

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO EN EL INTERIOR DE  
ESFERAS CONCÉNTRICAS CON ROTACIÓN Y CAMBIO DE FASE**





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres Rosa Elena y Víctor Francisco

A mis abuelas Soledad y Magdalena  
IN MEMORIAN

# Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres, por su apoyo incondicional y su amor, que han sido la base de mi vida y mi motivación para seguir adelante.

Agradezco también a mis amigos por su compañía, sus consejos y su apoyo en los momentos difíciles. Su presencia me ha dado fuerza y me ha enseñado a valorar cada instante de la vida.

Quiero expresar mi sincera gratitud a mi profesor/a por su dedicación, su paciencia y su conocimiento. Sus enseñanzas me han permitido crecer y aprender de manera constante.

Finalmente, quiero agradecer a todos aquellos que de alguna manera han contribuido a mi desarrollo personal y profesional. Su ayuda y apoyo me han permitido alcanzar mis metas y superar mis desafíos.

Con mucho cariño y agradecimiento,  
[Nombre]

Este documento es una obra de arte generada por IA, diseñada para parecerse a un borrador de agradecimientos. El contenido es ficticio y no debe ser utilizado como un modelo real.



# Índice general

Nomenclatura XI

**1. Introducción 1**

1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Metodología	3
1.4. Organización del curso	4
1.5. Bibliografía	5

**2. Modelo Físico 11**

2.1. Descripción del sistema	11
2.2. Modelado físico	12

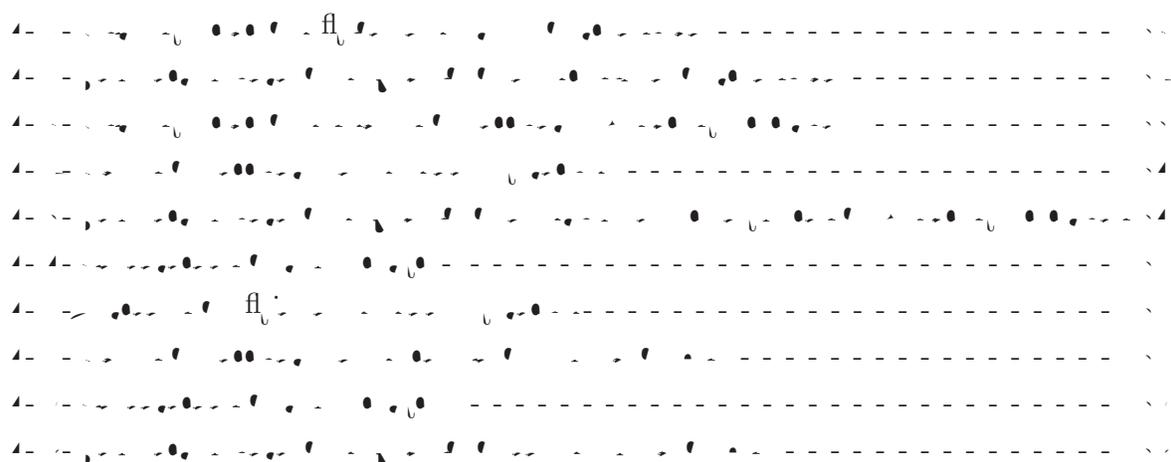
**3. Modelo Matemático 15**

3.1. Ecuaciones de movimiento	15
3.2. Solución de las ecuaciones de movimiento	16
3.3. Energía y potencia	17
3.4. Respuesta en frecuencia	18
3.5. Análisis de estabilidad	19
3.6. Análisis de sensibilidad	20
3.7. Análisis de robustez	21
3.8. Análisis de control	22
3.9. Análisis de diseño	23
3.10. Análisis de optimización	24

4. Algoritmo numérico	27
5. Resultados	35
6. Conclusiones y trabajo a futuro	51
A. Adimensionalización de las ecuaciones	55
B. Simplificación de los términos de rotación	63
Bibliografía	66

# Índice de figuras

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----



# Nomenclatura

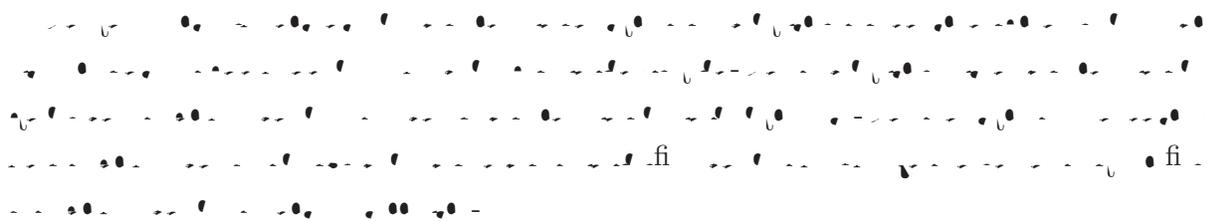
$Re$	
$Ri$	
$T$	$K$
$\Delta T$	$K$
$T_0$	$K$
$t$	$s$
$v$	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$V$	$[m^3]$
$\vec{v}$	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$\vec{F}$	$N$
$F_n$	$n$
$m$	$kg$
$P$	$Pa$
$\vec{r}$	$m$
$\vec{g}$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$Q$	
$W$	
$E$	
$k, K$	$\left[\frac{W}{mK}\right]$
$H$	
$h$	
$\Phi$	
$C_p$	$\frac{J}{kg \cdot K}$
$U$	$\frac{W}{m^2 \cdot K}$
$L$	$m$

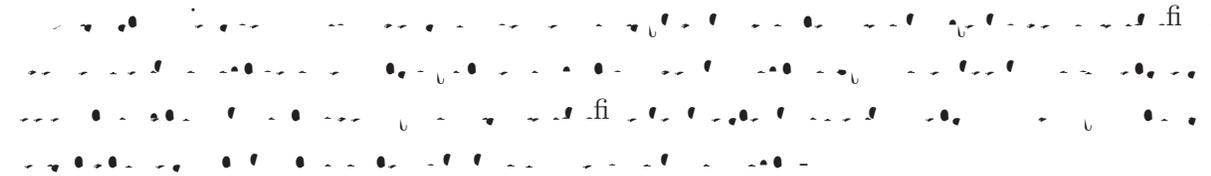
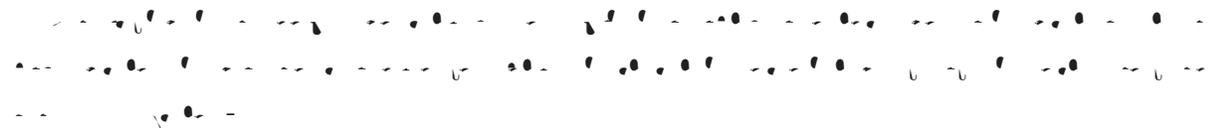
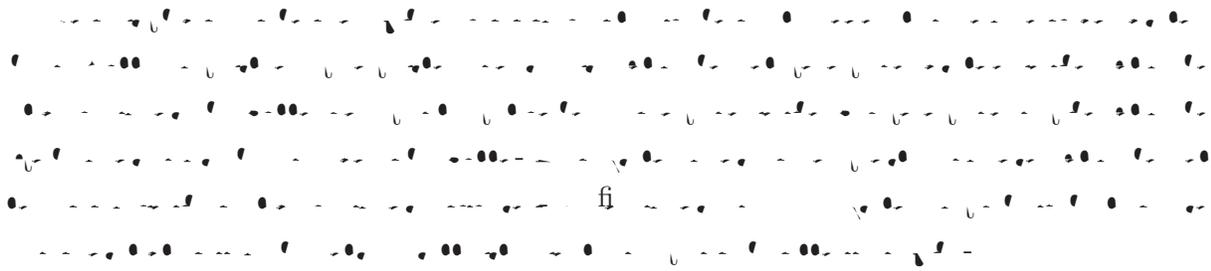
$\rho$		$\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$
$\nu$		$\left[ \frac{m^2}{s} \right]$
$\vec{\Omega}$		$\left[ \frac{rad}{s} \right]$
$\mu$		$\left[ \frac{kg}{ms} \right]$
$\rho_0$		$\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$
$\delta\rho$		
$\beta$		fi
$\omega$		$\left[ \frac{rad}{s} \right]$
$\tau$		
$\epsilon$		
$\Phi$		
$\alpha$		
$\frac{D}{Dt}$		
$\frac{d}{dt}$		
$\nabla$		

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

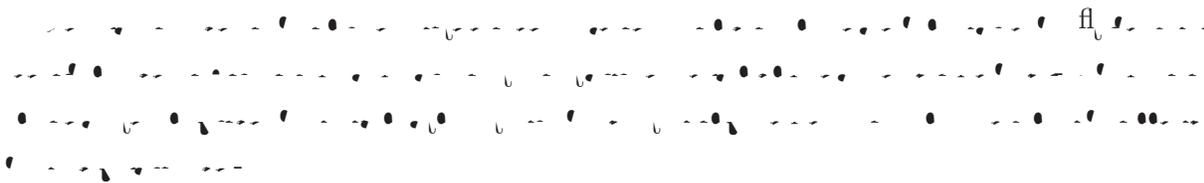




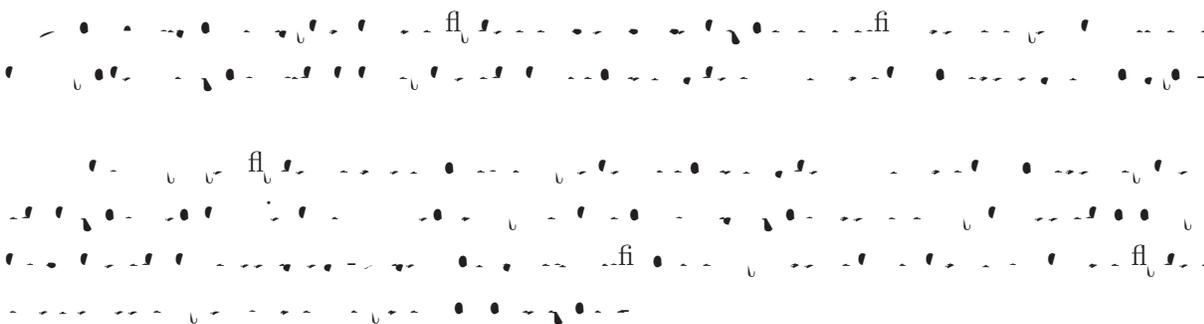
## 1.2. Objetivo

- 
- 

## 1.3. Antecedentes



### 1.3.1. Flujo incompresible



### 1.3.2. Convección Rayleigh - Bénard



$\text{fl}_v$

### 1.3.3. Patrones de flujo en esferas



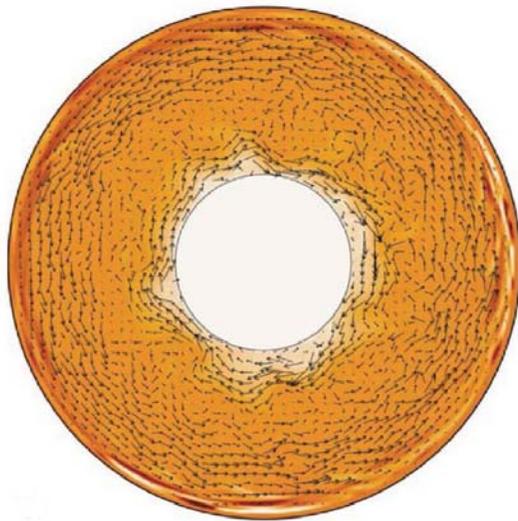
$fi$   
 $Ra$ ,  $Ra_c$   $E_k$   $\times$   $-4$   
 $fi$

$fi$

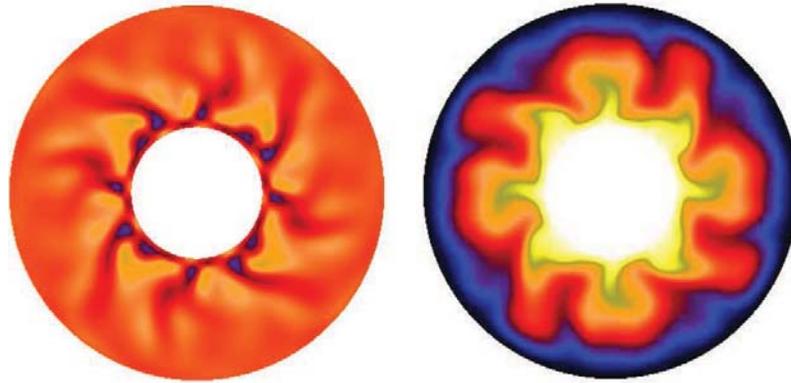
*geodínamo*



-----  
-----  
-----



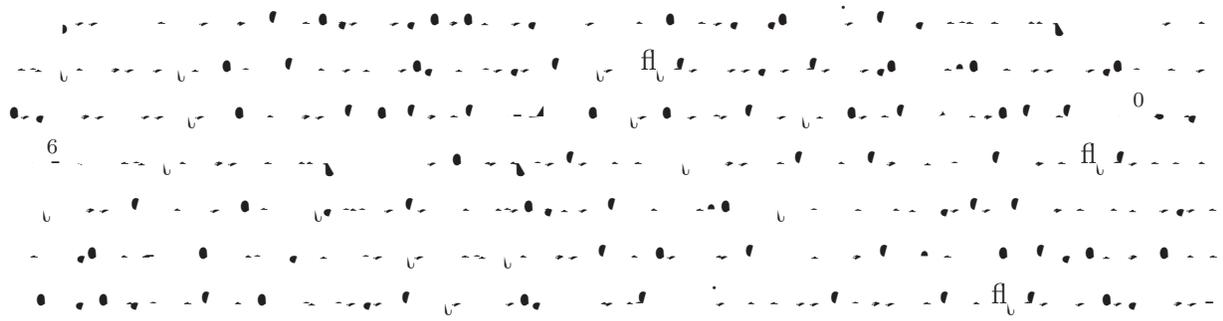
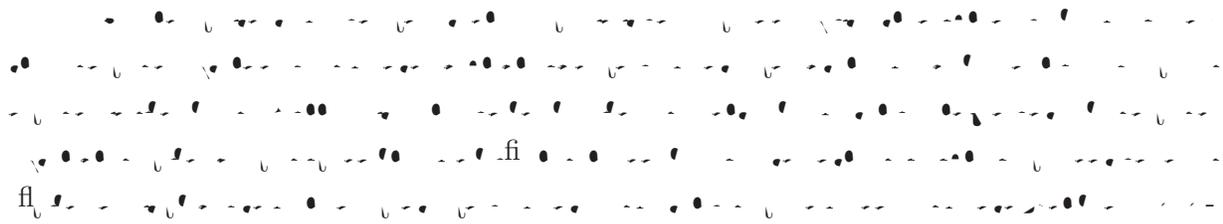
-----



