



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

“DINÁMICA Y CONTACTO DE UN MEMS
BAJO UN ESQUEMA DE CONTROL LC”

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A :

MANUEL TEJADA WRIEDT

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE GILBERTO FLORES GALLEGOS

MÉXICO, D.F.

ENERO, 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dinámica y contacto de un MEMS bajo un
esquema de control LC^1

Manuel Tejada Wriedt²

¹Proyecto de investigación elaborado para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas.

²Becario de CONACYT.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Gilberto Flores el haber revisado este trabajo, así como todo el apoyo brindado durante la elaboración del mismo. Al Dr. Antonmaría Minzoni, por todas las sugerencias y comentarios, sin los cuales no hubiera sido posible terminar este estudio. En particular, se le agradece el haber sugerido las aproximaciones necesarias para estudiar el caso enunciado en la sección 5.2.1. A todos los miembros del Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS, UNAM, en especial al Dr. Arturo Olvera, por toda la ayuda que me han proporcionado.

Por último quisiera agradecer a mi familia, Karin, Enrique y Carlos, así como a mi pareja, Mara.

Índice general

Resumen	VI
1. Introducción	1
2. Los modelos	3
2.1. El modelo básico	3
2.2. Esquema de control capacitivo	5
2.3. Esquema de control LC	6
3. Resultados preliminares	9
4. Dinámica	13
5. Contacto	17
5.1. $\omega \gg 1$	18
5.2. $\omega \ll 1$	24
5.2.1. $\lambda > -\frac{4\mu}{27}$	29
6. Conclusiones	33

Resumen

En este trabajo se deduce el modelo de un MEMS bajo un esquema de control LC y se estudian las propiedades dinámicas del sistema. Usando métodos asintóticos y numéricos se encuentran condiciones suficientes para que haya contacto y se muestra que éstas dependen de la frecuencia natural del sistema. Asimismo, se prueba que es imposible evitar el contacto para voltajes mayores a un cierto valor crítico, que es dos veces mayor al del sistema sin ningún esquema de control.

Capítulo 1

Introducción

En los últimos 20 años, hemos atestiguado una revolución en la miniaturización de componentes electrónicos. Este desarrollo ha permitido construir componentes mecánicos en escalas de nanómetros ($10^{-9}m$), como lo son microválvulas, acelerómetros, transductores, etc. No es de esperar que estos sistemas se comporten de la misma manera que sus contrapartes macroscópicas, pues la magnitud de las fuerzas que actúan sobre ellos no escalan de manera lineal, por lo que es importante modelar el comportamiento de los sistemas de pequeñas escalas, con el fin de optimizar el diseño y funcionamiento de los mismos.

Uno de los sistemas microelectromecánicos (MEMS por sus siglas en inglés) más estudiado, es el de un microcapacitor de membrana como el que se muestra en la figura 1.1, pues es un componente fundamental en otros sistemas más complejos.

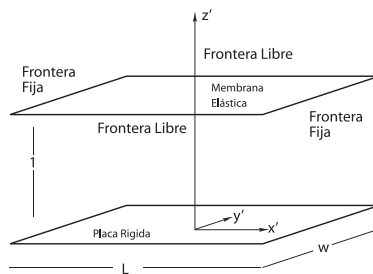


Figura 1.1: Geometría del sistema

Nathanson [5] fue el primero en estudiar un sistema similar con un simple modelo de masa-resorte, encontrando que éste tiene una inestabilidad que describió como “de contacto”. Taylor con su modelo de gotas coalescentes [17] encontró la misma inestabilidad. En [1] se propone el modelo de la figura 1.1 y se estudia el problema unidimensional, mostrando que pueden existir una, dos o ninguna soluciones estacionarias, dependiendo del voltaje que se aplica

al sistema, mientras que en [3] se estudia el sistema con simetría radial y se prueba la existencia de un infinito número de soluciones estacionarias para un valor de λ , alrededor del cual oscila la curva de soluciones estacionarias. En [4] se propone un esquema de control capacitivo y en [12] se muestra que el sistema es equivalente al de la figura 1.1. En [7] y [8], se prueba la existencia de soluciones estacionarias para voltajes menores a un voltaje crítico sin importar la geometría del sistema, así como la aparición de la inestabilidad de contacto para voltajes mayores. Además, se muestra que dicha inestabilidad implica que efectivamente hay contacto de la membrana con la placa. Tanto en [9] como en [13] se estudia el caso de una membrana dieléctrica y se muestra que, aún con propiedades dieléctricas hechas “a la medida”, no es posible eliminar la inestabilidad de contacto.

Capítulo 2

Los modelos

A continuación se presenta la deducción de la ecuación de una membrana elástica bajo la acción de un campo eléctrico, y posteriormente se hacen modificaciones en el entorno donde opera dicha membrana, obteniendo sus ecuaciones correspondientes.

2.1. El modelo básico

Consideremos el problema de una membrana elástica rectangular bajo la acción de un campo eléctrico (figura 1.1). En este caso, el potencial electrostático satisface

$$\Delta\Phi = 0, \quad (2.1)$$

$$\Phi(x', y', -h) = 0 \quad x \in [-l/2, l/2] \quad y \in [-w/2, w/2], \quad (2.2)$$

$$\Phi(x', y', U') = V_0 \quad x \in [-l/2, l/2] \quad y \in [-w/2, w/2], \quad (2.3)$$

donde $U'(x', y', t')$ es el desplazamiento de la membrana medido con respecto a $z' = 0$ y V_0 es el voltaje aplicado.

Por otro lado, la dinámica del sistema está descrita por

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U + a \frac{\partial}{\partial t'} U - T \Delta U = -\frac{\epsilon_0}{2} \|\nabla\Phi\|^2. \quad (2.4)$$

El lado izquierdo de la ecuación no es más que la Ley de Newton, donde ρ es la densidad superficial de masa, a es el coeficiente de viscosidad del medio y T es la tensión en la membrana. El lado derecho es la presión que ejerce el campo eléctrico sobre ésta y ϵ_0 es la constante de permitividad eléctrica en el vacío.

Además, asumimos que la membrana está fija en la frontera, esto es

$$U' = 0 \quad \text{en la frontera.} \quad (2.5)$$

Si reescribimos las ecuaciones (2.1)-(2.5) usando las variables adimensionales

$$\psi = \Phi/V_0, \quad u = U'/h, \quad x = x'/l, \quad y = y'/w, \quad z = z'/h, \quad (2.6)$$

obtenemos el nuevo conjunto de ecuaciones

$$\delta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.7)$$

$$\psi(x, y, -1) = 0, \quad x \in [-1/2, 1/2], \quad y \in [-1/2, 1/2], \quad (2.8)$$

$$\psi(x, y, u) = 1, \quad x \in [-1/2, 1/2], \quad y \in [-1/2, 1/2], \quad (2.9)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} + a \frac{\partial u}{\partial t'} - \frac{T}{l^2} \Delta u = -\frac{\epsilon_0 V_0^2}{2h^3} \left[\delta^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \delta^2 g^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (2.10)$$

$$u = 0 \text{ en la frontera de la membrana.} \quad (2.11)$$

Aquí $\delta = h/l$ es la razón entre la dimensión de la membrana y su separación de la placa y $g = l/w$ es la razón entre las dimensiones de la membrana misma. Asumimos que $g^2 = O(1)$. Por último, tomamos el cambio de variables en el tiempo $t = (T/al^2)t'$ y la ecuación (2.10) se vuelve

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\lambda \left[\delta^2 \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (2.12)$$

donde $\epsilon = \sqrt{\rho T}/al$ es el factor de calidad del dispositivo y $\lambda = \epsilon_0 V_0^2 l^2 / 2Th^3$ caracteriza las magnitudes relativas entre las fuerzas electrostáticas y mecánicas del sistema. Físicamente $\lambda > 0$.

Para desacoplar las ecuaciones (2.7) y (2.12), vamos a explotar el hecho de que la distancia entre la placa y membrana es mucho menor comparada con el área de la última, es decir, $h \ll l$. De este modo, podemos escribir el potencial como $\psi = \psi_0 + \delta \psi_1 + O(\delta^2)$ y aproximarlos por el primer término, de tal manera que las ecuaciones (2.7) y (2.12) se pueden aproximar por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.13)$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2, \quad (2.14)$$

y dado que $\psi(x, y, -1) = 0$ y $\psi(x, y, u) = 1$, la solución de (2.13) es

$$\psi(x, y, z) = \frac{1+z}{1+u},$$

y al sustituir en (2.14), podemos modelar la dinámica del sistema con la ecuación

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\frac{\lambda}{(1+u)^2}. \quad (2.15)$$

En el límite viscoso ($\epsilon \ll 1$), el término inercial de la ecuación se puede despreciar, y en este caso la dinámica es modelada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\frac{\lambda}{(1+u)^2}. \quad (2.16)$$

El diseño exitoso de aparatos como microválvulas o microcapacitores requiere un factor de calidad bajo, pues un microcapacitor cuyos extremos oscilan indefinidamente después de ser aplicado un voltaje es de poca utilidad. Es por eso que la ecuación (2.16) ha sido estudiada de manera extensa en [7] y [8]. En particular, el lector se puede referir a [18], donde encontrará de manera detallada la mayoría de los resultados que se tienen sobre este modelo.

