



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Una equivalencia algebraica al Teorema de los  
cuatro colores.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
GASDE AUGUSTO HUNEDY LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:  
MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ  
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA



2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Definiciones y resultados preliminares de la Teoría de Gráficas.</b>	<b>11</b>
2.1. Teoría de Gráficas y algunos resultados básicos. . . . .	11
2.2. Coloración de vértices en Gráficas. . . . .	30
2.3. Gráficas Planas y algunos resultados. . . . .	41
2.4. Un Teorema bien bonito: “ <i>Teorema de los Cinco Colores</i> ”. . .	52
<b>3. Definiciones y resultados preliminares del Álgebra.</b>	<b>57</b>
3.1. Monoides. . . . .	58
3.2. Grupos. . . . .	59
3.2.1. Sucesiones exactas de grupos. . . . .	67
3.3. Anillos. . . . .	69
3.3.1. El Anillo de polinomios. . . . .	76
3.3.2. Polinomios simétrico y polinomios de Laurent. . . . .	83
3.4. Campos. . . . .	85
3.5. Espacios vectoriales y Álgebra Lineal. . . . .	90
3.6. Álgebra con Gráficas . . . . .	99
<b>4. Las funciones <math>E_v</math>, <math>\chi_S</math> y algunos resultados necesarios.</b>	<b>105</b>
4.1. El elemento $\rho_G$ asociado a la gráfica $G$ . . . . .	105
4.2. El isomorfismo $E_v$ y una propiedad fundamental de la función $\chi_S$ . . . . .	107

<b>5. Propiedades básicas de <math>\rho_G</math>.</b>	<b>113</b>
5.1. $\rho_G$ y 4 coloraciones de una gráfica $G$ .	113
5.2. Teorema de Eliahou	116
5.3. Los automorfismos $\sigma, \tau_1, \tau_2$ y algunos resultados interesantes con $c(\rho_G, 1)$ .	118
<b>6. Primer cálculo del término independiente de <math>\rho_G</math>.</b>	<b>123</b>
<b>7. Segundo cálculo del término independiente de <math>\rho_G</math>.</b>	<b>131</b>
7.1. Hipergráficas.	145
7.1.1. Modelo spin para gráficas.	146
7.1.2. Modelo spin para hipergráficas.	149
<b>8. Cálculo de <math>\rho_G</math> para algunas gráficas.</b>	<b>151</b>
<b>9. Conclusiones.</b>	<b>163</b>

# Capítulo 1

## Introducción.

La antigua ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado, Rusia), es atravesada por el río Pregel y en la que se encuentran dos islas que también son parte de ella. En el siglo XVIII sus habitantes discutían en las tabernas del lugar la posibilidad de planear un paseo dominical de modo que se visitaran las cuatro partes de la ciudad atravesando todos sus puentes exactamente una vez y regresando al lugar de partida. En aquella época dichos puentes eran siete: cuatro de ellos unían las orillas opuestas con la pequeña isla de Kneiphof, otro puente comunicaba Kneiphof con la isla vecina y los dos puentes restantes unían ésta con tierra firme. Además, el paseo debería concluir en el mismo punto de partida. Este problema fue conocido como “*El problema de los puentes de Königsberg*”.

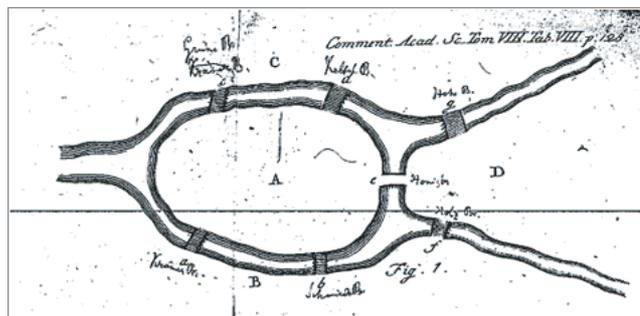


Figura 1.1: Diagrama de la ciudad de Könisberg

Pruebas repetidas llevaron a los interesados a la convicción de que era imposible hacerlo, hasta que el matemático Leonhard Euler atacó el problema y logró resolverlo. Para ello, elaboró un modelo matemático que lo representara gráficamente. Dibujó un punto por cada parte de la ciudad y los unió con una línea si existía un puente entre ellos, de la siguiente manera:

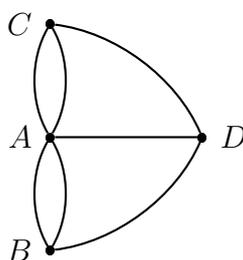


Figura 1.2: Gráfica de la ciudad de Königsberg.

De esta forma el problema se reduce a trazar un recorrido sobre esta figura sin pasar dos veces por una misma línea y terminando el trazo en el punto de inicio. Euler creía que el recorrido sí era posible y procedió a analizar las circunstancias que permitirían tal paseo. Su razonamiento, que presentó ante la Academia rusa de San Petersburgo en 1735, es el siguiente:

1. Se empieza en un punto cualquiera al que llamaremos origen ( $o$ ).
2. El recorrido debe terminar en el origen pues así lo plantea el problema.
3. Hay que pasar por todos los puntos al menos una vez.
4. Hay que atravesar todos los puentes exactamente una vez.
5. Considerando la situación en cualquier punto  $p \neq o$  observemos que:
  - a.- En algún momento hay que llegar a  $p$  por un puente.
  - b.- Como  $p \neq o$ , el recorrido no concluye ahí y hay que abandonar  $p$  por un puente distinto al que se usó para llegar.
  - c.- Si por algún motivo se volviera a pasar por  $p$ , la entrada y la salida habrían de tener lugar por dos puentes distintos entre sí y que, además, no hubieran sido utilizados en el recorrido anteriormente.

Es decir, cada vez que se pasa por  $p$  se entra por un puente y se sale por otro distinto.

6. Por lo tanto, debe haber siempre un número par de puentes que lleguen a todo  $p \neq o$ .
7. La situación en el origen es similar:
  - a.- Cada vez que se pasa por  $o$  se usa una pareja de puentes.
  - b.- Al iniciar el recorrido se sale por un puente y al finalizarlo se regresa por otro diferente; estos forman una pareja más.
8. Por lo tanto, en  $o$  también debe llegar un número par de puentes.
9. Lo anterior indica que de ser posible el recorrido sin repetir puentes, pasando por todos los puntos y por todos los puentes y terminando en el punto de partida, entonces, en cada punto el número de puentes debe ser par.

Esto demuestra que dicho recorrido es imposible y resuelve el problema (Figura 1.2); sin embargo, no es el único problema que resuelve, sino también todos los problemas similares con más o menos puntos y puentes.

Muchas situaciones de la vida real pueden también describirse adecuadamente por medio de diagramas como el ideado por Euler. Estos diagramas constan de un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen a algunos de los puntos. Por ejemplo, los puntos pueden representar personas y las líneas unir a parejas de amigos; o bien, los puntos podrían simbolizar centros de población y las líneas, las vías de comunicación que las unen. Es importante destacar que lo que realmente es relevante en este tipo de diagramas, no es el tipo de relación que se describa, sino el hecho de que dos puntos estén unidos por una línea o no; es decir, el hecho mismo de estar relacionados. Una abstracción matemática de esta naturaleza es lo que da origen al concepto de **gráfica** (o **grafo**). Una gráfica *es un conjunto finito de puntos llamados vértices o nodos junto con un conjunto de líneas que los unen llamadas aristas.*

Esto da inicio a una de las ramas de las Matemáticas más recientes y prolíficas: la **Teoría de Gráficas**. Dentro de las aplicaciones de esta rama se

encuentra el de coloración de vértices en gráficas y de la cual se desprende uno de los problemas más interesantes en esta rama “*El problema de los cuatro colores*”, del cual daremos una pequeña reseña histórica y trataremos en este trabajo.

A mediados del siglo XIX los cartógrafos y algunos aficionados ya tenían en mente que cualquier “mapa” podía ser coloreado con cuatro colores, con la condición de que países que compartieran frontera no tuvieran el mismo color. Este problema fue denominado “*El problema de los cuatro colores*” y como era de esperarse, una gran cantidad de estudiosos y curiosos intentaron comprobar su certeza o derrumbar su veracidad. La historia de esta conjetura, finalmente confirmada, es interesante.

Este problema fue inicialmente conocido con el nombre de “*Problema de Guthrie*” o *Conjetura de Guthrie*, debido a que fue Francis Guthrie, estudiante de la University College of London, quien primero lo dio a conocer en el año 1853. No satisfecho con las pruebas que trató de desarrollar, habló del problema a su hermano Frederick, el cual lo comunicó a su vez a su instructor, el famoso Augustus De Morgan en una carta fechada el 23 de octubre de 1852, De Morgan mencionó el problema a Sir William Rowan Hamilton, quien probablemente vislumbrando la extrema dificultad del mismo, le contestó que no tenía intención de considerarlo en un futuro próximo. De Morgan habló con frecuencia de este problema con otros matemáticos, de hecho, se cree que fue él mismo el autor de un artículo anónimo aparecido en el número del 14 de abril de 1860 de la revista *Athenaeum* y que trata del problema de los cuatro colores, siendo ésta la primera referencia publicada de dicha “conjetura”.

En la década de 1860 ya se tenía constancia del problema en Norteamérica, donde atrajo el interés del filósofo C. S. Pierce. El 13 de junio de 1878 el matemático Arthur Cayley preguntó si el problema había sido resuelto, y poco después publicó un artículo sobre el asunto, en el cual exponía las dificultades inherentes al mismo “*On the colourings of maps*” [31].

El número del 17 de julio de 1879 de la revista *Nature* anunciaba que el problema de los cuatro colores había sido resuelto, en el sentido de confirmar la conjetura, por el abogado inglés Alfred Bray Kempe. Su solución apareció en un artículo publicado en el ejemplar de la revista *American Journal*

---

of *Mathematics* de 1879. Así, el artículo de Kempe fue la primera supuesta demostración de que las regiones de un mapa cualquiera se pueden colorear con cuatro colores de forma que a regiones adyacentes correspondan colores distintos.

Durante la década que siguió a la publicación del artículo de Kempe el problema de los cuatro colores se consideró resuelto y por ese supuesto logro, Kempe fue nombrado Fellow de la Royal Society, y presentó algunos perfeccionamientos de su prueba. Tiempo después, P. G. Tait, de la Universidad de Edimburgo, describió otra supuesta demostración. Lewis Carroll creó un juego para dos jugadores en el cual cada uno de ellos diseñaba un mapa, sujeto a ciertas restricciones, que su oponente debía colorear con cuatro colores, siendo ganador el que lo conseguía antes. En 1889, el Obispo de Londres, Frederick Temple, más tarde Arzobispo de Canterbury, publicó su propia solución del problema de los cuatro colores en la revista *Journal of Education*.

Pero en 1890 se comprobó que el problema era mucho más complicado de lo que parecía. Percy John Heawood anunció haber descubierto un error en la demostración de Kempe, de tal gravedad que él mismo no fue capaz de corregir.

P. J. Heawood en su artículo “*Map-colour theorem*” [35], proporcionó el ejemplo de un mapa que, a pesar de poderse colorear fácilmente con cuatro colores, dejaba claro que la técnica de la demostración de Kempe no tenía validez general, cabe notar que el mapa usado por Heawood tenía 18 regiones, que más tarde se comprobó podían reducirse a 9. Sin embargo, debe mencionarse que Heawood utilizó la técnica de la demostración de Kempe para probar que cualquier mapa puede colorearse con cinco colores.

El problema de colorear mapas se generaliza a superficies no planas. Heawood obtuvo una fórmula que establecía el mínimo de colores necesarios para un mapa en una superficie cerrada cualquiera, con la excepción del caso de la botella de Klein. Para una superficie cerrada con una característica de Euler igual a  $n$  (el problema de los cuatro colores es también considerado un problema de topología), Heawood calculó el número mínimo de colores en:

- a) Para el toro, cuya característica de Euler es  $n = 0$ , el número mínimo de colores es de 7.

- b) Para la esfera, para la que su característica de Euler es  $n = 2$ , el número mínimo de colores es 4.

No se sabe con seguridad si la fórmula de Heawood establece la cota inferior para el número de colores en todos los casos, dejando aparte el de la botella de Klein.

A principios de la segunda mitad del siglo XX fue posible demostrar que bastan seis colores para el caso de la clase a la que pertenece el plano, y este número se redujo también fácilmente a cinco, pero rebajar el número de colores a cuatro resultó ser un problema sumamente difícil.

El 21 de junio de 1976 Kenneth Appel y Wolfgang Haken, de la Universidad de Illinois, anunciaron que, con la ayuda de John Koch, habían resuelto el problema de los cuatro colores. Su pretensión fue recibida con escepticismo, entre otras razones porque la solución propuesta requería cientos de horas de cálculos mediante computadora. No obstante, dicha solución ha resistido el escrutinio y la prueba del tiempo. Algunos matemáticos no aceptan esta prueba como una demostración rigurosa ya que parte de la prueba consiste en un análisis exhaustivo de muchos casos discretos mediante computadora. Esta actitud hostil hacia teoremas cuya demostración descansa en parte en una comprobación por computadora se ha relajado entre los matemáticos y actualmente se considera que el algoritmo del programa de cálculo puede considerarse válido como parte de la prueba. Así, en agosto de 1998 el siguiente resultado que se apoya en comprobaciones por computadora es la prueba de la conjetura de Kepler para el empaquetamiento de esferas, cuya demostración fue anunciada por Hales y Ferguson.

Una prueba del teorema de los cuatro colores que ha sido construida recientemente por Robertson, Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas (de la Escuela de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Georgia, en Estados Unidos), desarrollada en 1996 y publicada en 1997, aún utiliza una computadora, pero el desarrollo de la prueba es más simple. En un encuentro científico que tuvo lugar en Francia en diciembre de 2004, G. Gonthier de Microsoft Research de Cambridge, Inglaterra, en un trabajo realizado conjuntamente con B. Werner de INRIA, Francia, anunció la verificación de la demostración de Robertson, formulando el problema mediante el programa *Coq* de ecuaciones de tipo lógico, y confirmaron la validez de

cada uno de sus pasos (ver [10] y [36]).

La suma de los antecedentes que da el “Teorema de los cuatro colores”, muestra el gran interés que despertó. En la actualidad se sigue trabajando para encontrar pruebas más accesibles o relacionarlo con otras áreas de la Matemática, como es el caso del artículo de *Shalom Eliahou* “**An algebraic criterion for a graphs to be four-colourable**” [32] presentado en el seminario internacional de Álgebra y sus aplicaciones (México 1991), que utiliza un análisis algebraico, principalmente con polinomios. En este trabajo se estudiarán y expondrán los métodos abordados por *S. Eliahou* en su artículo.

Para comenzar, se mencionarán algunos conceptos que son necesarios como es el de color y el de mapa. Aunque este trabajo no se enfoca en sí, en comprender qué son los colores, qué es un mapa, es conveniente reconocer lo siguiente.

El concepto de color es el que entendemos como: “*una sensación que es percibida por los órganos visuales; está producida por los rayos luminosos y depende de su longitud de onda y de las características del órgano receptor*”. Como matemáticos no es relevante si los colores utilizados son el rojo, verde, magenta, blanco, entre otros. Desde el punto de vista matemático una paleta de colores es un conjunto de elementos distintos, por ejemplo:  $\{1, a, \Theta, \diamond\}$ , este conjunto representa una paleta de 4 colores.

Otro concepto importante de abordar es el de “mapa”. En el diccionario de la Real Academia de la lengua española encontramos lo siguiente:

**mapa.** *(Del b. lat. mappa, toalla, plano de una finca rústica.)*

1. m. *Representación geográfica de la Tierra o parte de ella en una superficie plana.*
2. m. *Representación geográfica de una parte de la superficie terrestre, en la que se da información relativa a una ciencia determinada. Mapa lingüístico, topográfico, demográfico.*

En diccionarios de lengua inglesa se encontraron otras dos interesantes definiciones:

**map n.**

1. *A representation, usually on a plane surface, of a region of the earth or heavens. (Una representación, usualmente en una superficie plana, de una región de la tierra o del cielo.)*
2. *Mathematics. The correspondence of elements in one set to elements in the same set or another set. (En Matemáticas. La correspondencia de elementos de un conjunto hacia elementos del mismo conjunto u otro.)*

En ambas definiciones se refleja muy bien lo que es un mapa desde el punto de vista de uso práctico y desde el punto de vista matemático (correspondencia de elementos entre dos conjuntos, en este caso el conjunto de puntos sobre la superficie del globo terráqueo o geoide y el conjunto de puntos en una hoja de papel, que es un plano). Ya que un mapa es una proyección de una realidad en tres dimensiones, es decir, considerando que la tierra es un geoide que se proyecta de manera gráfica en un espacio de dos dimensiones (una hoja de papel). De esta forma todo mapa tiene una representación en forma de gráfica [Capítulo 2, Sección 2.3].

Con esto y los antecedentes antes mencionados, se desarrolló este trabajo. En la primera parte encontramos definiciones y algunos resultados necesarios de la Teoría de Gráficas, sin dejar de mencionar en la sección 2.4 el Teorema de los cinco colores. Después se continua con el trabajo del Álgebra y al igual que en el primer capítulo, se mencionan definiciones y resultados esenciales para el cuerpo de este trabajo. En el tercer capítulo se introducen las herramientas previas para abordar el resultado principal, el cual muestra que toda gráfica  $G$  es 4 coloreable si y sólo si su elemento asociado  $\rho_G \neq 0$ . El capítulo 5 se enfoca primordialmente en el desarrollo del polinomio  $\rho_G$  asociado a  $G$ , se presentan sus propiedades básicas y uno de los teoremas más relevantes presentados aquí, el “Teorema de Eliashou”. Los capítulos 6 y 7 desentrañan a  $\rho_G$ , calculando su término independiente y mostrando algunas propiedades de este elemento. El último capítulo ofrece ejemplos en donde se aplica la teoría desarrollada así como la utilización de un nuevo elemento: *el polinomio de Laurent asociado a  $\rho_G$* .

## Capítulo 2

# Definiciones y resultados preliminares de la Teoría de Gráficas.

En este primer capítulo mostramos las definiciones necesarias para desarrollar el cuerpo de este trabajo así como algunos teoremas que serán necesarios.

### 2.1. Teoría de Gráficas y algunos resultados básicos.

**Definición 2.1.** Una *gráfica simple finita* o por comodidad, una *gráfica*  $G$ , es una pareja  $(V(G), A(G))$ , donde  $V(G)$  es un conjunto finito (posiblemente vacío), de objetos llamados *vértices*, denotado por  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , junto con el conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de  $V(G)$  llamados *aristas*, denotado por  $A(G) = \{(v_i, v_j) \mid \{v_i, v_j\} \subseteq V(G), v_i \neq v_j\}$ .

Durante el desarrollo de todo el trabajo denotaremos por  $p = |V(G)|$  y  $q = |A(G)|$ .

Cuando hablemos de una arista cualquiera  $a$ , utilizaremos la notación  $a = (v_i, v_j)$ , teniendo en cuenta que en este trabajo no se habla de aristas dirigidas. Por comodidad a la arista  $a$  la denotaremos únicamente por  $a$  y cuando se trate de varias aristas las denotaremos por  $A(G) = \{a_1, \dots, a_m\}$ . En la Figura 2.1 tenemos que para la gráfica  $G$ ,

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \text{ y}$$

$$A(G) = \{a_1 = (v_1, v_2), a_2 = (v_1, v_4), a_3 = (v_1, v_6), a_4 = (v_3, v_2), \\ a_5 = (v_4, v_2), a_6 = (v_4, v_3), a_7 = (v_7, v_8)\}.$$

Es necesario precisar que dentro de la definición de gráfica no consideramos el caso de **aristas múltiples**, es decir, una arista  $a = (v_i, v_j)$  que aparece más de una vez en  $A(G)$  y el caso en que  $i = j$  denominado **lazo**. Por esto tenemos también la siguiente definición que dentro de nuestro trabajo no requiere mayor importancia que el de ser notado.

**Definición 2.2.** Una **multigráfica** es una gráfica, cuyo conjunto de vértices es  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  y cuyo conjunto de aristas es  $A(G) = \{(v_i, v_j) \mid \{v_i, v_j\} \subseteq V(G)\}$ , que admite aristas múltiples y/o lazos.

**Definición 2.3.** La gráfica **vacía** es aquella tal que  $V(G) = \emptyset$  y  $A(G) = \emptyset$ . La denotamos por  $G_\emptyset$ .

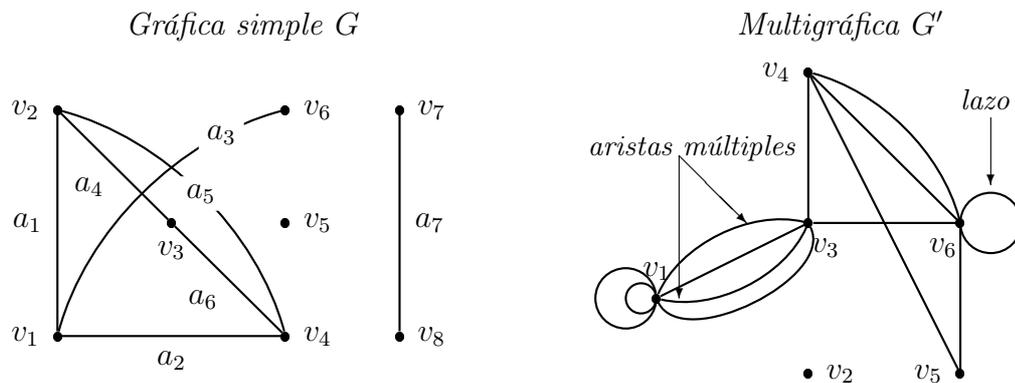


Figura 2.1: Una gráfica  $G$  y una multigráfica  $G'$ .

**Definición 2.4.** Si  $a = (v_i, v_j) \in A(G)$ , diremos que  $v_i$  es **adyacente en G a**  $v_j$  (denotado por  $v_i \text{ ady}_G v_j$ ) y llamamos al vértice  $v_i$  y al vértice  $v_j$  **extremos** de la arista  $a$ . También diremos que  $a$  **incide** en  $v_i$  o en  $v_j$ .

**Definición 2.5.** El **grado** de un vértice  $v_i$  en una gráfica  $G$  es el número de aristas que inciden en él, denotado como  $\delta(v_i)$ . También utilizaremos la notación  $\delta_G(v_i)$  para hacer referencia al grado del vértice  $v_i$  en la gráfica  $G$ .

**Definición 2.6.** El **grado máximo** de una gráfica es  $\max\{\delta(v_i) : v_i \in V(G)\}$  y lo denotamos por  $\Delta(G)$ . El **grado mínimo** de una gráfica es  $\min\{\delta(v_i) : v_i \in V(G)\}$  y lo denotamos por  $\delta(G)$ .

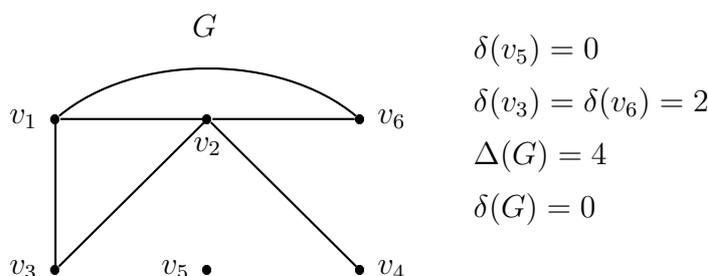


Figura 2.2: Una gráfica  $G$  y algunos de sus grados.

**Teorema 2.1.** Para cualquier gráfica  $G$ ,  $\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = 2q$ .

*Demostración.* Como una arista tiene dos extremos, entonces al sumar el grado de cada vértice cada arista es contada dos veces.  $\square$

**Definición 2.7.** Se dice que dos gráficas  $G$  y  $G'$  son **isomorfas** si existe una función biyectiva  $\varphi : V(G) \rightarrow V(G')$ , tal que, para todo  $\{v_i, v_j\} \subseteq V(G)$ ;  $v_i \text{ ady}_G v_j$  si y sólo si  $w_i = \varphi(v_i) \text{ ady}_{G'} \varphi(v_j) = w_j$  con  $\{w_i, w_j\} \subseteq V(G')$ . A la biyección  $\varphi$  que preserva adyacencias se le llama **isomorfismo de gráficas**. Cuando dos gráficas son isomorfas lo denotaremos por:  $G \cong G'$ .

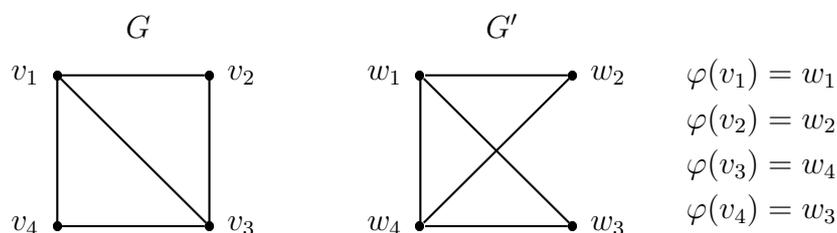
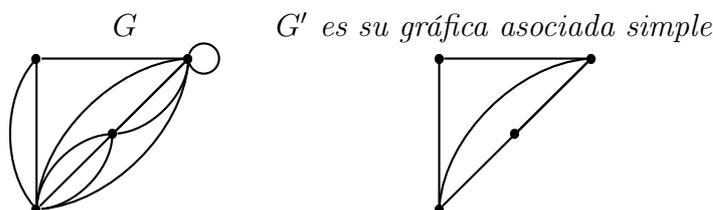


Figura 2.3: Una gráfica  $G$  y una gráfica  $G'$  isomorfa a  $G$ .

**Observación 2.1.** Dentro de este trabajo únicamente nos interesaremos en las gráficas simples, así cuando tengamos una multigráfica consideraremos su **gráfica asociada simple**, es decir, aquella sin aristas múltiples y/o lazos, pero que conserva las adyacencias originales: Por ejemplo, si  $G$  es la siguiente gráfica:



**Definición 2.8.** Una gráfica  $H = (V(H), A(H))$ , es una **subgráfica** de la gráfica  $G$ , si:  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H) \subseteq A(G)$ .

**Definición 2.9.** Diremos que una subgráfica de la gráfica  $G$  es una **subgráfica propia**, si  $V(H) \subset V(G)$ .

**Definición 2.10.** Una gráfica  $H$  es llamada **subgráfica generadora o gráfica parcial** de  $G$  si:  $V(H) = V(G)$  y  $A(H) \subseteq A(G)$ .

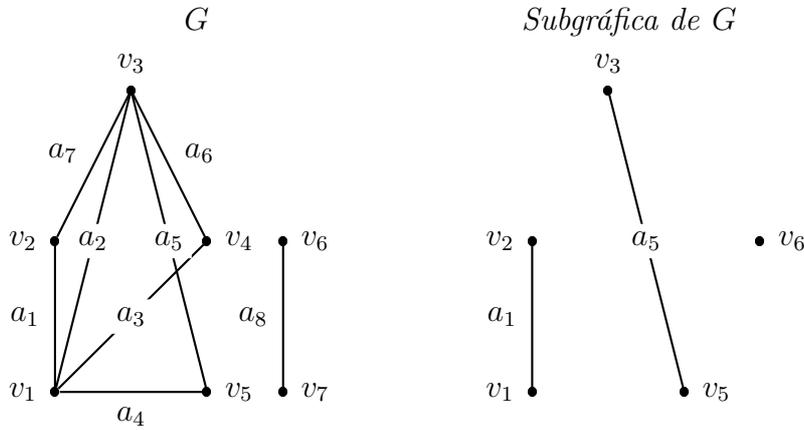


Figura 2.4: Una gráfica  $G$  y una de sus subgráficas.

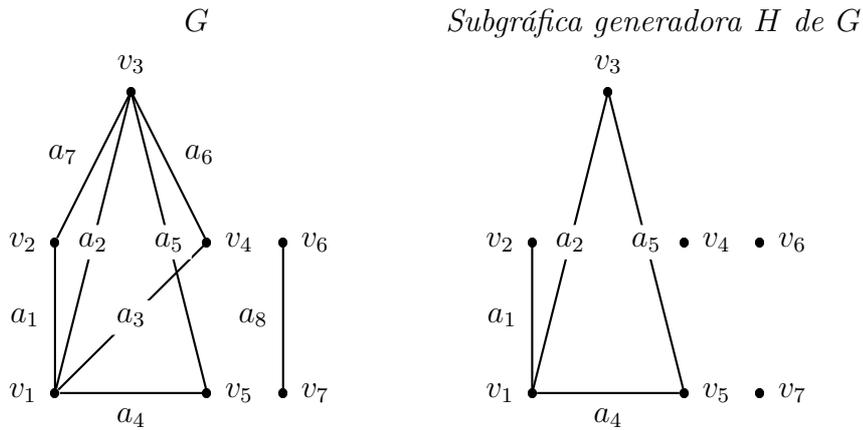


Figura 2.5: Una gráfica  $G$  y una de sus subgráficas generadoras.

**Definición 2.11.** Una gráfica  $H$  es denominada **subgráfica inducida por vértices** si es una subgráfica de  $G$  tal que,  $V' = V(H) \subseteq V(G)$  y su conjunto de aristas es el conjunto de aristas de  $G$  que tienen como vértices extremos a los elementos de  $V'$ . La denotaremos por  $G[V']$ .

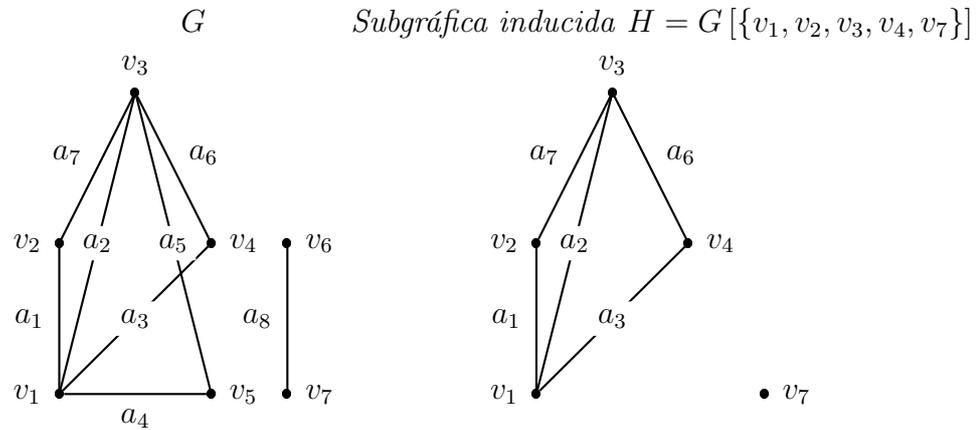


Figura 2.6: Una gráfica  $G$  y una de sus subgráficas inducidas por vértices.

**Definición 2.12.** Una gráfica  $H$  es nombrada **subgráfica inducida por aristas** o **gráfica positiva** si es una subgráfica de  $G$  tal que,  $A' = A(H) \subseteq A(G)$  y su conjunto de vértices es el formado por los vértices extremos de las aristas de  $A'$ . En otras palabras una gráfica positiva es aquella en la que todos sus vértices son de grado distinto de cero y la denotaremos por  $G[A']$ .

**Observación 2.2.** La gráfica vacía es positiva por definición.

**Observación 2.3.** El número de subgráficas positivas de  $G$  es  $2^q$  (considerando subgráficas isomorfas y la gráfica vacía).

*Demostración.* Como una subgráfica positiva esta determinada por un subconjunto de aristas y sus respectivos extremos, el número de subgráficas positivas es el número de subconjuntos formados por el conjunto de aristas, que es  $2^q$ .  $\square$

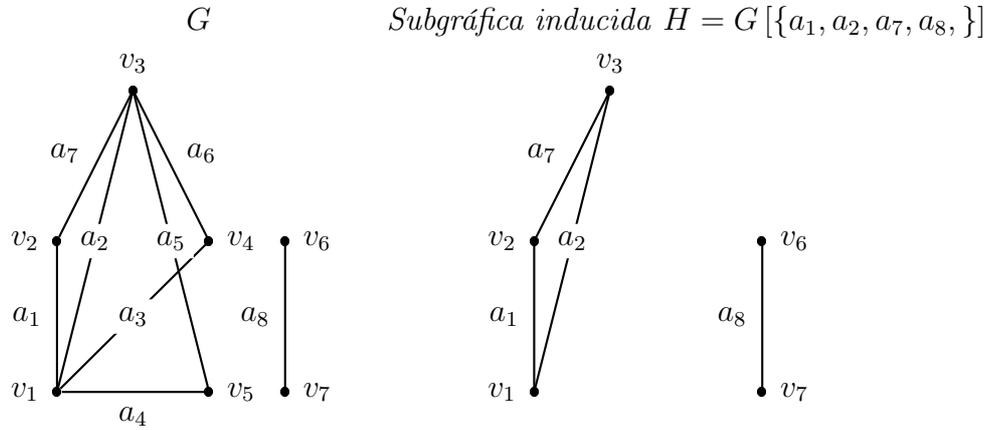


Figura 2.7: Una gráfica  $G$  y una de sus subgráficas inducidas por aristas o positiva.

**Definición 2.13.** Decimos que  $G$  es **completa**, si todos sus vértices tienen grado  $p - 1$ . La denotamos por  $K_p$ .

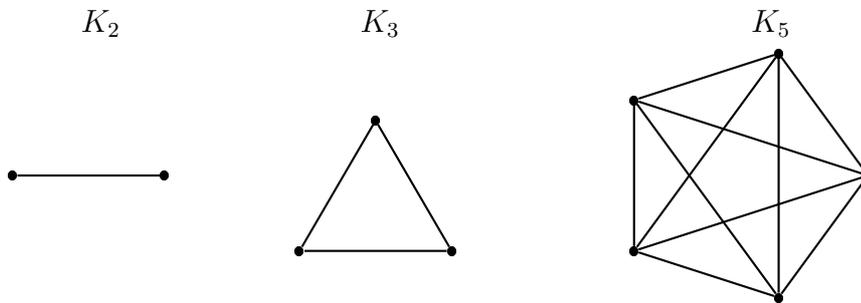


Figura 2.8: Gráficas completas.  $K_2$ ,  $K_3$  y  $K_5$ .

**Definición 2.14.** Dada una gráfica  $G$  y una arista  $a$  de  $A(G)$ , diremos que la **eliminación de  $a$**  es aquella gráfica que resulta de eliminar la arista  $a$  de  $G$ . Lo denotaremos por  $G - a$ .

**Observación 2.4.** De manera análoga a la Definición 2.14 podemos hablar de  $G - v$ , siendo  $v$  un vértice de  $G$ , como la gráfica que resulta de eliminar el vértice  $v$  y las aristas que inciden en él.

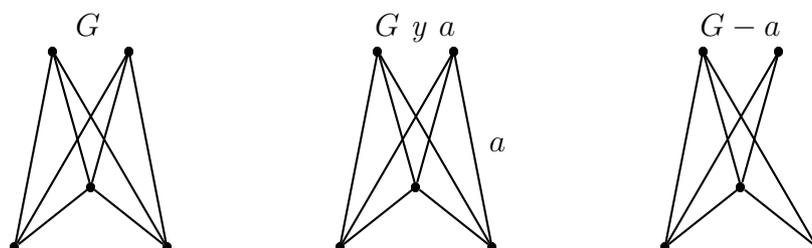


Figura 2.9: Una gráfica  $G$  y la eliminación de una de sus aristas.

**Definición 2.15.** Dada una gráfica  $G$ , diremos que la **adición de  $a$**  es aquella gráfica que resulta de aumentar la arista  $a$  a  $G$ . Lo denotaremos por  $G + a$ .

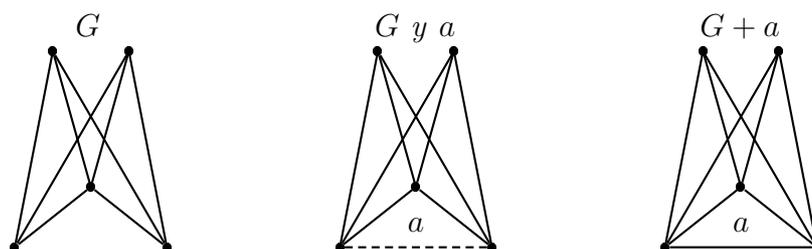


Figura 2.10: Una gráfica  $G$  y la adición de una arista.

**Definición 2.16.** Dadas  $G_1$  y  $G_2$  gráficas, la **unión**  $G_1 \cup G_2$  de  $G_1$  y  $G_2$  es la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(G_1) \cup V(G_2)$  y cuyo conjunto de aristas es  $A(G_1) \cup A(G_2)$ .

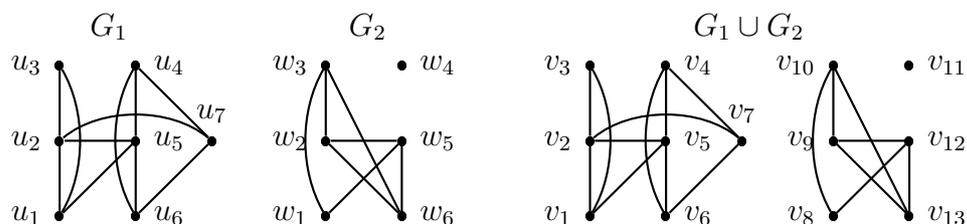


Figura 2.11: Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  y la unión de estas.

**Definición 2.17.** Dada una gráfica  $G$  y una arista  $a$  de  $A(G)$ , diremos que la **contracción** de  $a$  es aquella gráfica que resulta de eliminar la arista  $a$  de  $G$  e identificar los vértices extremos de esta conservando sus adyacencias. Lo denotaremos por  $G \bullet a$ .

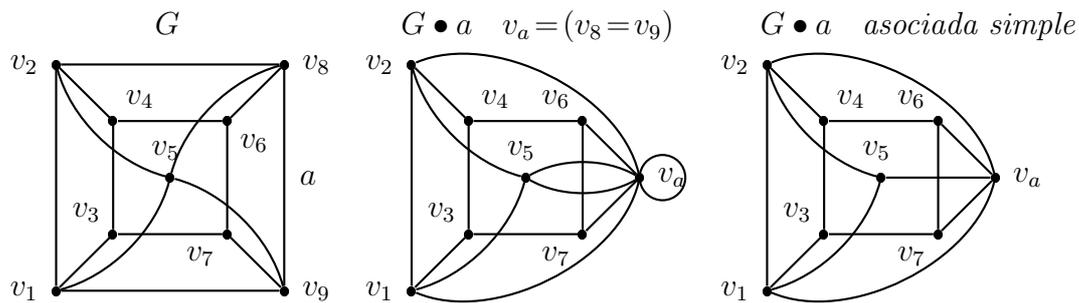


Figura 2.12: Una gráfica  $G$  y la contracción de una de sus aristas.

**Definición 2.18.** Se dice que un subconjunto  $S$  de  $V(G)$  es un **conjunto independiente de vértices** de  $G$  si cualesquiera dos vértices de  $S$  no son adyacentes.

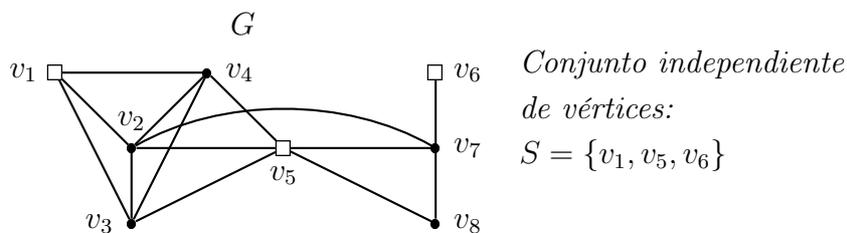


Figura 2.13: Una gráfica  $G$  y uno de sus conjuntos independiente de vértices.

**Definición 2.19.** Un **camino** en una gráfica  $G$  es una sucesión finita no nula  $W = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_m, v_m)$  cuyos términos alternan vértice y arista, tal que, para  $1 \leq i \leq m$ , los extremos de  $a_i$  son:  $v_{i-1}$  y  $v_i$ . Diremos que  $W$  es un **camino** de  $v_0$  a  $v_m$  o un  $v_0, v_m$  - camino, donde  $v_0$  es el vértice inicial y  $v_m$  el vértice final. La cantidad de aristas por las que pasa este se denomina la **longitud del camino** y lo denotaremos por  $\ell(W)$ .

**Definición 2.20.** Un **camino cerrado** en una gráfica  $G$  es un camino que comienza y termina en el vértice  $v_0$  del camino. Lo denotaremos por  $\overline{W}$ .

**Definición 2.21.** En una gráfica  $G$  un **ciclo** es un camino cerrado de longitud mayor o igual a 3, que únicamente repite el vértice inicial y el vértice final del camino. Lo denotamos por  $C$  y al igual que en la definición de camino denotaremos su **longitud** por  $\ell(C) = k$ .

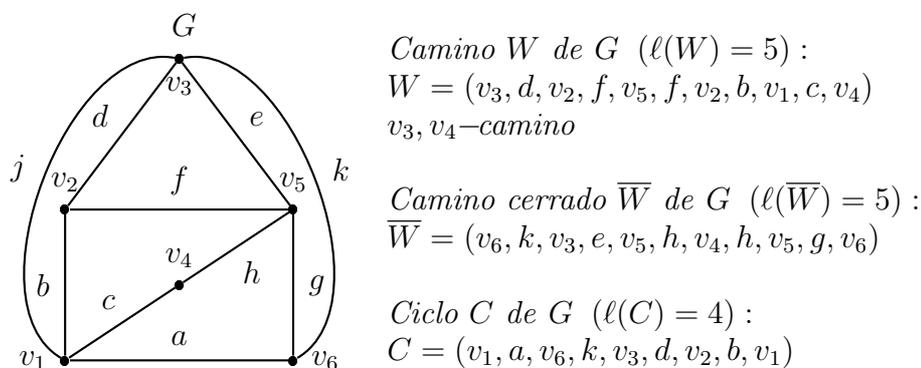
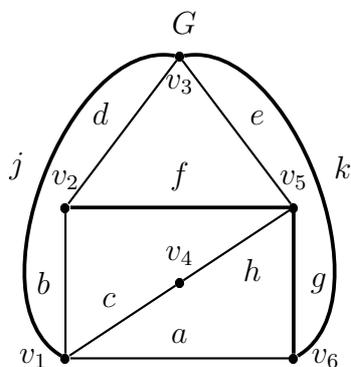


Figura 2.14: Una gráfica  $G$  con un camino, un camino cerrado y un ciclo de ésta.

**Definición 2.22.** Una **trayectoria** en una gráfica  $G$  es un camino que no repite vértices. Denotamos por  $Y$  a la trayectoria y denotaremos por  $\ell(Y) = k - 1$  a la trayectoria de **longitud**  $k - 1$  ( $k \geq 2$ ). Al igual que en la definición de camino podemos denotarla como una  $(v_0, v_k)$ -trayectoria.



