UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CATEGORÍA DE FROBENIUS COMO CATEGORÍA TRIANGULADA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

ALEJANDRO WALDEMAR COBÁ MAGAÑA

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS

MARZO, 2009

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CATEGORÍA DE FROBENIUS COMO CATEGORÍA TRIANGULADA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

ALEJANDRO WALDEMAR COBÁ MAGAÑA

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS

MARZO, 2009

Agradecimientos.

A Dios:
Le doy gracias por haberme acompañado durante este largo camino, porque siempre ilumino mi sendero, por sus bendiciones y cuidados.

A mis señores padres:
No sólo por haberme dado el mejor regalo, la vida, sino también por sus enseñanzas y por forjar mi forma de ser, gracias de todo corazón.

A mi esposa e hijos:
Gracias a Manu, por estar hombro a hombro, en esta dura "batalla ". Siempre creiste en mi, a pesar de mis continuos tropiezos, tu fuiste la única que con tu sonrisa, amor y paciencia me hicieron terminar la maestría. Al igual que mis hijos, pues ellos siempre me recibieron con una sonrisa tierna, la cual me daba animos para seguir adelante a pesar de los tropiezos, porque con sus juegos me hacian recordar que lo más importante de la vida es la felicidad. Por recordame que el titulo mas importante que tendré en esta vida es el de PAPÁ. Muchas gracias mis amores, todo esto no lo hubiese logrado sin ustedes.

A mis hermanos:
Por estar siempre al pendiente de mi, dandome sus consejos, por su apoyo total y desinteresado. Gracias por enseñarme a ser perseverante en mis objetivos y sobre todo por darme la mano cuando más lo necesite.

A mis sobrinas:
Porque, a pesar de la distancia y del tiempo, se acuerdan de su tio amigo, por sus palabras de aliento, que me hicieron levantar el ánimo más de una vez.

A mis amigos:
Lucy, Luis, Tere, Diego y Manolo, por sus consejos y por tener siempre las palabras adecuadas, pero sobre todo por sus oraciones.

A los pibetas:
Addy, Marcy, chio, Ramón, Rilmi, Walde, " Abuelo", Maldini y Jorge. Pues a pesar del tiempo y la distancia siempre estaban pendientes de mi. Gracias por

ser como son, por los momentos que hemos pasado juntos y los que, espero, que pasaremos. Siempre estarán en mi corazón.

A la delegación “yuca”:
Por que me hicieron recordar el valor de la amistad. Así como me hicieron menos dura la estancia en el IMATE-Morelia. Drini y Bere gracias por las largas horas de charla que tuvimos. Drini gracias por tu valiosa ayuda, y por corregir mis constantes “caballadas” con la máquina. A Gaspar, por su amistad desinteresada y sobre todo tus concejos y ayuda. Ustedes fueron los únicos que, fuera de la familia, me levantaron de cada uno de mis dolorosos tropiezos, gracias “paisanos”, que Dios les bendiga.

A los “ maikolitos”:
Ivan y Lili, David y Belen, Ariet y Martha. Por haberme brindado su amistad , gracias por explicarme topología y también por el cafecíto que siempre cortesmente me regalaban casi todas las mañanas.

Al Dr. Salvador García:
Por ser de los pocos que estuvo siempre pendiende de mi desempeño académico y personal.

Al Dr. Leonardo Salmeron:
Por el gran detalle de “hecharme”la mano, para poder terminar esta aventura. Gracias por haberse tomado la molestia de leer a conciencia todas y cada una de las “barbarocidades ” que escribia. Sin su paciencia, explicaciones y sus sabios consejos no hubiese podido terminar esta tesis, gracias mil.

A mis sinodales:
Los Doctores Gerardo Raggi, Roberto Martínez Villa y Octavio Mendoza, por sus observaciones y críticas hechas para mejorar el presente trabajo.

Al Dr. Raymundo Bautista:
Mi profundo agradecimiento por haberme brindado el enorme honor y placer de trabajar bajo su batuta. Gracias Raymundo por tu paciencia para explicarme las cosas, por las horas que pasamos trabajando. Por su siempre amable forma de corregirme apesar de decir “caballadas”. De verdad que tienes una paciencia a prueba de todo. Mil gracias Raymundo.

Este humilde trabajo se lo dedico a dos personas que se “adelantaron” y que ahora estan al lado de nuestro Señor Jesucristo, a la memoria de mi amigo Miguel Pastrana y de mi queridisimo tio Wilberth Magaña. No saben como lamento no haber podido despedirme de ustedes dos.

Índice general

Introducción

Las álgebras diferenciales graduadas surgen, de manera natural, si consideramos al anillo de endomorfismos de un complejo.

En la actualidad las álgebras diferenciales graduadas son utilizadas en varias ramas de las matemáticas, como por ejemplo en el estudio de las A_∞-álgebras, en las álgebras de conglomerados, y recientemente en el contexto de categorías diferenciales graduadas, en geometría no conmutativa [7].

El cuerpo principal del presente trabajo es el estudio de la categoría de A-módulos diferenciales derechos sobre las álgebras diferenciales graduadas, que se encuentra en el capítulo 3. Nuestro objetivo es dar una demostración del teorema de J. Rickard [6], el cual es la versión del teorema de Morita [5] para categorías derivadas. Usando la herramienta de las categorías de álgebras diferenciales y las ideas de B. Keller [6], logramos hacer esta prueba, la cual se encuentra en el capítulo 4. Primeramente estudiaremos a la categoría derivada, siguiendo la idea de Happel [3], de donde veremos que la categoría de A-módulos diferenciales derechos es una categoría de Frobenius, cuya definición se verá en el capítulo 2.

Recordemos que el teorema de Morita para categorías de módulos sobre un anillo con unidad dice (ver página 264 de [1]):

Teorema
Sean R y S dos anillos con unidad y sean $F : R\text{-}Mod \longrightarrow S\text{-}Mod$ y $G : S\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$ dos funtores aditivos. Entonces F es una equivalencia de categorías con inversa G si y sólo si existe un bimódulo ${}_SP_R$ tal que:

(i) ${}_SP$ *y* P_R *son progeneradores.*

(ii) ${}_SP_R$ *es balanceado.*

(iii) $F \cong P \otimes_R -$ *y* $G \cong Hom_S(P, -)$.

Además, si consideramos al bimódulo ${}_RQ_S := Hom_R(P, R)$ se tiene que ${}_RQ$ y ${}_SQ$ son progeneradores, $F \cong Hom_R(Q, -)$ y $G \cong Q \otimes_S -$.
El teorema de Rickard para categorías derivadas dice:

Teorema
Sean R_1 *y* R_2 *dos k-álgebras y* $F : \mathscr{D}(R_1) \longrightarrow \mathscr{D}(R_2)$ *una equivalencia de categorías trianguladas (esto es,* F *es un funtor exacto y una equivalencia de categorías). Entonces existe un complejo de* R_1R_2*-bimódulos* ${}_{R_1}W_{R_2}$ *con las siguientes propiedades:*

(a) W_{R_2} *es un generador q-proyectivo y compacto en* $\mathscr{D}(R_2)$*.*

(b) $LT_W : \mathscr{D}(R_1) \longrightarrow \mathscr{D}(R_2)$ *es una equivalencia de categorías trianguladas.*

Lo primero que se ocurre, para probar el teorema de Rickard, es seguir la idea de Morita. Como veremos en el lema 1.47 del capítulo 1, el hecho de que ${}_SP_R$ sea finitamente generado implica que sea compacto en el sentido de la definición 1.46 del capítulo 1. El hecho de que P_R sea progenerador nos dice que P_R es proyectivo. El siguiente morfismo de anillos $\lambda : R \longrightarrow End(P)$ dado por la multiplicación izquierda de $\lambda(r)$ para toda $r \in R$ es un isomorfismo ya que ${}_SP_R$ es balanceado. Para el caso del Teorema de Rickard, y siguiendo la idea de Morita, un candidato para ${}_{R_1}W_{R_2}$ sería $X = F(R_1)$ que es un complejo compacto en $\mathscr{D}(R_2)$. Para darle estructura de complejo de R_1R_2-bimódulos, estaríamos tentados a usar el isomorfismo

$$F : Hom_{\mathscr{D}(R_1)}(R_{1R_1}, R_{1R_1}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}(R_2)}(X, X).$$

Pero al tratar de definir la acción izquierda, como se hizo en el teorema de Morita, tenemos el siguiente problema: $F\lambda(r_1)$ está en $\mathscr{D}(R_2)$ y en general no se expresa como un morfismo de complejos. Este obstaculo lo libramos al notar que X es un complejo de R_2-módulo derecho. En efecto, por el teorema de Keller tenemos que $pX \cong X$ y como $Hom_{\mathscr{D}(R_2)}(pX, pX) = Hom_{K(R_2)}(pX, pX)$, podemos cambiar X por pX. En la homotópica tenemos $F\lambda(r_1) := \underline{U}(r_1)$ donde $U(r_1) : pX \longrightarrow pX$ es un morfismo de complejos. En este punto estariamos tentados a darle estructura de R_1-módulo izquierdo definiendo la acción izquierda como $r_1 \cdot x := U(r_1)x$, el problema, aquí, es cuando se quiere probar la asociatividad, la cual se cumple en K pero no en $\mathscr{C}$. Por esta razón tomamos la siguiente álgebra diferencial $A = End_{\mathscr{D}(R_2)}(X_{R_2})$. Usando la teoría de módulos diferenciales se obtiene un complejo de R_1R_2-bimódulos W tal que:

(i) W_{R_2} es q-proyectivo, compacto y generador.

(ii) El morfismo de anillos $\lambda : R_1 \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}(R_2)}(W_{R_2}, W_{R_2})$ es un isomorfismo, donde λ es la acción por la izquierda del bimódulo.

(iii) $Hom_{\mathscr{D}(R_2)}(W_{R_2}, W_{R_2}[n]) = 0$ si $n \neq 0$.

Entonces el funtor

$$LT_W : \mathscr{D}(R_1) \longrightarrow \mathscr{D}(R_2)$$

da una equivalencia de categorías trianguladas.

Se ha procurado que el presente trabajo utilice la terminología básica del tema, que recordaramos en el primer capítulo (ver [1] y [5]); además de que sea lo más autocontenido posible, procurando presentar todos lo detalles.

Capítulo 1

Categorías trianguladas

1.1. Nociones básicas

Empezaremos dando las nociones básicas de categoría y categoría aditiva que son necesarias para la definición de categoría triangulada, la cual es nuestro objetivo principal en ésta sección. En los capítulos 2 y 3 daremos ejemplos de categorías trianguladas.

DEFINICIÓN 1.1.
Una categoría $\mathcal{A}$ está dada por las siguientes clases y propiedades

(i) *Una clase de objetos* $\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$.

(ii) *Para cada par* (A, B) *de objetos de* $\mathcal{A}$, *tenemos un conjunto* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. *Un elemento* α *de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ *se llama morfismo de* A *en* B *en la categoría* $\mathcal{A}$ *y se denota por* $\alpha : A \longrightarrow B$ *o* $A \xrightarrow{\alpha} B$.

(iii) *Para cada terna* (A, B, C) *de objetos de* $\mathcal{A}$ *se tiene una composición*

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{B}, \mathrm{C}) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{C})$$

$$(g, f) \longmapsto g \circ f.$$

(iv) *Si* A, B, C, D *son objetos de* $\mathcal{A}$ *tales que* $(A, B) \neq (C, D)$ *entonces,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{C}, \mathrm{D}) = \emptyset.$$

(v) *La composición mencionada en* (iii) *es asociativa, es decir, dados los morfismos* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ *en* $\mathcal{A}$ *se cumple que* $h(gf) = (hg)f$.

(vi) *Para cada objeto* A *de la categoría* $\mathcal{A}$, *existe* $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{A})$ *tal que:*

(a) $f \circ 1_A = f$ *para toda* f *en* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ *y*

(b) $1_A \circ g = g$ *para toda* g *en* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{C},\mathrm{A})$.

Note que el morfirmos $1_A : A \longrightarrow A$ *es único y se le conoce como la identidad en el objeto* $\mathcal{A}$.

DEFINICIÓN 1.2.
Dada una categoría $\mathcal{A}$, *definimos la categoría* $\mathcal{A}^{op}$ *(también llamada categoría dual) de* $\mathcal{A}$ *como sigue: los objetos de* $\mathcal{A}^{op}$ *son los mismos de* $\mathcal{A}$ *y en morfismos tenemos que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{B},\mathrm{A}) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A},\mathrm{B})$. *La composición* $f \circ g$ *en* $\mathcal{A}^{op}$ *está definida como la composición* $g \circ f$ *en* $\mathcal{A}$.

En las categorías también tenemos la idea de subcategoría. La definiremos a continuación.

DEFINICIÓN 1.3.
Sea $\mathcal{A}$ *una categoría, diremos que* $\mathcal{B}$ *es una subcategoría de* $\mathcal{A}$ *si:*

(a) $\mathrm{Obj}(\mathcal{B}) \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$,

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A},\mathrm{B})\ \forall A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$,

(c) La composición de $\mathcal{B}$ *se obtiene restringiendo la de* $\mathcal{A}$ *en* $\mathcal{B}$,

(d) Si $1_A^{\mathcal{B}}$ *es la identidad de* A *en* $\mathcal{B}$ *entonces se cumple que* $1_A^{\mathcal{B}} = 1_A$.

DEFINICIÓN 1.4.
Sea $\mathcal{B}$ *una subcategoría de* $\mathcal{A}$. *Diremos que* $\mathcal{B}$ *es una subcategoría plena de* $\mathcal{A}$ *si para todo* A, B *en* $\mathcal{B}$ *se tiene que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A},\mathrm{B})$.

DEFINICIÓN 1.5.
Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ *una familia de objetos en una categoría* $\mathcal{A}$. *Un producto para* $\{A_i\}_{i \in I}$ *es una familia de morfismos* $\{p_i : A \longrightarrow A_i\}_{i \in I}$ *con la siguiente propiedad: para cualquier familia* $\{\alpha_i : A' \longrightarrow A_i\}_{i \in I}$ *de morfismos existe un único morfimo* $\alpha : A' \longrightarrow A$ *que hace conmutativo al siguiente diagrama* $\forall i \in I$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, dotted, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & A \arrow[d, "p_i"] \\
& A_i.
\end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 1.6.
Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ *una familia de objetos en una categoría* $\mathcal{A}$. *Un coproducto de* $\{A_i\}_{i \in I}$ *es un producto de dicha familia en la categoría dual. Esto es, un coproducto es una familia de morfismos* $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A'\}_{i \in I}$ *llamados inclusiones, con la siguiente propiedad: para cada famila* $\{\alpha_i : A_i \longrightarrow A'\}_{i \in I}$ *existe*

un único morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ *que hace conmutar al siguiente diagrama* $\forall i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dotted, "\alpha"] & A' \\
A_i . \arrow[u, "\mu_i"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Recordemos que un objeto 0 de una categoría $\mathcal{A}$, es un objeto *cero* si para cualquier objeto $A \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, 0)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(0, \mathrm{A})$ consisten de un sólo elemento ($0_{A,0}$ y $0_{0,A}$ respectivamente). Si 0 y $0'$ son objetos cero entonces $0_{0,0'} : 0 \longrightarrow 0$ es un isomorfismo. Dados $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, el morfismo cero $0_{A,B} : A \longrightarrow B$ de A en B, se define como la composición $0_{A,B} := 0_{0,B}0_{A,0}$.

DEFINICIÓN 1.7.
Una categoría $\mathcal{A}$ se dice que es aditiva si satisface las siguientes condiciones.

(i) *$\mathcal{A}$ tiene un objeto cero.*

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ *es grupo abeliano para cualesquiera par de objetos A, B en $\mathcal{A}$.*

(iii) *La composición de morfismos en $\mathcal{A}$ es $\mathbb{Z}$-bilineal. Esto es,para cada terna de objetos A, B, C en $\mathcal{A}$, f, f_1, f_2 en* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, *y g, g_1, g_2 en* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{B}, \mathrm{C})$ *se tiene*

$$(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f,$$

$$g(f_1 + f_2) = g f_1 + g f_2.$$

(iv) *$\mathcal{A}$ tiene coproductos finitos.*

A lo largo de ésta tesis, k denotará a un campo. Ahora vamos a definir que es una k-álgebra y una k-categoría.

DEFINICIÓN 1.8.
Una k-álgebra es un anillo A con unidad tal que A tiene una estructura de k-espacio vectorial la cual es compatible con la multiplicación del anillo, esto es

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = (ab)\lambda$$

para toda $\lambda \in k$ y para todo $a, b \in A$. Decimos que la k-álgebra A es de dimensión finita si A como k-espacio vectorial es de dimensión finita.

DEFINICIÓN 1.9.
Una categoría $\mathscr{C}$ es una k-categoría, si para cada par de objetos A, B en $\mathscr{C}$ el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ *está equipado con una estructura de k-espacio vectorial tal que la composición de morfismos de $\mathscr{C}$ es k-bilineal.*

Notemos que para cualquier objeto A de la k-categoría $\mathscr{C}$, el k-espacio vectorial de todos los endomorfismos $End_{\mathscr{C}}(A) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{A})$ equipada con la multiplicación dada por la composición de morfismos, es una k-álgebra (no necesariamente de dimensión finita) con unidad 1_A. Dicha k-álgebra se le conoce como el álgebra de endomorfismos de A.

DEFINICIÓN 1.10.

Sea A una k-álgebra. Denotaremos por A^{op} a la k-álgebra opuesta cuyo conjunto y estructura de espacio vectorial es la misma de A, pero que la multiplicación es $a * b := ba$

Un concepto importante, en el desarrollo del presente trabajo, es el de funtor entre categorías. A continuación daremos su definición y algunas de sus propiedades.

DEFINICIÓN 1.11.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos categorías arbitrarias. Un funtor covariante $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, entre las categorías $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ consiste de:

(a) Una regla de asociación $F : \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$.

(b) Para toda pareja A, B de objetos en $\mathcal{A}$, tenemos una regla de asociación

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathrm{F(A)}, \mathrm{F(B)})$$

tal que

(b_1) Si $g \circ f$ tiene sentido en $\mathcal{A}$ entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;

(b_2) para cada objeto A de $\mathcal{A}$ se cumple que $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

DEFINICIÓN 1.12.

Si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ son funtores, su composición

$$GF : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$$

*es el funtor definido por $GF(A) := G(F(A))$ para $A \in \mathcal{A}$, y
$GF(f) := G(F(f))$ para cada morfismo f de $\mathcal{A}$.*

DEFINICIÓN 1.13.

Un funtor contravariante F es uno tal que cumple las condiciones de la definición 1.11 con la variante de que en el inciso (b_1) se reemplaza la siguiente condición $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ por $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

OBSERVACIÓN 1.14.

$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor contravariante si y sólo si $F : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor covariante.

En lo que sigue del presente trabajo, cuando mencionemos que F es un funtor lo haremos pensando en que es un funtor covariante, a menos que explícitamente se mencione lo contrario.

LEMA 1.15.
Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ *un funtor,* $u : A \longrightarrow B$ *un morfismo de* $\mathcal{A}$ *y* C *un objeto de* $\mathcal{A}$*. Entonces, los siguientes cuadrados conmutan:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{C},\mathrm{A}) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{C},\mathrm{B}) \arrow[d, "F"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{FC},\mathrm{FA}) \arrow[r, "(F(u))_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{FC},\mathrm{FB})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{B},\mathrm{C}) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A},\mathrm{C}) \arrow[d, "F"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{FB},\mathrm{FC}) \arrow[r, "(F(u))^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{FA},\mathrm{FC}),
\end{tikzcd}$$

donde $u_*(\alpha) := u\alpha$, $(F(u))_*(F(\alpha)) := F(u)F(\alpha)$ *para toda* $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{C},\mathrm{A})$, $u^*(\beta) := \beta u$ *y* $(F(u)^*)(F(\beta)) := F(\beta)F(u)$ *para toda* $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{B},\mathrm{C})$.

DEMOSTRACIÓN.
Veamos la conmutatividad del primer cuadrado. Sea $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{C},\mathrm{A})$ entonces

$$F(u_*(h)) = F(uh) = F(u)F(h) = F(u)_*F(h).$$

Ahora probemos la conmutatividad del segundo cuadrado. Sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{B},\mathrm{C})$

$$F(u^*(g)) = F(gu) = F(g)F(u) = (Fu)^*F(g).$$

□

DEFINICIÓN 1.16.
Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ *un funtor, diremos que:*

(i) F *es fiel si* $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{FA},\mathrm{FB})$ *es inyectiva para todo* $A, B \in \mathscr{C}$.

(ii) F *es pleno si* $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{FA},\mathrm{FB})$ *es sobreyectiva para todo* $A, B \in \mathscr{C}$.

(iii) F *es denso si para todo* $A' \in \mathscr{C}'$ *existe* $A \in \mathscr{C}$ *tal que* $F(A) \simeq A'$.

(iv) F *es un isomorfismo si existe un funtor* $G : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ *tal que* $GF = 1_{\mathscr{C}}$ *y* $FG = 1_{\mathscr{C}'}$.

DEFINICIÓN 1.17.
Sean $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ *dos funtores entre categorías arbitrarias. Una transformación natural* $\eta : F \longrightarrow G$ *es una colección* $\eta = \{\eta_A : FA \longrightarrow GA\}_{A \in \mathcal{A}}$ *de morfismos en* $\mathscr{C}'$ *tal que para cada* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ *se tiene que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B).
\end{tikzcd}$$

OBSERVACIÓN 1.18.
Dados los funtores $\mathcal{A} \xrightarrow{L} \mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}' \xrightarrow{H} \mathcal{B}$ *y la transformación natural* $\eta : F \longrightarrow G$ *, tenemos las siguientes transformaciones naturales*

$$H\eta : HF \longrightarrow HG \qquad y \qquad \eta L : FL \longrightarrow GL$$

donde $H\eta := \{H(\eta_A)\}_{A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})}$*, y* $\eta L := \{\eta_{L(A)}\}_{A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})}$*. Note que si* η *es un isomorfismo, también lo son* $H\eta$ *y* ηL*.*

DEFINICIÓN 1.19.
Una transformación natural $\eta : F \longrightarrow G$ *es un isomorfismo si existe una transformación natural* $\mu : G \longrightarrow F$ *tal que* $\mu \circ \eta = 1_F$ *y* $\eta \circ \mu = 1_G$*. En éste caso, escribimos* $F \simeq G$*.*

DEFINICIÓN 1.20.
Sean F *y* G *dos funtores tales que* $\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}$ *. Diremos que* F *y* G *son funtores adjuntos si* $\forall A \in \mathscr{A}$ *y* $\forall B \in \mathscr{B}$ *existe una biyección*

$$\eta_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathrm{GB}, \mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathrm{B}, \mathrm{FA})$$

tal que $\eta_{B,-}$ *y* $\eta_{-,A}$ *son transformaciones naturales.*

DEFINICIÓN 1.21.
Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ *un funtor entre* k*-categorías. Diremos que* F *es un funtor* k*-lineal si* $F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{FA}, \mathrm{FB})$ *es* k*-lineal para todo* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$*.*

OBSERVACIÓN 1.22.
Sean $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ *dos funtores y* $\eta : F \longrightarrow G$ *una transformación natural. Entonces* η *es un isomorfismo natural si y sólo si* $\eta_A : FA \longrightarrow GA$ *es un isomorfismo en* $\mathscr{C}'$ $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$*. La inversa de* η *es* $\eta' : G \longrightarrow F$ *donde* $\eta'_A = \eta_A^{-1}$ $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$*.*

DEFINICIÓN 1.23.
Un funtor $F : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{V}$ *es una equivalencia de categorías si existe un funtor* $G : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{U}$ *tal que* $GF \simeq 1_{\mathscr{U}}$ *y* $FG \simeq 1_{\mathscr{V}}$.

LEMA 1.24.
Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *es un funtor fiel y pleno,* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *y* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. *Si* $F(h) : FA \longrightarrow FB$ *es un isomorfismo entonces* h *es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.
Supongamos que $F(h)$ es un isomorfismo y que g es el inverso de $F(h)$. Como F es pleno, existe un morfismo $s \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{B}, \mathrm{A})$ tal que $F(s) = g$. Luego $F(s)F(h) = 1_{F(A)} = F(1_A)$. Como F es fiel, $sh = 1_A$. De manera similar se ve que $hs = 1_B$.

□

PROPOSICIÓN 1.25.
Un funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ *es una equivalencia de categorías si y sólo si* F *es fiel, pleno y denso.*

DEMOSTRACIÓN.
$\boxed{\Rightarrow}$ Como F es una equivalencia de categorías, tenemos que existe el funtor $G : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ tal que $GF \simeq 1_{\mathscr{C}}$ y $FG \simeq 1_{\mathscr{C}'}$. Sean $\zeta : GF \longrightarrow 1_{\mathscr{C}}$ y $\nu : FG \longrightarrow 1_{\mathscr{C}'}$ los isomorfismos asociados. Veamos que cada una de las siguientes afirmaciones son ciertas.

(a) F es denso.
Sea $A' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}')$. Por hipótesis tenemos que $\nu_{A'} : FGA' \longrightarrow A'$ es un isomorfismo por lo tanto F es denso.

(b) F es pleno.
Veamos que $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{FA}, \mathrm{FB})$ es suprayectiva. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{FA}, \mathrm{FB})$, como F es denso, tenemos que también G lo es, así para todo $A \in \mathrm{Obj}\mathscr{C}$ existe A' tal que $GA' \simeq A$. Por lo tanto tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
GA' \arrow[d, "\bar{g}"'] & A \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[d, dotted, "\widetilde{f}"] \\
GB' & B \arrow[l, "\gamma"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "F\lambda"] \arrow[d, "f"'] & FGA' \arrow[d, "F(\bar{g})"] \\
FB \arrow[r, "F\gamma"'] & FGB'
\end{tikzcd}$$

$$F(\widetilde{f}) = F(\gamma^{-1}\bar{g}\lambda) = F(\gamma)^{-1}F(\bar{g})F(\lambda) = F(\gamma)^{-1}F(\gamma)fF(\lambda)^{-1}F(\lambda) = f$$

con $\widetilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

(c) F es fiel.
Debemos probar que $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{FA},\mathrm{FB})$ es inyectiva. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
GFA \arrow[r, "\zeta_A"] \arrow[d, "GF(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\
GFB \arrow[r, "\zeta_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

de donde vemos que $GF(f) = \zeta_B^{-1} f \zeta_A$. Luego $GF \simeq 1_{\mathscr{C}}$ implica que el morfismo GF es biyectivo, y de la inyectividad de GF se obtiene la inyectividad de F. Lo anterior lo resumiremos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \arrow[rr, "GF"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{GFA},\mathrm{GFB}) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{FA},\mathrm{FB}) \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto concluimos que F es fiel.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que F es fiel, pleno y denso.

(i) Definiremos una regla de asociación $G : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$.

(a) En objetos.
Notemos que como F es denso, para cada $A' \in \mathrm{Obj}\mathscr{C}'$ existe $A \in \mathrm{Obj}\mathscr{C}$ tal que $A' \simeq FA$. Definimos a $G(A') := A$. Llamemos $\lambda_{A'} : A' \longrightarrow FGA'$ a éste isomorfismo.

(b) En morfismos.
Sea $f' : A' \longrightarrow B'$ un morfismo en $\mathscr{C}'$. Consideremos el siguiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\lambda_{A'}"] \arrow[d, "f'"'] & FGA' \arrow[d, dotted, "\lambda_{B'} f' \lambda_{A'}^{-1}"] \\
B' \arrow[r, "\lambda_{B'}"'] & FGB'
\end{tikzcd}$$

Como F es fiel y pleno, existe un único morfismo $f : GA' \longrightarrow GB'$ tal que $F(f) = \lambda_{B'} f' \lambda_{A'}^{-1}$. Por lo tanto definimos $G(f') := f$.

(ii) G es un funtor.
Sean $A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C'$ morfismos en $\mathscr{C}'$. Veamos que:

(a) $G(g' \circ f') = G(g') \circ G(f')$.
Observe que tenemos el siguiente diagrama cuyos cuadrados interiores son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\lambda_{A'}"] \arrow[d, "f'"'] & FGA' \arrow[d, "FG(f')"] \\
B' \arrow[r, "\lambda_{B'}"'] \arrow[d, "g'"'] & FGB' \arrow[d, "FG(g')"] \\
C' \arrow[r, "\lambda_{C'}"'] & FGC'.
\end{tikzcd}$$

Pero también tenemos que el cuadrado exterior conmuta, es decir

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\lambda_{A'}"] \arrow[d, "g'f'"'] & FGA' \arrow[d, "FG(g')FG(f')=F{[G(g')G(f')]}"] \\
C' \arrow[r, "\lambda_{C'}"'] & FGC',
\end{tikzcd}$$

y por la unicidad tenemos que $G(g' \circ f') = G(g') \circ G(f')$.

(b) $G(1_{A'}) = 1_{G(A')}$.
Sabemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\lambda_{A'}"] \arrow[d, "1_{A'}"'] & FGA' \arrow[d, "F(1_{GA'})"] \\
A' \arrow[r, "\lambda_{A'}"'] & FGA',
\end{tikzcd}$$

y de nueva cuenta por la unicidad del morfismo que va de GA' a GA' tenemos el resultado.

(iii) $GF \simeq 1_{\mathscr{C}}$ y $FG \simeq 1_{\mathscr{C}'}$.

Ya sabemos que $\lambda : 1_{C'} \longrightarrow FG$ es un isomorfismo natural.
Por el lema 1.24 tenemos que $\lambda_{FA} : FA \longrightarrow FGFA$ es un isomorfismo. Luego existe un único isomorfimo $\zeta_A : A \longrightarrow GFA$ tal que $F(\zeta_A) = \lambda_{FA}$. Así, para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{C}$ tenemos al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "F(\zeta_A)"] \arrow[d, "F(f)"'] & FGFA \arrow[d, "FGF(f)"] \\
FB \arrow[r, "F(\zeta_B)"'] & FGfB;
\end{tikzcd}$$

y como F es fiel, ésto implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\zeta_A"] \arrow[d, "f"'] & GFA \arrow[d, dotted, "GF(f)"] \\
B \arrow[r, "\zeta_B"'] & GFB
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Así, $\zeta : 1_{\mathscr{C}} \longrightarrow GF$ es un isomorfismo natural.

□

1.2. Categoría triangulada

En ésta sección, daremos a definición de categoría triangulada (ver [?]).

DEFINICIÓN 1.26.
Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva con $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ una autoequivalencia, esto es, $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ es una equivalencia aditiva de categorías.

1. *Un sextuple t en $\mathscr{C}$ es una colección (M, N, L, u, v, w) de objetos y morfismos en T tales que $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} L \xrightarrow{w} T(M)$.*

2. *Sean $t = (M, N, L, u, v, w)$ y $t' = (M', N', L', u', v', w')$ sextuples. Un morfismo $h : t \longrightarrow t'$ de sextuples es una terna de morfismos $h := (h_1, h_2, h_3)$ en T tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_1"'] & N \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h_2"'] & L \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h_3"'] & TM \arrow[d, "T(h_1)"] \\
M' \arrow[r, "u'"'] & N' \arrow[r, "v'"'] & L' \arrow[r, "w'"'] & TM'
\end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 1.27.
El morfismo de sextuples $h = (h_1, h_2, h_3) : t \longrightarrow t'$ es un isomorfismo si h_1, h_2 y h_3 lo son.

DEFINICIÓN 1.28.
Sea $\mathscr{C}$ una categoría con $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ una autoequivalencia. Una clase $\mathfrak{T}$ de sextuples en $\mathscr{C}$ se dice que es una triangulación de $\mathscr{C}$ si cumple los siguientes axiomas.

(TR1) *(a) Si $t = (M, N, L, u, v, w)$ está en $\mathfrak{T}$ y $t' = (M', N', L', u', v', w')$ es isomorfo a t, entonces también t' está en $\mathfrak{T}$.*

(b) El sextuple $(M, M, 0, 1_M, 0, 0)$ está en $\mathfrak{T}$ para todo M en $\mathscr{C}$.

(c) Para cada morfismo $u : M \longrightarrow N$ *en* T*, existe* (M, N, L, u, v, w) *en* $\mathfrak{T}$.

(TR2) $(M, N, L, u, v, w) \in \mathfrak{T}$ *si y sólo si* $(N, L, TM, v, w, -Tu) \in \mathfrak{T}$.

(TR3) Si $t = (M, N, L, u, v, w)$ *y* $t' = (M', N', L', u', v', w')$ *están en* $\mathfrak{T}$ *y* h_1, h_2 *son tales que hacen conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_1"'] & N \arrow[d, "h_2"] \\
M' \arrow[r, "u'"'] & N',
\end{tikzcd}$$

entonces existe $h_3 : L \longrightarrow L'$ *tal que* (h_1, h_2, h_3) *es un morfismo de* t *en* t'.

(TR4) AXIOMA DEL OCTAEDRO.
Consideremos los siguientes triángulos $T_1 := (M, N, L', u, i, i')$, $T_2 := (N, L, M', v, j, j')$ *y* $T_3 := (M, L, N', vu, k, k')$ *en* $\mathfrak{T}$*. Entonces, existen morfismos* f *y* g *tales que* $T_4 := (L', N', M', f, g, (Ti)j')$ *está en* $\mathfrak{T}$ *y el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}N' \arrow[r, "T^{-1}k'"] \arrow[d, "T^{-1}g"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[d, "vu"] & & \\
T^{-1}M' \arrow[r, "T^{-1}j'"'] & N \arrow[r, "v"'] \arrow[d, "i"'] & L \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "k"'] & M' \arrow[r, "j'"'] \arrow[d, equal] & TN \arrow[d, "Ti"] \\
 & L' \arrow[r, dotted, "f"'] \arrow[d, "i'"'] & N' \arrow[r, dotted, "g"'] \arrow[d, "k'"'] & M' \arrow[r, "(Ti)j'"'] & TL' \\
 & TM \arrow[r, equal] & TM & &
\end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 1.29.

Sea $\mathscr{C}$ *una categoría aditiva y* $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ *una autoequivalencia. Una clase* $\mathfrak{T}$ *de sextuples en* $\mathscr{C}$ *se dice que es una pre-triangulación de* $\mathscr{C}$ *si cumple los axiomas* $(TR1), (TR2)$ *y* $(TR3)$.

En lo que sigue, si $\mathscr{C}$ es una categoría aditiva con una triangulación $\mathfrak{T}$, a los sextuples de $\mathfrak{T}$ les llamaremos triángulos de $\mathscr{C}$. La categoría $\mathscr{C}$ se llamará triangulada y a la autoevaluación $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ la traslación de $\mathscr{C}$. Si $\mathscr{C}$ es una categoría aditiva con una pre-triangulación $\mathfrak{T}$, $\mathscr{C}$ se llamará categoría pre-triangulada; y también llamaremos triángulos a los elementos de $\mathfrak{T}$.

DEFINICIÓN 1.30.

Sea $\mathscr{T}$ una categoría triangulada arbitraria y $\mathscr{T}'$ una subcategoría plena y aditiva de $\mathscr{T}$. Diremos que $\mathscr{T}'$ es una subcategoría triangulada de $\mathscr{T}$, si se satisfacen las siguientes condiciones.

(i) *$\mathscr{T}'$ es cerrada por traslaciones (es decir $T(\mathscr{T}') = \mathscr{T}'$).*

(ii) *Para todo triángulo* $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow TM_1$ *en $\mathscr{T}'$, se tiene que $M_3 \in \mathscr{T}'$, siempre que $M_1, M_2 \in \mathscr{T}'$.*

LEMA 1.31.

El axioma $(TR3)$ es válido por la "izquierda". Es decir si tenemos los siguientes triángulos y morfismos g, f tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] & N \arrow[r, "v"] & L \arrow[r, "w"] \arrow[d, "g"] & T(M) \arrow[d, "f"] \\
M' \arrow[r, "u'"'] & N' \arrow[r, "t'"'] & L' \arrow[r, "w'"'] & T(M')
\end{tikzcd}$$

entonces existe $h : N \longrightarrow N'$ *en T tal que $gv = t'h$ y $hu = u'T^{-1}(f)$.*

DEMOSTRACIÓN.

Notemos que al recorrer dos veces hacia la derecha ambos triángulos tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "w"] \arrow[d, "g"'] & T(M) \arrow[r, "-T(u)"] \arrow[d, "f"'] & T(N) \arrow[r, "-T(v)"] \arrow[d, dotted, "h'"] & T(L) \arrow[d, "T(g)"] \\
L' \arrow[r, "w'"'] & T(M') \arrow[r, "-T(u')"'] & T(N') \arrow[r, "-T(v')"'] & T(L')
\end{tikzcd}$$

donde, al aplicar el axioma $(TR3)$, nos dá la existencia del morfismo h' que hace conmutar el diagrama anterior. Aplicando T^{-1} al diagrama anterior obtenemos

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "T^{-1}(f)"'] & N \arrow[r, "v"] \arrow[d, "T^{-1}(h')"'] & L \arrow[r, "w"] \arrow[d, "g"] & T(M) \arrow[d, "f"] \\
M' \arrow[r, "u'"'] & N' \arrow[r, "v'"'] & L' \arrow[r, "w'"'] & T(M').
\end{tikzcd}$$

donde $h := T^{-1}(h')$.

□

PROPOSICIÓN 1.32.

Sea $\mathscr{T}$ *una categoría pre-triangulada, con pre-triangulación* $\mathfrak{T}$*, y el siguiente triángulo en* $\mathscr{T}$ $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} L \xrightarrow{w} TM$ *. Entonces, para todo* $X \in \mathscr{T}$ *tenemos las siguientes sucesiones exactas largas de grupos abelianos:*
(i)

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}^{-1}\mathrm{L}) \xrightarrow{T^{-1}w_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{M}) \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}) \xrightarrow{v_*}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{L}) \xrightarrow[w_*]{} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{TM}) \longrightarrow \cdots$$

(ii)

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{TM}, \mathrm{X}) \xrightarrow{w^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{L}, \mathrm{X}) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{N}, \mathrm{X}) \xrightarrow{u^*}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{M}, \mathrm{X}) \xrightarrow[T^{-1}w^*]{} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{L}, \mathrm{X}) \longrightarrow \cdots$$

son exactas.

DEMOSTRACIÓN.
Vamos a probar la exactitud de la primera sucesión larga.

(a) Exactitud en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{N})$.
Sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{N})$; veamos que $\mathrm{Im}(\mathrm{u}_*) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{v}_*)$, es decir, que $v_* u_* = 0$. Para ello fijémonos en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "Id_M"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "0"] \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & T(M) \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "u"'] & N \arrow[r, "v"'] & L \arrow[r, "w"'] & T(M)
\end{tikzcd}$$

el cual nos dice que $vu = 0$. Esto implica que $v_* u_* = 0$ ya que $v_* u_*(\lambda) = vu\lambda = 0\lambda = 0 \ \forall \lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{M})$. Ahora probaremos que $\mathrm{Ker}(\mathrm{v}_*) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{u}_*)$. Sea $g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{v}_*)$. Luego por el lema 1.31 se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & X \arrow[r, "Id_X"] \arrow[d, dotted, "h"'] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
T^{-1}(L) \arrow[r, "T^{-1}w"'] & M \arrow[r, "u"'] & N \arrow[r, "v"'] & L
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $g = uh = u_*(h) \in \mathrm{Im}(\mathrm{u}_*)$.

(b) Exactitud en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{L})$.
Por $(TR2)$ tenemos el siguiente triángulo

$$N \xrightarrow{v} L \xrightarrow{w} T(M) \xrightarrow{-T(u)} T(N).$$

Aplicando el argumento del inciso (a), a éste nuevo triángulo, obtenemos la exactitud en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{L})$.

(c) Exactitud en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{T(M)})$.
Aplicando dos veces $(TR2)$ al triángulo

$$M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} L \xrightarrow{w} T(M),$$

obtenemos el triángulo

$$L \xrightarrow{w} T(M) \xrightarrow{-T(u)} T(N) \xrightarrow{-T(v)} T(L).$$

Primero notemos que este sextuple es equivalente a

$$L \xrightarrow{w} T(M) \xrightarrow{T(u)} T(N) \xrightarrow{T(v)} T(L)$$

ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en T

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal, "-Id_L"'] & T(M) \arrow[r, "-T(u)"] \arrow[d, equal, "-Id_{T(M)}"'] & T(N) \arrow[r, "-T(v)"] \arrow[d, equal, "Id_{T(N)}"] & T(L) \arrow[d, equal, "-Id_{T(L)}"] \\
L \arrow[r, "w"] & T(M) \arrow[r, "T(u)"] & T(N) \arrow[r, "T(v)"] & T(L).
\end{tikzcd}$$

Luego, podemos aplicar el argumento del inciso (a) al triángulo

$$L \xrightarrow{w} T(M) \xrightarrow{T(u)} T(N) \xrightarrow{T(v)} T(L)$$

de dodne resulta la exactitud en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{TM})$.

(d) Exactitud en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{M})$.
Consideremos el triángulo

$$T^{-1}(L) \xrightarrow{-T^{-1}(w)} M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} L,$$

el cual es equivalente a

$$T^{-1}(L) \xrightarrow{T^{-1}(w)} M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} L.$$

Efectivamente, basta considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}L \arrow[r, "-T^{-1}w"] \arrow[d, equal, "-Id_{T^{-1}L}"'] & M \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal, "Id_M"'] & N \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal, "Id_N"] & L \arrow[d, equal, "Id_L"] \\
T^{-1}L \arrow[r, "T^{-1}w"'] & M \arrow[r, "u"'] & N \arrow[r, "v"'] & L.
\end{tikzcd}$$

Aplicando el argumento del inciso (a) al triángulo

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}(L) \arrow[r, "T^{-1}(w)"] & M \arrow[r, "u"] & N \arrow[r, "v"] & L,
\end{tikzcd}$$

obtenemos la exactitud deseada.

El caso contravariante se demuestra de manera análoga.

□

En éste trabajo usaremos el siguiente resultado que se puede encontrar en [**?**].

PROPOSICIÓN 1.33. *El Lema del Cinco.*
Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y con los renglones exactos en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h_2"'] & M_3 \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h_3"] & M_4 \arrow[r, "t"] \arrow[d, "h_4"] & M_5 \arrow[d, "h_5"] \\
N_1 \arrow[r, "f"'] & N_2 \arrow[r, "g"'] & N_3 \arrow[r, "l"'] & N_4 \arrow[r, "s"'] & N_5.
\end{tikzcd}$$

Si $h_1, h_2, h_4,$ y h_5 son isomorfismos, entonces h_3 también lo és.

Como consecuencia del Lema del Cinco y de la Proposición 1.32, tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.34.
Sea $\mathscr{T}$ una categoría pre-triangulada. Consideremos los siguientes triángulos y el morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "f"] & TX \arrow[d, "T(h)"] \\
X_1 \arrow[r, "\alpha"'] & Y_1 \arrow[r, "\beta"'] & Z_1 \arrow[r, "\gamma"'] & TX_1.
\end{tikzcd}$$

Si h y g son isomorfismos, entonces f es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.
Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,-)$ al diagrama anterior, obtenemos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{X}) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "h_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{Y}) \arrow[r, "v_*"] \arrow[d, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{Z}) \arrow[r, "w_*"] \arrow[d, "f_*"] & {} \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{X}_1) \arrow[r, "\alpha_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{Y}_1) \arrow[r, "\beta_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{Z}_1) \arrow[r, "\gamma_*"'] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{TX}) \arrow[r] \arrow[d, "T(h)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{TY}) \arrow[r] \arrow[d, "T(g)_*"] & \cdots \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{TX}_1) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{TY}_1) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como h y g son isomorfismos, se tiene que $h_*, g_*, T(h)_*, T(g)_*$ son isomorfismos. Luego por 1.33 concluimos que f_* también lo és. Así tenemos que existe $s \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Z}_1,\mathrm{Z})$ tal que $fs = f_*(s) = 1_{Z_1}$, ésto nos dice que f tiene inverso por la derecha. De manera similar al razonamiento anterior, sólo que aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(-,\mathrm{Z})$ a dicho diagrama, se puede probar que f tiene inverso por la izquierda.

□

OBSERVACIÓN 1.35.
Sea $\mathscr{T}$ una categoría triangulada con clase de triángulos $\mathfrak{T}$. Entonces, toda subcategoría triángulada $\mathscr{T}'$ de $\mathscr{T}$ es triangulada con clase de triángulos $\mathfrak{T}'$, donde $\mathfrak{T}'$ es la clase de triángulos de $\mathscr{T}$ con componentes en $\mathscr{T}'$.

1.3. Funtores exactos

DEFINICIÓN 1.36.
Sea $F : \mathscr{T}_1 \longrightarrow \mathscr{T}_2$ un funtor entre categorías trianguladas cuyas respectivas traslaciones son T_1 y T_2. Diremos que el funtor F es exacto si:

(a) Existe un isomorfismo natural $\varphi : FT_1 \longrightarrow T_2F$.

(b) Si $M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \xrightarrow{w} T_1M_1$ es un triángulo en $\mathscr{T}_1$, entonces $F(M_1) \xrightarrow{F(u)} F(M_2) \xrightarrow{F(v)} F(M_3) \xrightarrow{\varphi_{M_1}F(w)} T_2F(M_1)$ es un triángulo en $\mathscr{T}_2$.

PROPOSICIÓN 1.37.
Si F es un funtor exacto, entonces para toda $i \in \mathbb{Z}$ existe un isomorfismo entre funtores

$$\varphi^{[i]} : FT_1^i \longrightarrow T_2^i F$$

donde $\varphi^{[i]} := \begin{cases} [T_2^{i-1}\varphi]\varphi^{[i-1]}T_1 & si\ i \geq 2 \\ \varphi & si\ i = 1 \\ Id_F & si\ i = 0 \\ \left(T_2^i\varphi^{[-i]}T_1^i\right)^{-1} & si\ i < 0 \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN.
Probaremos la proposición en cada uno de los siguientes casos:

(a) Si $i > 0$. En este caso procederemos por inducción.
Para $i = 1$ por definición se cumple.
Supongamos que la proposición es válida para i, es decir

$$\varphi^{[i]} : FT_1^i \longrightarrow T_2^i F$$

es un isomorfismo. Veamos que se cumple para $i + 1$.

$$\varphi^{[i+1]} = [FT_1^{[i+1]} = \ FT_1^{[i]}T_1 \xrightarrow{\varphi^{[i]}T_1} T_2^iFT_1 \xrightarrow{T_2^i\varphi} T_2^iT_2F \ = T_2^{[i+1]}F]$$

es un isomorfismo, luego la proposición es válida para $i > 0$.

(b) Si $i = 0$
En este caso tenemos que $\varphi^{[0]} = Id$.

(c) Para $-i$ con $i > 0$.
Tenemos el siguiente isomorfismo

$$F = FT_1^iT_1^{-i} \xrightarrow{\varphi^{[i]}T_1^{-i}} T_2^iFT_1^{-i}$$

aplicando T_2^{-i} obtenemos el isomorfismo

$$T_2^{-i}F = T_2^{-i}FT_1^iT_1^{-i} \xrightarrow{T_2^{-i}\varphi^{[i]}T_1^{-i}} T_2^{-i}T_2^iFT_1^{-i} \ = FT_1^{-i},$$

así que definamos

$$\varphi^{[-i]} := \left(T_2^{-i}\varphi^{[i]}T_1^{-i}\right)^{-1}.$$

Así hemos probado la proposición.

□

DEFINICIÓN 1.38.
Sean $F, G : \mathscr{T}_1 \longrightarrow \mathscr{T}_2$ funtores exactos. Diremos que la transformación natural $\alpha : F \longrightarrow G$ es un morfismo de funtores exactos si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
FT_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha T_1"'] & T_2F \arrow[d, "T_2\alpha"] \\
GT_1 \arrow[r, "\psi"'] & T_2G.
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 1.39.
Si $\alpha : F \longrightarrow G$ es un morfismo de funtores exactos, entonces tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo, para toda $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{tikzcd}
FT_1^i \arrow[r, "\varphi^{[i]}"] \arrow[d, "\alpha T_1^i"'] & T_2^iF \arrow[d, "T_2^i\alpha"] \\
GT_1^i \arrow[r, "\psi^{[i]}"'] & T_2^iG
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN.
La demostración la haremos por casos:

(a) $i > 0$. La prueba la haremos por inducción.
Para $i = 1$, por la definición anterior, se cumple la proposición.

Supongamos que la proposición es válida para i, es decir, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
FT_1^i \arrow[r, "\varphi^{[i]}"] \arrow[d, "\alpha T_1^i"'] & T_2^iF \arrow[d, "T_2^i\alpha"] \\
GT_1^i \arrow[r, "\psi^{[i]}"'] & T_2^iG
\end{tikzcd}$$

Ahora veamos que se cumple para $i + 1$. Notemos que

$$FT_1^{i+1} = FT_1^iT_1 \xrightarrow{\varphi^{[i]}T_1} T_2^iFT_1$$

y, por hipótesis de inducción, tenemos que los cuadrados interiores del siguiente diagrama conmutan. Deseamos ver que el cuadrado exterior también lo hace

$$\begin{tikzcd}
FT_1^iT_1 \arrow[r, "\varphi^{[i]}T_1"] \arrow[d, swap, "\alpha T_1^{i+1}"] \arrow[rr, bend left, "\varphi^{[i+1]}"] & T_2^iFT_1 \arrow[r, "T_2^i\varphi"] \arrow[d, swap, "(T_2^i\alpha)T_1"] & T_2^{i+1}F \arrow[d, "T_2^{i+1}\alpha"] \\
GT_1^iT_1 \arrow[r, swap, "\psi^{[i]}T_1"] \arrow[rr, bend right, swap, "\psi^{[i+1]}"] & T_2^iGT_1 \arrow[r, swap, "T_2^i\psi"] & T_2^iT_2G,
\end{tikzcd}$$

como $\varphi^{[i+1]} = [T_2^i\varphi]\varphi^{[i]}T_1$ tenemos que el triángulo superior es conmutativo. De manera análoga tenemos que el triángulo inferior conmuta. De aqui se sigue que el cuadrado exterior es conmutativo.

(b) $-i$ con $i > 0$.
Note que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
F = FT_1^iT_1^{-i} \arrow[r, "\varphi^{[i]}T_1^{-i}"] \arrow[d, swap, "(\alpha T_1^i)T_1^{-i}"] & T_2^iFT_1^{-i} \arrow[d, "T_2^i\alpha T_1^{-i}"] \\
G \arrow[r, swap, "\psi^{[i]}T_1^{-i}"] & T_2^iGT_1^{-i}
\end{tikzcd}$$

aplicando T_2^{-i} al diagrama anterior obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T_2^{-i}F \arrow[r, "T_2^{-i}[\varphi^{[i]}T_1^{-i}]"] \arrow[d, swap, "T_2^{-i}(\alpha T_1^i)T_1^{-i}"] & FT_1^{-i} \arrow[d, "\alpha T_1^{-i}"] \\
T_2^{-i}G \arrow[r, swap, "T_2^{-i}[\psi^{[i]}T_1^{-i}]"] & GT_1^{-i}.
\end{tikzcd}$$

Entonces conmuta el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd}
FT_1^{-i} \arrow[r, "\left[T_2^{-i}[\varphi^{[i]}T_1^{-i}]\right]^{-1}"] \arrow[d, swap, "\alpha T_1^{-i}"] & T_2^{-i}F \arrow[d, "T_2^{-i}\alpha"] \\
GT_1^{-i} \arrow[r, swap, "\left[T_2^{-i}[\psi^{[i]}T_1^{-i}]\right]^{-1}"] & T_2^{-i}G,
\end{tikzcd}$$

pero recordemos que $\varphi^{[-i]} = \left[T_2^{-i}[\varphi^{[i]}T_1^{-i}]\right]^{-1}$ y $\psi^{[-i]} = [T_2^{-1}[\psi^{[i]}T_1^{-i}]]^{-1}$.

□

PROPOSICIÓN 1.40.
Si F y G son funtores exactos entonces GF es también un funtor exacto.

DEMOSTRACIÓN.
Sean $F : \mathscr{T}_1 \longrightarrow \mathscr{T}_2$ y $G : \mathscr{T}_2 \longrightarrow \mathscr{T}_3$ dos funtores exactos entre categorías trianguladas arbitrarias con traslaciones T_1, T_2 y T_3 respectivamente. Como F y G cumplen con la definición anterior entonces existen isomorfismos $\varphi : FT_1 \longrightarrow T_2F$ y $\psi : GT \longrightarrow T_3G$. Veamos que se cumplen las condiciones de la definición 1.36.