2.2. Esquema de control capacitivo

Si bien la deducción de la dinámica del sistema realizada en la sección anterior es una buena aproximación bajo ciertas condiciones, está basada en la suposición de que el potencial sobre la membrana se mantiene constante aún cuando ésta se deforma. Para corregir este problema, podemos cambiar la condición (2.3) por una en donde el voltaje en la membrana dependa de su desplazamiento, es decir

$$\Phi(x', y', U') = V_0 f(U'),$$

o en las variables adimensionales (2.6),

$$\psi(x, y, u) = f(u), \quad (2.17)$$

donde $f(u)$ es una función que registra la dependencia del voltaje con el desplazamiento.

La forma de la función f depende del entorno en el cual se encuentra la membrana, por lo que se requiere un análisis más detallado de las condiciones en las que se encuentra ésta. Para ello, supongamos que el sistema es parte del circuito mostrado en la figura 2.1.

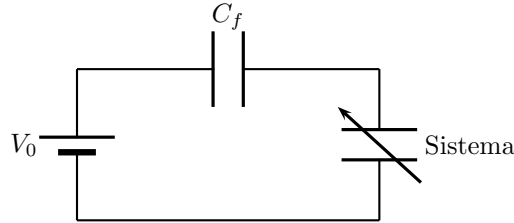


Figura 2.1: Esquema de un circuito de control capacitivo. El sistema es el mostrado en 1.1.

En este caso, el voltaje del sistema puede ser calculado usando la conservación de la energía:

$$V_0 = V_S + V_C = \frac{q}{C} + \frac{q}{C_f} = V_S \left(1 + \frac{C}{C_f} \right).$$

Este es el esquema de control propuesto por Seeger en [4]. El capacitor adicional permite que el circuito actúe como un divisor de voltaje y ejerce una

función estabilizadora, pues la capacitancia del sistema se incrementa conforme la membrana se aproxima a la placa, haciendo que V disminuya, reduciendo la fuerza electrostática y estabilizando el sistema.

La relación anterior nos permite definir la función f del circuito como

$$f(u) = \frac{1}{1 + C/C_f},$$

en donde requerimos calcular la capacitancia del sistema. Para ello, es necesario conocer el potencial para el caso $f(u) = 1$. De este modo, dada la densidad de carga $\sigma = \epsilon_0 \partial \Psi / \partial n$, sea Ω el dominio representado por la membrana, entonces tenemos que

$$C = \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial z'}(x', y', 0) dx' dy',$$

que en nuestras variables adimensionales toma la forma

$$C = C_0 \iint_{\Omega^*} \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, y, 0) dx dy,$$

donde $C_0 = \epsilon_0 w l / h$ es la capacitancia de la membrana sin deformar y Ω^* es el dominio transformado. Así, al resolver (2.13) con la condición (2.17), obtenemos que

$$\psi(x, y, z) = \frac{f(u)(1+z)}{1+u},$$

y por consiguiente,

$$f(u) = \left(1 + \chi \iint_{\Omega^*} \frac{d\xi d\eta}{1+u(\xi, \eta)} \right)^{-1},$$

donde $\chi = C_0 / C_f$.

De esta manera, la ecuación

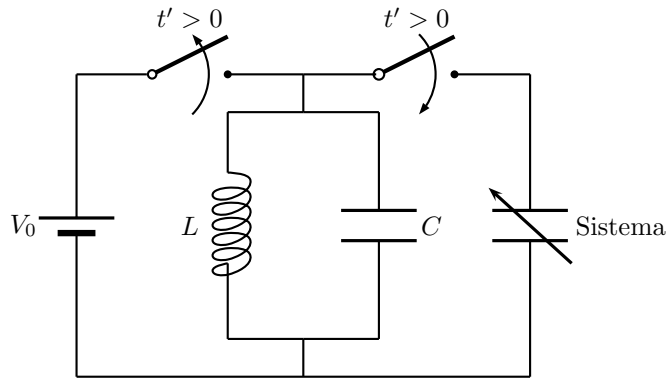
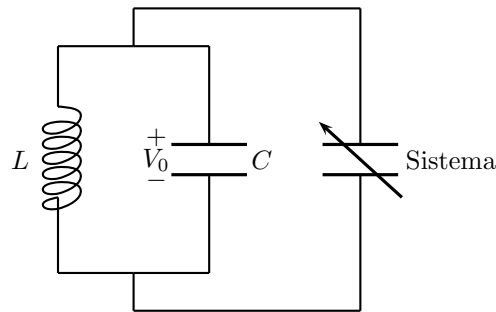
$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = - \frac{\lambda}{(1+u)^2 \left(1 + \chi \iint_{\Omega^*} \frac{d\xi d\eta}{1+u(\xi, \eta)} \right)^2}$$

modela la dinámica de la membrana bajo el esquema de control capacitivo.

2.3. Esquema de control LC

Si en lugar de poner un capacitor como elemento de control, ponemos una bobina (L) y un capacitor (C) en un esquema como el de la figura 2.2, es posible que logremos un mejor control sobre el sistema.

En $t' > 0$, el circuito es el mostrado en la figura 2.3.

Figura 2.2: Esquema de control LC .Figura 2.3: $t' > 0$

Así, el voltaje sobre la membrana está dado por $V_S = V_0 \cos \frac{t'}{\sqrt{LC}}$, o en variables adimensionales

$$V = V_0 \cos \omega t,$$

donde

$$\omega = \frac{a l^2}{T \sqrt{LC}}.$$

Podemos entonces definir la f del circuito como $f(u(x, y, t), t) = \cos \omega t$, y de este modo, la ecuación que modela a la membrana bajo el esquema de control LC es

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\frac{\lambda \cos^2 \omega t}{(1+u)^2}. \quad (2.18)$$

En el límite viscoso ($\epsilon \ll 1$), la dinámica es

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\frac{\lambda \cos^2 \omega t}{(1+u)^2}, \quad (2.19)$$

que es la ecuación que estudiaremos a lo largo de este trabajo.

Capítulo 3

Resultados preliminares

Antes de empezar a estudiar la ecuación (2.19), es conveniente enunciar algunos resultados conocidos para el modelo básico, así como del esquema de control capacitivo.

En el modelo básico (2.16) la no linealidad es independiente del tiempo, por lo que es de suma importancia estudiar el estado estacionario, cuya ecuación es

$$\begin{aligned}\Delta u - \frac{\lambda}{(1+u)^2} &= 0 && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $u = u(x)$ y $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Definición 3.0.1. Una función $\tilde{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ es llamada solución superior de (3.1) si

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{u} - \frac{\lambda}{(1+\tilde{u})^2} &\leq 0 && \text{en } \Omega, \\ \tilde{u} &\geq 0 && \text{en } \partial\Omega,\end{aligned}$$

De manera similar, $\hat{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ es llamada solución inferior si satisface las desigualdades inversas.

Notemos que una solución superior de este problema es $u \equiv 0$.

Para construir una solución inferior, sea u tal que $\Delta u = 1$ en Ω y $u = 0$ en la frontera. Por el principio del máximo para ecuaciones elípticas, $u < 0$ en Ω ; así, sea $m := \inf \{u(x) | x \in \Omega\}$ y $\alpha := -\frac{1}{2m}$. Si $\lambda \leq \alpha/4$, entonces

$$\Delta(\alpha u) - \frac{\lambda}{(1+\alpha u)^2} \geq \alpha - 4\lambda \geq 0,\tag{3.2}$$

por lo que u es solución inferior si $\lambda \leq \alpha/4$, y dado que la no linealidad $f(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$ es Lipschitz continua para $-1 < u$, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 3.0.1. *Existe λ_0 tal que (3.1) tiene al menos una solución $-1 < u \leq 0$.*

Prueba. Si tomamos $\lambda_0 = \frac{\alpha}{4}$ en el párrafo anterior, podemos construir una solución inferior y el teorema queda probado. \square

Como consecuencia inmediata de este teorema tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 3.0.1. *Si Ω es una banda de longitud l , existen soluciones estacionarias para $\lambda \leq l^{-2}$.*

Prueba. Siendo $u(x) = \frac{1}{2}(x^2 - lx)$ podemos escoger $\alpha = \frac{4}{l^2}$. \square

Corolario 3.0.2. *Si Ω es un disco de radio R , existen soluciones estacionarias para $\lambda \leq \frac{1}{2}R^{-2}$.*

Prueba. Se sigue de que en este caso, $u(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - R^2)$ y que podemos escoger $\alpha = R^{-2}$. \square

Es de crucial importancia determinar el conjunto de valores de λ para los cuales existen soluciones al problema estacionario, pues este parámetro controla las características del sistema. A este conjunto se le conoce como espectro del problema (3.1). En este respecto, se tienen los siguientes resultados:

Lema 3.0.1. *Cada λ en el espectro de (3.1) es positiva y si $\lambda_1 > 0$ pertenece al espectro, todo el intervalo $(0, \lambda_1]$ pertenece al espectro.*

Teorema 3.0.2. *Existe λ_* tal que hay al menos una solución estacionaria para $\lambda < \lambda_*$ y ninguna para $\lambda > \lambda_*$.*

En los casos en que la membrana tiene geometría de banda o de disco, se han encontrado resultados sorprendentes. Por ejemplo, cuando la membrana tiene geometría de banda, pueden existir una o dos soluciones estacionarias, o bien no existir ninguna, dependiendo del valor de λ . Por otro lado, cuando la geometría es la de un disco, pueden existir cualquier número de estas soluciones.

