para conocer con mayor certeza el comportamiento las condiciones de estabilidad

$2I_0(r_0) + \frac{I_1(r_0)}{r_0} > 0$. Con esto, comprobamos que efectivamente (para el caso que consideramos) sí existe un intervalo de estabilidad en ε y que la condición $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{2,+})$ es la más débil para $r_0 = 0$, mismo caso tomado por Maxwell (anillos y Saturno concéntricos).

Por la parte de Maxwell, para calcular la relación entre los anillos y la masa unida, toma el caso de los anillos con densidad uniforme:

⁶Ver 5.2.2

"... (1) ahora si suponemos que el anillo sea uniforme, f , g y h desaparecen, y la ecuación se convierte:

$$n^4 + n^2\omega^2 + \frac{9}{4}\omega^4 = 0$$

la cual da raíces imaginarias en n^2 e indica la inestabilidad de un anillo uniforme.

(2) Si hacemos g y $h = 0$, tenemos el caso de un anillo más grueso de un lado que del otro, y variando la sección acorde a una simple ley de senos. Debemos recordar, sin embargo, que f debe ser menos que $\frac{1}{2}$, para que la sección más delgada del anillo sea real ⁷.... (3) tomemos el caso de un anillo uniforme, cargado con una partícula pesada⁸ en un punto de su circunferencia. Tenemos entonces $g = 3f$ y $h = 0$, y la ecuación se convierte:

$$(1 - f^2)n^4 + (1 - \frac{5}{2}f^2 + \frac{3}{2}f^3)n^2\omega^2 + (\frac{9}{4} - \frac{33}{4}f^2 + 6f^3)\omega^4 = 0$$

Dividiendo por $1 - f$:

$$(1 + f)n^4 + (1 + f - \frac{3}{2}f^2)n^2\omega^2 + \frac{3}{4}(3(1 + f) - 8f^2)\omega^4 = 0$$

La primera condición da que $f < 0.8279$.

La segunda condición de que $f > 0.815865$.

Asumamos un caso particular entre éstos límites $f = 0.82$, el cual hace la relación de la masa de la partícula al anillo de 82 sobre 18..."

Ésta relación es aproximadamente 4.5, que es la equivalente a la que encontramos de la $\frac{1}{\varepsilon_{2,+}}$. La diferencia entre estas dos relaciones, es que Maxwell encuentra un número que no muestra relación geométrica explícita de los radios de los anillos (a y b), o en la distancia del centro de masa de los anillos a la masa unida (u).

Lo siguiente que haremos, será estudiar numéricamente las condiciones de estabilidad para el caso general y ver si se cumplen en todo el intervalo y cuál sería la condición más débil.

⁷Esto se refiere a que si $f > \frac{1}{2}$, la densidad en la serie de Fourier sería negativa.

⁸Masa unida

Chapter 8

Estudio numérico de las condiciones de estabilidad

Para hacer las simulaciones numéricas, tomaremos primero el caso en que $u = \frac{a+b}{2}$ y tomaremos diferentes valores para $b = 1.5, 4, 10$ y 1.05 . Además, ambos valores de σ , analizaremos cada condición de estabilidad por separado, para ver cuál de éstas resulta ser más débil¹.

Empezaremos con la función $\omega^2 = 0$.

8.0.1 Función $\omega^2 = 0$

En esta parte, calcularemos las raíces de la ecuación $\omega^2 = 0$, para a su vez analizar la función ε_u .

El resultado que obtenemos para distintos valores de b y $\sigma = 1$:

¹Las tablas con los valores numéricos de cada curva se encuentran en el Apéndice B.

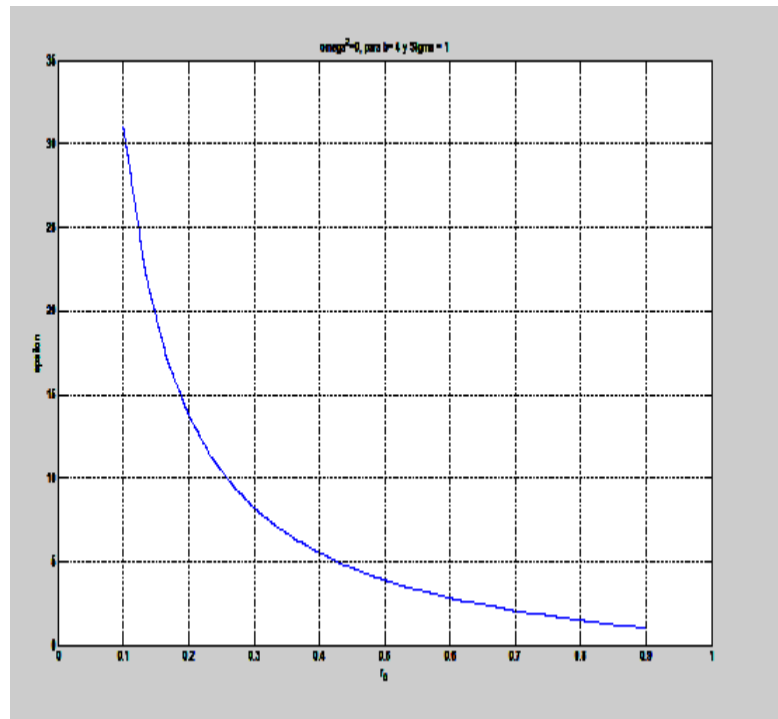


Fig. 32, $b=4$

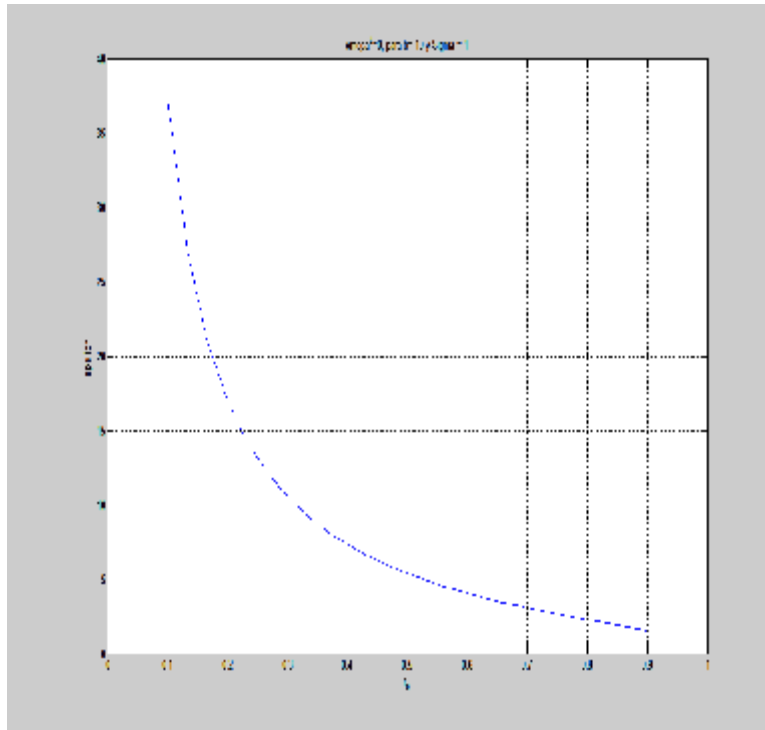


Fig. 33, b=10

donde vemos que la curva ε_u efectivamente es positiva (como lo habíamos calculado en 5.1.2)². Por lo que la región de estabilidad sería para esta condición:

$$r_0 \in [0, a) \text{ y } \varepsilon \in [0, \varepsilon_u) \quad (8.1)$$

Para $\sigma = -1$, sabemos que $\omega^2 > 0$ para toda $r_0 \in [0, a)$ y $\varepsilon > 0$, por lo que no analizaremos el caso numérico

8.0.2 Función $L + N + 2\omega^2 = 0$

Calcularemos las raíces de la ecuación $L + N + 2\omega^2 = 0$ y a su vez analizaremos $\varepsilon_{1,-}$. Para $\sigma = 1$:

²En el Apéndice B se muestran los valores de ω^2 para más valores de la b .

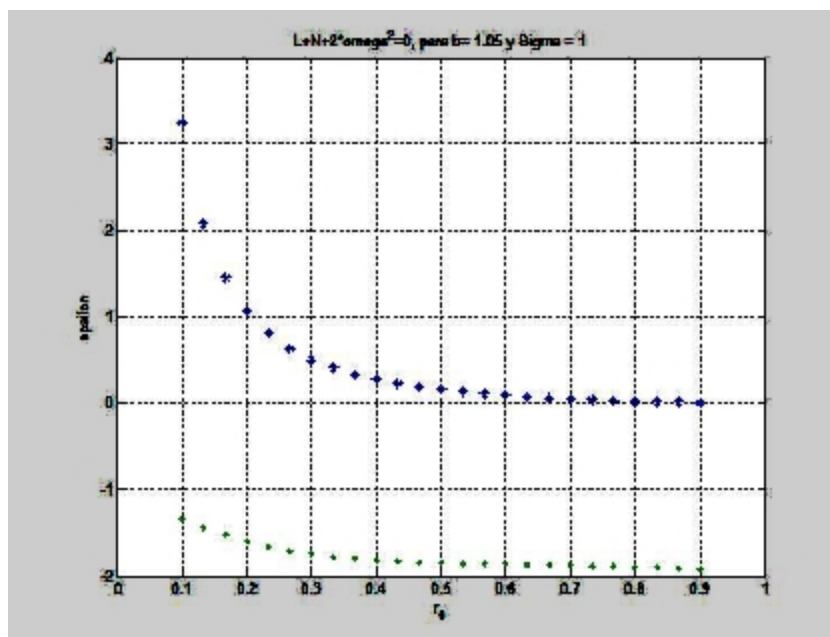


Fig. 34, $b=1.05$

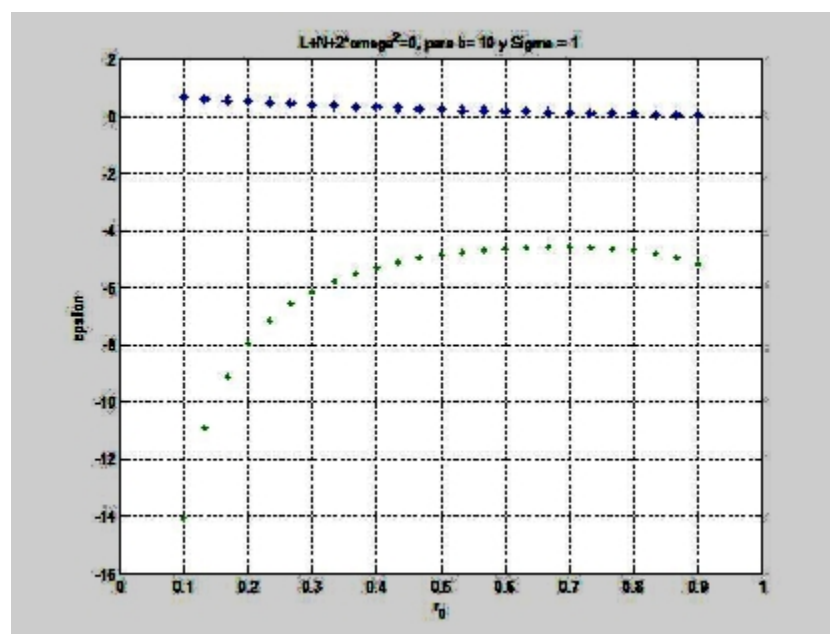


Fig. 35, $b=10$

donde verificamos que $\varepsilon_{1,-}$ es positivo³. Por lo que la región de estabilidad para esta condición sería:

$$r_0 \in [0, a) \text{ y } \varepsilon \in [0, \varepsilon_{1,-}) \quad (8.2)$$

Para el caso que $\sigma = -1$ tenemos:

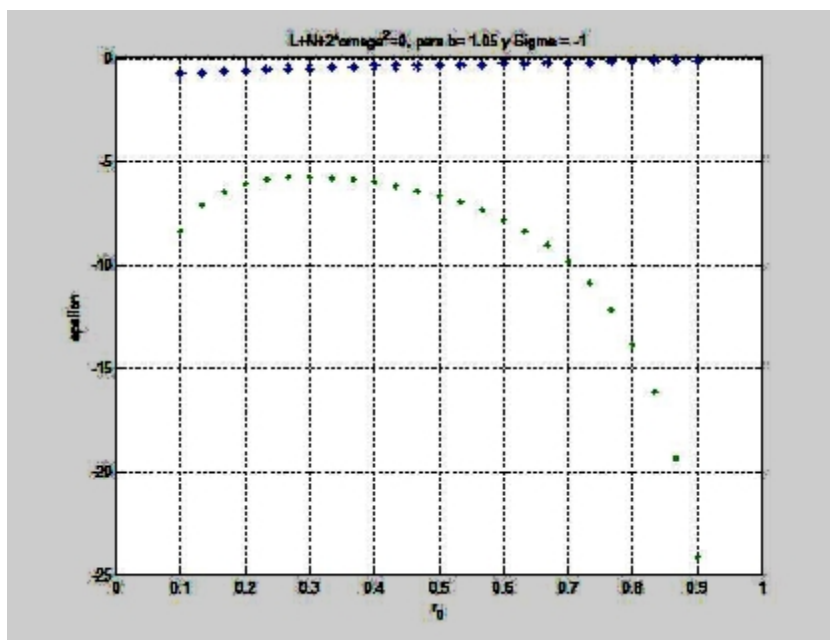


Fig. 36, $b=1.05$

³Igual que para $\omega^2 = 0$, en el Apéndice B hay más resultados para otros valores de b .