Trayectoria de  $G$  :

$$Y = (v_1, j, v_3, k, v_6, g, v_5, f, v_2)$$

O podemos escribir:  $Y = (v_1, v_3, v_6, v_5, v_2)$

$$\ell(Y) = 4$$

Figura 2.15: Una gráfica  $G$  y una trayectoria de ésta.

Como en este trabajo únicamente nos referimos a gráficas simples, la sucesión  $(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_k, v_k)$  de términos alternantes de vértices y aristas, queda determinado por la sucesión  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$  de vértices; así un camino, un camino cerrado, un ciclo o una trayectoria en una gráfica simple se especifica con una sucesión de vértices. Por ejemplo, la sucesión del camino del Ejemplo 2.14  $W = (v_3, d, v_2, f, v_5, f, v_2, b, v_1, c, v_4)$  la podemos escribir como:  $W = (v_3, v_2, v_5, v_2, v_1, v_4)$ .

**Definición 2.23.** Una gráfica  $G$  es **conexa** si cualesquiera dos vértices están unidos por una trayectoria.

**Definición 2.24.** Una gráfica  $G$  es **disconexa** si no es conexa.

**Definición 2.25.** Una **componente conexa** es una subgráfica de  $G$  conexa tal que bajo la contención es máxima, es decir, es máxima por contención respecto a la propiedad de ser conexa. Denotaremos el número de componentes conexas de  $G$  por  $\omega(G)$ .

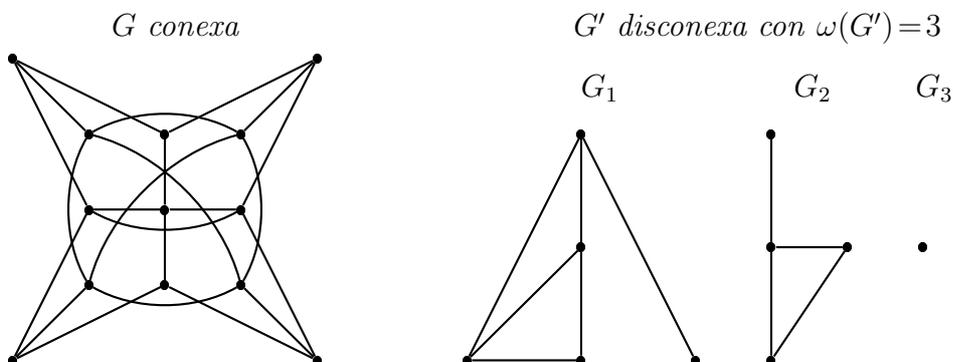


Figura 2.16: Una gráfica conexas  $G$  y una gráfica desconexa  $G'$  con tres componentes conexas.

Para la demostración del siguiente Lema haremos uso de la notación siguiente.

Si tenemos una gráfica  $G$  y una trayectoria  $Y$ , digamos  $Y = (x_0, \dots, x_i, \dots, x_m)$  junto con los vértices  $u, v \in V(G)$ . Denotamos por  $(u, Y, v)$  el camino cuyo conjunto de vértices es  $\{u, x_0, \dots, x_i, \dots, x_m, v\}$ .

**Lema 2.2.** *Sea  $G$  una gráfica conexas y  $a$  una arista contenida en un ciclo de  $G$ , entonces  $G - a$  es conexas.*

*Demostración.* Consideremos a  $G - a$ .

Queremos demostrar que para todo  $x, y \in V(G - a)$  existe un  $x, y$ -camino. Primero notemos que  $V(G - a) = V(G)$ , pues únicamente se elimina una arista, por lo que  $x, y \in V(G)$  y como  $G$  es conexas existe  $Y$  una  $x, y$ -trayectoria, de esto observemos dos posibles casos:

1. Si  $a \notin A(Y)$ , entonces  $Y$  es una  $x, y$ -trayectoria en  $G - a$ .
2. Si  $a \in A(Y)$ , denotemos por  $Y = (x = x_0, \dots, x_i, \dots, x_m = y)$  y por  $a = (x_i, x_{i+1})$ . Sea  $\gamma$  el ciclo de  $G$  que contiene a  $a$ . Consideremos en  $G - a$  a:  $\mathcal{C} = (x, Y, x_i) \cup (x_i, \gamma - a, x_{i+1}) \cup (x_{i+1}, Y, y)$ , el cual es un  $\mathcal{C}$   $x, y$ -camino en  $G - a$ .

□

**Definición 2.26.** Una *arista de corte* o *punte* de  $G$  es una arista  $a$  tal que  $\omega(G - a) > \omega(G)$ .

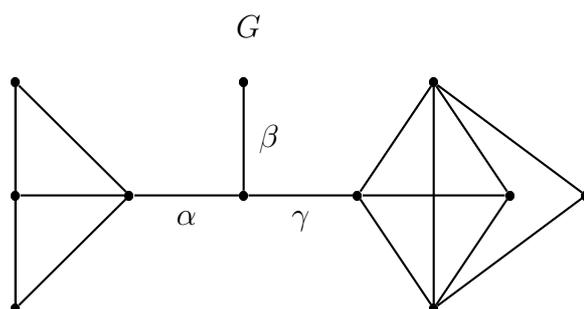


Figura 2.17: Una gráfica  $G$  y sus puentes  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**Proposición 2.3.** Si  $G$  es una gráfica y  $a \in A(G)$ , entonces

$$\omega(G) \leq \omega(G - a) \leq \omega(G) + 1.$$

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica y  $a \in A(G)$ . Consideremos dos casos:

1. Si  $G$  es conexa, entonces  $\omega(G) = 1$  de esta forma tenemos dos posibles subcasos:
  - 1.a) Si  $\omega(G) = 1 = \omega(G - a)$ , entonces  $\omega(G) = \omega(G - a) < \omega(G) + 1 = 2$ .
  - 1.b) Si  $\omega(G) < \omega(G - a)$ , entonces  $a$  es puente de  $G$  y como  $G$  es conexa y  $a$  tiene dos extremos tenemos que  $\omega(G - a) = 2$  y por lo tanto  $\omega(G) < \omega(G - a) = 2 = \omega(G) + 1$ .

De (1.a) y (1.b) deducimos  $\omega(G) \leq \omega(G - a) \leq \omega(G) + 1$ .

2. Si  $G$  es desconexa, entonces  $\omega(G) = n$  de esta forma tenemos dos posibles subcasos:
  - 2.a) Si  $\omega(G) = n = \omega(G - a)$ , entonces  $\omega(G) = \omega(G - a) < \omega(G) + 1 = n + 1$ .

2.b) Si  $\omega(G) < \omega(G - a)$ , entonces  $a$  es puente de alguna componente conexa  $G_i$  de  $G$ , entonces por (1.b)  $\omega(G_i - a) = 2$ , por lo que aumenta en 1 el número de componentes conexas de  $G - a$  respecto de  $G$ , así  $\omega(G - a) = n + 1$  y por lo tanto  $\omega(G) < \omega(G - a) = n + 1 = \omega(G) + 1$ .

De (2.a) y (2.b) deducimos también que  $\omega(G) \leq \omega(G - a) \leq \omega(G) + 1$ .  
Por lo tanto,  $\omega(G) \leq \omega(G - a) \leq \omega(G) - 1$ .  $\square$

**Teorema 2.4.** *Una arista  $a$  de  $G$  es puente de  $G$  si y sólo si  $a$  no está contenida en un ciclo.*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Sea  $a$  un puente de  $G$ . Como  $\omega(G - a) > \omega(G)$ , existen vértices  $v_i$  y  $v_j$  de  $G$  que están conectados en  $G$  pero no en  $G - a$ . Entonces existe una  $v_i, v_j$ -trayectoria  $Y$  en  $G$  la cual, necesariamente, pasa por  $a$ . Supongamos que  $a = (u, w)$ , es decir,  $u$  y  $w$  son los extremos de  $a$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $u$  precede a  $w$  en  $Y$ . En  $G - a$ ,  $v_i$  es conectado a  $u$  por una sección de  $Y$  y  $w$  es conectada a  $v_j$  por otra sección de  $Y$ . Si  $a$  estuviera en un ciclo  $C$ ,  $u$  y  $w$  estarían conectados en  $G - a$  por la trayectoria  $C - a$ . Así,  $v_i$  y  $v_j$  están conectados en  $G - a$ .

Contradiciendo el hecho de que  $v_i$  y  $v_j$  no están conectados en  $G - a$ .

$\Leftarrow$ ] Por contrarresíproca.

Supongamos que  $a = (u, w)$  no es puente de  $G$ ; así,  $\omega(G - a) = \omega(G)$ . Como existe una  $u, w$ -trayectoria, llamémosla  $uw$  en  $G$ ,  $u$  y  $w$  están en la misma componente conexa de  $G$  y también están en la misma componente conexa de  $G - a$ , así, existe una  $u, w$ -trayectoria  $Y$  en  $G - a$  y entonces  $a$  está en el ciclo  $Y + a$  de  $G$ .  $\square$

**Definición 2.27.** Un *bosque*  $F$  es una gráfica sin ciclos.

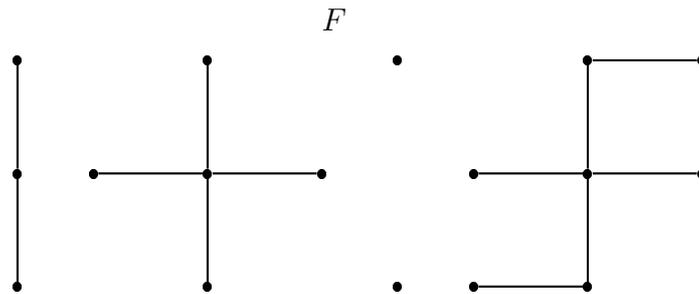


Figura 2.18: Un bosque  $F$

**Definición 2.28.** Un *árbol*  $T$  es una gráfica conexa sin ciclos.

**Observación 2.5.** Las componentes conexas de un bosque son árboles.

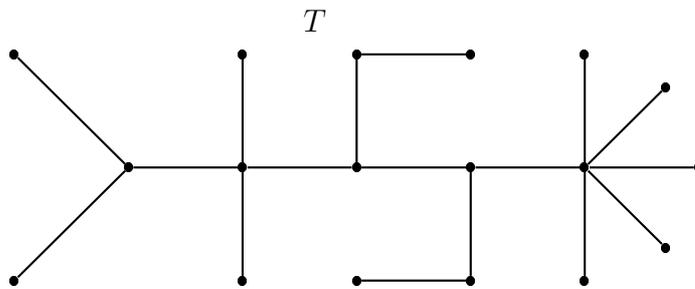
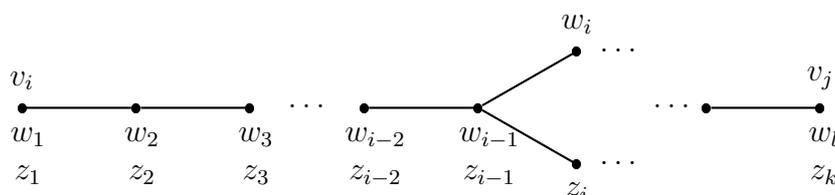


Figura 2.19: Un árbol  $T$ .

**Lema 2.5.** Sea  $G$  una gráfica, si dos trayectorias de  $G$  que empiezan y terminan en los mismos vértices,  $Y_1$  y  $Y_2$  son distintas, entonces al menos existe una arista  $a = (v_i, v_j)$  de  $Y_1$  que no es arista de  $Y_2$ .

*Demostración.* Sean  $Y_1 = (v_i = z_1, \dots, z_k = v_j)$  y  $Y_2 = (v_i = w_1, \dots, w_l = v_j)$  dos  $v_i, v_j$ -trayectorias tales que  $Y_1 \neq Y_2$ , por lo que existe  $z_m \in Y_1$  y  $w_t \in Y_2$  tales que  $z_m \neq w_t$ .

Figura 2.20: Las trayectorias  $Y_1, Y_2$ .

Entonces  $(z_{i-1}, z_i) \in Y_1$  y  $(w_{i-1}, w_i) \in Y_2$  pero  $(z_{i-1}, z_i) \neq (w_{i-1}, w_i)$  ya que  $z_{i-1} = w_{i-1}$ , pero  $z_i \neq w_i$ .

Afirmamos que  $(z_{i-1}, z_i) \notin Y_2$ , pues si sucediera que  $(z_{i-1}, z_i) \in Y_2$  entonces  $(z_{i-1}, z_i) = (w_{i-2}, w_{i-1})$ , luego  $z_i = w_{i-2} = z_{i-2}$  lo que es una contradicción. Por lo tanto  $(z_{i-1}, z_i) \notin Y_2$  y así hay por lo menos una arista que no comparten ambas trayectorias.  $\square$

**Teorema 2.6.** *Una gráfica  $T$  es árbol si y sólo si cualesquiera dos vértices son conectados por una única trayectoria.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Por contradicción.

Sea  $T$  un árbol y supongamos que existen dos  $v_i, v_j$ -trayectorias distintas, digamos  $Y_1$  y  $Y_2$  en  $T$ . Como  $Y_1 \neq Y_2$ , al menos existe una arista  $a = (x, y)$  de  $Y_1$  que no es arista de  $Y_2$ . Notemos que la gráfica  $(Y_1 \cup Y_2) - a$  es conexa, ya que  $a$  no pertenece a ambas trayectorias. Por lo tanto  $T$  contiene una  $x, y$ -trayectoria  $Y$ . Pero entonces  $Y + a$  es un ciclo en  $T$ , contradiciendo el hecho de que  $T$  no tiene ciclos. Por lo tanto si  $T$  es árbol, entonces cualesquiera dos vértices están conectados por una única trayectoria.

$\Leftarrow$ ] Supongamos ahora que  $T$  es una gráfica en la que cualesquiera dos vértices distintos están conectados por una única trayectoria. Esto implica que  $T$  es conexa. Ahora supongamos que  $T$  tiene un ciclo que contiene los vértices  $v_i$  y  $v_j$ , entonces  $v_i$  y  $v_j$  son conectados por dos trayectorias distintas. Contradiciendo el hecho de que  $T$  tiene una única  $v_i, v_j$ -trayectoria. Por lo tanto si en una gráfica  $T$  cualesquiera dos vértices están conectados por una única trayectoria, entonces  $T$  es árbol.  $\square$

**Teorema 2.7.** *Si  $T$  es árbol, entonces  $q = p - 1$ .*

*Demostración.* Por inducción sobre la cardinalidad del conjunto de vértices. Si  $p = 1$ , como  $T$  consta únicamente de un vértice entonces  $q = 0 = p - 1$ . Supongamos que el teorema es cierto para todos los árboles con menos de  $p$  vértices y sea  $T$  un árbol con  $p \geq 2$ . Consideremos  $a = (v_i, v_j) \in A(T)$ . Entonces  $T - a$  no contiene una  $v_i, v_j$ -trayectoria, ya que por el Teorema 2.6,  $a$  es la única  $v_i, v_j$ -trayectoria en  $T$ , así  $T - a$  es desconexa. Por la proposición 2.3, tenemos que  $\omega(T - a) = 2$ . Sean  $T_1$  y  $T_2$  las componentes de  $T - a$ , estas son acíclicas, pues de lo contrario  $T$  tendría ciclos, contradiciendo el hecho de que  $T$  es árbol. Por lo tanto  $T_1$  y  $T_2$  son árboles. Más aún, son árboles con menos de  $p$  vértices cada una de ellas. Sea  $p' = |V(T_1)|$ ,  $p'' = |V(T_2)|$ ,  $q' = |A(T_1)|$  y  $q'' = |A(T_2)|$ . Entonces por hipótesis de Inducción:

$$q' = p' - 1 \text{ y } q'' = p'' - 1$$

Así

$$q = q' + q'' + 1 = p' + p'' - 1 = p - 1$$

□

**Teorema 2.8.** *Todo árbol  $T$  con  $p \geq 2$  tiene al menos dos vértices de grado 1.*

*Demostración.* Sea  $T$  un árbol con  $p \geq 2$  y sea  $Y$  una trayectoria de longitud máxima en  $T$ ,  $Y = (v_1, \dots, v_m)$  con  $\ell(Y) = m - 1$ .

Mostraremos que  $v_1$  y  $v_m$  tienen grado 1. Pues de lo contrario, tendríamos que  $\delta(v_1) \geq 2$  y  $\delta(v_m) \geq 2$ . Esto querría decir que existe un vértice  $v_{m+1} \neq v_2$  tal que  $v_1 \text{ ady}_T v_{m+1}$ . Si  $v_{m+1} \in V(Y)$ , como  $T$  es conexa, existe una  $v_i, v_{m+1}$ -trayectoria para cualquier  $v_i \in V(Y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Llamemos a esta trayectoria  $Y_i$  y consideremos a  $C$  del siguiente modo:

$$C = (v_1, \dots, v_i) \cup Y_i \cup (v_{m+1}, \dots, v_1),$$

$C$  es un ciclo, lo que contradice la hipótesis de que  $T$  es un árbol.

Si  $v_{m+1} \notin V(Y)$ , entonces  $Y_0 = \{v_{m+1}\} \cup Y$  tiene longitud  $m$ , con lo que  $\ell(Y_0) > \ell(Y)$  y esto contradice la elección de  $Y$ . Por lo tanto concluimos que necesariamente,  $\delta(v_1) \geq 2$ . La situación para  $v_m$  se analiza de manera análoga, con lo que hemos demostrado que  $\delta(v_1) = \delta(v_m) = 1$ . □

**Teorema 2.9.** *Una gráfica conexa  $T$  es árbol si y sólo si toda arista de  $T$  es puente.*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Sea  $T$  un árbol y  $a \in A(T)$ . Como  $T$  es acíclica,  $a$  no está contenida en ningún ciclo de  $T$  y entonces por el Teorema 2.4  $a$  es puente de  $T$ .

$\Leftarrow$ ] Por contrapositiva.

Supongamos que  $T$  es conexa pero no es árbol. Entonces  $T$  contiene al menos un ciclo  $C$ . Por el Teorema 2.4 ninguna arista de  $C$  puede ser puente de  $T$ .  $\square$

**Definición 2.29.** *Un árbol generador de una gráfica  $G$  es una subgráfica generadora de  $G$  que es árbol.*

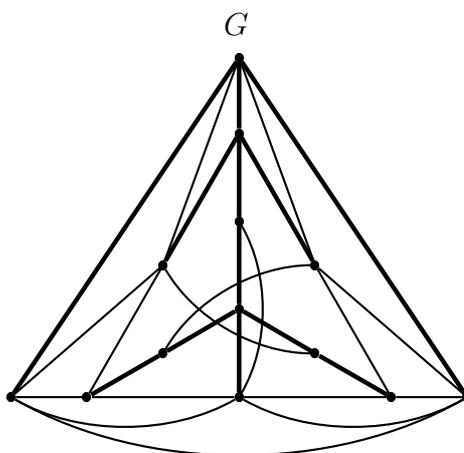


Figura 2.21: Un árbol generador  $T$  (en líneas más **oscuras**) de una gráfica  $G$ .

**Teorema 2.10.** *Toda gráfica  $G$  conexa contiene al menos un árbol generador.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica conexa y sea  $T$  una subgráfica de  $G$  que sea mínima por contención y con la propiedad de ser generadora y conexa. Por definición  $\omega(T) = 1$  y  $\omega(T - a) > 1$  para cada arista  $a$  de  $T$ . Entonces cada arista de  $T$  es un puente y por lo tanto, por el Teorema 2.9, como  $T$  es conexa, es un árbol.  $\square$

**Teorema 2.11.** *Sea  $T$  un árbol generador de una gráfica conexa  $G$  y sea  $\mathbf{a}$  una arista de  $G$  que no pertenece a  $T$ , entonces  $T + \mathbf{a}$  contiene un único ciclo.*

*Demostración.* Como  $T$  no contiene ciclos, cada ciclo de  $T + \mathbf{a}$  contiene a  $\mathbf{a}$ . Más aún,  $C$  es ciclo de  $T + \mathbf{a}$  si y sólo si  $C - \mathbf{a}$  es una trayectoria en  $T$  conectando los extremos de  $\mathbf{a}$ . Entonces por el Teorema 2.6,  $T$  tiene una única trayectoria que conecta a los extremos de  $\mathbf{a}$ ; por lo tanto  $T + \mathbf{a}$  contiene un único ciclo.  $\square$

**Teorema 2.12.** *Sea  $G$  una gráfica, entonces  $G$  contiene al menos  $(q - p + \omega(G))$  ciclos.*

*Demostración.* Sea  $\Omega = \{G_i : G_i \text{ es componente conexa de } G, \text{ para } i = 1, \dots, \omega\}$ , así  $|\Omega| = \omega(G) = \omega$  y  $\bigcup_{i=1}^{\omega} G_i = G$ . Denotemos por  $q_i = |A(G_i)|$  para  $i = 1, \dots, \omega$ , por lo que  $\sum_{i=1}^{\omega} q_i = q$ . También denotemos por  $p_i = |V(G_i)|$  para  $i = 1, \dots, \omega$ , por lo que  $\sum_{i=1}^{\omega} p_i = p$ . Consideremos a  $G_i$ , entonces  $G_i$  es conexa pues es componente conexa de  $G$ , por el Teorema 2.10 contiene un árbol generador, digamos  $T_i$  y el cual, por el Teorema 2.7 tiene  $p_i - 1$  aristas. Notemos que por el Teorema 2.11, por cada arista que aumentemos a  $T_i$  se genera al menos un ciclo. Entonces si aumentamos la cantidad de aristas que nos falta agregar para obtener a  $G$ , es decir, si aumentamos  $q_i - (p_i - 1)$  aristas, tenemos una cota inferior de la cantidad de ciclos de  $G_i$ .

Abordando de esta manera el problema para cada  $i = 1, \dots, \omega$ , entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} & q_1 - (p_1 - 1) + \dots + q_\omega - (p_\omega - 1) = \\ & = (q_1 + \dots + q_\omega) - (p_1 + \dots + p_\omega) + \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{\omega\text{-veces}} \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{\omega} q_i - \sum_{i=1}^{\omega} p_i + \sum_{i=1}^{\omega} 1 = q - p - \omega. \end{aligned}$$

$\square$

## 2.2. Coloración de vértices en Gráficas.

**Definición 2.30.** Una  $n$ -coloración por vértices de una gráfica  $G$  es una asignación de  $n$  colores, digamos:  $1, 2, \dots, n$ ; a los vértices de  $G$ .

**Definición 2.31.** Una  $n$ -coloración propia por vértices de una gráfica  $G$  es una  $n$ -coloración por vértices tal que vértices adyacentes tienen diferente color. También podemos decir que  $G$  es  $n$ -coloreable.

**Observación 2.6.** Podemos hablar de la Definición 2.31 de una forma algebraica, considerando una función de la siguiente manera. Sea  $c : V(G) \rightarrow X$ , donde cada elemento de  $V(G)$  es asociado con algún elemento de un conjunto de índices  $X$ , cuya cardinalidad es  $n$  y tal que  $c(v_i) \neq c(v_j)$  si y sólo si  $(v_i, v_j) \in A(G)$ .

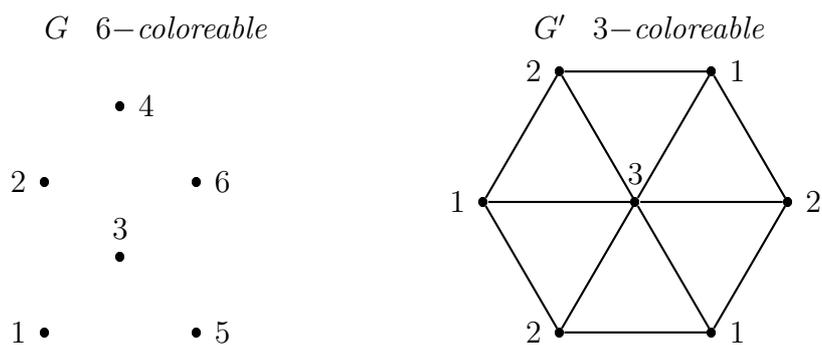
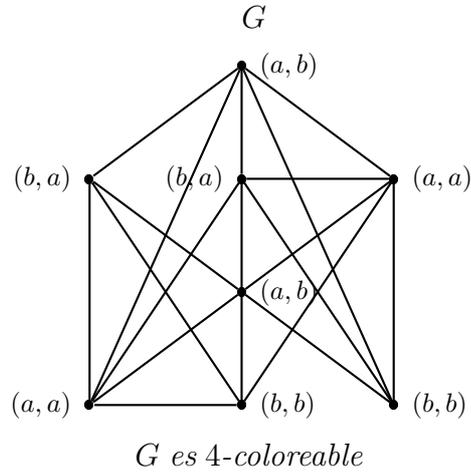


Figura 2.22: Una gráfica  $G$  6-coloreable y una gráfica  $G'$  3-coloreable.

**Ejemplo 2.1.** Una gráfica  $G$   $n$ -coloreable considerando una función  $c$ :  
 Sea  $c : V(G) \rightarrow X$ , donde  $X = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$ ;  $|X| = 4$ .



**Observación 2.7.** Una  $n$ -coloración propia por vértices de una gráfica  $G$ , induce una partición  $\{V_1, \dots, V_n\}$  de los vértices de  $G$  en  $n$  conjuntos independientes tales que, vértices pertenecientes al conjunto  $V_i$  tienen asignado el color  $i$  y son denominados **clases cromáticas**.

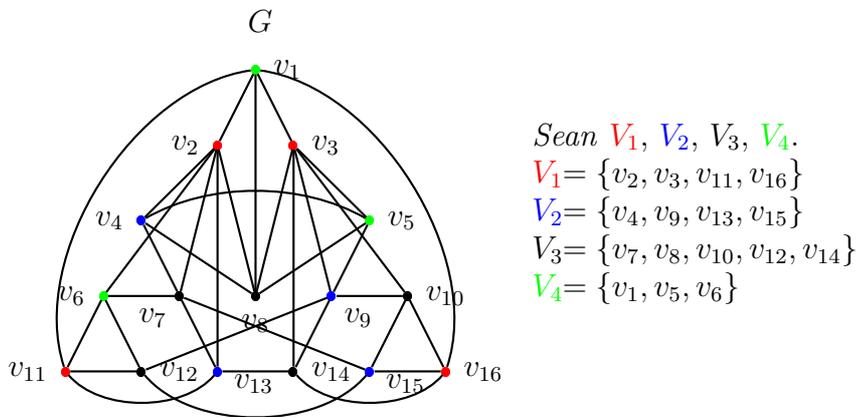


Figura 2.23: Una gráfica  $G$  y una partición de sus vértices por coloración.

**Definición 2.32.** El **número cromático**  $\chi(G) = n$  de una gráfica  $G$  es el menor entero  $n$  para el cual  $G$  es  $n$ -coloreable.

**Definición 2.33.** Decimos que  $G$  es  **$n$ -cromática** si  $\chi(G) = n$ .

En vista de las definiciones anteriores tenemos que toda gráfica completa es  $(p - 1)$ -cromática y toda gráfica vacía por aristas es 1-cromática.

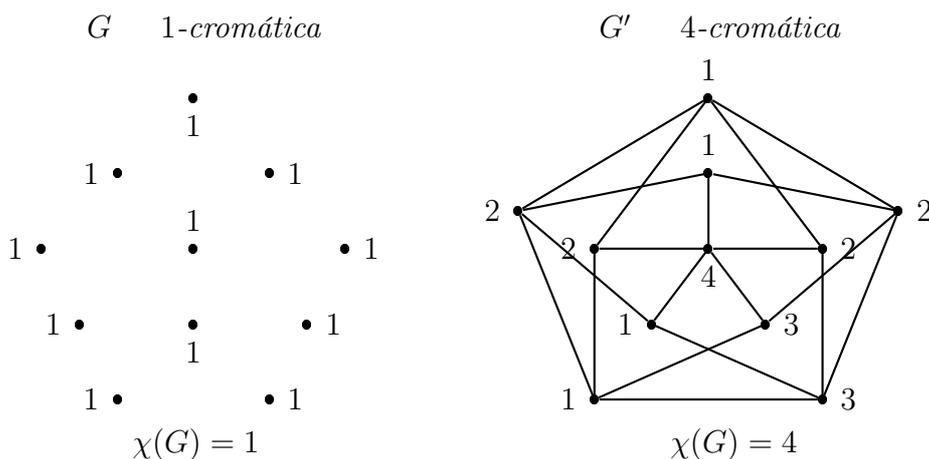


Figura 2.24: Una gráfica  $G$  1-cromática y una gráfica  $G'$  4-cromática.

**Definición 2.34.** Se dice que una gráfica  $G$  es **crítica** si  $\chi(H) < \chi(G)$  para toda subgráfica  $H$  propia inducida por vértices de  $G$ .

**Definición 2.35.** Decimos que una gráfica  $G$  es  **$n$ -crítica** si es  $n$ -cromática y crítica.

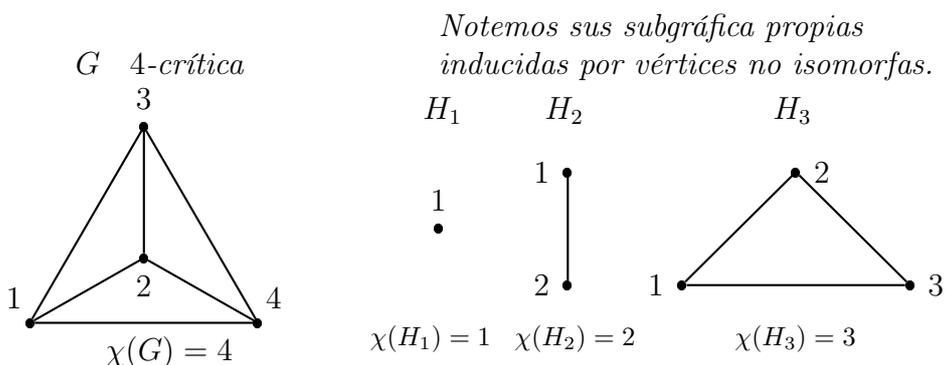


Figura 2.25: Una gráfica 4-crítica.

**Teorema 2.13.** *Si  $G$  es  $n$ -crítica, entonces  $\delta(G) \geq n - 1$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\delta(G) < n - 1$ , sea  $v_0 \in V(G)$  tal que  $\delta(v_0) = \delta(G) < n - 1$ . Como  $G$  es  $n$ -crítica, la subgráfica inducida por vértices  $G - \{v_0\} = H[V(G) \setminus \{v_0\}]$ , es  $(n - 1)$ -coloreable, es decir,  $\chi(H) = n - 1$ . Tomemos una  $(n - 1)$ -coloración propia de  $G \setminus \{v_0\}$ . Como los vértices a los que es adyacente  $v_0$  son menos que  $n - 1$ , hay algún color que no usan estos vértices. Coloreando con este color a  $v_0$  tenemos una  $(n - 1)$ -coloración propia de los vértices de  $G$ , lo que es una contradicción.  $\square$

**Teorema 2.14.** *Toda gráfica  $G$   $n$ -cromática tiene una subgráfica  $n$ -crítica.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica  $n$ -cromática, entonces si  $G$  es  $n$ -crítica terminamos. De lo contrario, existe  $H$  subgráfica propia de  $G$  tal que  $\chi(H) = n$ , si  $H$  es  $n$ -crítica terminamos. De no ser así, existe  $H'$  subgráfica propia de  $H$  tal que  $\chi(H') = n$ , si  $H'$  es  $n$ -crítica terminamos. Continuando con este razonamiento y como  $G$  consta de una cantidad finita de vértices, obtendremos una subgráfica  $H^{(i)}$   $n$ -crítica.  $\square$

**Corolario 2.15.** *Toda gráfica  $G$   $n$ -cromática tiene al menos  $n$  vértices de grado al menos  $n - 1$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 2.14 sabemos que existe  $H$  subgráfica de  $G$  tal que  $H$  es  $n$ -crítica, por el Teorema 2.13  $\delta(H) \geq n - 1$ , es decir, todo vértice  $v_i$  de  $H$  tiene

$$\delta_H(v_i) \geq n - 1. \quad (2.1)$$

Por otro lado como  $H$  es  $n$ -crítica, es decir, tiene al menos  $n$  vértices y por (2.1) tienen grado al menos  $n - 1$ . Entonces como  $H$  es subgráfica de  $G$ , tenemos que  $G$  tiene al menos  $n$  vértices de grado al menos  $n - 1$ .  $\square$

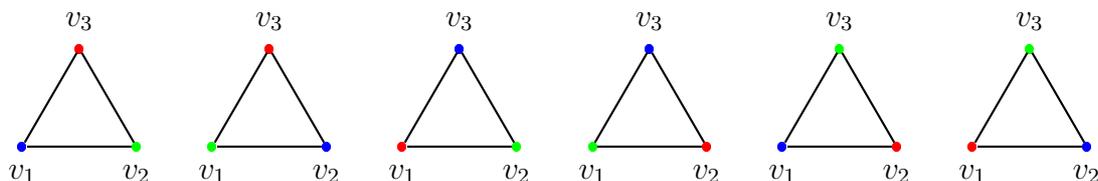
**Corolario 2.16.**  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica tal que  $\chi(G) = n$ . Por el Corolario 2.15 existe  $v_i$  vértice de  $G$  tal que  $n-1 \leq \delta(v_i) \leq \Delta(G)$ , por lo tanto  $n \leq \Delta(G)+1$ .  $\square$

**Definición 2.36.** El número de  $n$ -coloraciones propias de una gráfica  $G$  lo denotamos por  $P_n(G)$ , denominado **polinomio cromático** de  $G$ .

**Ejemplo 2.2.** El número de 3-coloraciones propias de  $K_3$  es 6, es decir,  $P_3(K_3) = 6$ .

Consideremos el conjunto de colores:  $\{\bullet, \bullet, \bullet\}$ , entonces:



Notemos que aunque hay exactamente un vértice de cada color en cada coloración, todavía podemos observar estas seis coloraciones como distintas.

**Observación 2.8.** Sea  $G$  una gráfica, notemos que:

1.  $P_n(G) = 0$  si  $n < \chi(G)$ , pues el menor entero  $n$  que cumple que  $P_n(G) > 0$  es  $\chi(G)$ .
2.  $P_0(G) = 0$  a menos que  $G = G_\emptyset$ .
3.  $P_n(G_\emptyset) = 1$  para cualquier  $n$ .
4. Si  $G$  contiene un lazo, entonces  $P_n(G) = 0$ .
5. Si  $G$  tiene aristas múltiples la eliminación de estas no afecta a  $P_n(G)$ .

**Lema 2.17.** Si  $G$  es una gráfica tal que

1.  $G$  es vacía por aristas, entonces

$$P_n(G) = n^p.$$

2.  $G = K_n$  la gráfica completa, entonces

$$P_n(G) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-(p-1)).$$

*Demostración.* Mostremos los dos casos y veamos un ejemplo:

1. Como  $G$  es vacía por aristas, entonces cada vértice se le puede asignar independientemente cualquiera de los  $n$  colores disponibles.
2. Como  $G$  es completa numeremos los vértices, entonces existen  $n$  formas distintas para colorear el primer vértice,  $n-1$  formas distintas para el segundo,  $n-2$  formas distintas para el tercero y así sucesivamente hasta completar los  $p$  vértices de  $G$ .

□

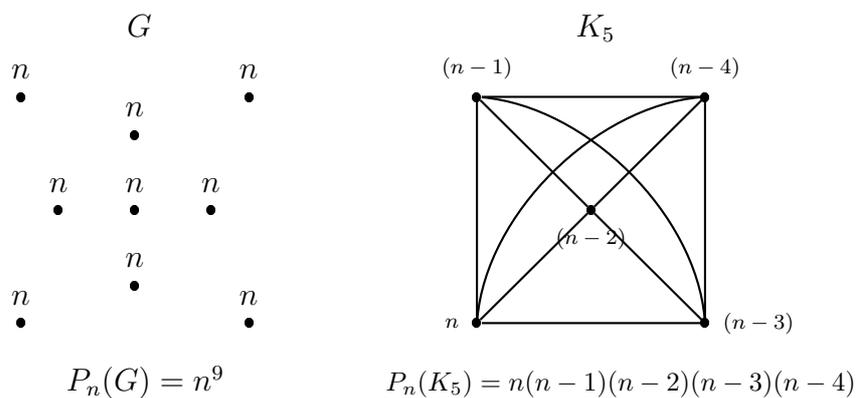


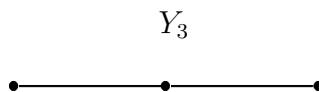
Figura 2.26: Polinomio cromático de  $G$  vacía por aristas y de  $K_5$ .

**Teorema 2.18.** *Si  $G$  es la unión de dos gráficas simples  $H$  y  $H'$  tal que la subgráfica inducida por los vértices de la intersección, llamémosla  $L$ , es una gráfica completa  $K_s$ , entonces*

$$P_n(G) = \frac{P_n(H) \cdot P_n(H')}{P_n(L)}$$

*Demostración.* Sea  $c_1$  cualquier coloración de  $H$  y sea  $c'_1$  la coloración inducida de  $L$ . Notemos que hay precisamente  $P_n(H')/P_n(L)$  diferentes coloraciones  $c_2$  de  $H'$  para la cual  $c'_1 = c'_2$ , donde  $c'_2$  es la coloración de  $L$  inducida por  $c_2$ . Pero una coloración de  $G$  es precisamente un par  $(c_1, c_2)$  de coloraciones de  $H$  y  $H'$ , respectivamente, tales que  $c'_1 = c'_2$ . □

Por ejemplo, si  $Y_3$  es la trayectoria con tres vértices, entonces



$$P_n(Y_3) = \frac{P_n(K_2) P_n(K_2)}{P_n(K_1)} = \frac{n^2(n-1)^2}{n} = n(n-1)^2$$

**Observación 2.9.** *Sea  $a = (v_i, v_j)$ ; entonces  $P_n(G - a) > P_n(G)$ .*

*Pues al ser coloreada la gráfica  $G - a$  los vértices extremos de  $a$  pueden tener asignado el mismo color o también distinto color. Lo que aumenta al menos en una coloración más a  $P_n(G - a)$  respecto a  $P_n(G)$ .*

**Teorema 2.19.** *Si  $G$  es una gráfica simple, entonces*

$$P_n(G) = P_n(G - a) - P_n(G \bullet a)$$

para toda arista  $a$  de  $G$ .

*Demostración.* Sea  $a = (v_i, v_j)$  con  $\{v_i, v_j\} \subseteq V(G)$ .

Para cada  $n$ -coloración de  $G - a$  que asigna el mismo color a  $v_i$  y  $v_j$  le corresponde una  $n$ -coloración de  $G \bullet a$ . Esta correspondencia es una biyección y por lo tanto  $P_n(G \bullet a)$  es precisamente el número de  $n$ -coloraciones de  $G - a$  en el que  $v_i$  y  $v_j$  tienen asignado el mismo color. Además, cada coloración de  $G - a$  que asigna diferente color a  $v_i$  y  $v_j$  es una  $n$ -coloración de  $G$  y al revés,  $P_n(G)$  es el número de  $n$ -coloraciones de  $G - a$  en el cual  $v_i$  y  $v_j$  se les asigna diferente color, de esto tenemos que  $P_n(G - a) = P_n(G) + P_n(G \bullet a)$ .  $\square$

**Corolario 2.20.** *Para cualquier gráfica  $G$ ,  $P_n(G)$  es un polinomio en  $n$  de grado  $p$ , con coeficientes enteros, término principal  $n^p$  y término constante cero. Más aún, los coeficientes de  $P_n(G)$  alternan de signo.*

*Demostración.* Por Inducción sobre el número de aristas de  $G$ .

Si  $G$  no tiene aristas, entonces  $P_n(G) = n^p$ , por la Observación 2.17.

Supongamos que se cumple la condición para toda gráfica con menos de  $m$  aristas.

Sea  $G$  una gráfica con  $m$  aristas ( $m \geq 1$ ). Sea  $a$  cualquier arista de  $G$ , entonces como  $G - a$  y  $G \bullet a$  cumplen la hipótesis de inducción pues tienen  $m - 1$  aristas. Por lo tanto existen  $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$  y  $b_1, b_2, \dots, b_{p-2}$  enteros no negativos tales que:

$$P_n(G - a) = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i a_i n^i + n^p = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{p-i} a_i n^i + n^p,$$

$$P_n(G \bullet a) = \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^i b_i n^i + n^{p-1} = \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{p-i-1} b_i n^i + n^{p-1}.$$

Entonces por el Teorema 2.19, tenemos que:

$$\begin{aligned} P_n(G) &= P_n(G - a) - P_n(G \bullet a) \\ &= \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{p-i} (a_i + b_i) n^i - (a_{p-1} + 1) n^{p-1} + n^p. \end{aligned}$$

□

**Observación 2.10.** Si  $T$  es un árbol, entonces

$$P_n(T) = n(n-1)^{p-1}.$$

*Demostración.* Por Inducción sobre  $p$  el número de vértices de  $G$ .

Para  $p = 1$  se cumple, pues su polinomio cromático es  $n = n(n-1)^{1-1}$ .

Para  $p = 2$  también se cumple pues el polinomio cromático es  $n(n-1) = n(n-1)^{2-1}$ .

Supongamos que se cumple para todo  $T'$  árbol con  $p' < p$ .

Consideremos a  $T$  un árbol con  $p$  vértices, por el Corolario 2.8 existe  $v_i \in V(G)$  vértice terminal, es decir, de grado 1. Supongamos también que  $a = (v_i, v_j) \in A(G)$ , entonces  $T - v_i = T'$  es tal que  $|V(T')| = p - 1$ , entonces por hipótesis de Inducción se tiene que  $P_n(T') = n(n-1)^{p-2}$ . Ahora como  $v_i$  tiene grado 1 se le puede asignar cualquier color que no se le asigne a  $v_j$  y por lo tanto  $v_i$  puede elegir  $n - 1$  colores distintos. Entonces:

$$P_n(T) = (n-1)P_n(T') = (n-1)n(n-1)^{p-2} = n(n-1)^{p-1}.$$

□

**Observación 2.11.** Si  $C$  es un ciclo de longitud  $k$ , entonces

$$P_n(C) = (n-1)^k + (-1)^k(n-1).$$

*Demostración.* Por Inducción sobre  $k$  y  $k \geq 3$ .

Para  $k = 3$  tenemos  $C = K_3$ , entonces:

$$P_n(C) = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n = (n-1)^3 + (-1)^3(n-1).$$

Ahora supongamos que para todo ciclo de longitud  $k$  se cumple que,  $P_n(C) = (n-1)^k + (-1)^k(n-1)$ . Probaremos que se cumple para  $k+1$ .

Notemos que por el Teorema 2.19 tenemos que  $P_n(C) = P_n(C-a) - P_n(C \bullet a)$  para cualquier arista  $a \in A(C)$ . Podemos observar que  $C-a$  es un árbol y por la Observación 2.10 obtenemos que  $P_n(C-a) = n(n-1)^{p-1}$ , pero por ser  $C$  ciclo de longitud  $k$  se tiene que  $k = p = q$ , por lo tanto  $P_n(C-a) = n(n-1)^{k-1}$ .