Una vez establecida la existencia de estados estacionarios, es necesario caracterizar la dinámica del sistema, que está determinada por

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + \frac{\lambda}{(1+u)^2} &= 0 && \text{en } \Omega_T, \\ u &= 0 && \text{en } \Gamma_T, \\ u(x, y, 0) &= 0 && \text{en } \Omega, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto, acotado y conexo, $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ para cada $T > 0$ y a la frontera del conjunto Ω_T como $\Gamma_T := \partial(\Omega_T) = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\})$. Al respecto, los siguientes resultados nos dicen algo sobre las propiedades de las soluciones, así como la existencia de valores de λ donde el sistema opera de manera estable.

Teorema 3.0.3. *Supongamos que $u(x, y, t; \lambda) > -1$ para $\lambda > 0$, y para todo punto $(x, y) \in \Omega$ y $t \in [0, T]$. Entonces*

- (i) $u(x, y, t; \lambda)$ es decreciente en t para cada $(x, y) \in \Omega$.
- (ii) $u(x, y, t; \lambda)$ es una función decreciente de λ .

Teorema 3.0.4. *Para $\lambda < \lambda_*$, la solución $u(x, y, t; \lambda)$ converge a una solución estacionaria conforme $t \rightarrow \infty$.*

Cuando $\lambda > \lambda^*$, no existen soluciones estacionarias al problema (3.3). En este caso, aparece una inestabilidad conocida como inestabilidad de contacto. Los siguientes teoremas expresan esta situación.

Teorema 3.0.5. *Para $\lambda > -\frac{4}{27}\mu_0$, $u(x, y, t; \lambda) = -1$ en tiempo finito, donde μ_0 es el primer valor propio del Laplaciano bajo condiciones de Dirichlet.*

Teorema 3.0.6. *Existe $\lambda^* > 0$ tal que hay contacto si $\lambda > \lambda^*$. Más aún, no ocurre contacto para $\lambda < \lambda^*$.*

Por último, consideremos el esquema de control capacitivo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{\beta}{(1+u)^2 \left(1 + \chi \iint_{\Omega^*} \frac{d\xi d\eta}{1+u(\xi, \eta)}\right)^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_T, \quad (3.4)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma_T.$$

De manera trivial, podemos enunciar el siguiente lema:

Lema 3.0.2. *Una solución u de (3.4) es solución de (3.3), mientras que una solución de (3.3) es solución de (3.4)*

Prueba. Sea $\beta = \lambda \left(1 + \chi \iint_{\Omega^*} \frac{d\xi d\eta}{1+u(\xi, \eta)}\right)^2$. □

Así, todos los resultados anteriores son aplicables al esquema de control capacitivo. Esto era de esperarse, pues dos capacitores colocados en serie son equivalentes a uno con capacidad menor, por lo que el problema se reduce al del modelo básico con una λ distinta, que está dada por el Lema 3.0.2.

Las pruebas del Lema 3.0.1, así como de los Teoremas 3.0.2 a 3.0.6 pueden ser encontradas en [8]. En este mismo artículo, se obtienen representaciones asintóticas de la solución cerca del contacto. El caso en que la membrana es una banda elástica es estudiado en [1] y [12], mientras que el análisis del disco elástico se hace en [3]. Como se mencionó anteriormente, el lector se puede referir a [18], donde se hace un estudio detallado de el modelo básico y se incluyen todos estos resultados. Además, se le presta especial atención a las geometrías mencionadas anteriormente.

El esquema de control capacitivo es analizado a detalle en [12].

Capítulo 4

Dinámica

Como se mostró en la sección 2.3, la dinámica de una membrana elástica bajo un esquema de control LC se modela por

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= -\frac{\lambda \cos^2 \omega t}{(1+u)^2} \quad \text{en } \Omega_T, \\ u &= 0 \quad \text{en } \Gamma_T,\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde

$$\lambda = \frac{\epsilon_0 V_0^2 l^2}{2Th^3}$$

y

$$\omega = \frac{al^2}{T\sqrt{LC}}.$$

Sea $f(t, u) = -\cos^2 \omega t / (1+u)^2$. Si $-1 < \alpha \leq u_1 \leq u_2 \leq 0$, entonces

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq \frac{2}{(1+\alpha)^4} |u_1 - u_2|,$$

por lo que $f(t, u)$ es Lipschitz continua y por lo tanto existe una única solución de (4.1) (ver [15], capítulo 10). Ahora bien, para mostrar los teoremas que se enuncian a continuación, haremos uso del siguiente lema de positividad para ecuaciones parabólicas:

Lema 4.0.3. *Sea $w \in C(\overline{\Omega}_T) \cap C^{1,2}(\Omega_T)$ tal que*

$$\begin{aligned}w_t - \Delta w + cw &\geq 0 && \text{en } \Omega_T \\ \alpha_0 \partial w / \partial \nu + \beta_0 w &\geq 0 && \text{en } \Gamma_T \\ w(0, x) &\geq 0 && \text{en } \Omega\end{aligned}$$

donde $\alpha_0 \geq 0$, $\beta_0 \geq 0$, $\alpha_0 + \beta_0 \geq 0$ en S_T y $c \equiv c(t, x)$ una función acotada en Ω_T . Entonces $w(t, x) \geq 0$ en $\overline{\Omega}_T$. Más aún, $w(t, x) > 0$ en Ω_T a menos que sea idénticamente cero.

Prueba. Ver [11], pág. 54. \square

Teorema 4.0.7. *Sea $u_*(x, t; \lambda) > -1$ solución inferior ($u^*(x, t; \lambda)$ solución superior) de (4.1) para algún $\lambda < \lambda^*$. Entonces $u_*(x, t; \lambda) \leq u(x, t; \lambda)$ ($u \leq u^*$), donde $u(x, t; \lambda)$ es una solución del problema (4.1).*

Prueba. Sea $w = u - u_*$. Entonces

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \left(\frac{\partial u_*}{\partial t} - \Delta u_* \right) \geq f(t, u) - f(t, u_*) = f_u(t, \eta(t, x))w,$$

donde $\eta(t, x)$ es una función intermedia entre u_* y u . Por el Lema 4.0.3, $u_* \leq u$. De manera análoga $u \leq u^*$. \square

Corolario 4.0.3. *Sea $u_*(x, t; \lambda)$ solución de (3.3) y $u(x, t; \lambda)$ solución de (4.1) con $-1 < u_*, u$ para el mismo valor de λ . Entonces $u_* \leq u \leq 0$. Más aún, si $0 < \lambda < \lambda^*$, entonces existe $u_s(x, t; \lambda)$ tal que $u_s \leq u \leq 0$, donde u_s es una solución estacionaria de (3.3).*

Prueba. Es claro que $u \equiv 0$ es una solución superior del problema. Ahora bien,

$$\frac{\partial u_*}{\partial t} - \Delta u_* = -\frac{\lambda}{(1 + u_*)^2} \leq -\frac{\lambda \cos^2 \omega t}{(1 + u_*)^2},$$

por lo que u_* es solución inferior del problema (4.1) y, por el teorema anterior, $u_* \leq u \leq 0$. La existencia de λ para la cual se cumple la segunda parte del corolario está garantizada por los Teoremas 3.0.2 y 3.0.4 de la sección anterior. \square

El Corolario 4.0.3 es de suma importancia, pues nos permite garantizar que nuestro esquema de control *LC* es, por lo menos, igual de eficiente que el esquema de control capacitivo.

Teorema 4.0.8. *Supongamos que $u(x, y, t; \lambda) > -1$ para $\lambda > 0$, y para todo punto $(x, y) \in \Omega$ y $t \in [0, T]$. Entonces*

(i) $u(x, y, t; \lambda)$ es decreciente en t para $t \in (0, \frac{\pi}{2\omega})$.

(ii) $u(x, y, t; \lambda)$ es una función decreciente de λ .

Prueba. (i) Sea $v = u_t$. Si derivamos la ecuación (4.1), tenemos que

$$v_t - \Delta v - \frac{2\lambda \cos^2 \omega t}{(1 + u)^3} v = \frac{\lambda \omega \sin 2\omega t}{(1 + u)^2} \quad \text{en } \Omega_T,$$

$$v = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times (0, \pi],$$

$$v(x, y, 0) = -\lambda \quad \text{en } \Omega,$$

y entonces

$$v_t - \Delta v - \frac{2\lambda \sin^2 \omega t}{(1 + u)^3} v \geq 0 \quad \text{en } t \in \left(\frac{2n-2}{2\omega} \pi, \frac{2n-1}{2\omega} \pi \right),$$

En el intervalo $(0, \frac{\pi}{2\omega})$, el Lema 4.0.3 nos garantiza que $v \leq 0$. Es más, $v < 0$, pues de lo contrario u no depende del tiempo en este intervalo y no es solución de (4.1).

(ii) Sea $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $v := u_1 - u_2$, entonces

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= -\frac{\lambda_1 \cos^2 \omega t}{(1+u_1)^2} + \frac{\lambda_2 \cos^2 \omega t}{(1+u_2)^2} \\ &= \frac{\cos^2 \omega t}{(1+u_2)^2} [\lambda_2 - \lambda_1] + \lambda_1 \cos^2 \omega t \left[\frac{1}{(1+u_2)^2} - \frac{1}{(1+u_1)^2} \right] \\ &\geq \frac{2\lambda_1 \cos^2 \omega t}{(1+\eta)^3} v, \end{aligned}$$

donde $\eta = \eta(x, y, t; \lambda)$ es una función intermedia entre las funciones $u_1(x, y, t; \lambda_1)$ y $u_2(x, y, t; \lambda_2)$. De este modo,

$$v_t - \Delta v - \frac{2\lambda_1 \cos^2 \omega t}{(1+\eta)^3} v \geq 0,$$

y por el Lema 4.0.3, $v \geq 0$ en Ω_T . Por lo tanto, u es una función decreciente de λ .