(a) Tenemos el isomorfismo natural

$$\theta := \psi_F G(\varphi) : GFT_1 \longrightarrow T_3GF.$$

(b) Sea $M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \xrightarrow{w} T_1(M_1)$ un triángulo en $\mathscr{T}_1$, al aplicar el funtor exacto F obtenemos el siguiente triángulo en $\mathscr{T}_2$

$$F(M_1) \xrightarrow{F(u)} F(M_2) \xrightarrow{F(v)} F(M_3) \xrightarrow{\varphi_{M_1}F(w)} T_2F(M_1)$$

al aplicar el funtor G obtenemos

$$GF(M_1) \xrightarrow{GF(u)} GF(M_2) \xrightarrow{GF(v)} GF(M_3) \xrightarrow{\psi_{F(M_1)}G\varphi_{M_1}F(w)} T_3GF(M_1)$$

que es un triángulo en $\mathscr{T}_3$. Pero

$$\psi_{F(M_1)}G(\varphi_{M_1}F(w)) = \psi_{F(M_1)}G(\varphi_{M_1})G(F(w)) = \Theta_{M_1}GF(w)$$

Así hemos visto que la composición de funtores exactos resulta ser exacto.

□

En lo que sigue si $F : \mathscr{T}_1 \longrightarrow \mathscr{T}_2$ es un funtor exacto de categorías trianguladas, denotaremos por φ^F al isomorfismo $FT_1 \longrightarrow T_2F$.

LEMA 1.41.
Si tenemos los siguientes funtores exactos

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}_1 \arrow[r, "L"] & \mathscr{T}_2 \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, shift right, "G"'] & \mathscr{T}_3 \arrow[r, "H"] & \mathscr{T}_4 \end{tikzcd}$$

y el morfismo de funtores exactos $\eta : F \longrightarrow G$, entonces tenemos los siguientes un morfismos de funtores exactos: $H\eta : HF \longrightarrow HG$ y $\eta L : FL \longrightarrow GL$ Si η es un isomorfismo también lo son $H\eta$ y ηL

DEMOSTRACIÓN.
Por la observación 1.18 tenemos que $H\eta$ y ηL son transformaciones naturales.

Sólo nos falta ver que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
HFT_2 \arrow[r, "\varphi^{HF}"] \arrow[d, "H\eta T_2"'] & T_4HF \arrow[d, "T_4H\eta"] \\
HGT_2 \arrow[r, "\varphi^{HG}"'] & T_4HG
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FLT_1 \arrow[r, "\varphi^{FL}"] \arrow[d, "\eta LT_1"'] & T_3FL \arrow[d, "T_3\eta L"] \\
GLT_1 \arrow[r, "\varphi^{GL}"'] & T_3GL.
\end{tikzcd}$$

Como, por hipótesis, η es un morfismo de funtores exactos, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
FT_2 \arrow[r, "\varphi^F"] \arrow[d, "\eta T_2"'] & T_3F \arrow[d, "T_3\eta"] \\
GT_2 \arrow[r, "\varphi^G"'] & T_3G
\end{tikzcd}$$

el cual sigue siendo conmutativo al aplicarle el funtor H. Como H es funtor exacto obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
HFT_2 \arrow[r, "H\varphi^F"] \arrow[d, "H\eta T_2"'] & HT_3F \arrow[r, "\varphi^H F"] \arrow[d, "HT_3\eta"] & T_4HF \arrow[d, "T_4H\eta"] \\
HGT_1 \arrow[r, "H\varphi^G"'] & HT_3G \arrow[r, "\varphi^H G"'] & T_4HG.
\end{tikzcd}$$

Como $\varphi^{HF} = (\varphi^H F)(H\varphi^F)$ y $\varphi^{HG} = (\varphi^H G)(H\varphi^G)$ se tiene que $H\eta$ es un morfismo entre funtores exactos. Ahora veamos que ηL es un morfismo de funtores exactos. Por hipótesis tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
FT_2 \arrow[r, "\varphi^F"] \arrow[d, "\eta T_2"'] & T_3F \arrow[d, "T_3\eta"] \\
GT_2 \arrow[r, "\varphi^G"'] & T_3G
\end{tikzcd}$$

el cual al precomponer con el funtor exacto L sigue conmutando

$$\begin{tikzcd}
FT_2L \arrow[r, "\varphi^F L"] \arrow[d, "\eta T_2L"'] & T_3FL \arrow[d, "T_3\eta L"] \\
GT_2L \arrow[r, "\varphi^G L"'] & T_3GL.
\end{tikzcd}$$

Como $\eta : F \longrightarrow G$ es un morfismo natural, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
FLT_1 \arrow[r, "F(\varphi^L)"] \arrow[d, "\eta LT_1"'] & FT_2L \arrow[r, "\varphi^F L"] \arrow[d, "\eta T_2L"'] & T_3FL \arrow[d, "T_3\eta L"] \\
GLT_1 \arrow[r, "G(\varphi^L)"'] & GT_2L \arrow[r, "\varphi^G L"'] & T_3GL.
\end{tikzcd}$$

Como $(\varphi^F L)(F(\varphi^L)) = \varphi^{FL}$ y $(\varphi^G L)(G(\varphi^L)) = \varphi^{GL}$ se obtiene el resultado.

$\square$

1.4. Coproductos y funtores que conmutan con ellos

DEFINICIÓN 1.42.
Sea $F : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{V}$ *un funtor entre dos k-categorías con coproductos. Consideremos a un familia* $\{M_i\}_{i\in I}$ *de objetos en* $\mathscr{U}$*, entonces tenemos,* $\forall j \in I$ *el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} F(M_i) \arrow[r, dotted, "\Phi_F"] & F\left(\coprod_{i\in I} M_i\right) \\
F(M_j). \arrow[u, "\tau_j"] \arrow[ur, "F(\sigma_j)"'] &
\end{tikzcd}$$

La propiedad universal del coproducto nos da la existencia del morfismo de conmutación Φ_F*. Diremos que el funtor* F *conmuta con el coproducto si* Φ_F *es un isomorfismo para cualquier familia* $\{M_i\}_{i\in I}$ *de objetos de* $\mathscr{U}$*.*

LEMA 1.43.
Si $F : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{V}$ *es una equivalencia entre categorías con coproductos, entonces* F *conmuta con coproductos.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $X = \coprod_{i\in I} X_i$. Note que tenemos el morfismo de conmutación

$$\begin{tikzcd}
\coprod F(X_i) \arrow[rr, "\Phi_F"] & & F\left(\coprod X_i\right) \\
& F(X_j), \arrow[ul, "\sigma_{F(X_j)}"] \arrow[ur, "F(\sigma_{X_j})"'] &
\end{tikzcd}$$

lo que falta probar es que Φ_F es un isomorfismo. Como F es denso, existe $Y \in \mathscr{U}$ y un isomorfismo

$$\delta : \coprod F(X_i) \longrightarrow F(Y)$$

así $\Phi_F\delta^{-1} : F(Y) \longrightarrow F\left(\coprod X_i\right)$. Como F es pleno, existe $h : Y \longrightarrow \coprod X_i$ tal que $\Phi\delta^{-1} = F(h)$. Queremos probar que $F(h)$ es un isomorfismo. Como $\delta\sigma_{F(X_j)} : F(X_j) \longrightarrow F(Y)$ y F es pleno, entonces $\delta\sigma_{F(X_j)} = F(u_j)$. Sea $u : \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow Y$ el morfismo inducido por la familia $\{\ u_i : X_i \longrightarrow Y\ \}_{i\in I}$. Tenemos que $F(h)$ es un isomorfismo si y sólo si h lo es. Veamos que $u\circ h = Id_Y$ y que $h\circ u = 1_{\coprod X_i}$. Notemos que tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\coprod X_i \arrow[r, "u"] & Y \\
& X_j \arrow[ul, "\sigma_{X_j}"] \arrow[u, "u_j"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod F(X_i) \arrow[r, "\delta"] & F(Y) \\
F(X_j). \arrow[u, "\sigma_{F(X_j)}"] \arrow[ur, "F(u_j)"']
\end{tikzcd}$$

Como

$$F(u)F(h)\delta\sigma_{F(X_j)} = F(u)\Phi_F\sigma_{F(X_j)} = F(u)F(\sigma_{X_j})$$
$$= F(u\sigma_{X_j}) = F(u_j) = \delta\sigma_{F(X_j)}$$

entonces, $\forall j \in I$ se tiene que $F(u)F(h)\delta\sigma_{F(X_j)} = \delta\sigma_{F(X_j)}$. Se sigue que

$$F(u)F(h)\delta = \delta.$$

Como δ es un isomorfismo, se tiene que $F(u)F(h) = Id_{F(Y)}$. Como

$$F(hu_j) = F(h)F(u_j) = F(h)\delta\sigma_{F(X_j)} = \Phi_F\sigma_{F(X_j)} = F(\sigma_{X_j})$$

y como F es fiel, $\forall j \in I$, tenemos que $hu_j = \sigma_{X_j}$. Luego, tenemos que $hu\sigma_{X_j} = hu_j = \sigma_{X_j}$, y por la propiedad universal del coproducto tenemos que

$$hu = Id_{\coprod X_i}$$

En consecuencia,

$$F(h)F(u) = F(hu) = F(Id_{\coprod X_i}) = Id_{F(\coprod X_i)}.$$

Esto implica que $F(h)$ es un isomorfismo. Entonces concluimos que Φ_F es un isomorfismo.

□

PROPOSICIÓN 1.44.
Sean $F : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{V}$ *y* $G : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{W}$ *dos funtores que conmutan con el coproducto. Entonces* $G \circ F$ *también conmuta con el coproducto.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathscr{U}$. Como el funtor F conmuta con coproductos tenemos el siguiente diagrama conmutativo, con Φ_F isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} F(M_i) \arrow[r, "\Phi_F"] & F\left(\coprod_{i\in I} M_i\right). \\
F(M_j) \arrow[u, "\sigma_{F(M_j)}"] \arrow[ur, "F(\sigma_{M_j})"']
\end{tikzcd}$$

Aplicando a este diagrama el funtor G obtenemos

$$\begin{tikzcd}
G\left(\coprod_{i\in I} F(M_i)\right) \arrow[r, "G(\Phi_F)"] & GF\left(\coprod_{i\in I} M_i\right) \\
GF(M_j). \arrow[u, "G(\sigma_{F(M_j)})"] \arrow[ur, "GF(\sigma_{M_j})"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego, tenemos el diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} GF(M_i) \arrow[r, dotted, "\Phi_G"] & G\left(\coprod_{i\in I} F(M_i)\right) \arrow[r, "G(\Phi_F)"] & GF\left(\coprod_{i\in I} M_i\right) \\
& GF(M_j). \arrow[ul, "\sigma_{GF(M_j)}"] \arrow[u, "G(\sigma_{F(M_j)})"] \arrow[ur, "GF(\sigma_{M_j})"'] &
\end{tikzcd}$$

Como G conmuta con coproductos, tenemos que Φ_G es un isomorfismo. Entonces concluimos que el triángulo exterior conmuta y el isomorfismo $G\left(\Phi_F\right) \circ \Phi_G$ coincide con el morfismo de conmutación Φ_{GF}.

□

LEMA 1.45.
Sea $F : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{V}$ *un funtor que conmuta con coproductos y tenemos que* $G : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{V}$ *es un funtor isomorfo a* F*, entonces* G *también conmuta con coproductos.*

DEMOSTRACIÓN.
Considere una familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathscr{U}$. Como F conmuta con coproductos, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} F(M_i) \arrow[r, "\Phi_F"] & F\left(\coprod_{i\in I} M_i\right) \\
F(M_j) \arrow[u, "\sigma_{F(M_j)}"] \arrow[ur, "F(\sigma_{M_j})"'] &
\end{tikzcd}$$

con Φ_F isomorfismo, $\forall j \in I$. Como G es isomorfo a F, existe un isomorfismo natural $\eta : G \longrightarrow F$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F(M_j) \arrow[r, "\sigma_{F(M_j)}"'] \arrow[rr, bend left, "F(\sigma_{M_j})"] \arrow[d, "\eta_{M_j}"'] & \coprod_{i\in I} F(M_i) \arrow[r, "\Phi_F"'] \arrow[d, "\coprod \eta_{M_i}"'] & F\left(\coprod_{i\in I} M_i\right) \arrow[d, "\eta_{\coprod M_i}"] \\
G(M_j) \arrow[r, "\sigma_{G(M_j)}"'] \arrow[rr, bend right, "G(\sigma_{M_j})"'] & \coprod_{i\in I} G(M_i) \arrow[r, "\Phi_G"'] & G\left(\coprod_{i\in I} M_i\right).
\end{tikzcd}$$

Allí conmutan los triángulos, el cuadrado izquierdo y el rectángulo exterior. Luego, también conmuta el cuadrado derecho y Φ_G resulta isomorfismo.

$\square$

DEFINICIÓN 1.46.
Sea $\mathscr{U}$ una categoría arbitraria con coproductos. Un objeto $M \in \mathscr{U}$ se llama compacto si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\mathrm{M}, -)$ *conmuta con el coproducto.*

LEMA 1.47.
Si R es un anillo y M es un R-módulo finitamente generado, entonces M es compacto.

DEMOSTRACIÓN.
Veamos que $\mathrm{Hom_R(M,-)}$ conmuta con el coproducto. Consideremos las inclusiones σ_j de M_j en $\coprod_{i\in I} M_i$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I}\mathrm{Hom_R(M,M_i)} \arrow[r, dotted, "\phi"] & \mathrm{Hom_R(M,\coprod_{i\in I} M_i)} \\
\mathrm{Hom_R(M,M_j)} \arrow[u, hook, "\tau_j"] \arrow[ur, "\mathrm{Hom(1,\sigma_j)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como M es compacto si y sólo si ϕ es un isomorfismo, veamos que ϕ es isomorfismo. Sea $\alpha \in \coprod_{i\in I}\mathrm{Hom_R(M,M_i)}$ tal que $\phi(\alpha) = 0$. Probaremos que $\alpha = 0$. Como α está en $\coprod_{i\in I}\mathrm{Hom_R(M,M_i)}$ tenemos que $\alpha = \tau_{i_1}(u_{i_1}) + \tau_{i_2}(u_{i_2}) + \cdots + \tau_{i_s}(u_{i_s})$ asi que

$$\phi(\tau_{i_1}(u_{i_1}) + \tau_{i_2}(u_{i_2}) + \cdots + \tau_{i_s}(u_{i_s})) = 0$$

por otro lado

$$\phi(\tau_{i_1}(u_{i_1}) + \tau_{i_2}(u_{i_2}) + \cdots + \tau_{i_s}(u_{i_s})) = \sigma_{i_1}(u_{i_1}) + \sigma_{i_2}(u_{i_2}) + \cdots + \sigma_{i_s}(u_{i_s})$$

$$= \sigma_{i_1}(u_{i_1}) + \sigma_{i_2}(u_{i_2}) + \cdots + \sigma_{i_s}(u_{i_s}) = 0$$

por lo tanto $\sigma_{i_1}(u_{i_1}) = 0, \ldots, \sigma_{i_s}(u_{i_s}) = 0$ y como $\sigma_{i_k} : M_{i_k} \longrightarrow \coprod M_i$ son las incluciones para toda i_k esto implica que $u_{i_k} = 0$ para toda $k = 1, \ldots, s$. Así hemos probado que ϕ siempre es monomorfismo. Falta demostrar que ϕ es epimorfismo. Recordemos que ϕ es epimorfismo si y sólo si para toda

$$f : M \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i$$

existe $\tau_{i_1}(u_{i_1}) + \tau_{i_2}(u_{i_2}) + \cdots + \tau_{i_s}(u_{i_s})$ en $\coprod_{i\in I}\mathrm{Hom_R(M,M_i)}$ tal que

$$\phi(\tau_{i_1}(u_{i_1}) + \tau_{i_2}(u_{i_2}) + \cdots + \tau_{i_s}(u_{i_s})) = f.$$

Sean $\{m_1, \ldots, m_l\}$ los generadores de M, así $f(m_1), f(m_2), \ldots, f(m_l)$ están en $\coprod_{i\in I} M_i$. Ahora bien aplicando las proyecciones tenemos que

$$\pi_j f(m_1), \pi_j f(m_2), \ldots, \pi_j f(m_l)$$

son cero para casi toda j excepto para un número finito de ellas, es decir existen $j_1, \ldots, j_s \in I$ tales que $\pi_j f(m_j) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, l\}$ y todo $j \in I \setminus \{j_1, \ldots, j_s\}$. Entonces $\pi_{j_k} f : M \longrightarrow M_{j_k}$ para $k = 1, \ldots, s$ y si a éstos elementos distintos de cero les aplicamos las inclusiones tenemos que

$$\sigma_{j_1}\pi_{j_1} f + \ldots + \sigma_{j_s}\pi_{j_s} f$$

coincide en los generadores con f, entonces

$$\phi(\tau_{j_1}\pi_{j_1} f + \cdots + \tau_{j_s}\pi_{j_s} f) = \sigma_{j_1}\pi_{j_1} f + \ldots + \sigma_{j_s}\pi_{j_s} f = f.$$

Luego ϕ es epimorfismo. Así, como ϕ es monomorfismo y epimorfismo concluimos que ϕ es isomorfismo, y por lo tanto tenemos que M es compacto.

□

PROPOSICIÓN 1.48.
Sea $F : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{V}$ una equivalencia de categorías con coproductos y $Z \in \mathscr{U}$ compacto, entonces $F(Z)$ es compacto.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $h : F(Z) \longrightarrow \coprod_{i \in I} W_i$ un morfismo arbitrario. Veamos que el morfismo h tiene la siguiente forma

$$h = \sum_{j \in J} \sigma_{W_j} f_j$$

donde $\sigma_{W_j} : W_j \longrightarrow \coprod_{i \in I} W_i$ son las inclusiones canónicas, y tenemos a los morfismos $f_j : F(Z) \longrightarrow W_j$ con $j \in J$ y J subconjunto de I finito.
Como F es denso existen objetos $Z_i \in \mathscr{U}$ y existen isomorfismos ν_i tales que

$$\nu_i : W_i \longrightarrow F(Z_i)$$

para toda $i \in I$. Así, para cada $j \in I$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i \in I} W_i \arrow[r, dotted, "\nu"] & \coprod_{i \in I} F(Z_i) \\
W_j \arrow[u, "\sigma_{W_j}"] \arrow[r, "\nu_j"'] & F(Z_j) \arrow[u, "\sigma_{F(Z_j)}"']
\end{tikzcd}$$

y por la propiedad universal del coproducto, existe el morfimo ν. Como cada ν_i es un isomorfismo entonces tenemos que ν también lo es. La información obtenida hasta ahora la podemos resumir en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(Z) \arrow[r, "h"] & \coprod_{i \in I} W_i \arrow[r, "\nu"] & \coprod_{i \in I} F(Z_i) \\
 & W_j \arrow[u, "\sigma_{W_j}"] \arrow[r, "\nu_j"'] & F(Z_j). \arrow[u, "\sigma_{F(Z_j)}"']
\end{tikzcd}$$

Recordemos que F conmuta con el coproducto, pues es un funtor equivalencia. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
F(Z) \arrow[r, "h"] & \coprod_{i\in I} W_i \arrow[r, "\nu"] & \coprod_{i\in I} F(Z_i) \arrow[r, "\Phi"] & F\left(\coprod_{i\in I} Z_i\right) \\
 & W_j \arrow[u, "\sigma_{W_j}"] \arrow[r, "\nu_j"'] & F(Z_j) \arrow[u, "\sigma_{F(Z_j)}"'] \arrow[ur, "F(\sigma_{Z_j})"'] &
\end{tikzcd}$$

con Φ un isomorfismo. Así tenemos un morfismo

$$\Phi\nu h : F(Z) \longrightarrow F\left(\coprod_{i\in I} Z_i\right)$$

como F es denso, $\Phi\nu h = F(f)$ con $f : Z \longrightarrow \coprod_{i\in I} Z_i$.

Por otro lado como Z es compacto, luego $f = \sum_{j\in J} \sigma_{Z_j} f_j$ con $f_j : Z \longrightarrow Z_j$ para cada j en el subconjunto finito J de I. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Phi\nu h = F(f) = \sum_{j\in J} F(\sigma_{Z_j})F(f_j) &= \sum_{j\in J} F(\sigma_{Z_j})\nu_j(\nu_j^{-1}F(f_j)) \\
&= \Phi\nu \sum_{j\in J} \sigma_{W_j}\nu_j^{-1}F(f_j).
\end{aligned}$$

Como Φ y ν son isomorfismos, tenemos que $h = \sum_{j\in J} \sigma_{W_j}\nu_j^{-1}F(f_j)$ donde $\nu_j^{-1}F(f_j) : F(Z) \longrightarrow W_j$. Así concluimos que $F(Z)$ es compacto.

□

1.5. Sistemas de generadores

Toda vez que hemos definido a los funtores exactos entre categorías trianguladas, nos hacemos las siguientes preguntas ¿cuándo un funtor es una equivalencia?, ¿cuándo dos funtores son isomorfos?. En esta sección vamos a establecer criterios para responder estas cuestiones.

Primero veremos la definición de un sistema de generadores de una categoría triangulada. La importancia de este concepto queda clara en la proposición que sigue a la definición.

DEFINICIÓN 1.49.
Sea $\mathscr{T}$ una categoría triangulada con coproductos. Diremos que una familia de objetos $\mathfrak{X}$ de $\mathscr{T}$ es un sistema de generadores si cualquier subcategoría triangulada $\mathscr{T}'$ de $\mathscr{T}$, cerrada bajo coproductos, cerrada bajo isomorfismos y que contiene a $\mathfrak{X}$, coincide con $\mathscr{T}$. Un objeto X de $\mathscr{T}$ es un generador de $\mathscr{T}$ si y sólo si $\mathfrak{X} = \{X\}$ es un sistema generador de $\mathscr{T}$.

LEMA 1.50.
Sea $F : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ *una equivalencia de categorías trianguladas con coproductos y* $\mathfrak{X}$ *es un sistema de generadores compactos, de* $\mathscr{T}$*, entonces* $\mathfrak{X}' = F(\mathfrak{X})$ *es un sistema de generadores compactos de* $\mathscr{T}'$*.*

DEMOSTRACIÓN.
Bastará ver que si $\mathscr{U}'$ es una subcategoría triangulada de $\mathscr{T}'$ cerrada bajo coproductos e isomorfismos, que contiene a $\mathfrak{X}$, entonces $\mathscr{U}' = \mathscr{T}'$. Sea $G : \mathscr{T}' \longrightarrow \mathscr{T}$ una casi inversa para F y $\mathscr{U}$ la subcategoría plena de $\mathscr{T}$ con objetos $\mathscr{U} := \{M \in \mathscr{T} \mid G(M') \cong M,$ para algún $M' \in \mathscr{U}'\}$. Probaremos que $\mathscr{U}$ es una subcategoría triangulada de $\mathscr{T}$ que es cerrada bajo coproductos e isomorfismos que contiene a $\mathfrak{X}$. Luego $\mathscr{T} = \mathscr{U}$ y $F\mathscr{T} = FG\mathscr{U} \subseteq \mathscr{U}'$, de donde resulta $\mathscr{U}' = \mathscr{T}'$. La afirmación sobre compactos es consecuencia de la proposición 1.48. Es evidente que $\mathscr{U}$ es cerrada bajo isomorfismos.

(a) Veamos que $\mathfrak{X} \subseteq \mathscr{U}$. Tenemos $F(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}' \subseteq \mathscr{U}'$, luego $GF(\mathfrak{X}) \subseteq G\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$. Pero $\mathscr{U}$ es cerrada bajo isomorfismos y $GF \cong Id_{\mathscr{T}}$, luego $\mathfrak{X} \subseteq \mathscr{U}$.

(b) $\mathscr{U}$ es cerrada bajo traslaciones. Sea $M \in \mathscr{U}$, tenemos $M \cong G(M')$ con $M' \in \mathscr{U}'$. Como G conmuta con traslaciones, luego $TM \cong TG(M') \cong GT(M') \in G(\mathscr{U}') \subseteq \mathscr{U}$.

(c) $\mathscr{U}$ es subcategoría triangulada de $\mathscr{T}$. Sea $f : M \longrightarrow N$ en $\mathscr{U}$. Luego existe $g : M' \longrightarrow N'$ en $\mathscr{U}'$, un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & N \arrow[d, "\cong"] \\
G(M') \arrow[r, "G(g)"'] & G(N')
\end{tikzcd}$$

y un triángulo $M' \xrightarrow{g} N' \longrightarrow L' \longrightarrow T(M')$ en $\mathscr{T}'$, con $L' \in \mathscr{U}'$. Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
GM' \arrow[r, "Gg"] \arrow[d, "\cong"'] & GN' \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & GL' \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & GT(M') \arrow[d, "\cong"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & L \arrow[r] & T(GM')
\end{tikzcd}$$

cuyo segundo renglón es un triángulo en $\mathscr{T}$ con $L \in \mathscr{U}$.

(d) $\mathscr{U}$ es cerrada bajo coproductos. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathscr{U}$. Luego, $M_i \cong G(M_i')$ con $M_i' \in \mathscr{U}'$ y tenemos que $\coprod_{i\in I} M_i' \in \mathscr{U}'$. Por el lema 1.43, $\coprod_{i\in I} M_i \cong \coprod_{i\in I} G(M_i') \cong G(\coprod_{i\in I} M_i') \in \mathscr{U}$.

□

PROPOSICIÓN 1.51.

Sean $F, G : \mathscr{T}_1 \longrightarrow \mathscr{T}_2$ funtores exactos entre categorías trianguladas con coproductos, tales que que conmutan con coproductos, y $\mathfrak{X}$ un sistema de generadores para $\mathscr{T}_1$. Entonces si $\alpha : F \longrightarrow G$ es un morfismo de funtores exactos, α es un isomorfismo si y sólo si para toda M en $\mathfrak{X}$ $\alpha_M : F(M) \longrightarrow G(M)$ es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Rightarrow}$ Como α es un isomorfismo, en particular α_M también lo es para toda $M \in \mathfrak{X}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\mathscr{L}$ la subcategoría plena de $\mathscr{T}_1$ cuyos objetos son aquellos $M \in \mathscr{T}_1$ tales que α_M es un isomorfismo. Veamos que se cumplen las siguientes afirmaciones

(a) Claramente tenemos que $\mathfrak{X} \subset \mathscr{L}$

(b) $\mathscr{L}$ es cerrada bajo traslaciones.
Sea $M \in \mathfrak{X}$, luego tenemos $\forall i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
FT_1^i(M) \arrow[r, "\varphi^{[i]}"] \arrow[d, "\alpha_{T_1^i(M)}"'] & T_2^iF(M) \arrow[d, "T_2^i\alpha_M"] \\
GT_1^i(M) \arrow[r, "\psi^{[i]}"'] & T_2^iG(M),
\end{tikzcd}$$

como $\varphi^{[i]}, \psi^{[i]}$ y $T_2^i\alpha_M$ son isomorfismos entonces $\alpha_{T_1^i(M)}$ es un isomorfismo y por lo tanto $T_1^i(M)$ está en $\mathscr{L}$.

(c) $\mathscr{L}$ es subcategoría triangulada de $\mathscr{T}_1$.
Sean M_1, M_2 elementos en $\mathscr{L}$. Tomemos el siguiente triángulo

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \xrightarrow{w} T_1M_1$$

si le aplicamos los funtores F y G obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(M_1) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_{M_1}"'] & F(M_2) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "\alpha_{M_2}"'] & F(M_3) \arrow[r, "F(w)"] \arrow[d, "\alpha_{M_3}"'] \arrow[rr, bend left, "\varphi_{M_1}F(W)"] & F(T_1M_1) \arrow[r, "\varphi_{M_1}"] \arrow[d, "\alpha_{T_1M_1}"] & T_2F(M_1) \arrow[d, "T_2\alpha_{M_1}"] \\
G(M_1) \arrow[r, "G(f)"] & G(M_2) \arrow[r, "G(g)"] & G(M_3) \arrow[r, "G(w)"] & G(T_1M_1) \arrow[r, "\psi_{M_1}"'] & T_2G(M_1).
\end{tikzcd}$$

Por la naturalidad del morfismo α los tres primeros cuadrados conmutan y como es un morfismo de funtores exactos tenemos que el último cuadrado también conmuta. Como $\alpha_{M_1}, \alpha_{M_2}, \alpha_{T_1M_1}$ y $T_2\alpha_{M_1}$ son isomorfismos tenemos, por la proposición 1.34 que α_{M_3} es un isomorfismo y esto implica que $M_3 \in \mathscr{L}$.

(d) $\mathscr{L}$ es cerrada bajo coproductos.
Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathscr{L}$, entonces $\forall i \in I$ tenemos que $\alpha_{M_i} : F(M_i) \longrightarrow G(M_i)$ es un isomorfismo. Lo que deseamos probar es que $\alpha_{\coprod_{i\in I} M_i} : F(\coprod_{i\in I} M_i) \longrightarrow G(\coprod_{i\in I} M_i)$ también es un isomorfismo. Como F y G conmutan con sumas directas tenemos que sus respectivos morfismos de conmutación son: $\Phi_F : \coprod_{i\in I} F(M_i) \longrightarrow F\left(\coprod_{i\in I} M_i\right)$ y $\Phi_G : \coprod_{i\in I} G(M_i) \longrightarrow G\left(\coprod_{i\in I} M_i\right)$ los cuales cumplen que $\forall j \in I$ $\Phi_F\sigma_{F(M_j)} = F(\sigma_{M_j})$ y $\Phi_G\sigma_{G(M_j)} = G(\sigma_{M_j})$. Consideremos el siguiente diagrama para $j \in I$

$$\begin{tikzcd}
F(M_j) \arrow[r, "\alpha_{M_j}"] \arrow[d, "\sigma_{F(M_j)}"'] & G(M_j) \arrow[d, "\sigma_{G(M_j)}"] \\
\coprod_{i\in I} F(M_i) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Phi_F"'] & \coprod_{i\in I} G(M_i) \arrow[d, "\Phi_G"] \\
F\left(\coprod_{i\in I} M_i\right) \arrow[r, "\alpha_{\coprod M_i}"'] & G\left(\coprod_{i\in I} M_i\right)
\end{tikzcd}$$

en donde $\phi := \Phi_G^{-1}(\alpha_{\coprod M_i})\Phi_F$. Vamos a probar que el cuadrado superior conmuta. Para ello veremos que el cuadrado exterior lo hace y posteriormente utilizaremos este hecho para lograr nuestro propósito. Notemos que

$$\Phi_G\sigma_{G(M_j)}\alpha_{M_j} = G(\sigma_{M_j})\alpha_{M_j}$$

y que

$$\alpha_{\coprod M_i}\Phi_F\sigma_{F(M_j)} = \alpha_{\coprod M_i}F(\sigma_{M_j}).$$

Por la naturalidad de α se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
G(M_j) \arrow[r, "G(\sigma_{M_j})"] & G\left(\coprod M_i\right) \\
F(M_j) \arrow[r, "F(\sigma_{M_j})"'] \arrow[u, "\alpha_{M_j}"] & F\left(\coprod M_i\right) \arrow[u, "\alpha_{\coprod M_i}"']
\end{tikzcd}$$

y esto nos dice que

$$G(\sigma_{M_j})\alpha_{M_j} = \alpha_{\coprod M_i}F(\sigma_{M_j})$$

por lo tanto

$$\Phi_G\sigma_{G(M_j)}\alpha_{M_j} = \alpha_{\coprod M_i}\Phi_F\sigma_{F(M_j)}$$

es decir, el cuadrado exterior conmuta. Ahora veamos que

$$\psi\sigma_{F(M_j)} = \sigma_{G(M_j)}\alpha_{M_j}.$$

Notemos que

$$\Phi_G\phi\sigma_{F(M_j)} = \alpha_{\coprod M_j}\Phi_F\sigma_{F(M_j)} = \Phi_G\sigma_{G(M_j)}\alpha_{M_j}.$$

Como Φ_G es un isomorfismo concluimos que $\phi\sigma_{F(M_j)} = \sigma_{G(M_j)}\alpha_{M_j}$, $\forall j \in I$. Pero esto implica que $\phi = \coprod_{i\in I}\alpha_{M_i}$, como todas las α_{M_i} son isomorfismos, ψ es un isomorfismo y por lo tanto $\alpha_{\coprod_{i\in I} Mi}$ también lo es.

(e) $\mathscr{L}$ es cerrada bajo isomorfismos.
Sean $M \in \mathscr{L}, M' \in \mathscr{T}_1$ y $g : M \longrightarrow M'$ un isomorfismo en $\mathscr{T}_1$. Entonces conmuta el siguiente cuadro

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, "\alpha_M"] \arrow[d, "F(g)"'] & G(M) \arrow[d, "G(g)"] \\
F(M') \arrow[r, "\alpha_{M'}"'] & G(M'),
\end{tikzcd}$$

y como α_M es un isomorfismo, esto implica que $\alpha_{M'}$ también lo es.

Así, como $\mathfrak{X}$ es un sistema de generadores para $\mathscr{T}_1$, tenemos que $\mathscr{T}_1 = \mathscr{L}$.

□

LEMA 1.52.
Sea $F : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ *un funtor exacto entre dos categorías trianguladas. Entonces* $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FZ})$ *es isomorfismo si y sólo si* $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{TX},\mathrm{TZ}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FTX},\mathrm{FTZ})$ *es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $F : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ un funtor exacto entre dos categorías trianguladas con traslaciones T y T', respectivamente. Por definición tenemos el isomorfismo $\varphi : FT \longrightarrow T'F$ y sabemos que $\delta_Y = (T')^{-1}\varphi_{T^{-1}Y}$ es un isomorfismo, donde $\delta : (T')^{-1}F \longrightarrow FT^{-1}$. Sea $Y := TZ$. Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{T}^{-1}\mathrm{Y}) \arrow[rr, "F"] \arrow[d, "T"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FT}^{-1}\mathrm{Y}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{TX},\mathrm{Y}) \arrow[d, "F"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},(\mathrm{T}')^{-1}\mathrm{FY}) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(1,\delta_{\mathrm{Y}})"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FTX},\mathrm{FY}) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}(\varphi_{\mathrm{X}}^{-1},1)"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{T'FX},\mathrm{FY}). \arrow[u, "(T')^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{T}^{-1}\mathrm{Y})$, aplicando la traslación obtenemos $T(f) : TX \longrightarrow Y$; ahora aplicamos el funtor F para obtener $FT(f) : FTX \longrightarrow FY$. Al aplicar

$\mathrm{Hom}(\varphi^{-1}\mathrm{X},1)$ resulta

$$(T')FX \xrightarrow{\varphi_X^{-1}} FTX \xrightarrow{FT(f)} FY$$

entonces al aplicarle $(T')^{-1}$

$$FX \xrightarrow{(T')^{-1}\varphi_X^{-1}} (T')^{-}-1FTX \xrightarrow{(T')^{-}-1FT(f)} (T')^{-}-1FTY.$$

Recuerde que $\delta_Y : (T')^{-1}FY \longrightarrow FT^{-1}Y$; así

$$\mathrm{Hom}(1,\delta_\mathrm{Y})(\mathrm{T}')^{-1}\mathrm{Hom}(\varphi_\mathrm{X}^{-1},1)\mathrm{FT(f)} = \delta_\mathrm{Y}(\mathrm{T}')^{-1}\mathrm{FT(f)}(\mathrm{T}')^{-1}\varphi_\mathrm{X}^{-1}$$

$$= [(T')^{-1}\varphi_{T^{-1}Y}](T')^{-1}FT(f)(T')^{-1}\varphi_X^{-1} = (T')^{-1}[\varphi_{T^{-1}Y}FT(f)\varphi_X^{-1}].$$

Por la naturalidad de φ, sabemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
FT(X) \arrow[r, "FT(f)"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & FTT^{-1}(Y) \arrow[d, "\varphi_{(T^{-1}Y)}"] \\
T'F(X) \arrow[r, "T'F(f)"'] & T'FT^{-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

entonces

$$\mathrm{Hom}(1,\delta_\mathrm{Y})(\mathrm{T}')^{-1}\mathrm{Hom}(\varphi_\mathrm{X}^{-1},1)\mathrm{FT(f)} = (\mathrm{T}')^{-1}[\mathrm{T}'\mathrm{F(f)}\varphi_\mathrm{X}\varphi_\mathrm{X}^{-1}] = \mathrm{F(f)}$$

por lo tanto, el diagrama conmuta y esto implica el resultado deseado.

□

TEOREMA 1.53.
Sea $F : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ *un funtor exacto que conmuta con coproductos, entre dos categorías trianguladas con coproductos. Supongamos que* $\mathfrak{X}$ *es un sistema de generadores compactos de* $\mathscr{T}$*, cerrado bajo traslaciones, tal que:*

(i) $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FY})$ *es un isomorfismo, para todo* X, Y *en* $\mathfrak{X}$*.*

(ii) $F(X)$ *es compacto para toda* X *en* $\mathfrak{X}$*.*

(iii) La familia $F(X)$ *con* $X \in \mathfrak{X}$ *es un sistema de generadores de* $\mathscr{T}'$*.*

Entonces, el funtor F *es una equivalencia de categorías.*

DEMOSTRACIÓN.
(i) Veamos que para cada $X \in \mathfrak{X}$ se tiene que

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{W}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FW})$$

es isomorfismo para toda $W \in \mathscr{T}$. Sea $\mathscr{U}$ la subcategoría plena de $\mathscr{T}$ cuyos objetos son las $W \in \mathscr{T}$, tales que

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{W}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FW})$$

es un isomorfismo $\forall X \in \mathfrak{X}$. Veamos que se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) $\mathfrak{X} \subset \mathscr{U}$.
Es trivial porque si $W \in \mathfrak{X}$ entonces

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{W}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FW})$$

por hipótesis, es un isomorfismo para cada $X \in \mathfrak{X}$.

(b) $\mathscr{U}$ es cerrado bajo traslaciones.
Sea $W \in \mathscr{U}$ y $X \in \mathfrak{X}$, luego tenemos que $T^{-1}X$ está en $\mathfrak{X}$ y esto nos dice que $F_{T^{-1}X,W}$ es un isomorfismo. Así, por el lema 1.52 tenemos que $F_{TT^{-1}X,TW}$ es un isomorfismo y esto indica que TW está en $\mathscr{U}$, es decir los trasladados de W están en $\mathscr{U}$. Ahora sea $W \in \mathscr{U}$, $X \in \mathfrak{X}$, entonces $TX \in \mathfrak{X}$, luego $F_{TX,W}$ es un isomorfismo y esto implica que $F_{X,T^{-1}W}$ es un isomorfismo para toda $X \in \mathfrak{X}$. Así tenemos que $T^{-1}W \in \mathscr{U}$.

(c) $\mathscr{U}$ es cerrado bajo coproductos.
Sea $Y_i \in \mathscr{U}$ para toda $i \in I$. Queremos ver que $\coprod_{i\in I} Y_i \in \mathscr{U}$. Sea $X \in \mathfrak{X}$, note que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{Y_i}) \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\coprod_{\mathrm{i\in I}}\mathrm{Y_i}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{Y_j}) \arrow[u, "\tau_j"] \arrow[ur, "\mathrm{Hom}(1,\sigma_{\mathrm{Y_j}})"'] &
\end{tikzcd}$$

con Φ isomorfismo porque X es compacto. Otra de las hipótesis es que, en el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{F(Y_i)}) \arrow[r, "\Psi"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\coprod_{\mathrm{i\in I}}\mathrm{F(Y_i)}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FY_j}), \arrow[u, "\rho_j"] \arrow[ur, "\mathrm{Hom}(1,\sigma_{\mathrm{F(Y_j)}})"'] &
\end{tikzcd}$$

Ψ es un isomorfismo ya que $F(X)$ es compacto. Como F conmuta con coproductos, en el siguiente diagrama conmutativo tenemos que Φ_F es un isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I}F(Y_i) \arrow[r, "\Phi_F"] & F(\coprod_{i\in I}Y_i) \\
F(Y_j). \arrow[u, "\sigma_{F(Y_j)}"] \arrow[ur, "F(\sigma_{Y_j})"'] &
\end{tikzcd}$$

Con estas hipótesis probaremos que

$$F_{X,\coprod Y_i} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \coprod \mathrm{Y_i}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{F}\left(\coprod \mathrm{Y_i}\right))$$

es un isomorfismo. Para ello, bastará demostrar que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \coprod \mathrm{Y_i}) \arrow[r, "F_{X,\coprod Y_i}"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{F}(\coprod \mathrm{Y_i})) \\
\coprod \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y_i}) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[d, "\coprod F_{X,Y_i}"'] & \\
\coprod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{FY_i}) \arrow[r, "\Psi"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \coprod \mathrm{F}(\mathrm{Y_i})). \arrow[uu, "\mathrm{Hom}(1_{\mathrm{FX}}, \Phi_{\mathrm{F}})"']
\end{tikzcd}$$

En el supuesto de que el diagrama conmute, note que Φ, Ψ, Φ_F son isomorfismos y como por hipótesis cada F_{X,Y_i} lo es, entonces también $F_{X,\coprod Y_i}$ es un isomorfismo. Note que ver la conmutatividad del diagrama anterior es equivalente a ver que, para toda $j \in I$,

$$F_{X,\coprod Y_i} \Phi \tau_j = \mathrm{Hom}(1_{\mathrm{FX}}, \Phi_{\mathrm{F}}) \Psi (\coprod \mathrm{F_{X,Y_i}}) \tau_{\mathrm{j}}$$

en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \coprod_{\mathrm{i \in I}} \mathrm{Y_i}) \arrow[r, "F_{X,\coprod Y_i}"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{F}(\coprod \mathrm{Y_i})) \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y_j}) \arrow[r, "\tau_j"] \arrow[d, "F_{X,Y_j}"'] & \coprod \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y_i}) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[d, "\coprod F_{X,Y_i}"'] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{FY_j}) \arrow[r, "\rho_j"'] & \coprod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{FY_i}) \arrow[r, "\Psi"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \coprod \mathrm{F}(\mathrm{Y_i})). \arrow[uu, "\mathrm{Hom}(1_{\mathrm{FX}}, \Phi_{\mathrm{F}})"']
\end{tikzcd}$$

Sea $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y_j})$, entonces tenemos que

$$F_{X,\coprod Y_i} \Phi(\tau_j(h)) = F_{X,\coprod Y_i}(\mathrm{Hom}(1, \sigma_{\mathrm{Y_j}})(\mathrm{h})) = \mathrm{F}_{\mathrm{X},\coprod \mathrm{Y_i}}(\sigma_{\mathrm{Y_j}} \mathrm{h}).$$

Recordemos que $X \xrightarrow{h} Y_j \xrightarrow{\sigma_{Y_j}} \coprod_{i \in I} Y_i$ por lo tanto, al aplicar el funtor F, obtenemos

$$F_{X,\coprod Y_i}(\sigma_{Y_j} h) = F_{Y_j,\coprod Y_i}(\sigma_{Y_j}) F_{X,Y_j}(h).$$

Por otro lado,

$$\mathrm{Hom}(1_{\mathrm{FX}}, \Phi_{\mathrm{F}}) \Psi \left(\coprod \mathrm{F_{X,Y_i}} \right) [\tau_{\mathrm{j}}(\mathrm{h})] = \mathrm{Hom}(1_{\mathrm{FX}}, \Phi_{\mathrm{F}}) \Psi(\rho_{\mathrm{j}} \mathrm{F_{X,Y_j}}(\mathrm{h}))$$

$$= \mathrm{Hom}(1_{\mathrm{FX}}, \Phi_{\mathrm{F}})\mathrm{Hom}(1_{\mathrm{FX}}, \sigma_{\mathrm{F(Y_j)}})\mathrm{F}_{\mathrm{X,Y_j}}(\mathrm{h}) = \Phi_{\mathrm{F}}\sigma_{\mathrm{F(Y_j)}}\mathrm{F}_{\mathrm{X,Y_j}}(\mathrm{h})$$
$$= F_{Y_j,\coprod Y_i}(\sigma_{Y_j})F_{X,Y_j}(h).$$

Hemos probado que el diagrama conmuta y por lo tanto $F_{X,\coprod Y_i}$ es un isomorfismo. Como lo anterior se vale para toda $X \in \mathfrak{X}$ entonces tenemos que $\coprod Y_i \in \mathscr{U}$.

(d) $\mathscr{U}$ es una subcategoría triangulada de $\mathscr{T}$.
Sean $M_1, M_2 \in \mathscr{U}$. Tomemos el siguiente triángulo en $\mathscr{T}$:

$$M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \xrightarrow{w} TM_1,$$

vamos a probar que M_3 está en $\mathscr{U}$. Como F es un funtor exacto,

$$F(M_1) \xrightarrow{F(u)} F(M_2) \xrightarrow{F(v)} F(M_3) \xrightarrow{\varphi_{M_1}F(w)} T'F(M_1)$$

es un triángulo en $\mathscr{T}'$. Sea $X \in \mathfrak{X}$ entonces aplicando el funtor covariante $\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, -)$ al primer triángulo obtenemos la siguiente sucesión larga

$$\cdots \xrightarrow{\quad} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{M_1}) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{M_2}) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{M_3})$$

$$\xrightarrow[w^*]{\quad} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{TM_1}) \xrightarrow[(T(u))^*]{} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{TM_2}) \xrightarrow{\quad} \cdots$$

De manera análoga, si le aplicamos a

$$F(M_1) \xrightarrow{F(u)} F(M_2) \xrightarrow{F(v)} F(M_3) \xrightarrow{\varphi_{M_1}F(w)} TF(M_1)$$

el funtor $\mathrm{Hom}(\mathrm{FX}, -)$, obtenemos la siguiente sucesión larga

$$\cdots \xrightarrow{\quad} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{FM_1}) \xrightarrow{F(u)^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{FM_2}) \xrightarrow{F(v)^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{FM_3})$$

$$\xrightarrow[(\varphi_{M_1}F(w))^*]{\quad} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{FTM_1}) \xrightarrow[F(Tu))^*]{} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{FTM_2}) \xrightarrow{\quad} \cdots$$

entonces tenemos el siguiente diagrama donde los cuadrados conmutan por el lema 1.15

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{M}_1) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{M}_2) \arrow[r, "v^*"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{M}_3) \arrow[d, "F"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FM}_1) \arrow[r, "F(u)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FM}_2) \arrow[r, "F(v)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FM}_3)
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{M}_3) \arrow[r, "w^*"] \arrow[d, "F"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{TM}_1) \arrow[r, "(T(u))^*"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{TM}_2) \arrow[d, "F"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FM}_3) \arrow[r, "F(w)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FTM}_1) \arrow[r, "(FT(u))^*"'] \arrow[dr, "(\varphi_{M_2}FT(u))^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FTM}_2) \arrow[d, "\varphi^*_{M_2}"] \\
 & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{FX},\mathrm{T}'\mathrm{FM}_2)
\end{tikzcd}$$

Notemos que el primer renglón es exacto. Como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},-)$ es un funtor, nos implica la conmutatividad del siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FTM}_1) \arrow[r, "FT(u)^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FTM}_2) \arrow[d, "\varphi^*_{M_2}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FTM}_1) \arrow[r, "(\varphi_{M_2}FT(u))^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{T}'\mathrm{FM}_2)
\end{tikzcd}$$

Esto implica la exactitud del “renglón” inferior del diagrama 1.1. Ahora como todo conmuta, y los renglones superior e inferior son exactos en el diagrama 1.1, entonces el renglón de “enmedio” también es exacto y alicando la proposición 1.34 tenemos que

$$F:\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{M}_3) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FM}_3)$$

es un isomorfismo. Por lo tanto, para toda $X \in \mathfrak{X}$

$$F:\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{M}_3) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FM}_3)$$

es un isomorfismo, lo que implica que $M_3 \in \mathscr{U}$.

(e) $\mathscr{U}$ es cerrada bajo isomorfismos.
Sean $M \in \mathscr{U}, M' \in \mathscr{T}$ y $g: M \longrightarrow M'$ un isomorfismo en $\mathscr{T}$. Entonces por el lema 1.15, para cada $X \in \mathfrak{X}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{M}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "g^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FM}) \arrow[d, "F(g)^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X},\mathrm{M}') \arrow[r, "F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX},\mathrm{FM}')
\end{tikzcd}$$

se sigue que $M' \in \mathscr{U}$.

Como $\mathfrak{X}$ es un sistema de generadores de $\mathscr{T}$, entonces $\mathscr{U} = \mathscr{T}$. Así hemos probado que, si $X \in \mathfrak{X}$, tenemos que

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{W}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FX}, \mathrm{FW})$$

es un isomorfismo para toda $W \in \mathscr{T}$.
(ii) Ahora probemos que $F : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}'$ es fiel y pleno.
Sea $\mathscr{V}$ la subcategoría plena de $\mathscr{T}$ cuyos objetos son las $V \in \mathscr{V}$ tales que $F_{V,W}$: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FV}, \mathrm{FW})$ es un isomorfismo para toda $W \in \mathscr{T}$. Probemos las siguientes afirmaciones:

(a) $\mathfrak{X} \subset \mathscr{V}$.
Es fácil de ver, pues dado $X \in \mathfrak{X}$ y $\forall W \in \mathscr{T}$ tenemos que, por (i), $F_{X,W}$ es un isomorfismo, luego $X \in \mathscr{V}$.

(b) $\mathscr{V}$ es cerrada bajo traslaciones.
Sean $V \in \mathscr{V}$ y $W \in \mathscr{T}$. Tenemos que $F_{V,T^{-1}W}$ es un isomorfismo, y esto nos dice que $F_{TV,W}$ es isomorfismo, así que $TV \in \mathscr{V}$.
Ahora sean $V \in \mathscr{V}$ y $W \in \mathscr{T}$, entonces $F_{V,TW}$ es un isomorfismo. Observe que $F_{V,TW} = F_{TT^{-1}V,TW}$ luego $F_{T^{-1}V,W}$ es isomorfismo y esto nos dice que $T^{-1}V \in \mathscr{V}$.

(c) $\mathscr{V}$ es cerrada bajo coproductos.
Sean $V_i \in \mathscr{V}$, $\forall i \in I$. Vamos a probar que

$$F_{\coprod V_i,W} : \mathrm{Hom}(\textstyle\coprod_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \mathrm{V_i}, \mathrm{W}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{F}\left(\textstyle\coprod_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \mathrm{V_i}\right), \mathrm{FW})$$

es un isomorfismo.

$$\textstyle\prod_{i\in I} F_{V_i,W} : \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{V_i}, \mathrm{W}) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FV_i}, \mathrm{FW})$$

es el único morfismo tal que $\forall j \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{V_i}, \mathrm{W}) \arrow[r, "\prod F_{V_i,W}"] \arrow[d, "\pi_j"'] & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FV_i}, \mathrm{FW}) \arrow[d, "p_j"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{V_j}, \mathrm{W}) \arrow[r, "F_{V_j,W}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FV_j}, \mathrm{FW})
\end{tikzcd}$$

en donde π_j, p_j son las correspondientes proyecciones. Como cada $F_{V_j,W}$ es un isomorfismo, entonces $\prod_{i\in I} F_{V_i,W}$ es un isomorfismo. Tenemos los siguientes isomorfismos

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\textstyle\coprod_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \mathrm{V_i}, \mathrm{W}) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{V_i}, \mathrm{W})$$

$$\psi' : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\textstyle\coprod_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \mathrm{FV_i}, \mathrm{FW}) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FV_i}, \mathrm{FW})$$

tales que

$$\pi_j\psi = \mathrm{Hom}(\sigma_{\mathrm{V_j}}, 1_{\mathrm{W}}) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\textstyle\coprod_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{V_i}, \mathrm{W}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{V_j}, \mathrm{W})$$

$$p_j\psi' = \mathrm{Hom}(\sigma_{\mathrm{FV_j}}, 1_{\mathrm{FW}}) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\textstyle\coprod_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{FV_i}, \mathrm{FW}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FV_j}, \mathrm{FW})$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\coprod_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{V_i}, \mathrm{W}) \arrow[r, "F"] \arrow[dd, "\psi"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{F}(\coprod_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{V_i}), \mathrm{FW}) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathrm{F}}, 1_{\mathrm{F(W)}})"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\coprod_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{FV_i}, \mathrm{FW}) \arrow[d, "\psi'"] \\
\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{V_i}, \mathrm{W}) \arrow[d, "\pi_j"'] & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FV_i}, \mathrm{FW}) \arrow[d, "p_j"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{V_j}, \mathrm{W}) \arrow[r, "F_{\mathrm{V}_j, W}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FV_j}, \mathrm{FW}).
\end{tikzcd}$$

Veamos que este diagrama conmuta. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\coprod_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{V_i}, \mathrm{W})$. Por un lado,

$$p_j\psi'\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathrm{F}}, 1_{\mathrm{FW}})\mathrm{F(f)} = \mathrm{Hom}(\sigma_{\mathrm{FV_j}}, 1_{\mathrm{FW}})\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathrm{F}}, 1_{\mathrm{FW}})\mathrm{F(f)}$$

$$= \mathrm{Hom}(\Phi_{\mathrm{F}}\sigma_{\mathrm{F(V_j)}}, 1_{\mathrm{F(W)}})\mathrm{F(f)} = \mathrm{Hom}(\mathrm{F}(\sigma_{\mathrm{V_j}}), 1_{\mathrm{F(W)}})\mathrm{F(f)}$$

$$= F(f)F(\sigma_{V_j}) = F_{V_j,W}(f\sigma_{V_j});$$

por otro, tenemos que

$$F_{V_j,W}\pi_j\psi(f) = F_{V_j,W}\mathrm{Hom}(\sigma_{\mathrm{V_j}}, 1_{\mathrm{W}})\mathrm{(f)} = \mathrm{F_{V_j,W}(f\sigma_{V_j})}$$

luego el diagrama conmuta. Entonces

$$F_{V_j,W}\pi_j = p_j\psi'\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathrm{F}}, 1_{\mathrm{FW}})\mathrm{F}\psi^{-1}.$$

Por la unicidad de $\prod F_{V_i,W}$

$$\prod_i F_{V_i,W} = \psi'\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathrm{F}}, 1_{\mathrm{FW}})\mathrm{F}\psi^{-1}.$$

Como $\prod_i F_{V_i,W}, \psi', \mathrm{Hom}(\Phi_{\mathrm{F}}, 1_{\mathrm{FW}})$ y ψ^{-1} son isomorfismos se sigue que $F_{\coprod V_i,W}$ es isomorfismo para toda $W \in \mathscr{T}$, entonces $\coprod V_i \in \mathscr{V}$.