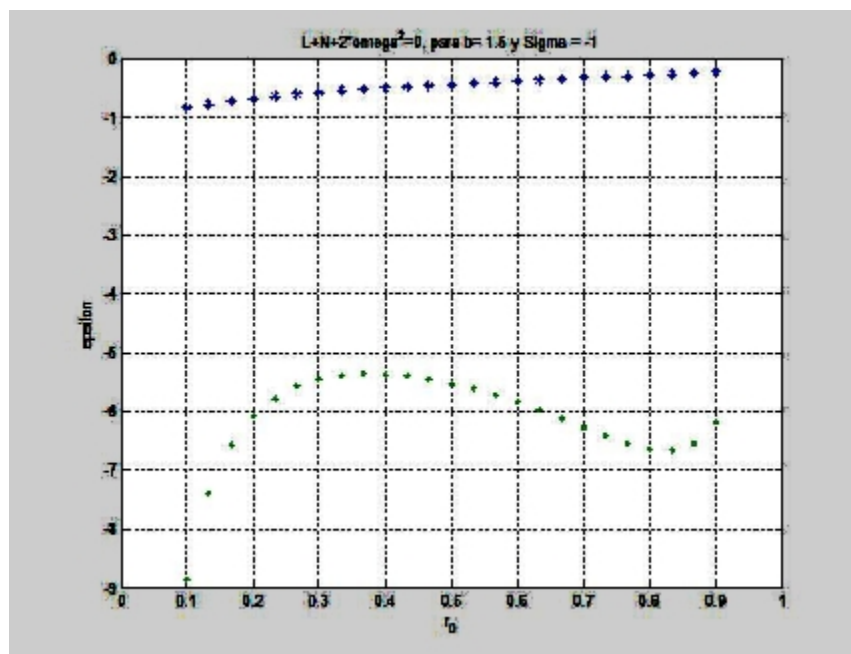


Fig. 37, $b=1.5$

en este caso, la curva se empieza a deformar. Analizando dos valores adicionales de la b :

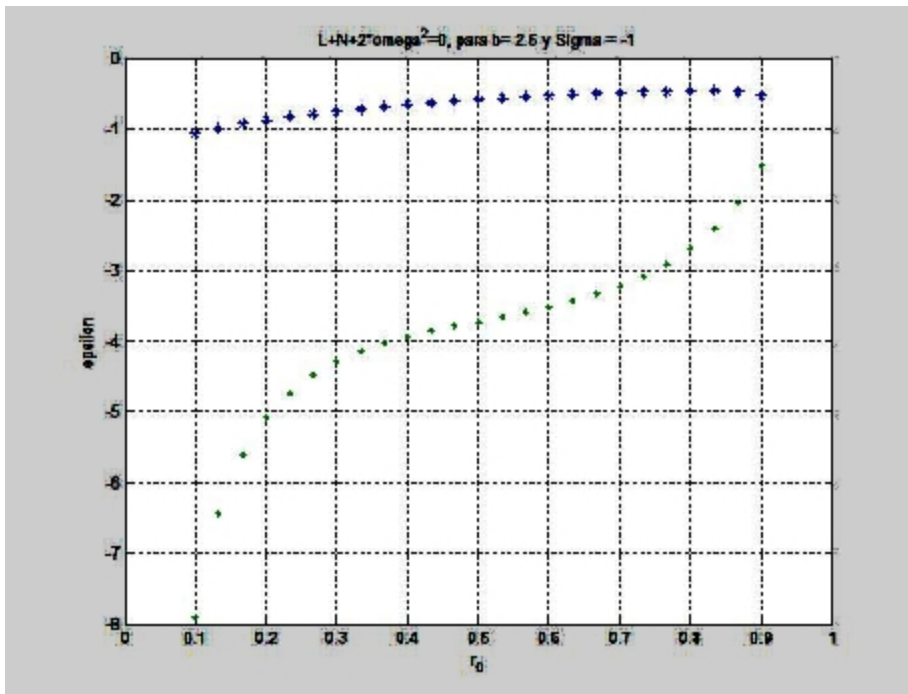


Fig. 38, b=2.5

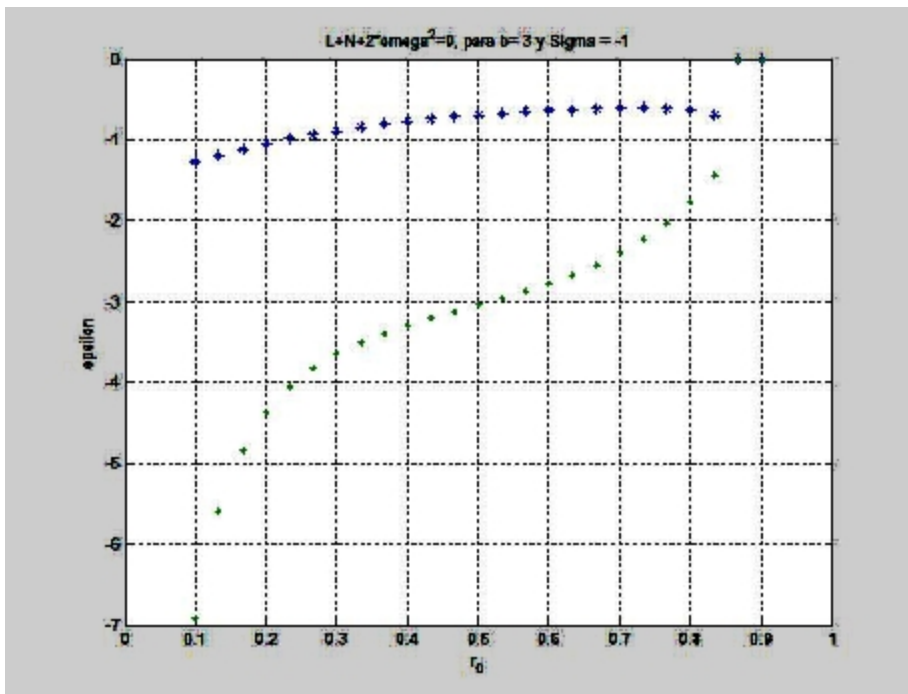


Fig. 39, $b=3$

donde vemos que las raíces se van acercando, hasta tener raíces complejas (Fig. 39). La curva deja de ser real en un punto alrededor de 0.87.

Por tanto, existen raíces complejas y no hay un intervalo positivo, por lo que este caso se cumple siempre que sea positivo.

8.0.3 Función $8\omega^2(L+N) + (L-N)^2 = 0$

En esta última ecuación, calcularemos las tres raíces para $8\omega^2(L+N) + (L-N)^2 = 0$, donde verificaremos los cálculos antes vistos.

Para $\sigma = 1$ tenemos:

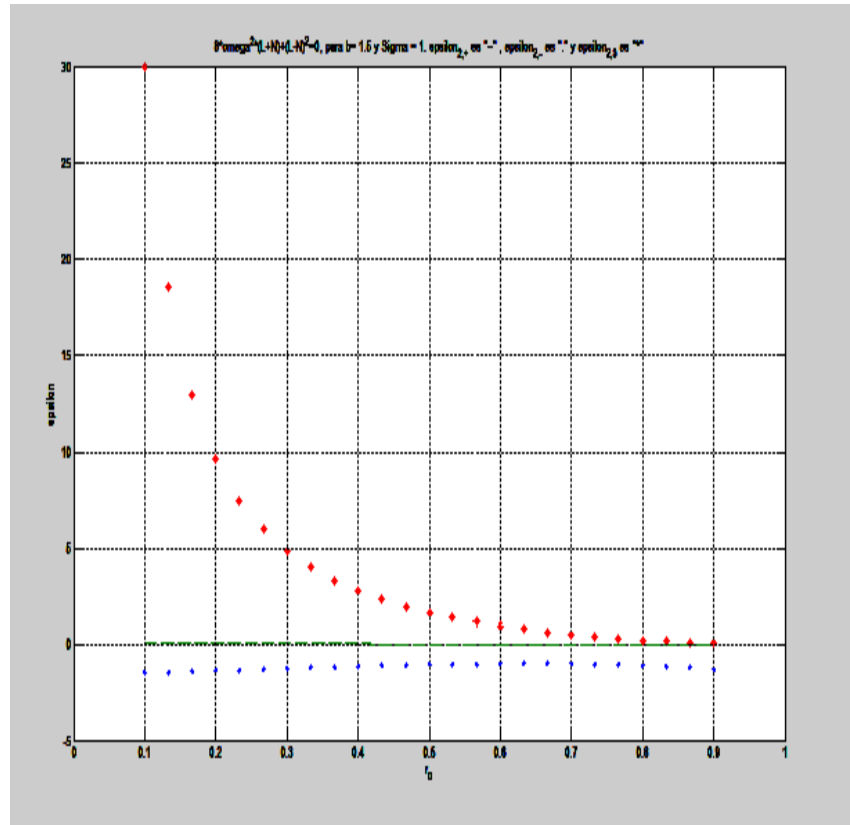


Fig. 40, $b=1.5$

vemos que, que debemos graficar las raíces $\varepsilon_{2,-}$ y $\varepsilon_{2,+}$ por separado ya que en la gráfica no se alcanza a distinguir el valor de $\varepsilon_{2,+}$:

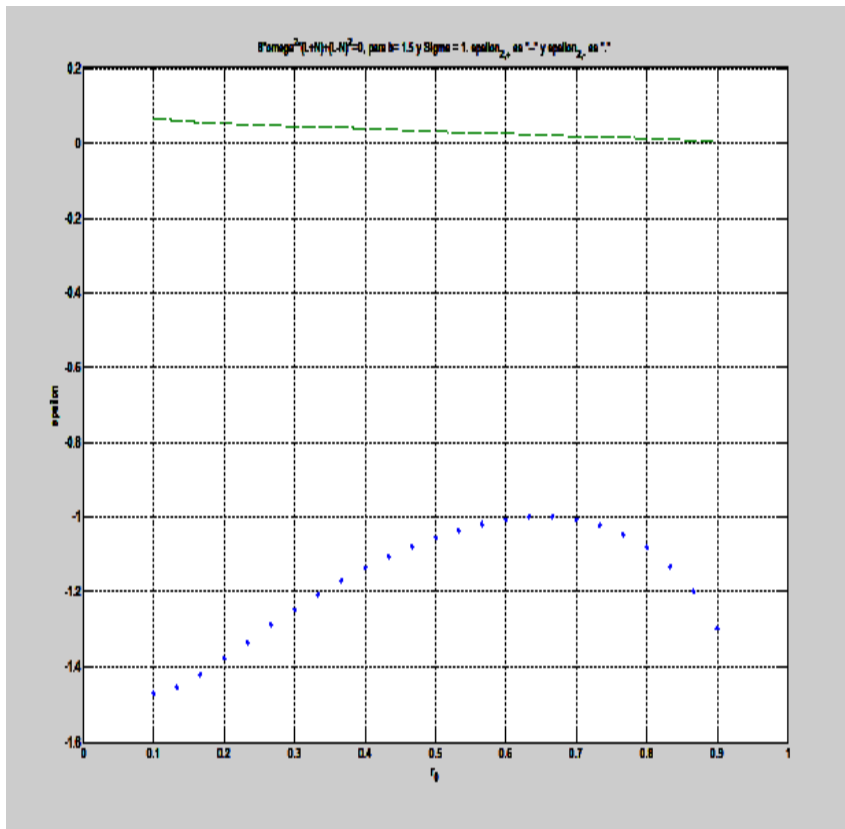


Fig. 41, $b=1.5$, $\epsilon_{2,-}$ y $\epsilon_{2,+}$

donde tenemos $\epsilon_{2,+} > 0$.