□

Nota. Al resolver la ecuación (4.1) numéricamente para las geometrías de banda y disco, se observa que si $\lambda < \lambda^*$, entonces la solución es periódica con periodo $T = \frac{\pi}{2\omega}$. Creemos que este resultado se mantiene para cualquier geometría y estamos buscando la manera de probarlo.

Capítulo 5

Contacto

La existencia de la solución de la ecuación (4.1) está condicionada a que $u > -1$, que físicamente significa que la membrana no haga contacto con la placa. Si dicha condición se viola, la no linealidad de la ecuación deja de ser Lipschitz continua y no se puede garantizar la existencia de soluciones. Por este motivo, es importante estudiar bajo qué condiciones la membrana puede alcanzar el contacto. Para ello, multiplicamos la ecuación (4.1) por u_0 , donde u_0 es la primera función propia de la ecuación de Laplace ($u_0 \geq 0$). Al integrar sobre el dominio Ω ,

$$\iint_{\Omega} u_0 u_t - \iint_{\Omega} u_0 \Delta u = -\lambda \cos^2 \omega t \iint_{\Omega} \frac{u_0}{(1+u)^2} = \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} u u_0 - \mu_0 \iint_{\Omega} u u_0.$$

Sea $E(t) = \int_{\Omega} u u_0 dx$, entonces

$$\frac{dE}{dt} = \mu_0 E - \lambda \cos^2 \omega t \iint_{\Omega} \frac{u_0}{(1+u)^2}$$

y al usar la desigualdad de Jensen sobre el término del lado derecho,

$$\frac{dE}{dt} + \mu_0 E \leq -\frac{\lambda \cos^2 \omega t}{(1+E)^2}.$$

Sea $\phi(t)$ tal que $\phi(0) = 0$ y

$$\frac{d\phi}{dt} = \mu_0 \phi - \frac{\lambda \cos^2 \omega t}{(1+\phi)^2}, \quad (5.1)$$

dado que

$$\inf u \leq E(t) \leq \phi(t),$$

entonces $\phi(t)$ captura el peor comportamiento que puede tener u (figura 5.1), por lo que entender las propiedades de dicha función para diferentes valores de λ y ω es de suma importancia. En las figuras 5.2 y 5.3 se muestran algunas soluciones de ϕ para diferentes valores de λ y ω en el caso de la banda ($\mu_0 = -\pi^2$).

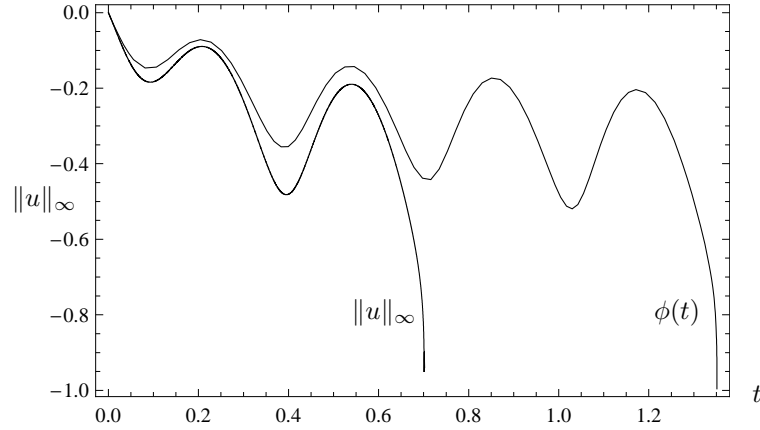


Figura 5.1: Comportamiento de $\|u\|_\infty$ y $\phi(t)$ para $\lambda = 2.8$ y $\omega = 10$.

Podemos observar que ϕ puede tener varios comportamientos, dependiendo de que valores adquieran ω y λ . Por ejemplo, si $\lambda < -4\mu_0/27$, ϕ nunca hace contacto, esto como consecuencia del Corolario 4.0.3. En cambio, si $\lambda > -4\mu_0/27$, el comportamiento depende de ω , pues para valores “pequeños” de ésta hay contacto. En cambio, ω es lo suficientemente grande, el contacto puede ser evitado.

Para caracterizar este comportamiento, haremos un análisis asintótico de la ecuación (5.1).

5.1. $\omega \gg 1$

Si ω es muy grande, podemos escribir (5.1) como

$$\frac{d\phi}{dt} = \mu\phi - \frac{\lambda \cos^2(t/\epsilon)}{(1+\phi)^2}, \quad \phi(0) = 0,$$

donde $\omega = 1/\epsilon$ y $\epsilon \ll 1$. Tomando la transformación $t = \omega\tau$, la ecuación anterior se vuelve

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \epsilon f(\tau, \phi), \quad \phi(0) = 0, \quad (5.2)$$

donde $f(\tau, \phi) = \mu\phi - \frac{\lambda \cos^2 \tau}{(1+\phi)^2}$ es una función periódica de τ . Este hecho sugiere que podemos aproximar (5.2) por métodos de promediación. Para ello, haremos uso del siguiente resultado, clásico en la teoría de promediación:

Teorema 5.1.1. *Consideremos los problemas de valores iniciales*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \epsilon f(t, x), & x(0) &= x_0, \\ \dot{w}(t) &= \epsilon f_o(w) + \epsilon^2 f_{1o}(w), & w(0) &= x_0, \end{aligned}$$

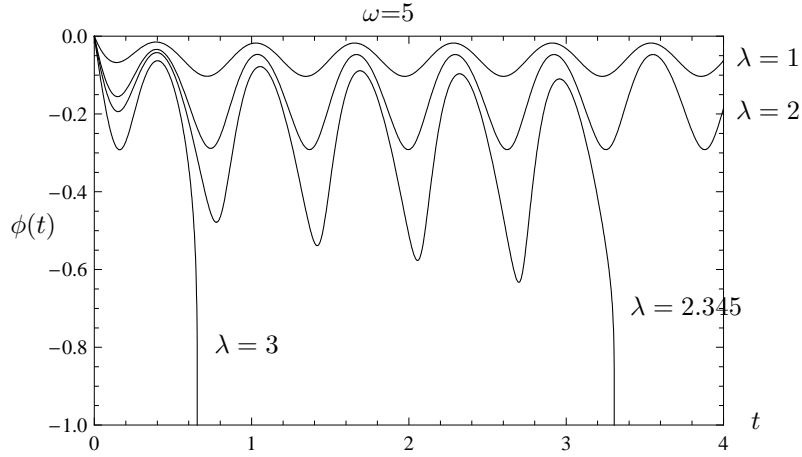


Figura 5.2: Comportamiento de $\phi(t)$ para ω fija y λ variando.

con $f \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x, w, x_0 \in D \subset \mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$, $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ y

$$f_1(t, x) = u_1(t, x) \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) - f_o(x) \frac{\partial}{\partial x} u_1(t, x),$$

donde

$$u_1(t, w) = \int_0^t [f(\tau, w) - f_o(w)] d\tau.$$

Supongamos que

a) f, f_1 son funciones Lipschitz-continuas y sus promedios f_o, f_{1o} existen.

b) $w(t)$ pertenece a un subconjunto interior de D en la escala de tiempo $\frac{1}{\epsilon}$.

Entonces en la escala de tiempo $\frac{1}{\epsilon}$,

$$x(t) = w(t) + \epsilon u_1(t, w(t)) + O(\epsilon^2).$$

Prueba. Ver [14], pág. 48. □

Al aplicar este teorema a la ecuación (5.2), obtenemos que

$$f_o(w(\tau)) = \mu w(\tau) - \frac{\lambda/2}{(1+w(\tau))^2},$$

$$u_1(\tau, w(\tau)) = -\frac{\lambda \operatorname{sen} 2\tau}{4(1+w(\tau))^2},$$

$$f_{1o}(w(\tau)) = 0.$$

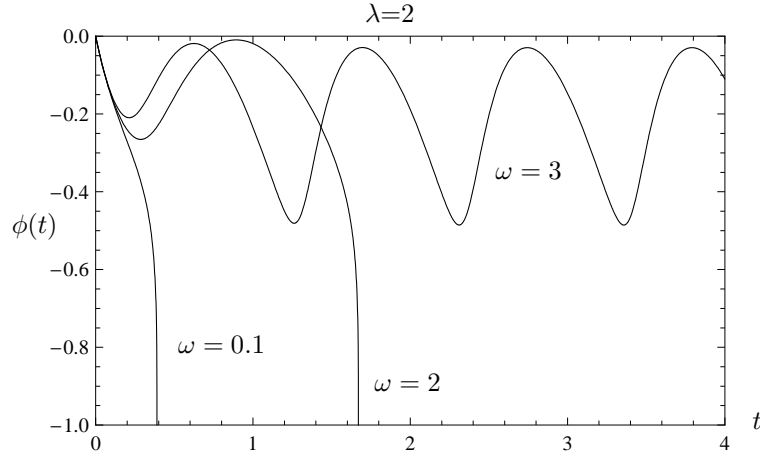


Figura 5.3: Comportamiento de $\phi(t)$ para λ fija y ω variando.