(d) $\mathscr{V}$ es subcategoría triangulada de $\mathscr{T}$.
Sean $M_1, M_2 \in \mathscr{V}$. Consideremos el siguiente triángulo en $\mathscr{T}$:

$$M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \xrightarrow{w} TM_1 \xrightarrow{T(u)} TM_2$$

al aplicarle el funtor exacto F obtenemos

$$F(M_1) \xrightarrow{F(u)} F(M_2) \xrightarrow{F(v)} F(M_3) \xrightarrow{F(w)} F(TM_1) \xrightarrow{FT(u)} F(TM_2).$$

Ahora le aplicamos el funtor contravariante $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{W})$ al primer triángulo, y el funtor $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{F(W)})$ a la sucesión obtenida al aplicar el funtor F y obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{TM}_2,\mathrm{W}) \arrow[r, "T(u)_*"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{TM}_1,\mathrm{W}) \arrow[r, "w_*"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{M}_3,\mathrm{W}) \arrow[d, "F"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FTM}_2,\mathrm{FW}) \arrow[r, "FT(u)"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{TF}(\mathrm{M}_1),\mathrm{F}(\mathrm{W})) \arrow[r, "F(w)_*"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{F}(\mathrm{M}_3),\mathrm{F}(\mathrm{W})) \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{T'FM}_2,\mathrm{FW}) \arrow[u, "(\psi_{M_2})_*"] \arrow[ur, "(\psi_{M_2}FT(u))_*"'] & &
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathrm{M}_3,\mathrm{W}) \arrow[r, "v_*"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{M}_2,\mathrm{W}) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathrm{M}_1,\mathrm{W}) \arrow[d, "F"] \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{F}(\mathrm{M}_3),\mathrm{F}(\mathrm{W})) \arrow[r, "F(v)_*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{F}(\mathrm{M}_2),\mathrm{F}(\mathrm{W})) \arrow[r, "F(u)_*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{F}(\mathrm{M}_1),\mathrm{F}(\mathrm{W}))
\end{tikzcd}$$

donde por el lema 1.15 los cuadrados conmutan y el triángulo lo hace por que $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{FW})$ es un funtor el cual nos da la conmutatividad del siguiente diagrama, que es equivalente al triángulo del diagrama 1.2

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FTM}_2,\mathrm{FW}) \arrow[r, "FT(u)"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FTM}_1,\mathrm{FW}) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{T'FM}_2,\mathrm{FW}) \arrow[u, "(\psi_{M_2})_*"] \arrow[r, "(\psi_{M_2}FT(u))_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}'}(\mathrm{FTM}_1,\mathrm{FW}).
\end{tikzcd}$$

Ahora, por la proposición 1.34 tenemos que

$$F : \mathrm{Hom}(\mathrm{M}_3,\mathrm{W}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{F}(\mathrm{M}_3),\mathrm{FW})$$

es un isomorfismo para todo $W \in \mathscr{T}$ y esto implica que $M_3 \in \mathscr{V}$.

(e) $\mathscr{V}$ es cerrada bajo isomorfismo.
La prueba de esto es análoga a la del inciso (e) anterior, también se sigue del lema 1.15.

Como $\mathfrak{X}$ es un sistema de generadores para $\mathscr{T}$, resulta $\mathscr{V} = \mathscr{T}$. Entonces, tenemos que F es fiel y pleno.

(iii) Veamos que F es denso.
Definamos a $\mathscr{R}$ como la subcategoría plena de $\mathscr{T}'$ cuyos objetos son las $Y \in \mathscr{T}'$ tales que $Y \simeq F(Y_0)$ con $Y_0 \in \mathscr{T}$. Vamos a demostrar que $\mathscr{R} = \mathscr{T}'$. Sea

$$\mathfrak{X}' = \{F(X) \mid X \in \mathfrak{X}\}$$

que por hipótesis es un sistema de generadores de $\mathscr{T}'$.

(a) $\mathfrak{X}' \subset \mathscr{R}$.
Es claro por la forma en la que definimos a $\mathfrak{X}'$.

(b) $\mathscr{R}$ es cerrada bajo traslaciones.
Sea $Y \in \mathscr{R}$, luego $Y \simeq F(Y_0)$ con $Y_0 \in \mathscr{T}$. Como T' es un funtor,

$$T'Y \simeq T'F(Y_0)$$

y, por lo tanto,

$$T'Y \simeq T'F(Y_0) \xrightarrow{\varphi_{Y_0}^{-1}} FT(Y_0).$$

Esto nos dice que $T'Y \in \mathscr{R}$. Ahora, aplicamos el funtor $(T')^{-1}$ a la Y dada y obtenemos

$$(T')^{-1}Y \simeq (T')^{-1}F(Y_0) \xrightarrow{\delta_{Y_0}} FT^{-1}(Y_0).$$

Por lo tanto, $(T')^{-1}Y \in \mathscr{R}$.

(c) $\mathscr{R}$ es cerrada bajo coproductos.
Sean $Y_i \in \mathscr{R}$ $\forall i \in I$. Así, para cada i, se tiene un isomorfismo

$$Y_i \xrightarrow{h_i} F(Y_0^i)$$

entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} Y_i \arrow[r, dotted, "h"] & \coprod_{i\in I} F(Y_0^i) \\
Y_j \arrow[u, "\sigma_{Y_j}"] \arrow[r, "h_j"'] & F(Y_0^j) \arrow[u, "\sigma_{F(Y_0^j)}"']
\end{tikzcd}$$

por la propiedad universal del coproducto tenemos la existencia del isomorfismo h. Como F es un funtor que conmuta con coproductos

$$\coprod_{i\in I} Y_i \xrightarrow{h} \coprod_{i\in I} F(Y_0^i) \xrightarrow{\varphi_F} F\left(\coprod_{i\in I} Y_0^i\right)$$

esto nos dice que

$$\coprod_{i\in I} Y_i \simeq F\left(\coprod_{i\in I} Y_0^i\right)$$

es decir $\coprod_{i\in I} Y_i \in \mathscr{R}$.

(d) $\mathscr{R}$ es subcategoría triangulada de $\mathscr{T}'$.
Sean $Y_1, Y_2 \in \mathscr{R}$. Luego existen $Y_0^1, Y_0^2 \in \mathscr{T}$ tales que

$$Y_1 \simeq F(Y_0^1) \qquad Y_2 \simeq F(Y_0^2).$$

Consideremos el siguiente triángulo en $\mathscr{T}'$:

$$Y_1 \xrightarrow{u} Y_2 \xrightarrow{v} Y_3 \xrightarrow{w} T'Y_1.$$

Como F es pleno, existe $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Y}_0^1, \mathrm{Y}_0^2)$ tal que

$$F(u) = h_2 u h_1^{-1}$$

Como $\mathscr{T}$ es triangulada, existe un triángulo

$$Y_0^1 \xrightarrow{u_0} Y_0^2 \xrightarrow{v_0} Z \xrightarrow{w_0} TY_0^1.$$

Por la exactitud de F obtenemos el siguiente triángulo

$$F(Y_0^1) \xrightarrow{F(u_0)} F(Y_0^2) \xrightarrow{F(v_0)} F(Z) \xrightarrow{\psi_{Y_0^1} F(w_0)} T'F(Y_0^1).$$

En el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_1"'] & Y_2 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h_2"] & Y_3 \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h_3"] & T'Y_1 \arrow[d, "T'h_1"] \\
F(Y_0^1) \arrow[r, "F(u_0)"'] & F(Y_0^2) \arrow[r, "F(v_0)"'] & F(Z) \arrow[r, "\psi_{Y_0^1} F(w_0)"'] & T'F(Y_0^1)
\end{tikzcd}$$

el cuadrado izquierdo conmuta por la definición de u_0 y h_3 existe por el axioma $(TR3)$ de categoría triangulada. Sólo nos hace falta ver que h_3 es un isomorfismo, pero sabemos que h_1, h_2 y $T'h_1$ lo son y esto implica que h_3 lo es; por lo tanto $Y_3 \simeq F(Z)$.

(e) $\mathscr{R}$ es cerrada bajo isomorfismos.
Esto es obvio.

Como $\mathfrak{X}'$ es un sistema de generadores de $\mathscr{T}'$, entonces $\mathscr{R} = \mathscr{T}'$. Así, tenemos que F es denso.

□

1.6. $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismos y $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivos

En lo que sigue si $\mathscr{T}$ es una categoría triangulada con coproductos y tenemos que $T : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$ el funtor traslación, el cual ya vimos que conmuta con coproductos donde el isomorfismo de conmutación es Φ_T. También supondremos que si tenemos una familia de triángulos en $\mathscr{T}$

$$M_i \xrightarrow{u_i} N_i \xrightarrow{v_i} L_i \xrightarrow{w_i} TM_i$$

entonces

$$\coprod_{i\in I} M_i \xrightarrow{\coprod u_i} \coprod_{i\in I} N_i \xrightarrow{\coprod v_i} \coprod_{i\in I} L_i \xrightarrow{\Phi_T \coprod w_i} T\left(\coprod_{i\in I} M_i\right)$$

es un triángulo.

DEFINICIÓN 1.54.
Sea $\mathscr{T}$ una categoría triangulada con coproductos, y $\mathscr{C}$ una subcategoría triangulada de $\mathscr{T}$ cerrada bajo isomorfismos. Un objeto $X \in \mathscr{T}$ se llamará $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo si

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{C}) = 0$$

para toda $C \in \mathscr{C}$.

Denotaremos como $\mathscr{Q}$ a la subcategoría plena de $\mathscr{T}$ cuyos objetos son $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivos.

LEMA 1.55.
La subcategoría plena $\mathscr{Q}$ es cerrada bajo traslaciones y cerrada bajo coproductos.

DEMOSTRACIÓN.
Sean $P \in \mathscr{Q}$ y T el funtor traslación. Veamos que $T^{-1}P$ y TP están en $\mathscr{T}$. Sea $C \in \mathscr{C}$ entonces T induce un isomorfismo

$$T : \mathrm{Hom}(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{P}, \mathrm{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{TC})$$

Como P es $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo, entonces $\mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{TC}) = 0$. Así tenemos que $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{P}, \mathrm{C}) = 0$, lo que nos implica que $T^{-1}C$ es $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo. De manera similar se puede probar que TP es $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo. Ahora veamos que $\mathscr{Q}$ es cerrada bajo coproductos. Sean $\{M_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{Q}$ y $C \in \mathscr{C}$, luego $\mathrm{Hom}(\mathrm{M_i}, \mathrm{C}) = 0$ $\forall i \in I$. Como

$$\mathrm{Hom}(\coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{M_i}, \mathrm{C}) \simeq \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{Hom}(\mathrm{M_i}, \mathrm{C})$$

luego $\mathrm{Hom}(\coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{M_i}, \mathrm{C}) = 0$ lo que implica que $\coprod_{i\in I} M_i \in \mathscr{Q}$, es decir $\mathscr{Q}$ es cerrada bajo coproductos.

□

DEFINICIÓN 1.56.
Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ *en* $\mathscr{T}$ *se llamará* $\mathscr{C}$*-cuasi-isomorfismo si existe un triángulo en* $\mathscr{T}$, $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow T(X)$ *tal que* $Z \in \mathscr{C}$.

PROPOSICIÓN 1.57.
$\mathscr{Q}$ *es una subcategoría triangulada de* $\mathscr{T}$.

DEMOSTRACIÓN.
Teniendo en mente la definición 1.54, notemos que T es un automorfismo de $\mathscr{T}$ y de $\mathscr{C}$ y entonces $\mathscr{Q}$ es cerrada bajo traslaciones. Sea

$$X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} T(X_1)$$

un triángulo en $\mathscr{T}$, con $X_1, X_2 \in \mathscr{Q}$. Veamos que $Y \in \mathscr{Q}$. Sea $C \in \mathscr{C}$ y apliquemos el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(-, \mathrm{C})$ al triángulo dado, y esto nos da la siguiente sucesión exacta

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{T(X_1), C}) \xrightarrow{h^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Y, C}) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X_2, C}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X_1, C})$$

donde tenemos que, por la definición 1.54

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{T(X_1), C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X_2, C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X_1, C}) \cong 0.$$

Esto implica que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Y, C}) = 0$. Entonces $Y \in \mathscr{Q}$. Por lo tanto tenemos que $\mathscr{Q}$ es subcategoría triangulada de $\mathscr{T}'$.

□

DEFINICIÓN 1.58.
Diremos que la categoría triangulada $\mathscr{T}$ *tiene suficientes* $\mathscr{C}$*-cuasi-proyectivos si para todo* $M \in \mathscr{T}$ *existen un* $\mathscr{C}$*-cuasi-proyectivo* pM *y un* $\mathscr{C}$*-cuasi-isomorfismo* $h_M : pM \longrightarrow M$.

PROPOSICIÓN 1.59.
Sea $\mathscr{T}$ *una categoría triangulada con suficientes* $\mathscr{C}$*-proyectivos y sea* $X \in \mathscr{T}$, *tal que para todo* $\mathscr{C}$*-cuasi-proyectivo* P *tenemos que* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P, X}) = 0$. *Entonces* $X \in \mathscr{C}$.

DEMOSTRACIÓN.
Como $\mathscr{T}$ tiene suficientes proyectivos, entonces tenemos el siguiente triángulo

$$pX \xrightarrow{h_X} X \xrightarrow{u} C \xrightarrow{w} T(pX)$$

con $C \in \mathscr{C}$. Veamos que $X \simeq C$. Aplicando el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(-, \mathrm{X})$ al triángulo anterior obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{TpX, X}) \xrightarrow{w^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{C, X}) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{X, X}) \xrightarrow{h_X^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX, X})$$

Pero, notemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX},\mathrm{X}) = 0$ y $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{TpX},\mathrm{X}) = 0$ pues pX y TpX son $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivos. Luego, u^* es un isomorfismo, y esto nos dice que existe un morfismo $g : C \longrightarrow X$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
pX \arrow[r, "h_X"] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "w"] \arrow[dl, "g"] & TpX \\
& X. & &
\end{tikzcd}$$

Aplicándole el funtor covariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX},-)$ al mismo triángulo obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX},\mathrm{T^{-1}C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX},\mathrm{pX}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX},\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX},\mathrm{C})$$

pero como pX es $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX},\mathrm{X}) = 0$ y nuestra sucesión exacta queda como

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX},\mathrm{T^{-1}C}) \xrightarrow{(T^{-1}w)^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX},\mathrm{pX}) \longrightarrow 0.$$

Al igual que antes tenemos que $(T^{-1}w)^*$ es un isomorfismo y entonces, existe el morfismo $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathrm{pX},\mathrm{T^{-1}C})$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & pX \arrow[dll, "\lambda"'] \arrow[d, equal] & & & \\
T^{-1}C \arrow[rr, "T^{-1}(w)"'] & & pX \arrow[r] & X \arrow[r] & C \arrow[r] & TpX
\end{tikzcd}$$

Pero, como $C \in \mathscr{C}$ luego $T^{-1}C \in \mathscr{C}$ y esto implica que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pX},\mathrm{T^{-1}C}) = 0$, por lo tanto $\lambda = 0$, y entonces $1_{pX} = 0$ lo que nos lleva a concluir que $pX = 0$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& & & C \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, equal] & \\
T^{-1}C \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo h se obtiene debido a que $\mathrm{Hom}(\mathrm{C},\mathrm{X}) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}(\mathrm{C},\mathrm{C})$ es un isomorfismo, (como puede verse aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{C},-)$ al triángulo original y usando nuestras hipótesis, como antes). Recapitulando lo hecho, hemos visto que $uh = 1_C$ y que $gu = 1_X$. De hecho $g = h$, pues

$$g = g1_C = guh = 1_X h = h.$$

Luego u tiene como inversa a h, y como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo isomorfismos tenemos que $X \simeq C \in \mathscr{C}$.

□

A continuación daremos una caracterización para los $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismos.

PROPOSICIÓN 1.60.
Sea $\mathscr{T}$ una categoría triangulada con suficientes $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivos y $u : X \longrightarrow Y$ un morfismo en T. Entonces u es un $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo si y sólo si para todo $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo P

$$\mathrm{Hom}(1_\mathrm{P},\mathrm{u}) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P},\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P},\mathrm{Y})$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.
$\boxed{\Rightarrow}$ Suponga que u es un $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo y considemos el siguiente triángulo en $\mathscr{T}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & W \arrow[r, "w"] & TX \end{tikzcd}$$

con $W \in \mathscr{C}$. Sea P un $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo arbitrario, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(\mathrm{P},-)$ al triángulo obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P},\mathrm{T}^{-1}\mathrm{W}) \arrow[r, "(T^{-1}w)_*"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P},\mathrm{X}) \arrow[r, "u^*"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P},\mathrm{Y}) \arrow[r, "v^*"] & {} \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{P},\mathrm{W}) \arrow[r, "w^*"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P},\mathrm{TX}) \arrow[r] & {} \end{tikzcd} .$$

Note que como $\mathrm{Hom}(\mathrm{P},\mathrm{T}^{-1}\mathrm{W}) = 0$ y $\mathrm{Hom}(\mathrm{P},\mathrm{W}) = 0$ tenemos que la siguiente sucesión es exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P},\mathrm{X}) \arrow[r, "u^*"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P},\mathrm{Y}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

luego $\mathrm{Hom}(1_\mathrm{P},\mathrm{u})$ es un isomorfismo.
$\boxed{\Leftarrow}$ Consideremos el siguiente triángulo en $\mathscr{T}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & W \arrow[r, "w"] & TX; \end{tikzcd}$$

veamos que $W \in \mathscr{C}$. Del triángulo dado obtenemos

$$\begin{tikzcd} T^{-1}Y \arrow[r, "T^{-1}v"] & T^{-1}W \arrow[r, "T^{-1}w"] & X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & W \arrow[r, "w"] & TX. \end{tikzcd}$$

Sea P un $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo arbitrario y notemos que el siguiente diagrama conmuta por el lema 1.15

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P},\mathrm{T}^{-1}\mathrm{X}) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(1_\mathrm{P},\mathrm{T}^{-1}\mathrm{u})"] \arrow[d, "T"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P},\mathrm{T}^{-1}\mathrm{Y}) \arrow[d, "T"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{TP},\mathrm{X}) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(1_\mathrm{TP},\mathrm{u})"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{TP},\mathrm{Y}). \end{tikzcd}$$

Como TP es $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo y $\mathrm{Hom(1_{TP}, u)}$ es un isomorfismo, luego también $\mathrm{Hom(1_P, T^{-1}u)}$ lo es. Por lo tanto, en nuestra sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P, T^{-1}X}) \arrow[r, "(T^{-1}u)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P, T^{-1}Y}) \arrow[r, "(T^{-1}v)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P, T^{-1}W}) \\
\arrow[r, "(T^{-1}w)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P, X}) \arrow[r, "u_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P, Y}) \arrow[r, "v_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P, W})
\end{tikzcd}$$

tenemos que $(T^{-1}v)_* = 0$ y $\mathrm{Im((T^{-1}w)_*) = Ker(u_*)}$ y como por hipótesis $\mathrm{Hom(1_P, u)}$ es un isomorfismo, luego $\mathrm{Ker(u_*)} = 0$. Esto nos implica que para todo $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo P se tiene que, $\mathrm{Hom(P, T^{-1}W)} = 0$, y esto nos dice que $T^{-1}W \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $W \in \mathscr{C}$, luego u es un $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo.

□

Como consecuencia de esta proposición tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 1.61.
Sea $\mathscr{T}$ como en la proposición anterior y $u : M \longrightarrow N$, $v : N \longrightarrow L$ dos $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismos, entonces $v \circ u$ también es $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.
Sea P un $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo, por la proposición anterior tenemos que

$$\mathrm{Hom(1_P, u) : Hom_{\mathscr{T}}(P, M) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(P, N)}$$

y

$$\mathrm{Hom(1_P, v) : Hom_{\mathscr{T}}(P, N) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(P, L)}$$

son isomorfismos. Por lo tanto tenemos que

$$\mathrm{Hom(1_P, v) \circ Hom(1_P, u) = Hom(1_P, vu)}$$

es un isomorfismo, entonces $v \circ u$ es $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo.

□

LEMA 1.62.
Sea $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo $\forall i \in I$. Entonces

$$\textstyle\coprod_{i \in I} f_i : \coprod_{i \in I} X_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} Y_i$$

es $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.
Como f_i es $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo $\forall i \in I$, luego tenemos el siguiente triángulo, con $C_i \in \mathscr{C}, \forall i \in I$

$$X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} C_i \xrightarrow{w_i} TX_i.$$

Por lo tanto tenemos el siguiente triángulo

$$\coprod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\coprod f_i} \coprod_{i\in I} Y_i \xrightarrow{\coprod g_i} \coprod_{i\in I} C_i \xrightarrow{\coprod w_i} T\left(\coprod_{i\in I} X_i\right)$$

donde $\coprod_{i\in I} C_i \in \mathscr{C}$, lo que nos dice que $\coprod_{i\in I} f_i$ es $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo.

□

TEOREMA 1.63.
Sean $X_1 \xrightarrow{u} X_2 \xrightarrow{v} X_3 \xrightarrow{w} TX_1$, *y* $Y_1 \xrightarrow{s} Y_2 \xrightarrow{t} Y_3 \xrightarrow{l} TY_1$ *dos triángulos y consideremos el siguiente diagrama en donde* h_1, h_3 *son* $\mathscr{C}$*-cuasi-isomorfismos*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_1"] & X_2 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h_2"] & X_3 \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h_3"] & TX_1 \arrow[d, "Th_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "s"'] & Y_2 \arrow[r, "t"'] & Y_3 \arrow[r, "l"'] & TY_1
\end{tikzcd}$$

entonces h_2 *es* $\mathscr{C}$*-cuasi-isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea P un $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo apliquemos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{P}, -)$ al diagrama dado. Así obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{T}^{-1}\mathrm{X}_3) \arrow[r, "(T^{-1}w)_*"] \arrow[d, "(T^{-1}h_3)_*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{X}_1) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "(h_1)_*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{X}_2) \arrow[r, "v_*"] \arrow[d, "(h_2)_*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{X}_3) \arrow[d, "h_3"] \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{T}^{-1}\mathrm{Y}_3) \arrow[r, "(T^{-1}l)_*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{Y}_1) \arrow[r, "s_*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{Y}_2) \arrow[r, "t_*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{Y}_3)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{X}_3) \arrow[r, "w_*"] \arrow[d, "(h_3)_*"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{TX}_1) \arrow[d, "(Th_1)_*"] \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{Y}_3) \arrow[r, "l_*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{TY}_1).
\end{tikzcd}$$

Por la proposición 1.60, tenemos que $(h_1)_*, (h_3)_*, (Th_1)_*$ y $(T^{-1}h_3)_*$ son isomorfismos, pues la clase de $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismos es cerrada bajo traslaciones. Por el Lema del Cinco tenemos que $(h_2)_*$ es un isomorfismo y esto implica que h_2 es un $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo

□

PROPOSICIÓN 1.64.
Sea $\mathscr{T}$ *una categoría triangulada con suficientes* $\mathscr{C}$*-cuasi-proyectivos. Entonces existe un funtor exacto* $p : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$ *tal que,*$\forall M \in \mathscr{T}$, pM *es* $\mathscr{C}$*-cuasi-proyectivo y existe un* $\mathscr{C}$*-cuasi-isomorfismo* $h_M : pM \longrightarrow M$.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $M \in \mathscr{T}$, por hipótesis tenemos un $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo $h_M : pM \longrightarrow M$, con pM $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivo.

(a) Construcción del funtor $p : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$:

F1 En objetos.
Sea $M \in \mathscr{T}$ entonces el funtor p lo envia a pM.

F2 En morfismos.
Sea $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, luego tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} pM \arrow[r, "h_M"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & C_M \arrow[r] & TpM \\ pN \arrow[r, "h_N"'] & N \arrow[r, "g"'] & C_N \arrow[r] & TpN \end{tikzcd}$$

cuyos renglones son triángulos en $\mathscr{T}$, h_M y h_N son $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismos, p_M, p_N son $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivos y C_M, C_M están en $\mathscr{C}$. Por la proposición 1.60, $h_N^* : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pM}, \mathrm{pN}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pM}, \mathrm{N})$ es un isomorfismo, luego existe un único $u' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\mathrm{pM}, \mathrm{pN})$ tal que $h_N u' = u h_M$. Definimos $pu := u'$

Ahora demostraremos que p efectivamente es un funtor. Veamos que $p(vu) = p(v)p(u)$. Sean $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} L$ dos morfismos entonces tenemos, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} pM \arrow[r, "h_M"] \arrow[d, "p(u)"'] & M \arrow[d, "u"] \\ pN \arrow[r, "h_N"'] \arrow[d, "p(v)"'] & N \arrow[d, "v"] \\ pL \arrow[r, "h_L"'] & L \end{tikzcd}$$

por la unicidad concluimos que $p(vu) = p(v)p(u)$. Es claro que $p(1_M) = 1_{pM}$

(b) p es exacto.
Sea T el funtor traslación de $\mathscr{T}$.

(i) Veamos la existencia del isomorfismo $\varphi : pT \longrightarrow Tp$.
Si $M \in \mathscr{T}$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} pTM \arrow[r, "h_{TM}"] \arrow[d, "\lambda"'] & TM \arrow[d, equal] \\ TpM \arrow[r, "T(h_M)"'] & TM. \end{tikzcd}$$

Por un argumento similar al hecho cuando se definió el funtor p en morfismos (usando la proposición 1.60 y el hecho de que $T(h_M)$ es $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo), tenemos la existencia de un único morfismo $\lambda : pTM \longrightarrow TpM$ que hace conmutar al diagrama anterior. Similarmente, como T preserva $\mathscr{C}$-cuasi-proyectivos y $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismos, usando el mismo argumento anterior tenemos la existencia del único morfismo $\mu : TpM \longrightarrow pTM$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
pTM \arrow[r, "h_{T_M}"] & TM \arrow[d, equal] \\
TpM \arrow[u, "\mu"'] \arrow[r, "T(h_M)"'] & TM.
\end{tikzcd}$$

Ahora veamos que μ es el inverso de λ. Para probar esto, notemos que al "pegar" los cuadrados anteriores obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
pTM \arrow[r, "h_{TM}"] \arrow[d, bend right, "\lambda"'] & TM \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, equal] & C_{TM} \\
TpM \arrow[u, bend right, "\mu"'] \arrow[r, "T(h_M)"'] & TM \arrow[r] & TC_M
\end{tikzcd}$$

de donde resulta que $h_{TM}\lambda\mu = h_{TM}$, pero $(h_{TM})^*$ es un isomorfismo, entonces $\lambda\mu = 1_{TpM}$. Similarmente se puede ver que $\mu\lambda = 1_{pTM}$. Sólo nos resta probar la naturalidad de $\varphi_M := \lambda_M$ en la variable M. Sea $u : M \longrightarrow M_1$ un morfismo. Lo que deseamos ver es que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
pTM \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "pT(u)"'] & TpM \arrow[d, "Tp(u)"] \\
pTM_1 \arrow[r, "\varphi_{M_1}"'] & TpM_1.
\end{tikzcd}$$

Por un lado, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
pTM \arrow[r, "h_{TM}"] \arrow[d, "\lambda_M"'] & TM \arrow[d, equal, "1_{TM}"] \\
TpM \arrow[r, "T(h_M)"'] \arrow[d, "Tp(u)"'] & TM \arrow[d, "T(u)"] \\
TpM_1 \arrow[r, "T(h_{M_1})"'] & TM_1
\end{tikzcd}$$

y, por otro,

$$\begin{tikzcd}
pTM \arrow[r, "h_{TM}"] \arrow[d, "pT(u)"'] & TM \arrow[d, "T(u)"] \\
pTM_1 \arrow[r, "h_{TM_1}"'] \arrow[d, "\lambda_{M_1}"'] & TM_1 \arrow[d, equal, "1_{TM_1}"] \\
TpM_1 \arrow[r, "T(h_{M_1})"'] & TM_1.
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad, tenemos que $Tp(u)\lambda_M = \lambda_{M_1}pT(u)$. Recordemos que definimos a $\varphi_M := \lambda_M$, luego $Tp(u)\varphi_M = \varphi_{M_1}pT(u)$. Por lo tanto φ es natural en la variable M.

(ii) p envia triángulos en triángulos.
Consideremos el siguiente triángulo en $\mathscr{T}$

$$T_1 : M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \xrightarrow{w} TM_1;$$

deseamos ver que

$$pM_1 \xrightarrow{pu} pM_2 \xrightarrow{pv} pM_3 \xrightarrow{\varphi_{M_1}pw} TpM_1$$

también es un triángulo en $\mathscr{T}$. Consideremos al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
pM_1 \arrow[r, "pu"] \arrow[d, "h_{M_1}"'] & pM_2 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "h_{M_2}"'] & Z \arrow[r, "t"] \arrow[d, dotted, "g"'] & TpM_1 \arrow[r, "Tpu"] \arrow[d, "T(h_{M_1})"] & TpM_2 \arrow[d, "T(h_{M_2})"] \\
M_1 \arrow[r, "u"'] & M_2 \arrow[r, "v"'] & M_3 \arrow[r, "w"'] & TM_1 \arrow[r, "Tu"] & TM_2
\end{tikzcd}$$

donde: el primer renglón es un triángulo con $Z \in \mathscr{T}$, que existe por ser $\mathscr{T}$ una categoría triangulada; el morfismo g existe porque el primer cuadrado conmuta por definición del funtor p. Por el teorema 1.63, g es un $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismo. Al aplicar el funtor p al triángulo T_1 obtenemos la siguiente sucesión

$$pM_1 \xrightarrow{pu} pM_2 \xrightarrow{pv} pM_3 \xrightarrow{pw} p(T(M_1)).$$

Notemos que tenemos el siguiente diagrama, donde h_{M_3} y g son $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
pM_3 \arrow[r, dotted, "\lambda"] \arrow[d, "h_{M_3}"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
M_3 \arrow[r, equal] & M_3
\end{tikzcd}$$

por lo tanto existe el isomorfismo $\lambda : pM_3 \longrightarrow Z$ tal que $g\lambda = h_{M_3}$. Así tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
pM_1 \arrow[r, "pu"] \arrow[d, equal] & pM_2 \arrow[r, "pv"] \arrow[d, equal] & pM_3 \arrow[d, "\lambda"] \\
pM_1 \arrow[r, "pu"'] & pM_2 \arrow[r, "r"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\lambda pv = r$. Efectivamente ya que como h_{M_2} y g son $\mathscr{C}$-cuasi-isomorfismos, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo, para un único morfismo s:

$$\begin{tikzcd}
pM_2 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h_{M_2}"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
M_2 \arrow[r, "v"'] & M_3
\end{tikzcd}$$

Pero, por definición de pv, tenemos que $g\lambda pv = h_{M_3}pv = vh_{M_2}$; y por otro lado tenemos que $gr = h_{M_2}v$, entonces por la unicidad, podemos concluir que $r = s = \lambda pv$. Por construcción de $\varphi : pT \longrightarrow Tp$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con φ_{M_1} isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
p(TM_1) \arrow[r, "\varphi_{M_1}"] \arrow[d, "h_{TM_1}"'] & T(pM_1) \arrow[d, "T(h_{M_1})"] \\
TM_1 \arrow[r, equal] & TM_1.
\end{tikzcd}$$

Lo obtenido hasta ahora lo podemos resumir el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
pM_1 \arrow[r, "pu"] \arrow[d, equal] & pM_2 \arrow[r, "pv"] \arrow[d, equal] & pM_3 \arrow[r, "pw"] \arrow[d, "\lambda"] & pTM_1 \arrow[r, "\varphi"] & T(pM_1) \arrow[d, equal] \\
pM_1 \arrow[r, "pu"'] & pM_2 \arrow[r, "r"'] & Z \arrow[rr, "t"'] & & T(pM_1),
\end{tikzcd}$$

donde por simplicidad omitimos el subíndice de φ_{M_1}. Veamos que conmuta el último cuadrado, es decir $\varphi pw = t\lambda$. Para ello probaremos que $wh_{M_3} = T(h_{M_1})\varphi pw$ y que $wh_{M_3} = T(h_{M_1})t\lambda$

$$\begin{tikzcd}
pM_3 \arrow[r, "pw"] \arrow[rr, bend left, "t\lambda"] \arrow[d, "h_{M_3}"'] & pTM_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "h_{TM_1}"'] & TpM_1 \arrow[d, "T(h_{M_1})"] \\
M_3 \arrow[r, "w"'] & TM_1 \arrow[r, equal] & TM_1
\end{tikzcd}$$

Por un lado tenemos que $wh_{M_3} = h_{TM_1}pw = T(h_{M_1})\varphi pw$ y por otro $wh_{M_3} = wg\lambda = T(h_{M_1})t\lambda$, luego por la unicidad, tenemos que $t\lambda = \varphi pw$. Así tenemos la siguiente equivalencia

$$\begin{tikzcd}
pM_1 \arrow[r, "pu"] \arrow[d, equal] & pM_2 \arrow[r, "pv"] \arrow[d, equal] & pM_3 \arrow[r, "\varphi pw"] \arrow[d, "\lambda"] & T(pM_1) \arrow[d, equal] \\
pM_1 \arrow[r, "pu"'] & pM_2 \arrow[r, "r"'] & Z \arrow[r, "t"'] & T(pM_1).
\end{tikzcd}$$

Lo que nos implica que el renglón superior del diagrama anterior es un triángulo. Por lo tanto, el funtor p es exacto.

□

Capítulo 2

Categorías de Frobenius

2.1. Definiciones básicas

En este capítulo nos dedicaremos al estudio de las categorías de Frobenius, las cuales veremos con un enfoque un poco diferente al cual aparece en la literatura.

DEFINICIÓN 2.1.
Sea $\mathscr{C}$ *una categoría aditiva. Un par* (f, g) *de morfismos*

$$M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$$

se llama exacto si y sólo si f *es el núcleo de* g *y* g *es el conúcleo de* f.
Un morfismo del par exacto $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ *en el par exacto* $M' \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} N'$ *es una terna de morfismos* (u, v, w) *que hacen conmutativo al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & N \arrow[d, "w"] \\
M' \arrow[r, "f'"'] & E' \arrow[r, "g'"'] & N'.
\end{tikzcd}$$

Los pares exactos $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ *y* $M' \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} N'$ *son isomorfos si y sólo si existe un morfismo* (u, v, w) *entre ellos con* u, v, w *isomorfismos.*

DEFINICIÓN 2.2.
Sea $\mathscr{C}$ *una categoría aditiva y* $\mathscr{E}$ *una clase de pares exactos, cerrada bajo isomorfismos, diremos que* $f : M \longrightarrow E$ *es* $\mathscr{E}$*-inflación si existe* $g : E \longrightarrow N$ *, tal que* $(f, g) \in \mathscr{E}$ *y que es* $\mathscr{E}$*-deflación si existe* $g : N \longrightarrow M$ *, tal que* $(g, f) \in \mathscr{E}$*.*

Diremos que la sucesión $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ *es una* $\mathscr{E}$*-sucesión si* $(f, g) \in \mathscr{E}$*.*

EJEMPLO 2.3.
Si $M, N \in \mathscr{C}$*, tenemos el par exacto que llamaremos par exacto canónico*

$$M \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} M \oplus N \xrightarrow{(0,1)} N.$$

Un par exacto $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ *se divide si y sólo si es isomorfo al par exacto canónico descrito antes.*

DEFINICIÓN 2.4.
Sea $\mathscr{C}$ *una categoría aditiva. Una estructura exacta* $\mathscr{E}$ *en* $\mathscr{C}$ *es una clase de pares exactos cerrada bajo isomorfismos que satisface:*

(i) $id_M : M \longrightarrow M$ *es* $\mathscr{E}$*-inflación y* $\mathscr{E}$*-deflación.*

(ii) (a) Para cada $\mathscr{E}$*-sucesión* $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ *y cada morfismo* $w : X \longrightarrow N$ *existen una* $\mathscr{E}$*-sucesión* $M \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} X$ *y un morfismo* $\lambda : F \longrightarrow E$ *tales que hacen conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda"] & X \arrow[d, "w"] \\ M \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

donde el segundo cuadrado es pull-back.

(b) Para cada $\mathscr{E}$*-sucesión* $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ *y cada morfismo* $u : M \longrightarrow X$ *existen una* $\mathscr{E}$*-sucesión* $X \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} N$ *y un morfismo* $\lambda : E \longrightarrow F$ *tales que hacen conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\lambda"] & N \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & F \arrow[r, "\beta"'] & N \end{tikzcd}$$

donde el primer cuadrado es el push-out.

(iii) Composición de inflaciones es inflación, al igual que la composición de deflaciones es deflación.

(iv) Si u_2u_1 es inflación entonces u_1 es inflación. Si v_2v_1 es deflación entonces v_2 es deflación.

Una categoría exacta $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ es una pareja donde $\mathscr{C}$ es una categoría aditiva y $\mathscr{E}$ es una estructura exacta en $\mathscr{C}$.

LEMA 2.5.
Sea $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ una categoría exacta. Entonces:

(a) Si los renglones del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "\alpha"'] & F \arrow[r, "\beta"'] & N
\end{tikzcd}$$

son $\mathscr{E}$-sucesiones, entonces $M \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ u \end{pmatrix}} E \oplus X \xrightarrow{(-\lambda, \alpha)} F$ *es una $\mathscr{E}$-sucesión.*

(b) Si los renglones del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda"'] & X \arrow[d, "w"] \\
M \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & N
\end{tikzcd}$$

son $\mathscr{E}$-sucesiones, entonces $M \xrightarrow{\begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \end{pmatrix}} E \oplus X \xrightarrow{(g, -w)} F$ *es una $\mathscr{E}$-sucesión.*

DEMOSTRACIÓN.
ver apéndice de [?].

□

LEMA 2.6. *(de Factorización)*
Si en la categoría exacta $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \mathscr{E})$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "v"'] & N_1 \arrow[d, "w"] \\
M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N_2
\end{tikzcd}$$

con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones, entonces tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "v_1"'] & N_1 \arrow[d, equal] \\
M_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v_2"'] & N_1 \arrow[d, "w"] \\
M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N_2
\end{tikzcd}$$

con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones y además se tiene que $v = v_2 v_1$.

DEMOSTRACIÓN.
Por la exactitud de $\mathscr{C}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "v_1"'] & N_1 \arrow[d, equal] \\
M_2 \arrow[r, "\alpha"'] & F \arrow[r, "\beta"'] & N_1
\end{tikzcd}$$

con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones, donde el primer cuadrado es un pushout. Consideremos el pushout de $\{u, s_1\}$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "v_1"] \arrow[ddr, bend left, "v"'] & N_1 \arrow[d, equal] \\
M_2 \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[drr, bend right, "s_2"'] & F \arrow[r, "\beta"'] \arrow[dr, dotted, "v_2"'] & N_1 \\
 & & E_2
\end{tikzcd}$$

por la propiedad universal del push-out existe el morfismo
$v_2 : F \longrightarrow E_2$ tal que $v_2 \alpha = s_2$ y $v_2 v_1 = v$. Como los renglones del siguiente diagrama son $\mathscr{E}$-sucesiones, existe $\lambda : N_1 \longrightarrow N_2$ que hace conmutar al siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
M_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v_2"'] & N_1 \arrow[d, "\lambda"] \\
M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N_2 .
\end{tikzcd}$$

Entonces obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
x_1 : & M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "v_1"'] & N_1 \arrow[d, equal] \\
y : & M_2 \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "v_2"'] & N_1 \arrow[d, "\lambda"] \\
x_2 : & M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N_2,
\end{tikzcd}$$

en el cual únicamente falta ver que $\lambda = w$. Recordemos que $\beta v_1 = t_1$, luego:

$$\lambda t_1 = \lambda\beta v_1 = t_2 v_2 v_1 = t_2 v = w t_1$$

y como t_1 es epimorfismo, concluimos que $\lambda = w$.

$\square$

DEFINICIÓN 2.7.

Sea $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ una categoría exacta:

(i) $P \in \mathscr{C}$ se llama $\mathscr{E}$-proyectivo si cualquier $\mathscr{E}$-sucesión $X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} P$ se divide.

(ii) $I \in \mathscr{C}$ se llama $\mathscr{E}$-inyectivo si cualquier $\mathscr{E}$-sucesión $I \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X$ se divide.

Veamos una caracterización útil de los $\mathscr{E}$-proyectivos y de los $\mathscr{E}$-inyectivos.

PROPOSICIÓN 2.8.

Sea $P \in \mathscr{C}$. Diremos que P es $\mathscr{E}$-proyectivo si y sólo si para cada $\mathscr{E}$-sucesión $X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y$ y cada morfismo $s : P \longrightarrow Y$, existe el morfismo $\lambda : P \longrightarrow E$ tal que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Rightarrow}$ Consideremos la siguiente gráfica, cuyo renglón es una $\mathscr{E}$-sucesión,

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

y construyamos el pull-back

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\lambda"] & P \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis tenemos que P es $\mathscr{E}$-proyectivo, entonces la $\mathscr{E}$-sucesión

$$X \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} P$$

se divide, es decir, existe $\mu : P \longrightarrow F$ tal que $v\mu = Id_P$. Entonces

$$g\lambda\mu = sv\mu = sId_P = s.$$

Luego, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[d, "s"] \arrow[dl, dotted, "\lambda\mu"'] \\
X \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Como para toda $\mathscr{E}$-sucesión $X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y$ y para todo morfismo $s : P \longrightarrow Y$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[d, "s"] \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \\
X \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & Y,
\end{tikzcd}$$

en particular lo tenemos para $Y = P$, y $s = Id_P$. Así, tenemos que la $\mathscr{E}$-sucesión $X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} P$ se divide.

□

PROPOSICIÓN 2.9.

Sea $I \in \mathscr{C}$. Diremos que I es $\mathscr{E}$-inyectivo si y sólo si para cada $\mathscr{E}$-sucesión $X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y$ y cada morfismo $s : X \longrightarrow I$, existe el morfismo $\lambda : E \longrightarrow I$ tal que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dotted, "\lambda"] & Y. \\
I & &
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Rightarrow}$ Considere la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión y un morfismo $s : X \longrightarrow I$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & E \arrow[r, "g"] & Y. \\ I & & \end{tikzcd}$$

Construyamos el push-out

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\lambda"] & Y \arrow[d, equal] \\ I \arrow[r, "u"'] & F \arrow[r, "v"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Por hipótesis, I es $\mathscr{E}$-inyectivo, entonces la $\mathscr{E}$-sucesión $I \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} Y$ se divide, entonces existe $\mu : F \longrightarrow I$, tal que $\mu u = Id_I$, así tenemos que $\mu(\lambda f) = \mu u s = Id_I s = s$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dotted, "\mu\lambda"] & Y. \\ I & & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Para cada $\mathscr{E}$-sucesión $X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y$ y todo $s : X \longrightarrow I$ existe λ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dotted, "\lambda"] & Y \\ I. & & \end{tikzcd}$$

En particular, si $X = I$ y $s = Id_I$, tenemos que $\lambda f = Id_I$, es decir la $\mathscr{E}$-sucesión $I \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y$ se divide.

□

DEFINICIÓN 2.10.

Sea $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ una categoría exacta.

(i) Diremos que $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ tiene suficientes proyectivos si, para cada $X \in \mathscr{C}$, existe una $\mathscr{E}$-sucesión $Y \xrightarrow{u} P \xrightarrow{v} X$ donde P es $\mathscr{E}$-proyectivo.

(ii) Diremos que $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ tiene suficientes inyectivos si, para cada $X \in \mathscr{C}$, existe una $\mathscr{E}$-sucesión $X \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} Y$ donde J es $\mathscr{E}$-inyectivo.

DEFINICIÓN 2.11.
Una categoría exacta $(\mathscr{C},\mathscr{E})$ *se llama Categoría de Frobenius si tiene suficientes* $\mathscr{E}$*-proyectivos, tiene suficientes* $\mathscr{E}$*-inyectivos, y los* $\mathscr{E}$*-proyectivos son los* $\mathscr{E}$*-inyectivos.*

2.2. La categoría estable

DEFINICIÓN 2.12.
Sea $(\mathscr{C},\mathscr{E})$ *una categoría de Frobenius. Para* $M,N \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$*, denotaremos por* $P(M,N)$ *al subgrupo de* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ *formado por todos los morfismos* $f : M \longrightarrow N$ *en* $\mathscr{C}$ *tales que se factorizan a través de un proyectivo (inyectivo). La categoría estable* $\underline{\mathscr{C}}$ *tiene por definición los mismos objetos que* $\mathscr{C}$*, pero sus morfismos están dados por*

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) := \frac{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M},\mathrm{N})}{\mathrm{P}(\mathrm{M},\mathrm{N})}.$$

Si $\underline{f} \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ *y* $\underline{g} \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{N},\mathrm{L})$*,* $\underline{g} \circ \underline{f} := \underline{gf} \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{M},\mathrm{L})$*.*

OBSERVACIÓN 2.13.
$\underline{\mathscr{C}}$ *es una categoría aditiva y la proyección canónica* $\pi : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ *que envía cada objeto en si mismo y cada morfismo en su clase módulo* P*, es un funtor aditivo.*

PROPOSICIÓN 2.14.
Sea $(\mathscr{C},\mathscr{E})$ *una categoría exacta. Entonces cada diagrama en* $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & J \arrow[r, "v"] & M \\
Y \arrow[r, "\alpha"] & K \arrow[r, "\beta"] & N,
\end{tikzcd}$$

con renglones $\mathscr{E}$*-sucesiones y* J,K $\mathscr{E}$*-inyectivos se puede completar a un diagrama conmutativo en* $\mathscr{C}$*:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & J \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}"] & M \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha"] & K \arrow[r, "\beta"] & N.
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN.
Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & J \arrow[r, "v"] & M \\
Y \arrow[r, "\alpha"] & K \arrow[r, "\beta"] & N
\end{tikzcd}$$

con J, K $\mathscr{E}$-inyectivos y renglones $\mathscr{E}$-sucesiones. Como K es $\mathscr{E}$-inyectivo, entonces existe $\hat{f} : J \longrightarrow K$ tal que $\hat{f}u = \alpha f$. Por otro lado,

$$(\beta\hat{f})u = \beta(\hat{f}u) = \beta(\alpha f) = (\beta\alpha)f = 0f = 0,$$

y como v es el conúcleo de u, entonces por la propiedad universal del conúcleo existe un único morfismo $\widetilde{f} : M \longrightarrow N$ tal que $\beta\hat{f} = \widetilde{f}v$. En resumen, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & J \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}"] & M \arrow[d, dotted, "\widetilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha"] & K \arrow[r, "\beta"] & N.
\end{tikzcd}$$

□

PROPOSICIÓN 2.15.
Sea $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ una categoría exacta. Entonces cada diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] & J \arrow[r, "v"] & X \arrow[d, "f"] \\
N \arrow[r, "\alpha"] & K \arrow[r, "\beta"] & Y,
\end{tikzcd}$$

con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones y J, K $\mathscr{E}$-proyectivos se puede completar a un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & J \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
N \arrow[r, "\alpha"] & K \arrow[r, "\beta"] & Y.
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN.
Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] & J \arrow[r, "v"] & X \arrow[d, "f"] \\
N \arrow[r, "\alpha"] & K \arrow[r, "\beta"] & Y
\end{tikzcd}$$

con J, K $\mathscr{E}$-proyectivos y renglones $\mathscr{E}$-sucesiones. Como J es $\mathscr{E}$-proyectivo, entonces existe $\hat{f} : J \longrightarrow K$ tal que $\beta\hat{f} = fv$. Por otro lado, note que $\beta(\hat{f}u) = fvu = 0$. Pero sabemos que α es el núcleo de β, entonces por la propiedad universal del núcleo existe un único morfismo $\widetilde{f} : M \longrightarrow N$ tal que $\alpha\widetilde{f} = \hat{f}u$. Entonces tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, dotted, "\widetilde{f}"'] & J \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\
N \arrow[r, "\alpha"] & K \arrow[r, "\beta"] & Y.
\end{tikzcd}$$

□

La siguiente cuestión es, si estos morfismos inducidos son únicos. La respuesta es que lo serán únicamente en $\underline{\mathscr{C}}$ y lo demostraremos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.16.
Sea $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ una categoría de Frobenius. Consideremos a los siguientes diagramas conmutativos en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & I_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & M \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha"] & I_Y \arrow[r, "\beta"] & N
\end{tikzcd} \quad y \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & I_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{g}"'] & M \arrow[d, "\tilde{g}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha"] & I_Y \arrow[r, "\beta"] & N
\end{tikzcd}$$

con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones y I_X, I_Y $\mathscr{E}$-inyectivos. Entonces $\pi(\tilde{f}) = \pi(\tilde{g})$.

DEMOSTRACIÓN.
Por hipótesis, tenemos los siguientes diagramas conmutativos en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & I_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & M \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha"] & I_Y \arrow[r, "\beta"] & N
\end{tikzcd} \quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & I_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{g}"'] & M \arrow[d, "\tilde{g}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha"] & I_Y \arrow[r, "\beta"] & N.
\end{tikzcd}$$

Vamos a probar que $\widetilde{f} - \widetilde{g}$ se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo. Para esto consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "0"'] & I_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}-\hat{g}"] & M \arrow[d, "\widetilde{f}-\widetilde{g}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha"'] & I_Y \arrow[r, "\beta"'] & N.
\end{tikzcd}$$

Entonces, tenemos que $(\hat{f} - \hat{g})u = 0$, pero v es el conúcleo de u, luego por la propiedad universal del conúcleo, existe un único morfismo $\lambda : M \longrightarrow I_Y$ tal que $\lambda v = \hat{f} - \hat{g}$. Queremos ver que en el siguiente diagrama el triángulo inferior es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "0"'] & I_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}-\hat{g}"'] & M \arrow[d, "\widetilde{f}-\widetilde{g}"] \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \\
Y \arrow[r, "\alpha"'] & I_Y \arrow[r, "\beta"'] & N.
\end{tikzcd}$$

Como $\beta(\lambda v) = \beta(\hat{f}-\hat{g}) = \beta\hat{f}-\beta\hat{g} = \widetilde{f}v-\widetilde{g}v = (\widetilde{f}-\widetilde{g})v$, y v es epimorfismo luego $\beta\lambda = \widetilde{f} - \widetilde{g}$. Entonces tenemos que $\widetilde{f} - \widetilde{g}$ se factoriza a través de un proyectivo y esto concluye que $\pi(\widetilde{f}) = \pi(\widetilde{g})$ en $\underline{\mathscr{C}}$.

□

El dual de esta proposición también es cierto.

PROPOSICIÓN 2.17.
Sea $(\mathscr{C},\mathscr{E})$ una categoría de Frobenius. Supongamos que tenemos en $\mathscr{C}$ los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & P_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
N \arrow[r, "\alpha"] & P_Y \arrow[r, "\beta"] & Y
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & P_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{g}"'] & X \arrow[d, "g"] \\
N \arrow[r, "\alpha"] & P_Y \arrow[r, "\beta"] & Y
\end{tikzcd}$$

con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones y P_X, P_Y $\mathscr{E}$-proyectivos. Entonces $\pi(\tilde{f}) = \pi(\tilde{g})$.