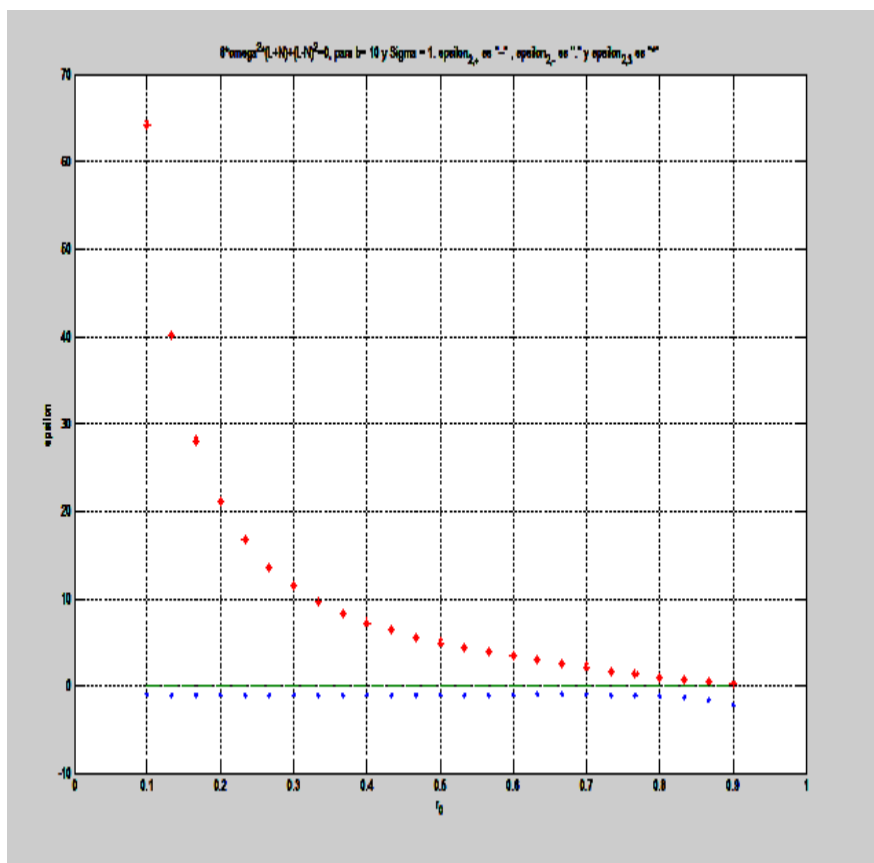
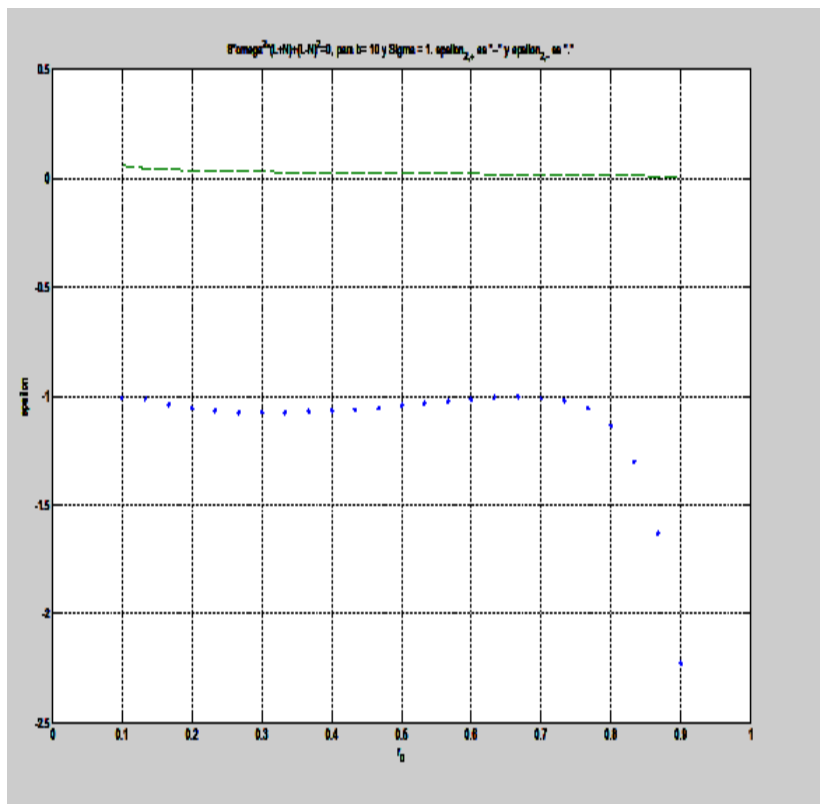


Fig. 42, $b=10$

graficando de nuevo $\epsilon_{2,-}$ y $\epsilon_{2,+}$:

Fig. 43, $b=10$, $\epsilon_{2,-}$ y $\epsilon_{2,+}$

Vemos que en éstos casos, $\epsilon_{2,+} > 0$ y es la condición que prevalece, ya que $\epsilon_{2,3}$ tiene valores numéricos muy superiores. Por lo tanto, la condición para este caso sería:

$$r_0 \in [0, a) \text{ y } \epsilon \in [0, \epsilon_{2,+}) \quad (8.3)$$

Para $\sigma = -1$:

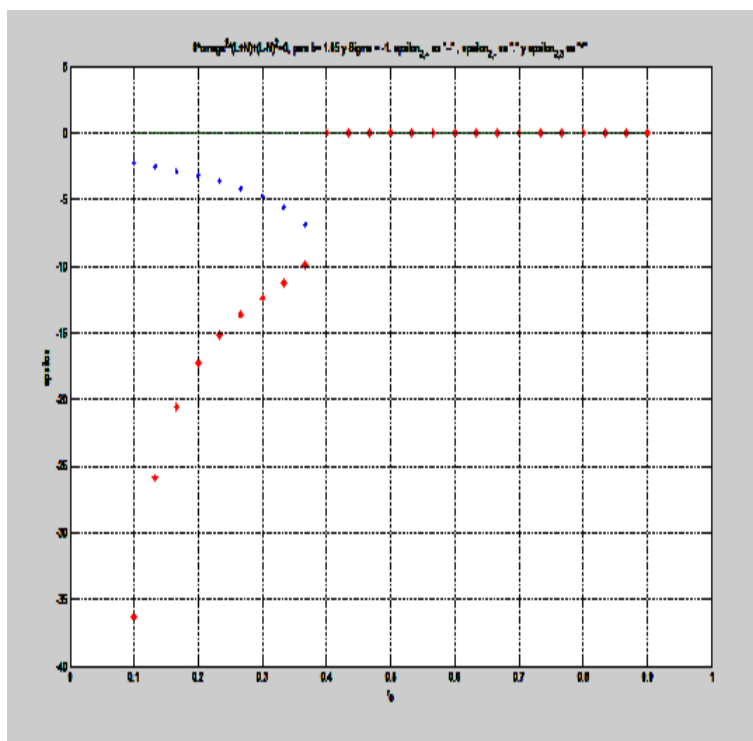


Fig. 44, $b=1.05$

vemos que contiene raíces complejas para $\varepsilon_{2,-}$ y $\varepsilon_{2,3}$, las cuales se van acercando, debido a que el discriminante disminuye y se hace negativo. Hagamos una gráfica para $\varepsilon_{2,+}$:

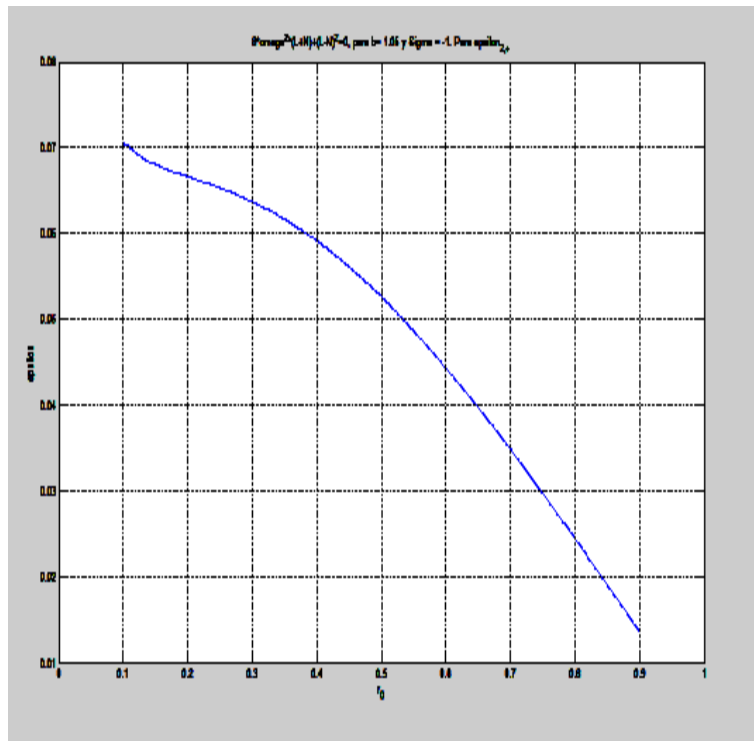


Fig. 45, $b=1.05$, $\epsilon_{2,+}$

donde verificamos que es positiva.

Tomando el valor de $b = 1.5$:

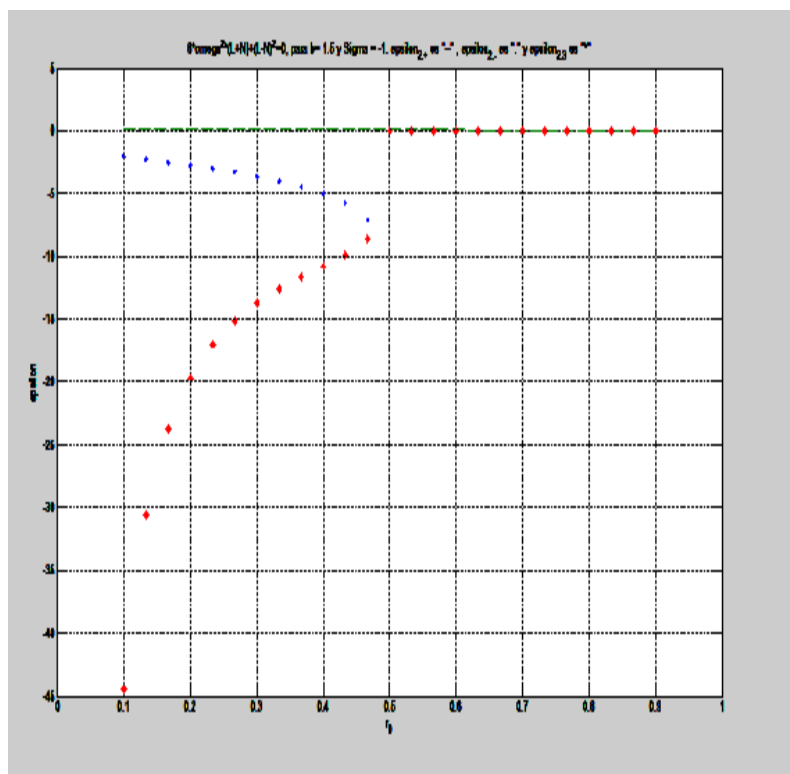
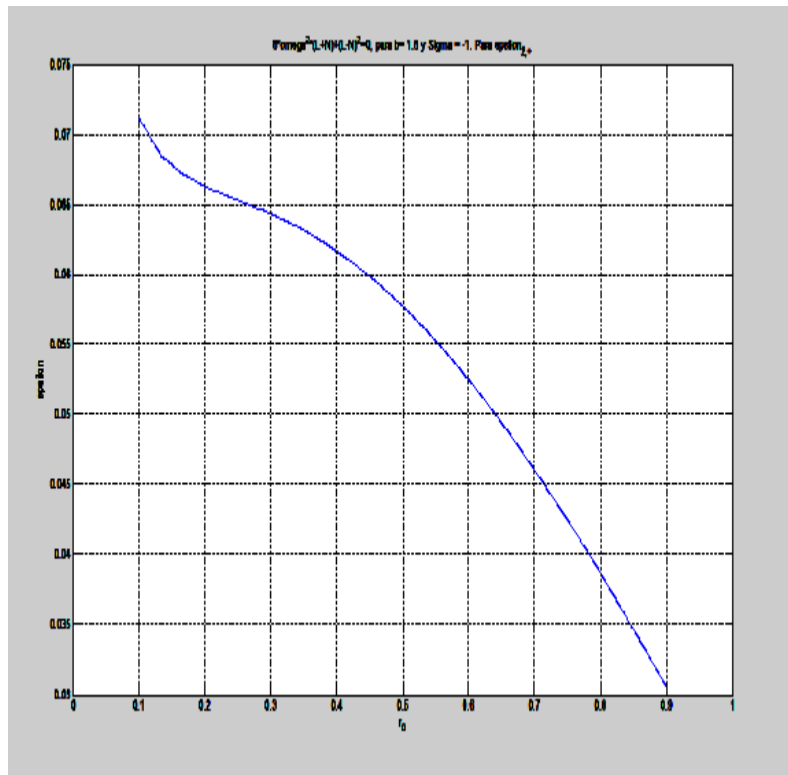


Fig. 46, $b=1.5$

graficando $\varepsilon_{2,+}$ para conocer su signo:

Fig. 47, $b=1.5$, $\epsilon_{2,+}$

donde efectivamente resulta positiva. Cabe aclarar, que debido a las escalas en las gráficas, pareciera que $\epsilon_{2,+}$ toca el eje, pero sabemos que $\epsilon_{2,+}$ nunca puede anularse.