En la variable original,

$$\phi(t) = w(t) - \frac{\lambda \operatorname{sen} 2\omega t}{4\omega(1+w(t))^2} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right),$$

donde

$$\frac{dw}{dt} = \mu w - \frac{\lambda/2}{(1+w)^2}, \quad w(0) = 0.$$

Esta aproximación nos muestra que aún para valores grandes de ω la membrana hace contacto si $\lambda > -8\mu/27$; sin embargo, no es suficiente para encontrar una buena relación entre λ y ω que determine si ϕ hace contacto, pues la condición $\phi(t) < -1$ no se satisface para la mayoría de los valores de ω . Así, nos basamos en la prueba del teorema anterior para mejorar nuestra representación de $\phi(t)$. Sea pues $w(t)$ tal que

$$\dot{w} = \epsilon f_o(w) + \epsilon^2 f_{1o} + \epsilon^3 f_{2o}(w), \quad w(0) = 0,$$

y sean $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ y $u_3(t, w(t))$ tales que

$$x(t) = w(t) + \epsilon u_1(t, w(t)) + \epsilon^2 u_2(t, w(t)) + \epsilon^3 u_3(t, w(t)) + O(\epsilon^4),$$

donde

$$\dot{x}(t) = \epsilon f(t, x(t)), \quad x(0) = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} w(t) &= \epsilon \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau - \epsilon \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} u_1(\tau, w(\tau)) + w'(\tau) \frac{\partial}{\partial w} u_1(\tau, w(\tau)) \right] d\tau \\ &\quad - \epsilon^2 \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} u_2(\tau, w(\tau)) + w'(\tau) \frac{\partial}{\partial w} u_2(\tau, w(\tau)) \right] d\tau \\ &\quad - \epsilon^3 \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} u_2(\tau, w(\tau)) + w'(\tau) \frac{\partial}{\partial w} u_2(\tau, w(\tau)) \right] d\tau + O(\epsilon^4). \end{aligned}$$

Podemos expandir f en su serie de Taylor e igualar potencias,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = f - f_o,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = u_1 \frac{\partial f}{\partial w} - f_o \frac{\partial u_1}{\partial w} - f_{1o},$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + u_2 f - f_o \left(\frac{\partial u_2}{\partial w} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial w} \right)^2 \right) - f_{1o} \frac{\partial u_1}{\partial w} - f_{2o},$$

donde

$$f_o(w) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, w(t)) dt,$$

$$f_{1o}(w) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial f}{\partial w} u_1 - f_o \frac{\partial u_1}{\partial w} \right] dt,$$

$$f_{2o}(w) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} u_1^2 + \frac{\partial f}{\partial w} u_2 - f_o \left(\frac{\partial u_2}{\partial w} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial w} \right)^2 \right) - f_{1o} \frac{\partial u_1}{\partial w} \right] dt,$$

y entonces establecer un resultado como el del Teorema 5.1.1.

En nuestro caso,

$$f_o(w(\tau)) = \mu w(\tau) - \frac{\lambda/2}{(1+w(\tau))^2},$$

$$u_1(\tau, w(\tau)) = -\frac{\lambda \operatorname{sen} 2\tau}{4(1+w(\tau))^2},$$

$$f_{1o}(w(\tau)) = 0,$$

$$u_2(\tau, w(\tau)) = \frac{(1+3w(\tau))\lambda\mu \cos 2\tau}{8(1+w(\tau))^3} + \frac{\lambda^2 \cos 4\tau}{32(1+w(\tau))^5},$$

$$f_{2o}(w(\tau)) = \frac{\lambda^3}{16(1+w(\tau))^8} - \frac{(3+4w(\tau))\lambda^2\mu}{32(1+w(\tau))^6} - \frac{(1+4w(\tau)+9w^2(\tau))\lambda\mu^2}{8(1+w(\tau))^4},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \phi(t) = w(t) - \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\lambda \operatorname{sen} 2\omega t}{4(1+w(t))^2} \right\} \\ + \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{(1+3w(t))\lambda\mu \cos 2\omega t}{8(1+w(t))^3} + \frac{\lambda^2 \cos 4\omega t}{32(1+w(t))^5} \right\} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = \mu w - \frac{\lambda}{2(1+w)^2} + \\ \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{\lambda^3}{16(1+w)^8} - \frac{(3+4w)\lambda^2\mu}{32(1+w)^6} - \frac{(1+4w+9w^2)\lambda\mu^2}{8(1+w)^4} \right\}, \end{aligned}$$

$$w(0) = 0.$$

A continuación queremos encontrar una condición suficiente para que $\phi \leq -1$ para algún t . La ecuación diferencial que satisface $w(t)$ tiene una solución única para $-1 < w$, por lo que si existen puntos críticos de ésta en $-1 < w < 0$, entonces $w^* < w(t)$ para todo t , donde w^* es la más grande de las raíces reales

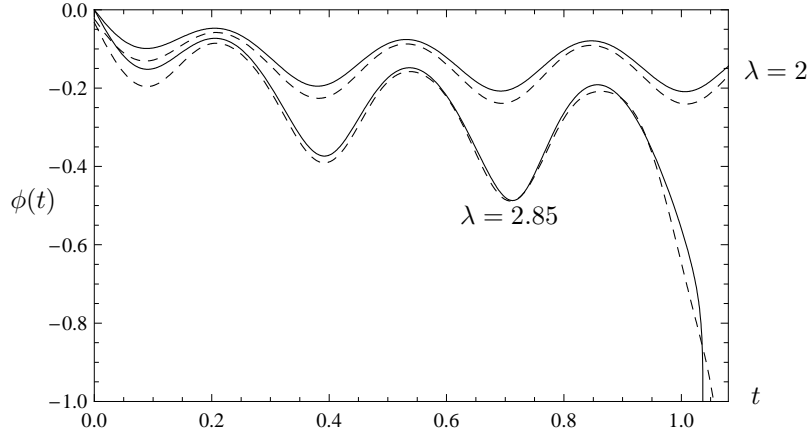


Figura 5.4: Las soluciones numéricas de la ecuación (5.1), comparadas con las representaciones asintóticas obtenidas. Aquí, $\omega = 10$.

negativas de la ecuación

$$\begin{aligned} & \mu\omega^2 w^9 + 8\mu\omega^2 w^8 + 28\mu\omega^2 w^7 + \left(-\frac{9\lambda\mu^2}{8} + 56\omega^2\mu - \frac{\lambda\omega^2}{2}\right) w^6 + \\ & \left(-5\lambda\mu^2 + 70\omega^2\mu - 3\lambda\omega^2\right) w^5 + \left(-\frac{71\lambda\mu^2}{8} + 56\omega^2\mu - \frac{15\lambda\omega^2}{2}\right) w^4 + \\ & \left(-\frac{\mu\lambda^2}{8} - 8\mu^2\lambda - 10\omega^2\lambda + 28\mu\omega^2\right) w^3 + \left(-\frac{11\mu\lambda^2}{32} - \frac{31\mu^2\lambda}{8} - \frac{15\omega^2\lambda}{2} + 8\mu\omega^2\right) w^2 + \\ & \left(-\frac{5\mu\lambda^2}{16} - \mu^2\lambda - 3\omega^2\lambda + \mu\omega^2\right) w + \frac{\lambda^3}{16} - \frac{\lambda\mu^2}{8} - \frac{\lambda\omega^2}{2} - \frac{3\lambda^2\mu}{32} = 0. \quad (5.3) \end{aligned}$$

En la figura 5.5, se muestran las raíces reales de este polinomio para $-1 < w < 0$. Podemos observar que hay una, dos o tres raíces, dependiendo del valor de ω . Este hecho nos va a permitir determinar si hay o no contacto, pues

$$\phi(t) = w(t) - \frac{\lambda \sin 2\omega t}{4\omega(1+w(t))^2} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \geq w^* - \frac{\lambda}{4(1+w^*)^2},$$

por lo que si w^* es tal que

$$w^* - \frac{\lambda}{4\omega(1+w^*)^2} > -1,$$

entonces $\phi(t)$ no hace contacto. De este modo, si

$$w^* > -1 + \left(\frac{\lambda}{4\omega}\right)^{1/3}, \quad (5.4)$$

entonces no hay contacto.

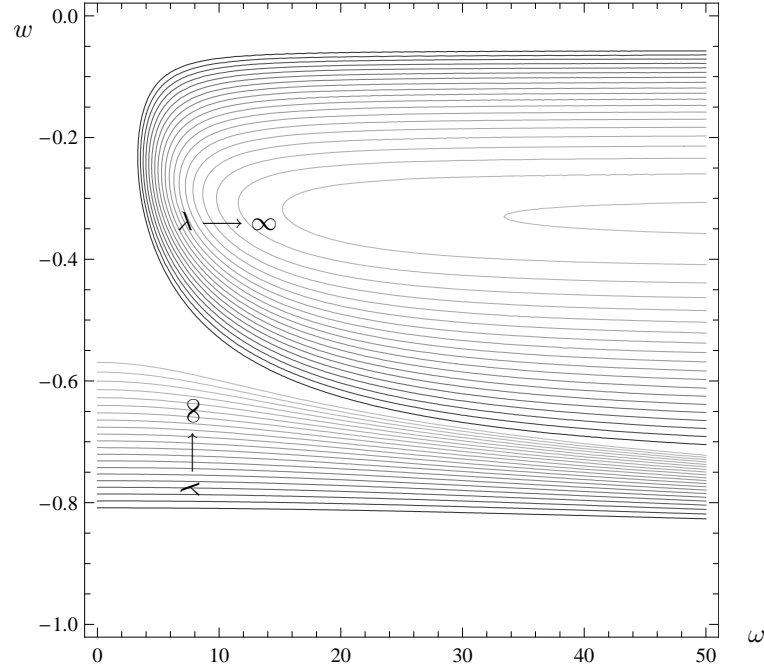


Figura 5.5: Raíces del polinomio (5.3) para $-1 < w < 0$. Conforme λ va aumentando, la segunda rama se aleja del origen.