fl

fl

*GEODYNAMO*  
*código Pencil*  
fl *geodínamo*





## Capítulo 2

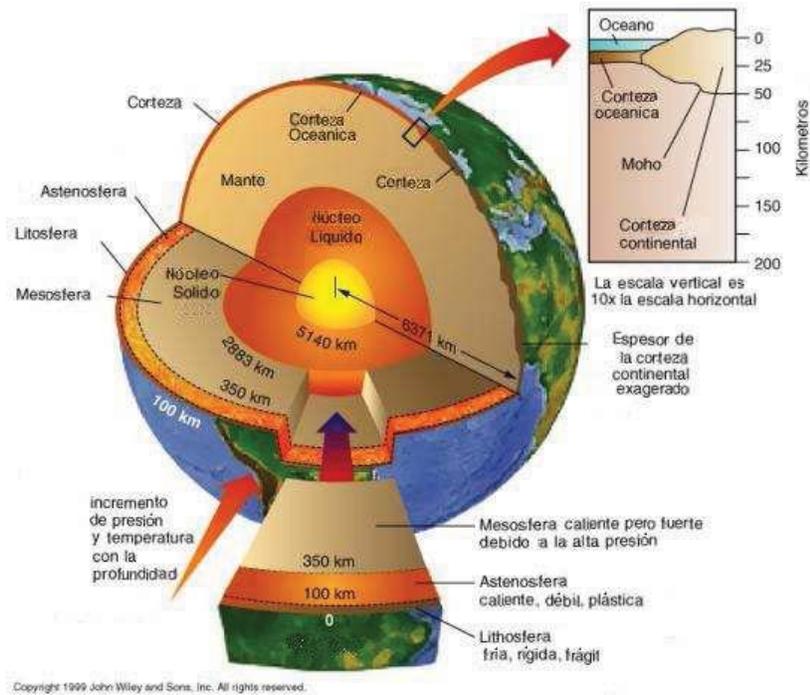
# Modelo Físico

El modelo físico es un modelo matemático que describe el comportamiento de un sistema físico. Este modelo se basa en las leyes de la física y se utiliza para predecir el comportamiento del sistema en diferentes condiciones. El modelo físico es un modelo matemático que describe el comportamiento de un sistema físico. Este modelo se basa en las leyes de la física y se utiliza para predecir el comportamiento del sistema en diferentes condiciones.

### 2.1. Física terrestre

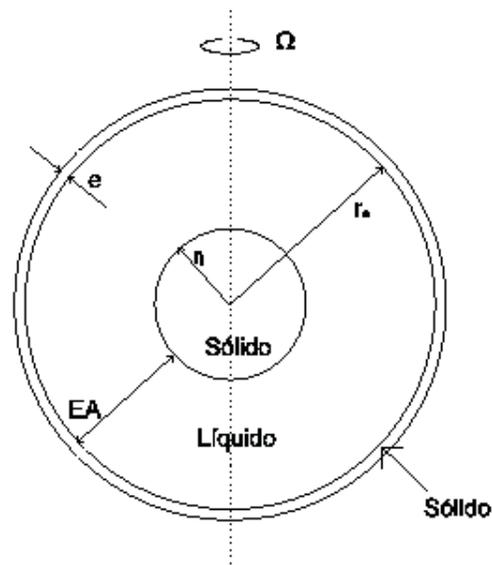
La física terrestre es el estudio de los fenómenos físicos que ocurren en la Tierra. Este campo de estudio se divide en varias subáreas, como la geofísica, la meteorología y la oceanografía. La física terrestre es el estudio de los fenómenos físicos que ocurren en la Tierra. Este campo de estudio se divide en varias subáreas, como la geofísica, la meteorología y la oceanografía.

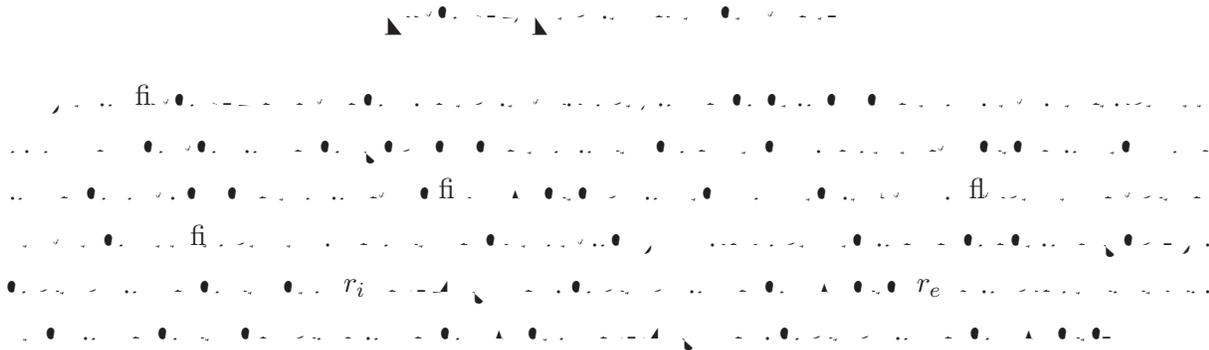
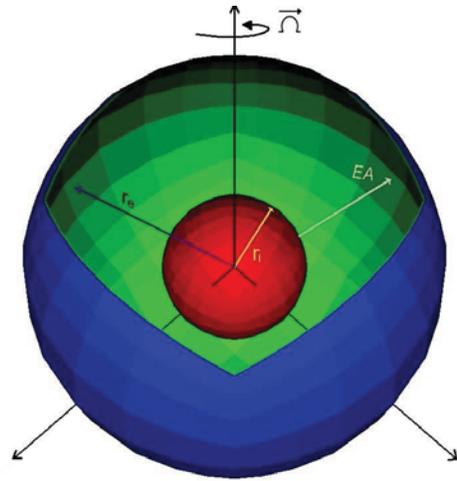
fi



## 2.2. Modelo propuesto

<sup>1</sup>Tomada de <http://www.dmae.upm.es/> Traducción de Ares Cabello.





fl fl

$$Ta < \times \cdot^5 \quad 0 <$$

$$Ta < \times \cdot^6 \quad \times \cdot^5 <$$

$$6 < Ta < \times \cdot^6 \quad \times$$

$$Ta \quad \times \cdot^6$$

## Capítulo 3

# Modelo Matemático

El modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal de las variables del sistema. En este capítulo se abordará el estudio de la ecuación de continuidad, que es fundamental para comprender el comportamiento de los fluidos en movimiento.

La ecuación de continuidad establece que el flujo de masa a través de una sección transversal de un tubo de flujo es constante en el tiempo. Esto se puede expresar matemáticamente como:

### 3.1. Ecuación de continuidad

Consideremos un tubo de flujo con una sección transversal variable. Si  $\rho$  es la densidad del fluido,  $A$  es el área de la sección transversal y  $v$  es la velocidad del fluido, entonces la ecuación de continuidad se puede escribir como:

$$\frac{DM}{Dt} = 0$$

.....

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{VC} \rho dV \quad ,$$

.....  $\rho$  .....  $V$  .....

.....

$$\int \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \right] dV \quad .$$

.....

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

.....  $\nabla \cdot \vec{v}$  .....

### 3.2. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

.....  $\vec{v}$  .....

$$\vec{F} = \frac{d m \cdot \vec{v}}{dt},$$

.....  $m$  .....  $\vec{v}$  .....

$$F_{presion} + F_{Coriolis} + F_{centrifuga} + F_{viscosa} + F_{fuente} = \frac{D\vec{P}}{Dt},$$

$\vec{P}$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P - \rho\vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \rho\vec{g},$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P - \rho\vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \rho\vec{g},$$

fi

$$\rho = \rho_0 - \beta(T - T_0),$$

$\rho_0$

$\rho_0 \delta\rho$

$$\frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} = \vec{g} + \frac{\delta\rho}{\rho_0} \vec{g},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} \rho_0 \vec{g} = \left[ \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right] \rho_0 \vec{g} .$$

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) ,$$

$$\rho - \rho_0 = \delta \rho ,$$

$$\delta \rho = -\rho_0 \beta (T - T_0) .$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} \rho_0 \vec{g} = \left[ -\frac{\rho_0 \beta (T - T_0)}{\rho_0} \right] \rho_0 \vec{g} ,$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} \rho_0 \vec{g} = \vec{g} - \beta (T - T_0) \vec{g} ,$$

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P - \rho_0 \vec{g} + \rho_0 \beta (T - T_0) \vec{g} - \rho_0 \vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho_0 \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \mu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} .$$

$$P_0 \quad P^*$$

$$-\vec{\nabla} P_0 - \rho_0 \vec{g} .$$

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P^* - \rho_0 \beta T_0 - T \vec{g} - \rho_0 \vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho_0 \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \mu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}.$$

$$\vec{F} = -\rho_0 \beta T - T g \vec{r},$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

### 3.3. Ecuación de la energía

$$Q = W \frac{DE}{Dt}$$

$$Q = W \frac{DE}{Dt}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} E - \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T - \vec{\nabla} \cdot P \vec{v} - \rho \vec{v} \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \cdot \tau = Q,$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T - \vec{\nabla} \cdot P \vec{v} - \rho \vec{v} \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \cdot \tau = Q.$$

$$H = E - \frac{P}{\rho} + \varepsilon - \vec{v} \cdot \vec{v} - \frac{P}{\rho}, h = \varepsilon - \frac{P}{\rho}$$

$$E = h - \frac{P}{\rho} - \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \cdot \tau - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot \tau = \Phi,$$

$$\Phi = \tau_{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$$

.....  $E = h \nu$  .....

$$\rho \frac{D}{Dt} h = \frac{P}{\rho} - \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T - \vec{\nabla} \cdot P \vec{v} - \rho \vec{v} \cdot \vec{g} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot \tau + \Phi - Q.$$

.....

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = \vec{v} \cdot \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T - \vec{\nabla} \cdot P \vec{v} - \rho \vec{v} \cdot \vec{g} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot \tau + \Phi - Q,$$

.....

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T - \vec{\nabla} \cdot P \vec{v} + \Phi - Q,$$

.....

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T - P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \Phi - Q.$$

.....  $h = \varepsilon = \frac{P}{\rho}$  .....

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T + \Phi - P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - Q.$$

.....  $\varepsilon \approx C_p T$  .....  $C_p$  .....  $\rho$  cte .....  $\Phi$ ,

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T - \tau_{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - Q.$$

.....  $k$  .....

$$\frac{DT_l}{Dt} = \alpha_l \nabla^2 T_l$$

.....  $\alpha_l = \frac{k}{\rho C_p}$  .....

### 3.4. Ecuación de difusión de calor en la fase sólida

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \nabla^2 T_s,$$

$\alpha_s$

### 3.5. Balance de energía en la interfase

$$\vec{q}_l|_{\vec{x}=\vec{\eta}} - \vec{q}_s|_{\vec{x}=\vec{\eta}} = \rho Q_L \frac{dX_{\vec{\eta}}}{dt}.$$

$$-k_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial \vec{x}} \right)_{\vec{\eta}|_{\vec{x}=\vec{X}}} = k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial \vec{x}} \right)_{\vec{\eta}|_{\vec{x}=\vec{X}}} + \rho Q_L \frac{dS_{\vec{\eta}}}{dt},$$

$\vec{\eta}$

$Q_L$

$S_{\vec{\eta}}$

fi

### 3.6. Parámetros adimensionales

fl

fl

fl

fl

#### 3.6.1. Número de Reynolds

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

$U$   $L$   $\nu$

fl

fl

fl

fl

#### 3.6.2. Número de Rayleigh

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu \alpha}$$

$\Delta T$

fl

fl

fl

fl

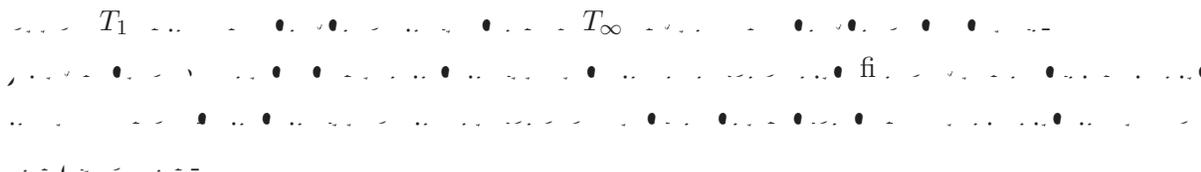
### 3.6.3. Número de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$



### 3.6.4. Número de Stefan

$$St = \frac{C_p (T_1 - T_\infty)}{Q_L}$$



### 3.6.5. Número de Taylor

$$Ta = \frac{\Omega^2 R^4}{\nu^2}$$



### 3.6.6. Número de Nusselt

$$Nu = \frac{hL}{k}$$





## Capítulo 4

# Algoritmo numérico

Los métodos numéricos son herramientas matemáticas utilizadas para resolver, principalmente, ecuaciones diferenciales cuya solución analítica es muy complicada o simplemente inexistente. Los métodos numéricos son traducidos en algoritmos computacionales capaces de resolver sistemas complejos por medio del cómputo numérico.

En este capítulo se describen brevemente los métodos utilizados en la resolución del sistema de ecuaciones planteado en el capítulo 3.

### 4.1. Método de los elementos espectrales

El método numérico utilizado para resolver las ecuaciones planteadas en el modelo matemático es el de los elementos espectrales. Este método combina la generalidad del método de los elementos finitos con la exactitud de las técnicas espectrales. En la discretización de los elementos espectrales, el dominio computacional es dividido en una serie de elementos, y la velocidad en cada elemento es representada por un interpolante Lagrangiano de alto orden a través de puntos de colocación de Chebyshev. [Patera, 1983]

Los métodos espectrales consideran la expansión de la solución de la ecuación diferencial en una expansión ortogonal de alto orden, donde los coeficientes de ésta están determinados por una técnica de proyección de residuos pesados. Las aproximaciones se vuelven de orden *infinito* si las funciones de expansión son seleccionadas apropiadamente.

