UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCIONES INDUCIDAS EN PRODUCTOS SIMÉTRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

GALO HIGUERA ROJO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA

2009

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTÓNOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

Act. Mauricio Aguilar González
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Funciones Inducidas en Productos Simétricos

realizado por **Higuera Rojo Galo** con número de cuenta **4-0601774-1** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dra. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla	
Propietario	Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano	
Propietario Tutor	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Suplente	Dr. Raúl Escobedo Conde	
Suplente	Dr. Enrique Castañeda Alvarado	

Atentamente,
"Por Mi Raza Hablará El Espíritu"
Ciudad Universitaria, D. F., a 10 de marzo de 2009
El Coordinador del Comité Académico de la Licenciatura en Matemáticas

M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez

CONSEJO DEPARTAMENTAL MATEMÁTICAS

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mis papás, Elena y Edgar, por que sin su apoyo incondicional no podría estar aquí hoy. Y por tantas otras cosas que no puedo enumerar aquí porque duplicarían el número de hojas de este trabajo.

A Ray, porque no importa donde esté, siempre está cerca de mí.

A Catia, por estar a mi lado en cada paso que doy.

A mis abuelos, Paco y Lagüe, por darme asilo y tanto cariño durante estos años.

A Radmila Bulajich y a todos mis maestros de la olimpiada, por darme una oportunidad tan importante y decisiva en mi vida, y por enseñarme lo bonitas que son las matemáticas.

A Alejandro Illanes, por ser mi maestro y tutor, y por la confianza que puso en mí al empezar este trabajo.

A mis sinodales, por aceptar revisar y corregir mi teisis, agradezco mucho sus comentarios.

A mi compañeros de clase: Mauricio Chacón, Rodrigo Hernández, Juan Mireles, Alfredo Nájera y Norberto Ordoñez, por las discusiones y exposiciones que dieron inicio a este trabajo.

Al Instituto de Matemáticas de la UNAM por otorgarme la beca de lugar.

Índice

Introducción.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, vamos a trabajar con el siguiente hiperespacio:

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subset X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}.$$

A estos hiperespacios, se les da la topología inducida por la métrica de Hausdorff y los llamamos *Productos Simétricos* de X. Es bien sabido que estos hiperespacios también son continuos.

Dados dos continuos X e Y, $n \in \mathbb{N}$ y una función continua $f : X \to Y$, se define la función $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ como $f_n(A) = f(A)$ (la imagen directa del conjunto A). Esta función, es continua y se le llama la *función inducida por* f a este hiperespacio.

Dada una clase de funciones $\mathfrak{M}$, uno puede preguntarse ¿Qué relación hay entre los siguientes hechos?:

- $f \in \mathfrak{M}$,
- $f_n \in \mathfrak{M}$, para alguna $n > 1$,
- $f_n \in \mathfrak{M}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Y es justamente esta pregunta, la que se estudia a lo largo de este trabajo, para diversas clases de funciones.

Esta misma problemática se ha estudiado ampliamente para otros hiperespacios. Los profesores Janusz J. Charatonik y Wlodzimierz J. Charatonik investigaron profundamente estas relaciones en la década de los años 1990-2000. En este trabajo hacemos, por primera vez, un estudio muy completo de esta pregunta para los productos simétricos. Algunos de los resultados presentados aquí, aparecen en la tesis de José Luis Gómez Rueda ([12]).

El trabajo se divide en tres capítulos. En el primero, se estudian los preliminares y, se mencionan y prueban, varios teoremas básicos de la teoría de continuos, de sus hiperespacios y de la topología en general, que serán usados en los capítulos siguientes. Un lector con suficiente conocimiento de la teoría de los continuos y sus hiperespacios, podría fácilmente evitar este capítulo, sin que esto genere ningún problema en la comprensión de lo subsecuente.

En el segundo capítulo, se trabaja con las clases de funciones definidas por una propiedad topológica, entre ellas, las propiedades de apertura, monotoneidad, ligereza, etc. y se estudian a fondo, las implicaciones que hay entre los tres enunciados anteriores, para cada caso. En el tercer capítulo, se estudian las clases de funciones definidas por una propiedad dinámica, por ejemplo, las clases de funciones transitivas, mezcladoras, caóticas, etc. y una vez más, se muestra cuáles son las implicaciones entre los tres enunciados anteriores. Por último, se incluye una tabla de implicaciones en manera de resumen a todo el trabajo desarrollado y para facilitar la consulta de implicaciones concretas.

Este trabajo comenzó, en la clase sobre Productos Simétricos, impartida por el Dr. Alejandro Illanes Mejía, en el Instituto de Matemáticas de la UNAM. A esta clase asistimos los siguientes alumnos (en orden alfabético): Mauricio Chacón Tirado, Rodrigo Hernández Guitiérrez, Juan Mireles Morales, Alfredo Nájera Chávez, Norberto Ordoñez Ramirez y yo. A todos ellos agradezco plenamente todas las exposiciones y discusiones que dieron inicio a este trabajo.

Los conocimientos previos necesarios para la lectura del texto son; conocimientos básicos de topología (conexidad, compacidad, continuidad, etc.), y en cierta medida, estar familiarizado con algunos conceptos de hiperespacios como la métrica de Hausdorff, la topología de Vietoris y los arcos ordenados. Un lector interesado, podría familiarizarse fácilmente con estos conceptos en ([14], Capítulo 2).

En este trabajo usamos la palabra "mapeo" para denotar a una función continua y suprayectiva. Hicimos esto para simplificar y por que no encontramos otra palabra, que sí exista en nuestro idioma, para denotar este concepto.

La mayor parte de los resultados y ejemplos contenidos en este trabajo se pudieron obtener con ideas que se manejan regularmente en hiperespacios o con ideas que se pueden encontrar en trabajos previos de funciones inducidas. Lo que sí destacamos como original de este trabajo es:

$a)$ El ejemplo de que el homeomorfismo de corrimiento en un solenoide X es expansivo pero el homeomorfismo inducido a $\mathcal{F}_n(X)$ no lo es, para ninguna $n \geq 2$ (Ejemplo 3.38). Esta idea nos fue sugerida por el profesor Christopher Mouron.

$b)$ El ejemplo de que existe un continuo X tal que $\mathcal{F}_2(X)$ tiene la propiedad del punto fijo pero que X no la tiene (Ejemplo 2.25). Como se ve, este ejemplo no es nada trivial y la prueba de estas propiedades resultó suficientemente complicada como para escribir un artículo de investigación que hemos sometido para su publicación.

Capítulo 1

Preliminares.

Para comenzar haremos algunas convenciones. Siempre denotaremos a los números naturales, reales y complejos como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. En este trabajo, el conjunto de números naturales, $\mathbb{N}$, no incluirá al 0. $\mathbb{S}^1$ denotará la circunferencia unitaria ya sea metida en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{C}$. Para cada espacio topológico X y $U \subset X$ se denota a su cerradura en X como $\overline{U}^X$, a su interior en X como $Int_X(U)$ y a su frontera en X como $Fr_X(U)$, cuando no haya posibilidad de confusión se denotarán simplemente $\overline{U}$, $Int(U)$ y $Fr(U)$, respectivamente. Dado un espacio métrico X y un punto $p \in X$ denotaremos como $B(\varepsilon, p)$ a la bola abierta de radio ε y centro p. También se define, para un subconjunto $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$ y cualquier punto $p \in X$, la distancia de p a A como $d(p, A) = \inf \{d(p, x) : x \in A\}$.

1.1 Teorema del Cable Cortado

Esta sección está dedicada, evidentemente, a demostrar el Teorema del Cable Cortado. En la formulación de este teorema no es evidente la gran utilidad que tiene en la teoría de los continuos y sus hiperespacios, sin embargo, este teorema será una pieza fundamental para algunos resultados a lo largo de este trabajo.

Comenzemos recordando algunas cuestiones de conexidad. Las componentes de un espacio topológico X son los conexos maximales en X. Cada punto $x \in X$ tiene su correspondiente componente conexa que denotaremos C_x. Observemos que si y es cualquier otro punto tal que existe un subconjunto U de X que es abierto y cerrado y que además

$x \in U$ y $y \notin U$, entonces $y \notin C_x$, pues en caso contrario, $C_x \cap U$ sería un abierto y cerrado de C_x que no es el vacío ni todo C_x, lo cual contradiría la conexidad de C_x. Es natural preguntarse si el otro sentido de esta observación será cierto también. Es decir, que si $y \notin C_x$, entonces ¿existirá un conjunto U abierto y cerrado tal que $x \in U$ y $y \notin U$?

Para responder esta pregunta se introduce el concepto de *casi componente* que se define, para cualquier punto $x \in X$, como la intersección de todos los abiertos y cerrados de X que tienen a x y que nosotros denotaremos como Q_x. Notamos que la observación anterior nos da la relación $C_x \subset Q_x$ y la pregunta que nos hicimos se traduce en si será cierta la relación $Q_x \subset C_x$. Pues resulta que en el caso que X es métrico y compacto la relación sí es cierta.

Lema 1.1 *Si X es un espacio métrico compacto y $x \in X$, entonces $C_x = Q_x$.*

Demostración. Por la observación anterior basta probar que $Q_x \subset C_x$. Si Q_x fuera conexo sabríamos por la definición de C_x que $Q_x \subset C_x$, así que basta probar que Q_x es conexo.

Sean K y L cerrados ajenos de Q_x tales que $Q_x = K \cup L$ y $x \in K$. Como Q_x es intersección de cerrados de X, Q_x es cerrado en X, y por tanto K y L son cerrados en X. Como X es métrico sabemos que X es normal, y por lo tanto existen abiertos ajenos U y V tales que $K \subset U$ y $L \subset V$. En particular $Q_x \subset U \cup V$, $U \cup V$ es abierto y $U \cap L = \emptyset$.

Sea $\mathcal{L} = \{W \subset X : W$ es abierto y cerrado en X y $x \in W\}$.

Entonces $Q_x = \bigcap\{W \subset X : W \in \mathcal{L}\}$ y por lo tanto, las leyes de De Morgan nos dicen que $X \setminus Q_x = \bigcup\{X \setminus W : W \in \mathcal{L}\}$. Con esto $X \setminus (U \cup V) \subset \bigcup\{X \setminus W : W \in \mathcal{L}\}$. Para todo $W \in \mathcal{L}$ sabemos que $X \setminus W$ es abierto y entonces $\{X \setminus W : W \in \mathcal{L}\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus (U \cup V)$. Como $X \setminus (U \cup V)$ es cerrado en X, sabemos que es compacto, y por lo tanto existen $n \in \mathbb{N}$ y $W_1, W_2, ..., W_n \in \mathcal{L}$ tales que

$$X \setminus (U \cup V) \subset (X \setminus W_1) \cup ... \cup (X \setminus W_n) = X \setminus (W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n)\,.$$

Con esto $W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n \subset U \cup V$.

Sea $F = W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n$. Como cada W_i es abierto y cerrado, y además $x \in W_i$, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tenemos que F es abierto y cerrado y $x \in F$. Como U es abierto tenemos que $F \cap U$ es abierto. Ya que $X \setminus V$ es cerrado, tenemos que $F \cap (X \setminus V)$ es cerrado. Pero como $F \subset U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$ sabemos que $F \cap (X \setminus V) = F \cap U$, así que $F \cap U$ es cerrado. Hemos probado entonces que $F \cap U$ es abierto y cerrado.

Sabemos que $x \in K \subset U$, así que $x \in U$. Entonces $F \cap U$ es un abierto y cerrado tal que $x \in F \cap U$. Con esto, $F \cap U \in \mathcal{L}$ y entonces $Q_x \subset F \cap U$. Basta notar que $Q_x \cap L \subset (F \cap U) \cap L \subset U \cap L = \emptyset$ y recordar que $L \subset Q_x$ para concluir que $L = \emptyset$. Esto prueba que Q_x es conexo y entonces $Q_x \subset C_x$. ■

Ahora sí estamos listos para probar lo siguiente:

Teorema 1.2 (del Cable Cortado) *Si X es un espacio métrico compacto, y $A, B \subset X$ son cerrados tales que ninguna componente de X intersecta a A y a B, entonces existen dos cerrados ajenos K y L tales que $A \subset K$, $B \subset L$ y $X = K \cup L$.*

Demostración. Dada $a \in A$, sea C_a su componente en X. Por hipótesis $C_a \cap B = \emptyset$, así que $B \subset X \setminus C_a$.

Sea $\mathcal{L}_a = \{W \subset X : W \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } a \in W\}$. Por el Lema 1.1 sabemos que $C_a = \bigcap \{W : W \in \mathcal{L}_a\}$. Las leyes de De Morgan nos dicen que entonces $X \setminus C_a = \bigcup \{X \setminus W : W \in \mathcal{L}_a\}$, por lo que $\{X \setminus W : W \in \mathcal{L}_a\}$ es una cubierta de B. Como cada conjunto $W \in \mathcal{L}_a$ es cerrado, sabemos que $X \setminus W$ es abierto, así que $\{X \setminus W : W \in \mathcal{L}_a\}$ es una cubierta abierta de B.

Como B es cerrado en X, sabemos que B es compacto. Entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $W_1, W_2, ..., W_k \in \mathcal{L}_a$ tales que

$$B \subset (X \setminus W_1) \cup ... \cup (X \setminus W_k) = X \setminus (W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_k).$$

Sea $K_a = W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_k$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ tenemos que $W_i \in \mathcal{L}_a$, así que $a \in K_a$ y K_a es abierto y cerrado en X.

Como A es cerrado en X, sabemos que A es compacto. También sabemos que para todo $a \in A$ se cumple que $a \in K_a$ y que K_a es abierto, así que $\{K_a : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset K_{a_1} \cup K_{a_2} \cup ... \cup K_{a_n}$. Sean $K = K_{a_1} \cup K_{a_2} \cup ... \cup K_{a_n}$ y $L = X \setminus K$.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene que K_{a_i} es abierto y cerrado, así que K y L son cerrados. Por último, sabemos que $B \subset X \setminus K_{a_i}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, así que $B \subset (X \setminus K_{a_1}) \cap ... \cap (X \setminus K_{a_n}) = X \setminus K = L$ y ya sabíamos que $A \subset K_{a_1} \cup K_{a_2} \cup ... \cup K_{a_n} = K$. Hemos construido entonces los conjuntos deseados K y L. ■

1.2 Resultados Generales de Hiperespacios

Definición 1.3 Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. Decimos que un continuo X es *no degenerado* si tiene más de un punto.

Dado un continuo X trabajaremos con los siguientes hiperespacios:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$
$$\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\} \text{ y, para } n \in \mathbb{N},$$
$$\mathcal{C}_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} \text{ y}$$
$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Todos estos hiperespacios son considerados con la métrica de Hausdorff, que siempre será denotada por H ([14], p. 22). Al hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$ se le conoce como el *n-ésimo producto simétrico* de X. Si tomamos subconjuntos $U_1, \ldots, U_m$ de X, denotamos por

$$\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n = \{A \in \mathcal{F}_n(X) : A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Es sabido ([14], Ejercicio 2.8, p. 27) que la familia $\{\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \subset \mathcal{F}_n(X) : m \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, \ldots, U_m \text{ son abiertos en } X\}$ es una base para la topología en $\mathcal{F}_n(X)$ y que la familia $\{\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n \subset \mathcal{F}_n(X) : m \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_m$ son cerrados en $X\}$ es una familia de cerrados en $\mathcal{F}_n(X)$. Dados $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathcal{F}_n(X)$, denotamos por $B_H(\varepsilon, A)$ a la bola abierta de radio ε y centro A en el hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$. También definimos $N(\varepsilon, A) = \bigcup\{B(\varepsilon, a) : a \in A\}$.

Lema 1.4 *Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto conexo y cerrado de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}_m(X) \neq \emptyset$, para alguna $m \leq n$. Sea $A = \bigcup\{B : B \in \mathcal{A}\}$. Entonces $A \in \mathcal{C}_m(X)$ y cada una de las componentes de A intersecta a todos los elementos de $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}_m(X)$.*

Demostración. Primero veremos que el conjunto A es cerrado. Para esto, tomemos un punto $p \in X$ tal que $p = \lim p_k$, donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, $p_k \in A$. Mostraremos que $p \in A$. Dado que $p_k \in A$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $B_k \in \mathcal{A}$ tal que $p_k \in B_k$. Ya que $\mathcal{F}_n(X)$ es compacto ([14], Lema 2.3, p. 24), la sucesión $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{F}_n(X)$. Para nuestros fines, podemos suponer que ella misma converge. Así que existe $B \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $\lim B_k = B$. Como $\mathcal{A}$ es cerrado en $\mathcal{F}_n(X)$, tenemos que $B \in \mathcal{A}$. Como $p_k \in B_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $p \in B$ ([14], Ejercicio 4.4, p. 70). Por tanto $p \in A$. Esto termina la prueba de que A es cerrado.

Fijamos $B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{F}_m(X)$. Sean $C_1, \ldots, C_r$ las componentes de A que intersectan a B. Como B tiene a lo más m elementos, el número de componentes de A que tienen puntos de B es a lo más m, así que $r \leq m$. Queremos ver que $A = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ pues de esta manera tendremos que cada elemento de $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}_m(X)$ intersecta a cada componente de A. Supongamos, por el contrario, que existe una componente D de A que no intersecta B. Por el Teorema del Cable Cortado (Teorema 1.2), existen dos cerrados K y L de A tales que $C_1 \cup \ldots \cup C_r \subset K$, $D \subset L$ y $A = K \cup L$. Como ya hemos visto que A es cerrado en X, sabemos que K y L son cerrados en X.

Sean $\mathcal{K} = \{E \in \mathcal{A} : E \subset K\}$ y $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{A} : E \cap L \neq \emptyset\}$. Como $B \in \mathcal{A}$ y $B \subset C_1 \cup \ldots \cup C_r \subset K$, tenemos que $B \in \mathcal{K}$. Ya que $\emptyset \neq D \subset A$, si tomamos un punto $x \in D$, existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $x \in E$. De modo que $x \in E \cap L$. Entonces $E \in \mathcal{L}$. Con esto hemos mostrado que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ son diferentes del vacío. Dada $E \in \mathcal{A}$, $E \subset A = K \cup L$, de manera que $E \subset K$ o $E \cap L \neq \emptyset$, así que $E \in \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$. Con esto tenemos que $\mathcal{A} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$. Ya que $K \cap L = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Por ([14], Ejercicio 2.7, p. 27), $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ son cerrados en $\mathcal{F}_n(X)$. Con todo esto tenemos que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ constituyen una separación de $\mathcal{A}$. Esto es absurdo pues, por hipótesis, $\mathcal{A}$ es conexo. Esta contradicción prueba que $A = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ y termina la demostración del lema. ■

Lema 1.5 *Sean $C_1, C_{2,} \ldots, C_m$ subconjuntos cerrados, ajenos dos a dos, conexos y no vacíos de X. Supongamos que $m \leq n$. Entonces $\langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$ es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$.*

Demostración. Por ([14], Ejercicio 2.7, p. 27), sabemos que como los conjuntos $C_1, C_{2,} \ldots, C_m$ son todos cerrados, entonces $\langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$ es cerrado en $\mathcal{F}_n(X)$. Fijemos un punto $x_i \in C_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que $\{x_1, \ldots, x_m\} \in \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$. Así que $\langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$ es no vacío.

Sea $f : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ la función definida por $f((p_1, \ldots, p_n)) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Por ([14], Lema 2.3, p. 24), f es continua. Sea $S = \{(i_1, \ldots, i_n) : \{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, m\}\}$. Dada $s = (i_1, \ldots, i_n) \in S$, hacemos $C(s) = C_{i_1} \times \ldots \times C_{i_n} \subset X^n$. Como $C(s)$ es conexo, tenemos que $f(C(s))$ es conexo. Veremos que $f(C(s)) \subset \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$. Sea $p = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}) \in C_{i_1} \times \ldots \times C_{i_n}$. Entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $p_{i_j} \in C_{i_j} \subset C_1 \cup \ldots \cup C_m$, así que $f(p) \subset C_1 \cup \ldots \cup C_m$. Si $k \in \{1, \ldots, m\}$, como $s \in S$, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $i_j = k$. De manera que $p_k = p_{i_j} \in C_{i_j} = C_k$. Esto muestra que $f(p) \cap C_k \neq \emptyset$. Por tanto $f(p) \in \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$. Esto concluye la prueba de que $f(C(s)) \subset \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$. Notemos que $\{x_1, \ldots, x_m\} = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} = f((x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})) \in f(C(s))$. Por tanto $\bigcup\{f(C(s)) : s \in S\}$ es un subconjunto conexo de $\langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$.

Tomemos $A \in \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$. Para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, escribimos $\{x_1^{(k)}, \ldots, x_{s_k}^{(k)}\} = A \cap C_k$ (este conjunto es no vacío). Definimos una sucesión $s = (i_1, \ldots, i_n)$, donde $i_1 = \ldots = i_{s_1} = 1$, $i_{s_1+1} = \ldots = i_{s_1+s_2} = 2$, ..., $i_{s_1+\ldots+s_{m-1}+1} = \ldots = s_{s_1+\ldots+s_{m-1}+s_m} = m$. También hacemos $i_{s_1+\ldots+s_{m-1}+s_m+1} = \ldots = i_n = m$. Esto se puede hacer ya que $s_1 + \ldots + s_{m-1} + s_m$ es igual al número de elementos de A, así que este número es menor o igual que n. Esto muestra que la sucesión s está bien definida. Notemos que $C(s) = (C_1 \times \ldots \times C_1) \times (C_2 \times \ldots \times C_2) \times \ldots \times (C_m \times \ldots \times C_m) \times (C_m \times \ldots \times C_m)$. El primer factor aparece s_1 veces, el segundo s_2 veces, etc. el penúltimo s_m veces y el último $n - (s_1 + \ldots + s_{m-1} + s_m)$ veces. Así que podemos escribir $C(s) = C_1^{s_1} \times \ldots \times C_m^{s_m} \times C_m^{n-(s_1+\ldots+s_{m-1}+s_m)}$. Notemos también que, para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, $(x_1^{(k)}, \ldots, x_{s_k}^{(k)}) \in C_k^{s_k}$, así que el punto $x = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{s_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{s_2}^{(2)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_{s_m}^{(m)}, x_{s_m}^{(m)}, \ldots, x_{s_m}^{(m)}) \in C(s)$. De manera que $f(x) = (A \cap C_1) \cup \ldots \cup (A \cap C_m) = A$ pertenece a $f(C(s))$. Con esto concluimos que $\bigcup\{f(C(s)) : s = s \in S\} = \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$. Esto muestra que $\langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$ es conexo y concluye la prueba del lema. ■

Definición 1.6 Dados $A, B \in \mathcal{C}(X)$, con $A \subsetneq B$, diremos que una función continua $\alpha : [0,1] \to \mathcal{C}(X)$ es un *arco ordenado de* A *a* B en $\mathcal{C}(X)$ si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ siempre que $0 \leq s < t \leq 1$.

La existencia de los arcos ordenados no es, de ninguna manera, trivial. Pero sí es un hecho muy conocido en la teoría de hiperespacios y ([14], Teorema 6.10, p. 90) nos provee con el siguiente teorema:

Teorema 1.7 *Dados $A, B \in \mathcal{C}(X)$, con $A \subsetneq B$, existe un arco ordenado de A a B en $\mathcal{C}(X)$.*

1.3 Topología de Identificación

Dado un conjunto G, un espacio topológico X y una función suprayectiva $p : X \to G$ uno podría preguntarse ¿Cuál es la topología más grande que se le puede dar a G para que la función p sea continua?. La respuesta a esta pregunta es la llamada *topología de identificación* de G inducida por la función p (o simplemente topología de identificación inducida por p).

Definición 1.8 Dados un conjunto G, un espacio topológico X y una función suprayectiva $p : X \to G$, llamamos la *topología de identificación de G inducida por la función p*, al conjunto $\mathcal{T}_p = \{A \subset G : p^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$, donde $\mathcal{T}$ representa a la topología del espacio X.

Teorema 1.9 *La topología de identificación es la máxima topología para G que hace continua a p.*

Demostración. Lo primero que hay que hacer es asegurarnos de que $\mathcal{T}_p$ es una topología. Dados $A, B \in \mathcal{T}_p$ sabemos que $p^{-1}(A), p^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ y que $\mathcal{T}$ es una topología, así que $p^{-1}(A) \cap p^{-1}(B) = p^{-1}(A \cap B) \in \mathcal{T}$ y por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{T}_p$. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es un conjunto arbitrario de elementos de $\mathcal{T}_p$, notemos que, como cada $p^{-1}(A_\alpha) \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{\alpha \in J} p^{-1}(A_\alpha) \in \mathcal{T}$. También notemos que $p^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in J} p^{-1}(A_\alpha)$ con lo que tenemos que $\bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathcal{T}_p$. Finalmente, $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$ y $p^{-1}(G) = X \in \mathcal{T}$, por lo que $\emptyset, G \in \mathcal{T}_p$. Hemos probado entonces que la topología de identificación sí es una topología para G.

Supongamos que $\mathcal{T}'$ es una topología de G con la cual la función p es continua. Sea $A \in \mathcal{T}'$. Como la función p es continua con $\mathcal{T}'$ como topología para G, sabemos que $p^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. Pero esto es suficiente para asegurar $A \in \mathcal{T}_p$. Esto muestra que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_p$ y por lo tanto $\mathcal{T}_p$ es la máxima topología (en el sentido de la contención) que hace continua a p.
■

Definición 1.10 Dada una función entre espacios topologicos $p : X \to Y$, decimos que p es una *identificación* si la topología de Y coincide con la topología de identificación inducida por p.

Teorema 1.11 (de Trasgresión) *Sea $p : X \to Y$ una identificación y $f : X \to Z$ una función continua tal que $f(p^{-1}(y))$ es un conjunto de un solo punto, para toda $y \in Y$. Entonces existe una función continua $g : Y \to Z$ tal que $g \circ p = f$.*

Demostración. Definimos $g : Y \to Z$ como $g(y) =$ el único punto del conjunto $f(p^{-1}(y))$, para toda $y \in Y$. Como, por hipótesis $f(p^{-1}(y))$ es un punto para toda $y \in Y$, sabemos que g está bien definida. Notemos que dada $x \in X$ tenemos que $g(p(x)) = f(p^{-1}(p(x))) = f(x)$, ya que f vale lo mismo en todos los puntos de $p^{-1}(p(x))$, así que $g \circ p = f$.

Para mostrar la continuidad de g, tomemos un abierto A de Z. Como f es continua $f^{-1}(A)$ es abierto en X, es decir $(g \circ p)^{-1}(A) = p^{-1}(g^{-1}(A))$ es abierto en X. Como p es una identificación, esto implica que $g^{-1}(A)$ es abierto en Y, así que g es continua. ■

1.4 Espacios de Descomposición

Definición 1.12 Sea $\mathcal{P}$ una colección de subconjuntos no vacíos de un espacio topológico X, decimos que $\mathcal{P}$ es una *partición* de X si:

1. Para todo $x \in X$, existe $G \in \mathcal{P}$ tal que $x \in G$.
2. Los elementos de $\mathcal{P}$ son ajenos dos a dos.
3. Los elementos de $\mathcal{P}$ son cerrados.

Dada $\mathcal{P}$ una partición de X podemos considerar la función $\pi : X \to \mathcal{P}$ definida, para cada $x \in X$, como $\pi(x) = G \in \mathcal{P}$ si y sólo si $x \in G$. De la definición de partición se sigue que π está bien definida y es suprayectiva.

Con esto podemos darle a $\mathcal{P}$ la topología de identificación inducida por la función π, es decir, un subconjunto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{P}$ es abierto en $\mathcal{P}$ si y sólo sí el conjunto $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup\{B : B \in \mathcal{U}\}$ es abierto en X. Al espacio topológico resultante lo llamaremos el *espacio de descomposición* de $\mathcal{P}$ y lo denotaremos $X/\mathcal{P}$ (es decir $X/\mathcal{P}$ es el espacio topológico cuyo conjunto es $\mathcal{P}$ dotado con la topología inducida por π).

Notemos que, por la elección de la topología en $X/\mathcal{P}$, la función $\pi : X \to X/\mathcal{P}$ es automáticamente continua (a esta función la llamaremos la *proyección natural de* X *a* $X/\mathcal{P}$). Nuestra meta final es encontrar una condición suficiente sobre $\mathcal{P}$ para que el espacio $X/\mathcal{P}$ sea un continuo, para un continuo X.

Observemos que cuando X es un continuo, como la función π es continua, sabemos que $\pi(X) = X/\mathcal{P}$ es un espacio conexo y compacto, sin importar las propiedades de $\mathcal{P}$. Para que $X/\mathcal{P}$ sea un continuo falta únicamente que sea metrizable. A continuación mostraremos una condición necesaria y suficiente para que $X/\mathcal{P}$ sea metrizable.

Definición 1.13 Dada $\mathcal{P}$ una partición de un espacio X, decimos que $\mathcal{P}$ es *semicontinua superiormente* si para todo $G \in \mathcal{P}$ y todo abierto U de X tal que $G \subset U$, existe un abierto V de X tal que $G \subset V \subset U$ y que cada vez que $H \in \mathcal{P}$ y $H \cap V \neq \emptyset$ se tiene que $H \subset V$.

Lema 1.14 *Una partición $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente si y sólo si para todo $G \in \mathcal{P}$ y todo abierto U tal que $G \subset U$ existe un abierto V tal que $G \subset V \subset U$ y $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$.*

Demostración. Basta demostrar que si V es un abierto de X, entonces V cumple la condición que $H \in \mathcal{P}$ y $H \cap V \neq \emptyset$ implica que $H \subset V$ si y sólo si $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$.

(Necesidad) Supongamos que V cumple que $H \in \mathcal{P}$ y $H \cap V \neq \emptyset$ implica que $H \subset V$. Sea $x \in \pi^{-1}(\pi(V))$, con esto sabemos que $\pi(x) \in \pi(V)$. Sea $G \in \mathcal{P}$ tal que $x \in G$, es decir, $G = \pi(x) \in \pi(V)$.

Con esto podemos elegir $y \in V$ tal que $\pi(y) = G$. Por la definición de π, esto implica que $y \in G$. Entonces $y \in G \cap V$ y por hipótesis esto implica que $G \subset V$, en particular, $x \in V$ y entonces $\pi^{-1}(\pi(V)) \subset V$, la contención $V \subset \pi^{-1}(\pi(V))$ se da para cualquier función. Por lo tanto $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$.

(Suficiencia) Supongamos ahora que $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$. Sea $H \in \mathcal{P}$ tal que $H \cap V \neq \emptyset$. Sea $y \in H \cap V$. Como $y \in H$ sabemos por definición de π que $\pi(y) = H$. Como $y \in V$ tenemos que $\pi(y) \in \pi(V)$. Entonces $H = \pi^{-1}(H) = \pi^{-1}(\pi(y)) \subset \pi^{-1}(\pi(V)) = V$. ■

Teorema 1.15 *Una partición $\mathcal{P}$ de X es semicontinua superiormente si y sólo si $X/\mathcal{P}$ es T_2.*

Demostración. (Suficiencia) Supongamos que $X/\mathcal{P}$ es T_2. Sean $G \in \mathcal{P}$ y U un abierto de X tales que $G \subset U$. Por el Lema 1.14, para que $\mathcal{P}$ sea semicontinua superiormente, basta con encontrar un abierto V tal que $G \subset V \subset U$ y que $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$.

Como $X \setminus U$ es un compacto y π es continua, sabemos que $\pi(X \setminus U)$ es compacto. Como $X/\mathcal{P}$ es T_2, sabemos que $\pi(X \setminus U)$ es cerrado. Por lo que $(X/\mathcal{P}) \setminus \pi(X \setminus U)$ es abierto. Como π es identificación esto implica que $\pi^{-1}((X/\mathcal{P}) \setminus \pi(X \setminus U))$ es abierto en X.

Hacemos $V = \pi^{-1}((X/\mathcal{P}) \setminus \pi(X \setminus U))$. Observemos que $H \in \pi(X \setminus U)$ si y sólo si existe $y \in X \setminus U$ tal que $\pi(y) = H$, esto es equivalente a que existe $y \in H \cap X \setminus U$.

Como $G \subset U$, sabemos que $G \in (X/\mathcal{P}) \setminus \pi(X \setminus U)$. Con esto, $G = \pi^{-1}(G) \subset \pi^{-1}((X/\mathcal{P}) \setminus \pi(X \setminus U)) = V$.

Sabemos que $X \setminus U \subset \pi^{-1}(\pi(X \setminus U))$, entonces $U \supset X \setminus \pi^{-1}(\pi(X \setminus U)) = \pi^{-1}((X/\mathcal{P}) \setminus \pi(X \setminus U)) = V$. Por lo tanto, hemos visto que $G \subset V \subset U$. Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(V)) &= \pi^{-1}(\pi(\pi^{-1}((X/\mathcal{P}) \setminus \pi(X \setminus U)))) \\ &= \pi^{-1}((X/\mathcal{P}) \setminus \pi(X \setminus U)) = V \end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente.

(Necesidad) Supongamos que $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente. Sean $G, H \in X/\mathcal{P}$ diferentes. Como G y H son cerrados en X, que es un espacio métrico, existen abiertos ajenos U_1 y U_2 de X tales que $G \subset U_1$ y $H \subset U_2$. Como $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente, el Lema 1.14 implica que existen abiertos V_1 y V_2 tales que $G \subset V_1 \subset U_1$, $H \subset V_2 \subset U_2$, $\pi^{-1}(\pi(V_1)) = V_1$ y $\pi^{-1}(\pi(V_2)) = V_2$.

Entonces $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ son abiertos de $X/\mathcal{P}$, pues $\pi^{-1}(\pi(V_1)) = V_1$ y $\pi^{-1}(\pi(V_2)) = V_2$ son abiertos de X y π es identificación. Como $G \subset V_1$ y $H \subset V_2$ sabemos que $G \in \pi(V_1)$ y $H \in \pi(V_2)$.

Dado $F \in \pi(V_1)$, sabemos que $F \subset \pi^{-1}(\pi(V_1)) = V_1$ y como $V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$, tenemos que $F \cap V_2 = \emptyset$, es decir, $F \notin \pi(V_2)$.

Entonces hemos probado que $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ son abiertos, que $G \in \pi(V_1)$ y $H \in \pi(V_2)$ y que $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$, con lo que $X/\mathcal{P}$ es T_2. ∎

El teorema anterior muestra la necesidad de que $\mathcal{P}$ sea semicontinua superiormente para que $X/\mathcal{P}$ sea metrizable, ya que si $X/\mathcal{P}$ es metrizable en particular es T_2.

Teorema 1.16 *Si $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente, entonces $X/\mathcal{P}$ tiene una base numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una base numerable de X y sea $\mathcal{B} = \{ \bigcup_{i=1}^{n} U_i : n \in \mathbb{N}, U_i \in \mathcal{A}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{B}_n = \{U \subset X :$ existen $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{A}$ tales que $U = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n\}$. Notemos que $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$. Afirmamos que $\mathcal{B}$ es una base numerable de X cerrada bajo uniones finitas.

Como $\mathcal{A}$ es numerable cada $\mathcal{B}_n$ es numerable y por lo tanto, $\mathcal{B}$ es numerable. Es claro que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y que todos los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, así que $\mathcal{B}$ es base de X. Por último, tomemos $V_1, V_2, ..., V_k \in \mathcal{B}$. Para cada $j \in \{1, 2, ..., k\}$ sean $U_{j_1}, U_{j_2}, ..., U_{j_{n_j}} \in \mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{i=1}^{n_j} U_{j_i} = V_j$. Con esto $\bigcup_{j=1}^{k} V_j = \bigcup_{j=1}^{k} (\bigcup_{i=1}^{n_j} U_{j_i})$ que es una unión finita de elementos de $\mathcal{A}$, así que $\bigcup_{j=1}^{k} V_j \in \mathcal{B}$. Hemos probado entonces que $\mathcal{B}$ es una base numerable de X cerrada bajo uniones finitas.

Dados $G \in X/\mathcal{P}$ y un abierto A de X tales que $G \subset A$, mostraremos que existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $G \subset U \subset A$. Para cada $x \in G$, existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subset A$. Como G es cerrado en X, sabemos que G es compacto, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ tales que $G \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_n} \subset A$. Cada $U_{x_i} \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es cerrado bajo uniones finitas, así que $U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_n} \in \mathcal{B}$ y, como ya sabíamos, $G \subset U \subset A$.

