Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Subclases especiales de la clase de los espacios Lindelöf Σ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Luis Alejandro Cervantes De Sicilia

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Fidel Casarrubias Segura

Enero de 2009

1. Datos del alumno
   Cervantes
   De Sicilia
   Luis Alejandro
   56 62 57 98
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   099545239
2. Datos del tutor
   Dr
   Fidel
   Casarrubias
   Segura
3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Ángel
   Tamariz
   Mascarúa
4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Oleg
   Okunev
5. Datos del sinodal 3
   M en C
   Carlos Gerardo
   Paniagua
   Ramírez
6. Datos del sinodal 4
   Dr
   José Juan
   Angoa
   Amador
7. Datos del trabajo escrito
   Subclases especiales de la clase de los espacios Lindelöf Σ
   76p
   2009

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Subclases especiales de la clase de los espacios Lindelöf Σ

realizado por **Cervantes de Sicilia Luis Alejandro** con número de cuenta **0-9954523-9** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Ángel Tamariz Mascarúa	
Propietario Tutor	Dr. Fidel Casarrubias Segura	
Propietario	Dr. Oleg Okunev	
Suplente	M. en C. Carlos Gerardo Paniagua Ramírez	
Suplente	Dr. José Juan Angoa Amador	

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 13 de enero de 2009
EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE

M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Índice general

Introducción

Los espacios Σ y en particular los espacios Lindelöf Σ han sido objeto de estudio en el pasado. Es sabido que la clase de todos los espacios Lindelöf Σ, denotada por $L\Sigma$, es invariante con respecto a productos numerables, subespacios cerrados e imágenes continuas. La clase de los espacios Lindelöf Σ es la clase de los espacios para los que existe una cubierta de compactos y una red numerable respecto a dicha cubierta; dentro de esta clase de espacios se encuentran algunas subclases que se obtienen mediante restricciones para las cubiertas compactas. La definición de estas subclases denotadas por $L\Sigma(\leq \kappa)$, donde κ es un número cardinal, apareció por primera vez publicada en 2007 en un artículo de Kubiś, Okunev y Szeptycki titulado *On Some Clases of Lindelöf* Σ*-spaces* [**7**].

El presente trabajo está dedicado a presentar de manera natural la definición de las de subclases $L\Sigma(\leq \kappa)$ a partir de la noción de función multi-valuada y a explorar ejemplos concretos pertenecientes a estas clases, utilizando como texto base el artículo [**7**]. Todo esto con el fin de motivar al lector para seguir con esta línea de estudio.

Aunque este trabajo utiliza únicamente la noción intuitiva de clase: $\{x : \phi(x)\}$, donde $\phi(x)$ es una fórmula en el lenguaje formal de la Teoría de Conjuntos con x como variable libre (note que $\{x : \phi(x)\}$ puede ser o no ser un conjunto), se aprovecha la definición de funcional cardinal (o función cardinal) y función multi-valuada para introducir algunos de los axiomas básicos de la Teoría de Categorías. Algunos resultados específicos y muy técnicos concernientes a las clases $L\Sigma(\leq \kappa)$ hacen uso de axiomas independientes de ZFC (la axiomatización de Zermelo-Fraenkel para la Teoría de Conjuntos junto con el Axioma de Elección), en este trabajo enfocaremos nuestra atención únicamente al sistema ZFC.

En el Capítulo 1 se establece la notación, nociones y resultados básicos que se usan a lo largo de este trabajo. Algunos de estos resultados se enuncian sin demostración debido a que las pruebas son rutinarias o su demostración se puede encontrar en referencias clásicas. Sin embargo, se pondrá especial cuidado a la sección de funciones cardinales, ya que éstas serán de gran importancia en los capítulos subsecuentes. En cada proposición o teorema se dará la referencia de donde puede ser consultada su demostración, generalmente **[4]** y **[13]**.

En el Capítulo 2 se enuncia la definición de función multi-valuada y se demuestran sus propiedades básicas, también se definen a los espacios Lindelöf Σ y se caracteriza a esta clase mediante el uso de las nociones de cubierta y red respecto a una cubierta, así como mediante el uso de la noción de función multi-valuada superiormente continua y compacto-valuada. Las demostraciones proporcionadas en este capítulo sugerirán un método de prueba para la caracterización de las clases definidas en el capítulo 3.

En el Capítulo 3 se encuentra el material expositorio más importante de esta tesis, se enuncia la definición de las clases $L\Sigma(\mathcal{K})$ y $KL\Sigma(\mathcal{K})$ y se introducen sus subclases propias $L\Sigma(\leq \kappa)$, $L\Sigma(< \kappa)$, $L\Sigma(\kappa)$, $KL\Sigma(\leq \kappa)$, $KL\Sigma(< \kappa)$ y $L\Sigma(\kappa)$. Se da una caracterización de estas subclases y se demuestran sus propiedades básicas entre las cuales se encuentra que las clases $L\Sigma(\leq \kappa)$, $L\Sigma(< \kappa)$, $L\Sigma(\kappa)$ y $KL\Sigma(\leq \kappa)$ son invariantes bajo formación de subespacios cerrados, imágenes continuas y uniones finitas. También se exploran ejemplos de espacios que pertenecen a estas subclases especiales de espacios $L\Sigma$. Cabe mencionar que la lista de ejemplos concretos de espacios en $L\Sigma(\leq \kappa)$ que se conocen actualmente no es mucho más grande de lo presentado en este trabajo.

Se dedica una sección al estudio de los espacios pertenecientes a las clases $L\Sigma(\leq \kappa)$ y $L\Sigma(< \kappa)$, cuando $\kappa = \omega$ ó $\kappa < \omega$, en especial, los espacios compactos en $L\Sigma(\leq \omega)$ junto con la noción de ser débilmente (metrizablemente) fibrado jugarán un papel importante ya que nos permitirán obtener de manera directa una cota superior sobre la estrechez de dichos espacios.

CAPíTULO 1

Preliminares

1. Notación y definiciones

A la clase de los espacios topológicos la denotaremos por $\mathcal{TOP}$. Formalmente un espacio topológico es una pareja ordenada (X, τ) donde τ es una topología para el conjunto X. Si no hay confusión acerca de quién es τ, diremos solamente que X es un espacio topológico y escribiremos $X \in \mathcal{TOP}$; también utilizaremos la notación τ_X para hacer referencia a la topología de X. Asimismo a las clases de los conjuntos, números cardinales y espacios compactos las denotaremos por $\mathcal{CON}$, $\mathcal{CARD}$ y $\mathcal{CM}$, respectivamente.

Si $Y \subset X$ es un subespacio topológico, denotaremos por $cl_X(Y)$ a la cerradura de Y respecto al espacio X y por $int(Y)$ o Y° al interior de Y. Cuando el contexto lo permita, escribiremos simplemente $\overline{Y}$ para denotar a la cerradura de Y. Si f es un homeomorfismo entre X y Y, escribiremos $X \approxeq_f Y$.

Recordemos que una categoría $\mathfrak{C}$ consiste de lo siguiente: una clase $OBJS$ de objetos que no necesariamente es un conjunto; para cada par de objetos X, Y en $OBJS$ un conjunto de *morfismos* $Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$; y para cada tercia de objetos X, Y y Z en $OBJS$ una función $\circ : Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathfrak{C}}(Y, Z) \to Hom_{\mathfrak{C}}(X, Z)$ tal que $(f, g) \mapsto g \circ f$ llamada *composición* tal que los siguientes axiomas se satisfacen:

1. $(z \circ g) \circ f = z \circ (g \circ f)$, para cada $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(Y, Z)$ y $z \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, Z)$.
2. Para cada X en $OBJS$ existe un morfismo $Id_X \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, X)$ llamado *identidad* tal que para cualquier $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ se tiene que $Id_Y \circ f = f = f \circ Id_X$.

Cuando nos refiramos a la clase $\mathcal{TOP}$ de espacios topológicos estaremos pensando en la categoría más natural que la contiene, a saber, $\mathfrak{TOP}$.

Como es sabido, $\mathfrak{TOP}$ es la categoría que tiene a la clase $\mathcal{TOP}$ como clase de objetos y para cada $X, Y \in \mathcal{TOP}$, el conjunto de morfismos $Hom_{\mathfrak{TOP}}(X, Y)$ es la familia de funciones continuas entre los espacios X y Y.

Otra categoría a tomar en cuenta es la que tiene a la clase $\mathcal{TOP}_*$ de objetos, donde $\mathcal{TOP}_*$ son los espacios topológicos junto con una elección de punto base y el conjunto de morfismos para cada (X, p) y (Y, q) en $\mathcal{TOP}_*$ son las funciones continuas $\{f : X \to Y : f(p) = q\}$.

En cuanto a lo que se refiere a la notación sobre Teoría de Conjuntos que utilizaremos, denotaremos por ω al más pequeño número cardinal infinito y por ω_1 al más pequeño cardinal no numerable. Dotaremos de la topología discreta a cualquier número cardinal κ a menos que se especifique lo contrario, de esta manera $(\kappa, \tau_\kappa = \mathcal{P}(\kappa))$ será un representante de los espacios discretos de cardinalidad κ y nos referiremos a dicho espacio escribiendo simplemente κ.

A continuación se presenta una serie de definiciones que serán de utilidad y a las cuales recurriremos con frecuencia.

Recordemos que un espacio topológico compacto está definido por la siguiente condición: Para cualquier familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos de X tal que $X \subset \bigcup \mathcal{U}$, existe una subfamilia finita $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tal que $X \subset \bigcup \mathcal{V}$.

Definición 1.1. Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Llamaremos *fibra* de f en el punto y al conjunto $\{x \in X : f(x) = y\}$ y diremos que f es *perfecta* si se cumple lo siguiente:

1. f es continua.
2. f es suprayectiva.
3. f es cerrada.
4. f tiene fibras compactas.

Si X y Y son dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función tal que $X \approxeq_f f[X]$, entonces diremos que f es un *encaje* o que X se *encaja* en Y y lo denotaremos por $X \hookrightarrow_f Y$.

Definición 1.2. Sea X un espacio topológico. Una *compactación* de X es una pareja ordenada (K, h) tal que

1. K es compacto y Hausdorff.
2. $h : X \to K$ es un encaje.
3. $\overline{h[X]} = K$.

Un espacio X es *localmente compacto* si todo punto en X tiene un sistema de vecindades constituido por subespacios compactos. Note que cualquier espacio Hausdorff localmente compacto es regular.

Las siguientes definiciones muestran dos formas de construir compactaciones de un espacio dado, ambas formas serán de gran utilidad en los siguientes capítulos.

DEFINICIÓN 1.3. Sea X un espacio localmente compacto, no compacto y Hausdorff. Entonces la *compactación por un punto* o *compactación de Alexandroff* del espacio X está definida por el espacio $A(X) = X \cup \{\infty\}$, donde ∞ es un punto fuera de X y $\tau_{A(X)}$ es la topología generada por la base $\mathcal{B} = \tau_X \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus L) : L \subset X \wedge L \in \mathcal{CM}\}$.

Al espacio $A(X)$ se le llama también *extensión de Alexandroff* del espacio X.

DEFINICIÓN 1.4. Sea X un espacio Tychonoff y sea $C^*(X)$ la colección de funciones continuas con valores reales y acotadas definidas en X. Para cada $f \in C^*(X)$, sea I_f un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ que contiene al rango de f y sea $e : X \to \prod\{I_f : f \in C^*(X)\}$ la función evaluación definida por $e(x)(f) = f(x)$. La función e es un encaje. Entonces la *compactación de Stone-Čech* de X es el espacio $\beta X = \overline{e[X]}$ en el producto $\prod\{I_f : f \in C^*(X)\}$.

Es importante notar que si $C(X)$ denota a la familia de todas las compactaciones del espacio X y que si en $C(X)$ consideramos la siguiente relación de orden: para cualesquiera dos elementos $h_1X = (K_1, h_1)$ y $h_2X = (K_2, h_2)$ de $C(X)$ sucede que $h_1X \leq h_2X$ si existe una función continua $f : h_1X \to h_2X$ tal que $f \circ h_1 = h_2$, entonces la compactación de Alexandroff es la más pequeña de las compactaciones de X y la compactación de Stone-Čech es la más grande.

Existen diversas formas de generar espacios topológicos nuevos a partir de espacios previamante dados, ejemplo de esto son las compactaciones de Alexandroff y de Stone Čech. Otra forma muy común y que utilizaremos en este trabajo es el llamado *espacio cociente*. Para generar un espacio cociente Y se requiere de una función definida en un conjunto X sobre Y donde un subconjunto $G \subset Y$ es abierto si y sólo si su preimagen es abierta en X.

DEFINICIÓN 1.5. Si X es un espacio topológico y $g : X \to Y$ es una función suprayectiva sobre un conjunto Y, entonces

1. La colección τ_g de subconjuntos de Y definida por $\tau_g = \{G \subset Y : g^{-1}(G) \in \tau_X\}$ es una topología de Y llamada *topología cociente* inducida en Y por la función g. Al espacio (Y, τ_g) se le llama *espacio cociente* y a g se le llama *función cociente.*
2. Una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ se llama *hereditariamente cociente* si para cada $B \subset Y$ la restricción $f_B : f^{-1}[B] \to B$ es una función cociente.

2. Resultados básicos de Topología General

En esta sección se incluyen algunas proposiciones básicas que son auxiliares en varias de las pruebas del presente trabajo. Debido a que son resultados bien conocidos de Topología General, la mayoría de las demostraciones se omiten, para consulta se recomiendan [**4**] y [**13**].

Definición 1.6. Sea X un espacio topológico. Entonces X es un espacio de Fréchet si para cualquier $A \subset X$ y cualquier $x \in \overline{A}$ existe una sucesión de elementos de A convergente a x.

Si para cada punto x de un espacio topológico X tal que $x \in \overline{A}$ para algún $A \subset X$ existe una base numerable $\{U_i : i \in \omega\}$ y para cada $i \in \omega$ elegimos un punto $z_i \in A \cap U_0 \cap U_1 \cap \ldots \cap U_i$, entonces podemos definir una sucesión infinita $\{z_i\}$ de puntos de A convergente a x. Esto muestra que todo espacio primero numerable es de Fréchet.

Las siguientes proposiciones establecen que la propiedad de ser espacio de Fréchet se preserva bajo imágenes de funciones hereditariamente cocientes y se da una condición equivalente a ser función hereditariamente cociente.

Proposición 1.7. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces f es hereditariamente cociente si y sólo si para todo $B \subset Y$ el conjunto $f[\overline{f^{-1}[B]}]$ es cerrado.*

Proposición 1.8. *Si X es un espacio de Fréchet y $f : X \to Y$ es una función hereditariamente cociente y suprayectiva, entonces Y es un espacio de Fréchet.*

Las siguientes proposiciones establecen propiedades interesantes concernientes a los axiomas de separación.

Proposición 1.9 ([**13**, 13.3]). *Si X es un espacio topológico, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es regular.*
2. *Si $x \in X$ y A es un abierto de X tal que $x \in A$, entonces existe un abierto B de X tal que $x \in B \subset \overline{B} \subset A$.*
3. *Para cada $x \in X$ existe una base de vecindades formada por conjuntos cerrados.*

PROPOSICIÓN 1.10 ([**13**, 16.11]). *Sea X un espacio (pseudo)métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es segundo numerable.*
2. *X es Lindelöf.*
3. *X es separable.*

TEOREMA 1.11 (Teorema de Urysohn). *Si X es un espacio Hausdorff, segundo numerable y normal, entonces X es metrizable.*

La definición de compacidad es de suma importancia en Topología General. Las siguientes proposiciones caracterizan a los espacios compactos y enuncian propiedades importantes que serán utilizadas más adelante como es el caso del teorema de Kuratowskii que caracteriza a los espacios compactos mediante el producto cartesiano, el teorema de Tychonoff que establece que el producto de espacios topológicos no vacíos es compacto si y sólo si cada factor es compacto y el teorema de Wallace.

TEOREMA 1.12 (Kuratowskii [**4**, 3.1.16]). *Si X es un espacio Hausdorff, eentonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *Para todo espacio Y, la proyección $\pi_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada.*
3. *Para todo espacio Y normal, la proyección $\pi_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada.*

TEOREMA 1.13 (Tychonoff [**4**, 3.2.4]). *Sea $\mathcal{F} = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $\prod \mathcal{F}$ es compacto si y sólo si para toda $\alpha \in A$ se tiene que X_α es compacto.*

TEOREMA 1.14 (Wallace [**4**, 3.2.10]). *Si para cada $s \in S$ tenemos que A_s es un subespacio compacto del espacio X_s, entonces para todo subconjunto abierto W en el producto $\prod\{X_s : s \in S\}$ que contiene a $\prod\{A_s : s \in S\}$ existe una familia $\mathcal{V}$ de abiertos $U_s \subset X_s$ tal que el conjunto $\{U_s \in \mathcal{V} : U_s \neq X_s\}$ es finito y $\prod\{A_s : s \in S\} \subset \prod\{U_s : s \in S\} \subset W$.*

Si $\mathcal{F} = \{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos tal que $X_{\alpha_i} \cap X_{\alpha_j} = \emptyset$ para toda $i \neq j$ y la topología de $X = \bigcup \mathcal{F}$ está formada por la familia $\tau = \{U \in X : U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha \wedge \alpha \in A\}$, entonces llamaremos al espacio (X, τ) *suma directa* o *suma topológica* de la familia $\mathcal{F}$ y la denotaremos por $\bigoplus \mathcal{F}$.

PROPOSICIÓN 1.15 ([**4**, 3.2.3]). *Sea $X = \bigoplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ un espacio topológico tal que para toda $\alpha \in A$ se tiene que $X_\alpha \neq \emptyset$. Entonces el espacio X es compacto si y sólo si $|A| < \omega$ y para toda $\alpha \in A$ el espacio X_α es compacto.*

Otro resultado bien conocido acerca de los espacios topológicos compactos es el siguiente. Si A es un subespacio compacto de un espacio X, entonces para cada familia $\{U_s\}_{s\in S}$ de abiertos de X tales que $A \subset \bigcup\{U_s : s \in S\}$ existe un subconjunto finito $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ de S tal que $A \subset \bigcup\{U_{s_i} : 1 \leq i \leq k\}$. La siguiente proposición es una aplicación de la afirmación anterior.

PROPOSICIÓN 1.16. *Sea X un espacio topológico compacto, sea $U \subset X$ un subconjunto abierto y sea $\{F_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos cerrados de X tal que $\bigcap\{F_i : i \in I\} \subset U$, entonces existe una subfamilia finita J de I tal que $\bigcap\{F_j : j \in J\} \subset U$.*

Observe que si un espacio topológico X es compacto, entonces cumple con la propiedad de ser Lindelöf y gracias a la proposición 1.10 si el espacio X es compacto metrizable, entonces es separable.

Como todo espacio X localmente compacto y Hausdorff se puede encajar en un espacio compacto y Hausdorff $A(X)$ mediante la compactación por un punto y todo espacio compacto Hausdorff es Tychonoff, entonces X resulta ser también un espacio Tychonoff.

PROPOSICIÓN 1.17. *Si X es un espacio topológico, entonces X tiene una compactación si y sólo si X es Tychonoff.*

3. Funcionales cardinales

Llamaremos *funcional* a una regla de correspondencia entre clases, cuyo comportamiento es semejante al de una función entre conjuntos con la salvedad de que su *dominio* y *contradominio* son clases. Un caso particular son las *funcionales cardinales*, estas funcionales están definidas en la clase de espacios topológicos (o subclases bien definidas de espacios) y toman valores cardinales. La condición que deben cumplir este tipo de funcionales es la siguiente: si $\mathcal{C}$ es una subclase de espacios topológicos y $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{CARD}$ es una funcional cardinal, entonces para cada $X, Y \in \mathcal{C}$ si $X \approxeq Y$ debe ocurrir que $\phi(X) = \phi(Y)$.

El primer ejemplo de funcional cardinal es la funcional $|\ | : \mathcal{TOP} \to \mathcal{CARD}$ llamada *cardinalidad*, esta funcional asigna a cada espacio X el número de elementos que tiene, denotado por $|X|$. A continuación se definen algunas funcionales cardinales importantes y se distingue un tipo especial de funcionales, las *funcionales cardinales monótonas*.

DEFINICIÓN 1.18. Sea $\phi : \mathcal{C} \subset \mathcal{TOP} \to \mathcal{CARD}$ una funcional cardinal. Diremos que ϕ es una funcional cardinal *monótona* si para cualquier espacio $X \in \mathcal{C}$ y cualquier subespacio Y de X tenemos que $\phi(Y) \leq \phi(X)$.

Para simplificar y dar énfasis a la aritmética cardinal infinita es usual añadir una condición más a la definición de funcional cardinal. Si ϕ es una funcional cardinal, entonces los valores que resulten de aplicar ϕ a un espacio topológico de su dominio deberán ser mayores o iguales que ω. Reformulando la definición de funcional cardinalidad obtenemos que para cada espacio X el valor que toma $|X|$ será el número de puntos que tiene X más ω. A lo largo del texto será evidente cuándo se usa esta última condición.

DEFINICIÓN 1.19. Sea $w : \mathcal{TOP} \to CARD$ la funcional cardinal definida de la siguiente manera: para cada $X \in \mathcal{TOP}$, sea

$$w(X) = \text{mín}\{\kappa \in \mathcal{CARD} : \kappa = |\mathcal{B}| \wedge \mathcal{B} \text{ es una base de } X\} + \omega$$

Al cardinal $w(X)$ se le llama *peso* de X y es claro que un espacio es segundo numerable si y sólo si tiene peso igual a ω.