El método de elemento finito es, en el sentido más general, una técnica de residuos pesados

aplicada a las series de expansión, cada una con dominio sobre una pequeña region del espacio, (elemento). Cuando la técnica de los residuos pesados depende directamente del principio de asociación variacional, la continuidad de las condiciones de frontera natural está implícitamente satisfecha en las fronteras del elemento como parte del proceso de convergencia.

Al ser un método híbrido recopila las ventajas de los dos que lo componen, por lo que se puede tener una expansión polinomial de la solución en cada uno de los elementos de la malla asegurando la continuidad de la solución en las fronteras de cada elemento.

Una de las ventajas significativas de este método es la posibilidad de reducir considerablemente el número de elementos que componen la malla, debido a que la precisión del método se puede modificar también incrementando el grado de los polinomios de interpolación, esto se traduce directamente en un menor tiempo de cómputo además de permitir la implementación directa de algoritmos como el de la esfera cúbica (cubed sphere) y su aplicación en geometrias complicadas.

#### 4.1.1. Funciones de expansión

Al resolver ecuaciones diferenciales con métodos numéricos, no es posible hallar la solución exacta de la ecuación a resolver

$$L(u) = 0, \quad (4.1)$$

por lo que se debe hacer una aproximación polinomial de la función solución que se esta buscando

$$u^\delta = u_0 + \sum_{i=1}^{NTP} u_i(t)\Phi_i(x), \quad (4.2)$$

y al hacer dicha aproximación y sustituirla en la ecuación se genera un residual

$$L(u^\delta) = R(u^\delta), \quad (4.3)$$

que es equivalente al error en la solución. Por lo tanto el objetivo del método numérico es hacer que ese residual sea lo mas cercano a cero, es decir aproximar lo mas posible la solución numérica a la solución real.

$$L(u^\delta) = R(u^\delta) \quad (4.4)$$

El método de los residuales pesados, define el producto interno entre funciones

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\Omega = 0, \quad (4.5)$$

con la finalidad de encontrar una función cuyo producto interno con el residual sea igual a cero (función de peso), es decir, que el residual, pesado por la función de peso sea igual a cero.

Entre mayor sea el número de puntos con los que se aproxima la solución, más cercana está a la solución real por lo que es válido decir que la solución aproximada es muy cercana a la solución real conforme  $NTP \rightarrow \infty$ .

Existen diversos métodos para definir las funciones de peso. En el método de colocación se definen las funciones de peso como funciones  $\delta$  de Dirac (las funciones  $\delta$  Dirac tienen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \delta(x - a) &= 0 & x \neq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx &= f(a), \end{aligned} \tag{4.6}$$

con lo que se garantiza que el residual sea cero en cada punto, es decir, que la función es exacta en cada punto de colocación.

Entonces el residual pesado se escribe como:

$$(v(x)_j, R(u^\delta)) = \int_{\Omega} (\delta(x - x_j), R(u^\delta)) dx = R(u^\delta(x_j, t)) = 0.$$

En el método de volúmenes finitos el dominio  $\Omega$  se divide en subdominios y las funciones de peso se definen como 1 dentro de su subdominio y 0 fuera de este. En este trabajo se utiliza el método de Galerkin (secc. 4.1.3).

#### 4.1.2. Definición de los puntos Gauss - Lobatto - Legendre en el dominio físico

Para este trabajo se definieron 12 (doce) sectores de ánulo esférico, los primeros 6 (seis) que corresponden al dominio del material interno y los 6 (seis) restantes del dominio del material externo.

Cada uno de estos sectores se creó a partir de 7 (siete) cubos, que se mapearon, con las relaciones del algoritmo de la esfera cúbica (sección 4.2) hacia siete esferas concéntricas de las cuales se obtuvieron 343 puntos dentro del dominio esférico que fueron transportados a un dominio

estandar con un sistema de coordenadas local  $(r, s, t)$  definido de -1 a 1 en cada uno de sus ejes.

Una vez en el dominio estandar se creó una expansión polinomial isoparamétrica para la posición de cada punto definida como:

$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 + \dots = \sum_{i=1}^{343} \phi_i x_i$$

donde  $x$  es la posición del punto donde se está calculando,  $\phi_i$  es la función de expansión en cada punto  $i$ , y  $x_i$  es la posición de cada uno de los 343 puntos definidos en el dominio estandar <sup>1</sup>. La definición de las funciones de expansión que se utilizan se trata en la sección 4.1.3.

Lo anterior nos permite conocer la posición de cualquier punto dentro del dominio estandar siempre y cuando se conozca la posición de los puntos base definidos, y como esos puntos están definidos en el dominio físico, se conoce la posición de cada uno. Como se trata de una expansión isoparamétrica, se puede entonces conocer cualquier propiedad en cualquier punto del dominio.

Para acoplar esto al método de los elementos espectrales se buscan los puntos Gauss - Lobato - Legendre (GLL) (sección 4.1.4) dentro del dominio estandar, y se calculan con la expansión y así se pueden mapear de regreso al dominio físico de la esfera. En este caso se definen  $11^3 = 1331$  puntos GLL para cada uno de los 12 sectores que componen las 2 esferas.

### 4.1.3. Método de Galerkin (Bubnov-Galerkin)

El método de los residuos pesados no define el tipo de función de expansión por lo que existen diversas maneras de elegir estas funciones.

Una variación del método de Galerkin es el método tau, en el que  $v(x)_j = \phi_j(x)$ , además las funciones de expansión no satisfacen las condiciones de frontera, éstas son forzadas por una serie de ecuaciones adicionales.

Otra variación del método es la aproximación de Petrov - Galerkin, en la que las funciones de peso  $v(x)_j$  son diferentes de las funciones de expansión  $\phi_j(x)$ . Este es utilizado en los métodos libres de mallas donde las funciones de expansión (MLS), están definidas por los puntos vecinos

---

<sup>1</sup>En la figura 4.1 se muestra un ejemplo con  $3^3$  puntos, en el caso de este trabajo se definen  $7^3$  puntos para cada sector.

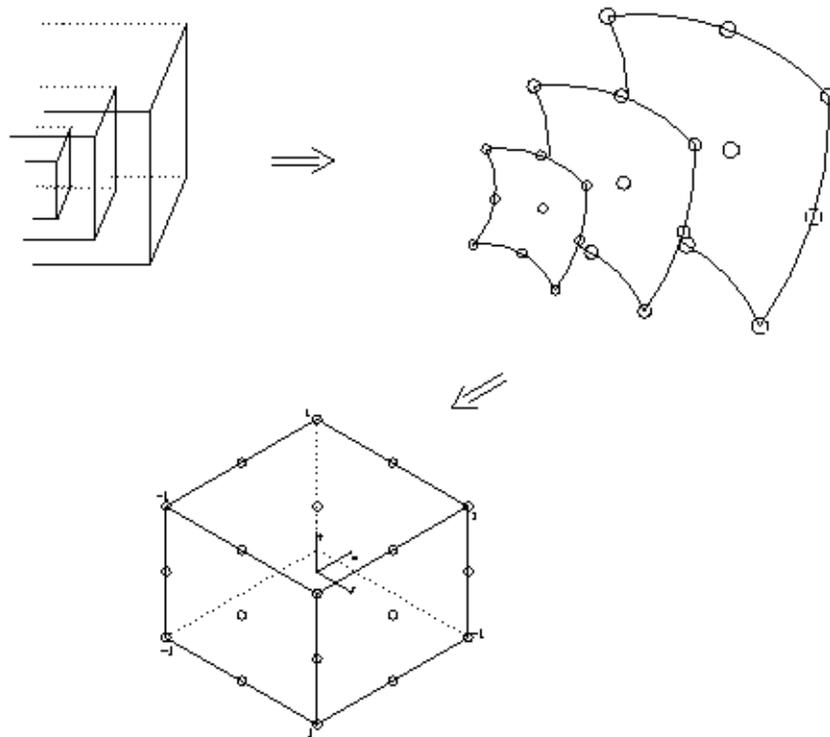


Figura 4.1: Ejemplo de la definición de los puntos dentro del dominio estandar

mientras que las funciones de peso son *splines* de cuarto orden.

En los elementos espectrales se utiliza el método de Bubnov - Galerkin en el que las funciones de peso son exactamente iguales a las funciones de expansión  $\phi$ , con lo que se tiene:

$$(v(x)_j, R(u^\delta)) = (\phi_j(x), R(u^\delta)) = \int_{\Omega} (\phi_j(x), R(u^\delta)) dx = 0$$

estas funciones están definidas a partir de polinomios de Lagrange, lo cual garantiza la ortogonalidad entre ellas.

Adicionalmente se tiene que cada función de expansión satisface las condiciones de frontera

$$B\phi_j(x) = 0.$$

#### 4.1.4. Cuadratura de Gauss - Lobato - Legendre

Por lo descrito en la sección 4.1.1, se tienen funciones que es necesario integrar sobre cada dominio elemental, y se debe hacer de forma numérica a través de una suma finita de la forma:

$$\int_{-1}^1 u(\xi) d\xi \approx \sum_{i=0}^{Q-1} w_i u(\xi_i)$$

donde  $w_i$  son los pesos y  $\xi_i$  representan la abscisa de  $Q$  diferentes puntos en el intervalo  $-1 \leq \xi_i \leq 1$ .

Dentro de las múltiples formas de integración numérica se encuentra la *Cuadratura Gaussiana*, la cual define a las funciones  $u(\xi)$  como polinomios de Lagrange y a los pesos  $w_i$  como integrales de polinomios de Lagrange. En este caso en particular, se utiliza la cuadratura Gauss - Lobatto - Legendre. Esta cuadratura emplea las abscisas de los puntos que incluyan ambos extremos del intervalo, es decir  $\xi = \pm 1$ . Entonces los pesos y las abscisas se definen de la siguiente forma:

$$\xi_i = \begin{cases} -1 & i = 0 \\ \xi_{i-1, Q-2}^{1,1} & i = 1, 2, 3, 4, \dots, Q-2 \\ 1 & i = Q-1 \end{cases}$$

$$w_i^{0,0} = \frac{2}{Q(Q-1)[L_{Q-1}(\xi_i)]^2} \quad i = 0, 1, 2, \dots, Q-1$$

donde  $L_Q(\xi)$  es el polinomio de Legendre  $L_Q(\xi) = P_Q^{0,0}(\xi)$ .

## 4.2. Algoritmo de la esfera cúbica (cubed-sphere)

Al trabajar con dominios en geometrías cúbicas surgen muchos problemas con el uso de coordenadas esféricas ya que se tiene la comunmente llamada *singularidad de los polos* donde la coordenada de la longitud puede tomar múltiples valores, o se pueden presentar inconvenientes con la transformación de las ecuaciones a estas coordenadas. Una solución práctica a este problema es el transformar el dominio esférico en un dominio cúbico en el cual se puedan resolver sin mayor inconveniente las ecuaciones, eliminando el problema de las singularidades en los polos. [Ronchi et al., 1996]

El algoritmo de la esfera cúbica (cubed - sphere) es un método para mapear los puntos de la superficie de una esfera sobre las caras de un cubo inscrito en la misma esfera (ver Fig. 4.2<sup>2</sup>). Para lograr esto se definen una serie de transformaciones para cada uno de los sectores de la esfera el cual se trasladará a una de las caras del cubo.

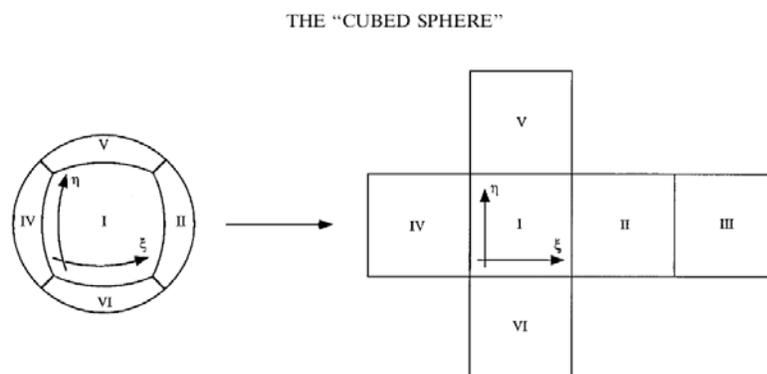


Figura 4.2: La esfera se divide en seis secciones las cuales corresponden a cada una de las caras del cubo inscrito

Para transportar los puntos desde el dominio esférico hacia el cubo es necesario definir una serie de variables auxiliares que permiten definir las expresiones de las leyes de transformación en cada una de las secciones. Siguiendo la notación utilizada en la figura 4.2 se pueden definir las variables  $\xi$  y  $\eta$  en cada región, con un rango  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  para construir las rejillas mostradas en la figura 4.3. Con estas nuevas variables se definen las funciones que permitirán definir las leyes de transformación.

<sup>2</sup>Tomada de Ronchi et. al. 1996

$$X \equiv \tan(\xi)$$

$$Y \equiv \tan(\eta)$$

Se pueden entonces escribir las leyes de transformación para la seis regiones.