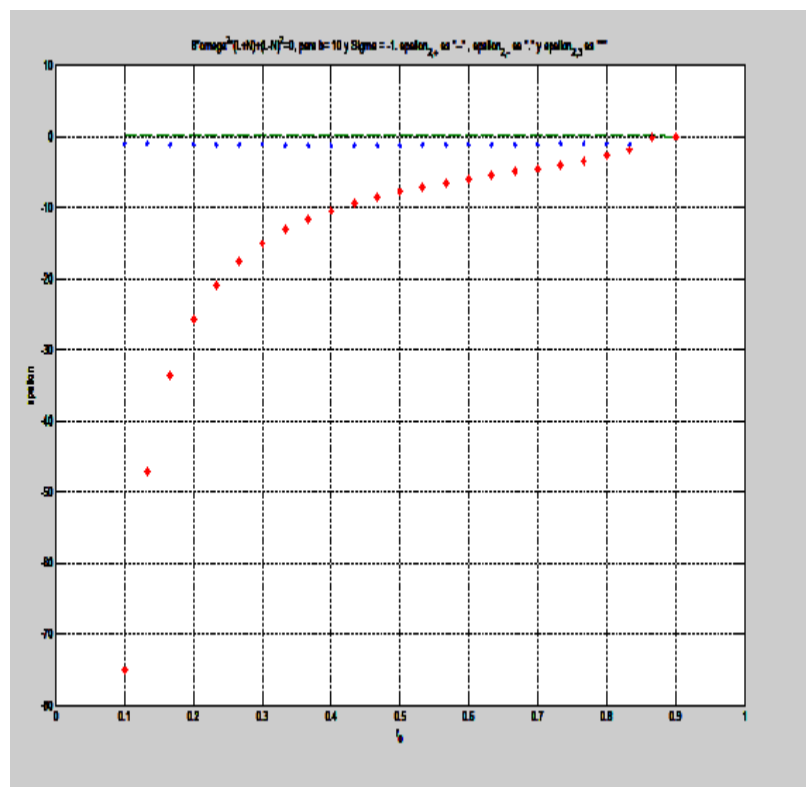
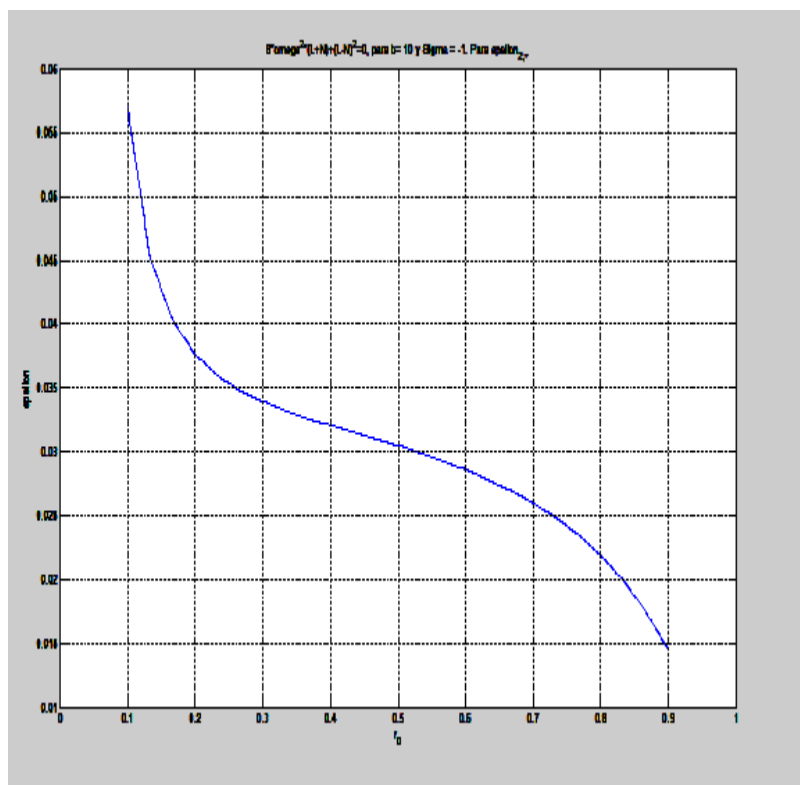


Fig. 48, $b=10$

aquí se aprecia que, al final de la gráfica ya tenemos raíces complejas. Graficaremos $\varepsilon_{2,+}$:

Fig. 49, $b=10$, $\epsilon_{2,+}$

En general, podemos ver que la condición que se cumple es $\epsilon_{2,+}$, lo cual valida lo que habíamos obtenido. Así, la condición que tenemos para $\sigma = -1$ sería:

$$r_0 \in [0, a) \text{ y } \epsilon \in [0, \epsilon_{2,+}) \quad (8.4)$$

8.0.4 Comparación de funciones

En esta última parte, compararemos las condiciones antes obtenidas gráficamente para ver cuál es la condición más débil. Para este caso, compararemos las gráficas de las funciones ϵ_u , $\epsilon_{1,-}$ y $\epsilon_{2,+}$ para $\sigma = 1$; para el caso de $\sigma = -1$, sólo tenemos la condición $\epsilon \in [0, \epsilon_{2,+})$, por lo que no es necesario analizarlo numéricamente.

Para $\sigma = 1$:

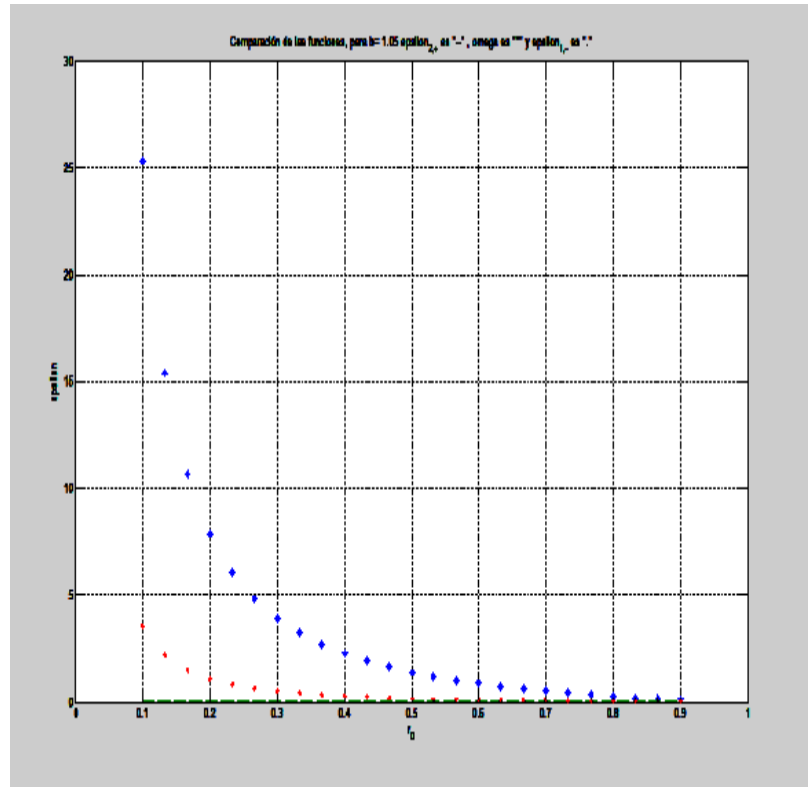
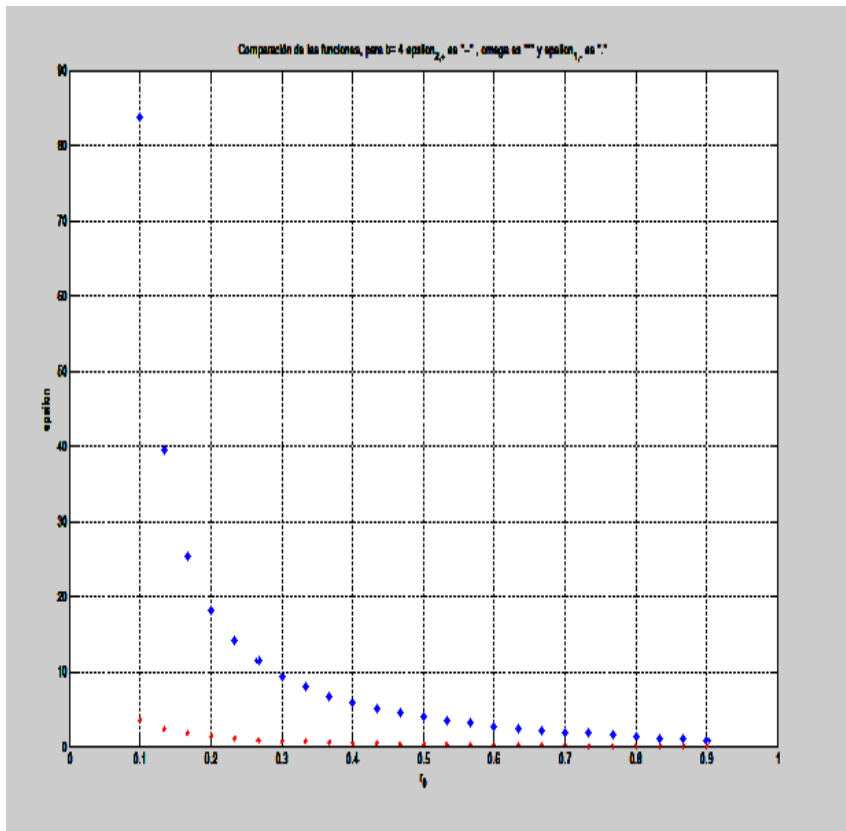
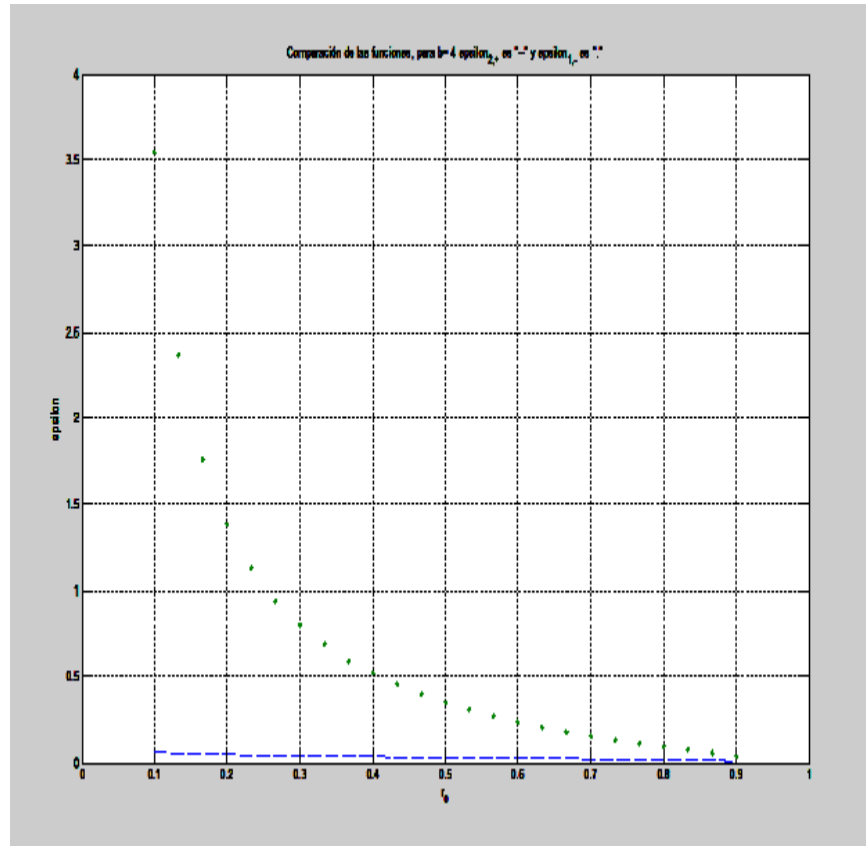


Fig. 50, b=1.05

aquí vemos que la condición ω^2 es más fuerte que las demás, y la condición más débil es $\varepsilon_{2,+}$. Vemos que esta condición prevalecerá para los demás casos que tomemos. Aquí no será necesario graficar más⁴.

⁴A pesar de que las gráficas parecieran juntarse cuando r_0 está cercano a a , $\varepsilon_{2,+}$ sigue siendo menor. Ver Apéndice B para datos numéricos.

Fig. 51, $b=4$

Fig. 52, $b=4$, $\varepsilon_{2,+}$ y $\varepsilon_{1,-}$

Vemos que en todos los casos, $\varepsilon_{2,+}$ es el valor positivo más pequeño. Por lo que la condición para que pueda existir estabilidad sería:

$$r_0 \in [0, a) \text{ y } \varepsilon \in [0, \varepsilon_{2,+}). \quad (8.5)$$

8.1 Comentarios del Capítulo

En este capítulo, pudimos analizar el comportamiento de las condiciones de estabilidad, para ciertos valores de la b y con la u dada. Verificamos algunas de las hipótesis que hicimos analíticamente en el capítulo anterior.