De  $P_n(C \bullet a)$  obtenemos un ciclo de longitud  $k-1$ , llamemos  $C' = C \bullet a$ . Por lo tanto,  $P_n(C) = P_n(C-a) - P_n(C \bullet a) = n(n-1)^{k-1} - P_n(C')$ .

Para concluir consideremos a  $C_0$  un ciclo de longitud  $k+1$  y a  $P_n(C_0) = n(n-1)^k - P_n(C'_0)$ , donde  $C'_0$  es un ciclo de longitud  $k$  entonces por lo anterior y por hipótesis de inducción tenemos:

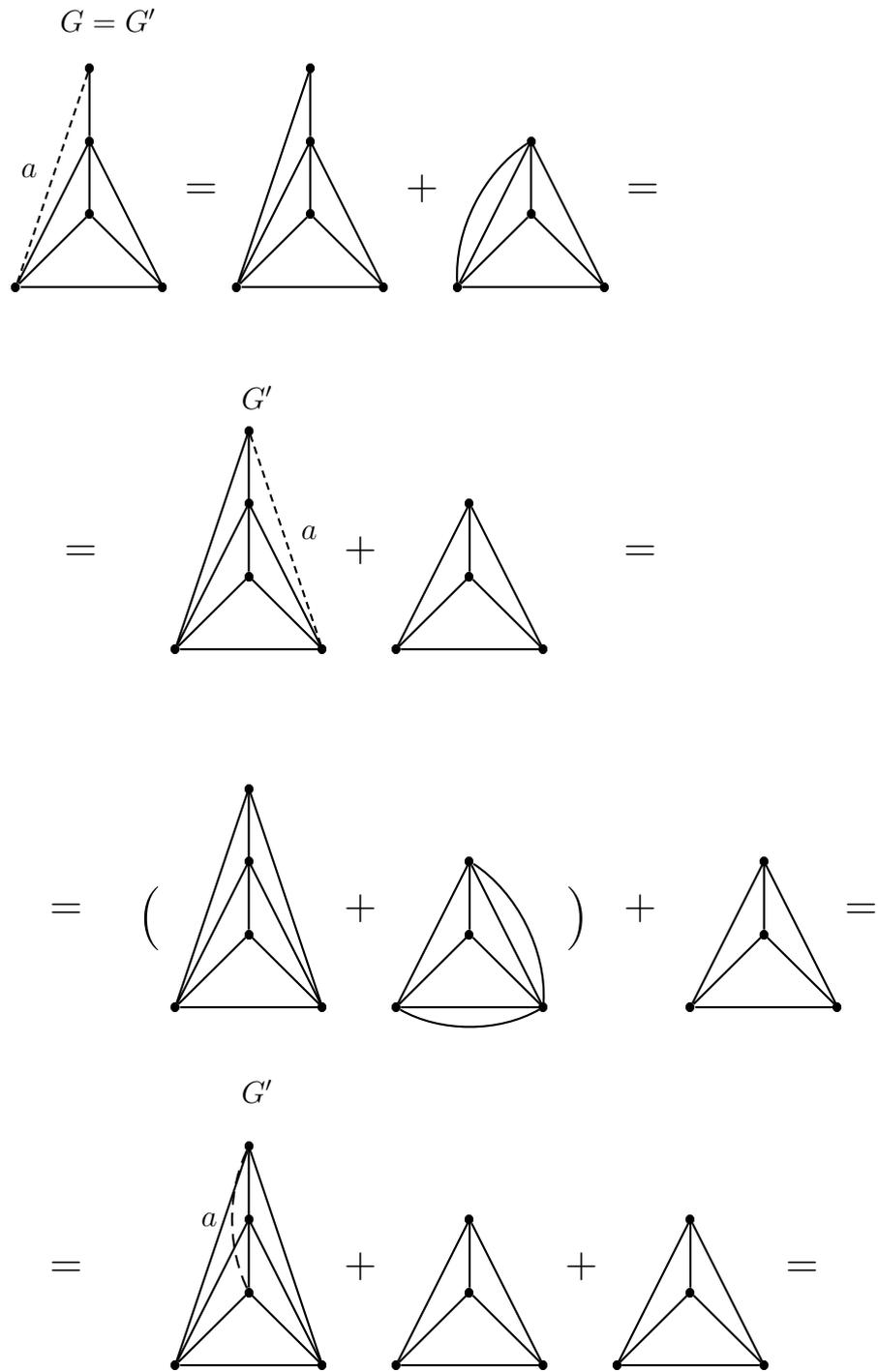
$$\begin{aligned} P_n(C_0) &= n(n-1)^k - P_n(C'_0) = n(n-1)^k - ((n-1)^k + (-1)^k(n-1)) = \\ &= (n-1)^k(n-1) + (-1)^{k+1}(n-1) = (n-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}(n-1). \end{aligned}$$

□

**Observación 2.12.** *Podemos aplicar el Teorema 2.19 de dos formas para poder calcular el polinomio cromático de una gráfica  $G$ .*

1. *Aplicando repetidas veces  $P_n(G) = P_n(G-a) - P_n(G \bullet a)$ , y así expresar  $P_n(G)$  como una combinación lineal de polinomios cromáticos de gráficas vacías por aristas.*
2. *Aplicando repetidas veces  $P_n(G-a) = P_n(G) + P_n(G \bullet a)$ , y así expresar  $P_n(G)$  como una combinación lineal de polinomios cromáticos de gráficas completas.*

**Ejemplo 2.3.** *Sea  $G$  la siguiente gráfica. Apliquemos el Teorema 2.19 y la forma (2) de la observación 2.12 para encontrar el polinomio cromático de  $G$ . (Denotaremos por  $G'$  a la gráfica sobre la cual se aplica la recursión durante el proceso).*



$$\begin{aligned}
&= \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \right) + 2 \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} = \\
&= \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 5} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \right) + 2 \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} = \\
&= \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 6} \end{array} + 3 \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} = K_5 + 3K_4.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
P_n(K_5) + 3P_n(K_4) &= n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + 3[n(n-1)(n-2)(n-3)] \\
&= n(n-1)^2(n-2)(n-3) \\
&= n^5 - 7n^4 + 17n^3 - 7n^2 + 6n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $P_n(G) = n^5 - 7n^4 + 17n^3 - 7n^2 + 6n$ .

### 2.3. Gráficas Planas y algunos resultados.

En esta Sección abordaremos algunos datos necesarios de las gráficas planas y mapas para el desarrollo de nuestro trabajo, sin dejar de lado su profunda relación con la Topología. Así mismo mostramos la primer equivalencia importante entre gráficas planas y el Teorema de los cuatro colores.

**Definición 2.37.** *Se dice que una gráfica  $G$  puede ser **inmersa en el plano** o **sumergible en el plano**, (también se dice que  $G$  es **plana**), si ésta puede ser dibujada en el plano de manera que sus aristas únicamente se intersectan en sus extremos.*

**Observación 2.13.** *Una gráfica  $G$  es **aplanable** si es isomorfa a una gráfica plana.*

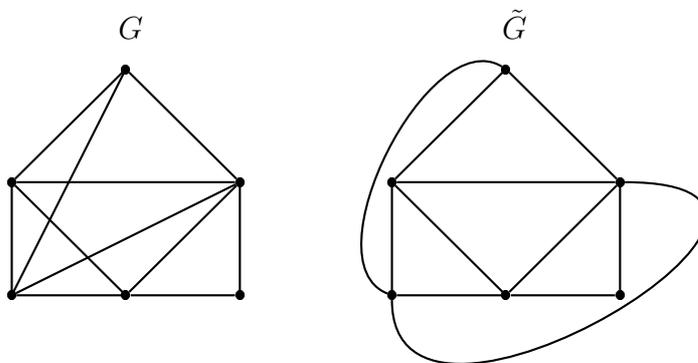


Figura 2.27: Una gráfica  $G$  y su gráfica plana  $\tilde{G}$ .

Es importante notar que no toda gráfica puede ser inmersa en el plano. Sin embargo toda gráfica puede ser inmersa en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 2.38.** *Un **mapa**  $M$  es una gráfica plana conexa  $G$  junto con un particular dibujo de esta en el plano.*

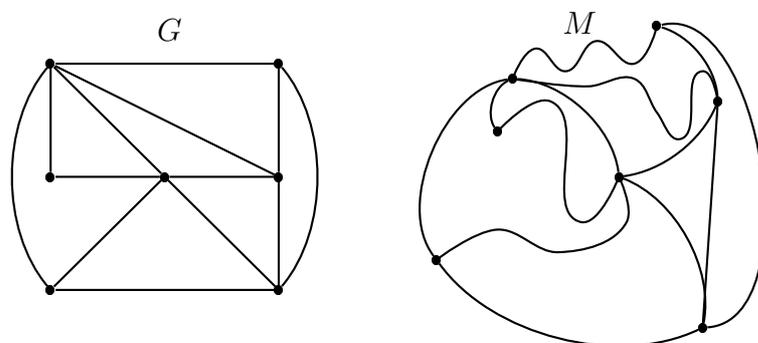


Figura 2.28: Una gráfica  $G$  y un mapa  $M$  de esta.

Como la Teoría de gráficas tiene una estrecha relación con la Topología en este apartado abordaremos algunas definiciones topológicas que necesitaremos para la demostración del Teorema de los cinco colores.

**Definición 2.39.** Una curva **cerrada simple** o curva de **Jordan** en un espacio  $X$ , es la imagen de una función inyectiva y diferenciable (y con derivada diferente de cero):  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ , donde  $\mathbb{S}^1 \doteq \{\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  denominada la 1-esfera o circunferencia unitaria.

**Definición 2.40.** Una curva de Jordan  $J$  trazada en  $\mathbb{R}^2$ , divide a  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  en dos conjuntos abiertos, ajenos entre sí: uno es un conjunto acotado, es decir, está contenido en una circunferencia de radio  $M \in \mathbb{R}$  centrada en el origen, denominado **interior** de  $J$  ( $Int(J)$ ) y el otro, se denomina el **exterior** de  $J$  ( $Ext(J)$ ).

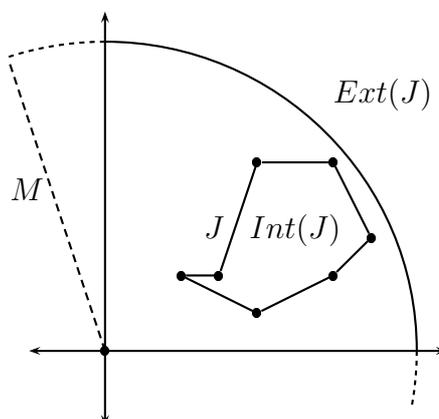


Figura 2.29: Una curva de Jordan.

El siguiente teorema es uno de los más importantes teoremas de la Topología, en este trabajo no realizaremos su demostración pues los elementos y herramientas necesarias para esta salen del cuerpo de este trabajo, pero el lector interesado puede consultar [20] y [22]. Sin embargo lo mencionamos pues nos será de utilidad en un futuro para la demostración del Teorema de los cinco colores.

**Teorema 2.21.** *Sea  $J$  una curva de Jordan en el plano. Cualquier línea continua que una a un punto de  $Int(J)$  con otro de  $Ext(J)$ , debe cruzar a la curva  $J$  en algún punto.*

**Definición 2.41.** *Sea  $\mathbb{S}^2 \doteq \{\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  la esfera unitaria y consideremos  $P$  un plano tangente a  $\mathbb{S}^2$  en el punto  $S$ . Denotemos por  $N$  el punto de  $\mathbb{S}^2$  que es diagonalmente opuesto al punto de contacto de  $\mathbb{S}^2$  a  $P$ , así el diámetro  $NS$  de  $\mathbb{S}^2$  es perpendicular a  $P$ . Entonces la función  $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow P$ , definida por  $\pi(x) = y$  si y sólo si los puntos  $y$ ,  $x$  y  $N$  son colineales, es denominada **proyección estereográfica** desde  $N$ .*

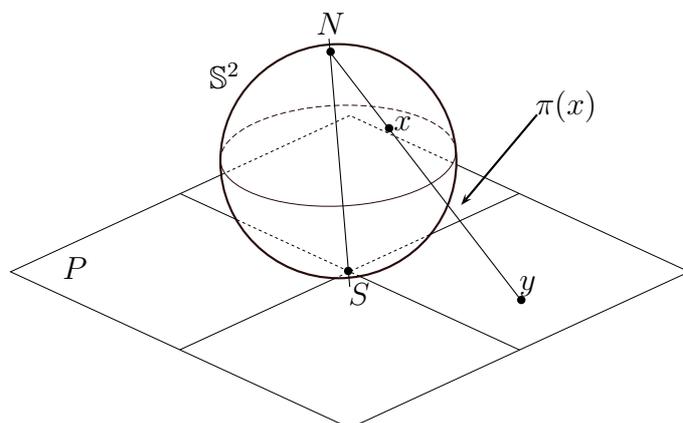


Figura 2.30: Proyección estereográfica

Observemos que la proyección estereográfica es una función biyectiva que asocia a cada punto de la esfera  $\mathbb{S}^2$  un punto en el plano  $P$  y viceversa, considerando el hecho de que al punto  $N$  le asociamos el punto al infinito  $\infty$ .

Apartir de las definiciones anteriores podemos dar una nueva equivalencia para gráficas planas.

**Teorema 2.22.** *Una gráfica  $G$  es aplanable si y sólo si es sumergible en la esfera.*

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ] Supongamos que  $G$  puede sumergirse en la esfera y sea  $\tilde{G}$  una representación de  $G$ . Sea  $s$  un punto de la esfera que no está en  $\tilde{G}$  y consideremos la proyección estereográfica de la esfera desde  $s$ . Entonces la imagen de  $\tilde{G}$  bajo esta representación es una representación plana de  $G$  en el plano.

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $G$  es aplanable y sea  $\tilde{G}$  una representación de  $G$ . Sea  $p$  un punto del plano que no está en  $\tilde{G}$  y consideremos la inversa de la proyección estereográfica del plano desde  $p$ . Entonces la imagen de  $\tilde{G}$  bajo esta representación es una representación plana de  $G$  en la esfera.  $\square$

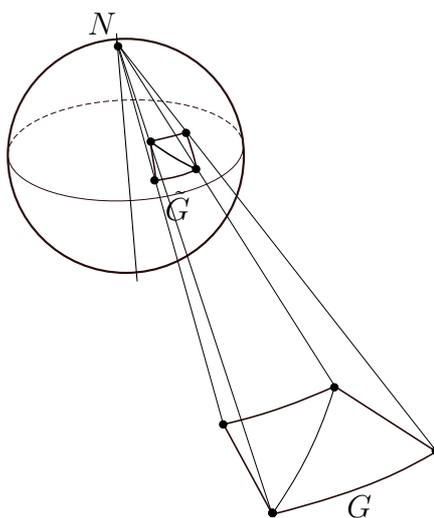


Figura 2.31: Proyección de una gráfica en el plano (y viceversa)

**Definición 2.42.** Una gráfica plana  $G$  divide al resto del plano en un número de regiones conexas. Llamaremos **cerradura de una región** a la unión de las aristas que la delimitan.

**Definición 2.43.** Una **cara** de una gráfica  $G$  es la cerradura de una de las regiones del plano generadas por  $G$ .

**Definición 2.44.** La cara no acotada de una gráfica  $G$  se llama **cara exterior** y es única.

**Definición 2.45.** Denotaremos por  $F(G)$  el conjunto de caras de la gráfica plana  $G$ , es decir,  $F(G) \doteq \{f \mid f \text{ es cara de } G\}$  y  $\phi_G = |F(G)|$ .

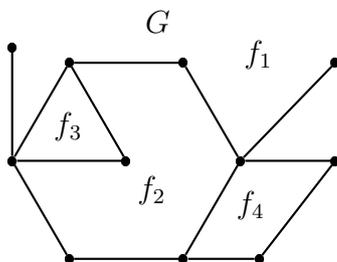


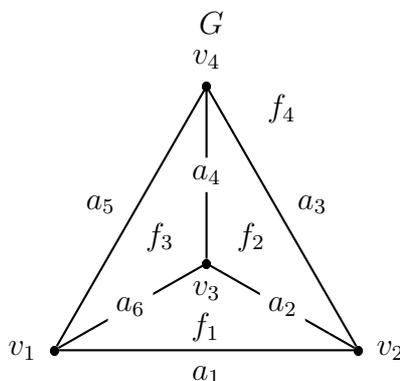
Figura 2.32: Una gráfica  $G$  y  $F(G) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  ( $\phi_G = 4$ ). Aquí  $f_1$  es la cara exterior de  $G$ .

**Definición 2.46.** Llamaremos a la unión de las aristas que bordean a una cara  $f$  de una gráfica plana  $G$  **frontera de  $f$**  y la denotaremos por  $b(f)$ . En la figura 2.33,  $b(f_1) = \{a_1, a_2, a_6\}$ .

**Definición 2.47.** Diremos que una cara **incide** en los vértices y aristas de su frontera. Por ejemplo, en la figura 2.33,  $f_2$  incide en los vértices  $\{v_2, v_3, v_4\}$  y en las aristas  $\{a_2, a_3, a_4\}$ .

**Definición 2.48.** Decimos que una arista **separa** a las caras que inciden en ella. En la figura 2.33, la arista  $a_4$  separa a  $f_2$  de  $f_3$ .

**Definición 2.49.** El **grado de una cara** de una gráfica plana  $G$  es el número de aristas que inciden en ella, es decir, el número de aristas de  $b(f)$ . Los puentes debemos contarlos dos veces y denotaremos el grado de la cara  $f$  por  $d_G(f)$ . Como ejemplo, en la figura 2.33,  $d_G(f_1) = d_G(f_2) = d_G(f_3) = d_G(f_4) = 3$ .



Una gráfica plana  $G$  donde se muestra la frontera, la Figura 2.33: incidencia, la separación y el grado de algunas de sus caras.

**Definición 2.50.** Dada una gráfica plana  $G$ , definimos su **gráfica dual**  $G^*$  como sigue:

1. A cada cara  $f$  de  $G$  la corresponde un vértice  $f^*$  de  $G^*$  y a cada arista  $a$  de  $G$  una arista  $a^*$  de  $G^*$ .
2. Sean  $f_i$  y  $f_j$  dos caras en  $G$  y  $f_i^*$  y  $f_j^*$  los vértices correspondientes en  $G^*$ , entonces entre  $f_i^*$  y  $f_j^*$  existen tantas aristas como en la frontera común de  $f_i$  y  $f_j$ .
3. Dos vértices  $f_i^*$  y  $f_j^*$  de  $G^*$  son adyacentes en  $G^*$  si y sólo si las dos caras correspondientes  $f_i$  y  $f_j$  están separadas en  $G$  por la arista  $a$ .

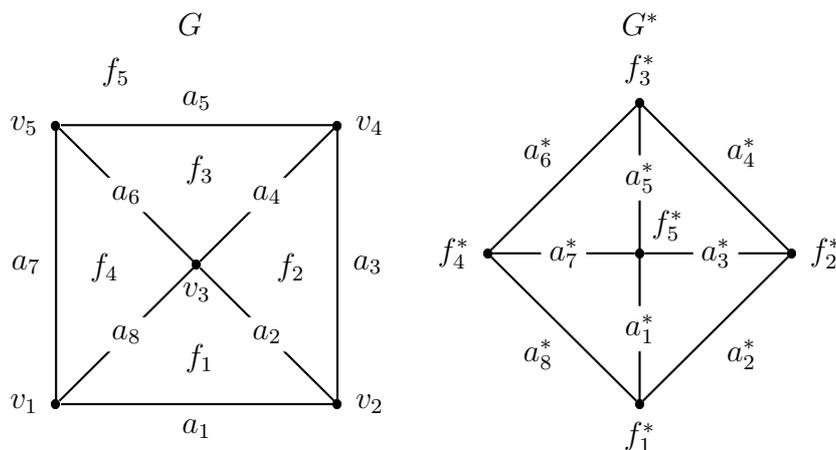


Figura 2.34: Una gráfica plana  $G$  y su dual  $G^*$ .

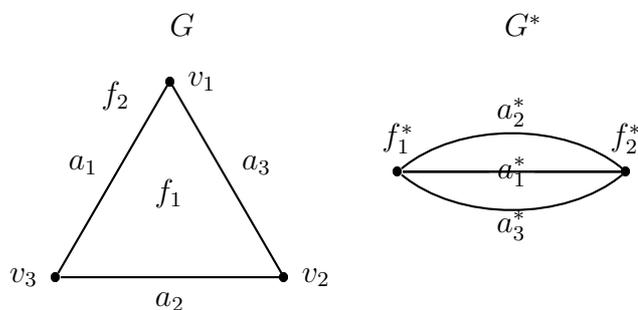


Figura 2.35: Una gráfica plana  $G$  y su dual  $G^*$ .

Al observar la gráfica dual  $G^*$  de una gráfica  $G$ , notamos que  $G^*$  no necesariamente es una gráfica simple, a parte esta gráfica no siempre es plana, pero siempre es aplanable y conexa (si  $G$  es conexa). En general, resulta ser una multigráfica como en la Figura 2.35.

Una manera de aplanar a  $G^*$  en caso de que no resulte plana es la siguiente:

1. Coloquemos cada vértice  $f^*$  de  $G^*$  en la cara  $f$  correspondiente de  $G$ .
2. Tracemos cada arista  $a_i^*$  de forma que cruce a la arista correspondiente  $a_i$  de  $G$  solamente una vez, cuidando además que  $a_i^*$  no cruce a ninguna otra arista de  $G$ .

Intuitivamente, podemos ver que el procedimiento produce gráficas planas, pero no demostraremos este hecho (Ver [4] para la demostración de esta afirmación).

Un paso posterior a la “aplanación” de  $G^*$  será asociarle su gráfica simple, es decir, si  $G^*$  es una multigráfica eliminamos aristas múltiples y lazos.

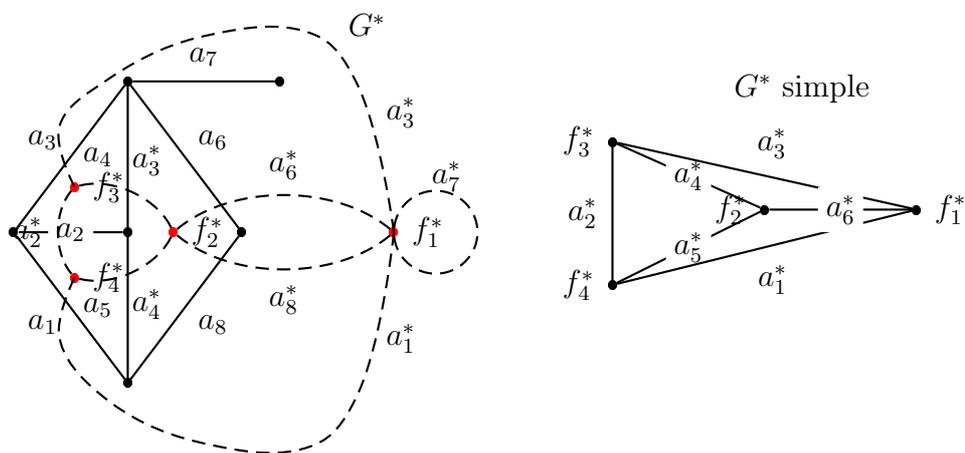


Figura 2.36: La “aplanación” de  $G^*$  y su asociada simple.

También notemos que si  $a^*$  es un lazo de  $G^*$ , entonces  $a$  es un puente de  $G$  y viceversa.

**Observación 2.14.** De la definición de  $G^*$  tenemos las siguientes relaciones:

- i)  $|V(G^*)| = \phi_G$
- ii)  $|A(G^*)| = |A(G)|$
- iii)  $d_{G^*}(f^*) = d_G(f)$  para toda  $f \in F(G)$ .

**Teorema 2.23.** Si  $G$  es una gráfica aplanable, entonces

$$\sum_{f \in F(G)} d_G(f) = 2q.$$

*Demostración.* Sea  $G^*$  la gráfica dual de  $G$  que existe pues  $G$  es aplanable y sea  $|A(G^*)| = q'$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{f \in F(G)} d_G(f) &= \sum_{f^* \in V(G^*)} d_{G^*}(f^*) && \text{por la Observación 2.14} \\
&= 2q' && \text{Teorema 2.1} \\
&= 2q && \text{por la Observación 2.14.}
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.24** (Fórmula de Euler). *Si  $G$  es una gráfica conexa y plana con  $p$  vértices,  $q$  aristas y  $\phi_G$  caras, entonces*

$$p - q + \phi_G = 2.$$

*Demostración.* Procederemos por inducción sobre el número de aristas de  $G$ , es decir, sobre  $q$ .

Si  $q = 0$ , entonces  $p = 1$ ,  $\phi_G = 1$  y el resultado se tiene.

Si  $q = 1$ , entonces  $p = 2$ ,  $\phi_G = 1$  y el resultado también se cumple.

Supongamos que el teorema es verdadero para cualquier gráfica plana y conexa con menos de  $q$  ( $q > 1$ ) aristas.

Sea  $G$  una gráfica con  $q$  aristas. Si  $G$  es árbol, entonces  $p = q + 1$  y  $\phi_G = 1$ , con lo que se satisface la fórmula. En otro caso, sea  $a$  una arista de un ciclo de  $G$  y consideremos a la gráfica  $G - a$ , esta gráfica es plana y conexa (Proposición 2.2) y tiene  $p$  vértices,  $q - 1$  aristas y  $\phi_G - 1$  caras. Por hipótesis de inducción,  $p - (q - 1) + (\phi_G - 1) = 2$ , por lo tanto,  $p - q - \phi_G = 2$ , que es lo que queríamos demostrar. □

**Corolario 2.25.** *Si  $G$  es una gráfica aplanable y conexa con  $p \geq 3$ , entonces*

$$q \leq 3p - 6$$

*Demostración.* Sea  $G$  es una gráfica aplanable y conexa con  $p \geq 3$ .

Como toda cara está limitada o contiene por al menos tres aristas,  $d_G(f) \geq 3$ , entonces para toda cara de  $G$  se cumple

$$\sum_{f \in F(G)} d_G(f) \geq 3\phi$$

Como

$$\sum_{f \in F(G)} d_G(f) = 2q$$

tenemos que

$$2q \geq 3\phi.$$

Por el Teorema 2.24 sabemos que

$$p - q + \frac{2q}{3} \geq 2$$

o lo que es lo mismo

$$q \leq 3p - 6.$$

□

**Corolario 2.26.** *Toda gráfica  $G$  aplanable contiene un vértice de grado a lo más 5.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica aplanable con  $p$  vértices y  $q$  aristas.

Sea  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ .

Si  $p \leq 6$  el resultado se sigue inmediatamente. En otro caso, por el Teorema 2.1 y el Corolario 2.25, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = 2q \leq 6p - 12.$$

No puede ocurrir que todos los vértices de  $G$  tengan grado mayor o igual que 6, pues si así fuera, sucedería que  $2q \geq 6p$ , lo que es imposible. De aquí que existe al menos un vértice  $v_i \in V(G)$  tal que  $\delta(v_i) \leq 5$ . □

## 2.4. Un Teorema bien bonito: “Teorema de los Cinco Colores”.

En esta Sección y con el apoyo de los teoremas anteriores daremos la demostración del *Teorema de los cinco colores*. Un hecho relevante relativo a este problema es que los teoremas correspondientes para superficies más complicadas fueron demostrados con anterioridad.

**Teorema 2.27.** *En toda gráfica plana  $G$ ,  $\chi(G) \leq 5$ .*

*Demostración.* Procedamos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe una gráfica 6-coloreable que es crítica y a la que llamaremos  $G$ . Por el Corolario 2.26 sabemos que  $\delta(v_i) \leq 5$  y por el Corolario 2.15 tenemos que  $\delta(v_i) \geq 5$ ; por lo tanto  $\delta(v_i) = 5$ .

Sea  $v \in V(G)$  tal que  $\delta(v) = 5$ . Como  $G$  es crítica, la gráfica  $G - v$  es 5-coloreable. Sea  $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$  la partición de los vértices inducida por la 5-coloración de  $G - v$ . Dado que  $G$  no es 5-coloreable,  $v$  debe ser adyacente a un vértice de cada de las cinco clases crómicas. Llamemos  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  a los vértices que son adyacentes a  $v$  y donde  $v_i \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , tomados siguiendo el sentido contrario de las manecillas del reloj (Figura 2.37).

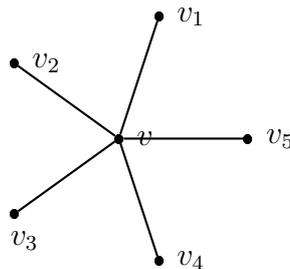


Figura 2.37:

Sea  $G_{ij} = G[V_i \cup V_j]$ . De este modo,  $v_i$  y  $v_j$  deben estar en la misma componente conexa de  $G_{ij}$ , pues de no ser así, podríamos considerar la componente de  $G_{ij}$  que contuviera a  $v_i$  e intercambiar en ella los colores  $i$  y  $j$ . Obteniéndose así una nueva 5-coloración de  $G - v$  en la cual solamente se utilizarían 4 colores (todos los anteriores excepto  $i$ ) para colorear a los

vértices adyacentes de  $v$ , pero ya hemos visto que esto no puede ocurrir. Podemos entonces considerar a  $Y_{ij}$  una  $(v_i, v_j)$ -trayectoria en  $G_{ij}$  y sea  $C$  el ciclo  $C = (v, v_1, T_{13}, v)$  (suponiendo  $i = 1$  y  $j = 3$ ; los demás casos son análogos. Figura 2.38).

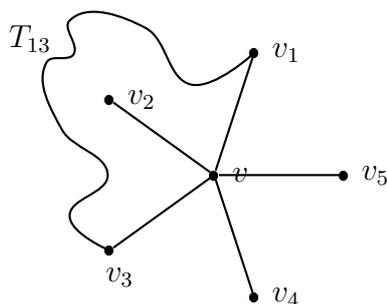


Figura 2.38:

Como  $C$  separa a  $v_2$  y a  $v_4$ , entonces por el Teorema 2.21, cualquier  $Y_{24}$  trayectoria debe cruzar a  $C$  en algún punto. Pero esto es imposible, ya que los vértices de una  $Y_{24}$  trayectoria están coloreados con los colores 2 y 4, que no están asignados a ningún vértice de  $C$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto, toda gráfica plana es 5-coloreable.  $\square$

Acabamos de demostrar que toda gráfica plana es cinco coloreable pero recordemos que el problema de coloración surge a partir del problema de determinar cuál es el número mínimo de colores que se necesitan para colorear un mapa de acuerdo al *Problema de Guthrie* anunciado en 1853. Para poder ser resuelto este problema muchos matemáticos tuvieron que verlo desde otra perspectiva, es decir, plantearlo de distintas maneras para poderlo resolver. Como hemos visto en este Capítulo el Teorema de los cinco colores no tiene una demostración complicada, no así el Teorema de los cuatro colores que tardó cerca de 123 años para ser demostrado, hecho realizado por Appel y Haken en 1976. El siguiente Teorema nos da una importante equivalencia entre gráficas planas y mapas:

**Teorema 2.28.** *Cualquier mapa es cuatro coloreable si y sólo si cualquier gráfica plana es cuatro coloreable.*

*Demostración.*

⇐] Sea  $M$  cualquier mapa. Entonces consideremos  $M^*$  su gráfica dual la cual es una gráfica plana; así por hipótesis los vértices de  $M^*$  pueden ser cuatro coloreados. Ahora como las adyacencias se preservan entre los vértices de  $M^*$  y las regiones de  $M$ , únicamente pasamos la coloración de  $M^*$  a una coloración de  $M$ .

⇒] Para esta parte de la demostración hagamos la siguiente construcción: Sea  $M$  cualquier mapa. Dibujemos un círculo suficientemente pequeño  $C_v$  centrado en cada vértice  $v \in V(M)$  y borremos el interior de  $C_v$  incluyendo a  $v$ . Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $C_v$  no contiene otros vértices distintos a  $v$ , que  $C_v$  intersecta únicamente las aristas incidentes en  $v$  y que si  $C_v$  intersecta una arista  $a$ , entonces  $C_v$  y  $a$  se intersectan en un único punto que denominaremos  $a_v$ . Definimos un nuevo mapa  $\hat{M}$  de la siguiente forma. Las regiones de  $\hat{M}$  consisten de las regiones de  $M$  junto con los interiores de las regiones  $R_v$  de los círculos  $C_v$  (podemos asumir que las regiones  $R_v$  no intersectan a cualquier otra pues las suponemos lo suficientemente pequeñas). Los vértices de  $\hat{M}$  son los puntos  $a_v$  y las aristas de  $\hat{M}$  los segmentos  $a'$  de las aristas  $a$  contenidas entre los vértices  $a_v$  y  $a_w$  donde  $a = (v, w)$  y los segmentos  $b' = (a_v, b_v)$  contenidos en  $C_v$  entre los vértices  $a_v$  y  $b_v$  siempre que  $a$  “siga” a  $b$  en  $v$ . Diremos que  $\hat{M}$  es obtenido de  $M$  por “inflación” de sus vértices (Figura 2.39). Ahora hagamos una modificación de  $\hat{M}$ , denotada por  $\bar{M}$ .  $\bar{M}$  se obtiene a partir de  $\hat{M}$  por “engrosamiento” de sus aristas, es decir, observemos la construcción de  $\bar{M}$  en la Figura 2.39 donde a cada vértice  $v$  de  $M$  se obtiene una región  $\bar{v}$  y que las regiones  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  son adyacentes en  $\bar{M}$  si y sólo si los vértices  $v$  y  $w$  son adyacentes en  $M$ . Así, la gráfica plana de  $G$  que da el mapa  $M$  es una subgráfica inducida por vértices de  $\bar{M}^*$ .

La propiedad clave de  $\bar{M}$  para nuestro propósito es que este contiene una región  $\bar{v}$  para todo vértice  $v$  de  $M$  y que las regiones  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  son adyacentes en  $\bar{M}$  si y sólo si los vértices  $v$  y  $w$  son adyacentes en  $M$ . Así, podemos obtener una gráfica plana  $G$  a partir del mapa  $M$ , la cual es una subgráfica inducida por vértices de la gráfica dual  $\bar{M}$ .

Ahora estamos listos para la demostración de la implicación faltante del Teorema. Sea  $G$  cualquier gráfica plana. Dibujando a  $G$  en el plano se produce un mapa  $M$  cuya gráfica plana es  $G$ . Por hipótesis todo mapa es cuatro coloreable y por lo tanto el “engrosamiento”  $\bar{M}$  lo es. Ahora coloreando cada vértice  $v$  de  $G$  con el color usado para la región  $\bar{v}$  de  $\bar{M}$  nos da una cuatro coloración de  $G$ .

□

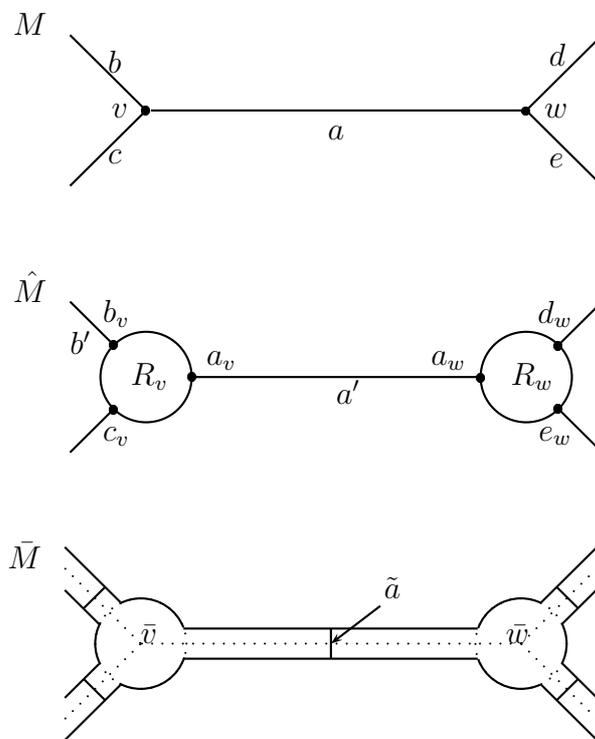


Figura 2.39: La construcción para la “inflación” de  $M$ .

## Capítulo 3

# Definiciones y resultados preliminares del Álgebra.

Aquí presentaremos algunos resultados y definiciones de Álgebra que nos serán de utilidad para el desarrollo de este trabajo. Comenzamos con definiciones de tipos de funciones. Después daremos las definiciones de monoide, anillo, campo y espacio vectorial con sus respectivos ejemplos para continuar con resultados que encierren estos conceptos y algunas observaciones importantes para comprender mejor el cuerpo de este trabajo.

**Definición 3.1.** Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función. Diremos que  $f$  es *inyectiva* si para todo  $a_1, a_2 \in A$ ,  $f(a_1) = f(a_2)$  implica que  $a_1 = a_2$ .

**Definición 3.2.** Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función. Diremos que  $f$  es *suprayectiva* si para todo  $b \in B$  existe  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ .

**Definición 3.3.** Si  $X \subseteq A$  se define la función *inclusión*:

$$\begin{array}{l} i : X \hookrightarrow A \\ x \longmapsto x \end{array}$$

**Definición 3.4.** Si  $X \subseteq A$  y  $f : A \rightarrow B$  una función. Podemos tomar la composición  $i$  con  $f$ , es decir,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow i & \nearrow f \circ i & \\ X & & \end{array}$$

Llamaremos a  $(f \circ i)$  **la restricción de  $f$  a  $X$**  y la denotamos por  $f|_X$ .

**Definición 3.5.** Una **operación binaria en un conjunto  $X$**  es una función:

$$f : X \times X \longrightarrow X.$$

En adelante, en lugar de utilizar letras como  $f, g, h$ , entre otras. para denotar una operación en un conjunto  $X$ , usaremos signos como:  $*, +, \circ, \diamond$ , entre otros.

Así,  $*$  :  $X \times X \rightarrow X$  es una operación binaria. Escribiremos  $a * b$ , en lugar de  $*((a, b))$ .

### 3.1. Monoides.

**Definición 3.6.** Un **monoide**  $(\mathcal{M})$  es una terna ordenada  $\mathcal{M} = (X, *, e)$ , tal que:

1.  $X$  es un conjunto no vacío.
2.  $*$  es asociativa, es decir,  $x * (y * z) = (x * y) * z$  para todo  $x, y, z \in X$ .
3.  $e$  es elemento **neutro**, es decir,  $x * e = e * x = x$  para todo  $x \in X$ .

**Observación 3.1.** El neutro en un monoide es único.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $\mathcal{M} = (\text{Map}(X, X), \circ, Id_X)$

Donde  $\text{Map}(X, X) =: \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es función y } X \neq \emptyset\}$ .

1.  $\text{Map}(X, X)$  es un conjunto no vacío, pues  $X \neq \emptyset$  y por lo tanto existe al menos una función, a saber  $\text{Id}_X$ .
2.  $\text{Id}_X$  es el elemento neutro para  $\text{Map}(X, X)$ , ya que,  $\forall f \in \text{Map}(X, X)$ ,  $f \circ \text{Id}_X = \text{Id}_X \circ f = f$ .
3. La composición de funciones es asociativa: Sean  $f, g, h \in \text{Map}(X, X)$ , entonces para cada  $x \in X$ ,

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

y por otro lado

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Por lo tanto  $\mathcal{M}$  es un monoide.

## 3.2. Grupos.

**Definición 3.7.** Un **grupo**  $(\mathcal{G})$  es una terna ordenada  $\mathcal{G} = (X, *, e)$ , tal que:

1.  $(X, *, e)$  es un monoide.
2. Para todo  $x \in \mathcal{G}$ , existe un elemento  $y \in \mathcal{G}$  tal que  $x * y = y * x = e$ . A 'y' se le llama el **inverso de x**, lo denotamos por  $x^{-1}$ .
3. Si se cumple que  $*$  es conmutativa, es decir,  $x * y = y * x$  para todo  $x, y \in \mathcal{G}$  diremos que  $\mathcal{G}$  es **Grupo abeliano o conmutativo**.

**Observación 3.2.** Si  $\mathcal{G}$  es un grupo, para cada elemento el inverso es único.

**Definición 3.8.** Se dice que un subconjunto  $\mathcal{H}$  de un grupo  $\mathcal{G}$  es un **subgrupo de  $\mathcal{G}$**  si respecto a la operación  $*$  en  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  mismo forma un grupo.

**Ejemplo 3.2.** Sea  $\mathcal{G} = (\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *, e)$ . Definimos  $*$  como:  $a * b = a + b + a \cdot b$ .

( $\mathbb{R}$  denota el conjunto de los números reales, el símbolo de  $+$  que aparece del lado derecho de la igualdad es la suma usual en  $\mathbb{R}$  y el símbolo de  $\cdot$  es el producto usual en  $\mathbb{R}$ . Para los ejemplos posteriores  $\mathbb{R}$  es utilizado como el campo usual de los números reales (ver sección 3.4).)

1.  $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \neq \emptyset$
2. Afirmamos que  $e = 0$  (el elemento 0 es el neutro aditivo en  $\mathbb{R}$ .) es el neutro para  $\mathcal{G}$  pues, para toda  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $a * e = a + 0 + a \cdot 0 = a + 0 + 0 = a$  y  $e * a = 0 + a + 0 \cdot a = 0 + a + 0 = a$ .
3. Sean  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , entonces:

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b * c) + a \cdot (b * c) \\ &= a + (b + c + b \cdot c) + a \cdot (b + c + b \cdot c) \\ &= a + b + c + c \cdot b + a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b \cdot c. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a * b) + c + (a * b) \cdot c \\ &= (a + b + a \cdot b) + c + (a + b + a \cdot b) \cdot c \\ &= a + b + a \cdot b + c + a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b \cdot c. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Entonces 3.1 y 3.2 son iguales, pues  $+$  y  $\cdot$  son conmutativos en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto  $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *, e)$  es un monoide.

4. Afirmamos que para todo  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , existe el “inverso  $*$  de  $a$ ” denotado por  $a^{-1} = \frac{-a}{1+a}$ .

$$\begin{aligned} a * a^{-1} &= a + a^{-1} + a \cdot a^{-1} = a + \frac{-a}{1+a} + a \cdot \frac{-a}{1+a} \\ &= (1+a) \cdot (a) + (-a) + (a) \cdot (-a) \\ &= a^2 + a + (-a) + (-a^2) = 0 = e. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} a^{-1} * a &= a^{-1} + a + a^{-1} \cdot a = \frac{-a}{1+a} + a + \frac{-a}{1+a} \cdot a \\ &= (-a) + (1+a) \cdot (a) + (-a) \cdot (a) \\ &= (-a) + a^2 + a + (-a^2) = 0 = e. \end{aligned}$$

Entonces  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 0 = e$ . Por lo tanto todo elemento  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  tiene inverso respecto ' $*$ '.

Notemos una cosa más. Para todo  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $a * b = a + b + a \cdot b = b + a + b \cdot a = b * a$ . (pues  $+$  y  $\cdot$  son conmutativos en  $\mathbb{R}$ ).