<p>Region I</p> $X \equiv \frac{y}{x} = \tan \phi$ $Y \equiv \frac{z}{x} = \frac{1}{\tan \theta \cos \phi}$ $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$	<p>Region II</p> $X \equiv -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\tan \phi}$ $Y \equiv \frac{z}{y} = \frac{1}{\tan \theta \sin \phi}$ $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$	<p>Region III</p> $X \equiv -\frac{x}{y} = \tan \phi$ $Y \equiv -\frac{z}{y} = \frac{1}{\tan \theta \sin \phi}$ $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$
<p>Region IV</p> $X \equiv -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\tan \phi}$ $Y \equiv -\frac{z}{y} = -\frac{1}{\tan \theta \sin \phi}$ $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$	<p>Region V</p> $X \equiv \frac{y}{z} = \tan \theta \sin \phi$ $Y \equiv -\frac{x}{z} = -\tan \theta \cos \phi$ $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$	<p>Region VI</p> $X \equiv -\frac{y}{z} = -\tan \theta \sin \phi$ $Y \equiv -\frac{x}{z} = \tan \theta \cos \phi$ $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

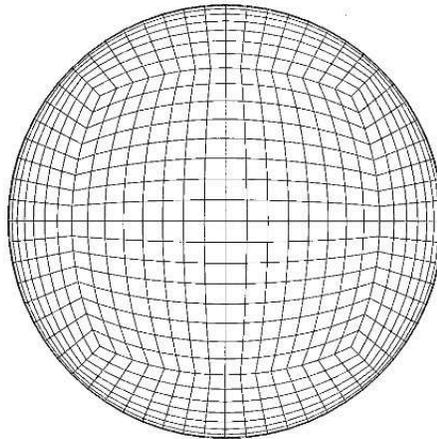


Figura 4.3: Vista de la superficie esférica después del proceso de mallado en el dominio cúbico

# Capítulo 5

## Resultados

Los casos que se estudian en este trabajo de tesis son: a) Proceso de conducción de calor en un fluido sin movimiento confinado entre esferas concéntricas, b) Movimiento de un fluido confinado entre esferas concéntricas con rotación. Número de Taylor subcrítico ( $Ta < 3 \times 10^5$ ), c) Movimiento de un fluido confinado entre esferas concéntricas con rotación en el rango de transición del número de Taylor, ( $3 \times 10^5 < Ta < 1 \times 10^6$ ), d) Movimiento de un fluido confinado entre esferas concéntricas en rotación con un número de Taylor supercrítico ( $1 \times 10^6 < Ta < 3,5 \times 10^6$ ), e) Movimiento de un fluido confinado entre esferas concéntricas en rotación con cambio de fase con un número de Taylor supercrítico ( $Ta = 3 \times 10^6$ ).

Los resultados obtenidos para el caso de conducción de calor se compararon con la solución analítica (ecuación 5.3. Ver en la sección A.5 la adimensionalización), mientras que los resultados que se obtuvieron para los casos con  $Ta > Ta_c$  se compararon cualitativamente con datos reportados en la literatura. Para los casos con Taylor en transición y  $Ta < Ta_c$  no fué posible compararlos debido a que no hay trabajos previos de experimentos o soluciones numéricas.

### 5.1. Difusión

El primer caso que se simula es el proceso puramente difusivo, en el cual sólo se toma en cuenta la parte térmica, despreciando la dinámica, para lo cual se fijan las temperaturas en las fronteras y se anulan las fuerzas de cuerpo teniendo como resultado únicamente el campo de temperaturas.

Para poder afirmar que la simulación numérica reproduce satisfactoriamente el fenómeno

físico, es necesario validar los resultados del programa de cómputo a partir de comparar la solución obtenida con resultados analíticos, simulaciones numéricas o datos experimentales.

Para el caso de conducción de calor se llevó a cabo la simulación numérica en estado transitorio en esferas concéntricas en donde la esfera interna tiene una temperatura uniforme mayor que la temperatura uniforme de la esfera externa. La ecuación que se resolvió para este caso fue la ecuación de la energía (ver ecuación A.24).

$$\begin{aligned}
T &= \frac{r_i T_i}{r} + \frac{(r_e T_e - r_i T_i)(r - r_i)}{r(r_e - r_i)} \\
&+ \frac{2}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_e T_e \cos(n\pi) - r_i T_i}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi(r - r_i)}{r_e - r_i} e^{\frac{-\kappa n^2 \pi^2 t}{(r_e - r_i)^2}} \\
&+ \frac{2}{r(r_e - r_i)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi(r - r_i)}{r_e - r_i} e^{\frac{-\kappa n^2 \pi^2 t}{(r_e - r_i)^2}} \int_{r_i}^{r_e} r' f(r') \operatorname{sen} \frac{n\pi(r - r_i)}{r_e - r_i} dr'. \quad (5.1)
\end{aligned}$$

Para el estado transitorio se compararon los resultados numéricos con la solución analítica, ecuación 5.1 [Carslaw and Jaeger, 1959] donde  $T$  es la temperatura,  $r_i$  es el radio interior del ánulo,  $r_e$  es el radio exterior del ánulo,  $T_i$  es la temperatura de la pared interior,  $T_e$  es la temperatura de la pared exterior y  $f(r)$  es la distribución de temperaturas inicial. Como en este caso en particular la temperatura inicial es cero, el cuarto término de la ecuación 5.1 es cero y la solución se reduce a la ecuación

$$\begin{aligned}
T &= \frac{r_i T_i}{r} + \frac{(r_e T_e - r_i T_i)(r - r_i)}{r(r_e - r_i)} \\
&+ \frac{2}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_e T_e \cos(n\pi) - r_i T_i}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi(r - r_i)}{r_e - r_i} e^{\frac{-\kappa n^2 \pi^2 t}{(r_e - r_i)^2}}. \quad (5.2)
\end{aligned}$$

Al tener una temperatura uniforme en la esfera interna y de mayor valor que la temperatura uniforme de la capa externa, la distribución de temperaturas es un arreglo de esferas concéntricas por lo que se considera un modelo de conducción de calor unidimensional a lo largo del radio y se puede comparar con la solución analítica de la ecuación de difusión de calor en una dirección

en estado estacionario (ecuación 5.3) [Bejan and Kraus, 2003].

$$\Theta^* = \frac{(r^* - 1)(\eta^2 - \eta)}{(1 - \eta)r^* + (r^* - 1)(\eta^2 - \eta)} \quad (5.3)$$

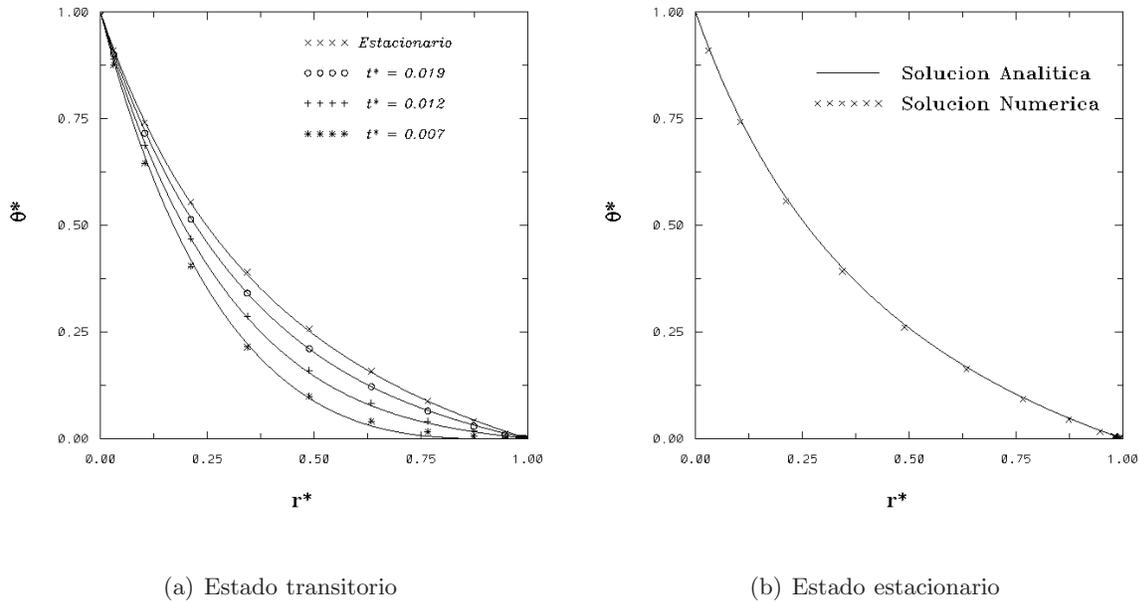


Figura 5.1: Solución analítica vs solución numérica

En la figura (5.1) se presenta la comparación entre las soluciones numérica (símbolos) y analítica para el estado transitorio (a) y el estado estacionario (b) adimensionales, donde  $\Theta^* = \frac{T - T_c}{T_i - T_c}$ ,  $r^* = \frac{r - r_i}{r_e - r_i}$  y  $t^* = \frac{\nu t}{d^2}$ .

Al observar las gráficas se puede notar que las temperaturas obtenidas por medio de la simulación numérica mantienen la tendencia de las curvas que representan la solución analítica de un proceso puramente difusivo, con base en esto se puede afirmar que la parte térmica de la solución numérica está dentro de los rangos que se pueden considerar aceptables para una solución de este tipo.

## 5.2. Rotación con número de Taylor subcrítico

El sistema es sometido a una rotación constante alrededor del eje vertical, comenzando por un número de Taylor bajo ( $Ta = 10$ ), para lo cual a la distribución de temperaturas obtenidas anteriormente se le agrega el término de fuerzas, dado por la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga (ecs. B.5 y B.6), que se producen cuando el sistema gira alrededor de un eje.

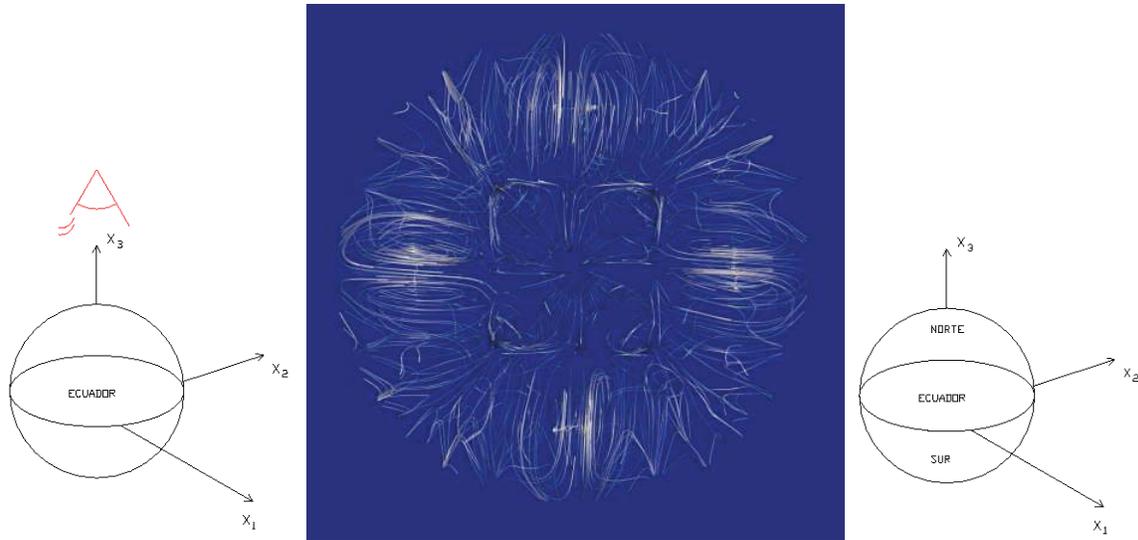


Figura 5.2: Vista superior de las líneas de corriente del flujo base (Taylor subcrítico)

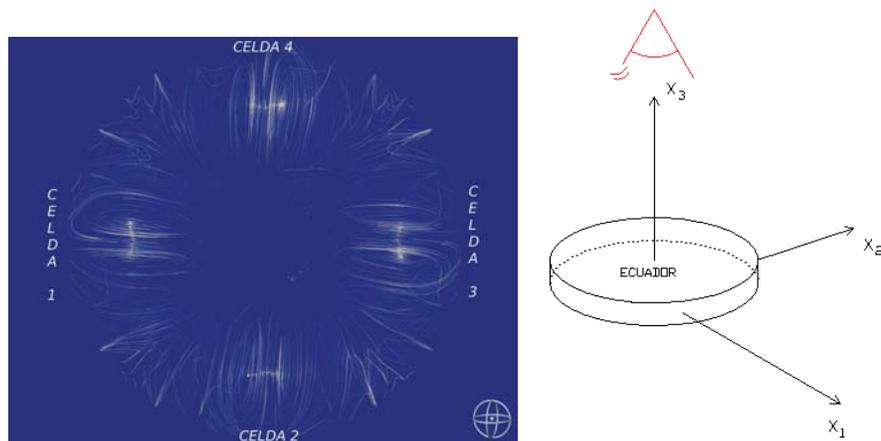


Figura 5.3: Posición de las celdas en el plano ecuatorial.

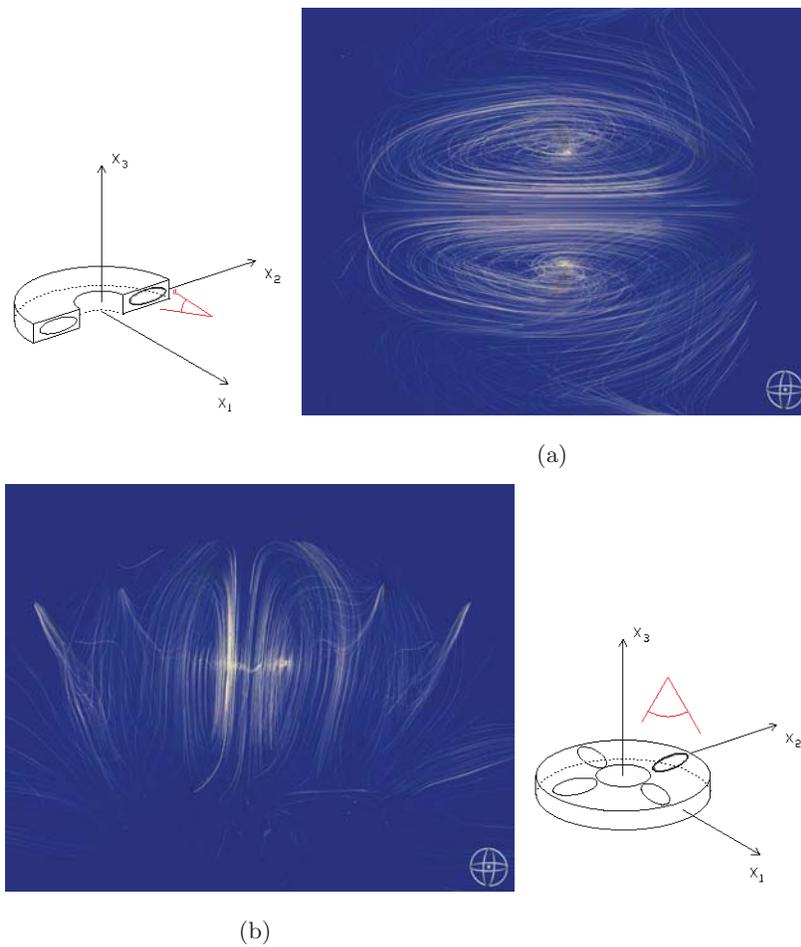


Figura 5.4: Forma de las celdas de flujo en un corte paralelo al plano a) meridional y b) ecuatorial.