Una *red* para un espacio topológico X es una colección $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X, no necesariamente abiertos, tal que todo abierto de X se puede escribir como una unión de elementos de $\mathcal{N}$. De esta manera, una base $\mathcal{B}$ de X es una red al igual que la colección $\{\{x\} : x \in X\}$.

DEFINICIÓN 1.20. Sea $nw : \mathcal{TOP} \to CARD$ la funcional cardinal definida de la siguiente manera: si $X \in \mathcal{TOP}$, entonces

$$nw(X) = \text{mín}\{\kappa \in \mathcal{CARD} : \kappa = |\mathcal{B}| \wedge \mathcal{B} \text{ es una red en } X\} + \omega$$

Al cardinal $nw(X)$ se le llama *peso de red* de X. Note que para todo espacio X siempre sucede que $nw(X) \leq w(X)$ y que $nw(X) \leq |X|$, pero no necesariamente sucede que $w(X) \leq |X|$ ó $|X| \leq w(X)$, como es el caso del espacio discreto de cardinalidad no numerable o de la recta real equipada con la topología usual. En la proposición 1.24 se mostrará que si X es un espacio compacto, entonces el peso y el peso de red del espacio X coinciden.

Otra funcional importante y bastante útil es la llamada *densidad* que se define a continuación.

DEFINICIÓN 1.21. Sea $d : \mathcal{TOP} \to CARD$ la funcional cardinal definida de la siguiente manera: para cada $X \in \mathcal{TOP}$, sea

$$d(X) = \text{mín}\{\kappa \in \mathcal{CARD} : D \subset X \wedge \kappa = |D| \wedge \overline{D} = X\} + \omega$$

Al cardinal $d(X)$ se le llama *densidad* de X. Inmediatamente podemos comprobar que un espacio X es separable si y sólo si la densidad de X es igual a ω. Claramente $d(X) \leq w(X)$ y $d(X) \leq |X|$. Simplemente fije un elemento por cada abierto básico de una base cuyo cardinal sea el peso del espacio, entonces el conjunto de todos los puntos así definidos forman un subconjunto denso de cardinalidad igual al peso del espacio.

Al inicio de esta sección establecimos que una funcional cardinal ϕ es una funcional definida en una subclase $\mathcal{C}$ de espacios topológicos con valores cardinales tal que para cada X y Y elementos de $\mathcal{C}$ tenemos que $\phi(X) = \phi(Y)$ si $X \approxeq Y$.

Si $\mathcal{TOP}_*$ denota a la clase de los espacios topológicos junto con una elección de punto base y $\phi : \mathcal{TOP}_* \to \mathcal{CARD}$ es una funcional tal que para cada (X, p) y (Y, q) elementos de $\mathcal{TOP}_*$ sucede que $\phi((X, p)) = \phi((Y, q))$ si existe una función f tal que $X \approxeq_f Y$ y $f(p) = q$, entonces a ϕ también la llamaremos funcional cardinal. Para ejemplificar este tipo de funcionales cardinales definamos lo siguiente:

DEFINICIÓN 1.22. Sea X un espacio topológico. Entonces

1. Si $p \in X$, la *estrechez del espacio X en el punto p* es el número cardinal
$$\begin{aligned} t(X,p) = \text{mín}\{\kappa \in \mathcal{CARD} : \forall Y(Y \subset X \wedge p \in \overline{Y} \to \\ \exists A(A \subset Y \wedge p \in \overline{A} \wedge |A| \leq \kappa)\} \end{aligned}$$
2. La *estrechez del espacio X* es el número cardinal
$$t(X) = \sup\{t(X, p) : p \in X\} + \omega$$

Observe que todas las funcionales cardinales definidas hasta antes de la funcional estrechez son globales, es decir, sus definiciones se basan en propiedades topológicas que dan información global acerca del espacio. En contraste está la funcional estrechez, que utiliza funcionales basadas en propiedades topológicas locales.

No es difícil ver que las funciones cardinales w y nw son monótonas. En efecto, si $\mathcal{B}$ es una base de un espacio topológico X tal que $w(X) = \mathcal{B}$ y Y es un subespacio de X, considere la familia $\mathcal{B}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$, entonces $\mathcal{B}_Y$ es una base para el subespacio Y y se cumple que $w(Y) \leq |\mathcal{B}_Y| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$. Si reemplazamos a la base $\mathcal{B}$ por una red $\mathcal{N}$ de X con las mismas propiedades, entonces el mismo argumento prueba que $nw(Y) \leq nw(X)$.

Una propiedad importante que relaciona a los espacios Tychonoff con la funcional peso es que si X es un espacio Tychonoff, entonces existe una compactación (K, h) tal que $w(X) = w(K)$. De hecho, si X es un espacio Tychonoff con peso κ, entonces X se puede encajar en el espacio compacto I^κ (ver [**4**, 2.3.23]).

Terminamos esta sección con una serie de proposiciones que establecen resultados importantes que conciernen a las funcionales peso y peso de red. Se enuncia también el teorema sobre densidad de un producto topológico de Hewitt-Marczewski-Pondiczery.

PROPOSICIÓN 1.23. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos tal que para cada $\alpha \in A$ se tiene que $\omega \leq w(X_\alpha)$. Sea $\kappa = \sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in A\}$, entonces $w\left(\prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}\right) \leq \kappa \cdot |A|$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $\alpha \in A$, sea $\mathcal{B}_\alpha$ una base para el espacio X_α con peso $\kappa_\alpha = w(X_\alpha)$. La familia $\mathcal{B}$ que consiste de todos los abiertos de la forma $\pi_{\alpha_1}^{-1}(B_i) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(B_2) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(B_k)$, donde k es un número natural y para toda $i \leq k$ se tiene que $\alpha_i \in A$ y B_i es un básico de B_{α_i}, forman una base para el producto $\prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Si $\alpha \in A$, entonces $|\{F \subset \mathcal{B}_\alpha : |F| \in \omega\}| = |\mathcal{B}_\alpha| = \kappa_\alpha$ lo cual implica que $|\mathcal{B}| = |A| \cdot \prod\{\kappa_\alpha : \alpha \in A\} \leq \kappa \cdot |A|$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.24. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Entonces*

1. *Si X es compacto, entonces $nw(X) = w(X) \leq |X|$.*
2. *Si X es metrizable, entonces $nw(X) = w(X)$.*
3. *$t(X) \leq w(X)$.*

Demostración. 1. Sea $\mathcal{N}$ una red en X tal que $\kappa = nw(X) = |\mathcal{N}|$. Si $\kappa \in \omega$, entonces X es discreto y $|X| = \kappa = w(X)$.

Si κ es infinito y τ_1 denota a la topología de X, considere a la familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ definida por la siguiente propiedad:

$$(N, M) \in \mathcal{A} \leftrightarrow \exists V, W \in \tau_1 (V \cap W = \emptyset \wedge N \subset V \wedge M \subset W)$$

Para cada $(N, M) \in \mathcal{A}$, sea $\mathcal{A}_{(N,M)} = \{(V, W) \in \tau_1 \times \tau_1 : V \cap W = \emptyset \wedge N \subset V \wedge M \subset W\}$ y sea $f : \mathcal{A} \to \bigcup\{\mathcal{A}_{(N,M)} : (N, M) \in \mathcal{A}\}$ una función de elección. Entonces la familia $\mathcal{B} = \{\bigcap F : F \subset \mathcal{B}_0 \wedge |F| \in \omega \setminus \{0\}\}$, donde $\mathcal{B}_0 = \{\pi_i(f(N, M)) : (N, M) \in \mathcal{A} \wedge i \in \{1, 2\}\}$ y $\pi_i : \tau_1 \times \tau_1 \to \tau_1$ es la proyección en el i-ésimo factor, es una base de una topología para X.

Observe que si x y y son dos puntos distintos de X, entonces existen abiertos ajenos V y W tales que $x \in V$ y $y \in W$, además como $\mathcal{N}$ es una red en X, existen N y M en $\mathcal{N}$ tales que $x \in N \subset V$ y $y \in M \subset W$, lo cual implica que $(N, M) \in \mathcal{A}$. Por lo tanto la topología τ_2 de X generada por la familia $\mathcal{B}$ también es Hausdorff.

Como $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_0| = |\mathcal{A}| \leq |\mathcal{N}|$, entonces tenemos que el peso del espacio (X, τ_2) es menor o igual que el peso de red del espacio (X, τ_1).

Como $\tau_2 \subset \tau_1$ y (X, τ_1) es compacto, entonces la función identidad $i : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua, biyectiva y cerrada. Por lo tanto $(X, \tau_1) \approxeq (X, \tau_2)$ y $w((X, \tau_1)) = w((X, \tau_2)) \leq nw((X, \tau_1) = nw((X, \tau_2)) \leq w((X, \tau_2)) = w((X, \tau_1))$.

2. Sea $\mathcal{N}$ una red en X tal que $\kappa = |\mathcal{N}| = nw(X)$. Para cada $N \in \mathcal{N}$, escogamos un punto x_N de X elemento de N. Note que la familia $D = \{x_N : N \in \mathcal{N}\}$ es densa en X y que $|D| = \kappa$. Como X es metrizable, entonces para cada $x_N \in D$ existe una base local $\mathcal{B}_{x_N}$ tal que $|\mathcal{B}_{x_N}| \leq \omega$, de esta manera, la familia $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_{x_N} : x_N \in D\}$ tiene cardinalidad menor o igual que κ y resulta ser una base del espacio X.
3. Sea $\mathcal{B}$ una base de X tal que $|\mathcal{B}| = \kappa = w(X)$. Si $p \in X$, entonces la familia $\mathcal{B}_p = \{B \in \mathcal{B} : p \in B\}$ es un sistema de vecindades básicas de p y tenemos que $|\mathcal{B}_p| \leq \kappa$. Sea $Y \subset X$ tal que $p \in \overline{Y}$, por definición de cerradura sucede que para toda $B \in \mathcal{B}_p$ la intersección $B \cap Y$ es distinta del vacío. Para cada

$B \in \mathcal{B}_p$ escojamos un punto $x_B \in B \cap Y$ y consideremos al conjunto $A = \{x_B : B \in \mathcal{B}_p\}$, entonces $p \in \overline{A}$ y $|A| \leq |\mathcal{B}_p| \leq \kappa$.

Por lo tanto, para cada $p \in X$ tenemos que $t(X,p) \leq \kappa$, lo cual implica que $t(X) \leq \kappa$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.25. *Sea $f : X \to Y$ una función abierta, continua y suprayectiva, entonces $w(Y) \leq w(X)$ y $nw(Y) \leq nw(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}_X$ una base en X tal que $|\mathcal{B}_X| = w(X)$ y sea $\mathcal{B}_Y = \{f[B] : B \in \mathcal{B}_X\}$, entonces $|\mathcal{B}_Y| \leq |\mathcal{B}_X|$.

Si V es un abierto de Y que tiene a $y \in Y$ como elemento, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en X porque f es continua y como f es también suprayectiva existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, es decir $x \in f^{-1}(V)$. Como $\mathcal{B}_X$ es una base en X, entonces existe $B \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B \subset f^{-1}(V)$ y esto implica que $y \in f[B] \subset V$. Lo cual muestra que $\mathcal{B}_Y$ es una base en Y.

Observe que si $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ es una red en X y $|\mathcal{B}_{\mathcal{X}}| = nw(X)$, entonces la demostración es válida para el caso $nw(Y) \leq nw(X)$, haciendo a $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ una red en Y. $\square$

PROPOSICIÓN 1.26. *Sea X un espacio Hausdorff y sea κ un número cardinal infinito tal que $w(X) \leq \kappa$, entonces $|X| \leq 2^\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B} \subset \tau_X$ una base para X tal que $|\mathcal{B}| \leq \kappa$. Si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1 \in X \setminus \{x_2\} \in \tau_X$. Como $\mathcal{B}$ es base de X existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x_1 \in B \subset X \setminus \{x_2\}$. Considere la función $f : X \to \mathcal{P}(B)$ definida por $f(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$, entonces $B \in f(x_1)$ pero como $x_2 \notin B$ tenemos que $B \notin f(x_2)$. Esto muestra que f es inyectiva, por lo tanto $|X| \leq 2^{|\mathcal{B}|} \leq 2^\kappa$. $\square$

TEOREMA 1.27 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery [**4**, 2.3.15]). *Sea $\kappa \in CARD$, sea I un conjunto de índices tal que $|I| \leq 2^\kappa$ y sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos.*

Si para toda $\alpha \in I$ sucede que $d(X_\alpha) \leq \kappa$, entonces $d(\prod\{X_\alpha : \alpha \in I\}) \leq \kappa$.

CAPíTULO 2

Funciones multi-valuadas y espacios Lindelöf Σ

1. Funciones multi-valuadas

DEFINICIÓN 2.1. Sean X y Y dos conjuntos. Una *función multi-valuada (o mapeo multi-valuado)* es una función $p \subset X \times \mathcal{P}(Y)$. Es decir, a cada elemento $x \in X$ la función p le asocia un subconjunto de Y el cual puede ser vacío.

La notación es la usual: $p : X \to \mathcal{P}(Y)$, aunque es también común escribir $p : X \to Y$ haciendo mención explícita de que se trata de una función multi-valuada.

Si $f : X \to Y$ es una función entre conjuntos en el sentido usual, el conjunto imagen de f definido por $Im(f) = \{y \in Y : y = f(x) \wedge x \in X\}$ está siempre bien definido. Además note que $Im(f) \subset Y$. Sin embargo, cuando f es una función multi-valuada, el correspondiente conjunto $Im(f) = \{y \in \mathcal{P}(Y) : y = f(x) \ \wedge \ x \in X\} \subset \mathcal{P}(Y)$ no es del todo apropiado para nuestros fines pues nos da información acerca de $P(Y)$ en vez de Y. Así pues, es necesaria una nueva definición de imagen para el caso especial de funciones multi-valuadas.

DEFINICIÓN 2.2. Sea $p : X \to Y$ una función multi-valuada y sea $A \subset X$. Entonces el conjunto

$$p(A) = \bigcup_{x \in A} p(x)$$

es el conjunto *imagen* de A bajo la función multi-valuada p. De esta manera, la imagen de la función multi-valuada p es el conjunto

$$Img(p) = p(X) = \bigcup_{x \in X} p(x)$$

.

Basados en la definición de imagen para funciones multi-valuadas se puede definir la composición entre funciones multi-valuadas de la siguiente manera.

Definición 2.3. Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ dos funciones multi-valuadas. Entonces la función multi-valuada $q \circ p : X \to Z$ definida de la siguiente forma: Para toda $x \in X$

$$(q \circ p)(x) = q(p(x)) = \bigcup_{y \in p(x)} q(y)$$

es llamada *composición* de p seguida de q.

Para cada par de conjuntos X y Y sea $\mathcal{FUNC}(X, Y)$ la familia de todas las funciones con dominio en X y contradominio Y, de la misma manera $\mathcal{FUNC}m(X, Y)$ es la familia de todas las funciones multi-valuadas con dominio X y codominio $\mathcal{P}(Y)$.

Definición 2.4. Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces la *función multi-valuada inducida por* f es $p_f : X \to Y$ cuya regla de correspondencia es la siguiente: Para toda $x \in X$ sea $p_f(x) = \{f(x)\}$.

Si $\mathcal{C}$ es la categoría definida por la clase $\mathcal{CON}$, por las familias de morfismos $\mathcal{FUNC}(X, Y)$ para cada $X, Y \in \mathcal{CON}$ y por la composición entre funciones como operación; y si $\mathcal{D}$ es la categoría definida por la clase $\mathcal{CON}$, por las familias de morfismos $\mathcal{FUNC}m(X, Y)$ para cada $X, Y \in \mathcal{CON}$ y por la composición entre funciones multi-valuadas como operación. Entonces existe un funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que para toda $f \in \mathcal{FUNC}(X, Y)$ sucede que $F(f) = p_f \in \mathcal{FUNC}m(X, Y)$ y si $g \in \mathcal{FUNC}(Y, Z)$ entonces $F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$. Esta última propiedad se muestra a continuación.

Proposición 2.5. *Sean $X, Y, Z \in \mathcal{CON}$ y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones, entonces $p_g \circ p_f = p_{(g \circ f)}$.*

Demostración. Sea $x \in X$, entonces

$$
\begin{aligned}
p_g \circ p_f(x) &= \bigcup_{y \in p_f(x)} p_g(y) \\
&= \bigcup_{y \in \{f(x)\}} p_g(y) \\
&= p_g(f(x)) \\
&= \{g(f(x))\} \\
&= \{(g \circ f)(x)\} \\
&= p_{(g \circ f)}(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $p_g \circ p_f = p_{(g \circ f)}$. □

Con las siguientes definiciones se completa la familia de nociones sobre funciones multi-valuadas necesarias para el buen desarrollo de las secciones y capítulos subsecuentes.

DEFINICIÓN 2.6. Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces la *inversa* de f es la función multi-valuada $f^{-1} : Y \to X$ definida por la siguiente regla. Para toda $y \in Y$ sea $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$.

DEFINICIÓN 2.7. Sea $P = \{p_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de funciones multi-valuadas. Entonces

$$
\prod P : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to \mathcal{P}\left(\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha\right)
$$

$$
x \mapsto \prod_{\alpha \in A} p_\alpha(x(\alpha))
$$

es la funcion multi-valuada *producto* de la familia P.

2. Semicontinuidad superior

Si $p : X \to Y$ es una función multi-valuada, entonces para toda $x \in X$ tenemos que $p(x) \subset Y$, de aquí que si Y tiene una topología, entonces a $p(x)$ le podemos dotar de la topología de subespacio y así definir lo siguiente:

DEFINICIÓN 2.8. Sea $X \in \mathcal{CON}$, sea $Y \in \mathcal{TOP}$ y sea $p : X \to Y$ una función multi-valuada, entonces p es *compacto-valuada* si para cada $x \in X$ tenemos que $p(x)$ es compacto.

En el caso particular de que para cada $x \in X$ el subespacio $p(x)$ sea finito, llamaremos a p una función *finito-valuada*.

Al igual que el concepto de continuidad de una función entre espacios topológicos, la noción de *semicontinuidad superior* jugará un papel importante en el estudio de los espacios topológicos. La semicontinuidad superior es una adaptación del concepto de continuidad al caso particular de funciones multi-valuadas.

DEFINICIÓN 2.9. Sean $X, Y \in \mathcal{TOP}$ y sea $p : X \to Y$ una función multi-valuada. Entonces p es *semicontinua superiormente (o semicontinua por arriba)* si para todo abierto V de X el conjunto

$$p^{\#}(V) = \{x \in X : p(x) \subset V\}$$

es un abierto de X (figura 1).

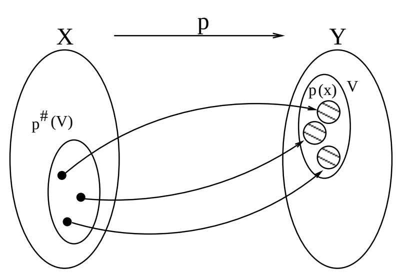

FIGURA 1. Semicontinuidad superior

Para cada función continua f existe una función finito-valuada (y por lo cual, compacto-valuada) que reune toda la información de la continuidad de f, a saber p_f. Este hecho será demostrado en la siguiente proposición. Posteriormente demostraremos que la composición de funciones semicontinuas superiormente y compacto-valuadas es semicontinua superiormente y compacto-valuada. De ahora en adelante utilizaremos las siglas CV y SCS como abreviaciones de las frases “compacto-valuada” y “semicontinua superiormente”, respectivamente.

PROPOSICIÓN 2.10. *Sean $X, Y \in \mathcal{TOP}$, entonces $f : X \to Y$ es continua si y sólo si p_f es semicontinua superiormente.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Supongamos que $f : X \to Y$ es continua. Si $V \in \tau_Y$, entonces

$$\begin{aligned} p_f^{\#}(V) &= \{x \in X : p_f(x) \subset V\} \\ &= \{x \in X : \{f(x)\} \subset V\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in V\} \\ &= f^{-1}[V] \end{aligned}$$

que es abierto en X por la continuidad de f.

Por lo tanto p_f es SCS.

$\Leftarrow$) Supongamos que $p_f : X \to \mathcal{P}(Y)$ es SCS. Sea $V \in \tau_Y$, entonces $f^{-1}[V] = p_f^{\#}(V)$ es abierto en X, por lo tanto f es continua. □

Antes de demostrar que las propiedades de ser CV y SCS se preservan bajo composiciones, probaremos los siguientes resultados:

PROPOSICIÓN 2.11. *Sea $p : X \to Y$ una función compacto-valuada y semicontinua superiormente y sea $f : Y \to Z$ una función continua, entonces la función $f \circ p : X \to \mathcal{P}(Z)$ definida por $(f \circ p)(x) = f[p(x)]$ para toda $x \in X$, es compacto-valuada y semicontinua superiormente.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $x \in X$, entonces $(f \circ p)(x) = f[p(x)]$ es compacto porque p es CV y la imagen continua de un compacto es compacta.
2. Sea $V \in \tau_Z$, entonces
$$\begin{aligned} (f \circ p)^{\#}(V) &= \{x \in X : (f \circ p)(x) \subset V\} \\ &= \{x \in X : f[p(x)] \subset V\} \\ &= \{x \in X : \forall z \in p(x)\ (f(z) \in V)\} \\ &= \{x \in X : p(x) \subset \{y \in Y : f(y) \in V\}\} \\ &= \{x \in X : p(x) \subset f^{-1}(V)\} \\ &= p^{\#}(f^{-1}(V)) \end{aligned}$$
es abierto en X.