DEMOSTRACIÓN.
Tenemos los siguientes diagramas conmutativos en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & P_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
N \arrow[r, "\alpha"] & P_Y \arrow[r, "\beta"] & Y
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & P_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{g}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
N \arrow[r, "\alpha"] & P_Y \arrow[r, "\beta"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Vamos a probar que $\widetilde{f}-\widetilde{g}$ se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\widetilde{f}-\widetilde{g}"'] & P_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}-\hat{g}"] & X \arrow[d, "0"] \\
N \arrow[r, "\alpha"'] & P_Y \arrow[r, "\beta"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Entonces, $\beta(\hat{f} - \hat{g}) = 0$, y como α es el núcleo de β, por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\lambda : P_X \longrightarrow N$ tal que $\alpha\lambda = \hat{f} - \hat{g}$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\widetilde{f}-\widetilde{g}"'] & P_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\hat{f}-\hat{g}"] \arrow[dl, dotted, "\lambda"] & X \arrow[d, "0"] \\
N \arrow[r, "\alpha"'] & P_Y \arrow[r, "\beta"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Falta ver que el triángulo superior conmuta. Tenemos

$$(\alpha\lambda)u = (\hat{f} - \hat{g})u = \hat{f}u - \hat{g}u = \alpha\widetilde{f} - \alpha\widetilde{g} = \alpha(\widetilde{f} - \widetilde{g})$$

y como α es monomorfismo, concluimos que $\widetilde{f} - \widetilde{g} = \lambda u$, es decir $\widetilde{f} - \widetilde{g}$ se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo.

□

DEFINICIÓN 2.18.

Vamos a definir un funtor. $T : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$. Veamos la asignación de los objetos de $\mathscr{C}$. Dado $X \in \mathscr{C}$ elijamos una $\mathscr{E}$-sucesión $X \xrightarrow{u_X} I_X \xrightarrow{v_X} Y$, con I_X $\mathscr{E}$-inyectivo. Definamos a $T(X) := Y$. Ahora veamos la asignación de T en morfismos, sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathscr{C}$, y consideremos las $\mathscr{E}$-sucesiones elegidas de X y Y, $X \xrightarrow{u_X} I_X \xrightarrow{v_X} T(X)$ y $Y \xrightarrow{u_X} I_Y \xrightarrow{v_Y} T(Y)$, respectivamente. Entonces por la proposición 2.14 tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "\hat{f}"] & T(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "u_Y"'] & I_Y \arrow[r, "v_Y"'] & T(Y).
\end{tikzcd}$$

Definamos $T(f) := \pi(\tilde{f})$, donde $\pi : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ es la proyección canónica. Notemos que T está bien definida en morfismos gracias a la proposición 2.16.

PROPOSICIÓN 2.19.

$T : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ *es un funtor aditivo.*

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que el siguiente diagrama conmuta en $\mathscr{C}$, para $i = 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f_i"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "\hat{f}_i"] & T(X) \arrow[d, "\tilde{f}_i"] \\
Y \arrow[r, "u_Y"'] & I_Y \arrow[r, "v_Y"'] & T(Y).
\end{tikzcd}$$

Entonces, también el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f_1+f_2"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "\hat{f}_1+\hat{f}_2"] & T(X) \arrow[d, "\tilde{f}_1+\tilde{f}_2"] \\
Y \arrow[r, "u_Y"'] & I_Y \arrow[r, "v_Y"'] & T(Y).
\end{tikzcd}$$

Por definición de T tenemos que

$$T(f_1 + f_2) = \pi(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) = \pi(\tilde{f}_1) + \pi(\tilde{f}_2) = T(f_1) + T(f_2).$$

Ahora veamos que $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$. Sean $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})$. Tenemos el siguiente diagrama en donde todos los cuadrados interiores son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "\hat{f}"] & T(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "u_Y"] \arrow[d, "g"'] & I_Y \arrow[r, "v_Y"] \arrow[d, "\hat{g}"] & T(Y) \arrow[d, "\tilde{g}"] \\
Z \arrow[r, "u_Z"'] & I_Z \arrow[r, "v_Z"'] & T(Z);
\end{tikzcd}$$

por lo tanto el cuadrado exterior también conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "gf"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "\hat{g}\hat{f}"] & T(X) \arrow[d, "\tilde{g}\tilde{f}"] \\
Z \arrow[r, "u_Z"'] & I_Z \arrow[r, "v_Z"'] & T(Z).
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que $T(gf) = \pi(\tilde{g}\tilde{f}) = \pi(\tilde{g})\pi(\tilde{f}) = T(g)T(f)$. Finalmente, si $X \in \mathscr{C}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "1_X"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "1_{I_X}"'] & T(X) \arrow[d, "1_{TX}"] \\
X \arrow[r, "u_X"'] & I_X \arrow[r, "v_X"'] & T(X).
\end{tikzcd}$$

Entonces, $T(1_X) = \pi(1_{T_X}) = 1_{T(X)}$. Así, hemos probado que T es un funtor aditivo.

□

AFIRMACIÓN 2.20.
Ker(T)=$\{f |$ *f se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo*$\}$

DEMOSTRACIÓN.
Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ tal que $T(f) = 0$, lo cual nos dice que el morfismo $\widetilde{f} : T(X) \longrightarrow T(Y)$ se factoriza a través de algún $\mathscr{E}$-proyectivo P, es decir, tenemos el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "u_X"] \arrow[dd, "f"'] & & I_X \arrow[rr, "v_X"] \arrow[dd, "\widehat{f}"] & & T(X) \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[dd, "\widetilde{f}"] \\
& & & P \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\lambda"] & \\
Y \arrow[rr, "u_Y"'] & & I_Y \arrow[rr, "v_Y"'] & & T(Y).
\end{tikzcd}$$

Suponga que $\widetilde{f} = \beta\alpha$. Como P es proyectivo y el renglón inferior es una $\mathscr{E}$-sucesión, existe el morfismo $\lambda : P \longrightarrow I_Y$ tal que $v_Y\lambda = \beta$. Definamos $\eta := \lambda\alpha$, así tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "\widehat{f}-\eta v_X"'] & T(X) \arrow[d, "\widetilde{f}"] \arrow[dl, "\eta"] \\
Y \arrow[r, "u_Y"'] & I_Y \arrow[r, "v_Y"'] & T(Y).
\end{tikzcd}$$

Veamos que $v_Y(\widehat{f} - \eta v_X) = 0$.

$$v_Y(\widehat{f} - \eta v_X) = v_Y\hat{f} - v_Y\eta v_X = v_Y\hat{f} - v_Y\lambda\alpha v_X$$

$$= v_Y\hat{f} - \beta\alpha v_X = v_Y\hat{f} - \tilde{f}v_X = v_Y\hat{f} - v_Y\hat{f} = 0.$$

Como u_Y es el núcleo de v_Y, por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\sigma : I_X \longrightarrow Y$ tal que $\hat{f} - \eta v_X = u_Y\sigma$, es decir, tenemos el siguiente diagrama en el cual, el triángulo inferior del primer cuadrado, conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "\hat{f}-\eta v_X"] \arrow[dl, dotted, "\sigma"] & T(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "u_Y"'] & I_Y \arrow[r, "v_Y"'] & T(Y).
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\sigma u_X = f$

$$u_Y\sigma u_X = (\hat{f} - \eta v_X)u_X = \hat{f}u_X - \eta v_X u_X = \hat{f}u_X = u_Y f$$

como u_Y es monomorfismo, entonces $\sigma u_X = f$. Luego f se factoriza a través del $\mathscr{E}$-proyectivo, I_X. Por otro lado, supongamos que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ y es tal que se factoriza a través de un proyectivo P

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \\
& P. \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor T, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[rr, "T(f)"] \arrow[dr, "T(\alpha)"'] & & T(Y) \\
& T(P) \arrow[ur, "T(\beta)"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $T(f) = T(\beta)T(\alpha) = 0$, pues como P es proyectivo, $T(P) = 0$, por lo tanto $T(\beta) = 0$ y $T(\alpha) = 0$. Así, $f \in \mathrm{Ker(T)}$.

□

COROLARIO 2.21.
El funtor $T : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ *induce un funtor aditivo a nivel de la categoría estable, que denotaremos con el mismo símbolo* T.

DEFINICIÓN 2.22.
De manera análoga vamos a definir un funtor $S : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ *. Veamos la asignación de los objetos de* $\mathscr{C}$*. Dado* $X \in \mathscr{C}$ *elijamos la siguiente* $\mathscr{E}$*-sucesión* $Y \xrightarrow{\alpha_X} P_X \xrightarrow{\beta_X} X$ *con* P_X $\mathscr{E}$*-proyectivo. Definamos a* $S(X) = Y$*. Ahora definamos a* S *en morfismos. Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *un morfismo en* $\mathscr{C}$*. Consideremos las* $\mathscr{E}$*-sucesiones elegidas para* X *y* Y*, respectivamente, y el morfismo de* $\mathscr{E}$*-sucesiones inducido*

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"'] & P_X \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "\hat{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\
S(Y) \arrow[r, "\alpha_X"] & P_Y \arrow[r, "\beta_Y"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Definimos $S(f) := \pi(\tilde{f})$*, donde* $\pi : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ *es la proyección canónica. Notemos que la proposición 2.17 nos dice que* $T(f)$ *no depende del morfismo de* $\mathscr{E}$*-sucesiones* $(\tilde{f}, \hat{f}, f)$ *que levanta a* f.

PROPOSICIÓN 2.23.
$S : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ *es funtor aditivo.*

DEMOSTRACIÓN.
Supongamos que el siguiente diagrama conmuta en $\mathscr{C}$ para toda $i = 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\tilde{f}_i"'] & P_X \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "\hat{f}_i"] & X \arrow[d, "f_i"] \\
S(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & P_Y \arrow[r, "\beta_Y"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Entonces, también conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\tilde{f}_1+\tilde{f}_2"'] & P_X \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "\hat{f}_1+\hat{f}_2"] & X \arrow[d, "f_1+f_2"] \\
S(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & P_Y \arrow[r, "\beta_Y"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Por la definición de S, tenemos que

$$S(f_1 + f_2) = \pi(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) = \pi(\tilde{f}_1) + \pi(\tilde{f}_2) = S(f_1) + S(f_2).$$

Veamos que $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$. Sean $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$. Tenemos el siguiente diagrama en el cual todos los cuadrados interiores son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & P_X \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "\hat{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\
S(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & P_Y \arrow[r, "\beta_Y"] \arrow[d, "\hat{g}"] & Y \arrow[d, "g"] \\
S(Z) \arrow[r, "\alpha_Z"'] & P_Z \arrow[r, "\beta_Z"'] & Z
\end{tikzcd}$$

luego, tenemos que el cuadrado exterior también conmuta. Entonces tenemos que

$$S(gf) = \pi(\tilde{g}\tilde{f}) = \pi(\tilde{g})\pi(\tilde{f}) = S(g)S(f).$$

Finalmente, si $X \in \mathscr{C}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "1_{S(X)}"'] & P_X \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "1_{P_X}"'] & X \arrow[d, "1_X"] \\
S(X) \arrow[r, "\alpha_X"'] & P_X \arrow[r, "\beta_X"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Entonces, $S(1_X) = \pi(1_{S(X)}) = 1_{S(X)}$. Así, hemos probado que S es un funtor aditivo.

□

PROPOSICIÓN 2.24.
Ker(S)=$\{f|$ *f se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo*$\}$

DEMOSTRACIÓN.
Sea f en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ tal que $S(f) = 0$, entonces el morfismo $\widetilde{f}$ se factoriza a través de algún $\mathscr{E}$-inyectivo I, luego tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[rr, "\alpha_X"] \arrow[dd, "\widetilde{f}"'] \arrow[dr, "u"] & & P_X \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[dd, "\widehat{f}"] \arrow[dl, dotted, "\lambda"] & X \arrow[dd, "f"] \\
& I \arrow[dl, "v"] & & \\
S(Y) \arrow[rr, "\alpha_Y"'] & & P_Y \arrow[r, "\beta_Y"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Así tenemos que $\widetilde{f} = vu$, como I es $\mathscr{E}$-inyectivo, existe λ tal que $\lambda\alpha_X = u$.

Definamos $\eta := v\lambda : P_X \longrightarrow S(Y)$, así tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & P_X \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[dl, "\eta"] \arrow[d, "\widehat{f}-\alpha_Y\eta"] & X \arrow[d, "f"] \\
S(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & P_Y \arrow[r, "\beta_Y"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Veamos que $(\widehat{f} - \alpha_Y\eta)\alpha_X = 0$

$$(\widehat{f} - \alpha_Y\eta)\alpha_X = \widehat{f}\alpha_X - \alpha_Y\eta\alpha_X = \widehat{f}\alpha_X - \alpha_Y(v\lambda)\alpha_X$$

$$= \widehat{f}\alpha_X - \alpha_Y vu = \widehat{f}\alpha_X - \alpha_Y\widetilde{f} = \widehat{f}\alpha_X - \widehat{f}\alpha_X = 0.$$

Pero como β_X es el conúcleo de α_X, por la propiedad universal del conúcleo existe un único morfismo $\sigma : X \longrightarrow P_Y$ tal que $\widehat{f} - \alpha_Y\eta = \sigma\beta_X$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama en el cual el triángulo superior del segundo cuadrado, conmuta

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & P_X \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "\widehat{f}-\alpha_Y\eta"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\sigma"] \\
S(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & P_Y \arrow[r, "\beta_Y"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Veamos que el triángulo inferior del segundo cuadrado también conmuta. Tenemos $\beta_Y\sigma\beta_X = \beta_Y(\widehat{f} - \alpha_Y\eta) = \beta_Y\widehat{f} - \beta_Y\alpha_Y\eta = \beta_Y\widehat{f} = f\beta_X$, y, entonces, $\beta_Y\sigma = f$. Luego, f se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo. Ahora sea f en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ tal que se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-inyectivo I

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & Y \\
& I. \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor S, obtenemos

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[rr, "S(f)"] \arrow[dr, "S(u)"'] & & S(Y) \\
& S(I). \arrow[ur, "S(v)"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces $S(f) = S(v)S(u) = 0$, pues como I es $\mathscr{E}$-inyectivo, $S(I) = 0$ y esto nos dice que $S(v) = 0$ y $T(u) = 0$. Así $f \in \mathrm{Ker(S)}$.

□

COROLARIO 2.25.

El funtor $S : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ *induce un funtor aditivo* $\underline{\mathscr{C}} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ *, que denotaremos con el mismo símbolo* S*.*

PROPOSICIÓN 2.26.
$TS \cong Id_{\underline{\mathscr{C}}} \cong ST$

DEMOSTRACIÓN.
Consideremos $X \in \underline{\mathscr{C}}$ y elijamos a la $\mathscr{E}$-sucesión $S(X) \xrightarrow{\alpha} P_X \xrightarrow{\beta} X$. Notemos que también $S(X) \in \underline{\mathscr{C}}$. Entonces hemos elegido la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión $S(X) \xrightarrow{u} I_{S(X)} \xrightarrow{v} TS(X)$. Aplicando dos veces la proposición 2.14 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & P_X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda"] & X \arrow[d, "\tilde{\lambda}"] \\
S(X) \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & I_{S(X)} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\gamma"] & TS(X) \arrow[d, "\tilde{\gamma}"] \\
S(X) \arrow[r, "\alpha"] & P_X \arrow[r, "\beta"] & X.
\end{tikzcd}$$

Definamos $\rho_X := \pi(\tilde{\lambda})$ y $\sigma_X := \pi(\tilde{\gamma})$, donde $\pi : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ es la proyección canónica. También tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & P_X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, equal] & X \arrow[d, "1_X"] \\
S(X) \arrow[r, "\alpha"'] & P_X \arrow[r, "\beta"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Por la proposición 2.16 tenemos que

$$\sigma_X \rho_X = \pi(\tilde{\gamma})\pi(\tilde{\lambda}) = \pi(\tilde{\gamma}\tilde{\lambda}) = \pi(1_X) = 1_X.$$

Análogamente se muestra que $\rho_X \sigma_X = 1_{TS(X)}$. Similarmente, si $X \in \underline{\mathscr{C}}$, elijamos a la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión $X \xrightarrow{u} I_X \xrightarrow{v} T(X)$.

Observemos que $T(X) \in \underline{\mathscr{C}}$, por lo tanto elijamos a la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión $ST(X) \xrightarrow{\alpha} P_{T(X)} \xrightarrow{\beta} T(X)$. Aplicando dos veces la proposición 2.15 a $1_{T(X)}$ obtenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\tilde{\lambda}'"'] & I_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\lambda'"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
ST(X) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tilde{\gamma}'"'] & P_{T(X)} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma'"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"] & I_X \arrow[r, "v"] & T(X).
\end{tikzcd}$$

Definamos $\rho'_X : \pi(\tilde{\lambda'})$ y $\sigma'_X : \pi(\tilde{\gamma'})$, donde $\pi : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ es la proyección canónica. Aplicando la proposición 2.15 al diagrama conmutativo anterior y al siguiente

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & I_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & T(X) \arrow[d, "1_{T(X)}"] \\
X \arrow[r, "u"'] & I_X \arrow[r, "v"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

obtenemos $\sigma'_X \rho'_X = \pi(\tilde{\lambda'})\pi(\tilde{\gamma'}) = \pi(\tilde{\lambda'}\tilde{\gamma'}) = \pi(1_X) = 1_X$.

Similarmente, se muestra que $\rho'_X \sigma'_X = 1_{ST(X)}$. En este punto nos falta un detalle por probar, la naturalidad de los morfismos $\rho_X, \sigma_X, \rho'_X$ y σ'_X. Veamos primero la naturalidad de ρ'_X. Lo que queremos probar es que el siguiente diagrama es conmutativo, para cada $\pi(f) \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\rho'_X"] \arrow[d, "\pi(f)"'] & ST(X) \arrow[d, "TS(f)"] \\
Y \arrow[r, "\rho'_Y"'] & ST(Y).
\end{tikzcd}$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "\hat{f}"] & T(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "u_Y"] \arrow[d, "\tilde{\lambda'_Y}"'] & I_Y \arrow[r, "v_Y"] \arrow[d, "\lambda'_Y"] & T(Y) \arrow[d, equal, "1_{T(Y)}"] \\
ST(Y) \arrow[r, "\alpha"'] & P_{T(Y)} \arrow[r, "\beta"'] & T(Y)
\end{tikzcd}$$

obtenido de aplicar la proposición 2.14 a f y a $1_{T(Y)}$. Por otro lado tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "\tilde{\lambda'}_X"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "\lambda'_X"] & T(X) \arrow[d, equal, "1_{T(X)}"] \\
ST(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\tilde{f}_2"'] & P_{T(X)} \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "\tilde{f}_1"] & T(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
ST(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & P_{T(Y)} \arrow[r, "\beta_Y"] & T(Y)
\end{tikzcd}$$

que se obtiene de aplicar la proposición 2.15 a $1_{T(X)}$ y a $\tilde{f}$. Aplicando la proposición 2.17 a los dos últimos diagramas obtenemos $\pi(\tilde{f}_2\tilde{\lambda}'_X) = \pi(\tilde{\lambda}'_Y f)$. Entonces,

$$\rho'_Y \pi(f) = \pi(\tilde{\lambda}'_Y)\pi(f) = \pi(\tilde{\lambda}'_Y f) = \pi(\tilde{f}_2\tilde{\lambda}'_X) = \pi(\tilde{f}_2)\pi(\tilde{\lambda}'_X)$$

$$= S(\tilde{f})\rho'_X = S(\pi(\tilde{f}))\rho'_X = ST(f)\rho'_X.$$

Veamos la naturalidad de σ'_X. Lo veremos es que, en $\underline{\mathscr{C}}$, el diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
ST(X) \arrow[r, "\sigma'_X"] \arrow[d, "ST(f)"'] & X \arrow[d, "\pi(f)"] \\
ST(Y) \arrow[r, "\sigma'_Y"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Esto es consecuencia de la proposición **??**, pues $\sigma'_X = (\rho'_X)^{-1}$ para cada $X \in \mathscr{C}$. La prueba de que $\rho : 1_{\underline{\mathscr{C}}} \longrightarrow TS$ es una transformación natural con inversa σ es similar a la hecha anteriormente.

□

LEMA 2.27.
Consideremos que $X \xrightarrow{u_X} I_X \xrightarrow{v_X} T(X)$ *y* $S(X) \xrightarrow[\alpha_X]{} P_X \xrightarrow[\beta_X]{} X$ *son nuestras elecciones de* $\mathscr{E}$*-sucesiones,* $\forall X \in \mathscr{C}$*, de tal forma que* $ST(X) = X$ *y* $TS(X) = X$*. Entonces,* $T : \underline{\mathscr{C}} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ *es un automorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.
Sabemos que T es una biyección en la clase de objetos de $\underline{\mathscr{C}}$ con inversa S. Sea $\pi(f) \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Por la proposición 2.14, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f"'] & I_X \arrow[r, "v_X"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & T(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha_X"'] & I_Y \arrow[r, "\beta_X"'] & T(Y).
\end{tikzcd}$$

Por la proposición 2.15, también tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
X = STX \arrow[r, "\alpha_{T_X}"] \arrow[d, "\tilde{f}_1"'] & P_{T_X} \arrow[r, "\beta_{T_X}"] \arrow[d, "\hat{f}_1"'] & T(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y = STY \arrow[r, "\alpha_{T_X}"'] & P_{T_Y} \arrow[r, "\beta_{T_X}"'] & T(Y).
\end{tikzcd}$$

Por la proposición 2.17, $\pi(f) = \pi(\tilde{f}_1)$. Entonces,

$$\pi(f) = \pi(\tilde{f}_1) = S(\pi(\tilde{f})) = ST(\pi(f)).$$

Luego, $ST = id_{\underline{\mathscr{C}}}$. Similarmente se prueba que $TS = id_{\underline{\mathscr{C}}}$.

□

DEFINICIÓN 2.28.
Sean $M, N \in \mathscr{C}$. Denotaremos por $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$, *al conjunto de las clases de equivalencia* $[x]$ *de* $\mathscr{E}$*-sucesiones* $x : M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} N$ *por la siguiente relación de equivalencia:* $x \sim y$ *si y sólo si existe un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "s"'] & F \arrow[r, "t"'] & N,
\end{tikzcd}$$

donde λ *es un isomorfismo.*

PROPOSICIÓN 2.29.
(a) *Supongamos que los siguientes diagramas son conmutativos, y sus renglones son* $\mathscr{E}$*-sucesiones*

$$\begin{tikzcd}
x : & M \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "\lambda"] & N_1 \arrow[d, "v"] \\
& M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y : & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "u"'] & N_1 \arrow[d, "v"] \\
& M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N_2.
\end{tikzcd}$$

Entonces $x \sim y$.
(b) *Supongamos que los siguientes diagramas son conmutativos, y sus renglones son* $\mathscr{E}$*-sucesiones*

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[d, equal] \\
x : & M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[d, equal] \\
y : & M_2 \arrow[r, "\alpha"'] & F \arrow[r, "\beta"'] & N.
\end{tikzcd}$$

Entonces $x \sim y$.

DEMOSTRACIÓN.
Haremos la demostración del inciso (b), el otro caso de prueba de manera análoga. Aplicando el lema de factorización 2.6 al diagrama conmutativo de la izquierda, con $w = Id_N$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[d, equal] \\
z : & M_2 \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "\mu'"'] & N \arrow[d, equal] \\
x : & M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N,
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado superior izquierdo es el push-out y $\mu'\mu = v$. Entonces los últimos dos renglones son $\mathscr{E}$-sucesiones equivalentes; $z \sim x$. Similarmente se puede ver que $y \sim z$. Por tanto, $x \sim y$.

□

LEMA 2.30.
$\psi : \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{M}, \mathrm{T(N)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, *es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.
Primero definamos al morfismo $\psi : \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{M}, \mathrm{T(N)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, como sigue. Dado $\pi(u) \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{M}, \mathrm{T(N)})$. Entonces $\psi(\pi(u)) := [x_u]$ donde x_u es el pull-back

$$x_u : \quad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d, "u"] \\ N \arrow[r, "u_N"'] & I_N \arrow[r, "v_N"'] & T(N). \end{tikzcd}$$

Veamos que:

(a) ψ está bien definida.
Sean $u, v \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{T(N)})$ tales que $\psi(\pi(u)) = \psi(\pi(v))$. Por construcción, tenemos los pull-backs

$$x_u : \quad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d, "u"] \\ N \arrow[r, "u_N"'] & I_N \arrow[r, "v_N"'] & T(N) \end{tikzcd}$$

$$x_v : \quad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "s_2"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "g'"'] & M \arrow[d, "v"] \\ N \arrow[r, "u_N"'] & I_N \arrow[r, "v_N"'] & T(N). \end{tikzcd}$$

Veamos que $x_u \sim x_v$. Como $\pi(u) = \pi(v)$, entonces $0 = \pi(v) - \pi(u) = \pi(v - u)$, luego tenemos que $v - u$ se factoriza a través del $\mathscr{E}$-proyectivo I_N

$$x_u : \quad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d, "v-u"] \arrow[dl, dotted, "\lambda"] \\ N \arrow[r, "u_N"'] & I_N \arrow[r, "v_N"'] & T(N), \end{tikzcd}$$

de donde tenemos que $v - u = v_N\lambda$. Así tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "g+\lambda t_1"'] & M \arrow[d, "v=u+v_N\lambda"] \\
N \arrow[r, "u_N"'] & I_N \arrow[r, "v_N"'] & T(N).
\end{tikzcd}$$

Veamos que conmuta

$$v_N(g + \lambda t_1) = v_N g + v_N\lambda t_1 = ut_1 + (v - u)t_1 = vt_1,$$

luego el último diagrama es conmutativo. Luego por el inciso (a) de la proposición 2.29 se tiene que $x_u \sim x_v$.

(b) ψ es inyectiva.
Sean $u, v \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{T(N)})$ tales $x_u = x_v$, donde

$$x_u : \quad \begin{tikzcd}
N \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d, "u"] \\
N \arrow[r, "u_N"'] & I_N \arrow[r, "v_N"'] & T(N)
\end{tikzcd} \qquad x_v : \quad \begin{tikzcd}
N \arrow[r, "s_2"] \arrow[d] & E_2 \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "g'"'] & M \arrow[d, "v"] \\
N \arrow[r, "u_N"'] & I_N \arrow[r, "v_N"'] & T(N).
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "\lambda"] & M \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h"] \\
N \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & M,
\end{tikzcd}$$

donde λ es isomorfismo. Observemos que $v_N g = ut_1 = ut_2\lambda$ y que $v_N g'\lambda = vt_2\lambda = vt_1$. Como $g'\lambda, g : E_1 \longrightarrow I_N$, al precomponer su diferencia con s_1 obtenemos

$$(g'\lambda - g)s_1 = g'\lambda s_1 - gs_1 = g's_2 - gs_1 = u_N - u_N = 0,$$

recordemos que t_1 es el conúcleo de s_1, por lo tanto, existe el morfismo $h : M \longrightarrow I_N$ tal que $ht_1 = g'\lambda - g$, es decir

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "g'\lambda-g"'] & M \arrow[d, "v-u"] \\
N \arrow[r, "u_N"'] & I_N \arrow[r, "v_N"'] & T(N).
\end{tikzcd}$$

Componiendo $g'\lambda - g$ con v_N, por un lado tenemos $v_N(g'\lambda - g) = v_N h t_1$. Por otro

$$v_N(g'\lambda - g) = v_N g'\lambda - v_N g = vt_2\lambda - ut_1 = vt_1 - ut_1 = (v-u)t_1$$

como t_1 es epimorfismo, tenemos que $v - u = v_N h$, es decir $v - u$ se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo, luego $\pi(v) = \pi(u)$.

(c) ψ es suprayectiva.

Sea $[x] \in \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ donde x es la $\mathscr{E}$-sucesión $N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{t} M$. Tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} x: & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[d, "u"] \\ & N \arrow[r, "u_N"'] & I_N \arrow[r, "v_N"'] & T(N) \end{tikzcd}$$

donde g existe por ser I_N $\mathscr{E}$-inyectivo y u es inducido por el primer cuadrado conmutativo. Por el inciso (a) de la proposición 2.29 el diagrama es un push-out. Luego tenemos que $\pi(u) \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{M}, \mathrm{T(N)})$ es tal que $\psi(\pi(u)) = [x]$.

□

Veamos la naturalidad del isomorfismo entre funtores $\underline{\mathscr{C}}^{op} \times \underline{\mathscr{C}} \longrightarrow Set$

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\pi(-), \mathrm{T}\pi(*)) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(-, *)$$

PROPOSICIÓN 2.31.

ψ es natural en la variable M.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $M \xrightarrow{f} M_1$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Lo que debemos probar, es que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{N}, \mathrm{T(M)}) \arrow[r, "\psi_{N,M}"] \arrow[d, "T(\pi(f))^*"'] & \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}) \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{N}, \mathrm{T(M_1)}) \arrow[r, "\psi_{N,M_1}"'] & \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N}, \mathrm{M_1}), \end{tikzcd}$$

donde $T(\pi(f))^* := \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(1, \mathrm{T}(\pi(\mathrm{f})))$ y $f^* := \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(1, \mathrm{f})$.

Sea $\pi(g) \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{N}, \mathrm{T(M)})$ y sea $x = \psi_{N,M}(\pi(g))$. Luego, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
x : & M \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d] & N \arrow[d, "g"] \\
& M \arrow[r, "u_M"'] \arrow[d, "f"'] & I_M \arrow[r, "v_M"'] \arrow[d, "\hat{f}"'] & T(M) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
& M_1 \arrow[r, "u_{M_1}"'] & I_{M_1} \arrow[r, "v_{M_1}"'] & T(M_1).
\end{tikzcd}$$

Así tenemos el siguiente push-out

$$\begin{tikzcd}
x : & M \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d] & N \arrow[d, equal] \\
\xi := \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(1, \mathrm{f})(\mathrm{x}) : & M_1 \arrow[r, "s_1"'] & L \arrow[r, "t_1"'] & N.
\end{tikzcd}$$

El siguiente morfismo de $\mathscr{E}$-sucesiones

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d] & N \arrow[d, "\tilde{f}g"] \\
M_1 \arrow[r, "u_{M_1}"'] & I_{M_1} \arrow[r, "v_{M_1}"'] & T(M_1)
\end{tikzcd}$$

induce, por el lema de factorización 2.6, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d] & N \arrow[d, equal] \\
\xi : & M_1 \arrow[r, "s_1"'] \arrow[d, equal] & L \arrow[r, "t_1"'] \arrow[d] & N \arrow[d, "\tilde{f}g"] \\
& M_1 \arrow[r, "u_{M_1}"'] & J_{M_1} \arrow[r, "v_{M_1}"'] & T(M_1).
\end{tikzcd}$$

Entonces, como $T(f)\pi(g) = \pi(\tilde{f})\pi(g) = \pi(\tilde{f}g)$, tenemos

$$\psi_{N,M_1}(T(f)\pi(g)) = \psi(\pi(\tilde{f}g)) = [x_{\tilde{f}g}] = [\xi] = f^*(\psi_{N,M}(\pi(g))).$$

Esto nos demuestra la conmutatividad del diagrama deseado.

□

PROPOSICIÓN 2.32.
ψ es natural en la variable N.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\pi(f) : N_1 \longrightarrow N_2$ un morfismo en $\underline{\mathscr{C}}$, ahora deseamos probar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{N_1}, \mathrm{T(M)}) \arrow[r, "\psi_{N_1,M}"] & \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N_1}, \mathrm{M}) \\
\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{N_2}, \mathrm{T(M)}) \arrow[r, "\psi_{N_2,M}"'] \arrow[u, "\pi(f)^*"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(\mathrm{N_2}, \mathrm{M}) \arrow[u, "Ext(f{,}1_M)"']
\end{tikzcd}$$

donde $\pi(f)^* := \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\pi(\mathrm{f}), 1_{\mathrm{TM}})$. Sea $\pi(g) \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{N_2}, \mathrm{T(M)})$. Por un lado tenemos $[x] := \psi_{N_2,M}(\pi(g))$, al aplicarle $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{f}, 1_{\mathrm{M}})$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d] & N_1 \arrow[d, "f"] & : \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{f}, 1_{\mathrm{M}})\mathrm{x} \\
M \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d] & N_2 \arrow[d, "g"] & : x \\
M \arrow[r, "u_M"'] & I_M \arrow[r, "v_M"'] & TM. &
\end{tikzcd}$$

En particular, tenemos que conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d] & N_1 \arrow[d, "gf"] \\
M \arrow[r, "u_M"'] & I_M \arrow[r, "v_M"'] & TM
\end{tikzcd}$$

es decir

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{f}, 1_{\mathrm{M}})\psi_{\mathrm{N_2,M}}(\pi(\mathrm{g})) = \mathrm{Ext}(\mathrm{f}, 1_{\mathrm{M}})[\mathrm{x}] = [\mathrm{x_{gf}}] = \psi(\pi(\mathrm{gf})) = \psi(\pi(\mathrm{g})\pi(\mathrm{f})).$$

□

OBSERVACIÓN 2.33.
Se puede ver que ψ es un isomorfismo de espacios vectoriales si a $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ se le da estructura de espacio vectorial "copiando" la estructura de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{T(N)})$, es decir, si $a, b \in \mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ y $\lambda \in k$, definimos a la "suma" como sigue $a + b := \psi(\psi^{-1}(a) + \psi^{-1}(b))$ y la "multiplicación por escalar" la definimos como $\lambda a := \psi(\lambda\psi^{-1}(a))$. La "suma" de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ coincide con la suma de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ igual que en las categorías abelianas.

2.3. La categoría estable es triangulada

Sea $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ una categoría de Frobenius, sea $\underline{\mathscr{C}}$ su categoría estable, y supongamos que se cumplen las hipótesis del lema 2.27 lo que nos implica que $T : \underline{\mathscr{C}} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ es el automorfismo definido en la sección anterior.

DEFINICIÓN 2.34.
Una sexteta estandar de $\underline{\mathscr{C}}$ *es de la forma* $M \xrightarrow{\pi(u)} E \xrightarrow{\pi(v)} N \xrightarrow{\pi(f)} TM$ *en donde* $x : M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} N$ *es una* $\mathscr{E}$*-sucesión y* $\psi_{N,M}(\pi(f)) = [x]$*. La última igualdad es equivalente a la conmutatividad en* $\mathscr{C}$ *del diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "v"] \arrow[d] & N \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, "u_M"'] & I_M \arrow[r, "v_M"'] & TM.
\end{tikzcd}$$

Diremos que una sexteta es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$ *si es isomorfa a un sexteta estandar.*

LEMA 2.35.
Si $M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{t} N$ *es una* $\mathscr{E}$*-sucesión, entonces existe* $w : N \longrightarrow TM$ *tal que* $M \xrightarrow{\pi(s)} E \xrightarrow{\pi(t)} N \xrightarrow{\pi(w)} TM$ *es un triángulo en* $\underline{\mathscr{C}}$*.*

DEMOSTRACIÓN.
Consideremos la $\mathscr{E}$-sucesión canónica $M \xrightarrow{u} J(M) \xrightarrow{v} TM$ y notamos que, como $J(M)$ es $\mathscr{E}$-inyectivo, existe un morfismo $\lambda : E \longrightarrow J(M)$ tal que $\lambda s = u$. En consecuencia existe un morfismo $w : N \longrightarrow TM$ tal que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "w"] \\
M \arrow[r, "u"'] & J(M) \arrow[r, "v"'] & TM.
\end{tikzcd}$$

□

LEMA 2.36.
Sea $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ *una categoría de Frobenius y sea* $\pi : \mathscr{C} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ *la proyección canónica en la categoría estable. Si* $I \in \mathscr{C}$ *es* $\mathscr{E}$*-inyectivo, entonces las sextetas*

$$M \xrightarrow{\pi\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}} L \oplus I \xrightarrow{\pi(\alpha, \beta)} N \xrightarrow{\pi(\gamma)} TM$$

y

$$M \xrightarrow{\pi(f)} L \xrightarrow{\pi(\alpha)} N \xrightarrow{\pi(\gamma)} TM$$

son isomorfas en $\underline{\mathscr{C}}$*.*

DEMOSTRACIÓN.
Veamos que el siguiente diagrama conmuta en $\underline{\mathscr{C}}$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi\left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & L \oplus I \arrow[r, "\pi(\alpha,\beta)"] & N \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & TM \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "\pi(f)"'] & L \arrow[u, "\pi\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\pi(\alpha)"'] & N \arrow[r, "\pi(\gamma)"'] & TM.
\end{tikzcd}$$

Note que sólo falta verificar que el primer cuadro conmuta pues el segundo lo hace ya que

$$(\alpha, \beta)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \alpha.$$

El primer cuadro conmuta si y sólo si

$$\left(\begin{smallmatrix} \pi(f) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \pi\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\pi(f) = \pi\left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \pi(f) \\ \pi(g) \end{smallmatrix}\right).$$

Luego, basta ver que $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ g \end{smallmatrix}\right)$ se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo. Notemos que en $\mathscr{C}$ conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ g \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dr, bend right, "g"'] & & L \oplus I \\
& I \arrow[ur, bend right, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] &
\end{tikzcd}$$

por tanto tenemos que $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ g \end{smallmatrix}\right)$ se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo. Luego el primer cuadrado conmuta. Nos falta ver que $\pi\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ es un isomorfismo en $\underline{\mathscr{C}}$. Tomemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, bend right, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & L \oplus I. \arrow[l, bend right, "(1{,}0)"']
\end{tikzcd}$$

Ya sabemos que $(1,0)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1_L$. Luego $\pi(1,0)\pi\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1_L$. Nos gustaría ver que

$$\pi\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\pi(1,0) = 1_{L\oplus I},$$

es decir, debemos ver que

$$1_{L\oplus I} = \pi\left(\begin{smallmatrix} 1_L & 0 \\ 0 & 1_I \end{smallmatrix}\right) = \pi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

lo cual es equivalente a probar que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_I \end{pmatrix}$$

se factoriza por un proyectivo. Pero, como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
L \oplus I \arrow[rr, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_I \end{pmatrix}"] \arrow[dr, bend right, "(0{,}1)"'] & & L \oplus I \\
& I \arrow[ur, bend right, "\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo tanto, tenemos que $\pi \begin{pmatrix} 1_L \\ 0 \end{pmatrix}$ es isomorfismo en $\underline{\mathscr{C}}$.

□

Antes de probar que la categoría estable es triangulada veamos una proposición que nos será de utilidad.

PROPOSICIÓN 2.37.
$M \xrightarrow{\pi(s)} E \xrightarrow{\pi(t)} N \xrightarrow{\pi(w)} TM$ *es un triángulo en* $\underline{\mathscr{C}}$ *si y sólo si*
$E \xrightarrow{\pi(t)} N \xrightarrow{\pi(w)} TM \xrightarrow{-T(s)} TE$ *es un triángulo en* $\underline{\mathscr{C}}$.

DEMOSTRACIÓN.
Denotemos por T_1 al primer triángulo del enunciado y por T_1' al segundo. Notemos que $T_1 \cong S_1$ implica $T_1' \cong S_1'$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Para ver que T_1' es un triángulo, podemos suponer que T_1 es estandar. Por hipótesis tenemos que conmuta en $\mathscr{C}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[d, "w"] & : x_w \\
M \arrow[r, "u_M"'] & I_M \arrow[r, "v_M"'] & TM, &
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones. De donde obtenemos que la siguiente es una $\mathscr{E}$-sucesión, por el lema 2.5 $E \xrightarrow{\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}} N \oplus I_M \xrightarrow{(w,-v_M)} TM$. También tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "s"'] & I_M \arrow[r, "v_M"] \arrow[d, "\widehat{s}"'] & TM \arrow[d, "\tilde{s}"] \\
E \arrow[r, "u_E"'] & I_E \arrow[r, "v_E"'] & TE.
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Del diagrama 2.2 tenemos $u_E s = \widehat{s} u_M = \widehat{s}\alpha s$. Luego, existe un único morfismo $\lambda : N \longrightarrow I_E$ tal que $u_E - \widehat{s}\alpha = \lambda t$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s"] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d, "u_E - \widehat{s}\alpha"'] & N \arrow[dl, dotted, "\lambda"] \\
 & I_E. &
\end{tikzcd}$$

Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & N \oplus I_M \arrow[r, "(w,-v_M)"] \arrow[d, dotted, "(\lambda,\widehat{s})"'] & TM \arrow[d, "-\tilde{s}"] \\
E \arrow[r, "u_E"'] & I_E \arrow[r, "v_E"'] & TE.
\end{tikzcd}$$

Para ello probaremos que el segundo cuadrado conmuta, pues el primero ya lo hace por la forma en la que definimos a nuestro candidato. Por el diagrama 2.2 tenemos $v_E \widehat{s} = \tilde{s} v_M$, sólo falta ver que $v_E \lambda = -\tilde{s} w$. Por los diagramas 1.2 y 2.2,

$$v_E \lambda t = v_E(u_E - \widehat{s}\alpha) = 0 - v_E \widehat{s}\alpha = -\tilde{s} v_M \alpha = -\tilde{s} w t.$$

Luego, como t es epimorfismo, $v_E \lambda = -\tilde{s} w$. Hemos probado que

$$v_E(\lambda, \widehat{s}) = -\tilde{s}(w, -v_M).$$

Por tanto, como $\pi(\tilde{s}) = T(s)$, tenemos que

$$E \xrightarrow{\pi\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}} N \oplus I_M \xrightarrow{\pi(w,-v_M)} T(M) \xrightarrow{-T(s)} T(E)$$

es un triángulo estandar en $\underline{\mathscr{C}}$ y como $E \xrightarrow{\pi(t)} N \xrightarrow{\pi(w)} T(M) \xrightarrow{-T(s)} T(E)$ es isomorfo a este triángulo, por el lema 2.36, tenemos que también es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Veamos que si $M \xrightarrow{\pi(s)} E \xrightarrow{\pi(t)} N \xrightarrow{\pi(w)} TM$ es un triángulo estandar en $\underline{\mathscr{C}}$, entonces $S(N) \xrightarrow{-S(w)} M \xrightarrow{\pi(s)} E \xrightarrow{\pi(t)} N$ es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$. Por hipótesis, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "w"] \\
M \arrow[r, "u_M"'] & I_M \arrow[r, "v_M"'] & T(M)
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones. Ahora consideremos al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S(N) \arrow[r, "\alpha_N"] \arrow[d, "\tilde{w}"'] & P_N \arrow[r, "\beta_N"] \arrow[d, "\hat{w}"] & N \arrow[d, "w"] \\
M \arrow[r, "u_M"'] & I_M \arrow[r, "v_M"'] & T(M).
\end{tikzcd}$$

Por el lema de factorización, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S(N) \arrow[r, "\alpha_N"] \arrow[d, "\tilde{w}"'] & P_N \arrow[r, "\beta_N"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "w"] \\
M \arrow[r, "u_M"'] & I_M \arrow[r, "v_M"'] & T(M)
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

de donde, por el lema 2.5, obtenemos la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión

$$S(N) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\tilde{w} \\ \alpha_N \end{pmatrix}} M \oplus P_N \xrightarrow{(s,\beta)} E.$$

Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
S(N) \arrow[r, "\begin{pmatrix} -\tilde{w} \\ \alpha_N \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & M \oplus P_N \arrow[r, "{(s,\beta)}"] \arrow[d, "{(0,1_{P_N})}"'] & E \arrow[d, "t"] \\
S(N) \arrow[r, "\alpha_N"'] & P_N \arrow[r, "\beta_N"'] & N.
\end{tikzcd}$$

El primer cuadrado conmuta pues

$$(0, 1_{P_N}) \begin{pmatrix} -\tilde{w} \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \alpha_N.$$

Ahora veamos que el segundo cuadrado conmuta:

$$\beta_N(0, 1_{P_N}) = (0, \beta_N) = (ts, t\beta) = t(s, \beta).$$

Luego, $S(N) \xrightarrow{\pi\begin{pmatrix} -\tilde{w} \\ \alpha_N \end{pmatrix}} M \oplus P_N \xrightarrow{\pi(s,\beta)} E \xrightarrow{\pi(t)} N$ es un triángulo estandar en $\underline{\mathscr{C}}$. En consecuencia, nuevamente por el lema 2.36

$$S(N) \xrightarrow{-S(w)} M \xrightarrow{\pi(s)} E \xrightarrow{\pi(t)} N$$

es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$.

□

LEMA 2.38.
Si en el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "v"'] & N_1 \arrow[d, "\lambda"] \\
M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N_2,
\end{tikzcd}$$

los renglones son $\mathscr{E}$*-sucesiones, entonces en* $\underline{\mathscr{C}}$ *conmuta*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\pi(s_1)"] \arrow[d, "\pi(u)"'] & E_1 \arrow[r, "\pi(t_1)"] \arrow[d, "\pi(v)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(w_1)"] \arrow[d, "\pi(\lambda)"] & T(M_1) \arrow[d, "T(\pi(u))"] \\
M_2 \arrow[r, "\pi(s_2)"'] & E_2 \arrow[r, "\pi(t_2)"'] & N_2 \arrow[r, "\pi(w_2)"'] & T(M_2),
\end{tikzcd}$$

donde w_1, w_2 *son los morfismos construidos en la demostración del lema 2.35.*

DEMOSTRACIÓN.
Por el lema de factorización el siguiente diagrama, con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones, conmuta en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
x_1 : & M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "v_1"'] & N_1 \arrow[d, equal] \\
y : & M_2 \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "v_2"'] & N_1 \arrow[d, "\lambda"] \\
x_2 : & M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N_2.
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Ahora veamos que el siguiente diagrama conmuta en $\underline{\mathscr{C}}$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\pi(s_1)"] \arrow[d, "\pi(u)"'] & E_1 \arrow[r, "\pi(t_1)"] \arrow[d, "\pi(v)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(w_1)"] \arrow[d, "\pi(\lambda)"] & T(M_1) \arrow[d, "T(\pi(u))"] \\
M_2 \arrow[r, "\pi(s_2)"'] & E_2 \arrow[r, "\pi(t_2)"'] & N_2 \arrow[r, "\pi(w_2)"'] & T(M_2).
\end{tikzcd}$$

Recordemos que x_1 y x_2 son $\mathscr{E}$-sucesiones tales que conmutan en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d] & N_1 \arrow[d, "w_1"] & \text{y} & M_2 \arrow[r, "s_2"] \arrow[d, equal] & E_2 \arrow[r, "t_2"] \arrow[d] & N_2 \arrow[d, "w_2"] \\
M_1 \arrow[r, "u_{M_1}"'] & I_{M_1} \arrow[r, "v_{M_1}"'] & TM_1 & & M_2 \arrow[r, "u_{M_2}"'] & I_{M_2} \arrow[r, "v_{M_2}"'] & TM_2
\end{tikzcd}$$

es decir $\psi\pi(w_1) = \underline{x_1}$ y $\psi\pi(w_2) = \underline{x_2}$. Como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N_1}, \mathrm{M_1}) \arrow[r, "\psi^{-1}_{N_1,M_1}"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}(1_{N_1}{,}u)"'] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{N_1}, \mathrm{T(M_1)}) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(1_{N_1}{,}T(\pi(u)))"] \\
\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N_1}, \mathrm{M_2}) \arrow[r, "\psi^{-1}_{N_1,M_2}"'] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{N_1}, \mathrm{T(M_2)}) \\
\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N_2}, \mathrm{M_2}) \arrow[r, "\psi^{-1}_{N_2,M_2}"'] \arrow[u, "\mathrm{Ext}(\lambda{,}1_{M_2})"] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{N_2}, \mathrm{T(M_2)}) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(\pi(\lambda){,}1_{TM_2})"']
\end{tikzcd}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} T(\pi(u))\pi(w_1) &= \psi^{-1}_{N_1,T(M_2)}(Ext(1_{N_1}, u)\underline{x_1}) = \psi^{-1}_{N_1,M_2}(y) \\ &= \psi^{-1}_{N_1,M_2}(Ext(\lambda, 1_{M_2})\underline{x_2}) = \pi(w_2)\pi(\lambda). \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.39.
La categoría estable $\underline{\mathscr{C}}$ de una categoría de Frobenius $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ es pre-triangulada.

DEMOSTRACIÓN.
Veamos que se satisfacen los axiomas de una categoría pre-triangulada

(TR1) (a) Por la definición de triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$ tenemos que se cumple esta condición.

(b) Si $M \in \underline{\mathscr{C}}$, $(M, M, 0, 1_M, 0, 0)$ es un triángulo, pues

$$M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0$$

es una $\mathscr{E}$-sucesión y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "u_M"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\
M \arrow[r, "u_M"'] & I_M \arrow[r, "v_M"'] & TM.
\end{tikzcd}$$

Por tanto $M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow TM$ es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$.

(c) Sea $M \xrightarrow{\pi(g)} L$ un morfismo de $\underline{\mathscr{C}}$. Veamos que es base para algún triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$. Notemos que $M \xrightarrow{u_M} I_M \xrightarrow{v_M} TM$ es una $\mathscr{E}$-sucesión. Como $\mathscr{E}$ es una estructura exacta, podemos calcular el diagrama push-out en $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "g"'] & I_M \arrow[r, "v_M"] \arrow[d, "g_1"'] & TM \arrow[d, equal] \\
L \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & TM.
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos la $\mathscr{E}$-sucesión

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\begin{pmatrix} g \\ u_M \end{pmatrix}"] & L \oplus I_M \arrow[r, "(-\alpha, g_1)"] & B. \end{tikzcd}$$

Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\begin{pmatrix} g \\ u_M \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & L \oplus I_M \arrow[r, "(-\alpha, g_1)"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "u_M"'] & I_M \arrow[r, "v_M"'] & TM. \end{tikzcd}$$

Este último determina el siguiente triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi\begin{pmatrix} g \\ u_M \end{pmatrix}"] & L \oplus I_M \arrow[r, "\pi(-\alpha, \beta)"] & B \arrow[r, "\pi(\beta)"] & TM \end{tikzcd}$$

Luego, por el lema 2.36, tenemos que

$$M \xrightarrow{\pi(g)} L \xrightarrow{\pi(\alpha)} B \xrightarrow{\pi(\beta)} TM.$$

es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$.

TR2 Por la proposición 2.37 se cumple este axioma.

TR3 Consideremos los triángulos en $\underline{\mathscr{C}}$, $T_1 : M_1 \xrightarrow{\pi(s_1)} E_1 \xrightarrow{\pi(t_1)} N_1 \xrightarrow{\pi(w_1)} TM_1$, $T_2 : M_2 \xrightarrow{\pi(s_2)} E_2 \xrightarrow{\pi(t_2)} N_2 \xrightarrow{\pi(w_2)} TM_2$ y los siguientes morfismos en $\underline{\mathscr{C}}$ $\pi(u) : M_1 \longrightarrow M_2$, $\pi(v) : E_1 \longrightarrow E_2$ tales que satisfacen $\pi(v)\pi(s_1) = \pi(s_2)\pi(u)$. Veamos la existencia del morfismo $\lambda : N_1 \longrightarrow N_2$. La demostración la haremos por casos.