Sea $\mathcal{D} = \{(U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$: existe un abierto W de X tal que $V \subset W \subset U$ y $\pi^{-1}(\pi(W)) = W\}$. Como $\mathcal{B}$ es numerable sabemos que $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ es numerable y dado que $\mathcal{D} \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ tenemos que $\mathcal{D}$ es numerable. Para cada $(U,V) \in \mathcal{D}$, escogemos un abierto $W(U,V)$ tal que $\pi^{-1}(\pi(W(U,V)) = W(U,V)$ y $V \subset W(U,V) \subset U$. Sea $\mathcal{C} = \{\pi(W(U,V)) : (U,V) \in \mathcal{D}\}$.

Mostraremos que $\mathcal{C}$ es una base numerable para $X/\mathcal{P}$. La función $r : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ definida como $r((U,V)) = \pi(W(U,V))$ es obviamente suprayectiva, así que $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{D}|$ y entonces $\mathcal{C}$ es numerable.

Para ver que $\mathcal{C}$ es base, tomemos $G \in X/\mathcal{P}$ y un abierto $\mathcal{U}$ de $X/\mathcal{P}$ tal que $G \in \mathcal{U}$. Sea $A = \pi^{-1}(\mathcal{U})$. Como $G \in \mathcal{U}$ y $\pi(x) = G$, para todo $x \in G$, sabemos que $G \subset \pi^{-1}(\mathcal{U}) = A$. Como $\mathcal{U}$ es abierto y π es continua, A es abierto. Por lo que probamos hace tres párrafos, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $G \subset U \subset A$. Como $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente, existe un abierto W tal que $\pi^{-1}(\pi(W)) = W$ y $G \subset W \subset U$. De nuevo, por lo probado anteriormente, sabemos que existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $G \subset V \subset W$. Por la existencia de W la pareja $(U,V) \in \mathcal{D}$ con lo que $\pi(W(U,V)) \in \mathcal{C}$.

Como $W(U,V)$ es un abierto por definición y $\pi^{-1}(\pi(W(U,V))) = W(U,V)$, sabemos que $\pi\,(W(U,V))$ es un abierto de $X/\mathcal{P}$. Como $G \subset V \subset W(U,V)$, tenemos que $G \in \pi(W(U,V))$. Para concluir notemos que $W(U,V) \subset U \subset A = \pi^{-1}(\mathcal{U})$ y entonces $\pi(W(U,V)) \subset \mathcal{U}$. Hemos probado entonces que $\pi(W(U,V)) \in \mathcal{C}$ y que $G \in \pi(W(U,V)) \subset \mathcal{U}$. Esto prueba que $\mathcal{C}$ es una base numerable para $X/\mathcal{P}$. ■

Hemos probado que, cuando $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente y X es un continuo, se tiene que $X/\mathcal{P}$ es un espacio conexo, compacto, T_2 y tiene base numerable. El siguiente teorema muestra que esto es suficiente para que $X/\mathcal{P}$ sea metrizable.

Teorema 1.17 *Si un espacio topológico Y es compacto, T_2 y tiene base numerable, entonces Y es metrizable.*

Demostración. Primero recordemos que si Y es compacto y T_2 entonces Y es T_4. Sean $\mathcal{B}$ una base numerable de Y y $\mathcal{C} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : U \neq \emptyset, \overline{U} \subset V\}$. Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es numerable, sabemos que $\mathcal{C}$ es numerable. Numeremos los elementos de $\mathcal{C} = \{(U_1, V_1), (U_2, V_2), ...\}$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ escogemos una función continua $f_i : Y \to [0, 1]$ tal que $f_i(\overline{U_i}) \subset \{0\}$ y $f_i(Y \setminus V_i) \subset \{1\}$. Esta función existe en virtud de el Lema de Urysohn ([11], Teorema 4.1, p. 146) y de que Y es T_4.

Sea $f : Y \to [0, 1]^{\mathbb{N}}$ definida como $f(x) = (f_i(x))_{i=1}^{\infty}$. Como f_i es continua para toda $i = 1, 2, ...$, tenemos que f es continua ([11], Teorema 2.2, p. 101). Mostraremos que f es un encaje.

Sean $x, y \in Y$ diferentes. Como Y es T_2 existen abiertos ajenos A y B tales que $x \in A$ y $y \in B$. Como $\mathcal{B}$ es base existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset A$. Con esto $y \in Y \setminus V$.

Como Y es T_3 y $Y \setminus V$ es un cerrado tal que $x \notin Y \setminus V$, existen abiertos ajenos Z y W tales que $x \in Z$ y $Y \setminus V \subset W$. Como $\mathcal{B}$ es base existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset Z$. Notemos que $Y \setminus W$ es un cerrado que contiene a Z, así que $Y \setminus W$ es un cerrado que contiene a U. Con esto $\overline{U} \subset Y \setminus W \subset V$. Entonces la pareja $(U, V) \in \mathcal{C}$, $x \in U$ y $y \in Y \setminus V$.

Como $(U, V) \in \mathcal{C}$, tenemos que $(U, V) = (U_i, V_i)$, para alguna $i \in \mathbb{N}$. Como $x \in U$, sabemos que $f_i(x) = 0$ y como $y \in Y \setminus V$, sabemos que $f_i(y) = 1$. Esto implica que $f(x) \neq f(y)$ y por lo tanto f es inyectiva.

El espacio Y es compacto y $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ es T_2 así que el hecho de que f sea inyectiva es suficiente para que f sea un encaje. Sabemos que $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ es metrizable, y $f(Y) \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$, así que $f(Y)$ es metrizable. Como f es encaje, sabemos que $f(Y)$ es homeomorfo a Y y por lo tanto Y es metrizable. ■

Teorema 1.18 *$X/\mathcal{P}$ es un metrizable si y sólo si $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente.*

Demostración. (Necesidad) Si $X/\mathcal{P}$ es metrizable, en particular es T_2, así que, por el Teorema 1.15, $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente.

(Suficiencia) Si $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente, entonces, por el Teorema 1.15, $X/\mathcal{P}$ es T_2 y, por el Teorema 1.16, $X/\mathcal{P}$ tiene una base numerable. El Teorema 1.17 implica que $X/\mathcal{P}$ es metrizable. ■

Hemos probado entonces que una condición necesaria y suficiente para que $X/\mathcal{P}$ sea un continuo, cuando X lo es, es que $\mathcal{P}$ sea semicontinua superiormente.

1.5 Límites Inversos

Esta Sección sólo se utilizará en la Sección 3.7 pero es un tema muy importante para el estudio general de la teoría de los continuos.

Los siguientes son resultados que son cubiertos en un curso básico de topología:

1. Dado un espacio métrico (X, d) sabemos que hay una métrica que es equivalente a d y acotada por el número 1 (por ejemplo, $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$).
2. Dada una sucesión de espacios métricos $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ (cada uno con su métrica acotada por el número 1) sabemos que $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ se puede metrizar con la métrica $\rho((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}$.
3. El producto de espacios conexos es conexo ([11], Teorema 1.7, p.109).
4. El producto de espacios compactos es compacto ([11], Teorema 1.4 (4), p. 224).

5. Una función $f : Y \to \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ es continua si y sólo si $\pi_k \circ f$ es continua para cada proyección canónica $\pi_k : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to X_k$ ([11], Teorema 2.2, p.101).

Con estos resultados es muy fácil concluir que, si cada X_i es un continuo, el producto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ también lo es.

Definición 1.19 Una *sucesión inversa*, es una sucesión de parejas de la forma $\{(X_i, f_i)\}_{i=1}^{\infty}$, en donde para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que X_i es un continuo y $f_i : X_{i+1} \to X_i$ es una función continua.

Definición 1.20 Dada una sucesión inversa $\{(X_i, f_i)\}_{i=1}^{\infty}$ definimos su *límite inverso* como el siguiente subespacio de $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$:

$$\varprojlim \{(X_i, f_i)\} = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i \in \mathbb{N} \right\}$$

Teorema 1.21 *Para toda sucesión inversa $\{(X_i, f_i)\}_{i=1}^{\infty}$ su límite inverso, $\varprojlim \{(X_i, f_i)\}_{i=1}^{\infty}$, es un continuo.*

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos:

$$K_m = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i \in \{1, 2, ..., m-1\} \right\}$$

Es claro que $K_m \subset K_{m+1}$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y que $\varprojlim \{(X_i, f_i)\}_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_m$. Es bien sabido que la intersección de continuos anidados es un continuo ([14], Corolario 4.4, p. 69), así que, para probar el teorema, bastaría con probar que K_m es un continuo, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Sea $g : \prod_{i=m}^{\infty} X_i \to K_m$ definida como $g((x_k)_{k=m}^{\infty}) = (y_k)_{k=1}^{\infty}$, donde $y_k = x_k$ si $k \geq m$ y $y_k = f_k(y_{k+1})$ si $k \in \{1, 2, ..., m-1\}$. Dado $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in K_m$, sabemos que $x_k = f_k(x_{k+1})$ si $k \in \{1, 2, ..., m-1\}$, así que $g((x_k)_{k=m}^{\infty}) = (x_k)_{k=1}^{\infty}$. Con esto obtenemos que g es suprayectiva.

Como $\prod_{i=m}^{\infty} X_i$ es un continuo (es un producto numerable de espacios métricos, compactos y conexos) y K_m es imagen continua de él, K_m es un continuo y $\varprojlim \{(X_i, f_i)\}_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$ también lo es. ■

Dada una función continua $f : X \to X$ podemos considerar la sucesión inversa $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, donde $X_i = X$ y $f_i = f$, para toda $i \in \mathbb{N}$. Al límite inverso de esta sucesión en particular lo denotaremos simplemente como $\varprojlim(X, f)$.

Definición 1.22 Dado $Y = \varprojlim(X, f)$ definimos la función $\widehat{f} : Y \to Y$ como $\widehat{f}((x_1, x_2, x_{3,}...)) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), ...) = (f(x_1), x_1, x_2, ...)$.

Como $(x_1, x_2, x_{3,}...) \in Y$, sabemos que $f_i(x_i) = f(x_i) = f_{i-1}(x_i) = x_{i-1}$, para toda $i > 1$, y $f_1(x_1) = f(x_1)$ así que la función está bien definida.

Teorema 1.23 *Para toda función continua $f : X \to X$, si hacemos $Y = \varprojlim(X, f)$, se tiene que la función $\widehat{f} : Y \to Y$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $\pi_k : Y \to X$ la proyección canónica en la *k-ésima* coordenada. Notemos que

$$\begin{aligned}\pi_k \circ \widehat{f}((x_1, x_2, x_{3,}...)) &= \pi_k((f(x_1), f(x_2), f(x_3), ...)) = f(x_k) \\ &= f \circ \pi_k((x_1, x_2, x_{3,}...))\end{aligned}$$

Con lo que $\pi_k \circ \widehat{f} = f \circ \pi_k$. Como f es continua, todas las composiciones $f \circ \pi_k$ son continuas, así que todas las composiciones $\pi_k \circ \widehat{f}$ son continuas. Por lo tanto, $\widehat{f}$ es continua.

Si definimos $h : Y \to Y$ como $h((x_1, x_2, x_{3,}...)) = (x_2, x_3, x_4, ...)$ vemos que

$$\widehat{f} \circ h((x_1, x_2, x_{3,}...)) = \widehat{f}((x_2, x_3, x_4, ...)) = (f(x_2), x_2, x_3, ...).$$

Como $(x_1, x_2, x_{3,}...) \in Y$, tenemos que $f(x_2) = x_1$. Con lo que $\widehat{f} \circ h((x_1, x_2, x_{3,}...)) = (x_1, x_2, x_{3,}...)$. Y también podemos ver que

$$h \circ \widehat{f}((x_1, x_2, x_{3,}...)) = h((f(x_1), x_1, x_2, ...)) = (x_1, x_2, x_{3,}...)$$

Con esto, $\widehat{f}$ es biyectiva, y como Y es un continuo esto es suficiente para que $\widehat{f}$ sea un homeomorfismo. ■

Capítulo 2

Propiedades Tradicionales

Definición 2.1 Un *mapeo* es una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ entre continuos X y Y.

Definición 2.2 Dado un mapeo $f : X \to Y$ definimos la *función inducida* $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ dada por $f_n(A) = f(A)$ (la imagen de A bajo f).

En ([14], Ejercicio 2.10, p. 27) se muestra que f_n también es un mapeo.

En este capítulo se tratarán las propiedades tradicionales que puede tener un mapeo entre continuos y se estudiará la relación entre que el mapeo f tenga dicha propiedad y que el mapeo inducido f_n la tenga.

2.1 Homeomorfismos

Definición 2.3 Un mapeo $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo* si existe un mapeo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$ y $f \circ g = id_Y$.

Recordemos que si $f : X \to Y$ es una biyección continua, donde X es compacto y Y es T_2, entonces f es un homeomorfismo.

Teorema 2.4 *Sea $f : X \to Y$ un mapeo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

$a)$ f *es un homeomorfismo,*
$b)$ f_n *es un homeomorfismo, para alguna* $n \in \mathbb{N}$*,*
$c)$ f_n *es un homeomorfismo, para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. $a) \Rightarrow c)$ Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f : X \to Y$ es un homeomorfismo. Sabemos que f_n es un mapeo así que, sólo tenemos que ver que es inyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{F}_n(X)$ diferentes, sin perder generalidad supongamos que existe $a \in A \setminus B$. Sabemos que $f(a) \in f_n(A)$ y como f es inyectiva $f(b) \neq f(a)$ para todo $b \in B$, así que $f(a) \notin f_n(B)$. Esto muestra que $f_n(A) \neq f_n(B)$ con lo que f_n es inyectiva y, por lo tanto, un homeomorfismo.

$b) \Rightarrow a)$ Supongamos que $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un homeomorfismo, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Para ver que f es homeomorfismo, basta ver que es biyección. Sabemos que f es mapeo así que para que sea biyección basta con que sea inyectiva. Dados $x, y \in X$ diferentes, sabemos que $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{F}_n(X)$ son diferentes. Como f_n es inyectiva sabemos que $\{f(x)\} = f_n(\{x\}) \neq f_n(\{y\}) = \{f(y)\}$. Así que $f(x) \neq f(y)$, con lo que f es inyectiva y, por lo tanto, un homeomorfismo. ■

2.2 Monotoneidad

Definición 2.5 Un mapeo $f : X \to Y$ es *monótono* si $f^{-1}(y)$ es un subconjunto conexo de X para cada $y \in Y$.

Teorema 2.6 *Sea* $f : X \to Y$ *un mapeo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*
$a)$ f *es monótono,*
$b)$ f_n *es monótono, para alguna* $n \in \mathbb{N}$*,*
$c)$ f_n *es monótono, para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. $a) \Rightarrow c)$ Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f : X \to Y$ es monótono. Sea $B = \{y_1, \ldots, y_m\} \in \mathcal{F}_n(Y)$, donde $m \leq n$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, hacemos $C_i = f^{-1}(y_i)$. Como f es monótono, cada C_i es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de X. Además, los conjuntos $C_1, \ldots, C_m$ son ajenos entre sí. Por el Lema 1.2, el conjunto $\mathcal{A} = \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{F}_n(X)$. Si $A \in$

$\langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$, entonces $A \subset C_1 \cup \ldots \cup C_m = f^{-1}(y_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(y_m) = f^{-1}(\{y_1, \ldots, y_m\})$, así que $f(A) \subset \{y_1, \ldots, y_m\}$. Dada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $x_i \in A \cap C_i$, de modo que $y_i = f(x_i) \in f(A)$. De modo que $f_n(A) = f(A) = \{y_1, \ldots, y_m\} = B$. Hemos mostrado que $\mathcal{A} \subset f_n^{-1}(B)$. Por otra parte, si $A \in f_n^{-1}(B)$, entonces $f(A) = \{y_1, \ldots, y_m\}$, de aquí que $A \subset f^{-1}(\{y_1, \ldots, y_m\}) = C_1 \cup \ldots \cup C_m$ y A intersecta a cada C_i. De manera que $A \in \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n = \mathcal{A}$. Esto prueba que $f_n^{-1}(B) \subset \mathcal{A}$. Por tanto $\mathcal{A} = f_n^{-1}(B)$. Esto termina la demostración de que $f_n^{-1}(B)$ es conexo. Por tanto f_n es monótono.

Claramente $c) \Rightarrow b)$.

$b) \Rightarrow a)$ Ahora supongamos que f_n es monótono para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sea $y \in Y$. Entonces $f_n^{-1}(\{y\})$ es un subconjunto conexo y cerrado de $\mathcal{F}_n(X)$. Sea $A = \bigcup\{B : B \in f_n^{-1}(\{y\})\}$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces $\{x\} \in f_n^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{F}_1(X)$. Así que podemos aplicar el Lema 1.1 y concluir que A es conexo. Vamos a ver que $A = f^{-1}(y)$. Si $p \in A$, entonces existe $B \in f_n^{-1}(\{y\})$ tal que $p \in B$. Como $f(B) = \{y\}$, tenemos que $f(p) = y$, de manera que $p \in f^{-1}(y)$. Con esto concluimos que $A \subset f^{-1}(y)$. Por otra parte, si $p \in f^{-1}(y)$, entonces $f_n(\{p\}) = \{y\}$. De modo que $p \in A$. Esto muestra que $f^{-1}(y) \subset A$, y por tanto, $A = f^{-1}(y)$. Con esto queda probado que $f^{-1}(y)$ es conexo. Por tanto f es monótono. ■

2.3 Apertura

Definición 2.7 Un mapeo $f : X \to Y$ es *abierto* si $f(U)$ es abierto en Y para cada subconjunto abierto U de X.

Teorema 2.8 *Un mapeo $f : X \to Y$ es abierto si y sólo si $f_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es abierto.*

Demostración. (Necesidad) Supongamos que f es abierto. Consideremos un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}_2(X)$. Tomemos un elemento cualquiera $f_2(A) \in f_2(\mathcal{U})$, donde $A \in \mathcal{U}$. Ponemos $A = \{p, q\}$, donde es posible que $p = q$. Como $\mathcal{U}$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_H(\varepsilon, A) \subset \mathcal{U}$. Como f es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(\delta, f(p)) \subset f(B(\varepsilon, p))$ y $B(\delta, f(q)) \subset f(B(\varepsilon, q))$. Si $f(p) \neq f(q)$, podemos pedir también que $B(\delta, f(p)) \cap B(\delta, f(q)) = \emptyset$.

Afirmamos que $B_H(\delta, f_2(A)) \subset f_2(\mathcal{U})$. Tomemos $B = \{w, z\} \in B_H(\delta, f_2(A))$. Entonces $H(\{w, z\}, \{f(p), f(q)\}) < \delta$. En el caso en que $f(p) \neq f(q)$, uno de los puntos w, z pertenece a $B(\delta, f(p))$ y el otro a $B(\delta, f(q))$. De modo que podemos suponer que $w \in B(\delta, f(p))$ y $z \in B(\delta, f(q))$. En el caso en que $f(p) = f(q)$, $w, z \in B(\delta, f(p)) = B(\delta, f(q))$. En todo caso, podemos suponer que $w \in B(\delta, f(p)) \subset f(B(\varepsilon, p))$ y $z \in B(\delta, f(q)) \subset f(B(\varepsilon, q))$. De manera que existen $u \in B(\varepsilon, p)$ y $x \in B(\varepsilon, q)$ tales que $f(u) = w$ y $f(x) = z$. Notemos que $H(\{u, x\}, \{p, q\}) < \varepsilon$. De manera que el conjunto $D = \{u, x\}$ pertenece a $\mathcal{U}$ y $f_2(D) = \{w, z\}$. Por tanto $B \in f_2(\mathcal{U})$. Esto prueba que $B_H(\delta, f_2(A)) \subset f_2(\mathcal{U})$ y que $f_2(\mathcal{U})$ es abierto.

(Suficiencia) Supongamos que f_2 es abierto y tomemos un abierto U en X. Dada $p \in U$, tenemos que $\{p\} \in \langle U \rangle_2$. Como f_2 es un mapeo abierto y $\langle U \rangle_2$ es abierto en $\mathcal{F}_2(X)$, tenemos que $f_2(\langle U \rangle_2)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2(Y)$ que tiene al elemento $f_2(\{p\}) = \{f(p)\}$, por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_H(\varepsilon, \{f(p)\}) \subset f_2(\langle U \rangle_2)$.

Afirmamos que $B(\varepsilon, f(p)) \subset f(U)$. Sea $y \in B(\varepsilon, f(p))$. Entonces $\{y\} \in B_H(\varepsilon, \{f(p)\}) \subset f_2(\langle U \rangle_2)$. De modo que existe $B \in \langle U \rangle_2$ tal que $\{y\} = f_2(B)$. Elegimos un punto $b \in B$. Entonces $b \in U$ y $f(b) = y$. Esto muestra que $y \in f(U)$. Hemos probado que $B(\varepsilon, f(p)) \subset f(U)$. De modo que $f(U)$ es abierto en Y. Por tanto f es abierta. ■

Teorema 2.9 *Si $f : X \to Y$ es un mapeo tal que Y es no degenerado y $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es abierto, para alguna $n \geq 3$, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Como X es compacto, Y es métrico y f es una función continua y suprayectiva, basta mostrar que f es inyectiva para obtener que f es un homeomorfismo.

Supongamos, por el contrario que existen dos puntos $x_1 \neq x_2$ en X tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Como Y es no degenerado y f es suprayectiva, existe $x_3 \in X$ tal que $f(x_3) \neq f(x_1)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, f(x_1)) \cap B(\varepsilon, f(x_3)) = \emptyset$. Por la continuidad de f, existe $\delta > 0$ tal que los conjuntos $B(\delta, x_1)$, $B(\delta, x_2)$ y $B(\delta, x_3)$ son ajenos dos a dos, $f(B(\delta, x_3)) \subset B(\varepsilon, f(x_3))$ y $f(B(\delta, x_1)) \cup f(B(\delta, x_2)) \subset B(\varepsilon, f(x_1))$.

Como f_n es abierto, $f_n(B_H(\delta, \{x_1, x_2, x_3\}))$ es un abierto de $\mathcal{F}_n(Y)$ que contiene al elemento $\{f(x_1), f(x_3)\}$. De manera que existe $\eta > 0$ tal que $B_H(\eta, \{f(x_1), f(x_3)\}) \subset f_n(B_H(\delta, \{x_1, x_2, x_3\}))$. Podemos pedir que $\eta < \varepsilon$. Elegimos puntos diferentes entre sí $y_1, \ldots, y_{n-1} \in (B(\eta, f(x_3)) \setminus \{f(x_3)\})$. Sea $B = \{f(x_1), y_1, \ldots, y_{n-1}\}$. Notemos que $B \in B_H(\eta, \{f(x_1), f(x_3)\})$ y como este conjunto está contenido en $f_n(B_H(\delta, \{x_1, x_2, x_3\}))$, existe $A \in B_H(\delta, \{x_1, x_2, x_3\})$ tal que $f(A) = B$. Entonces existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \in B(\delta, x_1)$ y $a_2 \in B(\delta, x_2)$. Entonces $a_1 \neq a_2$. Además, existen $u_1, \ldots, u_{n-1} \in A$ tales que $f(u_1) = y_1, \ldots, f(u_{n-1}) = y_{n-1}$. Como los puntos $y_1, \ldots, y_{n-1}$ son diferentes entre sí, tenemos que los puntos $u_1, \ldots, u_{n-1}$ son diferentes entre sí. Dada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $f(u_i) = y_i \in B(\eta, f(x_3)) \subset B(\varepsilon, f(x_3))$. Así que $f(u_i) \notin B(\varepsilon, f(x_1))$ y $f(u_i) \notin f(B(\delta, x_1)) \cup f(B(\delta, x_2))$. Esto implica que $u_i \notin B(\delta, x_1) \cup B(\delta, x_2)$. De manera que $u_i \neq a_1, a_2$. Entonces todos los puntos $a_1, a_2, u_1, \ldots, u_{n-1}$ son diferentes entre sí y todos ellos pertenecen a A. Esto es absurdo pues $A \in \mathcal{F}_n(X)$. Esta contradicción prueba que f es inyectiva y, por tanto, f es un homeomorfismo. ■

2.4 Confluencia

Definición 2.10 Un mapeo $f : X \to Y$ es:

- *Confluente* si para todo subcontinuo B de Y y toda componente A de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(A) = B$.
- *Débilmente confluente* si para todo subcontinuo B de Y existe una componente A de $f^{-1}(B)$ tal que $f(A) = B$.

- *Semiconfluente* si para todo subcontinuo B de Y y cualesquiera componentes C y D de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) \subset f(D)$ o $f(D) \subset f(C)$.

Claramente los mapeos confluentes son semiconfluentes y débilmente confluentes.

Ejemplo 2.11 *Existen continuos X y Y y un mapeo $f : X \to Y$ confluente (en particular débilmente confluente y semi confluente) tal que $f_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ no es confluente, débilmente confluente, ni semiconfluente.*

Consideremos a $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y sea $X = \mathbb{S}^1 \cup I \cup J$, donde I y J son dos rayos convergiendo cada uno a una mitad de $\mathbb{S}^1$ como se muestra en la Figura 2.1. Sea f la restricción de la función compleja $z \to z^2$ a X. Llamemos a $f(X) = Y$. Entonces $f(I)$ y $f(J)$ son dos rayos que se aproximan a $\mathbb{S}^1$ como en la Figura 2.1. Vamos a construír un subcontinuo $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}_2(Y)$ con el cual se niegan los tres tipos de confluencia mencionados.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{16}$. Sea $\alpha : [0, \infty) \to f(I)$ una parametrización de $f(I)$ por longitud de arco y sea $\mathcal{A} = \{\{\alpha(t), \alpha(t+\varepsilon)\} : t \in [0, \infty)\}$. Es decir, $\mathcal{A}$ es el conjunto de pares de puntos en $f(I)$ que están a distancia ε cuando ésta se mide sobre el rayo $f(I)$. La función $g : [0, \infty) \to [0, \infty) \times [0, \infty)$ definida como $g(t) = (t, t+\varepsilon)$ es claramente continua. Sabemos ([14], Lema 2.3, p. 24) que la función $p : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathcal{F}_2([0, \infty))$ definida como $p((t, s)) = \{t, s\}$ es continua. Así que la composición $\alpha_2 \circ p \circ g : [0, \infty) \to \mathcal{F}_2(f(I))$ es una función continua. Notemos que para todo $t \in [0, \infty)$, se tiene que

$$\alpha_2 \circ p \circ g(t) = \alpha_2 \circ p((t, t+\varepsilon)) = \alpha_2(\{t, t+\varepsilon\}) = \{\alpha(t), \alpha(t+\varepsilon)\}$$

Así que $\mathcal{A} = \alpha_2 \circ p \circ g([0, \infty))$ es conexo. Con lo que $\overline{\mathcal{A}}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(Y)$. Para construír $\mathcal{K}$ y mostrar que niega las tres definiciones de confluencia, nos interesa tener una descripción explícita de $\overline{\mathcal{A}}$. Esto se desarrolla a continuación.

Es muy claro que $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{F}_2(\mathbb{S}^1 \cup f(I))$. Supongamos que $A \in \overline{\mathcal{A}}$ y que $A \cap f(\mathbb{S}^1) \neq \emptyset$. Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $\lim A_k = A$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $t_k \in [0, \infty)$ tal que $A_k = \{\alpha(t_k), \alpha(t_k + \varepsilon)\}$.

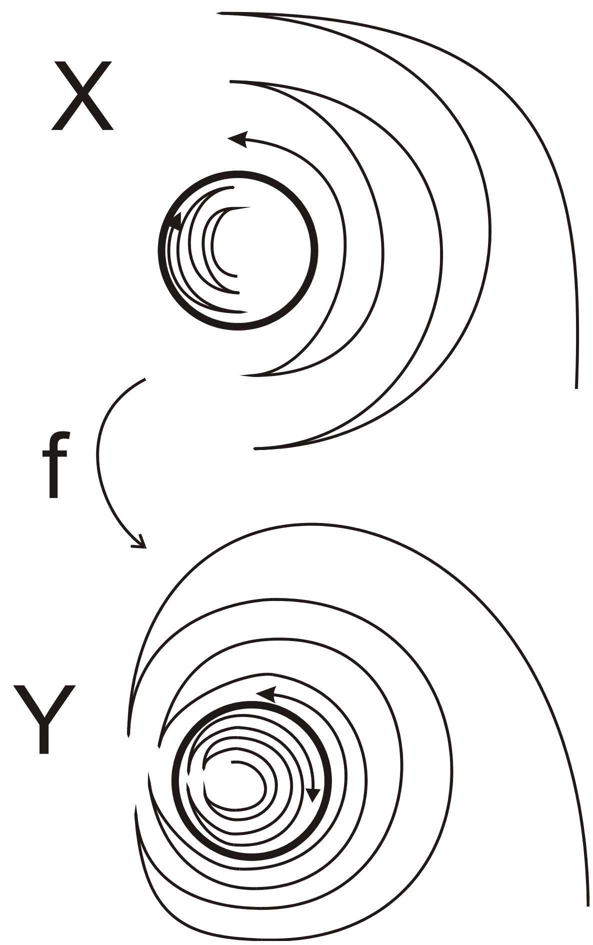


Figura 2.1

Dado $m \in \mathbb{N}$, sabemos que $\alpha_2 \circ p \circ g([0, m]) \subset \mathcal{F}_2(f(I))$ así que $\alpha_2 \circ p \circ g([0, m])$ es un compacto que no tiene a A, por lo que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq M$, se tiene que $A_k \in \mathcal{F}_2(Y) \setminus \alpha_2 \circ p \circ g([0, m])$, es decir que, para todo $k \geq M$, se tiene que $t_k + \varepsilon \geq m$. Esto prueba que $\lim t_k = \infty$. Por la forma en la que $f(I)$ converge a $\mathbb{S}^1$, es muy fácil convencerse de que, como $\lim A_k = A$ y $\lim t_k = \infty$ debe suceder que $A \subset \mathbb{S}^1$, es decir, $A \in \mathcal{F}_2(\mathbb{S}^1)$. Esto muestra que A no puede intersectar a $\mathbb{S}^1$ y a $f(I)$ a la vez. Es decir $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{F}_2(\mathbb{S}^1) \cup \mathcal{F}_2(f(I))$.

Mostraremos ahora que $\mathcal{A}$ es cerrado en $\mathcal{F}_2(f(I))$. Sean $A \in \overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{F}_2(f(I))$ y $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $\lim A_k = A$. Sea $r \in [0,\infty)$ tal que $\alpha(r) \in A$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $t_k \in [0,\infty)$ tal que $\alpha(t_k) \in A_k$ y $\lim \alpha(t_k) = \alpha(r)$, o equivalentemente, $\lim t_k = r$.

Dado que, para toda $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_k \in \mathcal{A}$ sabemos que $A_k = \{\alpha(t_k), \alpha(t_k \pm \varepsilon)\}$, como son una infinidad de parejas podemos encontrar una subsucesión $\{A_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ de manera que, para toda $i \in \mathbb{N}$, tengamos que $A_{k_i} = \{\alpha(t_{k_i}), \alpha(t_{k_i} + \varepsilon)\}$, o una en la que, para toda $i \in \mathbb{N}$, tengamos que $A_{k_i} = \{\alpha(t_{k_i}), \alpha(t_{k_i} - \varepsilon)\}$. Así que, sin perder generalidad, podemos suponer que la misma sucesión $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ya tiene la forma $A_k = \{\alpha(t_k), \alpha(t_k + \varepsilon)\}$. Con esto, $\lim A_k = \{\alpha(r), \alpha(r+\varepsilon)\} = A$ y entonces $A \in \mathcal{A}$. Hemos probado entonces que $\mathcal{A}$ es cerrado en $\mathcal{F}_2(f(I))$.

Como ya habíamos notado que $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{F}_2(\mathbb{S}^1) \cup \mathcal{F}_2(f(I))$ y además $\mathcal{A}$ es cerrado en $\mathcal{F}_2(f(I))$, tenemos que, para saber quién es $\overline{\mathcal{A}}$, sólo hay que analizar el conjunto $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{F}_2(\mathbb{S}^1)$. Por la definición de $\mathcal{A}$, y por la forma en la que $f(I)$ converge a $\mathbb{S}^1$, sabemos que el conjunto $\mathcal{B} = \left\{\left\{e^{ti}, e^{(t+\varepsilon)i}\right\} : t \in [-\pi, \pi - \varepsilon]\right\}$ es un subconjunto de $\overline{\mathcal{A}}$. El conjunto $\mathcal{B}$ consiste de los pares de puntos en $\mathbb{S}^1$ que están a distancia ε a los cuales les convergen puntos de esa forma de $f(I)$. Pero $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ todavía no es $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{F}_2(\mathbb{S}^1)$, faltan los pares de puntos que son límite de puntos que están "dando la vuelta" en los "picos" de $f(I)$. Y dichos puntos son los de el conjunto $\mathcal{C} = \left\{\left\{e^{(-\pi+t)i}, e^{(-\pi-t+\varepsilon)i}\right\} : t \in [0,\varepsilon]\right\} \cup \left\{\left\{e^{(\pi-t)i}, e^{(\pi+t-\varepsilon)i}\right\} : t \in [0,\varepsilon]\right\}$. Estas son las únicas dos formas de que puntos de $\mathcal{A}$ converjan a puntos de $\mathcal{F}_2(\mathbb{S}^1)$ y con eso tenemos que $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{F}_2(\mathbb{S}^1) = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

Si ahora consideramos una parametrización $\beta : [0,\infty) \to f(J)$ por longitud de arco de $f(J)$ y $\mathcal{D} = \{\{\beta(t), \beta(t+\varepsilon)\} : t \in [0,\infty)\}$. Haciendo un razonamiento completamente análogo, tendríamos que $\overline{\mathcal{D}}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(Y)$ y específicamente que $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. En donde β, $\mathcal{D}$ y J toman los papeles de α, $\mathcal{A}$ e I, respectivamente, pero los conjuntos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son los mismos.

En vista de que $\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{D}} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, tenemos que $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{D}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(Y)$. Éste es un subcontinuo con el que negaremos los tres tipos de confluencia a la vez.

Notemos que f actúa como homeomorfismo en I y en J así que podemos pensar que $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ y $f_2^{-1}(\mathcal{D})$ son los pares de puntos que distan $\frac{\varepsilon}{2}$ en I y J, cuando la distancia se mide sobre cada uno de estos rayos. Para saber quién es $f_2^{-1}(\mathcal{K})$ sólo falta analizar $f_2^{-1}(\mathcal{B})$ y $f_2^{-1}(\mathcal{C})$. Para cada punto $e^{xi} \in \mathbb{S}^1$ sabemos que $f^{-1}(e^{xi}) = \left\{e^{\frac{x}{2}i}, e^{(\frac{x}{2}+\pi)i}\right\}$. Entonces, dada $z \in \mathbb{S}^1$, $f^{-1}(z)$ es de la forma $\{w, -w\}$. Además, si $z, v \in \mathbb{S}^1$, $f^{-1}(\{z, v\})$ es un conjunto con a lo más 4 puntos. Dado un elemento $\{z, v\} \in \mathcal{C} \cup \mathcal{B}$, tenemos que la distancia (de longitud de arco) entre z y w es menor o igual que ε. De manera que si $\{w, u\}$ es tal que $f_2(\{w, u\}) = \{z, w\}$, con $f(w) = z$ y $f(u) = v$, tenemos que, o bien w y v distan a lo más $\frac{1}{4}$ o son casi antípodas.

Aplicando esto a cada par de puntos en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ obtenemos que $\overline{f_2^{-1}(\mathcal{A})}$ consta de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ y un conjunto contenido en $\mathcal{F}_2(R^+)$, donde R^+ es la semicircunferencia derecha de $\mathbb{S}^1$, $\overline{f_2^{-1}(\mathcal{D})}$ consta de $f_2^{-1}(\mathcal{D})$ y de un conjunto contenido en $\mathcal{F}_2(R^-)$, donde R^- es la semicircunferencia izquierda de $\mathbb{S}^1$. Notemos que $\overline{f_2^{-1}(\mathcal{A})}$ y $\overline{f_2^{-1}(\mathcal{D})}$ son cerrados, ajenos y conexos en $\mathcal{F}_2(X)$. Los demás puntos de $f_2^{-1}(\mathcal{K})$ son pares de puntos casi antípodas. De manera que $f_2^{-1}(\mathcal{K}) = \overline{f_2^{-1}(\mathcal{A})} \cup \overline{f_2^{-1}(\mathcal{D})} \cup \overline{(f_2^{-1}(\mathcal{K}) \setminus (\overline{f_2^{-1}(\mathcal{A})} \cup \overline{f_2^{-1}(\mathcal{D})}))}$ y estos tres cerrados son ajenos. Esto implica que $\overline{f_2^{-1}(\mathcal{A})}$ y $\overline{f_2^{-1}(\mathcal{D})}$ son componentes de $f_2^{-1}(\mathcal{K})$.