Por lo tanto $f \circ p$ es CV y SCS. □

PROPOSICIÓN 2.12. *Si $f : X \to Y$ es perfecta, entonces $f^{-1} : Y \to X$ es una función compacto-valuada y semicontinua superiormente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es perfecta.

1. Sea $y \in Y$, como f tiene fibras compactas y $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ es la fibra de f en x, entonces $f^{-1}(y)$ es compacto.
2. Sea $V \in \tau_X$, veamos que $(f^{-1})^{\#}(V) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset V\}$ es abierto en Y. Para esto note que $(f^{-1})^{\#}(V) = Y \setminus f(X \setminus V)$.

Entonces f^{-1} es CV y SCS. □

PROPOSICIÓN 2.13. *Sea X un espacio topológico, sea $F \subset X$ un subespacio cerrado y sea $i_F : F \to X$ la función inclusión. Entonces la función $i_F^{-1} : X \to \mathcal{P}(F)$ que está definida por:*

$$i_F^{-1}(x) = \begin{cases} \{x\} & si\ x \in F \\ \emptyset & si\ x \notin F \end{cases}$$

es semicontinua superiormente y compacto-valuada.

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $x \in X$, entonces $i_F^{-1}(x) = \{x\}$ ó $i_F^{-1}(x) = \emptyset$; en cualquier caso la imagen es finita, por lo tanto compacta.
2. Sea $V \in \tau_F$, entonces existe $W \in \tau_X$ tal que $V = W \cap F$ y observe que

$$\begin{aligned} \left(i_F^{-1}\right)^{\#}(V) &= \{x \in X : i_F^{-1}(x) \subset V\} \\ &= \{x \in F : i_F^{-1}(x) \subset V\} \\ &\qquad \cup \{x \in X \setminus F : i_F^{-1}(x) \subset V\} \\ &= \{x \in F : \{x\} \subset V\} \\ &\qquad \cup \{x \in X \setminus F : \emptyset \subset V\} \\ &= V \cup X \setminus F \\ &= (W \cap F) \cup (X \setminus F) \\ &= (W \cup (X \setminus F)) \cap (F \cup (X \setminus F)) \\ &= W \cup (X \setminus F) \end{aligned}$$

es unión finita de abiertos de X.

Por lo tanto i_F^{-1} es CV y SCS. □

La siguiente proposición muestra que la imagen semicontinua superiormente y compacto-valuada de un espacio compacto es compacta. Cuando suceda que la imagen de una función multi-valuada sea igual a su codominio, diremos que tal función es una función multi-valuada *suprayectiva*.

PROPOSICIÓN 2.14. *Sea X un espacio topológico compacto y sea $p : X \to Y$ una función multi-valuada semicontinua superiormente y CV tal que $p(X) = Y$. Entonces Y es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(Y)$ una cubierta abierta de Y.
Sea $\mathcal{W} = \left\{ \bigcup U : U \subset \mathcal{U} \wedge |U| < \omega \right\}$.

Veamos que existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ cubierta abierta de Y tal que $|\mathcal{V}| < \omega$. Sea $\mathcal{V}^{\#} = \{p^{\#}(W) : W \in \mathcal{W}\}$, como p es SCS la familia $\mathcal{V}^{\#}$ es una familia de abiertos en X y si $x \in X$, entonces $p(x) \subset Y$ es compacto por ser p una función CV. Como $p(x) \subset \bigcup \mathcal{U}$, entonces existe $n \in \omega$ y existen $\{U_i\}_{i\in n} \subset \mathcal{U}$ tales que $p(x) \subset \bigcup_{i\in n} U_i$. De esta forma hemos mostrado que existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $p(x) \subset W$, así que $x \in p^{\#}(W)$. Esto prueba que $\mathcal{V}^{\#}$ es cubierta abierta de X.

Como X es compacto, entonces existen $m \in \omega$ y $f : m \to \mathcal{W}$ tales que $X \subset \bigcup_{i\in m} p^{\#}(f(i))$. Sea $\mathcal{V} = \{f(i) : i \in m\}$. Si $y \in Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $y \in p(x)$ ya que p es suprayectiva. Entonces existe $j \in m$ tal que $x \in p^{\#}(f(j))$ por lo que $y \in p(x) \subset p(p^{\#}(f(j))) \subset f(j)$. Por lo tanto $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta finita de Y. □

PROPOSICIÓN 2.15. *Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ dos funciones semicontinuas superiormente y compacto-valuadas, entonces $q \circ p : X \to Z$ es una función semicontinua superiormente y compacto-valuada.*

DEMOSTRACIÓN. Observe que para toda $x \in X$ el conjunto $(q\circ p)(x)$ es un subespacio compacto de Z debido a que $p(x)$ es compacto y q es SCS y CV.

Sigue probar que $q \circ p$ es SCS.

Sea $V \in \tau_Z$, entonces

$$\begin{aligned}(q \circ p)^{\#}(V) &= \{x \in X : (q \circ p)(x) \subset V\}\\ &= \{x \in X : \bigcup\{q(y) : y \in p(x)\} \subset V\}\\ &= \{x \in X : \forall y \in p(x)\ \ (q(y) \subset V)\}\\ &= \{x \in X : \forall y \in p(x)\ (y \in q^{\#}(V))\}\\ &= \{x \in X : p(x) \subset q^{\#}(V)\}\\ &= p^{\#}(q^{\#}(V))\end{aligned}$$

es abierto porque p y q son SCS. □

A continuación se muestra que el producto arbitrario de funciones multi-valuadas semicontinuas superiormente y compacto-valuadas es también una función SCS y CV.

PROPOSICIÓN 2.16. *Sea $\mathcal{P} = \{p_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de funciones multi-valuadas. Entonces*

1. *Si para cada $\alpha \in A$ la función multi-valuada p_α es CV, entonces la función multi-valuada producto $\prod \mathcal{P}$ es CV.*

2. *Si para cada $\alpha \in A$ la función compacto-valuada p_α es SCS, entonces la función multi-valuada producto $\prod \mathcal{P}$ es SCS.*

q

Demostración. 1. Véase el teorema 1.13.

2. Sea $Y = \prod\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, sea $F = \{\pi_\beta : Y \to Y_\beta : \beta \in A\}$ la familia de proyecciones asociadas al producto Y y sea $p = \prod \mathcal{P}$. Consideremos a $W \in \tau_Y$ y sea $x \in p^{\#}(W)$. Entonces $p(x) \subset W$ es compacto y por el teorema 1.14 existe $V \in \tau_Y$ abierto básico tal que $p(x) \subset V \subset W$, donde $V = \bigcap_{i\in n} \pi_{\alpha_i}(V_{\alpha_i})$, con $n \in \omega$ y $V_{\alpha_i} \in \tau_{Y_\alpha}$ para toda $i \in n$. Es decir, para toda $i \in n$ tenemos que $p_{\alpha_i}(x(\alpha_i)) \in V_{\alpha_i}$, lo cual es equivalente a que $\pi_{\alpha_i}(x) \in p^{\#}_{\alpha_i}(V_{\alpha_i})$. Como la familia P es una familia de funciones semicontinuas superiormente, para toda $i \in n$ los conjuntos $p^{\#}_{\alpha_i}(V_{\alpha_i})$ son abiertos en X_{α_i}, entonces $x \in \bigcap_{i\in n} \pi^{\#}_{\alpha_i}(V_{\alpha_i}) \subset p^{\#}(V) \subset p^{\#}(W)$, lo cual muestra que $p^{\#}(W)$ es abierto. Por lo tanto p es una función semicontinua superiormente. $\square$

La gráfica de una función $f : X \to Y$ es

$$graf(f) = \{(x, y) : x \in X \ \wedge \ f(x) = y\} \subset X \times Y$$

No es de extrañar que debamos introducir una definición más adecuada para el caso de funciones multi-valuadas, ya que si $p : X \to Y$ es multi-valuada, entonces $graf(p) \subset X \times \mathcal{P}(Y)$ y lo que nos interesa es poder definir a la gráfica de p de tal manera que esté contenida en $X \times Y$.

Definición 2.17. Sean $X, Y \in \mathcal{SET}$ y sea $p : X \to Y$ una función multi-valuada, entonces

$$grf(p) = \bigcup_{x\in X} (\{x\} \times p(x))$$

es la *gráfica* de la función multi-valuada p (figura 2).

El siguiente teorema es de suma importancia, pues relaciona el concepto de función multi-valuada semicontinua superiormente y compacto-valuada con aspectos más familiares de la Topología General.

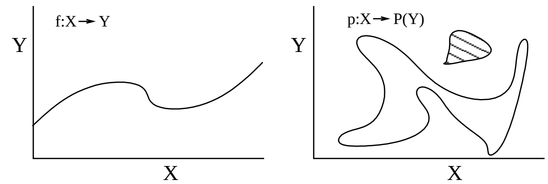

FIGURA 2. $graf(f : X \to Y), grf(p : X \to \mathcal{P}(Y))$

TEOREMA 2.18. *Sean X y Y dos espacios topológicos, sea $p : X \to Y$ una función multi-valuada. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *p es compacto-valuada y semicontinua superiormente.*
2. *Existen un espacio compacto K, un subconjunto $F \subset X \times K$ cerrado y una función $g : F \to Y$ continua tales que $p = g \circ i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1}$, donde $\pi_X : X \times K \to X$ es la proyección sobre el primer factor y $i_F : F \to X \times K$ es la función inclusión.*

$$\begin{tikzcd}
X \times K \arrow[r, shift left, "\pi_X"] \arrow[d, shift left, "i_F^{-1}"] & X \arrow[l, shift left, "\pi_X^{-1}"] \arrow[d, "p"] \\
F \arrow[u, shift left, "i_F"] \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

3. *p es la composición de la inversa de una función perfecta h y una función continua g definidas en un espacio F.*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[l, shift left, "h^{-1}"] \arrow[dl, "p"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN.

$1 \Rightarrow 2)$ Sea $K = \beta Y$ y sea $F = grf(p) \subset X \times K$. Entonces

a) K es compacto por ser la compactación de Stone-Čech del espacio Y.

b) Veamos que F es cerrado probando que $(X \times K) \setminus F$ es un conjunto abierto.
Sea $(a, b) \in (X \times K) \setminus F$, entonces $b \notin p(a)$. Como βY es Tychonoff y $p(a)$ es compacto porque p es una función compacto-valuada tenemos que $\{b\}$ y $p(a)$ son dos cerrados ajenos, entonces existen A y B en $\tau_{\beta Y}$ ajenos tales que $p(a) \subset A$ y $b \in B$. Además, como p es semicontinua superiormente, tenemos que $a \in p^{\#}(A \cap Y) \in \tau_X$. El conjunto $p^{\#}(A \cap Y) \times B$ es un abierto en $X \times K$ y contiene al punto (a, b). Veamos entonces que el conjunto $p^{\#}(A \cap Y) \times B$ está contenido en $(X \times K) \setminus F$.
Sea $(x, y) \in p^{\#}(A \cap Y) \times B$, entonces $p(x) \subset A$. Como A y B son dos conjuntos ajenos y $y \in B$, se tiene que $y \notin p(x)$. Por lo tanto $(x, y) \in (X \times K) \setminus F$.

c) Sea $g = \pi_K \restriction_F$, donde $\pi_K : X \times K \to K$ es la proyección sobre K. Como $F \subset X \times Y$, entonces $g(F) \subset Y$. Además g es continua por ser una restricción de π_K.
Obsérvese que si $x \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(g \circ i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1})(x) &= (g \circ i_F^{-1})(\pi_X^{-1}(x)) \\
&= g(i_F^{-1}(\{x\} \times K)) \\
&= \pi_K \restriction_F ((\{x\} \times K) \cap F) \\
&= \pi_K \restriction_F (\{x\} \times p(x)) \\
&= p(x)
\end{aligned}$$

Entonces $p = g \circ i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1}$.

$2 \Rightarrow 3$) Sea K un espacio topológico compacto, sea $F \subset X \times K$ un subespacio cerrado, sea $g : F \to Y$ una función continua y sea $p = g \circ i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1}$.

Sea $h = \pi_X \restriction_F$, entonces si $x \in F$ tenemos que

$$\begin{aligned}
h^{-1}(x) &= (\pi_X \restriction_F{}^{-1})(x) \\
&= (\pi_X \circ i_F)^{-1}(x) \\
&= i_F^{-1}(\pi_X^{-1}(x)) \\
&= (i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1})(x)
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $h : (X \times K) \cap F \to X$ es una función perfecta.

a) Como h es una restricción de una función continua, entonces h es continua.

b) Como K es un espacio compacto y $\pi_X : X \times K \to X$ es la proyección sobre el primer factor, tenemos que π_X es cerrada (proposición 1.12).
Sea $G \subset F$ un subconjunto cerrado en F, entonces existe un cerrado H de $X \times K$ tal que $G = H \cap F$ y como $F \subset X \times K$ es cerrado, entonces G también es cerrado en $X \times K$ y $h(G) = (\pi_X \circ i_F)(G) = \pi_X(G)$ es cerrado en X.

c) Sea $x \in X$, entonces $h^{-1}(x) = \{x\} \times p(x) \in F$ es un producto de compactos, ya que p es CV.

Note que g es continua por hipótesis y es claro que $p = g \circ h^{-1}$.

$3 \Rightarrow 1$) Como h es perfecta tenemos que h^{-1} es una función compacto-valuada y semicontinua superiormente (proposición 2.12), entonces $p = g \circ h^{-1}$ es CV y SCS (proposición 2.11). $\square$

3. Cubiertas y redes

Antes de definir a los espacios Σ y a los espacios Lindelöf Σ es necesario introducir las definiciones de red con respecto a una cubierta y la de familia discreta en un espacio topológico, también introduciremos algunas abreviaturas para las cubiertas según sus propiedades.

A partir de esta sección y en lo sucesivo se supondrán a todos los espacios topológicos como espacios Tychonoff.

Definición 2.19. Sea X un espacio topológico, sea $\mathcal{C}$ una cubierta de X. Entonces diremos que

1. $\mathcal{C}$ es una *cubierta cerrada* de X si para cada $C \in \mathcal{C}$ tenemos que C es un subespacio cerrado de X.
2. $\mathcal{C}$ es una *cubierta compacta* de X si para cada $C \in \mathcal{C}$ tenemos que C es un subespacio compacto de X.
3. $\mathcal{C}$ es una *cubierta numerablemente compacta* de X si para cada $C \in \mathcal{C}$ tenemos que C es un subespacio numerablemente compacto.

Definición 2.20. Sea X un espacio topológico, sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ una cubierta de X y sea $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{N}$ es una *red en X respecto a la cubierta $\mathcal{C}$* si para toda $C \in \mathcal{C}$ y para toda $U \in \tau_X$ tales que $C \subset U$ existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subset N \subset U$.

Definición 2.21. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es una *familia discreta* en X si para toda $x \in X$ existe $W \in \tau_X$ tal que $x \in W$ y $|\{F \in \mathcal{F} : W \cap F \neq \emptyset\}| \leq 1$.

Definición 2.22. Una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ es *σ-discreta* en X si $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{F}_i$ y para cada $i \in \omega$ tenemos que $\mathcal{F}_i$ es una familia discreta de subconjuntos de X.

Cuando un espacio topológico tiene la propiedad de ser Lindelöf, entonces la cardinalidad de toda familia discreta y σ-discreta no excederá al primer cardinal infinito. Las siguientes proposiciones se encargarán de probar esta afirmación.

Proposición 2.23. *Sea X un espacio Lindelöf y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia discreta en X, entonces $\mathcal{F}$ es un conjunto numerable.*

Demostración. Sea $x \in X$ y definamos a una familia de abiertos

$$\mathcal{U}_x = \{W \in \tau_X : x \in W \wedge |\{F \in \mathcal{F} : F \cap W \neq \emptyset\}| \leq 1\}$$

Note que para toda $x \in X$ el conjunto $\mathcal{U}_x$ es distinto del vacío por ser $\mathcal{F}$ una familia discreta en X.

Sea $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x : x \in X\}$ y sea $f : X \to \bigcup \mathcal{U}$ una función de elección, donde $f(x) = W_x \in \mathcal{U}_x$ para cada $x \in X$. Entonces $f[X]$ es una cubierta abierta de X y como X es Lindelöf existe $\mathcal{V} \subset f[X]$ tal que $\mathcal{V}$ es una cubierta de X y $|\mathcal{V}| \leq \omega$. Así pues, existe una enumeración de $\mathcal{V}$, digamos $\mathcal{V} = \{W_{x_i} \in f[X] : i \in \omega\}$.

Para toda $i \in \omega$ tal que $W_{x_i} \in \mathcal{V}$ sea $\mathcal{F}_i = \{F \in \mathcal{F} : F \cap W_{x_i} \neq \emptyset\}$.

Veamos que $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{F}_i$. Sea $F \in \mathcal{F}$, entonces $F \subset X$ y $F \neq \emptyset$. Si elegimos un $x_0 \in F$ entonces existe $j \in \omega$ tal que $x_0 \in W_{x_j} \in V$ debido a que $\mathcal{V}$ es cubierta de X. Entonces $F \cap W_{x_j} \neq \emptyset$ lo cual implica que $F \in \mathcal{F}_j$.

Además, por la forma en que se escogieron a los W_{x_i} se tiene que $|\mathcal{F}_i| \leq 1$ para toda $i \in \omega$ y $|\mathcal{F}| = \left| \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{F}_i \right| \leq \omega$. □

Corolario 2.24. *Sea X un espacio Lindelöf y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia σ-discreta no vacía en X, entonces $\mathcal{F}$ es un conjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. De la definición de familia σ-discreta se sigue que $\mathcal{F} = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{F}_i$, donde $\mathcal{F}_i$ es discreta en X para toda $i \in \omega$. Además, $|\mathcal{F}_i| \leq \omega$ para toda $i \in \omega$ (proposición 2.23), entonces $|\mathcal{F}| = \left|\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{F}_i\right| \leq \omega$. $\square$

4. Espacios Σ y Lindelöf Σ

DEFINICIÓN 2.25 (Nagami [**8**]). Sea X un espacio topológico. Entonces X es un *espacio* Σ si

1. Existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ cubierta de X tal que $\mathcal{C}$ es cerrada y numerablemente compacta.
2. Existe $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{N}$ es una red σ-discreta en X respecto a la cubierta $\mathcal{C}$.

Si además X es Lindelöf, el espacio X se llama *Lindelöf* Σ

Cuando a un espacio Σ le añadimos la propiedad de ser Lindelöf, obtenemos como resultado un espacio con propiedades muy cómodas de compacidad y numerabilidad, de hecho, para identificar a los espacios Lindelöf Σ bastará encontrar una cubierta compacta y una red numerable respecto de dicha cubierta. Este hecho se muestra a continuación.

PROPOSICIÓN 2.26. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es un espacio Lindelöf Σ si y sólo si*

1. *Existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ cubierta compacta de X.*
2. *Existe $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ red numerable en X respecto a $\mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Sea X un espacio Lindelöf Σ. Entonces

1. Existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ cubierta cerrada numerablemente compacta de X. Si $C \in \mathcal{C}$, entonces C es numerablemente compacto y Lindelöf ya que C es cerrado, por lo tanto es compacto.
2. Existe $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ red σ-discreta de X respecto a C. Por la proposición 2.24 tenemos que $|\mathcal{N}| \leq \omega$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe una cubierta compacta $C \subset \mathcal{P}(X)$ de X y una red $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ numerable en X respecto a la cubierta C. Entonces

1. La cubierta compacta $\mathcal{C}$ es numerablemente compacta.

2. Al ser $\mathcal{N}$ numerable tenemos que $\mathcal{N} = \{N_i : i \in \omega\} = \bigcup_{i\in\omega}\{N_i\}$ es una familia σ-discreta en X ya que para toda $i \in \omega$ el conjunto $\{N_i\}$ es una familia discreta en X.
3. Veamos ahora que X es Lindelöf. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y sea $\mathcal{U}^f = \{\bigcup A : A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \wedge |A| < \omega\}$. Es claro que $\mathcal{U}^f$ es una cubierta de X, pues si $x \in X$, entonces existe $B \in \mathcal{U}$ tal que $x \in B = \bigcup\{B\}$.
Sea $N \in \mathcal{N}$ y sea $\mathcal{U}^N = \{A \in \mathcal{U}^f : N \subset A\}$.
Sea $\mathcal{V} = \{\mathcal{U}^N : N \in \mathcal{N}\}$ y sea $f : \mathcal{N} \to \bigcup\mathcal{V}$ una función de elección, donde $f(N) = U_N \in \mathcal{U}^N$ para cada $N \in \mathcal{N}$.
Entonces $f[\mathcal{N}] \subset \mathcal{U}^f$ es una cubierta abierta numerable de X, ya que si $x \in X$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$ y como $C \subset X$ es compacto existe $A \in \mathcal{U}^f$ tal que $C \subset A$, además existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subset N \subset A$ pues $\mathcal{N}$ es una red en X respecto a la cubierta $\mathcal{C}$, entonces $A \in \mathcal{U}^N$ y $x \in C \subset N \subset U_N \in f[\mathcal{N}]$ $\square$

Otra manera de caracterizar a los espacios Lindelöf Σ es por medio del concepto de función multi-valuada, el cual no solo nos permite simplificar y facilitar nuestro trabajo, sino también nos presenta una forma alternativa de pensamiento para la resolución de algunos problemas.