(i) Supongamos que los triángulos dados son estandar. Por hipótesis, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\underline{\mathscr{C}}$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\pi(s_1)"] \arrow[d, "\pi(u)"'] & E_1 \arrow[d, "\pi(v)"] \\ M_2 \arrow[r, "\pi(s_2)"'] & E_2 \end{tikzcd}$$

lo que nos dice que $vs_1 - s_2u$ se factoriza a través de un proyectivo (inyectivo) P, es decir $vs_1 - s_2u = \eta\lambda$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, "vs_1 - s_2u"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & E_2 \\ & P. \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

Por otro lado tenemos el siguiente diagrama cuyo renglón es una $\mathscr{E}$-sucesión

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "\lambda"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[dl, "\zeta"] & N_1 \\
P. & &
\end{tikzcd}$$

Por la inyectividad de P es, existe el morfismo $\zeta : E_1 \longrightarrow P$ tal que $\zeta s_1 = \lambda$. Como $vs_1 - s_2u = \eta\lambda$, despejando y sustituyendo a λ tenemos

$$vs_1 = s_2u + \eta\lambda = s_2u + \eta(\zeta s_1),$$

luego $(v - \eta\zeta)s_1 = s_2u$, lo cual nos dice que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[d, "v-\eta\zeta"] \\
M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2
\end{tikzcd}$$

el cual es equivalente, en $\underline{\mathscr{C}}$, al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[d, "v"] \\
M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2.
\end{tikzcd}$$

Así que trabajaremos con este último diagrama. Como los renglones del siguiente diagrama son $\mathscr{E}$-sucesiones, existe el siguiente morfismo $\lambda : N_1 \longrightarrow N_2$ que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "u"'] & E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "v"'] & N_1 \arrow[d, "\lambda"] \\
M_2 \arrow[r, "s_2"'] & E_2 \arrow[r, "t_2"'] & N_2.
\end{tikzcd}$$

Por el lema 2.38 tenemos que el siguiente diagrama conmuta en $\underline{\mathscr{C}}$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\pi(s_1)"] \arrow[d, "\pi(u)"'] & E_1 \arrow[r, "\pi(t_1)"] \arrow[d, "\pi(v)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(w_1)"] \arrow[d, "\pi(\lambda)"] & T(M_1) \arrow[d, "T(\pi(u))"] \\
M_2 \arrow[r, "\pi(s_2)"'] & E_2 \arrow[r, "\pi(t_2)"'] & N_2 \arrow[r, "\pi(w_2)"'] & T(M_2).
\end{tikzcd}$$

(ii) Supongamos que T_1 es estandar y T_2 arbitrario. Como T_2 es arbitario, luego tenemos que es equivalente a un triángulo estandar, digamos T_2'

$$\begin{tikzcd}
T_2 : & M_2 \arrow[r, "\pi(s_2)"] \arrow[d, "\tau"'] & E_2 \arrow[r, "\pi(t_2)"] \arrow[d, "z"'] & N_2 \arrow[r, "\pi(w_2)"] \arrow[d, "\sigma"] & T(M_2) \arrow[d, "T(\tau)"] \\
T_2' : & \overline{M}_2 \arrow[r, "\pi(\alpha)"'] & \overline{E}_2 \arrow[r, "\pi(\beta)"'] & \overline{N}_2 \arrow[r, "\pi(\gamma)"'] & T(\overline{M}_2)
\end{tikzcd}$$

con τ, z y σ isomorfismos. Sean $\overline{u} = \tau\pi(u)$, $\overline{v} = z\pi(v)$

$$\begin{tikzcd}
T_1 : & M_1 \arrow[r, "\pi(s_1)"] \arrow[d, "\overline{u}"'] & E_1 \arrow[r, "\pi(t_1)"] \arrow[d, "\overline{v}"] & N_1 \arrow[r, "\pi(w_1)"] \arrow[d, dotted, "\overline{\lambda}"] & TM_1 \arrow[d, "T(\overline{u})"] \\
T_2' : & \overline{M}_2 \arrow[r, "\pi(\alpha)"'] & \overline{E}_2 \arrow[r, "\pi(\beta)"'] & \overline{N}_2 \arrow[r, "\pi(\gamma)"'] & T(\overline{M}_2).
\end{tikzcd}$$

Por el inciso (i) tenemos que existe $\overline{\lambda} : N_1 \longrightarrow \overline{N}_2$ que hace conmutativo al diagrama anterior. Veamos que el siguiente diagrama conmuta en $\underline{\mathscr{C}}$:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\pi(s_1)"] \arrow[d, "\pi(u)"'] & E_1 \arrow[r, "\pi(t_1)"] \arrow[d, "\pi(v)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(w_1)"] \arrow[d, dotted, "\lambda"] & T(M_1) \arrow[d, "T(u)"] \\
M_2 \arrow[r, "\pi(s_2)"'] & E_2 \arrow[r, "\pi(t_2)"'] & N_2 \arrow[r, "\pi(w_2)"'] & T(M_2)
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda := \sigma^{-1}\overline{\lambda}$. Primero veamos que $\lambda\pi(t_1) = \pi(t_2)\pi(v)$. Efectivamente ya que

$$\lambda\pi(t_1) = \sigma^{-1}\overline{\lambda}\pi(t_1) = \sigma^{-1}\pi(\beta)\overline{v} = \pi(t_2)z^{-1}\overline{v} = \pi(t_2)\pi(v).$$

Ahora veamos que $T(u)\pi(w_1) = \pi(w_2)\lambda$.

$$T(u)\pi(w_1) = T(\tau^{-1}\overline{u})\pi(w_1) = T(\tau^{-1})T(\overline{u})\pi(w_1)$$

$$= T(\tau^{-1})\pi(\gamma)\overline{\lambda} = T(\tau^{-1})\pi(\gamma)\sigma\lambda = \pi(w_2)\sigma^{-1}\sigma\lambda = \pi(w_2)\lambda.$$

(iii) Supongamos que T_1 y T_2 son arbitrarios. Como T_1 es equivalente a un triángulo estandar, digamos T_1', tenemos un diagrama conmutativo en $\underline{\mathscr{C}}$:

$$\begin{tikzcd}
T_1 : & M_1 \arrow[r, "\pi(s_1)"] \arrow[d, "\tau"'] & E_1 \arrow[r, "\pi(t_1)"] \arrow[d, "z"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(w_1)"] \arrow[d, "\sigma"] & T(M_1) \arrow[d, "T(\tau)"] \\
T_1' : & \overline{M}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{s}_1)"'] & \overline{E}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{t}_1)"'] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{w}_1)"'] & T(\overline{M}_1)
\end{tikzcd}$$

con τ, z y σ isomorfismos. Sean $\overline{u} = \pi(u)\tau^{-1}$ y $\overline{v} = \pi(v)z^{-1}$. Por el inciso ($ii$) existe el morfismo $\overline{\lambda} : \overline{N_1} \longrightarrow N_2$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_1' : & \overline{M}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{s}_1)"] \arrow[d, "\overline{u}"'] & \overline{E}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{t}_1)"] \arrow[d, "\overline{v}"'] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{w}_1)"] \arrow[d, "\overline{\lambda}"] & T(\overline{M}_1) \arrow[d, "T(\overline{u})"] \\
T_2 : & M_2 \arrow[r, "\pi(s_2)"'] & E_2 \arrow[r, "\pi(t_2)"'] & N_2 \arrow[r, "\pi(w_2)"'] & T(M_2).
\end{tikzcd}$$

Veamos que el siguiente diagrama es conmutativo en $\underline{\mathscr{C}}$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\pi(s_1)"] \arrow[d, "\pi(u)"'] & E_1 \arrow[r, "\pi(t_1)"] \arrow[d, "\pi(v)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(w_1)"] \arrow[d, dotted, "\lambda"] & T(M_1) \arrow[d, "T(u)"] \\
M_2 \arrow[r, "\pi(s_2)"'] & E_2 \arrow[r, "\pi(t_2)"] & N_2 \arrow[r, "\pi(w_2)"'] & T(M_2)
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda := \overline{\lambda}\sigma$. Probemos que $\lambda\pi(t_1) = \pi(t_2)\pi(v)$

$$\lambda\pi(t_1) = \overline{\lambda}\sigma\pi(t_1) = \overline{\lambda}\pi(\bar{t}_1)z = \pi(t_2)\overline{v}z = \pi(t_2)\pi(v).$$

Ahora veamos que $T(u)\pi(w_1) = \pi(w_2)\lambda$

$$\begin{aligned}\pi(w_2)\lambda = \pi(w_2)\overline{\lambda}\sigma = T(\overline{u})\pi(\overline{w}_1)\sigma = T(\overline{u})T(\tau)\pi(w_1)\\ = T(\overline{u}\tau)\pi(w_1) = T(u)\pi(w_1).\end{aligned}$$

Luego se cumple el axioma.

□

LEMA 2.40.
Sea $T_1 : M \xrightarrow{\pi(s)} E \xrightarrow{\pi(t)} N \xrightarrow{\pi(w)} T(M)$ *un triángulo en* $\underline{\mathscr{C}}$*. Entonces existe un triángulo estandar* $T_2 : M \xrightarrow{\pi(s')} E' \xrightarrow{\pi(t')} N' \xrightarrow{\pi(w')} T(M)$ *y un isomorfismo de triángulos del siguiente tipo:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi(s)"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi(t)"] \arrow[d] & N \arrow[r, "\pi(w)"] \arrow[d] & T(M) \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "\pi(s')"'] & E' \arrow[r, "\pi(t')"'] & N' \arrow[r, "\pi(w')"'] & T(M).
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN.
Tenemos la $\mathscr{E}$-sucesión canónica $M \xrightarrow{u_M} J(M) \xrightarrow{v_M} T(M)$ y el morfismo

$s : M \longrightarrow E$, luego como $\mathscr{E}$ es una estructura exacta, hay un diagrama conmutativo con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "s"'] & J(M) \arrow[r, "v_M"] \arrow[d] & T(M) \arrow[d, equal] \\
E \arrow[r] & F \arrow[r] & T(M).
\end{tikzcd}$$

Por el lema 2.5 inciso (b), tenemos que $s' : M \longrightarrow E'$ es una $\mathscr{E}$-inflación, donde $s' := \begin{pmatrix} s \\ u_M \end{pmatrix}$ y $E' = E \bigoplus J(M)$. Por la definición 2.2 tenemos la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión $M \xrightarrow{s'} E' \xrightarrow{t'} N'$ cuyo triángulo asociado es

$$T_2 : \qquad M \xrightarrow{\pi(s')} E' \xrightarrow{\pi(t')} N' \xrightarrow{\pi(w')} T(M).$$

Luego tenenemos el siguiente diagrama en $\underline{\mathscr{C}}$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi(s')"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\pi(t')"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & N' \arrow[r, "\pi(w')"] \arrow[d, dotted, "\zeta"] & T(M) \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "\pi(s)"'] & E \arrow[r, "\pi(t)"'] & N \arrow[r, "\pi(w)"'] & T(M)
\end{tikzcd}$$

por el axioma $(TR3)$ tenemos la existencia del morfismo $\zeta : N' \longrightarrow N$ que hace conmutar el diagrama anterior y por la proposición **??** tenemos que ζ es isomorfismo.

□

PROPOSICIÓN 2.41.
La categoría estable $\underline{\mathscr{C}}$ de una categoría de Frobenius $(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ es triangulada.

DEMOSTRACIÓN.
Lo único que nos falta ver para $\underline{\mathscr{C}}$ es que se cumple el axioma del octaedro.

TR4 Axioma del Octaedro.

La demostración de este axioma la haremos por casos. Sean

$$T_1 : \qquad M \xrightarrow{\pi(s)} E \xrightarrow{\pi(t)} N \xrightarrow{\pi(w)} T(M)$$

$$T_2 : \qquad E \xrightarrow{\pi(\alpha)} N_1 \xrightarrow{\pi(\beta)} M_1 \xrightarrow{\pi(\gamma)} T(E)$$

$$T_3 : \qquad M \xrightarrow{\pi(\alpha)\pi(s)} N_1 \xrightarrow{\pi(k)} N \xrightarrow{\pi(k')} T(M)$$

triángulos en $\underline{\mathscr{C}}$.

(i) Supongamos que T_1, T_2 y T_3 son triángulos estandar. Deseamos ver que el siguiente diagrama satisface el axioma del octaedro:

$$\begin{tikzcd}
 & & T_1 & T_3 & & \\
 & S(L) \arrow[r, "S(\pi(k'))"] \arrow[d, "S(\pi(g))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)"] & & \\
T_2 & S(M_1) \arrow[r, "S\pi(\gamma)"'] & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"'] \\
T_4 & & N \arrow[r, dotted, "\pi(f)"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & L \arrow[r, dotted, "\pi(g)"'] \arrow[d, "\pi(k')"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N) \\
 & & TM \arrow[r, equal] & TM : & &
\end{tikzcd}$$

Veamos la existencia de los morfismos $\pi(f)$ y $\pi(g)$ que hacen conmutar al diagrama y que T_4 es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$. Como sabemos T_1 y T_3 son triángulos estandar en $\underline{\mathscr{C}}$, por tanto tenemos el siguiente diagrama cuyos renglones son $\mathscr{E}$-sucesiones

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[d, dotted, "f"] \\
M \arrow[r, "\alpha s"'] & N_1 \arrow[r, "k"'] & L
\end{tikzcd}$$

con el primer cuadrado conmutativo, luego tenemos la existencia del morfismo $f : N \longrightarrow L$ tal que $ft = k\alpha$ en $\mathscr{C}$. Por el lema 2.5 (b), tenemos la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión

$$E \xrightarrow{\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}} N \oplus N_1 \xrightarrow{(f,-k)} L.$$

De donde observamos que $(f,-k)$ es el conúcleo de $\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}$ lo que nos implica que $\{f,k\}$ es un push-out de $\{t,\alpha\}$:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "t"'] & N_1 \arrow[d, "k"'] \\
N \arrow[r, "f"'] & L.
\end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{E}$ es una estructura exacta y $x_2 : E \xrightarrow{\alpha} N_1 \xrightarrow{\beta} M_1$ es una $\mathscr{E}$-sucesión, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
x_2 : & E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "t"'] & N_1 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "h"'] & M_1 \arrow[d, equal] \\
x_4' : & N \arrow[r, "\overline{f}"'] & X \arrow[r, "\overline{g}"'] & M_1
\end{tikzcd}$$

con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones, donde el primer cuadrado es un push-out. Entonces podemos contruir el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
x_2 : & E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "t"'] & N_1 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "h"'] & M_1 \arrow[d, equal] \\
x_4' : & N \arrow[r, "\overline{f}"'] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "\overline{g}"'] \arrow[d, "\sigma"'] & M_1 \arrow[d, equal] \\
x_4 : & N \arrow[r, "f"'] & L \arrow[r, "g"'] & M_1,
\end{tikzcd}$$

donde $\sigma : X \longrightarrow L$ es un isomorfismo tal que $\sigma h = k$ y $\sigma\overline{f} = f$, que existe porque $\{\overline{f}, h\}$ y $\{f, k\}$ son ambos push-out de $\{t, \alpha\}$; g es por definición $g := \overline{g}\sigma^{-1} : L \longrightarrow M_1$. Como $\mathscr{E}$ es cerrada bajo isomorfismos, resulta que x_4 también es una $\mathscr{E}$-sucesión. Luego tenemos a la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión $x_4 : N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M_1$ cuyo triángulo asociado es $T_4 : N \xrightarrow{\pi(f)} L \xrightarrow{\pi(g)} M_1 \xrightarrow{\pi(\lambda)} T(N)$. Note que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "t"'] & N_1 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "k"] & M_1 \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "f"'] & L \arrow[r, "g"'] & M_1,
\end{tikzcd}$$

luego por el lema 2.38, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\underline{\mathscr{C}}$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\pi(\alpha)"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
N \arrow[r, "\pi(f)"'] & L \arrow[r, "\pi(g)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\lambda)"'] & T(N).
\end{tikzcd}$$

Finalmente veamos que $\pi(s)S(\pi(k')) = S(\pi(\gamma))S(\pi(g))$. Como tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\alpha s"] \arrow[d, "s"'] & N_1 \arrow[r, "k"] \arrow[d, equal] & L \arrow[d, "g"] \\
E \arrow[r, "\alpha"'] & N_1 \arrow[r, "\beta"'] & M_1.
\end{tikzcd}$$

Por el lema 2.38, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\underline{\mathscr{C}}$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi(\alpha)\pi(s)"] \arrow[d, "\pi(s)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(k)"] \arrow[d, equal] & L \arrow[r, "\pi(k')"] \arrow[d, "\pi(g)"] & TM \arrow[d, "T(\pi(s))"] \\
E \arrow[r, "\pi(\alpha)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"'] & T(E)
\end{tikzcd}$$

de donde obtenemos que $T(\pi(s))\pi(k') = \pi(\gamma)\pi(g)$. Aplicandole a la igualdad anterior el funtor S obtenemos

$$\pi(s)S(\pi(k')) = S(\pi(\gamma))S(\pi(g)).$$

(ii) Sean T_1, T_3 estandar y T_2 arbitrario. Deseamos ver que se cumple el axioma del octaedro en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & T_1 & T_3 & & \\
 & S(L) \arrow[r, "S(\pi(k'))"] \arrow[d, "S(\pi(g))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)"] & & \\
T_2 & S(M_1) \arrow[r, "S(\pi(\gamma))"'] & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"'] \\
T_4 & & N \arrow[r, dotted, "\pi(f)"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & L \arrow[r, dotted, "\pi(g)"'] \arrow[d, "\pi(k')"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N) \\
 & & TM \arrow[r, equal] & TM. & &
\end{tikzcd}$$

Como T_2 es un triángulo, es equivalente al triángulo estandar T_2'

$$\begin{tikzcd}
T_2 : & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"] \arrow[d, equal] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "z"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, "\sigma"] & T(E) \arrow[d, equal] \\
T_2' : & E \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})"'] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\beta})"'] & \overline{M}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\gamma})"'] & T(E)
\end{tikzcd}$$

donde z y σ son isomorfismos y $\pi(\overline{\alpha}) = z\pi(\alpha)$, $\pi(\overline{\beta}) = \sigma\pi(\beta)z^{-1}$, $\pi(\overline{\gamma}) = \pi(\gamma)\sigma^{-1}$. Notemos que como T_1 es estandar, tenemos el siguiente diagrama conmutativo, cuyos reglones son $\mathscr{E}$-sucesiones

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "t"] \arrow[d] & N \arrow[d, "w"] \\
M \arrow[r, "u_M"'] & J(M) \arrow[r, "v_M"'] & TM,
\end{tikzcd}$$

lo que nos implica que s es una $\mathscr{E}$-inflación. Como también T_2' es estandar, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[d, equal] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\overline{\beta}"] \arrow[d] & \overline{M}_1 \arrow[d, "\overline{\gamma}"] \\
E \arrow[r, "u_E"'] & J(E) \arrow[r, "v_E"'] & TE,
\end{tikzcd}$$

lo que nos dice que $\overline{\alpha}$ es una $\mathscr{E}$-inflación. Por la definición 2.4, tenemos que $\overline{\alpha}s$ es una $\mathscr{E}$-inflación. Por la definición 2.2, tenemos que existe el morfismo $\overline{k} : \overline{N}_1 \longrightarrow \overline{L}$ tal que

$$M \xrightarrow{\overline{\alpha}s} \overline{N}_1 \xrightarrow{\overline{k}} \overline{L},$$

es una $\mathscr{E}$-sucesión. Sea

$$T_3' : \qquad M \xrightarrow{\pi(\overline{\alpha}s)} \overline{N}_1 \xrightarrow{\pi(\overline{k})} \overline{L} \xrightarrow{\pi(\overline{k}')} TM$$

el triángulo estandar asociado a la $\mathscr{E}$-sucesión anterior. Notemos que como $\pi(\overline{\alpha}) = z\pi(\alpha)$, esto nos implica que $\pi(\overline{\alpha})\pi(s) = z\pi(\alpha)\pi(s)$, por el axioma $(TR3)$ y la proposición **??** tenemos el siguiente isomorfismo entre triangulos estandar

$$\begin{tikzcd}
T_3 : & M \arrow[r, "\pi(\alpha)\pi(s)"] \arrow[d, equal] & N_1 \arrow[r, "\pi(k)"] \arrow[d, "z"'] & L \arrow[r, "\pi(k')"] \arrow[d, "\zeta"] & TM \arrow[d, equal] \\
T_3' & M \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})\pi(s)"'] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{k})"'] & \overline{L} \arrow[r, "\pi(\overline{k}')"'] & TM.
\end{tikzcd}$$

Así tenemos el siguiente diagrama, en donde los triangulos T_1, T_2' y

T_3' son estandar

$$\begin{tikzcd}
 & T_1 & T_3' & & \\
 & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)"] & & \\
T_2' : & E \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\beta})"] \arrow[d, "\pi(\overline{k})"'] & \overline{M}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\gamma})"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(\overline{t}))"] \\
 & N \arrow[d, "\pi(w)"'] & \overline{L} \arrow[d, "\pi(\overline{k}')"'] & \overline{M}_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\overline{\gamma})"'] & T(N) \\
 & TM \arrow[r, equal] & TM & &
\end{tikzcd}$$

Por el inciso (i) tenemos que se cumple el axioma del octaedro, es decir tenemos la existencia de los morfismos $\pi(\overline{f}), \pi(\overline{g})$ que hacen conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & T_1 & T_3' & & \\
 & S(\overline{L}) \arrow[r, "S(\pi(\overline{k}'))"] \arrow[d, "S(\pi(\overline{g}))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\overline{\alpha})\pi(s)"] & & \\
T_2 & S(\overline{M}_1) \arrow[r, "S(\pi(\overline{\gamma}))"'] & E \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\beta})"] \arrow[d, "\pi(\overline{k})"'] & \overline{M}_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
T_4' & & N \arrow[r, "\pi(\overline{f})"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & \overline{L} \arrow[r, "\pi(\overline{g})"'] \arrow[d, "\pi(\overline{k}')"] & \overline{M}_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\overline{\gamma})"'] & T(N) \\
 & & TM \arrow[r, equal] & TM, & &
\end{tikzcd}$$

y T_4' es un triángulo. Observe que tenemos el siguiente diagrama cuyo primer renglón es conmutativo, y donde definimos a $\pi(f) := \zeta^{-1}\pi(\overline{f})$, y $\pi(g) := \sigma^{-1}\pi(\overline{g})\zeta$.

$$\begin{tikzcd}
T_2 : & E \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(\overline{k})"'] & \overline{M}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\gamma})"] \arrow[d, equal] & TE \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
T_4' : & N \arrow[r, "\pi(\overline{f})"'] \arrow[d, equal] & \overline{L} \arrow[r, "\pi(\overline{g})"] \arrow[d, "\zeta^{-1}"'] & \overline{M}_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\overline{\gamma})"'] \arrow[d, "\sigma^{-1}"] & TN \arrow[d, equal] \\
T_4 : & N \arrow[r, dotted, "\pi(f)"'] & L \arrow[r, dotted, "\pi(g)"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & TN,
\end{tikzcd}$$

Por la manera en que definimos a los morfismos $\pi(f)$ y $\pi(g)$, tenemos que el segundo renglón también conmuta. Luego, resulta que T_4 es un triángulo. Veamos que se cumplen las siguientes igualdades:

(a) $\pi(f)\pi(t) = \pi(k)\pi(\alpha)$.
Por un lado tenemos que $\pi(\overline{f})\pi(t) = \zeta\pi(f)\pi(t)$. Por otro

$$\pi(\overline{k})\pi(\overline{\alpha}) = \zeta\pi(k)z^{-1}\pi(\overline{\alpha}) = \zeta\pi(k)z^{-1}z\pi(\alpha) = \zeta\pi(k)\pi(\alpha).$$

Luego tenemos que $\zeta\pi(f)\pi(t) = \zeta\pi(k)\pi(\alpha)$ y como ζ es isomorfismo, tenemos que $\pi(f)\pi(t) = \pi(k)\pi(\alpha)$.

(b) $\pi(g)\pi(k) = \pi(\beta)$.
Notemos que

$$\pi(g)\pi(k) = \sigma^{-1}\pi(\overline{g})\zeta\pi(k) = \sigma^{-1}\pi(\overline{g})\pi(\overline{k})z = \sigma^{-1}\pi(\overline{\beta})z$$

y como σ y z son isomorfismos, entonces tenemos probada la afirmación.

Ahora "regresemos" al primer diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & T_1 & T_3 & & \\
 & S(L) \arrow[r, "S(\pi(k'))"] \arrow[d, "S(\pi(g))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)"] & & \\
T_2 & S(M_1) \arrow[r, "S(\pi(\gamma))"'] & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
T_4 & & N \arrow[r, dotted, "\pi(f)"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & L \arrow[r, dotted, "\pi(g)"'] \arrow[d, "\pi(k')"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N) \\
 & & TM \arrow[r, equal] & TM. & &
\end{tikzcd}$$

Por lo visto antes tenemos la conmutatividad del segundo renglón y que T_4 es un triángulo. También tenemos

$$\pi(k')\pi(f) = (\pi(k')\zeta^{-1})(\zeta\pi(f)) = \pi(\overline{k'})\pi(\overline{f}) = \pi(w).$$

Además,

$$\begin{aligned}\pi(s)S(\pi(k'))S(\zeta^{-1}) &= \pi(s)S(\pi(\overline{k'})) = S(\pi(\overline{\gamma}))S(\pi(\overline{g}))\\ &= S(\pi(\gamma)\sigma^{-1})S(\sigma\pi(g)\zeta^{-1}) = S(\pi(\gamma))S(\pi(g))S(\zeta^{-1}),\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\pi(s)S(\pi(k')) = S(\pi(\gamma))S(\pi(g)).$$

(iii) Sean T_1, T_2 dos triángulos estandar y T_3 un triángulo arbitrario. Tenemos la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión canónica

$$M \xrightarrow{u_M} J(M) \xrightarrow{v_M} T(M).$$

Por el lema 2.40 T_3 es equivalente a un triángulo estandar, digamos T_3', por medio de un isomorfismo del tipo

$$\begin{tikzcd}
T_3': & M \arrow[r, "\pi(\eta)"] \arrow[d, equal] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\zeta)"] \arrow[d, "\pi(u_1)"'] & \overline{L} \arrow[r, "\pi(\zeta')"] \arrow[d, "\pi(u_2)"] & T(M) \arrow[d, equal] \\
T_3: & M \arrow[r, "\pi(\alpha)\pi(s)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(k)"'] & L \arrow[r, "\pi(k')"'] & T(M),
\end{tikzcd}$$

con $\pi(u_1), \pi(u_2)$ isomorfismos. Sustituyendo T_3 por T_3' tenemos el siguiente diagrama, donde T_1, T_3' son triangulos estandar y T_2' es un triángulo arbitrario, luego por (ii) existen morfismos $\pi(\overline{f}), \pi(\overline{g})$ que hacen valer el axioma del octaedro en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & T_1 & T_3' & & \\
 & S(L) \arrow[r, "S(\pi(\zeta'))"] \arrow[d, "S(\pi(\overline{g}))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\eta)"] & & \\
T_2' & S(M_1) \arrow[r, "S(\pi(\gamma))"'] & E \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\beta})"] \arrow[d, "\pi(\zeta)"] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
T_4' & & N \arrow[r, "\pi(\overline{f})"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & \overline{L} \arrow[r, "\pi(\overline{g})"'] \arrow[d, "\pi(\zeta')"] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N) \\
 & & TM \arrow[r, equal] & TM & &
\end{tikzcd}$$

“regresando” al diagrama original, tenemos que:

$$\begin{tikzcd}
 & & T_1 & T_3 & & \\
 & S(L) \arrow[r, "S(\pi(k'))"] \arrow[d, "S(\pi(g))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)"] & & \\
T_2 & S(M_1) \arrow[r, "S(\pi(\gamma))"'] & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
T_4 & & N \arrow[r, dotted, "\pi(f)"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & L \arrow[r, dotted, "\pi(g)"'] \arrow[d, "\pi(k')"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N) \\
 & & TM \arrow[r, equal] & TM & &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi(f) := \pi(u_2)\pi(\overline{f})$ y $\pi(g) := \pi(\overline{g})\pi(u_2^{-1})$. Ahora veamos que $\pi(k)\pi(\alpha) = \pi(f)\pi(t)$

$$\pi(f)\pi(t) = \pi(u_2)\pi(\overline{f})\pi(t) = \pi(u_2)\pi(\zeta)\pi(\overline{\alpha}) = \pi(k)\pi(u_1)\pi(u_1^{-1})\pi(\alpha)$$
$$= \pi(k)\pi(\alpha).$$

Probemos que $\pi(g)\pi(k) = \pi(\beta)$

$$\pi(g)\pi(k) = \pi(\overline{g})\pi(u_2^{-1})\pi(k) = \pi(\overline{g})\pi(\zeta)\pi(u_1^{-1}) = \pi(\overline{\beta})\pi(u_1^{-1})$$
$$= \pi(\beta)\pi(u_1)\pi(u_1^{-1}) = \pi(\beta).$$

Notemos que $\pi(s)S(\pi(k')) = S(\pi(\gamma))S(\pi(g))$. Efectivamente ya que

$$S(\pi(\gamma))S(\pi(g)) = S(\pi(\gamma))S(\pi(\overline{g})\pi(u_2^{-1})) = S(\pi(\gamma))S(\pi(\overline{g}))S(\pi(u_2^{-1}))$$
$$= \pi(s)S(\pi(\zeta'))S(\pi(u_2^{-1})) = \pi(s)S(pi(\zeta')\pi(u_2^{-1})) = \pi(s)S(\pi(k')).$$

Por último veamos que T_4 es un triángulo en $\mathscr{C}$. Notemos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\underline{\mathscr{C}}$

$$\begin{tikzcd}
T_4' & N \arrow[r, "\pi(\overline{f})"] \arrow[d, equal] & \overline{L} \arrow[r, "\pi(\overline{g})"] \arrow[d, "\pi(u_2)"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(N) \arrow[d, equal] \\
T_4 & N \arrow[r, "\pi(f)"'] & L \arrow[r, "\pi(g)"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N)
\end{tikzcd}$$

luego $T_4 \equiv T_4'$ en $\underline{\mathscr{C}}$.

(iv) Suponga que T_1 es un triángulo estandar y que T_2, T_3 son triángulos arbitrarios, entonces se cumple el axioma del octaedro.

$$\begin{tikzcd}
 & & T_1 & T_3 & & \\
 & S(L) \arrow[r, "S(\pi(k'))"] \arrow[d, "S(\pi(g))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)"] & & \\
T_2 & S(M_1) \arrow[r, "S(\pi(\gamma))"'] & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
T_4 & & N \arrow[r, dotted, "\pi(f)"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & L \arrow[r, dotted, "\pi(g)"'] \arrow[d, "\pi(k')"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N) \\
 & & TM \arrow[r, equal] & TM. & &
\end{tikzcd}$$

Por el lema 2.40, T_2 es equivalente a un triángulo estandar, digamos T_2', por un isomorfismo del tipo

$$\begin{tikzcd}
T_2' : & E \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})"] \arrow[d, equal] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\beta})"] \arrow[d, "u_1"'] & \overline{M}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\gamma})"] \arrow[d, "u_2"'] & T(E) \arrow[d, equal] \\
T_2 : & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"'] & T(E).
\end{tikzcd}$$

Sutituyendo a T_2 por T_2' obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & T_1 & T_3' & & \\
 & S(L) \arrow[r, "S(\pi(\overline{k'}))"] \arrow[d, "S(\pi(\overline{g}))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\overline{\alpha})\pi(s)"] & & \\
T_2' & S(\overline{M}_1) \arrow[r, "S(\pi(\overline{\gamma}))"'] & E \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\beta})"] \arrow[d, "\pi(\overline{k})"'] & \overline{M}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\gamma})"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
T_4' & & N \arrow[r, "\pi(\overline{f})"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & \overline{L} \arrow[r, "\pi(\overline{g})"'] \arrow[d, "\pi(\overline{k'})"'] & \overline{M}_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\overline{\gamma})"'] & T(N) \\
 & & TM \arrow[r, equal] & TM. & &
\end{tikzcd}$$

Notemos que en $\underline{\mathscr{C}}$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo, con

$\rho : \overline{L} \longrightarrow L$ isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
T_3 : & M \arrow[r, "\pi(\alpha)\pi(s)"] \arrow[d, equal] & N_1 \arrow[r, "\pi(k)"] \arrow[d, "u_1^{-1}"'] & L \arrow[r, "\pi(k')"] \arrow[d, dotted, "\rho^{-1}"] & TM \arrow[d, equal] \\
T_3' : & M \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})\pi(s)"'] & \overline{N}_1 \arrow[r, "\pi(\overline{k})"'] & \overline{L} \arrow[r, "\pi(\overline{k'})"'] & TM.
\end{tikzcd}$$

lo que nos dice que $T_3' \equiv T_3$, es decir que T_3' es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$. Por el inciso *(iii)* tenemos que existen los morfismos $\pi(\overline{f})$ y $\pi(\overline{g})$ tales que hacen conmutar al diagrama anterior y que T_4' es un triángulo. Ahora veamos que el siguiente diagrama cumple el axioma del octaedro

$$\begin{tikzcd}
 & & T_1 & T_3 & & \\
 & S(L) \arrow[r, "S(\pi(k'))"] \arrow[d, "S(\pi(g))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)"] & & \\
T_2 & S(M_1) \arrow[r, "S(\pi(\gamma))"'] & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"'] \arrow[d, "\pi(t)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"'] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"'] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
T_4 & & N \arrow[r, "\pi(f)"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & L \arrow[r, "\pi(g)"'] \arrow[d, "\pi(k')"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N) \\
 & & TM \arrow[r, equal] & TM & &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi(f) := \rho\pi(\overline{f})$, $\pi(g) := u_2\pi(\overline{g})\rho^{-1}$. Veamos que se cumple la siguiente igualdad $\pi(f)\pi(t) = \pi(k)\pi(\alpha)$. Efectivamente, ya que

$$\pi(f)\pi(t) = (\rho\pi(\overline{f}))\pi(t) = \rho\pi(\overline{k})\pi(\overline{\alpha}) = \pi(k)u_1\pi(\overline{\alpha})$$

$$= \pi(k)u_1u_1^{-1}\pi(\alpha) = \pi(k)\pi(\alpha).$$

Ahora probemos que $\pi(g)\pi(k) = \pi(\beta)$

$$\pi(g)\pi(k) = u_2\pi(\overline{g})\rho^{-1}\pi(k) = u_2\pi(\overline{g})\pi(\overline{k})u_1^{-1} = u_2\pi(\overline{\beta})u_1^{-1}$$

$$= \pi(\beta)u_1u_1^{-1} = \pi(\beta).$$

Además,

$$\pi(k')\pi(f) = \pi(k')\rho\pi(\overline{f}) = \pi(\overline{k'})\pi(\overline{f}) = \pi(w).$$

También

$$S(\pi(\gamma))S(\pi(g)) = S(\pi(\overline{\gamma})u_2^{-1})S(u_2\pi(\overline{g})\rho^{-1})$$

$$= S(\pi(\overline{\gamma}))S(\pi(\overline{g}))S(\rho^{-1}) = \pi(s)S(\pi(\overline{k'}))S(\rho^{-1})$$
$$= \pi(s)S(\pi(k')).$$

Notemos que en $\underline{\mathscr{C}}$ tenemos que $T_4 \equiv T_4'$ ya que conmuta

$$\begin{tikzcd}
T_4' : & N \arrow[r, "\pi(\overline{f})"] \arrow[d, equal] & \overline{L} \arrow[r, "\pi(\overline{g})"] \arrow[d, "\rho"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\overline{h})"] \arrow[d, "u_2"] & T(N) \arrow[d, equal] \\
T_4 : & N \arrow[r, "\pi(f)"'] & L \arrow[r, "\pi(g)"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N)
\end{tikzcd}$$

donde $\pi(\overline{h}) = T(\pi(t))\pi(\overline{\gamma})$. luegoL

$$\pi(\overline{h}) = T(\pi(t))\pi(\overline{\gamma}) = T(\pi(t))\pi(\gamma)u_2.$$

Entonces T_4 es un triángulo.

(v) Suponga que T_1, T_2 y T_3 son triángulos arbitarios. Veamos que se cumple el axioma del octaedro.

$$\begin{tikzcd}
& & T_1 & T_3 & & \\
& S(L) \arrow[r, "S(\pi(k'))"] \arrow[d, "S(\pi(g))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)"] & & \\
T_2 & S(M_1) \arrow[r, "S(\pi(\gamma))"'] & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
T_4 & & N \arrow[r, dotted, "\pi(f)"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & L \arrow[r, dotted, "\pi(g)"'] \arrow[d, "\pi(k')"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N) \\
& & TM \arrow[r, equal] & TM. & &
\end{tikzcd}$$

Como T_1 es equivalente al triángulo estandar T_1', tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T_1' & T_1 & T_3 & & \\
\overline{M} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi(\overline{s})"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)"] & & \\
\overline{E} \arrow[r, "z"'] \arrow[d, "\pi(\overline{t})"'] & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
\overline{N} \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[d, "\pi(\overline{w})"'] & N \arrow[d, "\pi(w)"'] & L \arrow[d, "\pi(k')"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N) \\
T(\overline{M}) \arrow[r, "T(\tau)"'] & TM \arrow[r, equal] & TM & &
\end{tikzcd}$$

con τ, z, σ isomorfismos. De este diagrama obtenemos el siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & T_1' & T_3' & & \\
 & \overline{M} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(\overline{s})"'] & \overline{M} \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)\tau"] & & \\
T_2' & \overline{E} \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})"] \arrow[d, "\pi(\overline{t})"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "T(z)^{-1}\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(\overline{E}) \arrow[d, "T\pi((\overline{t}))"] \\
 & \overline{N} \arrow[d, "\pi(\overline{w})"'] & L \arrow[d, "T(\tau)^{-1}\pi(k')"] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(\overline{t}))T(z)^{-1}\pi(\gamma)"'] & T(\overline{N}) \\
 & T(\overline{M}) \arrow[r, equal] & T(\overline{M}), & &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi(\overline{\alpha}) = \pi(\alpha)z$. Veamos que T_2' y T_3' son triángulos. En $\underline{\mathscr{C}}$ tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo con z isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
T_2' : & \overline{E} \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})"] \arrow[d, "z"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[r, "T(z)^{-1}\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(\overline{E}) \arrow[d, "T(z)"] \\
T_2 : & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"'] & T(E)
\end{tikzcd}$$

y esto nos dice que $T_2' \cong T_2$. Es decir T_2' es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$. Ahora veamos que T_3' es triángulo. Notemos que en $\underline{\mathscr{C}}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con τ isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
T'_3 : & \overline{M} \arrow[r, "\pi(\alpha)\pi(s)\tau"] \arrow[d, "\tau"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(k)"] \arrow[d, equal] & L \arrow[r, "T(\tau)^{-1}\pi(k')"] \arrow[d, equal] & T(\overline{M}) \arrow[d, "T(\tau)"] \\
T_3 : & M \arrow[r, "\pi(\alpha)\pi(s)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(k)"'] & L \arrow[r, "\pi(k')"'] & T(M),
\end{tikzcd}$$

de donde tenemos que $T'_3 \cong T_3$. Por lo tanto T'_3 es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$. Entonces tenemos el siguiente diagrama, donde T'_1 es un triángulo estandar, T'_2 y T'_3 son triángulos y por (iv) tenemos la existencia de los morfismos $\pi(\overline{f})$ y $\pi(\overline{g})$ tales que hacen conmutativo al diagrama y T'_4 es un triángulo

$$\begin{tikzcd}
 & & T'_1 & T'_3 & & \\
 & S(L) \arrow[r, "S(\pi(\overline{k'}))"] \arrow[d, "S(\pi(\overline{g}))"'] & \overline{M} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(\overline{s})"'] & \overline{M} \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)\tau"] & & \\
T'_2 & S(M_1) \arrow[r, "S(\pi(\overline{\gamma}))"'] & \overline{E} \arrow[r, "\pi(\overline{\alpha})"] \arrow[d, "\pi(\overline{t})"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\overline{\gamma})"] \arrow[d, equal] & T(\overline{E}) \arrow[d, "T(\pi(\overline{t}))"] \\
T'_4 & & \overline{N} \arrow[r, "\pi(\overline{f})"'] \arrow[d, "\pi(\overline{w})"'] & L \arrow[r, "\pi(\overline{g})"'] \arrow[d, "\pi(\overline{k'})"] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(\overline{t}))\pi(\overline{\gamma})"'] & T(\overline{N}) \\
 & & T(\overline{M}) \arrow[r, equal] & T(\overline{M}). & &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi(\overline{\gamma}) := T(z^{-1})\pi(\gamma)$ y $\pi(\overline{k'}) := T(\tau^{-1})\pi(k')$. Ahora veamos que el siguiente diagrama es conmutativo y que T_4 es un triángulo

$$\begin{tikzcd}
 & & T_1 & T_3 & & \\
 & S(L) \arrow[r, "S(\pi(k'))"] \arrow[d, "S(\pi(g))"'] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi(s)"'] & M \arrow[d, "\pi(\alpha)\pi(s)"] & & \\
T_2 & S(M_1) \arrow[r, "S(\pi(\gamma))"'] & E \arrow[r, "\pi(\alpha)"] \arrow[d, "\pi(t)"'] & N_1 \arrow[r, "\pi(\beta)"] \arrow[d, "\pi(k)"'] & M_1 \arrow[r, "\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(E) \arrow[d, "T(\pi(t))"] \\
T_4 & & N \arrow[r, dotted, "\pi(f)"'] \arrow[d, "\pi(w)"'] & L \arrow[r, dotted, "\pi(g)"'] \arrow[d, "\pi(k')"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N) \\
 & & TM \arrow[r, equal] & TM, & &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi(f) := \pi(\overline{f})\sigma^{-1}$ y $\pi(g) := \pi(\overline{g})$. Veamos la conmutatividad del diagrama. Probemos la siguiente igualdad $\pi(f)\pi(t) = \pi(k)\pi(\alpha)$

$$\pi(f)\pi(t)z = \pi(\overline{f})\sigma^{-1}\pi(t)z = \pi(\overline{f})\pi(\overline{t}) = \pi(k)\pi(\overline{\alpha}) = \pi(k)\pi(\alpha)z$$

y como z es isomorfismo, tenemos el resultado deseado. Claramente se tiene que $\pi(g)\pi(k) = \pi(\beta)$. Como tenemos

$$\begin{aligned} T(\tau)^{-1}\pi(k')\pi(f)\sigma &= \pi(\overline{k'})\pi(f)\sigma = \pi(\overline{k'})\pi(\overline{f}) \\ &= \pi(\overline{w}) = T(\tau)^{-1}\pi(w)\sigma, \end{aligned}$$

luego, $\pi(k')\pi(f) = \pi(w)$. Tambien tenemos

$$\begin{aligned} z^{-1}\pi(s)S(\pi(k')) &= \pi(\overline{s})\tau^{-1}S(\pi(k')) = \pi(\overline{s})\tau^{-1}S(T(\tau)\pi(\overline{k'})) \\ &= \pi(\overline{s})\tau^{-1}\tau S(\pi(\overline{k'})) = \pi(\overline{s})S(\pi(\overline{k'})) = S(\pi(\overline{\gamma}))S(\pi(\overline{g})) \\ &= S(T(z^{-1})\pi(\gamma))S(\pi(g)) = z^{-1}S(\pi(\gamma))S(\pi(g)). \end{aligned}$$

Luego, $\pi(s)S(\pi(k')) = S(\pi(\gamma))S(\pi(g))$. Sólo nos resta ver que efectivamente T_4 es un triángulo. Para ello notemos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\underline{\mathscr{C}}$ con σ isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
T_4' : & \overline{N} \arrow[r, "\pi(\overline{f})"] \arrow[d, "\sigma"'] & L \arrow[r, "\pi(\overline{g})"] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(\overline{t}))\pi(\gamma)"] \arrow[d, equal] & T(\overline{N}) \arrow[d, "T(\sigma)"] \\
T_4 : & N \arrow[r, "\pi(f)"'] & L \arrow[r, "\pi(g)"'] & M_1 \arrow[r, "T(\pi(t))\pi(\gamma)"'] & T(N)
\end{tikzcd}$$

esto nos implica que $T_4' \cong T_4$. Luego T_4 es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}$.

Así, hemos visto que $\underline{\mathscr{C}}$ es triangulada.

□

Capítulo 3

Álgebras y módulos diferenciales

3.1. Módulos graduados y módulos diferenciales

Vamos a comenzar esta sección dando las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 3.1.
Un anillo graduado A *es un anillo, asociativo con unidad, tal que* $A = \oplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p$ *donde* A^p *son subgrupos abelianos de* A *para todo* p *en* $\mathbb{Z}$ *y si* $a \in A^p$ *y* $b \in A^q$ *entonces* $ab \in A^{p+q}$.

OBSERVACIÓN 3.2.
A los elementos de A^p *se les llamará homogéneos de grado* p*. Dado* $a \in A$*, escribiremos* $gra = p$ *si y sólo si* $a \in A^p$.

Para entender mejor este concepto daremos los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS 3.3.
1.- El anillo $k[x]$ *de polinomios en la variable* x *con coeficientes en el campo* k *es un anillo graduado, pues podemos verlo como* $k[x] = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} kx^m$.

2.- El anillo de series de Laurent con coeficientes en el campo k *es un anillo graduado. Este anillo se representa como* $k[x, x^{-1}]$ *y tenemos que* $k[x, x^{-1}] \subset k(x)$*. Note que* $k[x, x^{-1}] = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} kx^m$.

3.- Sea $\mathcal{Q}$ *un carcaj finito, entonces tenemos que el álgebra de carcaj con coeficientes en el campo* k $k\mathcal{Q} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (k\mathcal{Q})_m$*, en donde* $(k\mathcal{Q})_m$ *es el subespacio generado por los caminos de longitud* m*, es un anillo graduado.*

PROPOSICIÓN 3.4.
Sea A un anillo graduado con unidad, entonces 1 está en A^0.

DEMOSTRACIÓN.
Como A es un anillo con unidad, entonces el 1 está en $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$, así tenemos que $1 = c_{i_1} + c_{i_2} + \cdots + c_{i_l}$ donde c_{i_j} está en A^{i_j}, es decir que el grado de cada c_{i_j} es i_j, con todos los grados distintos. Multiplicando por c_{i_1} obtenemos $c_{i_1}1 = c_{i_1}(c_{i_1} + c_{i_2} + \cdots + c_{i_l})$. Luego $c_{i_1} = c_{i_1}^2 + c_{i_1}c_{i_2} + \cdots + c_{i_1}c_{i_l}$. Entonces existe un índice k tal que $i_1 = i_1 + i_k$ es decir $i_k = 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_1 = 0$, luego $c_{i_1} = c_{i_1}^2 + c_{i_1}c_{i_2} + \cdots + c_{i_1}c_{i_l}$ entonces tendríamos que $c_{i_1} = c_{i_1}^2$ y $c_{i_1}c_{i_2} = c_{i_1}c_{i_3} = \cdots = c_{i_1}c_{i_l} = 0$. De la igualdad, $(c_{i_1} + \cdots + c_{i_l})c_{i_1} = c_{i_1}$ obtenemos $c_{i_2}c_{i_1} = \cdots = c_{i_l}c_{i_1} = 0$.
Para $k > 1$ tenemos $c_{i_k} = c_{i_1}c_{i_k} + c_{i_2}c_{i_k} + \cdots + c_{i_l}c_{i_k}$. Si observamos los grados de los sumandos de la derecha, tenemos grados distintos

$$i_k = (i_1 + i_k), (i_2 + i_k), \ldots, (i_l + i_k).$$

Entonces $c_{i_k} = c_{i_1}c_{i_k}$ y $c_{i_2}c_{i_k} = c_{i_3}c_{i_k} = \cdots = c_{i_l}c_{i_k} = 0$. Ahora bien, notemos que $1 = 1\cdot 1 = (c_{i_1} + c_{i_2} + \cdots + c_{i_l})(c_{i_1} + c_{i_2} + \cdots + c_{i_l})$ y por lo visto previamente tenemos que $1 = c_{i_1}^2$, y como c_{i_1} está en A^0 luego $1 \in A^0$

□

OBSERVACIÓN 3.5.
A^0 es un subanillo de A.

DEFINICIÓN 3.6.
Un anillo diferencial A es un anillo graduado A junto con un morfismo de grupos $d : A \longrightarrow A$ tal que

(i) $d(A^i) \subset A^{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

(ii) *d cumple la condición de Leibniz, que dice que para todo par de elementos homogéneos a, b de A se cumple la siguiente igualdad*

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a d(b).$$

(iii) $d^2 = 0$.

El morfismo d se llama la diferencial de A.

OBSERVACIONES 3.7.
(1) $d(1) = 0$, *pues*

$$d(1) = d(1\cdot 1) = d(1)\cdot 1 + (-1)^{gr1} 1 \cdot d(1) = d(1)\cdot 1 + 1\cdot d(1).$$

(2) *Si a es homogéneo de grado p, entonces $d(a)$ es homogéneo de grado $p + 1$.*

Recordemos que si k es un campo y A es un anillo, A es una k-álgebra si k está contenido en el centro de A.

DEFINICIÓN 3.8.
Sea k un campo:

- *(a) Una k-álgebra A es una k-álgebra graduada si A es un anillo graduado en donde A^p es un k-subespacio vectorial de A, para toda $p \in \mathbb{Z}$.*
- *(b) Una k-álgebra A es una k-álgebra diferencial si y sólo si A es un anillo diferencial que es k-álgebra graduada y la diferencial $d : A \longrightarrow A$ es un morfismo de k-espacios vectoriales.*

DEFINICIÓN 3.9.
Sea $M = (M^i, d^i_M)$ un complejo de k-espacios vectoriales. $\underline{M} := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$. Sea $f \in End_k(\underline{M})$, f es homogéneo de grado p si $\forall i \in \mathbb{Z}$, $f(M^i) \subset M^{i+p}$. Denotaremos por A^p la colección de elementos homogéneos de grado p.

OBSERVACIONES 3.10.
1.- A^p es un subespacio vectorial de $End_k(\underline{M})$.

2.- $A^pA^q = A^{p+q}$.

PROPOSICIÓN 3.11.
Sea $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$, entonces A es una k-álgebra graduada.

DEMOSTRACIÓN.
La identidad $1_{\underline{M}}$ está en A ya que $1_{\underline{M}}(M^i) = M^i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$ Es claro que si f y g están en A, tenemos que $f + g \in A$. Veamos que el producto $fg \in A$.
Sean $f = f_{i_1} + f_{i_2} + \cdots + f_{i_l}$, y $g = g_{j_1} + g_{j_2} + \cdots + g_{j_s}$ donde $f_{i_k} \in A^{p_i}$ y $g_{j_r} \in A^{p_j}$, luego

$$fg = (f_{i_1} + f_{i_2} + \cdots + f_{i_l})(g_{j_1} + g_{j_2} + \cdots + g_{j_s}) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{r=1}^{s} f_{i_k}g_{j_r},$$

donde $f_{i_k}g_{j_r} \in A^{p_i+p_j}$. También es claro que si $f \in A$, entonces $cf \in A$ para cada $c \in k$. Entonces tenemos que A es una subálgebra de $End_k(\underline{M})$. Además, $A = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ pues si $f = f_{p_1} + \cdots + f_{p_t}$ con $f \in A^p, f_{p_1} \in A^{p_1}, \ldots, f_{p_t} \in A^{p_t}$, $p \notin \{p_1, \ldots, p_t\}$ y $m \in M^i$ tendremos

$$f(m) = f_{i_1}(m) + \cdots + f_{i_t}(m) \in (M^{i+p}) \cap (\oplus_{j=1,\ldots,t}(M^{i+p_j})) = 0.$$

$\square$

PROPOSICIÓN 3.12.
El álgebra A definida antes es una k-álgebra diferencial.

DEMOSTRACIÓN.
Sólo falta ver que A tiene diferencial. Sea $f \in A^p$, definamos a $\delta(f) \in A^{p+1}$ mediante la fórmula:

$$\delta(f)(m) := d^{i+p}_M f(m) - (-1)^{grf} f d^i_M(m),$$

para $m \in M^i$. Observemos que en la definición anterior tenemos que

$$d_M^{i+p} f(m) \in M^{i+p+1}$$

pues $f(m)$ está en M^{i+p}, y d_M^i le aumenta el grado en uno. De igual forma $fd_M^i(m) \in M^{i+p+1}$ pues $d_M^i(m)$ está en M^{i+1} y f es homogéneo de grado p, luego $\delta(f)$ está en A^{p+1}. Veamos que satisface la condición de Leibniz. Dados $f \in A^p$, $g \in A^q$ y $m \in M^i$ debemos demostrar la siguiente igualdad

$$\delta(fg)(m) = \delta(f)(g(m)) + (-1)^{grf} f\delta(g)(m).$$

Por un lado, tenemos

$$\delta(fg)(m) = d_M^{i+p+q}(fg)(m) - (-1)^{gr(fg)}(fg)d_M^i(m).$$

Por otro, $g(m) \in M^{i+q}$ y entonces

$$\delta(f)(g(m)) = d_M^{i+q+p} f(g(m)) - (-1)^{grf} f d_M^{i+q}(g(m))$$

y

$$\begin{aligned}(-1)^{grf} f\delta(g)(m) &= (-1)^{grf} f[d_M^{i+q} g(m) - (-1)^{grg} g d_M^i(m)] \\ &= (-1)^p f d_M^{i+q} g(m) - (-1)^{p+q} f g d_M^i(m).\end{aligned}$$

Sumando ambos términos obtenemos

$$\delta(f)(g(m)) + (-1)^{grf} f\delta(g)(m) = d_M^{i+q+p} f(g(m)) - (-1)^p f d_M^{i+q}(g(m)) +$$

$$(-1)^p f d_M^{i+q} g(m) - (-1)^{p+q} f g d_M^i(m) = d_M^{i+q+p} f(g(m)) - (-1)^{p+q} f g d_M^i(m),$$

entonces $\delta(fg)(m) = \delta(f)(g(m)) + (-1)^{grf} f\delta(g)(m)$.

Ahora veamos que $\delta^2 = 0$. Sean $f \in A^p$ y $m \in M^i$, luego $\delta(f) \in A^{p+1}$

$$\delta^2(f)(m) = \delta(\delta(f))(m) = d_M^{i+p+1}(\delta(f))(m) - (-1)^{gr\delta(f)}\delta(f)d_M^i(m)$$

$$= d_M^{i+p+1}[d_M^{i+p} f(m) - (-1)^{grf} f d_M^i(m)] - (-1)^{p+1}[d_M^{i+p+1} f(d_M^i(m))$$

$$-(-1)^p f d_M^{i+1}(d_M^i(m))] = d_M^{i+p+1} d_M^{i+p} f(m) + 0 + (-1)^{p+1}(-1)^p f d_M^{i+1}(d_M^i(m)) = 0.$$

Así, hemos demostrado que A es una k-álgebra diferencial.