Pero notemos que $f_2(\overline{f_2^{-1}(\mathcal{A})}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \neq \mathcal{K}$, así que f_2 no es confluente. También, $f_2(\overline{f_2^{-1}(\mathcal{B})}) = \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ así que $f_2(\overline{f_2^{-1}(\mathcal{A})})$ y $f_2(\overline{f_2^{-1}(\mathcal{B})})$ no son comparables, por lo que f_2 no es semiconfluente. Para concluir, sólo hay que notar que $f_2^{-1}(\mathcal{A}) \subset \overline{f_2^{-1}(\mathcal{A})}$ así que si alguna componente de $f_2^{-1}(\mathcal{K})$ fuera a cubrir a $\mathcal{K}$, ésta debería ser $\overline{f_2^{-1}(\mathcal{A})}$. Pero hemos visto que $f_2(\overline{f_2^{-1}(\mathcal{A})}) \neq \mathcal{K}$ así que f_2 no es débilmente confluente. Esto muestra que $f_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ no es confluente, débilmente confluente, ni semiconfluente. ■

Teorema 2.12 *Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es confluente, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $f : X \to Y$ es confluente.*

Demostración. Sean B un subcontinuo no vacío de Y y D una componente de $f^{-1}(B)$. Claramente $\mathcal{F}_1(B)$ es homeomorfo a B y por tanto $\mathcal{F}_1(B)$ es un subcontinuo no vacío de $\mathcal{F}_n(Y)$. Mostraremos que $\mathcal{F}_1(D) \subset f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$. Para todo $\{y\} \in \mathcal{F}_1(D)$, tenemos que $f_n(\{y\}) = \{f(y)\}$, pero como $f(D) \subset B$, sabemos que $\{f(y)\} \in \mathcal{F}_1(B)$. Con esto $f_n(\mathcal{F}_1(D)) \subset \mathcal{F}_1(B)$ y por tanto $\mathcal{F}_1(D) \subset f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$.

Sabemos que $\mathcal{F}_1(D)$ es homeomorfo a D y por lo tanto conexo, así que $\mathcal{F}_1(D)$ es un conexo contenido en $f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$. Sea $\mathcal{C}$ la componente de $f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$ que contiene a $\mathcal{F}_1(D)$. Entonces $\mathcal{C}$ es conexo y $\mathcal{F}_1(D) \subset \mathcal{C}$, así que por el Lema 1.4, $M = \bigcup\{E : E \in \mathcal{C}\}$, es conexo. Ahora probaremos que $M = D$.

Dado $x \in D$, tenemos $\{x\} \in \mathcal{F}_1(D) \subset \mathcal{C}$ y entonces $x \in \bigcup\{E : E \in \mathcal{C}\} = M$. Con esto tenemos que $D \subset M$. Si $x \in M$ es por que existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$. Como $A \in \mathcal{C} \subset f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$, sabemos que $f_n(A) = \{b\}$, para algún $b \in B$, y en particular $f(x) = b$. Hemos probado que $M \subset f^{-1}(B)$ y ya sabíamos que M es conexo. Pero $D \subset M$ y D es componente de $f^{-1}(B)$, por lo que $D = M$.

Veamos ahora que $f(M) = B$. Ya vimos que $M \subset f^{-1}(B)$ por lo que $f(M) \subset B$. Dado $b \in B$, tenemos que $\{b\} \in \mathcal{F}_1(B)$. Sabemos que f_n es confluente y que $\mathcal{C}$ es una componente de $f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$ por lo que $f_n(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_1(B)$. Por lo tanto existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $f_n(A) = \{b\}$. Sea $x \in A$. Dado que $f_n(A) = \{b\}$, tenemos que $f(x) = b$. Como $x \in A \in \mathcal{C}$, sabemos que $x \in M$ y entonces $f(x) \in f(M)$, por lo que $b \in f(M)$. Esto muestra que $B \subset f(M)$ y entonces $f(M) = B$. Como $D = M$, tenemos $f(D) = f(M) = B$. Esto muestra que f es confluente. ■

Teorema 2.13 *Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es débilmente confluente, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $f : X \to Y$ es débilmente confluente.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y. Recordemos que $\mathcal{F}_1(B)$ es homeomorfo a B y por lo tanto un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(Y)$. Como f_n es débilmente confluente, existe una componente $\mathcal{D}$ de $f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$ tal que $f_n(\mathcal{D}) = \mathcal{F}_1(B)$.

Sea $G = \bigcup\{E : E \in \mathcal{D}\}$. Dada $x \in G$. Sea $A \in \mathcal{D}$ tal que $x \in A$. Como $\mathcal{D}$ es una componente de $f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$, sabemos que existe $b \in B$ tal que $f_n(A) = \{b\} \in \mathcal{F}_1(B)$. Dado que $x \in A$, sabemos que $f(x) = b \in B$, es decir $f(G) \subset B$ y por lo tanto $G \subset f^{-1}(B)$.

Sean C una componente de G y D la componente de $f^{-1}(B)$ que contiene a C. Dado $y \in B$, como $f_n(\mathcal{D}) = \mathcal{F}_1(B)$, existe $E \in \mathcal{D}$ tal que $f_n(E) = \{y\}$. Dado que $\mathcal{D}$ es cerrado y conexo, el Lema 1.4 nos dice que E intersecta a todas las componentes de G. Con esto, podemos elegir $z \in C \cap E$. Como $z \in E$, sabemos que $f(z) \in f_n(E) = \{y\}$, es decir $f(z) = y$. Además, como $z \in C \subset D$, tenemos que $f(z) = y \in f(D)$. Hemos probado entonces que $B \subset f(D)$ por lo que $f(D) = B$. Así que D es una componente de $f^{-1}(B)$ tal que $f(D) = B$. Esto prueba que f es débilmente confluente. ■

Teorema 2.14 *Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es semiconfluente, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $f : X \to Y$ es semiconfluente.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y y sean C y D componentes de $f^{-1}(B)$. Recordemos que $\mathcal{F}_1(B)$, $\mathcal{F}_1(C)$ y $\mathcal{F}_1(D)$ son homeomorfos a B, C y D respectivamente, y por lo tanto $\mathcal{F}_1(B)$ es subcontinuo de $\mathcal{F}_n(Y)$ y $\mathcal{F}_1(C)$ y $\mathcal{F}_1(D)$ son conexos. Mostraremos que $\mathcal{F}_1(C) \subset f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$. Para todo $\{y\} \in \mathcal{F}_1(C)$, tenemos que $f_n(\{y\}) = \{f(y)\}$, pero como $f(C) \subset B$, sabemos que $\{f(y)\} \in \mathcal{F}_1(B)$. Con esto $f_n(\mathcal{F}_1(C)) \subset \mathcal{F}_1(B)$ y por tanto $\mathcal{F}_1(C) \subset f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$. Análogamente $\mathcal{F}_1(D) \subset f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$.

Tomemos las componentes $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ de $f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$ que contienen a $\mathcal{F}_1(C)$ y $\mathcal{F}_1(D)$, respectivamente. Sean $M = \bigcup\{E : E \in \mathcal{C}\}$ y $N = \bigcup\{E : E \in \mathcal{D}\}$. Mostraremos que $M = C$ y $N = D$.

Sabemos que $\mathcal{C}$ es conexo y que $\mathcal{F}_1(C) \subset \mathcal{C}$, así que, por el Lema 1.4, M es conexo. Dado $x \in C$, tenemos $\{x\} \in \mathcal{F}_1(C) \subset \mathcal{C}$ y entonces $x \in \bigcup\{E : E \in \mathcal{C}\} = M$. Por lo que $C \subset M$.

Si $x \in M$ es por que existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$. Como $A \in \mathcal{C} \subset f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$ sabemos que $f_n(A) = \{b\}$, para algún $b \in B$, y en particular $f(x) = b$. Hemos probado que $M \subset f^{-1}(B)$ y ya sabíamos que M es conexo. Pero $C \subset M$ y C es componente de $f^{-1}(B)$, por lo que $C = M$. Análogamente $N = D$.

Como f_n es semiconfluente tenemos que $f_n(\mathcal{C}) \subset f_n(\mathcal{D})$ ó $f_n(\mathcal{D}) \subset f_n(\mathcal{C})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f_n(\mathcal{C}) \subset f_n(\mathcal{D})$. Mostraremos ahora que $f(C) \subset f(D)$. Sea $y \in f(C)$, entonces existe $c \in C$ tal que $f(c) = y$. Como $\mathcal{F}_1(C) \subset \mathcal{C}$ tenemos que $\{c\} \in \mathcal{C}$ y por lo tanto $\{y\} \in f_n(\mathcal{C}) \subset f_n(\mathcal{D})$. Sea $A \in \mathcal{D}$ tal que $f_n(A) = \{y\}$. Tomando $x \in A$, tenemos que $x \in N$ y que $f(x) = y$. Como $N = D$, sabemos que $x \in D$, por lo que $y = f(x) \in f(D)$ y entonces $f(C) \subset f(D)$. Esto implica que f es semiconfluente. ■

2.5 Ligereza

Definición 2.15 Decimos que un espacio topológico X es *totalmente disconexo* si sus componentes son conjuntos de un solo punto.

Lema 2.16 *Si X es métrico compacto, entonces X es totalmente disconexo si y sólo si para todo par de puntos distintos x e y existe un abierto y cerrado U de X tal que $x \in U$ y $y \notin U$.*

Demostración. Por el Lema 1.1, sabemos que $C_x = Q_x$, así que C_x consta de un solo punto si y sólo si Q_x consta de un solo punto, pero esto pasa si y sólo sí, para todo $y \in X$, diferente de x, existe un abierto y cerrado U de X tal que $x \in U$ y $y \notin U$. ■

Lema 2.17 *Si X es métrico compacto, entonces X es totalmente disconexo si y sólo si para todo subconjunto finito A de X y para todo punto $y \in X \setminus A$, existe un abierto y cerrado U de X tal que $A \subset U$ y $y \notin U$.*

Demostración. (Necesidad) Etiquetamos $A = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Sea $y \in X \setminus A$. Por el Lema 2.16, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ existe un abierto y cerrado U_i de X tal que $x_i \in U_i$ y $y \notin U_i$. Si hacemos $U =$

$U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_k$, entonces U es abierto y cerrado en X, $y \notin U$ y $x_i \in U$, para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

(Suficiencia) Dados $x, y \in X$ diferentes, sabemos que existe un abierto y cerrado U de X tal que $\{x\} \subset U$ y $y \notin U$, es decir, $x \in U$ y $y \notin U$. El Lema 2.16 implica que entonces X es totalmente disconexo. ■

Una observación evidente es que cualquier subespacio de un espacio totalmente disconexo es también totalmente diconexo. Con todo esto ya podemos entrar a hablar de los mapeos ligeros.

Definición 2.18 Un mapeo $f : X \to Y$ es *ligero* si $f^{-1}(y)$ es totalmente diconexo para toda y en Y.

Teorema 2.19 *Sea $f : X \to Y$ un mapeo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
$a)$ *f es ligero,*
$b)$ *f_n es ligero, para alguna $n \in \mathbb{N}$,*
$c)$ *f_n es ligero, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $b) \Rightarrow a)$ Supongamos que f_n es ligero, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Dado $y \in Y$, como f_n es ligero, sabemos que $f_n^{-1}(\{y\})$ es totalmente disconexo. Notemos que, $x \in f^{-1}(y)$ si y sólo si $\{x\} \in f_n^{-1}(\{y\})$, así que la función $\phi : f^{-1}(y) \to f_n^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{F}_1(X)$, definida como $\phi(x) = \{x\}$, es una biyección. Es sabido ([14], Lema 2.3, p. 24) que ϕ es continua, así que ϕ es una biyección continua entre $f^{-1}(y)$ que es compacto y $f_n^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{F}_1(X)$ que es métrico. Esto es suficiente para que ϕ sea un homeomorfismo. Así que $f^{-1}(y)$ es homeomorfo a $f_n^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{F}_1(X)$.

Como $f_n^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{F}_1(X)$ es un subespacio de $f_n^{-1}(\{y\})$, que por hipótesis, es totalmente disconexo, tenemos que $f_n^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{F}_1(X)$ es totalmente disconexo. Con lo que concluímos que $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo y que f es ligero.

$a) \Rightarrow c)$ Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que f es ligero. Dado $B = \{y_1, y_2, ..., y_k\} \in \mathcal{F}_n(Y)$, notamos que, como f es ligero, $f^{-1}(y_i)$ es totalmente disconexo para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Por el Lema 2.16, para probar que $f_n^{-1}(B)$ es totalmente disconexo, basta tomar A_1 y A_2 en $f_n^{-1}(B)$ diferentes y encontrar un abierto y cerrado de $f_n^{-1}(B)$ que tenga a A_1 pero no a A_2.

Afirmamos que $f_n^{-1}(B) = \langle f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), ..., f^{-1}(y_k)\rangle_n$.

($\subset$) Dado $A \in f_n^{-1}(B)$, sabemos que $f_n(A) = B = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$, así que existen $a_1, a_2, ..., a_k \in A$ tales que $f(a_i) = y_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$, es decir $a_i \in f^{-1}(y_i)$, para toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Con esto $A \cap f^{-1}(y_i) \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Dado $a \in A$ sabemos que $f(a) \in f_n(A) = B$, así que $f(a) = y_i$, para alguna $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Con esto, $A \subset f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2) \cup ... \cup f^{-1}(y_k)$ y por lo tanto, $A \in \langle f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), ..., f^{-1}(y_k)\rangle_n$. Esto muestra que

$$f_n^{-1}(B) \subset \left\langle f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), ..., f^{-1}(y_k)\right\rangle_n .$$

($\supset$) Sean $C \in \langle f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), ..., f^{-1}(y_k)\rangle$ y $c \in C$. Sabemos que $C \subset f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2) \cup ... \cup f^{-1}(y_k)$, por lo que $c \in f^{-1}(y_i)$, para alguna $i \in \{1, 2, ..., k\}$, es decir $f(c) = y_i$, para alguna $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Así que, $f(C) \subset B$. Para toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$, podemos elegir $c_i \in C \cap f^{-1}(y_i)$. Como $c_i \in f^{-1}(y_i)$ sabemos que $f(c_i) = y_i$. Notemos que $B = f(c_1) \cup f(c_2) \cup ... \cup f(c_k) \subset f(C)$. Entonces $B = f(C) = f_n(C)$, por lo tanto, $C \in f_n^{-1}(B)$ y $\langle f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), ..., f^{-1}(y_k)\rangle_n \subset f_n^{-1}(B)$. Esto muestra que

$$f_n^{-1}(B) = \left\langle f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), ..., f^{-1}(y_k)\right\rangle_n .$$

Tomamos $A_1 = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ y $A_2 = \{u_1, u_2, ..., u_s\}$ dos elementos diferentes de $f_n^{-1}(B)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_1 \notin A_2$ y que $x_1 \in f^{-1}(y_1)$. Por hipótesis $f^{-1}(y_1)$ es totalmente disconexo. Como $A_2 \cap f(y_1)$ es finito, por el Lema 2.17, existe un conjunto abierto y cerrado K de $f^{-1}(y_1)$ tal que $x_1 \in K$ y $(A_2 \cap f^{-1}(y_1)) \cap K = \emptyset$. Sea $L = f^{-1}(y_1) \setminus K$. Entonces K y L son cerrados en $f^{-1}(y_1)$ y entonces son cerrados en X. Además $K \cap L = \emptyset$, $f^{-1}(y_1) = K \cup L$, $x_1 \in K$ y $A_2 \cap f^{-1}(y_1) \subset L$.

Sean $\mathcal{K} = \{A \in f_n^{-1}(B) : A \cap K \neq \emptyset\} = f_n^{-1}(B) \cap \langle K, X\rangle_n$ y $\mathcal{L} = \langle L, f^{-1}(y_2), ..., f^{-1}(y_k)\rangle_n$. Claramente $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ son subconjuntos cerrados de $f_n^{-1}(B)$, $A_1 \in \mathcal{K}$ y $A_2 \in \mathcal{L}$. Dada $A \in f_n^{-1}(B)$, si $A\cap K \neq \emptyset$, entonces $A \in \mathcal{K}$ y si $A\cap K = \emptyset$, como $f_n^{-1}(B) = \langle f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), ..., f^{-1}(y_k)\rangle_n$, entonces $\emptyset \neq A \cap f^{-1}(y_1) \subset L$. De manera que $A \in \mathcal{L}$. Esto muestra que $f_n^{-1}(B) = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$.

Si existiera $A \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$, entonces existiría $x \in A \cap K$ y $A \subset L \cup f^{-1}(y_2) \cup ... \cup f^{-1}(y_k)$. Como $K \subset f^{-1}(y_1)$, $x \in A \cap f^{-1}(y_1) \subset L$, y entonces $x \in K \cap L$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \emptyset$.

Esto muestra que $\mathcal{K}$ es abierto y cerrado en $f_n^{-1}(B)$, $A_1 \in \mathcal{K}$ y $A_2 \notin \mathcal{K}$. Así que $f_n^{-1}(B)$ es totalmente disconexo y f_n es ligero. ■

2.6 Universalidad

Definición 2.20 Un mapeo $f : X \to Y$ es *universal* si para cualquier función continua $g : X \to Y$ existe $p \in X$ tal que $f(p) = g(p)$.

En esta definición, un caso particularmente interesante es cuando f es la identidad. Notemos que la identidad $id : X \to X$ es universal si y sólo si para toda función continua $g : X \to X$, existe $p \in X$ tal que $g(p) = p$. Es decir, la identidad es universal, si y sólo si X tiene la propiedad del punto fijo.

Entonces un primer paso para ver si la universalidad es conservada por las funciones inducidas se da cuando se toma la función más simple de todas, a saber, la función identidad. La primera respuesta que obtenemos en esta sección viene dada por el ejemplo clásico de J. Oledzki ([18]).

Ejemplo 2.21 *Existe un continuo X que tiene la propiedad del punto fijo pero que $\mathcal{F}_2(X)$ no la tiene (*[18]*).*

Con este ejemplo tenemos entonces lo siguiente.

Ejemplo 2.22 *Existe un continuo X y el mapeo $id : X \to X$ tal que id es universal pero $id_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(X)$ no es universal.*

En lo que resta de esta sección veremos que la universalidad de un mapeo inducido tampoco implica la universalidad del mapeo base. Para ver esto, primero necesitamos recordar algunos hechos.

Definición 2.23 Un continuo es *indescomponible* si no se puede poner como la unión de dos subcontinuos propios.

Definición 2.24 Un *continuo de Cook* es un continuo indescomponible X, con la propiedad de que si C es un subcontinuo de X y $f : C \to X$ es una función continua, entonces f es constante o $f(p) = p$, para toda $p \in C$.

La existencia de los continuos de Cook fue mostrada por H. Cook en ([10], Teoremas 8 y 9).

Ejemplo 2.25 *Existe un continuo X tal que $\mathcal{F}_2(X)$ tiene la propiedad del punto fijo mientras que X no la tiene.*

Para construir X, tomemos un continuo de Cook C. Fijemos dos puntos $a \neq b$ en C. Sea $Z = C \times \{0, 1\}$. En Z, identificamos el punto $(a, 0)$ con el punto $(b, 1)$ y al punto $(a, 1)$ con el punto $(b, 0)$. Vamos a considerar a $\{0, 1\}$ con la suma módulo 2, la cual denotaremos por $\oplus$. Con esta notación, estamos identificando cada punto de la forma (a, i) con el punto $(b, i \oplus 1)$. Al espacio que resulta de esta identificación lo denotaremos por X. Sea $\pi : Z \to X$ la función identificación. Ya que $X = \pi(C \times \{0\}) \cup \pi(C \times \{1\})$, $\pi(C \times \{0\})$ y $\pi(C \times \{1\})$ son conexos y $\pi((a, 0)) = \pi((b, 1)) \in \pi(C \times \{0\}) \cap \pi(C \times \{1\})$, tenemos que X es conexo. Por el Teorema 1.18 X es un espacio métrico. Por tanto, X es un continuo. Para simplificar la notación, para cada punto $(z, i) \in Z$, denotaremos $[z, i] = \pi((z, i))$. Definimos el conjunto $P = \{[a, 0], [b, 0]\}$. Notemos que $P = \{[a, 1], [b, 1]\} = \{[a, 0], [a, 1]\} = \{[b, 0], [b, 1]\}$.

Afirmación 1. X no tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Sea $f_0 : X \to X$ definida por $f_0([z,i]) = [z, i \oplus 1]$. Dada $i \in \{0,1\}$, como $f_0([a,i]) = [a, i \oplus 1] = [b, i \oplus 2] = f_0([b, i \oplus 1])$, tenemos que $f_0([a,i]) = f_0([b, i \oplus 1])$. Esto prueba que f_0 está bien definida y, por el Teorema de Trasgresión (Teorema 1.11), f_0 es continua. Supongamos que existe $[z,i] \in X$ tal que $f_0([z,i]) = [z,i]$. Entonces $[z, i \oplus 1] = [z,i]$. Esto sólo podría ocurrir si $z = a$ y $z = b$, lo cual es absurdo. Hemos probado entonces que f_0 no tiene puntos fijos. Por tanto, X no tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Afirmación 2. Sea K un subcontinuo de C y sea $g : K \to X$ una función continua. Entonces g es constante o existe $i \in \{0,1\}$ tal que $g(u) = [u,i]$ para toda $u \in K$.

Demostración. Podemos suponer que K es no degenerado. Si ocurre que $g(K) \subset P$, como P es finito y K es conexo, tenemos que $g(K)$ tiene que ser un conjunto de un solo punto. Por tanto g es constante.

Supongamos entonces que existe $p \in K$ tal que $g(p) \notin P$. Escribimos $g(p) = [z,i]$. Como $[z,i] \notin \pi(C \times \{i \oplus 1\})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, [z,i]) \cap \pi(C \times \{i \oplus 1\}) = \emptyset$. Por el Teorema 1.7, existe un arco ordenado α de $\{p\}$ a K. Sea $G : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(X)$ la función inducida por g a $\mathcal{C}(X)$ ([14], Ejercicio 2.10, p.27). De la continuidad uniforme de α y de G, existe $\delta > 0$ tal que, si $|s - t| < \delta$, entonces $H(G(\alpha(t)), G(\alpha(s))) < \varepsilon$. Sea $m \geq 1$ tal que $\frac{1}{m} < \delta$. Entonces $H(G(\alpha(\frac{1}{m})), \{[z,i]\}) = H(G(\alpha(\frac{1}{m})), G(\alpha(0))) < \varepsilon$. Así que $G(\alpha(\frac{1}{m})) \subset B(\varepsilon, [z,i]) \subset \pi(C \times \{i\})$. De manera que $g|_{\alpha(\frac{1}{m})} : \alpha(\frac{1}{m}) \to \pi(C \times \{i\})$. Como $\pi(C \times \{i\})$ es homeomorfo a C y $\alpha(\frac{1}{m})$ es un subcontinuo de C, tenemos que $g|_{\alpha(\frac{1}{m})}$ es constante o $g(q) = [q,i]$ para toda $q \in \alpha(\frac{1}{m})$. Analicemos los dos casos.

Caso 1. $g|_{\alpha(\frac{1}{m})}$ es constante.

Ya que $p \in \alpha(\frac{1}{m})$, tenemos que $g(\alpha(\frac{1}{m})) = \{g(p)\}$. En este caso, mostraremos inductivamente que, para toda $k \in \{1, \ldots, m\}$, $g|_{\alpha(\frac{k}{m})}$ es constante. Por hipótesis, esto es cierto para $k = 1$. Ahora supongamos que esto se cumple para una $k < m$. Como $H(G(\alpha(\frac{k+1}{m})), G(\alpha(\frac{k}{m}))) < \varepsilon$ y $G(\alpha(\frac{k}{m})) = \{g(p)\}$, tenemos que $g(\alpha(\frac{k+1}{m})) \subset B(\varepsilon, g(p)) \subset \pi(C \times \{i\})$. Como $\pi(C \times \{i\})$ es homeomorfo a C y $\alpha(\frac{k+1}{m})$ es un subcontinuo de C, tenemos que $g|_{\alpha(\frac{k+1}{m})}$ es constante o $g(q) = [q,i]$ para toda $q \in \alpha(\frac{k+1}{m})$. Si elegimos $q \in \alpha(\frac{1}{m}) \setminus \{p\}$, tenemos que $g(q) = g(p)$, de manera que no se puede cumplir que $g(q) = [q,i]$ y que $g(p) = [p,i]$. Por tanto $g|_{\alpha(\frac{k+1}{m})}$ es constante. Esto concluye la inducción. En particular, para $k = m$, obtenemos que $g|_K = g$ es constante. Con esto terminamos el análisis de este caso.

Caso 2. $g(q) = [q,i]$ para toda $q \in \alpha(\frac{1}{m})$.

Sea $J = \{t \in [0,1] : g(q) = [q,i]$ para toda $q \in \alpha(t)\}$ y sea $t_0 = \sup J$. Notemos que $\frac{1}{m} \in J$, de manera que $J \neq \emptyset$ y $\frac{1}{m} \leq t_0$. Lo primero que veremos es que t_0 en realidad es un máximo. Sea $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en J tal que $\lim t_k = t_0$. Entonces $\lim \alpha(t_k) = \alpha(t_0)$. Sea $q \in \alpha(t_0)$. Entonces existe una sucesión $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ en K tal que $q_k \in \alpha(t_k)$, para toda $k \geq 1$, y $\lim q_k = q$. Como cada t_k está en J, tenemos que $g(q_k) = [q_k, i]$. De manera que $g(q) = \lim g(q_k) = \lim[q_k, i] = [q,i]$. Esto prueba que $t_0 \in J$. En particular, $g(q) \in \pi(C \times \{i\})$ para toda $q \in \alpha(t_0)$. De manera que $g(\alpha(t_0)) \subset \pi(C \times \{i\})$.

Probaremos que $t_0 = 1$. Supongamos, por el contrario, que $t_0 < 1$. Sea $\lambda > 0$ tal que $B(2\lambda, [a,i]) \cap B(2\lambda, [b,i]) = \emptyset$. Sea $U = B(\lambda, [a,i]) \cup B(\lambda, [b,i]) \cup \pi(C \times \{i\})$.

Como $U = B(\lambda, [a,i]) \cup B(\lambda, [b,i]) \cup (X \setminus (\pi(C \times \{i+1\})))$, tenemos que U es abierto en X. Definimos $\beta : \overline{U}^X \to \pi(C \times \{i\})$ dada por

$$\beta([q,j]) = \begin{cases} [q,j], & \text{si } [q,j] \in \pi(C \times \{i\}), \\ [a,i], & \text{si } [q,j] \in \overline{B(\lambda, [a,i])}^X \cap \pi(C \times \{i \oplus 1\}), \\ [b,i], & \text{si } [q,j] \in \overline{B(\lambda, [b,i])}^X \cap \pi(C \times \{i \oplus 1\}). \end{cases}$$

Como $(\overline{B(\lambda, [a,i])}^X \cap \pi(C \times \{i \oplus 1\})) \cap \pi(C \times \{i\}) = \{[a,i]\}$ y $(\overline{B(\lambda, [b,i])}^X \cap \pi(C \times \{i \oplus 1\})) \cap \pi(C \times \{i\}) = \{[b,i]\}$, tenemos que β está bien definida y es continua. Como $t_0 < 1$, $g(\alpha(t_0)) \subset \pi(C \times \{i\}) \subset U$ y U es abierto, tenemos que existe $s > t_0$ tal que $g(\alpha(s)) \subset U$. Si $a \notin \alpha(t_0)$, podemos tomar s con la propiedad adicional de que $a \notin \alpha(s)$. Lo mismo para b, es decir, si $b \notin \alpha(t_0)$, pedimos que $b \notin \alpha(s)$. De modo que si $a \in \alpha(s)$, entonces $a \in \alpha(t_0)$ y $g(a) = [a,i]$. También, si $b \in \alpha(s)$, entonces $b \in \alpha(t_0)$ y $g(b) = [b,i]$.

Como $\alpha(s)$ es un subcontinuo de $K \subset C$, $\pi(C \times \{i\})$ es homeomorfo a C y $(\beta \circ g)|_{\alpha(s)} : \alpha(s) \to \pi(C \times \{i\})$ es una función continua, tenemos que $(\beta \circ g)|_{\alpha(s)}$ es constante o $(\beta \circ g)|_{\alpha(s)}(q) = [q, i]$ para toda $q \in \alpha(s)$. Notemos que, para toda $q \in \alpha(\frac{1}{m})$, $g(q) = [q, i]$, así que $\beta(g(q)) = [q, i]$. Entonces $\alpha(\frac{1}{m})$ es un subcontinuo no degenerado de $\alpha(s)$ tal que $(\beta \circ g)|_{\alpha(\frac{1}{m})}$ no es constante. De manera que $(\beta \circ g)|_{\alpha(s)}$ no es constante. Entonces $(\beta \circ g)|_{\alpha(s)}(q) = [q, i]$ para toda $q \in \alpha(s)$. Es decir, $\beta(g(q)) = [q, i]$ para toda $q \in \alpha(s)$.

Como $t_0 = \sup J$ y $t_0 < s$, existe $q \in \alpha(s)$ tal que $g(q) \neq [q, i]$. No puede ocurrir que $g(q) \in \pi(C \times \{i\})$ pues esto implicaría que $[q, i] = \beta(g(q)) = g(q)$, lo cual es absurdo. Por tanto $g(q) \notin \pi(C \times \{i\})$. Si $g(q) \in \overline{B(\lambda, [a, i])}^X \setminus \pi(C \times \{i\})$. Entonces $[q, i] = \beta(g(q)) = [a, i]$. Esto implica que $q = a$ y que $g(a) \neq [a, i]$. Así que $a \in \alpha(s)$ y, por la elección de s, concluimos que $a \in \alpha(t_0)$ y $g(a) = [a, i]$, lo cual es absurdo. El caso en el que $g(q) \in \overline{B(\lambda, [b, i])}^X \setminus \pi(C \times \{i\})$ es totalmente análogo y nos lleva a otra contradicción. Esto prueba que $t_0 = 1$.

Por tanto $g(q) = [q, i]$ para toda $q \in \alpha(1) = K$. Con esto terminamos el análisis de este caso y concluimos la prueba de la Afirmación 2. $\square$

Queremos probar que $\mathcal{F}_2(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. Para ello, tomemos una función continua $f : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(X)$. Mostraremos que f tiene un punto fijo.

Dada $p \in C$, hacemos $\pm p = \{[p, 0], [p, 1]\}$. Dada $Y \subset X$, hacemos $\pm Y = \bigcup\{\pm p : \pm p \cap Y \neq \emptyset\}$.

Afirmación 3. Sea $A = \{[x, i], [y, j]\} \in \mathcal{F}_2(X)$ tal que $\pm y \cap f(A) = \emptyset$ y $f(A) \notin \mathcal{F}_1(X)$. Entonces $f|_{\langle\{[x,i]\},\pi(C\times\{j\})\rangle_2}$ es constante.

Demostración. Escribimos $f(A) = \{w_1, w_2\}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, w_1) \cap B(\varepsilon, w_2) = \emptyset$. Sea $\delta > 0$ tal que si $B, D \in \mathcal{F}_2(X)$ y $H(B, D) < \delta$, entonces $H(f(B), f(D)) < \varepsilon$. Por el Teorema 1.7 sabemos que existe un arco ordenado α de $\{[y, j]\}$ a $\pi(C \times \{j\})$. Sea $\lambda > 0$ tal que, si $|s - t| < \lambda$, entonces $H(\alpha(s), \alpha(t)) < \delta$. Sea $m \geq 1$ tal que $\frac{1}{m} < \lambda$. Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, sea $\mathcal{E}_k = \left\langle\{[x, i]\}, \alpha(\frac{k}{m})\right\rangle_2$.

Vamos a probar, inductivamente, que $f|_{\mathcal{E}_k}$ es constante. Para $k = 0$, notemos que $\mathcal{E}_0 = \langle\{[x,i]\}, \alpha(0)\rangle_2 = \langle\{[x,i]\}, \{[y,j]\}\rangle_2 = \{A\}$ es un conjunto de un solo elemento, de manera que $f|_{\mathcal{E}_0}$ es constante. Ahora supongamos que $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ y que $f|_{\mathcal{E}_k}$ es constante. Como $A \in \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_k$, tenemos que $f(D) = f(A)$ para toda $D \in \mathcal{E}_k$. Dada $B \in \mathcal{E}_{k+1}$, B es de la forma $B = \{[x,i], [u,j]\}$, donde $[u,j] \in \alpha(\frac{k+1}{m})$. Como $H(\alpha(\frac{k+1}{m}), \alpha(\frac{k}{m})) < \delta$, tenemos que existe $[w,j] \in \alpha(\frac{k}{m})$ tal que $[w,j] \in B(\delta, [u,j])$. De manera que $H(\{[x,i],[u,j]\}, \{[x,i],[w,j]\}) < \delta$. Así que $H(f(B), f(\{[x,i],[w,j]\})) < \varepsilon$. Como $\{[x,i],[w,j]\} \in \mathcal{E}_k$, tenemos que $f(\{[x,i],[w,j]\}) = f(A) = \{w_1, w_2\}$. De modo que $H(f(B), \{w_1, w_2\}) < \varepsilon$. Esto implica que $f(B)$ tiene exactamente un punto en cada uno de los conjuntos $B(\varepsilon, w_1)$ y $B(\varepsilon, w_2)$.

Dada $s \in \{1, 2\}$, es fácil ver que la función $g_s : \mathcal{E}_{k+1} \to B(\varepsilon, w_s)$ dada por: $g_s(B)$ es el único punto de $f(B) \cap B(\varepsilon, w_s)$, es continua. Definimos $h_s : \alpha(\frac{k+1}{m}) \to B(\varepsilon, w_s) \subset X$ dada por $h_s([v,j]) = g_s(\{[x,i],[v,j]\})$. Claramente h_s es continua. Como $\pi(C \times \{j\})$ es homeomorfo a C, $\alpha(\frac{k+1}{m})$ es homeomorfo a un subcontinuo de C, por lo que podemos aplicar la Afirmación 2 y obtener que h_s es constante o existe $j_s \in \{0, 1\}$ tal que $h_s([v,j]) = [v, j_s]$ para toda $[v,j] \in \alpha(\frac{k+1}{m})$. Como $[y,j] \in \alpha(0) \subset \alpha(\frac{k+1}{m})$,

$$\begin{aligned} \{h_1([y,j]), h_2([y,j])\} &= \{g_1(\{[x,i],[y,j]\}), g_2(\{[x,i],[y,j]\})\} \\ &= f(\{[x,i],[y,j]\}) = \{w_1, w_2\} \end{aligned}$$

y $\{w_1, w_2\} \cap \{[y,0],[y,1]\} = \emptyset$, tenemos que $h_s([y,j])$ no puede ser de la forma $[y, j_s]$, para ninguna $s \in \{0, 1\}$. Por tanto, h_1 y h_2 son constantes. De manera que, para toda $[v,j] \in \alpha(\frac{k+1}{m})$, como

$$\begin{aligned} \{w_1, w_2\} &= \{h_1([y,j]), h_2([y,j])\} = \{h_1([v,j]), h_2([v,j])\} \\ &= \{g_1(\{[x,i],[v,j]\}), g_2(\{[x,i],[v,j]\})\} = f(\{[x,i],[v,j]\}), \end{aligned}$$

tenemos que $f|_{\mathcal{E}_{k+1}}$ es constante. Esto termina la inducción.