Por lo tanto  $\mathcal{G}$  es un grupo conmutativo.

**Observación 3.3.** Como es cotidiano hablar de grupos de manera en que las operaciones binarias son la “suma” o la “multiplicación” usual, convengamos lo siguiente,

1. Cuando utilizemos el símbolo “ $+$ ” diremos que el grupo se considera “aditivo”. Así cuando hablemos de esta manera “ $0$ ” representa el elemento neutro para esta operación.
2. Cuando utilizemos el símbolo “ $*$ ” diremos que el grupo se considera “multiplicativo”. Así cuando hablemos de esta manera “ $1$ ” representa el elemento neutro para esta operación.

**Teorema 3.1.** Sea  $\mathcal{G}$  un grupo y sean  $a, b, c \in \mathcal{G}$  entonces

$$\text{Si } a * b = a * c \text{ entonces } b = c.$$

*Demostración.* Sean  $a, b, c \in \mathcal{G}$  entonces,

$$\begin{aligned} a * b &= a * c \\ a^{-1} * a * b &= a^{-1} * a * c \\ e * b &= e * c \\ b &= c. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.2.** Sean  $a, b \in \mathcal{G}$ , donde  $\mathcal{G}$  es un grupo, entonces

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

*Demostración.* Sean  $a, b \in \mathcal{G}$  entonces

$$(a * b) * (a * b)^{-1} = e \tag{3.3}$$

Por otro lado

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e \tag{3.4}$$

Entonces de (3.3) y (3.4) tenemos

$$(a * b) * (a * b)^{-1} = (a * b) * (b^{-1} * a^{-1})$$

por el Teorema 3.1 tenemos que

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

□

**Teorema 3.3.** Sea  $\mathcal{G}$  un grupo en el que  $a * a = a^2 = e$  para todo  $a \in \mathcal{G}$  entonces,  $\mathcal{G}$  es abeliano.

*Demostración.* Como para todo  $a \in \mathcal{G}$ , tenemos que  $a^2 = e$ , entonces  $a^{-1} = a$  y junto con el Teorema 3.2, se deduce que para todo  $a, b \in \mathcal{G}$ ,

$$a * b = (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} = b * a.$$

□

**Definición 3.9.** Sean  $\mathcal{G} = (X, \diamond, e)$  y  $\mathcal{G}' = (X', \star, e')$  dos grupos. Un **homomorfismo de grupos** es una función  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  tal que  $f(u \diamond v) = f(u) \star f(v)$ .

**Definición 3.10.** Sean  $\mathcal{G} = (X, \diamond, e)$  y  $\mathcal{G}' = (X', \star, e')$  grupos y consideremos  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  un homomorfismo de grupos entonces, el **Núcleo** de  $h$  denotado por  $Ker(h)$ , es el conjunto  $Ker(h) \doteq \{x \in \mathcal{G} \mid h(x) = e'\}$  (el elemento  $e'$  es el neutro para el Grupo  $\mathcal{G}'$ ).

**Definición 3.11.** Sean  $\mathcal{G} = (X, \diamond, e)$  y  $\mathcal{G}' = (X', \star, e')$  grupos y consideremos  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  un homomorfismo de grupos entonces, la **Imagen** de  $h$  denotado por  $Im(h)$ , es el conjunto  $Im(h) \doteq \{h(x) \in \mathcal{G}' \mid x \in \mathcal{G}\}$ .

**Teorema 3.4.** Sean  $\mathcal{G} = (X, *, e)$  y  $\mathcal{G}' = (X', *', e')$  grupos y consideremos  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  un homomorfismo de grupos entonces,

$$h(e) = e'$$

*Demostración.* Sea  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  un homomorfismo de Grupos entonces,

$$\begin{aligned} h(e) &= h(e * e) = h(e) *' h(e) \\ h(e)^{-1} *' h(e) &= (h(e)^{-1} *' h(e)) *' h(e) \\ e' &= e' *' h(e) \\ e' &= h(e). \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.5.** Sean  $\mathcal{G} = (X, *, e)$  y  $\mathcal{G}' = (X', *', e')$  grupos y consideremos  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  un homomorfismo de grupos, entonces

$$h(x^{-1}) = h(x)^{-1}$$

*Demostración.* Sea  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  un homomorfismo de Grupos y sea  $x \in \mathcal{G}$  entonces,

$$\begin{aligned} h(e) &= h(x * x^{-1}) = h(x) *' h(x^{-1}) \\ h(x)^{-1} *' h(e) &= (h(x)^{-1} *' h(x)) *' h(x^{-1}) \\ h(x)^{-1} *' e' &= e' *' h(x^{-1}) \\ h(x)^{-1} &= h(x^{-1}). \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.6.** *Un homomorfismo de grupos  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  es inyectivo si y sólo si,  $\text{Ker}(h) = \{e\}$*

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $\text{Ker}(h) = \{e\}$  y  $h(x) = h(y)$ . Entonces  $h(x) - h(y) = h(x - y) = e'$ , lo que significa que  $x - y \in \text{Ker}(h) = \{e\}$ . Así,  $x - y = e$ , por lo tanto  $x = y$ , lo que muestra que  $h$  es inyectivo.

$\Rightarrow$ ] Supongamos ahora que  $h$  es inyectivo. Sea  $x \in \text{Ker}(h)$ . Entonces  $h(x) = e'$  y por el Teorema 3.4  $h(e) = e'$ , pero como  $h$  es inyectivo, entonces  $x = e$ .

□

Los siguientes ejemplos tiene la finalidad de mostrarnos los grupos que denotaremos por  $(\mathbb{Z}_m, +_m, [0]_m)$ ,  $\hat{\mathcal{G}}$  y  $\hat{\mathcal{G}}^X \doteq \{f \mid f : X \rightarrow \hat{\mathcal{G}}; f \text{ es función}\}$  que nos serán de gran importancia en el desarrollo de nuestro trabajo en capítulos posteriores.

**Definición 3.12.** *Sea  $m \in \mathbb{N}$  y sea*

$$R_m \doteq \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = b + km; k \in \mathbb{Z}\}.$$

$R_m$  es una relación de equivalencia en el conjunto  $\mathbb{Z}$  de todos los enteros y es llamada **congruencia módulo  $m$** . El número  $m$  es llamado el **módulo**. Escribimos  $a \equiv b \pmod{m}$  para indicar que  $(a, b) \in R_m$ . La clase de equivalencia de  $a \in \mathbb{Z}$  la denotaremos por  $[a]_m$ , es decir,

$$[a]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{m}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = a + km; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Cualquier  $a \in \mathbb{Z}$  es congruente módulo  $m$  a uno y sólo uno de los números  $0, 1, \dots, (m - 1)$ . De hecho si  $r$  es el menor entero no negativo en  $[a]_m$ , entonces  $0 \leq r < m$  y  $a \equiv r \pmod{m}$ . De esto, tenemos que el conjunto cociente<sup>1</sup>  $(\mathbb{Z}/R_m) = \mathbb{Z}_m$  es:

$$\{[0]_m, [1]_m, \dots, [m - 1]_m\}.$$

<sup>1</sup>Dada una relación de equivalencia  $R$  en un conjunto  $A$ , la familia de todas las clases de equivalencia módulo  $R$  es denotado por  $A/E$  y  $A/E = \{[a] \mid a \in A\}$ . Al conjunto  $A/E$  se le llama **conjunto cociente de  $A$  por la relación  $R$** .

**Ejemplo 3.3.** El conjunto  $\mathbb{Z}_m = (\{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}, +_m, [0]_m)$  es un grupo.

Primero definamos la “suma”  $+_m$ . Sean  $[a]_m, [b]_m \in \mathbb{Z}_m$ , entonces

$$[a]_m +_m [b]_m = [a + b]_m$$

Veamos que esta es una buena definición<sup>2</sup> para esta operación:

Sea  $a \equiv a' \pmod{m}$  y  $b \equiv b' \pmod{m}$ . Queremos mostrar que  $(a + b) \equiv (a' + b') \pmod{m}$ .

Como  $a \equiv a' \pmod{m}$ , esto quiere decir que  $a = a' + k_1m$  para algún  $k_1 \in \mathbb{Z}$  y también como  $b \equiv b' \pmod{m}$ , es decir,  $b = b' + k_2m$  para algún  $k_2 \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $a + b = a' + k_1m + b' + k_2m = (a' + b') + (k_1 + k_2)m$ , es decir,  $(a + b) \equiv (a' + b')$ . Por lo tanto la “suma” está bien definida.

Ahora estamos listos para demostrar que  $\mathbb{Z}_m$  es un grupo.

1.  $(\mathbb{Z}_m, +_m, [0]_m)$  es un monoide.

i)- La operación  $+_m$  es asociativa: Sean  $[a]_m, [b]_m, [c]_m \in \mathbb{Z}_m$ , entonces:

$$\begin{aligned} ([a]_m +_m [b]_m) +_m [c]_m &= ([a + b]_m) +_m [c]_m \\ &= ([a + b] + c)_m \\ &= ([a + (b + c)]_m) \\ &= [a]_m +_m ([b + c]_m) \\ &= [a]_m +_m ([b]_m +_m [c]_m). \end{aligned}$$

ii)- El elemento  $[0]_m$  es el neutro. Sean  $[a]_m, [0]_m \in \mathbb{Z}_m$ , entonces

$$[a]_m +_m [0]_m = [a + 0]_m = [a]_m.$$

---

<sup>2</sup>Dada una función  $f : X \rightarrow Y$  y una relación de equivalencia  $R$  sobre el conjunto  $X$ , queremos definir una función  $\phi : X/R \rightarrow Y$  tal que  $\phi([x]_R) = f(x)$ ; esto sucede si y sólo si para todo  $(x, y) \in R$ , tenemos que  $f(x) = f(y)$ . En este caso decimos que  $\phi$  está **bien definida**.

2. Cada elemento tiene su propio inverso denotado por  $-[a]_m = [-a]_m$ . Sean  $[a]_m, [-a]_m \in \mathbb{Z}_m$ , entonces

$$[a]_m +_m -[a]_m = [a]_m +_m [-a]_m = [a + (-a)]_m = [0]_m.$$

Por lo tanto  $(\mathbb{Z}_m, +_m, [0]_m)$  es un grupo.

Los siguientes ejemplos muestran dos grupos de los que haremos importante uso a partir del capítulo 5.

**Ejemplo 3.4.** Sea  $\mathcal{G} = \{1, x, y, xy\}$ . Mostremos que la siguiente terna  $\hat{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, *, 1)$  (considerada multiplicativamente) y tal que  $x^2 = y^2 = 1$ , es un grupo. Notemos su tabla para entenderlo mejor:

*	1	x	y	xy
1	1	x	y	xy
x	x	1	xy	y
y	y	xy	1	x
xy	xy	y	x	1

Por la tabla anterior podemos deducir que 1 es el neutro, que la operación  $'*'$  es asociativa, por el Teorema 3.3 cada elemento es su propio inverso y conmutan, por lo tanto  $\hat{\mathcal{G}}$  es un grupo abeliano.

**Ejemplo 3.5.** Sea  $\hat{\mathcal{G}}^X \doteq \{f \mid f : X \rightarrow \hat{\mathcal{G}}; f \text{ es función}\}$ . Veamos que este conjunto junto con el producto de funciones definido por  $(f * g)(x) = f(x) *' g(x)$  (notemos que el símbolo  $'*'$  que aparece del lado derecho de la igualdad es la operación para  $\hat{\mathcal{G}}$ ) es un grupo (conmutativo).

1.  $(\hat{\mathcal{G}}^X, *, \tilde{1})$  es un monoide.

i)- La operación  $*$  entre funciones es asociativa: Sean  $f, g, h \in \hat{\mathcal{G}}^X$  y  $x \in X$  entonces:

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= (f * g)(x) *' h(x) = (f(x) *' g(x)) *' h(x) \\ (f * (g * h))(x) &= f(x) *' (g * h)(x) = f(x) *' (g(x) *' h(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $((f * g) * h)(x) = (f * (g * h))(x)$ , pues los elementos  $f(x), g(x), h(x) \in \hat{\mathcal{G}}$ .

ii)- La función  $\tilde{1} : X \rightarrow \hat{\mathcal{G}}$  definida mediante la regla  $\tilde{1}(x) = 1 \quad \forall x \in X$  es el neutro, ya que:

$$(f * \tilde{1})(x) = f(x) *' \tilde{1}(x) = f(x) *' 1 = f(x) \quad \forall x \in X.$$

2. Cada elemento de  $(\hat{\mathcal{G}}^X, *)$  es su propio inverso.

Dada una función  $f \in \hat{\mathcal{G}}^X$  su inversa será ella misma pues:

$$(f * f)(x) = f(x) *' f(x) = f(x)^2 = 1 \quad \forall x \in X.$$

Por lo tanto  $\hat{\mathcal{G}}^X$  es un grupo donde cada elemento es su propio inverso.

### 3.2.1. Sucesiones exactas de grupos.

Este apartado consta de una pequeña introducción a las sucesiones exactas de grupos que serán de utilidad en el capítulo 7.

**Definición 3.13.** Diremos que una sucesión de grupos

$$\dots \rightarrow \mathcal{G}_{i-1} \xrightarrow{h_{i-1}} \mathcal{G}_i \xrightarrow{h_i} \mathcal{G}_{i+1} \rightarrow \dots$$

es **exacta** en  $\mathcal{G}_i$  si y sólo si  $Im(h_{i-1}) = Ker(h_i)$ .

Si es exacta para cada  $i$ , la llamaremos **sucesión exacta**.

**Definición 3.14.** *A una sucesión exacta de la forma*

$$e \rightarrow \mathcal{G}' \xrightarrow{h'} \mathcal{G} \xrightarrow{h} \mathcal{G}'' \rightarrow e \quad (3.5)$$

la llamaremos **sucesión exacta corta**.

**Ejemplo 3.6.** *Consideremos la siguiente sucesión*

$$0 \xrightarrow{h_1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{h_2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{h_3} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{h_4} 0.$$

donde definimos:

$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$
$0 \mapsto [0]_2$	$[0]_2 \mapsto [0]_4$ $[1]_2 \mapsto [2]_4$	$[0]_4 \mapsto [0]_2$ $[1]_4 \mapsto [1]_2$ $[2]_4 \mapsto [0]_2$ $[3]_4 \mapsto [1]_2$	$[0]_2 \mapsto 0$ $[1]_2 \mapsto 0$

Por la definición de las funciones  $h_1, h_2, h_3, h_4$  vemos que son homomorfismos entre grupos y de la tabla anterior notamos que,

$$\begin{aligned} \text{Im}(h_1) &= \{[0]_2\} \\ \text{Ker}(h_2) &= \{[0]_2\} \end{aligned} \implies \text{Im}(h_1) = \{[0]_2\} = \text{Ker}(h_2).$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(h_2) &= \{[0]_4, [2]_4\} \\ \text{Ker}(h_3) &= \{[0]_4, [2]_4\} \end{aligned} \implies \text{Im}(h_2) = \{[0]_4, [2]_4\} = \text{Ker}(h_3).$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(h_3) &= \{[0]_2, [1]_2\} \\ \text{Ker}(h_4) &= \{[0]_2, [1]_2\} \end{aligned} \implies \text{Im}(h_3) = \{[0]_2, [1]_2\} = \text{Ker}(h_4).$$

Por lo tanto la sucesión es una sucesión exacta corta.

Observemos que decir que (3.5) es exacta, es afirmar tres cosas:

1.  $h'$  es inyectiva,
2.  $h$  es suprayectiva,
3.  $\text{Ker}(h) = \text{Im}(h')$ .

### 3.3. Anillos.

**Definición 3.15.** Un **anillo**  $(\mathcal{A})$  con elemento unitario es una quinteta ordenada  $\mathcal{A} = (X, \diamond, *, e, e')$ , tal que:

1.  $(X, \diamond, e)$  es un grupo abeliano.
2.  $(X, *, e')$  es un monoide.
3.  $*$  se distribuye sobre  $\diamond$ , por los dos lados, es decir,
 
$$x * (y \diamond z) = (x * y) \diamond (x * z) \quad y \quad (y \diamond z) * x = (y * x) \diamond (z * x)$$
 para todo  $x, y, z \in \mathcal{A}$ .

- I.- Si la operación  $*$  es conmutativa, el anillo se llama **anillo conmutativo**.
- II.- Si en  $\mathcal{A}$  se tiene que para  $x \neq e \in \mathcal{A}$  existe un  $y \in \mathcal{A}, y \neq e$ , tal que  $x * y = e$ , entonces diremos que  $x$  es un **divisor de cero**.
- III.- Si  $\mathcal{A}$  no tiene divisores de cero, el anillo se llama **Dominio** y se denomina **Dominio entero** si  $\mathcal{A}$  es Dominio y  $*$  es conmutativo.
- IV.- Si para todo  $x \in \mathcal{A}$  y  $x \neq e$ , existe un elemento denotado por  $x^{-1} \in \mathcal{A}$  tal que  $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e'$ , diremos que  $\mathcal{A}$  es un **anillo con división**.

**Observación 3.4.** Notemos que  $e$  es elemento neutro para  $\diamond$  y  $e'$  es elemento neutro para  $*$ . Además  $e \neq e'$ .

**Ejemplo 3.7.** Sea  $\mathcal{A} = (R, \dot{+}, *, \dot{0}, \dot{1})$ ,

Donde  $R = \{r \mid r = a + b\sqrt{2} \text{ con } a, b \in \mathbb{Q}\}$  (el  $\dot{+}$  del lado derecho de la igualdad es la suma usual en  $\mathbb{R}$ . El conjunto  $\mathbb{Q}$  es el conjunto de los números racionales.) y definimos:

- i)- Si  $r = (a + b\sqrt{2}) \in R$  y  $r' = (c + d\sqrt{2}) \in R$  entonces,  $r \dot{+} r' = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$ . (El  $\dot{+}$  del lado derecho de la igualdad es la suma usual en los  $\mathbb{R}$ .)
- ii)- Si  $r = (a + b\sqrt{2}) \in R$  y  $r' = (c + d\sqrt{2}) \in R$  entonces,  $r \dot{*} r' = (a + b\sqrt{2}) * (c + d\sqrt{2}) = (a * c + 2 * b * d) + (a * d + c * b)\sqrt{2}$ . (El  $\dot{+}$  y  $\dot{*}$  del lado derecho de la igualdad es la suma y producto usual en los  $\mathbb{R}$ .)

iii)-  $\dot{0} = (0 + 0\sqrt{2}) \in R$ .

iv)-  $\dot{1} = (1 + 0\sqrt{2}) \in R$ .

1.  $(R, \dot{+}, \dot{0})$  es un grupo abeliano.

i)- Sea  $r = (a + b\sqrt{2}) \in R$  y  $\dot{0} = (0 + 0\sqrt{2})$  afirmamos que  $\dot{0}$  es el neutro para " $\dot{+}$ ", pues:

$$\begin{aligned} r \dot{+} \dot{0} &= (a + b\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) = (0 + 0\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) \\ &= (0 + a) + (0 + b)\sqrt{2} \\ &= (a + b\sqrt{2}) = r. \end{aligned}$$

ii)- Sean  $r = (a + b\sqrt{2})$ ,  $r' = (c + d\sqrt{2})$ ,  $r'' = (e + h\sqrt{2}) \in R$ , entonces " $\dot{+}$ " es asociativa, ya que:

$$\begin{aligned} r \dot{+} (r' \dot{+} r'') &= (a + b\sqrt{2}) + \left( (c + d\sqrt{2}) + (e + h\sqrt{2}) \right) \\ &= (a + b\sqrt{2}) + \left( (c + e) + (d + h)\sqrt{2} \right) \\ &= (a + c + e) + (b + d + h)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (r \dot{+} r') \dot{+} r'' &= \left( (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) \right) + (e + h\sqrt{2}) \\ &= \left( (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \right) + (e + h\sqrt{2}) \\ &= (a + c + e) + (b + d + h)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

iii)- Sea  $r = (a + b\sqrt{2}) \in R$ , y  $-r = (-a - b\sqrt{2})$  afirmamos que  $(-r)$  es el inverso " $\dot{+}$ " de  $r$ , pues:

$$\begin{aligned} r \dot{+} (-r) &= (a + b\sqrt{2}) + (-a - b\sqrt{2}) = (-a - b\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) \\ &= (a + (-a)) + (b + (-b))\sqrt{2} \\ &= (0 + 0\sqrt{2}) = \dot{0}. \end{aligned}$$

iv)- Sean  $r = (a + b\sqrt{2}) \in R$ , y  $r' = (c + d\sqrt{2})$ , afirmamos que " $\dot{+}$ " es conmutativo, ya que:

$$r \dot{+} r' = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (c + d\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = r' \dot{+} r.$$

2.  $(R, \dot{*}, \dot{1})$  es un monoide.

i)- Sea  $r = (a + b\sqrt{2}) \in R$  y  $\dot{1} = (1 + 0\sqrt{2}) \in R$ , afirmamos que  $\dot{1}$  es el neutro para " $\dot{*}$ ", pues:

$$\begin{aligned} r \dot{*} \dot{1} &= (a + b\sqrt{2}) * (1 + 0\sqrt{2}) = (1 + 0\sqrt{2}) * (a + b\sqrt{2}) \\ &= (a * 1 + 2 * b * 0) + (a * 0 + 1 * b)\sqrt{2} \\ &= (a + b\sqrt{2}) = r. \end{aligned}$$

ii)- Sean  $r = (a + b\sqrt{2})$ ,  $r' = (c + d\sqrt{2})$ ,  $r'' = (e + h\sqrt{2}) \in R$ , entonces " $\dot{*}$ " es asociativa, ya que:

$$\begin{aligned} r \dot{*} (r' \dot{*} r'') &= (a + b\sqrt{2}) * \left( (c + d\sqrt{2}) * (e + h\sqrt{2}) \right) \\ &= (a + b\sqrt{2}) * \left( (c * e + 2 * d * h) + (c * h + d * e)\sqrt{2} \right) \\ &= (a * (c * e + 2 * d * h) + 2 * b * (c * h + d * e)) + \\ &\quad + (a * (c * h + d * e) + b * (c * e + 2 * d * h))\sqrt{2} \\ &= (a * c * e + 2 * a * d * h + 2 * b * c * h + 2 * b * d * e) + \\ &\quad + (a * c * h + a * d * e + b * c * e + 2 * b * d * h)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (r \dot{*} r') \dot{*} r'' &= \left( (a + b\sqrt{2}) * (c + d\sqrt{2}) \right) * (e + h\sqrt{2}) \\ &= \left( (a * c + 2 * b * d) + (a * d + c * b)\sqrt{2} \right) * (e + h\sqrt{2}) \\ &= ((a * c + 2 * b * d) * e + 2 * (a * d + c * b) * h) + \\ &\quad + ((a * c + 2 * b * d) * h + (a * d + c * b) * e)\sqrt{2} \\ &= (a * c * e + 2 * a * d * h + 2 * b * c * h + 2 * b * d * e) + \\ &\quad + (a * c * h + a * d * e + b * c * e + 2 * b * d * h)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $(R, \dot{*}, \dot{1})$  es un monoide. Únicamente falta comprobar la propiedad distributiva en  $\mathcal{R}$ .

3. Sean  $r = (a + b\sqrt{2})$ ,  $r' = (c + d\sqrt{2})$ ,  $r'' = (e + h\sqrt{2}) \in R$ , entonces por un lado,

$$\begin{aligned} r \dot{*} (r' \dot{+} r'') &= (a + b\sqrt{2}) * \left( (c + d\sqrt{2}) + (e + h\sqrt{2}) \right) \\ &= (a + b\sqrt{2}) * \left( (c + e) + (d + h)\sqrt{2} \right) \\ &= (a * (c + e) + 2 * b * (d + h)) + \\ &\quad + (a * (d + h) + b * (c + e)) \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} (r' \dot{+} r'') \dot{*} r &= \left( (c + d\sqrt{2}) + (e + h\sqrt{2}) \right) * (a + b\sqrt{2}) \\ &= \left( (c + e) + (d + h)\sqrt{2} \right) * (a + b\sqrt{2}) \\ &= ((c + e) * a + 2 * (d + h) * b) + \\ &\quad + ((d + h) * a + (c + e) * b) \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De aquí tenemos que (3.6) y (3.7) son iguales pues en  $\mathbb{Q}$  se vale la distributividad y la conmutatividad.

**Ejemplo 3.8.**  $\mathbb{Z}_n = (\{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}, +_n, *_n, [0]_n, [1]_n)$  es un anillo. Denominado el **anillo de los enteros módulo  $n$** .

Donde  $'+_n$  y  $'*_n$  están definidas por:

$$\begin{aligned} \text{Sean } [a]_n, [b]_n \in \mathbb{Z}_n, \text{ entonces } [a]_n +_n [b]_n &= [a + b]_n. \\ \text{Sean } [a]_n, [b]_n \in \mathbb{Z}_n, \text{ entonces } [a]_n *_n [b]_n &= [a * b]_n. \end{aligned}$$

Únicamente falta mostrar que el “producto” esta bien definido.

Sea  $a \equiv a' \pmod{n}$  y  $b \equiv b' \pmod{n}$ . Queremos mostrar que  $(a * b) \equiv (a' * b') \pmod{n}$ .

Como  $a \equiv a' \pmod{n}$ , esto quiere decir que  $a = a' + k_1n$  para algún  $k_1 \in \mathbb{Z}$  y también como  $b \equiv b' \pmod{n}$ , es decir,  $b = b' + k_2n$  para algún  $k_2 \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $ab = a'b + bk_1n$  y  $a'b = a'b' + a'k_2n$ , así,  $ab = a'b + bk_1n = a'b' + a'k_2n + bk_1n$ , por lo que  $ab = a'b' + n(a'k_2 + bk_1)$ , es decir,  $(a * b) \equiv (a' * b')$ . Por lo tanto el “producto” está bien definido.

1.  $(\{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}, +_n, [0]_n)$  es un grupo abeliano.

En el ejemplo 3.3 se probó que  $(\{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}, +_n, [0]_n)$  es un grupo, falta probar que es abeliano.

$$[a]_n +_n [b]_n = [a + b]_n = [b + a]_n = [b]_n +_n [a]_n.$$

Por lo tanto  $(\{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}, +_n, [0]_n)$  es un grupo abeliano.

2.  $(\{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}, *_n, [1]_n)$  es un monoide.

i)- Sean  $[a]_n, [b]_n, [c]_n \in \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$ , entonces  $'*_n'$  es asociativa:

$$\begin{aligned} ([a]_n *_n [b]_n) *_n [c]_n &= ([a * b]_n) *_n [c]_n \\ &= [(a * b) * c]_n \\ &= [a * (b * c)]_n \\ &= [a]_n *_n ([b * c]_n) \\ &= [a]_n *_n ([b]_n *_n [c]_n). \end{aligned}$$

ii)- Sea  $[a]_n \in \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$ , el elemento  $[1]_n$  es el neutro para  $'*_n'$ , pues:

$$[a]_n *_n [1]_n = [a * 1]_n = [a]_n.$$

3. Sean  $[a]_n, [b]_n, [c]_n \in \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$ , entonces  $'*_n'$  se distribuye sobre  $'+_n'$ :

$$\begin{aligned}
[a]_n *_n ([b]_n +_n [c]_n) &= [a]_n *_n ([b + c]_n) \\
&= [a * (b + c)]_n \\
&= [(a * b) + (a * c)]_n \\
&= [a * b]_n +_n [b * c]_n \\
&= ([a]_n *_n [b]_n) +_n ([b]_n *_n [c]_n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathbb{Z}_n$  es un anillo con unidad.

**Definición 3.16.** Sean  $\mathcal{A} = (X, +, *, e, e')$  y  $\mathcal{A}' = (X', \hat{+}, \star, f, f')$  dos anillos. Un **homomorfismo de anillos** es una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  tal que  $f(u + v) = f(u) \hat{+} f(v)$  y  $f(u * v) = f(u) \star f(v)$ ; y manda  $e'$  a  $f'$ .

**Definición 3.17.** Sea  $\mathcal{A}$  un anillo. Un subconjunto no vacío  $I$  de  $\mathcal{A}$  se llama **ideal de  $\mathcal{A}$**  si:

1.  $I$  es un subgrupo aditivo de  $\mathcal{A}$ .
2. Dados  $a \in \mathcal{A}$  y  $r \in I$ , entonces  $ar \in I$  y  $ra \in I$ .

**Definición 3.18.** Sean  $\mathcal{A}$  un anillo e  $I$  un ideal de  $\mathcal{A}$ . Sea  $\mathcal{A}/I$  el conjunto de todas las clases laterales de  $I$  en  $\mathcal{A}$  que se obtienen al considerar a  $I$  como un subgrupo de  $\mathcal{A}$  respecto a "+". En otras palabras, el conjunto

$$\mathcal{A}/I \doteq \{a + i \mid i \in I\} = a + I \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

y con el cual definimos las siguientes operaciones entre elementos de este conjunto:

1.  $(a_1 + I) \bar{+} (a_2 + I) = (a_1 + a_2) + I$ ,
2.  $(a_1 + I) \bar{*} (a_2 + I) = (a_1 * a_2) + I$ .

(Estas operaciones están bien definidas, para los detalles ver [17] pag. 116–117.)

De esta manera hemos dotado a  $\mathcal{A}/I$  de una estructura de anillo denominado **anillo cociente**.

**Definición 3.19.** Un anillo  $\mathcal{A}$  (considerado “aditivamente”) tiene **característica**  $n$ ,  $n \neq e$  si  $n$  es un entero positivo tal que,  $\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\text{-veces}} = e$  para todo  $x \in \mathcal{A}$  y ningún entero positivo menor que  $n$  goza de esta propiedad, si no existe tal  $n$ , decimos que la característica de  $\mathcal{A}$  es **cero**.

Para tener una mejor comprensión sobre el concepto de *característica* de un anillos notemos lo siguiente:

**Notación 3.1.** Al conjunto de todos los múltiplos del número  $n$  lo denotamos por  $n\mathbb{Z} = \{s \mid s = nz \ z \in \mathbb{Z}\} = \{s \mid s \equiv 0 \pmod{n}\}$ .

**Proposición 3.7.**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  es dominio si y sólo si  $n$  es primo o  $n = 0$ .

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ] Supongamos que  $n$  es primo, entonces  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  es campo (ver Teorema 3.11) y por lo tanto dominio.

Si  $n = 0$ , entonces  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$  que es dominio.

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $n$  no es primo, entonces, sin pérdida de generalidad,  $n$  se puede factorizar de la forma  $n = pq$ . Por lo que

$$\begin{aligned} [n]_n &= [0]_n \\ [pq]_n &= [0]_n \\ [p]_n[q]_n &= [0]_n \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción pues supusimos que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  es dominio.

Por lo tanto  $n$  es primo. □

**Observación 3.5.** Para todo anillo  $\mathcal{A}$ , existe un único homomorfismo de anillos,  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $\varphi(z) = z \cdot 1$  (es decir,  $z$  veces el  $1 \ \forall z \in \mathbb{Z}$ ) y  $\varphi(1_{\mathbb{Z}}) = 1_{\mathcal{A}}$ . El  $\text{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z}$  ( $n \geq 0$ ), entonces  $n$  es la **característica** de  $\mathcal{A}$ .

Si  $\mathcal{D}$  es un dominio, entonces  $\varphi(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{D}$  y como es un dominio  $\varphi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  y como  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  es dominio si y sólo si  $n = 0$  ó  $n$  es primo, entonces la característica de  $\mathcal{D}$  es 0 o  $p$  (primo).

### 3.3.1. El Anillo de polinomios.

El propósito de este apartado es mostrar una estructura sumamente importante para el cuerpo de este trabajo. Aquí definimos a  $\mathcal{A}[x]$ , notamos algunas de sus propiedades y demostramos algunos resultados que sirven para posteriores resultados durante el desarrollo de nuestro trabajo.

**Definición 3.20.** Sea  $\mathcal{A} = (R, +, *, 0, 1)$  un anillo. Un **polinomio**  $p(x)$  con **coeficientes en  $\mathcal{A}$**  es una suma formal infinita

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = c_0 + c_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

donde  $c_i \in \mathcal{A}$  y  $c_i = 0$  para casi todos los valores de  $i$ , es decir, son todos cero excepto para un número finito de valores de  $i$ .

La  $x$  se denomina la **indeterminada de  $p(x)$**  y los  $c_i$  son los **coeficientes de  $p(x)$** . Si para algún  $i > 0$  es cierto que  $c_i \neq 0$ , el mayor de dichos valores de  $i$  es el **grado de  $p(x)$**  y lo denotamos por  $\text{grad}(p(x))$ . De no existir dicha  $i > 0$ , entonces  $p(x)$  es de **grado cero**. Al elemento "0" no se le asigna grado.

Por la definición de polinomio tenemos que  $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$ , que tiene  $c_i = 0$  para  $i > n$ , entonces podemos denotarlo como  $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = \sum_{i=0}^n c_i x^i$  y su grado es  $\text{grad}(p(x)) = n$ . También, si algún  $c_i = 1$ , podemos quitarla de la suma formal, así que consideraremos, por ejemplo,  $x^2 + x + 1$  como el polinomio  $1x^2 + 1x + 1$ . Un elemento de  $\mathcal{A}$  es un **polinomio constante**. Denotaremos por  $\mathcal{A}[x]$  el conjunto de todos los polinomios en una indeterminada con coeficientes en  $\mathcal{A}$ .

Ahora definimos las operaciones de "suma" y "producto" para este nuevo conjunto.

**Definición 3.21.** Si  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  y  $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$  son *iguales* si y sólo si  $a_i = b_i$  para toda  $i$ .

**Definición 3.22.** Definimos la **suma** de  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  y  $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$  como el polinomio

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i$$

donde  $s_n = a_n + b_n$  y  $s_i = 0$  para casi todos los valores de  $i$ .

**Definición 3.23.** Definimos el **producto** de  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  y  $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$  como el polinomio

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i$$

donde  $d_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$  y  $d_i = 0$  para casi todos los valores de  $i$ .

Al efectuar el producto entre polinomios hay que tener en cuenta la relación  $x^a x^b = x^{a+b}$ . También notemos que  $\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$  no necesariamente es igual a  $\sum_{i=0}^n b_i a_{n-i}$  si  $\mathcal{A}$  no es conmutativo.

**Teorema 3.8.** El conjunto  $\mathcal{A}[x]$  de todos los polinomios en la indeterminada  $x$  con coeficientes en el anillo  $\mathcal{A}$ , es un anillo bajo las operaciones de suma y producto antes definidas. Si  $\mathcal{A}$  es conmutativo, entonces  $\mathcal{A}[x]$  es conmutativo y si  $\mathcal{A}$  tiene unitario "1" entonces  $1(x)$  es unitario para  $\mathcal{A}[x]$ .

*Demostración.* Veamos que

1.  $(\mathcal{A}[x], +, 0(x))$  es un grupo abeliano.

i)- Sea  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  y  $0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 0x^i$ , así tenemos

$$\begin{aligned} p(x) + 0(x) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} 0x^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (c_i + 0)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \\ &= p(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $0(x)$  es el neutro para  $\mathcal{A}[x]$ .

ii)- Sean  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ,  $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$  y  $r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  entonces

$$\begin{aligned} (p(x) + q(x)) + r(x) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \right) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} ([a_i + b_i] + c_i) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + [b_i + c_i]) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \left( \sum_{i=0}^{\infty} (b_i + c_i) x^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) \\ &= p(x) + (q(x) + r(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $+$  es asociativa.

iii)- Sean  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  y  $-p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-c_i) x^i$  así tenemos

$$\begin{aligned} p(x) + (-p(x)) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} (-c_i) x^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (c_i + (-c_i)) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 0 x^i \\ &= 0(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $-p(x)$  es el inverso respecto a "+" para  $p(x)$ .

iv)- Sean  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  y  $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$  entonces

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (b_i + a_i) x^i \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \\ &= q(x) + p(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto + es conmutativo.

2.  $(\mathcal{A}[x], *, 1(x))$  es un monoide (por comodidad en el producto de dos polinomios en lugar de escribir  $p(x)*q(x)$  únicamente escribimos  $p(x)q(x)$ ).

i)- Sean  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ,  $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$  y  $r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  entonces,

$$\begin{aligned}
 (p(x)q(x))r(x) &= \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) \right] \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) \\
 &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n \right] \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^s \left( \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) c_{s-n} \right] x^s \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k \right) x^s \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^s a_{s-m} \left( \sum_{j=0}^m b_j c_{m-j} \right) \right] x^s \\
 &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^m b_j c_{m-j} \right) x^m \right] \\
 &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) \right] \\
 &= p(x)(q(x)r(x)).
 \end{aligned}$$

ii)- Sean  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ,  $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$  y  $r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  entonces,

$$\begin{aligned}
 p(x)(q(x) + r(x)) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (b_i + c_i) x^i \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^n a_i (b_{n-i} + c_{n-i}) \right] x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^n (a_i b_{n-i} + a_i c_{n-i}) \right] x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n + \left( \sum_{i=0}^n a_i c_{n-i} \right) x^n \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n a_i c_{n-i} \right) x^n \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} d'_i x^i \quad (*) \\
 &= p(x)q(x) + p(x)r(x).
 \end{aligned}$$

$$(*) \dots (d_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \text{ y } d'_n = \sum_{i=0}^n a_i c_{n-i})$$

La propiedad distributiva derecha se prueba de manera análoga. De esta forma probamos que  $(\mathcal{A}[x], +, 0(x))$  forman un anillo denominado el **anillo de polinomios en la indeterminada  $x$** .

3. Si  $\mathcal{A}$  es conmutativo y sean  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  y  $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$  entonces se verifica que

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i & (d_n &= \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} d'_i x^i & (d'_n &= \sum_{i=0}^n b_i a_{n-i}) \\ &= q(x)p(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{A}[x]$  también es conmutativo.

4. Si  $\mathcal{A}$  tiene unitario, digamos 1 y sean  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  y  $1(x) = 1 + 0 + \dots + 0 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  con  $c_0 = 1$  y  $c_i = 0 \forall i \geq 1$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 1(x) * p(x) &= 1 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (1 \cdot c_i) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \\ &= p(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{A}[x]$  también tiene unitario.

□

Si  $\mathcal{A}$  es un anillo y  $x$  e  $y$  son indeterminadas, podemos formar el anillo  $(\mathcal{A}[x])[y]$ , esto es, el anillo de polinomios en  $y$  con coeficientes que son polinomios en  $x$ . De una manera análoga podemos definir el **anillo de polinomios en  $n$  indeterminadas  $x_i$  con coeficientes en  $\mathcal{A}$**  y denotado por  $\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Lema 3.9.** *Si  $\mathcal{K}$  es un campo (para campos ver sección 3.4) y  $p(x), q(x) \in \mathcal{K}[x]$  polinomios distintos del cero, entonces  $\text{grad}(p(x)q(x)) = \text{grad}(p(x)) + \text{grad}(q(x))$ .*

*Demostración.* Sean  $m = \text{grad}(p(x))$  y  $n = \text{grad}(q(x))$ ; de esta manera el polinomio  $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ , donde  $a_m \neq 0$  y  $a_j = 0$  para toda  $j > m$ , junto con el polinomio  $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ , donde  $b_n \neq 0$  y  $b_j = 0$  para toda  $j > n$ . Tenemos pues, por definición  $p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  donde  $c_i = \sum_{l=0}^i a_l b_{i-l}$ . Afirmamos que  $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$  y que  $c_i = 0$  para todo  $i > m+n$ . Que  $c_{m+n} = \sum_{i+j=m+n} a_i b_j = a_m b_n$  se tiene pues si  $i < m$  entonces  $n > j$  y  $b_j = 0$  y si  $i > m$  entonces  $a_i = 0$ . Ahora veamos que sucede con los coeficientes  $c_i$  para  $i > m+n$ , como  $c_i$  es la suma de los términos de la forma  $a_j b_{i-j}$ ; como  $i = j + (i-j) > m+n$ , entonces o  $j > m$  o  $(i-j) > n$ . Pero entonces uno de los dos,  $a_j$  o  $b_{i-j}$  es 0, luego  $a_j b_{i-j} = 0$ ; como  $c_i$  es la suma de todos los ceros él mismo es 0.  $\square$

**Lema 3.10.** *Si  $\mathcal{K}$  es un campo (para campos ver sección 3.4) entonces  $\mathcal{K}[x]$  es un dominio entero.*

*Demostración.* Si  $p(x) \neq 0$  y  $q(x) \neq 0$ , entonces  $\text{grad}(p(x)) \geq 0$ ,  $\text{grad}(q(x)) \geq 0$ , de manera que  $\text{grad}(p(x)q(x)) = \text{grad}(p(x)) + \text{grad}(q(x)) \geq 0$ . Por lo tanto,  $p(x)q(x)$  tiene grado, así que no puede ser 0 (el cual no tiene asignado grado). Por consiguiente,  $\mathcal{K}[x]$  es un dominio entero.  $\square$

### 3.3.2. Polinomios simétrico y polinomios de Laurent.

El siguiente apartado menciona los *polinomios simétrico*, cuya importancia se verá reflejada principalmente en nuestro análisis del elemento  $\rho_G$  asociado a la gráfica  $G$ . Así mismo, el concepto de *polinomio de Laurent* que nos permitirá denotar de una manera más práctica a  $\rho_G$  en capítulos posteriores.

**Definición 3.24.** El *anillo de polinomios simétricos* en  $n$  variables ( $\mathcal{K}_s[x_1, \dots, x_n]$ ) es un anillo, donde  $\mathcal{K}$  es un campo (ver sección 3.4), cada elemento es denominado **polinomio simétrico**<sup>3</sup>; denotado por  $(P_s(x_1, \dots, x_n))$  y tienen la propiedad de quedar invariante bajo permutaciones de las variables.

**Ejemplo 3.9.** Ejemplos de polinomios simétricos.

1.  $P_s(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 11$
2.  $Q_s(x_1, x_2) = 5x_1x_2 + x_1 + x_2$

**Definición 3.25.** Los *polinomios simétricos elementales* en  $n$  variables y escritos como  $P_{s_k}(x_1, \dots, x_n)$  para  $k = 0, \dots, n$  se definen como:

1.  $P_{s_0}(x_1, \dots, x_n) = 1.$
2.  $P_{s_k}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_k}.$
3.  $P_{s_n}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n.$

**Ejemplo 3.10.** Los polinomios simétricos elementales en 3 variables son:

1.  $P_{s_0}(x_1, x_2, x_3) = 1.$
2.  $P_{s_1}(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$
3.  $P_{s_2}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_2$
4.  $P_{s_3}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$

**Definición 3.26.** Un *polinomio de Laurent* en una variable sobre el anillo  $\mathcal{A}$  es una combinación lineal de potencias positivas y negativas de la variable con coeficientes en  $\mathcal{A}$ . El anillo de polinomio de Laurent lo denotamos por  $\mathcal{A}[x, x^{-1}]$ . Por ejemplo, un polinomio de Laurent en  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$  es  $3x + 5x^{-1} + 2x^7 - 6x^{-2} - 13$ .