Pudimos ver cuál es la condición más débil de estabilidad; en este caso tenemos que se preserva la condición de $8\omega^2(L+N) + (L-N)^2 = 0$, es decir, que la condición para que pueda existir estabilidad es $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{2,+})$ para $r_0 \in [0, a)$ en todos los casos posibles, tanto para $\sigma = -1$ (única condición presente), como para $\sigma = 1$.

Lo siguiente será plantear las conclusiones de la tesis.

Chapter 9

Conclusiones

Al estudiar el problema de estabilidad de Saturno y sus anillos para los casos con y sin masas, podemos concluir:

- Comprobamos que no puede existir un movimiento uniforme y por ende es inestable para el caso de los anillos sin masa, mismo resultado obtenido por Maxwell.

- Cuando planteamos las ecuaciones de movimiento del sistema, al compararlas con las ecuaciones de Maxwell, encontramos dos errores en ellas: el primero radica en que hace falta agregar un coeficiente de las masas $\left(\frac{m_R}{m_R+m_S}\right)$ en los términos de la aceleración. El segundo error (posiblemente el más grave) es la diferencia en el valor de la fuerza tangencial del potencial, ya que en las ecuaciones el obtiene que es $\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$; de primera instancia pudiéramos pensar que es un error tipográfico, pero cuando plantea el problema, define que la fuerza en la dirección tangencial es $\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi}$, sabiendo de antemano que θ es el ángulo tangencial. Por otro lado, cuando estudia el movimiento perturbado y desarrolla la serie de Fourier, el ángulo de la integral del potencial es θ , cuando debería de ser ϕ . Con todo esto, no queda claro si existe inconsistencia en los ángulos definidos por Maxwell o realmente es un error en el planteamiento de las ecuaciones.

- Encontramos las condiciones bajo las cuales podemos tener movimiento uniforme y estabilidad en función de la velocidad de giro.

- Para el caso de la masa unida, es posible tener movimiento uniforme con dos configuraciones geométricas distintas, es decir, mostramos que podemos tener movimiento estable con la configuración en que el centro de masa de Saturno se encuentra entre el centro de masa de los anillos y el cuerpo unido (caso *iv*) y además en la configuración donde el centro de masa de los anillos y el cuerpo se encuentran en el mismo lado (caso *iii*)).

- Simplificamos el problema, considerando una hipótesis física real, y así, encontramos, con apoyo numérico, que podemos extender las condiciones de estabilidad para toda $r_0 \in [0, a)$. Este resultado va más allá del resultado obtenido por Maxwell.

- Con el formalismo matemático que contamos hoy en día y con un poco de ayuda de la computadora, volvimos a plantear el problema resuelto por Maxwell hace más de 150 años de una manera más clara y exacta. Al leer el estudio de Maxwell, a mi parecer, deja ver que faltan formalizar y demostrar muchas cosas que considero eran importantes, como el replanteamiento del movimiento perturbado para el caso de la masa unida.

- Para el caso de la masa unida a los anillos, si consideramos que son concéntricos a Saturno, encontramos una relación explícita entre la masa de los anillos y del cuerpo unido. Maxwell encuentra en su estudio que la masa del cuerpo debe ser aproximadamente 4.5 veces mayor a la masa de los anillos para poder tener estabilidad. En la tesis, a pesar de que encontramos una relación explícita, el valor que encontramos depende directamente de la geometría del sistema (radios interno y externo de los anillos y la distancia de la masa unida al centro de masa de los anillos).

- Numéricamente mostramos resultados que pensamos de manera intuitiva y que analíticamente no pudimos demostrar, como la inestabilidad en el caso sin masa unida. Además, cuando tenemos la masa unida, simulando numéricamente las condiciones de estabilidad, encontramos la condición necesaria para que el movimiento sea estable: $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{2,+})$ para ambos casos posibles o las condiciones iniciales que tengamos.

- En general, los resultados que obtuvimos analíticamente fueron corroborados con las simulaciones numéricas, además de ayudarnos a avanzar en el estudio, cuando no pudimos resolver las expresiones.

-A manera de comentario adicional, Maxwell estudió, además del cuerpo rígido, los casos en que los anillos fueran un fluido o un conjunto finito de partículas. Para el primer caso, demuestra que no es posible tener anillos como fluidos, debido a que bajo cualquier perturbación el fluido se propagaría, perdiendo así su forma inicial. Además, en el caso en que los anillos son un conjunto finito de partículas (μ), Maxwell encuentra que el movimiento puede ser estable si se cumple una relación entre el número de partículas, la masa de las partículas y la masa total de Saturno ($m_S > 0.4352\mu^2 m_R$). En el caso del fluido, se ha comprobado que efectivamente no puede existir movimiento estable de manera analítica y observacional¹. En el caso del conjunto de partículas, hoy en día es el modelo que se utiliza para estudiar el comportamiento de los anillos, así como para estudiar el comportamiento de los múltiples satélites que giran alrededor de Saturno².

- Aunque hoy en día es bien sabido que los anillos de Saturno no son rígidos, vemos que pudiera existir el caso contrario, aunque bajo condiciones muy particulares. Por lo tanto podemos considerar esta tesis, además de una reformulación en lenguaje moderno y con herramientas numéricas, como un complemento al estudio hecho por J.C. Maxwell con correcciones (por lo menos con el término de las masas), junto con haber encontrado la condición de estabilidad dependiente directamente de las condiciones geométricas del sistema.

¹Ver [15], p. 251

²Ver [15], p. 257 - 262

- Como posibles continuaciones futuras de esta tesis, pudiera ser el considerar más de una masa unida, así como considerar más anillos en el movimiento y buscar las condiciones de estabilidad en función de las velocidades de giro de los anillos que agreguemos; otro caso pudiera ser estudiar de manera conjunta el movimiento con más masas unidas a varios anillos rígidos, la cual pudiera estudiarse una vez obtenidos los resultados anteriores.

- Otra posibilidad para estudiar en el futuro, sería considerar el problema en tres dimensiones, y buscar encontrar condiciones parecidas a las que llegamos a esta tesis. Además, pudiéramos aplicar este modelo a otros fenómenos físicos que no van directamente vinculados con anillos, como configuraciones especiales de satélites artificiales alrededor de la tierra que presenten condiciones que se aproximen a un cuerpo rígido.

Appendix A

Algoritmos numéricos

Para el análisis numérico se utilizó el paquete de cálculo numérico **Matlab** [®].

A.1 Integral doble

Para calcular las integrales, se utilizó la integración numérica por el método de la regla compuesta de Simpson¹:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{b-a}{2n-1} \\
 k &= \frac{2\pi}{2m-1} \\
 x_i &= a + ih \\
 y_j &= jk
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b f(x, y) dx, dy =$$

$$\frac{hk}{9} \left[\begin{aligned}
 & f(x_0, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y_0) + f(x_{2n}, y_0) \\
 & + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_0, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + 8 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y_{2j}) \\
 & + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2n}, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_0, y_{2j-1}) + 8 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y_{2j-1}) \\
 & + 16 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2n}, y_{2j-1}) + f(x_0, y_{2m}) \\
 & + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y_{2m}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y_{2m}) + f(x_{2n}, y_{2m})
 \end{aligned} \right]$$

¹Ver [14], p. 211, 212

Para esta función, las variables de entrada son: la función a integrar y los parámetros para el tamaño de la malla (n , m) y los radios interior y exterior de los anillos. Además, definimos funciones auxiliares para facilitar las fórmulas.

A.1.1 Función Integrald

En esta función, aplicamos el algoritmo de la regla de Simpson:

```

function intd=integrald(f,n,m,a,b)
f1=0;f2=0;f3=0;f4=0;f5=0;f6=0;f7=0;f8=0;f9=0;f10=0;
f11=0;f12=0;f13=0;f14=0;f15=0;f16=0;
h=(b-a)/(2*n-1);
k=2*pi/(2*m-1);
f1=f(1,1);
f13=f(1,2*m);
f16=f(2*n,2*m);
f4=f(2*n,1);
for i=1:n-1
    f2=f2+f(2*i,1);
    f14=f14+f(2*i,2*m);
end
for i=1:n
    f3=f3+f(2*i-1,1);
    f15=f15+f(2*i-1,2*m);
end
for j=1:m-1
    f5=f5+f(1,2*j);
    f8=f8+f(2*n,2*j);
end
for j=1:m
    f9=f9+f(1,2*j-1);
    f12=f12+f(2*n,2*j-1);
end
for j=1:m-1
    for i=1:n-1
        f6=f6+f(2*i,2*j);
    end
    for i=1:n
        f7=f7+f(2*i-1,2*j);
    end
end
for j=1:m
    for i=1:n-1
        f10=f10+f(2*i,2*j-1);
    end
    for i=1:n
        f11=f11+f(2*i-1,2*j-1);
    end
end

```

```

end
end
Q=h*k/9*(f1+2*f2+4*f3+f4+2*f5+4*f6+8*f7+2*f8+4*f9+8*f10
+16*f11+4*f12+f13+2*f14+4*f15+f16);
intd=Q;

```

A.1.2 Función II0

Para esta función, calculamos $I_0(r_0)$ para los valores de la malla, para posteriormente integrarla con la función *integrald*:

```

function II0=II0(r0,n,m,a,b)
h=(b-a)/(2*n-1);
k=2*pi/(2*m-1);
x=a:h:b;
y=0:k:2*pi;
for i=1:max(size(x))
for j=1:max(size(y))
II0(i,j)=x(i)./(abs((r0)^2+x(i).^2+2*abs(r0)*x(i).*cos(y(j))))).^ (3/2);
end
end
end
II0=I0;

```

A.1.3 Función II1

Para esta función, calculamos la matriz $I_1(r_0)$ para los valores de la malla, para posteriormente integrarla con la función *integrald*:

```

function II1=II1(r0,n,m,a,b)
h=(b-a)/(2*n-1);
k=2*pi/(2*m-1);
x=a:h:b;
y=0:k:2*pi;
for i=1:max(size(x))
for j=1:max(size(y))
II1(i,j)=(x(i).^2.*cos(y(j))./abs((r0)^2+x(i).^2+2*abs(r0)*x(i).*cos(y(j))))).^ (3/2);
end
end
end
II1=I1;

```

A.2 Funciones de potencial

Para el cálculo de la curva del potencial, usamos una función auxiliar, la cual se encargará de calcular el valor del potencial en cada punto de la malla, para posteriormente ser integrado por la función *integrald*.

A.2.1 Función $V(r)$

```

function Vder(m,n,a,b,salto)
    s=0.01:.1/(salto):.99;
    s=s';
    r0=a*s;
    h=(b-a)/(2*n-1);
    k=2*pi/(2*m-1);
    x=a:h:b;
    y=0:k:2*pi;
    for p=1:max(size(s))
        V0=v0(r0(p,1),n,m,a,b);
        V(p,1)=-integrald(V0,n,m,a,b);
    end
    plot(r0,V)
    Title(['V(r), para a= ', num2str(a), ' y b= ', num2str(b)]);
    xlim([0,1]);
    grid on
    xlabel('r_0');
    ylabel('V');

```

A.2.2 Función auxiliar $V(r)$

```

function v0=v0(r0,n,m,a,b)
    h=(b-a)/(2*n-1);
    k=2*pi/(2*m-1);
    x=a:h:b;
    y=0:k:2*pi;
    for i=1:max(size(x))
        for j=1:max(size(y))
            V0(i,j)=x(i)./(abs((r0)^2+x(i).^2+2*abs(r0)*x(i).*cos(y(j))))^(1/2);
        end
    end
    v0=V0;

```

A.2.3 Función $\frac{dV}{dr}$

Para esta función, podemos auxiliarnos de las funciones antes definidas de I_0 e I_1 .

```

function dVdr(m,n,a,b,salto)
    s=0.01:.1/(salto):.99;
    s=s';
    r0=a*s;
    h=(b-a)/(2*n-1);
    k=2*pi/(2*m-1);

```

```

x=a:h:b;
y=0:k:2*pi;
for p=1:max(size(s))
    I0=II0(r0(p,1),n,m,a,b);
    I1=II1(r0(p,1),n,m,a,b);
    Q0(p,1)=integrald(I0,n,m,a,b);
    Q1(p,1)=integrald(I1,n,m,a,b);
    dV(p,1)=r0(p,1)*Q0(p,1)+Q1(p,1);
end
plot(r0,dV)
Title(['dV(r)/dr, para a= ', num2str(a), ' y b= ', num2str(b)]);
xlim([0,1]);
grid on
xlabel('r_0');
ylabel('dV/dr');