La condición anterior se satisface si hay más de una raíz en $-1 < w < 0$ (ver figura 5.6), para ω lo suficientemente grande.

Así, podemos concluir que si el polinomio (5.3) tiene una sola raíz en el intervalo $(-1, 0)$, entonces la representación asintótica hace contacto. Si hay más de una, entonces no lo hay. En la figura 5.7 se muestra la región de contacto determinada por este criterio. Como se puede observar en la misma, la condición encontrada es suficientemente buena aún para valores pequeños de ω , pues la región de contacto dada por la representación asintótica está contenida en la región de contacto de la ecuación (5.1) para toda ω . Para ver esto, es necesario estudiar el comportamiento del polinomio (5.3) cuando ω tiende a infinito. En este caso, una de las raíces reales es $w = -1$, y la condición para exista otra es que $\lambda < -8\mu/27$, lo que es consistente con el resultado obtenido con la primera aproximación.

5.2. $\omega \ll 1$

Si ω es pequeño, entonces la ecuación (5.1) es de la forma

$$\frac{d\phi}{dt} = \mu\phi - \frac{\lambda \cos^2 \epsilon t}{(1 + \phi)^2}, \quad \phi(0) = 0, \quad (5.5)$$

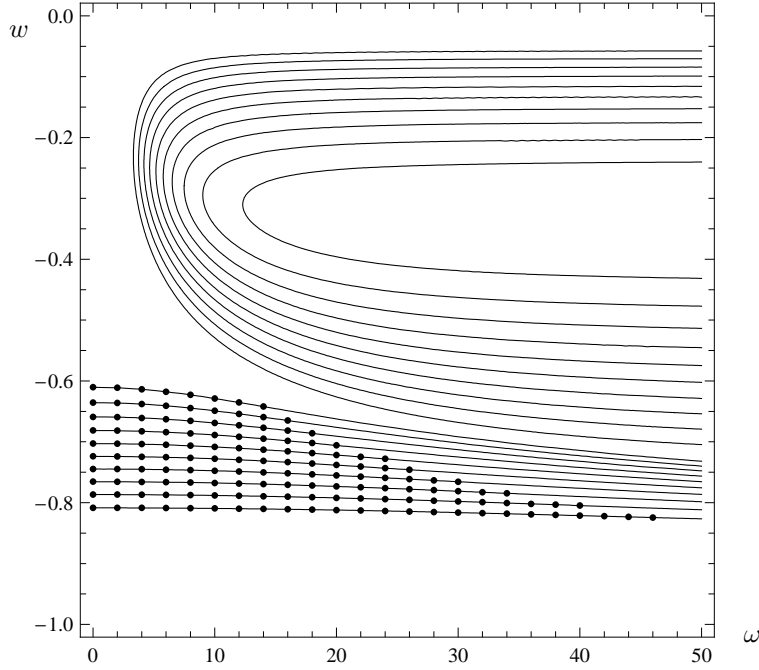


Figura 5.6: Raíces del polinomio (5.3) que no satisfacen la desigualdad (5.4) para diferentes valores de λ .

donde $\omega = \epsilon \ll 1$. Tomando el cambio de variables $\tau = \epsilon t$, esta ecuación se transforma en

$$\epsilon \frac{d\phi}{d\tau} = f(\tau, \phi), \quad \phi(0) = 0, \quad (5.6)$$

donde $f(\tau, \phi) = \mu\phi - \frac{\lambda \cos^2 \tau}{(1+\phi)^2}$. En este caso, se dice que el sistema está sobre-amortiguado, y la manera en que se obtendrá su representación asintótica es por medio del método de capa límite desarrollado por Vasil'eva en [2]. Siguiendo la notación de ésta, sea

$$\phi(\tau) = \bar{\phi}(\tau, \epsilon) + \Pi\phi(\eta, \epsilon),$$

donde $\tau = \epsilon\eta$,

$$\bar{\phi}(\tau, \epsilon) = \bar{\phi}(\tau) + \epsilon\bar{\phi}_1(\tau) + \dots,$$

es la expansión regular y

$$\Pi\phi(\eta, \epsilon) = \Pi_0\phi(\eta) + \epsilon\Pi_1\phi(\eta) + \dots,$$

es la expansión de capa límite. Entonces

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{d\bar{\phi}}{d\tau} &= \epsilon \frac{d\bar{\phi}}{d\tau} + \frac{d\Pi\phi}{d\eta} = f(\bar{\phi}(\tau, \epsilon) + \Pi\phi(\eta, \epsilon), \tau) \\ &= f(\bar{\phi}(\tau, \epsilon), \tau) + f(\bar{\phi}(\epsilon\eta, \epsilon) + \Pi\phi(\eta, \epsilon), \epsilon\eta) - f(\bar{\phi}(\epsilon\eta, \epsilon), \epsilon\eta), \end{aligned}$$

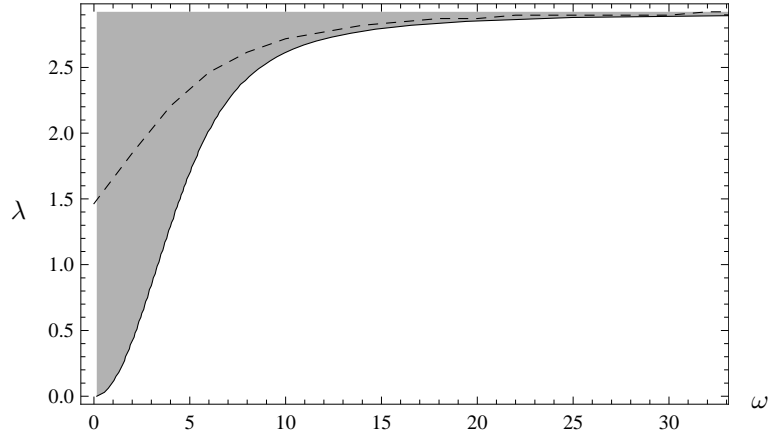


Figura 5.7: El área sombreada es la región de contacto determinada por el criterio de las raíces. La línea punteada es la frontera de la región real de contacto de $\phi(t)$.

por lo que la ecuación diferencial se puede escribir de la forma

$$\epsilon \frac{d\bar{\phi}}{d\tau} + \frac{d\Phi}{d\eta} = \bar{f}(\bar{\phi}(\tau, \epsilon), \tau) + \Pi f(\bar{\phi}(\epsilon\eta, \epsilon) + \Pi\phi(\eta, \epsilon), \eta),$$

donde $\bar{f} = f(\bar{\phi}(\tau, \epsilon), \tau)$ y

$$\Pi f(\bar{\phi}(\epsilon\eta, \epsilon) + \Pi\phi(\eta, \epsilon), \eta) = f(\bar{\phi}(\epsilon\eta, \epsilon) + \Pi\phi(\eta, \epsilon), \epsilon\eta) - f(\bar{\phi}(\epsilon\eta, \epsilon), \epsilon\eta).$$

Sustituyamos $\bar{\phi}(\tau, \epsilon)$ y $\Pi\phi(\eta, \epsilon)$ por sus series de potencias y representamos a f y Πf por

$$\begin{aligned} \bar{f} &= f(\bar{\phi}_0(\tau) + \epsilon\bar{\phi}_1(\tau) + \dots, \tau) \\ &= f(\bar{\phi}_0(\tau), \tau) + \epsilon\bar{f}_\phi(\tau)\bar{\phi}_1(\tau) + \dots + \epsilon^k[\bar{f}_\phi(\tau)\bar{\phi}_k(\tau) + f_k(\tau)] + \dots \\ &= \bar{f}_0 + \epsilon\bar{f}_1 + \dots + \epsilon^k\bar{f}_k + \dots, \end{aligned}$$

donde los elementos de $\bar{f}_\phi(t)$ son calculados en el punto $\bar{\phi}_0(\tau)$ y las funciones $f_k(t)$ son expresadas de manera recursiva por medio de $\bar{\phi}_i(t)$ con $i < k$;

$$\begin{aligned} \Pi f &= f(\bar{\phi}(\epsilon\eta, \epsilon) + \Pi\phi(\eta, \epsilon), \epsilon\eta) - f(\bar{\phi}(\epsilon\eta, \epsilon), \epsilon\eta) \\ &= [f(\bar{\phi}_0(0) + \Pi_0\phi(\eta), 0) - f(\bar{\phi}_0(0), 0)] + \epsilon[f_\phi(\eta)\Pi_1\phi(\eta) + g_1(\eta)] + \dots \\ &\quad + \epsilon^k[f_\phi(\eta)\Pi_k\phi(\eta) + g_k(\eta)] + \dots = \Pi_0 f + \epsilon\Pi_1 f + \dots + \epsilon^k\Pi_k f + \dots, \end{aligned}$$

donde los elementos de $f_\phi(\eta)$ son calculados en el punto $(\bar{\phi}_0(0) + \Pi_0\phi(\eta), 0)$, y las funciones $g_k(\eta)$ son expresadas de manera recursiva por $\Pi_i\phi(\eta)$ con $i < k$.