□

DEFINICIÓN 3.13.
Sea A una k-álgebra graduada y M un A-módulo izquierdo, entonces M es un A-módulo graduado izquierdo si y sólo si

- *(i) M admite una graduación como k-espacio vectorial $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ donde M^i es un k-subespacio vectorial, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Los elementos de M^i se llaman homogéneos de grado i. Escribimos* gr(m) = i *si y sólo si $m \in M^i$.*
- *(ii) Si $a \in A^i$ y $m \in M^j$, entonces $am \in M^{i+j}$.*

DEFINICIÓN 3.14.
Sea A una k-álgebra diferencial y M un A-módulo izquierdo, entonces M es un A-módulo diferencial izquierdo si y sólo si:

(i) $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ *es un A-módulo graduado izquierdo.*

(ii) M *tiene una transformación lineal* $d : M \longrightarrow M$ *que satisface*

(a) $d_M(M^i) \subset M^{i+1}$, *para toda* $i \in \mathbb{Z}$;

(b) $d_M^2 = 0$;

(c) Si $a \in A$ y $m \in M$ son elementos homogéneos,

$$d_M(am) = d(a)m + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a d_M(m).$$

OBSERVACIÓN 3.15.
Si A es un k-álgebra diferencial, A es, visto como A-módulo izquierdo, un A-módulo diferencial izquierdo. Nos referiremos a él como el A-módulo diferencial regular izquierdo.

Ahora vamos a definir los A-módulos derechos, para ello recordemos la definición de A^{op}.

DEFINICIÓN 3.16.
Sea A una k-álgebra graduada. A^{op} es la k-álgebra cuyo conjunto y estructura de espacio vectorial graduado es la misma de A, es decir $A^{op} = A$, por tanto $(A^{op})^m = A^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Si $a \in A^p$ y $b \in A^q$ definamos $a * b = (-1)^{pq} ba$. El producto en A^{op} se obtiene de la fórmula anterior extendiendo biaditivamente.

Claramente A^{op} es una k-álgebra graduada.

PROPOSICIÓN 3.17.
Si A es una k-álgebra diferencial, entonces $A^{op} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ es una k-álgebra diferencial, donde la diferencial de A^{op}, es la misma que la de A.

DEMOSTRACIÓN.
Como la diferencial de A^{op} igual a la de A, tenemos que $d^2 = 0$. Sólo hace falta verificar la condición de Leibniz, es decir que si a y b son elementos homogéneos, secumple laa siguiente igualdad $d(a * b) = d(a) * b + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a * d(b)$. Sabemos que

$$d(a*b) = d((-1)^{gragrb} ba) = (-1)^{gragrb} d(ba) = (-1)^{gragrb}[d(b)a + (-1)^{grb} bd(a)]$$

$$= (-1)^{gragrb}[(-1)^{(grb+1)(gra)} a * d(b) + (-1)^{grb}(-1)^{(gra+1)grb} d(a) * b]$$

$$= (-1)^{gra} a * d(b) + d(a) * b.$$

Luego A^{op} es un k-álgebra diferencial.

□

DEFINICIÓN 3.18.

(i) Si A es una k-álgebra graduada, un A-módulo graduado derecho M es un A^{op}-módulo graduado izquierdo.

(ii) Si A es una k-álgebra diferencial, un A-módulo diferencial derecho M es un A^{op}-módulo diferencial izquierdo.

Veamos una caracterización de los A-módulos graduados derechos.

PROPOSICIÓN 3.19.

Sea M un k-espacio vectorial con una graduación, $M = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$. Sea A una k-álgebra graduada, entonces M es un A-módulo graduado derecho si y sólo si existe una transformación bilineal $\psi : M \times A \longrightarrow M$ donde $\psi(m,a) = m \cdot a$ tal que

(i) Si $a \in A^i$ y $m \in M^j$, entonces $m \cdot a \in M^{i+j}$;

(ii) $m \cdot 1 = m$;

(iii) Si $a, b \in A$ son elementos homogéneos y $m \in M$,

$$(m \cdot a) \cdot b = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} m \cdot (ab).$$

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Rightarrow}$ Por hipótesis M es un A-módulo graduado derecho, por tanto tenemos que M es un A^{op}-módulo graduado izquierdo. Aprovechando esta información vamos a definir la acción derecha ψ como sigue $\psi(m,a) := m \cdot a = am$. Veamos que se cumplen las tres condiciones:

(i) Sean $a \in A^i$ y $m \in M^j$. Veamos que $m \cdot a \in M^{i+j}$.
Como A^{op} es un A-módulo graduado izquierdo, entonces $am \in M^{i+j}$ y por tanto tenemos que $m \cdot a \in M^{i+j}$.

(ii) $m \cdot 1 = m$
Esta condición se cumple pues $m \cdot 1 = 1m = m$.

(iii) Sean a, b elementos homogéneos de A. Tenemos:

$$\begin{aligned}(m \cdot a) \cdot b = (am) \cdot b = b(am) = (b * a)m &= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}(ab)m \\ &= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} m \cdot (ab).\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\phi : A^{op} \times M \longrightarrow M$ donde $\phi(a,m) := am = m \cdot a$. Remontando el argumento de (i), resulta que M es un A^{op}-módulo graduado izquierdo, es decir, un A-módulo graduado derecho.

□

Ahora veremos una caracterización para los A-módulos diferenciales derechos.

PROPOSICIÓN 3.20.
Sea M un k-espacio vectorial con una graduación, $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, y provisto con una transformación lineal $d_M : M \longrightarrow M$ tal que

(i) $d_M(M^i) \subset M^{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$;

(ii) $d_M^2 = 0$.

Sea A una k-álgebra diferencial con diferencial d. Entonces M es un A-módulo diferencial derecho con diferencial d_M si y sólo si existe una transformación bilineal $\psi : M \times A \longrightarrow M$ donde $\psi(m, a) = m \cdot a$, tal que

(i) ψ satisface las condiciones de la proposición 3.19.

(ii) Si $a \in A$ y $m \in M$ son homogéneos, entonces

$$d_M(m \cdot a) = m \cdot d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} d_M(m) \cdot a.$$

DEMOSTRACIÓN.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que M es un A-módulo diferencial derecho con diferencial d_M. Como M es un A-módulo graduado derecho, existe ψ que satisface las condiciones de la proposición 3.19. Sólo nos resta probar que d_M satisface la condición de Leibniz. Sean $m \in M$ y $a \in A$ elementos homogéneos

$$\begin{aligned} d_M(m \cdot a) = d_M(am) &= d(a)m + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a d_M(m) \\ &= m \cdot d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} d_M(m) \cdot a. \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponga que ψ es una transformación bilineal que cumple (i) y (ii). Por la proposición 3.19, M es un A-módulo graduado derecho. Remontando el argumento anterior, vemos que M es un A^{op}-módulo izquierdo con diferencial d_M.

□

LEMA 3.21.
Sea A un álgebra diferencial. Vamos a darle a $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ una estructura de A-módulo diferencial derecho. Definamos una acción derecha como sigue, para $a, b \in A$ elementos homogéneos. $a * b := (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} ab$. En general,

$$\left(\sum_i a_i\right)\left(\sum_j b_j\right) = \sum_{i,j} a_i * b_j.$$

Por definición $d_A := d : A \longrightarrow A$ es la diferencial del álgebra A.

DEMOSTRACIÓN.
Note que lo único que falta ver para que esta acción le de estructura a A de A-módulo graduado derecho, es que $(a * b_1) * b_2 = (-1)^{\mathrm{gr(b_1)gr(b_2)}} a * (b_1 b_2)$, para a, b_1, b_2 elementos homogéneos de A. Notenemos que

$$(a * b_1) * b_2 = ((-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b_1)}} ab_1) * b_2 = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b_1)}} ((ab_1) * b_2)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b_1)+(gr(a)+gr(b_1))gr(b_2)}} ab_1b_2$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(b_1)+gr(b_2))+gr(b_1)gr(b_2)}} ab_1b_2 = (-1)^{\mathrm{gr(b_1)gr(b_2)}} a * (b_1b_2).$$

Así esta acción le da estructura de A-módulo graduado derecho a A. Ahora bien, la diferencial $d_A := d$ es la misma que la de A, así dados a y b elementos homogéneos de A

$$d(a * b) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} d(ab) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}[d(a)b + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} ad(b)]$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} d(a)b + (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(b)+1)}} ad(b)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)+(gr(a)+1)gr(b)}} d(a) * b + a * d(b) = a * d(b) + (-1)^{\mathrm{gr(b)}} d(a) * b$$

por tanto A_A es un A-módulo diferencial derecho.

□

DEFINICIÓN 3.22.
Llamaremos al módulo diferencial derecho A el A-módulo diferencial regular derecho.

En adelante Mod-A diferencial significará A-módulo diferencial derecho y A-Mod diferencial, significará A-módulo diferencial izquierdo.

PROPOSICIÓN 3.23.
Sea k un campo

- *(i) Sean A es una k-álgebra graduada y M es un A-módulo derecho graduado. Definamos $M[1] := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(M[1])^i$ donde $(M[1])^i = M^{i+1}$ y la acción $m * a := (-1)^{gra} m \cdot a$, para $m \in M$ y $a \in A$ homogéneos. Entonces, $M[1]$ es un A-módulo graduado derecho.*
- *(ii) Sea A una k-álgebra diferencial y M un Mod-A diferencial, definamos $d_{M[1]} = -d_M$. Entonces $M[1]$ es un Mod-A diferencial.*

DEMOSTRACIÓN.
Haremos la prueba de cada uno de los incisos.

- (i) Veamos la asociatividad. Sean $a, b \in A$ elementos homogéneos y $m \in (M[1])^i$

$$(m * a) * b = ((-1)^{\mathrm{gr(a)}} m \cdot a) * b = (-1)^{\mathrm{gr(a)}}(-1)^{\mathrm{gr(b)}}(m \cdot a) \cdot b$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(b)}}(-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} m \cdot (ab) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}[(-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(b)}} m \cdot (ab)]$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}[m * (ab)].$$

Entonces $M[1]$ es un A-módulo graduado derecho.

(ii) Claramente, $d^2_{M[1]} = d_{M[1]}(-d_M) = -d_M(-d_M) = d^2_M = 0$.

Ahora veamos que se cumple Leibniz, es decir que se cumple la siguiente igualdad $d_{M[1]}(m * a) = m * d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}}(d_{M[1]}(m) * a)$. En efecto

$$d_{M[1]}(m*a) = -d_M(m*a) = -d_M[(-1)^{\mathrm{gr(a)}}(m\cdot a)] = -(-1)^{\mathrm{gr(a)}}d_M(m\cdot a)$$

$$\begin{aligned} &= -(-1)^{\mathrm{gr(a)}}[m \cdot d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}}d_M(m) \cdot a] \\ &= (-1)^{\mathrm{gr(a)}}[-(m \cdot d(a)) + (-1)(d_M(m) * a)] \\ &= (-1)^{\mathrm{gr(a)}}[(-1)^{\mathrm{gr(a)}+2}m * d(a) + d_{M[1]}(m) * a] \\ &= m * d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}}(d_{M[1]}(m) * a). \end{aligned}$$

Así, hemos visto que $M[1]$ es un Mod-A diferencial.

□

OBSERVACIÓN 3.24.
Si M es un A-módulo graduado (respectivamente diferencial), de manera análoga a la construcción anterior, podemos construir el A-módulo graduado (respectivamente diferencial) $M[-1]$. Notemos que $(M[-1])[1] = M = (M[1])[-1]$.

EJEMPLO 3.25.
Sean $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$, $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, donde M es un Mod-A diferencial y supongamos que $d(A^0) = 0$. Consideremos a A^0 con $d = 0$, luego $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ es un Mod-A^0 diferencial.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, $d_M : M \longrightarrow M$ y $m \in M^i, a \in A^0$, entonces por ser M un Mod-A diferencial, tenemos que $ma \in M^{i+0} = M^i$. Nótese que en este caso M^i es Mod-A^0 $\forall i \in \mathbb{Z}$. Veamos que $d_M(ma) = d_M(m)a$, como d_M cumple Leibniz tenemos que $d_M(ma) = md(a) + (-1)^0 d_M(m)a = d_M(m)a$. Sólo nos falta ver que $d^2_M = 0$, pero esto se tiene ya porque d_M es una diferencial sobre M. Así hemos probado que M es un Mod-A^0 diferencial.

□

A partir de ahora en el presente trabajo A será una k-álgebra graduada diferencial. En lo que sigue empezaremos definiendo unas nuevas categorías y más adelante veremos que una de ellas es una categoría de Frobenius.

DEFINICIÓN 3.26.
$\mathcal{G}$ es la categoría cuyos objetos son los A-módulos derechos graduados y sus morfismos $f : M \longrightarrow N$ son funciones lineales que cumplen

1. *$f(ma) = f(m)a$, para toda m en M y para toda a en A;*
2. *$f(M^i) \subset N^i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.*

DEFINICIÓN 3.27.
$\mathscr{C}$ es la categoría cuyos objetos son los A-módulos derechos diferenciales y sus morfismos $f : M \longrightarrow N$, son aquellos que, además de ser morfismos de A-módulos derechos graduados, conmutan con la diferencial, es decir $fd_M = d_N f$.

LEMA 3.28.
Sea A una k-álgebra diferencial graduada

(i) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo en $\mathcal{G}$ que es biyectivo como función, entonces f es un isomorfismo en $\mathcal{G}$.

(ii) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ que es biyectivo como función, entonces f es un isomorfismo en $\mathscr{C}$.

DEMOSTRACIÓN.
Veamos la prueba de (i)

(i) Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo biyectivo en $\mathcal{G}$ y sea $g : N \longrightarrow M$ su función inversa. Tenemos $f(M^i) \subseteq N^i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Como f es biyectiva, si $n \in N^i$, existe $m = \sum_i m_i \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i = M$ tal que $n = f(m) = \sum_i f(m_i) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N^i$. Luego $n = f(m) = f(m_i)$. Hemos probado que $f(M^i) = N^i$ para toda $i \in \mathbb{Z}$. Luego $g(N^i) = g(f(M^i)) = M^i$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ y g es homogéneo. Además, si $m \in M$ y $a \in A$, tenemos

$$f(g(ma) - g(m)a) = fg(ma) - f(g(m)a)$$
$$= fg(ma) - fg(m)a = ma - ma = 0$$

y como f es inyectiva, $g(ma) = g(m)a$. Entonces g es un morfismo en $\mathcal{G}$ y es el inverso de f. Así f es isomorfismo en $\mathcal{G}$.

(ii) Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo biyectivo en $\mathcal{C}$ y sea $g : N \longrightarrow M$ su función inversa. Por el inciso anterior, sólo nos resta verificar que se cumple la siguiente igualdad $d_M g = g d_N$. En efecto,

$$f(d_M g(n) - g d_N(n)) = f(d_M g(n)) - f(g d_N(n))) = f d_M g(n) - f g d_N(n)$$
$$= f g d_N(n) - f g d_N(n) = 0.$$

Como f es inyectiva, $d_M g(n) = g d_N(n)$.

□

El siguiente paso es ver que $\mathcal{G}$ y $\mathscr{C}$ son categorías abelianas con coproductos.

PROPOSICIÓN 3.29.
$\mathcal{G}$ y $\mathscr{C}$ tienen un objeto cero.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $Z = 0$ el k-espacio vectorial cero y la acción $Z \times A \longrightarrow Z$ dada por $0 \cdot a = 0$. Definamos a $d_Z = 0$. Como $Z = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Z^i$ donde $Z^i = 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, entonces vemos que Z está en $\mathscr{C}$. Ahora comprobemos que Z es objeto cero de $\mathscr{C}$. Observe que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{Z})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Z}, \mathrm{N})$ sólo tienen un elemento, digamos $0_{M,0}$ y $0_{0,N}$, respectivamente. Dados M, N en $\mathscr{C}$ definimos al morfismo cero como $0 := 0_{0,N} \circ 0_{M,0}$ donde $0_{M,0}$ está en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{Z})$ y $0_{0,N}$ está en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Z}, \mathrm{N})$. Con esto tenemos que $Z = 0$ es el objeto cero de $\mathscr{C}$. El argumento para $\mathcal{G}$ es similar.

□

PROPOSICIÓN 3.30.
Sean $\mathcal{G}$ y $\mathscr{C}$ como antes

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ *es grupo abeliano para todo M, N en $\mathcal{G}$.*

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ *es grupo abeliano para todo M, N en $\mathscr{C}$.*

DEMOSTRACIÓN.

(i) Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$. Veamos que $f+g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$. Definamos a la suma de f y g, para $m \in M$, como sigue

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m).$$

Como ambas funciones son transformaciones lineales tenemos que $f+g$ está en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{k}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$. Nos falta probar que $f+g$ es un morfismo homogéneo. Sea $m \in M^i$, luego $(f+g)(m) = f(m)+g(m)$ y como cada sumando está en N^i y es grupo para toda $i \in \mathbb{Z}$, entonces $(f+g)(m) \in N^i$. Así hemos visto que $(f+g)(M^i) \subset N^i$. También es claro que

$$(f+g)(ma) = (f+g)(m)a.$$

Luego, $f+g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$.

(ii) Por el inciso anterior lo único que nos falta ver es que, dados f y g en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$, entonces $f+g$ conmuta con la diferencial, es decir que $(f+g)d_M = d_N(f+g)$. Sea $m \in M$ entonces

$$(f+g)d_M(m) = fd_M(m)+gd_M(m) = d_Nf(m)+d_Ng(m) = d_N(f+g)(m).$$

Luego tenemos que $f+g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$.

□

OBSERVACIÓN 3.31.
Dados $M, N, L \in \mathscr{C}$; $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ y $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N},\mathrm{L})$ las siguientes igualdades

$$g(f_1+f_2) = gf_1 + gf_2$$

$$(g_1+g_2)f = g_1f + g_2f$$

son válidas por ser todos los morfismos transformaciones lineales. La afirmación correspondiente vale para $\mathcal{G}$.

A continuación veremos la existencia de coproductos en $\mathscr{C}$ y en $\mathcal{G}$.

PROPOSICIÓN 3.32.
La categoría $\mathcal{G}$ tiene coproductos.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\{M_s\}_{s\in J}$ una familia de objetos de $\mathcal{G}$, donde $M_s = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} M_s^j$ para toda $s \in J$. Tomemos $\coprod_{s\in J} M_s$ el coproducto de los k-espacios vectoriales M_s y sus inyecciones canónicas $\lambda_s : M_s \longrightarrow \coprod_{s\in J} M_s$.

(i) $\coprod_{s\in J} M_s$ tiene estructura de A-módulo graduado derecho.
Definamos

$$\left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j := \sum_{s\in J} \lambda_s(M_s^j).$$

Tenemos que probar que

$$\coprod_{s\in J} M_s = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j .$$

Sea $x \in \coprod_{s\in J} M_s$ entonces x tiene la siguiente forma

$$x = \lambda_{s_1}(m_1) + \lambda_{s_2}(m_2) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t)$$

donde m_i está en M_{s_i} y $M_{s_i} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_{s_i}^j$. Entonces,

$$m_1 = m_1^r + m_1^{r+1} + m_1^{r+2} + \cdots + m_1^{r+l}$$
$$m_2 = m_2^r + m_2^{r+1} + m_2^{r+2} + \cdots + m_2^{r+l}$$
$$\vdots$$
$$m_t = m_t^r + m_t^{r+1} + m_t^{r+2} + \cdots + m_t^{r+l}$$

donde m_i^j esta en $(M_{s_i})^j$. Para facilitar las cuentas podemos suponer que las m_i inician y terminan en los mismos índices, pues en el caso de que no comiencen o terminen igual le agregamos ceros para que ocurra. Al sustituir obtenemos que

$$x = \lambda_{s_1}(m_1^r+m_1^{r+1}+m_1^{r+2}+\cdots+m_1^{r+l})+\lambda_{s_2}(m_2^r+m_2^{r+1}+m_2^{r+2}+\cdots+m_2^{r+l})$$
$$+\cdots + \lambda_{s_t}(m_t^r + m_t^{r+1} + m_t^{r+2} + \cdots + m_t^{r+l}).$$

Como λ_{s_i} es una transformación lineal, tenemos que se distribuye sobre la suma:

$$x = \lambda_{s_1}(m_1^r) + \lambda_{s_1}(m_1^{r+1}) + \lambda_{s_1}(m_1^{r+2}) + \cdots + \lambda_{s_1}(m_1^{r+l})$$
$$+\lambda_{s_2}(m_2^r) + \lambda_{s_2}(m_2^{r+1}) + \lambda_{s_2}(m_2^{r+2}) + \cdots + \lambda_{s_2}(m_2^{r+l})$$
$$\vdots$$

$$+\lambda_{s_t}(m_t^r)+\lambda_{s_t}(m_t^{r+1})+\lambda_{s_t}(m_t^{r+2})+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t^{r+l}),$$

y, reordenado las sumatorias, obtenemos

$$x=\lambda_{s_1}(m_1^r)+\lambda_{s_2}(m_2^r)+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t^r)+\lambda_{s_1}(m_1^{r+1})+\lambda_{s_2}(m_2^{r+1})+\cdots$$

$$+\lambda_{s_t}(m_t^{r+1})+\cdots+\lambda_{s_1}(m_1^{r+l})+\lambda_{s_2}(m_2^{r+l})+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t^{r+l}).$$

Definamos

$$\eta_r:=\lambda_{s_1}(m_1^r)+\lambda_{s_2}(m_2^r)+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t^r)\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^r$$

$$\eta_{r+1}:=\lambda_{s_1}(m_1^{r+1})+\lambda_{s_2}(m_2^{r+1})+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t^{r+1})\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^{r+1}$$

$$\vdots$$

$$\eta_{r+l}:=\lambda_{s_1}(m_1^{r+l})+\lambda_{s_2}(m_2^{r+l})+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t^{r+l})\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^{r+l}.$$

Entonces,

$$x=\eta_r+\eta_{r+1}+\cdots+\eta_{r+l}\in\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^j,$$

y esto implica que

$$\coprod_{s\in J}M_s=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^j.$$

Ahora veamos que la suma es directa. Suponga que $\eta_r\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^r$, $\eta_{r+1}\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^{r+1}$, ..., $\eta_{r+l}\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^{r+l}$ y que

$$0=\eta_r+\eta_{r+1}+\cdots+\eta_{r_{r+l}}.$$

Pero sabemos que $\eta_j\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^j$, luego:

$$\eta_j=\lambda_{s_1}(m_1^j)+\lambda_{s_2}(m_2^j)+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t^j)$$

con $m_i^j\in M_{s_i}^j$, para $j=r,\ldots,r+l$. Entonces

$$0=\sum_{i=1}^t\lambda_{s_i}(m_i^r)+\sum_{i=1}^t\lambda_{s_i}(m_i^{r+1})+\cdots+\sum_{i=1}^t\lambda_{s_i}(m_i^{r+l})$$

y, reordenando las sumas, obtenemos

$$0=\lambda_{s_1}(m_1^r+m_1^{r+1}+m_1^{r+2}+\cdots+m_1^{r+l})+\lambda_{s_2}(m_2^r+m_2^{r+1}+m_2^{r+2}+\cdots+m_2^{r+l})$$

$$+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t^r+m_t^{r+1}+m_t^{r+2}+\cdots+m_t^{r+l}).$$

Luego si aplicamos la proyección canónica $\pi_{s_i}:\coprod_{s\in J}M_s \longrightarrow M_{s_i}$ tenemos que

$$0=\pi_{s_i}\lambda_{s_i}(m_i^r+\cdots+m_i^{r+l})=m_i^r+\cdots+m_i^{r+l}\in M_{s_i}=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}M_{s_i}^j$$

para $i=1,\ldots,t$, esto nos dice que $m_i^r=0, m_i^{r+1}=0,\ldots,m_i^{r+l}=0$. Luego $\eta_r=\eta_{r+1}=\cdots=\eta_{r+l}=0$. Así hemos probado que

$$\coprod_{s\in J}M_s=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^j.$$

(ii) $\coprod_{s\in J}M_s$ tiene estructura de A-módulo derecho graduado. Consideremos la transformación bilineal

$$\psi:\coprod_{s\in J}M_s\times A\longrightarrow\coprod_{s\in J}M_s$$

tal que $\psi(\sum_i\lambda_{s_i}(m_i),a):=\sum_i\lambda_{s_i}(m_ia)$. Sean $x\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^j$ y $a\in A^t$, veamos que $xa\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^{j+t}$. Sea $x=\lambda_{s_1}(m_1)+\lambda_{s_2}(m_2)+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t)$, donde m_i está en $M_{s_i}^j$ para $i=1,\ldots,t$ luego

$$\begin{aligned}xa&=(\lambda_{s_1}(m_1)+\lambda_{s_2}(m_2)+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t))\,a\\&=\lambda_{s_1}(m_1)a+\lambda_{s_2}(m_2)a+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t)a\\&=\lambda_{s_1}(m_1a)+\lambda_{s_2}(m_2a)+\cdots+\lambda_{s_t}(m_ta)\end{aligned}$$

donde $m_ia\in M_{s_i}^{j+t}$, entonces

$$xa\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^{j+t}.$$

Sean $a,b\in A$ homogéneos y $x\in\left(\coprod_{s\in J}M_s\right)^j$. Veamos que se cumple que $(xa)b=(-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}x(ab)$. Sea $x=\lambda_{s_1}(m_1)+\lambda_{s_2}(m_2)+\cdots+\lambda_{s_t}(m_t)$ con $m_i\in M_{s_i}^j$, para $i=1,\ldots,t$. Entonces

$$\begin{aligned}(xa)b&=(\lambda_{s_1}(m_1a)+\lambda_{s_2}(m_2a)+\cdots+\lambda_{s_t}(m_ta))b\\&=\lambda_{s_1}([m_1a]b)+\lambda_{s_2}([m_2a]b)+\cdots+\lambda_{s_t}([m_ta]b)\end{aligned}$$

pero recordemos que, M_{s_i} es A-módulo graduado derecho, por lo tanto se tiene que $(m_ia)b=(-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}m_i(ab)$ para $i=1,\ldots,t$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}(xa)b&=\lambda_{s_1}((-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}m_1(ab))+\cdots+\lambda_{s_t}((-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}m_t(ab))\\&=(-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}x(ab).\end{aligned}$$

Aplicando la proposición 3.19 obtenemos que $\coprod_{s\in J} M_s$ es un A-módulo derecho graduado. Notemos que cada $\lambda_j : M_{s_i} \longrightarrow \coprod_{s\in J} M_s$ es un morfismo de A-módulos graduados derechos. Sólo resta ver que $\coprod_{s\in J} M_s$ tiene la propiedad universal de coproducto. Sea $\{ f_s : M_s \longrightarrow L \}_{s\in J}$ una familia de morfismos de $\mathcal{G}$. En particular cada f_s es lineal. Como $\coprod_{s\in J} M_s$ es el coproducto de los k-espacios vectoriales M_s existe un único morfismo lineal $f : \coprod_{s\in J} M_s \longrightarrow L$ tal que $f\lambda_{s_i} = f_{s_i}$ para toda $s_i \in J$.

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{s\in J} M_s \arrow[r, "f"] & L \\
M_{s_i} \arrow[u, "\lambda_{s_i}"] \arrow[ur, "f_{s_i}"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que f es un morfismo de $\mathcal{G}$. Sean $m \in \coprod_{s\in J} M_s$ y $a \in A$, como $m \in \coprod_{s\in J} M_s$ existen $m_i \in M_{s_i}$ tal que $m = \sum \lambda_{s_i}(m_i)$. Así tenemos que $ma = \sum \lambda_{s_i}(m_i a)$, luego

$$\begin{aligned} f(ma) = f\left(\sum \lambda_{s_i}(m_i a)\right) &= \sum f\lambda_{s_i}(m_i a) = \sum f_{s_i}(m_i a) = \sum f_{s_i}(m_i)a \\ &= \left(\sum f\lambda_{s_i}(m_i)\right) a = f\left(\sum \lambda_{s_i}(m_i)\right) a = f(m)a. \end{aligned}$$

Similarmente se muestra que

$$f\left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j \subseteq L^j,$$

pues $f_{s_i}(M^j_{s_i}) \subseteq L^j$.

□

PROPOSICIÓN 3.33.

La categoría $\mathscr{C}$ tiene coproductos.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\{M_s\}_{s\in J}$ una familia de A-módulos diferenciales derechos. Por la proposición anterior tenemos que el coproducto de los k-espacios vectoriales $\coprod_{s\in J} M^s$ admite una estructura de A-módulo derecho graduado. Sólo nos queda por ver que $\coprod_{s\in J} M^s$ está en $\mathscr{C}$. Veamos a la diferencial. Para cada $s \in J$ tenemos una diferencial $d_s : M_s \longrightarrow M_s$. Por la propiedad universal del coproducto, existe una única transformación lineal $d : \coprod_{s\in J} M_s \longrightarrow \coprod_{s\in J} M_s$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo $\forall j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{s\in J} M_s \arrow[r, dotted, "d"] & \coprod_{s\in J} M_s \\
M_s \arrow[u, "\lambda_s"] \arrow[r, "d_s"'] & M_s. \arrow[u, "\lambda_s"']
\end{tikzcd}$$

Ahora comprobemos que d efectivamente es una diferencial.

(i) $d(\left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j) \subset \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^{j+1}$.
Sea $x \in \left(\coprod_{s\in J} m_s\right)^j$, entonces $x = \sum \lambda_{s_i}(m_i)$ con $m_i \in M^j_{s_i}$

$$d(x) = d\left(\sum \lambda_{s_i}(m_i)\right) = \sum d(\lambda_{s_i}(m_i)) = \sum \lambda_{s_i}(d_{s_i}(m_i));$$

pero note que $d_{s_i}(m_i) \in M^{j+1}_{s_i}$ entonces

$$d(x) \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^{j+1}.$$

(ii) d cumple la condición de Leibniz.
Sean $x \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j$ y $a \in A^r$, como en el inciso anterior, tenemos que $x = \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}(m_i)$, con $m_i \in M^j_{s_i}$. Luego,

$$d(xa) = d\left(\left(\sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}(m_i)\right)a\right) = d\left(\sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}(m_i a)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^t d(\lambda_{s_i}(m_i a)) = \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i} d_{s_i}(m_i a) = \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}[m_i d(a) + (-1)^r d_{s_i}(m_i)a]$$

$$= \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}[m_i d(a)] + (-1)^r \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}[d_{s_i}(m_i)a]$$

$$= \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}(m_i)d(a) + (-1)^r \sum_{i=1}^t d(\lambda_{s_i}(m_i))a = xd(a) + (-1)^r d(x)a.$$

Así, d satisface la condición de Leibniz.

(iii) $d^2 = 0$.
Al igual que en los incisos anteriores sea $x \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j$, entonces $x = \sum \lambda_{s_i}(m_i)$ con $m_i \in M^j_{s_i}$. Notemos que

$$d^2(x) = d(d(x)) = d\left(\sum d(\lambda_{s_i}(m_i))\right) = d\left(\sum \lambda_{s_i}(d_{s_i}(m_i))\right)$$

$$= \sum d\lambda_{s_i}(d_{s_i}(m_i)) = \sum \lambda_{s_i} d_{s_i} d_{s_i}(m_i) = 0.$$

Luego $\coprod_{s\in J} M_s$ es un Mod-A diferencial.
Es claro que la inyección $\lambda_s : M_{s_i} \longrightarrow \coprod_{s\in J} M_s$ es un morfismo de módulos diferenciales derechos. Sea $\{ f_s : M_s \longrightarrow L \}_{s\in J}$ una familia de morfismos en

$\mathscr{C}$. Puesto que $\coprod_{s\in J} M_s$ es coproducto en $\mathcal{G}$, existe $f : \coprod_{s\in J} M_s \longrightarrow L$ en $\mathcal{G}$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{s\in J} M_s \arrow[r, "f"] & L \\
M_{s_j}. \arrow[u, "\lambda_{s_j}"] \arrow[ur, "f_{s_j}"'] &
\end{tikzcd}$$

Lo único que nos queda por probar es que $fd = d_L f$ donde d es la diferencial de $\coprod_{s\in J} M^s$. Sea $x \in \coprod_{s\in J} M_s$, entonces

$$fd(x) = f\left(\sum \lambda_{s_i} d_{m_{s_i}}(m_i)\right) = \sum f\lambda_{s_i} d_{m_{s_i}}(m_i) = \sum f_{s_i} d_{m_{s_i}}(m_i)$$

$$= \sum d_L f_{s_i}(m_i) = d_L\left(\sum f_{s_i}(m_i)\right) = d_L f(x).$$

Así, $\mathscr{C}$ tiene coproductos.

□

PROPOSICIÓN 3.34.

$\mathcal{G}$ y $\mathscr{C}$ son categorías aditivas.

DEMOSTRACIÓN.

Por las proposiciones 3.29, 3.30, 3.32, 3.33 y la observación 3.31 tenemos demostrada la proposición.

□

Nuestro objetivo final es ver que $\mathcal{G}$ y $\mathscr{C}$ son categorías abelianas. Para ello definiremos los conceptos de submódulos graduados, submódulos diferenciales, cocientes de módulos graduados y cocientes de módulos diferenciales.

DEFINICIÓN 3.35.

Sea M un A-módulo graduado derecho y N un subespacio vectorial de M. Diremos que N es un A-submódulo graduado de M si

(i) $N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N \cap M^i$.

(ii) Para toda $a \in A$ y $n \in N$, $na \in N$.

DEFINICIÓN 3.36.

Sea M un A-módulo diferencial derecho y N un subespacio vectorial de M. Diremos que N es un A-submódulo diferencial de M si

(i) N es un submódulo graduado de M.

(ii) $\delta_M(N) \subseteq N$.

OBSERVACIÓN 3.37.

Note que N es un submódulo diferencial derecho de M, entonces N es A-módulo diferencial derecho, pues lo hereda de M.

EJEMPLO 3.38.
Si $f : M \longrightarrow N$ *es un morfismo de A-módulos graduados derechos, entonces* $\mathrm{Ker(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0\}}$ *es una submódulo graduado de* M*. Además, la inclusión* $i : \mathrm{Ker(f)} \longrightarrow M$ *es un morfismo de módulos graduados.*

DEMOSTRACIÓN.
Veamos que se cumplen las dos condiciones.

(i) $\mathrm{Ker(f) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i \cap Ker(f)}$.
Es claro que $M^i \cap \mathrm{Ker(f)} \subset \mathrm{Ker(f)}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, por lo tanto

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{(Ker(f) \cap M^i) \subset Ker(f)}.$$

Por otro lado, sea $m \in \mathrm{Ker(f) \subset M} = \bigoplus_{\mathrm{i}\in\mathbb{Z}} \mathrm{M^i}$, entonces $m = \sum m_i$ con $m_i \in M^i$, luego

$$0 = f(m) = f\left(\sum m_i\right) = \sum f(m_i) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N^i,$$

con $f(m_i) \in N^i$. Por tanto, tenemos que,$\forall i$, $f(m_i) = 0$. Esto implica que $m_i \in M^i \cap \mathrm{Ker(f)}$, para toda i, por tanto

$$m \in \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{(Ker(f) \cap M^i)}.$$

Luego, hemos probado que

$$\mathrm{Ker(f)} = \sum_{\mathrm{i}\in\mathbb{Z}} \mathrm{(Ker(f) \cap M^i)} = \bigoplus_{\mathrm{i}\in\mathbb{Z}} \mathrm{(Ker(f) \cap M^i)}.$$

(ii) Sea $a \in A$ y $m \in \mathrm{Ker(f)}$. Entonces $f(ma) = f(m)a = 0$. Por tanto $ma \in \mathrm{Ker(f)}$.

□

EJEMPLO 3.39.
Si $f : M \longrightarrow N$ *es un morfismo de A-módulos diferenciales derechos, entonces* $\mathrm{Ker(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0\}}$ *es un submódulo diferencial de* M*. Además, la inclusión* $i : \mathrm{Ker(f)} \longrightarrow M$ *es un morfismo de submódulos diferenciales.*

DEMOSTRACIÓN.
Ya sabemos que Ker(f) es un submódulo graduado de M. Veamos que se cumple que $d_M(\mathrm{Ker(f)}) \subseteq \mathrm{Ker(f)}$. Sea $m \in \mathrm{Ker(f)}$, probemos que $d_M(m) \in \mathrm{Ker(f)}$.

$$f(d_M(m)) = d_N f(m) = d_N 0 = 0.$$

□

EJEMPLO 3.40.
Si $f : M \longrightarrow N$ *es un morfismo de A-módulos graduados derechos,* $\mathrm{Im(f)}$ *es un A-submódulo graduado de N. Además,* $\mathrm{Im(f)} \cap \mathrm{N^i} = \mathrm{f(M^i)}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN.
Veamos que Im(f) es un A-submódulo graduado, es decir, que se satisfacen las condiciones:

(i) $\mathrm{Im(f)} = \bigoplus_{\mathrm{i}\in\mathbb{Z}} \mathrm{N^i} \cap \mathrm{Im(f)}$.
Al igual que antes, es claro que $N^i \cap \mathrm{Im(f)} \subset \mathrm{Im(f)}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} N^i \cap \mathrm{Im(f)} \subset \mathrm{Im(f)}.$$

Por otro lado, si $y \in \mathrm{Im(f)}$ entonces existe $m \in M$ con $m = \sum m_i$ donde $m_i \in M^i$ y m es tal que $y = f(m)$. Entonces

$$y = f(m) = f\left(\sum m_i\right) = \sum f(m_i)$$

donde notamos que $f(m_i) \in \mathrm{Im(f)} \cap \mathrm{N^i}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\mathrm{Im(f)} = \sum_{\mathrm{i}\in\mathbb{Z}} (\mathrm{N^i} \cap \mathrm{Im(f)}) = \bigoplus_{\mathrm{i}\in\mathbb{Z}} (\mathrm{N^i} \cap \mathrm{Im(f)}).$$

(ii) Es claro que si $y \in \mathrm{Im(f)}$ y $a \in A$ entonces $ya \in \mathrm{Im(f)}$, pues como $y \in \mathrm{Im(f)}$ existe $m \in M$ con $y = f(m)$. Luego,

$$ya = f(m)a = f(ma) \in \mathrm{Im(f)}.$$

Ahora veamos que $\mathrm{Im(f)} \cap \mathrm{M^i} = \mathrm{f(M^i)}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Fijemos $i \in \mathbb{Z}$. Claramente, $f(M^i) \subseteq \mathrm{Im(f)} \cap \mathrm{N^i}$. Sea $m \in M$ con $f(m) \in N^i$. Escribamos $m = \sum_{j\in\mathbb{Z}} m_j$ con $m_j \in M^j$. Entonces, $f(m) = \sum f(m_j) \in \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} N^j$ implica que $f(m) = f(m_i)$.
□

EJEMPLO 3.41.
Si $f : M \longrightarrow N$ *es un morfismo de A-módulos diferenciales derechos,* $\mathrm{Im(f)}$ *es un submódulo diferencial de N.*

DEMOSTRACIÓN.
Ya sabemos que Im(f) es un submódulo graduado de N. Sólo nos falta ver que Im(f) es d_N estable. Sea $y \in \mathrm{Im(f)}$, veamos que $d_N(y) \in \mathrm{Im(f)}$. Como $y \in \mathrm{Im(f)}$ existe m tal que $f(m) = y$, por lo tanto

$$d_N(y) = d_N f(m) = f(d_M(m)) \in \mathrm{Im(f)}.$$

□

A continuación vamos a ver que el cociente de un A-módulo graduado (respectivamente diferencial) derecho por un submódulo graduado (respectivamente diferencial) resulta ser un A-módulo graduado (respectivamente diferencial).

PROPOSICIÓN 3.42.
Sea A una k-álgebra

(i) Sean M un A-módulo graduado derecho y N un A-submódulo graduado de M, entonces M/N es un A-módulo graduado. Además la proyección canónica $\eta : M \longrightarrow M/N$ es un morfismo de módulos graduados.

(ii) Sean M un A-módulo diferencial derecho, N un A-submódulo diferencial de M entonces M/N es un A-módulo diferencial. Además la proyección canónica $\eta : M \longrightarrow M/N$ es un morfismo de módulos diferenciales derechos.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Note que tenemos el siguiente morfismo de espacios vectoriales $\eta : M \longrightarrow M/N$ tal que $\eta(m) = \overline{m}$, la clase lateral $\overline{m} = m + N$. Esta bien definido ya que N es un A-subespacio vectorial de M. Vamos a definir una acción derecha de A en M/N. Lo haremos como sigue: Sea $\psi : M/N \times A \longrightarrow M/N$ tal que $\psi(\eta(m), a) := \eta(ma) =: \eta(m) * a$. Veamos que ψ esta bien definido. Sean $m, m' \in M$ tales que $\eta(m) = \eta(m')$, entonces $m - m' \in N$, luego $(m - m')a \in N$ por tanto $\eta(ma) = \eta(m'a)$. Es claro que ψ es bilineal. Veamos que esta acción le da a M/N una estructura de A-módulo graduado derecho. Veamos primero que:

$$(x * a) * b = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} x * (ab),$$

$\forall a, b \in A$ elementos homogéneos y $x = \eta(m) \in M/N$.
En efecto,

$$(x * a) * b = \eta(ma) * b = \eta([ma]b) = \eta((-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} m(ab))$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} \eta(m(ab)) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} x * (ab).$$

Ahora veamos que $M/N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \eta(M^i)$. Es claro que

$$M/N = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \eta(M^i).$$

Ahora veamos que es suma directa. Suponga que $\eta(m_1) + \cdots + \eta(m_t) = 0$ con $m_i \in M^i$, para toda $i = 1, \ldots, t$. Luego

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_t \in N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left(M^i \cap N\right)$$

por tanto $m_i \in M^i \cap N$ para toda $i = 1, \ldots, t$. Esto implica que $\eta(m_i) = 0$ para toda $i = 1, 2, \ldots, t$. Finalmente, si $a \in A^i$ y $x \in M/N$ tiene grado j, es decir si $x \in (M/N)^j := \eta(M^j)$, tenemos que $x = \eta(m)$ con $m \in M^j$. Luego $xa = \eta(m)a = \eta(ma) \in \eta(M^{i+j})$. Así M/N es un A-módulo graduado derecho.

(ii) Ahora, si M es A-módulo diferencial derecho y N es submódulo diferencial, tenemos que M/N es A-módulo graduado derecho con la notación de (i). Pasemos a definir una transformación lineal $d_{M/N}$. Como $d_M(N) \subseteq N$ tenemos que d_M induce una transformación lineal $d_{M/N}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "d_M"] \arrow[d, "\eta"'] & M \arrow[d, "\eta"] \\ M/N \arrow[r, dotted, "d_{M/N}"'] & M/N. \end{tikzcd}$$

Es claro que $d_{M/N}(\eta(M^i)) = \eta d_M(M^i) \subseteq \eta(M^{i+1})$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Veamos que $d_{M/N}$ satisface

(a) La regla de Leibniz.
Sean $x \in M/N$ y $a \in A$ homogéneos. Digamos $x = \eta(m)$ con $m \in M$.

$$d_{M/N}(x * a) = d_{M/N}(\eta(ma)) = \eta(d_M(ma))$$

$$= \eta[(-1)^{\mathrm{gr(a)}} d_M(m)a + md(a)] = (-1)^{\mathrm{gr(a)}}\eta(d_M(m)a) + \eta(md(a))$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)}} d_{M/N}\eta(m)a + \eta(m)d(a)$$

$$= x * d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} d_{M/N}(x) * a.$$

(b) $d^2_{M/N} = 0$.
Sea $x = \eta(m) \in M/N$, entonces

$$d^2_{M/N}(x) = d_{M/N}d_{M/N}(\eta(m)) = d_{M/N}(\eta(d_M(m)))$$

$$= \eta(d_M(d_M(m))) = 0.$$

Por tanto M/N es un A-módulo diferencial derecho.

□

OBSERVACIONES 3.43.
(i) Si $f : M \longrightarrow N$ *un morfismo de A-módulos graduados derechos, entonces* CoKer(f) *es un A-módulo graduado derecho.*

(ii) Si $f : M \longrightarrow N$ *un morfismo de A-módulos diferenciales derechos, entonces* CoKer(f) *es un Mod-A diferencial derecho.*

DEMOSTRACIÓN.
Haremos la prueba del inciso (ii). Recuerde que CoKer(f) = N/Im(f). Ya vimos para el caso diferencial, ejemplo 3.41, que Im(f) es un submódulo diferencial derecho de N y por 3.42 tenemos que N/Im(f) es un Mod-A diferencial.
Para el caso graduado es análogo.

□

PROPOSICIÓN 3.44.
(i) Si $f : M \longrightarrow N$ *es un morfismo de módulos graduados y la inclusión* $s : \mathrm{Ker(f)} \longrightarrow M$ *, entonces* s *es el núcleo de* f *en* $\mathcal{G}$*.*

(ii) Si $f : M \longrightarrow N$ *es un morfismo de módulos diferenciales y* $s : \mathrm{Ker(f)} \longrightarrow M$ *es la inclusión, entonces* s *es el núcleo de* f *en* $\mathscr{C}$*.*

DEMOSTRACIÓN.
(i) Sea $g : L \longrightarrow M$ un morfismo en $\mathcal{G}$ tal que $fg = 0$.
Viendo a los morfismos como de k-espacios vectoriales tenemos que existe una única transformación lineal $\lambda : L \longrightarrow \mathrm{Ker(f)}$ con la propiedad de que $\lambda s = g$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "g"] & \\
\mathrm{Ker(f)} \arrow[r, hook, "s"'] & M \arrow[r, "f"'] & N.
\end{tikzcd}$$

Veamos que λ es un morfismo de A-módulos graduados derechos:

(a) Sean $a \in A$ y $l \in L$, entonces,
$$\lambda(la) = s\lambda(la) = g(la) = g(l)a = (s\lambda)(l)a = \lambda(l)a.$$

(b) Veamos que $\lambda(L^i) \subset (\mathrm{Ker(f)} \cap \mathrm{M^i})$.
Sea $l^i \in L^i$, así tenemos que $g(l^i) \in M^i$ pero como $fg = 0$, esto nos implica que $g(l^i) \in (\mathrm{Ker(f)} \cap \mathrm{M^i})$. Como l^i es un elemento de L^i, entonces tenemos que $s\lambda(L^i) = g(L^i) \subset (\mathrm{Ker(f)} \cap \mathrm{M^i})$. Luego, $\lambda : L \longrightarrow M$ es un morfismo graduado y s es el núcleo de f en $\mathcal{G}$.

(ii) Ahora supongamos que $g : L \longrightarrow M$ es un morfismo de $\mathscr{C}$. Con la notación de (i), bastará ver que:
$$\lambda d_L = d_{\mathrm{Ker(f)}}\lambda.$$

Observe que en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[d, "d_L"'] & \mathrm{Ker(f)} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Ker(f)}}"] & M \arrow[d, "d_M"] \\
L \arrow[r, "\lambda"'] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathrm{Ker(f)} \arrow[r, "s"'] & M,
\end{tikzcd}$$

$s\lambda d_L = gd_L = d_M g = d_M s\lambda = sd_{\mathrm{Ker(f)}}\lambda$, y como s es monomorfismo, entonces $\lambda d_L = d_{\mathrm{Ker(f)}}\lambda$. Así tenemos que λ es morfismo diferencial, y con esto vemos que s es el núcleo de f en $\mathscr{C}$.

□

PROPOSICIÓN 3.45.
(i) Si f un morfismo graduado, entonces existe su conúcleo en $\mathcal{G}$.

(ii) Si f un morfismo diferencial, entonces existe su conúcleo en $\mathscr{C}$.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Sean M, N A-módulos graduados derechos y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo en $\mathcal{G}$. Consideremos el siguiente diagrama en $\mathcal{G}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "t"] & \mathrm{Coker(f)} \end{tikzcd}$$

donde t es la proyección canónica. Sea $g : N \longrightarrow L$ un morfismo graduado tal que $gf = 0$. Como $gf = 0$ entonces $\mathrm{Ker(t)} = \mathrm{Im(f)} \subset \mathrm{Ker(g)}$. Así existe una única transformación lineal $\lambda : \mathrm{Coker(f)} \longrightarrow L$ tal que $\lambda t = g$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Coker(f)} \arrow[dl, dotted, "\lambda"] \\ & L. & \end{tikzcd}$$

Veamos que λ es morfismo de A-módulos graduados derechos.

(a) Sea $a \in A$ y $z = t(n) \in \mathrm{Coker(f)}$, entonces

$$\lambda(za) = \lambda(t(n)a) = \lambda(t(na)) = g(na) = g(n)a = \lambda(t(n))a = \lambda(z)a.$$

(b) $\lambda t(N^i) \subset L^i$, pues $\lambda t(N^i) = g(N^i) \subseteq L^i$. Luego $\lambda : \mathrm{Coker(f)} \longrightarrow L$ es morfismo de A-módulos graduados derechos y t es el conúcleo de f en $\mathcal{G}$.

(ii) Ahora supongamos que $f : M \longrightarrow L$ es morfismo de A-módulos diferenciales derechos. Con la notación de (i) bastará ver que:

$$d_L \lambda = \lambda d_{\mathrm{Coker(f)}}.$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "t"] \arrow[d, "d_N"'] \arrow[rr, bend left, "g"] & \mathrm{Coker(f)} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Coker(f)}}"] & L \arrow[d, "d_L"] \\ N \arrow[r, "t"'] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathrm{Coker(f)} \arrow[r, "\lambda"'] & L \end{tikzcd}$$

y notemos que

$$\lambda(d_{\mathrm{Coker(f)}}t) = \lambda t(d_N) = (\lambda t)d_N = gd_N = d_L g = d_L(\lambda t) = d_L \lambda t$$

y como t es epimorfismo entonces $d_L\lambda = \lambda d_{\mathrm{Coker(f)}}$. Así, λ es un morfismo diferencial y t es el conúcleo de f en $\mathscr{C}$.

□

PROPOSICIÓN 3.46.

(i) Sea f monomorfismo en $\mathcal{G}$ y g el conúcleo de f en $\mathcal{G}$, entonces f es núcleo de su conúcleo en $\mathcal{G}$.

(ii) Sea f monomorfismo en $\mathscr{C}$ y g el conúcleo de f en $\mathscr{C}$, entonces f es núcleo de su conúcleo en $\mathscr{C}$.

DEMOSTRACIÓN.

Veamos la prueba de (i)

(i) Sea f monomorfismo en $\mathcal{G}$ y g el conúcleo de f en $\mathcal{G}$. Sea $h : E \longrightarrow N$ el núcleo de g en $\mathcal{G}$. Recuerde que f, g y h también son morfismos de la categoría de k-espacios vectoriales, y como es abeliana, tenemos que f es el núcleo de su conúcleo en la categoría de k-espacios vectoriales. Como $gf = 0$, existe $\lambda : E \longrightarrow M$ transformación lineal tal que $f\lambda = h$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, hook, "f"'] & N \arrow[r, "g"'] & Cokerf. \end{tikzcd}$$

Veamos que λ es un mofismo de A-módulos graduados. Si $a \in A$ y $e \in E$ tenemos $f\lambda(ea) = h(ea) = h(e)a = f\lambda(e)a$, luego $\lambda(ea) = \lambda(e)a$. Por otro lado, si $e^i \in E^i$, tenemos que $h(e^i)$ satisface $gh(e^i) = gf\lambda(e^i) = 0$. Luego,

$$f\lambda(e^i) = h(e^i) \in kerg \cap N^i = \mathrm{Im(f) \cap N^i = f(M^i)}.$$

Entonces, existe $m^i \in M^i$ con $f\lambda(e^i) = f(m^i)$. Como f es monomorfismo, $\lambda(e^i) = m^i$. Con ello hemos visto que $\lambda(E^i) \subseteq M^i$. Vamos a probar que λ es un isomorfismo en $\mathcal{G}$, con esto concluiremos que f es el núcleo de su conúcleo en $\mathcal{G}$. Consideremos el siguiente diagrama en $\mathcal{G}$, como $gf = 0$ y h es núcleo de g en $\mathcal{G}$ existe un único morfismo $\zeta : M \longrightarrow E$ en $\mathcal{G}$ tal que $h\zeta = f$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "\zeta"'] \arrow[d, "f"] & \\ E \arrow[r, hook, "h"'] & N \arrow[r, "g"'] & Cokerf. \end{tikzcd}$$

Así tenemos que $f\lambda = h$ y $h\zeta = f$. Luego, $f\lambda\zeta = h\zeta = f$ de donde $\lambda\zeta = 1_M$. Por otro lado, $h\zeta\lambda = f\lambda = h$ de donde $\zeta\lambda = 1_E$. Luego tenemos que λ es un isomorfismo.

(ii) Para el caso diferencial la prueba es análoga a la hecha en (i), sólo tenemos que ver que el morfismo $\lambda : E \longrightarrow M$ que existió antes conmuta con las diferenciales. En efecto, $f\lambda d_E = hd_E = d_N h = d_N f\lambda = fd_M\lambda$ y, en consecuencia, $\lambda d_E = d_M\lambda$.

□

PROPOSICIÓN 3.47.

Si g epimorfismo en $\mathcal{G}$ (respectivamente en $\mathscr{C}$) y f el núcleo de g en $\mathcal{G}$ (respectivamente en $\mathscr{C}$), entonces f es conúcleo de su núcleo en $\mathcal{G}$ (respectivamente en $\mathscr{C}$).