```

A.2.4 Función $2I_0 + \frac{I_1}{r_0}$

```

function dI0mI1(m,n,a,b,salto)
s=0.1:1/(salto):.9;
s=s';
r0=a*s;
u=(a+b)/2;
h=(b-a)/(2*n-1);
k=2*pi/(2*m-1);
x=a:h:b;
y=0:k:2*pi;
for p=1:max(size(s))
    I0=II0(r0(p,1),n,m,a,b);
    I1=II1(r0(p,1),n,m,a,b);
    Q0(p,1)=integrald(I0,n,m,a,b);
    Q1(p,1)=integrald(I1,n,m,a,b);
    R(p,1)=2*Q0(p,1)+Q1(p,1)/r0(p,1);
end
plot(r0,R)
Title(['2*I_0+I_1/r_0, para b= ', num2str(b)]);
xlim([0,1]);
grid on
xlabel('r_0');
ylabel('2*I_0+I_1/r_0');

```

A.3 Estudio numérico de las condiciones de estabilidad

A.3.1 Función $\omega^2 = 0$

```

function omega(m,n,a,b,salto,sigma)
    s=0.1:1/(salto):.9;
    s=s';
    r0=a*s;
    u=(a+b)/2;
    h=(b-a)/(2*n-1);
    k=2*pi/(2*m-1);
    x=a:h:b;
    y=0:k:2*pi;
    A=(b^2-a^2)*pi;
    for p=1:max(size(s))
        I0=II0(r0(p,1),n,m,a,b);
        I1=II1(r0(p,1),n,m,a,b);
        Q0(p,1)=integrald(I0,n,m,a,b);
        Q1(p,1)=integrald(I1,n,m,a,b);
        %omega^2=0
        a4(p,1)=sigma*(r0(p,1)*Q0(p,1)+Q1(p,1))/A;
        b4(p,1)=1/(u+sigma*r0(p,1))^2;
        omega0(p,:)=roots([a4(p,1), b4(p,1)]);
    end
    omega0
    plot(r0,omega0)
    Title(['omega^2=0, para b= ', num2str(b), ' y Sigma = ', num2str(sigma)])
    xlim([0,1])
    xlabel('r_0');
    ylabel('epsilon');
    grid on

```

A.3.2 Función $L + N + 2\omega^2 = 0$

```

function LmNmdomega(m,n,a,b,salto,sigma)
    s=0.1:1/(salto):.9;
    s=s';
    r0=a*s;
    u=(a+b)/2;
    h=(b-a)/(2*n-1);
    k=2*pi/(2*m-1);
    x=a:h:b;
    y=0:k:2*pi;
    A=(b^2-a^2)*pi;
    for p=1:max(size(s))

```

A.3. ESTUDIO NUMÉRICO DE LAS CONDICIONES DE ESTABILIDAD 137

```

I0=II0(r0(p,1),n,m,a,b);
I1=III1(r0(p,1),n,m,a,b);
Q0(p,1)=integrald(I0,n,m,a,b);
Q1(p,1)=integrald(I1,n,m,a,b);
%2*omega^2+L+N=0
a1(p,1)=sigma*(Q0(p,1)+2*Q1(p,1)/r0(p,1))*r0(p,1)/A;
b1(p,1)=Q0(p,1)*(-u+sigma*r0(p,1))/A+Q1(p,1)*2*sigma/A
+(2*u+sigma*r0(p,1))/(u+sigma*r0(p,1))^3;
c1(p,1)=1/(u+sigma*r0(p,1))^2;
e1(p,1)=max(roots([a1(p,1), b1(p,1), c1(p,1)]));
e2(p,1)=min(roots([a1(p,1), b1(p,1), c1(p,1)]));
% aqui verificamos que las raíces no sean complejas, para no graficarlas
if imag(e1(p,1))~=0
    e1(p,1)=0;
end
if imag(e2(p,1))~=0
    e2(p,1)=0;
end
end
e1
e2
plot(r0,e1,r0,e2)
Title(['L+N+2*omega^2=0, para b= ', num2str(b), ' y Sigma = ', num2str(sigma)])
xlim([0,1])
grid on
xlabel('r_0');
ylabel('epsilon');

```

A.3.3 Función $8\omega^2(L+N) + (L-N)^2$

```

function oomegapLmN(m,n,a,b,salto,sigma)
s=0.05:.5/(salto):.95;
s=s';
r0=a*s;
u=(a+b)/2;
h=(b-a)/(2*n-1);
k=2*pi/(2*m-1);
x=a:h:b;
y=0:k:2*pi;
A=(b^2-a^2)*pi;
for p=1:max(size(s))
    I0=II0(r0(p,1),n,m,a,b);
    I1=III1(r0(p,1),n,m,a,b);
    Q0(p,1)=integrald(I0,n,m,a,b);
    Q1(p,1)=integrald(I1,n,m,a,b);
    a2(p,1)=sigma*r0(p,1)*(Q0(p,1)+2*Q1(p,1)/r0(p,1))^2/A^2;

```

```

b2(p,1)=(sigma*r0(p,1)*(Q0(p,1)+2*Q1(p,1)/r0(p,1))^2
+u*(3*Q0(p,1)+2*Q1(p,1)/r0(p,1))^2)/(A)^2
+(2*sigma*r0(p,1)*(Q0(p,1)+2*Q1(p,1)/r0(p,1))-8*Q0(p,1)*u)
/(A*(u+sigma*r0(p,1))^3);
c2(p,1)=(-8*u+sigma*r0(p,1))/(u+sigma*r0(p,1))^6
-8*sigma*(r0(p,1)*Q0(p,1)+Q1(p,1))/(A*(u+sigma*r0(p,1))^3)
+(10*Q0(p,1)+12*Q1(p,1)/r0(p,1))/(A*(u+sigma*r0(p,1))^2);
d2(p,1)=1/(u+sigma*r0(p,1))^5;
%calculamos las tres raíces
e2t(p,:)=roots([a2(p,1), b2(p,1), c2(p,1), d2(p,1)]);
e2(p,1)=min(roots([a2(p,1), b2(p,1), c2(p,1), d2(p,1)]));
e2(p,3)=max(roots([a2(p,1), b2(p,1), c2(p,1), d2(p,1)]));
% con esto, escogemos la raíz que se encuentra en medio
if (e2t(p,1)>e2t(p,2)) && (e2t(p,2)>e2t(p,3))
    k=2;
elseif (e2t(p,3)>e2t(p,2)) && (e2t(p,2)>e2t(p,1))
    k=2;
elseif (e2t(p,2)>e2t(p,1)) && (e2t(p,1)>e2t(p,3))
    k=1;
elseif (e2t(p,3)>e2t(p,1)) && (e2t(p,1)>e2t(p,2))
    k=1;
elseif (e2t(p,1)>e2t(p,3)) && (e2t(p,3)>e2t(p,2))
    k=3;
elseif (e2t(p,2)>e2t(p,3)) && (e2t(p,3)>e2t(p,1))
    k=3;
end
e2(p,2)=e2t(p,k);
end
plot(r0,e2)
Title(['8*omega^2*(L+N)+(L-N)^2=0, para a= ', num2str(a),' , b= ',
    num2str(b), ' y Sigma = ', num2str(sigma)])
xlim([0,1])
grid on
xlabel('r_0');
ylabel('epsilon');

```

A.3.4 Comparación de funciones

```

function comparacion(m,n,a,b,salto)
s=0.1:1/(salto):.9;
s=s';
r0=a*s;
u=(a+b)/2;
h=(b-a)/(2*n-1);
k=2*pi/(2*m-1);
x=a:h:b;

```

A.3. ESTUDIO NUMÉRICO DE LAS CONDICIONES DE ESTABILIDAD 139

```

y=0:k:2*pi;
A=(b^2-a^2)*pi;
sigma=1;
for p=1:max(size(s))
    I0=II0(r0(p,1),n,m,a,b);
    I1=II1(r0(p,1),n,m,a,b);
    Q0(p,1)=integrald(I0,n,m,a,b);
    Q1(p,1)=integrald(I1,n,m,a,b);
    %8*omega^2*(L+N)+(L-N)^2=0
    a2(p,1)=sigma*r0(p,1)*(Q0(p,1)+2*Q1(p,1)/r0(p,1))^2/A^2;
    b2(p,1)=(sigma*r0(p,1)*(Q0(p,1)+2*Q1(p,1)/r0(p,1))^2
    +u*(3*Q0(p,1)+2*Q1(p,1)/r0(p,1))^2)/(A^2+(2*sigma*r0(p,1)*(Q0(p,1)+2*Q1(p,1)/r0(p,1))
    -8*Q0(p,1)*u)/(A*(u+sigma*r0(p,1))^3);
    c2(p,1)=(-8*u+sigma*r0(p,1))/(u+sigma*r0(p,1))^6
    -8*sigma*(r0(p,1)*Q0(p,1)+Q1(p,1))/(A*(u+sigma*r0(p,1))^3)
    +(10*Q0(p,1)+12*Q1(p,1)/r0(p,1))/(A*(u+sigma*r0(p,1))^2);
    d2(p,1)=1/(u+sigma*r0(p,1))^5;
    e2t(p,:)=roots([a2(p,1), b2(p,1), c2(p,1), d2(p,1)]);
    e2(p,1)=e2t(p,2);
    e2(p,2)=e2t(p,3);
    e2(p,3)=e2t(p,1);
    if imag(e2(p,1))~=0
        e2(p,1)=0;
    end
    if imag(e2(p,2))~=0
        e2(p,2)=0;
    end
    if imag(e2(p,3))~=0
        e2(p,3)=0;
    end
    %L+N+2*omega^2=0
    a1(p,1)=sigma*(Q0(p,1)+2*Q1(p,1)/r0(p,1))*r0(p,1)/A;
    b1(p,1)=Q0(p,1)*(-u+sigma*r0(p,1))/A+Q1(p,1)*2*sigma/A
    +(2*u+sigma*r0(p,1))/(u+sigma*r0(p,1))^3;
    c1(p,1)=1/(u+sigma*r0(p,1))^2;
    e1(p,1)=max(roots([a1(p,1), b1(p,1), c1(p,1)]));
    e2(p,1)=min(roots([a1(p,1), b1(p,1), c1(p,1)]));
    if imag(e1(p,1))~=0
        e1(p,1)=0;
    end
    if imag(e2(p,1))~=0
        e2(p,1)=0;
    end
    %omega^2=0
    a4(p,1)=sigma*(r0(p,1)*Q0(p,1)+Q1(p,1))/A;
    b4(p,1)=1/(u+sigma*r0(p,1))^2;

```

```
    omega0(p,:)=roots([a4(p,1), b4(p,1)]);
end
plot(r0,omega0,'*',r0,e2(:,2),'-',r0,e1.'.')
Title(['Comparación de las funciones, para b= ', num2str(b), ' epsilon_2_,_+
es "-" , omega es "*" y epsilon_1_,_- es "."'])
xlim([0,1])
grid on
xlabel('r_0');
ylabel('epsilon');
```

Appendix B

Tablas de resultados de las simulaciones

Los valores de las simulaciones numéricas:

r_0	2*I_0+I_1/r_0			
	b= 1.05	b= 1.5	b= 4	b= 10
0.1	0.159358	1.113859	2.543335	3.138504
0.133333	0.162008	1.123348	2.535153	3.107224
0.166667	0.166446	1.143456	2.550341	3.109378
0.2	0.172542	1.172539	2.582173	3.133413
0.233333	0.180349	1.210318	2.628253	3.174891
0.266667	0.190026	1.257144	2.687947	3.232182
0.3	0.201817	1.313781	2.761553	3.305062
0.333333	0.216057	1.381356	2.850002	3.394193
0.366667	0.233185	1.461375	2.954779	3.500931
0.4	0.253782	1.555793	3.07793	3.627304
0.433333	0.278607	1.667124	3.222159	3.776076
0.466667	0.308668	1.798602	3.390981	3.95091
0.5	0.345313	1.954422	3.588964	4.156616
0.533333	0.390381	2.140082	3.82209	4.399547
0.566667	0.446419	2.362895	4.09829	4.688177
0.6	0.517034	2.63276	4.42826	5.03401
0.633333	0.607468	2.96336	4.826731	5.452986
0.666667	0.725562	3.374102	5.314517	5.967795
0.7	0.883465	3.893349	5.921971	6.611789
0.733333	1.100817	4.564132	6.695068	7.43598
0.766667	1.41105	5.454795	7.706847	8.522373
0.8	1.874879	6.680416	9.080581	10.01145
0.833333	2.612217	8.450214	11.04158	12.16501
0.866667	3.888305	11.18685	14.04946	15.53144
0.9	6.393797	15.88727	19.20677	21.47832