En particular, $f|_{\mathcal{E}_m} = f|_{\langle\{[x,i]\}, \pi(C \times \{j\})\rangle_2}$ es constante. Esto termina la prueba de la Afirmación 3. $\square$

Afirmación 4. Si existe $A \in \mathcal{F}_2(X)$ tal que $(\pm A \cup P) \cap f(A) = \emptyset$ y $f(A) \notin \mathcal{F}_1(X)$, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Sean $A = \{[x,i],[y,j]\}$ y $f(A) = \{[u,k],[v,l]\}$ Como $\pm y \subset \pm A$ y $\pm A \cap f(A) = \emptyset$, tenemos que $\pm y \cap f(A) = \emptyset$. Entonces podemos aplicar la Afirmación 3 y obtener que $f|_{\langle\{[x,i]\},\pi(C\times\{j\})\rangle_2}$ es constante. En particular, $f(A) = f(\{[x,i],[a,j]\}) = f(\{[x,i],[b,j\oplus 1]\})$. Sea $A_1 = \{[x,i],[b,j\oplus 1]\}$. Como $\pm b = P$ y $f(A_1) = f(A)$ no intersecta a P, podemos aplicar la Afirmación 3 a A_1 y obtener que $f|_{\langle\{[x,i]\},\pi(C\times\{j\oplus 1\})\rangle_2}$ es constante. Como sabemos que

$$\langle\{[x,i]\},\pi(C\times\{j\})\rangle_2 \cup \langle\{[x,i]\},\pi(C\times\{j\oplus 1\})\rangle_2 = \langle\{[x,i]\},X\rangle_2\,,$$

tenemos que $f|_{\langle\{[x,i]\},X\rangle_2}$ es constante. En particular, $f(\{[x,i],[u,k]\}) = f(A)$.

Sea $A_2 = \{[x,i],[u,k]\}$. Entonces $f(A_2) = f(A)$. Ya que $\pm x \subset \pm A$, tenemos que $\pm x \cap f(A_2) = \emptyset$. Entonces podemos aplicar la Afirmación 3 y obtener que $f|_{\langle\{[u,k]\},\pi(C\times\{i\})\rangle_2}$ es constante. En particular, $f(A_2) = f(\{[u,k],[a,i]\}) = f(\{[u,k],[b,i\oplus 1]\})$. Sea $A_3 = \{[u,k],[b,i\oplus 1]\}$. Como $\pm b = P$ y $f(A_3) = f(A_2) = f(A)$ no intersecta a P, podemos aplicar la Afirmación 3 a A_3 y obtener que $f|_{\langle\{[u,k]\},\pi(C\times\{i\oplus 1\})\rangle_2}$ es constante. De manera que $f|_{\langle\{[u,k]\},X\rangle_2}$ es constante. En particular, $f(\{[u,k],[v,l]\}) = f(A_2) = f(A) = \{[u,k],[v,l]\}$. Hemos encontrado un punto fijo para f. $\square$

Afirmación 5. Si existe $A = \{[x,0],[y,1]\} \in \mathcal{F}_2(X)$ tal que $\pm A \cap f(A) = \emptyset$ y $f(A) \notin \mathcal{F}_1(X)$. Entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Si $P \cap f(A) = \emptyset$, por la Afirmación 4, tenemos que f tiene un punto fijo y no hay nada más que hacer. Supongamos entonces, por ejemplo, que $f(A)$ tiene la forma $f(A) = \{[a,0],[z,1]\}$. Como $\pm A \cap f(A) = \emptyset$, tenemos que $\pm y \cap f(A) = \emptyset$. Por la Afirmación 3, tenemos que $f|_{\langle\{[x,0]\},\pi(C\times\{1\})\rangle_2}$ es constante. En particular, $f(\{[x,0],[z,1]\}) = f(\{[x,0],[y,1]\}) = f(A)$. Sea $A_1 = \{[x,0],[z,1]\}$. Ya que $\pm x \cap f(A_1) = \pm x \cap f(A) = \emptyset$, podemos aplicar la Afirmación 3 a A_1 y obtener que $f|_{\langle\{[z,1]\},\pi(C\times\{0\})\rangle_2}$ es constante. En particular, $f(\{[z,1],[a,0]\}) = f(\{[z,1],[x,0]\}) = f(A_1) = f(A) = \{[a,0],[z,1]\}$. Y de esta manera encontramos un punto fijo para f. $\square$

Con las Afirmaciones 4 y 5 hemos encontrado algunas condiciones particulares bajo las cuales f tiene un punto fijo. A partir de ahora vamos a suponer que f no tiene puntos fijos y vamos a obtener una contradicción. Dada $p \in C$, recordemos que $\pm p = \{[p,0],[p,1]\}$. Notemos que $\pm(\pm p) = \pm p$. De acuerdo con la Afirmación 5, como f no tiene puntos fijos, tenemos que $\pm p \cap f(\pm p) \neq \emptyset$ o $f(\pm p) \in \mathcal{F}_1(X)$ para toda $p \in C$. De manera que podemos definir la función $g : C \to \mathcal{F}_1(X)$ de la siguiente manera.

$$g(p) = \begin{cases} f(\pm p), & \text{si } f(\pm p) \in \mathcal{F}_1(X), \\ f(\pm p) \setminus (\pm p), & \text{si } f(\pm p) \notin \mathcal{F}_1(X). \end{cases}$$

Afirmación 6. La función g es continua.

Demostración. Notemos que la función $\varphi : C \to \mathcal{F}_2(X)$ dada por $\varphi(p) = f(\pm p)$ es continua. De manera que el conjunto $D = \{p \in C : \varphi(p) \in \mathcal{F}_1(X)\}$ es cerrado en C. Para ver que g es continua, tomemos una sucesión $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ en C que converja a un punto $p \in C$. Consideremos dos casos.

Caso 1. $f(\pm p) \notin \mathcal{F}_1(X)$.

Como $\pm p \cap f(\pm p) \neq \emptyset$, podemos suponer que $[p,0] \in f(\pm p)$. Ya que $f(\pm p) \neq \pm p$, tenemos que $[p,1] \notin f(\pm p)$. Así que $g(p) = f(\pm p) \setminus \{[p,0]\}$. Como D es cerrado y $p \notin D$, podemos suponer que $p_k \notin D$ y que $[p_k,1] \notin f(\pm p_k)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces $[p_k,0] \in f(\pm p_k)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Dada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $g(p_k) = f(\pm p_k) \setminus \{[p_k,0]\}$. Como $f(\pm p)$ consta de dos puntos diferentes, a saber, $[p,0]$ y el único punto de $w \in g(p)$ y además $\lim f(\pm p_k) = f(\pm p)$, tenemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escribir $f(\pm p_k) = \{w_k, v_k\}$, donde $\lim w_k = w$ y $\lim v_k = [p,0]$. Ya que $\lim[p_k,0] = [p,0]$, tenemos que $v_k = [p_k,0]$ a partir de cierta K. Entonces, para toda $k \geq K$, $\{w_k\} = g(p_k)$. Por tanto $\lim g(p_k) = g(p)$.

Caso 2. $f(\pm p) \in \mathcal{F}_1(X)$.

Como, para toda $k \in \mathbb{N}$, $g(p_k) \subset f(\pm p_k)$ y $\lim f(\pm p_k) = f(\pm p) = g(p)$ es un conjunto de un solo punto, tenemos que $\lim g(p_k) = f(\pm p) = g(p)$. Por tanto $\lim g(p_k) = g(p)$. $\square$

Ya hemos visto que g es una función continua. Como $\mathcal{F}_1(X)$ es naturalmente homeomorfo a X, podemos aplicar la Afirmación 2 y obtener que g es constante o existe $i \in \{0,1\}$ tal que $g(p) = \{[p,i]\}$ para toda $p \in C$.

Notemos que, como $\pm a = P = \pm b$, sabemos que $f(\pm a) = f(\pm b)$ y esto implica que $g(a) = g(b)$, así que g no es inyectiva y entonces g es constante.

Sea $[z_0, i_0] \in X$ tal que $\operatorname{Im} g = \{[z_0, i_0]\}$. Por la definición de g, $[z_0, i_0] \in f(\pm p)$ para toda $p \in C$. Esto nos permite definir una función $h : C \to F_1(X)$ de la siguiente manera.

$$h(p) = \begin{cases} \{[z_0, i_0]\}, & \text{si } f(\pm p) = \{[z_0, i_0]\}, \\ f(\pm p) \setminus \{[z_0, i_0]\}, & \text{si } f(\pm p) \neq \{[z_0, i_0]\}. \end{cases}$$

Afirmación 7. La función h es continua.

Demostración. Para ver que h es continua, tomemos una sucesión $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ en C que converja a un punto $p \in C$. Consideremos dos casos.

Caso 1. $f(\pm p) \neq \{[z_0, i_0]\}$.
Sea $w \in X$ tal que $f(\pm p) = \{w, [z_0, i_0]\}$. Entonces $h(p) = \{w\}$. Ya que $\lim f(\pm p_k) = f(\pm p)$, tenemos que existe una sucesión $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ en X tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $w_k \in f(\pm p_k)$ y $\lim w_k = w$. Como $w \neq [z_0, i_0]$, podemos suponer que $w_k \neq [z_0, i_0]$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $f(\pm p_k) = \{w_k, [z_0, i_0]\}$ y $h(p_k) = w_k$. Por tanto, $\lim h(p_k) = h(p)$.

Caso 2. $f(\pm p) = \{[z_0, i_0]\}$.
Como, para toda $k \in \mathbb{N}$, $h(p_k) \subset f(\pm p_k)$ y $\lim f(\pm p_k) = f(\pm p) \in \mathcal{F}_1(X)$, tenemos que $\lim h(p_k) = f(\pm p) = h(p)$. $\square$

Afirmación 8. $f(\pm p) = \{[z_0, i_0]\}$, para toda $p \in C$.

Demostración. Ya hemos visto que h es una función continua. Como $\mathcal{F}_1(X)$ es naturalmente homeomorfo a X, podemos aplicar la Afirmación 2 y obtener que h es constante o existe $i \in \{0,1\}$ tal que $h(p) = \{[p,i]\}$ para toda $p \in C$.

Notemos que, una vez más $f(\pm a) = f(\pm b)$, implica que $h(a) = h(b)$, así que h no es inyectiva y entonces h es constante.

Supongamos que $\operatorname{Im} h = \{\{[w_0, j_0]\}\}$. Si ocurriera que $[w_0, j_0] \neq [z_0, i_0]$. Entonces $f(\pm p) = \{[w_0, j_0], [z_0, i_0]\}$ para toda $p \in C$. Dada $p \in C$, $f(\pm p) \notin \mathcal{F}_1(X)$. Como estamos suponiendo que f no tiene puntos fijos, por la Afirmación 5, $\pm p \cap f(\pm p) \neq \emptyset$. De manera que $\pm p \cap \{[w_0, j_0], [z_0, i_0]\} \neq \emptyset$. Pero si elegimos un punto $p_0 \in C \setminus \{w_0, z_0, a, b\}$, tendremos que $[p_0, 0], [p_0, 1] \notin \{[w_0, j_0], [z_0, i_0]\}$, lo cual es absurdo. Esto muestra que $[w_0, j_0] = [z_0, i_0]$. Por tanto $\operatorname{Im} h = \{\{[z_0, i_0]\}\}$. Entonces, para cada $p \in C$, $h(p)$ no puede tener elementos en $f(\pm p) \setminus \{[z_0, i_0]\}$. De manera que $f(\pm p) = \{[z_0, i_0]\}$. $\square$

Afirmación 9. Sea K una composante de C que no contiene a los puntos z_0, a y b. Sea $p \in K$. Entonces $f(\{[p, i_0], [z_0, i_0]\}) = \{[z_0, i_0]\}$.

Demostración. Por la Afirmación 8, sabemos que $f(\pm p) = \{[z_0, i_0]\}$. Por el Teorema 1.7 existe un arco ordenado α de $\{[p, i_0 \oplus 1]\}$ a $\pi(C \times \{i_0 \oplus 1\})$. Sea $J = \{t \in [0, 1] : f(\{[p, i_0], w\}) = \{[z_0, i_0]\}$ para toda $w \in \alpha(t)\}$. Como el único elemento en $\alpha(0)$ es $[p, i_0 \oplus 1]$ y $f(\{[p, i_0], [p, i_0 \oplus 1]\}) = f(\pm p) = \{[z_0, i_0]\}$, tenemos que $0 \in J$. De modo que tiene sentido definir $t_0 = \sup J$. Veremos que, en realidad, t_0 es un máximo. Sea $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en J tal que $\lim t_k = t_0$. Entonces $\lim \alpha(t_k) = \alpha(t_0)$. Dada $w \in \alpha(t_0)$, existe una sucesión $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos de X tal que, para toda $k \geq 1$, $w_k \in \alpha(t_k)$ y $\lim w_k = w$. Dada $k \in \mathbb{N}$, $f(\{[p, i_0], w_k\}) = \{[z_0, i_0]\}$. Por la continuidad de f, tenemos que $f(\{[p, i_0], w\}) = \{[z_0, i_0]\}$. Esto muestra que $t_0 \in J$.

Queremos probar que $t_0 = 1$. Supongamos, por el contrario, que $t_0 < 1$. Entonces $\alpha(t_0)$ es un subcontinuo propio de $\pi(C \times \{i_0 \oplus 1\})$, el cual es homeomorfo a C, y en consecuencia, es indescomponible, además $\pi(K \times \{i_0 \oplus 1\})$ es una de sus composantes. De modo que $\alpha(t_0) \subset \pi(K \times \{i_0 \oplus 1\})$. Como $[a, i_0 \oplus 1]$, $[b, i_0 \oplus 1]$, $[z_0, i_0 \oplus 1]$ no pertenecen a $\pi(K \times \{i_0 \oplus 1\})$, tenemos que $[z_0, i_0] \notin \pi(K \times \{i_0 \oplus 1\})$. De manera que $[z_0, i_0], [z_0, i_0 \oplus 1] \notin \alpha(t_0)$ y $\{[z_0, i_0], [z_0, i_0 \oplus 1]\} \cap \alpha(t_0) = \emptyset$. Esto implica que $[z_0, i_0] \notin \pm\alpha(t_0)$. De modo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, \{[z_0, i_0]\}) \cap N(\varepsilon, \pm\alpha(t_0)) = \emptyset$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ y si $A, B \in F_2(X)$ y $H(A, B) < \delta$, entonces $H(f(A), f(B)) < \varepsilon$. También le pedimos a δ la propiedad de que si $w, w_0 \in X$ y $d(w, w_0) < \delta$, entonces $H(\pm w, \pm w_0) < \varepsilon$. Sea $\lambda > 0$ tal que si $|t - s| < \lambda$, entonces $H(\alpha(s), \alpha(t)) < \delta$.

Elegimos $t_1 > t_0$ tal que $t_1 < t_0 + \lambda$ y $t_1 < 1$. Obtendremos una contradicción mostrando que $t_1 \in J$. Tomemos $w \in \alpha(t_1)$. Como $|t_1 - t_0| < \lambda$, existe $w_0 \in \alpha(t_0)$ tal que $d(w, w_0) < \delta$. De modo que $H(\pm w, \pm w_0) < \varepsilon$ y $H(f(\{[p, i_0], w\}), f(\{[p, i_0], w_0\})) < \varepsilon$. Ya que $w_0 \in \alpha(t_0)$, tenemos que $\pm w_0 \subset \pm\alpha(t_0)$ y $f(\{[p, i_0], w_0\}) = \{[z_0, i_0]\}$. De manera que $\pm w \subset N(\varepsilon, \pm\alpha(t_0))$ y $f(\{[p, i_0], w\}) \subset B(\varepsilon, [z_0, i_0])$. Por tanto $\pm w \cap N(\varepsilon, \{[z_0, i_0]) = \emptyset$. Esto prueba que $\pm w \cap f(\{[p, i_0], w\}) = \emptyset$. Como $[p, i_0 \oplus 1] \in \alpha(0) \subset \alpha(t_0)$, $\pm p \subset \pm\alpha(t_0)$, de manera que $\pm p \cap N(\varepsilon, \{[z_0, i_0]\}) = \emptyset$ y $\pm p \cap f(\{[p, i_0], w\}) = \emptyset$. Sea $A = \{[p, i_0], w\}$. Hemos visto que $\pm A \cap f(A) = \emptyset$. Como $w \in \alpha(t_1) \subset \pi(C \times \{i_0 \oplus 1\})$ y $[p, i_0] \in C \times \{i_0\}$, podemos aplicar la Afirmación 5 y obtener que $f(A) \in F_1(X)$ (estamos suponiendo que f no tiene puntos fijos).

Hemos probado que, para cada $w \in \alpha(t_1)$, $f(\{[p, i_0], w\}) \in F_1(X)$. Si hacemos $\psi(w) = f(\{[p, i_0], w\})$ tenemos una función continua $\psi : \alpha(t_1) \to F_1(X)$. Ya que $\alpha(t_1)$ es un subcontinuo de $\pi(C \times \{i_0 \oplus 1\})$ el cual es homeomorfo a C y $F_1(X)$ es naturalmente homeomorfo a X, podemos aplicar la Afirmación 2 y obtener que ψ es constante o que existe $j \in \{0, 1\}$ tal que, para toda $w = [u, i_0 \oplus 1] \in \alpha(t_1)$, $f(\{[p, i_0], w\}) = \{[u, j]\}$. En el segundo caso, como $[p, i_0 \oplus 1] \in \alpha(t_1)$, tenemos que $f(\{[p, i_0], [p, i_0 \oplus 1]\}) = \{[p, j]\}$. Pero, por la Afirmación 8, $f(\{[p, i_0], [p, i_0 \oplus 1]\}) = \{[z_0, i_0]\}$. De modo que $[p, j] = [z_0, i_0]$, lo cual implica que $p \in \{a, b, z_0\}$. Esto es absurdo pues $p \in K$. Con esto hemos probado que ψ es constante. Ya que $[p, i_0 \oplus 1] \in \alpha(t_1)$, tenemos que $f(\{[p, i_0], w\}) = \{[z_0, i_0]\}$, para toda $w \in \alpha(t_1)$. Por tanto $t_1 \in J$, lo cual es absurdo. Esto termina la prueba de que $t_1 = 1$.

Con esto, hemos demostrado que $f(\{[p, i_0], w\}) = \{[z_0, i_0]\}$ para toda $w \in \pi(C \times \{i_0 \oplus 1\})$.

En el caso en que $z_0 = a$, tenemos que $[z_0, i_0] = [b, i_0 \oplus 1] \in \pi(C \times \{i_0 \oplus 1\})$, así que $f(\{[p, i_0], [z_0, i_0]\}) = \{[z_0, i_0]\}$ y ya terminamos. En el caso en que $z_0 = b$, concluimos en forma parecida. Por tanto, podemos suponer que $z_0 \notin \{a, b\}$. En particular, $[z_0, i_0] \notin P$.

Por el Teorema 1.7, existe un arco ordenado β de $\{[a, i_0]\}$ a $\pi(C \times \{i_0\})$. Sea $L = \{t \in [0, 1] : f(\{[p, i_0], w\}) = \{[z_0, i_0]\}$ para toda $w \in \beta(t)\}$. Como $[a, i_0] = [b, i_0 \oplus 1] \in \pi(C \times \{i_0 \oplus 1\})$, por lo que probamos antes, $f(\{[p, i_0], [a, i_0]\}) = \{[z_0, i_0]\}$, de manera que $0 \in L$. Entonces tiene sentido tomar $s_0 = \sup L$. Procediendo como lo hicimos con t_0 se muestra que $s_0 \in L$. Es decir, $s_0 = \max L$.

Si $[z_0, i_0] \in \beta(s_0)$, entonces $f(\{[p, i_0], [z_0, i_0]\}) = \{[z_0, i_0]\}$ y ya terminamos. Supongamos entonces que $[z_0, i_0] \notin \beta(s_0)$. Esto implica que $s_0 < 1$. Vamos a obtener una contradicción similar a la que obtuvimos cuando supusimos que $t_0 < 1$.

Si $[z_0, i_0 \oplus 1] \in \beta(s_0) \subset \pi(C \times \{i_0\})$, entonces $z_0 \in \{a, b\}$, lo cual es absurdo. Por tanto $\pm z_0 = \{[z_0, i_0], [z_0, i_0 \oplus 1]\}$ no intersecta a $\beta(s_0)$. Esto implica que $[z_0, i_0] \notin \pm\beta(s_0)$. De modo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, \{[z_0, i_0]\}) \cap N(\varepsilon, (\pm\beta(s_0) \cup P) = \emptyset$. Como $p \notin \{z_0, a, b\}$, tenemos que $\{[p, i_0], [p, i_0 \oplus 1]\} \cap \{[z_0, i_0], [z_0, i_0 \oplus 1]\} = \emptyset$, de manera que también podemos pedir que $N(\varepsilon, \pm p) \cap N(\varepsilon, \pm z_0) = \emptyset$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ y si $A, B \in F_2(X)$ y $H(A, B) < \delta$, entonces $H(f(A), f(B)) < \varepsilon$. También le pedimos a δ la propiedad de que si $w, w_0 \in X$ y $d(w, w_0) < \delta$, entonces $H(\pm w, \pm w_0) < \varepsilon$. Sea $\lambda > 0$ tal que si $|t - s| < \lambda$, entonces $H(\beta(s), \beta(t)) < \delta$.

Elegimos $s_1 > s_0$ tal que $s_1 < s_0 + \lambda$ y $s_1 < 1$. Obtendremos una contradicción mostrando que $s_1 \in L$. Tomemos $w \in \beta(s_1)$. Como $|s_1 - s_0| < \lambda$, existe $w_0 \in \beta(s_0)$ tal que $d(w, w_0) < \delta$. De modo que $H(\pm w, \pm w_0) < \varepsilon$ y $H(f(\{[p, i_0], w\}), f(\{[p, i_0], w_0\})) < \varepsilon$. Ya que $w_0 \in \beta(s_0)$, tenemos que $\pm w_0 \subset \pm\beta(s_0)$ y $f(\{[p, i_0], w_0\}) = \{[z_0, i_0]\}$. De manera que $\pm w \subset N(\varepsilon, \pm\beta(s_0))$ y $f(\{[p, i_0], w\}) \subset B(\varepsilon, [z_0, i_0])$. Por tanto $\pm w \cap N(\varepsilon, \{[z_0, i_0]) = \emptyset$. Esto prueba que $\pm w \cap f(\{[p, i_0], w\}) = \emptyset$ y $P \cap f(\{[p, i_0], w\}) = \emptyset$. Como $f(\{[p, i_0], w\}) \subset N(\varepsilon, \pm z_0)$, tenemos que $\pm p \cap f(\{[p, i_0], w\}) = \emptyset$. Sea $A_1 = \{[p, i_0], w\}$. Hemos visto que $\pm A_1 \cap f(A_1) = \emptyset$ y que $f(A_1) \cap P = \emptyset$. Podemos entonces aplicar la Afirmación 4 y obtener que $f(A) \in \mathcal{F}_1(X)$.

Hemos probado que, para cada $w \in \beta(s_1)$, $f(\{[p, i_0], w\}) \in \mathcal{F}_1(X)$. Si hacemos $\eta(w) = f(\{[p, i_0], w\})$ tenemos una función continua $\eta : \beta(s_1) \to \mathcal{F}_1(X)$. Ya que $\beta(s_1)$ es un subcontinuo de $\pi(C \times \{i_0\})$ el cual es homeomorfo a C y $\mathcal{F}_1(X)$ es naturalmente homeomorfo a X, podemos aplicar la Afirmación 2 y obtener que η es constante o que existe $j \in \{0, 1\}$ tal que, para toda $w = [u, i_0] \in \beta(s_1)$, $f(\{[p, i_0], w\}) = \{[u, j]\}$. En el segundo caso, dado que $[a, i_0] \in \beta(s_1)$, tenemos que $f(\{[p, i_0], [a, i_0]\}) = \{[a, j]\}$. Pero sabíamos que $f(\{[p, i_0], [a, i_0]\}) = \{[z_0, i_0]\}$. De manera que $[a, j] = [z_0, i_0]$, lo cual implica que $z_0 \in \{a, b\}$, contrario a lo que estamos suponiendo. Con esto hemos probado que η es constante. Ya que $[a, i_0] \in \beta(s_1)$, tenemos que $f(\{[p, i_0], w\}) = \{[z_0, i_0]\}$, para toda $w \in \beta(s_1)$. Por tanto $s_1 \in L$, lo cual es absurdo. Como esta contradicción nació de suponer que $[z_0, i_0] \notin \beta(s_0)$, concluímos que $[z_0, i_0] \in \beta(s_0)$ y que $f(\{[p, i_0], [z_0, i_0]\}) = \{[z_0, i_0]\}$. $\square$

Sea K como en la Afirmación 9. Como K es densa en C ([17], Ejercicio 5.20, p. 83), existe una sucesión $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos de K tal que $\lim p_k = z_0$. Con esto, es claro que $\lim f(\{[p_k, i_0], [z_0, i_0]\}) = f(\{[z_0, i_0], [z_0, i_0]\})$ y como $f(\{[p_k, i_0], [z_0, i_0]\}) = \{[z_0, i_0]\}$, para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $f(\{[z_0, i_0], [z_0, i_0]\}) = \{[z_0, i_0]\}$. Por tanto $\{[z_0, i_0]\}$ es un punto fijo para f. Esto contradice lo que supusimos y termina la prueba de que $\mathcal{F}_2(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

2.7 OM y MO

Definición 2.26 Un mapeo $f : X \to Y$ es OM (respectivamente MO) si existen un continuo Z y mapeos $g : X \to Z$ y $h : Z \to Y$ tales que $f = h \circ g$, g es monótono y h es abierto (respectivamente g es abierto y h es monótono).

Definición 2.27 Un mapeo $f : X \to Y$ es *casi interior* si para todo $y \in Y$ y para todo abierto U de X que contiene una componente de $f^{-1}(y)$ se tiene que $y \in Int(f(U))$.

Lema 2.28 *Los mapeos abiertos son casi interiores.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un mapeo abierto y sean $y \in Y$ y $U \subset X$ un abierto que contiene a una componente C de $f^{-1}(y)$. Como f es abierta $f(U)$ es un abierto y como $C \subset U$ tenemos que $\{y\} = f(C) \subset f(U) = Int(f(U))$. Por lo tanto f casi interior. ■

Lema 2.29 *Los mapeos abiertos son confluentes.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un mapeo abierto. Supongamos que f no es confluente, entonces existe un subcontinuo B de Y y una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) \subsetneq B$.

Sea $y \in B \setminus f(C)$. Como $y \notin f(C)$ sabemos que $f^{-1}(y) \cap C = \emptyset$ y entonces podemos aplicar el teorema del Cable Cortado (Teorema 1.2) a $f^{-1}(y)$ y C en $f^{-1}(B)$, es decir, podemos obtener dos cerrados ajenos H y K de $f^{-1}(B)$ tales que $f^{-1}(B) = H \cup K$, $f^{-1}(y) \subset H$ y $C \subset K$. Notemos que, como $f^{-1}(y) \subset H$ y $H \cap K = \emptyset$, tenemos que $y \in B \setminus f(K)$ y entonces $f(K) \subsetneq B$.

Como B es conexo y $f(K) \subsetneq B$, existe $p \in Fr_B(f(K))$. Como K es cerrado en $f^{-1}(B)$, que es cerrado en X, sabemos que K es compacto. Por lo que $f(K)$ es cerrado y $p \in f(K)$. Sea $x \in f^{-1}(p) \cap K$ y sea U un abierto de X tal que $x \in U$ y $U \cap H = \emptyset$. Como f es abierto, sabemos que $f(U)$ es abierto y dado que $x \in U$, sabemos que $p \in f(U)$. Como $p \in Fr_B(f(K))$ tenemos que $f(U) \cap (B \setminus f(K)) \neq \emptyset$. Pero por otro lado, como $U \cap H = \emptyset$, tenemos que $U \cap f^{-1}(B) \subset K$ y por tanto $f(U) \cap B \subset f(K)$, una contradicción. Así que f debe ser confluente. ■

Lema 2.30 *Los mapeos monótonos son casi interiores.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ monótono y sean $y \in Y$ y $U \subset X$ un abierto que contiene a una componente C de $f^{-1}(y)$. Como f es monótono, sabemos que $f^{-1}(y)$ es conexo y por lo tanto $C = f^{-1}(y)$. Supongamos que $y \notin Int(f(U))$, entonces existe una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $d(y_k, y) < \frac{1}{k}$ y $y_k \notin f(U)$ para toda $k \in \mathbb{N}$, es decir, $f^{-1}(y_k) \subset X \setminus U$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, escogemos $x_k \in f^{-1}(y_k)$.

Como X es compacto, podemos suponer que la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a algún punto $x \in X$. Como $X \setminus U$ es cerrado y cada $x_k \in X \setminus U$, sabemos que $x \in X \setminus U$. Por la continuidad de f sabemos que $f(x) = \lim f(x_k) = \lim y_k = y$, y entonces $x \in f^{-1}(y) = C \subset U$, una contradicción. Entonces $y \in Int(f(U))$ y f es casi interior. ■

Lema 2.31 *Un mapeo $f : X \to Y$ es monótono si y sólo si $f^{-1}(A)$ es conexo para todo subcontinuo A de Y.*

Demostración. (Necesidad) Supongamos que f es monótono y sea A un subcontinuo de Y. Supongamos que $f^{-1}(A)$ es disconexo, es decir, que existen cerrados K y L que son ajenos y no vacíos y tales que $f^{-1}(A) = K \cup L$. Como K y L son ambos compactos $f(K)$ y $f(L)$ lo son también, en particular son cerrados. Como K y L no son vacíos, $f(K)$ y $f(L)$ tampoco lo son. Recordemos que $f^{-1}(A) = K \cup L$, así que $A = f(K) \cup f(L)$. Dado que A es conexo, sabemos que $f(K) \cap f(L) \neq \emptyset$.

Sea $y \in f(K) \cap f(L)$. Los conjuntos $f^{-1}(y) \cap K$ y $f^{-1}(y) \cap L$ son cerrados, ajenos y como $y \in f(K) \cap f(L)$ ambos son no vacíos, además $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(A) = K \cup L$, por lo que $f^{-1}(y) = (f^{-1}(y) \cap K) \cup (f^{-1}(y) \cap L)$. Esto muestra que $f^{-1}(y) \cap K$ y $f^{-1}(y) \cap L$ son una separación de $f^{-1}(y)$, pero como f es monótona sabemos que $f^{-1}(y)$ es conexo, una contradicción. Así que $f^{-1}(A)$ es conexo.

(Suficiencia) Supongamos que $f^{-1}(A)$ es conexo para todo subcontinuo A de Y. Como, para toda $y \in Y$, sabemos que $\{y\}$ es un subcontinuo de Y, tenemos que $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$ es conexo, para toda $y \in Y$, y por lo tanto f es monótono. ■

Corolario 2.32 *Los mapeos monótonos son confluentes.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ monótono, A un subcontinuo de Y y C una componente de $f^{-1}(A)$. Por el Lema 2.31 sabemos que $f^{-1}(A)$ es conexo, así que $f^{-1}(A) = C$ y por lo tanto $f(C) = A$. Así que f es confluente. ■

Lema 2.33 *Si $h : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son mapeos tales que g es ligera y $g \circ h$ es casi interior, entonces g es abierto.*

Demostración. Sea U un abierto de Y y tomemos $y \in U$. Sean $z = g(y)$ y C una componente de $h^{-1}(y)$. Como $g(h(C)) = \{g(y)\} = \{z\}$, tenemos que $C \subset (g \circ h)^{-1}(z)$.

Sea D la componente de $(g \circ h)^{-1}(z)$ que contiene a C. Como $h(D)$ es conexo y $g \circ h(D) = \{z\}$, tenemos que $h(D) \subset g^{-1}(z)$, pero como g es ligero, $g^{-1}(z)$ no contiene conexos no degenerados, por lo que $h(D)$ debe ser sólo un punto. Como $C \subset D$ y $h(C) = \{y\}$ debe suceder que $h(D) = \{y\}$, es decir $D \subset h^{-1}(y)$. Sabemos que C es componente de $h^{-1}(y)$, que D es conexo y que $C \subset D \subset h^{-1}(y)$, entonces $C = D$.

Sabemos que $h^{-1}(U)$ es un abierto que contiene a C, que hemos probado que es una componente de $(g \circ h)^{-1}(z)$, como $g \circ h$ es casi interior tenemos que $z = g(y) \in Int(g \circ h(h^{-1}(U))) = Int(g(U))$. Hemos probado entonces que $g(y) \in Int(g(U))$ para toda $y \in U$, así que $g(U)$ es abierto y por lo tanto g es abierto. ■

Definición. Dada una función $f : X \to Y$ decimos que $g \circ h$ es una *factorización* de f si existe un continuo Z y mapeos $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$ tales que $f = g \circ h$.

Teorema 2.34 *Todo mapeo $f : X \to Y$ tiene una factorización $g \circ h$, donde h es monótono y g es ligero.*

Demostración. La prueba de este teorema se divide en tres afirmaciones.

Afirmación 1. Dado un mapeo $f : X \to Y$ entre continuos, se tiene que $\mathcal{P} = \{C : C$ es componente de $f^{-1}(y)$, para algún $y \in Y\}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X.

Demostración. Mostraremos primero que $\mathcal{P}$ es una partición de X (ver Definición 1.12). Dado $x \in X$ sabemos que $x \in f^{-1}(f(x))$ y por lo tanto hay una componente C de $f^{-1}(f(x))$ tal que $x \in C \in \mathcal{P}$.

Sabemos que dados $y_1, y_2 \in Y$, diferentes, $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset$ y que cualesquiera dos componentes de $f^{-1}(y_1)$ son ajenas, por lo que los elementos de $\mathcal{P}$ son ajenos dos a dos. Y finalmente, como f es continua, $f^{-1}(y)$ es cerrado para toda $y \in Y$ y como cada componente de $f^{-1}(y)$ es cerrada en $f^{-1}(y)$, tenemos que todos los elementos de $\mathcal{P}$ son cerrados. Entonces $\mathcal{P}$ es una partición de X.

Ahora veremos que $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente (ver Definición 1.13). Sean $G \in \mathcal{P}$ y U un abierto tal que $G \subset U$. Mostraremos que existe un abierto V de X tal que $G \subset V \subset U$ y que, cada vez que $H \in \mathcal{P}$ y $H \cap V \neq \emptyset$, se tiene que $H \subset V$.

Sea $W = \bigcup \{C \in \mathcal{P} : C \cap Fr(U) \neq \emptyset\}$. Mostraremos que $Fr(U) \subset W$ y que W es cerrado en X. Sea $x \in Fr(U)$ y sea C la componente de $f^{-1}(f(x))$ que tiene a x. Entonces $C \cap Fr(U) \neq \emptyset$, con lo que $C \subset W$. Como $x \in C$, concluimos que $Fr(U) \subset W$. Sea $x \in \overline{W}$ y sea$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en W tal que $\lim x_k = x$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $C_k \in \mathcal{P}$ tal que $x_k \in C_k$. Dado que para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $C_k \in \mathcal{P}$, sabemos que $C_k \in \mathcal{C}(X)$ y que $f(C_k) = \{y_k\}$, para alguna $y_k \in Y$. Por ([14], Corolario 4.3, p. 69) sabemos que $\mathcal{C}(X)$ es compacto y que por hipótesis Y es compacto, así que podemos suponer que existen $C \in \mathcal{C}(X)$ y $y \in Y$ tales que $\lim C_k = C$ y $\lim y_k = y$. Notemos que, como $x_k \in C_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $\lim x_k = x$, tenemos que $x \in C$ ([14], Ejercicio 4.4, p. 70).

Mostraremos que $C \subset f^{-1}(y)$. Sea $z \in C$, como $\lim C_k = C$ sabemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $z_k \in C_k$ tales que $\lim z_k = z$ ([14], Ejercicio 4.4, p. 70). Como $z_k \in C_k$ tenemos que $f(z_k) = y_k$ y, como f es continua, tenemos que $f(z) = \lim f(z_k) = \lim y_k = y$. Así que $z \in f^{-1}(y)$ y $C \subset f^{-1}(y)$.

Sea D la componente de $f^{-1}(y)$ que contiene a C. Entonces $D \in \mathcal{P}$. Como $C_k \cap Fr(U) \neq \emptyset$, para toda $k \in \mathbb{N}$, sabemos que $C \cap Fr(U) \neq \emptyset$ ([14], Ejercicio 2.7, p. 26), así que $D \cap Fr(U) \neq \emptyset$ y, por lo tanto $D \subset W$. Con esto tenemos que $x \in C \subset D \subset W$, con lo que $x \in W$. Hemos probado que W es cerrado.