DEMOSTRACIÓN.

Sea $g : N \longrightarrow L$ epimorfismo en $\mathcal{G}$ y f su núcleo en $\mathcal{G}$. Sea $h : N \longrightarrow E$ el conúcleo de f en $\mathcal{G}$. Consideremos el siguiente diagrama en la categoría $\mathcal{G}$. Como $gf = 0$, existe un único morfismo $\zeta : E \longrightarrow L$ tal que $\zeta h = g$

$$\begin{tikzcd}
ker g \arrow[r, hook, "f"] & N \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[dl, dotted, "\zeta"] \\
 & L. &
\end{tikzcd}$$

Recuerde que f, g y h también son morfismos de la categoría de k-espacios vectoriales, que es abeliana, tenemos que g es el conúcleo de su núcleo. Como $gf = 0$, existe una transformación lineal $\lambda : L \longrightarrow E$ tal que $\lambda g = h$.

$$\begin{tikzcd}
ker g \arrow[r, hook, "f"] & N \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "h"'] & L \arrow[dl, dotted, "\lambda"] \\
 & E. &
\end{tikzcd}$$

Vamos a probar que ζ es un isomorfismo de k-espacios vectoriales, y por lema 3.28 inciso (i), lo es como morfismo de A-módulos graduados. Así tenemos que $\lambda g = h$ y $\zeta h = g$. Luego, $\zeta\lambda g = \zeta h = g$ de donde $\zeta\lambda = 1_L$. Por otro lado, $\lambda\zeta h = \lambda g = h$ de donde $\lambda\zeta = 1_E$. Luego tenemos que λ es un isomorfismo de k-espacios vectoriales y por tanto isomorfismo en $\mathcal{G}$. Entonces, g es el conúcleo de su núcleo en $\mathcal{G}$. El caso diferencial es análogo.

□

PROPOSICIÓN 3.48.

Sea f un morfismo graduado (diferencial), entonces f se factoriza como $f = ts$, donde t es un monomorfismo graduado (diferencial) y s es un epimorfismo graduado (diferencial).

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de Mod-A diferencial. Recordemos que $f(M)$

es un submódulo diferencial de N, por tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, bend right, "s"'] & & N \\
& f(M) \arrow[ur, hook, bend right, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $s := \{f \mid: M \longrightarrow f(M)\}$ es epimorfismo, t es la inclusión de $f(M)$ en N y ambos son morfismos de A-módulos diferenciales derechos. El caso graduado es análogo.

□

PROPOSICIÓN 3.49.
$\mathcal{G}$ y $\mathcal{C}$ son categorías abelianas con coproductos.

DEMOSTRACIÓN.
Por las afirmaciones 3.44, 3.45, 3.46, 3.47, 3.48 tenemos probado el resultado.

□

OBSERVACIONES 3.50.
(1) *Si A es una k-álgebra graduada, el A-módulo graduado regular derecho es compacto en $\mathcal{G}$.*

(2) *Si A es una k-álgebra diferencial, el A-módulo diferencial regular derecho es compacto en $\mathscr{C}$.*

DEMOSTRACIÓN.
El mismo argumento de lema **??** vale para ambos incisos.

□

LEMA 3.51.
Tenemos automorfismos:

(i) $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ *tal que:* $T(M) = M[1]$, *para cada* $M \in \mathcal{G}$. $T(f) = f$, *para cada morfismo* f *de* $\mathcal{G}$.

(ii) $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *tal que:* $T(M) = M[1]$, *para cada* $M \in \mathcal{C}$. $T(f) = f$, *para cada morfismo* f *de* $\mathscr{C}$.

DEMOSTRACIÓN.
En efecto, T es un funtor y su inversa está dada por $T^{-1}(M) = M[-1]$ y $T^{-1}(f) = f$.

□

3.2. Productos tensoriales y bimódulos diferenciales.

Recordemos la definición de producto tensorial sobre una k-álgebra A. Para ello necesitaremos la noción de función A-balanceada.

DEFINICIÓN 3.52.
Sean A una k-álgebra, M un A-módulo derecho, N un A-módulo izquierdo y H un k-espacio vectorial. Una función $\tau : M \times N \longrightarrow H$ es A-balanceada si y sólo si para toda $m, m_1, m_2 \in M$; $n, n_1, n_2 \in N$; $\alpha, \beta \in k$ y $a \in A$ se cumple:

(i) $\tau(\alpha m_1 + \beta m_2, n) = \alpha\tau(m_1, n) + \beta\tau(m_2, n)$

(ii) $\tau(m, \alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha\tau(m, n_1) + \beta\tau(m, n_2)$

(iii) $\tau(ma, n) = \tau(m, an)$

Si se cumplen las dos primeras propiedades diremos que τ es bilineal.

DEFINICIÓN 3.53.
Sean A una k-álgebra, M un A-módulo derecho y N un A-módulo izquierdo. El producto tensorial de M y N es una pareja (T, τ) $\tau : M \times N \longrightarrow T$ donde T es espacio vectorial y τ es A-balanceada, tal que para toda función A-balanceada $h : M \times N \longrightarrow L$, existe una única transformación lineal ψ tal que $\psi\tau = h$, es decir

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tau"'] & L \\ T. \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Al producto tensorial T de M_A y ${}_AN$ lo representaremos como $M \otimes_A N$. $M \otimes_A N$ está generado, como k-espacio vectorial, por los elementos $m \otimes n := \tau(m, n)$, con $m \in M$ y $n \in N$.

PROPOSICIÓN 3.54.
Sean A, B dos k-álgebras diferenciales (graduadas), entonces $A \otimes_k B$ es una k-álgebra diferencial (graduada).

DEMOSTRACIÓN.
Tenemos $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ y $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B^i$, luego $A \otimes_k B \cong \bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}}(A^i \otimes_k B^j)$. En adelante, identificaremos $A \otimes_k B$ con $\bigoplus_{i,j}\left(A^i \otimes_k B^j\right)$ y a $A^i \otimes_k B^j$ con su imagen en $\bigoplus_{i,j}\left(A^i \otimes_k B^j\right)$.

Para definir el producto en $A \otimes_k B$ construiremos una función lineal

$$\psi : A \otimes_k B \longrightarrow \mathrm{Hom_k(A \otimes_k B, A \otimes_k B)}.$$

Para ello fijemos $a \in A^s$, $b \in B^t$ y definamos $\widehat{\lambda}^{(i,j)}_{(a,b)} : A^i \times B^j \longrightarrow A \otimes_k B$ como sigue: si $u \in A^i$, $v \in B^j$, hacemos

$$\widehat{\lambda}^{(i,j)}_{(a,b)}(u, v) := (-1)^{\mathrm{gr(u)gr(b)}} au \otimes bv.$$

Claramente $\widehat{\lambda}^{(i,j)}_{(a,b)}$ es bilineal, por lo tanto existe una transformación lineal $\lambda^{(i,j)}_{(a,b)} : A^i \otimes_k B^j \longrightarrow A \otimes_k B$ tal que $\lambda^{(i,j)}_{(a,b)}(u \otimes v) = (-1)^{\mathrm{gr(u)gr(b)}} au \otimes bv$. Por la propiedad universal de la suma directa, existe una transformación lineal

$$\lambda_{(a,b)} : A \otimes_k B \longrightarrow A \otimes_k B,$$

tal que $\lambda_{(a,b)}(u \otimes v) = (-1)^{\mathrm{gr(u)gr(b)}} au \otimes bv$ para u, v homogéneos. Definamos ahora

$$\widehat{\psi}^{(s,t)} : A^s \times B^t \longrightarrow \mathrm{Hom_k(A \otimes_k B, A \otimes_k B)}$$

como sigue: si $a \in A^s$, $b \in B^t$, hacemos $\widehat{\psi}^{(s,t)}(a,b) := \lambda_{(a,b)}$.
Claramente $\widehat{\psi}^{(s,t)}$ es bilineal, en consecuencia existe una transformación lineal

$$\psi^{(s,t)} : A^s \otimes_k B^t \longrightarrow \mathrm{Hom_k(A \otimes_k B, A \otimes_k B)}$$

tal que $\psi^{(s,t)})(a \otimes b) = \lambda_{(a,b)}$, para a, b homogéneos. Por la propiedad universal de la suma directa, existe una única transformación lineal

$$\psi : A \otimes_k B \longrightarrow \mathrm{Hom_k(A \otimes_k B, A \otimes_k B)}$$

tal que para $a \in A^s$ y $b \in B^j$, $\psi(a \otimes b) = \psi^{(s,t)}(a \otimes b) = \lambda_{(a,b)}$. Luego, si $a, u \in A$ y $b, v \in B$ son elementos homogéneos, tenemos

$$\psi(a \otimes b)[u \times v] = (-1)^{\mathrm{gr(u)gr(b)}} au \otimes bv.$$

Ahora definiremos al producto como sigue, sean $z_1, z_2 \in A \otimes_k B$, por lo tanto $z_1 z_2 := \psi(z_1)(z_2)$. Luego, si $a_s \in A^s$, $b_t \in B^t$, $u_i \in A^i$ y $v_j \in B^j$, tenemos la fórmula general del producto en $A \otimes_k B$

$$\left(\sum_{s,t} a_s \otimes b_t\right)\left(\sum_{i,j} u_i \otimes v_j\right) = \sum_{s,t,i,j} (-1)^{\mathrm{gr(u_i)gr(b_t)}} a_s u_i \otimes b_t v_j.$$

Veamos que $A \otimes_k B$ es una k-álgebra. Como ψ es una transformación lineal y $\psi(z_1)$ es lineal para cada z_1, el producto es una función bilineal. Observe que si a, b, u, v son elementos homogéneos, entonces

$$(a \otimes b)(u \otimes v) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(u)}} au \otimes bv.$$

Veamos la asociatividad del producto. La prueba la haremos en los elementos homogéneos. Sean $z_1 = a \otimes b$, $z_2 = u \otimes v$, y $z_3 = e \otimes f$ con a, b, u, v, e, f homogéneos

$$z_1(z_2 z_3) = (a \otimes b)[(-1)^{\mathrm{gr(v)gr(e)}} ue \otimes vf] = (-1)^{\mathrm{gr(v)gr(e)+gr(b)(gr(u)+gr(e))}} aue \otimes bvf$$

y, por otro lado,

$$(z_1 z_2) z_3 = [(-1)^{\mathrm{gr(b)gr(u)}} au \otimes bv](e \otimes f) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(u)+(gr(b)+gr(v))gr(e)}} aue \otimes bvf.$$

Por tanto, $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$. En general, sean

$$z_1 = \sum_{i=1}^{m} e_i, z_2 = \sum_{j=1}^{n} h_j, z_3 = \sum_{k=1}^{l} w_k \in A \otimes_k B$$

con e_i, h_j, w_k elementos de la forma $a \otimes b$ con a y b homogéneos, luego usando la bilinealidad del producto

$$z_1(z_2z_3) = z_1 \left(\sum_{j,k} (h_j w_k) \right) = \sum_{i,j,k} e_i(h_j w_k) = \sum_{i,j,k} (e_i h_j) w_k = (z_1z_2)z_3.$$

Definamos la graduación como sigue $A \otimes_k B = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} (A \otimes_k B)^s$ donde el grado s es $(A \otimes_k B)^s = \bigoplus_{i+j=s} A^i \otimes_k B^j$. Claramente, si z_1 está en $(A \otimes_k B)^i$ y z_2 en $(A \otimes_k B)^j$ tenemos que z_1z_2 está en $(A \otimes_k B)^{i+j}$. Ahora veamos que $1 \cdot z = z$. Sea $1 = 1 \otimes_k 1$ y $z = a \otimes b$, con a y b homogéneos, luego

$$1 \cdot z = (-1)^{gr1gra} a \otimes b = a \otimes b = z.$$

Para cada $s, t \in \mathbb{Z}$, consideremos la función k-balanceada

$$\hat{\delta}_{(s,t)} : A^s \times B^t \longrightarrow A \otimes_k B$$

tal que $\hat{\delta}_{(s,t)}(a, b) = d_A(a) \otimes b + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a \otimes d_B(b)$, y la transformación lineal determinada por ella $\delta_{(s,t)} : A^s \otimes_k B^t \longrightarrow A \otimes_k B$. Ahora, consideremos la transformación lineal $\delta : A \otimes_k B \longrightarrow A \otimes_k B$ definida por la propiedad universal de la suma directa. Luego si $a \in A$ y $b \in B$ son homogéneos, vale la fórmula $\delta(a \otimes b) := d_A(a) \otimes b + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a \otimes d_B(b)$. Veamos que δ es una diferencial.

(i) δ cumple la condición de Leibniz.
Deseamos ver que $\delta(z \cdot w) = \delta(z) \cdot w + (-1)^{\mathrm{gr(z)}} z \cdot \delta(w)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $z = a \otimes b \in A^i \otimes_k B^j$ y $w = u \otimes v \in A^s \otimes_k B^t$. Por un lado, tenemos

$$\delta(z \cdot w) = \delta((-1)^{sj} au \otimes bv) = (-1)^{sj} \delta(au \otimes bv)$$

$$= (-1)^{sj} [d_A(au) \otimes bv + (-1)^{i+s} au \otimes d_B(bv)].$$

Recordemos que

$$d_A(au) = d_A(a)u + (-1)^i a d_A(u)$$

$$d_B(bv) = d_B(b)v + (-1)^j b d_B(v),$$

sustituyendo obtenemos

$$\delta(z \cdot w) = (-1)^{sj} \big[\big(d_A(a)u + (-1)^i a d_A(u)\big) \otimes bv + (-1)^{i+s} au \otimes (d_B(b)v$$

$$+(-1)^j bd_B(v))] = (-1)^{sj} d_A(a)u \otimes bv + (-1)^{sj+i} ad_A(u) \otimes bv$$
$$+(-1)^{sj+i+s} au \otimes d_B(b)v + (-1)^{sj+i+s+j} au \otimes bd_B(v).$$

Por otro lado, $\delta(z) = \delta(a \otimes b) = d_A(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes d_B(b)$. Luego,

$$\delta(z) \cdot w = [d_A(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes d_B(b)] \cdot (u \otimes v)$$
$$= (d_A(a) \otimes b) \cdot (u \otimes v) + (-1)^i (a \otimes d_B(b)) \cdot (u \otimes v)$$
$$= (-1)^{sj} d_A(a)u \otimes bv + (-1)^{i+s(j+1)} au \otimes d_B(b)v.$$

Ahora, analicemos a $\delta(w) = \delta(u \otimes v) = d_A(u) \otimes v + (-1)^s u \otimes d_B(v)$, así,

$$z \cdot d(w) = (a \otimes b) \cdot [d_A(u) \otimes v + (-1)^s u \otimes d_B(v)]$$
$$= (-1)^{(s+1)j} ad_A(u) \otimes bv + (-1)^{s+sj} au \otimes bd_B(v).$$

Multiplicando por $(-1)^{i+j}$ obtenemos

$$(-1)^{(s+1)j+i+j} ad_A(u) \otimes bv + (-1)^{s+sj+i+j} au \otimes bd_B(v).$$

Sumando estos términos

$$\delta(z) \cdot w + (-1)^{grz} z \cdot \delta(w) = (-1)^{sj} d_A(a)u \otimes bv + (-1)^{i+sj+s} au \otimes d_B(b)v$$
$$+(-1)^{sj+i} ad_A(u) \otimes bv + (-1)^{s+sj+i+j} au \otimes bd_B(v).$$

Luego, concluimos que

$$\delta(z \cdot w) = \delta(z) \cdot w + (-1)^{\mathrm{gr(z)}} z \cdot \delta(w).$$

(ii) $\delta^2 = 0$.
Sea $z = a \otimes b$ en $A^i \otimes_k B^j$. Entonces

$$\delta^2(z) = \delta[\delta(a \otimes b)] = \delta[d_A(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes d_B(b)]$$
$$= \delta[d_A(a) \otimes b] + (-1)^i \delta[a \otimes d_B(b)]$$
$$= d_A^2(a) \otimes b + (-1)^{i+1} d_A(a) d_B(b) + (-1)^i d_A(a) d_B(b) + a \otimes d_B^2(b) = 0.$$

□

DEFINICIÓN 3.55.
Un AB bimódulo diferencial (graduado) es un $A \otimes_k B^{op}$*-módulo diferencial (graduado) izquierdo.*

PROPOSICIÓN 3.56.
M es un $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencial izquierdo si y sólo si

- *(a) M es un A-módulo diferencial izquierdo .*
- *(b) M es un B-módulo diferencial derecho.*
- *(c) Las diferenciales de M como A-Mod y como Mod-B coinciden.*
- *(d) Se cumple que $(am)b = (-1)^{gragrb}a(mb)$, para todo $a \in A$, $b \in B$ homogéneos y $m \in M$.*

DEMOSTRACIÓN.
$\boxed{\Rightarrow}$ Suponga que M es un $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencial izquierdo. Veamos que:

(a) M es un A-módulo diferencial izquierdo.
Primero definamos una acción. Sean $a \in A$ y $m \in M$, definamos la acción izquierda como $a \cdot m = (a \otimes 1) \cdot m$. Sean $a_1, a_2 \in A$ y $m_1, m_2 \in M$, veamos que satisfacen las propiedades de A-módulo izquierdo

(M1) $(a_1 + a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m$
Notemos que

$$(a_1 + a_2) \cdot m = ((a_1 + a_2) \otimes 1)m = (a_1 \otimes 1 + a_2 \otimes 1)m$$

$$= (a_1 \otimes 1) \cdot m + (a_2 \otimes 1) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m$$

(M2) $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$
Aplicando la acción

$$a \cdot (m + n) = (a \otimes 1)(m + n)$$

$$= (a \otimes 1)m + (a \otimes 1)n = a \cdot m + a \cdot n$$

(M3) $a \cdot (b \cdot m) = (ab) \cdot m$
Sabemos que

$$a \cdot (b \cdot m) = (a \otimes 1)[(b \otimes 1)m] = [(a \otimes 1)(b \otimes 1)]m$$

$$= (ab \otimes 1)m = (ab) \cdot m$$

(M4) $1 \cdot m = m$

$$1 \cdot m = (1 \otimes 1)m = m.$$

Así concluimos que M es un A-módulo izquierdo. Estamos suponiendo que M es $A\otimes_k B^{op}$-módulo diferencial izquierdo, así que tomemos su diferencial $d : M \longrightarrow M$. Veamos que si $a \in A$ y $m \in M$ son homogéneos se cumple Leibniz $d(am) = d(a) \cdot m + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a \cdot d(m)$. Tenemos,

$$d(a \cdot m) = d((a \otimes 1)m) = d(a \otimes 1)m + (-1)^{\mathrm{gr(a)}}(a \otimes 1)d(m)$$

pero recordemos que

$$d(a \otimes 1) = d(a) \otimes 1 + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a \otimes d(1) = d(a) \otimes 1$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} d(a \cdot m) &= (d(a) \otimes 1)m + (-1)^{\mathrm{gr(a)}}(a \otimes 1)d(m) \\ &= d(a) \cdot m + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a \cdot d(m). \end{aligned}$$

(b) M es un B^{op}-módulo izquierdo y por lo tanto M es un B-módulo derecho. Sean $b^{op} \in B^{op}$ y $m \in M$ y definimos la acción $m \cdot b := (1 \otimes b^{op})m$. Con un cálculo análogo al anterior $(M1.M2, M3, M4)$, es fácil probar que se cumplen las propiedades de B^{op}-módulo izquierdo con esta acción. Tomemos ahora la diferencial $d : M \longrightarrow M$ dada por la estructura de $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencial, la cual debe cumplir

$$d(m \cdot b) = (-1)^{\mathrm{gr(b)}} d(m)b + md(b).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} d(m \cdot b) &= d((1 \otimes b^{op})m) = d(1 \otimes b^{op})m + (-1)^{\mathrm{gr(b)}}(1 \otimes b^{op})d(m) \\ &= (d(1) \otimes b^{op} + (-1)^0(1 \otimes d(b^{op})))m + (-1)^{\mathrm{gr(b)}}(1 \otimes b^{op})d(m) \\ &= (1 \otimes d(b^{op}))m + (-1)^{\mathrm{gr(b)}}(1 \otimes b^{op})d(m)) = md(b) + (-1)^{\mathrm{gr(b)}} d(m)b, \end{aligned}$$

así que d cumple con las propiedades de una diferencial.

(c) Las diferenciales coinciden.
En (a) y (b) hemos tomado la misma diferencial.

(d) $(am)b = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} a(mb)$
Como

$$\begin{aligned} (am)b &= (1 \otimes b^{op})(am) = (1 \otimes b^{op})[(a \otimes 1)m] \\ &= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}(a \otimes b^{op})m \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a(mb) &= a((1 \otimes b^{op})m) = (a \otimes 1)(1 \otimes b^{op})m \\ &= (a \otimes b^{op})m \end{aligned}$$

entonces tenemos que es válida la expresión.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponga que se cumplen $(a), (b), (c)$ y (d). Probemos que M es un $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencial. Debemos dar una acción $\psi : (A \otimes_k B^{op}) \times M \longrightarrow M$, es decir una función bilineal. Equivalentemente, debemos dar una transformación lineal $\varphi : A \otimes_k B^{op} \longrightarrow \mathrm{Hom_k(M,M)}$. Dados $a \in A^s$ y $b \in B$, tenemos la transformoción lineal $\hat{\varphi}^{s,t}_{(a,b)} : M \longrightarrow M$ tal que $\hat{\varphi}^{s,t}_{(a,b)}(m) := a(mb)$. Para $s, t \in \mathbb{Z}$, podemos considerar la función k-balanceada:

$$\hat{\varphi}^{s,t} : A^s \times (B^{op})^t \longrightarrow \mathrm{Hom_k(M,M)}$$

tal que $\hat{\varphi}^{s,t}(a,b) := \hat{\varphi}^{s,t}(a,b)$, la cual determina una transformación lineal

$$\varphi^{s,t} : A^s \otimes_k (B^{op})^t \longrightarrow \mathrm{Hom_k(M,M)}$$

tal que $\varphi^{s,t}(a \otimes b)[m] = a(mb)$. Luego, tenemos una transformación lineal

$$\varphi : A \otimes_k B^{op} \longrightarrow \mathrm{Hom_k(M,M)}$$

y por lo tanto una acción $\psi : (A \otimes_k B^{op}) \times M \longrightarrow M$ tal que $\psi(z,m) = \varphi(z)[m] =: z \cdot m$. Notemos que si $a \in A^i$, $b \in (B^{op})^t$ y $m \in M^j$, entonces

$$(a \otimes b) \cdot m = \varphi(a \otimes b)[m] = a(mb) \in M^{i+t+j}.$$

Hace falta probar que M con esta acción efectivamente es un $A \otimes B^{op}$-módulo diferencial. Primero veamos que es un $A \otimes B^{op}$-módulo izquierdo. Como φ y cada $\varphi(z)$ son lineales, el producto es bilineal. Falta ver que se cumple la asociatividad, es decir $z_1 \cdot (z_2 \cdot m) = (z_1 z_2) \cdot m$ con $z_1, z_2 \in A \otimes B^{op}$ y $m \in M$. Es suficiente probar el resultado para elementos homogéneos de la forma $z_1 = a \otimes b$, y $z_2 = u \otimes v$, con a, b, u, v elementos homogéneos. Por un lado,

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot m) = (a \otimes b)[(u \otimes v)m] = (a \otimes b)(u(mv))$$

$$= a[(u(mv))b] = (-1)^{\mathrm{gr(u)gr(b)}} a[u((mv)b)] = (-1)^{\mathrm{gr(u)gr(b)+gr(v)gr(b)}} a[u(m(vb))]$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(u)gr(b)+gr(v)gr(b)+gr(v)gr(b)}} (au)[m(b * v)]$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(u)gr(b)}} (au \otimes bv) \cdot m = [(a \otimes b)(u \otimes v)] \cdot m = (z_1 z_2) \cdot m.$$

Por el inciso (c) tenemos que las diferenciales coinciden, la llamaremos d.
Sea $a \otimes b \in A \otimes_k B^{op}$ un generador homogéneo, y m en M, queremos que se cumpla la siguiente igualdad

$$d([a \otimes b] \cdot m) = d(a \otimes b)m + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(b)}} (a \otimes b) \cdot d(m).$$

En efecto,

$$d((a \otimes b) \cdot m) = d(a(mb)) = d(a)(mb) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a d(mb)$$

$$= d(a)(mb) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a[(-1)^{\mathrm{gr(b)}} d(m)b + md(b)]$$

$$= d(a)(mb) + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(b)}}a[d(m)b] + (-1)^{\mathrm{gr(a)}}a[md(b)]$$
$$= (d(a)\otimes b)m + (-1)^{\mathrm{gr(a)}}(a\otimes d(b))m + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(b)}}(a\otimes b)d(m)$$
$$= [d(a\otimes b)]m + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(b)}}(a\otimes b)d(m).$$

Así tenemos que M es un $A\otimes_k B^{op}$-módulo diferencial izquierdo.

□

DEFINICIÓN 3.57.
Sean A una k-álgebra graduada, M un A-módulo graduado derecho y N un A-módulo graduado izquierdo. Entonces un producto tensorial graduado de M por N es una pareja (T,τ), donde T es un k-espacio vectorial graduado y

$$\tau : M\times N \longrightarrow T$$

es A-balanceada, es decir

- *(i)* *τ es bilineal;*
- *(ii)* *$\tau(M^i\times N^j)\subseteq T^{i+j}$, para cada $i,j\in\mathbb{Z}$;*
- *(iii)* *$\tau(ma,n) = (-1)^{gragrn}\tau(m,an)$, donde $m\in M$, $a\in A$ y $n\in N$ son homogéneos;*

tal que para cada función A-balanceada $\lambda : M\times N \longrightarrow H$ hay una única transformación lineal graduada ψ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\tau"'] & H \\
T. \arrow[ur, dotted, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 3.58.
Si A es una k-álgebra graduada, M un A-módulo graduado derecho y N un A-módulo graduado izquierdo, entonces existe un producto tensorial graduado (T,τ) de M por N.

DEMOSTRACIÓN.
Tenemos las siguientes graduaciones $M=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}M^i$, $N=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}M^j$ y $M\otimes_k N = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}}(M\otimes_k N)^s$ donde $(M\otimes_k N)^s = \bigoplus_{i+j=s}M^i\otimes_k N^j$. Consideremos el subespacio vectorial L de $M\otimes_k N$ generado por los elementos $\{ma\otimes n - (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(n)}}m\otimes an \mid m\in M, a\in A, n\in N$ homogéneos $\}$. Claramente, $L=\bigoplus_{s\in\mathbb{Z}}L^s$, donde L^s está generado como espacio vectorial por $\{ma\otimes n - (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(n)}}m\otimes an \mid m\in M^i, a\in A^j, n\in N^t$ y $t+j+i=s\}$. Definamos

$$T := \frac{M\otimes_k N}{L} = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}}\frac{(M\otimes_k N)^s + L}{L},$$

que es un k-espacio vectorial graduado. Por definición, la función τ es la composición:

$$M \times N \xrightarrow{\tau_0} M \otimes_k N \xrightarrow{\eta} \frac{M \otimes_k N}{L} = T,$$

donde τ_0 es la función k-balanceada canónica y η es la proyección. Resulta τ A-balanceada porque $\tau_0(ma, n) - (1)^{gragrn}\tau_0(m, an) \in L$. Supongamos que $\lambda : M \times N \longrightarrow H$ es otra función A-balanceada, entonces existen morfismos

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\tau_0"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \otimes_k N \arrow[r, "\eta"] \arrow[dl, dotted, "\overline{\lambda}"'] & T \arrow[dll, "\tilde{\lambda}"] \\
H & &
\end{tikzcd}$$

tales que $\overline{\lambda}\tau_0 = \lambda$ y $\tilde{\lambda}\eta = \overline{\lambda}$, luego $\tilde{\lambda}\tau = \lambda$. Como $\overline{\lambda}$ es único tal que $\overline{\lambda}\tau_0 = \lambda$ y η es epimorfismo, resulta que $\tilde{\lambda}$ es único tal que $\tilde{\lambda}\tau = \lambda$.

□

OBSERVACIÓN 3.59.

Denotaremos al producto tensorial graduado de antes por $M \otimes_A N$. Está generado como k-espacio vectorial por los elementos $m \otimes n := \tau(m, n)$. Entonces, para $m \in M, a \in A, n \in N$ homogéneos vale la fórmula

$$ma \otimes n = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(n)}} m \otimes an.$$

Además, $M \otimes_A N = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} [M \otimes_A N]^s$, donde

$$[M \otimes_A N]^s =< m \otimes n \mid m \in M^i, n \in N^j \ \ y\ i + j = s > .$$

PROPOSICIÓN 3.60.

Sea A un álgebra graduada, entonces:

(i) Si M es un CA-bimódulo graduado y N es un A-módulo graduado izquierdo, $M \otimes_A N$ es un C-módulo graduado izquierdo.

(ii) Si M es un A-módulo graduado derecho y N es un AB-bimódulo graduado, $M \otimes_A N$ es un B-módulo graduado derecho.

(iii) Si M es un CA-bimódulo graduado y N es un AB-bimódulo graduado, $M \otimes_A N$ es un CB-bimódulo graduado.

DEMOSTRACIÓN.

Haremos la prueba de cada uno de los incisos.

(i) Veamos que $M \otimes_A N$ es un C-módulo graduado izquierdo.
Definiremos una acción, $C \times (M \otimes_A N) \longrightarrow M \otimes_A N$. Recuerde que

$$M \otimes_A N = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (M \otimes_A N)^m$$

donde $(M \otimes_A N)^m$es el subespacio de $M \otimes_A N$ generado por $m \otimes n$, con $m \in M^s$,$n \in N^t$ y $s+t=m$. Sea $c \in C$ homogéneo, entonces definimos $M \times N \xrightarrow{\lambda_c} M \otimes_A N$ tal que $\lambda_c(m,n) := \sum(-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n_i)}} cm \otimes n_i$, donde $n = \sum_i n_i$ es la descripción de n en suma de homogéneos. Mostremos que λ_c es A-balanceada:

(a) λ_c es homogénea.
Claramente, $\lambda_c(M^s \times N^t) \subseteq [M \otimes_A N]^{s+t}$.

(b) λ_c es bilineal.
Sean m_1, m_2 en M y n en N^i

$$\lambda_c(m_1+m_2,n) = (-1)^{\mathrm{gr(c)i}} c(m_1+m_2) \otimes n = (-1)^{\mathrm{gr(c)i}} [cm_1+cm_2] \otimes n$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(c)i}} cm_1 \otimes n + (-1)^{\mathrm{gr(c)i}} cm_2 \otimes n = \lambda_c(m_1,n) + \lambda_c(m_2,n).$$

Sean $m \in M$ y $n_1, n_2 \in N$ homogéneos, entonces

$$\lambda_c(m, n_1+n_2) = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n_1)}} cm \otimes n_1 + (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n_2)}} cm \otimes n_2$$

$$= \lambda_c(m,n_1) + \lambda_c(m,n_2).$$

(c) $\lambda_c(mb,n) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(n)}} \lambda_c(m,bn)$, si $b \in B, n \in N$ homogéneos.

$$\lambda_c(mb,n) = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}} c[mb] \otimes n = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)+gr(c)gr(b)}} [cm] b \otimes n$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)+gr(c)gr(b)+gr(b)gr(n)}} cm \otimes bn.$$

Por otro lado, $\lambda_c(m,bn) = (-1)^{\mathrm{gr(c)(gr(b)+gr(n))}} cm \otimes bn$. Luego, $\lambda_c(mb,n) = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}} \lambda_c(m,bn)$.

Así, tenemos la existencia de un morfismo homogéneo φ_c que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\lambda_c"] \arrow[d, "\tau"'] & M \otimes_A N \\
M \otimes_A N. \arrow[ur, dotted, "\varphi_c"'] &
\end{tikzcd}$$

$\varphi_c(m \otimes n) = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}} (cm) \otimes n$, $\forall m \in M$ y $\forall n \in N$ homogéneos. Definamos una acción izquierda. Si $c \in C$ y $z \in M \otimes_A N$, por definición $c * z := \sum_i \varphi_{c_i}(z)$ donde $c = \sum_i c_i$ es la descomposición de c en sumas de elementos homogéneos. Así tenemos que la acción izquierda está bien definida. Ahora comprobemos que efectivamente $M \otimes_A N$ es un C-módulo izquierdo.

(M1) $c * (z_1 + z_2) = c * z_1 + c * z_2$
Sean $c \in C$ homogéneo y z_1, z_2 en $M \otimes_A N$. Entonces,

$$c * (z_1 + z_2) = \varphi_c(z_1 + z_2) = \varphi_c(z_1) + \varphi_c(z_2) = c * z_1 + c * z_2.$$

(M2) $(c_1 + c_2) * z = c_1 * z + c_2 * z$
Sean $c_1, c_2 \in C^p$ y $z = m \otimes n$, con m, n homogéneos. Entonces,

$$(c_1 + c_2) * z = \varphi_{c_1+c_2}(z) = (-1)^{p\mathrm{gr(n)}}(c_1 + c_2)m \otimes n$$

$$= (-1)^{p\mathrm{gr(n)}}[c_1 m\otimes n + c_2 m\otimes n] = (-1)^{p\mathrm{gr(n)}} c_1 m\otimes n + (-1)^{p\mathrm{gr(n)}} c_2 m\otimes n$$

$$= \varphi_{c_1}(z) + \varphi_{c_2}(z) = c_1 * z + c_2 * z.$$

(M3) $c * (c_1 * z) = (cc_1) * z$
Sean $c, c_1 \in C$ homogéneos y $z = m \otimes n$ un generador homogéneo de $M \otimes_A N$. Entonces,

$$c * (c_1 * z) = c * (\varphi_{c_1}(z)) = \varphi_c(\varphi_{c_1}(z))$$

$$= \varphi_c[(-1)^{\mathrm{gr(c_1)gr(n)}} c_1 m \otimes n] = (-1)^{\mathrm{gr(c_1)gr(n)+gr(c)gr(n)}} c(c_1 m) \otimes n$$

$$= (-1)^{\mathrm{(gr(c)+gr(c_1))gr(n)}}(cc_1)m \otimes n = \varphi_{cc_1}(m \otimes n) = (cc_1) * z.$$

(M4) $1 * z = z$
$1 * z = \varphi_1(z) = (m \otimes n)(-1)^{\mathrm{gr(1)gr(n)}} 1mx \otimes n = m \otimes n = z.$

Luego $M \otimes_A N$ es un C-módulo izquierdo. Claramente resulta graduado con la graduación descrita en la observación anterior.

(ii) Veamos ahora que $M \otimes_A N$ es un B-módulo graduado derecho. Ya sabemos que $M \otimes_A N = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} [M \otimes_A N]^s$, donde $[M \otimes_A N]^s$ es el subespacio de $M \otimes_A N$ generado por los elementos $m \otimes n$ con $m \in M^i$ y $n \in N^j$ y $i + j = s$. Debemos dar una acción $\varphi : (M \otimes_A N) \times B \longrightarrow M \otimes_A N$. Para ello consideremos, para $b \in B$, la función A-balanceada $\hat{\varphi}_b : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$ tal que $\hat{\varphi}_b(m, n) = m \otimes nb$, la cual induce una transformación lineal graduada $\varphi_b : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$ tal que $\varphi_b(m \otimes n) = m \otimes nb$. Por definición, hagamos para $t \in M \otimes_A N$ y $b \in B$, $\varphi(t, b) := \varphi_b(t)$. Claramente φ es bilineal. Notemos que si $m \in M, n \in N$ y $b \in B$, entonces $(m \otimes n)b = m \otimes nb$. Luego, si $t = \sum_i m_i \otimes n_i \in [M \otimes_A N]^s$ y $b \in B^r$, entonces $tb = \sum_i (m_i \otimes n_i)b \in [M \otimes_A N]^{s+r}$. Si $b_1, b_2 \in B$ son homogéneos y $t = \sum_i m_i \otimes n_i \in M \otimes_A N$,

$$(tb_1)b_2 = (\sum_i m_i \otimes n_i b_1)b_2 = \sum_i m_i \otimes (n_i b_1)b_2$$

$$= \sum_i m_i \otimes (-1)^{grb_1 grb_2} n_i(b_1 b_2) = (-1)^{grb_1 grb_2} t(b_1 b_2).$$

Entonces $M \otimes_A N$ es un B-módulo graduado derecho.

(iii) $M \otimes_A N$ es un CB-bimódulo graduado.
Como M es un CA-bimódulo graduado y N es un AB-bimódulo graduado, en particular N es un A-módulo graduado izquierdo, por (i) tenemos que $M \otimes_A N$ es un C-módulo graduado derecho. Por otro lado tenemos que M es un A-módulo graduado derecho y N es un AB-bimódulo graduado, entonces por (ii) $M \otimes_A N$ es un B-módulo graduado derecho.

Nos falta verificar la propiedad (d) de la proposición 3.56. Para ello tomemos $c \in C$ y $b \in B$ homogéneos, y $t \in M \otimes_A N$. Mostraremos que

$$(at)b = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} a(tb).$$

Tenemos $t = \sum_{s=1}^{q} m_s \otimes n_s$ con $m_s \in M, n_s \in N$ homogéneos. Entonces,

$$(ct)b = [\sum_s c(m_s \otimes n_s)]b = \sum_s (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n_s)}}(cm_s \otimes n_s)b$$

$$= \sum_s (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n_s)}} cm_s \otimes n_s b.$$

Por otro lado,

$$c(tb) = c\left[\sum_s (m_s \otimes n_s)b\right] = c\left[\sum_s m_s \otimes n_s b\right] = \sum_s c(m_s \otimes n_s b)$$

$$= \sum_s (-1)^{\mathrm{gr(c)(gr(n_s)+gr(b))}} cm_s \otimes n_s b = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(b)}} \sum_s (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n_s)}} cm_s \otimes n_s b.$$

Entoces $(ct)b = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(b)}} c(tb)$.

□

PROPOSICIÓN 3.61.

Sea A un álgebra diferencial. Entonces

- *(i) Si M es un CA-bimódulo diferencial y N es un A-módulo diferencial izquierdo, $M \otimes_A N$ es un C-módulo diferencial izquierdo.*
- *(ii) Si M es un A-módulo diferencial derecho y N es un AB-bimódulo diferencial, $M \otimes_A N$ es un B-módulo diferencial derecho.*
- *(iii) Si M es un CA-bimódulo diferencial y N es un AB-bimódulo diferencial, entonces $M \otimes_A N$ es un CB-bimódulo diferencial.*

DEMOSTRACIÓN.

Veamos la demostración de cada inciso. Iniciaremos con el segundo.

(ii) Por el inciso *(ii)* de la proposición 3.60 sabemos que

$$M \otimes_A N = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} [M \otimes_A N]^s$$

es un B-módulo graduado derecho. Así que sólo nos hace falta definir una diferencial $d = d_{M \otimes_A N} : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$. Para definirla damos la transformación A-bilineal $\hat{d} : M \times N \longrightarrow (M \otimes_A N)[-1]$ tal que si $(m, n) \in M^i \times N^j$, $\hat{d}(m, n) = m \otimes d(n) + (-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(m) \otimes n$. En efecto, si $m \in M, a \in A, n \in N$ son homogéneos:

$$\hat{d}(ma, n) = ma \otimes d(n) + (-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(ma) \otimes n$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(n)+1)}} m \otimes ad(n) + (-1)^{\mathrm{gr(n)}}(md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} d(m)a) \otimes n$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(n)+1)}} m\otimes ad(n) + (-1)^{\mathrm{gr(n)}} md(a)\otimes n + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(n)}} d(m)a\otimes n$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(n)+1)}} m \otimes ad(n) + (-1)^{\mathrm{gr(n)+(gr(a)+1)gr(n)}} m \otimes d(a)n$$
$$+(-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(n)(1+gr(a))}} d(m) \otimes an = (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(n)+1)}} m \otimes ad(n)$$
$$+(-1)^{\mathrm{gr(a)gr(n)}} m \otimes d(a)n + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(n)+gr(a)gr(n)}} d(m) \otimes an$$
$$\hat{d}(m, an) = m \otimes d(an) + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(n)}} d(m) \otimes an$$
$$= m \otimes [d(a)n + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} ad(n)] + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(n)}} d(m) \otimes an$$
$$= m \otimes d(a)n + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} m \otimes ad(n) + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(n)}} d(m) \otimes an.$$

Entonces $\hat{d}(ma, n) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(n)}} \hat{d}(m, an)$.

(a) $d^2(m \otimes n) = 0$

$$d^2(m \otimes n) = d[(-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(m) \otimes n + m \otimes d(n)]$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)}} d[d(m) \otimes n] + d[m \otimes d(n)]$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)}}[(-1)^{\mathrm{gr(n)}} d^2(m) \otimes n + d(m) \otimes d(n)] + (-1)^{\mathrm{gr(n)+1}} d(m)\otimes$$
$$d(n) + m \otimes d^2(n) = (-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(m) \otimes d(n) - (-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(m) \otimes d(n) = 0.$$

(b) d satisface la condición de Leibniz. Veamos primero que se cumple

$$d([m \otimes n] \cdot b) = (-1)^{grb} d(m \otimes n) \cdot b + (m \otimes n) \cdot d(b),$$

para $m \in M, n \in N$ y $b \in B$ homogéneos. Por un lado,

$$d([m \otimes n] \cdot b) = d(m \otimes nb) = (-1)^{\mathrm{gr(n)+gr(b)}} d(m) \otimes nb + m \otimes d(nb)$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)+gr(b)}} d(m) \otimes nb + m \otimes ((-1)^{\mathrm{gr(b)}} d(n)b + nd(b))$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)+gr(b)}} d(m) \otimes nb + (-1)^{\mathrm{gr(b)}} m \otimes d(n)b + m \otimes nd(b)$$

y, por otro,

$$d(m \otimes n) \cdot b = [(-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(m) \otimes n + m \otimes d(n)] \cdot b$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(m) \otimes nb + m \otimes d(n)b.$$

Multiplicando por $(-1)^{\mathrm{gr(b)}}$ la expresión anterior y sumándole $(m \otimes n) \cdot d(b)$, obtenemos

$$(-1)^{\mathrm{gr(b)}}[(-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(m) \otimes nb + m \otimes d(n)b] + (m \otimes n) \cdot d(b)$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(b)+gr(n)}} d(m) \otimes nb + (-1)^{\mathrm{gr(b)}} m \otimes d(n)b + m \otimes nd(b).$$

Así, concluimos que

$$d([m \otimes n] \cdot b) = (-1)^{\mathrm{gr(b)}} d(m \otimes n) \cdot b + (m \otimes n) \cdot d(b).$$

Finalmente, si $t \in M \otimes_A N$, podemos escribir $t = \sum_{j=1}^{q} m_s \otimes n_s$ con $m_s \in M, n_s \in N$ homogéneos y, aplicando lo anterior, obtenemos

$$d(t \cdot b) = td(b) + (-1)^{\mathrm{gr(b)}} d(t)b.$$

(i) Por el inciso (*i*) de la proposición 3.60 tenemos que $M \otimes_A N$ es un C-módulo graduado izquierdo. En la prueba de (*ii*) definimos una transformación lineal $d : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$ tal que

$$d(m \otimes n) = m \otimes d(n) + (-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(m) \otimes n,$$

para $m \in M, n \in N$ homogéneos. Veamos ahora que esta diferencial convierte a $M \otimes_A N$ es un C-Mod diferencial. Sean $c \in C$ y $z = m \otimes n$, con $m \in M, n \in N$ homogéneos. Entonces

$$d(c * z) = d((-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}} cm \otimes n) = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}} d(cm \otimes n)$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}}[(-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(cm) \otimes n + cm \otimes d(n)]$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)+gr(n)}} d(cm) \otimes n + (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}} cm \otimes d(n)$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)+gr(n)}}[d(c)m + (-1)^{\mathrm{gr(c)}} cd(m)] \otimes n + (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}} cm \otimes d(n)$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)+gr(n)}} d(c)m \otimes n + (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)+gr(n)+gr(c)}} cd(m) \otimes n +$$
$$(-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}} cm \otimes d(n) = d(c) * z + (-1)^{\mathrm{gr(c)}}[(-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)+gr(n)}} cd(m) \otimes n +$$
$$(-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)+gr(c)}} cm \otimes d(n)].$$

Pero,

$$c * d(z) = c * [(-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(m) \otimes n + m \otimes d(n)]$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)+gr(c)gr(n)}} cd(m) \otimes n + (-1)^{\mathrm{gr(c)(gr(n)+1)}} cm \otimes d(n).$$

Así que

$$d(c * z) = d(c) * z + (-1)^{\mathrm{gr(c)}} c * d(z).$$

Como antes, de aquí se sigue la formula de Leibniz para el C-módulo izquierdo $M \otimes_A N$ con diferencial d.

(iii) Por (*iii*) de la proposición 3.60 tenemos que $M \otimes_A N$ es un CB-bimódulo graduado. Por el inciso (*ii*) sabemos que $M \otimes_A N$ es un B-módulo diferencial derecho cuya diferencial está definida por

$$d(m \otimes n) = (-1)^{\mathrm{gr(n)}} d(m) \otimes n + m \otimes d(n).$$

Por el inciso (*i*) esta diferencial convierte a $M \otimes_A N$ en un C-Mod diferencial. Veamos la asociatividad. Sean $c \in C$ y $b \in B$. elementos homogéneos y $z = m \otimes n \in M \otimes_A N$ generador con $m \in M$ y $n \in N$ homogéneos, se debe cumplir que $(c * z) \cdot b = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(b)}} c * (z \cdot b)$. Por un lado, tenemos

$$(c * z) \cdot b = [c * (m \otimes n)] \cdot b = [(-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}} cm \otimes n] \cdot b = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(n)}} cm \otimes nb.$$

Por otro $c * (z \cdot b) = c * (m \otimes nb) = (-1)^{\mathrm{gr(c)(gr(n)+gr(b))}} cm \otimes nb$. Entonces, $(c * z)b = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(b)}} c * (z \cdot b)$. Luego por la proposición 3.56, concluimos que $M \otimes_A N$ es un CB-bimódulo diferencial.

□

OBSERVACIÓN 3.62.

Sea A una k-álgebra diferencial, con diferencial d. Entonces, por la observación 3.15 y el lema 3.21 A es A-módulo diferencial izquierdo con el producto de A $a \cdot b = ab$, $a, b \in A$ y es A-módulo diferencial derecho con el siguiente producto $a * b = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} ab$ con $a, b \in A$ homogéneos. Pero puesto que $a \cdot (b * c) = a[(-1)^{\mathrm{gr(b)gr(c)}} bc] = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(c)}} a(bc)$, y

$$(a \cdot b) * c = (-1)^{\mathrm{gr(ab)gr(c)}} abc = (-1)^{\mathrm{(gr(a)+gr(b))gr(c)}} (ab)c$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(c)+gr(b)gr(c)}} (ab)c,$$

tenemos $(a \cdot b) * c = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(c)}} a \cdot (b * c)$. Luego A es un AA-bimódulo diferencial que llamaremos el AA-bimódulo diferencial regular.

PROPOSICIÓN 3.63.

Sean A el AA-bimódulo diferencial regular y ${}_AX_B$ un AB-bimódulo diferencial, entonces hay un isomorfismo de AB-bimódulos $\overline{\mu} : A \otimes_A X \longrightarrow X$ tal que $\overline{\mu}(a \otimes x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} ax$, para $a \in A$ y $x \in X$ homogéneos.

DEMOSTRACIÓN.

La prueba la haremos en cuatro etapas. Primero definiremos un morfismo de $A \otimes_A X$ en X, luego veremos que es diferencial, posteriormente que es de AB-bimódulos, y, por último, que es un isomorfismo.

(1) Vamos a definir el morfismo usando la propiedad universal del producto tensorial. Cada elemento a en A se describe de manera única como una serie de elementos homogéneos (casi todos cero) $a = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i$. Así también, para cada elemento $x \in X$, tomemos $x = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j$. Entonces, definimos la función $A \times X \xrightarrow{\mu} X$ por $\mu(a, x) = \sum_{i,j} (-1)^{\mathrm{gr(a_i)gr(x_j)}} a_i x_j$. Veamos que μ es A-balanceada

  (i) μ es homogénea.
  Claramente $\mu(A^i \times X^j) \subseteq X^{i+j}$.

  (ii) μ es bilineal.
  Por la forma en que definimos a μ, tenemos que es bilineal.

  (iii) $\mu(a \cdot b, x) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(x)}} \mu(a, bx)$.
  Sean $a, b \in A$ y $x \in X$, todos elementos homogéneos. Entonces, teniendo en mente la definición de la estructura de A-módulo diferencial derecho de A, tenemos

$$\mu(a \cdot b, x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} \mu(ab, x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} (-1)^{\mathrm{(gr(a)+gr(b))gr(x)}} (ab)x$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)+(gr(a)+gr(b))gr(x)}} a(bx)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)+(gr(a)+gr(b))gr(x)}} (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(b)+gr(x))}} \mu(a, bx)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(x)}} \mu(a, bx).$$

Por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único $\bar{\mu}$ homogéneo tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & X \\
A \otimes_A X \arrow[ur, dotted, "\bar{\mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

y es tal que, para $a \in A$, $x \in X$ homogéneos, $\bar{\mu}(a \otimes x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} ax$.

Ahora comprobemos que $\bar{\mu}$ es morfismo de módulos diferenciales.

(2) $\bar{\mu}$ conmuta con las diferenciales.
Debemos de probar que $d(\bar{\mu}(a \otimes x)) = \bar{\mu}(d(a \otimes x))$

$$\begin{gathered}
d(\bar{\mu}(a \otimes x)) = d((-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} ax) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} d(ax) \\
= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} [d(a)x + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} ad(x)] \\
= (-1)^{\mathrm{gr(x)}} (-1)^{\mathrm{(gr(a)+1)gr(x)}} d(a)x + (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(x)+1)}} ad(x) \\
= (-1)^{\mathrm{gr(x)}} \bar{\mu}(d(a) \otimes x) + \bar{\mu}(a \otimes d(x)) = \bar{\mu}((-1)^{\mathrm{gr(x)}} d(a) \otimes x + a \otimes d(x)) \\
= \bar{\mu}(d(a \otimes x)).
\end{gathered}$$

(3) $\bar{\mu}$ es un morfismo de AB-bimódulos.

(3.1) $\bar{\mu}$ es un morfismo de B-módulos diferenciales derechos.
Sea $b \in B$, entonces

$$\begin{gathered}
\bar{\mu}(a \otimes xb) = (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(x)+gr(b))}} a(xb) \\
= (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(x)+gr(b))}} (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} (ax)b \\
= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} (ax)b = \bar{\mu}(a \otimes x)b.
\end{gathered}$$

(3.1) $\bar{\mu}$ es un morfismo de A-módulos diferenciales izquierdos.
Sea $b \in A$, entonces:

$$\begin{gathered}
\overline{\mu}(b * (a \otimes x)) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(x)}} \overline{\mu}(ba \otimes x) \\
= (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(x)+(gr(b)+gr(a))gr(x)}} (ba)x \\
= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} (ba)x = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} b(ax) = b\overline{\mu}(a \otimes x).
\end{gathered}$$

(4) $\bar{\mu}$ es isomorfismo.
Vamos a dar el morfismo inverso. Sea $\sigma : X \longrightarrow A \otimes_A X$ tal que $\sigma(x) = 1 \otimes x$. Luego, si $a \in A$ y $x \in X$ son homogéneos,

$$\sigma\bar{\mu}(a \otimes x) = \sigma((-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} ax) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} (1 \otimes ax) = a \otimes x.$$

Por otro lado, $\bar{\mu}\sigma(x) = \bar{\mu}(1 \otimes x) = (-1)^{0\mathrm{gr(x)}}(1x) = x$. Luego, $\bar{\mu}$ es un isomorfismo, por el lema 3.28.

Así hemos probado el resultado.

□

LEMA 3.64.
Si ${}_EM_A, {}_AX_B$ *y* ${}_BY_C$ *son bimódulos diferenciales, entonces hay un isomorfismo de* EC*-bimódulos diferenciales* $\eta : M \otimes_A (X \otimes_B Y) \longrightarrow (M \otimes_A X) \otimes_B Y$ *tal que* $\eta[m \otimes (x \otimes y)] = (m \otimes x) \otimes y$*, para* $m \in M, x \in X$ *y* $y \in Y$*.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea y en Y un elemento homogéneo de grado i fijo. Primero definamos a $M \times X \xrightarrow{\psi_y} M \otimes_A (X \otimes_B Y)[i]$ como $\psi_y(m,x) := m \otimes (x \otimes y)$. Veamos que ψ_y es balanceada

(i) ψ_y es homogénea.
Claramente, $\psi_y(M^s \times X^t) \subseteq [M \otimes_A (X \otimes_B Y)]^{s+t+i}$.