Tabla 1. Valores $2I_0 + \frac{I_1}{r_0}$

sigma= 1	omega^2= 0			
r_0	b= 1.05	b= 1.5	b= 4	b= 10
0.1	17.28551	21.09499	30.98053	37.35227
0.133333	12.02213	14.82082	22.20323	26.97288
0.166667	8.942827	11.14647	17.07143	20.95144
0.2	6.934532	8.743878	13.70509	17.01354
0.233333	5.52981	7.057324	11.32734	14.233
0.266667	4.498107	5.813288	9.558837	12.16175
0.3	3.712626	4.861527	8.192291	10.55658
0.333333	3.097901	4.112681	7.104853	9.274035
0.366667	2.60624	3.510284	6.219072	8.223992
0.4	2.206042	3.016912	5.483689	7.346983
0.433333	1.875556	2.606795	4.863414	6.602148
0.466667	1.599333	2.261605	4.333145	5.960466
0.5	1.366106	1.967963	3.874526	5.400734
0.533333	1.16747	1.715868	3.473811	4.907066
0.566667	0.997037	1.497702	3.120484	4.467302
0.6	0.849868	1.307554	2.806345	4.071932
0.633333	0.722088	1.140768	2.524882	3.713367
0.666667	0.610617	0.993621	2.270829	3.385418
0.7	0.51298	0.863096	2.039841	3.082912
0.733333	0.427168	0.746706	1.828249	2.801384
0.766667	0.351535	0.642372	1.632855	2.536807
0.8	0.28472	0.548311	1.450742	2.285316
0.833333	0.225593	0.46294	1.279053	2.042838
0.866667	0.173198	0.384761	1.114659	1.804459
0.9	0.12672	0.312172	0.953487	1.563033

Tabla 2. Valores de $\omega^2 = 0$

sigma= 1	L+N+2*omega^2= 0							
	b= 1.05		b= 1.5		b= 4		b= 10	
r_0	epsilon_1,-	epsilon_1,+	epsilon_1,-	epsilon_1,+	epsilon_1,-	epsilon_1,+	epsilon_1,-	epsilon_1,+
0.1	3.1899566	-1.3272583	3.8748528	-1.3309141	3.1785171	-2.3598344	0.7034544	-12.69677
0.13333333	2.0599276	-1.4297182	2.5529653	-1.4222734	2.2920192	-2.3601923	0.6454572	-10.093404
0.16666667	1.4373124	-1.5197472	1.812277	-1.5054072	1.7650471	-2.361891	0.5939448	-8.5598255
0.2	1.0562589	-1.5953624	1.351942	-1.5783069	1.4154371	-2.3645335	0.5476558	-7.5516852
0.23333333	0.8053039	-1.6659346	1.044987	-1.6405168	1.1663809	-2.3678996	0.5056671	-6.8411291
0.26666667	0.6306029	-1.7060702	0.8292733	-1.6926259	0.979855	-2.371877	0.4672816	-6.3159209
0.3	0.5035736	-1.7447716	0.6712964	-1.7357533	0.8348723	-2.3764233	0.4319584	-5.9143615
0.33333333	0.4079386	-1.7749887	0.551684	-1.7711895	0.7188962	-2.3815445	0.399268	-5.5997429
0.36666667	0.3338913	-1.7984366	0.4586096	-1.8001966	0.6239731	-2.3872835	0.3688631	-5.3488921
0.4	0.2752402	-1.816554	0.3845261	-1.823918	0.5448115	-2.3937137	0.3404576	-5.1465023
0.43333333	0.2279176	-1.8305209	0.3244332	-1.8433505	0.477753	-2.4009363	0.3138125	-4.9821072
0.46666667	0.1891584	-1.8412973	0.2749093	-1.8593476	0.4201861	-2.4090809	0.2887249	-4.8483685
0.5	0.1570267	-1.8496642	0.233547	-1.8726359	0.370196	-2.4183083	0.2650209	-4.7400596
0.53333333	0.1301317	-1.8562611	0.1986101	-1.8838367	0.3263451	-2.4288164	0.2425486	-4.6534432
0.56666667	0.1074521	-1.8616174	0.1688191	-1.8934873	0.2875925	-2.4408489	0.2211745	-4.5858833
0.6	0.0882228	-1.8661788	0.1432126	-1.9020623	0.2528993	-2.4547083	0.2007791	-4.5356059
0.63333333	0.0718607	-1.870328	0.1210556	-1.909994	0.221764	-2.4707757	0.1812538	-4.5015623
0.66666667	0.0579153	-1.8744037	0.1017776	-1.9176924	0.1935771	-2.4895393	0.1624987	-4.4833737
0.7	0.0460335	-1.8787157	0.0849294	-1.9255683	0.1678886	-2.511638	0.1444194	-4.4813523
0.73333333	0.0359359	-1.8835604	0.0701525	-1.9340615	0.1443232	-2.5379296	0.1269251	-4.4966138
0.76666667	0.0273997	-1.889236	0.0571574	-1.9436805	0.1225617	-2.5696025	0.1099258	-4.5313223
0.8	0.0202458	-1.8960615	0.0457072	-1.9550646	0.1023259	-2.6083657	0.0933289	-4.5891636
0.83333333	0.0143298	-1.904403	0.0356053	-1.9690929	0.0833646	-2.656799	0.0770353	-4.6762557
0.86666667	0.0095358	-1.914719	0.0266856	-1.9870992	0.0654396	-2.7190484	0.0609342	-4.8030097
0.9	0.0057708	-1.927656	0.0188033	-2.0113527	0.0483075	-2.8023878	0.0448966	-4.9883261
a	< 0		< 0		< 0		< 0	
b	< 0		< 0		< 0		< 0	
c	> 0		> 0		> 0		> 0	
Conclusiones	(0,epsilon_1,-)		(0,epsilon_1,-)		(0,epsilon_1,-)		(0,epsilon_1,-)	

Tabla 3. Valores de $L + N + 2\omega^2 = 0$ para $\sigma = 1$

L+N+2*omega^2= 0						
sigma= -1	b= 1.05		b= 1.5		b= 4	
r_0	epsilon_1,-	epsilon_1,+	epsilon_1,-	epsilon_1,+	epsilon_1,-	epsilon_1,+
0.1	-0.7627226	-8.210984	-0.8245685	-8.6188697	-2.3806055	-3.5977953
0.133333333	-0.7041585	-7.0582008	-0.7674097	-7.261182	Complex	Complex
0.166666667	-0.653912	-6.4387389	-0.7174792	-6.5025001	Complex	Complex
0.2	-0.6103999	-6.0866671	-0.6736893	-6.0401437	Complex	Complex
0.233333333	-0.5722817	-5.8906335	-0.6350337	-5.7466553	Complex	Complex
0.266666667	-0.5384646	-5.7966396	-0.6006372	-5.5593652	Complex	Complex
0.3	-0.508071	-5.7760759	-0.5697618	-5.4440891	Complex	Complex
0.333333333	-0.4803975	-5.8131115	-0.5417939	-5.3807532	Complex	Complex
0.366666667	-0.4548783	-5.8990732	-0.5162265	-5.3569118	-1.5187947	-1.7709557
0.4	-0.4310539	-6.0297357	-0.4926401	-5.3645268	-1.4241879	-1.7462586
0.433333333	-0.4085472	-6.2039721	-0.4706867	-5.3982357	-1.3632778	-1.6950466
0.466666667	-0.3870438	-6.4231192	-0.4500754	-5.4543551	-1.3306702	-1.6193585
0.5	-0.3662782	-6.6907733	-0.4305619	-5.530261	-1.3435539	-1.4992386
0.533333333	-0.3460219	-7.0129036	-0.4119386	-5.623968	Complex	Complex
0.566666667	-0.3260745	-7.3982647	-0.3940278	-5.7337981	Complex	Complex
0.6	-0.3062573	-7.8591627	-0.3766762	-5.8580686	Complex	Complex
0.633333333	-0.2864069	-8.4127186	-0.3597498	-5.9947325	Complex	Complex
0.666666667	-0.266371	-9.0828981	-0.3431308	-6.1408888	Complex	Complex
0.7	-0.2460049	-9.9038143	-0.3267152	-6.2920419	Complex	Complex
0.733333333	-0.2251674	-10.925259	-0.3104113	-6.4409029	Complex	Complex
0.766666667	-0.2037187	-12.222354	-0.2941392	-6.5753569	Complex	Complex
0.8	-0.1815173	-13.913269	-0.277834	-6.6748736	Complex	Complex
0.833333333	-0.1584179	-16.193856	-0.2614529	-6.7039017	Complex	Complex
0.866666667	-0.1342688	-19.41036	-0.2449989	-6.5990989	Complex	Complex
0.9	-0.1089103	-24.223688	-0.2285943	-6.2430476	Complex	Complex
a	> 0		> 0		> 0	
b	> 0		> 0		> 0	
c	> 0		> 0		> 0	
Conclusiones	válida para epsilon > 0		válida para epsilon > 0		válida para epsilon > 0	

Tabla 4. Valores de $L + N + 2\omega^2 = 0$ para $\sigma = -1$

$\sigma = -1$	b= 2		b= 2.5		b= 3	
r_0	epsilon_1,-	epsilon_1,+	epsilon_1,-	epsilon_1,+	epsilon_1,-	epsilon_1,+
0.1	-0.9222244	-8.3541427	-1.0567959	-7.6748024	-1.2510803	-6.7182341
0.13333333	-0.8615858	-6.94302	-0.9886611	-6.3242462	-1.1710496	-5.5029832
0.16666667	-0.8079505	-6.1396647	-0.9276527	-5.5501979	-1.0978833	-4.8078825
0.2	-0.7605355	-5.6344191	-0.8733513	-5.0571106	-1.0320157	-4.3644816
0.23333333	-0.7185119	-5.2967674	-0.8251059	-4.7204961	-0.9732514	-4.0597493
0.26666667	-0.6810976	-5.062307	-0.7821955	-4.4789393	-0.9210512	-3.8380124
0.3	-0.6475963	-4.8956383	-0.7439205	-4.2986706	-0.8747372	-3.6687509
0.33333333	-0.6174076	-4.775672	-0.7096459	-4.1595423	-0.833617	-3.5338268
0.36666667	-0.5900222	-4.6889978	-0.6788164	-4.0487021	-0.7970479	-3.4217152
0.4	-0.5650118	-4.6265818	-0.6509573	-3.9574442	-0.7644654	-3.3246334
0.43333333	-0.542018	-4.5819838	-0.6256688	-3.8795144	-0.7353918	-3.236999
0.46666667	-0.5207406	-4.550323	-0.6026183	-3.8101328	-0.7094368	-3.1545438
0.5	-0.5009288	-4.527632	-0.5815329	-3.7453891	-0.6862956	-3.0737708
0.53333333	-0.482373	-4.5104153	-0.5621933	-3.681841	-0.6657478	-2.9915936
0.56666667	-0.4648991	-4.495311	-0.54443	-3.6162172	-0.6476626	-2.9050735
0.6	-0.4483636	-4.4787935	-0.5281227	-3.5451724	-0.6320124	-2.8111997
0.63333333	-0.4326514	-4.4568662	-0.5132044	-3.4650516	-0.6189029	-2.7066733
0.66666667	-0.4176755	-4.4247031	-0.4996724	-3.3716316	-0.6086352	-2.5876546
0.7	-0.4033798	-4.3761792	-0.4876124	-3.2597991	-0.6018321	-2.4494125
0.73333333	-0.3897477	-4.303215	-0.4772487	-3.1231083	-0.59972	-2.2857553
0.76666667	-0.3768208	-4.194803	-0.4690504	-2.9531201	-0.6048305	-2.0879209
0.8	-0.3647421	-4.0354944	-0.4639807	-2.7383177	-0.623153	-1.8418085
0.83333333	-0.3538597	-3.8029122	-0.4641678	-2.4620949	-0.6738615	-1.5172445
0.86666667	-0.3450146	-3.4633695	-0.4751838	-2.0981565	Complex	Complex
0.9	-0.3405444	-2.9632447	-0.5180767	-1.5940422	Complex	Complex
a	> 0		> 0		> 0	
b	> 0		> 0		> 0	
c	> 0		> 0		> 0	
Conclusiones	válida para epsilon > 0		válida para epsilon > 0		válida para epsilon > 0	

Tabla 5. Cont.