A este régimen de giro se observa un flujo base (ver fig. 5.2) con simetría en el plano ecuatorial ( $x_1 - x_2$ ), en este flujo cerca del ecuador se forman 4 celdas en cada hemisferio (norte-sur) (ver fig. 5.3), como puede observarse el ángulo entre las celdas (1-2), (2-3) y (3-4) es de  $90^\circ$ .

En la figura 5.4a, puede observarse también que las celdas tienen una forma ovalada en la parte exterior y aplanada en el ecuador. En la figura 5.4b, que es una vista superior de las celdas en el ecuador se observa que tienen una forma similar a las que aparecen en el plano meridional.

Si se hace un acercamiento a las celdas convectivas del ecuador, en un corte meridional (la misma vista que en la figura 5.4a), se puede observar que el flujo va en dirección hacia el centro de las esferas en su parte más cercana al ecuador y retorna a la esfera exterior por la parte más lejana al ecuador (ver fig. 5.5).

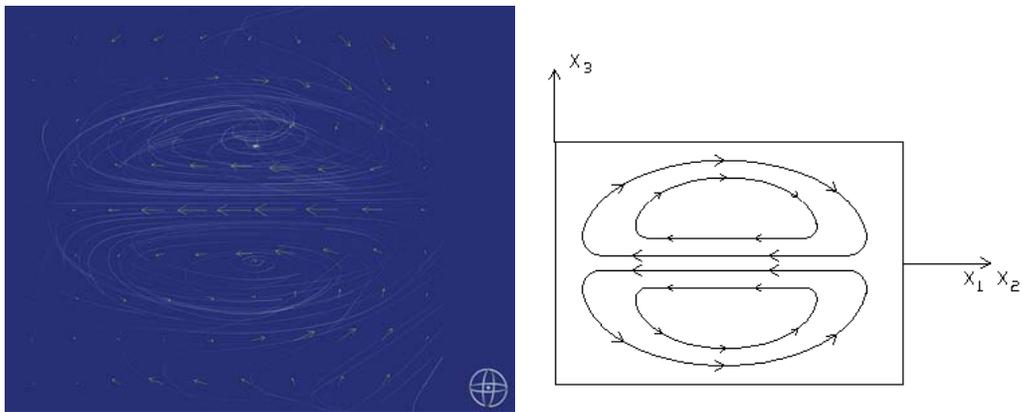


Figura 5.5: Dirección del flujo dentro de las celdas.

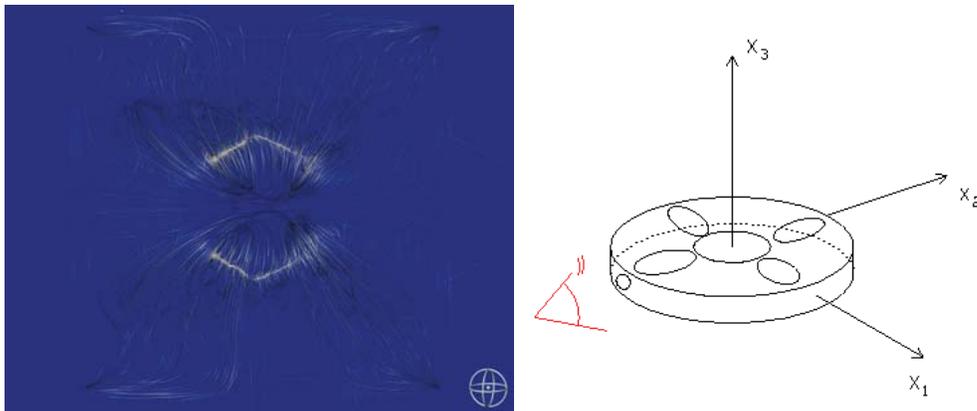


Figura 5.6: Vista frontal de las celdas.

En la figura 5.6 se tiene una vista desde el exterior de las celdas, dirigida hacia el centro de las esferas y se puede apreciar que éstas forman un ángulo respecto al plano ecuatorial, es decir no son celdas paralelas al ecuador.

Dentro del flujo base existen también un par de corrientes desde la esfera interna hacia los polos (ver fig. 5.7), este flujo al llegar a la esfera externa regresa hacia la esfera interna por el exterior de las celdas descritas anteriormente.

Si se observa a estas plumas en una vista desde los polos (fig. 5.8), se puede ver que el fluido sale muy cercano al eje de rotación, al llegar al polo regresa por la pared de la esfera externa hacia las celdas y posteriormente hacia el eje de rotación por la esfera interior. Desde esta vista el fluido forma corrientes que semejarían una geometría cuadrada, donde en cada uno de los lados de este cuadrado se encuentra una de las celdas de flujo del ecuador.

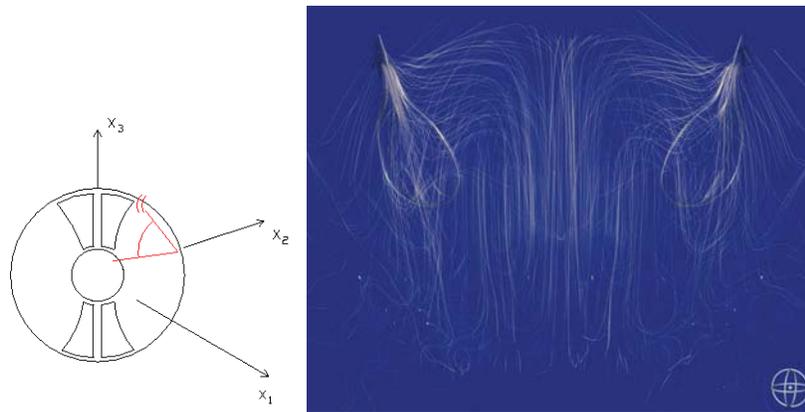


Figura 5.7: Vista frontal de la pluma de flujo hacia los polos

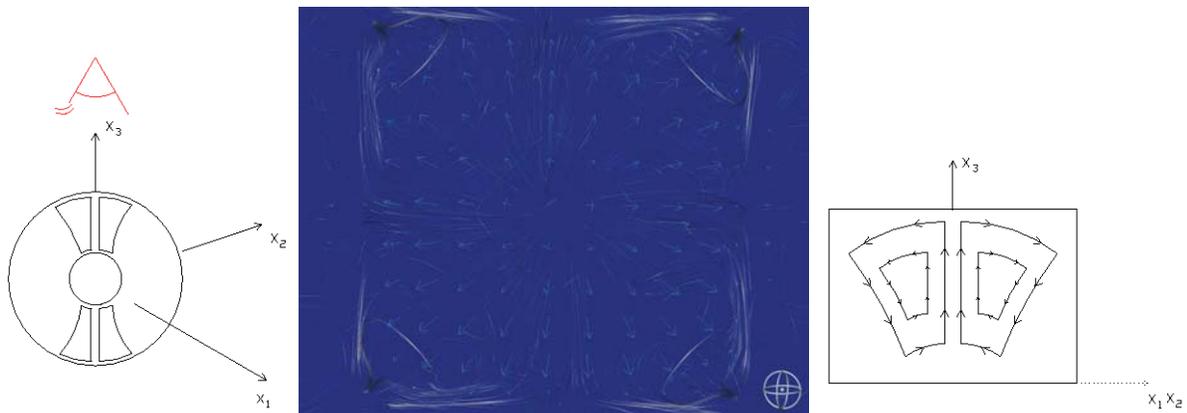


Figura 5.8: Vista superior de la pluma de flujo hacia los polos

Al incrementar la velocidad angular, el flujo base se conserva hasta un número de Taylor de  $10^5$ , a partir del cual comienza a modificarse éste patrón de flujo. La gráfica 5.9 muestra el comportamiento de la velocidad en un punto del campo de flujo, desde el inicio de las simulaciones hasta alcanzar el estado estacionario. Esta misma gráfica se reproduce cualitativamente para los diferentes números de Taylor subcríticos. No es posible hacer una comparación de estos resultados debido a que no existen trabajos previos, numéricos o experimentales.

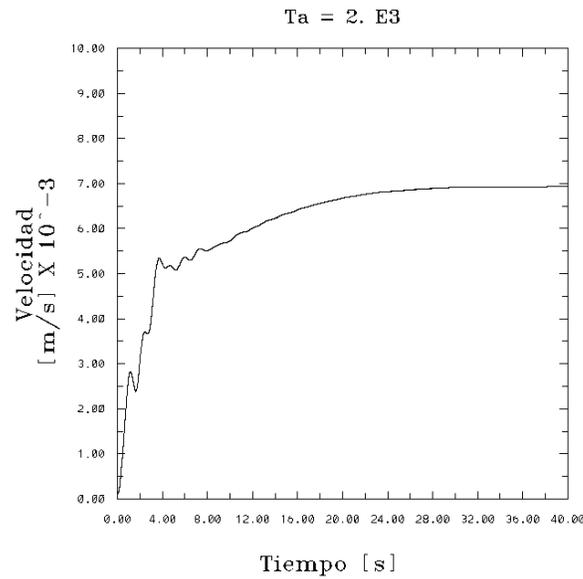


Figura 5.9: Comportamiento de la velocidad en el tiempo para números de Taylor subcríticos

### 5.3. Rotación en el rango de números de Taylor de transición ( $3,2 \times 10^5 < Ta < 2,6 \times 10^6$ )

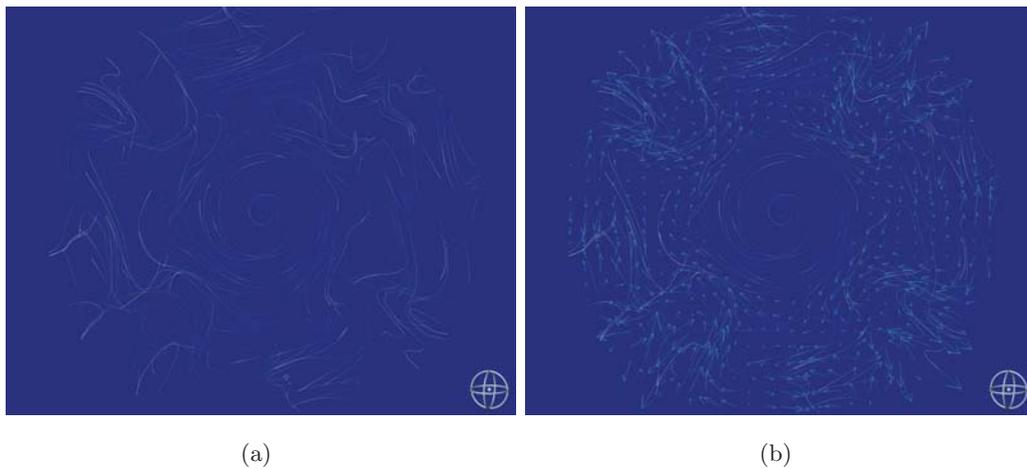


Figura 5.10: Vista superior del fluido en la etapa de transición

A partir de un número de Taylor de  $3,2 \times 10^5$  el fluido comienza a desestabilizarse y entra en un estado de transición en el que los patrones de flujo se modifican (ver fig. 5.10). Esta transición se mantiene hasta un número de Taylor de  $2,6 \times 10^6$ , a partir del cual el fluido cambia por completo de patrón de flujo y se acomoda de una manera distinta (ver sección 5.4) a la

### 5.3 Rotación en el rango de números de Taylor de transición ( $3,2 \times 10^5 < Ta < 2,6 \times 10^6$ )

observada tanto en el flujo base (figuras 5.2 - 5.8) como en el flujo de transición.

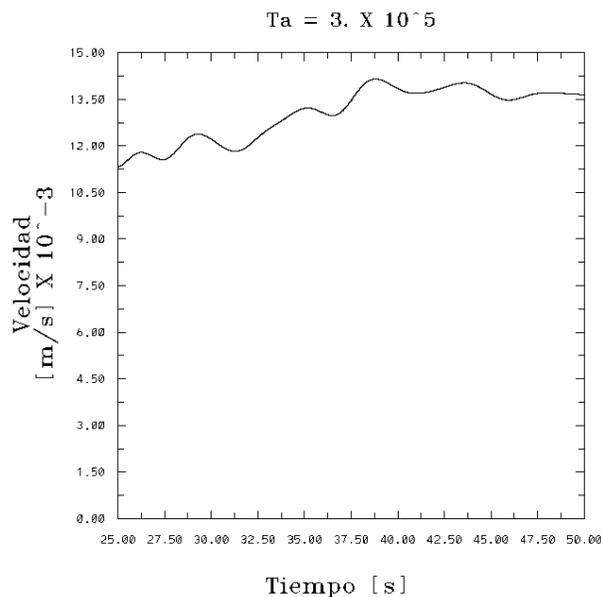


Figura 5.11: Comportamiento de la velocidad en el régimen de transición

En la gráfica 5.11 se presenta el comportamiento de la velocidad en uno de los puntos del fluido, y se puede observar la oscilación de la magnitud del vector velocidad en el tiempo.

Para las simulaciones en el estado de transición ( $3,2 \times 10^5 < Ta < 2,6 \times 10^6$ ), es necesario que el incremento de la velocidad angular sea gradual, es decir no se puede acceder directamente a este estado desde el estado sin movimiento, se debe comenzar la simulación con el patrón estable e incrementar paulatinamente la velocidad angular, incluso para números de Taylor mayores, es necesario disminuir el incremento de tiempo para la simulación.

## 5.4. Rotación con número de Taylor supercrítico

Una vez superado en número de Taylor de transición  $Ta > 2 \times 10^6$ , el fluido presenta un nuevo tipo de patrón de flujo. Se observa que, en general en la zona cercana a los polos, el flujo se acomoda formando líneas de corriente concéntricas al eje vertical del ánulo, por lo que se puede decir que en esta zona el fluido se encuentra girando en torno al eje de rotación (ver fig. 5.12).