PROPOSICIÓN 2.27. *Sea X un espacio topológico, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es un espacio Lindelöf Σ*
2. *Existen una cubierta compacta $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ de X y una red numerable $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ en X respecto a $\mathcal{C}$.*
3. *Existen un espacio M segundo numerable y una función multivaluada $p : M \to X$ CV y SCS tal que $p(M) = X$.*
4. *Existen un espacio M segundo numerable, un espacio topológico L, una función $h : L \to M$ perfecta y una función $g : L \to X$ continua y suprayectiva.*
5. *Existen un espacio M segundo numerable, un espacio K compacto, un subconjunto $F \subset M \times K$ cerrado y una función $f : F \to X$ continua y suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & M \arrow[r, shift left, "\pi^{-1}"] \arrow[d, "p"] & M \times K \arrow[l, shift left, "\pi_M"] \arrow[d, shift left, "i_F^{-1}"] \\
& X & F \arrow[l, "f"] \arrow[u, shift left, "i_F"]
\end{tikzcd}$$

$1 \Leftrightarrow 2)$ Véase la proposición 2.26

$2 \Rightarrow 3)$ Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ una cubierta compacta de X y sea $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ una red numerable en X respecto a $\mathcal{C}$. Entonces

a) Consideremos en $\mathcal{N}$ a la topología discreta $\tau_{\mathcal{N}} = \mathcal{P}(N)$ y sea $M = \{m \in \mathcal{N}^\omega : \exists C \in \mathcal{C}\,(m[\omega] = \{N \in \mathcal{N} : C \subset N\})\}$. Entonces

1) $M \neq \emptyset$, ya que si $x \in X$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$ y como $|\{N \in \mathcal{N} : C \subset N\}| \leq |\mathcal{N}| \leq \omega$, entonces existe una enumeración del conjunto $\{N \in \mathcal{N} : C \subset N\}$ de la forma $\{N_i : i \in \omega\}$, es decir, existe una función $m : \omega \to \{N \in \mathcal{N} : C \subset N\}$.

2) M es segundo numerable, pues como $M \subset \mathcal{N}^\omega$ tiene la topología de subespacio y $\mathcal{N}^\omega$ es un espacio metrizable, entonces M es metrizable. Además $d(\mathcal{N}) \leq \omega$ ya que $\mathcal{N}$ es numerable y $d\left(\prod_{i\in\omega} \mathcal{N}\right) = d(\mathcal{N}^\omega) \leq \omega$.

Por lo tanto M es un espacio metrizable y separable.

b) Sea $p : M \to \mathcal{P}(X)$ una función multi-valuada definida por $p(m) = \bigcap\{m(i) : i \in \omega\}$ para cada $m \in M$. Veamos que p es SCS y CV.

1) Sea $m \in M$, entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $m[\omega] = \{N \in \mathcal{N} : C \subset N\}$. Probemos que $C = \bigcap m[\omega] = p(m)$.

Si $n \in C$, entonces $n \in N$ para toda N tal que $C \subset N$, por lo tanto $n \in \bigcap\{N \in \mathcal{N} : C \subset N\} = \bigcap m[\omega]$ y de esta forma $C \subset \bigcap m[\omega]$.

Ahora supongamos que $n \notin C$, entonces como $C \subset X$ es un subespacio compacto en un espacio Hausdorff tenemos que C es cerrado, por lo que existen dos abiertos ajenos A y B de X tales que $n \in A$ y $C \subset B$.

Como $\mathcal{N}$ es una red en X respecto a $\mathcal{C}$, entonces existe $N' \in \mathcal{N}$ tal que $C \subset N' \subset A$ y $n \notin N'$, lo cual implica que $n \notin \bigcap\{N \in \mathcal{N} : C \subset N\} = p(m)$. Por lo tanto $p(m) \subset C$.
Así, para cada $m \in M$ existe $C_M \in \mathcal{C}$ tal que $p(m) = \bigcap\{N \in \mathcal{N} : C_M \subset N\} = C_M$. Entonces p es CV.

2) Sea $V \in \tau_X$ y sea $m \in p^{\#}(V)$, entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $p(m) = C \subset V$ y como $\mathcal{N}$ es una red en X respecto a $\mathcal{C}$ existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subset N \subset V$ y existe $i \in \omega$ tal que $m(i) = N$. Sea $U = M \cap \pi_i^{-1}(\{N\})$, donde $\pi_i : \mathcal{N}^{\omega} \to \mathcal{N}$ es la proyección sobre el i-ésimo factor. Entonces U es una abierto de M tal que $m \in U \subset p^{\#}(V)$. Por lo tanto p es SCS.

$3 \Rightarrow 2$) Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para M, sea $\mathcal{C} = \{p(m) : m \in M\}$ y sea $\mathcal{N} = \{p(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Entonces

a) Como para toda $m \in M$ el espacio $p(m) \subset X$ es compacto y para cada $x \in X$ existe $m \in M$ tal que $x \in p(m)$, entonces $\mathcal{C}$ es una cubierta compacta de X.

b) Si $C \in \mathcal{C}$ tenemos que existe $m \in M$ tal que $p(m) = C$. Sea V un abierto de X que contenga a C, entonces $m \in p^{\#}(V) \in \tau_M$ pues p es SCS. Como $\mathcal{B}$ es base para M existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $m \in B \subset p^{\#}(V)$. Esto implica que $C \subset p(B) \subset p(p^{\#}(V)) \subset V$. Por lo tanto la familia $\mathcal{N}$ es una red numerable en X respecto a $\mathcal{C}$.

$3 \Rightarrow 4$) Sea M un espacio segundo numerable y sea $p : M \to X$ una función multi-valuada CV y SCS, entonces existe un espacio L, una función perfecta $h : L \to M$ y una función continua $g : L \to X$ tales que $p = g \circ h^{-1}$ (proposición 2.18)

Note que $h^{-1}(M) = \bigcup\{h^{-1}(m) : m \in M\} = L$ y que $g[L] = g[h^{-1}(M)] = p(M) = X$. Entonces g es suprayectiva.

$4 \Rightarrow 5$) Sea $p = g \circ h^{-1}$, entonces p es CV y SCS (proposiciones 2.11 y 2.12). Por la proposición 2.18 esto implica que existe un espacio compacto K, un subespacio cerrado $F \subset M \times K$ y una función continua $f : F \to X$ tales que $p = f \circ i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1}$, donde $i_F : F \to M \times K$ es la función inclusión y $\pi_M : M \times K \to M$ es la proyección sobre el primer factor.

Recuerde que $(i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1})(M) = F$, $h^{-1}(M) = L$ y $g(L) = X$, entonces $f[F] = p(M) = (g \circ h^{-1})(M) = X$.

$5 \Rightarrow 3)$ Sea $p = f \circ i_F \circ \pi_M^{-1}$, entonces $p : M \to \mathcal{P}(X)$ es una función multi-valuada CV y SCS (proposiciones 2.11 y 2.12). Además como f es suprayectiva tenemos que $p(M) = X$. □

La siguiente proposición resume propiedades importantes de los espacios Lindelöf Σ y es una primera muestra de la importancia del concepto de función multi-valuada.

PROPOSICIÓN 2.28.

1. *Si X es un espacio σ-compacto, entonces X es Lindelöf Σ.*
2. *Si X es un espacio compacto, entonces X es Lindelöf Σ.*
3. *Si X tiene una red numerable, entonces X es Lindelöf Σ.*
4. *Si X es un espacio segundo numerable, entonces X es Lindelöf Σ.*
5. *Si X es un espacio Lindelöf Σ, $p : X \to Y$ es una función multi-valuada CV y SCS y $p(X) = Y$, entonces Y es Lindelöf Σ.*
6. *Si X es un espacio Lindelöf Σ, entonces*
   a) Si $F \subset X$ es un subespacio cerrado, entonces F es Lindelöf Σ.
   b) Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f[X]$ es Lindelöf Σ.
   c) Si $f : Y \to X$ es una función perfecta, entonces $Y = f^{-1}(X)$ es Lindelöf Σ.
7. *Si X es un espacio Lindelöf Σ, K es un espacio compacto y $Y \subset X \times K$ es cerrado, entonces Y es Lindelöf Σ.*
8. *X es un espacio Lindelöf Σ si y sólo si existen un espacio topológico Y, un espacio M metrizable y separable, una función $h : Y \to X$ y una función $g : Y \to M$ tales que h es continua y suprayectiva y g es perfecta.*
9. *X es un espacio Lindelöf Σ si y sólo si existen un espacio M metrizable y separable, un espacio K compacto, un subconjunto $Y \subset M \times K$ cerrado y una función $f : Y \to X$ continua y suprayectiva.*

10. *Si* $\{X_\alpha : \alpha \in \omega\}$ *es una familia de espacios topológicos y para toda* $\alpha \in \omega$ *tenemos que* X_α *es Lindelöf* Σ*, entonces* $X = \prod_{\alpha\in\omega} X_\alpha$ *es Lindelöf* Σ*.*
11. *Si* $\{X_\alpha : \alpha \in \omega\}$ *es una familia de subespacios topológicos de un espacio* Y *y para toda* $\alpha \in \omega$ *tenemos que* X_α *es Lindelöf* Σ*, entonces* $X = \bigcup_{\alpha\in\omega} X_\alpha$ *es Lindelöf* Σ*.*
12. *Si* $\{X_\alpha : \alpha \in \omega\}$ *es una familia de subespacios topológicos de un espacio* Y *y para toda* $\alpha \in \omega$ *tenemos que* X_α *es Lindelöf* Σ*, entonces* $X = \bigcap_{\alpha\in\omega} X_\alpha$ *es Lindelöf* Σ
13. *La clase de los espacios Lindelöf* Σ *es la más pequeña de las clases de espacios topológicos que contienen a todos los espacios compactos y a todos los espacios metrizables separables, y que es cerrada bajo la formación de productos finitos, imágenes continuas y subespacios cerrados.*

Demostración.

1. Si $X = \bigcup_{i\in\omega} F_i$, donde cada espacio F_i es un subespacio compacto de X, entonces la familia $\mathcal{N} = \{F_i : i \in \omega\}$ es una red numerable en X respecto de la cubierta $\mathcal{C} = \mathcal{N}$.
2. Claramente 2 se sigue de 1.
3. Si $\mathcal{N}$ es una red numerable en un espacio topológico X, entonces la familia $\mathcal{N}$ es una red respecto a la cubierta compacta $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in X\}$.
4. El inciso 4 es consecuencia del inciso 3.
5. Fijemos una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{N}$ respecto a la cubierta $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{C}_Y = \{p(C) : C \in \mathcal{C}\}$ y sea $\mathcal{N}_Y = \{p(N) : N \in \mathcal{N}\}$. Entonces $|\mathcal{N}_Y| \leq \omega$ y $Y \subset \bigcup \mathcal{C}_Y$, además por la proposición 2.14 tenemos que la familia $\mathcal{C}_Y$ es una cubierta compacta. Veamos entonces que la familia $\mathcal{N}_Y$ es una red respecto a la cubierta $\mathcal{C}_Y$. Sea $K \in \mathcal{C}_Y$ y sea $U \in \tau_Y$ tales que $K \subset U$. Entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $K = p(C)$, lo cual implica que $C \subset p^{\#}(U) \in \tau_X$. Como $\mathcal{N}$ es una red respecto a $\mathcal{C}$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subset N \subset p^{\#}(U)$. Por lo tanto $K \subset p(N) \subset U$.

6. Si X es un espacio Lindelöf Σ y $F \subset X$ es un subespacio cerrado, entonces la función multivaluada $p : X \to F$ dada por

$$p(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in F \\ \emptyset & \text{si } x \notin F \end{cases}$$

es SCS y CV, además $p(X) = F$, por lo tanto F es Lindelöf Σ. Lo cual muestra 6.a.

Si X es un espacio Lindelöf Σ y $f : X \to f[X]$ es una función continua, entonces $p_f : X \to f[X]$ es SCS y CV (proposición 2.10), y por 5 tenemos que $f[X]$ es Lindelöf Σ. quedando probado 6.b.

Si $f : Y \to X$ es una función perfecta y X es un espacio Lindelöf Σ, entonces $f^{-1} : X \to Y$ es SCS y CV (proposición 2.12). Por lo tanto Y es Lindelöf Σ. Con esto demostramos 6.c.

7. Esta demostración es una simple aplicación del Teorema de Kuratowski (proposición 1.12) a la función proyección $\pi_X : X \times K \to X$. Por dicho teorema, la función $\pi_X : X \times K \to X$ es perfecta, entonces $\pi_X^{-1} X \to X \times K$ es una función multi-valuada CV y SCS. Como X es Lindelöf Σ, entonces $X \times K$ también lo es. Como $Y \subset X \times K$ es cerrado, entonces Y es Lindelöf Σ.
8. Veáse la proposición 2.27 inciso 4.
9. Veáse la proposición 2.27 inciso 5.
10. Si $X = \prod_{\alpha \in \omega} X_\alpha$ es un producto de espacios Lindelöf Σ, entonces para cada $\alpha \in \omega$ existe un espacio M_α segundo numerable y una función $p_\alpha : M_\alpha \to X_\alpha$ semicontinua superiormente y compacto-valuada tales que $p_\alpha(M_\alpha) = X_\alpha$. Entonces $\prod_{\alpha \in \omega} p_\alpha$ es una función CV y SCS. Note que $\prod_{\alpha \in \omega} M_\alpha$ es segundo numerable, por lo tanto X es un espacio Lindelöf Σ.
11. Sea $X = \bigcup_{\alpha \in \omega} X_\alpha$ una unión de subespacios Lindelöf Σ. Sea $Z = \prod\{X_\alpha : \alpha \in \omega\} \times \omega$, entonces Z es un espacio Lindelöf Σ. Considere a la función $f : Z \to X$ definida por $f(x, k) = \pi_k(x)$ para toda $x \in \prod_{\alpha \in \omega} X_\alpha$ y toda $k \in \omega$, donde $\pi_k : \prod_{\alpha \in \omega} X_\alpha \to X$ es

la proyección sobre el k-ésimo factor. La función f es contínua y suprayectiva, por lo tanto X es Lindelöf Σ.

12. Supongamos que $X = \bigcap_{\alpha\in\omega} X_\alpha$ es una intersección de subespacios Lindelöf Σ de un espacio topológico Z. Considere al espacio Z^ω y a la función $f : X \to Z^\omega$ definida como sigue: Para cada $x \in X$ y para cada $\alpha \in \omega$ sea $\pi_\alpha(f(x)) = x$. Entonces f es una inmersión y $f[X] = \Delta \cap \prod_{\alpha\in\omega} X_\alpha$, donde $\Delta = \{x \in Z^\omega : \forall\alpha, \beta \in \omega\,(\pi_\alpha(x) = \pi_\beta(x))\}$. Como Δ es un espacio cerrado en Z^ω, entonces X es Lindelöf Σ.
13. Supongamos que S es una clase que contiene a todos los espacios compactos, a todos los espacios segundo numerables y es además cerrada bajo la formación de imágenes continuas, subespacios cerrados y productos finitos. Sea X un espacio Lindelöf Σ, entonces existe un espacio M segundo numerable y un espacio K compacto tales que X es una imagen continua de un subconjunto cerrado F del producto $M \times K$. Como M y K son elementos de S, entonces $M \times K \in S$ y $F \in S$. Como S es cerrada bajo formación de imágenes continuas, entonces $X \in S$. Esto muestra que todo espacio Lindelöf Σ pertenece a la clase S, por lo tanto la clase de los espacios Lindelöf Σ es la más pequeña de las clases que contienen a todos los espacios compactos y a todos los espacios metrizables separables y que es cerrada bajo la formación de productos finitos, imágenes continuas y subespacios cerrados. $\square$

CAPíTULO 3

Subclases especiales de la clase LΣ

En este capítulo se introducen algunas subclases importantes de la clase de los espacios Lindelöf Σ. Como hemos observado en el capítulo anterior, un espacio X que es Lindelöf Σ puede ser caracterizado como la imagen compacto-valuada de una función semicontinua superiormente $p : M \to X$, donde M es un espacio segundo numerable.

La idea de este capítulo es estudiar las propiedades más elementales de los espacios pertenecientes a las clases $L\Sigma(\mathcal{K})$ y $KL\Sigma(\mathcal{K})$. Dichas clases son generadas imponiendo condiciones adicionales al espacio M y a los conjuntos $p(m)$, para toda $m \in M$ (ver definición 3.1).

1. Las clases $L\Sigma(\mathcal{K})$ y $KL\Sigma(\mathcal{K})$

De ahora en adelante a la clase de todos los espacios topológicos que son compactos la denotaremos por $\mathcal{CM}$ y $\mathcal{K}$ será siempre una subclase de $\mathcal{CM}$. Asimismo, la clase de todos los espacios Lindelöf Σ será denotada por LΣ.

Definición 3.1. Sea X un espacio topológico.

1. Diremos que X pertenece a la clase $L\Sigma(\mathcal{K})$ si existe un espacio M segundo numerable y una función multi-valuada $p : M \to X$ semicontinua superiormente, compacto-valuada y suprayectiva tal que para toda $m \in M$ se tiene que $p(m) \in \mathcal{K}$.
2. El espacio X pertenece a la clase $KL\Sigma(\mathcal{K})$ si existe un espacio M compacto segundo numerable y una función multi-valuada $p : M \to X$ semicontinua superiormente, compacto-valuada y suprayectiva tal que para toda $m \in M$ se tiene que $p(m) \in \mathcal{K}$.

Como es usual, si X pertenece a la clase $L\Sigma(\mathcal{K})$ escribiremos $X \in L\Sigma(\mathcal{K})$, de manera semejante, si X es un elemento de la clase $KL\Sigma(\mathcal{K})$ escribiremos $X \in KL\Sigma(\mathcal{K})$.

Claramente para cada familia $\mathcal{K}$ de espacios compactos siempre sucede que $KL\Sigma(\mathcal{K}) \subset L\Sigma(\mathcal{K})$.

Obsérvese también que si X es un elemento de la clase $KL\Sigma(\mathcal{K})$, entonces X es compacto ya que es la imagen de un espacio topológico compacto bajo una función multi-valuada CV y SCS (véase la proposición 2.14).

Como bien sabemos, un espacio X es Lindelöf Σ si tiene una cubierta compacta y una red numerable respecto a dicha cubierta. Cuando X pertenece a la clase $L\Sigma(\mathcal{K})$, la cubierta compacta de X debe ser una subcolección de $\mathcal{K}$. A continuación probaremos esta afirmación.

Proposición 3.2. *Sea X un espacio topológico, entonces $X \in L\Sigma(\mathcal{K})$ si y sólo si existen una cubierta $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$ de X y una red numerable $\mathcal{N}$ de X respecto a la cubierta $\mathcal{C}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $X \in L\Sigma(\mathcal{K})$, entonces existe un espacio M segundo numerable y una función multi-valuada $p : M \to X$ semicontinua superiormente y compacto-valuada tal que $p(M) = X$ y para toda $m \in M$ sucede que $p(m) \in \mathcal{K}$.

Sea $\mathcal{C} = \{p(m) : m \in M\}$, entonces $\mathcal{C}$ es una cubierta compacta de X ya que $\bigcup \mathcal{C} = \displaystyle\bigcup_{m \in M} p(m) = p(M) = X$, y claramente $\mathcal{C}$ está contenida en $\mathcal{K}$. .

Sea $\mathcal{B} \subset \tau_M$ una base numerable para M y sea $\mathcal{N} = \{p(B) : B \in \mathcal{B}\}$, entonces $|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{B}| \leq \omega$. Veamos ahora que $\mathcal{N}$ es una red en X respecto a $\mathcal{C}$.

Sea $C \in \mathcal{C}$ y sea $U \in \tau_X$ tal que $C \subset U$. Entonces existe $m \in M$ tal que $p(m) = C$, es decir, $m \in p^{\#}(U)$ y como p es una función SCS tenemos que $p^{\#}(U)$ es un abierto en M. Por ser $\mathcal{B}$ una base para M existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $m \in B \subset p^{\#}(U)$, entonces $p(m) \subset p(B) \subset p(p^{\#}(U)) \subset U$. Así tenemos que $C \subset p(B) \subset U$, lo cual muestra que $\mathcal{N}$ es una red en X respecto a la cubierta $\mathcal{C}$.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$ una cubierta compacta de X y sea $\mathcal{N}$ una red numerable en X respecto a $\mathcal{C}$. Dotemos a $\mathcal{N}$ con la topología discreta, entonces el conjunto definido de la siguiente manera:

$$M = \{m \in \mathcal{N}^\omega : \exists C \in \mathcal{C}\, (m[\omega] = \{N \in \mathcal{N} : C \subset N\})\}$$

es un espacio no vacío, metrizable y separable, al dotarlo de la topología de subespacio de $\mathcal{N}^\omega$ (ver prueba de la proposición 2.27).

Sea $p : M \to X$ la función multi-valuada definida por $p(m) = \bigcap m[\omega]$ para cada $m \in M$. Entonces

1. Si $m \in M$ existe $C_m \in \mathcal{C}$ tal que $m[\omega] = \{N \in \mathcal{N} : C_m \subset N\}$. Veamos que $p(m) = C_m$.
   Es claro que $C_m \subset \bigcap\{N \in \mathcal{N} : C_m \subset N\}$. Mostremos ahora que $X \setminus C_m \subset X \setminus \bigcap\{N \in \mathcal{N} : C_m \subset N\}$ (figura 1). Sea $x \notin C_m$, como $C_m \subset X$ es un subespacio compacto y X es un espacio Hausdorff, entonces C_m es cerrado. Además X es completamente regular, por lo que existe un abierto A de X que contiene a C_m pero no a x y como $\mathcal{N}$ es una red en X respecto a $\mathcal{C}$ tenemos que existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C_m \subset N \subset A$. Esto implica que existe $i \in \omega$ tal que $C_m \subset m(i) = N$ y $x \notin N$, por lo tanto $x \notin p(m)$.
   Esto muestra que p es una función compacto-valuada tal que $p(m) \in \mathcal{K}$ para toda $m \in M$.