Al igualar en potencias de ϵ los términos de la ecuación diferencial obtenemos, para el término principal $\bar{\phi}_0(\tau)$,

$$0 = \bar{f}_0 = f(\bar{\phi}_0(\tau), \tau), \quad (5.7)$$

y para el término principal de capa límite $\Pi_0\phi(\eta)$,

$$\frac{d\Pi_0\phi}{d\eta} = \Pi_0 f \equiv f(\bar{\phi}_0(0) + \Pi_0\phi, 0) - f(\bar{\phi}_0(0), 0) = f(\bar{\phi}_0(0) + \Pi_0\phi, 0). \quad (5.8)$$

Para los términos $\bar{\phi}_k(\tau)$ y $\Pi_k\phi(\eta)$ ($k > 1$) obtenemos las llamadas *ecuaciones variacionales*

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\phi}_{k-1}}{d\tau} &= \bar{f}_k \equiv \bar{f}_\phi(t)\bar{\phi}_k + f_k(\tau), \\ \frac{d\Pi_k\phi}{d\eta} &= \Pi_k f \equiv f_\phi(\eta)\Pi_k\phi + g_k(\eta). \end{aligned}$$

Para definir las soluciones del sistema anterior, debemos imponer las condiciones iniciales. Así,

$$\bar{\phi}_0(0) + \Pi_0\phi(0) + \epsilon[\bar{\phi}_1(0) + \Pi_1\phi(0)] + \dots = 0,$$

por lo que

$$\bar{\phi}_k(0) + \Pi_k\phi(0) = 0,$$

y el sistema queda completamente determinado.

La suma parcial

$$\Phi_n(\tau, \epsilon) = \sum_{k=0}^n \epsilon^k [\bar{\phi}_k(\tau) + \Pi_k\phi(\eta)]$$

es la representación asintótica del problema (5.6) cuando $\epsilon \rightarrow 0$, si $f(\phi, \tau)$ satisface las siguientes condiciones:

- 1° f es tal que $f(\bar{\phi}, \tau) = 0$ tiene una raíz aislada $\bar{\phi}(\tau) = \varphi(\tau)$.
- 2° El punto estacionario $\varphi(\tau)$ es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov, uniformemente en t , con respecto al sistema asociado

$$\frac{d\tilde{\phi}}{ds} = f(\tilde{\phi}, \tau), \quad s \geq 0.$$

- 3° La solución $\tilde{\phi}(s)$ existe para $s \geq 0$ y tiende al punto estacionario $\varphi(0)$, conforme $s \rightarrow \infty$.
- 4° La función $f(\phi, \tau)$ es infinitamente diferenciable en el dominio de definición del problema.

Esto debido al siguiente teorema:

Teorema 5.2.1. (Vasil'eva) Bajo las condiciones 1°-4°, la serie $\Phi_n(t, \epsilon)$ es la representación asintótica de la solución $\phi(\tau)$ del problema (5.1) cuando $\epsilon \rightarrow 0$, en un intervalo $0 \leq \tau \leq T$. Es decir,

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\phi(\tau, \epsilon) - \Phi_n(\tau, \epsilon)\| = O(\epsilon^{n+1}).$$

Prueba. Ver [2], pág. 26. □

Es claro que si $-1 < \phi < 0$ y $\lambda < -\frac{4\mu}{27}$, las condiciones 1°-4° se verifican para $f(\phi, \tau) = \mu\phi - \frac{\lambda \cos^2 \tau}{(1+\phi)^2}$, por lo que el primer término de la representación asintótica está determinado por las soluciones de

$$0 = \mu\bar{\phi}_0(\tau)(1 + \bar{\phi}_0(\tau))^2 - \lambda \cos^2 \tau, \quad (5.9)$$

$$\frac{d\Pi_0\phi}{d\eta} = \mu(\bar{\phi}_0(0) + \Pi_0\phi) - \frac{\lambda}{(1 + \bar{\phi}_0(0) + \Pi_0\phi)^2}, \quad (5.10)$$

$$0 = \bar{\phi}_0(0) + \Pi_0\phi(0). \quad (5.11)$$

Así, para $\lambda < -\frac{4\mu}{27}$,

$$\phi(t, \epsilon) = \varphi(\epsilon t) + \Pi_0\phi(t) + O(\epsilon), \quad (5.12)$$

donde $\varphi(\epsilon t)$ es la mayor de las raíces negativas de la ecuación (5.9).

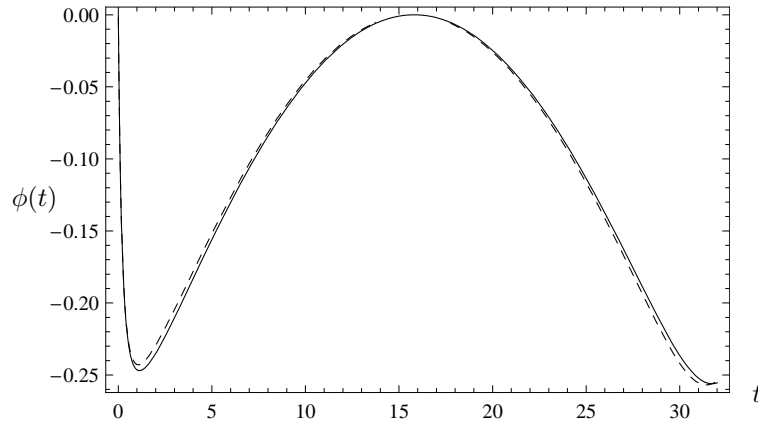


Figura 5.8: Solución de la ecuación (5.1) para $\lambda = 1.4$, $\omega = 0.1$. La curva punteada es la representación asintótica dada por (5.12).

5.2.1. $\lambda > -\frac{4\mu}{27}$

En la sección anterior se observa que para que exista solución a la ecuación (5.9) para todo tiempo, es necesario que el parámetro λ sea menor que un valor crítico $\lambda^* = -\frac{4\mu}{27}$. Cuando esta condición no se satisface, las curvas dadas por las raíces de (5.9) no están bien definidas para $t_* < t < t^*$, donde $t_* = \frac{1}{\omega} \arccos(-\sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}})$ y $t^* = \frac{1}{\omega} \arccos(\sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}}) + \frac{\pi}{\omega}$. En este caso, lo que eran dos soluciones bien definidas de (5.9) para $\lambda < \lambda^*$, se deforman hasta crear regiones cerradas o “ojos” cuando $\lambda > \lambda^*$ (figura 5.9).

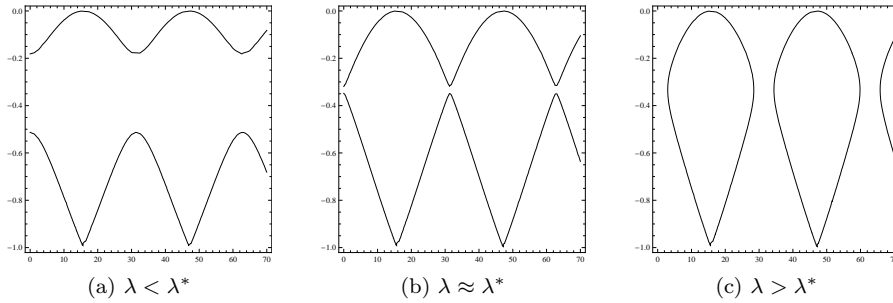
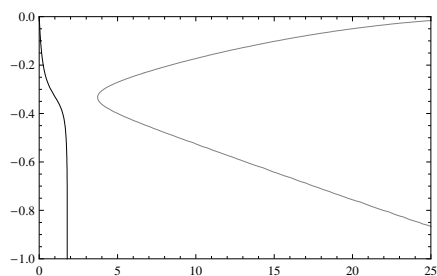
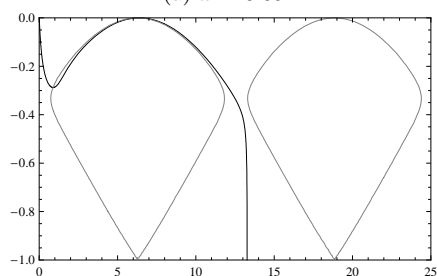
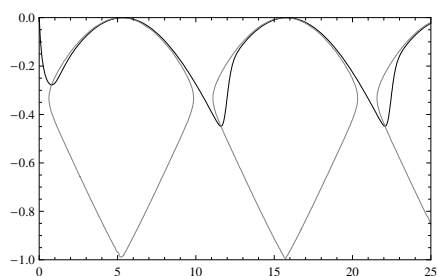


Figura 5.9: Raíces de (5.9)

Ahora bien, si $\lambda > \lambda^*$, la solución de (5.1) exhibe tres comportamientos distintos dependiendo de los valores de λ y ω : o hace contacto antes de entrar al primer ojo, o hace contacto antes de entrar al segundo, o no hace contacto nunca (figura 5.10).