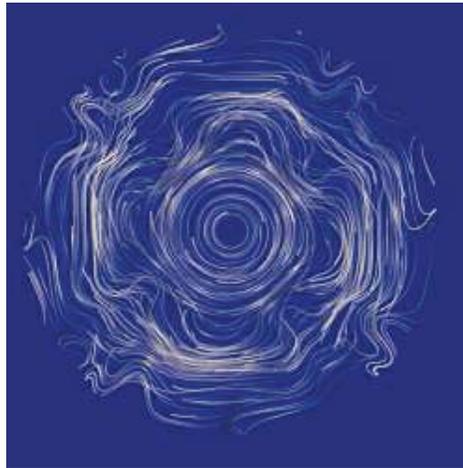


Figura 5.12: Vista superior de las líneas de corriente (Taylor supercrítico)

Esta forma concéntrica de las líneas de corriente se modifica en el sector cercano a la esfera interna.

En la figura 5.13 se observa que en el plano ecuatorial en una zona muy cercana a la esfera interna, las líneas de corriente no son circulares, el flujo forma cuatro ondulaciones respecto al perímetro de la esfera interna y las crestas de dichas ondulaciones corresponden con la posición en la cual se encuentran las celdas en el flujo base a bajos números de Taylor.

En la gráfica 5.14 se observa el comportamiento de la velocidad en un punto de campo de flujo para un número de Taylor supercrítico ( $Ta = 2,75 \times 10^6$ , este comportamiento es el mismo para los casos de Taylor supercrítico que se simularon).

En la figura 5.15 se observan los campos de temperatura para  $Ta = 3 \times 10^6$ . Es importante mencionar que la distribución de temperatura se mantiene desde el estado estacionario del proceso difusivo, lo cual muestra que al haber sido cancelado el término de gravedad, el efecto del

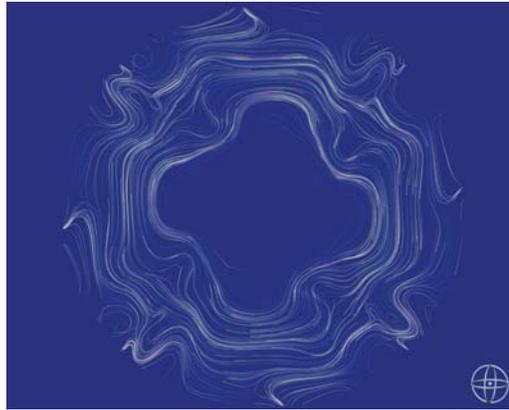


Figura 5.13: Líneas de corriente en el plano ecuatorial

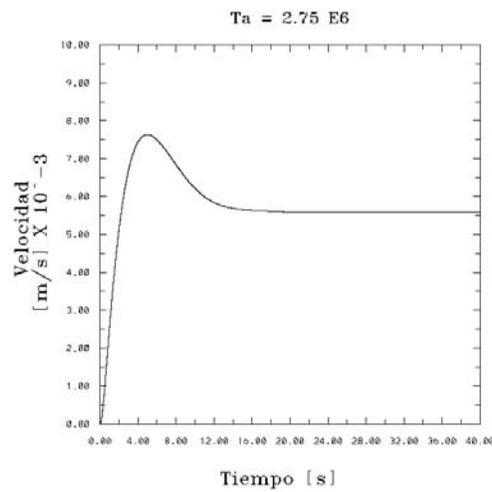


Figura 5.14: Comportamiento de la velocidad en el tiempo para números de Taylor supercríticos

gradiente de temperatura es prácticamente nulo sobre el campo de velocidades.

Estos patrones de flujo se pueden comparar cualitativamente con trabajos publicados anteriormente [Koschmieder, 1972]. En la figura 5.16a se presenta la fotografía<sup>1</sup> del patrón de convección en anillos en rotación con un gradiente de temperatura negativo, se observan cuatro olas al igual que las reproducidas en los patrones obtenidos en esta tesis (figura 5.16b).

Koschmieder (1972) reporta que para un gradiente de temperatura negativo, la transición del régimen de vórtices es una función fuertemente dependiente de la velocidad angular  $\Omega$ .

<sup>1</sup>Fotografía tomada de [Dike, 1982]

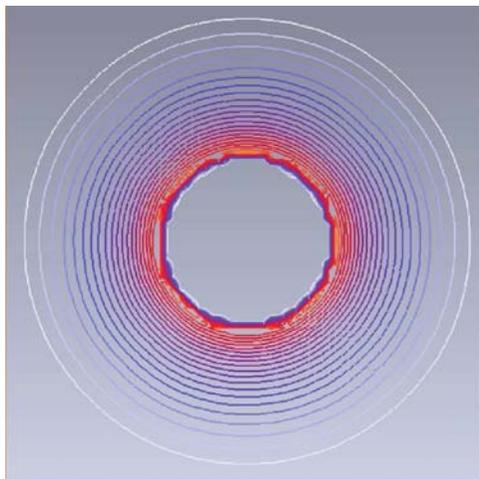
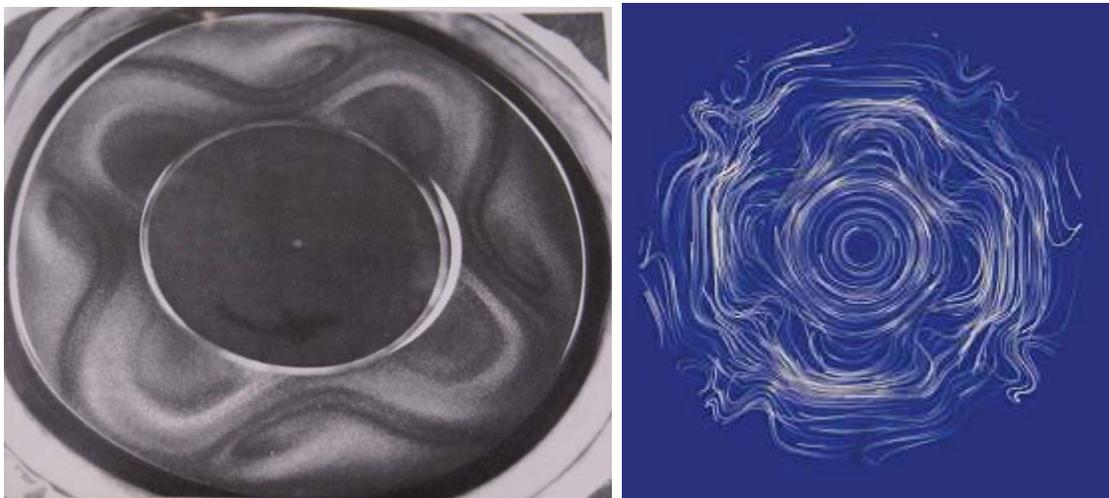


Figura 5.15: Isocontornos de temperatura.



(a) Convección en anillos en rotación con un gradiente de temperatura negativo [Koschmieder, 1972]      (b) Líneas de corriente a número de Taylor supercrítico

Figura 5.16: Patrones de flujo en el plano ecuatorial

## 5.5. Rotación y cambio de fase (Taylor supercrítico)

En este caso se agregó el proceso de cambio de fase a los patrones obtenidos con un alto número de Taylor, con la finalidad de analizar el efecto que tiene sobre el flujo la disminución del tamaño de la cavidad en la que está confinado el fluido en estudio, es decir la solidificación del material desde la esfera exterior.

La fase sólida se dejó crecer hasta que la malla computacional se deformó de tal manera que los puntos se sobreponen y la integración ya no es posible (Jacobiano igual a cero) por lo que el programa se detiene.

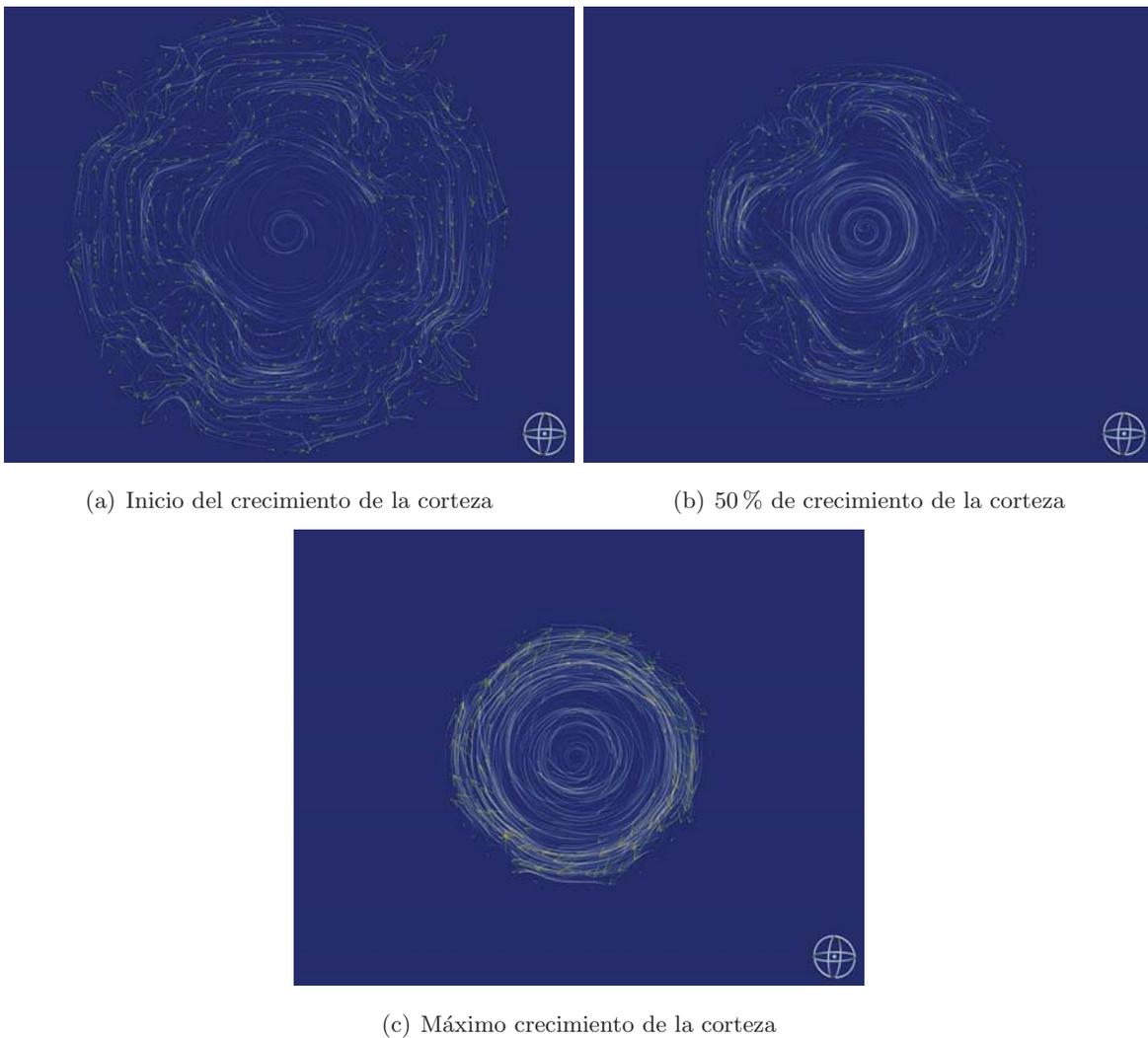


Figura 5.17: Líneas de corriente en el proceso de cambio de fase

En la figura 5.17 se muestran las líneas de corriente del flujo, a) cuando el proceso de cambio de fase inicia ( $t=0$ ), b) cuando la corteza ha llegado al 50% de su crecimiento ( $t = 1,1\text{seg.}$ ) y c) en el máximo crecimiento de la fase sólida ( $t = 5,56\text{seg.}$ ).

Cuando se tiene el proceso de cambio de fase (solidificación) desde la esfera externa, el número de Taylor sufre una variación dinámica debido a que el radio del ánulo se va disminuyendo conforme la fase sólida crece, por lo que se esperaría que al crecer la corteza sólida los patrones de flujo regresen a la forma del flujo base (sección 5.2). En el caso particular de esta tesis el número de Taylor que se logra en el máximo crecimiento de la corteza es de  $2,7 \times 10^4$ , sin embargo los patrones de flujo no regresan al flujo base debido a que el cambio de fase se dió de manera muy rápida y la inercia no permitió al fluido cambiar de patrón de flujo. Los patrones observados en el máximo crecimiento de la capa sólida son más bien similares al flujo de Taylor supercrítico (sección 5.4).

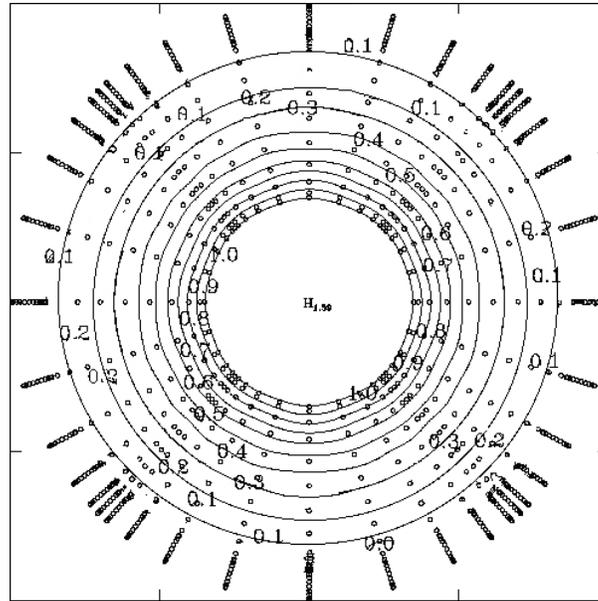


Figura 5.18: Isocontornos de temperatura

En la figura 5.18 se observan los isocontornos de temperatura en el máximo crecimiento de la capa sólida, se puede ver que aun con una capa líquida de aproximadamente el 30% del tamaño inicial, los isocontornos siguen siendo concéntricos, es decir se mantiene la misma distribución de temperatura radial en el ánulo.