Sea $V = U \cap (X \setminus W)$. El conjunto V es abierto pues U y $X \setminus W$ lo son. Además, como $G \cap Fr(U) = \emptyset$ y $G \in \mathcal{P}$, tenemos que $G \subset$

$X \setminus W$, con lo que $G \subset V$. Sea $H \in \mathcal{P}$ tal que $H \cap W \neq \emptyset$. Entonces existe $E \in \mathcal{P}$ tal que $E \cap Fr(U) \neq \emptyset$ y $E \cap H \neq \emptyset$. Pero como $\mathcal{P}$ es partición, sus elementos son ajenos entre sí, así que $E = H$ y por lo tanto $H \cap Fr(U) \neq \emptyset$ y entonces $H \subset W$. Esto muestra que si $H \in \mathcal{P}$ es tal que $H \cap V \neq \emptyset$, entonces $H \subset X \setminus W$.

Sea $H \in \mathcal{P}$ tal que $H \cap V \neq \emptyset$. Mostraremos que $H \subset V$. Ya vimos que, como $H \cap V \neq \emptyset$, tenemos que $H \subset X \setminus W$. Como $Fr(U) \subset W$ tenemos entonces que $H \subset U \cup \left(X \setminus \overline{U}\right)$. Dado que $H \in \mathcal{P}$ sabemos que H es conexo, y como $\emptyset \neq H \cap V \subset H \cap U$ sabemos que entonces $H \subset U$. Con esto tenemos que $H \subset U \cap (X \setminus W) = V$. La existencia de V asegura que $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superiormente. $\square$

Por el Teorema 1.18 esto es suficiente para que $X/\mathcal{P}$ sea metrizable. Como $X/\mathcal{P}$ es imagen continua de X y X es un continuo, sabemos que $X/\mathcal{P}$ es además, compacto y conexo. Entonces $X/\mathcal{P}$ es un continuo.

Afirmación 2. Sea $\mathcal{P}$ como en la Afirmación 1, entonces $\pi : X \to X/\mathcal{P}$, la proyección natural de X a $X/\mathcal{P}$, es monótono.

Demostración. Sea $C \in X/\mathcal{P}$. Por la definición de π sabemos que $\pi^{-1}(C) = C$, que por la definición de $\mathcal{P}$ es un conexo. Así que π es monótono. $\square$

Por la definición de $\mathcal{P}$ sabemos que $f(\pi^{-1}(C))$ es un punto para toda $C \in X/\mathcal{P}$ y π es una identificación por definición. Entonces podemos aplicar el Teorema de Trasgresión (Teorema 1.11) a f y π y obtener un mapeo $g : X/\mathcal{P} \to Y$ tal que $g \circ \pi = f$.

Afirmación 3. El mapeo $g : X/\mathcal{P} \to Y$ que se obtiene al aplicar el Teorema de Trasgresión es ligero.

Demostración. Sean $y \in Y$ y K una componente de $g^{-1}(y)$. Como π es monótona sabemos que $\pi^{-1}(K)$ es conexo. Dado que $K \subset g^{-1}(y)$ tenemos que $\pi^{-1}(K) \subset \pi^{-1}(g^{-1}(y)) = f^{-1}(y)$. Entonces existe una componente C de $f^{-1}(y)$ tal que $\pi^{-1}(K) \subset C$ y entonces $K \subset \pi(C) = \{C\}$. De manera que K tiene sólo un punto y $g^{-1}(y)$ es totalmente disconexo para toda $y \in Y$. $\square$

Hemos conseguido entonces un continuo $X/\mathcal{P}$ y mapeos $\pi : X \to X/\mathcal{P}$ y $g : X/\mathcal{P} \to Y$ tales que π es monótono, g es ligero y $f = g \circ \pi$, lo que concluye el teorema. ■

Teorema 2.35 *Todos los mapeos casi interiores son OM. Es más, cada mapeo casi interior f tiene una factorización $f = g \circ h$, donde h es monótono y g es ligero y abierto.*

Demostración. Por el Teorema 2.34, todo mapeo f tiene una factorización $g \circ h$ tal que h es monótono y g es ligero. Por el Lema 2.33 sabemos que si f es casi interior, entonces g es abierto. Así que $f = g \circ h$, h es monótona y g es ligera y abierta. Esto implica que f es OM. ■

Lema 2.36 *Si $g : X \to Z$ y $f : Z \to Y$ son mapeos confluentes, entonces $h = f \circ g$ es confluente.*

Demostración. Sea K un subcontinuo de Y y sea C una componente de $h^{-1}(K)$. Notemos que $g(C)$ es conexo y que $f(g(C)) = h(C) \subset K$, es decir, $g(C) \subset f^{-1}(K)$. Sea D la componente de $f^{-1}(K)$ que contiene a $g(C)$ y sea E la componente de $g^{-1}(D)$ que contiene a C. Observemos que $h(E) = f(g(E)) \subset f(D) \subset K$, es decir, $E \subset h^{-1}(K)$. Pero E es conexo y contiene a C, que es una componente de $h^{-1}(K)$, por lo tanto $E = C$.

Como g es confluente, sabemos que $g(E) = D$, y como f es confluente, sabemos que $f(D) = K$. Entonces $h(C) = h(E) = f(g(E)) = f(D) = K$ y por lo tanto h es confluente. ■

Corolario 2.37 *Los mapeos casi interiores son confluentes.*

Demostración. Si $f : X \to Y$ es casi interior, por el Teorema 2.35 sabemos que f es OM, es decir composición de un mapeo monótono g seguido por uno abierto h, ambos son confluentes por el Lema 2.29 y el Corolario 2.32. El Lema 2.36 implica que entonces $f = h \circ g$ es confluente. ■

Lema 2.38 *Si $g : X \to Z$ y $f : Z \to Y$ son funciones casi interiores, entonces $h = f \circ g$ es casi interior.*

Demostración. Sean $y \in Y$, C una componente de $h^{-1}(y)$ y $U \subset X$ un abierto tal que $C \subset U$. Entonces $g(C)$ es un conexo y $f(g(C)) = h(C) = \{y\}$, es decir, $g(C) \subset f^{-1}(y)$. Sean D la componente de $f^{-1}(y)$ que contiene a $g(C)$ y E la componente de $g^{-1}(D)$ que contiene a C. Tenemos que $h(E) = f(g(E)) \subset f(D) = \{y\}$, de manera que $E \subset h^{-1}(y)$. Entonces tenemos que E es un conexo contenido en $h^{-1}(y)$ tal que $C \subset E$, pero C es una componente de $h^{-1}(y)$, así que $C = E$. Por el Corolario 2.37 sabemos que g es confluente, así que $g(C) = D$.

Para cada $z \in D$, sea C_z una componente de $g^{-1}(z)$ que intersecta a C. Como $z \in D \subset f^{-1}(y)$ tenemos que $g^{-1}(z) \subset g^{-1}(f^{-1}(y)) = h^{-1}(y)$. Entonces C_z es un conexo contenido en $h^{-1}(y)$ y por tanto debe estar contenido en una componente de $h^{-1}(y)$, pero como intersecta a C esa componente debe ser C, es decir, $C_z \subset C \subset U$. Como g es casi interior tenemos que $z \in Int(g(U))$ y entonces $g(C) = D \subset Int(g(U))$.

Como f es casi interior, D es una componente de $f^{-1}(y)$ y $Int(g(U))$ es un abierto tal que $D \subset Int(g(U))$, tenemos que

$$y \in Int(f(Int(g(U))) \subset Int(f(g(U)) = Int(h(U)).$$

Esto muestre que h es casi interior. ■

Teorema 2.39 *Los mapeos OM son casi interiores.*

Demostración. Si $f : X \to Y$ es OM es porque f es composición de un mapeo monótono g seguido por uno abierto h, ambos casi interiores por los Lemas 2.30 y 2.28. El Lema 2.38 implica que entonces $f = h \circ g$ es casi interior. ■

Hemos probado entonces que, para un mapeo $f : X \to Y$, las tres condiciones siguientes son equivalentes:

a) f es casi interior.

b) f es OM.

c) f se puede descomponer como $f = h \circ g$, donde g es monótona y h es ligera y abierta.

Con esto en mente, podemos dar otra caracterización de los mapeos OM. Una caracterización que, para nuestros fines, será especialmente útil.

Definición 2.40 Dada una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X se define el $Ls_{n\to\infty}A_n$ como el conjunto de puntos $x \in X$ tales que existe una sucesión de números positivos $n_1 < n_2 < \cdots$ y exisen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tales que $\lim x_{n_k} = x$.

Teorema 2.41 *Un mapeo f es casi interior si y sólo si cada vez que una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $y \in Y$, se tiene que $Ls_{n\to\infty}f^{-1}(y_n)$ intersecta a cada componente de $f^{-1}(y)$.*

Demostración. (Necesidad) Si f es casi interior, tomamos una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a y en Y y C una componente de $f^{-1}(y)$. Vamos a definir una sucesión de puntos x_{n_k}, inductivamente.

Comenzamos con $x_0 \in X$ cualquiera y $n_0 = 0$ y procedamos como sigue: para cada $k = 1, 2, ...$, supongamos que ya escogimos los primeros $k - 1$ elementos de la sucesión (con sus respectivos $k - 1$ índices), de tal manera que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ y, para cada $i \in \{1, 2, ..., k - 1\}$, se tiene que $x_{n_i} \in N(\frac{1}{i}, C) \cap f^{-1}(y_{n_i})$. Sabemos que $N(1/k, C)$ es un abierto que contiene a C. En virtud de que f es casi interior se tiene que $f(N(1/k, C))$ tiene a y en su interior. Como $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y existe $n_k > n_{k-1}$ tal que $y_{n_k} \in f(N(1/k, C))$ y entonces podemos escoger $x_{n_k} \in N(1/k, C) \cap f^{-1}(y_{n_k})$.

Construyendo la sucesión como lo hicimos hemos asegurado que $x_{n_k} \in f^{-1}(y_{n_k})$ para toda $k = 1, 2, ...$ y que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Como nuestro espacio es compacto, pasando a una subsucesión si es necesario podemos suponer que la sucesión de x_{n_k} converge a un punto x que, por construcción, está en $Ls_{n\to\infty}f^{-1}(y_n)$. Pero notemos que $d(x_{n_k}, C) \leq 1/k$, por lo que $d(x, C) = 0$. Al ser C una componente de $f^{-1}(y)$ es cerrado en $f^{-1}(y)$, que a su vez es cerrado en X, así que C es cerrado en X y entonces $x \in C$. Hemos probado entonces que $Ls_{n\to\infty}f^{-1}(y_n)$ intersecta a cualquier componente de $f^{-1}(y)$.

(Suficiencia) Ahora supongamos que se satisface la otra condición y tomemos un abierto U que contiene a una componente C de $f^{-1}(y)$ para algún $y \in Y$. Si y no está en el interior de $f(U)$ es porque existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y \setminus f(U)$ que converge a y. Notemos que en ese caso $f^{-1}(y_n) \subset X \setminus U$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que entonces $Ls_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) \subset X \setminus U \subset X \setminus C$, lo que contradice la hipótesis. Por lo que y debe estar en el interior de $f(U)$ y f debe ser casi interior. ■

Corolario 2.42 *Una función es OM si y sólo si cada vez que una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y en Y se tiene que $Ls_{n\to\infty} f^{-1}(y_n)$ intersecta a cada componente de $f^{-1}(y)$.*

Gracias a este último corolario podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 2.43 *Si f_n es OM, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces f es OM.*

Demostración. Sea $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en Y que converge a un punto $y \in Y$. Sea C una componente de $f^{-1}(y)$ y sea $\mathcal{C}$ la componente de $f_n^{-1}(\{y\})$ que contiene a $\mathcal{F}_1(C)$. Entonces $\mathcal{C}$ es conexo y $\mathcal{F}_1(C) \subset \mathcal{C}$, así que podemos aplicar el Lema 1.4 y concluir que $M = \bigcup\{E : E \in \mathcal{C}\}$ es conexo. Ahora probaremos que $M = C$.

Dado $x \in C$ tenemos que $\{x\} \in \mathcal{F}_1(C) \subset \mathcal{C}$ y entonces $x \in \bigcup\{E : E \in \mathcal{C}\} = M$. Con esto tenemos $C \subset M$.

Si $x \in M$ es porque existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$. Como $A \in \mathcal{C} \subset f_n^{-1}(\{y\})$, sabemos que $f_n(A) = \{y\}$ y, en particular, $f(x) = y$. Hemos probado que $M \subset f^{-1}(\{y\})$ y ya sabíamos que M es conexo. Pero $C \subset M$ y C es componente de $f^{-1}(\{y\})$, por lo que $C = M$.

Como f_n es un mapeo OM y $\{\{y_m\}\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $\{y\}$, sabemos que $(Ls_{m\to\infty} f_n^{-1}(\{y_m\})) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Sea $A \in (Ls_{m\to\infty} f_n^{-1}(\{y_m\})) \cap \mathcal{C}$. Como $A \in Ls_{m\to\infty} f_n^{-1}(\{y_m\})$ sabemos que existen enteros positivos $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ y conjuntos $A_{m_k} \in f_n^{-1}(y_{m_k})$ tales que $\lim A_{m_k} = A$. Fijemos $x \in A$. Como $\lim A_{m_k} = A$, existen puntos $x_{m_k} \in A_{m_k}$ tales que $\lim x_{m_k} = x$ ([14], Ejercicio 4.4, p. 70). Como cada $A_{m_k} \in f_n^{-1}(\{y_{m_k}\})$, tenemos que $f_n(A_{m_k}) = \{y_{m_k}\}$ y, en particular, $f(x_{m_k}) = y_{m_k}$, es decir $x_{m_k} \in f^{-1}(y_{m_k})$. Como $\lim x_{m_k} = x$, esto implica que

$x \in Ls_{m\to\infty} f^{-1}(y_m)$. Sabemos también que $x \in A \in \mathcal{C}$ y que $M = C$, entonces $x \in C$. Entonces $x \in (Ls_{m\to\infty} f^{-1}(y_m)) \cap C$.

Hemos probado que para toda componente C de $f^{-1}(y)$ y toda sucesión $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ en Y que converge a un punto $y \in Y$, se tiene que $C \cap Ls_{m\to\infty} f^{-1}(y_m)) \neq \emptyset$. Por el Corolario 2.42, podemos concluir que f es OM. ■

De nuevo tenemos que preguntarnos si será cierto el otro sentido de esta implicación. Para el caso $n = 2$ hemos hecho ya todo el trabajo necesario para poder afirmar que sí.

Teorema 2.44 *Si f es OM (MO), entonces f_2 es OM (MO).*

Demostración. Si f es OM, entonces existen un continuo Z y mapeos $g : X \to Z$ y $h : Z \to Y$ tales que $f = h \circ g$, g es monótono y h es abierto. Consideremos entonces el continuo $\mathcal{F}_2(Z)$ y los mapeos $g_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Z)$ y $h_2 : \mathcal{F}_2(Z) \to \mathcal{F}_2(Y)$. Por los Teoremas 2.6 y 2.8 sabemos que g_2 es monótono y que h_2 es abierto. Además, claramente $f_2 = h_2 \circ g_2$ con lo que f_2 es OM. (Análogamente con MO). ■

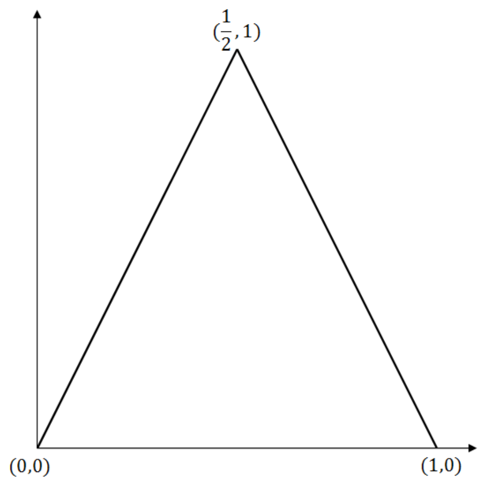
Corolario 2.45 *f es OM si y sólo si f_2 es OM.*

Desafortunadamente, como en el caso de los mapeos abiertos, esta implicación no es cierta para $n \geq 3$.

Ejemplo 2.46 *Existe un continuo X y un mapeo $f : X \to X$ que es OM y MO y cuyo mapeo inducido $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ no es OM ni MO para ninguna $n \geq 3$.*

Sean $X = [0, 1]$ y $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$



Gráfica de f

Es muy fácil convencerse de que esta función es un mapeo abierto. Y entonces simplemente componemos con la identidad $id : [0,1] \to [0,1]$ de manera que $f = f \circ id = id \circ f$. Como id es monótona y f es abierta, concluimos que el mapeo f es OM y MO.

Supongamos que $n \geq 3$ y que f_n es OM. Esto quiere decir que existen un continuo Z y mapeos $g : \mathcal{F}_n([0,1]) \to Z$ y $h : Z \to \mathcal{F}_n([0,1])$ tales que g es monótono, h es abierto y $f_n = h \circ g$. Notemos que $f^{-1}(x)$ tiene a lo más dos puntos para todo $x \in [0,1]$.

Dado $A \in \mathcal{F}_n([0,1])$, afirmamos que $f_n^{-1}(A)$ tiene a lo más 3^n puntos. Para cada $B \in f_n^{-1}(A)$ y $a \in A$ sabemos que B tiene a lo más tres opciones para intersectar a $f^{-1}(a)$, porque $f^{-1}(a)$ tiene a lo más dos puntos. Estas formas de intersectarse son: intersectarlo en un punto, intersectarlo en el otro, o intersectarlo en los dos. Como A tiene a lo más n puntos y B está determinado por la forma de intersectar a cada $f^{-1}(a)$ es evidente la afirmación anterior.

Observemos que, para todo $z \in Z$, se tiene que $f_n(g^{-1}(z)) = (h \circ g)(g^{-1}(z)) = h(z)$, es decir, $g^{-1}(z) \subset f_n^{-1}(h(z))$. Como g es monótono y $f_n^{-1}(h(z))$ es finito, tenemos que $g^{-1}(z)$ debe constar sólo de un punto.

Así que g debe ser inyectivo y por tanto un homeomorfismo. En particular g debe ser abierto. Como h es abierto, por hipótesis, tenemos que $f_n = h \circ g$ es abierto. Como $n \geq 3$, el Teorema 2.9 nos dice que f_n es abierta sólo cuando f es un homeomorfismo, y éste no es el caso, generando una contradicción. Por lo tanto f_n no puede ser OM.

Supongamos ahora que f_n es MO. Entonces existen un continuo W y mapeos $\alpha : \mathcal{F}_n([0,1]) \to W$ y $\beta : W \to \mathcal{F}_n([0,1])$ tales que α es abierto, β es monótono y $f_n = \beta \circ \alpha$. Como sabemos que α es suprayectivo, sabemos que, para todo $A \in \mathcal{F}_n([0,1])$, se cumple que $\left|\alpha^{-1}(\beta^{-1}(A))\right| \geq \left|\beta^{-1}(A)\right|$. También sabemos que $f_n^{-1}(A) = \alpha^{-1}(\beta^{-1}(A))$ es finito, así que $\beta^{-1}(A)$ es finito. Como β es monótono sabemos que $\beta^{-1}(A)$ es conexo, entonces $\beta^{-1}(A)$ debe ser un conjunto con un solo punto. Hemos probado que β es inyectivo y por tanto un homeomorfismo. En particular β debe ser abierto. Como α es abierto, por hipótesis, esto implica que $f_n = \beta \circ \alpha$ es abierto. Como $n \geq 3$, el Teorema 2.9 nos dice que f_n es abierta sólo cuando f es un homeomorfismo, y éste no es el caso, generando una contradicción. Por lo tanto f_n no es MO. ■

2.8 Atomicidad

Definición 2.47 Un mapeo $f : X \to Y$ es *atómico* si para todo subcontinuo K de X se tiene que $f(K) = \{y\}$ para alguna $y \in Y$ ó $f^{-1}(f(K)) = K$.

Teorema 2.48 *Si f_n es atómico, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces f es atómico.*

Demostración. Sea K un subcontinuo de X. Entonces $\mathcal{F}_1(K)$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$ y como f_n es atómico tenemos que $f_n(\mathcal{F}_1(K)) = \{A\}$ para algún $A \in \mathcal{F}_n(Y)$ ó $f_n^{-1}(f_n(\mathcal{F}_1(K)) = \mathcal{F}_1(K)$.

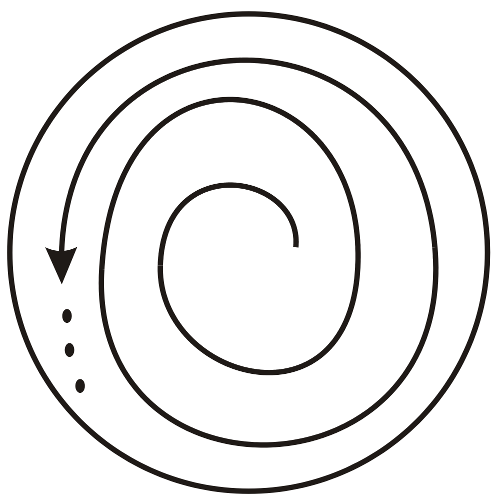
Si $f_n(\mathcal{F}_1(K)) = \{A\}$, fijamos $\{k_0\} \in \mathcal{F}_1(K)$ y recordamos que $f_n(\{k_0\}) = \{f(k_0)\}$. Entonces $A = \{f(k_0)\}$ y con esto $f_n(\mathcal{F}_1(K)) =$

$\{\{f(k_0)\}\}$. Por lo tanto $f_n(\{k\}) = \{f(k)\} = \{f(k_0)\}$, para todo $k \in K$, con lo que $f(k) = f(k_0)$ para todo $k \in K$ y entonces $f(K) = \{f(k_0)\}$.

Si $f_n^{-1}(f_n(\mathcal{F}_1(K))) = \mathcal{F}_1(K)$, tomando $x \in f^{-1}(f(K))$ tenemos que existe $k \in K$ tal que $f(x) = f(k)$. Entonces $f_n(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(k)\} = f_n(\{k\}) \in f_n(\mathcal{F}_1(K))$. Es decir, $\{x\} \in f_n^{-1}(f_n(\mathcal{F}_1(K))) = \mathcal{F}_1(K)$, con lo que $x \in K$ y $f^{-1}(f(K)) \subset K$. Esto es suficiente para que $f^{-1}(f(K)) = K$. Por lo tanto f es atómica. ■

Ejemplo 2.49 *Existen continuos X e Y y un mapeo atómico $f : X \to Y$ tal que $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ no es atómico, para ninguna $n \geq 2$.*

Sean $X = \mathbb{S}^1 \cup \left\{(t \cdot cos(\frac{1}{1-t}), t \cdot sen(\frac{1}{1-t})) : t \in [0,1)\right\} \subset \mathbb{R}^2$, $Y = [0,1]$ y $f : X \to Y$ definida como $f((x,y)) = \|(x,y)\|$. El continuo X es la cerradura de la espiral convergiendo al círculo unitario por dentro y f claramente es un mapeo.



X

Primero observemos que $f|_{X \setminus \mathbb{S}^1}$ es un homeomorfismo en su imagen. Dado un subcontinuo K de X notemos que sólo hay tres opciones para K, a saber, $K \subset \mathbb{S}^1, K \subset X \setminus \mathbb{S}^1$ ó K intesecta a $\mathbb{S}^1$ y a $X \setminus \mathbb{S}^1$. En el primer caso $f(K) = \{1\}$. En el segundo caso K es un arco y la función $f|_K$ es un homeomorfismo por lo que $f^{-1}(f(K)) = K$. Para el tercer caso notemos que, como K intersecta tanto a $\mathbb{S}^1$ como a $X \setminus \mathbb{S}^1$ y es conexo, siempre que $(s \cdot cos(\frac{1}{1-s}), s \cdot sen(\frac{1}{1-s})) \in K$, debe suceder que $(t \cdot cos(\frac{1}{1-t}), t \cdot sen(\frac{1}{1-t})) \in K$ para todo $t \in [s, 1)$. Como K es cerrado esto implica que $\mathbb{S}^1 \subset K$ y que K es de la forma $K = \mathbb{S}^1 \cup \big\{(t \cdot cos(\frac{1}{1-t}), t \cdot sen(\frac{1}{1-t})) : t \in [t_0, 1)\big\}$ para algún $t_0 \in [0, 1)$. En este caso $f(K) = [t_0, 1]$ y sólo falta notar que $f^{-1}([t_0, 1]) = \mathbb{S}^1 \cup \big\{(t \cdot cos(\frac{1}{1-t}), t \cdot sen(\frac{1}{1-t})) : t \in [t_0, 1)\big\} = K$. Hemos probado entonces que f es atómica.

Dada $n \geq 2$, para ver que f_n no es un mapeo atómico, basta tomar

$$\mathcal{K} = \left\{\{(0,1), (t \cdot cos(\frac{1}{1-t}), t \cdot sen(\frac{1}{1-t}))\} : t \in [0, \frac{1}{2}]\right\}$$

$\mathcal{K}$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1/2]$ y, por lo tanto, K es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$. Pero $f_n(\mathcal{K}) = \big\{\{1, t\} : t \in \big[0, \frac{1}{2}\big]\big\}$, que es un continuo no degenerado, y $f_n^{-1}(f_n(\mathcal{K})) = \{\{x, (t \cdot cos(\frac{1}{1-t}), t \cdot sen(\frac{1}{1-t}))\} : t \in [0, 1/2], x \in \mathbb{S}^1\} \neq \mathcal{K}$. Por lo que f_n no es atómica. ■

De hecho, la idea del Ejemplo 2.49 se puede generalizar para probar el siguiente teorema.

Teorema 2.50 *Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es atómico, para alguna $n \geq 2$ y Y es no degenerado, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea d una métrica para Y. Basta probar que f es inyectivo. Supongamos que existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Como Y es no degenerado y f es suprayectiva existe $x_3 \in X$ tal que $f(x_1) \neq f(x_3)$. Llamemos $d_0 = d(f(x_1), f(x_3))$ Por el Teorema 1.7, existe un arco ordenado α de $\{x_3\}$ a X. Sea $F : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ la función inducida por f ([14], Ejercicio 2.10, p. 27). Entonces $F \circ \alpha : [0, 1] \to \mathcal{C}(Y)$ es una trayectoria de $\{f(x_3)\}$ a Y.

Consideremos la función $g : \mathcal{C}(Y) \to [0, \infty)$ dada por $g(K) = d(f(x_1), K)$, para todo $K \in \mathcal{C}(Y)$. Claramente g es continua. Con esto tenemos que la función $\beta = g \circ F \circ \alpha : [0, 1] \to [0, \infty)$ es una función continua. Por lo que $\beta([0, 1])$ debe ser un conjunto conexo. Tenemos que

$\beta(1) = d(f(x_1), Y) = 0$ y que $\beta(0) = d(f(x_1), \{f(x_3)\}) = d_0$. Como $\beta([0,1])$ es conexo $\beta^{-1}(\frac{d_0}{2})$ debe ser no vacío. Elegimos $t \in \beta^{-1}(\frac{d_0}{2})$.

Notemos que $F(\alpha(t))$ debe ser un subcontinuo de Y que tiene a $f(x_3)$ y dista de $f(x_1)$ menos que d_0, por lo que es no degenerado, pero además dista de $f(x_1)$ más que cero, por lo que $f(x_1) \notin F(\alpha(t))$. Por lo tanto, $A = \alpha(t)$ es un subcontinuo de X que no intersecta a $f^{-1}(f(x_1))$ y tal que $f(A) = F(\alpha(t))$ es no degenerado.

Consideremos ahora $\mathcal{K} = \{\{x_1, v\} : v \in A\}$ que al ser homeomorfo a A es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$. Entonces $f_n(\mathcal{K}) = \{\{f(x_1), w\} : w \in f(A)\}$ no es degenerado pues $f(A)$ no lo es. Pero además, $f_n(\{x_2, x_3\}) = \{f(x_2), f(x_3)\} = \left\{f(x_1), f(x_{3)}\right\} \in f_n(\mathcal{K})$ y $\{x_2, x_3\} \notin \mathcal{K}$ por lo que $f_n^{-1}(f_n(\mathcal{K})) \neq \mathcal{K}$. Esto muestra que f_n no es atómico. Comenzamos suponiendo que f no era inyectivo y hemos mostrado que entonces f_n no es atómico, así que si f_n es atómico debe suceder que f es inyectivo y por lo tanto, un homeomorfismo. ■

2.9 Ligadura

Definición 2.51 Un mapeo $f : X \to Y$ es *ligador* si para todo subcontinuo B de Y y cualquier par de componentes C y D de $f^{-1}(B)$ tenemos que $f(D) \cap f(C) \neq \emptyset$.

Teorema 2.52 *Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es ligador, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $f : X \to Y$ es ligador.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y y sean C y D dos componentes de $f^{-1}(B)$. Notamos que $\mathcal{F}_1(B)$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(Y)$ y que $\mathcal{F}_1(C)$ y $\mathcal{F}_1(D)$ son conexos contenidos en $f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ las componentes de $f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$ que contienen a C y D, respectivamente. Sean $M = \bigcup\{E : E \in \mathcal{C}\}$ y $N = \bigcup\{E : E \in \mathcal{D}\}$. Probaremos que $M = C$ y $N = D$.

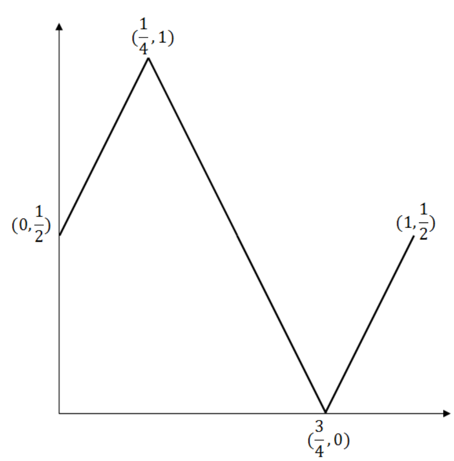
Como $\mathcal{F}_1(C) \subset \mathcal{C}$, tenemos que $C \subset M$. Como $\mathcal{C}$ es cerrado, conexo y contiene a $\mathcal{F}_1(C)$ podemos aplicar el Lema 1.4 y concluir que M es conexo. Si $x \in M$ es porque existe $E \in \mathcal{C}$ tal que $x \in E$. Como $E \in \mathcal{C} \subset f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(B))$ tenemos que $f_n(E) = \{b\}$, para algún $b \in B$ y, en particular, $f(x) = b$. Por lo que $C \subset M \subset f^{-1}(B)$, pero M es conexo y C es componente de $f^{-1}(B)$, entonces $C = M$. Analogamente $D = N$.

Como f_n es ligador, sabemos que $f_n(\mathcal{C}) \cap f_n(\mathcal{D}) \neq \emptyset$. Sean $A_1 \in \mathcal{C}$ y $A_2 \in \mathcal{D}$ tales que $f_n(A_1) = f_n(A_2)$. Sean $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$. Como $a_1 \in A_1 \in \mathcal{C}$, tenemos que $a_1 \in M = C$. Analogamente, $a_2 \in D$ y por lo tanto $f(D) \cap f(C) \neq \emptyset$, con lo que f es ligador. ■

Ejemplo 2.53 *Existe un continuo X y un mapeo $f : X \to X$ que es ligador cuyo mapeo inducido $f_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(X)$ no es ligador.*

Sean $X = [0,1]$ y $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ \frac{3}{2} - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \\ 2x - \frac{3}{2}, & \text{si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$



Gráfica de f

Claramente f es un mapeo. Veamos que f es ligador. Sea $B = [t, s]$ un subcontinuo de $[0, 1]$.

Si $t > \frac{1}{2}$, entonces $f^{-1}(B) = \left[\frac{t-\frac{1}{2}}{2}, \frac{s-\frac{1}{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\frac{3}{2}-s}{2}, \frac{\frac{3}{2}-t}{2}\right]$, cada uno de estos dos intervalos llena a B al aplicarle f, y ambos son conexos, así que todas las componentes de $f^{-1}(B)$ llenan a B bajo f y por lo tanto, sus imágenes se intersectan. El caso $s < \frac{1}{2}$ es análogo.

El último caso es cuando $t \leq \frac{1}{2}$ y $s \leq \frac{1}{2}$, en este caso tenemos que $f^{-1}(B) = \left[0, \frac{s-\frac{1}{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\frac{3}{2}-s}{2}, \frac{\frac{3}{2}-t}{2}\right] \cup \left[\frac{t+\frac{3}{2}}{2}, 1\right]$, cada uno de estos tres intervalos es conexo y su imagen tiene a $\frac{1}{2}$, así que cualquier componente de $f^{-1}(B)$ tiene a $\frac{1}{2}$ en su imagen y, por lo tanto, cualesquiera dos de sus componentes se intersectan. Esto prueba que f es ligador.

Para ver que f_2 no es ligador consideremos el siguiente conjunto: $\mathcal{A} = \{\{\frac{3}{4}, x\} : x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]\} \cup \{\{x, \frac{1}{4}\} : x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]\}$. El conjunto $\mathcal{A}$ es unión de dos continuos que se intersectan en el elemento $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$, entonces $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_2([0, 1])$. Observemos que

$$
\begin{gathered}
f_n^{-1}(A) = \\
\{\{\tfrac{1}{8}, x\} : x \in [0,\tfrac{1}{8}]\} \cup \{\{\tfrac{1}{8}, x\} : x \in [\tfrac{3}{8},\tfrac{5}{8}]\} \cup \{\{\tfrac{1}{8}, x\} : x \in [\tfrac{7}{8}, 1]\} \cup \\
\{\{\tfrac{3}{8}, x\} : x \in [0,\tfrac{1}{8}]\} \cup \{\{\tfrac{3}{8}, x\} : x \in [\tfrac{3}{8},\tfrac{5}{8}]\} \cup \{\{\tfrac{3}{8}, x\} : x \in [\tfrac{7}{8}, 1]\} \cup \\
\{\{\tfrac{5}{8}, x\} : x \in [0,\tfrac{1}{8}]\} \cup \{\{\tfrac{5}{8}, x\} : x \in [\tfrac{3}{8},\tfrac{5}{8}]\} \cup \{\{\tfrac{5}{8}, x\} : x \in [\tfrac{7}{8}, 1]\} \cup \\
\{\{\tfrac{7}{8}, x\} : x \in [0,\tfrac{1}{8}]\} \cup \{\{\tfrac{7}{8}, x\} : x \in [\tfrac{3}{8},\tfrac{5}{8}]\} \cup \{\{\tfrac{7}{8}, x\} : x \in [\tfrac{7}{8}, 1]\}.
\end{gathered}
$$

Notemos que los conjundos $\mathcal{D} = \{\{\frac{1}{8}, x\} : x \in [0, \frac{1}{8}]\}$ y $\mathcal{C} = \{\{\frac{7}{8}, x\} : x \in [0, \frac{7}{8}]\}$ son subconjuntos cerrados, ajenos entre ellos y ajenos al resto de los uniendos que forman $f_n^{-1}(\mathcal{A})$. Por tanto $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$ son componentes de $f_n^{-1}(\mathcal{A})$. Notemos que $f_2(\mathcal{D}) = \{\{\frac{3}{4}, x\} : x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\}$ y $f_2(\mathcal{C}) = \{\{\frac{1}{4}, x\} : x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\}$ no se intersectan. Por lo que f_2 no es ligadora. ■

2.10 Propiedades Hereditarias

Definición 2.54 Dada una propiedad $\mathfrak{R}$ para un mapeo. Decimos que un mapeo $f : X \to Y$ es *hereditariamente* $\mathfrak{R}$ si para todo subcontinuo A de X se tiene que $f|_A : A \to f(A)$ tiene la propiedad $\mathfrak{R}$.

Observación. Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es hereditariamente $\mathfrak{R}$, para alguna propiedad $\mathfrak{R}$ y alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $f : X \to Y$ es hereditariamente $\mathfrak{R}$. Esto es por que para cada subcontinuo A de X, la función $f_n|_{\mathcal{F}_1(A)} : \mathcal{F}_1(A) \to \mathcal{F}_1(f(A))$ se comporta topológicamente igual que $f|_A : A \to f(A)$. Así que, como $\mathcal{F}_1(A)$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$ y f_n es hereditariamente $\mathfrak{R}$, sabemos que $f_n|_{\mathcal{F}_1(A)}$, y por lo tanto $f|_A$, tiene la propiedad $\mathfrak{R}$. Con esto, tenemos que f es hereditariamente $\mathfrak{R}$.