$8\omega^2(L+N)+(L-N)^2=0$						
$\sigma=1$	b= 1.05			b= 1.5		
r_0	epsilon_2,+	epsilon_2,-	epsilon_2,3	epsilon_2,+	epsilon_2,-	epsilon_2,3
0.1	0.064059771	-1.4894603	22.796442	0.06589009	-1.4712647	29.995934
0.133333333	0.059120139	-1.4496137	14.255425	0.06062925	-1.4548076	18.557743
0.166666667	0.055312174	-1.3971829	9.9370609	0.05688689	-1.4196487	12.944419
0.2	0.051975705	-1.3420853	7.3560322	0.05378713	-1.3773004	9.6436342
0.233333333	0.048864723	-1.2884125	5.6511934	0.05100238	-1.3328747	7.4837524
0.266666667	0.045873043	-1.2379857	4.4479994	0.04838603	-1.2888692	5.9672343
0.3	0.042952197	-1.191645	3.5581209	0.04586539	-1.2465795	4.8480584
0.333333333	0.040080804	-1.149791	2.8767862	0.0434025	-1.2067071	3.9910278
0.366666667	0.037251315	-1.1126376	2.3412008	0.04097734	-1.1696499	3.3158436
0.4	0.034463619	-1.0803406	1.9115281	0.03857981	-1.1356541	2.7718852
0.433333333	0.031721706	-1.0530696	1.5613506	0.03620558	-1.1048994	2.3257066
0.466666667	0.029031819	-1.0310499	1.2725288	0.03385373	-1.0775523	1.9543599
0.5	0.026401392	-1.0145879	1.0322618	0.03152541	-1.0538019	1.6416111
0.533333333	0.023838423	-1.0040834	0.8313181	0.02922297	-1.0338887	1.375689
0.566666667	0.02135112	-1.0000295	0.6629196	0.02694942	-1.0181305	1.1478894
0.6	0.018947699	-1.002996	0.5219995	0.02470805	-1.006948	0.95168
0.633333333	0.016636306	-1.0135981	0.4046791	0.02250218	-1.0008931	0.7821066
0.666666667	0.014425023	-1.0324526	0.3078802	0.02033489	-1.0006823	0.6353867
0.7	0.012321936	-1.0601385	0.2290314	0.01820888	-1.0072375	0.5086184
0.733333333	0.010335287	-1.0971864	0.1658572	0.01612617	-1.0217422	0.3995601
0.766666667	0.008473731	-1.1441244	0.1162503	0.01408785	-1.0457339	0.3064508
0.8	0.006746854	-1.2016029	0.0782221	0.01209364	-1.0812775	0.2278574
0.833333333	0.005166459	-1.2706241	0.0499124	0.01014166	-1.1313273	0.1625525
0.866666667	0.003750066	-1.3529459	0.0296316	0.00822964	-1.2004914	0.1094575
0.9	0.002529007	-1.4518048	0.0159071	0.00636418	-1.2964362	0.0677336
a	> 0			> 0		
b	< 0			< 0		
c	< 0			< 0		
d	> 0			> 0		
Conclusiones	(0,epsilon_2,+)			(0,epsilon_2,+)		

Tabla 6. Valores de $8\omega^2(L+N)+(L-N)^2=0$ para $\sigma=1$

$8 \cdot \omega^2 \cdot (L+N) + (L-N)^2 = 0$						
$\sigma = 1$	b= 4			b= 10		
r_0	epsilon_2,+	epsilon_2,-	epsilon_2,3	epsilon_2,+	epsilon_2,-	epsilon_2,3
0.1	0.063094249	-1.20447398	54.7621408	0.05533811	-1.00404094	64.2827925
0.133333333	0.055421188	-1.2498645	32.398366	0.04262164	-1.01080356	40.1049948
0.166666667	0.051086939	-1.26825531	22.3204734	0.03714904	-1.03443878	28.0298849
0.2	0.04808087	-1.27118374	16.6697512	0.03395486	-1.05369788	21.0933459
0.233333333	0.045723844	-1.26468148	13.0787047	0.03175835	-1.06681347	16.6584365
0.266666667	0.043722753	-1.25218049	10.6027534	0.03007905	-1.07449417	13.5988538
0.3	0.041930439	-1.23577277	8.79477632	0.02869567	-1.07770625	11.3664498
0.333333333	0.0402649	-1.21680741	7.41699322	0.02749174	-1.07729915	9.666102
0.366666667	0.038676751	-1.19619831	6.33174355	0.02639969	-1.07396826	8.32603782
0.4	0.037134339	-1.17459491	5.45398114	0.02537727	-1.06828473	7.23991965
0.433333333	0.035616246	-1.15248391	4.72838696	0.02439624	-1.06073528	6.33852403
0.466666667	0.034107209	-1.13025482	4.1174305	0.02343656	-1.05176141	5.57483873
0.5	0.032595735	-1.10824706	3.59473205	0.02248309	-1.04179954	4.91572953
0.533333333	0.03107262	-1.08678906	3.14117328	0.02152362	-1.03132752	4.3370334
0.566666667	0.029529941	-1.06623744	2.74251496	0.02054757	-1.02092746	3.82053465
0.6	0.027960306	-1.04702449	2.38788187	0.01954508	-1.01138155	3.35202303
0.633333333	0.026356212	-1.0297254	2.06876831	0.0185062	-1.0038327	2.92000238
0.666666667	0.024709401	-1.01516405	1.77837103	0.01742019	-1.00007438	2.5148215
0.7	0.023010105	-1.00459322	1.51114369	0.01627464	-1.0031085	2.12814399
0.733333333	0.021246031	-1.00001999	1.26252726	0.0150545	-1.0182887	1.75284942
0.766666667	0.019400853	-1.00482554	1.02887288	0.01374056	-1.05579925	1.38381486
0.8	0.017451938	-1.02500103	0.80767428	0.01230775	-1.13618037	1.02081532
0.833333333	0.015367298	-1.07167701	0.59842422	0.0107239	-1.30170754	0.67567134
0.866666667	0.013104758	-1.16608313	0.40468798	0.00895542	-1.63105863	0.38091021
0.9	0.010631173	-1.34666573	0.2374591	0.00700421	-2.22828618	0.17629674
a	> 0			> 0		
b	< 0			< 0		
c	< 0			< 0		
d	> 0			> 0		
Conclusiones	(0,epsilon_2,+)			(0,epsilon_2,+)		

Tabla 7. Cont.

$8\omega^2(L+N)+(L-N)^2=0$						
$\sigma = -1$	b= 1.05			b= 1.5		
r_0	epsilon_2,+	epsilon_2,-	epsilon_2,3	epsilon_2,+	epsilon_2,-	epsilon_2,3
0.1	0.071160888	-2.2582805	-36.288481	0.07116089	-2.0481302	-44.478896
0.133333333	0.068489467	-2.5499821	-25.840088	0.06848947	-2.2786484	-30.60048
0.166666667	0.067137756	-2.8609741	-20.52371	0.06713776	-2.5070086	-23.750942
0.2	0.066286327	-3.2110406	-17.319466	0.06628633	-2.747437	-19.701062
0.233333333	0.065618508	-3.6191303	-15.168854	0.06561851	-3.0095249	-17.032397
0.266666667	0.064985467	-4.1097296	-13.597986	0.06498547	-3.3019749	-15.137661
0.3	0.064308086	-4.7218925	-12.345878	0.06430809	-3.6345742	-13.711792
0.333333333	0.063540904	-5.5348092	-11.214845	0.0635409	-4.0201444	-12.580875
0.366666667	0.062656685	-6.816734	-9.8715499	0.06265669	-4.4778604	-11.631481
0.4	0.061639038	Complex	Complex	0.06163904	-5.0413742	-10.772133
0.433333333	0.060478545	Complex	Complex	0.06047855	-5.7878403	-9.8892145
0.466666667	0.059170585	Complex	Complex	0.05917058	-7.1052274	-8.5716112
0.5	0.057714007	Complex	Complex	0.05771401	Complex	Complex
0.533333333	0.056110276	Complex	Complex	0.05611028	Complex	Complex
0.566666667	0.054362872	Complex	Complex	0.05436287	Complex	Complex
0.6	0.052476849	Complex	Complex	0.05247685	Complex	Complex
0.633333333	0.05045848	Complex	Complex	0.05045848	Complex	Complex
0.666666667	0.048314957	Complex	Complex	0.04831496	Complex	Complex
0.7	0.046054127	Complex	Complex	0.04605413	Complex	Complex
0.733333333	0.043684232	Complex	Complex	0.04368423	Complex	Complex
0.766666667	0.041213642	Complex	Complex	0.04121364	Complex	Complex
0.8	0.038650529	Complex	Complex	0.03865053	Complex	Complex
0.833333333	0.036002467	Complex	Complex	0.03600247	Complex	Complex
0.866666667	0.03327602	Complex	Complex	0.03327602	Complex	Complex
0.9	0.030477142	Complex	Complex	0.03047714	Complex	Complex
a	< 0			< 0		
b	< 0			< 0		
c	< 0			< 0		
d	> 0			> 0		
Conclusiones	(0,epsilon_2,+)			(0,epsilon_2,+)		

Tabla 8. Valores de $8\omega^2(L+N)+(L-N)^2=0$ para $\sigma = -1$

sigma= -1	B*omega^2*(L+N)+(L-N)^2= 0					
	b= 4			b= 10		
r_0	epsilon_2,+	epsilon_2,-	epsilon_2,3	epsilon_2,+	epsilon_2,-	epsilon_2,3
0.1	0.066278466	-1.36103793	-68.839146	0.03211111	-1.32752968	-40.0813329
0.13333333	0.060315907	-1.48138254	-42.8357624	0.0319326	-1.34981332	-29.70159
0.16666667	0.057486101	-1.57686091	-31.1045178	0.03187901	-1.36539589	-23.6496297
0.2	0.055904998	-1.65791115	-24.5062868	0.03187136	-1.37676558	-19.6785271
0.23333333	0.05492883	-1.729684	-20.2976708	0.03187593	-1.38494295	-16.8661759
0.26666667	0.054277033	-1.79487473	-17.3843839	0.03187539	-1.39036828	-14.7645951
0.3	0.05380716	-1.8548908	-15.2479397	0.03185939	-1.3932091	-13.1299268
0.33333333	0.053438648	-1.91038024	-13.6122187	0.03182085	-1.39348619	-11.8180122
0.36666667	0.053121961	-1.96148614	-12.3171302	0.03175431	-1.39113195	-10.738084
0.4	0.052824417	-2.00797157	-11.2636382	0.03165502	-1.38602016	-9.83004244
0.43333333	0.052523001	-2.04927787	-10.3872494	0.03151845	-1.37798277	-9.05239031
0.46666667	0.052200406	-2.08454619	-9.64415702	0.03133992	-1.36682074	-8.37540462
0.5	0.051842671	-2.11261857	-9.00350742	0.03111433	-1.35231262	-7.77705557
0.53333333	0.051437619	-2.13202934	-8.44282717	0.03083585	-1.33422317	-7.24044142
0.56666667	0.05097371	-2.14099577	-7.94515968	0.03049764	-1.31231416	-6.75208945
0.6	0.050439021	-2.13741806	-7.49714554	0.03009142	-1.2863602	-6.3007556
0.63333333	0.049820177	-2.11890013	-7.08760727	0.02960693	-1.25617395	-5.87649572
0.66666667	0.049101007	-2.08280437	-6.70635461	0.02903119	-1.22164956	-5.46984412
0.7	0.04826062	-2.0263527	-6.34299029	0.02834731	-1.18284294	-5.07094489
0.73333333	0.047270348	-1.94678345	-5.98549582	0.02753269	-1.14013387	-4.66842953
0.76666667	0.046088539	-1.84157249	-5.61830253	0.02655612	-1.09459097	-4.24766606
0.8	0.044651083	-1.70875513	-5.21936264	0.02537255	-1.04892424	-3.78750957
0.83333333	0.042853719	-1.54755303	-4.75539398	0.02391356	-1.01058002	-3.25293522
0.86666667	0.040520927	-1.36029295	-4.17439416	0.02206735	-1.00668905	-2.57120475
0.9	0.037373252	-1.15998207	-3.39791338	0.01963193	Complex	Complex
a	< 0			< 0		
b	< 0			< 0		
c	< 0			< 0		
d	> 0			> 0		
Conclusiones	(0,epsilon_2,+)			(0,epsilon_2,+)		

Tabla 9. Cont.

Bibliography

- [1] P. M. Harman (1990) *The Scientific letters and Papers of James Clerk Maxwell - Vol I*. Cambridge University Press, Inglaterra.
- [2] J. C. Maxwell (1859) *On the Stability of the motion of Saturn´s Rings*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. IV, Inglaterra.
- [3] I. Tolstoy (1982) *A Biography: James Clerk Maxwell*. The University of Chicago Press, E.E.U.U.
- [4] V.I. Arnold (1978) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer - Verlag, E.E. U.U.
- [5] J. E. Marsden (1991) *Cálculo Vectorial*. Addison - Wesley, E.E.U.U.
- [6] N. G. Chetaev (1989) *Theoretical Mechanics*. Springer - Verlag, Rusia.
- [7] W. E. Boyce, R. C. DiPrima (2001) *Elementary Differential Equations and boundary Value Problems*. John Wiler & Sons, E.E.U.U.
- [8] M. Braun (1989) *Differential Equations and Their Applications*. Springer - Verlag, E.E.U.U.
- [9] E. A. Coddington (1983) *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover, E.E.U.U.
- [10] G. Arfken (1985) *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, E.E.U.U.
- [11] K. R. Lang (1992) *Astrophysical Data: Planets and Stars*. Springer - Verlag, E.E.U.U.
- [12] R. Courant (1963) *Differential and Integral Calculus*. Blackie & Son Limited, Inglaterra.
- [13] H. Cárdenas, E. Lluís, F. Raggi, F. Tomás (2002) *Álgebra Superior*, Trillas, México
- [14] R. Burden, D. Faires (1985) *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

- [15] P. Goldreich, S. Tremaine (1982) *The Dynamics of Planetary Rings*. Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1982
- [16] H. Goldstein (1964) *Classical Mechanics*. Addison - Wesley, E.E.U.U.
- [17] L. Lovett, J. Horvath, J. Cuzzi, K. S. Robinson (2006) *Saturn: a New View*. Abrams, E.E. U.U.