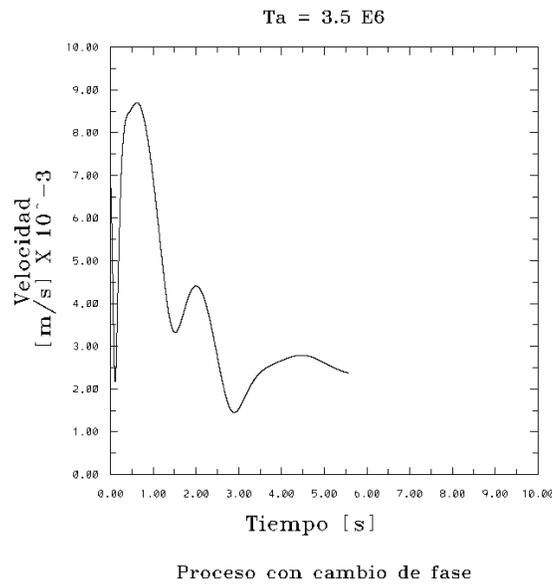


Figura 5.19: Comportamiento de la velocidad con el cambio de fase

En la gráfica 5.19 se observa el comportamiento de la velocidad en el tiempo, con el proceso de cambio de fase. La velocidad se reduce debido a que el tamaño de la cavidad que contiene al fluido se hace más pequeña conforme transcurre el tiempo hasta llegar al punto donde los puntos de la malla computacional se superponen y el programa se detiene.

## 5.6. Simulaciones con polinomios de grado menor

Además de las simulaciones con polinomios de grado 11, también se realizaron cálculos en sistemas formados con polinomios de grado igual a 9, es decir 729 puntos por cada sector de las esferas y con polinomios de grado 7 y 343 puntos por sector.

Para las simulaciones con polinomio de grado 9 los resultados son muy similares a los obtenidos con el polinomio 11, con una razón en el tiempo de cómputo de aproximadamente 1 : 3, sin embargo para el polinomio 7 el sistema sólo es estable en números de Taylor muy bajos, del orden de 500, ya que para número de Taylor mayores el sistema pierde convergencia en la solución y termina por indeterminarse.



## Capítulo 6

# Conclusiones y trabajo a futuro

### 6.1. Conclusiones

Se demostró que a bajo número de Taylor existe un patrón de flujo base, simétrico en el plano ecuatorial, formado por ocho celdas de flujo ubicadas en las proximidades del ecuador, y dos corrientes desde los polos de la esfera interna hacia los polos de la esfera externa que regresan de la pared de la esfera externa al exterior de las celdas del ecuador y hacia el eje de rotación.

Se encontró también que hay un rango de números de Taylor de transición en el cual el fluido se desestabiliza y pierde el patrón de flujo base.

Una vez superado en número de Taylor de transición el flujo de reacomoda de una forma muy distinta a la observada en el flujo base y en el rango de transición, en este rango supercrítico el fluido gira en torno al eje de rotación en las zonas próximas a los polos y en la zona adyacente al ecuador forma cuatro ondulaciones alrededor de la esfera interna.

Se determinó que para el proceso de solidificación desde la esfera exterior se requiere de un tiempo suficiente para que el fluido pierda la inercia del movimiento inicial y pueda adaptarse a las condiciones de la cavidad que se está deformando.

A partir de los resultados obtenidos se puede decir que el método de los elementos espectrales acoplado con el algoritmo de la esfera cúbica es una buena herramienta para la solución de problemas de la dinámica de fluidos en los cuales se involucren geometrías esféricas, ya que permite una buena aproximación a los resultados sin la necesidad de hacer una compleja discretización del dominio y sin recurrir tampoco a las coordenadas esféricas.

A pesar que un alto grado del polinomio nos genera una precisión mayor, se puede utilizar un número de puntos menor sin que se afecten cualitativamente los resultados, por lo que se pueden tener resultados con grados del polinomio de nueve lo cual se traduce directamente en una disminución considerable del tiempo de cómputo.

Si bien el reducir el grado del polinomio reduce considerablemente el tiempo de cómputo, existe un límite a partir del cual la solución pierde convergencia y se hace sumamente difícil encontrar u obtener resultados que puedan ser correctos; en el caso de este modelo ese límite inferior es 9 ya que con un polinomio de grado 7 existen problemas de convergencia de consideración.

El modelo propuesto puede servir como base para la creación de un modelo muy complejo de la dinámica terrestre, tanto interna como externa, en el cual se consideren aspectos como la gravedad, el campo magnético y la atmósfera.

## 6.2. Trabajo a futuro

Los resultados que hasta el momento de obtienen de este trabajo no son en manera alguna concluyentes respecto a la línea de investigación que se está siguiendo por lo que es importante hacer el planteamiento de una serie de pasos siguientes dentro de la investigación.

Dentro de los aspectos que deben ser estudiados y evaluados se encuentra el cálculo del tiempo necesario para que el fluido pueda cambiar de un estado supercrítico a un estado subcrítico durante el proceso de cambio de fase.

Lo siguiente es agregar el término de gravedad radial y la inclusión de campo magnético para acercar el modelo a la dinámica interna de la Tierra.

Otro punto importante que se debe tomar en cuenta para mejorar los resultados que se pueden tener, es el incremento del grado de discretización del dominio computacional ya que con la discretización actual se pierden detalles que pudieran ser muy importantes, además con la incorporación de la tercera capa se hace necesario un mayor número de puntos ya que al ser la capa más externa se tiene una mayor dispersión en la información.

Un paso importante en este trabajo es la paralelización del algoritmo computacional para poder hacer un uso intensivo del equipo de cómputo con el que se cuenta, ya que en las condiciones actuales se tiene una muy importante subutilización de recursos.

El paso mayor dentro de este trabajo es la incorporación de una tercera capa exterior en la cual se simulen las características de la atmosfera terrestre ya que esto permitirá estudiar la interacción entre las capas internas de la Tierra con la capa exterior donde se desarrolla la vida.



## Apéndice A

# Adimensionalización de las ecuaciones

A continuación se describe el procedimiento para adimensionalizar las ecuaciones

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \alpha \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Se definen los parámetros adimensionales.

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{d}{\nu} v_1, & x_1^* &= \frac{x_1}{d}, & t^* &= \frac{\nu}{d^2} t, \\ v_2^* &= \frac{d}{\nu} v_2, & x_2^* &= \frac{x_2}{d}, & \theta^* &= \frac{T - T_0}{\Delta T}, \\ v_3^* &= \frac{d}{\nu} v_3, & x_3^* &= \frac{x_3}{d}. \end{aligned}$$

Despejando las variables dimensionales como función de los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_1^* \nu}{d}, & x_1 &= dx_1^*, & t &= \frac{d^2 t^*}{\nu}, \\ v_2 &= \frac{v_2^* \nu}{d}, & x_2 &= dx_2^*, & T &= \theta^* \Delta T + T_0, \\ v_3 &= \frac{v_3^* \nu}{d}, & x_3 &= dx_3^*. \end{aligned}$$

En el caso estudiado, el sistema gira en torno al eje  $z$ , por lo tanto, los términos de las fuerzas de Coriolis y centrífuga se simplifican, como se muestra en el apéndice B.

### A.1. Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{A.4})$$

sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} = 0$$

$$\frac{\nu}{d^2} \left[ \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} \right] = 0$$

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} = 0$$

o bien:

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^* = 0 \quad (\text{A.5})$$

### A.2. Ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - 2v_2\omega_3 - \omega_3^2 r_1 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + g_1 + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right] \vec{i}_1 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + 2v_1\omega_3 - \omega_3^2 r_2 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + g_2 + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right] \vec{i}_2 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} + g_3 + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right] \vec{i}_3. \quad (\text{A.8})$$

Desarrollando el término de la primera dirección:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - 2v_2\omega_3 - \omega_3^2 r_1 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + g_1 + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{d^2} \frac{\nu}{d} \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + \frac{\nu}{d} v_1^* \frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\nu}{d} v_2^* \frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{d} v_3^* \frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} - 2\frac{\nu}{d} v_2^* \omega_3 - \omega_3^2 r_1 = & -\frac{1}{\rho} \frac{1}{d} \frac{\partial P}{\partial x_1^*} + \beta(T - T_o)g_1 \\ & + \nu \left[ \frac{\nu}{dd^2} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\nu}{dd^2} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\nu}{dd^2} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_3^{*2}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{d^3} \left[ \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} \right] - 2 \frac{\nu}{d} v_2^* \omega_3 - \omega_3^2 r_1 &= -\frac{1}{\rho d} \frac{\partial P}{\partial x_1^*} + \beta (\theta^* \Delta T) g_1 + \frac{\nu^2}{d^3} \left[ \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_3^{*2}} \right], \\ \left[ \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} \right] - 2 \frac{d^2}{\nu} v_2^* \omega_3 - \frac{d^3}{\nu^2} \omega_3^2 r_1 &= -\frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial P}{\partial x_1^*} + \beta \frac{d^3}{\nu^2} \Delta T g_1 \theta^* + \nabla^{*2} v_1^*. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Si se define una presión adimensional y un radio adimensional:

$$P^* = \frac{P}{\rho \nu^2} \quad r_1^* = \frac{r_1}{d}$$

se puede reescribir la ecuación A.10 como:

$$\frac{Dv_1^*}{Dt^*} - \frac{2d^2\omega_3}{\nu} v_2^* - \frac{d^4\omega_3^2}{\nu^2} r_1^* = -\frac{\partial P^*}{\partial x_1^*} + \frac{\beta d^3 \Delta T g_1}{\nu^2} \theta^* + \nabla^{*2} v_1^*, \quad (\text{A.11})$$

y recordando la definición de los números adimensionales:

$$Ta = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2} \quad Ek = \frac{\nu}{d^2 \Omega} \quad Ra = \frac{\beta d^3 \Delta T g}{\nu^2}$$

la ecuación A.11 finalmente queda escrita de la siguiente manera:

$$\frac{Dv_1^*}{Dt^*} - \frac{2}{Ek} v_2^* - \frac{Ta}{4} r_1^* = -\frac{\partial P^*}{\partial x_1^*} + Ra \theta^* + \nabla^{*2} v_1^*. \quad (\text{A.12})$$

En la segunda dirección:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + 2v_1 \omega_3 - \omega_3^2 r_2 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + g_2 + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right]. \quad (\text{A.13})$$

Se reescribe la ecuación A.13 como:

$$\frac{Dv_2^*}{Dt^*} + \frac{2d^2\omega_3}{\nu} v_1^* - \frac{d^4\omega_3^2}{\nu^2} r_2^* = -\frac{\partial P^*}{\partial x_2^*} + \frac{\beta d^3 \Delta T g_2}{\nu^2} \theta^* + \nabla^{*2} v_2^*, \quad (\text{A.14})$$

o bien:

$$\frac{Dv_2^*}{Dt^*} + \frac{2}{Ek} v_1^* - \frac{Ta}{4} r_2^* = -\frac{\partial P^*}{\partial x_2^*} + Ra \theta^* + \nabla^{*2} v_2^*. \quad (\text{A.15})$$

En la tercera dirección:

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} + g_3 + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right], \quad (\text{A.16})$$

ó:

$$\frac{Dv_3^*}{Dt^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_3^*} + Ra \theta^* + \nabla^{*2} v_3^*. \quad (\text{A.17})$$

### A.3. Ecuación de la energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = \alpha_l \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right]. \quad (\text{A.18})$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T \nu}{d^2} \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \frac{\nu}{d} v_1^* \frac{\Delta T}{d} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_1^*} + \frac{\nu}{d} v_2^* \frac{\Delta T}{d} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{d} v_3^* \frac{\Delta T}{d} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_3^*} &= \alpha \left[ \frac{\Delta T}{d^2} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\Delta T}{d^2} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\Delta T}{d^2} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_3^{*2}} \right], \\ \nu \left[ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_3^*} \right] &= \alpha \left[ \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_3^{*2}} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

o bien:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_3^*} = \frac{\alpha}{\nu} \left[ \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_3^{*2}} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Retomando la definición del número de Prandtl:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_3^*} = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_3^{*2}} \right], \quad (\text{A.21})$$

o de forma vectorial:

$$\frac{D\theta^*}{Dt^*} = \frac{1}{Pr} [\nabla^{*2} \theta^*]. \quad (\text{A.22})$$

En la fase sólida, la ecuación de difusión tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right], \quad (\text{A.23})$$

por lo que en su forma adimensional se escribe como:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{1}{Pr} [\nabla^{*2} \theta^*]. \quad (\text{A.24})$$

## A.4. Balance de energía en la interfase

Se adimensionaliza también la ecuación de balance de energía en la interfase,

$$-k_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial \vec{x}} \right) + k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial \vec{x}} \right) = \rho Q_L \frac{dS}{dt}, \quad (\text{A.25})$$

para lo cual, se definen los siguientes parametros adimensionales:

$$\begin{aligned} \theta_s^* &= \frac{T_s - T_0}{\Delta T}, & \vec{x}^* &= \frac{\vec{x}}{h}, & t^* &= \frac{\alpha_l}{h^2} t, \\ \theta_l^* &= \frac{T_l - T_0}{\Delta T}, & S^* &= \frac{S}{h}, & k_r &= \frac{k_s}{k_l}. \end{aligned}$$

Despejando los parametros dimensionales, se tiene:

$$\begin{aligned} T &= \theta_s^* \Delta T + T_0, & \vec{x} &= \vec{x}^* h, & t &= \frac{h^2 t^*}{\alpha_l}, \\ T &= \theta_l^* \Delta T + T_0, & S &= S^* h, & k_s &= k_r \cdot k_l. \end{aligned}$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales en la ecuación A.25, se obtiene:

$$-k_l \left( \frac{\partial \theta_l^* \Delta T}{\partial h \vec{x}^*} \right) + k_l k_r \left( \frac{\partial \theta_s^* \Delta T}{\partial h \vec{x}^*} \right) = \rho Q_L \frac{dh S^*}{\alpha_l \frac{dh^2 t^*}{\alpha_l}}. \quad (\text{A.26})$$

Si se reagrupan los términos, la ecuación se puede reescribir como:

$$- \left( \frac{\partial \theta_l^*}{\partial \vec{x}^*} \right) + k_r \left( \frac{\partial \theta_s^*}{\partial \vec{x}^*} \right) = \frac{\rho Q_L h}{k_l \Delta T} \frac{h \alpha_l}{h^2} \frac{dS^*}{dt^*}. \quad (\text{A.27})$$