Algunas de las propiedades hereditarias que se estudian más frecuentemente son, por ejemplo: monotoneidad hereditaria, confluencia hereditaria, confluencia débil hereditaria, etc. Para estas propiedades tenemos los siguientes resultados:

Teorema 2.55 *Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es hereditariamente monótono, para alguna $n \geq 2$ y Y no es degenerado, entonces $f : X \to Y$ es homeomorfismo.*

Demostración. Basta probar que f es inyectivo. Supongamos que existen $a, b \in X$ diferentes tales que $f(a) = f(b) = y$. Como Y no es degenerado, existe $v \in Y$, diferente de y. Sea $x_0 \in X \setminus (f^{-1}(y) \cup f^{-1}(v))$. La existencia de x_0 se da porque X es conexo y no puede ser la unión de los cerrados ajenos (y no vacíos) $f^{-1}(y)$ y $f^{-1}(v)$.

Consideremos ahora los siguientes conjuntos: $\mathcal{A} = \{\{a, x\} : x \in X\}$, $\mathcal{C} = \{\{b, x\} : x \in X\}$, $\mathcal{D} = \{\{x_0, x\} : x \in X\}$. $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son homeomorfos a X y por lo tanto continuos. Notemos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{b, x_0\}$ por lo que $\mathcal{G} = \mathcal{A} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$.

Analicemos el mapeo $f_n|_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to f_n(\mathcal{G})$.

Notemos que, como $f(x_0) \neq v, y$, tenemos que $(f_n|_{\mathcal{G}})^{-1}(\{y, v\}) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{D}$, de hecho, $(f_n|_{\mathcal{G}})^{-1}(\{y, v\}) = \{\{a, x\} : x \in f^{-1}(v)\} \cup \{\{b, x\} : x \in f^{-1}(v)\}$, que son cerrados ajenos, y son no vacíos pues $f^{-1}(v) \neq \emptyset$, por lo que $(f_n|_{\mathcal{G}})^{-1}(\{y, v\})$ es disconexo y f_n no es hereditariamente monótona. Eso concluye el teorema. ■

Teorema 2.56 *Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es hereditariamente débilmente confluente, para alguna $n \geq 3$, entonces $f : X \to Y$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que existen $a, b \in X$, diferentes, tales que $f(a) = f(b) = y_0$. Usando arcos ordenados se pueden construir dos subcontinuos no degenerados y ajenos K y L, que no tienen a y_0. Sean $d \in f^{-1}(L)$ y $c \in f^{-1}(K)$. Construimos los conjuntos $\mathcal{A} = \{\{a, b, x\} : x \in X\}$, $\mathcal{B} = \{\{a, d, x\} : x \in X\}$ y $\mathcal{C} = \{\{b, c, x\} : x \in X\}$.

Sabemos ([14], Lema 2.3, p. 24) que la función $\phi : X^3 \to \mathcal{F}_3(X)$ definida como $\phi((x, y, z)) = \{x, y, z\}$ es continua. Notemos que $\mathcal{A} = \phi(\{a\} \times \{b\} \times X)$, $\mathcal{B} = \phi(\{a\} \times \{d\} \times X)$ y $\mathcal{C} = \phi(\{c\} \times \{b\} \times X)$ así que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son conexos y compactos. En vista de que $\{a, b, d\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $\{a, b, c\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$, sabemos que $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$.

Sean $\mathcal{K} = \{\{y_0, f(d), w\} : w \in K\}$ y $\mathcal{L} = \{\{y_0, f(c), w\} : w \in L\}$. Por un razonamiento análogo al anterior, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ son cerrados y conexos. Mostraremos que $\mathcal{R} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$ es un subcontiuo de $f_n(\mathcal{M})$.

Como $\{y_0, f(c), f(d)\} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$, sabemos que $\mathcal{R}$ es un continuo. Como f es suprayectiva, dado $k \in K$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = k$. De tal manera que, $f_n(\{a, d, x\}) = \{y_0, f(d), k\}$ y entonces $\mathcal{K} \subset f_n(\mathcal{B})$. De manera análoga $\mathcal{L} \subset f_n(\mathcal{C})$, por lo que $\mathcal{R} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L} \subset f_n(\mathcal{B}) \cup f_n(\mathcal{C}) \subset f_n(\mathcal{M})$ y entonces $\mathcal{R} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$ es un subcontinuo de $f_n(\mathcal{M})$.

Por la elección de d sabemos que $f(d) \in L$ y, por la elección de K, sabemos que $L \cap K = \emptyset$ y que $y_0 \notin K$. Así que $f(d), y_0 \notin K$. Con esto sabemos que $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}_3(X) \setminus \mathcal{F}_2(X)$. De manera análoga, $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_3(X) \setminus \mathcal{F}_2(X)$ y entonces $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}_3(X) \setminus \mathcal{F}_2(X)$.

Mostraremos que $f_n|_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}\to f_n(\mathcal{M})$ no es débilmente confluente.

Tenemos que

$$\begin{array}{rcl}(f_n|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{R}) & = & f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{M}\\ & = & (f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{A})\cup(f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{B})\cup(f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{C}).\end{array}$$

Observemos que, para todo $x\in X$, se tiene que $f_n(\{a,b,x\})=\{y_0,f(x)\}\in\mathcal{F}_2(X)$. Por lo que $f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{A}=\emptyset$ y $(f_n|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{R})=(f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{B})\cup(f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{C})$.

Mostraremos que $f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{B}=\{\{a,d,x\}:x\in f^{-1}(K)\}$ y $f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{C}=\{\{b,d,x\}:x\in f^{-1}(L)\}$.

Primero notemos que, si $x\in f^{-1}(K)$, tenemos que $\{a,d,x\}\in\mathcal{B}$ y $f_n(\{a,d,x\})=\{y_0,f(d),f(x)\}\in\mathcal{K}\subset\mathcal{R}$. Así que, $\{\{a,d,x\}:x\in f^{-1}(K)\}\subset f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{B}$. Supongamos ahora que $\{a,d,x\}\in\mathcal{B}\cap f_n^{-1}(\mathcal{R})$. Vamos a ver que $x\in f^{-1}(K)$. Notemos que $f_n(\{a,d,x\})=\{y_0,f(d),f(x)\}\in\mathcal{R}=\mathcal{K}\cup\mathcal{L}$. Con esto, $\{y_0,f(d),f(x)\}\in\mathcal{L}$ ó $\{y_0,f(d),f(x)\}\in\mathcal{K}$. Si $\{y_0,f(d),f(x)\}\in\mathcal{L}$, entonces sabemos que $\{y_0,f(d),f(x)\}=\{y_0,f(c),w\}$, para alguna $w\in L$. Como $K\cap L=\emptyset$, $y_0\notin K$, $f(d)\in L$ y $f(c)\in K$, tenemos que $y_0,f(d)\neq f(c)$ y entonces $f(x)=f(c)\in K$. Con esto, $x\in f^{-1}(K)$. Si $\{y_0,f(d),f(x)\}\in\mathcal{K}$, entonces $\{y_0,f(d),f(x)\}=\{y_0,f(d),w\}$, para alguna $w\in K$. Como $K\cap L=\emptyset$, $y_0\notin K$, $f(d)\in L$ y $w\in K$, tenemos que $y_0,f(d)\neq w$ y entonces $f(x)=w\in K$. Con esto, $x\in f^{-1}(K)$. Siendo esas las únicas dos opciones tenemos que, en cualquier caso, $x\in f^{-1}(K)$, por lo que $\mathcal{B}\cap f_n^{-1}(\mathcal{R})\subset\{\{a,d,x\}:x\in f^{-1}(K)\}$. Entonces, $f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{B}=\{\{a,d,x\}:x\in f^{-1}(K)\}$. Análogamente, $f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{C}=\{\{b,d,x\}:x\in f^{-1}(L)\}$.

Notemos que

$$\begin{array}{rcl}f_n(f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{B}) & = & f_n(\{\{a,d,x\}:x\in f^{-1}(K)\})=\\ \{\{f(a),f(d),f(x)\} & : & x\in f^{-1}(K)\}=\{\{y_0,f(d),w\}:w\in K\}\\ & = & \mathcal{K}.\end{array}$$

Y análogamente, $f_n(f_n^{-1}(\mathcal{R})\cap\mathcal{C})=\mathcal{L}$.

Sea $\mathcal{N}$ una componente de $(f_n|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{R})$, notemos que $f_n^{-1}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{B}$ y $f_n^{-1}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{C}$ son cerrados ajenos, por lo que $\mathcal{N} \subset f_n^{-1}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{B}$ ó $\mathcal{N} \subset f_n^{-1}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{C}$. Como $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{R}$ y $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{R}$, tenemos que $f_n(f_n^{-1}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{B}) \subsetneq \mathcal{R}$ y $f_n(f_n^{-1}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{C}) \subsetneq \mathcal{R}$. Entonces, en cualquier caso, $f_n(\mathcal{N}) \subsetneq \mathcal{R}$. Esto muestra que $f_n|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to f_n(\mathcal{M})$ no es débilmente confluente y que f_n no es hereditariamente débilmente confluente, lo que concluye el teorema. ■

Definición 2.57 Un subcontinuo A de X es *terminal* si cumple que, para cada subcontinuo B de X, se tiene que $B \subset A$ ó $A \subset B$ ó $A \cap B = \emptyset$.

Teorema 2.58 *Si $f_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es hereditariamente confluente, entonces $f : X \to Y$ es monótono y $f^{-1}(y)$ es un continuo terminal para toda $y \in Y$.*

Demostración. La prueba se basa en la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Si existen $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ es no degenerada y un subcontinuo A de X tal que $A \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$, $f^{-1}(y) \nsubseteq A$ y $A \nsubseteq f^{-1}(y)$, entonces $f_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ no es hereditariamente confluente.

Supongamos que sí existen y sean $a \in A \cap f^{-1}(y)$, $b \in f^{-1}(y) \setminus A$ y $c \in A \setminus f^{-1}(y)$. Notemos que $f(a), f(c) \in f(A)$ y que $f(a) = y \neq f(c)$, así que $f(A)$ es no degenerado. Sean $\mathcal{A} = \{\{a, x\} : x \in X\}$, $\mathcal{B} = \{\{b, x\} : x \in X\}$, $\mathcal{C} = \{\{c, x\} : x \in A\}$ y $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Notemos que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son conexos, cerrados y que $\{a, b\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $\{a, c\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$, por lo que $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(X)$.

Sea $\mathcal{K} = \{\{f(c), z\} : z \in f(A)\}$, como A es un continuo, $f(A)$ lo es también y por lo tanto también $\mathcal{K}$ es un continuo, además, como $f(A)$ no es degenerado, tampoco $\mathcal{K}$. Observemos que $f_2(\mathcal{C}) = \mathcal{K}$ y que entonces $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $f_2(\mathcal{M})$. Mostraremos que $f_2|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to f_2(\mathcal{M})$ no es confluente.

Dado que $(f_2|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{K}) = (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{A}) \cup (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{B}) \cup (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C}) = \{\{a, x\} : x \in f^{-1}(f(c))\} \cup \{\{b, x\} : x \in f^{-1}(f(c)) \cup \mathcal{C}\}$ y que los conjuntos $\{\{b, x\} : x \in f^{-1}(f(c))\}$ y $\{\{a, x\} : x \in f^{-1}(f(c))\} \cup \mathcal{C}$ son cerrados, ajenos y no vacíos, sabemos que existe una componente $\mathcal{D}$ de $(f_2|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{K})$ que se queda contenida en $\{\{b,x\} : x \in f^{-1}(f(c))\}$. Pero entonces $f_2(\mathcal{D}) \subset f_2(\{\{b,x\} : x \in f^{-1}(f(c))\}) = \{\{y, f(c)\}\} \subsetneq \mathcal{K}$. Con lo que concluimos que $f_2|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to f_2(\mathcal{M})$ no es confluente y por lo tanto f_2 no es hereditariamente confluente. Esto prueba la Afirmación 1. $\square$

Supongamos que existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ no es conexo. Entonces existen cerrados ajenos y no vacíos K y L tales que $f^{-1}(y) = K \cup L$. Sea C una componente de $f^{-1}(y)$ contenida en K. Por el Teorema 1.7 existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to \mathcal{C}(X)$ de C a X. Como $\alpha(0) = C \subset K$, $\alpha(0) \subset X \setminus L$. De manera que existe $s > 0$ tal que $\alpha(s) \subset X \setminus L$. Sea $A = \alpha(s)$. Entonces A es un subcontinuo de X tal que $\emptyset \neq L \subset f^{-1}(y) \setminus A$ y $\emptyset \neq C \subset f^{-1}(y) \cap A$. Si $A \subset f^{-1}(y)$, entonces A tiene que estar contenido en una componente de $f^{-1}(y)$, así que $C = A$. Esto es absurdo pues $s > 0$. Por tanto $A \not\subseteq f^{-1}(y)$. Hemos construído entonces un subcontinuo A de X tal que $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$, $f^{-1}(y) \not\subseteq A$ y $A \not\subseteq f^{-1}(y)$. Por la Afirmación 1 esto implica que f_2 no es hereditariemente confluente, una contradicción. Así que $f^{-1}(y)$ es conexo para toda $y \in Y$ y por lo tanto f es monótono.

Supongamos ahora que existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ no es terminal. Entonces, por la definición, existe un subcontinuo B de X tal que $B \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$, $B \not\subseteq f^{-1}(y)$ y $f^{-1}(y) \not\subseteq B$. Por la Afirmación 1 esto implica que f_2 no es hereditariamente confluente, lo que genera una contradicción. Así que $f^{-1}(y)$ debe ser un continuo terminal para toda $y \in Y$. $\blacksquare$

Definición 2.59 Un continuo K es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios A y B de K tales que $K = A \cup B$.

Teorema 2.60 *Si $f_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es hereditariamente confluente, entonces para todo subcontinuo descomponible $K \subset Y$ y para todo $y \in Y \setminus K$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es un conjunto de un solo punto.*

Demostración. Sea $K \subset Y$ un subcontinuo descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de K tales que $K = A \cup B$ y sea $y \in Y \setminus K$.

El Teorema 2.58 nos dice que f es monótona, así que $f^{-1}(y)$, $f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(K)$ son subcontinuos de X (Lema 2.31).

Supongamos que $f^{-1}(y)$ es no degenerado. Sean $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$, diferentes, y sea $b \in f^{-1}(B) \backslash f^{-1}(A)$. Sean $\mathcal{A} = \{\{x_1, x\} : x \in f^{-1}(K)\}$, $\mathcal{B} = \{\{b, x\} : x \in f^{-1}(y)\}$, $\mathcal{C} = \{\{x_2, x\} : x \in f^{-1}(B)\}$ y $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Como $f^{-1}(K)$, $f^{-1}(y)$, $f^{-1}(B)$ son continuos sabemos que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ lo son. Como $\{x_1, b\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $\{b, x_2\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, sabemos que $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(X)$.

Mostraremos que $f_2|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to f_2(\mathcal{M})$ no es confluente. Sea $\mathcal{K} = \{\{y, a\} : a \in A\}$. Observemos que $\mathcal{K} \subset f_2(\mathcal{A})$ y por tanto $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $f_2(\mathcal{M})$. Dado que $b \notin f^{-1}(A) \cup f^{-1}(y)$, sabemos que $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Entonces $(f_2|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{K}) = (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{A}) \cup (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C})$. Los conjuntos $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{A}$ y $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C}$ son cerrados ajenos. Claramente, $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ y como K es un continuo, $A \cap B \neq \emptyset$, esto implica que $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Así que existe una componente $\mathcal{D}$ de $(f_2|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{K})$ que se queda contenida en $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
f_2(\mathcal{D}) &\subset f_2(f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C}) = f_2(\mathcal{C}) \cap \mathcal{K} = \{\{y, x\} : x \in B\} \cap \mathcal{K} \\
&= \{\{y, x\} : x \in A \cap B\} \subsetneq \mathcal{K}
\end{aligned}
$$

y por lo tanto $f_2|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to f_2(\mathcal{M})$ no es confluente. Esto genera una contradicción, pues f_2 es hereditariamente confluente. Así que $f^{-1}(y)$ debe ser degenerado. ■

Pregunta. ¿Será cierto que, si $f_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es hereditariamente confluente, f tiene que ser un homeomorfismo?

2.11 Refinabilidad

Definición 2.61 Dadas $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas entre continuos, definimos $dsup(f, g) = \max\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$, donde d es una métrica para Y.

Lema 2.62 *Sean $f, g : X \to Y$ un par de funciones continuas entre continuos, entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$, $dsup(f, g) < \varepsilon$ si y sólo si $dsup(f_n, g_n) < \varepsilon$.*

Demostración. (Necesidad) Supongamos que $dsup(f, g) < \varepsilon$. Sea $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Notemos que, para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$, se tiene que $d(f(a_i), g(a_i)) \leq dsup(f, g) < \varepsilon$. Entonces, tenemos que $H(f_n(A), g_n(A)) < \varepsilon$, por lo que $dsup(f_n, g_n) < \varepsilon$.

(Suficiencia) Supongamos que $dsup(f_n, g_n) < \varepsilon$. Entonces, dado $x \in X$, tenemos que $d(f(x), g(x)) = H(f_n(\{x\}), g_n(\{x\})) \leq dsup(f_n, g_n) < \varepsilon$ y por lo tanto $dsup(f, g) < \varepsilon$.

Definición 2.63 Un mapeo $f : X \to Y$ es *refinable* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $g : X \to Y$ tal que $dsup(f, g) < \varepsilon$ y $diam(g^{-1}(y)) < \varepsilon$ para toda $y \in Y$.

Teorema 2.64 *Si $f : X \to Y$ es refinable, entonces $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es refinable, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es refinable, existe $g : X \to Y$ tal que $dsup(f, g) < \varepsilon$ y $diam(g^{-1}(y)) < \varepsilon$ para toda $y \in Y$. Por Lema 2.62 esto implica que $dsup(f_n, g_n) < \varepsilon$. Sea $A = \{y_1, y_2, ..., y_m\} \in \mathcal{F}_n(Y)$ y tomemos $B, C \in g_n^{-1}(A)$. Sean $c \in C$ e $i \in \{1, 2, ..., m\}$ tales que $g(c) = y_i$. Como $g_n(B) = A$, existe $b \in B$ tal que $g(b) = y_i$. Tenemos que $diam(g^{-1}(y_i)) < \varepsilon$ y, en particular, que $d(c, b) < \varepsilon$. Por lo que $C \subset N_\varepsilon(B)$, análogamente $B \subset N_\varepsilon(C)$, y entonces $H(B, C) < \varepsilon$ ([14], Ejercicio 2.3, p. 26). Esto muestra que $diam(g_n^{-1}(A)) < \varepsilon$ y sabíamos que $dsup(f_n, g_n) < \varepsilon$ así que f_n es refinable. ■

Pregunta. ¿Será cierto que si existe $n \geq 2$ tal que $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es refinable, entonces $f : X \to Y$ es refinable?

Capítulo 3

Propiedades Dinámicas

En este capítulo, todas las funciones serán de la forma $f : X \to X$ y serán continuas, pero no necesariamente suprayectivas, además, X siempre denotará un continuo. Para cada $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ denotaremos inductivamente f^k como $f^0 = id_X$ y $f^k = f \circ f^{k-1}$.

3.1 Transitividad

Definición 3.1 Una función $f : X \to X$ es *transitiva* si para cualesquiera dos abiertos no vacíos U y V de X, existe una $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Teorema 3.2 *Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es transitiva, entonces $f : X \to X$ es transitiva.*

Demostración. Para abiertos no vacíos U y V de X tenemos que $\langle U \rangle_n$ y $\langle V \rangle_n$ son abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Como f_n es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f_n)^k(\langle U \rangle_n) \cap \langle V \rangle_n \neq \emptyset$. Sea $A \in \langle U \rangle_n$ tal que $(f_n)^k(A) \in \langle V \rangle_n$ y sea $x \in A$. Como $A \in \langle U \rangle_n$ y $x \in A$ tenemos que $x \in U$. Y como $f^k(x) \in (f_n)^k(A) \in \langle V \rangle_n$ entonces $f^k(x) \in V$. Por lo tanto $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ y f es transitiva. ■

Sin embargo, la condición de que f sea transitiva no es suficiente para que f_n lo sea, y el ejemplo es, de hecho, una de las funciones más simples y más comunes cuando se habla de la dinámica de las funciones, la conocida como rotación irracional en el círculo unitario (Ejemplo 3.8).

Definición 3.3 Una función $f : X \to X$ es una *isometría* si $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, para cualesquiera $x, y \in X$.

Una observación muy directa es que, si $f : X \to X$ es una isometría, entonces $d(x, y) = d(f^m(x), f^m(y))$ para cualesquiera $m \in \mathbb{N}$ y $x, y \in X$.

Lema 3.4 *Si $f : X \to X$ es una isometría, X es no degenerado y $n \geq 2$, entonces $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ no es transitiva.*

Demostración. Supongamos que f_n es transitiva y $n \geq 2$. Sean $x_1, x_2 \in X$ diferentes, y sea $d_0 = d(x_1, x_2)$. Sean $\mathcal{V} = \left\langle B(\frac{d_0}{4}, x_1)\right\rangle_n$ y $\mathcal{U} = \left\langle B(\frac{d_0}{4}, x_1), B(\frac{d_0}{4}, x_2)\right\rangle_n$. Estos conjuntos son abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Como f_n es transitiva existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(f_n)^m(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{U}$ tal que $(f_n)^m(A) \in \mathcal{V}$. Sean $a_1 \in A \cap B(\frac{d_0}{4}, x_1)$ y $a_2 \in A \cap B(\frac{d_0}{4}, x_2)$. Por la desigualdad del triángulo $d_0 \leq d(x_1, a_1) + d(a_1, a_2) + d(a_2, x_2) < \frac{d_0}{4} + d(a_1, a_2) + \frac{d_0}{4}$, entonces $\frac{d_0}{2} < d(a_1, a_2)$. Como $(f_n)^m(A) \in \mathcal{V}$, sabemos que $f^m(a_1), f^m(a_2) \in B(\frac{d_0}{4}, x_1)$, esto implica que $d(f^m(a_1), f^m(a_2)) \leq diam(B(\frac{d_0}{4}, x_1)) = \frac{d_0}{2} < d(a_1, a_2)$, contradiciendo el hecho de que f es una isometría. Así que f_n no es transitiva. ■

Definición 3.5 Dada una función $f : X \to X$ y $x \in X$ definimos el conjunto $o(f, x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\}$ y lo llamamos la *órbita de x bajo f* (o simplemente la *órbita de x*, cuando no haya posibilidad de confusión).

Definición 3.6 Dada una función $f : X \to X$ y $x \in X$ decimos que, x es *un punto transitivo de f*, si $o(f, x)$ es denso en X (o simplemente x es *transitivo*).

Lema 3.7 *Si $f : X \to X$ y existe $x \in X$ tal que x es un punto transitivo de f, entonces f es transitiva.*

Demostración. Sean U y V dos abiertos no vacíos de X. Como $o(f, x)$ es denso existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in U$. Como X es un continuo no tiene puntos aislados y entonces $o(f, x) \setminus \{x, f^1(x), ..., f^m(x)\}$

sigue siendo denso en X, por lo que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m+r}(x) \in V$. Dado que $f^{m+r}(x) = f^r(f^m(x)) \in f^r(U)$ tenemos que $f^r(U) \cap V \neq \emptyset$ y por lo tanto f es transitiva. ■

Ejemplo 3.8 *Existe un continuo X y una función continua $f : X \to X$ que es transitiva pero su inducida $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \geq 2$.*

Consideremos $X = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida como $f(z) = e^{2\pi i\theta}z$ donde $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. A las funciones de este tipo las llamamos *rotaciones irracionales*. Notemos que dada una rotación irracional $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, con ángulo θ, tenemos que para cada $z \in \mathbb{S}^1$,

$$d(z, f(z)) = \left\|z - e^{2\pi i\theta}z\right\| = \|z\| \cdot \left\|1 - e^{2\pi i\theta}\right\| = \left\|1 - e^{2\pi i\theta}\right\|.$$

Así que $d(z, f(z))$ es constante para toda $z \in \mathbb{S}^1$.

Mostraremos que f es transitiva. Tomemos $z \in \mathbb{S}^1$. Supongamos que $f^k(z) = f^m(z)$, es decir, $e^{2\pi i(k\theta)}z = e^{2\pi i(m\theta)}z$, como $z \neq 0$, tenemos que $e^{2\pi i(\theta(k-m))} = 1$, pero sabemos que esto sólo puede pasar si $\theta(k-m) \in \mathbb{Z}$ y como θ es irracional, concluimos que $k = m$. Hemos probado entonces que $z, f(z), f^2(z), ...$ son todos diferentes, para cualquier $z \in \mathbb{S}^1$. Así que $o(f, z)$ es un conjunto infinito para toda $z \in \mathbb{S}^1$.

Fijemos $z, y \in \mathbb{S}^1$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $\mathbb{S}^1$ es compacto, $o(f, z)$ tiene un punto de acumulación y entonces existen $m, r \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^m(z), f^{m+r}(z)) < \varepsilon$. Haciendo $g = f^r$, tenemos que g también es una rotación ($g(z) = e^{2\pi ir\theta}z$) y entonces $d(x, g(x)) = d(f^m(z), g(f^m(z))) < \varepsilon$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Observemos que $o(g, z) = \{z, g(z), g^2(z), ...\}$ son puntos en la circunferencia tales que

$$d(g^k(z), g^{k+1}(z)) = d(g^k(z), g(g^k(z)) = d(f^{kr}(z), g(f^{kr}(z)) < \varepsilon.$$

Podemos pensar que conforme se aplica g, z va dando brinquitos de tamaño constante y menor a ε por la circunferencia, siempre en la misma dirección, con esto aseguramos que en algún brinco caerá en $B(\varepsilon, y)$ pues no la puede saltar toda en un brinco, es decir $o(g, z) \cap B(\varepsilon, y) \neq \emptyset$. Con esto hemos probado que $o(g, z)$ es denso en X. Pero como $g = f^r$, es claro que $o(g,z) \subset o(f,z)$ así que tenemos que $o(f,z)$ es denso. Por el Lema 3.7, f es transitiva. Pero es bien sabido que las rotaciones son isometrías, así que, por el Lema 3.4, f_n no es transitiva para ninguna $n \geq 2$. ■

3.2 Mezcladoras

Definición 3.9 Una función continua $f : X \to X$ es *mezcladora* si para todo par de abiertos no vacíos U y V de X existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para toda $k \geq N$.

Lema 3.10 *La familia $\{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle_n \subset \mathcal{F}_n(X) : U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en $X\}$ es una base para la topología de $\mathcal{F}_n(X)$.*

Demostración. Sabemos que la familia $\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n \subset \mathcal{F}_n(X) : m \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_m$ son abiertos en $X\}$ es una base de $\mathcal{F}_n(X)$ ([14], Ejercicio 2.8, p.27). Entonces sólo hay que ver que para cada $\langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$ en esa familia y $A \in \langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$ existen n abiertos de X, a saber $V_1, V_2, ..., V_n$, tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n \subset \langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$. Sea $\langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n \in \mathcal{B}$.

Caso 1. Si $m \leq n$, hacemos $V_i = U_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$ y $V_i = U_m$ para todo $i \in \{m+1, ..., n\}$. Entonces $\langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n = \langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$ y terminamos.

Caso 2. Si $m > n$, etiquetamos los elementos de $A = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ hacemos $W_i = \bigcap\{U_j : x_i \in U_j\}$. Afirmamos que $A \in \langle W_1, \ldots, W_k\rangle_n \subset \langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$. Claramente $x_i \in W_i$, para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$, así que $A \in \langle W_1, \ldots, W_k\rangle_n$.

Como $A \subset U_1 \cup ... \cup U_m$, sabemos que, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, existe $j \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que $x_i \in U_j$, entonces $W_i \subset U_j$, por lo tanto $W_1 \cup ... \cup W_k \subset U_1 \cup ... \cup U_m$. Dado $j \in \{1, 2, ..., m\}$, sabemos que $A \cap U_j \neq \emptyset$, por lo que existe $i \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que $x_i \in U_j$ y entonces $W_i \subset U_j$.

Mostraremos que $\langle W_1, W_2, \ldots, W_k\rangle_n \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle_n$. Sea $B = \{y_1, y_2, ..., y_l\} \in \langle W_1, \ldots, W_k\rangle_n$. Tenemos que $B \subset W_1 \cup ... \cup W_k \subset U_1 \cup ... \cup U_m$. Además sabemos que, para cada $j \in \{1, 2, ..., m\}$, existe $i \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que $W_i \subset U_j$, para esa i, sabemos que $B \cap W_i \neq \emptyset$, así que existe $r \in \{1, 2, ..., l\}$ tal que $y_r \in W_i \subset U_j$. Así pues, $B \subset U_1 \cup ... \cup U_m$ y $B \cap U_j \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, 2, ..., m\}$, con lo que $B \in \langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$ y entonces $\langle W_1, \ldots, W_k\rangle_n \subset \langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$.

Hemos encontrado k abiertos, a saber $W_1, W_2, ..., W_k$, tales que $A \in \langle W_1, \ldots, W_k\rangle_n$. Como $A \in \mathcal{F}_n(X)$, sabemos que $k \leq n$ y entonces, aplicando el Caso 1 a $\langle W_1, \ldots, W_k\rangle_n$, podemos encontrar n abiertos $V_1, ..., V_n$ tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n \subset \langle W_1, \ldots, W_k\rangle_n$. Ya hemos probado que $\langle W_1, \ldots, W_k\rangle_n \subset \langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$, así que sabemos que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n\rangle_n \subset \langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$. Esto concluye la prueba del lema. ■

Teorema 3.11 *Sea $f : X \to X$ una función continua, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
$a)$ *f es mezcladora,*
$b)$ *f_n es mezcladora, para alguna $n \in \mathbb{N}$,*
$c)$ *f_n es mezcladora, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $a) \Rightarrow c)$ Supongamos que f es mezcladora y sea $n \in \mathbb{N}$. Sean $\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle_n$ y $\langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle_n$ dos abiertos básicos de $\mathcal{F}_n(X)$ (Lema 3.10). Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para toda $k \geq N_i$. Hacemos $N = \max\{N_1, N_2, ..., N_n\}$ y entonces, tenemos que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para toda $k \geq N$ y para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Esto quiere decir que, para cualesquiera $k \geq N$ e $i \in \{1, 2, ..., n\}$, podemos tomar un punto $x_i \in U_i \cap f^{-k}(V_i)$. Sea $A_k = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Entonces se cumple que $A_k \in \langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle_n$ y $(f_n)^k(A_k) \in \langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle_n$. Dado que, lo hicimos para cualquier $k \geq N$, sabemos que $(f_n)^k(\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle_n) \cap \langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle_n \neq \emptyset$ para toda $k \geq N$. Esto muestra que f_n es mezcladora.

$b) \Rightarrow a)$ Supongamos que f_n es mezcladora, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sean U y V dos abiertos no vacíos de X. Entonces $\langle U\rangle_n$ y $\langle V\rangle_n$ son dos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Como f_n es mezcladora, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(f_n)^k(\langle U\rangle_n) \cap \langle V\rangle_n \neq \emptyset$ para toda $k \geq N$. Para cada $k \geq N$, sea $A_k \in \langle U\rangle_n$ tal que $(f_n)^k(A_k) \in \langle V\rangle_n$ y sea $x_k \in A_k$. Como $A_k \in \langle U\rangle_n$ y $x_k \in A$, sabemos que $x_k \in U$. Y como $f^k(x_k) \in (f_n)^k(A_k) \in \langle V\rangle_n$, sabemos que $f^k(x_k) \in V$. Por lo tanto $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para toda $k \geq N$. Esto muestra que f es mezcladora. ■

Definición 3.12 Una función continua $f : X \to X$ es *débilmente mezcladora* si para cada colección de cuatro abiertos no vacíos de X, de la forma U_1, U_2, V_1, V_2, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2\}$.

Notamos que si tomamos $U_1 = U_2 = U$ y $V_1 = V_2 = V$ tenemos que f satisface la condición de transitividad (Definición 3.2). Tal vez a primera vista no es evidente que esta nueva propiedad no es equivalente a la transitividad, pero basta fijarnos de nuevo en el ejemplo de la rotación irracional del círculo (ver Ejemplo 3.8) para ver que ser débilmente mezcladora sí es, en efecto, una condición más fuerte.

Lema 3.13 *Si f es una isometría, entonces f no es débilmente mezcladora.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Sean $x, y \in X$, distintos. Sea $d_0 = d(x, y)$. Sean $U_1 = U_2 = B(\frac{d_0}{4}, x)$, $V_1 = B(\frac{d_0}{4}, x)$, $V_2 = B(\frac{d_0}{4}, y)$ y $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Como $diam(U_1) \leq \frac{d_0}{2}$ y f es una isometría, sabemos que $diam(f^k(U_1)) \leq \frac{d_0}{2}$. Sean $z \in f^k(U_1) \cap V_1$ y $w \in f^k(U_1)$. Como $z \in V_1$, sabemos que $d(x, z) < \frac{d_0}{4}$. Dado que $diam(f^k(U_1)) \leq \frac{d_0}{2}$ sabemos que $d(z, w) \leq \frac{d_0}{2}$. Por la desigualdad del triángulo, sabemos que $d(x, w) \leq d(x, z) + d(z, w) < \frac{3d_0}{4}$, es decir, $f^k(U_1) \subset B(\frac{3d_0}{4}, x)$, pero como $d(x, y) = d_0$, sabemos que $B(\frac{3d_0}{4}, x) \cap V_2 = \emptyset$ y así $f^k(U_2) \cap V_2 = f^k(U_1) \cap V_2 = \emptyset$. Entonces f no puede ser débilmente mezcladora. ■

Ejemplo 3.14 *Una rotación irracional en el cículo (ver Ejemplo 3.8) es transitiva pero no débilmente mezcladora.*

Una rotación irracional en el círculo (ver Ejemplo 3.8), al ser una isometría, no es débilmente mezcladora en virtud del Lema 3.13. Sin embargo, en el Ejemplo 3.8, vimos que es transitiva.

Hay muchas definiciones equivalentes de una función débilmente mezcladora, la Definición 3.12 es la más conocida y simple, pero en nuestro caso serán más útiles otras definiciones equivalentes, que probaremos en el siguiente lema.

Lema 3.15 *Para cualquier función continua $f : X \to X$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

$a)$ *Para cada colección de cuatro abiertos no vacíos de X de la forma U_1, U_2, V_1, V_2 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para $i \in \{1, 2\}$.*

$b)$ *Para toda colección de $2m$ abiertos no vacíos de X de la forma $U_1, U_2, ..., U_m, V_1, V_2, ..., V_m$, con $m \geq 2$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$.*

$c)$ *Para toda colección de tres abiertos no vacíos de X de la forma U, V_1, V_2, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V_i \neq \emptyset$, para $i \in \{1, 2\}$.*

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Hagamos la prueba por inducción sobre m, a partir de $m = 2$ que es la hipótesis que tenemos. Supongamos que lo tenemos para toda $m \leq N$. Sea $U_1, U_2, ..., U_{N+1}, V_1, V_2, ..., V_{N+1}$ una colección de abiertos no vacíos de X. Consideremos la colección U_1, V_1, U_2, V_2, en ese orden, por hipótesis de inducción existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \neq f^r(V_1) \cap V_2$ o, equivalentemente, que los conjuntos $U = f^{-r}(U_2) \cap U_1$ y $V = f^{-r}(V_2) \cap V_1$ son ambos diferentes del vacío.

Como f es continua, U y V son ambos abiertos y podemos considerar la colección de abiertos no vacíos $U, U_3, U_4, ..., U_{N+1}, V, V_3, V_4, ..., V_{N+1}$, que tiene N parejas de abiertos, tenemos que, por hipótesis de inducción, existe una $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para toda $i \in \{3, 4, ..., N + 1\}$, y $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Para terminar esta implicación sólo falta ver que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y que $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Como $U \subset U_1$, $V \subset V_1$ y $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, obtenemos que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Para ver que $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, basta tomar $x \in U$ tal que $f^k(x) \in$

V, como $V \subset f^{-r}(V_2)$, tenemos que $f^{k+r}(x) = f^r(f^k(x)) \in V_2$. Además, como $U \subset f^{-r}(U_2)$, tenemos que $f^r(x) \in U_2$ y $f^k(f^r(x)) \in f^k(U_2)$. Notemos que $f^k(f^r(x)) = f^{k+r}(x) = f^r(f^k(x))$ y por lo tanto $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Hemos probado entonces que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$ y ya lo sabíamos para toda $i \in \{3, 4, ..., N+1\}$. Así que tenemos que la propiedad $b)$ se cumple.