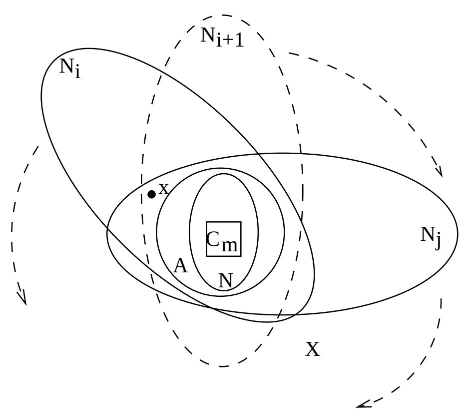

FIGURA 1. $p(m) \subset C_m$

2. Si $x \in X$, entonces existe $C_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_x$. Sea $A = \{N \in \mathcal{N} : C_x \subset N\}$. El conjunto A es distinto del vacío porque $\mathcal{N}$ es una red en X respecto a $\mathcal{C}$, $X \in \tau_X$ y $C_x \subset X$. Además $|A| \leq |\mathcal{N}| \leq \omega$ implica que existe

una función $m_A : \omega \to A$ suprayectiva y en consecuencia $i_A \circ m_A : \omega \to \mathcal{N}$ es un elemento de M, donde $i_A : A \to \mathcal{N}$ es la función inclusión. También tenemos que $p(i_A \circ m_A) = C_x$. Esto muestra que para cada $x \in X$ existe $m \in M$ tal que $x \in p(m)$, es decir $p(M) = X$.

3. Sea $V \in \tau_X$ y sea $m \in p^{\#}(V)$, entonces $p(m) \subset V$ y existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $p(m) \subset N \subset V$ ya que $\mathcal{N}$ es una red en X respecto a $\mathcal{C}$, esto implica que existe $i \in \omega$ tal que $m(i) = N$. Como $\mathcal{N}$ tiene la topología discreta, entonces $\{N\} \in \tau_{\mathcal{N}}$, por lo que $M \cap \pi_i^{-1}(\{N\})$ es un abierto de M tal que $m \in M \cap \pi_i^{-1}(\{N\}) \subset p^{\#}(V)$, donde $\pi_i : \mathcal{N}^\omega \to \mathcal{N}$ es la proyección sobre el i-ésimo factor, por lo tanto $p^{\#}(V)$ es un abierto en M, lo cual muestra que la función p es SCS. $\square$

Diremos que una subclase $\mathcal{K} \subset \mathcal{CM}$ es cerrada bajo la formación de subespacios cerrados e imágenes continuas si para cada $K \in \mathcal{K}$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si $F \subset K$ es cerrado, entonces $F \in \mathcal{K}$.
2. Si $f : K \to Y$ es una función continua, entonces $f[K] \in \mathcal{K}$.

Las proposiciones 3.3 y 3.4 que enseguida establecemos proporcionan caracterizaciones de los espacios en $L\Sigma(\mathcal{K})$ y $KL\Sigma(\mathcal{K})$, respectivamente, cuando $\mathcal{K}$ es una subclase de $\mathcal{CM}$ cerrada bajo subespacios cerrados e imágenes continuas.

Proposición 3.3. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{K} \subset \mathcal{CM}$ una subclase cerrada bajo subespacios cerrados e imágenes continuas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $X \in L\Sigma(\mathcal{K})$.
2. *Existen un espacio M segundo numerable, un espacio K compacto, un subespacio $F \subset M \times K$ cerrado y una función $g : F \to X$ continua tal que $g[F] = X$ y para toda $m \in M$ sucede que $F \cap \pi_M^{-1}(m) \in \mathcal{K}$, donde $\pi_M : M \times K \to M$ es la proyección sobre M.*
3. *Existen un espacio M segundo numerable, un espacio topológico L, una función $h : L \to M$ perfecta tal que para toda $m \in M$*

$$\begin{tikzcd}
M \times K \arrow[r, shift left, "\pi_M"] \arrow[d, shift left, "i_F^{-1}"] & M \arrow[l, shift left, "\pi_M^{-1}"] \arrow[d, "p"] \arrow[dl, shift left, "h^{-1}"] \\
L = F \arrow[u, shift left, "i_F"] \arrow[ur, shift left, "h"] \arrow[r, "g=f"] & X
\end{tikzcd}$$

sucede que $h^{-1}(m) \in \mathcal{K}$ y una función $f : L \to X$ continua tal que $f[L] = X$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Sea $X \in L\Sigma(\mathcal{K})$. Entonces existe un espacio M segundo numerable y una función multi-valuada $p : M \to X$ suprayectiva, SCS y CV tal que para toda $m \in M$ el conjunto $p(m)$ es un elemento de $\mathcal{K}$.

Entonces por la proposición 2.18 existe un espacio K compacto, un subespacio $F = grf(p) \subset M \times K$ cerrado y una función $g = \pi_K \restriction_F : F \to K$ continua tal que $p = g \circ i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1}$. Además $\left(i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1}\right)(M) = F$ implica que $g[F] = p(M) = X$.

Además si sucede que $m \in M$, entonces $F \cap \pi_M^{-1}(m) = \{m\} \times p(m)$ es un elemento de $\mathcal{K}$.

$2 \Rightarrow 3$) Sea $L = F$ y sea $f = g$. Considere a la función $h = \pi_M \restriction_L : L \to M$. Entonces h es perfecta (proposición 1.12) y $h^{-1}(m) = F \cap (\{m\} \times K) \in \mathcal{K}$.

$3 \Rightarrow 1$) Sea $p = f \circ h^{-1}$, entonces p es SCS y CV (proposiciones 2.11 y 2.12). Además para toda $m \in M$ tenemos que $p(m) = (f \circ h^{-1})(m) \in \mathcal{K}$, ya que $\mathcal{K}$ es cerrada bajo imágenes continuas. $\square$

La siguiente proposición caracteriza a los espacios topológicos que pertenecen a la clase $KL\Sigma(\mathcal{K})$ y su demostración es similar a la hecha en 3.3 ya que la condición de ser compacto segundo numerable no rompe el esquema de prueba utilizado anteriormente.

Proposición 3.4. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{K} \subset \mathcal{CM}$ una subclase cerrada bajo subespacios cerrados e imágenes continuas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $X \in KL\Sigma(\mathcal{K})$.

2. *Existen un espacio M compacto segundo numerable, un espacio K compacto, un subespacio $F \subset M \times K$ cerrado y una función $g : F \to X$ continua tal que $g[F] = X$ y para toda $m \in M$ sucede que $F \cap \pi_M^{-1}(m) \in \mathcal{K}$, donde $\pi_M : M \times K \to M$ es la proyección sobre M.*
3. *Existen un espacio M compacto segundo numerable, un espacio topológico L, una función $h : L \to M$ perfecta tal que para toda $m \in M$ sucede que $h^{-1}(m) \in \mathcal{K}$ y una función $f : L \to X$ continua tal que $f[L] = X$.*

M. Tkačenko en [**11**] y V. Tkachuk en [**12**] introdujeron con diferente terminología a los espacios débilmente $\mathcal{K}$-fibrados. A continuación veremos que los espacios compactos que pertenecen a la clase $KL\Sigma(\mathcal{K})$ son de este tipo de espacios topológicos.

Definición 3.5. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{K} \subset \mathcal{CM}$. Diremos que X es un espacio *débilmente $\mathcal{K}$-fibrado* si existe una cubierta $\mathcal{C}$ de X cerrada y numerable tal que para toda $x \in X$ el conjunto $\bigcap\{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$ es un elemento de la familia $\mathcal{K}$.

Cuando $\mathcal{K}$ sea la clase de todos los espacios metrizables compactos, al espacio X lo llamaremos *débilmente metrizable fibrado*.

Proposición 3.6. *Sea $\mathcal{K} \subset \mathcal{CM}$ cerrada bajo subespacios cerrados y sea X un espacio topológico compacto. Entonces $X \in L\Sigma(\mathcal{K})$ si y sólo si X es un espacio débilmente $\mathcal{K}$-fibrado.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea X un espacio en $L\Sigma(\mathcal{K})$. Entonces existe una cubierta $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$ de X y una red numerable $\mathcal{N}$ en X respecto a la cubierta $\mathcal{C}$.

Si $x \in X$, entonces existe $C_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_x$ y existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in C_x \subset N \subset X$. Por lo tanto $\mathcal{N}$ es una cubierta de X. Además como para toda $N \in \mathcal{N}$ se tiene que $N \subset \overline{N}$, entonces $\mathcal{R} = \left\{\overline{N} : N \in \mathcal{N}\right\}$ es una cubierta cerrada de X, que además es numerable.

Para cada $x \in X$ sea $I_x = \bigcap \left\{\overline{N} \in \mathcal{R} : x \in \overline{N}\right\}$. Veamos que para toda $x \in X$ el conjunto I_x es un elemento de la clase $\mathcal{K}$. Bastará probar que $I_x \subset C_x$, debido a que $\mathcal{K}$ es cerrada bajo subespacios cerrados.

Sea $y \notin C_x$, entonces existe un abierto A de X tal que $C_x \subset A$ y $y \notin A$ ya que $C_x \subset X$ es cerrado en un espacio

Tychonoff. Como $\mathcal{N}$ es una red en X respecto a $\mathcal{C}$ y X es un espacio regular, existe $N_0 \in \mathcal{N}$ y un abierto B de X tales que $C_x \subset N_0 \subset B \subset \overline{B} \subset A$, entonces $x \in C_x \subset \overline{N_0} \subset A$ y como $y \notin A$ en particular tenemos que $y \notin \overline{N_0}$, es decir $y \notin I_x$ lo cual muestra que $X \setminus C_x \subset X \setminus I_x$.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{C}$ una cubierta cerrada numerable tal que para toda $x \in X$ el conjunto $\bigcap\{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$ es un elemento de $\mathcal{K}$. Para cada $x \in X$ sea $D_x = \bigcap\{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$. Definamos $\mathcal{D} = \{D_x : x \in X\}$ y sea $\mathcal{N} = \{\bigcap B : B \in \mathcal{P}(\mathcal{C}) \wedge 0 < |B| < \omega\}$. Es claro que $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}$ es una cubierta compacta de X. Veamos que $\mathcal{N}$ es una red numerable respecto a $\mathcal{D}$. Sea $D_x \in \mathcal{D}$ y sea $U \in \tau_X$ tales que $D_x \subset U$, entonces por la proposición 1.16 existe $E \in \mathcal{N}$ tal que $x \in E$ y $D_x \subset E \subset U$. Por lo tanto $\mathcal{N}$ es una red numerable respecto a la cubierta $\mathcal{C}$. □

Corolario 3.7. *Sea $\mathcal{K} \subset \mathcal{CM}$ cerrada bajo subespacios cerrados y sea X un espacio numerablemente compacto y débilmente $\mathcal{K}$-fibrado, entonces X es un elemento de $L\Sigma(\mathcal{K})$.*

Demostración. Como X es un espacio débilmente $\mathcal{K}$-fibrado existe una cubierta cerrada numerable $\mathcal{C}$ de X tal que para cada $x \in X$ sucede que $\bigcap\{C \in \mathcal{C} : x \in C\} \in \mathcal{K}$.

Bastará con mostrar que X es un espacio Lindelöf. Sea $\mathcal{U} \subset \tau_X$ una cubierta de X y sea $\mathcal{U}^f = \{\bigcup A : A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \wedge |A| < \omega\}$.

Para cada $C \in \mathcal{C}$ sea $\mathcal{U}^C = \{A \in \mathcal{U}^f : C \subset A\}$. Definamos $\mathcal{V} = \{\mathcal{U}^C : C \in \mathcal{C}\}$. Consideremos una función de elección $f : \mathcal{C} \to \bigcup \mathcal{V}$, entonces $f[\mathcal{C}]$ es una subcubierta abierta numerable de $\mathcal{U}$, ya que $|\mathcal{C}| \leq \omega$. □

2. Las clases $L\Sigma(\leq \kappa)$, $L\Sigma(< \kappa)$ y $L\Sigma(\kappa)$

Si $\mathcal{K}$ denota a la clase de espacios compactos con peso menor o igual que κ, donde κ es un cardinal infinito, entonces $\mathcal{K}$ es una clase cerrada bajo subespacios cerrados e imágenes continuas. De esta manera, los espacios que pertenecen a las clases $L\Sigma(\mathcal{K})$ tienen las propiedades enunciadas en 3.3. En esta sección analizaremos con mayor detenimiento las propiedades de esta clase de espacios topológicos para distintos cardinales κ.

Definición 3.8. Sea κ un número cardinal (finito o infinito). Denotemos con $L\Sigma(\leq \kappa)$ a la clase $L\Sigma(\mathcal{K})$, donde $\mathcal{K}$ es la clase de todos los espacios compactos con peso menor o igual que κ. Asimismo, $L\Sigma(<\kappa)$ denota a la clase $L\Sigma(\mathcal{K})$, donde $\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{CM} : w(K) < \kappa\}$.

Finalmente, definamos $L\Sigma(\kappa) = L\Sigma(\leq \kappa) \setminus L\Sigma(<\kappa)$.

Observaciones 3.9. Utilizando la proposición 3.3 podemos concluir lo siguiente:

1. $X \in L\Sigma(\leq \kappa)$ si y sólo si existe un espacio segundo numerable M y una función multi-valuada semicontinua superiormente, compacto-valuada y suprayectiva $p : M \to X$ tal que para toda $m \in M$ sucede que $w(p(m)) \leq \kappa$.
2. $X \in L\Sigma(<\kappa)$ si y sólo si existe un espacio segundo numerable M y una función multi-valuada semicontinua superiormente, compacto-valuada y suprayectiva $p : M \to X$ tal que para toda $m \in M$ se tiene que $w(p(m)) < \kappa$.

De manera similar a lo hecho en la definición 3.8 podemos definir a las clases $KL\Sigma(\leq \kappa)$, $KL\Sigma(<\kappa)$ y $KL\Sigma(\kappa)$ como las clases $KL\Sigma(\mathcal{K})$, donde $\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{CM} : w(K) \leq \kappa\}$, $\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{CM} : w(K) < \kappa\}$ y $KL\Sigma(\kappa) = KL\Sigma(\leq \kappa) \setminus KL\Sigma(<\kappa)$, respectivamente.

Observe también que si κ es finito, las condiciones $w(K) \leq \kappa$, $w(K) < \kappa$ y $w(K) = \kappa$ son en realidad las condiciones $|K| \leq \kappa$, $|K| < \kappa$ y $|K| = \kappa$, respectivamente.

Note por ejemplo que si X pertenece a la clase $L\Sigma(\leq 1)$, entonces X tiene una cubierta compacta $\mathcal{C}$ que admite una red numerable, donde cada elemento C de $\mathcal{C}$ tiene cardinalidad menor o igual que 1, lo cual implica que $L\Sigma(\leq 1) \subset \{X : nw(X) \leq \omega\}$. Además, si X tiene peso de red menor o igual a ω y $\mathcal{N}$ es una red numerable en X, entonces $\mathcal{N}$ es una red con respecto a la cubierta $\{\{x\} : x \in X\}$. Lo cual muestra que $L\Sigma(\leq 1) = \{X : nw(X) \leq \omega\}$.

También note que los elementos de $KL\Sigma(\leq 1)$ son compactos y tienen peso de red numerable (ya que $KL\Sigma(\leq 1) \subset L\Sigma(\leq 1)$). Así, tienen peso numerable y por ser compactos segundo numerables son metrizables, por lo que $KL\Sigma(\leq 1) \subset \{X : X \text{ es compacto metrizable }\}$. Además si un espacio métrizable X es compacto, entonces X es segundo numerable, por lo que la función $i^{-1} : X \to X$ es SCS y CV, donde $i : X \to X$ es la función identidad. Lo cual muestra que $KL\Sigma(\leq 1) = \{X : X \text{ es compacto metrizable }\}$.

La siguiente proposición establece algunas propiedades elementales de las clases que hemos introducido.

PROPOSICIÓN 3.10. *Sea κ un número cardinal. Entonces*

1. *Las clases $L\Sigma(\leq \kappa)$, $L\Sigma(< \kappa)$, $KL\Sigma(\leq \kappa)$ y $KL\Sigma(< \kappa)$ son cerradas bajo formación de subespacios cerrados e imágenes continuas.*
2. *Las clases $L\Sigma(\leq \kappa)$ y $L\Sigma(< \kappa)$ son cerradas bajo formación de uniones numerables y las clases $KL\Sigma(\leq \kappa)$ y $KL\Sigma(< \kappa)$ son cerradas bajo formación de uniones finitas.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $X \in L\Sigma(\leq \kappa)$ y sea $F \subset X$ un subespacio cerrado. Entonces existe un espacio M segundo numerable, una función multi-valuada $p : M \to X$ suprayectiva, SCS y CV tal que para toda $m \in M$ tenemos que $w\,(p(m)) \leq \kappa$.

Considere la función inclusión $i_F : F \to X$, entonces $i_F^{-1} : X \to F$ es una función multi-valuada SCS y CV tal que $(i_F^{-1} \circ p)(M) = F$.

Si $m \in M$, entonces $(i_F^{-1} \circ p)(m) = F \cap p(m)$ y como la funcional cardinal w es monótona tenemos que $w\left((i_F^{-1} \circ p)(m)\right) \leq \kappa$. Por lo tanto F es un elemento de $L\Sigma(\leq \kappa)$.

Por otro lado, si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces la función multi-valuada $f \circ p : M \to Y$ es SCS, CV y suprayectiva, además la función $f \restriction_{p(m)}: p(m) \to Y$ es continua, por lo tanto $w\,(f\,[p(m)]) = nw\,(f[p(m)]) \leq nw\,(p(m)) = w\,(p(m)) \leq \kappa$.

Un argumento similar se puede usar para los casos en que $X \in L\Sigma(< \kappa)$, $X \in KL\Sigma(\leq \kappa)$ y $X \in KL\Sigma(< \kappa)$.

2. Sea $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, donde $X_\alpha \in L\Sigma(\leq \kappa)$ para cada $\alpha \in A$. Entonces para cada $\alpha \in A$ existe un espacio segundo numerable M_α, un espacio topológico L_α, una función perfecta $g_\alpha : L_\alpha \to M_\alpha$ tal que para toda $m \in M_\alpha$ el espacio $g_\alpha^{-1}(m)$ es compacto con peso menor o igual a κ y una función continua $f_\alpha : L_\alpha \to X_\alpha$ tal que $f_\alpha[L_\alpha] = X_\alpha$.

   Sea $M = \bigoplus\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ y sea $L = \bigoplus\{L_\alpha : \alpha \in A\}$. Definamos $g : L \to M$ y $f : L \to \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ dos funciones definidas de la siguiente manera:

Si $\alpha \in A$ y $l \in L_\alpha$, entonces $g \restriction_{L_\alpha \times \{\alpha\}} (l) = (g_\alpha(l), \alpha)$ y $f \restriction_{L_\alpha \times \{\alpha\}} (l) = f_\alpha(l)$.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha \arrow[rr, "p"] & & \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \\
\bigoplus\limits_{\alpha\in A} L_\alpha \arrow[u, "g=\bigcup\limits_{\alpha\in A} g_\alpha"] \arrow[urr, "f=\bigcup\limits_{\alpha\in A} f_\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

Observe lo siguiente:

a) Si $m \in M$, entonces existe una única $\gamma \in A$ tal que $m \in M_\gamma \times \{\gamma\}$, por lo que existe $l \in L_\gamma$ tal que $m = (g_\gamma(l), \gamma) = g((l, \gamma))$. Además note que $g^{-1}(m) = g_\gamma^{-1}(\pi_{M_\gamma}(m))$, donde $\pi_{M_\gamma} : M_\gamma \times \{\gamma\} \to M_\gamma$ es la proyección sobre el primer factor. Como π_{M_γ} es un homeomorfismo, entonces $w\left(g^{-1}(m)\right) \leq \kappa$

b) Si $F \subset L$ es un subespacio cerrado, entonces $F = \bigoplus\{F_\beta : \beta \in A\}$, donde F_β es un subconjunto cerrado de L_β para cada $\beta \in A$ y la imagen de F bajo g es $\bigcup\{(g_\beta(F_\beta) \times \{\beta\}) : \beta \in A\}$, la cual es cerrada en M.

c) Si $U \subset M$ es un subespacio abierto, entonces $U = \bigoplus\{U_\beta : \beta \in A\}$, donde U_β es un subconjunto abierto de M_β para toda $\beta \in A$ y $g^{-1}(U) = \bigcup\{g_\beta^{-1}(U_\beta) : \beta \in A\}$ es abierto en L.

d) Si $x \in X$, entonces existe $\gamma \in A$ tal que $x \in X_\gamma$ lo cual implica que existe $l \in L_\gamma$ tal que $x = f_\gamma(l) = f(l)$.

e) Si $U \subset X$ es un subespacio abierto, entonces $f^{-1}(U) = \bigcup\{f_\alpha^{-1}(U \cap X_\alpha) : \alpha \in A\}$, el cual es abierto en L.

Entonces g es una función perfecta y f es una función continua y suprayectiva, por lo que $p = (f \circ g^{-1})$ es CV y SCS. Además note que M es un espacio segundo numerable si y sólo si $|A| \leq \omega$. Un argumento similar se puede usar para el caso en que $X \in L\Sigma(< \kappa)$.

Si X es un elemento de la clase $KL\Sigma(\leq \kappa)$ o de la clase $KL\Sigma(< \kappa)$, entonces M es un espacio compacto si y sólo si $|A| <$

ω (proposición 1.15), lo cual muestra que las clases $KL\Sigma(\leq \kappa)$ y $KL\Sigma(< \kappa)$ son cerradas bajo uniones finitas. $\square$

COROLARIO 3.11. *Si* $X_\alpha \in L\Sigma(\leq \kappa_\alpha)$, *para cada* $\alpha \in A$, *entonces* $\bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\} \in L\Sigma(\leq \kappa)$, *donde* $\kappa = \sup\{\kappa_\alpha : \alpha \in A\}$.