---

<sup>3</sup>En algunos libros, principalmente de combinatoria se menciona a los polinomio simétricos como **funciones simétricas**, en este trabajo las mencionaremos indistintamente.

### 3.4. Campos.

**Definición 3.27.** Un **campo** ( $\mathcal{K}$ ) es un anillo con división conmutativo.

**Ejemplo 3.11.** Consideremos  $\mathcal{K} = (\mathbb{C}, \tilde{+}, \tilde{*}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ .

Entonces, sea  $\mathbb{C} =: \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ y } b \in \mathbb{R}\}$  y definimos:

1.  $(a, b) = (c, d)$  si y sólo si  $a = c$  y  $b = d$ .
2. Si  $x = (a, b)$  e  $y = (c, d)$ , entonces  $x \tilde{+} y = (a, b) \tilde{+} (c, d) = (a + b, c + d)$ .  
(El símbolo de  $+$  que aparece en el lado derecho de la igualdad es la suma usual en el campo  $\mathbb{R}$ .)
3. Si  $x = (a, b)$  e  $y = (c, d)$ , entonces  $x \tilde{*} y = (a, b) \tilde{*} (c, d) = (a * c - b * d, a * d + b * c)$ . (El símbolo de  $*$  que aparece en el lado derecho de la igualdad es la multiplicación usual en el campo  $\mathbb{R}$ .)
4.  $\mathbf{0} = (0, 0)$ . (El  $0$  que aparece es el neutro aditivo en el campo  $\mathbb{R}$ .)
5.  $\mathbf{1} = (1, 0)$ . (El  $1$  que aparece es el neutro multiplicativo en el campo  $\mathbb{R}$ .)

Ahora afirmamos que:

- 1.-  $(\mathbb{C}, \tilde{+}, \mathbf{0})$  es un grupo conmutativo.
  - i)  $\mathbb{C} \neq \emptyset$  por definición.
  - ii)  $\mathbf{0}$  es el neutro para  $\tilde{+}$  en  $\mathbb{C}$ . Pues, sea  $x \in \mathbb{C}$ ,  $x = (a, b)$  entonces  

$$x \tilde{+} \mathbf{0} = (a, b) \tilde{+} (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b).$$
 y  

$$\mathbf{0} \tilde{+} x = (0, 0) \tilde{+} (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b).$$
  - iii) Para todo  $x \in \mathbb{C}$ ,  $x = (a, b)$ , existe el “inverso  $\tilde{+}$  de  $x$ ” y lo denotaremos por  $-x = (-a, -b)$ , ( $-a$  y  $-b$  representan los inversos aditivos sobre el campo  $\mathbb{R}$ .) pues:

$$x\tilde{+}(-x) = (a, b)\tilde{+}(-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0) = \mathbf{0}.$$

y

$$(-x)\tilde{+}x = (-a, -b)\tilde{+}(a, b) = ((-a) + a, (-b) + b) = (0, 0) = \mathbf{0}.$$

iv) Para todo  $x, y, z \in \mathbb{C}$ ,  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$  y  $z = (e, f)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} (x\tilde{+}y)\tilde{+}z &= ((a, b)\tilde{+}(c, d))\tilde{+}(e, f) = ((a + c, b + d))\tilde{+}(e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f). \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} x\tilde{+}(y\tilde{+}z) &= (a, b)\tilde{+}((c, d)\tilde{+}(e, f)) = (a, b)\tilde{+}((c + e, d + f)) \\ &= (a + c + e, b + d + f). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(x\tilde{+}y)\tilde{+}z = x\tilde{+}(y\tilde{+}z)$ , es decir,  $\tilde{+}$  es asociativa.

v) Para todo  $x, y \in \mathbb{C}$  tenemos que:

$$\begin{aligned} x\tilde{+}y &= (a, b)\tilde{+}(c, d) = (a + c, b + d) \\ &= (c + a, d + b) \\ &= (c, d)\tilde{+}(a, b) \\ &= y\tilde{+}x \end{aligned}$$

Así  $\tilde{+}$  es conmutativa. Por lo tanto  $(\mathbb{C}, \tilde{+}, \mathbf{0})$  es un grupo abeliano.

2.-  $(\mathbb{C}, \tilde{*}, \mathbf{1})$  es un monoide.

i)  $\mathbb{C} \neq \emptyset$  por definición.

ii)  $\mathbf{1}$  es el neutro para  $\tilde{*}$  en  $\mathbb{C}$ . Pues,

sea  $x \in \mathbb{C}$ ,  $x = (a, b)$  entonces,

$$x\tilde{*}\mathbf{1} = (a, b)\tilde{*}(1, 0) = (a * 1 - b * 0, b * 1 + a * 0) = (a, b).$$

y

$$\mathbf{1}\tilde{*}x = (1, 0)\tilde{*}(a, b) = (1 * a - 0 * b, 0 * a + b * 1) = (a, b).$$

iii) Para todo  $x, y, z \in \mathbb{C}$ ,  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$  y  $z = (e, f)$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
(x \tilde{*} y) \tilde{*} z &= ((a, b) \tilde{*} (c, d)) \tilde{*} (e, f) \\
&= ((a * c - b * d, a * d + b * c)) \tilde{*} (e, f) \\
&= ((a * c - b * d) * e - (a * d + b * c) * f, \\
&\quad (a * c - b * d) * f + (a * d + b * c) * e) \\
&= (a * c * e - b * d * e - a * d * f - b * c * f, \\
&\quad a * c * f - b * d * f + a * d * e + b * c * e).
\end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}
x \tilde{*} (y \tilde{*} z) &= (a, b) \tilde{*} ((c, d) \tilde{*} (e, f)) \\
&= (a, b) \tilde{*} ((c * e - d * f, c * f + d * e)) \\
&= (a * (c * e - d * f) - b * (c * f + d * e), \\
&\quad a * (c * f + d * e) + b * (c * e - d * f)) \\
&= (a * c * e - b * d * e - a * d * f - b * c * f, \\
&\quad a * c * f - b * d * f + a * d * e + b * c * e).
\end{aligned}$$

Así,  $(x \tilde{*} y) \tilde{*} z = x \tilde{*} (y \tilde{*} z)$ , es decir,  $\tilde{*}$  es asociativa. Por lo tanto  $(\mathbb{C}, \tilde{*}, \mathbf{1})$  es un monoide.

3.-  $\tilde{*}$  se distribuye sobre  $\tilde{+}$  por ambos lados.

Sean  $x, y, z \in \mathbb{C}$ ,  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$  y  $z = (e, f)$ . Entonces, por un lado:

$$\begin{aligned}
x \tilde{*} (y \tilde{+} z) &= (a, b) \tilde{*} ((c, d) \tilde{+} (e, f)) \\
&= (a, b) \tilde{*} ((c + e, d + f)) \\
&= (a * c + a * e - b * d - b * f, a * d + a * f + b * c + b * e) \\
&= (a * c - b * d + a * e - b * f, a * d + b * c + a * f + b * e) \\
&= (a * c - b * d, a * d + b * c) + (a * e - b * f, a * f + b * e) \\
&= (a, b) \tilde{*} (c, d) \tilde{+} (a, b) \tilde{*} (e, f) \\
&= (x \tilde{*} y) \tilde{+} (x \tilde{*} z).
\end{aligned}$$

por otro lado:

$$\begin{aligned}
(y\tilde{+}z)\tilde{*}x &= ((c, d)\tilde{+}(e, f))\tilde{*}(a, b) \\
&= ((c + e, d + f))\tilde{*}(a, b) \\
&= (a * c + a * e - b * d - b * f, a * d + a * f + b * c + b * e) \\
&= (a * c - b * d + a * e - b * f, a * d + b * c + a * f + b * e) \\
&= (a * c - b * d, a * d + b * c) + (a * e - b * f, a * f + b * e) \\
&= (a, b)\tilde{*}(c, d)\tilde{+}(a, b)\tilde{*}(e, f) \\
&= (x\tilde{*}y)\tilde{+}(x\tilde{*}z).
\end{aligned}$$

De esta forma  $\tilde{*}$  se distribuye sobre  $\tilde{+}$  por ambos lados.

4.-  $\tilde{*}$  es conmutativa.

Sean  $x, y \in \mathbb{C}$ ,  $x = (a, b)$  e  $y = (c, d)$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
x\tilde{*}y &= (a, b)\tilde{*}(c, d) \\
&= (a * c - b * d, a * d + b * c) \\
&= (c * a - d * b, d * a + c * b) \quad (\text{Pues } + \text{ y } * \text{ son conmutativos en } \mathbb{R}.) \\
&= (c, d)\tilde{*}(a, b) \\
&= y\tilde{*}x.
\end{aligned}$$

5.- Para todo  $x \in \mathcal{K}$  con  $x = (a, b) \neq \mathbf{0}$  y como  $a, b$  son reales y no ambos 0, tenemos que  $a^2 + b^2 \neq 0$ , luego existe el "inverso  $\tilde{*}$  de  $x$ " y lo denotaremos por  $x^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ .

$$\begin{aligned}
x\tilde{*}x^{-1} &= (a, b)\tilde{*}\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \\
&= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) \\
&= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0\right) \\
&= (1, 0) = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 x^{-1}\tilde{*}x &= \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \tilde{*}(a, b) \\
 &= \left( \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2} \right) \\
 &= \left( \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0 \right) \\
 &= (1, 0) = \mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{K} = (\mathbb{C}, \tilde{+}, \tilde{*}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  es un campo.

Recordemos que en  $\mathbb{Z}$  si  $d = (a; b)$  (el máximo común divisor de  $a$  y  $b$ ) entonces, existen enteros  $u$  y  $v$  tales que,  $d = au + bv$ . En el caso en que  $a$  y  $b$  fueran primos relativos, es decir,  $(a; b) = 1$  entonces tenemos que  $au + bv = 1$ . Si consideramos el anillo de los enteros módulo  $n$  ( $\mathbb{Z}_n$ ), entonces

$$\dot{\mathbb{Z}}_n \doteq \{[a]_n \in \mathbb{Z}_n \mid (a; n) = 1\}.$$

Si  $(a; n) = 1$ , hay una combinación lineal entera de  $a$  y  $n$ ,  $au + nv = 1$ . De aquí que  $[au]_n = [1]_n$ , por lo tanto  $[u]_n$  es el inverso multiplicativo de  $[a]_n$ .

Recíprocamente, si  $[a]_n$  tiene inverso multiplicativo  $[u]_n$ , entonces  $[au]_n = [1]_n$ . Esto es equivalente a decir que  $au \equiv 1 \pmod{n}$ , es decir,  $n$  divide a  $(au - 1)$ , que se puede expresar como:  $\exists v \in \mathbb{Z}$  tal que  $nv = au - 1$ , o sea que  $1 = au + nv$ . Por lo tanto tenemos que  $(a; n) = 1$ .

**Teorema 3.11.**  $\mathbb{Z}_n$  es campo si y sólo si  $n$  es primo.

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z}_p \text{ es campo} &\iff \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \dot{\mathbb{Z}}_p \\
 &\iff \{[1]_p, [2]_p, \dots, [p-1]_p\} = \{[a]_p \in \mathbb{Z}_p \mid (a; p) = 1\} \\
 &\iff (k; p) = 1, \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } 1 \leq k < p \\
 &\iff p \text{ es primo.}
 \end{aligned}$$

□

### 3.5. Espacios vectoriales y Álgebra Lineal.

**Definición 3.28.** *Un espacio vectorial  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  es una quinteta ordenada*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{K}} = \left( \mathbf{V}, \vec{*}, \vec{0}, \mathcal{K}, \cdot : \mathcal{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} \right).$$

Donde  $\mathbf{V}$  es un conjunto,  $\mathcal{K}$  es un campo y se satisface que:

1.  $(\mathbf{V}, \vec{*}, \vec{0})$  es un grupo abeliano.
2.  $\cdot : \mathcal{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  satisface:
  - a).-  $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbf{V}$ .
  - b).-  $(cd) \cdot \vec{v} = c \cdot (d \cdot \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbf{V} \text{ y } \forall c, d \in \mathcal{K}$ .
  - c).-  $(c + d) \cdot \vec{v} = c \cdot \vec{v} \vec{*} d \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbf{V} \text{ y } \forall c, d \in \mathcal{K}$ .
  - d).-  $c \cdot (\vec{v} \vec{*} \vec{w}) = c \cdot \vec{v} \vec{*} c \cdot \vec{w} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V} \text{ y } \forall c \in \mathcal{K}$ .

Los elementos de  $\mathbf{V}$  se llaman **vectores**, los elementos de  $\mathcal{K}$  se llaman **escalares** y  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  se lee: " $\mathbf{V}$  es un espacio vectorial sobre el campo  $\mathcal{K}$ ". A la operación  $\cdot : \mathcal{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  la denominamos **producto por escalares**.

**Definición 3.29.** *Un subconjunto  $\mathcal{W}$  de un espacio vectorial  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  se dice que es un **subespacio vectorial** de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  si respecto a la operación  $\vec{*}$  y el producto por escalares de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ ,  $\mathcal{W}$  mismo forma un espacio vectorial. Lo denotaremos por  $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ .*

**Ejemplo 3.12.** *Sea  $\mathcal{K}$  un campo y  $X$  un conjunto no vacío. Sea:*

$$\text{Map}(X, \mathcal{K}) \doteq \{f : X \rightarrow \mathcal{K} \mid f \text{ es función}\}$$

Definamos:

1.  $f \vec{+} g : X \rightarrow \mathcal{K}$  es la función que  $(f \vec{+} g)(x) = f(x) + g(x)$  (El  $+$  que aparece del lado derecho de la última igualdad es la adición en  $\mathcal{K}$ ).
2.  $c \cdot f : X \rightarrow \mathcal{K}$  es la función que  $(c \cdot f)(x) = cf(x)$ . (La operación  $cf(x)$  que aparece en el lado derecho de igualdad es el producto en  $\mathcal{K}$ .)

Entonces:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{K}} = \left( \text{Map}(X, \mathcal{K}), \vec{+}, \vec{0}, \mathcal{K}, \cdot : \mathcal{K} \times \text{Map}(X, \mathcal{K}) \rightarrow \text{Map}(X, \mathcal{K}) \right)$$

es un espacio vectorial.

Ya que:

1.-  $\left( \text{Map}(X, \mathcal{K}), \vec{+}, \vec{0} \right)$  es un grupo conmutativo.

i)- Sean  $f, g, h \in \text{Map}(X, \mathcal{K})$  y  $x \in X$  entonces,

$$\begin{aligned} ((f \vec{+} g) \vec{+} h)(x) &= (f \vec{+} g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \\ (f \vec{+} (g \vec{+} h))(x) &= f(x) + (g \vec{+} h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $((f \vec{+} g) \vec{+} h)(x) = (f \vec{+} (g \vec{+} h))(x)$  pues los elementos  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x) \in \mathcal{K}$ .

ii)- Sea  $\vec{0} = \mathbf{0}$  la función cero:  $\mathbf{0}(x) = 0$ ,  $\forall x \in X$ . Entonces para toda función  $f \in \text{Map}(X, \mathcal{K})$ ,

$$(f \vec{+} \mathbf{0})(x) = f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x) + 0 = f(x), \quad \forall x \in X.$$

iii)- Para toda función  $f \in \text{Map}(X, \mathcal{K})$ , sea  $-f$  la función definida por:  $(-f)(x) = -f(x)$ . Entonces,

$$(f \vec{+} (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbf{0}(x), \quad \forall x \in X.$$

iv)- Sean  $f, g \in \text{Map}(X, \mathcal{K})$ . Entonces,

$$(f \vec{+} g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g \vec{+} f)(x), \quad \forall x \in X.$$

Luego  $(f \vec{+} g) = (g \vec{+} f)$  (la igualdad entre  $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$  se da pues en  $\mathcal{K}$  la operación  $+$  es conmutativa).

Por lo tanto  $\left( \text{Map}(X, \mathcal{K}), \vec{+}, \vec{0} \right)$  es un grupo conmutativo.

2.- Comprobemos las propiedades del producto por escalares:

i)- Sea  $f \in \text{Map}(X, \mathcal{K})$  y  $1 \in \mathcal{K}$ . Entonces,

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

ii)- Sea  $f \in \text{Map}(X, \mathcal{K})$  y  $a, b \in \mathcal{K}$ . Tenemos,

$$\begin{aligned} ((ab) \cdot f)(x) &= (ab) \cdot f(x) \\ &= a(bf(x)) \\ &= a((bf)(x)) = (a \cdot (b \cdot f))(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

iii)- Sea  $f \in \text{Map}(X, \mathcal{K})$  y  $a, b \in \mathcal{K}$ . Así,

$$\begin{aligned} ((a+b)(f))(x) &= (a+b)(f(x)) \\ &= af(x) + bf(x) \\ &= (af)(x) + (bf)(x) \\ &= (af \vec{+} bf)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

iv)- Sea  $f, g \in \text{Map}(X, \mathcal{K})$  y  $a \in \mathcal{K}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} (a \cdot (f \vec{+} g))(x) &= a((f \vec{+} g)(x)) \\ &= a(f(x) + g(x)) \\ &= a(f(x)) + a(g(x)) \\ &= (a \cdot f)(x) + (a \cdot g)(x) \\ &= (a \cdot f \vec{+} a \cdot g)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}} = \left( \text{Map}(X, \mathcal{K}), \vec{+}, \vec{0}, \mathcal{K}, \cdot : \mathcal{K} \times \text{Map}(X, \mathcal{K}) \rightarrow \text{Map}(X, \mathcal{K}) \right)$ , es un espacio vectorial.

**Definición 3.30.** Sean  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}} = (V, \diamond, e_V, \mathcal{K}, \cdot_V : \mathcal{K} \times V \rightarrow V)$  y  $\mathcal{V}'_{\mathcal{K}} = (V', \star, e_{V'}, \mathcal{K}, \cdot_{V'} : \mathcal{K} \times V' \rightarrow V')$  espacios vectoriales. Un **homomorfismo de espacios vectoriales** es una función  $h : \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{V}'_{\mathcal{K}}$  tal que  $h(u \diamond v) = h(u) \star h(v)$  y  $h(c \cdot u) = c \cdot h(u)$  (el producto por escalares del lado izquierdo de la igualdad esta en  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ , mientras que el del lado derecho de la igualdad esta en  $\mathcal{V}'_{\mathcal{K}}$ ).

Por comodidad y cuando no haya confusión por la notación, en lugar de escribir a un espacio vectorial con la quinteta que lo conforma únicamente escribiremos  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ .

**Definición 3.31.** Sean  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  y  $\mathcal{V}'_{\mathcal{K}}$  espacios vectoriales. Un homomorfismo de espacios vectoriales que es inyectivo y suprayectivo se denomina **isomorfismo**.

Cuando exista un isomorfismo entre espacios vectoriales diremos que los espacios son **isomorfos** y escribiremos  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}} \cong \mathcal{V}'_{\mathcal{K}}$ . Cuando el isomorfismo se da entre un espacio vectorial y sí mismo lo llamaremos **automorfismo**.

Con las siguientes definiciones demostraremos algunos resultados que se presentan a partir del Capítulo 4, que son referentes a bases de espacios vectoriales y unas condiciones para tener espacios isomorfos.

**Teorema 3.12.** Si  $\{W_a\}_{a \in X}$  es una familia de subespacios vectoriales de un espacio vectorial  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ , entonces  $\bigcap \{W_a\}_{a \in X}$  es subespacio vectorial del espacio  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ .

*Demostración.* Basta probar tres afirmaciones:

1.  $\bigcap \{W_a\}_{a \in X}$  es cerrado bajo  $\vec{+}$ .
2.  $\vec{0} \in \bigcap \{W_a\}_{a \in X}$ .
3.  $\bigcap \{W_a\}_{a \in X}$  es cerrado bajo el producto por escalares.

(Para una justificación del porque bastan estas tres afirmaciones ver [24].)

Entonces tenemos que,

1. Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in \bigcap \{W_a\}_{a \in X}$ , entonces  $\vec{x}, \vec{y} \in W_a \forall a \in X$ . Como cada subespacio  $W_a$  es cerrado bajo  $\vec{+}$ , entonces  $\vec{x} \vec{+} \vec{y} \in W_a, \forall a \in X$ . Por lo tanto  $\vec{x} \vec{+} \vec{y} \in \bigcap \{W_a\}_{a \in X}$ .
2.  $\vec{0} \in W_a, \forall a \in X$ . Por lo tanto  $\vec{0} \in \bigcap \{W_a\}_{a \in X}$ .
3. Sea  $k \in \mathcal{K}$  y  $\vec{x} \in \bigcap \{W_a\}_{a \in X}$ , como  $\vec{x} \in W_a, \forall a \in X$ , entonces  $k\vec{x} \in W_a, \forall a \in X$ . Por lo tanto  $k\vec{x} \in \bigcap \{W_a\}_{a \in X}$ .

□

**Definición 3.32.** Sea  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathcal{K}$  y  $X$  un subconjunto de  $V$ , definimos

$$\mathfrak{L}(X) \doteq \bigcap \{W \leq \mathcal{V} \mid X \subseteq W\}.$$

$\mathfrak{L}(X)$  se llama el **subespacio de  $\mathcal{V}$  generado por  $X$** .

**Teorema 3.13.** Sea  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  un espacio vectorial, entonces  $\mathfrak{L}(X)$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ . Más aún  $\mathfrak{L}(X)$  es el menor subespacio de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  que incluye a  $X$ .

*Demostración.* Como  $\mathfrak{L}(X) = \bigcap \{W \leq \mathcal{V} \mid X \subseteq W\}$ , es una intersección de subespacios de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ , entonces  $\mathfrak{L}(X)$  también lo es, por el Teorema 3.12.

Por otra parte, si  $W$  es subespacio de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  que incluye a  $X$ , entonces pertenece a la familia de subespacios que estamos intersectando al definir  $\mathfrak{L}(X)$ . Por lo tanto  $\mathfrak{L}(X) \leq W$ .

□

**Definición 3.33.** Sea  $S \subseteq \mathcal{V}$ , decimos que  $S$  es **linealmente dependiente (l.d.)**, si existe  $\vec{x} \in \mathfrak{L}(S \setminus \{\vec{x}\})$ .

**Definición 3.34.** Sea  $S \subseteq \mathcal{V}$ , decimos que  $S$  es **linealmente independiente (l.i.)**, si **no** es linealmente dependiente.

**Observación 3.6.** Por la definición de independencia lineal podemos deducir lo siguiente:

Un conjunto  $I$  es linealmente independiente si y sólo si  $\forall \gamma \subseteq I$ ,  $\gamma$  finito es linealmente independiente.

**Definición 3.35.** Decimos que  $\gamma \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  genera  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ , si  $\mathfrak{L}(\gamma) = V$ . También se dice que  $\gamma$  es un **conjunto generador** de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ .

**Definición 3.36.** Sea  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathcal{K}$  y  $v_1, \dots, v_n$  elementos de  $V$ . Se dice que un elemento  $v \in V$  es una **combinación lineal** de  $v_1, \dots, v_n$  si  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ , para algunos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{K}$ .

**Definición 3.37.** Decimos que  $\beta \subseteq \mathcal{V}$  es una **base** para  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  si  $\beta$  es linealmente independiente y genera a  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ .

Mencionamos el siguiente Teorema por la importancia que este representa para el estudio del Álgebra lineal, sin embargo, omitimos su demostración porque las herramientas y resultados necesarios para ello salen del objetivo principal de este trabajo, para una demostración ver [24].

**Teorema 3.14.** Sean  $\beta$  y  $\beta'$  dos bases para  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ , entonces  $|\beta| = |\beta'|$ .

**Definición 3.38.** La **dimensión** de un espacio vectorial  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  y denotada por  $\dim(V)$  es la cardinalidad de su base.

**Proposición 3.15.** El anillo de polinomios sobre un campo  $\mathcal{K}$  es un espacio vectorial con el producto por escalares definido de la siguiente manera:

$$k \cdot p(x) = k \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} k a_i x^i.$$

donde  $a_i, k \in \mathcal{K}$  y  $a_i = 0$  para todos, excepto en un número finito de valores de  $i$ .

**Definición 3.39.** El *soporte* de una función es  $sop(f) \doteq \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}$ , donde  $D_f$  denota el dominio de la función  $f$ .

**Definición 3.40.**  $Map(\mathbf{X}, \mathcal{K}) \doteq \{f : X \rightarrow \mathcal{K} \mid sop(f) \text{ es finito}\}$ .

**Proposición 3.16.**  $Map(\mathbf{X}, \mathcal{K})$  es subespacio vectorial de  $Map(X, \mathcal{K})$ .

*Demostración.*

1. La suma de dos funciones  $f, g \in Map(X, \mathcal{K})$  de soporte finito, es de soporte finito, puesto que  $sop(f \vec{+} g) \subseteq sop(f) \cup sop(g)$ . (La unión de dos conjuntos finitos es finita y un subconjunto de un conjunto finito es finito).
2. La función constante  $\vec{0}$  tiene soporte  $\emptyset$ , que es finito.
3. Si  $c \in \mathcal{K}$  y  $f$  es una función de soporte finito, entonces  $cf$  tiene soporte finito, ya que  $sop(cf) \subseteq sop(f)$  ( $(cf)(x) \neq 0$  entonces  $c(f(x)) \neq 0$  luego  $f(x) \neq 0$ ).

□

**Definición 3.41.** Sea  $S \subseteq X$  (para un conjunto  $X$ ). La *función característica*  $\chi_S : X \rightarrow \{0, 1\}$  está definida por:

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{si } a \notin S \end{cases}$$

**Teorema 3.17.**  $\beta = \{\chi_{\{x\}}\}_{x \in X}$  es una base de  $Map(\mathbf{X}, \mathcal{K})$ .

*Demostración.*

1. Si

$$\sum_{i=1}^n c_i \chi_{\{x_i\}} = \vec{0}$$

entonces para una  $j \in \{1, \dots, n\}$  tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \vec{0}(x_j) &= \left( \sum_{i=1}^n c_i \chi_{\{x_i\}} \right) (x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n (c_i \cdot \chi_{\{x_i\}}(x_j)) = c_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\{\chi_{\{x\}}\}_{x \in X}$  es linealmente independiente.

2. Sea ahora  $g \in \text{Map}(\mathbf{X}, \mathcal{K})$ , demostraremos que  $g = \sum_{x \in \text{sop}(g)} g(x) \chi_{\{x\}}$ .

(a) Para  $z \in X \setminus \text{sop}(g)$ , entonces  $g(z) = 0$  y

$$\left( \sum_{x \in \text{sop}(g)} g(x) \chi_{\{x\}} \right) (z) = \sum_{x \in \text{sop}(g)} (g(x) \chi_{\{x\}}(z)) = 0.$$

(b) Para  $z \in \text{sop}(g)$ , entonces

$$\left( \sum_{x \in \text{sop}(g)} g(x) \chi_{\{x\}} \right) (z) = \sum_{x \in \text{sop}(g)} (g(x) \chi_{\{x\}}(z)) = g(z) \cdot 1 = g(z).$$

Por lo tanto  $g = \sum_{x \in \text{sop}(g)} g(x) \chi_{\{x\}}$ .

□

Para la demostración del Teorema 3.19 hacemos uso de la Propiedad Universal de las bases, que únicamente mencionamos pero no demostramos en este trabajo, para una demostración de dicha Propiedad ver [24] pag. 77.

**Teorema 3.18** (Propiedad Universal de las bases). *Son equivalentes para  $\beta \subseteq V_K$ :*

i.-  $\beta$  es una base para  $V_K$ .

ii.-  $\forall f : \beta \rightarrow W$  función,  $\exists! \tilde{f} : V \rightarrow W$  función lineal tal que conmuta el siguiente triángulo

$$\begin{array}{ccc} \beta & \hookrightarrow & V \\ f \downarrow & & \searrow \tilde{f} \\ W & & \end{array}$$

**Teorema 3.19.** *Sean  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  y  $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$  dos espacios vectoriales sobre el mismo campo, entonces  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}} \cong \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$  si y sólo si  $\dim(V) = \dim(W)$ .*

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ] Sea  $f : \beta \rightarrow \gamma$  una biyección entre una base de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  y una base de  $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ . Usemos la propiedad universal de las bases para definir una función lineal  $\hat{f} : \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$  que extienda a  $f$ . Definamos también la función lineal  $\check{f} : \mathcal{W}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  que extienda a  $f^{-1}$ . Entonces la función lineal  $\check{f} \circ \hat{f}$  extiende a  $f^{-1} \circ f = Id_{\beta}$ . Por la propiedad universal de las bases,  $\check{f} \circ \hat{f} = Id_{\mathcal{V}_{\mathcal{K}}}$ . Simétricamente,  $\hat{f} \circ \check{f} = Id_{\mathcal{W}_{\mathcal{K}}}$ .

$\Rightarrow$ ] Sea  $\varphi : \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$  un isomorfismo. Una base  $\beta$  de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  se mapea bajo  $\varphi$  en una base de  $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ , es decir,  $\varphi(\beta)$  es base para  $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ , ya que:

1. *Genera.*

Sea  $\beta = \{b_1, \dots, b_n\}$  base para  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ . Consideremos  $w \in \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ , entonces existe  $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  tal que  $\varphi(v) = w$ , como  $\beta$  es base, entonces existen  $k_1, \dots, k_n \in \mathcal{K}$  tal que  $v = k_1 b_1 + \dots + k_n b_n$ , así  $\varphi(v) = \varphi(k_1 b_1 + \dots + k_n b_n) = k_1 \varphi(b_1) + \dots + k_n \varphi(b_n) \in \mathcal{L}(\varphi(\beta))$ . Por lo tanto  $\varphi(\beta)$  genera.

2. *Es l.i.*

Sea  $X \subseteq \varphi(\beta)$  finito y consideremos  $k_1 \varphi(x_1) + \dots + k_n \varphi(x_n) = 0$ , donde  $k_i \in \mathcal{K}$  y  $x_i \in X$  con  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $\varphi(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n) = 0$ , por lo que  $k_1 x_1 + \dots + k_n x_n = 0$  por ser  $\varphi$  inyectivo, pero  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \beta$ , entonces  $k_i = 0$  para toda  $i = 1, \dots, n$ . Por lo tanto  $\varphi(\beta)$  es l.i.

Entonces como  $\varphi|_{\beta} : \beta \longrightarrow \varphi(\beta)$  es una biyección, tenemos que  $\dim(\mathcal{V}_{\mathcal{X}}) = |\beta| = |\varphi(\beta)| = \dim(\mathcal{W}_{\mathcal{X}})$ .  $\square$

### 3.6. Álgebra con Gráficas .

En esta sección nos enfocaremos en estructuras algebraicas que están relacionadas con gráficas y estudiaremos el espacio vectorial de ciclos asociado a una gráfica  $G$  sobre el campo  $\mathbb{Z}_2$ .

**Definición 3.42.** Sea  $G$  una gráfica en la cual  $V(G) = \{v_1, \dots, v_p\}$  y  $A(G) = \{a_1, \dots, a_q\}$  tales que  $|V(G)| = p$  y  $|A(G)| = q$ , definimos una **0-cadena** de  $G$  como una suma formal  $s_0 = \sum_{v \in V'(G)} v$  donde  $V'(G) \subseteq V(G)$  y una **1-cadena** como una suma formal  $s_1 = \sum_{a \in A'(G)} a$  donde  $A'(G) \subseteq A(G)$ .

Observemos que  $s'_1 = s''_1$ , donde  $s'_1 = \sum_{a \in A'(G)} a$  y  $s''_1 = \sum_{a \in A''(G)} a$  si y sólo si  $A'(G) = A''(G)$  (análogo para las 0-cadenas).

**Definición 3.43.** Consideremos a  $s'_1 = \sum_{a \in A'(G)} a$  y  $s''_1 = \sum_{a \in A''(G)} a$  1-cadenas y recordemos que la diferencia simétrica entre los conjuntos  $A$  y  $B$  se define como:  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ , entonces definimos:

$$s'_1 + s''_1 = \sum_{a \in A'(G) \Delta A''(G)} a.$$

Por ejemplo si  $s'_1 = a_1 + a_3 + a_4$  y  $s''_1 = a_1 + a_2 + a_4$ , entonces  $s'_1 + s''_1 = a_2 + a_3$ . Notemos que esta operación “aditiva” es conmutativa y asociativa. Más aún,  $\theta = \sum_{a \in \emptyset} a$  funciona como un neutro (aditivo); esto es,  $\theta + s'_1 = \sum_{\emptyset \Delta A'(G)} a = s'_1 = \sum_{A'(G) \Delta \emptyset} a = s'_1 + \theta$ .

**Notación 3.2.** Denotaremos por  $S_1(G)$  el conjunto de todas las 1-cadenas de  $G$  y por  $S_0(G)$  el conjunto de todas las 0-cadenas de  $G$ .

Como  $s_1 + s_1 = 0$ , para cualquier  $s_1 \in S_1(G)$ ,  $S_1(G)$  tiene estructura de espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{Z}_2$ . De hecho  $S_1(G) = \mathbb{Z}_2 A(G)$  el espacio vectorial cuya base consiste del conjunto  $A(G)$ . Si  $A(G) = \emptyset$ , entonces  $S_1(G) = \{0\}$ . Similarmente notemos que  $S_0(G)$  tiene estructura de espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{Z}_2$ , es decir,  $S_0(G) = \mathbb{Z}_2 V(G)$ .

Dadas estas estructuras algebraicas, pasemos ahora a definir funciones que las asocien:

**Definición 3.44.** Definamos dos homomorfismos entre estos espacios vectoriales:

1. El homomorfismo  $d_1 : S_1(G) \rightarrow S_0(G)$  tal que,

- Si  $a = (u, v)$  entonces  $d_1(a) = u + v$ .

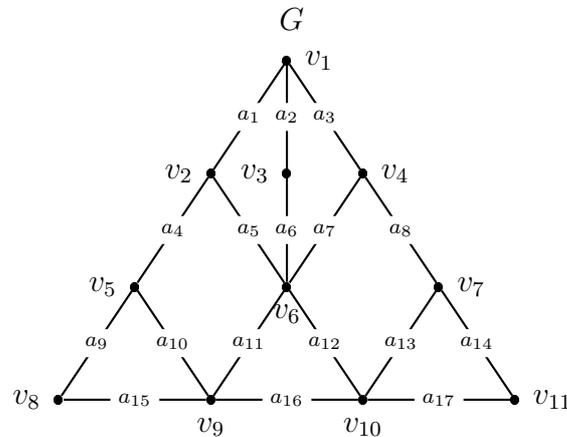
denominado **homomorfismo**  $(1 - 0)$ .

2. El homomorfismo  $d_0 : S_0(G) \rightarrow S_1(G)$  tal que,

- $d_0(v) = \sum \epsilon_i a_i$ , donde  $\epsilon_i = 1$  si  $v$  es incidente en  $a_i$ .

denominado **homomorfismo**  $(0 - 1)$ .

**Ejemplo 3.13.** Consideremos la siguiente gráfica  $G$ . Mostremos quienes son el **homomorfismo**  $(1 - 0)$  y el **homomorfismo**  $(0 - 1)$ , para la 1-cadena  $s_1 = a_1 + a_5 + a_{11} + a_{16}$  y para la 0-cadena  $s_0 = v_1 + v_3 + v_6$ .



Entonces

$$\begin{aligned}
 d_1(s_1) &= d_1(a_1 + a_5 + a_{11} + a_{16}) \\
 &= d_1(a_1) + d_1(a_5) + d_1(a_{11}) + d_1(a_{16}) \\
 &= (v_1 + v_2) + (v_2 + v_6) + (v_6 + v_9) + (v_9 + v_{10}) \\
 &= v_1 + v_{10}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_0(s_0) &= d_0(v_1 + v_3 + v_6) \\
 &= d_0(v_1) + d_0(v_3) + d_0(v_6) \\
 &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_6) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_{11} + a_{12}) \\
 &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_{11} + a_{12}.
 \end{aligned}$$

**Notación 3.3.** *Escribiremos  $Z(G)$  para denotar  $\text{Ker}(d_1)$ , esto es,  $Z(G)$  es el conjunto de todas las 1-cadenas tales que  $d_1(s_1) = 0$ .*

**Definición 3.45.** *Una 1-cadena  $s_1$  con  $d_1(s_1) = 0$  se denomina un 1-ciclo de  $G$  y es considerado como un conjunto de ciclos ajenos por aristas. El conjunto de todos los 1-ciclos forman un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{Z}_2$  llamado el **Espacio de ciclos** de  $G$ . Pues si  $d_1(s_1) = 0$  y  $d_1(s'_1) = 0$ , entonces  $d_1(s_1 + s'_1) = d_1(s_1) + d_1(s'_1) = 0$ . Notemos que todo ciclo, considerado como conjunto de aristas, es un 1-ciclo.*

Como se mencionó en la sección de Álgebra Lineal, en cualquier espacio vectorial  $V_{\mathcal{K}}$  sobre el campo  $\mathcal{K}$ , un conjunto finito  $I \subset V$  se dice que es **independiente** si ningún elemento de  $I$  es una combinación lineal de los elementos de  $I$ . Un conjunto independiente máximo  $\beta \subset V$  también es una base (ver [24] pag 38). Esto quiere decir, que si  $v \in V \setminus \beta$ , entonces  $\beta \cup \{v\}$  es linealmente dependiente. Los espacios vectoriales  $S_1(G)$  y  $S_0(G)$  tiene como base a  $A(G)$  y  $V(G)$  respectivamente.

**Definición 3.46.** Una *base de ciclos*  $\beta_c(G)$  de  $G$  se define como una base para el espacio de ciclos de  $G$  que consiste únicamente de ciclos. El número de elementos de una base de ciclos no depende de la base particular elegida; la dimensión del espacio de ciclos de  $G$ , es decir, el número de ciclos de la base, lo denotaremos por  $\mathcal{B}_1(G)$  y se llama **primer número de Betti**.

Para la demostración del siguiente lema haremos uso de la siguiente operación entre gráficas:

Sea  $G$  una gráfica simple y consideremos un árbol generador  $T$  de  $G$ , entonces la operación  $G/T$  consiste en contraer el árbol generador  $T$  a un solo vértice y eliminar las aristas de éste. Obteniendo así una nueva gráfica que consta de puros lazos (aristas que no pertenecían a  $T$ ).

**Ejemplo 3.14.** Sea  $G$  la siguiente gráfica y  $T$  un árbol generador de  $G$  (en líneas más oscuras).

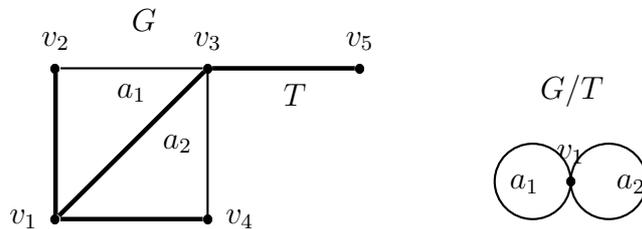


Figura 3.1: La gráfica  $G$  y la operación  $G/T$ .

**Lema 3.20.** Si  $G$  es una gráfica conexa, entonces  $\mathcal{B}_1(G) = q - p + 1$ .

*Demostración.* Sea  $T$  un árbol generador de  $G$  y consideremos  $G/T$ . Entonces  $G/T$  consiste de un único vértice y tantos lazos como elementos hay en  $A(G) \setminus A(T)$ . Como cada arista que no está en  $T$  genera un ciclo, tenemos que  $\mathcal{B}_1(G) = \mathcal{B}_1(G/T) = |A(G) \setminus A(T)| = q - (p - 1) = q - p + 1$ .  $\square$

**Corolario 3.21.** Si  $G$  es una gráfica con  $\omega$  componentes conexas, entonces  $\mathcal{B}_1(G) = q - p + \omega$ .

Ahora notemos otra demostración del lema 3.20 que muestra la construcción  $\beta_c(G)$  a partir de un árbol generador  $T$  de  $G$ . Primero mencionemos un importante concepto:

**Definición 3.47.** *En una gráfica conexa  $G$ , una **cuerda** de un árbol generador  $T$  de  $G$  es una arista de  $G$  que no está en  $T$ .*

Primero observemos que agregando cualquier cuerda  $a$  al árbol generador  $T$  produce una gráfica  $T + a$  con exactamente un ciclo, denotemos este ciclo por  $C(T, a)$ . En la Figura 3.2 se muestra una gráfica  $G$  junto con un árbol generador  $T$  (en líneas más gruesas), aquí  $a_1, a_2, a_3, a_4$  son cuerdas y los ciclos independientes que forman son:  $C(T, a_1) = \{a_1, a_5, a_6\}$ ,  $C(T, a_2) = \{a_2, a_7, a_6, a_5\}$ ,  $C(T, a_3) = \{a_3, a_7, a_6, a_8\}$ ,  $C(T, a_4) = \{a_4, a_9, a_{11}\}$ .

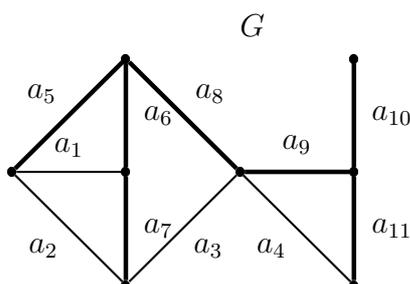


Figura 3.2: Un árbol generador  $T$  de  $G$ , sus cuerdas y ciclos independientes.

*Demostración alterna al lema 3.20.* Sea  $T$  un árbol generador de  $G$ . Entonces  $T$  tiene exactamente  $q - (p - 1) = q - p + 1$  cuerdas y cada una de estas determina un ciclo. Como los ciclos determinados son independientes (bajo la diferencia simétrica), se sigue del hecho de que  $\mathcal{B}_1(G) \leq q - p + 1$  que  $Z(G)$  tiene una base de ciclos. □

**Teorema 3.22** (MacLane). *Sea  $G$  una gráfica conexa no trivial. Entonces  $G$  es plana si y sólo si existe una base de ciclos  $C_1, \dots, C_r$  para  $G$  y un ciclo adicional  $C_0$  tal que  $C_0 = C_1 + \dots + C_r$  y ningún puente de  $G$  está en  $C_i$  para precisamente dos de los índices  $i$ ,  $0 \leq i \leq r$  (\*). (Note que  $C_0$  puede ser igual algún  $C_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ .)*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $G$  es plana y tomemos  $C_1, \dots, C_r$  como las fronteras de las regiones finitas de un mapa  $M$  obtenido por dibujar en el plano a  $G$  y  $C_0$  como la frontera de la cara infinita. Entonces  $C_1, \dots, C_r$  son independientes y  $C_0 = C_1 + \dots + C_r$ . Como cualquier arista que no es puente está en la frontera de exactamente dos regiones, tenemos el aserto.

$\Leftarrow$ ] Supongamos que se cumple (\*). Primero mostraremos que  $G$  es plana por inducción sobre el número  $q$  de aristas de  $G$ . Si  $q \leq 5$ ,  $G$  es plana así que podemos asumir que  $q \geq 6$  y satisface (\*). Si  $G$  consta únicamente de puentes, entonces  $G$  es un árbol. Por lo que, podemos suponer que  $G$  tiene una arista  $a = (u, w)$  que no es puente.