$b) \Rightarrow c)$ Para esta implicación, dados abiertos no vacíos $U, V_{1,} V_2$, sólo hay que tomar $m = 2$ y $U_1 = U_2 = U$ en $b)$.

$c) \Rightarrow a)$ Dados abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2, por $c)$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $f^r(U_1) \cap V_2 \neq \emptyset$ o, equivalentemente, los conjuntos $T = f^{-r}(U_2) \cap U_1$ y $S = f^{-r}(V_2) \cap U_1$ son no vacíos.

Por la continuidad de f los conjuntos T y S son abiertos y entonces, por $c)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(T) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(T) \cap S \neq \emptyset$. Como $T \subset U_1$, tenemos que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Para ver que $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, tomamos $x \in T$ tal que $f^k(x) \in S$. Como $S \subset f^{-r}(V_2)$, tenemos que $f^r(f^k(x)) \in V_2$. Además como $T \subset f^{-r}(U_2)$, tenemos que $f^r(x) \in U_2$ y $f^k(f^r(x) \in f^k(U_2)$. Notemos que $f^k(f^r(x)) = f^r(f^k(x))$ y por tanto $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Con esto hemos visto que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ que es justamente $a)$. Esto concluye la equivalencia de los tres enunciados. ■

Recordemos que $a)$ es la definición que teníamos de una función débilmente mezcladora (Definición 3.12). Así que hemos probado que cualquiera de las tres condiciones anteriores es equivalente a que la función f sea débilmente mezcladora. Con esto ya estamos listos para probar el siguente teorema, que de hecho es una extensión del Teorema 3.2, visto en la sección de transitividad.

Teorema 3.16 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$a)$ $f : X \to X$ *es débilmente mezcladora.*

$b)$ $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ *es débilmente mezcladora, para toda* $n \in \mathbb{N}$.

$c)$ $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ *es transitiva, para toda* $n \in \mathbb{N}$.

$d)$ $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ *es débilmente mezcladora, para alguna* $n \geq 2$.

$e) f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ *es transitiva, para alguna* $n \geq 2$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Sea $n \in \mathbb{N}$.Tomamos $\mathcal{U}_1 = \langle U_1^1, U_2^1, ..., U_n^1 \rangle_n$, $\mathcal{U}_2 = \langle U_1^2, U_2^2, ..., U_n^2 \rangle_n$, $\mathcal{V}_1 = \langle V_1^1, V_2^1, ..., V_n^1 \rangle_n$ y $\mathcal{V}_2 = \langle V_1^2, V_2^2, ..., V_n^2 \rangle_n$ abiertos básicos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$ (Lema 3.10). Como f es débilmente mezcladora, por el Lema 3.15, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i^j) \cap V_i^j \neq \emptyset$, para cualesquiera $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $j \in \{1, 2\}$. Tomamos puntos $x_i^j \in f^{-k}(V_i^j) \cap U_i^j$, para cualesquiera $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $j \in \{1, 2\}$, formamos los conjuntos $A_1 = \{x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1\}$ y $A_2 = \{x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2\}$. Claramente $A_i \in \mathcal{U}_i$ y $(f_n)^k(A_i) \in \mathcal{V}_i$, para cada $i \in \{1, 2\}$, por lo que $(f_n)^k(\mathcal{U}_i) \cap \mathcal{V}_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Esto muestra que f_n es débilmente mezcladora.

$b) \Rightarrow c)$ y $d) \Rightarrow e)$ Ya hemos observado que las funciones débilmente mezcladoras simpre son transitivas.

$e) \Rightarrow a)$ Sean U, V_1 y V_2 abiertos no vacíos de X. Llamamos $\mathcal{U} = \langle U \rangle_n$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2 \rangle_n$. Como $n \geq 2$, $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Como f_n es transitiva, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f_n)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Entonces existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $(f_n)^k(A) \in \mathcal{V}$, esto que quiere decir que $f^k(A) \cap V_1$ y $f^k(A) \cap V_1$ son ambos no vacíos. Por lo que existen x_1 y x_2 en A tales que $f^k(x_1) \in V_1$ y $f^k(x_2) \in V_2$. Sabemos que $A \in \mathcal{U}$, por lo que $x_1, x_2 \in A \subset U$ y de ahí que $f^k(U) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Por el Lema 3.15, esto implica que f es débilmente mezcladora. Con esto concluimos la equivalencia de los enunciados. ■

3.3 Dependencia Sensitiva a las Condiciones Iniciales.

Definición 3.17 Una función continua $f : X \to Y$ tiene *dependencia sensitiva a las condiciones iniciales* (que abreviaremos *dsci*), si existe una $c > 0$ tal que para toda $x \in X$ y para todo abierto U, con $x \in U$, existen $y \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^k(x), f^k(y)) > c$. (En este caso decimos que c es una *constante de sensitividad* para f)

Teorema 3.18 *Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ tiene dsci, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $f : X \to X$ tiene dsci.*

Demostración. Como f_n tiene dsci, existe una $c > 0$ tal que c es una constante de sensitividad para f (Definición 3.17). Proponemos que c es una constante de sensitividad para f. Dado $x \in X$ y U un abierto de X tal que $x \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, x) \subset U$. Si consideramos $B_H(\varepsilon, \{x\})$ sabemos que, como f_n tiene dsci, existen $A \in B_H(\varepsilon, \{x\})$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $H((f_n)^k(\{x\}), (f_n)^k(A)) > c$.

Si etiquetamos los elementos de $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ tenemos que $(f_n)^k(A) = \left\{f^k(a_1), ..., f^k(a_m)\right\}$ y como $H((f_n)^k(\{x\}), (f_n)^k(A)) > c$, sabemos que existe $i_0 \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que $d(f^k(x), f^k(a_{i_0})) > c$. Como $A \in B_H(\varepsilon, \{x\})$, tenemos que $a_i \in B(\varepsilon, x)$, para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$, en particular $a_{i_0} \in B(\varepsilon, x) \subset U$. De manera que hemos encontrado $a_{i_0} \in X$ tal que $a_{i_0} \in U$ y $d(f^k(x), f^k(a_{i_0})) > c$, por lo que f tiene dsci. ■

Teorema 3.19 *Si $f : X \to X$ tiene dsci, entonces $f_2 : \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(X)$ tiene dsci.*

Demostración. Como f tiene dsci, existe una $c > 0$ tal que c es constante de sensitividad para f (Definición 3.17). Proponemos que $\frac{c}{2}$ es constante de sensitividad para f_2. Sean $A \in \mathcal{F}_2(X)$ y $\varepsilon > 0$. Etiquetemos los elementos de $A = \{x_1, x_2\}$ (con la posibilidad de que $x_1 = x_2$). Como c es constante de sensitividad para f, existen $y \in B(\varepsilon, x_1)$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^k(y), f^k(x_1)) > c$.

Sea $B = \{y, x_2\}$, como $y \in B(\varepsilon, x_1)$, sabemos que $B \in B_H(\varepsilon, A)$. Supongamos que $H((f_n)^k(A), (f_n)^k(B)) < \frac{c}{2}$. Esto implica ([14], Ejercicio 2.3, p. 26) que $(f_n)^k(B) \subset N(\frac{c}{2}, (f_n)^k(A))$, es decir que

$$\begin{aligned}\left\{f^k(y), f^k(x_2)\right\} &\subset N(\frac{c}{2}, \left\{f^k(x_1), f^k(x_2)\right\}) \\ &= B(\frac{c}{2}, f^k(x_1)) \cup B(\frac{c}{2}, f^k(x_2)).\end{aligned}$$

Como $d(f^k(y), f^k(x_1)) > c$, debe suceder que $f^k(y) \in B(\frac{c}{2}, f^k(x_2))$, es decir, $d(f^k(y), f^k(x_2)) < \frac{c}{2}$. Por la desigualdad del triángulo, sabemos que $d(f^k(x_1), f^k(x_2)) \geq d(f^k(x_1), f^k(y)) - d(f^k(y), f^k(x_2)) >$

$\frac{c}{2}$. Con esto tenemos que $f^k(x_1) \notin B(\frac{c}{2}, f^k(x_2)) \cup B(\frac{c}{2}, f^k(y)) = N(\frac{c}{2}, f^k(B))$ y entonces $f^k(A) \nsubseteq N(\frac{c}{2}, f^k(B))$, una contradicción, pues supusimos que $H((f_n)^k(A), (f_n)^k(B)) < \frac{c}{2}$ ([14], Ejercicio 2.3, p. 26). Entonces $H((f_n)^k(A), (f_n)^k(B)) > \frac{c}{2}$. Como ya habíamos visto que $B \in B_H(\varepsilon, A)$, esto muestra que $\frac{c}{2}$ es una constante de sensitividad para f_2 y, por lo tanto, f_2 tiene dsci. ■

Pregunta: ¿Será cierto que si $f : X \to X$ tiene dsci entonces $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ tiene dsci para toda (o alguna) $n \geq 3$?

3.4 Caos

Definición 3.20 Dada una función continua $f : X \to X$, decimos que un punto $x \in X$ es un *punto periódico* de f si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$. Al conjunto de puntos periódicos de f lo denotaremos por $per(f)$.

Definición 3.21 Dado $x \in per(f)$ decimos que x tiene *orden* k, si k es el mínimo natural tal que $f^k(x) = x$.

Lema 3.22 *Sea $f : X \to X$ una función continua, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $per(f_n)$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$ si y sólo si $per(f)$ es denso en X.*

Demostración. (Necesidad) Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $per(f_n)$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $per(f_n)$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$, existe $A \in per(f_n) \cap B_H(\varepsilon, \{x\})$. Como $A \in per(f_n)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f_n)^k(A) = A$. Es decir $f^k|_A : A \to A$ es una permutación de los elementos de A. Pero A tiene un número finito de puntos, y todas las permutaciones de un conjunto finito de puntos tienen orden finito, es decir, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\left(f^k\right)^r|_A = id_A$ y, entonces $A \subset per(f)$. Como $A \in B_H(\varepsilon, \{x\})$, tenemos que $A \subset B(\varepsilon, x)$, por lo que $B(\varepsilon, x) \cap per(f) \neq \emptyset$ y entonces $per(f)$ es denso en X.

(Suficiencia) Supongamos que $per(f)$ es denso en X. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sean $A \in \mathcal{F}_n(X)$ y $\varepsilon > 0$. Si etiquetamos los elementos de $A =$

$\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, como $per(f)$ es denso, sabemos que, para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$, existe $p_i \in per(f) \cap B(\varepsilon, x_i)$. Sea n_i el orden de p_i. Sea $k = n_1 n_2 \cdots n_m$, entonces tenemos que $f^k(p_i) = p_i$, para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Sea $B = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$. Por construcción, $(f_n)^k(B) = \left\{f^k(p_1), ..., f^k(p_m)\right\} = B$, así que $B \in per(f_n)$. Como, para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$, tenemos que $p_i \in B(\varepsilon, x_i)$, sabemos que $B \in B_H(\varepsilon, A)$. Es decir, $B \in per(f_n) \cap B_H(\varepsilon, A)$, con lo que $per(f_n)$ es denso. Esto concluye el teorema. ■

Definición 3.23 Una función continua $f : X \to X$ es *caótica* si es transitiva y $per(f)$ es denso.

Teorema 3.24 *Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es caótica, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $f : X \to X$ es caótica y débilmente mezcladora.*

Demostración. Si f_n es caótica, $per(f_n)$ es denso, y el Lema 3.22 nos dice que, entonces, $per(f)$ es denso. El Teorema 3.16 nos dice que el hecho de que f_n sea transitiva es equivalente a que f sea débilmente mezcladora. Así que si f_n es caótica, en particular transitiva, debe suceder que f es débilmente mezcladora, en particular f es transitiva. Entonces f es caótica y débilmente mezcladora. ■

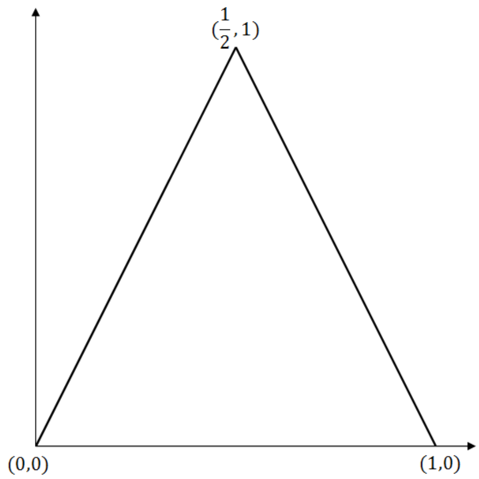
3.4.1 La función tienda

Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ definida como:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Definición 3.25 La función T es claramente continua y es conocida como la "*Función Tienda*".

Esta subsección está dedicada a probar que T es caótica.



Gráfica de T

Primero mostraremos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, T^k está definida por las siguientes fórmulas:

$$T^k(x) = \begin{cases} 2^k(x - \frac{r}{2^k}), & \text{si } x \in [\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}] \text{ y } r \in \{0, 2, 4, ..., 2^k - 2\}, \\ -2^k(x - \frac{r+1}{2^k}), & \text{si } x \in [\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}] \text{ y } r \in \{1, 3, 5, ..., 2^k - 1\}. \end{cases}$$

Para $k = 1$ estas fórmulas se transforman en:

$$T^1(x) = \begin{cases} 2(x - 0), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ -2(x - \frac{2}{2}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Claramente ésta es la definición de $T(x)$, por lo que la afirmación es válida para $k = 1$.

Supongamos que esta expresión para T^k es válida y mostraremos que lo mismo ocurre para T^{k+1}.

Tomemos $r \in \{0, 1, ..., 2^{k+1} - 1\}$ y $x \in [\frac{r}{2^{k+1}}, \frac{r+1}{2^{k+1}}]$. Analicemos cuatro casos para r.

Caso 1. r es de la forma $4s$.
En este caso, $\frac{2s}{2^k} = \frac{r}{2^{k+1}} \leq x \leq \frac{r+1}{2^{k+1}} = \frac{4s+1}{2^{k+1}} < \frac{4s+2}{2^{k+1}} = \frac{2s+1}{2^k}$. Por hipótesis de inducción, $T^k(x) = 2^k(x - \frac{2s}{2^k})$, además $0 = 2^k(\frac{2s}{2^k} - \frac{2s}{2^k}) \leq$

$2^k(x-\frac{2s}{2^k}) \le 2^k(\frac{4s+1}{2^{k+1}}-\frac{2s}{2^k}) = 2^k(\frac{1}{2^{k+1}}) = \frac{1}{2}$. De manera que $0 \le T^k(x) \le \frac{1}{2}$, por lo que $T^{k+1}(x) = 2T^k(x) = 2(2^k(x-\frac{2s}{2^k})) = 2^{k+1}(x-\frac{r}{2^{k+1}})$. Con esto terminamos este caso.

Caso 2. r es de la forma $4s+1$.

En este caso, $\frac{2s}{2^k} = \frac{4s}{2^{k+1}} < \frac{4s+1}{2^{k+1}} = \frac{r}{2^{k+1}} \le x \le \frac{r+1}{2^{k+1}} = \frac{2s+1}{2^k}$. Por hipótesis de inducción, $T^k(x) = 2^k(x-\frac{2s}{2^k})$, además $\frac{1}{2} = 2^k(\frac{4s+1}{2^{k+1}}-\frac{2s}{2^k}) \le 2^k(x-\frac{2s}{2^k}) \le 2^k(\frac{r+1}{2^{k+1}}-\frac{2s}{2^k}) = 2^k(\frac{4s+2}{2^{k+1}}-\frac{2s}{2^k}) = 2^k(\frac{1}{2^k}) = 1$. De manera que $\frac{1}{2} \le T^k(x) \le 1$, por lo que $T^{k+1}(x) = 2-2T^k(x) = 2-2^{k+1}(x-\frac{2s}{2^k}) = -2^{k+1}(x-\frac{2s+1}{2^k}) = -2^{k+1}(x-\frac{4s+2}{2^{k+1}}) = -2^{k+1}(x-\frac{r+1}{2^{k+1}})$. Con esto terminamos este caso.

Caso 3. r es de la forma $4s+2$.

En este caso, $\frac{2s+1}{2^k} = \frac{r}{2^{k+1}} \le x \le \frac{r+1}{2^{k+1}} < \frac{2s+2}{2^k}$. Por hipótesis de inducción, $T^k(x) = -2^k(x-\frac{2s+2}{2^k})$, además $\frac{1}{2} = -2^k(\frac{r+1}{2^{k+1}}-\frac{2s+2}{2^k}) \le -2^k(x-\frac{2s+2}{2^k}) \le -2^k(\frac{r}{2^{k+1}}-\frac{2s+2}{2^k}) = -2^k(\frac{2s+1}{2^k}-\frac{2s+2}{2^k}) = -2^k(-\frac{1}{2^k}) = 1$. De manera que $\frac{1}{2} \le T^k(x) \le 1$, por lo que $T^{k+1}(x) = 2-2T^k(x) = 2+2^{k+1}(x-\frac{2s+2}{2^k}) = 2^{k+1}(\frac{1}{2^k}+x-\frac{2s+2}{2^k}) = 2^{k+1}(x-\frac{2s+1}{2^k}) = 2^{k+1}(x-\frac{r}{2^k})$. Con esto terminamos este caso.

Caso 4. r es de la forma $4s+3$.

En este caso, $\frac{2s+1}{2^k} = \frac{4s+2}{2^{k+1}} < \frac{4s+3}{2^{k+1}} = \frac{r}{2^{k+1}} \le x \le \frac{r+1}{2^k} = \frac{2s+2}{2^k}$. Por hipótesis de inducción, $T^k(x) = -2^k(x-\frac{2s+2}{2^k})$, además $0 = -2^k(\frac{2s+2}{2^k}-\frac{2s+2}{2^k}) \le -2^k(x-\frac{2s+2}{2^k}) \le -2^k(\frac{4s+3}{2^{k+1}}-\frac{2s+2}{2^k}) = -2^k(-\frac{1}{2^{k+1}}) = \frac{1}{2}$. De manera que $0 \le T^k(x) \le \frac{1}{2}$, por lo que $T^{k+1}(x) = 2T^k(x) = -2^{k+1}(x-\frac{2s+2}{2^k})$. Con esto terminamos este caso.

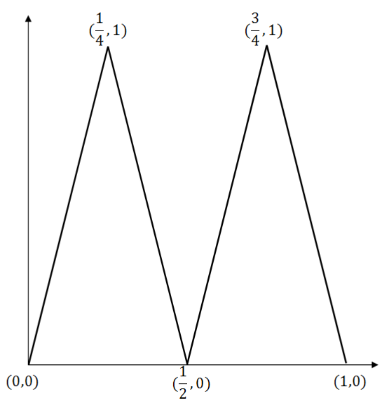
Esto termina la prueba de la inducción y muestra que T^k se puede calcular con las fórmulas descritas.

La expresión que encontramos para T^k nos permite analizarla con detalle.

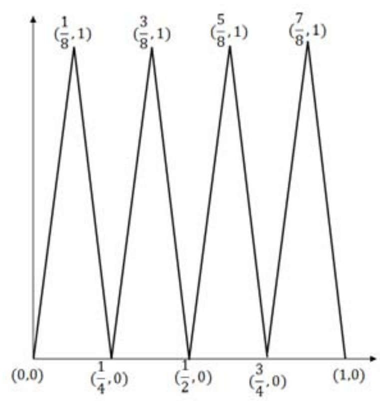
Si r es par y $r \in \{0,1,...,2^k-1\}$, entonces la gráfica de T^k en $[\frac{r}{2^k},\frac{r+1}{2^k}]$ es un segmento que une los puntos $(\frac{r}{2^k}, T(\frac{r}{2^k})) = (\frac{r}{2^k}, 2^k(\frac{r}{2^k}-\frac{r}{2^k})) = (\frac{r}{2^k}, 0)$ y $(\frac{r+1}{2^k}, T(\frac{r+1}{2^k})) = (\frac{r+1}{2^k}, 2^k(\frac{r+1}{2^k}-\frac{r}{2^k}) = (\frac{r+1}{2^k}, 1)$.

Si r es impar y $r \in \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$, entonces la gráfica de T^k en $[\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}]$ es un segmento que une los puntos $(\frac{r}{2^k}, T(\frac{r}{2^k})) = (\frac{r}{2^k}, -2^k(\frac{r}{2^k} - \frac{r+1}{2^k})) = (\frac{r}{2^k}, 1)$ y $(\frac{r+1}{2^k}, T(\frac{r+1}{2^k})) = (\frac{r+1}{2^k}, -2^k(\frac{r+1}{2^k} - \frac{r+1}{2^k})) = (\frac{r+1}{2^k}, 0)$.

Por tanto, la gráfica de T^k consta de 2^{k-1} picos de altura 1, cuyas bases son los intervalos $[0, \frac{1}{2^{k-1}}], [\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{2}{2^{k-1}}], ..., [\frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}, \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}}]$. En las siguientes figuras ilustramos T^2 y T^3.



Gráfica de T^2



Gráfica de T^3

Afirmación 1. Para todo abierto no vacío U de $[0, 1]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(U) = [0, 1]$.

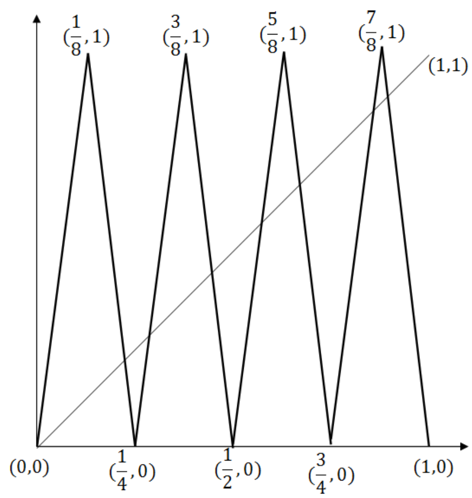
Demostración. Como U es un abierto no vacío del $[0, 1]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que U contiene un intervalo de la forma$[\frac{r}{2^k} \frac{r+1}{2^k}]$. Como vimos antes, $T^k([\frac{r}{2^k} \frac{r+1}{2^k}]) = [0, 1]$. Por tanto, $T^k(U) = [0, 1]$. $\square$

Afirmación 2. T es transitiva.

Demostración. Dados abiertos no vacíos U y V de $[0, 1]$, la Afirmación 1 implica que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(U) = [0, 1]$ y por tanto $T^k(U) \cap V = V \neq \emptyset$. Con lo que T es transitiva. $\square$

Afirmación 3. $per(T)$ es denso en $[0, 1]$.

Demostración. Sea U un abierto no vacío de $[0,1]$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y r un número par, $r \in \{0,1,...,2^k-1\}$ tales que $[\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}] \subset U$. Ya vimos que $T^k(\frac{r}{2^k}) = 0 \leq \frac{r}{2^k}$ y $\frac{r+1}{2^k} \leq 1 = T^k(\frac{r+1}{2^k})$. De manera que la función $T^k - id : [\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}] \to \mathbb{R}$ toma un valor ≤ 0 en $\frac{r}{2^k}$ y un valor ≥ 0 en $\frac{r+1}{2^k}$. Por el Teorema de Valor Intermedio, existe $x \in [\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}]$ tal que $T^k(x) - x = 0$. Entonces $x \in per(T) \cap [\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}] \subset per(T) \cap U$. Por tanto $per(T)$ es denso en $[0,1]$. $\square$



Gráfica de T^3 con id

Afirmación 4. T es caótica.

Demostración. Por la Afirmación 2, T es transitiva, por la Afirmación 3, $per(T)$ es denso en $[0,1]$, así que T es caótica. $\blacksquare$

3.4.2 Funciones Conjugadas

Definición 3.26 Dadas dos funciones continuas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$, decimos que f y g son *conjugadas*, si existe un homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ tal que $\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi = f$. En ese caso se dice que φ *conjuga* a g con f.

Observación Notemos que, de la igualdad $\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi = f$, se obtiene que $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. De manera que la Definición 3.26 es simétrica para f y g. Además φ conjuga a g con f si y sólo si φ^{-1} conjuga a f con g.

Lema 3.27 *Si φ conjuga a g con f, entonces $x \in per(f)$ si y sólo si $\varphi(x) \in per(g)$ (es decir $per(g) = \varphi(per(f))$).*

Demostración. Notemos que $f^k(x) = \left(\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi\right)^k(x) = \varphi^{-1} \circ g^k \circ \varphi(x)$. Así que $f^k(x) = x$ si y sólo si $\varphi^{-1} \circ g^k \circ \varphi(x) = x$, pero esto sucede si y sólo si $g^k(\varphi(x)) = \varphi(x)$. Es decir, $x \in per(f)$ si y sólo si $\varphi(x) \in per(g)$ ■

Corolario 3.28 *Si $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son conjugadas, entonces $per(f)$ es denso si y sólo si $per(g)$ es denso.*

Demostración. Se sigue directo del Lema 3.27 y del hecho de que los homeomorfismos mandan conjuntos densos en conjuntos densos. ■

Lema 3.29 *Si $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son conjugadas, entonces f es transitiva si y sólo si g es transitiva.*

Demostración. Por las observaciones, respecto a la simetría de la conjugación, que hicimos en la Definición 3.26, sólo tenemos que probar alguna de las dos implicaciones. Supongamos que g es transitiva. Como f y g son conjugadas existe un homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ tal que $\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi = f$. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Entonces $\varphi(U)$ y $\varphi(V)$ son abiertos no vacíos de Y y como g es transitiva existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(\varphi(U)) \cap \varphi(V) \neq \emptyset$, por lo que $\emptyset \neq \varphi^{-1}(g^k(\varphi(U)) \cap \varphi(V)) = \varphi^{-1} \circ g^k \circ \varphi(U) \cap V = f^k(U) \cap V$. Esto muestra que f es transitiva. ■

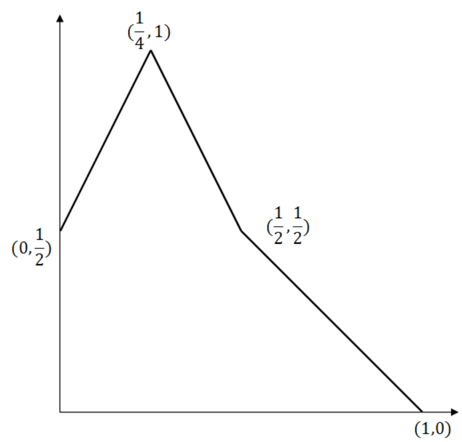
Corolario 3.30 *Si f y g son conjugadas, entonces f es caótica si y sólo si g es caótica.*

Demostración. Esto sale directamente del Corolario 3.28 y del Lema 3.29. ■

Ejemplo 3.31 *Existe un continuo X y una función caótica $f : X \to X$ cuya inducida $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ no es caótica para ninguna $n \geq 2$.*

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ \frac{3}{2} - 2x, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ 1 - x, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$



Gráfica de f

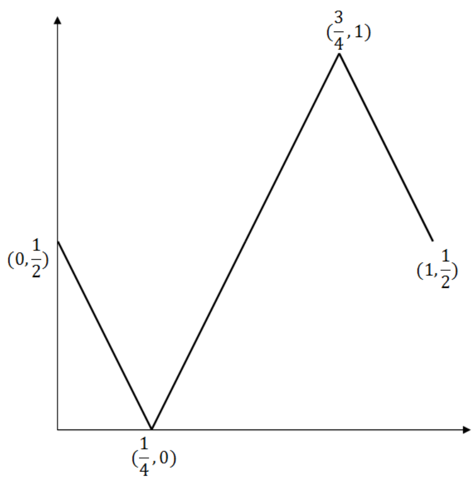
Sea $n \in \mathbb{N}$. Primero veamos que $f_n : \mathcal{F}_n([0,1]) \to \mathcal{F}_n([0,1])$ no es caótica. Sabemos que para que f_n sea caótica debe ser, en particular, transitiva. Por el Teorema 3.16, sabemos que, para que f_n sea transitiva, f debe ser débilmente mezcladora. Sin embargo, éste no es el caso, pues si hacemos $U_1 = U_2 = V_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $V_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, tenemos que $f(U_1) = V_2$ y $f(V_2) = U_1$. De aquí se sigue que:

$$f^k(U_1) = f^k(U_2) = \begin{cases} V_1, & \text{si } k \text{ es par}, \\ V_2, & \text{si } k \text{ es impar}. \end{cases}$$

Como $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tenemos que para toda $k \in \mathbb{N}$, $f^k(U_1) \cap V_1 = \emptyset$ o que $f^k(U_2) \cap V_2 = \emptyset$. Con esto, f no es débilmente mezcladora y f_n no es transitiva para ninguna $n \geq 2$. Hemos probado entonces que f_n no es caótica.

Para ver que $f : [0,1] \to [0,1]$ es caótica, vamos a analizar f^2. Notemos que

$$f^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ 2x - \frac{1}{2}, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ \frac{5}{2} - 2x, & \text{si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$



Gráfica de f^2

Notemos que podemos considerar $f^2|_{[0,\frac{1}{2}]} : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f^2|_{[\frac{1}{2},1]} : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, como sistemas dinámicos independientes. Por comodidad llamemos $g_1 = f^2|_{[0,\frac{1}{2}]}$ y $g_2 = f^2|_{[\frac{1}{2},1]}$.

Afirmación 1. g_1 y T son conjugadas (Definiciones 3.25 y 3.26).

Demostración. Sea $\varphi_1 : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$ definida como $\varphi_1(x) = 1 - 2x$. Entonces $\varphi_1(0) = 1, \varphi_1(\frac{1}{2}) = 0, \varphi_1(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}, (\varphi_1)^{-1}(x) = \frac{1-x}{2}$ y φ_1 es claramente un homeomorfismo. Si $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, tenemos que $\varphi_1(x) = 1 - 2x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y entonces

$$T(\varphi_1(x)) = 2 - 2(1 - 2x) = 4x$$

y

$$(\varphi_1)^{-1} \circ T \circ \varphi_1(x) = \frac{1 - 4x}{2} = \frac{1}{2} - 2x = g_1(x).$$

Si $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, tenemos que $\varphi_1(x) = 1 - 2x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y entonces

$$T(\varphi_1(x)) = 2(1-2x) = 2-4x$$

y

$$(\varphi_1)^{-1} \circ T \circ \varphi_1(x) = \frac{1-(2-4x)}{2} = 2x - \frac{1}{2} = g_1(x).$$

Entonces $(\varphi_1)^{-1} \circ T \circ \varphi_1 = g_1$. Por lo que g_1 y T son conjugadas. $\square$

Afirmación 2. g_2 y T son conjugadas (Definiciones 3.25 y 3.26).

Demostración. Sea $\varphi_2 : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [0,1]$ definida como $\varphi_2(x) = 2x - 1$. Entonces $\varphi_2(\frac{1}{2}) = 0, \varphi_2(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}, \varphi_2(1) = 1$ y $(\varphi_2)^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ con lo que φ_2 es claramente un homeomorfismo. Si $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, tenemos que $\varphi_2(x) = 2x - 1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y entonces

$$T(\varphi_2(x)) = 2(2x-1) = 4x-2$$

y

$$(\varphi_2)^{-1} \circ T \circ \varphi_2(x) = \frac{4x-2+1}{2} = 2x - \frac{1}{2} = g_2(x).$$

Si $x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$, tenemos que $\varphi_2(x) = 2x - 1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y entonces

$$T(\varphi_2(x)) = 2 - 2(2x-1) = 4-4x$$

y

$$(\varphi_2)^{-1} \circ T \circ \varphi_2(x) = \frac{4-4x+1}{2} = \frac{5}{2} - 2x = g_2(x).$$

Entonces $(\varphi_2)^{-1} \circ T \circ \varphi_2 = g_2$. Por lo que g_1 y T son conjugadas. $\square$

Afirmación 3. $per(f)$ es denso en $[0,1]$.

Demostración. Hemos visto que $f^2|_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$ y $f^2|_{\left[\frac{1}{2},1\right]}$ son ambas conjugadas a T. En 3.4.1 se mostró que T es caótica, y que en particular $per(T)$ es denso en $[0,1]$, el Corolario 3.28 implica entonces que $per\left(f^2|_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\right)$ y $per\left(f^2|_{\left[\frac{1}{2},1\right]}\right)$ son densos en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, respectivamente. Notemos que $per\left(f^2|_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\right) = per(f^2) \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $per\left(f^2|_{\left[\frac{1}{2},1\right]}\right) =$

$per(f^2) \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Por lo tanto $per(f^2)$ es denso en $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] = [0,1]$. Es claro de la definición que $per(f^2) \subset per(f)$, así que $per(f)$ es denso en $[0,1]$. $\square$

Afirmación 4. Para todo abierto no vacío U de $[0,1]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset f^k(U)$.

Demostración. Sea U_1 un abierto no vacío de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Entonces $\varphi_1(U_1)$ es un abierto no vacío de $[0,1]$. Por la Afirmación 2 de la sección 3.4.1 sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(\varphi_1(U_1)) = [0,1]$ y entonces

$$f^{2k}(U_1) = (\varphi_1)^{-1} \circ T^k \circ \varphi_1(U_1) = (\varphi_1)^{-1}[0,1] = [0, \frac{1}{2}]$$

Con lo que $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset f^{2k}(U_1)$.

Si $U \cap \left[0, \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset$, hacemos $U_1 = U \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset f^{2k}(U_1) \subset f^{2k}(U)$. Si $U \cap \left[0, \frac{1}{2}\right] = \emptyset$, tenemos que $U \subset (\frac{1}{2}, 1)$ y hacemos $U_1 = f(U)$, que es un abierto no vacío de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, y por tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset f^{2k}(U_1) = f^{2k+1}(U)$. $\square$

Afirmación 5. f es transitiva.

Demostración. Dados dos abiertos no vacíos U y V de $[0,1]$, por la Afirmación 4, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset f^k(U)$. Esto implica que $f(\left[0, \frac{1}{2}\right]) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset f^{k+1}(U)$. Así que $[0,1] = f^k(U) \cup f^{k+1}(U)$ y como $V \subset [0,1]$ entonces $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ ó $f^{k+1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto muestra que f es transitiva. $\square$

Afirmación 6. f es caótica.

Demostración. En la Afirmación 3 se prueba que $per(f)$ es denso en $[0,1]$ y, en la Afirmación 5, se muestra que f es transitiva. Así que f es caótica. $\square$

Hemos mostrado entonces que $f : [0,1] \to [0,1]$ es caótica y que $f_n : \mathcal{F}_n([0,1]) \to \mathcal{F}_n([0,1])$ no es caótica para ninguna $n \geq 2$.

3.5 Especificidad

Definición 3.32 Una función continua $f : X \to X$ tiene *especificación* si para toda $\varepsilon > 0$, existe una M_ε tal que, para todo $k \geq 2$, para cualesquiera $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ y para cualesquiera enteros no negativos $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_k \leq b_k$ tales que $a_i - b_{i_{-1}} \leq M_\varepsilon$, existe $z \in X$ tal que, para toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$ y todo $m \in [a_i, b_i]$, se tiene que $d(f^m(z), f^m(x_i)) < \varepsilon$.

Teorema 3.33 *Sea $f : X \to X$ una función continua, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
$a)$ *f tiene especificación,*
$b)$ *f_n tiene especificación, para alguna $n \in \mathbb{N}$,*
$c)$ *f_n tiene especificación, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $b) \Rightarrow a)$ Supongamos que f_n tiene especificación. Dado $\varepsilon > 0$, existe M_ε con las propiedades de la Definición 3.32 para ε y f_n. Afirmamos que esa misma M_ε funciona para ε y f.

Sean $k \geq 2$, $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ y $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_k \leq b_k$ enteros no negativos tales que $a_i - b_{i-1} \leq M_\varepsilon$, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Podemos pensar en cada x_i como $\{x_i\} \in \mathcal{F}_n(X)$ y por lo tanto, por las propiedades de M_ε, sabemos que existe un $A \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $H((f_n)^m(A), (f_n)^m(\{x_i\})) < \varepsilon$ para todo $m \in [a_i, b_i]$ y toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Sea $z \in A$. Fijamos $i \in \{1, 2, ..., k\}$ y $m \in [a_i, b_i]$. Como $f^m(z) \in (f_n)^m(A)$ y $H((f_n)^m(A), (f_n)^m(\{x_i\})) < \varepsilon$, entonces $d(f^m(z), f^m(x_i)) < \varepsilon$. Así que, por la existencia de z, tenemos que M_ε cumple lo necesario para que f tenga especificación.