Sustituyendo la igualdad  $\alpha_l = \frac{k_l}{\rho C_p}$  y simplificando los términos equivalentes, el balance de energía queda como:

$$- \left( \frac{\partial \theta_l^*}{\partial \vec{x}^*} \right) + k_r \left( \frac{\partial \theta_s^*}{\partial \vec{x}^*} \right) = \frac{Q_L}{C_p \Delta T} \frac{dS^*}{dt^*}. \quad (\text{A.28})$$

Recordando la definición del número de Stefan, la ecuación finalmente queda,

$$- \left( \frac{\partial \theta_l^*}{\partial \vec{x}^*} \right) + k_r \left( \frac{\partial \theta_s^*}{\partial \vec{x}^*} \right) = \frac{1}{St} \frac{dS^*}{dt^*}. \quad (\text{A.29})$$

## A.5. Solución analítica de la difusión en estado estacionario

Para adimensionalizar la solución de la ecuación de difusión en la dirección radial (ecuación A.30),

$$T = (T_i - T_e) \left[ \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_e}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \right] + T_e, \quad (\text{A.30})$$

se definen los siguientes parámetros y variables adimensionales:

$$\Theta^* = \frac{T - T_e}{T_i - T_e}, \quad r^* = \frac{r - r_i}{r_e - r_i}, \quad \eta = \frac{r_i}{r_e}.$$

Se despejan las variables dimensionales como función de los parámetros adimensionales:

$$T = (T_i - T_e)\Theta^* + T_e, \quad r = (r_e - r_i)r^* + r_i.$$

Sustituyendo  $T$  como función del  $\Theta^*$  en la ecuación A.30 se tiene:

$$(T_i - T_e)\Theta^* + T_e = (T_i - T_e) \left[ \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_e}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \right] + T_e. \quad (\text{A.31})$$

Reduciendo la ecuación A.31:

$$\Theta^* = \left[ \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_e}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \right] = \frac{\frac{r_e - r}{rr_e}}{\frac{r_e - r_i}{r_i r_e}} = \frac{r_i r_e (r_e - r)}{r r_e (r_e - r_i)}, \quad (\text{A.32})$$

o bien,

$$\Theta^* = \frac{r_i r_e - r_i r}{r r_e - r r_i}. \quad (\text{A.33})$$

Sustituyendo  $r$  como función de  $r^*$  en la ecuación A.33:

$$\Theta^* = \frac{r_i r_e - r_i [(r_e - r_i)r^* + r_i]}{[(r_e - r_i)r^* + r_i](r_e - r_i)}, \quad (\text{A.34})$$

desarrollando los productos del numerador:

$$\Theta^* = \frac{r_i r_e - r_i r_e r^* + r_i^2 r^* - r_i^2}{(r_e - r_i)[(r_e - r_i)r^* + r_i]}. \quad (\text{A.35})$$

Factorizando los términos del numerador y desarrollando el producto en el denominador:

$$\Theta^* = \frac{(r_i r_e)(1 - r^*) + r_i^2(r^* - 1)}{r_e - r_i)(r_e - r_i)r^* + (r_e - r_i)r_i}, \quad (\text{A.36})$$

la ecuación A.36 se puede escribir como:

$$\Theta^* = \frac{(r^* - 1)(r_i^2 - r_i r_e)}{r_e^2 r^* - 2r_e r_i r^* + r_i^2 r^* + r_e r_i + r_i^2}. \quad (\text{A.37})$$

Factorizando el denominador, la ecuación A.38 se escribe como:

$$\Theta^* = \frac{(r^* - 1)(r_i^2 - r_i r_e)}{(r_i^2 - r_i r_e)r^* + (r_e^2 - r_i r_e)r^* + r_i r_e - r_i^2}, \quad (\text{A.38})$$

o bien:

$$\Theta^* = \frac{(r^* - 1)(r_i^2 - r_i r_e)}{(r_i^2 - r_i r_e)(r^* - 1) + (r_e^2 - r_i r_e)r^*}. \quad (\text{A.39})$$

Sacando el inverso de la ecuación A.39:

$$\frac{1}{\Theta^*} = \frac{r_e^2 - r_e r_i}{(r^* - 1)(r_i^2 - r_e r_i)} + 1, \quad (\text{A.40})$$

y sustituyendo la relación de radios  $\eta$  en la ecuación A.40:

$$\frac{1}{\Theta^*} = \frac{(r_e^2 - r_e \eta r_e)r^*}{(r^* - 1)(\eta^2 r_e^2 - \eta r_e^2)} + 1 = \frac{(1 - \eta)r^*}{(r^* - 1)(\eta^2 - \eta)} + 1. \quad (\text{A.41})$$

De la ecuación A.41 se obtiene finalmente

$$\Theta^* = \frac{(r^* - 1)(\eta^2 - \eta)}{(1 - \eta)r^* + (r^* - 1)(\eta^2 - \eta)}. \quad (\text{A.42})$$



## Apéndice B

# Simplificación de los términos de rotación

Debido a que el sistema gira alrededor del eje vertical, los términos  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  y  $2\vec{\Omega} \times \vec{v}$  de la ecuación 3.6 se simplifican de la siguiente manera:

Desarrollando en notación índice el término de aceleración centrífuga se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= \omega_i \omega_j r_i \vec{l}_j - \omega_i \omega_j r_j \vec{l}_i \\ &= \omega_1 \omega_j r_1 \vec{l}_j + \omega_2 \omega_j r_2 \vec{l}_j + \omega_3 \omega_j r_3 \vec{l}_j - \omega_1 \omega_1 r_j \vec{l}_j - \omega_2 \omega_2 r_j \vec{l}_j - \omega_3 \omega_3 r_j \vec{l}_j \\ &= (\omega_1 r_1 \omega_1 + \omega_2 r_2 \omega_1 + \omega_3 r_3 \omega_1 - \omega_1 \omega_1 r_1 - \omega_2 \omega_2 r_1 - \omega_3 \omega_3 r_1) \vec{l}_1 \\ &\quad + (\omega_1 r_1 \omega_2 + \omega_2 r_2 \omega_2 + \omega_3 r_3 \omega_2 - \omega_1 \omega_1 r_2 - \omega_2 \omega_2 r_2 - \omega_3 \omega_3 r_2) \vec{l}_2 \\ &\quad + (\omega_1 r_1 \omega_3 + \omega_2 r_2 \omega_3 + \omega_3 r_3 \omega_3 - \omega_1 \omega_1 r_3 - \omega_2 \omega_2 r_3 - \omega_3 \omega_3 r_3) \vec{l}_3.\end{aligned}\tag{B.1}$$

De igual manera para el término de aceleración de Coriolis:

$$\begin{aligned}
2\vec{\Omega} \times \vec{v} &= 2\epsilon_{ijk}\omega_i v_j \vec{i}_k \\
&= 2\epsilon_{1jk}\omega_1 v_j \vec{i}_k + 2\epsilon_{2jk}\omega_2 v_j \vec{i}_k + 2\epsilon_{3jk}\omega_3 v_j \vec{i}_k \\
&= 2\epsilon_{11k}\omega_1 v_1 \vec{i}_k + 2\epsilon_{12k}\omega_1 v_2 \vec{i}_k + 2\epsilon_{13k}\omega_1 v_3 \vec{i}_k \\
&\quad + 2\epsilon_{21k}\omega_2 v_1 \vec{i}_k + 2\epsilon_{22k}\omega_2 v_2 \vec{i}_k + 2\epsilon_{23k}\omega_2 v_3 \vec{i}_k \\
&\quad + 2\epsilon_{31k}\omega_3 v_1 \vec{i}_k + 2\epsilon_{32k}\omega_3 v_2 \vec{i}_k + 2\epsilon_{33k}\omega_3 v_3 \vec{i}_k \\
&= (2\omega_2 v_3 - 2\omega_3 v_2) \vec{i}_1 \\
&\quad + (2\omega_3 v_1 - 2\omega_1 v_3) \vec{i}_2 \\
&\quad + (2\omega_1 v_2 - 2\omega_2 v_1) \vec{i}_3.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Considerando que el sistema gira con una velocidad constante en torno al eje  $x_3$  ( $z$ ), es decir, que las componentes del vector velocidad angular  $\Omega$  en la dirección  $x_1$  ( $x$ ) y en la dirección  $x_2$  ( $y$ ) son iguales a cero y la componente en la dirección  $z$  tiene un valor constante; entonces se puede reescribir el término de la fuerza centrífuga de la siguiente forma:

$$(\omega_3 \omega_3 r_1) \vec{i}_1 + (\omega_3 \omega_3 r_2) \vec{i}_2. \tag{B.3}$$

De manera semejante el término de Coriolis se escribe como:

$$(-2\omega_3 v_2) \vec{i}_1 + (2\omega_3 v_1) \vec{i}_2. \tag{B.4}$$

Para agregar estas fuerzas al programa de cómputo, los términos de las fuerzas centrífuga (ec. B.3) y de Coriolis (ec. B.4) se escribieron de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \rho_0 \omega^2 x \\ F_y &= \rho_0 \omega^2 y \end{aligned} \right\} \text{centrifuga}, \tag{B.5}$$

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -2\rho_0\omega v_y \\ F_y &= 2\rho_0\omega v_x \end{aligned} \right\} \textit{Coriolis} \quad (\text{B.6})$$

donde la  $\omega$  es la velocidad angular con la que gira el sistema en torno al eje vertical ( $z$ ),  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes en  $x$  y  $y$  de la velocidad en cada punto, respectivamente.



# Bibliografía

- [Al-Shamali et al., 2003] Al-Shamali, F., Heimpel, M., and Aurnou, J. (2003). Varying the spherical shell geometry in rotating thermal convection. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 98(2):153–169.
- [Arpaci and Larsen, 1984] Arpaci, V. S. and Larsen, P. S. (1984). *Convection heat transfer*. Prentice Hall.
- [Aubert et al., 2008] Aubert, J., Amit, H., Hulot, G., and Olson, P. (2008). Thermochemical flows couple the earth’s inner core growth to mantle heterogeneity. *Nature*, 454:758–761.
- [Avila, 2008] Avila, R. (2008). The spectral element method and the meshless local petrov galerkin method for the solution of the fluid equations.
- [Bejan and Kraus, 2003] Bejan, A. and Kraus, A. D. (2003). *Heat Transfer Handbook*. Wiley & Sons, Inc.
- [Bertin, 1986] Bertin, J. J. (1986). *Mecanica de fluidos para ingenieros*. Prentice Hall.
- [Busse, 1970] Busse, F. H. (1970). Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech*, 44:441–460.
- [Carslaw and Jaeger, 1959] Carslaw, H. and Jaeger, J. (1959). *Conduction of heat in solids*. Oxford University Press.
- [Dike, 1982] Dike, M. V. (1982). *An album of fluid motion*. The Parabolic Press.
- [Dumas, 1991] Dumas, G. (1991). *Study of spherical Couette flow via 3-D spectral simulations: Large and Narrow-Gap flows and their transitions*. PhD thesis, California Institute of Technology.
- [Evonuk, 2006] Evonuk, M. (2006). *Numerical modeling of convection in the interiors of giant planets*. PhD thesis, University of California, Santa Cruz.

- [Evonuk and Glatzmaier, 2006] Evonuk, M. and Glatzmaier, G. (2006). A 2d study of the effects of the size of a solid core on the equatorial flow in giant planets. *Icarus*, 181:458–464.
- [Evonuk and Glatzmaier, 2007] Evonuk, M. and Glatzmaier, G. (2007). The effects of rotation rate on deep convection in giant planets with small solid cores. *Planetary and Space Science*, 55:407–412.
- [Fox and McDonald, 1978] Fox, R. and McDonald, R. (1978). *Introduction to Fluid Mechanics*. Second Edition.
- [Futterer et al., 2008] Futterer, B., Gellert, M., von Larcher, T., and Egbers, C. (2008). Thermal convection in rotating spherical shells: An experimental and numerical approach within geoflow. *Acta astronautica*, 62:300–307.
- [Glatzmaier, 2004] Glatzmaier, G. (2004). Convection in giant planets. watching the turbulent roiling of fluids in a planets interior. *Projects in Scientific Computing*, page 46.
- [Greenspan, 1968] Greenspan, H. P. (1968). *The theory of rotating fluids*. Cambridge Press.
- [Jordan, 1979] Jordan, T. H. (1979). Structural geology of the earth’s interior. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 76(9):4192–4200.
- [Karniadakis and Sherwin, 1999] Karniadakis, G. E. and Sherwin, S. J. (1999). *Spectral /hp Element Methods for CFD*. Oxford University Press.
- [Koschmieder, 1972] Koschmieder, E. L. (1972). Convection in a rotating laterally-heated annulus. *Journal of Fluid Mechanics*, 51(4):637–656.
- [Lister, 2008] Lister, J. (2008). Structuring the inner core. *Nature*, 454:701–702.
- [Nair et al., 2005] Nair, R. D., Thomas, S. J., and Loft, R. D. (2005). A discontinuous galerkin transport scheme on the cubed sphere. *Monthly Weather Review*, 133:814–828.
- [Naterer, 2003] Naterer, G. F. (2003). *Heat Transfer in Single and Multiphase Systems*. CRC Press.
- [Necati, 1980] Necati, M. (1980). *Heat conduction*. Wiley & Sons, Inc.
- [Patera, 1983] Patera, A. T. (1983). A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54:468–488.
- [Roberts, 1968] Roberts, P. H. (1968). On the thermal instability of a rotating fluid sphere containing heat sources. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Series A*, 263:93–117.

- [Ronchi et al., 1996] Ronchi, C., Iacono, R., and Paolucci, P. S. (1996). The cubed sphere”: A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics*, 124:93–114.
- [Sarson, 2008] Sarson, G. (2008). Simulations of geodymano. pencil code meeting 2008.
- [Simatev and Busse, 2003] Simatev, R. and Busse, F. (2003). Patterns of convection in rotating spherical shells. *New Journal of Physics*, 5:97.1–97.20.
- [White, 2003] White, F. M. (2003). *Fluid Mechanics*. Mc Graw Hill, 5th Edition.
- [Whitwell and Toner, 1969] Whitwell, J. C. and Toner, R. K. (1969). *Conservation of mass and energy*. Blaisdell Publishing Company.
- [Zhang and Liao, 2004] Zhang, K. and Liao, X. (2004). A new theory for convection in rapidly rotating spherical systems. *XXI ICTAM*.