Suponemos, sin pérdida de generalidad, que  $a$  está en  $C_0$  y  $C_1$ . Sea  $G' = G - a$ . Consideremos los 1-ciclos  $C'_1 = C_0 + C_1$ ,  $C'_j = C_j$  ( $2 \leq j \leq r$ ). Pretendemos que  $C'_2, \dots, C'_r$  forman un conjunto independiente de 1-ciclos en  $Z(G')$  desde que  $C_2, \dots, C_r$  son independientes en  $Z(G)$ . Más aún, como  $\mathcal{B}_1(G') = \mathcal{B}_1(G) - 1 = r - 1$ , los  $C'_2, \dots, C'_r$  forman una base de  $Z(G')$ . También,

$$C'_1 = C_0 + C_1 = (C_1 + \dots + C_r) + C_1 = C_2 + \dots + C_r.$$

Por lo tanto, (\*) se tiene para  $G'$  y así, por inducción,  $G'$  puede ser dibujada en el plano.

Al agregar la arista  $a$  que une los vértices  $u$  y  $w$ , procuramos que no haya cruces.  $\square$

## Capítulo 4

# Las funciones $E_v$ , $\chi_S$ y algunos resultados necesarios.

En este capítulo abordaremos algunos Lemas que serán de gran importancia para uno de los resultados más importantes de este trabajo el **Teorema de Eliahou**. Primero veremos un función conocida, la función **Evaluación** ( $E_v$ ) y algunas de sus propiedades básicas. Después abordaremos la función **característica** de un conjunto dado y notaremos la relación entre ambas funciones. Esto nos permitirá tener una base firme para poder construir el elemento  $\rho_G$  asociado a la gráfica  $G$ .

### 4.1. El elemento $\rho_G$ asociado a la gráfica $G$ .

En esta sección únicamente mencionaremos lo que se pretende mostrar con el elemento  $\rho_G$  asociado a la gráfica  $G$ . Para ello consideremos a  $G = (V(G), A(G))$ , una gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y conjunto de aristas es  $A(G) = \{(v_i, v_j) \mid \{v_i, v_j\} \subset V(G) \quad i \neq j\}$ .

Recordemos que una  $n$ -coloración propia por vértices puede definirse mediante una función  $c : V(G) \rightarrow X$ , donde  $X$  tiene cardinalidad  $n$ , (Observación 2.6). Podemos considerar, particularmente, el caso  $n = 4$  pues nuestro trabajo se enfoca hacia las gráficas que pueden ser 4-coloreables, hagamos esto con el conjunto  $X = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$ , donde  $\mathcal{C}_2 = (\{-1, 1\}, *, 1)$  denota el grupo abeliano multiplicativo. Entonces el correspondiente criterio algebraico en el que nos apoyaremos lo describimos a continuación:

Consideremos el siguiente Anillo cociente:

$$A_{2n} = \frac{\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]}{(\{x_i^2 - 1, y_i^2 - 1 : i = 1, \dots, n\})}.$$

A la gráfica  $G$  le podemos asociar un elemento  $\rho_G \in A_{2n}$ , como sigue:

$$\rho_G = \prod_{(v_i, v_j) \in A(G)} \overline{(3 - x_i x_j - y_i y_j - x_i x_j y_i y_j)}.$$

Donde  $(-)$  denota la clase módulo el ideal  $(\{x_i^2 - 1, y_i^2 - 1 : i = 1, \dots, n\})$ . Para lo siguiente escribiremos el elemento  $\rho_G$  sin la barra superior, dando por entendido que trabajamos sobre el ideal antes mencionado.

Expliquemos un poco por que  $\rho_G$  se definió de esta manera. Primero nos fijamos en el conjunto de 4 colores  $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$ . Buscamos un polinomio en  $x_1, x_2, y_1, y_2$  que nos detecte cuando dos elementos  $(a_1, b_1)$  y  $(a_2, b_2)$  de  $\mathbb{C}_2$  son iguales o no.

Notemos el polinomio  $f = (1 + x_1 x_2)(1 + y_1 y_2)$ , evaluado en  $(x_1, y_1) = (a_1, b_1)$  y  $(x_2, y_2) = (a_2, b_2)$ , vale 4 cuando  $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$  (pues  $a_i^2 = b_i^2 = 1$  con  $i = 1, 2$ .) y vale 0 cuando no (porque en tal caso,  $a_1 a_2 = -1$  o  $b_1 b_2 = -1$ ).

Entonces el polinomio  $g = 4 - f$  hace lo contrario: vale 0 sobre pares iguales y 4 sobre pares distintos. Pero este polinomio  $g$ , no es más que:

$$g = 3 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - x_1 x_2 y_1 y_2.$$

De esta manera uno de los motivos principales de este trabajo es mostrar que el elemento  $\rho_G \in A_{2n}$ , tiene las siguientes propiedades básicas:

1.  $G$  es 4-coloreable si y sólo si  $\rho_G \neq 0$ .
2. El término constante de  $\rho_G$  es igual a  $4^{|A(G)| - |V(G)|} \cdot P_4(G)$ , donde  $P_4(G)$  denota el polinomio cromático de la gráfica  $G$  de sus 4-coloraciones propias.

## 4.2. El isomorfismo $E_v$ y una propiedad fundamental de la función $\chi_S$ .

Sea  $\mathcal{C}_2 = (\{-1, 1\}, *)$  como grupo multiplicativo. Sea  $\mathbb{K}$  un campo de característica distinta de 2.

Consideremos el Anillo cociente:

$$A_n = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{(\{x_i^2 - 1, \dots, x_n^2 - 1 : i = 1, \dots, n\})}.$$

Este anillo se puede identificar, de manera natural, con el espacio vectorial  $Map(\mathcal{C}_2^n, \mathbb{K}) = \{f \mid f : \mathcal{C}_2^n \rightarrow \mathbb{K}\}$ , de todas las  $\mathbb{K}$ -funciones evaluadas en  $\mathcal{C}_2^n$ .

En particular, vamos a considerar la representación polinomial de la *función característica*  $\chi_Z$  de los subconjuntos de  $\mathcal{C}_2^n$ . Recordemos que, para  $S \subseteq \mathcal{C}_2^n$  la **función característica**  $\chi_S : X \rightarrow \{0, 1\}$  está definida por:

$$\chi_S(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in S \\ 0 & \text{si } \alpha \notin S \end{cases}$$

Primero, cualquier  $f \in A_n$  proporciona una  $\mathbb{K}$ -función evaluada en  $\mathcal{C}_2^n$ , de la manera siguiente:

Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{C}_2^n$ , entonces  $f(\alpha) \in \mathbb{K}$  se define como la imagen de  $f$  bajo el homomorfismo:

$$\begin{aligned} f : A_n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x_i &\longmapsto \alpha_i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

esto por la Propiedad Universal de los polinomios [19].

Así tenemos la siguiente función:

### Definición 4.1.

$$\begin{aligned} E_v : A_n &\longrightarrow Map(\mathcal{C}_2^n, \mathbb{K}) \\ E_v(f)(\alpha) &= f(\alpha) \quad \forall f \in A_n \ \& \ \forall \alpha \in \mathcal{C}_2^n \end{aligned}$$

**Observación 4.1.** La función  $E_v : A_n \longrightarrow \text{Map}(\mathcal{C}_2^n, \mathbb{K})$  está bien definida.

Para ver esto notemos primero el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{\{\{x_i^2 - 1: i=1, \dots, n\}\}} \\ & \searrow & \downarrow \text{ev}_\alpha & \swarrow \text{Ev}_\alpha & \\ & & \mathbb{K} & & \end{array}$$

Donde

$$\begin{array}{ccc} \text{ev}_\alpha : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x_i \longmapsto \alpha_i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Ev}_\alpha : \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{\{\{x_i^2 - 1: i=1, \dots, n\}\}} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x_i \longmapsto \alpha_i \end{array}$$

Está bien definido ya que,  $\text{ev}_\alpha(x_i^2 - 1) = 0$  pues  $\alpha_i \in \mathcal{C}_2$  implica que  $\alpha_i^2 = 1$  para  $i = 1, \dots, n$ .

Ahora del siguiente diagrama junto con el anterior podemos observar que la función  $E_v$  está bien definida:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{\{\{x_i^2 - 1: i=1, \dots, n\}\}} \\ & & \searrow & & \downarrow \text{E}_v \\ & & & & \text{Map}(\mathcal{C}_2^n, \mathbb{K}) \end{array}$$

Donde

$$\begin{array}{l} x_i \longmapsto E_v(x_i) \\ E_v(x_i)(\alpha_i) = \alpha_i \in \mathcal{C}_2^n \\ x_i^2 \longmapsto \alpha_i^2 \quad \therefore (x_i^2 - 1) \longmapsto 0 \end{array}$$

**Observación 4.2.**  $A_n = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{(\{x_i^2 - 1, \dots, x_n^2 - 1 : i=1, \dots, n\})}$  y  $Map(\mathbb{C}_2^n, \mathbb{K})$  son espacios vectoriales sobre el campo  $\mathbb{K}$ .

Notemos que  $A_n = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{(\{x_i^2 - 1, \dots, x_n^2 - 1 : i=1, \dots, n\})}$  es Espacio Vectorial (ver [19] y [17]). Ya que  $(\{x_i^2 - 1, \dots, x_n^2 - 1 : i=1, \dots, n\})$  es Subespacio Vectorial por que es ideal en  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , por lo tanto  $A_n = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{(\{x_i^2 - 1, \dots, x_n^2 - 1 : i=1, \dots, n\})}$  es Espacio Vectorial. Ahora  $Map(\mathbb{C}_2^n, \mathbb{K})$  es Espacio Vectorial por el ejemplo 3.12 del Capítulo 3 sección 3.5.

**Definición 4.2.** Definimos  $f_\alpha \in A_n$  por:

$$f_\alpha = \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i x_i)$$

Para entender mejor la función  $f_\alpha$  definida antes, veamos un ejemplo. Sean  $\alpha = (1, -1, 1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  y  $\alpha' = (-1, -1, 1) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$  y sea

$$\begin{aligned} f_\alpha &= \frac{1}{2^3} \prod_{i=1}^3 (1 + \alpha_i x_i) = \\ &= \frac{1}{2^3} (1 + \alpha_1 x_1) (1 + \alpha_2 x_2) (1 + \alpha_3 x_3), \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f_\alpha(\alpha) &= \frac{1}{2^3} (1 + \alpha_1 \alpha_1) (1 + \alpha_2 \alpha_2) (1 + \alpha_3 \alpha_3) = \\ &= \frac{1}{2^3} (1 + (1)(1)) (1 + (-1)(-1)) (1 + (1)(1)) = \\ &= \frac{1}{2^3} (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = \frac{1}{2^3} (2)(2)(2) = \frac{1}{2^3} (2^3) = 1. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} f_\alpha(\alpha') &= \frac{1}{2^3} (1 + \alpha_1 \alpha'_1) (1 + \alpha_2 \alpha'_2) (1 + \alpha_3 \alpha'_3) = \\ &= \frac{1}{2^3} (1 + (1)(-1)) (1 + (-1)(-1)) (1 + (1)(1)) = \\ &= \frac{1}{2^3} (1 - 1)(1 + 1)(1 + 1) = \frac{1}{2^3} (0)(1)(1) = 0. \end{aligned}$$

**Lema 4.1.** *La función  $E_v : A_n \longrightarrow \text{Map}(\mathbb{C}_2^n, \mathbb{K})$  definida anteriormente, es un isomorfismo de espacios vectoriales sobre el campo  $\mathbb{K}$ .*

*Demostración.* Notemos qué dimensión tiene cada uno de estos espacios vectoriales y qué tipo de papel juega  $E_v$  entre estos espacios vectoriales.

1. Para  $A_n$  notemos que su base está dada por

$$\beta = \{u \mid u \text{ es un monomio libre de cuadrados en } x_1, \dots, x_n \text{ variables}\}.$$

Antes de observar que la dimensión de  $A_n$  es  $2^n$ , mostremos que  $\beta$  es una base para  $A_n$ .

Entonces veamos que  $\beta$  es linealmente independiente, por inducción sobre el número de variables de los monomios.

Sea

$$\beta = M_n = \{u \mid u \text{ es un monomio libre de cuadrados en } x_1, \dots, x_n\}$$

Base:  $M_1 = \{1, x\}$  es linealmente independiente, (ver [24]).

Hipótesis: Supongamos que todo conjunto de monomios libre de cuadrados con menos de  $n$  variables es linealmente independiente.

Por demostrar que  $M_n$  es linealmente independiente.

Consideremos  $f(x_n)$  el polinomio en  $x_n$ .

Demostremos que  $f(x_n) = \sum_{u \in M_n} a_n u = 0$ .

En efecto, notemos que  $f(x_n) = h_0 + h_1 x_n$  con  $h_0, h_1 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

Ahora como  $\{1, x_n\}$  son linealmente independientes en

$(\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)) [x_n]$  (ver [19] y [17]), entonces  $h_0 = h_1 = 0$ , por lo tanto  $M_n$  es linealmente independiente.

Resta demostrar que  $M_n$  genera.

Notemos que un polinomio en  $x_1, \dots, x_n$  variables, digamos:  $\bar{f}(x_1, \dots, x_n)$  es igual a  $\sum_{u \in M_n} a_n u$ . Pero esto pasa porque  $\bar{x}^n = \bar{x}$  si  $n$  es impar y  $\bar{x}^n = 1$  si  $n$  es par.

Esto concluye la prueba de que  $\beta = M_n$  es base de  $A_n$ , entonces la cantidad de monomios libres de cuadrados en  $x_1, \dots, x_n$  incluyendo el 1 es  $2^n$ , es decir,  $|\beta| = 2^n$ .

2. La dimensión de  $Map(\mathbb{C}_2^n, \mathbb{K})$  es también  $2^n$ , pues, la base para  $Map(\mathbb{C}_2^n, \mathbb{K})$  está dada por las funciones características  $\chi_{\{\alpha\}}$  de todos los conjuntos unitarios  $\{\alpha\} \subseteq \mathbb{C}_2^n$  (ver ejemplo 3.17 Capítulo 3 sección 3.5).

Por lo tanto, únicamente necesitamos mostrar que  $\chi_{\{\alpha\}}$  puede ser representada por un polinomio para toda  $\alpha$ , es decir, veamos la suprayectividad de  $E_v$  que nos será de utilidad.

Sea  $f_\alpha \in A_n$  como se definió en 4.2:

$$f_\alpha = \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i x_i)$$

De esta forma

$$E_v(f_\alpha)(\alpha) = f_\alpha(\alpha) \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in \{\alpha\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \chi_{\{\alpha\}}.$$

□

Como la base para  $A_n$  está dada por el conjunto

$$M_n = \{u \mid u \text{ es un monomio libre de cuadrados en } x_1, \dots, x_n\},$$

cualquier  $f \in A_n$  puede escribirse de manera única como:  $f = \sum_{u \in M_n} c(f, u)u$ , donde  $c(f, u) \in \mathbb{K}$  para todo  $u$  y el coeficiente del monomio 1, lo denotaremos por  $c(f, 1)$  y se denomina término constante de  $f$ .

**Observación 4.3.** *Mostremos que  $\chi_S = \sum_{\alpha \in S} \chi_{\{\alpha\}}$ .*

Sea  $\alpha \in \mathbb{C}_2^n$  y sea  $S \subseteq \mathbb{C}_2^n$ , entonces, si  $\alpha \in S$ ,

$$\chi_S = \left( \sum_{z \in S} \chi_{\{z\}} \right) (\alpha) = \sum_{z \in S} \chi_{\{z\}}(\alpha) = \chi_{\{z\}}(\alpha) = 1$$

pues  $\alpha = z$  para algún  $z \in S$ .

Si  $\alpha \notin S$ ,

$$\chi_S = \left( \sum_{z \in S} \chi_{\{z\}} \right) (\alpha) = \sum_{z \in S} \chi_{\{z\}}(\alpha) = \chi_{\{z\}}(\alpha) = 0$$

ya que  $\alpha \neq z$  para todo  $z \in S$ .

**Lema 4.2.** Dado  $S \subseteq \mathcal{C}_2^n$  y dada  $\chi_S \in A_n$  la función característica, entonces

$$\chi_S = \sum_{u \in M_n} \left( \sum_{\alpha \in S} \frac{1}{2^n} u(\alpha) \right) u,$$

en particular, el término constante  $c(\chi_S, 1) = \frac{1}{2^n} |S|$ .

*Demostración.* Si  $S$  consta únicamente de un elemento  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , entonces el Lema 4.1 nos da la forma explícita  $\chi_{\{z\}} = \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i x_i)$ .

Desarrollando el producto de la fórmula

$$\begin{aligned} \chi_{\{z\}} &= \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i x_i) = \frac{1}{2^n} [(1 + \alpha_1 x_1)(1 + \alpha_2 x_2) \cdots (1 + \alpha_n x_n)] = \\ &= \frac{1}{2^n} [1 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_1 \alpha_2 x_1 x_2 + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n x_1 x_2 \dots x_n] = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{u \in M_n} u(\alpha) u. \end{aligned}$$

En el caso general, tenemos por la Observación 4.3 que  $\chi_S = \sum_{\alpha \in S} \chi_{\{\alpha\}}$  y entonces se tiene que  $c(\chi_S, u) = \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha \in S} u(\alpha)$  para todo monomio  $u$ .

El término constante lo obtenemos de  $c(\chi_S, 1) = \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha \in S} \alpha = \frac{1}{2^n} |S|$ .  $\square$

# Capítulo 5

## Propiedades básicas de $\rho_G$ .

Este capítulo muestra uno de los más importantes resultados que se presentan en este trabajo: el **Teorema de Eliahou**, con el que podremos determinar cuales son las propiedades básicas de  $\rho_G$ :

- Notaremos que  $\rho_G$  es la función característica sobre el conjunto de las 4-coloraciones propias de  $G$  y
- demostraremos que  $\rho_G \neq 0$  si y sólo si  $G$  es 4-coloreable, más aún el término independiente de  $\rho_G$  es  $4^{|A(G)|-|V(G)|} P_4(G)$ .

A parte observaremos algunas características importantes de  $\rho_G$ .

### 5.1. $\rho_G$ y 4 coloraciones de una gráfica $G$ .

Primero notemos unos casos particulares de  $\rho_G$ . Sea una gráfica  $G = (V(G), A(G))$  tal que  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $A(G) = \{(v_i, v_j) | \{v_i, v_j\} \subset V(G) \ i \neq j\}$ . Asociaremos a  $G$  un elemento  $\rho_G$  del Anillo cociente  $A_{2n}$ , donde:

$$A_{2n} = \frac{\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]}{(\{x_i^2 - 1, y_i^2 - 1 : i = 1, \dots, n\})}$$

de la siguiente manera:

$$\rho_G = \prod_{(v_i, v_j) \in A(G)} \rho_{(v_i, v_j)} \in A_{2n}$$

donde  $\rho_{(v_i, v_j)} = 3 - x_i x_j - y_i y_j - x_i x_j y_i y_j \in A_{2n}$ , para todo  $\{v_i, v_j\} \subseteq V(G)$ .

**Observación 5.1.** Si  $G$  tiene lazos, entonces  $\rho_G = 0$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \rho_{(v_i, v_i)} &= 3 - x_i x_i - y_i y_i - x_i x_i y_i y_i = \\ &= 3 - x_i^2 - y_i^2 - x_i^2 y_i^2 = 3 - 1 - 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Ya que  $x_i^2 = y_i^2 = 1$  en  $A_{2n}$ . □

**Observación 5.2.** Si  $G$  tiene aristas múltiples entonces  $\rho_G = k\rho_G$ , donde  $k = 4^c$  y  $c$  es la cantidad de aristas múltiples de  $G$ .

*Demostración.* Primero observemos para una arista múltiple de  $G$ .

$$\begin{aligned} [\rho_{(v_i, v_j)}]^2 &= [3 - x_i x_j - y_i y_j - x_i x_j y_i y_j] [3 - x_i x_j - y_i y_j - x_i x_j y_i y_j] = \\ &= 9 - 3x_i x_j - 3y_i y_j - 3x_i x_j y_i y_j - 3x_i x_j + x_i^2 x_j^2 + x_i x_j y_i y_j + \\ &+ x_i^2 x_j^2 y_i y_j - 3y_i y_j + x_i x_j y_i y_j + y_i^2 y_j^2 + x_i x_j y_i^2 y_j^2 - 3x_i x_j y_i y_j + \\ &+ x_i^2 x_j^2 y_i y_j + x_i x_j y_i^2 y_j^2 + x_i^2 x_j^2 y_i^2 y_j^2 = \\ &= 12 - 4x_i x_j - 4y_i y_j - 4x_i x_j y_i y_j = 4\rho_{(v_i, v_j)}. \end{aligned}$$

Y como

$$\rho_G = \prod_{(v_i, v_j) \in A(G)} \rho_{(v_i, v_j)}, \quad (5.1)$$

cada arista múltiple será contada como un factor 4 en el desarrollo de (5.1) y por lo tanto  $\rho_G = 4^c \rho_G$ . □

Por la observación anterior, una multigráfica no será relevante para el desarrollo del trabajo, pues  $4^c$  es un factor distinto de cero.

Notemos también que todos los coeficientes de  $\rho_G$  son enteros y todos los monomios en  $\rho_G$  tienen exponentes cuadráticos o uno.

Ahora estamos listos para demostrar el Teorema principal de este capítulo; pero antes mostremos todos los elementos que nos serán necesarios para dicha demostración.

Nuestra paleta de colores será el grupo multiplicativo

$$\Gamma = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2.$$

De esta manera podemos identificar el espacio de todas las 4-coloraciones:  $Map(V(G), \Gamma)$  con  $\Gamma^n = \underbrace{(\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2) \times \cdots \times (\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2)}_{n\text{-veces}}$  de manera natural; a una buena 4-coloración de  $G$  le corresponderá cierto subconjunto  $\mathbf{P} \subseteq \Gamma^n$ , a saber el subconjunto de puntos  $s = (s_1, \dots, s_n)$  que satisfacen que  $s_i \neq s_j$  siempre que  $(v_i, v_j) \in A(G)$ .

Notémoslo en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Map(V(G), \Gamma) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma^n \\ \uparrow & = & \uparrow \\ S_4 & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{P} \end{array}$$

Donde  $S_4 = \{s : V(G) \rightarrow \Gamma \mid s \text{ es buena 4-coloración de } G\}$ .

Por el Lema 4.1,  $A_{2n}$  puede ser identificado con el espacio  $Map(\Gamma^n, \mathbb{Q})$  de las  $\mathbb{Q}$ -funciones evaluadas en  $\Gamma^n$ .

Bajo el isomorfismo:

$$\begin{aligned} E_v : A_{2n} &\longrightarrow Map(\Gamma^n, \mathbb{Q}) \\ f &\longmapsto E_v(f) \end{aligned}$$

definida como sigue: sea  $s = ((\alpha_1, \gamma_1), \dots, (\alpha_n, \gamma_n)) \in \Gamma^n$ ,  $E_v(f)(s) = f(s)$  es la imagen de  $f$  bajo el homomorfismo de anillos:

$$\begin{aligned} A_{2n} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x_i &\longmapsto \alpha_i \\ y_i &\longmapsto \gamma_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Con esto pretendemos que, bajo esta identificación,  $\rho_G$  es esencialmente la función característica de las 4-coloraciones propias de  $G$ .

**Lema 5.1.** *Sea  $G$  una gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(G)$  y conjunto de aristas es  $A(G)$ , entonces*

$$\rho_G = 4^q \cdot \chi_{\mathbf{P}}$$

donde  $\chi_{\mathbf{P}}$  es la función característica del subconjunto  $\mathbf{P} \subset \Gamma^n$  de las 4-coloraciones propias de  $G$ .

*Demostración.* Sean  $v_i, v_j \in V(G)$ , entonces:

$$\rho_{(v_i, v_j)} = 3 - x_i x_j - y_i y_j - x_i x_j y_i y_j = 4 - (1 + x_i x_j)(1 + y_i y_j).$$

Sea  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \Gamma$ , con  $s_i = (\alpha_i, \gamma_i) \in \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$  para toda  $i = 1, \dots, n$ .

Entonces

$$\rho_{(v_i, v_j)} = 4 - (1 + \alpha_i \alpha_j)(1 + \gamma_i \gamma_j) = \begin{cases} 4 & \text{si } (\alpha_i, \gamma_i) \neq (\alpha_j, \gamma_j) \\ 0 & \text{si } (\alpha_i, \gamma_i) = (\alpha_j, \gamma_j) \end{cases}$$

Como  $\rho_G = \prod_{(v_i, v_j) \in A(G)} \rho_{(v_i, v_j)}$ , se tiene:

$$\rho_G(s) = \begin{cases} 4^{|A(G)|} & \text{si } s \in \mathbf{P} \\ 0 & \text{si } s \notin \mathbf{P} \end{cases} = 4^{|A(G)|} \cdot \chi_{\mathbf{P}}.$$

□

## 5.2. Teorema de Eliahou

En esta sección mostramos el Teorema más importante de este trabajo junto con un ejemplo para comprender mejor nuestro resultado. La importancia del trabajo consecuente radica en calcular el polinomio  $\rho_G$ .

**Teorema 5.2** (Eliahou). *Sea  $G$  una gráfica con conjunto de vértices  $V(G)$  y conjunto de aristas  $A(G)$ . Entonces:*

1.  $G$  es 4-coloreable si y sólo si  $\rho_G \neq 0$ .
2. El término constante  $c(\rho_G, 1)$  de  $\rho_G$  es igual a  $4^{q-p} \cdot P_4(G)$ . Donde  $P_4(G)$  denota el polinomio cromático de las 4-coloraciones propias de  $G$ .

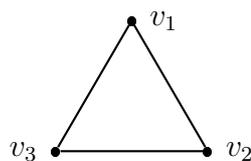
*Demostración.*

1. Por el Lema 5.1,  $4^{|A(G)|} \cdot \chi_{\mathbf{P}}$  donde  $\chi_{\mathbf{P}}$  denota la función característica de las 4-coloraciones propias de  $G$ . Entonces  $\chi_{\mathbf{P}} \neq 0$  si  $G$  admite una 4-coloración propia.
2. Por el Lema 4.2 tenemos que  $c(\chi_{\mathbf{P}}, 1) = 2^{-2n} |\mathbf{P}| = 4^{-|V(G)|} \cdot P_4(G)$ . Por el Lema 5.1, obtenemos que  $c(\rho_G, 1) = 4^{|A(G)| - |V(G)|} \cdot P_4(G)$ .

□

**Ejemplo 5.1.** *Una gráfica  $G$ , su polinomio cromático y el resultado de aplicar el Teorema 5.2.*

Sea  $G = K_3$



Calculemos  $P_4(K_3) = 4(4-1)(4-2) = 24$  [Ver Sección 1.4], entonces  $4^{|A(G)| - |V(G)|} \cdot P_4(G) = 4^{3-3} \cdot 24 = 24$ .

Por otro lado,

$$\rho_{K_3} = (3 - x_1x_2 - y_1y_2 - x_1x_2y_1y_2)(3 - x_1x_3 - y_1y_3 - x_1x_3y_1y_3)(3 - x_2x_3 - y_2y_3 - x_2x_3y_2y_3),$$

donde el término independiente es:

$$\begin{aligned}
c(\rho_{K_3}, 1) &= 3^3 + (-x_1x_2)(-x_1x_3)(-x_2x_3) + (-y_1y_2)(-y_1y_3)(-y_2y_3) + \\
&\quad + (-x_1x_2y_1y_2)(-x_1x_3y_1y_3)(-x_2x_3y_2y_3) = \\
&= 27 + (-x_1^2x_2^2x_3^2) + (-y_1^2y_2^2y_3^2) + (-x_1^2x_2^2x_3^2y_1^2y_2^2y_3^2) \\
&= 27 + (-1) + (-1) + (-1) = 27 - 3 = 24.
\end{aligned}$$

que es el valor esperado.

### 5.3. Los automorfismos $\sigma, \tau_1, \tau_2$ y algunos resultados interesantes con $c(\rho_G, 1)$ .

Ahora mostraremos ciertas propiedades de  $c(\rho_G, 1)$  que ayudarán para futuros resultados y nos permitirán estudiar mejor el comportamiento de  $\rho_G$ .

**Definición 5.1.** Definamos el automorfismo  $\sigma : A_{2n} \rightarrow A_{2n}$  por

$$\sigma(x_i) = y_i ; \quad \sigma(y_i) = x_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

**Definición 5.2.** Definamos el automorfismo  $\tau_1 : A_{2n} \rightarrow A_{2n}$  por

$$\tau_1(x_i) = x_i y_i ; \quad \tau_1(y_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

**Definición 5.3.** Definamos el automorfismo  $\tau_2 : A_{2n} \rightarrow A_{2n}$  por

$$\tau_2(x_i) = x_i ; \quad \tau_2(y_i) = x_i y_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

**Lema 5.3.** *El elemento  $\rho_G \in A_{2n}$  es invariante bajo los automorfismos  $\sigma, \tau_1, \tau_2$  de  $A_{2n}$ .*

*Demostración.* Por la definición tenemos que  $\rho_{(v_i, v_j)} = 3 - x_i x_j - y_i y_j - x_i x_j y_i y_j$ , entonces:

1.  $\sigma(\rho_{(v_i, v_j)}) = 3 - y_i y_j - x_i x_j - y_i y_j x_i x_j = \rho_{(v_i, v_j)}$ ,

- 2.

$$\begin{aligned} \tau_1(\rho_{(v_i, v_j)}) &= 3 - x_i y_i x_j y_j - y_i y_j - x_i y_i x_j y_j y_i y_j = \\ &= 3 - x_i y_i x_j y_j - y_i y_j - x_i x_j y_i^2 y_j^2 = \\ &= 3 - x_i x_j y_i y_j - y_i y_j - x_i x_j = \rho_{(v_i, v_j)}, \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{aligned} \tau_2(\rho_{(v_i, v_j)}) &= 3 - x_i x_j - x_i y_i x_j y_j - x_i x_j x_i y_i x_j y_j = \\ &= 3 - x_i x_j - x_i x_j y_i y_j - x_i^2 x_j^2 y_i y_j = \\ &= 3 - x_i x_j - x_i x_j y_i y_j - y_i y_j = \rho_{(v_i, v_j)}. \end{aligned}$$

Como

$$\rho_G = \prod_{\substack{a=(v_i, v_j) \\ a \in A(G)}} \rho_{(v_i, v_j)}$$

el resultado se sigue inmediatamente. □

A continuación veremos que el término constante de  $\rho_G$  tiene el máximo valor (absoluto) entre todos los coeficientes de  $\rho_G$ . Denotaremos por  $M_{2n}$  al conjunto de monomios en  $A_{2n}$  que en el Lema 4.1 vimos que este conjunto es una base para  $A_{2n}$ , entonces escribiremos cualquier  $f \in A_{2n}$  como  $f = \sum_{u \in M_{2n}} c(f, u) \cdot u$ , donde  $c(f, u) \in \mathbb{Q} \quad \forall u \in M_{2n}$ .

**Lema 5.4.** *Para toda  $u \in M_{2^n}$ , se tiene:*

$$|c(\rho_G, u)| \leq c(\rho_G, 1).$$

*Demostración.* Por el Lema 5.1 tenemos que  $\rho_G = 4^{|A(G)|} \cdot \chi_{\mathbf{P}}$ , donde  $\chi_{\mathbf{P}}$  es la función característica de las 4-coloraciones propias de  $\mathbf{P} \subset \Gamma^n$  de  $G$ . Por el Lema 4.2 y el Teorema 5.2 se tiene que:

$$c(\rho_G, u) = 4^{|A(G)|-|V(G)|} \cdot \sum_{\alpha \in \mathbf{P}} u(\alpha) \quad \text{y} \quad c(\rho_G, 1) = 4^{|A(G)|-|V(G)|} \cdot P_4(G).$$

Como cada  $u(\alpha) = \pm 1$ , para todo  $u$  y  $\alpha$  y además  $P_4(G) \geq 0$ , tenemos la afirmación.  $\square$

**Proposición 5.5.** *Sea  $G$  una gráfica. Para cualquier  $v_i, v_j \in V(G)$ , se tiene:*

$$-\frac{1}{3}c(\rho_G, 1) \leq c(\rho_G, x_i x_j) \leq c(\rho_G, 1)$$

*Más aún, si  $a = (v_i, v_j) \in A(G)$ , entonces  $c(\rho_G, x_i x_j) = -\frac{1}{3}c(\rho_G, 1)$ .*

*Demostración.* Sea  $G'$  la gráfica obtenida de  $G$  identificando los vértices  $v_i$  y  $v_j$ . Entonces  $\rho_{G'}$  es obtenido por la identificación de  $x_i = x_j$  y  $y_i = y_j$  en  $\rho_G$ . Considerando únicamente los términos constantes, se sigue que:

$$c(\rho_{G'}, 1) = c(\rho_G, 1) + c(\rho_G, x_i x_j) + c(\rho_G, y_i y_j) + c(\rho_G, x_i x_j y_i y_j).$$

Por el Lema 5.3, que en otras palabras indica que  $\rho_G$  es un polinomio simétrico [Ver Sección 2.2] respecto a los automorfismos  $\sigma$ ,  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , obtenemos:

$$c(\rho_{G'}, 1) = c(\rho_G, 1) + 3 \cdot c(\rho_G, x_i x_j) \tag{5.2}$$

Como  $c(\rho_{G'}, 1) \geq 0$ , se sigue de (5.2) que  $c(\rho_G, x_i x_j) \geq -\frac{1}{3}c(\rho_G, 1)$ .

Por otro lado y por el Lema 5.4,  $c(\rho_G, x_i x_j) \leq c(\rho_G, 1)$ .

Es decir  $-\frac{1}{3}c(\rho_G, 1) \leq c(\rho_G, x_i x_j) \leq c(\rho_G, 1)$ .

Supongamos ahora que  $a = (v_i, v_j) \in A(G)$ . Entonces  $G'$  tiene un lazo y por la Observación 5.1,  $\rho_{G'} = 0$  y concluimos de 5.2 que  $c(\rho_G, x_i x_j) = -\frac{1}{3}c(\rho_G, 1)$ .  $\square$

**Observación 5.3.** *Sea  $G$  una gráfica, entonces:*

1.  $c(\rho_G, x_i x_j) = -\frac{1}{3}c(\rho_G, 1)$  si y sólo si toda 4-coloración propia de  $G$  asigna distintos colores a  $v_i$  y  $v_j$ , donde  $v_i$  y  $v_j$  son vértices arbitrarios.
2.  $c(\rho_G, x_i x_j) = c(\rho_G, 1)$  si y sólo si toda 4-coloración propia de  $G$  asigna el mismo color a  $v_i$  y  $v_j$ , donde  $v_i$  y  $v_j$  son vértices arbitrarios.

*Demostración.* Sea  $G = (V(G), A(G))$  una gráfica y  $\rho_G$  su polinomio asociado, entonces:

1. De la Proposición 5.5, la hipótesis sobre  $v_i$  y  $v_j$  nos dice que la gráfica contraída  $G'$  no es 4-coloreable, por lo tanto del Teorema 5.2,  $c(\rho_{G'}, 1) = 0$  y de la ecuación (5.2) concluimos que  $c(\rho_G, x_i x_j) = -\frac{1}{3}c(\rho_G, 1)$ .
2. La hipótesis sobre  $v_i$  y  $v_j$  nos dice que las gráficas  $G$  y  $G'$  tienen el mismo número de 4-coloraciones propias, es decir,  $P_4(G) = P_4(G')$ . Por otra parte,  $G$  y  $G'$  tienen el mismo número de aristas, pero  $G'$  tiene un vértice menos que  $G$ . Por el Teorema 5.2,  $c(\rho_{G'}, 1) = 4 \cdot c(\rho_G, 1)$ . Entonces de la ecuación (5.2) tenemos:

$$\begin{aligned} c(\rho_{G'}, 1) &= c(\rho_G, 1) + 3 \cdot c(\rho_G, x_i x_j) \\ 4 \cdot c(\rho_G, 1) &= c(\rho_G, 1) + 3 \cdot c(\rho_G, x_i x_j) \\ c(\rho_G, 1) &= c(\rho_G, x_i x_j). \end{aligned}$$

□

Para concluir esta Sección mencionaremos la siguiente observación de la reducción de  $\rho_G$  módulo 3.

**Observación 5.4.** *Si reducimos todos los coeficientes de  $\rho_G$  módulo 3, obtenemos un elemento*

$$\tilde{\rho}_G = \pm \prod_{(v_i, v_j) \in A(G)} (x_i x_j + y_i y_j + x_i x_j y_i y_j)$$

Sea  $\mathbb{Z}_3$  el campo con 3 elementos, entonces el anillo

$$A_{2n} = \frac{\mathbb{Z}_3[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]}{(\{x_i^2 - 1, y_i^2 - 1 | i = 1, \dots, n\})},$$

tiene las mismas propiedades básicas de  $\rho_G$ , por nombrar la más importante:

1.  $G$  es 4-coloreable si y sólo si  $\tilde{\rho}_G \neq 0$ .

## Capítulo 6

# Primer cálculo del término independiente de $\rho_G$ .

Aquí enfocaremos nuestra atención en el cálculo de  $c(\rho_G, 1)$  mediante el desarrollo de  $\rho_G$  pero estudiándolo apartir de las subgráficas de  $G$  y veremos la relación de este término con el llamado *primer número de Betti*. Para iniciar y como en el Capítulo 3 sección 3.6 definimos lo siguiente:

**Notación 6.1.** Consideremos a  $\mathbb{Z}_2$  el campo con dos elementos y dado un conjunto  $R$ , denotamos por  $\mathbb{Z}_2 R$  el espacio vectorial sobre  $\mathbb{Z}_2$  con base  $R$ . Así que los elementos de  $\mathbb{Z}_2 R$  son combinación lineal de los elementos de  $R$ .

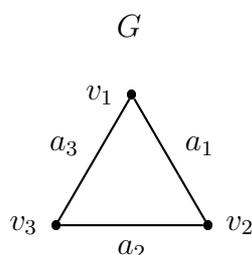
Sea una gráfica  $G = (V(G), A(G))$ , consideremos el siguiente homomorfismo entre los espacios vectoriales  $\mathbb{Z}_2 A(G)$  y  $\mathbb{Z}_2 V(G)$ :

$$\begin{aligned} d : \mathbb{Z}_2 A(G) &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 V(G) \\ a = (v_i, v_j) &\longmapsto v_i + v_j \quad \forall a \in A(G). \end{aligned}$$

**Observación 6.1.** La dimensión del Kernel de  $d$  ( $Ker(d)$ ), es llamado el *primer número de Betti* de  $G$ , denotado por  $\mathcal{B}_1(G)$ .

*Veamos que todos los elementos que están en  $Ker(d)$  son los ciclos de  $G$ .*

Sea  $G$  la siguiente gráfica, cuyas aristas son:  $a_1 = (v_1, v_2)$ ,  $a_2 = (v_1, v_3)$ ,  $a_3 = (v_2, v_3)$



Entonces como  $d$  es homomorfismo de Espacios Vectoriales, tenemos:

$$\begin{aligned} d(a_1 + a_2 + a_3) &= d(a_1) + d(a_2) + d(a_3) \\ &= (v_1 + v_2) + (v_1 + v_3) + (v_2 + v_3) \\ &= 2v_1 + 2v_2 + 2v_3 = 2(v_1 + v_2 + v_3) = 0 \end{aligned}$$

pues  $2(v_1 + v_2 + v_3) \in \mathbb{Z}_2V(G)$ .

Con este ejemplo hemos visto que los ciclos pertenecen a  $\text{Ker}(d)$ .

Por lo tanto, tenemos por el Teorema 2.12 [Ver Sección 2.1] y por la sección 3.6 que la cantidad de ciclos de  $G$  está dada por:  $q - p + \omega$ , donde  $q = |A(G)|$ ,  $p = |V(G)|$  y  $\omega$  es la cantidad de componentes conexas de  $G$ . Así que  $\dim(\text{Ker}(d)) = q - p + \omega$ .

Consideremos  $\mathbf{H}^+ = \{H | H \text{ es subgráfica positiva de } G\}$  y como antes definimos  $\mathbb{Z}_2A(G)$ , entonces existe  $F$  una biyección entre estos dos conjuntos, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f : \mathbf{H}^+ &\longrightarrow \mathbb{Z}_2A(G) \\ H &\longmapsto \sum_{a \in A(H)} a \end{aligned}$$

Donde  $H = (V(H), A(H))$  es subgráfica positiva de  $G$  y  $\sum_{a \in A(H)} a \in \mathbb{Z}_2A(G)$ .

**Observación 6.2.** *Notemos que bajo esta biyección y la Observación 6.1, las subgráficas de  $G$  correspondientes al  $\text{Ker}(d)$  son exactamente los ciclos de  $G$ .*

**Lema 6.1.** *El número de ciclos de una gráfica finita  $G$  es igual a  $2^{\mathcal{B}_1(G)}$  (Considerando la subgráfica vacía).*

*Demostración.* Recordemos que las subgráficas positivas o subgráficas inducidas por aristas de  $G$  están determinadas por el conjunto de aristas. Así por la observación 2.3, la cantidad de subgráficas positivas de  $G$  es  $2^q$ . Como estamos considerando las subgráficas positivas pares, es decir, los ciclos de  $G$  determinados por las aristas tenemos que esto es  $2^{\mathcal{B}_1(G)}$ . □

Con este Lema concluimos las observaciones preliminares.

Recordemos que tenemos asociado a  $G$  un elemento  $\rho_G$  del Anillo  $A_{2n}$ . También recordemos que si  $f \in A_{2n}$ , denotamos por  $c(f, u)$  el coeficiente del monomio  $u$  para la función  $f$ .

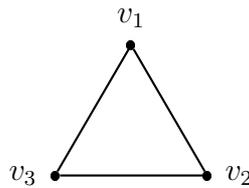
Nuestro trabajo ahora se centra en el cálculo de  $c(\rho_G, 1)$ . Como un paso intermedio en el cálculo de este término, necesitamos calcular el término constante del elemento:

$$\prod_{a=(v_i, v_j) \in A(G)} (1 + x_i x_j) \in A_n,$$

asociado a  $G$ .

Para la demostración del siguiente Lema desarrollaremos el elemento  $\prod_{a=(v_i, v_j) \in A(G)} (1 + x_i x_j)$  asociado a  $G$  y mostraremos su relación con  $\mathcal{B}_1(G)$ . Así que primero veremos un ejemplo para entender mejor las propiedades de éste.