Para entender el por qué de este comportamiento, pensemos en (5.1) como un sistema de ecuaciones diferenciales. Cuando $\lambda < \lambda^*$, el campo en la dirección ϕ es negativo en $\phi_1 < \phi < 0$, positivo en $\phi_2 < \phi < \phi_1$, y negativo en $-1 < \phi < \phi_2$, donde ϕ_1 y ϕ_2 son la mayor y la menor de raíces de (5.9) en $-1 < \phi < 0$ respectivamente. Ahora bien, cuando $\lambda > \lambda^*$, el campo es positivo en dirección ϕ solamente en el interior de los ojos, por lo que el comportamiento de $\phi(t)$ está determinado por la magnitud del campo fuera de éstos, así como la distancia que hay entre uno y otro. Dado que la solución del sistema se mueve con velocidad constante en la dirección t , el que alcance a entrar a alguna de estas regiones depende de los parámetros λ y ω , pues mientras más grande sea λ , mayor será la magnitud del campo fuera de los ojos y mayor la distancia entre ellos; por otro lado, al aumentar ω , disminuyen t_* y t^* , por lo que la distancia entre los ojos se reduce. El que $\phi(t)$ pueda dar sólo un ciclo se debe a que la distancia entre las ordenadas y el primer ojo es la mitad de la que hay entre dos ojos, por lo que puede pasar que la solución entre a la primera región y no alcance a entrar a la segunda. Si logra entrar a la segunda, entrará a las que siguen, pues todo es periódico a partir de la segunda región.

A continuación trataremos de caracterizar este comportamiento. Para ello, estudiaremos la ecuación (5.1) cerca del doblez de los ojos, es decir, cerca de

(a) $\omega = 0.05$ (b) $\omega = 0.25$ (c) $\omega = 0.3$ Figura 5.10: Soluciones de (5.1) para $\lambda > \lambda^*$

$\phi = -\frac{1}{3}$. Si escribimos (5.1) como

$$(1 + \phi)^2 \dot{\phi} = \mu \phi (1 + \phi)^2 - \lambda \cos^2 \omega t,$$

podemos aproximar el lado izquierdo de la ecuación por $\frac{4}{9} \dot{\phi}$ y la cúbica del lado derecho por una cuadrática. Para simplificar los cálculos, tomemos la traslación $\phi = \varphi - \frac{1}{3}$. Entonces

$$\frac{4}{9} \dot{\varphi} = \mu \left(\varphi - \frac{1}{3} \right) \left(\varphi + \frac{2}{3} \right)^2 - \lambda \cos^2 \omega t, \quad (5.13)$$

y cúbica la podemos aproximar por

$$\frac{\lambda^* - \lambda}{\kappa^2} \varphi^2 + \lambda^*,$$

donde κ es, en valor absoluto, la menor de las raíces de la cúbica de (5.13). Así, cerca del máximo aproximamos (5.13) por la ecuación de Riccati

$$\frac{4}{9}\dot{\varphi} = \frac{\lambda^* - \lambda}{\kappa^2}\varphi^2 + \lambda^* - \lambda \cos^2 \omega t. \quad (5.14)$$

Tomando el cambio de variables $\varphi = \frac{4\kappa^2}{9(\lambda - \lambda^*)} \frac{\dot{x}}{x}$, obtenemos la ecuación

$$\ddot{x} + \frac{81(\lambda - \lambda^*)}{16\kappa^2}(\lambda \cos^2 \omega t - \lambda^*)x = 0,$$

y sean $t = \frac{4\kappa}{9}\tau$ y $\lambda - \lambda^* = \delta > 0$, entonces

$$x''(\tau) + \delta(\delta - \lambda \sin^2 \omega_0 \tau)x(\tau) = 0, \quad (5.15)$$

donde $\omega_0 = \frac{4\kappa}{9}\omega$.

Entender el comportamiento de la solución a la ecuación de Mathieu (5.15) es fundamental para comprender que está pasando en el exterior de los ojos, pues la solución de (5.14) domina por debajo a la de (5.13). Si $x(\tau)$ no tiene ceros en el intervalo de tiempo de interés, entonces φ no hace contacto. Dado que $\delta(\delta - \lambda \sin^2 \omega_0 \tau) \leq \delta^2$, el teorema de comparación de Sturm nos garantiza que eso no sucede si

$$\delta < \frac{2\kappa\pi}{9(t_1 - t_*)},$$

donde (t_*, t_1) es el intervalo de tiempo donde se quiere determinar si hay o no ceros de $x(t)$. Es por eso que lo más natural sería pensar que $t_1 = t^*$, ya que es la distancia mínima entre dos ojos. Sin embargo, esta no es una buena elección, pues la función ϕ puede entrar al segundo ojo o hacer contacto después del tiempo t^* (ver figura 5.10c). De este modo, existe un intervalo óptimo para usar el criterio de comparación que depende del valor de λ , y es aquel en donde $\varphi(t_1)$ entra al segundo ojo o hace contacto. Encontrar el mejor valor de t_1 es equivalente a determinar numéricamente si φ hace o no contacto, lo que hace un tanto inútil la simplificación que se ha hecho del problema. Es por esto que sacrificamos exactitud a cambio de simplicidad y damos un valor de $t_1 = 2t^* - t_*$, que si bien no es el mejor, es suficiente para establecer un criterio de no contacto para $\varphi(t)$.

Las simplificaciones anteriores nos han permitido entender, al menos de manera cualitativa, que el contacto para $-\frac{4\pi}{27} < \lambda < -\frac{8\pi}{27}$ y ω pequeña depende de si hay o no una singularidad en el intervalo (t_*, t_1) , y nos han posibilitado obtener un criterio para determinar cuando esto sucede, al menos de manera aproximada.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto un esquema de control donde se mejora el intervalo de operación estable del MEMS de la figura 1.1. Se han encontrado condiciones suficientes para que la membrana haga contacto y se han analizado a detalle los comportamientos asintótico y numérico del sistema para diferentes regímenes de operación.

El que este esquema mejore el intervalo de operación estable del MEMS no viene sin inconvenientes, pues hay que introducir oscilaciones que pueden ser no deseadas para cierto tipo de dispositivos. Por esto, se debe plantear con mucho cuidado en qué condiciones dichas oscilaciones no juegan un papel importante o incluso son deseables para el diseño de estos dispositivos.

Si bien es muy importante conocer para qué valores de los parámetros la membrana hace contacto, es de igual importancia encontrar condiciones suficientes para garantizar que la membrana no haga contacto. Una manera de resolver este problema es usar una función que juegue el papel de la ϕ , pero que en vez de dominar por arriba a $\|u\|_\infty$, domine por abajo. La estructura de esta función debe de ser similar a la de ϕ , y es muy posible que con los métodos usados aquí se puedan obtener condiciones para que no exista contacto. Este estudio se encuentra en elaboración.

Por último, hay que mencionar que en el régimen de $\omega \gg 1$, el término inercial de la ecuación de movimiento puede ser grande y que a partir de un valor crítico de la frecuencia, la aproximación viscosa no sea buena, por lo que estudiar el problema hiperbólico también es importante.

Bibliografía

- [1] D. BERNSTEIN, P. GUIDOTTI, AND J. PELESKO, *Mathematical analysis of an electrostatically actuated mems devices*, in Proceedings of MSM, 2000.
- [2] V. BUTUZOV, L. KALACHEV, AND A.B.VASILEVA, *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*, SIAM, 1995.
- [3] X. CHEN AND J. PELESKO, *Electrostatic deflection of circular elastic membranes*, Journal of Electrostatics, 57 (2003), p. 1.
- [4] S. CRARY AND J. SEEGER, *Stabilization of electrostatically actuated mechanical devices*, Proceedings of the 1997 International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, (1997), p. 1133.
- [5] J. DAVIS, H. NATHANSON, W. NEWELL, AND R. WICKSTORM, *The resonant gate transistor*, IEEE Transactions on on Electron Devices, 14 (1967), p. 117.
- [6] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, 1998.
- [7] G. FLORES, G. MERCADO, J. A. PELESKO, AND N. SMYTH, *Analysis of the dynamics and touchdown in a model of electrostatic mems*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 67 (2007), p. 434.
- [8] G. FLORES, G. A. MERCADO, AND J. A. PELESKO, *Dynamics and touchdown in electrostatic mems*, MEMS, NANO, and Smart Systems, International Conference on, 0 (2003), p. 182.
- [9] Y. GUO, Z. PAN, AND M. J. WARD, *Touchdown and pull-in voltage behavior of a mems device with varying dielectric properties*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 66 (2005), p. 309.
- [10] E. INCE, *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1956.
- [11] C. V. PAO, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, 1992.
- [12] J. PELESKO AND A. TRIOLO, *Nonlocal problems in mems device control*, Journal of Engineering Mathematics, (2001), p. 345.

-
- [13] J. A. PELESKO, *Mathematical modeling of electrostatic mems with tailored dielectric properties*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 62 (2002), p. 888.
- [14] J. SANDERS AND F. VERHULST, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1985.
- [15] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, 1994.
- [16] A. SVESHNIKOV, A. TIKHONOV, AND A. VASILEVA, *Differential Equations*, Springer-Verlag, 1984.
- [17] G. TAYLOR, *The coalescence of closely spaced drops when they are at different electric potentials*, Proceedings of the Royal Society A, 306 (1968), p. 423.
- [18] M. TEJADA, *Modelación y análisis de una membrana elástica bajo la acción de un campo eléctrico en escalas micro y nano*, tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2006.