PROPOSICIÓN 3.12. *Sean* κ *y* λ *dos números cardinales, sean* X *y* Y *dos espacios topológicos y sean* $\{\kappa_\alpha : \alpha \in \omega\}$ *una familia de números cardinales y* $\mathcal{T} = \{X_\alpha : \alpha \in \omega\}$ *una familia de espacios topológicos. Entonces*

1. *Si* $X \in L\Sigma(\leq \kappa)$ *y* $Y \in L\Sigma(\leq \lambda)$, *se tiene que* $X \times Y \in L\Sigma(\leq \kappa \cdot \lambda)$.
2. *Si* $X_\alpha \in L\Sigma(\leq \kappa_\alpha)$ *para cada* $\alpha \in \omega$, *se tiene que* $\prod \mathcal{T} \in L\Sigma(\leq \kappa)$, *donde* $\kappa = \omega \cdot \sup\{\kappa_\alpha : \alpha \in \omega\}$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Como $X \in L\Sigma(\leq \kappa)$ y $Y \in L\Sigma(\leq \lambda)$, existen dos espacios M y N segundo numerables y dos funciones multi-valuadas $p : M \to X$ y $q : N \to Y$ suprayectivas, SCS y CV tales que $w(p(m)) \leq \kappa$ para toda $m \in M$ y $w(q(n)) \leq \lambda$ para toda $n \in N$.

   Considere la funcion multi-valuada $p \times q : M \times N \to X \times Y$ definida por $(p \times q)(m, n) = p(m) \times q(n)$, entonces por la proposición 2.16 tenemos que $p \times q$ es una función SCS, CV y suprayectiva. Note que para toda $(m, n) \in M \times N$ se tiene que $w\left(p(m) \times q(n)\right) \leq \kappa \cdot \lambda$ (proposición 1.23).
2. Para cada $\alpha \in \omega$ sea $p_\alpha : M_\alpha \to X_\alpha$ una función multi-valuada SCS, CV y suprayectiva definida en un espacio segundo numerable tal que si $\alpha \in \omega$ y $m \in M_\alpha$ entonces $w(p_\alpha(m)) \leq \kappa_\alpha$.

   Sea $M = \prod\{M_\alpha : \alpha \in \omega\}$ y sea $P = \{p_\alpha : \alpha \in \omega\}$, entonces la función multi-valuada $\prod P : M \to \prod\{X_\alpha : \alpha \in \omega\}$ es SCS, CV y suprayectiva. Note también que el espacio M es segundo numerable y que $w\left(\prod P(m)\right) \leq \omega \cdot \sup\{\kappa_\alpha : \alpha \in \omega\}$ para toda $m \in M$. $\square$

Una propiedad útil de los es espacios pertenecientes a la clase $L\Sigma(\leq \kappa)$ es que si $X \in L\Sigma(\leq \kappa)$, entonces su cardinalidad se encuentra acotada por el número $2^{\omega+\kappa}$. Para demostrar este hecho será necesario probar primero que si C es una cubierta compacta de un espacio topológico X y $\mathcal{N}$ es una red numerable en X respecto a $\mathcal{C}$, entonces $|\mathcal{C}| \leq 2^\omega$.

En efecto, sea $f : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{N})$ definida por $f(C) = \{N \in \mathcal{N} : C \subset N\}$ para cada $C \in \mathcal{C}$. Sean $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tales que $C_1 \neq C_2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $C_1 \setminus C_2 \neq \emptyset$, entonces existe $x \in C_1 \setminus C_2$. De esta forma, tenemos que $C_2 \subset X \setminus \{x\} \in \tau_X$. Al ser $\mathcal{N}$ una red en X respecto a $\mathcal{C}$ existe $N_0 \in \mathcal{N}$ tal que $C_2 \subset N_0 \subset X \setminus \{x\}$. Entonces $N_0 \in \{N \in \mathcal{N} : C_2 \subset N\} = f(C_2)$ y como $x \in C_1$ y $x \notin C_2$ tenemos que $N_0 \notin \{N \in \mathcal{N} : C_1 \subset N\} = f(C_1)$. Esto muestra que f es inyectiva, por lo tanto $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{N})|$.

El siguiente resultado nos ayudará a demostrar que si κ es un número cardinal que no excede a 2^ω, entonces la compactación de Alexandroff $A(X)$ del espacio X siempre será un elemento de $L\Sigma(\leq 2)$ (proposición 3.21).

Proposición 3.13. *Si* $X \in L\Sigma(\leq \kappa)$ *entonces* $|X| \leq 2^{\omega+\kappa}$

Demostración. Sea $X \in L\Sigma(\mathcal{K})$, donde $\mathcal{K} = \{Y \in \mathcal{CM} : w(Y) \leq \kappa\}$. Por la proposición 3.2 existe una cubierta compacta $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$ de X y una red numerable $\mathcal{N}$ en X respecto a $\mathcal{C}$. Entonces $|X| \leq |\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\}| \leq |\mathcal{C}| \cdot \sup\{|C| : C \in \mathcal{C}\} \leq 2^\omega \cdot 2^\kappa$. □

3. Las clases $L\Sigma(\leq \omega)$ y $KL\Sigma(\leq \omega)$

Recordemos que un espacio topológico X es débilmente metrizable fibrado si existe una cubierta cerrada y numerable $\mathcal{C}$ de X tal que $\bigcap\{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$ es compacto metrizable, para toda $x \in X$ (véase la definición 3.5).

Es fácil probar que todo espacio X en $L\Sigma(\leq \omega)$ es un espacio débilmente metrizable fibrado. En efecto, sea $\mathcal{C}$ una cubierta compacta de X tal que para cada $C \in \mathcal{C}$ el peso de C es menor o igual que ω y sea $\mathcal{N}$ una red numerable en X respecto a la cubierta $\mathcal{C}$, entonces $\overline{\mathcal{N}} = \{\overline{N} : N \in \mathcal{N}\}$ es una cubierta cerrada numerable de X. Además, para cada $x \in X$, el conjunto $I_x = \bigcap\{\overline{N} : x \in \overline{N}\}$ es compacto y $w(I_x) \leq \omega$ ya que la clase de espacios compactos metrizables es cerrada bajo subespacios cerrados. Esta demostración es una copia de la hecha en la proposición 3.6 notando que la clase $\mathcal{K}$ es la clase de todos los espacios compactos con peso menor o igual que ω.

La siguiente proposición establece que para los espacios compactos es equivalente el ser un espacio débilmente metrizable fibrado y el ser un elemento de la clase $L\Sigma(\leq \omega)$.

PROPOSICIÓN 3.14. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces $X \in L\Sigma(\leq \omega)$ si y sólo si X es débilmente metrizable fibrado.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Como ya se vió en la demostración de 3.6 tenemos que si $X \in L\Sigma(\leq \omega)$, entonces X es débilmente $\mathcal{K}$-fibrado, donde $\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{CM} : w(X) \leq \omega\}$. Es bien sabido que todo espacio compacto segundo numerable es metrizable y por lo tanto $\mathcal{K} \subset \{X : X \text{ es metrizable }\}$.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{K}$ la clase de todos los espacios metrizables compactos y sea X un espacio débilmente metrizable fibrado. Entonces por la proposición 3.6 tenemos que $X \in L\Sigma(\mathcal{K})$, es decir, existe un espacio segundo numerable M y una función multi-valuada $p : M \to X$ SCS, CV y suprayectiva tal que $p(m) \in \mathcal{K}$ para toda $m \in M$. Entonces si $m \in M$, el espacio $p(m)$ es compacto y metrizable, por lo tanto segundo numerable. De aquí que para toda $m \in M$ tenemos que $w(p(m)) \leq \omega$. $\square$

El siguiente resultado de J. Gerlitz y Z. Szentmiklóssy publicado en [**5**] muestra propiedades relevantes de los espacios compactos débilmente metrizables fibrados.

Recordemos que un espacio topológico X es secuencial si para cualquier $A \subset X$ se cumple que A es cerrado si y sólo si junto con cualquier sucesión de puntos de A contiene a todos sus puntos límite.

PROPOSICIÓN 3.15 ([**5**]). *Si X es un espacio compacto débilmente metrizable fibrado, entonces X es secuencial y en consecuencia $t(X) \leq \omega$.*

La siguiente definición de espacios *metrizablemente fibrados* publicada por V. Tkachuk en [**12**] junto con la proposición 3.4 nos permite establecer que todo espacio compacto metrizablemente fibrado es un elemento de la clase $KL\Sigma(\leq \omega)$.

DEFINICIÓN 3.16. Sea X un espacio topológico, entonces X es un espacio *metrizablemente fibrado* si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Existe un espacio M metrizable.
2. Existe una función $f : X \to M$ continua, suprayectiva y con fibras metrizables.

PROPOSICIÓN 3.17. *Sea X un espacio compacto y metrizablemente fibrado, entonces $X \in KL\Sigma(\leq \omega)$.*

Demostración. Sea X un espacio compacto metrizablemente fibrado, entonces existe un espacio M metrizable y existe una función $f : X \to M$ continua, suprayectiva y con fibras metrizables.

Veamos que la función f es perfecta. Sea $F \subset X$ un subespacio cerrado, entonces $f[F] \subset M = f[X]$ es un subespacio compacto en un espacio Hausdorff, por lo tanto $f[F]$ es cerrado. Note que las fibras de f son cerradas en X, por lo tanto, f es una función perfecta.

Como el espacio metrizable M es imagen continua de un compacto y $f^{-1} : M \to X$ es una función compacto-valuada y SCS tal que $w\left(f^{-1}(m)\right) \leq \omega$, entonces $X \in KL\Sigma(\leq \omega)$ $\square$

Sabemos por la proposición 3.17 que la clase de los espacios compactos metrizablemente fibrados está contenida en $KL\Sigma(\leq \omega)$ y una pregunta natural es si ambas clases coinciden. La respuesta a esta pregunta es negativa. En páginas posteriores probaremos que el espacio $A(\omega_1)$ es un elemento de $KL\Sigma(\leq \omega)$ que no es metrizablemente fibrado (proposición 3.20).

Note también que por la proposición 3.4 todo espacio en $KL\Sigma(\leq \omega)$ es imagen continua de un espacio compacto metrizablemente fibrado. Otro hecho relevante de los elementos de la clase $KL\Sigma(\leq \omega)$ es que son espacios de Fréchet; para verificar esto sera necesario un resultado de V. Tkachuk [**12**] que postula que todo espacio metrizablemente fibrado es primero numerable.

Proposición 3.18 ([**12**]). *Sea X un espacio compacto metrizablemente fibrado, entonces X es primero numerable.*

Corolario 3.19. *Sea $X \in KL\Sigma(\leq \omega)$, entonces X es Fréchet.*

Demostración. Por la proposición 3.4, existe un espacio F compacto metrizablemente fibrado y una función continua suprayectiva $f : F \to X$. Como F y X son compactos, f es una función cerrada. Entonces f es una función hereditariamente cociente (ver proposición 1.7). Como la propiedad de Fréchet se preserva bajo funciones hereditariamente cocientes (véase proposición 1.8), el espacio X es de Fréchet (recuerde que K es primero numerable). $\square$

A continuación se describen las clases $L\Sigma(\leq \kappa)$ y $KL\Sigma(\leq \kappa)$ para cardinales κ mayores o iguales que 2^ω.

PROPOSICIÓN 3.20. *Sea κ un número cardinal mayor o igual que 2^ω. Entonces*

1. $L\Sigma(\leq \kappa) = \{X \in L\Sigma : nw(X) \leq \kappa\}$
2. $KL\Sigma(\leq \kappa) = \{X \in \mathcal{CM} : w(X) \leq \kappa\}$

DEMOSTRACIÓN. Sea κ un número cardinal tal que $2^\omega \leq \kappa$.

1. $\subset$) Sea $X \in L\Sigma(\leq \kappa)$, entonces existe un espacio M segundo numerable, y una función multi-valuada $p : M \to X$ suprayectiva, CV y SCS tal que para toda $m \in M$ se tiene que $w(p(m)) = nw(p(m)) \leq \kappa$. Entonces $nw(X) = nw\left(\bigcup_{m\in M} p(m)\right) \leq |M| \cdot \sup\{nw(p(m)) : m \in M\}$. Como $w(M) \leq \omega$, entonces $|M| \leq 2^\omega$ (proposición 1.26), lo cual implica que $nw(X) \leq 2^\omega \cdot \kappa = \kappa$.

   $\supset$) Sea X un espacio Lindelöf Σ tal que $nw(X) \leq \kappa$. Entonces existe un espacio M segundo numerable y una función multi-valuada $p : M \to X$ CV y SCS tal que $p(M) = X$. Sea $m \in M$, entonces $p(m) \subset X$ y $w(p(m)) = nw(p(m)) \leq \kappa$ ya que nw es monótona.
2. $\subset$) Sea $X \in KL\Sigma(\leq \kappa)$, entonces X es imagen de un espacio compacto segundo numerable bajo una función multi-valuada CV y SCS. Note que $w(X) \leq |M| \cdot \sup\{w(p(m)) : m \in M\} = 2^\omega \cdot \kappa = \kappa$, ya que X es compacto.

   $\supset$) Sea X un espacio compacto tal que $w(X) \leq \kappa$. Entonces X es Lindelöf Σ y los elementos de cualquier cubierta de X tienen peso menor o igual que κ, debido a que w es monótona. $\square$

4. Algunos ejemplos en las subclases $L\Sigma$

En esta sección se presentan ejemplos de espacios topológicos que pertenece a alguna de las siguientes clases: $KL\Sigma(2)$, $L\Sigma(\leq 2)$, $L\Sigma(\leq \omega)$, $KL\Sigma(\leq \omega)$ y $L\Sigma(< \omega)$.

A. El espacio Doble Flecha

Considere a los subconjuntos C_0 y C_1 de I^2 definidos de la siguiente forma: $C_0 = \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\}$ y $C_1 = \{(x, 1) : 0 \leq x < 1\}$. Sea $X = C_0 \cup C_1$.

Recordemos que el orden lexicográfico en I^2 está definido de la siguiente manera. Para cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puntos de I^2, decimos que $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ si $x_1 < x_2$ ó $x_1 = x_2$ y $y_1 < y_2$. Note que éste es un orden total debido a que el orden en I también es total.

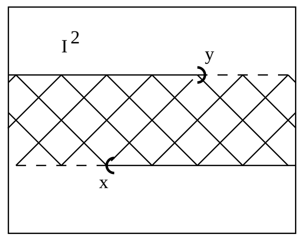

FIGURA 2. Abierto de I^2 con la topología del orden lexicográfico.

Dotemos de la topología de orden al conjunto $(I^2, <)$ (figura 2) y sea τ_X la topología de subespacio de X. Entonces una base para la topología de X está formada por las siguientes familia de conjuntos.

Para cualesquiera a y b en X, con $a < b$, sea $B_{(a,b)} = \{x \in X : a < x < b\}$. Obsérvese que dentro de la base $\mathcal{B} = \{B_{(a,b)} : a, b \in X\}$ se pueden distinguir cuatro tipos de conjuntos básicos según la posición de a y b en X. Si $a = (a_1, 1)$ y $b = (b_1, 1)$, entonces el correspondiente $B_{(a,b)} = \{(x, y) : a_1 < x < b_1\} \cup \{(b_1, 0)\} = (a_1, b_1] \times \{0\} \cup (a_1, b_1) \times \{1\}$; si $a = (a_1, 0)$ y $b = (b_1, 0)$, entonces $B_{(a,b)} = \{(x, y) : a_1 < x < b_1\} \cup \{(a_1, 1)\} = (a_1, b_1) \times \{0\} \cup [a_1, b_1) \times \{1\}$; si $a = (a_1, 1)$ y $b = (b_1, 0)$, entonces $B_{(a,b)} = \{(x, y) : a_1 < x < b_1\} = (a_1, b_1) \times \{0\} \cup (a_1, b_1) \times \{1\}$ y finalmente, si $a = (a_1, 0)$ y $b = (b_1, 1)$, entonces $B_{(a,b)} = \{(x, y) : a_1 < x < b_1\} \cup \{(x, y) : (x = a_1 \vee 0 < y) \wedge (x = b_1 \vee y < 1)\} = (a_1, b_1] \times \{0\} \cup [a_1, b_1) \times \{1\}$. Estos dos últimos tipos de conjuntos básicos son en realidad uniones de los dos primeros tipos de básicos.

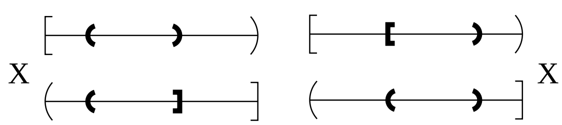

FIGURA 3. Abiertos en el Doble Flecha

Al espacio (X, τ_X) se le llama espacio Doble Flecha (figura 3).

Es fácil ver que el espacio X es un elemento de la clase $KL\Sigma(\leq 2)$. Mostremos primero que existe una función perfecta definida en X sobre un espacio compacto segundo numerable.

Tomemos al espacio compacto y segundo numerable $I = [0,1]$. Sea $\mathcal{B}_I = \{(p,q) \subset I : p,q \in \mathbb{Q}\} \cup \{[0,p) : p \in \mathbb{Q}\} \cup \{(q,1] : q \in \mathbb{Q}\}$. Es bien sabido que $\mathcal{B}_I$ es una base numerable para I. Sea $f : X \to I$ la función definida por $f((x,i)) = x$ para toda $(x,i) \in X$. Entonces

1. Si (a,b) es un abierto básico de I, el conjunto $B_{((a,1),(b,0))} = (a,b)\times\{0\}\cup(a,b)\times\{1\}$ es un abierto en X tal que $B_{((a,1),(b,0))} = f^{-1}[(a,b)]$. Para los abiertos básicos de I de la forma $[0,p)$ tenemos que $f^{-1}[[0,p)] = (0,p)\times\{0\}\cup[0,p)\times\{1\} = B_{((0,0),(p,0))}$, el cual es abierto en X, de manera similar, si el abierto en I es de la forma $(q,1]$, entonces $f^{-1}[(q,1]] = B_{((q,1),(1,1))}$. Por lo tanto f es una función continua.
2. Para cada $m \in I$ tenemos que $f^{-1}(m) = \{(x,y) \in X : x = m\} = \{(m,i) : (m,i) \in X\}$. Note que $|f^{-1}(m)| = 1$ si y sólo si $m = 0$ ó $m = 1$; en cualquier otro caso $|f^{-1}(m)| = 2$. Por lo tanto f es una función suprayectiva tal que para toda $m \in I$ tenemos que $|f^{-1}(m)| \leq 2$.
3. Para poder probar que f es una función cerrada veamos primero que si $U \in \tau_X$ es un abierto básico, entonces $f[X\setminus U]$ es cerrado en I.

   Sea U un abierto básico de X de la forma $(a,b]\times\{0\}\cup(a,b)\times\{1\} = B_{((a,1),(b,1))}$, entonces $X \setminus B_{((a,1),(b,1))} = ((0,a]\cup(b,1])\times\{0\}\cup([0,a]\cup[b,1))\times\{1\}$ es cerrado en X y es fácil ver que $f[X\setminus B_{((a,1),(b,1))}] = [o,a]\cup[b,1]$, el cual resulta ser unión finita de cerrados en I. Si tomamos un abierto de la forma $U = (a,b)\times\{0\}\cup[a,b)\times\{1\}$, entonces $f[X\setminus U] = [0,a]\cup[b,1]$ también es cerrado en I.

   Supongamos ahora que $F \subset X$ es un conjunto cerrado y mostremos que $I\setminus f[F]$ es abierto en I. Sea $y \in I\setminus f[F]$, entonces existe $z \in X$ tal que $f(z) = y$, ya que f es suprayectiva, además note que $f(z) = y \in I\setminus f[F]$ implica que $f(z) \notin \{f(w) : w \in F\}$, lo cual implica que $z \notin F$. Como $X \setminus F$ es abierto en X existe un abierto básico U de X tal que $z \in U \subset X\setminus F$. Observe que $f[X\setminus U]$ es cerrado y contiene a $f[F]$, entonces $y = f(z) \in$

$I \setminus f[X \setminus U] \subset I \setminus f[F]$. Esto implica que f es una función cerrada.

Por lo tanto f es perfecta, y en consecuencia la función multi-valuada $f^{-1} : I \to X$ es suprayectiva, CV y SCS, lo cual implica que $X \in KL\Sigma(\leq 2)$.

Observe que X no es un elemento de $KL\Sigma(1)$, ya que no es un espacio segundo numerable.

B. Duplicado de Alexandroff de un espacio compacto segundo numerable

La notación que se usará en este ejemplo será la siguiente: Si X es un conjunto, entonces X_0 denotará al producto cartesiano $X \times \{0\}$, y para todo punto $x \in X$, denotaremos por x_0 al punto $(x, 0)$. De igual manera denotaremos al conjunto $X_1 = X \times \{1\}$ y al punto $x_1 = (x, 1)$.

Sea X un espacio topológico compacto y segundo numerable. Definamos al conjunto $AD(X)$ como la unión de los conjuntos X_0 y X_1.

Una topología $\tau_{AD(X)}$ para $AD(X)$ es la generada por la familia $\mathcal{B} = \{U_1 \cup (U_0 \setminus \{x_0\}) : U \in \tau_X \wedge x \in X\} \cup \{\{x_0\} : x \in X\}$. Al espacio $(AD(X), \tau_{AD(X)})$ se le llama Duplicado de Alexandroff del espacio X.