Sea  $G$  la siguiente gráfica,



entonces,

$$\begin{aligned}
 \prod_{a \in A(G)} (1 + x_i x_j) &= 1 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 + \\
 &\quad + x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 \quad \dots \quad (6.1) \\
 &= 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 2x_1 x_3 + 2 = \\
 &= 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 + 1) = 0
 \end{aligned}$$

Con este ejemplo saltan a la vista dos propiedades importantes de

$$\prod_{a \in A(G)} (1 + x_i x_j);$$

1. Los monomios formados por el desarrollo del producto son los posibles subconjuntos de monomios en  $x_1, \dots, x_n$  variables (ver (6.1)) y
2. el producto es cero si  $G$  contiene ciclos. De estas observaciones podemos enunciar el siguiente Lema:

**Lema 6.2.** Si  $G = (V(G), A(G))$  es una gráfica y  $\mathcal{B}_1(G)$  el primer número de Betti de  $G$ , entonces

$$c \left( \prod_{a=(v_i, v_j) \in A(G)} (1 + x_i x_j), 1 \right) = 2^{\mathcal{B}_1(G)}.$$

*Demostración.* Desarrollando el producto, tenemos:

$$\prod_{a=(v_i, v_j) \in A(G)} (1 + x_i x_j) = \sum_{A(H) \subset A(G)} \prod_{A(G)} (x_i x_j)$$

Así, tomando términos constantes, obtenemos:

$$c \left( \prod_{a \in A(G)} (1 + x_i x_j), 1 \right) = \sum_{A(H) \subset A(G)} c \left( \prod_{A(G)} (x_i x_j), 1 \right) \quad (6.2)$$

Ahora dado  $A(H) \subset A(G)$  el monomio asociado  $\prod_{a \in A(H)} (x_i x_j) = 1$  si y sólo si la subgráfica inducida  $H$  de  $G$  determinada por  $A(H)$  es un ciclo. Así,

$$c \left( \prod_{a \in A(H)} (x_i x_j), 1 \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \text{ es un ciclo} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (6.3)$$

Entonces por (6.2) y (6.3) y el Lema 6.1 concluimos que

$$c \left( \prod_{a \in A(G)} (1 + x_i x_j), 1 \right) = 2^{\mathcal{B}_1(G)}.$$

□

Ahora mostraremos el principal resultado de este capítulo.

**Teorema 6.3.** *Sea  $G = (V(G), A(G))$  una gráfica simple finita, entonces*

$$c(\rho_G, 1) = \sum_{A(H) \subset A(G)} (-1)^{|q'|} \cdot 4^{(q-q') + \mathcal{B}_1(G[A(H)])}.$$

*Donde,  $A(H) \subset A(G)$ ,  $|A(H)| = q'$  y  $G[A(H)]$  denota la subgráfica inducida por  $A(H)$ .*

*Demostración.* Sea  $a = (v_i, v_j) \in A(G)$ . Como

$$\rho_G = \prod_{a \in A(G)} \rho_a$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_a = \rho_{(v_i, v_j)} &= 3 - x_i x_j - y_i y_j - x_i x_j y_i y_j \\ &= 4 - (1 + x_i x_j)(1 + y_i y_j). \end{aligned}$$

Entonces desarrollando el producto

$$\rho_G = \prod_{a \in A(G)} (4 - (1 + x_i x_j)(1 + y_i y_j))$$

obtenemos,

$$\rho_G = \sum_{A(H) \subset A(G)} 4^{|A(G)| - |A(H)|} (-1)^{|A(H)|} \prod_{a \in A(H)} (1 + x_i x_j)(1 + y_i y_j) \quad (6.4)$$

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} c\left(\prod_{a \in A(H)} (1 + x_i x_j)(1 + y_i y_j), 1\right) &= c\left(\prod_{a \in A(H)} (1 + x_i x_j), 1\right) \cdot c\left(\prod_{a \in A(H)} (1 + y_i y_j), 1\right) \\ &= \left[ c\left(\prod_{a \in A(H)} (1 + x_i x_j), 1\right) \right]^2. \end{aligned}$$

Esto por la simetría de  $\prod(1 + x_i x_j)$  y porque si  $u$  es un monomio en las variables  $x_i$  y  $v$  es un monomio en las variables  $y_i$  tal que  $uv = 1$ , entonces  $u = v = 1$ . Así, tomando términos constantes en (6.4), obtenemos:

$$\begin{aligned}
c(\rho_G, 1) &= \sum_{A(H) \subset A(G)} 4^{|A(G)|-|A(H)|} (-1)^{|A(H)|} \left[ c \left( \prod_{a \in A(H)} (1 + x_i x_j), 1 \right) \right]^2 = \\
&= \sum_{A(H) \subset A(G)} 4^{|A(G)|-|A(H)|} (-1)^{|A(H)|} \cdot 4^{\mathcal{B}_1(G[A(H)])} \quad \text{por el Lema 6.2}
\end{aligned}$$

Donde,  $G[A(H)]$  es la subgráfica inducida por aristas de  $G$  determinada por  $A(H)$ . □

**Corolario 6.4** (Whitney). *Sea  $G = (V(G), A(G))$  una gráfica simple, entonces*

$$P_4(G) = \sum_{A(H) \subset A(G)} (-1)^{q'} \cdot 4^{(p-q')+\mathcal{B}_1(G[A(H)])}$$

Donde,  $A(H) \subset A(G)$ ,  $|A(H)| = q'$  y  $G[A(H)]$  denota la subgráfica inducida por  $A(H)$ .

*Demostración.* Por el Teorema 5.2,  $P_4(G) = 4^{|V(G)|-|A(G)|} c(\rho_G, 1)$ . Utilizando el Teorema 6.3 obtenemos,

$$\begin{aligned}
P_4(G) &= 4^{|V(G)|-|A(G)|} \sum_{A(H) \subset A(G)} 4^{|A(G)|-|A(H)|} \cdot (-1)^{|A(H)|} \cdot 4^{\mathcal{B}_1(G[A(H)])} \\
&= \sum_{A(H) \subset A(G)} (-1)^{|A(H)|} \cdot 4^{|V(G)|-|A(H)|+\mathcal{B}_1(G[A(H)])}
\end{aligned}$$

□

Con el mismo argumento de la demostración del Corolario anterior, podemos tener la fórmula de Whitney para el caso general,

$$P_d(G) = \sum_{A(H) \subset A(G)} (-1)^{q'} \cdot d^{p-q'+\mathcal{B}_1(G[A(H)])}$$

De hecho, es suficiente probar la fórmula para  $d = 2^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ , ya que  $P_d(G)$  es un polinomio. Para el valor  $d = 2^m$ , reemplazamos la paleta de colores  $\mathcal{C}_2^n \times \mathcal{C}_2^n$  por  $(\mathcal{C}_2^n)^m$ , el Anillo  $A_{2n}$  por el Anillo

$$A_{mn} = \frac{\mathbb{Q}[x_{ir} \mid 1 \leq i \leq n; 1 \leq r \leq m]}{(\{(x_{ir}^2 - 1)_{ir}\})}$$

y el original  $\rho_G$  por

$$\rho_G^m = \prod_{a \in A(G)} \left( 2^m - \prod_{r=1}^m (1 + x_{ir} x_{jr}) \right).$$

Así, la misma prueba antes mencionada funciona para este resultado más general.

## Capítulo 7

### Segundo cálculo del término independiente de $\rho_G$ .

En el capítulo pasado, calculamos  $c(\rho_G, 1)$  por desarrollo de  $\rho_G$  respecto a sus subgráficas inducidas por aristas y con el producto

$$\prod_{a \in A(G)} 4 - (1 + x_i x_j)(1 + y_i y_j).$$

Aquí, desarrollaremos el producto  $\rho_G = \prod_{a \in A(G)} (3 - x_i x_j - y_i y_j - x_i x_j y_i y_j)$  por "*fuerza bruta*". El resultado nos proporcionará una nueva fórmula para  $P_4(G)$ , el cual se verá en la sección de hipergráficas.

Primero definamos algunos elementos necesarios y notaciones que utilizaremos en este Capítulo.

**Notación 7.1.**  $Map^*(A(G), A_{2n})$  denota el conjunto de todas las funciones

$$l^* : A(G) \longrightarrow A_{2n}$$

que satisfacen la condición:

$$l^*(a) \in \{3, -x_i x_j, -y_i y_j, -x_i x_j y_i y_j\} \quad \forall a = (v_i, v_j) \in A(G).$$

Con la definición anterior tenemos la siguiente observación sobre

$$\rho_G = \prod_{a \in A(G)} (3 - x_i x_j - y_i y_j - x_i x_j y_i y_j)$$

**Observación 7.1.** *Desarrollando el producto*

$\prod_{a \in A(G)} (3 - x_i x_j - y_i y_j - x_i x_j y_i y_j)$  obtenemos

$$\rho_G = \sum_{l^* \in \text{Map}^*(A(G), A_{2n})} \prod_{a \in A(G)} l^*(a) \quad (7.1)$$

Observemos que el término  $\prod_{a \in A(G)} l^*(a)$  es un monomio con algún coeficiente.

Lo siguiente es identificar los componentes  $\sum_{l^* \in \text{Map}^*(A(G), A_{2n})}$  y  $\prod_{a \in A(G)} l^*(a)$  por separado y por último juntar todos los términos en (7.1) que contribuyan para el término constante de  $\rho_G$ .

**Notación 7.2.** *Denotaremos por  $\hat{\mathcal{G}}$  al grupo abeliano (ver ejemplo 3.4 Capítulo 3 sección 3.2):*

$$\hat{\mathcal{G}} = \{1, x, y, xy \mid x^2 = y^2 = 1\}$$

**Notación 7.3.** *Dado un conjunto  $B$ , denotaremos por  $\hat{\mathcal{G}}^B$  el grupo multiplicativo de todas las funciones  $l : B \rightarrow \hat{\mathcal{G}}$ . (ver ejemplo 3.5 Capítulo 3 sección 3.2)*

**Definición 7.1.** *Dado  $l \in \hat{\mathcal{G}}^B$ , definimos  $\text{Sop}(l) = \{b \in B \mid l(b) \neq 1\}$ . Denotaremos por  $s$  la cardinalidad del soporte de  $l$ , es decir,  $s = |\text{Sop}(l)|$ .*

Ahora notemos que existe una biyección natural  $l \longleftrightarrow l^*$  entre  $\hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  y  $\text{Map}^*(A(G), A_{2n})$  definida de la siguiente manera: Si  $a = (v_i, v_j) \in A(G)$

$$l(a) = \begin{cases} 1 & \iff l^*(a) = 3 \\ x & \iff l^*(a) = -x_i x_j \\ y & \iff l^*(a) = -y_i y_j \\ xy & \iff l^*(a) = -x_i x_j y_i y_j \end{cases} \quad (7.2)$$

Aún así la correspondencia entre  $l$  y  $l^*$  puede ser expresada en una forma más útil, considerando el homomorfismo:

$$\begin{aligned}\phi_i : \hat{\mathcal{G}} &\longrightarrow M_{2n} \\ \phi_i(x) &= x_i \\ \phi_i(y) &= y_i \quad \forall i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

Usando este homomorfismo, la correspondencia  $l \longleftrightarrow l^*$  se traduce como sigue: Si  $a = (v_i, v_j) \in A(G)$

$$l^*(a) = \begin{cases} -(\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) & \text{si } a \in \text{Sop}(l) \\ 3(\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) = 3 & \text{si } a \notin \text{Sop}(l) \end{cases} \quad (7.3)$$

Observemos la correspondencia (7.3). Sea  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  y  $\text{Sop}(l) = \{a \in A(G) \mid l(a) \neq 1\}$ , entonces

1. Si  $l(a) = x$ , entonces  $-(\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) = -(\phi_i \cdot \phi_j)(x) = -(\phi_i(x) \cdot \phi_j(x)) = -x_i x_j = l^*(a)$  por (7.2).
2. Si  $l(a) = y$ , entonces  $-(\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) = -(\phi_i \cdot \phi_j)(y) = -(\phi_i(y) \cdot \phi_j(y)) = -y_i y_j = l^*(a)$  por (7.2).
3. Si  $l(a) = xy$ , entonces  $-(\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) = -(\phi_i \cdot \phi_j)(xy) = -(\phi_i(xy) \cdot \phi_j(xy)) = -(\phi_i(x)\phi_i(y) \cdot \phi_j(x)\phi_j(y)) = -x_i x_j y_i y_j = l^*(a)$  por (7.2).
4. Si  $l(a) = 1$ , entonces  $3(\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) = 3(\phi_i \cdot \phi_j)(1) = 3(\phi_i(1) \cdot \phi_j(1)) = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3 = l^*(a)$  por (7.2).

El siguiente Lema nos proporcionará una forma para el producto  $\prod_{a \in A(G)} l^*(a)$ .

**Lema 7.1.** Sea  $l^* \in \text{Map}^*(A(G), A_{2n})$  y sea  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  la etiqueta correspondiente para  $l^*$  por (7.3), entonces

$$\prod_{a \in A(G)} l^*(a) = \kappa \cdot u$$

donde,

$$\kappa = (-1)^s \cdot 3^{q-s} \in \mathbb{Q}$$

y

$$u = \prod_{a \in A(G)} (\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) \in M_{2n}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \prod_{a \in A(G)} l^*(a) &= \prod_{a \in A(G)} \begin{cases} -(\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) & \text{si } a \in \text{Sop}(l) \\ 3(\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) = 3 & \text{si } a \notin \text{Sop}(l) \end{cases} \\ &= (-1)^{|\text{Sop}(l)|} \prod_{a \in A(G)} (\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) \cdot 3^{|A(G)| - |\text{Sop}(l)|} \\ &= (-1)^{|\text{Sop}(l)|} \cdot 3^{|A(G)| - |\text{Sop}(l)|} \prod_{a \in A(G)} (\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) \\ &= \kappa \cdot u \end{aligned}$$

□

Ahora deseamos ir más lejos estudiando el monomio

$$u = \prod_{a \in A(G)} (\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a)$$

asociado a un  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  dado.

Consideremos  $\hat{\mathcal{G}}^{V(G)}$ , el conjunto de todas las funciones  $l : V(G) \rightarrow \hat{\mathcal{G}}$ . Existen dos funciones naturales que involucran a  $\hat{\mathcal{G}}^{V(G)}$ :

**Definición 7.2.** Dada una gráfica  $G = (V(G), A(G))$  definimos:

1. *El homomorfismo frontera:*

$$\partial : \hat{\mathfrak{G}}^{A(G)} \longrightarrow \hat{\mathfrak{G}}^{V(G)} \quad (7.4)$$

definido por  $\partial(l)(v_i) = \prod_{v_j | a=(v_i, v_j) \in A(G)} l(a) \quad \forall l \in \hat{\mathfrak{G}}^{A(G)}$  y  $v_i \in V(G)$ .

2. *El homomorfismo de inmersión:*

$$U : \hat{\mathfrak{G}}^{V(G)} \hookrightarrow M_{2n} \quad (7.5)$$

definido por  $U(l) = \prod_{v_i \in V(G)} (\phi_i(l(v_i))) \quad \forall l \in \hat{\mathfrak{G}}^{V(G)}$ .

**Lema 7.2.** Sea  $l \in \hat{\mathfrak{G}}^{A(G)}$ , entonces

$$\prod_{a=(v_i, v_j) \in A(G)} (\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) = U(\partial(l)) \in M_{2n}$$

*Demostración.* Reagrupando términos, tenemos

$$\begin{aligned} \prod_{a=(v_i, v_j) \in A(G)} (\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) &= \prod_{v_i \in V(G)} \phi_i \left( \prod_{v_j | a \in A(G)} l(a) \right) \\ &= \prod_{v_i \in V(G)} \phi_i \circ \partial(l(v_i)) && \text{por definición de } \partial. \\ &= U(\partial(l)). && \text{por definición de } U. \end{aligned}$$

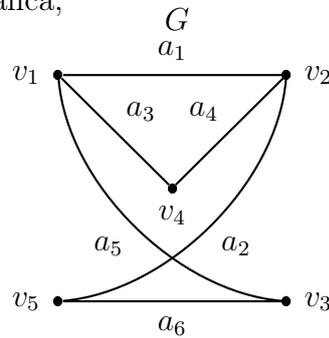
□

La composición  $U \circ \partial : \hat{\mathfrak{G}}^{A(G)} \rightarrow M_{2n}$  para este trabajo juega un papel importante, así que introduciremos lo siguiente:

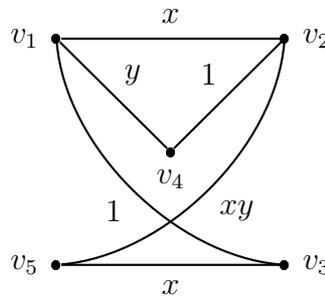
**Definición 7.3.** Un monomio  $u \in M_{2n}$  se dice que es **representado** por la etiqueta  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  si y sólo si  $U(\partial(l)) = u$ .

**Ejemplo 7.1.** Algunos ejemplos de monomios representados:

Sea  $G$  la siguiente gráfica,



y sea  $u = x_1x_3y_1y_2y_4y_5$ , entonces  $u$  es representado por la siguiente etiqueta:



Pues, por el Lema 7.2 sabemos que  $U(\partial(l)) = \prod_{a=(v_i,v_j) \in A(G)} (\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a)$  así:

sea  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  dada por

$$\begin{array}{ll}
 l : A(G) & \longrightarrow \hat{\mathcal{G}} \\
 a_1 & \longmapsto x \\
 a_2 & \longmapsto xy \\
 a_3 & \longmapsto y \\
 a_4 & \longmapsto 1 \\
 a_5 & \longmapsto 1 \\
 a_6 & \longmapsto x
 \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(a_1)) &= (\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(v_1, v_2)) \\ &= (\phi_1 \cdot \phi_2) \circ (l(a_1)) \\ &= \phi_1(l(a_1)) \cdot \phi_2(l(a_1)) \\ &= \phi_1(x) \cdot \phi_2(x) = x_1 \cdot x_2 = x_1x_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(a_2)) &= (\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(v_2, v_5)) \\ &= (\phi_2 \cdot \phi_5) \circ (l(a_2)) \\ &= \phi_2(l(a_2)) \cdot \phi_5(l(a_2)) \\ &= \phi_2(xy) \cdot \phi_5(xy) = x_2y_2 \cdot x_5y_5 = x_2x_5y_2y_5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(a_3)) &= (\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(v_1, v_4)) \\ &= (\phi_1 \cdot \phi_4) \circ (l(a_3)) \\ &= \phi_1(l(a_3)) \cdot \phi_4(l(a_3)) \\ &= \phi_1(y) \cdot \phi_4(y) = y_1 \cdot y_4 = y_1y_4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(a_4)) &= (\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(v_2, v_4)) \\ &= (\phi_2 \cdot \phi_4) \circ (l(a_4)) \\ &= \phi_2(l(a_4)) \cdot \phi_4(l(a_4)) \\ &= \phi_2(1) \cdot \phi_4(1) = 1 \cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

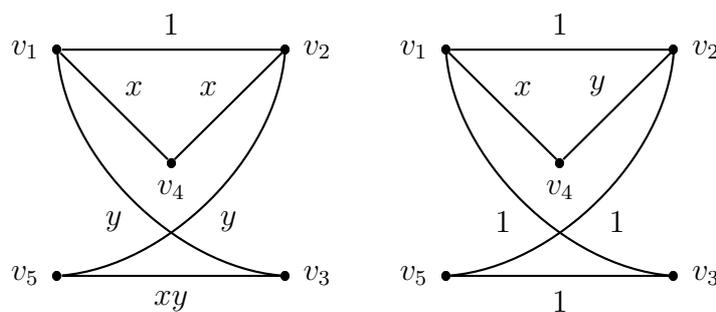
$$\begin{aligned}(\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(a_5)) &= (\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(v_1, v_3)) \\ &= (\phi_1 \cdot \phi_3) \circ (l(a_5)) \\ &= \phi_1(l(a_5)) \cdot \phi_3(l(a_5)) \\ &= \phi_1(1) \cdot \phi_3(1) = 1 \cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(a_6)) &= (\phi_i \cdot \phi_j) \circ (l(v_3, v_5)) \\
&= (\phi_3 \cdot \phi_5) \circ (l(a_6)) \\
&= \phi_3(l(a_6)) \cdot \phi_5(l(a_6)) \\
&= \phi_3(x) \cdot \phi_5(x) = x_3 \cdot x_5 = x_3x_5.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
U(\partial(l)) &= \prod_{a=(v_i, v_j) \in A(G)} (\phi_i \cdot \phi_j) \circ l(a) \\
&= x_1x_2 \cdot x_2x_5y_2y_5 \cdot y_1y_4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x_3x_5 \\
&= x_1x_2^2x_3x_5^2y_1y_2y_4y_5 = x_1x_3y_1y_2y_4y_5 = u.
\end{aligned}$$

Los siguientes monomios,  $v = x_1x_2x_3x_5y_1y_2$  y  $w = x_1x_4y_2y_4$  son representados por las siguientes etiquetas en  $G$  respectivamente.



Con las observaciones y resultados anteriores tenemos la siguiente Proposición:

**Proposición 7.3.** *El elemento  $\rho_G$  asociado a  $G$  está dado por:*

$$\rho_G = 3^q \cdot \sum_{l \in \mathfrak{G}^{A(G)}} \left(-\frac{1}{3}\right)^s \cdot U(\partial(l)).$$

*Demostración.* Por (7.1) tenemos,

$$\rho_G = \sum_{l^* \in \text{Map}^*(A(G), A_{2n})} \prod_{a \in A(G)} l^*(a).$$

Donde la suma se extiende sobre todas las  $l^* \in \text{Map}^*(A(G), A_{2n})$ . Usando el Lema 7.1 y Lema 7.2 en el desarrollo de (7.1), podemos reemplazar el término

$$\prod_{a \in A(G)} l^*(a) \quad \text{por}$$

$$3^{|A(G)|} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{|\text{Sup}(l)|} \cdot U(\partial(l)).$$

□

Dirigimos ahora nuestra atención en calcular el término constante de  $\rho_G$ .

**Proposición 7.4.** *El término constante de  $\rho_G$  está dado por:*

$$c(\rho_G, 1) = 3^q \sum_{l \in \text{Ker}(\partial)} \left(-\frac{1}{3}\right)^s.$$

*Donde  $\text{Ker}(\partial)$  es el Kernel del homomorfismo frontera  $\partial$ .*

*Demostración.* Por la Proposición 7.3 tenemos,

$$c(\rho_G, 1) = 3^{|A(G)|} \cdot \sum_{l \in \mathfrak{G}^{A(G)}} \left(-\frac{1}{3}\right)^{|\text{Sup}(l)|} \cdot c(U(\partial(l)), 1)$$

Ahora, como  $U(\partial(l))$  es un monomio, tenemos

$$c(U(\partial(l)), 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } U(\partial(l)) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Más aún, como  $U : \hat{\mathcal{G}}^{V(G)} \hookrightarrow M_{2n}$  es una inmersión, tenemos que  $U(\partial(l)) = 1$  si y sólo si  $\partial(l) = 1$ .

Por lo tanto

$$c(\rho_G, 1) = 3^{|A(G)|} \sum_{l \in \text{Ker}(\partial)} \left(-\frac{1}{3}\right)^{|\text{Sop}(l)|}.$$

□

El resultado anterior nos fuerza a calcular el *Kernel* de  $\partial : \hat{\mathcal{G}}^{A(G)} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}^{V(G)}$ . Para conocer la respuesta a ¿qué es  $\text{Ker}(\partial)$ ?, tenemos que éste, está cercanamente relacionada con el *Kernel* de la función:

$$d : \mathbb{Z}_2 A(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 V(G)$$

Ya mencionada en el Capítulo 5.

Recordemos que los elementos en el  $\text{Ker}(d)$  corresponden biyectivamente con los ciclos de  $G$ , vía la función

$$f : H \longmapsto \sum_{a \in A(H)} a \in \mathbb{Z}_2 A(G)$$

Donde  $H = (V(H), A(H))$  es cualquier subgráfica positiva de  $G$ .

Con esta información estamos listos para definir lo que es una *base de ciclos* bajo este contexto (comparando con la información presentada en el Capítulo 3 sección 3.6). Este concepto nos será de utilidad para los resultados consecuentes, principalmente para el trabajo con hipergráficas y después con el desarrollo de algunos ejemplos para el cálculo de  $\rho_G$ .

**Definición 7.4.** *Una base de ciclos para la gráfica  $G$  es un conjunto*

$$\beta_c(G) = \{C_1, \dots, C_r\}$$

*de ciclos inducidos por aristas de  $G$ , tal que  $f(C_1), \dots, f(C_r)$  constituye una base del Kernel de  $d : \mathbb{Z}_2 A(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 V(G)$ . Por supuesto,  $r = \mathcal{B}_1(G)$ , el primer número de Betti, por definición.*

**Definición 7.5.** Una base de ciclos  $\beta_c(G) = \{C_1, \dots, C_r\}$  es *estándar* si  $C_i \in \beta_c(G)$   $i = 1, \dots, r$  tiene una arista  $\mathbf{a}$  que pertenece a  $C_i$ , pero no pertenece a otro  $C_j \in \beta_c(G)$   $j \neq i$ .

**Observación 7.2.** Notemos que una base de ciclos estándar siempre existe. Ya que si elegimos un bosque generador (máximo)  $F$  en  $G$ , tenemos que  $|A(G) \setminus A(F)| = \mathcal{B}_1(G)$ . Denotemos por  $C^a$  al ciclo generado por la cuerda  $\mathbf{a}$ , entonces cualquier arista  $a \in A(G) \setminus A(F)$  genera un único ciclo  $C^a$  de  $G$ , cuyas aristas son  $\mathbf{a}$  y la trayectoria en  $F$  que une los extremos de  $\mathbf{a}$ . La colección  $\{C^a\}_{a \in A(G) \setminus A(F)}$  es una base de ciclos estándar.

Ahora, dada una base de ciclos  $\beta_c(G)$  para  $G$ , hay una función natural entre  $\hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)}$  y  $\hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$

$$\hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)} \xrightarrow{\partial_c} \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$$

$$\begin{array}{ccc} \beta_c(G) & & \mathbf{a} \\ \downarrow l & \curvearrowright & \downarrow \\ \hat{\mathcal{G}} & & \beta_c^a(G) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \prod_{C \in \beta_c^a(G)} l(C) \end{array}$$

definida por,

$$(\partial_c(l))(a) \doteq \prod_{C \in \beta_c^a(G)} l(C) \quad (7.6)$$

Donde  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)}$ ,  $a \in A(G)$  y  $\beta_c^a(G)$  denota el conjunto de todos los  $C \in \beta_c(G)$  que contienen a  $a$  como arista.

**Advertencia 1.** En la demostración del siguiente Lema la interpretación de "1" depende del contexto en donde se encuentre, es decir, el "1" puede representar el morfismo trivial, el elemento neutro de  $\hat{\mathcal{G}}$ , etc.

**Lema 7.5.** *Sea  $\beta_c(G)$  cualquier base de ciclos de  $G$ . Entonces la sucesión*

$$1 \longrightarrow \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)} \xrightarrow{\partial_c} \hat{\mathcal{G}}^{A(G)} \xrightarrow{\partial} \hat{\mathcal{G}}^{V(G)} \longrightarrow 1$$

*es exacta.*

*Demostración.* Sea  $\beta_c(G) = \{C_1, \dots, C_r\}$ . Podemos suponer que  $\beta_c(G)$  es estándar, ya que  $\partial_c(\hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)})$  no depende de la base particular de ciclos elegida. Así, existen aristas  $a_1, \dots, a_r$  in  $A(G)$  tal que  $a_i$  es arista de  $C_j$  si y sólo si  $i = j$ . El punto clave es que, para cualquier  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)}$ , tenemos

$$(\partial_c(l))(a_i) = l(C_i) \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad (7.7)$$

por definición de  $\partial_c$ .

Todavía tenemos cuatro afirmaciones que probar:

1.  $\partial_c : \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)} \longrightarrow \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  es inyectiva.

Sea  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)}$  que satisface  $\partial_c(l) = 1$ . Por (7.7),  $1 = (\partial_c(l))(a_i) = l(C_i) \forall i = 1, \dots, r$ , por lo tanto,  $l = 1$ .

2.  $\partial \circ \partial_c = 1$ .

En efecto, sea  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)}$ . Podemos descomponer  $l$  como  $l_1 \cdot \dots \cdot l_r$  donde

$$l_i(C_j) = \begin{cases} l(C_i) & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ahora es suficiente probar que  $(\partial \circ \partial_c)l_i = 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, r$ . Bien, para toda  $a \in A(G)$ ,

$$(\partial_c(l_i))(a) = \begin{cases} l(C_i) & \text{si } a \text{ es una arista de } C_i \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como  $C_i$  es un ciclo de  $G$ , vemos que para cada vértice  $v \in V(G)$ , hay un número par (0 o 2) de aristas que son etiquetadas  $l(C_i)$  bajo  $l_i$ . El resto de las aristas quedan etiquetadas con 1. Así,  $(\partial \circ \partial_c(l_i))(v) = \prod_{v \in a} (\partial_c(l_i))(a) = 1 \quad \forall v \in V(G)$ , lo que concluye esta parte.

3. Si  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  cumple que  $\partial(l) = 1$ , tenemos que ver que existe una  $l' \in \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)}$  tal que  $\partial_c(l') = l$ . En efecto, vamos a definir  $l'$  por

$$l'(C_i) = l(a_i), \quad \forall i = 1, \dots, r$$

Afirmamos que  $\partial_c(l') = l$ . Haciendo  $h = l \cdot \partial_c(l')$ , queremos mostrar que  $h = 1$ . (Ver Ejemplo 3.5 Capítulo 3 sección 3.2) Como  $\hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  es un grupo donde cada elemento es autoinverso,  $\partial_c(l') = l$  es equivalente a probar que  $l \cdot \partial_c(l') = 1$ .

Primero,  $\partial_c(h) = \partial_c(l) \cdot \partial_c(\partial_c(l')) = 1$ . Ahora, por (7.7) y por definición de  $l'$ , tenemos que  $h(a_i) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, r$ . Por lo tanto,

$$Sop(h) \subset A(G) \setminus \{a_1, \dots, a_r\} \quad (7.8)$$

Sea ahora  $H = G[Sop(h)]$  la subgráfica inducida por aristas de  $G$  determinada por el  $Sop(h)$ . Entonces  $H$  es un bosque, porque cualquier ciclo en  $H$  sería un ciclo en  $G$  y así contendría una de las aristas  $a_1, \dots, a_r$ ; pero esto está prohibido por (7.8).

Ahora queremos probar que  $H$  es vacía. Si esto no fuera cierto,  $H$  contendría un vértice  $v_0$  de grado 1 en  $H$ . Así, todas las aristas en  $G$  que inciden en  $v_0$  serían etiquetadas con 1 por  $h$ , excepto únicamente una arista  $a$  con  $h(a) \neq 1$ . Se seguiría que  $\partial_c(h)(v_0) = h(a) \neq 1$ , lo que es una contradicción. Pues  $\partial_c(h) = 1$ .

Por lo tanto  $H$  es vacía y así tenemos que  $\partial_c(l') = l$ .

4.  $\partial : \hat{\mathcal{G}}^{A(G)} \longrightarrow \hat{\mathcal{G}}^{V(G)}$  es suprayectiva.

Por el primer Teorema de isomorfismos (ver [12]) tenemos:

$$Im(\partial) \cong \frac{\hat{\mathcal{G}}^{A(G)}}{Ker(\partial)}$$

entonces

$$|Im(\partial)| = \frac{|\hat{\mathcal{G}}^{A(G)}|}{|Ker(\partial)|} = \frac{4^q}{4^{q-p}} = 4^p.$$

□

Una primera consecuencia del Lema 7.5 es una caracterización de la imagen de  $U \circ \partial : \hat{\mathcal{G}}^{A(G)} \rightarrow M_{2n}$ , cuando  $G$  es conexa.

**Notación 7.4.** Denotaremos por  $M_{2n}^0$  el subgrupo de  $M_{2n}$  que consiste de todos los monomios bi-pares, es decir, las variables  $x$ 's y  $y$ 's que aparecen en un monomio aparecen una cantidad par en éste.

**Proposición 7.6.** Si  $G$  es conexa, entonces la imagen de  $U \circ \partial : \hat{\mathcal{G}}^{A(G)} \rightarrow M_{2n}$  es igual a  $M_{2n}^0$ .

*Demostración.* Primero notemos que la  $\text{Img}(U \circ \partial)$  esta contenida en  $M_{2n}^0$  por definición de  $U$  y de  $\partial$ . Para la otra contención, sea  $T$  un árbol generador de  $G$ . Como  $|A(T)| = p - 1$  se sigue que  $\hat{\mathcal{G}}^{A(T)}$  es un grupo de orden  $2^{2(p-1)}$ , por definición. Por otro lado la restricción

$$U \circ \partial|_{\hat{\mathcal{G}}^{A(T)}} : \hat{\mathcal{G}}^{A(T)} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}^{V(G)}$$

es inyectiva por el Lema 7.5. Como  $U : \hat{\mathcal{G}}^{V(G)} \rightarrow M_{2n}$  es también inyectiva, concluimos que  $U \circ \partial \left( \hat{\mathcal{G}}^{A(T)} \right)$  es un subgrupo de  $M_{2n}^0$  de orden  $2^{2(p-1)}$ . Pero esto es precisamente el orden de  $M_{2n}^0$ . Así,  $U \circ \partial \left( \hat{\mathcal{G}}^{A(G)} \right) = U \circ \partial \left( \hat{\mathcal{G}}^{A(T)} \right) = M_{2n}^0$ . □

Ahora demostraremos el principal resultado de este Capítulo.

**Teorema 7.7.** Sea  $G = (V(G), A(G))$  una gráfica simple finita, con conjunto de vértices  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , conjunto de aristas  $A(G)$  y base de ciclos  $\beta_c(G)$ . Entonces,

$$c(\rho_G, 1) = 3^q \cdot \sum_{l \in \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)}} \left( -\frac{1}{3} \right)^{|\text{Sop}(\partial_c(l))|},$$

donde  $\partial_c : \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  es la función definida en (7.6).

*Demostración.* Por la Proposición 7.4 y por el Lema 7.5 que muestra que  $\text{Ker}(\partial) = \partial_c(\hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)})$ , tenemos el aserto. □

## 7.1. Hipergráficas.

Lo siguiente es tratar el resultado del Teorema 7.7 y las funciones de partición en los modelos Spin para gráficas (utilizados también en la interacción con la mecánica estadística). De esta manera reformularemos el Teorema 7.7 en términos de *funciones de partición sobre hipergráficas*.

**Definición 7.6.** Una *hipergráfica*  $\mathfrak{H}$  es una pareja  $(V(\mathfrak{H}), A(\mathfrak{H}))$ , donde:

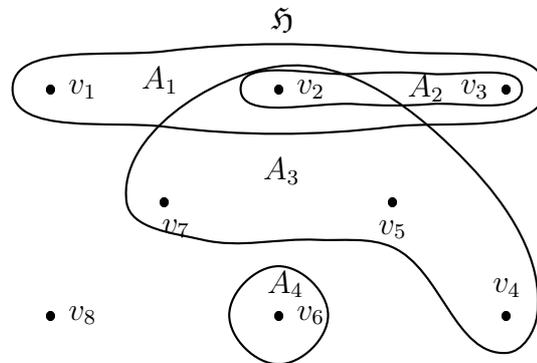
1.  $V(\mathfrak{H})$  es un conjunto finito de elementos llamados *vértices*;
2.  $A(\mathfrak{H})$  es un conjunto no vacío de subconjuntos  $\{A_1, \dots, A_q\}$  de  $V(\mathfrak{H})$  llamados *hiperaristas*.

Bajo la definición anterior notamos que las gráficas son un caso particular de hipergráficas.

**Ejemplo 7.2.** Una hipergráfica  $\mathfrak{H} = (V(\mathfrak{H}), A(\mathfrak{H}))$ , donde

$$V(\mathfrak{H}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \text{ y}$$

$$A(\mathfrak{H}) = \{A_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, A_2 = \{v_2, v_3\}, A_3 = \{v_2, v_4, v_5, v_7\}, A_4 = \{v_6\}\}$$



**Definición 7.7.** El *grado de un vértice*  $v$  en una hipergráfica  $\mathfrak{H}$  es  $\delta(v) = |\{A_i \mid v \in A_i\}|$ . De esta forma podemos ver del Ejemplo 7.2 que  $\delta(v_1) = 1$  y  $\delta(v_2) = 3$ .

**Definición 7.8.** El *tamaño de las hiperaristas o grado de las hiperaristas* en una hipergráfica  $\mathfrak{H}$  es  $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_q|$  y lo denotamos por  $\kappa(A_i)$  para cada  $i$ . Así del Ejemplo 7.2 tenemos que  $\kappa(A_1) = 3$  y  $\kappa(A_4) = 1$ .

### 7.1.1. Modelo spin para gráficas.

El siguiente material es tomado del libro “*Interaction models*” [30] y del Artículo “*Graph invariants related to statistical mechanical models: examples and problems*” [34]. Lo que se propone en esta sección es dar otra formulación del Teorema de Eliahou para gráficas planas, pero ahora utilizando modelos spin para hipergráficas.

Primero definimos un modelo spin para una gráfica, posteriormente el Modelo de Vértices para gráficas, que nos será de utilidad para comprender mejor el Modelo para hipergráficas.

**Definición 7.9.** *Un modelo spin para una gráfica  $G$  es una terna  $M_G = (X, \lambda, \mathcal{A})$ , donde  $X$  es un conjunto finito,  $\mathcal{A}$  es un Anillo conmutativo y*

$$\lambda : X \times X \longrightarrow \mathcal{A}$$

*es una función simétrica.*

Los elementos de  $X$  son llamados “*spins*” o “*colores*”, denotaremos por  $|X|$  la cardinalidad de  $X$  o simplemente por  $m$ .

**Definición 7.10.** *Un estado en una gráfica  $G = (V(G), A(G))$  para el modelo spin  $M_G$  es una función*

$$\nu : V(G) \longrightarrow X.$$

Denotaremos por  $N$  el conjunto de todos los estados en una gráfica para un modelo spin. También notemos que el conjunto de todos los estados en una gráfica para un modelo spin  $M_G$  es un conjunto finito de cardinalidad  $|N| = |X|^{|V(G)|} = m^p$ .

**Definición 7.11.** *Dada una gráfica  $G = (V(G), A(G))$  y un modelo spin  $M_G$ , definimos la función de partición  $F_G^{M_G}$  de la siguiente manera:*

$$F_G^{M_G} = \sum_{\nu \in N} \prod_{a=(v_i, v_j) \in A(G)} \lambda(\nu(v_i), \nu(v_j)) \in \mathcal{A}$$

**Ejemplo 7.3.** Sea  $X = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{C}$  y elegimos  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Definimos el modelo spin por  $\lambda(a, b) = \alpha \quad \forall a, b \in X$ . Entonces la función de partición para este modelo es,

$$F_G^{MG} = m^p \alpha^q.$$

Para cualquier gráfica  $G$ .

**Ejemplo 7.4.** Sea  $X = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{C}$  y elegimos  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

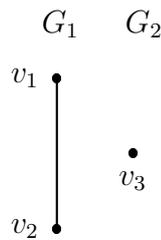
Definimos el modelo spin por  $\lambda(a, b) = \alpha$  si  $a = b \in X$  y  $\lambda(a, b) = 0$  en otro caso. Entonces la función de partición para este modelo es,

$$F_G^{MG} = m^{\omega(G)} \alpha^q.$$

Donde  $\omega(G)$  es la cantidad de componentes conexas de la gráfica  $G$ .

Veamos un ejemplo análogo y sencillo de como se calculó la función de partición para el modelo spin del ejemplo 7.4:

Sea  $G$  la siguiente gráfica y  $G_1$  y  $G_2$  sus componentes conexas:



Sea  $X = \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{C}$  y elegimos  $\alpha \in \mathbb{C}$  y definimos el modelo spin por  $\lambda(a, b) = \alpha$  si  $a = b \in X$  y  $\lambda(a, b) = 0$  en otro caso. Notemos que la cantidad de estados para este modelo son 8. Veámoslos:

$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	$\nu_4$	$\nu_5$	$\nu_6$	$\nu_7$	$\nu_8$
$v_1 \mapsto 1$	$v_1 \mapsto 2$	$v_1 \mapsto 2$	$v_1 \mapsto 1$	$v_1 \mapsto 1$	$v_1 \mapsto 2$	$v_1 \mapsto 2$	$v_1 \mapsto 1$
$v_2 \mapsto 1$	$v_2 \mapsto 2$						
$v_3 \mapsto 1$	$v_3 \mapsto 2$	$v_3 \mapsto 1$	$v_3 \mapsto 1$	$v_3 \mapsto 2$	$v_3 \mapsto 1$	$v_3 \mapsto 2$	$v_3 \mapsto 2$

Entonces la función de partición para este modelo es:

$$\begin{aligned}
 F_G^{MG} &= \sum_{\nu \in N} \prod_{a \in A(G)} \lambda(\nu(v_i), \nu(v_j)) \\
 &= \lambda(\nu_1(v_1), \nu_1(v_2)) + \lambda(\nu_2(v_1), \nu_2(v_2)) + \lambda(\nu_3(v_1), \nu_3(v_2)) + \\
 &+ \lambda(\nu_4(v_1), \nu_4(v_2)) + \lambda(\nu_5(v_1), \nu_5(v_2)) + \lambda(\nu_6(v_1), \nu_6(v_2)) + \\
 &+ \lambda(\nu_7(v_1), \nu_7(v_2)) + \lambda(\nu_8(v_1), \nu_8(v_2)) = \\
 &= \alpha + \alpha + 0 + 0 + \alpha + \alpha + 0 + 0 = 4\alpha = 2^2\alpha^1.
 \end{aligned}$$

Un primer paso antes de abordar el modelo spin para hipergáficas veamos otro modelo denominado **Modelo de vértices para gráficas**, este modelo nos permite entender mejor los elementos que componen el modelo spin para hipergráficas.

**Definición 7.12.** *Un modelo de vértices para una gráfica  $G$  es una terna  $N_G = (X, (\lambda_k)_{k \geq 0}, \mathcal{A})$ , donde  $X$  es un conjunto finito,  $\mathcal{A}$  es un Anillo conmutativo y una sucesión de funciones simétricas*

$$\lambda_k : X^k \longrightarrow \mathcal{A}$$

(se entiende que  $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathcal{A}$ ).

**Definición 7.13.** *Un estado en una gráfica  $G = (V(G), A(G))$  para el modelo de vértices  $N_G$  es una función*

$$\sigma : A(G) \longrightarrow X.$$

**Definición 7.14.** *Dada una gráfica  $G = (V(G), A(G))$  y un modelo de vértices  $N_G$ , definimos la **función de partición**  $F_G^{NG}$  de la siguiente manera:*

$$F_G^{NG} = \sum_{\sigma: A(G) \rightarrow X} \prod_{v \in V(G)} \lambda_{\delta(v)}(\sigma(a_1^v), \dots, \nu(a_{\delta(v)}^v)) \in \mathcal{A},$$

donde  $\{a_1^v, \dots, a_{\delta(v)}^v\}$  son las aristas de  $G$  que inciden en el vértice  $v \in V(G)$ .