$a) \Rightarrow c)$ Supongamos que f tiene especificación. Dado $\varepsilon > 0$ existe M_ε con las propiedades de la Definición 3.32 para ε y f. Afirmamos que esa misma M_ε funciona para ε y f_n.

Sean $k \geq 2$, $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{F}_n(X)$ y $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_k \leq b_k$ enteros no negativos tales que $a_i - b_{i-1} \leq M_\varepsilon$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ etiquetamos los elementos de $A_i = \{x_{1,i}, x_{2,i}, ..., x_{n,i}\}$ (posiblemente repitiendo elementos para completar hasta n). Para cada $j \in$

$\{1, 2, ..., n\}$ consideramos $x_{j,1}, x_{j,2}, ..., x_{j,k} \in X$. Por las propiedades de M_ε, sabemos que existe un $z_j \in X$ tal que $d(f^m(z_j), f^m(x_{j,i})) < \varepsilon$ para todo $m \in [a_i, b_i]$ y toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Sea $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Sean $i \in \{1, 2, ..., k\}$ y $m \in [a_i, b_i]$. Para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$, sabemos que $d(f^m(z_j), f^m(x_{j,i})) < \varepsilon$. Como $\{f^m(z_1), ..., f^m(z_n)\} = (f_n)^m(Z)$ y $\{f^m(x_{1,i}), ..., f^m(x_{n,i})\} = (f_n)^m(A_i)$, tenemos que $H((f_n)^m(Z), (f_n)^m(A_i)) < \varepsilon$. Así que, por la existencia de Z, tenemos que M_ε cumple lo necesario para que f_n tenga especificación. ■

3.6 Propiedad P

Definición 3.34 Una función continua $f : X \to X$ tiene la *propiedad* P si para cualesquiera abiertos no vacíos U_0, U_1 de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $k \geq 2$ y para toda $s = (s(1), s(2), ..., s(k)) \in \{0, 1\}^k$, existe $x \in X$ tal que $x \in U_{s(1)}, f^N(x) \in U_{s(2)}, f^{2N}(x) \in U_{s(3)}, ...,$ $f^{(k-1)N}(x) \in U_{s(k)}$.

Teorema 3.35 *Sea $f : X \to X$ una función continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
$a)$ *f tiene la propiedad P,*
$b)$ *f_n tiene la propiedad P, para alguna $n \in \mathbb{N}$,*
$c)$ *f_n tiene la propiedad P, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración $b) \Rightarrow a)$ Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que f_n tiene la propiedad P y sean U_0 y U_1 abiertos no vacíos de X. Entonces $\langle U_0 \rangle_n$ y $\langle U_1 \rangle_n$ son abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $k \geq 2$ y $s = (s(1), s(2), ..., s(k)) \in \{0, 1\}^k$, existe $A \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $A \in \left\langle U_{s(1)} \right\rangle_n, (f_n)^N(A) \in \left\langle U_{s(2)} \right\rangle_n, (f_n)^{2N}(A) \in \left\langle U_{s(3)} \right\rangle_n, ...,$ $(f_n)^{(k-1)N}(A) \in \left\langle U_{s(k)} \right\rangle_n$. Esto implica que $f^{iN}(A) \subset U_{s(i+1)}$ para toda $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$.

Sea $x \in A$. Entonces $f^{iN}(x) \in f^{iN}(A) \subset U_{s(i+1)}$ para toda $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Esto muestra que f tiene la propiedad P.

$a) \Rightarrow c)$ Supongamos que f tiene la propiedad P y sea $n \in \mathbb{N}$. Sean $\mathcal{U}_0 = \langle U_0^1, U_0^2, ..., U_0^n \rangle_n$ y $\mathcal{U}_1 = \langle U_1^1, U_1^2, ..., U_1^n \rangle_n$ dos abiertos básicos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$ (Lema 3.10). Dado que f tiene la propiedad P, para cada par U_0^i, U_1^i, con $i \in \{1, 2, ..., n\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $k \geq 2$ y para toda $s = (s(1), s(2), ..., s(k)) \in \{0,1\}^k$, existe $x \in X$ tal que $x \in U_{s(1)}^i, f^{N_i}(x) \in U_{s(2)}^i, f^{2N_i}(x) \in U_{s(3)}^i, ..., f^{(k-1)N_i}(x) \in U_{s(k)}^i$.

Afirmamos que $N = N_1 N_2 \cdots N_n$ cumple con las propiedades mencionadas en la Definición 3.34 para $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ y f_n. Sean $k \geq 2$ y $s = (s(1), s(2), ..., s(k)) \in \{0,1\}^k$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, sea $p_i = \frac{N}{N_i}$ y sea $v_i = (v_i(1), v_i(2), ..., v_i(p_i k)) \in \{0,1\}^{p_i k}$ tal que $v_i(mp_i + 1) = s(m+1)$, para toda $m \in \{0, 1, ..., k-1\}$ (las demás coordenadas de v_i no son importantes y pueden valer lo que sea). Por las propiedades de N_i, como $p_i k \geq 2$ y $v_i \in \{0,1\}^{p_i k}$, existe un punto $x_i \in X$, tal que $f^{mN_i}(x_i) \in U_{v_i(m+1)}^i$ para toda $m \in \{0, 1, 2, ..., p_i k - 1\}$. Entonces, para cada $m \in \{0, 1, ..., k-1\}$, tenemos que $f^{mN}(x_i) = f^{mp_i N_i}(x_i) \in U_{v_i(mp_i+1)}^i = U_{s(m+1)}^i$.

Hacemos $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Vamos a ver que $(f_n)^{mN}(A) \in \mathcal{U}_{s(m+1)}$ para toda $m \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Fijemos $m \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tenemos que $f^{mN}(x_i) \in U_{s(m+1)}^i$, así que $(f_n)^{mN}(A) \in \left\langle U_{s(m+1)}^1, U_{s(m+1)}^2, ..., U_{s(m+1)}^n \right\rangle_n = \mathcal{U}_{s(m+1)}$. Con esto, concluimos que f_n tiene la propiedad P. ■

3.7 Homeomorfismos Expansivos

En esta sección vamos a considerar una propiedad dinámica de homeomorfismos. Dado un homeomorfismo $f : X \to X$ ya tenemos definidas sus iteradas positivas f, f^2, $f^3, ...$ pero al ser homeomorfismo podemos tambien definir inductivamente sus iteradas negativas como $f^{-n} = (f^{-1})^n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, donde, obviamente f^{-1}, representa el homeomorfismo inverso de f.

Definición 3.36 Un homeomorfismo $f : X \to X$ es un *homeomorfismo expansivo* si existe una constante $c > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in$

X, distintos, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > c$. En este caso la constante c se conoce como una constante de expansión de f.

Teorema 3.37 *Si $f_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es un homeomorfismo expansivo, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $f : X \to X$ es un homeomorfismo expansivo.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que f_n es un homeomorfismo expansivo. Sabemos que f es homeomorfismo si y sólo si f_n lo es (Teorema 2.4), así que f es un homeomorfismo. Como f_n es un homeomorfismo expansivo existe una constante de expansión $c > 0$, para f_n. Afirmamos c es una constante de expansión para f.

Dados $x, y \in X$, diferentes, sabemos que $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{F}_n(X)$ son diferentes y, por tanto, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c < H((f_n)^k(\{x\}), (f_n)^k(\{y\})) = d(f^k(x), f^k(y)).$$

Esto muestra que c es una constante de expansión para f y, por lo tanto, f es un homeomorfismo expansivo. ■

Ejemplo 3.38 *Existen un continuo X y una función $g : X \to X$ que es homeomorfismo expansivo, cuya función inducida $g_n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ no es homeomorfismo expansivo para ninugna $n \geq 2$.*

Vamos a tomar a $\mathbb{S}^1$, la circunferencia unitaria en $\mathbb{C}$. Por comodidad, vamos a darle a $\mathbb{S}^1$ la métrica del arco menor, es decir, dados $z, w \in \mathbb{S}^1$, definimos su distancia como $d(z, w) =$la medida del arco menor entre z y w en $\mathbb{S}^1$. No probaremos que d es una métrica, ni que es compatible con la métrica inducida por la norma en $\mathbb{C}$, pero no es difícil convencerse de esos hechos y para nuestros fines nos será muy útil.

Observación 1. Como las rotaciones no cambian la medida de los arcos, sabemos, por la definición de d, que la distancia es invariante bajo rotaciones, es decir, $d(z, w) = d(e^{ix}z, e^{ix}w)$, para cualesquiera $z, w \in \mathbb{S}^1$ y $x \in \mathbb{R}$.

Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida como $f(z) = z^2$, para toda $z \in \mathbb{S}^1$.

Afirmación 1. Sean $z, w \in \mathbb{S}^1$ tales que $d(z, w) < \frac{\pi}{2}$, entonces, se cumple que $d(f(z), f(w)) = 2d(z, w)$.

Demostración. Las medidas de los arcos entre z y w en $\mathbb{S}^1$ son $d(z, w)$ y $2\pi - d(z, w)$, así que, las medidas de los ángulos entre z y w (vistos como vecctores en $\mathbb{R}^2$) son también $d(z, w)$ y $2\pi - d(z, w)$. Es bien sabido que la función $v \to v^2$ en $\mathbb{C}$, duplica los ángulos, así que, como $d(z, w) < \frac{\pi}{2}$, uno de los ángulos entre z^2 y w^2 es $2d(z, w)$. Con esto, los 2 ángulos entre z^2 y w^2 son $2d(z, w)$ y $2\pi - 2d(z, w)$. Como $d(z, w) < \frac{\pi}{2}$, sabemos que $2d(z, w) < \pi$, de manera que el ángulo menor entre z^2 y w^2 es $2d(z, w)$. Entonces, el arco menor entre z^2 y w^2 en $\mathbb{S}^1$ mide $2d(e^{\theta i}, e^{\beta i})$, es decir, $d(f(z), f(w)) = d(z^2, w^2) = 2d(z, w)$. $\square$

Afirmación 2. Sean $z, w \in \mathbb{S}^1$, distintos, entonces existe $j \in \{0, 1, ...\}$ tal que $d(f^j(z), f^j(w)) > \frac{\pi}{4}$.

Demostración. Como $z \neq w$, sabemos que $0 < d(z, w)$. Sea $p \in \{0, 1, ...\}$ tal que $2^p d((z, w)) > \frac{\pi}{4}$. Si existe $j \in \{0, 1, ..., p-1\}$ tal que $d(f^j(z), f^j(w)) > \frac{\pi}{4}$ hemos terminado.

Supongamos, por el contrario, que $d(f^j(z), f^j(w)) \leq \frac{\pi}{4}$ para todo $j \in \{0, 1, ..., p-1\}$. Con esto, podemos aplicar la Afirmación 1 y obtener que $d(f^{j+1}(z), f^{j+1}(w)) = 2d(f^j(z), f^j(w))$, para todo $j \in \{0, 1, ..., p-1\}$.

Mostraremos, de manera inductiva, que $d(f^j(z), f^j(w)) = 2^j d(z, w)$, para toda $j \in \{0, 1, ..., p\}$.

El caso $j = 0$ es trivial, pues $d(f^0(z), f^0(w)) = d(z, w) = 2^0 d(z, w)$. Supongamos que $j \in \{0, 1, ..., p-1\}$ es tal que $d(f^j(z), f^j(w)) = 2^j d(z, w)$. Vimos que, para esta j, se cumple que $d(f^{j+1}(z), f^{j+1}(w)) = 2d(f^j(z), f^j(w))$, de manera que, $d(f^{j+1}(z), f^{j+1}(w)) = 2(2^j d(z, w)) = 2^{j+1} d(z, w)$. Esto concluye la inducción. Tomando $j = p$ tenemos que $d(f^p(z), f^p(w)) = 2^p d(z, w) > \frac{\pi}{4}$. Esto concluye la prueba de la Afirmación 2. $\square$

Sea $X = \varprojlim(\mathbb{S}^1, f)$ y $\widehat{f} : X \to X$ (ver Definición 1.22). Recordemos que $\varprojlim(\mathbb{S}^1, f) = \{(x_1, x_2, ...) \in X^{\mathbb{N}} : f(x_{i+1}) = x_i$, para toda $i \in \mathbb{N}\}$, y que ρ, la métrica en X, está definida como $\rho((x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}$.

Recordemos también que $\widehat{f} : X \to X$, es un homeomorfismo definido como $\widehat{f}((x_1, x_2, ...)) = (f(x_1), x_1, x_2, ...)$, para cada $(x_1, x_2, ...) \in X$, y que el homeomorfismo $\widehat{f}^{-1} : X \to X$, está dado por $\widehat{f}^{-1}((x_1, x_2, ...)) = (x_2, x_3, ...)$, para todo $(x_1, x_2, ...) \in X$.

Afirmación 3 $\widehat{f} : X \to X$ es un homeomorfismo expansivo.

Demostración. Proponemos que $c = \frac{\pi}{8}$ es una constante de expansión para $\widehat{f}$. Sean $z = (z_1, z_2, ...), w = (w_1, w_2, ...) \in X$, diferentes. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $z_m \neq w_m$. Por la Afirmación 2, existe $j \in \{0, 1, 2, ...\}$ tal que $d(f^j(z_m), f^j(w_m)) > \frac{\pi}{4}$. Notemos que, si hacemos $k = j - (m-1)$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}^k(z) &= \widehat{f}^{j-(m-1)}(z) = \widehat{f}^j(\widehat{f}^{-(m-1)}(z)) = \widehat{f}^j((z_m, z_{m+1}, ...)) \\
&= (f^j(z_m), f^{j-1}(z_m), ...).
\end{aligned}
$$

Análogamente, tenemos que $\widehat{f}^k(w) = (f^j(w_m), f^{j-1}(w_m), ...)$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\rho(\widehat{f}^k(z), \widehat{f}^k(\overline{\beta})) &= \rho((f^j(z_m), ...), (f^j(w_m), ...)) \\
&\geq \frac{d(f^j(z_m), f^j(w_m))}{2} > \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Esto prueba que $\frac{\pi}{8}$ es una constante de expansión para $\widehat{f}$ y por lo tanto, $\widehat{f}$ es un homeomorfismo expansivo. $\square$

Afirmación 4. Dados $z, w \in \mathbb{S}^1$ existen $u, v \in \mathbb{S}^1$ tales que $f(u) = z$, $f(v) = w$ y $d(u, v) = \frac{d(z,w)}{2}$

Demostración. Analicemos dos casos.

Caso 1. El número complejo 1, no está en el interior del arco menor de $\mathbb{S}^1$ que tiene a z y w.

En este caso, escribimos $z = e^{i\alpha}$ y $w = e^{i\beta}$, con $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Con ésto, como el número complejo 1 no está en el interior del arco menor de $\mathbb{S}^1$ que tiene a z y w, sabemos que $d(z, w) = |\alpha - \beta|$. Sean $u = e^{i\frac{\alpha}{2}}$ y $v = e^{i\frac{\beta}{2}}$. Es claro que $f(u) = z$ y $f(v) = w$. Además, uno de los arcos que unen u con v en $\mathbb{S}^1$ mide $\left|\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right|$, y entonces $d(u, v) = \left|\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right| = \frac{|\alpha-\beta|}{2} = \frac{d(z,w)}{2}$. Esto concluye este caso.

Caso 2. El número complejo 1, está en el interior del arco menor de $\mathbb{S}^1$ que tiene a z y w.

En este caso, como el arco menor de $\mathbb{S}^1$ que tiene a z y w debe tener longitud menor o igual a π, y el 1 está en el interior de dicho arco, sabemos que el número complejo -1, no puede estar en el interior de dicho arco. Entonces, escribimos $z = e^{i\alpha}$ y $w = e^{i\beta}$, con $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi)$. Con ésto, como el número complejo -1 no está en el interior del arco menor de $\mathbb{S}^1$ que tiene a z y w, sabemos que $d(z, w) = |\alpha - \beta|$. Sean $u = e^{i\frac{\alpha}{2}}$ y $v = e^{i\frac{\beta}{2}}$. Es claro que $f(u) = z$ y $f(v) = w$. Además, uno de los arcos que unen u con v en $\mathbb{S}^1$ mide $\left|\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right|$, y entonces $d(u, v) = \left|\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right| = \frac{|\alpha-\beta|}{2} = \frac{d(z,w)}{2}$. Esto concluye este caso y la prueba de la Afirmación 4. $\square$

Afirmación 5. Dada $n \geq 2$, el mapeo $\widehat{f_n} : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ no es un homeomorfismo expansivo.

Demostración. Sea $0 < c < \frac{\pi}{4}$. Mostraremos que c no es una constante de expansión de $\widehat{f_n}$. Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\pi}{2^p} < c$, y sean $z_1, w_1 \in \mathbb{S}^1$ tales que $0 < d(z_1, w_1) < \frac{c}{2^p}$. Vamos a construir, de manera inductiva, dos sucesiones $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $\mathbb{S}^1$, tales que $f(z_{k+1}) = z_k$, $f(w_{k+1}) = w_k$ y $d(z_{k+1}, w_{k+1}) = \frac{d(z_1,w_1)}{2^k}$, para toda $k \in \mathbb{N}$.

Partimos de que ya tenemos elegidos z_1 y w_1, los cuales claramente cumplen que $d(z_1, w_1) = \frac{d(z_1,w_1)}{2^0}$. Supongamos que hemos escogido $z_1, z_2, ..., z_j, w_1, w_2, ..., w_j \in \mathbb{S}^1$, tales que $f(z_{k+1}) = z_k$, $f(w_{k+1}) = w_k$ y $d(z_{k+1}, w_{k+1}) = \frac{d(z_1,w_1)}{2^k}$, para toda $k \in \{1, 2, ..., j-1\}$. La Afirmación 4, nos permite construir $z_{j+1}, w_{j+1} \in \mathbb{S}^1$, tales que $f(z_{j+1}) = z_j$,

$f(w_{j+1}) = w_j$ y $d(z_{j+1}, w_{j+1}) = \frac{d(z_j,w_j)}{2}$. De manera que, $d(z_{j+1}, w_{j+1}) = \frac{\frac{d(z_1,w_1)}{2^j}}{2} = \frac{d(z_1,w_1)}{2^{j+1}}$. De esta manera, podemos construir $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$, tales que $f(z_{k+1}) = z_k$, $f(w_{k+1}) = w_k$ y $d(z_{k+1}, w_{k+1}) = \frac{d(z_1,w_1)}{2^k}$, para toda $k \in \mathbb{N}$.

Como hemos tenido cuidado de que $f(z_{k+1}) = z_k$ y $f(w_{k+1}) = w_k$, para toda $k \in \mathbb{N}$, podemos tomar $z = (z_1, z_2, ...), w = (w_1, w_2, ...) \in X$. Mostraremos que $\rho(\widehat{f}^m(z), \widehat{f}^m(w)) < c$, para toda $m \in \{..., p-1, p\}$.

Por la deficinión de $\widehat{f}^{-1}$, sabemos que, para cada $m \in \{0, 1, 2, ...\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho(\widehat{f}^{-m}(z), \widehat{f}^{-m}(w)) &= \rho((z_{m+1}, z_{m+2}, ...), (w_{m+1}, w_{m+2}, ...)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(z_{m+k}, w_{m+k})}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{d(z_1,w_1)}{2^{m+k-1}}}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(z_1, w_1)}{2^{2k+m-1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(z_1, w_1)}{2^k} \\ &= d(z_1, w_1) < \frac{c}{2^p} < c. \end{aligned}$$

Con esto, $\rho(\widehat{f}^m(z), \widehat{f}^m(w)) < c$, para toda $m \in \{..., -2, -1, 0\}$.

Mostraremos, de manera inductiva, que para cada $m \in \{0, 1, 2, ..., p\}$, se tiene que $d(f^m(z_1), f^m(w_1)) = 2^m d(z_1, w_1)$. El caso $m = 0$ es trivial, ya que $d(f^0(z_1), f^0(w_1)) = d(z_1, w_1) = 2^0 d(z_1, w_1)$. Supongamos entonces, que $m \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ es tal que $d(f^m(z_1), f^m(w_1)) = 2^m d(z_1, w_1)$. Como $m < p$, $2^p d(z_1, w_1) < c$ y $c < \frac{\pi}{4}$, tenemos que $d(f^m(z_1), f^m(w_1)) < \frac{\pi}{4}$. De manera que podemos aplicar la Afirmación 1, y obtener que $d(f^{m+1}(z_1), f^{m+1}(w_1)) = 2d(f^m(z_1), f^m(w_1)) = 2^{m+1} d(z_1, w_1)$. Esto concluye la inducción.

Probaremos, inductivamente, que $\rho(\widehat{f}^m(z), \widehat{f}^m(w)) < 2^m d(z_1, w_1)$, para toda $m \in \{0, 1, 2, ..., p\}$.

El caso $m = 0$, ya lo sabemos. Supongamos entonces, que $m \in \{1, 2, ..., p\}$ es tal que $\rho(\widehat{f}^{m-1}(z), \widehat{f}^{m-1}(w)) < 2^{m-1} d(z_1, w_1)$. Por las definiciones de ρ y $\widehat{f}$, sabemos que

$$\rho(\widehat{f}^m(z),\widehat{f}^m(w)) = \rho((f^m(z_1), f^{m-1}(z_1), ...), (f^m(w_1), f^{m-1}(w_1), ...))$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{d(f^{m-k}(z_1), f^{m-k}(w_1))}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{d(z_k, w_k)}{2^{m+k}}$$

$$= \tfrac{d(f^m(z_1), f^m(w_1))}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \tfrac{d(f^{m-k}(z_1), f^{m-k}(w_1))}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{d(z_k, w_k)}{2^{m+k}}$$

$$= \tfrac{d(f^m(z_1), f^m(w_1))}{2} + \frac{\sum_{k=0}^{m-2} \frac{d(f^{(m-1)-k}(z_1), f^{(m-1)-k}(w_1))}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(z_k, w_k)}{2^{(m-1)+k}}}{2}$$

$$= \tfrac{d(f^m(z_1), f^m(w_1))}{2} + \tfrac{\rho(\widehat{f}^{m-1}(z), \widehat{f}^{m-1}(w))}{2} < \tfrac{2^m d(z_1, w_1)}{2} + \tfrac{2^{m-1} d(z_1, w_1)}{2}$$

$$= 2^m d(z_1, w_1).$$

Esto muestra que, $\rho(\widehat{f}^m(z),\widehat{f}^m(w)) < 2^m d(z_1, w_1)$. Esto concluye la inducción, y muestra que $\rho(\widehat{f}^m(z),\widehat{f}^m(w)) < 2^m d(z_1, w_1)$, para toda $m \in \{0, 1, 2, ..., p\}$. Como, por hipótesis, tenemos que $2^p d(z_1, w_1) < c$, sabemos que $\rho(\widehat{f}^m(z),\widehat{f}^m(w)) < 2^m d(z_1, w_1) \leq 2^p d(z_1, w_1) < c$, para toda $m \in \{0, 1, 2, ..., p\}$.

Esto termina la prueba de que $\rho(\widehat{f}^m(z),\widehat{f}^m(w)) < c$, para toda $m \in \{..., p-1, p\}$.

Sean $z' = (e^{\pi i} z_1, e^{\frac{\pi}{2} i} z_2, e^{\frac{\pi}{4} i} z_3, ...)$ y $w' = (e^{\pi i} w_1, e^{\frac{\pi}{2} i} w_2, e^{\frac{\pi}{4} i} w_3, ...)$. Dado que $f(e^{\frac{\pi}{2^{k-1}} i} z_k) = (e^{\frac{\pi}{2^{k-1}} i} z_k)^2 = e^{\frac{\pi}{2^{k-2}} i} z_{k-1}$, para toda $k \in \mathbb{N}$, sabemos que $z' \in X$. Análogamente, $w' \in X$. Como ya hemos observado, las rotaciones preservan la métrica con la que hemos dotado a $\mathbb{S}^1$, de manera que, $d(e^{\frac{\pi}{2^{k-1}} i} z_k, e^{\frac{\pi}{2^{k-1}} i} w_k) = d(z_k, w_k)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Con esto, y un razonamiento análogo al anterior, se puede probar, que $\rho(\widehat{f}^m(z'),\widehat{f}^m(w')) < c$, para toda $m \in \{..., -1, 0, 1, ..., p\}$.

Sean $A = \{z, w'\}, B = \{w, z'\} \in \mathcal{F}_n(Y)$. Vamos a probar que $H((\widehat{f}_n)^m(A), (\widehat{f}_n)^m(B)) < c$, para toda $m \in \mathbb{Z}$. Ya hemos visto, que $\rho(\widehat{f}^m(z),\widehat{f}^m(w)), \rho(\widehat{f}^m(z'),\widehat{f}^m(w')) < c$, para toda $m \in \{..., p-1, p\}$.

Por lo tanto, tenemos que $H((\widehat{f_n})^m(A), (\widehat{f_n})^m(B)) < c$, para toda $m \in \{..., p-1, p\}$.

Sea $m \in \{p+1, p+2, ...\}$. Veremos que $H((\widehat{f_n})^m(A), (\widehat{f_n})^m(B)) < c$. Como $f(e^{\pi i} z_1) = e^{2\pi i}(z_1)^2 = (z_1)^2 = f(z_1)$, sabemos que las primeras m coordenadas de $\widehat{f}^m(z)$ son las mismas que las de $\widehat{f}^m(z')$. También, sabemos que, por definición, d está acotada por π, y por la elección de p, sabemos que $\frac{\pi}{2^p} < c$, con todo esto tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(\widehat{f}^m(z), \widehat{f}^m(z')) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{d(z_{k-m}, e^{\frac{\pi}{2^{k-m-1}} i} z_{k-m})}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\pi}{2^k} = \frac{\pi}{2^m} < \frac{\pi}{2^p} < c. \end{aligned}$$

De manera análoga, tenemos que $\rho(\widehat{f}^m(w), \widehat{f}^m(w')) < c$. Así que $H((\widehat{f_n})^m(A), (\widehat{f_n})^m(B)) < c$.

Hemos probado entonces que $H((\widehat{f_n})^m(A), (\widehat{f_n})^m(B)) < c$ para toda $m \in \{p+1, p+2, ...\}$, y ya lo sabíamos para toda $m \in \{..., p-1, p\}$, de lo que concluimos que $H((\widehat{f_n})^m(A), (\widehat{f_n})^m(B)) < c$ para toda $m \in \mathbb{Z}$. Esto muestra que c no es una constante de expansión para $\widehat{f_n}$. Al haber tomado c arbitrariamente pequeño, hemos probado que $\widehat{f_n}$ no puede tener constantes de expansión, y por lo tanto, $\widehat{f_n}$ no es un homeomorfismo expansivo. $\square$

La Afirmación 3 nos dice que $\widehat{f} : X \to X$ es un homeomorfismo expansivo, y la Afirmación 5 nos dice que si $n \geq 2$, la función $\widehat{f_n} : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ no es un homeomorfismo expansivo, lo que concluye el ejemplo.

Definición 3.39 Un homeomorfismo $f : X \to X$ es un *homeomorfismo expansivo por continuos* si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $A \in \mathcal{C}(X)$, no degenerado, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $diam(f^k(A)) > c$. En este caso la constante c se conoce como una constante de expansión por continuos de f.

Lema 3.40 *Sean $\mathcal{K}$ un subcontinuo no degenerado de $\mathcal{F}_n(X)$ y D una componente de $\bigcup\{E : E \in \mathcal{K}\}$. Entonces $diam(\mathcal{K}) \geq \frac{diam(D)}{2n}$.*

Demostración. Fijemos $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \in \mathcal{K}$ y sea $r < \frac{diam(D)}{2n}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, definimos $U_i = B(r, a_i) \cap D$. Como $U_i \subset B(r, a_i)$, sabemos que $U_i = \emptyset$ o $diam(U_i) \leq 2r$, para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Mostraremos que $U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_m \subsetneq D$. Supongamos, por el contrario, que $D = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_m$. Sean $x, y \in D$ tales que $d(x, y) = diam(D)$. Como $D = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_m$ existen i_0 y j_0 tales que $x \in U_{i_0}$ y $y \in U_{j_0}$. Como D es conexo y cada U_i es abierto en D, existe $\{i_0, i_1, ..., i_k\} \subset \{1, 2, ..., m\}$ tal que $i_k = j_0$, $i_p \neq i_q$ para toda $p \neq q$ y $U_{i_p} \cap U_{i_{p+1}} \neq \emptyset$, para todo $p \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Con esto hemos conseguido una cadena de $k + 1$ abiertos que va de x a y donde cada eslabón tiene diámetro menor o igual que $2r$. Entonces, $d(x, y) \leq 2r(k + 1) \leq 2rm \leq 2rn < diam(D)$, una contradicción. Por tanto $U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_m \subsetneq D$.

Sea $b \in D \setminus (U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_m) = D \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B(r, a_i)$. Esto implica que $a_i \notin B(r, b)$, para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Como $D \subset \bigcup\{E : E \in \mathcal{K}\}$, existe $B \in \mathcal{K}$ tal que $b \in B$. Como $a_i \notin B(r, b)$, para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$ sabemos que $H(A, B) \geq r$ y entonces $diam(\mathcal{K}) \geq r$. Como esto fue para cualquier $r < \frac{diam(D)}{2n}$, tenemos que $diam(\mathcal{K}) \geq \frac{diam(D)}{2n}$, lo que concluye la prueba del lema. ■

Teorema 3.41 *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
$a)$ *f es un homeomorfismo expansivo por continuos,*
$b)$ *f_n es un homeomorfismo expansivo por continuos, para alguna $n \in \mathbb{N}$,*
$c)$ *f_n es un homeomorfismo expansivo por continuos, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $b) \Rightarrow a)$ Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que f_n es un homeomorfismo expansivo por continuos y sea $c > 0$ una constante de expansión por continuos para f_n. Afirmamos que c es una constante de expansión por continuos para f. Sea K un subcontinuo no degenerado de

X. Sabemos que $\mathcal{F}_1(K)$ es un subcontinuo no degenerado de $\mathcal{F}_n(X)$ y entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $diam((f_n)^k(\mathcal{F}_1(K))) > c$, pero claramente $diam(f^k(K)) = diam((f_n)^k(\mathcal{F}_1(K)))$ y por lo tanto c es una constante de expansión por continuos para f y con esto f es un homeomorfismo expansivo por continuos.

$a) \Rightarrow c)$ Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que f es un homeomorfismo expansivo por continuos y sea $c > 0$ una constante de expansión por continuos para f. Afirmamos que $\frac{c}{2n}$ es una constante de expansión por continuos para f_n. Sea $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}_n(X)$ un subcontinuo no degenerado. Por el Lema 1.4, sabemos que $\bigcup\{E : E \in \mathcal{K}\}$ tiene a lo más n componentes, pero $\mathcal{K}$ tiene una infinidad de elementos, así que alguna de esas componentes tiene que ser no degenerada. Sea D una componente no degenerada de $\bigcup\{E : E \in \mathcal{K}\}$. Como c es una constante de expansión por continuos para f, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $diam(f^k(D)) > c$. Dado $a \in f^k(D)$ existe $d \in D$ tal que $f^k(d) = a$, y como $D \subset \bigcup\{E : E \in \mathcal{K}\}$, existe $A \in \mathcal{K}$ tal que $d \in A$. Entonces $a = f^k(d) \in (f_n)^k(A) \in (f_n)^k(\mathcal{K})$. Esto implica que $f^k(D) \subset \bigcup\left\{E : E \in (f_n)^k(\mathcal{K})\right\}$. Sea E_0 la componente de $\bigcup\left\{E : E \in (f_n)^k(\mathcal{K})\right\}$ que contiene a $f^k(D)$. Con esto $diam(E_0) \geq diam(f^k(D)) > c$. El Lema 3.40 implica que $diam((f_n)^k(\mathcal{K})) \geq \frac{diam(E_0)}{2n}$ y por lo tanto $diam((f_n)^k(\mathcal{K})) > \frac{c}{2n}$.

Hemos probado entonces que $\frac{c}{2n}$ es una constante de expansión por continuos para f_n y, con esto, f_n es un homeomorfismo expansivo por continuos. ■

Tabla de implicaciones.

Propiedad	$f \Rightarrow f_n$	$f_n \Rightarrow f$
Homeomorfismos	Sí, 2.4	Sí, 2.4
Monotoneidad	Sí, 2.6	Sí, 2.6
Apertura	$f \Rightarrow f_2$, 2.8	$f_2 \Rightarrow f$, 2.8. Ver 2.9
Confluencia	No, 2.11	Sí, 2.12
Confluencia débil	No, 2.11	Sí, 2.13
Semiconfluencia	No, 2.11	Sí, 2.14
Ligereza	Sí, 2.19	Sí, 2.19
Universalidad	No, 2.22	No, 2.25
OM	$f \Rightarrow f_2$, 2.44. Ver 2.46	Sí, 2.43
MO	$f \Rightarrow f_2$, 2.44. Ver 2.46	?, 2.26
Atomicidad	No, 2.49	Sí, 2.48. Ver 2.50
Ligadura	No, 2.53	Sí, 2.52
Monotoneidad Her.	No, 2.55	Sí, Obs. pag. 67
Confluencia Her.	Ver 2.56, 2.58 y 2.60	Sí, Obs. pag. 67
Conf. Débil Her.	Ver 2.56	Sí, Obs. pag. 67
Refinabilidad	Sí, 2.64	?, 2.61
Transitividad	No, 3.8. Ver 3.16	Sí, 3.2
Mezcladora	Sí, 3.11	Sí, 3.11
Débil Mezcladora	Sí, 3.16	Sí, 3.16
DSCI	$f \Rightarrow f_2$, 3.19	Sí, 3.18
Caos	No, 3.31	Sí, 3.24
Especificidad	Sí, 3.33	Sí, 3.33
Propiedad P	Sí, 3.35	Sí, 3.35
Homeo. expasivo	No, 3.38	Sí, 3.37
Homeo. exp. p/cont.	Sí, 3.41	Sí, 3.41

Bibliografía

[1] J. Banks, *Topological mapping properties defined by digraphs*, Amer. Math. Monthly Vol.5 Issue. 1 (1999), 83-92.

[2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, Amer. Math. Monthly Vol.99 Issue 4 (1992), 332-334.

[3] J. J. Charatonik and W. J. Charatonik, *Atomicity of mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci. 21 (1998), 729-734.

[4] J. J. Charatonik and W. J. Charatonik, *Lightness of induced mappings*, Tsukuba J. Math. 22 (1998), 179-192.

[5] J. J. Charatonik and W. J. Charatonik, *Hereditarily weakly confluent induced mappings are homeomorphisms*, Colloq. Math. 75 (1998), 195-203.

[6] J. J. Charatonik and W. J. Charatonik, *Induced MO-mappings*, Tsukuba J. Math. 23 (1999), 245-252.

[7] J. J. Charatonik and W. J. Charatonik, *Remarks on induced universal mappings*, Questions Answers Gen. Topology, 18 (2000), 47-54.

[8] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and A. Illanes, *Openness of induced mappings*, Topology Appl. 98 (1999), 67-80.

[9] W. J. Charatonik, *Induced near-homeomorphisms*, Comment. Math. Univ. Carolin. 41 (2000), 133-137.

[10] H. Cook, *Continua which admit only the identity mapping onto non-degenerate subcontinua*, Fund. Math. 60 (1967), 241-249.

[11] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc., 1966.

[12] J.L. Gómez Rueda, *Funciones inducidas entre continuos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2002.

[13] R. Gu and W. Guo, *On mixing property in set-valued discrete systems*, Chaos Solitons & Fractals 28 (2006), 747-754.

[14] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matematicas 28, Soc. Mat. Mex., 2004.

[15] H. Kato, *Continuum-wise expansive homeomorphism*, Can. J. Math. Vol.45 (3) (1993), 576-598.

[16] A. Lelek, D. R. Read, *Compositions of confluent mappings and some other classes of functions*, Colloq. Math. 29 (1974), 101-112.

[17] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[18] J. Oledski, *On symmetric products*, Fund. Math. 131 (1988), 185-190.

[19] H. Román-Flores, *A note on transitivity in set-valued discrete systems*, Chaos Solitons & Fractals 17 (2003), 99-104.