Veamos que $AD(X)$ pertenece a la clase $KL\Sigma(\leq 2)$. Para esto bastará mostrar que existe un función perfecta definida en X y con contradominio $AD(X)$.

Considere la función $\pi : AD(X) \to X$ definida por $\pi((x, i)) = x$, para toda $x \in AD(X)$, entonces

1. Para cada $x \in X$, tenemos que $\pi^{-1}(x) = \{(x, 0), (x, 1)\}$, por lo tanto la función π es suprayectiva y tiene fibras compactas, de hecho, $|\pi^{-1}(x)| = 2$.
2. Para todo subconjunto V de X sucede que $\pi^{-1}[V] = \{z \in AD(X) : \pi(z) \in V\} = V_0 \cup V_1$. Observe que si V es un conjunto abierto no vacío de X y y es un punto dentro de V, entonces $\pi^{-1}(V) = V_1 \cup (V_0 \setminus \{y_0\}) \cup \{y_0\}$ es un conjunto abierto en $AD(X)$. Esto muestra que π es una función continua.
3. Si $U_1 \cup (U_0 \setminus \{x_0\})$ es un abierto básico de $AD(X)$, entonces U es un abierto en X y $x \in X$. Veamos que el conjunto $\pi[AD(X) \setminus U_1 \cup (U_0 \setminus \{x_0\})]$ es cerrado en X.

   Si $x \notin U$, entonces $AD(X) \setminus (U_1 \cup (U_0 \setminus \{x_0\})) = AD(X) \setminus (U_1 \cup U_0)$ y tendríamos que

$$\begin{aligned}
& \pi[AD(X) \setminus (U_1 \cup U_0)] \\
= \ & \pi[(X_0 \cup (X_1 \setminus U_1)) \cap (X_1 \cup (X_0 \setminus U_0))] \\
= \ & \pi[(X_1 \setminus U_1) \cup (X_0 \setminus U_0)] \\
= \ & \pi[X_1 \setminus U_1] \cup \pi[X_0 \setminus U_0] \\
= \ & X \setminus U
\end{aligned}$$

Si $x \in U$, entonces

$$\begin{aligned}
& AD(X) \setminus (U_1 \cup (U_0 \setminus \{x_0\})) \\
= \ & (AD(X) \setminus U_1) \cap (AD(X) \setminus (U_0 \setminus \{x_0\}) \\
= \ & (AD(X) \setminus U_1) \cap (AD(X) \setminus U_0 \cup (AD(X) \cap \{x_0\})) \\
= \ & AD(X) \setminus U_1 \cap ((X \times \{0\} \setminus U_0 \cup X \times \{1\}) \\
& \quad \cup (X \times \{0\} \cap \{x_0\} \cup X \times \{1\} \cap \{x_0\})) \\
= \ & (AD(X) \setminus U_1) \cap (X \times \{0\} \setminus U_0 \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\}) \\
= \ & (X \times \{0\} \setminus U_0) \cup (X \times \{1\} \setminus U_1) \cup \{x_0\}
\end{aligned}$$

Entonces $\pi\,[AD(X) \setminus (U_1 \cup (U_0 \setminus \{x_0\}))] = \pi[X \times \{0\} \setminus U_0] \cup \pi[X \times \{1\} \setminus U_1] \cup \pi[\{x_0\}] = X \setminus U \cup \{x\}$, el cual es cerrado en X. Si $\{x_0\}$ es un abierto básico de $AD(X)$ para algún $x \in X$, entonces $\pi[\{x_0\}] = \{x\}$, el cuál también es cerrado en X.

Supongamos ahora que $F \subset AD(X)$ es un subconjunto cerrado, entonces $AD(X) \setminus F$ es abierto. Veamos que $X \setminus \pi[F]$ es abierto en X. Sea $z \in X \setminus \pi[F]$, como π es una función suprayectiva existe $y \in AD(X) \setminus F$ tal que $\pi(y) = z$ por lo que existe un abierto básico $W \subset AD(X) \setminus F$ de la forma $W = U_1 \cup (U_0 \setminus \{x_0\})$, con $x \in U$ (o de la forma $W = \{y_0\}$) tal que $y \in W$. Entonces $F \subset AD(X) \setminus W \subset AD(X) \setminus \{y\}$, lo cual implica que $\pi[F] \subset \pi[AD(X) \setminus W] \subset \pi[AD(X) \setminus \{y\}]$, por lo tanto $z = \pi(y) \in X \setminus \pi[AD(X) \setminus W] \subset X \setminus \pi[AD(X) \setminus W] \subset X \setminus \pi[F]$.

Por lo tanto π es perfecta y en consecuencia la función multivaluada $\pi^{-1} : X \to AD(X)$ es compacto-valuada y semicontinua superiormente, lo cual implica que $AD(X) \in KL\Sigma(\leq 2)$. Obsérvese que si $\omega_1 \leq |X|$, entonces el espacio $AD(X)$ no puede pertenecer a la clase $KL\Sigma(1)$ porque $AD(X)$ no es metrizable segundo numerable, ya que X es un subespacio discreto.

Como caso particular de este ejemplo, tenemos al espacio llamado Doble círculo de Alexandroff, denotado por $AD(T)$, donde T es el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen dotado de la topología usual de subespacio de $\mathbb{R}^2$.

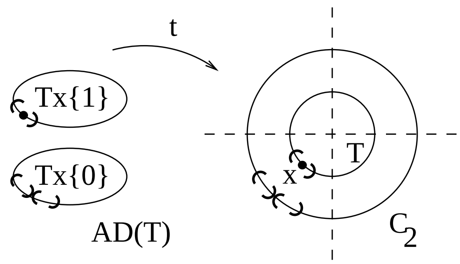

FIGURA 4. Abiertos en el Doble círculo de Alexandroff

C. Compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad 2^ω

Sea $\mathcal{R} = \{(x, -3) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ dotado de la topología discreta, entonces la compactación de Alexandroff del espacio $\mathcal{R}$ la podemos construir usando al punto $(0, -5) \notin \mathcal{R}$ como punto al infinito de la definición de compactación por un punto. De esta forma $AD(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \{(0, -5)\}$.

Si denotamos por $AD(T)$ al duplicado del círculo de Alexandroff, donde T es la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ con centro en el punto $(0, 0)$ y definimos a C_2 como la circunferencia de radio 2 con centro en $(0, 0)$, entonces la biyección natural $t : AD(T) \to T \cup C_2$ induce una topología en $T \cup C_2$ de tal manera que $AD(T) \approxeq T \cup C_2$. Así, al referirnos al doble círculo de Alexandroff, estaremos pensando en el espacio topológico $T \cup C_2$ con la topología inducida por $AD(T)$ (figura 4).

Sea $g : AD(T) \to A(\mathcal{R})$ la función definida en el doble círculo de Alexandroff por la siguiente regla de correspondencia:

$$g((x, y)) = \begin{cases} (0, -5) & \text{si } (x, y) \in T \\ (0, -5) & \text{si } (x, y) = (0, 2) \\ \left(\frac{-5x}{y-2}, -3\right) & \text{si } (x, y) \in C_2 \setminus \{(0, 2)\} \end{cases}.$$

De inmediato se ve que g es una función continua y suprayectiva, por lo tanto $A(\mathcal{R})$ es un elemento de $KL\Sigma(2)$ (proposición 3.10).

En lo que resta de este ejemplo usaremos a $A(2^\omega)$ para denotar a la compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad 2^ω.

PROPOSICIÓN 3.21. *Sea κ un número cardinal infinito, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

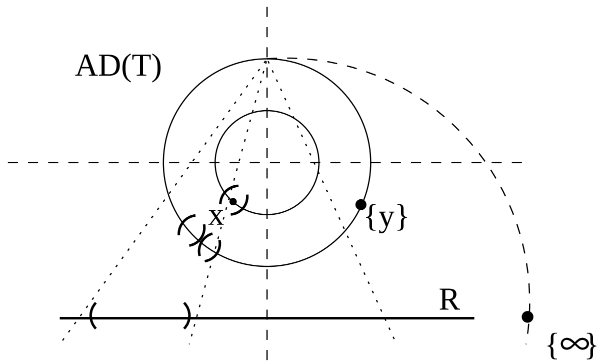

FIGURA 5. $A(\mathcal{R})$ como imagen continua de $AD(T)$.

1. $A(\kappa) \in L\Sigma(\leq \omega)$.
2. $\kappa \leq 2^\omega$.
3. $A(\kappa) \in L\Sigma(\leq 2)$

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Como $A(\kappa) \in L\Sigma(\leq \omega)$, entonces $|A(\kappa)| = \kappa \leq 2^\omega$ (proposición 3.13).

$2 \Rightarrow 3$) Como $\kappa \leq 2^\omega$, entonces $A(\kappa)$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $A(2^\omega)$. Además $A(2^\omega) \in KL\Sigma(2) \subset L\Sigma(2) \subset L\Sigma(\leq 2)$ y como $L\Sigma(\leq 2)$ es cerrada bajo subespacios cerrados, tenemos que $A(\kappa) \in L\Sigma(\leq 2)$.

$3 \Rightarrow 1$) Como $A(\kappa) \in L\Sigma(\leq 2)$ y $L\Sigma(\leq 2) \subset L\Sigma(\leq \omega)$, entonces $A(\kappa) \in L\Sigma(\leq \omega)$. □

Como el espacio $A(\omega_1)$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $A(2^\omega)$, entonces $A(\omega_1)$ es un elemento de la clase $KL\Sigma(\leq \omega)$ pero este espacio no es primero numerable, en consecuencia $A(\omega_1)$ no es compacto metrizable fibrado. De hecho, para toda κ tal que $\omega_1 \leq \kappa \leq 2^\omega$ sucede que $A(\kappa) \in KL\Sigma(\leq \omega)$ y no es compacto metrizable fibrado.

D. Compactación por un punto de un espacio de Mrówka

Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ es *casi ajena* si $\mathcal{A}$ está constituida por subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y si para cada par de elementos distintos A y B de $\mathcal{A}$ se tiene que $A \cap B$ es finito.

Para construir un espacio de Mrówka consideremos una familia casi ajena infinita $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Para cada elemento $A \in \mathcal{A}$, elijamos y fijemos un elemento $\rho_A \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ de tal forma que $\rho_A \neq \rho_B$ si $A, B \in \mathcal{A}$ son tales que $A \neq B$. Defina $\psi(\mathcal{A}) = \{\rho_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \mathbb{N}$. Dotemos a $\psi(\mathcal{A})$ de una topología declarando bases locales de vecindades para cada uno de sus elementos:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia $\mathcal{B}_n = \{\{n\}\}$ es una base local de vecindades para n en $\psi(\mathcal{A})$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces una base local de vecindades para el punto ρ_A en $\psi(\mathcal{A})$ es la colección $\mathcal{B}_A = \{\{\rho_A\} \cup A \setminus D : D \subset A \wedge |D| \in \omega\}$

No es difícil verificar que las colecciones $\{\mathcal{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\mathcal{B}_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ generan una topología en $\psi(\mathcal{A})$. Cuando la familia $\mathcal{A}$ es maximal, al conjunto $\psi(\mathcal{A})$ junto con esta topología se le llama espacio de Mrówka. El espacio $\psi(\mathcal{A})$ asociado a $\mathcal{A}$ es Hausdorff, primero numerable y localmente compacto:

$\psi(A)$ **es Hausdorff:** En efecto, si x y y son dos puntos distintos de $\psi(A)$, entonces hay tres casos a considerar:

1. Si $x, y \in \mathbb{N}$, entonces $\{x\}, \{y\} \in \tau_{\psi(A)}$.
2. Si $x = \rho_A$ y $y = \rho_B$, donde $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \neq B$, entonces $A \cap B = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$. Sea $V = \{\rho_A\} \cup (A \setminus L)$ y sea $W = \{\rho_B\} \cup (B \setminus L)$, donde $L = A \cap B$.
3. Si $x \in \mathbb{N}$ y $y = \rho_B$, con $B \in \mathcal{A}$, entonces $\{x\}$ y $\{\rho_B\} \cup (B \setminus \{x\})$ son abiertos ajenos de $\psi(A)$.

$\psi(A)$ **es primero numerable:** Es claro que si $x \in \mathbb{N}$, entonces x tiene una base de vecindades numerable. Si $x = \rho_A$, con $A \in \mathcal{A}$, entonces la familia de abiertos $\{\{\rho_A\} \cup (A \setminus F) : F \subset A \wedge |F| \in \omega\}$ forman una base local de ρ_A. Note que la cardinalidad de la familia de subconjuntos finitos de A es igual a $|A|$, ya que A es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

$\psi(A)$ **es localmente compacto:** Recordemos que un espacio X que es Hausdorff, es localmente compacto si cada punto x de X tiene una vecindad compacta. Si $x \in \mathbb{N} \subset \psi(A)$, entonces $\{x\}$ es una vecindad compacta. Si $x = \rho_A$ para algún $A \in \mathcal{A}$, entonces cualquier abierto básico de la forma $U_A^n = \{\rho_A\} \cup (A \setminus \{1, \ldots, n\})$ es una vecindad compacta, ya que cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$

de U_A^n contiene a un abierto U tal que $\rho_A \in U$, lo cual implica que existe un abiérto básico de la forma $W = \{\rho_A\} \cup (A \setminus L)$, donde L es un subconjunto finito de A. Entonces el conjunto $U_A^n \setminus W \subset \mathbb{N}$ es finito, por lo tanto la subfamilia formada por W y los conjuntos unitarios de los elementos de $U_A^n \setminus W$ es una cubierta finita de U_A^n. De esta manera el espacio $\psi(\mathcal{A})$ es localmente compacto.

La compactación de Alexandroff $A(\psi(\mathcal{A}))$ o compactación por un punto de $\psi(\mathcal{A})$ resulta ser un elemento de $L\Sigma(\leq 2)$ ya que $A(\psi(\mathcal{A}))$ se puede escribir como la unión de la compactación de Alexandroff de un subespacio de cardinalidad menor o igual que 2^ω y la unión de una cantidad numerable de conjuntos unitarios.

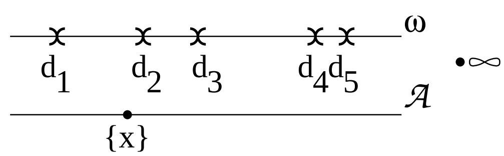

FIGURA 6. Abiertos en el epacio de Mrówka como subespacio de su compactación.

En efecto, supongamos que $A(\psi(\mathcal{A})) = \psi(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$, donde $\infty \notin \psi(\mathcal{A})$, entonces $A(\psi(\mathcal{A})) = \{\rho_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\} = \{\rho_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \{\infty\} \cup \bigcup \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Observe ahora que $\{\rho_A : A \in \mathcal{A}\}$ tiene cardinalidad menor o igual que el continuo $\mathfrak{c}$, ya que $|\{\rho_A : A \in \mathcal{A}\}| = |\mathcal{A}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$. Además el subespacio $X = \{\rho_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \{\infty\}$ es la compactación de Alexandroff de $\{\rho_A : A \in \mathcal{A}\}$.

Efectivamente, bastará analizar a las vecindades abiertas de ∞ en X. Para esto tomemeos un abierto U en X tal que $\infty \in U$. Entonces existe un subconjunto $V \subset A(\psi(\mathcal{A}))$ tal que $U = V \cap X$. Como V es un abierto de $A(\psi(\mathcal{A}))$ que tiene como elemento a ∞, existe $F \subset \psi(\mathcal{A})$ compacto tal que $V = (\psi(\mathcal{A}) \setminus F) \cup \{\infty\}$. Entonces $U = V \cap X = \{\infty\} \cup \{\rho_A : A \in \mathcal{A}\} \setminus F_0$, donde $F_0 = F \cap \{\rho_A : A \in \mathcal{A}\}$ es un subconjunto compacto de $\{\rho_A : A \in \mathcal{A}\}$. Con todo lo anterior podemos notar que el subespacio X es la compactación por un punto de $\{\rho_A : A \in \mathcal{A}\}$. Entonces $X \in L\Sigma(\leq 2)$

y como también $\bigcup\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \in L\Sigma(\leq 2)$, podemos concluir que $A(\psi(\mathcal{A})) = X \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} \in L\Sigma(\leq 2)$.

Otro hecho notable del espacio $A(\psi(\mathcal{A}))$ es que cuando la familia $\mathcal{A}$ es maximal, éste no es un espacio de Fréchet. Para mostrar esto supongamos que $A(\psi(\mathcal{A}))$ es de Fréchet y observe que $\infty \in cl_{A(\psi(\mathcal{A}))}(\mathbb{N})$, entonces existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{N}$ convergente a ∞. Como $\infty \neq n$, para toda $n \in \mathbb{N} \subset A(\psi(\mathcal{A}))$, la sucesión $S = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinita y debido a que $\mathcal{A}$ es una familia maximal, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\omega \leq |A \cap S|$. Considere ahora a la subsucesión $T = A \cap S$ de S, dicha subsucesión converge a ρ_A, pero también T converge a ∞, lo cual implica que $\infty = \rho_A \in \psi(A)$; una contradicción ya que $\infty \notin \psi(A)$.

E. La unión del σ-producto de 2^{ω_1} basado en $\mathbf{0} = (0,\ldots)$ y el punto $\mathbf{1} = (1,\ldots) \in 2^{\omega}$

Dotemos a $2 = \{0,1\}$ de la topología discreta y denotemos con 2^{ω_1} al producto de Tychonoff de ω_1 copias del espacio 2. Sea $X \subset 2^{\omega_1}$ el subespacio definido de la siguiente manera:

Para cada $n \in \omega$ sea

$$\sigma_n = \{x \in 2^{\omega_1} : |\{\alpha \in \omega_1 : x(\alpha) \neq 0\}| \leq n\}$$

Sea entonces $X = \left(\bigcup_{n\in\omega} \sigma_n\right) \cup \{\mathbf{1}\}$, donde $\mathbf{1}$ denota al punto de 2^{ω_1} que tiene todas sus coordenadas iguales a 1. Al espacio $\bigcup\{\sigma_n : n \in \omega_1\}$ se le llama σ-producto de 2^{ω} basado en $\mathbf{0}$.

El siguiente lema es un resultado de O. Okunev y M. Tkačenko publicado en [**10**].

Lema 3.22. *Para cada $n \in \omega\setminus\{0\}$, el conjunto σ_n es imagen continua del espacio $A^n \times 2^n$, donde $A = A(\omega_1)$ es la compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad ω_1.*

Demostración. Sea $n \in \omega$ un número natural mayor o igual que 1 y sea $f : A^n \times 2^n \to \sigma_n$ una función definida de la siguiente manera: para cada punto $z = (a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n)$ de $A^n \times 2^n$ definamos a $f(z)$ por medio de la siguiente regla de correspondencia: Si $\alpha \in \omega_1$, $\alpha = a_i$ para algún $i \in \{1,\ldots,n\}$ y no existe $j \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}$ tal que $\alpha_i = \alpha_j$, entonces $f(z)(\alpha) = b_i$; en cualquier otro caso, definimos $f(z)(\alpha) = 0$.

Veamos primero que la función f es suprayectiva. Si $z \in \sigma_n$, por definicion tenemos que $|\{\beta \in \omega_1 : z(\beta) \neq 0\}| \leq n$. Sea $B = \{\beta \in \omega_1 : z(\beta) = 1\}$ y supongamos que $|B| = k$, donde $1 \leq k \leq n$. Sea $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ una enumeración de B y considere al punto $(\beta_1, \ldots, \beta_k, \infty, \ldots, \infty, 1, \ldots, 1) = y$, entonces $f(y) = z$. Note que $f((0, \ldots, 0)) = \mathbf{0}$.

Por otro lado, observe que si $B_{(\alpha,V)} = \{x \in 2^{\omega_1} : x(\alpha) \in V\}$, entonces la familia $\mathcal{B} = \{B_{(\alpha,V)} : \alpha \in \omega_1 \wedge V \subset 2\}$ forma una subbase para 2^{ω_1}.

Mostraremos ahora que f es una función continua. Sea $B_{(\alpha,V)} \in \mathcal{B}$, entonces si $0 \in V$, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}[B_{(\alpha,V)}] = \{&(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in A^n \times 2^n : \\ &\exists i(i \leq n \wedge a_i = \alpha) \wedge \forall i \forall j(i \neq j \rightarrow a_i \neq a_j) \wedge b_i \in 2\} \end{aligned}$$

En otro caso, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}[B_{(\alpha,V)}] = \{&(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in A^n \times 2^n : \exists i(i \leq n \wedge a_i = \alpha)\} \cup \\ &\{(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in A^n \times 2^n : \alpha \notin \{a_1, \ldots, a_n\}\} \end{aligned}$$

De este modo, ya sea que $0 \in V$ o que $0 \notin V$, sucede que $f^{-1}[B_{(\alpha,V)}]$ es abierto en $A^n \times 2^n$. $\square$

Gracias al lema anterior, el espacio X está contenido en la clase $L\Sigma(\leq \omega)$ ya que esta clase es cerrada bajo formación de imágenes continuas y uniones numerables.

Por las proposiciones 3.14 y 3.15 tenemos que todo espacio compacto en $L\Sigma(\leq \omega)$ es secuencial, lo cual implica que todo espacio compacto en $L\Sigma(\leq \omega)$ tiene estrechez numerable. El espacio X es un ejemplo de un espacio en $L\Sigma(\leq \omega)$ (de hecho, $X \in L\Sigma(< \omega)$) no compacto con estrechez no numerable. Verifiquemos que $\omega_1 \leq t(X)$.