### 7.1.2. Modelo spin para hipergráficas.

Ahora considerando las definiciones de hipergráficas y las definiciones antes mencionadas de Modelos Spin y de vértices para gráficas podemos formular lo siguiente:

**Definición 7.15.** Un *modelo spin* para una hipergráfica  $\mathfrak{H}$  es una terna  $M_{\mathfrak{H}} = (X, (\lambda_k)_{k \geq 0}, \mathcal{A})$ , donde  $X$  es un conjunto finito,  $\mathcal{A}$  es un Anillo conmutativo y

$$\lambda_k : X^k \longrightarrow \mathcal{A}$$

es una función simétrica para toda  $k \geq 0$ .

**Definición 7.16.** Un *estado* en una hipergráfica  $\mathfrak{H} = (V(\mathfrak{H}), A(\mathfrak{H}))$  para el modelo spin  $M_{\mathfrak{H}}$  es una función

$$\nu : V(\mathfrak{H}) \longrightarrow X.$$

**Definición 7.17.** Dada una hipergráfica  $\mathfrak{H} = (V(\mathfrak{H}), A(\mathfrak{H}))$  y un modelo spin  $M_{\mathfrak{H}}$ , definimos la *función de partición*  $F_{\mathfrak{H}}^{M_{\mathfrak{H}}}$  de la siguiente manera:

$$F_{\mathfrak{H}}^{M_{\mathfrak{H}}} = \sum_{\nu: V(\mathfrak{H}) \rightarrow X} \prod_{A \in A(\mathfrak{H})} \lambda_{\kappa(A)}(\nu(x_1^A), \dots, \nu(x_{\kappa(A)}^A)) \in \mathcal{A}$$

donde  $\{x_1^A, \dots, x_{\kappa(A)}^A\}$  son los vértices de  $\mathfrak{H}$  que pertenecen a la hiperarista  $A$  y  $\kappa(A)$  es el grado de la hiperarista  $A$ .

Nuestra reformulación del Teorema 7.7 involucra la construcción de la siguiente hipergráfica y el modelo spin asociado.

Sea  $G = (V(G), A(G))$  una gráfica simple finita, asociamos a  $G$  una hipergráfica  $\mathfrak{H}^* = (V(\mathfrak{H}^*), A(\mathfrak{H}^*))$  de la siguiente manera:

1.  $V(\mathfrak{H})^* = \beta_c(G)$  es una base de ciclos para  $G$ .
2.  $A(\mathfrak{H})^* = \{\beta_c(G)^a\}$  el cual como en (7.6)  $\beta_c(G)^a$  denota el conjunto de todos los  $C \in \beta_c(G)$  que contienen a  $a$  como arista.

Denotaremos el modelo spin por  $\mathcal{N} = (\hat{\mathcal{G}}, \{w_k\}_k, \mathbb{Q})$ , donde  $\hat{\mathcal{G}} = \{1, x, y, xy\}$  y  $\{w_k\}_k$  estan definidas de la siguiente manera:

$$w_k : \hat{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$(g_1, \dots, g_k) \longmapsto \begin{cases} 3 & \text{si } \prod g_i = 1 \\ -1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Dada una gráfica simple finita  $G = (V(G), A(G))$ , tenemos que la función de partición de la hipergráfica  $\mathfrak{H}^* = (V(\mathfrak{H})^*, A(\mathfrak{H})^*)$  y el modelo spin  $\mathcal{N} = (\hat{\mathcal{G}}, \{w_k\}_k, \mathbb{Q})$  nos permite plantear el Teorema 7.7 de la siguiente forma:

$$F_{\mathfrak{H}^*}^{\mathcal{N}} = 4^{q-p} \cdot P_4(G) = c(\rho_G, 1). \quad (7.9)$$

Si  $G$  es plana, podemos elegir a  $\beta_c(G)$  como el conjunto de las fronteras delimitadas por las caras de  $G$ . La hipergráfica asociada  $\mathfrak{H}^* = (V(\mathfrak{H})^*, A(\mathfrak{H})^*)$  será la gráfica dual de  $G$  con uno de sus vértices removido, es decir, el vértice correspondiente a la cara exterior de  $G$ . Bajo este contexto de planaridad, la fórmula (7.9) toma la forma

$$P_4(G) = 4^{p-q} F_{\mathfrak{H}^*}^{\mathcal{N}}.$$

## Capítulo 8

# Cálculo de $\rho_G$ para algunas gráficas.

En este Capítulo dedicamos nuestra atención en calcular  $\rho_G$  para árboles, ciclos y para ciertas triangulaciones del plano. En este Capítulo utilizamos la representación del polinomio de Laurent, el lector puede consultar la sección 3.3.1 del Capítulo 3 para su mejor comprensión.

Será necesario para este Capítulo introducir la siguiente notación auxiliar:

**Definición 8.1.** *Sea  $G$  una gráfica y sea  $\rho_G$  su polinomio asociado en  $A_{2n}$ . El coeficiente de generación de series  $\Lambda_G(t)$  de  $G$  (o también de  $\rho_G$ ), es el  $t$ -ésimo polinomio de Laurent*

$$\Lambda_G(t) = \sum_{u \in M_{2n}} t^{c(\rho_G, u)} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

Recordemos que  $c(\rho_G, u)$  denota el coeficiente del monomio  $u$  en  $\rho_G$  y que  $c(\rho_G, u)$  es un entero para todo  $u \in M_{2n}$ .

El propósito de  $\Lambda_G(t)$  es recoger información de los coeficientes que aparecen en  $\rho_G$  y su multiplicidad. Sería conveniente saber cómo construir directamente  $\Lambda_G(t)$ , sin tener que conocer  $\rho_G$  de antemano, sin embargo, esto no es posible.

Notemos que por definición, tenemos nuevamente la propiedad básica de  $\rho_G$ :

$$G \text{ es 4-coloreable si y sólo si } \Lambda_G(t) \neq 0$$

Primero mencionamos un ejemplo cuyo cálculo no requiere más que un momento de observación:

**Ejemplo 8.1.** Si  $G$  es una grafica cuyo conjunto vértices es  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y cuyo conjunto de aristas es  $A(G) = \emptyset$  entonces  $\rho_G = 1$  y por lo tanto

$$\Lambda_G(t) = t^1 = t.$$

Ahora consideremos unos ejemplos un poco más elaborados pero sencillos:

**Ejemplo 8.2.** Sea  $G = K_2$ , es decir, la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(K_2) = \{v_1, v_2\}$  y conjunto de aristas  $A(K_2) = \{(v_1, v_2)\}$ . Entonces

$$\rho_{K_2} = 3 - x_1x_2 - y_1y_2 - x_1x_2y_1y_2,$$

por lo que

$$\Lambda_G(t) = \sum_{u \in M_{2n}} t^{c(\rho_{K_2}, u)} = t^3 + t^{-1} + t^{-1} + t^{-1} = t^3 + 3t^{-1}.$$

**Ejemplo 8.3.** Sea  $G$  la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$  y conjunto de aristas  $A(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \rho_G &= (3 - x_1x_2 - y_1y_2 - x_1x_2y_1y_2)(3 - x_2x_3 - y_2y_3 - x_2x_3y_2y_3) = \\ &= 9 - 3x_3x_2 - 3y_3y_2 - 3x_3x_2y_3y_2 - 3x_1x_2 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2y_3y_2 + \\ &+ x_1x_2^2x_3y_3y_2 - 3y_1y_2 + y_1y_2x_3x_2 + y_1y_2^2y_3 + y_1y_2^2x_3x_2y_3 - 3x_1x_2y_1y_2 + \\ &+ x_1x_2^2y_1y_2x_3 + x_1x_2y_1y_2^2y_3 + x_1x_2^2y_1y_2^2x_3y_3 = \\ &= 9 - 3x_1x_2 - 3x_2x_3 - 3y_1y_2 - 3y_2y_3 - 3x_1x_2y_1y_2 - 3x_2x_3y_2y_3 + \\ &+ x_1x_3 + y_1y_3 + x_1x_2y_2y_3 + x_1x_2y_1y_3 + x_1x_3y_1y_2 + x_1x_3y_2y_3 + x_1x_3y_1y_3 + \\ &+ x_2x_3y_1y_2 + x_2x_3y_1y_3. \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \Lambda_G(t) &= \sum_{u \in M_{2n}} t^{c(\rho_G, u)} \\
 &= t^9 + t^{-3} + t^{-3} + t^{-3} + t^{-3} + t^{-3} + t^{-3} + \\
 &\quad + t + t + t + t + t + t + t + t + t = \\
 &= t^9 + 6t^{-3} + 9t.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 8.4.** Sea  $G = K_3$ , es decir, la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(K_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$  y conjunto de aristas  $A(K_3) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}$ . Entonces

$$\rho_{K_3} = (3 - x_1x_2 - y_1y_2 - x_1x_2y_1y_2)(3 - x_1x_3 - y_1y_3 - x_1x_3y_1y_3)(3 - x_3x_2 - y_3y_2 - x_3x_2y_3y_2).$$

De donde, podemos calcular sus coeficientes de dos formas, la primera por análisis y aplicación de los resultados vistos:

$$\begin{aligned}
 c(\rho_G, 1) &= 24 \\
 c(\rho_G, u) = -8 &\iff u \in \{x_i x_j, y_i y_j, x_i x_j y_i y_j\}_{1 \leq i < j \leq 3} \\
 c(\rho_G, u) = 8 &\iff u \in \{x_i x_j y_k y_l\}_{\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3\}}
 \end{aligned}$$

Esto por que  $c(\rho_G, 1) = 4^{q-p} \cdot P_4(G) = 4^{3-3} \cdot 24 = 24$  por el Teorema 5.2 y el Ejemplo 5.1, para los monomios  $\{x_i x_j, y_i y_j, x_i x_j y_i y_j\}_{1 \leq i < j \leq 3}$  y  $\{x_i x_j y_k y_l\}_{\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3\}}$  la Proposición 5.5, el Lema 5.3 que muestra la simetría de  $\rho_G$ .

Por lo tanto

$$\Lambda_{K_3}(t) = t^{24} + 9t^{-8} + 6t^8.$$

La segunda forma es por "fuerza bruta", es decir, desarrollando  $\rho_{K_3}$ :

$$\begin{aligned}
&= 27 + 3x_1x_3^2x_2 + 3y_1y_2^2y_3 - x_1^2x_2^2x_3^2 + 3x_1^2x_2x_3 - 9x_1x_3y_1y_3 + \\
&+ 3x_1x_2^2x_3 + 3x_1x_3^2x_2y_3y_2 + 3y_1y_2^2x_3x_2y_3 + 3x_1x_3^2y_1y_3x_2 - 9y_3y_2 - \\
&- 9x_3x_2 - 9x_1x_3 - 9x_3x_2y_3y_2 + 3x_1x_2^2y_1y_2x_3 + 3x_1x_2y_1y_2^2y_3 + \\
&+ 3x_1x_2^2y_1y_2^2x_3y_3 - x_1^2x_2^2x_3^2y_1y_3 - x_1^2x_2x_3y_1y_3^2y_2 - x_1^2x_2^2x_3^2y_1y_3^2y_2 - \\
&- y_1y_2x_1x_3^2x_2 - y_1y_2^2x_1x_3y_3 - y_1y_2^2x_1x_3^2x_2y_3 - y_1^2y_2x_1x_3^2y_3x_2 + \\
&+ 3x_1^2x_2x_3y_1y_3 + 3y_1^2y_2x_1x_3y_3 + 3x_1^2x_2y_1y_2x_3 + 3x_1^2x_2y_1^2y_2x_3y_3 + \\
&+ 3x_1x_3y_1y_3^2y_2 + 3x_1x_3^2y_1y_3^2x_2y_2 + 3x_1x_2^2x_3y_3y_2 - x_1^2x_2x_3y_3y_2 - \\
&- x_1^2x_2^2x_3^2y_3y_2 - y_1^2y_2^2x_1x_3y_3^2 - y_1^2y_2^2x_1x_3^2y_3^2x_2 - x_1^2x_2^2y_1y_2x_3^2 - \\
&- x_1^2x_2y_1y_2^2x_3y_3 - x_1^2x_2^2y_1y_2^2x_3^2y_3 - x_1^2x_2^2y_1^2y_2x_3^2y_3 - x_1^2x_2y_1^2y_2^2x_3y_3^2 - \\
&- x_1^2x_2^2y_1^2y_2^2x_3^2y_3^2 + 3x_1x_2y_1y_3 - 9x_1x_2 - 9y_1y_2 - 9x_1x_2y_1y_2 + \\
&+ 3y_1y_3^2x_3x_2y_2 - x_1x_2^2y_1y_3x_3 - x_1x_2y_1y_3^2y_2 - x_1x_2^2y_1y_3^2x_3y_2 - \\
&- y_1^2y_2y_3x_3x_2 - y_1^2y_2^2y_3^2x_3x_2 - x_1x_2^2y_1^2y_2y_3x_3 - x_1x_2y_1^2y_2^2y_3^2 - \\
&- x_1x_2^2y_1^2y_2^2y_3^2x_3 + 3y_1y_2x_1x_3 + 3y_1y_2x_3x_2 + 3x_1x_3y_3y_2 + 3x_1x_2y_3y_2 - \\
&- 9y_1y_3 - y_1^2y_2^2y_3^2 + 3y_1y_3^2y_2 + 3y_1^2y_2y_3 + 3x_1x_2y_1^2y_2y_3 + 3y_1y_3x_3x_2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 27 + 3x_1x_2 + 3y_1y_3 - 1 + 3x_2x_3 - 9x_1x_3y_1y_3 + 3x_1x_3 + 3x_1x_2y_3y_2 + \\
&+ 3y_1x_3x_2y_3 + 3x_1y_1y_3x_2 - 9y_3y_2 - 9x_3x_2 - 9x_1x_3 - 9x_3x_2y_3y_2 + \\
&+ 3x_1x_2y_1y_3 + 3x_1y_1x_3y_3 - y_1y_3 - x_2x_3y_1y_2 - y_1y_2 - y_1y_2x_1x_2 - y_1x_1x_3y_3 - \\
&- y_1x_1x_2y_3 - y_2x_1y_3x_2 + 3x_2x_3y_1y_3 + 3y_2x_1x_3y_3 + 3x_2y_1y_2x_3 - x_3x_2 + \\
&+ 3x_1x_3y_1y_2 + 3x_1y_1x_2y_2 + 3x_1x_3y_3y_2 - x_2x_3y_3y_2 - y_3y_2 - x_1x_3 - x_1x_2 - \\
&- y_1y_2 - x_2y_1x_3y_3 - y_1y_3 - y_2y_3 - x_2x_3 - 1 + 3x_1x_2y_1y_3 - 9x_1x_2 - 9y_1y_2 - \\
&- 9x_1x_2y_1y_2 + 3y_1x_3x_2y_2 - x_1y_1y_3x_3 - x_1x_2y_1y_2 - x_1y_1x_3y_2 - y_2y_3x_3x_2 - \\
&- x_1y_2y_3x_3 - x_1x_2 - x_1x_3 + 3y_1y_2x_1x_3 + 3y_1y_2x_3x_2 + 3x_1x_3y_3y_2 - \\
&- 9y_1y_3 - 1 + 3y_1y_2 + 3y_2y_3 + 3x_1x_2y_2y_3 + 3y_1y_3x_3x_2 + 3x_1y_1y_2x_3 + \\
&+ 3x_2y_2x_3y_3 + 3x_1x_2y_3y_2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 27 - 1 - 1 - 1 - 8x_1x_2 - 8x_2x_3 - 8x_1x_3 - 8y_1y_2 - 8y_2y_3 - 8y_1y_3 - \\
&- 8x_1x_2y_1y_2 + 8x_1x_2y_2y_3 + 8x_1x_2y_1y_3 + 8x_2x_3y_1y_2 - 8x_2x_3y_2y_3 + \\
&+ 8x_2x_3y_1y_3 + 8x_1x_3y_1y_2 + 8x_1x_3y_2y_3 - 8x_1x_3y_1y_3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Lambda_{K_3}(t) = t^{24} + 9t^{-8} + 6t^8.$$

Ahora consideremos ejemplos en términos más generales:

**Ejemplo 8.5.** Si  $G$  es un árbol con  $p$  vértices, entonces

$$\Lambda_G(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} 3^k t^{(-1)^k 3^{p-1-k}}.$$

*Demostración.* Sea  $G$  un árbol con  $p$  vértices, entonces por el Teorema 2.7 tenemos que  $|A(G)| = q = p - 1$ . Como  $G$  no tiene ciclos, la sucesión exacta del Lema 7.5 se convierte en el siguiente caso:

$$\hat{\mathcal{G}}^{A(G)} \xrightarrow{\partial} \hat{\mathcal{G}}^{V(G)} \xrightarrow{U} M_{2n}.$$

Esto significa que si un monomio  $u \in M_{2n}$  es representable por alguna  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$ , es decir, si  $u = U(\partial)(l)$  (ver la definición 7.3) entonces  $l$  es única. Por lo tanto, por la Proposición 7.3, el coeficiente de  $u = U(\partial)(l)$  en  $\rho_G$  es igual a  $3^{p-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^{|Sop(l)|}$ .

Ahora,  $Sop(l)$  es un subconjunto arbitrario de  $A(G)$ . Si fijamos  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ , entonces hay exactamente  $\binom{p-1}{k} 3^k$  elementos  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  con  $|Sop(l)| = k$ . En efecto, hay  $\binom{p-1}{k}$  elecciones para  $Sop(l)$  y para cualquier arista  $a \in A(G)$  y  $l(a) \in Sop(l)$  puede ser  $x, y$  o  $xy$ . Por lo anterior, tenemos que si  $G$  es un árbol con  $p$  vértices, entonces:

$$\Lambda_G(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} 3^k t^{(-1)^k 3^{p-1-k}}.$$

□

Con este ejemplo y de manera práctica calculemos el coeficiente de generación de serie del siguiente árbol  $T$ .

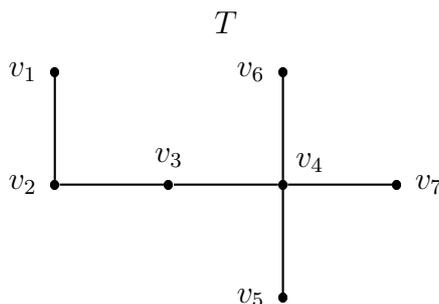


Figura 8.1: Un árbol  $T$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda_T(t) &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 3^k t^{(-1)^k 3^{6-k}} \\ &= t^{729} + 18t^{-243} + 135t^{81} + 540t^{-27} + 1215t^9 + 1458t^{-3} + 729t. \end{aligned}$$

Para el siguiente ejemplo es necesario definir ciertos elementos de combinatoria y de la geometría algebraica.

**Definición 8.2.** *El coeficiente multinomial es*

$$\begin{aligned} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} &= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} = \binom{k_1}{k_1} \binom{k_1 + k_2}{k_2} \dots \binom{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{k_m} \\ &= \prod_{i=1}^m \binom{\sum_{j=1}^i k_j}{k_i} \end{aligned}$$

y tal que  $\sum_{i=1}^m k_i = n$ .

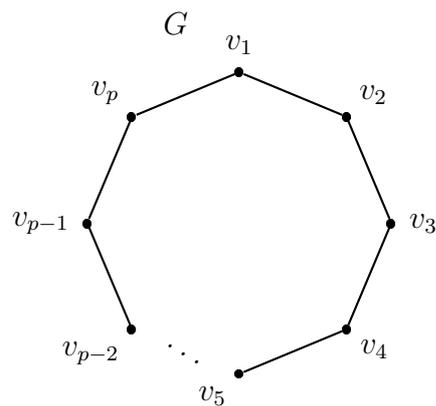
El coeficiente multinomial tiene una interpretación en Teoría de combinaciones de forma directa, como el número de formas de depositar  $n$  distintos objetos en  $m$  cajas, con  $k_1$  objetos en la primer caja,  $k_2$  objetos en la segunda caja, y así sucesivamente. Además, el coeficiente multinomial es también el número de maneras distintas de permutar un multiconjunto<sup>1</sup> de  $n$  elementos, y  $k_i$  son las multiplicidades de cada uno de los elementos distintos. Por ejemplo, el número de distintas permutaciones de la palabra MISSISSIPPI, en la cual hay 1 M, 4 S's, 4 I's y 2 P's es

$$\binom{11}{1, 4, 4, 2} = \frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650.$$

Otro concepto necesario para el desarrollo del siguiente ejemplo nos lo brinda la Geometría algebraica y es el siguiente:

**Definición 8.3.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Una **fibra** es la imagen inversa de un conjunto unitario, es decir, la fibra de  $y$  es  $f^{-1}[\{y\}] = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ .

**Ejemplo 8.6.** Si  $G$  es un ciclo con  $p$  vértices,



<sup>1</sup>Un **multiconjunto** (también llamado bolsa o bag, en el original) es un conjunto en el que cada miembro del mismo tiene asociada una multiplicidad (un número natural), indicando cuántas veces el elemento es miembro del conjunto. Por ejemplo, en el multiconjunto  $\{a, a, b, b, b, c\}$ , las multiplicidades de los miembros  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son 2, 3 y 1 respectivamente.

*Entonces*

$$\Lambda_G(t) = \sum_{\substack{0 \leq n_1, n_2, n_3 \leq p-1, \\ n_1+n_2+n_3 \leq p-1}} \binom{p-1}{n_1, n_2, n_3} t^{3^p \left( (-\frac{1}{3})^{p-1-n_1} + (-\frac{1}{3})^{p-n_2} + (-\frac{1}{3})^{p-n_3} + (-\frac{1}{3})^{1+n_1+n_2+n_3} \right)}.$$

Donde para  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$ ;  $n_1, n_2, n_3, n_4$  son las cardinalidades de las fibras  $l^{-1}[\{1\}]$ ,  $l^{-1}[\{x\}]$ ,  $l^{-1}[\{y\}]$ ,  $l^{-1}[\{xy\}]$ , respectivamente.

*Demostración.* Sea  $G$  un ciclo con  $p$  vértices, entonces tenemos que su longitud  $\ell(G) = p = q = |A(G)|$ . En este caso,  $G$  tiene un único ciclo no trivial,  $G$  mismo. Podemos tomar  $\beta_c(G) = \{G\}$  como una base de ciclos. Notemos que  $\hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)}$  tiene exactamente 4 elementos, es decir,  $1, g_x, g_y$  y  $g_{xy}$ , donde  $g_x(G) = x$ ,  $g_y(G) = y$  y  $g_{xy}(G) = xy$ . Así, cualquier monomio representable  $u \in M_{2n}$  puede ser representado por exactamente cuatro elementos en  $\hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  (por el Lema 7.5).

Consideremos una  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  fija. Diremos que  $l$  es del **tipo**  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$ , sí la cardinalidad de las fibras  $l^{-1}[\{1\}]$ ,  $l^{-1}[\{x\}]$ ,  $l^{-1}[\{y\}]$ ,  $l^{-1}[\{xy\}]$ , son  $n_1, n_2, n_3, n_4$  respectivamente. Con esta notación, tenemos que  $|Sop(l)| = n_2 + n_3 + n_4 = q - n_1 = p - n_1$ . Por lo tanto, los coeficientes de los sumandos  $u = U(\partial(l))$  en la expansión de  $\rho_G$  dada por la Proposición 7.3, es  $3^p \left(-\frac{1}{3}\right)^{p-n_1}$ .

Las otras tres representaciones de  $u = U(\partial(l))$ , es decir,  $l \cdot \partial(g_x)$ ,  $l \cdot \partial(g_y)$  y  $l \cdot \partial(g_{xy})$ , son del tipo  $(n_2, n_3, n_4, n_1)$ ,  $(n_3, n_4, n_1, n_2)$  y  $(n_4, n_1, n_2, n_3)$  respectivamente. Por lo tanto, concluimos que, sí  $u = U(\partial(l))$  y si  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  es del tipo  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$ , entonces

$$c(\rho_G, u) = 3^p \left( \left(-\frac{1}{3}\right)^{p-n_1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{p-n_2} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{p-n_3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n_1+n_2+n_3} \right).$$

Ahora, entre los cuatro representantes de  $u = U(\partial(l))$  en  $\hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$ , hay un único que valuado en la arista  $a = (v_1, v_2)$  es igual a 1. El resto de las  $p - 1$  aristas pueden ser asignadas libremente. Por lo tanto, el número de  $l \in \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  con  $l(a) = 1$ , que manda  $n_1$  de las restantes aristas a 1,  $n_2$  a  $x$ ,  $n_3$  a  $y$  y

$p - n_1 - n_2 - n_3$  a  $xy$  es igual al coeficiente multinomial  $\binom{p-1}{n_1, n_2, n_3}$ ; cualquiera de esas  $l$  es del tipo  $(n_1 + 1, n_2, n_3, p - n_1 - n_2 - n_3)$ .

Por lo anterior, concluimos que el coeficiente generalizado de la serie de un ciclo con  $p$  vértices, es igual a:

$$\Lambda_G(t) = \sum_{\substack{0 \leq n_1, n_2, n_3 \leq p-1, \\ n_1 + n_2 + n_3 \leq p-1}} \binom{p-1}{n_1, n_2, n_3} t^{3^p \left( \left(-\frac{1}{3}\right)^{p-1-n_1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{p-n_2} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{p-n_3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{1+n_1+n_2+n_3} \right)}.$$

□

De manera más general en la siguiente Proposición definimos lo que es una subdivisión de triángulos para una gráfica  $G$ .

**Definición 8.4.** Dada una gráfica  $G = (V(G), A(G))$  que contiene triángulos (ciclos de longitud 3 o la completa de tres vértices), denotaremos por  $\hat{G}$  cualquier gráfica obtenida de  $G$  por una subdivisión de uno de sus triángulos, es decir:

- i)  $V(\hat{G}) = V(G) \cup \{v\}$  con  $v \notin V(G)$  y
- ii)  $A(\hat{G}) = A(G) \cup \{(v, a), (v, b), (v, c) \mid (a, b, c, a) \text{ es un triángulo de } G\}$ ,

entonces  $|V(\hat{G})| = |V(G)| + 1$  y  $|A(\hat{G})| = |A(G)| + 3$ . En la Figura 8.2 se muestra la subdivisión de un triángulo.

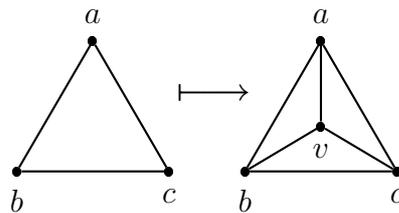


Figura 8.2: Subdivisión de un triángulo.

**Proposición 8.1.** *Si  $\hat{G}$  es obtenida de  $G$  por la subdivisión de uno de sus triángulos, entonces*

$$\Lambda_{\hat{G}}(t) = 4 \cdot \Lambda_G(t^{16}).$$

Más precisamente, si  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , los vértices de la subdivisión del triángulo son  $\{v_{1'}, v_{2'}, v_{3'}\}$  y si el nuevo vértice es denotado por  $v_0$ , entonces

$$\rho_{\hat{G}} = 16(1 + x_0x_1x_2x_3)(1 + y_0y_1y_2y_3)\rho_G. \quad (8.1)$$

*Demostración.* Denotemos por  $\hat{M}$  el grupo multiplicativo de monomios libres de cuadrados en  $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n$ , y por  $M$  el subgrupo de monomios que no involucran las variables  $x_0, y_0$ .

Consideremos la función  $\phi : \hat{M} \rightarrow M$  tal que  $\phi(x_0) = x_1x_2x_3$ ,  $\phi(y_0) = y_1y_2y_3$  y deja todas las demás variables fijas. Primero supongamos que la fórmula (8.1) es cierta, entonces tenemos que

$$c(\rho_{\hat{G}}, u) = 16 \cdot c(\rho_G, \phi(u)).$$

para toda  $u \in \hat{M}$ . Como todas las fibras de  $\phi$  contienen exactamente 4 elementos, tenemos entonces que

$$\Lambda_{\hat{G}}(t) = 4 \cdot \Lambda_G(t^{16}).$$

Ahora probemos la fórmula (8.1). Notemos que es suficiente considerar el caso donde  $G$  es el triángulo cuyo conjunto de vértices es  $\{v_1, v_2, v_3\}$ . (Por que en el caso general, todas las demás aristas contribuyen con el mismo factor para  $\rho_G$  y  $\rho_{\hat{G}}$ ).

Sea  $\rho = (1 + x_0x_1x_2x_3)(1 + y_0y_1y_2y_3)$ . Además, denotemos por  $\mathbf{P}' \subseteq \Gamma^4$ , ( $\Gamma = \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$ ) el conjunto de las 4-coloraciones propias de  $\hat{G}$  y por  $\chi_{\mathbf{P}'}$  su función característica. Probaremos que  $\rho \cdot \rho_G$  es un múltiplo escalar no cero de  $\chi_{\mathbf{P}'}$ .

1. Si  $z = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{P}'$ , entonces todos los cuatro colores están presentes y  $\{z_0, z_1, z_2, z_3\} = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$ , así  $\rho = 4$ , por definición de  $\rho$ . Ahora  $(z_1, z_2, z_3)$  es una 4-coloración propia de  $G$ , así  $\rho_G(z) = 4^3$  por el Lema 5.1. Por lo tanto  $\rho \cdot \rho_G = 4^4$  para toda  $z \in \mathbf{P}'$ .

2. Si  $z = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \Gamma \setminus \mathbf{P}'$  debemos probar que  $\rho \cdot \rho_G = 0$ . Si  $z_1, z_2, z_3$  no son todos distintos, entonces  $\rho_G(z) = 0$ . Supongamos que  $z_1, z_2, z_3$  son distintos y  $z_0 = z_1$ , sin pérdida de generalidad por simetría. Si escribimos  $z_i = (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$  para  $i = 0, 1, 2, 3$  entonces tenemos

$$\begin{aligned} \rho(z) &= (1 + \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) (1 + \beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3) \\ &= (1 + \alpha_2 \alpha_3) (1 + \beta_2 \beta_3) && \text{ya que } z_0 = z_1 \\ &= 0 && \text{ya que } z_2 \neq z_3 \end{aligned}$$

Por lo anterior, concluimos que  $\rho \cdot \rho_G = 4^4 \chi_{\mathbf{P}'}$ . Por otro lado, sabemos por el Lema 5.1 que  $\rho_{\hat{G}} = 4^6 \chi_{\mathbf{P}'}$ . Por lo tanto,  $\rho_{\hat{G}} = 4^2 \rho \cdot \rho_G$ . □

**Corolario 8.2.** *Sea  $G$  una gráfica plana con  $p$  vértices, obtenida de un triángulo por sucesivas subdivisiones del triángulo. Entonces*

$$\Lambda_G(t) = 4^{p-3} \left( t^{24 \cdot 16^{p-3}} + 9 t^{-8 \cdot 16^{p-3}} + 6 t^{8 \cdot 16^{p-3}} \right).$$

*Demostración.* Si  $K_3$  denota el triángulo, tenemos ya visto que  $\Lambda_{K_3}(t) = t^{24} + 9t^{-8} + 6t^8$ , del Ejemplo 8.4. Para el caso general, comencemos con  $K_3$  y entonces aplicando  $p - 3$  veces la Proposición 8.1 anterior tenemos el resultado. □

Veamos el siguiente ejemplo:

Sea  $G$  la siguiente gráfica obtenida de  $G_\Delta$  por una sucesivas subdivisiones del triángulo,

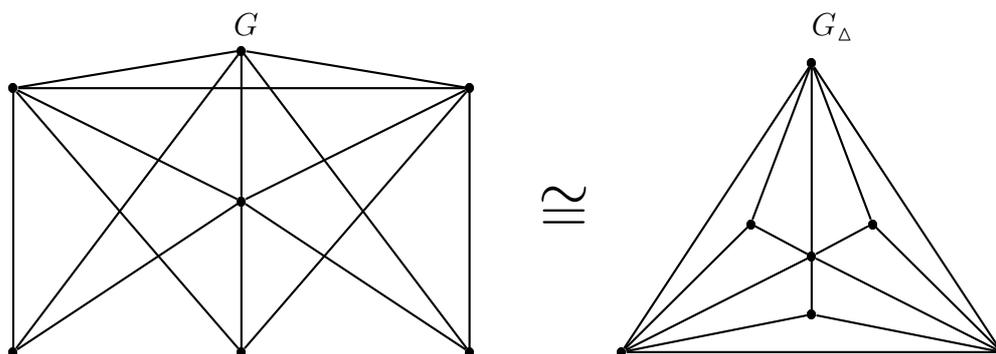


Figura 8.3:  $G$  obtenida por subdivisión del triángulo.

Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda_G(t) &= 4^{7-3} \left( t^{24 \cdot 16^{7-3}} + 9t^{-8 \cdot 16^{7-3}} + 6t^{8 \cdot 16^{7-3}} \right) \\ &= 256 t^{1572864} + 1024 t^{-524288} + 1536 t^{524288}. \end{aligned}$$

# Capítulo 9

## Conclusiones.

A lo largo de este trabajo se desarrolló una equivalencia al Teorema de los Cuatro Colores:

**Cualquier gráfica plana es cuatro coloreable si y sólo si  $\rho_G \neq 0$ .**

La cual obtuvimos a partir de los siguientes resultados:

*Cualquier mapa es cuatro coloreable si y sólo si cualquier gráfica plana es cuatro coloreable.*

y

*$G$  es 4-coloreable si y sólo si  $\rho_G \neq 0$ .*

Esta nueva equivalencia nos permite abordar el Teorema de los Cuatro Colores desde una perspectiva algebraica, principalmente con un desarrollo de Teoría de grupos, anillos de polinomios y espacios vectoriales.

Aunque en este trabajo no se demuestra el Teorema de los Cuatro Colores, se brinda una herramienta algebraica más para el estudio de este Teorema, el elemento  $\rho_G$ . Sin embargo este elemento sigue conservando una gran complejidad dentro de su desarrollo y trabajo, por lo que la mayor parte del trabajo se centro en el estudio de su término independiente  $\mathbf{c}(\rho_G, \mathbf{1})$ . Logrando en este trabajo dos importantes maneras de estudiar el término independiente de  $\rho_G$ :

1. En cualquier gráfica simple finita  $G = (V(G), A(G))$ ,

$$c(\rho_G, 1) = \sum_{A(H) \subset A(G)} (-1)^{q'} \cdot 4^{(q-q') + \mathcal{B}_1(G[A(H)])}.$$

Donde,  $A(H) \subset A(G)$ ,  $|A(H)| = q'$  y  $G[A(H)]$  denota la subgráfica inducida por  $A(H)$  y  $\mathcal{B}_1(G[A(H)])$  es el primer número de Betti para la subgráfica inducida  $G[A(H)]$ .

Resultado que nos permite conocer a  $c(\rho_G, 1)$ , a partir de sus subgráficas inducidas por aristas.

2. Si  $G = (V(G), A(G))$  es una gráfica simple finita, con conjunto de vértices  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , conjunto de aristas  $A(G)$  y base de ciclos  $\beta_c(G)$ . Entonces,

$$c(\rho_G, 1) = 3^q \cdot \sum_{l \in \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)}} \left(-\frac{1}{3}\right)^{|\text{Sop}(\partial_c(l))|},$$

donde  $\partial_c : \hat{\mathcal{G}}^{\beta_c(G)} \longrightarrow \hat{\mathcal{G}}^{A(G)}$  es la función definida en (7.6).

Otro importante concepto introducido fue el de *hipergráfica* y *modelo spin para Gráficas e Hipergráficas* que nos permitió plantear el Teorema de los Cuatro Colores por medio de *funciones de partición para hipergráficas* en gráficas planas y en particular dar otra forma al polinomio cromático de las cuatro coloraciones de una gráfica:

$$P_4(G) = 4^{p-q} F_{\mathfrak{H}^*}^{\mathcal{N}}.$$

Por último se hizo uso de un elemento de apoyo denominado *coeficiente de generación de series*  $\Lambda_G(t)$  de  $G$  para el cálculo de  $\rho_G$  en ciertas gráficas como: *árboles, ciclos y subdivisiones de triángulos en gráficas*.

De esta forma no únicamente los resultados para mostrar la equivalencia entre el Teorema de los Cuatro Colores y el elemento  $\rho_G$  fueron planteados, sino también métodos para calcular este elemento. Aún queda abierto el problema para hallar maneras de reducir y facilitar el complejo trabajo para la demostración del Teorema de los Cuatro Colores. Al ser planteada esta forma algebraica queda una gran cantidad de ideas por seguir explorando; los conceptos de modelo spin en hipergráficas y el polinomio  $\rho_G$  asociado a la gráfica  $G$ .



# Bibliografía

- [1] Atiyah, M.F. & Macdonald, I.G. *Introduction to Commutative Algebra*. Massachusetts; Addison-Wesley Publishing (1969).
- [2] Behzad, Mehdi; Chartrand, Gary & L. Foster, Linda. *Graphs and Digraphs*. Massachusetts; Prindle, Weber and Schmidt International Series, (1979).
- [3] Biggs, Norman. *Algebraic Graph Theory*. New York; Cambridge University Press. (2001).
- [4] Bondy, J.A. & Murty, U. S. R. *Graph theory with applications*. Londres; Macmillan Press Ltd. (1982).
- [5] Bravo Mojica, Alejandro; Rincón Mejía, Hugo & Rincón Orta, César. *Álgebra Superior*. México; Las prensas de ciencias, Facultad de Ciencias de la UNAM. (2006).
- [6] Bollobás, B.; *Modern Graph Theory*. New York; Springer-Verlag (1998).
- [7] Chartrand, Gary. *Introductory Graph Theory*. Nueva York; Dover Publications (1985).
- [8] Clark, Alan. *Elements of Abstract Algebra*. Nueva York; Dover Publications (1984).
- [9] Cvetković, Dragoš M.; Doob, Michael & Sachs, Horst. *Spectra of Graphs. Theory and Applications*. New York; Academic Press. (1980).
- [10] Devlin, K. *Devlin's Angle: Last Doubts Removed About the Proof of the Four Color Theorem*. New York; (2005).

- 
- [11] Diestel, Reinhard. *Graph Theory*. New York; Springer-Verlag. (2005).
- [12] Fraleigh, John B. *Álgebra Abstracta*. México; Addison-Wesley Iberoamérica. (1987).
- [13] Golovina, L.I. & Yaglom, I. M. *La Inducción en Geometría*. México; Editorial Limusa-Wiley. (1972).
- [14] Grossman, Stanley I. *Álgebra Lineal*. México; Mc Graw Hill. (2007).
- [15] Harary, F. *Graph Theory*. USA; Addison-Wesley. (1984).
- [16] Hernández Hernández, Fernando. *Teoría de Conjuntos. Una Introducción*. México; Aportaciones Matemáticas No. 13. Sociedad Matemática Mexicana. (2003).
- [17] Herstein, I.N. *Álgebra Moderna*. México; Editorial Trillas. (2002).
- [18] Hilton, Peter & Wu, Yel-Chiang. *Curso de Álgebra Moderna*. Barcelona; Editorial Reverté. (2006).
- [19] Jacobson, Nathan. *Basic Algebra Vol.I*. Nueva York; W.H. Freeman and Company(1985).
- [20] S. Massey, William. *Algebraic Topology: An Introduction*. New York; Harcourt, Brace & World, Inc. (1972).
- [21] Peña de la, J. Antonio. *Álgebra Lineal Avanzada*. México; Fondo de Cultura Económica. (1996).
- [22] Prieto, Carlos. *Topología Básica*. México; Fondo de Cultura Económica. (2003).
- [23] de Viola-Prioli, Ana M. & Viola-Prioli, Jorge E. *Teoría de Cuerpos y Teoría de Galois*. Barcelona; Editorial Reverté. (2006).
- [24] Rincón Mejía, Hugo Alberto. *Álgebra Lineal*. México; Las prensas de ciencias, Facultad de Ciencias de la UNAM. (2001).
- [25] Saaty, Thomas L. & Kainen, Paul C. *The Four-Color Problem. Assaults and Conquest*. New York; Dover Publications. (1986).

- [26] Pérez Seguí, Maria Luisa. *Combinatoria*. México; Cuaderno de Olimpiada Matemáticas. (2002).
- [27] Wallace, D.A.R. *Grupos*. México; Editorial Limusa. (1978).
- [28] Zaldívar, Felipe. *Introducción a la Teoría de Grupos*. México; Aportaciones Matemáticas No. 32. Sociedad Matemática Mexicana. (2006).

## Anales, Artículos y Boletines

- [29] Appel, Kenneth & Wolfgang Haken. *The solution of the four-color-map problem*. Scientific American Magazine, Vol.237, núm. 4, octubre (1977), pp. 108–121; Estados Unidos.
- [30] Biggs, Norman. *Interaction Models*. London/New York; London Math. Soc. Lectures Notes, Vol. 30, Cambridge Univ. Press. (1977).
- [31] Cayley, A. *On the colourings of maps*. London; Proc. Royal Geog. Soc. 1 (1879), págs. 259–261.
- [32] Eliahou, Shalom. *An Algebraic Criterion for a Graph to be Four-colourable*. Aportaciones Matemáticas, Seminario Internacional de Álgebra y sus Aplicaciones. México; Memorias, (1991) pp 3–27.
- [33] Eliahou, Shalom & Lecouvey, Cédric. *Signed Permutations and the Four Color Theorem*. France; Eur. Jour. Comb. (2006) pp 1–26. <[http://arxiv.org/PS\\_cache/math/pdf/0606/0606726v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0606/0606726v1.pdf)>
- [34] Harpe de la, P. & Jones, V. F. R. *Graph Invariants Related to Statistical Mechanical Models: Examples and Problems*. USA; Journal of Combinatorial Theory, Series B-57. (1993) pp 207–227.
- [35] Heawood, P. J. *Map-colour theorem*. London; Quart. Jour. Math. 24 (1890), págs. 332–339.
- [36] Knight, W. *Computer Generates Verifiable Mathematics Proof*. New York; New Scientist Breaking News. Apr. 19, (2005).

- [37] Tutte, W. T. *A Contribution to the Theory of Chromatic Polynomials*. Canada; Canad. Jour. Math. 6. (1954) pp 80–91.

## Tesis

- [38] Sombra, Martín. *Estimaciones para el Teorema de Ceros de Hilbert*. Buenos Aires; Universidad de Buenos Aires, Tesis de Licenciatura. (1998). <<http://www.math.u-bordeaux1.fr/sombra/papers/tesis/tesis1.pdf>>

## Otras fuentes

- [39] Curcó, María del Carmen. *Una Introducción a la Teoría de Gráficas. Notas de clase*. México; Vínculos Matemáticos, No. 48. Facultad de Ciencias de la UNAM. (2006).
- [40] Rose, K. H. *XY-pic User's Guide, Version 3.7*; (1999). Disponible con URL: <http://krisrose.net/krisrose/ftp/TeX/>
- [41] Bautista, Tomás; Oetiker, Tobias; Partl, Hubert; & otros. *Una Descripción de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X<sub>2</sub> $\epsilon$  Versión 0.4b*; (1998). Disponible con URL: <<ftp://ftp.cma.ulpgc.es/pub/tex/latex2e/doc/ldesc2e>>