Observe primero que $\mathbf{1} \in \overline{\bigcup_{n \in \omega} \sigma_n} = 2^{\omega_1}$. Supongamos que $t(X, \mathbf{1}) \leq \omega$, entonces existe un subconjunto $A \subset \bigcup\{\sigma_n : n \in \omega\}$ tal que $\mathbf{1} \in \overline{A}$ y $|A| \leq \omega$, esto implica que $A = \bigcup\{A_n : n \in \omega\}$, donde $A_n \subset \sigma_n$ y $|A_n| \leq \omega$ para toda $n \in \omega$.

Para cada $n \in \omega$, sea $B_n = \{\beta \in \omega_1 : x \in A_n \wedge x(\beta) = 1\}$ y sea $B = \bigcup_{n \in \omega} B_n$. Claramente $|B| \leq \omega$. Como el conjunto $\omega_1 \setminus B$ es infinito, podemos escoger a $\gamma \in \omega_1 \setminus B$ y construir un abierto básico

$U = \{z \in 2^\omega : z(\gamma) = 1\}$ de 2^ω, entonces $\mathbf{1} \in U$ pero $U \cap A = \emptyset$, lo cual contradice al hecho de que $\mathbf{1} \in \overline{A}$.

5. ¿Existe $X \in L\Sigma(n)$ con estrechez no numerable?

Cualquier espacio compacto en $L\Sigma(\leq \omega)$ es un espacio secuencial y en consecuencia tiene estrechez numerable. Note también que todos los espacios en $L\Sigma(\leq 1)$ tienen estrechez numerable, pero el ejemplo E de la sección anterior muestra que no todos los espacios en $L\Sigma(< \omega)$ comparten esta propiedad. Es por esto que la respuesta a la siguiente pregunta es importante.

PREGUNTA ([**7**, 2.18]). *Sea $2 \leq n < \omega$. ¿Existe un espacio X en $L\Sigma(n)$ con estrechez no numerable?*[1]

Las siguientes proposiciones nos dan condiciones bajo las cuales los espacios X de las clases $L\Sigma(\leq \kappa)$ tienen estrechez menor o igual que κ, a saber, si X es compacto y $\omega \leq \kappa$.

Recordemos que una sucesión libre de longitud κ en un espacio topológico X es una función $f : \kappa \to X$ tal que para todo $\alpha < \kappa$ las cerraduras en X de los conjuntos $\{f(\beta) : \beta \in \alpha\}$ y $\{f(\beta) : \alpha \leq \beta < \kappa\}$ son ajenas.

Arkhangelskii demostró en su artículo [**1**] que la estrechez de un espacio compacto X es igual al supremo de la longitud de las sucesiones libres en X.

PROPOSICIÓN 3.23. *Sea X un espacio topológico compacto, entonces $t(X) = \sup\{\kappa \in \mathcal{CARD} : f : \kappa \to X$ es una sucesión libre $\}$.*

A continuación se establece una cota a las longitudes de las sucesiones libres contenidas en un espacio topológico X que pertenece a la clase $L\Sigma(< \kappa)$.

PROPOSICIÓN 3.24. *Sea κ un cardinal regular no numerable y sea $X \in L\Sigma(< \kappa)$, entonces toda sucesión libre en X tiene longitud menor que κ.*

[1] Recientemente Oleg Okunev y Hernández Rendón resolvieron este problema mostrando que todo espacio X en $L\Sigma(n)$, para $n \in \omega$, tiene estrechez numerable. Véase [**9**].

Demostración. Sea $\mathcal{C} \subset \{C \in \mathcal{CM} : w(C) < \kappa\}$ una cubierta compacta de X y sea $\mathcal{N}$ una red numerable respecto a $\mathcal{C}$.

Supongamos que $f : \kappa \to X$ es una sucesión libre en X. Para cada α y β tales que $\alpha < \beta \leq \kappa$ sea $F(\alpha, \beta) = \overline{f[[\alpha, \beta)]}$, entonces por la definición de sucesión libre tenemos que para cada $\alpha \in \kappa$ sucede que $F(0, \alpha) \cap F(\alpha, \kappa) = \emptyset$. Además observe que como $\mathcal{N}$ es numerable existe $\delta \in \kappa$ tal que para toda $N \in \mathcal{N}$ tenemos que $\sup f^{-1}[N] < \delta$ ó que $f^{-1}[N]$ no está acotada en κ, es decir que para toda $\gamma < \kappa$, existe $\delta \in f^{-1}[N]$ tal que $\gamma < \delta$.

Considere a $C_0 \in \mathcal{C}$ tal que $f(\delta) \in C_0$. Entonces se afirma que existe un cardinal $\alpha \in [\delta, \kappa)$ tal que $C_0 \cap F(\alpha, \beta) = \emptyset$, para toda β mayor que α.

Verifiquemos que, en efecto, la afirmación anterior es verdadera mostrando que su negación es falsa. Supongamos que $C_0 \cap F(\alpha, \beta) \neq \emptyset$, para toda $\alpha \in [\delta, \kappa]$ y $\alpha < \beta$. Entonces podemos definir lo siguiente (figura 7):

1. Para cada $\alpha \in [\delta, \kappa)$, sea
$$B_\alpha = \{\beta \in [\delta, \kappa) : \alpha < \beta \wedge C_0 \cap F(\alpha, \beta) \neq \emptyset\}$$
2. Sea $g : [\delta, \kappa) \to \bigcup_{\alpha \in [\delta, \kappa)} B_\alpha$ una función de elección.
3. Para cada $\alpha \in [\delta, \kappa)$, sea
$$C_\alpha = \{p \in C_0 : p \in F(\alpha, g(\alpha))\}$$
4. Sea $h : [\delta, \kappa) \to \bigcup_{\alpha \in [\delta, \kappa)} C_\alpha$ una función de elección.

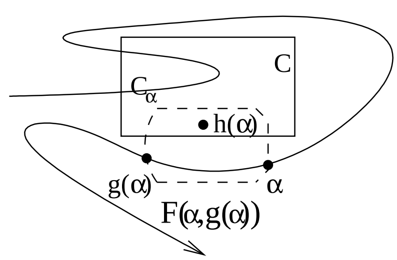

Figura 7. $C_0 \cap F(\alpha, g(\alpha)) = C_\alpha$

Note que si α_1 y α_2 son dos elementos de $[\delta,\kappa)$ tales que $\alpha_1 < g(\alpha_1) < \alpha_2$, entonces $F(\alpha_1, g(\alpha_1)) \cap F(\alpha_2, g(\alpha_2)) = \emptyset$.

Considere en $\kappa \setminus \delta$ un subconjunto S no acotado tal que para cada par de elementos s_1 y s_2 de S tales que $s_1 \neq s_2$ y $s_1 < s_2$ sucede que $s_1 < g(s_1) < s_2$. Entonces $\{h_s : s \in S\}$ es una sucesión libre de longitud $|S| = \kappa$ en C. Por lo tanto $\kappa \leq t(C) \leq w(C) < \kappa$ (proposición 1.24), lo cual es imposible.

Considere al cardinal α_0 en $[\delta,\kappa)$ tal que $C_0 \cap F(\alpha_0,\beta) = \emptyset$, para toda β mayor que α_0. Sea $\mathcal{N}^u = \{N \in \mathcal{N} : f^{-1}[N] \text{ no es acotado }\}$, para cada $N \in \mathcal{N}^u$ sea $\theta_N = \text{mín}\, f^{-1}[N]$ y sea $\theta = sup\{\theta_N : N \in \mathcal{N}^u\}$, note que como κ es un cardinal regular, entonces $\theta \in \kappa$. Finalmente definamos

$$\beta_0 = \begin{cases} \alpha_0^+ & \text{si } \theta \leq \alpha_0 \\ \theta & \text{si } \alpha_0 \leq \theta \end{cases}$$

entonces para toda $N \in \mathcal{N}^u$ tenemos que $N \cap f[[\alpha_0,\beta_0)] \neq \emptyset$. Observe que $C_0 \cap f[[\alpha_0,\beta_0]] = \emptyset$, esto implica que $C \subset X \setminus F(\alpha_0,\beta_0) \in \tau_X$ y como $\mathcal{N}$ es una red respecto a $\mathcal{C}$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subset N$ y $N \cap F(\alpha_0,\beta_0) = \emptyset$, entonces $f^{-1}[N]$ no puede ser no acotada, en particular $f^{-1}[C_0] < \delta$ pero $f(\delta) \in C$. Una contradicción a la suposición de la existencia de una sucesión libre de longitud κ en X. $\square$

Observe que en la demostración anterior se utilizó la desigualdad $\kappa \leq t(C) \leq w(C) < \kappa$, así que podemos debilitar la condición a las cubiertas compactas del espacio $X \in L\Sigma(<\kappa)$ pidiendo sólamente que todo elemento C de la cubierta compacta de X tenga estrechez menor que κ. Esto nos da como resultado la siguiente afirmación: Si κ es un cardinal regular y $X \in L\Sigma(\mathcal{K})$, donde $\mathcal{K}$ es una familia de espacios topológicos compactos con estrechez menor que κ, entonces toda sucesión libre en X tiene longitud menor que κ.

Si recordamos que el sucesor de todo cardinal es un cardinal regular, entonces tenemos el siguiente resultado:

COROLARIO 3.25. *Sea $\kappa \in \mathcal{CARD}$ tal que $\omega \leq \kappa$ y sea $X \in L\Sigma(\leq \kappa)$ un espacio compacto, entonces $t(X) \leq \kappa$.*

6. Algunos resultados concernientes a las clases $L\Sigma(n)$

Ya hemos visto que toda compactación por un punto de un espacio discreto de cardinalidad menor o igual que 2^ω es un elemento de la clase

$L\Sigma(\leq 2)$ (proposición 3.21), en particular tenemos que $A(2^\omega) \in KL\Sigma(2)$ (ver ejemplo C). También mostramos que la clase $KL\Sigma(\leq \kappa)$ es cerrada bajo formación de uniones finitas.

En este pequeño apartado se exploran algunas propiedades de las clases $L\Sigma(\leq n)$, con $n \in \omega \setminus \{0\}$ y se enuncia un teorema que establece que las potencias finitas de la compactación de Alexandroff del espacio de cardinalidad ω_1 es también un elemento de la clase $L\Sigma(\leq \omega)$, más aún, $A(\omega_1)^n \in L\Sigma(n+1)$.

Debido a que todos los espacios topológicos que pertenecen a la clase $L\Sigma(n)$ tienen cardinalidad menor o igual que 2^ω (proposición 3.13), si $2^\omega < \omega_2 = \omega_1^+$, entonces el espacio $A(\omega_2)$ no puede ser un elemento de $L\Sigma(3)$. Es natural preguntarse que pasa en el caso en que $\omega < \omega_1 < \omega_2 \leq 2^\omega$.

Estos resultados son enunciados en esta sección sin demostración, remitimos al lector al artículo **[7]** para un estudio de dichas pruebas.

Note que si $X \in L\Sigma(n)$, entonces X tiene una cubierta formada por subconjuntos de a lo más n elementos para la cual existe una red numerable, pero no tiene una cubierta formada por subconjuntos de a lo más $n-1$ elementos con la misma propiedad, esto significa que para toda cubierta $\mathcal{C}$ de X tal que existe una red numerable $\mathcal{N}$ respecto a $\mathcal{C}$, dicha cubierta tiene un elemento de cardinalidad exactamente n.

PROPOSICIÓN 3.26. *Sea $n \in \omega$ y sea X un espacio topológico tal que $\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia ajena de subconjuntos abiertos de X. Si para cada $\alpha \in \omega_1$ existe un subespacio cerrado $Y_\alpha \subset U_\alpha$ tal que $Y_\alpha \notin L\Sigma(\leq n)$, entonces $X \notin L\Sigma(\leq n+1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $X \in L\Sigma(n+1)$. Sea $\mathcal{C} \subset \{C \subset X : |C| \leq n+1\}$ una cubierta de X y sea $\mathcal{N}$ una red numerable respecto a $\mathcal{C}$.

Para toda $\alpha \in \omega_1$, la familia $\mathcal{C}_\alpha = \{C \cap Y_\alpha : C \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta de Y_α y $\mathcal{N}_\alpha = \{N \cap Y_\alpha : N \in \mathcal{N}\}$ es una red numerable respecto a la cubierta $\mathcal{C}_\alpha$. Como $Y_\alpha \notin L\Sigma(\leq n)$, entonces existe $C_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha$ tal que $|C_\alpha| = n+1$. Entonces $C_\alpha \in \mathcal{C}$ y $C_\alpha \subset Y_\alpha \subset U_\alpha$. Además existe $N_\alpha \in \mathcal{N}$ tal que $C_\alpha \subset N_\alpha \subset U_\alpha$.

Como la familia $\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es ajena, entonces para cada $\alpha, \beta \in \omega_1$ sucede que $N_\alpha \neq N_\beta$ si $\alpha \neq \beta$, esto implica que $\omega_1 \leq |\mathcal{N}|$. Esta contradicción se debe a la suposición de que $X \in L\Sigma(n+1)$, por lo tanto $X \notin L\Sigma(n+1)$. $\square$

Gracias a la proposición 3.10 sabemos que la unión numerable de subespacios en $L\Sigma(\leq n)$ es también un espacio $L\Sigma(\leq n)$. Veamos ahora que la compactación por un punto de la suma directa de a lo más 2^ω espacios compactos en $L\Sigma(\leq n)$ es un elemento de la clase $L\Sigma(\leq n+1)$.

Proposición 3.27. *Sea n un número natural, sea $\kappa \leq 2^\omega$ y sea $\{X_\gamma : \gamma \in \kappa\} \subset L\Sigma(\leq n)$ una familia de espacios compactos. Si $X = A\left(\bigoplus\{X_\gamma : \gamma \in \kappa\}\right)$. Entonces*

1. *$X \in L\Sigma(\leq n+1)$.*
2. *Si existe $A \subset \kappa$ tal que $\omega_1 \leq |A|$ y para toda $\alpha \in A$ tenemos que $X_\alpha \in L\Sigma(n)$, entonces $X \in L\Sigma(n+1)$.*

Demostración. 1. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que para toda $\alpha, \beta \in \kappa$ tales que $\alpha \neq \beta$ los espacios X_α y X_β son ajenos, de esta forma podemos escribir $X = \{\infty\} \cup \bigcup_{\gamma\in\kappa} X_\gamma$, donde ∞ es un punto fuera de X. Para cada $\gamma \in \kappa$ sea $\mathcal{C}_\gamma \subset \{C \subset X_\gamma : |C| \leq n\}$ una cubierta de X_γ y sea $\mathcal{N}_\gamma = \{N_i^\gamma : i \in \omega\}$ una red numerable en X_γ respecto a $\mathcal{C}_\gamma$.

Observe que podemos construir una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de κ que separa conjuntos finitos de la siguiente manera: considere un espacio topológico T segundo numerable de cardinalidad 2^ω, entonces T tiene una base $\mathcal{B}$ numerable de abiertos. Sea $S \subset T$ tal que $|S| = \kappa$ y sea $f : S \to \kappa$ una función biyectiva, entonces defina $\mathcal{A} = \{\bigcup A : A \subset \{f[D] : D = D \cap S \wedge D \in \mathcal{B}\} \wedge |A| < \omega\}$. Entonces $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}| \leq \omega$ y $\mathcal{A}$ separa conjuntos finitos de κ.

Sea entonces, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ una familia numerable que separa conjuntos finitos de κ y definamos para cada $A \in \mathcal{A}$ al conjunto $A^* = \bigcup\{X_\gamma : \gamma \in A\}$.

Para cada $\gamma \in \kappa$ sea $\mathcal{C}^\gamma = \{C \cup \{\infty\} : C \in \mathcal{C}_\gamma\}$ y sea $\mathcal{C} = \bigcup_{\gamma\in\kappa} \mathcal{C}^\gamma$, claramente $\mathcal{C}$ es una cubierta compacta de X tal que para cada $C \in \mathcal{C}$ sucede que $w(C) \leq n+1$.

Sea $\mathcal{N} = \left\{ \{\infty\} \cup \left(A^* \cap \bigcup_{\gamma \in \kappa} N_i^\gamma \right) : i \in \omega \wedge A \in \mathcal{A} \right\}$. Veamos que $\mathcal{N}$ es una red en X respecto a la cubierta $\mathcal{C}$. Note que $\mathcal{N}$ es numerable.

Sea $C \in \mathcal{C}$ y sea $U \subset X$ un conjunto abierto que contiene a C, entonces existe $\gamma_0 \in \kappa$ tal que $C_{\gamma_0} \in \mathcal{C}_\gamma$ y $C = C_{\gamma_0} \cup \{\infty\}$. Como $\infty \in U$ entonces $U = \{\infty\} \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \kappa} X_\gamma \setminus L \right)$, donde L es un subespacio compacto de $X \setminus \{\infty\}$. Por la proposición 1.15 tenemos que $|\{X_\eta : L \cap X_\eta \neq \emptyset\}| < \omega$, es decir, el conjunto $F = \{\eta \in \kappa : X_\eta \not\subset U\}$ es finito. Como $\mathcal{A}$ separa conjuntos finitos de κ, podemos encontrar $A \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma_0 \in A$ y $F \setminus \{\gamma_0\} \cap A = \emptyset$, además existe $k \in \omega$ tal que $C_{\gamma_0} \subset N_k^{\gamma_0} \subset X_{\gamma_0} \cap U$, ya que $\mathcal{N}_\gamma$ es una red respecto a C_γ.

Sea $M = \{\infty\} \cup \left(A^* \cap \bigcup_{\gamma \in \kappa} N_k^\gamma \right)$. Entonces $M \in \mathcal{N}$ y $C \subset M \subset U$ (figura 8).

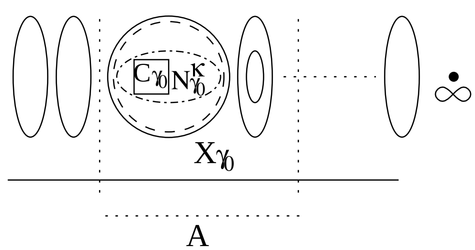

FIGURA 8. $C \subset M \subset U$

2. Como para toda $\alpha \in A$ tenemos que $X_\alpha \notin L\Sigma(\leq n-1)$ y $\omega_1 \leq |A|$, entonces $X \notin L\Sigma(\leq n)$ por la proposición 3.26 y por el inciso (1) tenemos que $X \in L\Sigma(\leq n+1) \setminus L\Sigma(\leq n) = L\Sigma(n+1)$ $\square$

COROLARIO 3.28. *Para toda $n \in \omega$ se cumple que la clase $L\Sigma(n) \cap \mathcal{CM}$ y la clase $L\Sigma(\omega) \cap CM$ son distintas del vacío.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces por la proposición 3.20 tenemos que la clase $L\Sigma(1) \cap \mathcal{CM} = \{X \in \mathcal{CM} : X$ es metrizable $\}$ es distinta del vacío y como testigo está el espacio I. Supongamos ahora que $1 < n$ y que para toda $m < n$ sucede que $L\Sigma(m) \cap \mathcal{CM} \neq \emptyset$. Si $Y \in L\Sigma(n-1) \cap \mathcal{CM}$ y $X = A(\bigcup\{Y \times \{\alpha\} : \alpha \in \omega_1\})$, entonces por la proposición 3.27 el espacio X es un elemento de la clase $L\Sigma(n)$.

Si X es un elemento de la clase $L\Sigma(2)$, entonces el producto X^ω es un elemento de $L\Sigma(\omega)$.

□

TEOREMA 3.29. *Sea $n \in \omega$, entonces el espacio $A(\omega_1)^n$ es un elemento de la clase $L\Sigma(n+1)$.*

TEOREMA 3.30. $A(\omega_2)^2 \notin L\Sigma(3)$

Bibliografía

1. A.V Arkhangel'skii, *On bicompacta hereditarily satisfying the souslin's condition. tightness and free sequences.*
2. F. Casarrubias, *La clase de los espacios topológicos lindelöf Σ y algunas subclases especiales*, Departamento de Matemáticas, UNAM, 2005.
3. F. Casarrubias Segura, M. López de Luna, P. Mendoza Iturralde, R. Ramírez Matínez, and V. Tkachuk Vladimirovich, *Los espacios lindelöf Σ y sus aplicaciones*, Serie Comunicaciones 27 (2000) 277-301, Aportaciones Matemáticas, 2000.
4. R. Engelking, *General topology*, revised and completed ed., Sigma series in pure mathematics, vol. 6, Heldermann Verlang, 1989.
5. J. Gerlitz and Z Szentmiklóssy, *On compact fibered spaces*, Proceedings of the Janos Bolyai Mathematical Society, etc (1998), 87–90.
6. R. Hodel, *Cardinal functions i*, Handbook of Set-Theoretic Topology (K. Kunnen and J. E. Vaughan, eds.), Elseviers Science Publishers B.V., 1984.
7. Wieslaw Kubiś, Oleg Okunev, and Paul J. Szeptycki, *On some classes of lindelöf Σ-spaces*, 2007.
8. K.Ñagami, *Σ-spaces*, Fund. Math. 65(2) (1969), 169–192.
9. O. Okunev and A. Hernández, *On $L\Sigma(n)$-spaces: G_δ-points and tightness*, Topology Proceedings (Por aparecer).
10. O. Okunev and Tkacenko, *On thin generating sets in topological groups.*
11. M. Tkačenko, *$\mathcal{P}$-approximable compact spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. (1991), 583–595.
12. V. Tkachuk Vladimir, *A glance at compact spaces which " map nicely " onto metrizable ones*, Topology Proceedings **Vol. 19** (1994), 333.
13. S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley, 1970.