(ii) ψ_y es bilineal.
Sean m_1, m_2 en M, y x en X, entonces,

$$\psi_y(m_1 + m_2, x) = (m_1 + m_2) \otimes (x \otimes y) = m_1 \otimes (x \otimes y) + m_2 \otimes (x \otimes y)$$

$$= \psi_y(m_1, x) + \psi_y(m_2, x).$$

Ahora analicemos a la otra variable. Sean m en M y x_1, x_2 en X, luego,

$$\psi_y(m, x_1 + x_2) = m \otimes ([x_1 + x_2] \otimes y) = m \otimes (x_1 \otimes y + x_2 \otimes y)$$

$$= m \otimes (x_1 \otimes y) + m \otimes (x_2 \otimes y) = \psi_y(m, x_1) + \psi_y(m, x_2).$$

(iii) $\psi_y(ma, x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} \psi_y(m, ax)$.
Sean $a \in A$ y $x \in X$, elementos homogéneos. Entonces,

$$\psi_y(ma, x) = ma \otimes (x \otimes y) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)+gr(a)gr(y)}} m \otimes a(x \otimes y)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} m \otimes ([ax] \otimes y) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} \psi_y(m, ax).$$

Luego, tenemos la existencia del único morfismo $\mu_y : M \otimes_A X \longrightarrow M \otimes_A (X \otimes_B Y)$, tal que $\mu_y \tau = \psi_y$, es decir tal que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \times X \arrow[r, "\psi_y"] \arrow[d, "\tau"'] & M \otimes_A (X \otimes_B Y)[i] \\
M \otimes_A X. \arrow[ur, dotted, "\mu_y"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora daremos una función B-balanceada $\hat{\lambda} : (M \otimes_A X) \times Y \longrightarrow M \otimes_A (X \otimes_B Y)$ dada, para cada $z \in M \otimes_A X$ y $y \in Y$, por $\hat{\lambda}(z, y) := \sum_i \mu_{y_i}(z)$, donde $y = \sum_i y_i$ es la descomposición de y en sus componentes homogéneas.

(i) $\hat{\lambda}$ es homogénea.
Es claro pues $\hat{\lambda}[(M \otimes_A X)^s \times Y^i] \subseteq [M \otimes_A (X \otimes_B Y)]^{s+i}$.

(ii) $\hat{\lambda}$ es bilineal.
Sean m en M, x en X, y_1, y_2 en Y^t, luego

$$\hat{\lambda}(m \otimes x, y_1 + y_2) = m \otimes (x \otimes [y_1 + y_2]) = m \otimes (x \otimes y_1 + x \otimes y_2)$$

$$= m \otimes (x \otimes y_1) + m \otimes (x \otimes y_2) = \hat{\lambda}(m \otimes x, y_1) + \hat{\lambda}(m \otimes x, y_2).$$

Ahora veamos la bilinealidad en la primera variable. Sean $z_1, z_2 \in M \otimes_A X$ y y en Y homogéneo. Entonces,

$$\hat{\lambda}(z_1 + z_2, y) = \mu_y(z_1 + z_2) = \mu_y(z_1) + \mu_y(z_2) = \hat{\lambda}(z_1, y) + \hat{\lambda}(z_2, y).$$

(iii) $\hat{\lambda}((m \otimes x)b, y) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(y)}} \hat{\lambda}(m \otimes x, by)$.
Sean m en M, x en X, b en B y y en Y homogéneos. Luego,

$$\hat{\lambda}((m \otimes x)b, y) = \mu_y((m \otimes x)b) = \mu_y(m \otimes xb) = m \otimes (xb \otimes y)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(y)}} m \otimes (x \otimes by) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(y)}} \hat{\lambda}(m \otimes x, by).$$

Luego tenemos que $\hat{\lambda}$ es B-balanceada, asi que existe un único morfismo ϕ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_A X) \times Y \arrow[r, "\hat{\lambda}"] \arrow[d, "\tau"'] & M \otimes_A (X \otimes_B Y) \\
(M \otimes_A X) \otimes_B Y. \arrow[ur, dotted, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego, $\phi((m \otimes x) \otimes y) = m \otimes (x \otimes y)$. Note que ϕ es un morfismo homogéneo por construcción. Claramente,

$$\phi([(m \otimes x) \otimes y]b) = \phi((m \otimes x) \otimes yb) = m \otimes (x \otimes yb) = m \otimes (x \otimes y)b$$

$$= \phi((m \otimes x) \otimes y)b.$$

Ahora daremos el morfismo inverso. Sea m en M un elemento homogéneo de grado i fijo. Definamos $\alpha_m : X \times Y \longrightarrow (M \otimes_A X) \otimes_B Y[i]$ como $\alpha_m(x, y) := (m \otimes x) \otimes y$, y veamos que

(i) α_m es homogéneo.
Claramente, $\alpha_M(X^s \times Y^t) \subseteq [(M \otimes_A X) \otimes_B Y]^{s+t+i}$.

(ii) α_m es bilineal.
Considere los elementos homogéneos x_1, x_2 en X, y y en Y. Luego,

$$\alpha_m(x_1 + x_2, y) = (m \otimes [x_1 + x_2]) \otimes y = (m \otimes x_1 + m \otimes x_2) \otimes y$$

$$= (m \otimes x_1) \otimes y + (m \otimes x_2) \otimes y = \alpha_m(x_1, y) + \alpha_m(x_2, y).$$

Ahora considere los elementos homogéneos x en X, y_1, y_2 en Y, entonces

$$\alpha_m(x, y_1 + y_2) = (m \otimes x) \otimes (y_1 + y_2) = (m \otimes x) \otimes y_1 + (m \otimes x) \otimes y_2$$

$$= \alpha_m(x, y_1) + \alpha_m(x, y_2).$$

(iii) $\alpha_m(xb, y) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(y)}}\alpha_m(x, by)$
Sean $b \in B$, $x \in X$, y $y \in Y$ elementos homogéneos. Entonces,

$$\alpha_m(xb, y) = (m \otimes [xb]) \otimes y = (m \otimes x)b \otimes y$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(y)}}(m \otimes x) \otimes [by] = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(y)}}\alpha_m(x, by).$$

Luego, por la propiedad universal del producto tensorial, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(X \times Y) \arrow[r, "\alpha_m"] \arrow[d, "\tau"'] & (M \otimes_A X) \otimes_B Y \\
X \otimes_B Y \arrow[ur, dotted, "\gamma_m"'] &
\end{tikzcd}$$

donde γ_m es homogénea y satisface $\gamma_m(x \otimes y) := (m \otimes x) \otimes y$. Ahora sea $\widehat{\eta} : M \times (X \otimes_B Y) \longrightarrow (M \otimes_A X) \otimes_B Y$ dada para $m \in M$ y $z \in X \otimes_B Y$, por $\hat{\eta}(m, z) := \sum_i \gamma_{m_i}(z)$, donde $m = \sum_i m_i$ es la descomposcisión de m en sus componentes homogéneos. Veamos que $\widehat{\eta}$ es A-balanceada

(i) $\widehat{\eta}$ es homogénea.
Es claro que, $\hat{\eta}[M^s \times [X \otimes_B Y]^t] \subseteq [(M \otimes_A X) \otimes_B Y]^{s+t}$.

(ii) $\widehat{\eta}$ es bilineal.
Sean $m_1, m_2 \in M^t$, $x \in X$ y $y \in Y$. Entonces,

$$\widehat{\eta}(m_1 + m_2, x \otimes y) = \gamma_{m_1+m_2}(x \otimes y) = ([m_1 + m_2] \otimes x) \otimes y$$

$$= (m_1 \otimes x + m_2 \otimes x) \otimes y = (m_1 \otimes x) \otimes y + (m_2 \otimes x) \otimes y$$

$$= \widehat{\eta}(m_1, x \otimes y) + \widehat{\eta}(m_2, x \otimes y).$$

Ahora analicemos la segunda variable. Sean m en M^t y $z_1, z_2 \in X \otimes_B Y$. Luego,

$$\widehat{\eta}(m, z_1 + z_2) = \gamma_m(m, z_1 + z) = \gamma_m(z_1) + \gamma_m(z_2) = \widehat{\eta}(m, z_1) + \widehat{\eta}(m, z_2).$$

(iii) $\widehat{\eta}(ma, x \otimes y) = (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(x)+gr(y))}}\widehat{\eta}(m, a(x \otimes y))$.
Sean $m \in M$, $a \in A$, $x \in X$ y $y \in Y$ homogéneos, entonces

$$\widehat{\eta}(ma, x \otimes y) = (ma \otimes x) \otimes y = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}}(m \otimes ax) \otimes y.$$

Por otro lado,

$$\widehat{\eta}(m, a(x \otimes y)) = \widehat{\eta}(m, (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(y)}} ax \otimes y) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(y)}}(m \otimes ax) \otimes y.$$

Así que

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}(ma, x \otimes y) &= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)+gr(a)gr(y)}}(-1)^{\mathrm{gr(a)gr(y)}}(m \otimes ax) \otimes y \\ &= (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(x)+gr(y))}}\widehat{\eta}(m, a(x \otimes y)). \end{aligned}$$

Por la propiedad universal del producto tensorial, tenemos la existencia del único morfismo η tal que $\eta\tau = \widehat{\eta}$

$$\begin{tikzcd} M \times (X \otimes_B Y) \arrow[r, "\hat{\eta}"] \arrow[d, "\tau"'] & (M \otimes_A X) \otimes_B Y \\ M \otimes_A (X \otimes_B Y) \arrow[ur, dotted, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\eta(m \otimes (x \otimes y)) = (m \otimes x) \otimes y$. Ahora veamos que ϕ y η son inversos el uno del otro:

$$\eta\phi((m \otimes x) \otimes y) = \eta(m \otimes (x \otimes y)) = (m \otimes x) \otimes y$$

y, por otro lado,

$$\phi\eta(m \otimes (x \otimes y)) = \phi((m \otimes x) \otimes y) = m \otimes (x \otimes y).$$

Así que efectivamente uno es el inverso del otro.

Veamos que η conmuta con las diferenciales: Sean $x \in X$, y $y \in Y$ homogéneos. Entonces,

$$\begin{gathered} \eta d[m \otimes (x \otimes y)] = \eta[(-1)^{\mathrm{gr(x\otimes y)}} d(m) \otimes (x \otimes y) + m \otimes d(x \otimes y)] \\ = \eta[(-1)^{\mathrm{gr(x)+gr(y)}} d(m) \otimes (x \otimes y)] + \eta(m \otimes [(-1)^{\mathrm{gr(y)}} d(x) \otimes y + x \otimes d(y)]) \\ = (-1)^{\mathrm{gr(x)+gr(y)}}(d(m) \otimes x) \otimes y + (-1)^{\mathrm{gr(y)}}(m \otimes d(x)) \otimes y + (m \otimes x) \otimes d(y) \\ = (-1)^{\mathrm{gr(y)}}[(-1)^{\mathrm{gr(x)}} d(m) \otimes x + m \otimes d(x)] \otimes y + (m \otimes x) \otimes d(y) \\ = (-1)^{\mathrm{gr(y)}} d(m \otimes x) \otimes y + (m \otimes x) \otimes d(y) = d[(m \otimes x) \otimes y] \\ = d\eta[m \otimes (x \otimes y)]. \end{gathered}$$

η es morfismo de C-módulos derechos pues, para $c \in C$, tenemos:

$$\begin{gathered} \eta([m \otimes (x \otimes y)]c) = \eta[m \otimes (x \otimes y)c] = \eta[m \otimes (x \otimes yc)] = (m \otimes x) \otimes yc \\ = [(m \otimes x) \otimes y]c = \eta([m \otimes (x \otimes y)])c. \end{gathered}$$

Finalmente, η es morfismo de E-módulos izquierdos pues, para $e \in E$, tenemos:

$$\begin{gathered} \eta(e[m \otimes (x \otimes y)]) = (-1)^{\mathrm{gr(e)gr(x\otimes y)}}\eta(em \otimes (x \otimes y)) \\ = (-1)^{\mathrm{gr(e)(gr(x)+gr(y))}}(em \otimes x) \otimes y = (-1)^{\mathrm{gr(e)(gr(x)+gr(y))+gr(e)gr(x)}} e(m \otimes x) \otimes y \\ = (-1)^{\mathrm{gr(e)gr(y)+gr(e)gr(y))}} e[(m \otimes x) \otimes y] = e\eta[m \otimes (x \otimes y)]. \end{gathered}$$

□

LEMA 3.65.

Si $f : M \longrightarrow M'$ *es un morfismos de* A*-módulos diferenciales derechos y* $g : N \longrightarrow N'$ *es un morfismo de* AB*-bimódulos diferenciales, entonces hay un único morfismo* $f \otimes g : M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N'$ *de* B*-módulos diferenciales derechos tal que* $(f \otimes g)[m \otimes n] = f(m) \otimes g(n)$ *para cada* $m \in M$ *y* $n \in N$

DEMOSTRACIÓN.

La función $\widehat{f \otimes g} : M \times N \longrightarrow M' \otimes_A N'$ definida como $\widehat{f \otimes g}[m, n] = f(m) \otimes g(n)$ es A-balanceada

$$\widehat{f \otimes g}[ma, n] = f(ma) \otimes g(n) = f(m)a \otimes g(n) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(g(n))}} f(m) \otimes ag(n)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(n)}} f(m) \otimes g(an) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(n)}} \widehat{f \otimes g}[m, an].$$

Entonces, hay un morfismo homogéneo $g \otimes f$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\widehat{f\otimes g}"] \arrow[d, "\tau"'] & M' \otimes_A N' \\
M \otimes_A N \arrow[ur, dotted, "f\otimes g"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que $g \otimes f$ conmuta con la diferencial. Como $g : N \longrightarrow N'$ es un morfismo de AB-bimódulos tenemos que $hd_1 = d_2h$, donde d_1 y d_2 son las diferenciales, de N y N' respectivamente. Ahora veamos que $\delta_2(1 \otimes h) = (1 \otimes h)\delta_1$, donde δ_1 y δ_2 son las respectivas diferenciales de $M \otimes_A N$ y $M' \otimes_A N'$. Sean $m \in M$ y $n \in N$

$$(f \otimes g)\delta_1(m \otimes n) = (f \otimes g)[(-1)^{\mathrm{gr(n)}} d_M(m) \otimes n + m \otimes d_1(n)]$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)}} (f \otimes g)(d_M(m) \otimes n) + (f \otimes g)(m \otimes d_1(n))$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)}} f d_M(m) \otimes g(n) + f(m) \otimes g(d_1(n))$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)}} d_M f(m) \otimes g(n) + f(m) \otimes d_2(g(n)) = \delta_2((f \otimes g)(m \otimes n)).$$

□

3.3. La categoría exacta ($\mathscr{C}$,$\mathscr{E}$) es de Frobenius.

Dada una k-álgebra diferencial A, trabajaremos con la categoría $\mathscr{C}$ de los Mod-A diferenciales y veremos que tiene estructura de categoría exacta, para ello necesitaremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.66.
Sean $\mathcal{G}$ la categoráa de los A-módulos graduados derechos, $\mathscr{C}$ la categoría de los A-módulos diferenciales derechos. Denotaremos por $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{G}$ al funtor olvidadizo, que envia cada A-módulo diferencial derecho en su A-módulo graduado subyacente. Sea $\mathscr{E}$ la clase de las sucesiones exactas en $\mathscr{C}$, tales que al aplicarles el funtor olvidadizo F, las sucesiones, vistas ahora en $\mathcal{G}$, se dividen.

Notemos que la clase $\mathscr{E}$ es cerrada bajo isomorfismos.

PROPOSICIÓN 3.67.
Sea $M \xrightarrow{f} N$ un morfismo en $\mathscr{C}$, entonces f es una inflación si y sólo si $F(f)$ es sección en $\mathcal{G}$.

DEMOSTRACIÓN.
$\boxed{\Rightarrow}$ Como f es inflación en $\mathscr{C}$, existe $g : N \longrightarrow L$ en $\mathscr{C}$ tal que la sucesión $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ está en $\mathscr{E}$. Aplicándole el funtor F obtenemos la sucesión $0 \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L) \longrightarrow 0$ la cual se divide en $\mathcal{G}$, entonces $F(f)$ es una sección.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $F(f)$ es una sección, entonces f es monomorfismo en $\mathscr{C}$, y como $\mathscr{C}$ es abeliana tenemos que hay una sucesión exacta en $\mathscr{C}$ $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} \text{Coker(f)}$. Aplicándole el funtor F obtenemos la siguiente sucesión $0 \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(\text{Coker(f)}) \longrightarrow 0$ con $F(f)$ sección, entonces la sucesión se divide en $\mathcal{G}$, luego $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} \text{Coker(f)}$ está en $\mathscr{E}$, es decir f es inflación.

□

PROPOSICIÓN 3.68.
Sea $N \xrightarrow{g} L$ un morfismo en $\mathscr{C}$, entonces g es una deflación si y sólo si $F(g)$ es retracción en $\mathcal{G}$.

DEMOSTRACIÓN.
$\boxed{\Rightarrow}$ Como g es deflación, existe $f : M \longrightarrow N$ en $\mathscr{C}$ tal que $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ está en $\mathscr{E}$. Aplicándole el funtor F obtenemos la siguiente sucesión $0 \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L) \longrightarrow 0$ la cual se divide en $\mathcal{G}$, entonces $F(g)$ es una retracción.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $F(g)$ es una retracción en $\mathcal{G}$, entonces g es epimorfismo

en $\mathscr{C}$. Como $\mathscr{C}$ es abeliana, existe una sucesión exacta en $\mathscr{C}$ $\mathrm{Ker(g)} \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$. Aplicándole el funtor F obtenemos la siguiente sucesión $0 \longrightarrow F(\mathrm{Ker(g)}) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L) \longrightarrow 0$ con $F(g)$ retracción, entonces la sucesión se divide en $\mathcal{G}$. Luego, $\mathrm{Ker(g)} \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ está en $\mathscr{E}$, es decir g es deflación.

□

PROPOSICIÓN 3.69.
$(\mathscr{C},\mathscr{E})$ es una categoría exacta.

DEMOSTRACIÓN.

(i) $1_M : M \longrightarrow M$ es inflación y deflación.
Note que al aplicarle el funtor F a 1_M tenemos que $1_{F(M)}$ es sección y retracción en $\mathcal{G}$, entonces 1_M es al mismo tiempo inflación y deflación en $\mathscr{C}$.

(ii) a) Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión en $\mathscr{E}$, y $h : X \longrightarrow L$ un morfismo de Mod-A diferenciales. Como la categoría es abeliana entonces tenemos que existe el pull-back, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r, "g"'] & L \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

aplicando el funtor F obtenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(M) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, equal] & F(E) \arrow[r, "F(\beta)"] \arrow[d, "F(\lambda)"'] & F(X) \arrow[r] \arrow[d, "F(h)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(M) \arrow[r, "F(f)"'] & F(N) \arrow[r, "F(g)"'] & F(L) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

y como la sucesión de abajo se divide en $\mathcal{G}$, y la de arriba es equivalente al pull-back, entonces la de arriba también se divide. Así tenemos que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} X \longrightarrow 0$ está en $\mathscr{E}$.

b) Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una $\mathscr{E}$-sucesión y $h : M \longrightarrow X$ un morfismo de A-módulos diferenciales. Como la categoría en la que estamos trabajando es abeliana, existe el push-out, es decir tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\lambda"'] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"'] & E \arrow[r, "\beta"'] & L \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Aplicándole el funtor olvidadizo obtenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "F(h)"'] & F(N) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "F(\lambda)"'] & F(L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(X) \arrow[r, "F(\alpha)"'] & F(E) \arrow[r, "F(\beta)"'] & F(L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

como la sucesión de arriba se divide en $\mathcal{G}$, y la sucesión de abajo es equivalente al push-out entonces la de abajo también se divide en $\mathcal{G}$.

Concluimos que $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} L \longrightarrow 0$] está en $\mathscr{E}$.

(iii) a) Si f y g son inflaciones componibles, entonces gf es inflación.
Como f y g son inflaciones, $F(f)$ y $F(g)$ son secciones, entonces $F(gf) = F(f)F(g)$ es una sección, entonces gf es inflación.

b) Si f y g son deflaciones componibles, entonces gf es deflación.
Como f y g son deflaciones,, luego $F(f)$ y $F(g)$ son retracciones, así $F(g)F(f) = F(gf)$ es una retracción, y esto nos dice que gf es una deflación.

(iv) a) Si gf es inflación, entonces f es inflación.
Por hipótesis gf es inflación, entonces $F(gf)$ es una sección en $\mathcal{G}$, así tenemos que $F(f)$ es sección en $\mathcal{G}$, luego f es inflación.

b) Si gf es deflación, entonces g es deflación.
Tenemos que $F(gf)$ es retracción en $\mathcal{G}$, dado que es deflación en $\mathscr{C}$, así que $F(g)$ es una retracción, y esto implica que g es una deflación.

□

DEFINICIÓN 3.70.

Sea M un A-módulo graduado derecho, luego $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$. Consideremos el k-espacio vectorial $J(M) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} J(M)^i$, donde $J(M)^i = M^i \oplus M^{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

A continuación le daremos a $J(M)$ estructura de Mod-A diferencial. Para ello primero veremos que $J(M)$ es Mod-A graduado.

PROPOSICIÓN 3.71.
$J(M)$ es un Mod-A graduado.

DEMOSTRACIÓN.
Primero tendremos que definir una acción. Sean $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in J(M)^i = M^i \oplus M^{i+1}$ y $a \in A^p$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a := \begin{pmatrix} ma \\ md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na \end{pmatrix}.$$

Veamos que está bien definida. Notemos que ma está en M^{i+p}, y que tanto $md(a)$, como na están en M^{i+p+1}, entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} ma \\ md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na \end{pmatrix} \in J(M)^{i+p}.$$

Ahora probemos la asociatividad. Es decir, tenemos que ver que si a y b son homogéneos en A tenemos que

$$\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a\right] * b = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * (ab).$$

En efecto,

$$\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a\right] * b = \left[\begin{pmatrix} ma \\ md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na \end{pmatrix}\right] * b$$

$$= \begin{pmatrix} (ma)b \\ (ma)d(b) + (-1)^{\mathrm{gr(b)}}[md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na]b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ma)b \\ (ma)d(b) + (-1)^{\mathrm{gr(b)}}(md(a))b + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(b)}}(na)b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} m(ab) \\ (-1)^{\mathrm{gr(a)(gr(b)+1)}} m(ad(b)) + (-1)^{\mathrm{gr(b)+(gr(a)+1)gr(b)}} m(d(a)b) + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(b)+gr(a)gr(b)}} n(ab) \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} \begin{pmatrix} m(ab) \\ (-1)^{\mathrm{gr(a)}} m(ad(b)) + m(d(a)b) + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(b)}} n(ab) \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} \begin{pmatrix} m(ab) \\ m[d(a)b + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} ad(b)] + (-1)^{\mathrm{gr(ab)}} n(ab) \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} \begin{pmatrix} m(ab) \\ md(ab) + (-1)^{\mathrm{gr(ab)}} n(ab) \end{pmatrix} = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * (ab).$$

Entonces $J(M)$ es un Mod-A graduado.

□

PROPOSICIÓN 3.72.
$J(M)$ es un A-módulo diferencial derecho.

DEMOSTRACIÓN.
Definamos a $d_{J(M)} : J(M)^i \longrightarrow J(M)^{i+1}$ y veamos que es una diferencial. Sea $d_{J(M)}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$, notese que $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$ está en $J(M)^{i+1}$, entonces tenemos que $d_{J(M)}$ está bien definida y es una transformación lineal.
Ahora veamos que $d^2_{J(M)} = 0$.

$$d^2_{J(M)}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = d_{J(M)}\left[d_{J(M)}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right] = d_{J(M)}\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sólo falta probar que satisface la condición de Leibniz, es decir

$$d_{J(M)}\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a\right] = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} d_{J(M)}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a.$$

Por un lado,

$$d_{J(M)}\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a\right] = d_{J(M)}\begin{pmatrix} ma \\ md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro, lado tenemos que

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * d(a) = \begin{pmatrix} md(a) \\ md^2(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}+1} nd(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} md(a) \\ (-1)^{\mathrm{gr(a)}+1} nd(a) \end{pmatrix}$$

y

$$d_{J(M)}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} * a = \begin{pmatrix} na \\ nd(a) \end{pmatrix}.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} d_{J(M)}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a = \begin{pmatrix} md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, así,

$$d_{J(M)}\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a\right] = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} d_{J(M)}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a.$$

□

Vamos a demostrar que $J(M)$ es $\mathscr{E}$-inyectivo en $(\mathscr{C},\mathscr{E})$, para lograr esto veremos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.73.
$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{L},\mathrm{J(M)}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{L},\mathrm{M})$.

DEMOSTRACIÓN.
Primero analicemos como son los morfismos $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{L},\mathrm{J(M)})$. Consideremos el siguiente morfismo en $\mathscr{C}$, $\varphi : L \longrightarrow J(M)$. Tenemos que $\forall i \in \mathbb{Z}$, φ se restringe como sigue $\varphi^i : L^i \longrightarrow M^i \oplus M^{i+1}$ donde $\varphi^i = \begin{pmatrix} u^i \\ v^i \end{pmatrix}$ y $u^i : L^i \longrightarrow M^i$, $v^i : L^i \longrightarrow M^{i+1}$. Nótese que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
L^i \arrow[r, "\begin{pmatrix} u^i \\ v^i \end{pmatrix}"] \arrow[d, "d_L"'] & M^i \oplus M^{i+1} \arrow[d, "d_{J(M)}"] \\
L^{i+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} u^{i+1} \\ v^{i+1} \end{pmatrix}"'] & M^{i+1} \oplus M^{i+2}.
\end{tikzcd}$$

Entonces, $\forall l \in L^i$,

$$d_{J(M)}\left[\begin{pmatrix} u^i \\ v^i \end{pmatrix}(l)\right] = \begin{pmatrix} u^{i+1} \\ v^{i+1} \end{pmatrix} d_L(l).$$

Pero

$$d_{J(M)}\left[\begin{pmatrix} u^i \\ v^i \end{pmatrix}(l)\right] = d_{J(M)}\begin{pmatrix} u^i(l) \\ v^i(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^i(l) \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, así, tenemos la siguiente igualdad $\begin{pmatrix} v^i(l) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{i+1}d_L(l) \\ v^{i+1}d_L(l) \end{pmatrix}$. Entonces vemos que $\varphi^i = \begin{pmatrix} u^i \\ u^{i+1}d_L \end{pmatrix}$ está determinada por la familia $\{u^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Sea $u : L \longrightarrow M$ la transformación lineal determinada por $u(l) = u^i(l)$, para cada $l \in L^i$. Veamos que $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{L},\mathrm{M})$. Debemos verificar, para $l \in L$ y $a \in A$, que $u(la) = u(l)a$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $l \in L^i$ y $a \in A^p$. Así tenemos que

$$\begin{pmatrix} u^{i+p}(la) \\ u^{i+p+1}[(-1)^{gra}d_L(l)a + ld(a)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{i+p}(la) \\ u^{i+p+1}d_L(la) \end{pmatrix} = \varphi(la)$$

$$\varphi(l) * a = \begin{pmatrix} u^i(l) \\ u^{i+1}d_L(l) \end{pmatrix} * a = \begin{pmatrix} u^i(l)a \\ u^i(l)d(a) + (-1)^p u^{i+1}(d_L(l))a \end{pmatrix}.$$

Entonces, tenemos que $u(la) = u^{i+p}(la) = u^i(l)a = u(l)a$. Sea $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{L},\mathrm{J(M)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\ (L, M)$ la función que asocia a φ la u que construimos antes. Es claro que ψ es una transformación lineal. ψ es inyectiva, pues si $u = 0$, como vimos antes,

$$\varphi^i = \begin{pmatrix} u^i \\ u^{i+1}d_L \end{pmatrix} = 0.$$

Luego $\varphi = 0$. Veamos ahora que ψ es suprayectiva. Sea $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{L},\mathrm{M})$ arbitraria y definamos la transformación lineal $\varphi : L \longrightarrow J(M)$ mediante sus restricciones $\varphi^i := \begin{pmatrix} u^i \\ u^{i+1}d_L \end{pmatrix} : L^i \longrightarrow J(M)^i = M^i \oplus M^{i+1}$. Con el argumento inverso al utilizado para ver ψ preserva la acción derecha de A también lo hace u. Veamos que si u preserva la acción derecha de A también lo hace φ. Como, para $l \in L^{i-1}$,

$$\varphi d_L(l) = \begin{pmatrix} u^i \\ u^{i+1}d_L \end{pmatrix} d_L(l) = \begin{pmatrix} u^i d_L(l) \\ u^{i+1}d_L d_L(l) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u^i d_L(l) \\ 0 \end{pmatrix} = d_{J(M)}\left[\begin{pmatrix} u^{i-1}(l) \\ u^i d_L(l) \end{pmatrix}\right] = d_{J(M)}\varphi(l),$$

φ es un morfismo de Mod-A diferencial, tal que $\psi(\varphi) = u$. Entonces φ es de Mod-A graduados. Así hemos probado que ψ es un isomorfismo.

□

PROPOSICIÓN 3.74.
ψ es natural en la primera variable.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $f : L \longrightarrow N$ un morfismo diferencial de Mod-A. Queremos ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{L},\mathrm{J(M)}) \arrow[r, "\psi"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{L},\mathrm{M}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N},\mathrm{J(M)}) \arrow[r, "\psi"'] \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{f},1)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{N},\mathrm{M}). \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{f},1)"']
\end{tikzcd}$$

Tenemos que dados $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N},\mathrm{J(M)})$ y $n \in N^i$, $\varphi(n) := \begin{pmatrix} u^i(n) \\ u^{i+1}d_N(n) \end{pmatrix}$.
Luego, $\psi(\varphi) = u$ y $\psi(\varphi f)(n) = \psi\begin{pmatrix} u^i(f^i(n)) \\ u^{i+1}d_N(f^i(n)) \end{pmatrix}$.
Por otro lado, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{f},1)\psi(\varphi)(\mathrm{n}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{f},1)(\mathrm{u})(\mathrm{n}) = \mathrm{u}(\mathrm{f}(\mathrm{n}))$. Entonces tenemos que el diagrama es conmutativo, esto prueba que ψ es natural en la primera variable.

□

Ahora vamos a probar que $J(M)$ es un módulo diferencial $\mathscr{E}$-inyectivo.

PROPOSICIÓN 3.75.
$J(M)$ es un módulo $\mathscr{E}$-inyectivo de la categoría exacta $(\mathscr{C},\mathscr{E})$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3$ una $\mathscr{E}$-sucesión. Entonces, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{L}_3, \mathrm{J(M)}) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{L}_2, \mathrm{J(M)}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{L}_1, \mathrm{J(M)}),$$

la cual es equivalente, por las proposiciones 3.73 y 3.74, a la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{L}_3, \mathrm{M}) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{L}_2, \mathrm{M}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{L}_1, \mathrm{M}).$$

Pero como $L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3$ se divide en $\mathcal{G}$, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{L}_3, \mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{L}_2, \mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{L}_1, \mathrm{M}) \longrightarrow 0$$

se divide, luego es exacta y, como es equivalente a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{L}_3, \mathrm{J(M)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{L}_2, \mathrm{J(M)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{L}_1, \mathrm{J(M)}) \longrightarrow 0,$$

esta última también es exacta. Note que con esto probamos que $J(M)$ es $\mathscr{E}$-inyectivo, ya que dado α en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{L}_1, \mathrm{J(M)})$, existe un β en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{L}_2, \mathrm{J(M)})$, tal que hace qu el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & L_2 \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dotted, "\beta"] & L_3 \\
J(M). & &
\end{tikzcd}$$

□

Ahora veamos que $J(M)$ es también proyectivo en $(\mathscr{C},\mathscr{E})$. Para ello tenemos que ver que es válida la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.76.

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)}, \mathrm{L}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]}, \mathrm{L})$.

DEMOSTRACIÓN.

Analicemos cómo son los elementos de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)}, \mathrm{L})$. Sea φ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)}, \mathrm{L})$, entonces $\varphi : J(M) \longrightarrow L$ se restringe en grado i a

$$\varphi^i = (u^i, v^i) : M^i \oplus M^{i+1} \longrightarrow L^i.$$

Como φ es morfismo diferencial, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M^i \oplus M^{i+1} \arrow[r, "(u^i,v^i)"] \arrow[d, "d_{J(M)}"'] & L^i \arrow[d, "d_L"] \\
M^{i+1} \oplus M^{i+2} \arrow[r, "(u^{i+1},v^{i+1})"'] & L^{i+1}.
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que, para todo m en M^i y n en M^{i+1},

$$d_L(u^i,v^i)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = (u^{i+1},v^{i+1})d_{J(M)}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Esto nos dice que $d_Lu^i(m)+d_Lv^i(n)=u^{i+1}(n)$. En particular, para $m=0$, tenemos que $d_Lv^i(n)=u^{i+1}(n)$. Por lo tanto $\varphi^i=(d_Lv^{i-1},v^i):J(M)^i \longrightarrow L^i$, $\forall i\in\mathbb{Z}$. Veamos las condiciones que satisfacen los morfismos $v^i : M^{i+1} \longrightarrow L^i$. Sean $m\in M^i$, $n\in M^{i+1}$ y $a\in A$ homogéneo, entonces

$$\varphi\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}a = \left[(d_Lv^{i-1},v^i)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right]a = [d_Lv^{i-1}(m)+v^i(n)]a$$

$$= d_Lv^{i-1}(m)a + v^i(n)a.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\varphi\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}a\right] = \varphi\begin{pmatrix} ma \\ md(a)+(-1)^{\mathrm{gr(a)}}na \end{pmatrix}$$

$$= d_Lv^{i-1}(ma)+v^i(md(a))+(-1)^{\mathrm{gr(a)}}v^i(na).$$

Como φ es morfismo de A-módulos graduados, las dos expresiones anteriores son iguales, es decir

$$d_Lv^{i-1}(m)a+v^i(n)a = d_Lv^{i-1}(ma)+v^i(md(a))+(-1)^{\mathrm{gr(a)}}v^i(na).$$

Esta expresión debe de ser válida $\forall m\in M^i$ y $n\in M^{i+1}$ en particular para $m=0$, entonces $v^i(n)a=(-1)^{\mathrm{gr(a)}}v^i(na)$. De esta forma notamos que $v=(v^i)_{i\in\mathbb{Z}} : M[1] \longrightarrow L$ es un morfismo de A-módulos derechos graduados. Entonces esto nos dice como definir el morfismo

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)},\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]},\mathrm{L}).$$

Dado $v\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)},\mathrm{L})$, $\psi(\varphi)=v$. Ahora probemos que ψ es un isomorfismo. Claramente ψ es una transformación lineal.

(a) Inyectividad. Sea $\varphi\in\mathrm{Ker}(\psi)$, veamos que $\varphi=0$. Como $\varphi=(\varphi^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, donde $\varphi^i=(d_Lv^{i-1},v^i):J(M)^i \longrightarrow L^i$, y $0=\psi(\varphi)=(v^i)$. Entonces, $\varphi=0$.

(b) Suprayectividad. Sea $v\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]},\mathrm{L})$, veamos que existe $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{J(M)},\mathrm{L})$ tal que $\psi(\varphi)=v$. Definamos a $\varphi=(\varphi^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ por $\varphi^i:=(d_Lv^{i-1},v^i)$, y veamos que es un morfismo diferencial.

(b_1) Veamos que φ es morfismo de Mod-A. Sean $m \in M^i$, $n \in M^{i+1}$, y $a \in A^p$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} a &= \left[(d_L v^{i-1}, v^i)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right] a = [d_L v^{i-1}(m) + v^i(n)]a \\ &= d_L v^{i-1}(m)a + v^i(n)a = d_L v^{i+p-1}(ma) + v^{i+p}(na) \\ &= (d_L v^{i+p-1}, v^{i+p})\begin{pmatrix} ma \\ na \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} ma \\ na \end{pmatrix};\end{aligned}$$

luego, φ es morfismo de Mod-A. Por la manera en que definimos a φ tenemos que también es de Mod-A graduados.

(b_2) φ es morfismo diferencial, es decir que $\varphi d_{J(M)} = d_L \varphi$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} J(M)^i \arrow[r, "\varphi^i"] \arrow[d, "d_{J(M)}"'] & L^i \arrow[d, "d_L"] \\ J(M)^{i+1} \arrow[r, "\varphi^{i+1}"'] & L^{i+1}. \end{tikzcd}$$

Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} d_L\varphi\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} &= d_L\left[(d_L v^{i-1}, v^i)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right] \\ &= d_L[d_L v^{i-1}(m) + v^i(n)] = d_L v^i(n); \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\varphi^{i+1} d_{J(M)}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \varphi^{i+1}\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = (d_L v^i, v^{i+1})\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = d_L v^i(n).$$

Así, tenemos que el diagrama anterior es conmutativo, y hemos demostrado que $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)}, \mathrm{L})$ es tal que $\psi(\varphi) = v$.

□

PROPOSICIÓN 3.77.

ψ es natural en la segunda variable.

DEMOSTRACIÓN.

Veamos la naturalidad en la segunda variable. Sean L y N objetos de $\mathscr{C}$ y $f : L \longrightarrow N$ un morfismo diferencial de Mod-A. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)}, \mathrm{L}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1{,}f)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]}, \mathrm{L}) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(1{,}f)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)}, \mathrm{N}) \arrow[r, "\psi"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]}, \mathrm{N}). \end{tikzcd}$$

Dado φ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{J(M),L})$ su imagen $v = \psi(\varphi)$ está dado por las composiciones $v^i = [M^{i+1} \longrightarrow M^i \oplus M^{i+1} \xrightarrow{\varphi^i} L^i]$. Entonces, $\psi(f\varphi) = fv$, pues $f^i v^i = [M^{i+1} \longrightarrow M^i \oplus M^{i+1} \xrightarrow{\varphi^i} L^i \xrightarrow{f^i} N^i]$. Luego,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(1,\mathrm{f})\psi(\varphi) = \mathrm{f}\circ\psi(\varphi) = \mathrm{f}\circ\mathrm{v} = \psi(\mathrm{f}\varphi) = \psi\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1,\mathrm{f})(\varphi).$$

Así tenemos que el diagrama conmuta.

□

PROPOSICIÓN 3.78.

$J(M)$ es $\mathscr{E}$-proyectivo en la categoría exacta ($\mathscr{C},\mathscr{E}$).

DEMOSTRACIÓN.

Sea $L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3$ una $\mathscr{E}$-sucesión. Aplicando el funtor covariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)},-)$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)},\mathrm{L}_1) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)},\mathrm{L}_2) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)},\mathrm{L}_3).$$

Por la proposición 3.76 tenemos que esta sucesión es equivalente a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]},\mathrm{L}_1) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]}),\mathrm{L}_2) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]},\mathrm{L}_3).$$

Como $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3 \longrightarrow 0$ está en $\mathscr{E}$, entonces al aplicar el funtor olvidadizo, esta misma sucesión, ahora vista en $\mathcal{G}$ se divide, luego

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]},\mathrm{L}_1) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]},\mathrm{L}_2) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M[1]},\mathrm{L}_3) \longrightarrow 0$$

también se divide, entonces es exacta. Así

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)},\mathrm{L}_1) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)},\mathrm{L}_2) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J(M)},\mathrm{L}_3) \longrightarrow 0$$

es exacta, y esto implica que $J(M)$ es $\mathscr{E}$-proyectivo.

□

PROPOSICIÓN 3.79.

($\mathscr{C},\mathscr{E}$) tiene suficientes inyectivos.

DEMOSTRACIÓN.

Debemos ver que para cada $M \in \mathscr{C}$ existe una $\mathscr{E}$-sucesión de la siguiente forma $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ donde N es $\mathscr{E}$-inyectivo. Consideremos la siguiente sucesión $M \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}} J(M) \xrightarrow{(d_{M[1]},1_{M[1]})} M[1]$. Veamos que

$\begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix} : M \longrightarrow J(M)$ es un morfismo en $\mathscr{C}$

$$\begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}(ma) = \begin{pmatrix} ma \\ d_M(ma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma \\ md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} d_M(m)a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m \\ d_M(m) \end{pmatrix} * a.$$

Sea $a \in A$ elemento homogéneo. Si $m \in M^i$, entonces

$$d_{J(M)} \begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix} (m) = d_{J(M)} \begin{pmatrix} m \\ d_M(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_M(m) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix} (d_M(m)).$$

Ahora veamos que $(d_{M[1]}, 1_{M[1]}) : J(M) \longrightarrow M[1]$ es morfismo en $\mathscr{C}$. Sean $m \in M^i, n \in M^{i+1}$ y $a \in A$ homogéneos, entonces

$$(d_{M[1]}, 1_{M[1]}) \left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} * a \right] = (d_{M[1]}, 1_{M[1]}) \begin{pmatrix} ma \\ md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na \end{pmatrix}$$

$$= d_{M[1]}(ma) + md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na = -d_M(ma) + md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na$$

$$= -md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}+1} d_M(m)a + md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na$$

$$= -d_M(m) \cdot a + n \cdot a = (d_{M[1]}(m) + n) \cdot a = (d_{M[1]}, 1_{M[1]}) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot a.$$

Por otro lado,

$$d_{M[1]}(d_{M[1]}, 1_{M[1]}) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = d_{M[1]}(-d_M(m) + n)$$

$$= -d_M(n) = (d_{M[1]}, 1_{M[1]}) \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = (d_{M[1]}, 1_{M[1]}) d_{J(M)} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Veamos que es una sucesión exacta. Probemos que $\mathrm{Im} \begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{d_{M[1]}}, 1_{\mathrm{M[1]}})$. Sea $m \in M$, luego

$$(d_{M[1]}, 1_{M[1]}) \begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix} (m) = (d_{M[1]}, 1_{M[1]}) \begin{pmatrix} m \\ d_M(m) \end{pmatrix}$$

$$= d_{M[1]}(m) + d_M(m) = -d_M(m) + d_M(m) = 0.$$

Ahora veamos que $\mathrm{Ker}(\mathrm{d_{M[1]}}, 1_{\mathrm{M[1]}}) \subset \mathrm{Im} \begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}$. Sea $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in J(M)$ tal que $(d_{M[1]}, 1_{M[1]}) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = 0$. Entonces, $d_M(m) = n$. Luego,

$$\begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix} (m) = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix},$$

y entonces tenemos exactitud en $J(M)$. Ahora veamos que $\begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}$ es monomorfismo. Sea $m \in \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}$ luego $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}(m) = \begin{pmatrix} m \\ d_M(m) \end{pmatrix}$ y, entonces, $m = 0$. Esto implica que $\begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}$ es monomorfismo. También es fácil ver que $(d_{M[1]}, 1_{M[1]})$ es epimorfismo en $\mathscr{C}$. Aplicándole el funtor olvidadizo a esta sucesión exacta tenemos que, vista en $\mathcal{G}$ es una sucesión exacta que se divide. En efecto, $(1_M, d_M) : J(M) \longrightarrow M$ es un morfismo en $\mathcal{G}$ que es inversa izquierda de $\begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}$. Veamos, que $(1_M, d_M)$ es morfismo en $\mathcal{G}$. Sea $a \in A$ es homogéneo,

$$(1_M, d_M)\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} a\right] = (1_M, d_M)\begin{pmatrix} ma \\ md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na \end{pmatrix}$$

$$= ma + d(md(a)) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} d_M(na)$$

$$= ma + md^2(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}+1} d_M(m)d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} nd(a) + (-1)^{2\mathrm{gr(a)}} d_M(n)a$$

$$= ma + d_M(n)a = [m + d_M(n)]a = (1_M, d_M)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} a.$$

Además, claramente $(1_M, d_M)$ preserva la graduación. Obtenemos, entonces que $M \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}} J(M) \xrightarrow{(d_{M[1]}, 1_{M[1]})} M[1]$ es una $\mathscr{E}$-sucesión donde $J(M)$ es $\mathscr{E}$-inyectivo.

□

COROLARIO 3.80.
Los módulos $\mathscr{E}$-inyectivos de $(\mathscr{C},\mathscr{E})$ son los A-módulos diferenciales derechos isomorfos a sumandos directos de A-módulos diferenciales de la forma $J(L)$.

DEMOSTRACIÓN.
Sea L un módulo $\mathscr{E}$-inyectivo y $L \longrightarrow J(L) \longrightarrow L[1]$ es la $\mathscr{E}$-sucesión construida en la proposición 3.79, sabemos que la sucesión se divide y L resulta sumando directo de $J(L)$.

□

PROPOSICIÓN 3.81.
$(\mathscr{C},\mathscr{E})$ tiene suficientes proyectivos.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $M \in \mathscr{C}$, debemos ver que existe una $\mathscr{E}$-sucesión $L \longrightarrow N \longrightarrow M$, con $J(M)$ $\mathscr{E}$-proyectivo. tal que N es $\mathscr{E}$-proyectivo. Note que tenemos la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión $M \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}} J(M) \xrightarrow{(d_{M[1]}, 1_{M[1]})} M[1]$, con $J(M)$ $\mathscr{E}$-proyectivo. Sea $N := M[-1]$, el cuál también es un Mod-A diferencial, entonces aplicando la

misma idea a N tenemos la $\mathscr{E}$-sucesión $N \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_N \\ d_N \end{pmatrix}} J(N) \xrightarrow{(d_{N[1]}, 1_{N[1]})} N[1]$ la cual coincide con $M[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{M[-1]} \\ d_{M[-1]} \end{pmatrix}} J(M[-1]) \xrightarrow{(d_M, 1_M)} M.$

□

TEOREMA 3.82.
($\mathscr{C},\mathscr{E}$) es una categoría de Frobenius.

DEMOSTRACIÓN.
Por lo visto durante esta sección.

□

OBSERVACIÓN 3.83.
Tenemos el funtor $\overline{T} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ dado por $\overline{T} := M[1]$ y $\overline{T}(f) = f$, para cada morfismo $f : M \longrightarrow N$ en $\mathscr{C}$. $\overline{T}$ es un automorfismo de $\mathscr{C}$ pues $\overline{T}'(M) := M[-1]$ y $\overline{T}'(f) := f$ define un funtor inverso para $\overline{T}$. Claramente, $\overline{T}$ preserva sucesiones exactas y $\mathscr{E}$-sucesiones, por tanto, preserva $\mathscr{E}$-proyectivos e induce un automorfismo $\overline{T} : \underline{\mathscr{C}} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "\overline{T}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathscr{C} \arrow[d, "\pi"] \\
\underline{\mathscr{C}} \arrow[r, "\overline{T}"'] & \underline{\mathscr{C}}.
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, para cada $M \in \mathscr{C}$, hemos construido la $\mathscr{E}$-sucesión

$$M \xrightarrow{u_M} J(M) \xrightarrow{v_M} M[1]$$

donde $u_M = \begin{pmatrix} 1_M \\ d_M \end{pmatrix}$ y $v_M = (d_{M[1]}, 1_{M[1]})$. Así, podemos construir el funtor $T : \underline{\mathscr{C}} \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}$ definido en la definición **??** *y el corolario* **??***, que es un automorfismo por el lema* **??***. Veamos que T y $\overline{T}$ coinciden. En efecto para cada $f : M \longrightarrow N$ en $\mathscr{C}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "f"'] & J(M) \arrow[r, "v_M"] \arrow[d, "J(f)"] & M[1] \arrow[d, "\overline{T}(f)"] \\
N \arrow[r, "u_N"'] & J(N) \arrow[r, "v_N"'] & N[1],
\end{tikzcd}$$

donde $J(f)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(m) \\ f(n) \end{pmatrix}$, para cada $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in J(M)$. Luego,

$$T(\pi(f)) = T(f) = \pi\overline{T}(f) = \overline{T}(\pi(f)).$$

PROPOSICIÓN 3.84.
La categoría $\underline{\mathscr{C}}$, con el automorfismo T de la observación anterior y los triángulos definidos en la definición **??**, *es triangulada*

DEMOSTRACIÓN.
Como $\mathscr{C}$ es de Frobenius, por la sección 2.3, tenemos que la categoría estable, $\underline{\mathscr{C}}$ es triangulada.

□

3.4. Funtores T_X y H_X.

DEFINICIÓN 3.85.
Sean A, B dos k-álgebras diferenciales, sean $\mathscr{C}(A)$ y $\mathscr{C}(B)$ sus respectivas categorías de módulos diferenciales derechos y sea ${}_AX_B$ un AB-bimódulo. Definiremos un funtor $T_X : \mathscr{C}(A) \longrightarrow \mathscr{C}(B)$ como sigue:

F1 *En objetos: Dado M un Mod-A diferencial, entonces $T_X(M) := M \otimes_A X$.*

F2 *En morfismos: Sea $M \xrightarrow{f} N$ un morfismo de A-módulos diferenciales derechos, entonces $T_X(f) := f \otimes 1_X$.*

PROPOSICIÓN 3.86.
$T_X : \mathscr{C}(A) \longrightarrow \mathscr{C}(B)$ es un funtor covariante.

DEMOSTRACIÓN.
Por lo antes mencionado tenemos que, en objetos $T_X(M) = M \otimes_A X$, el cual ya vimos que efectivamente es un Mod-B diferencial (en la proposición 3.61). Si $M \xrightarrow{f} N$ es un morfismo de Mod-A diferenciales, entonces $T_X(f) = f \otimes 1$, que es un morfismo de B-módulos diferenciales derechos por el lema 3.65. Es decir, tenemos $T_X : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{A})}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{B})}(\mathrm{T_X}(\mathrm{M}), \mathrm{T_X}(\mathrm{N}))$. Suponga que tenemos $M \xrightarrow{f} N$ y $N \xrightarrow{g} L$, con f y g morfismos de Mod-A diferenciales. Por un lado, si $m \in M$ y $x \in X$,

$$T_X(g \circ f)(m \otimes x) = gf(m) \otimes x$$

por otro,

$$T_X(g)T_X(f)(m \otimes x) = T_X(g)(f(m) \otimes x) = gf(m) \otimes x.$$

Así, $T_X(g \circ f) = T_X(g)T_X(f)$. Es claro que $T_X(1_M) = 1_{T_X(M)}$.

□

PROPOSICIÓN 3.87.
Sea X es un AB-bimódulo diferencial. Entonces T_X conmuta con coproductos.

DEMOSTRACIÓN.
Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos diferenciales derechos y sean $M_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod_{i\in I} M_i$ las inclusiones y recordemos que dado $m \in \coprod_{i\in I} M_i$ tenemos que $m = \sum_{i\in I} \sigma_i(m_i)$. Consideremos el morfismo

$$T_X(\sigma_j) = \sigma_j \otimes 1 : M_j \otimes_A X \xrightarrow{\sigma_j\otimes 1} \left(\coprod_{i\in I} M_i\right) \otimes_A X.$$

Así, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I}(M_i \otimes_A X) \arrow[rd, dotted, "\psi"] & \\
M_j \otimes_A X \arrow[u, "\tau_j"] \arrow[r, "\sigma_j\otimes 1"'] & (\coprod_{i\in I} M_i) \otimes_A X,
\end{tikzcd}$$

donde τ_j es la inclusión de $M_j \otimes_A X$ en $\coprod_{i\in I}(M_i \otimes_A X)$, luego por la propiedad universal tenemos la existencia de ψ tal que hace conmutar el diagrama anterior, $\forall j \in I$. Para ver que ψ es isomorfismo, vamos a construir el morfismo inverso. Consideremos la siguiente función

$$(\coprod_{i\in I} M_i) \times X \xrightarrow{\hat{\phi}} \coprod_{i\in I}(M_i \otimes_A X)$$

donde

$$\hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i), x\right) = \sum_i \tau_i(m_i \otimes_A x).$$

Veamos que son ciertas las siguientes propiedades de $\hat{\phi}$:

(a) $\hat{\phi}$ es bilineal.
Sean $\sigma_i(m_i) \in \coprod M_i$, y $x, x_1 \in X$, luego:

$$\hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i), x + x_1\right) = \sum \tau_i(m_i \otimes [x + x_1])$$

$$= \sum \tau_i(m_i \otimes x + m_i \otimes x_1) = \sum (\tau_i(m_i \otimes x) + \tau_i(m_i \otimes x_1))$$

$$= \hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i), x\right) + \hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i), x_1\right).$$

Ahora, sean $\sum_i \sigma_i(m_i), \sum_i \sigma_i(n_i) \in \coprod M_i$ y $x \in X$, luego:

$$\hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i) + \sum_i \sigma_i(n_i), x\right) = \hat{\phi}\left(\sum_i [\sigma_i(m_i) + \sigma_i(n_i)], x\right)$$

$$= \hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i+n_i), x\right) = \sum \tau_i([m_i+n_i]\otimes x)$$

$$= \sum \tau_i(m_i\otimes x + n_i\otimes x) = \sum [\tau_i(m_i\otimes x) + \tau_i(n_i\otimes x)]$$

$$= \hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i), x\right) + \hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(n_i), x\right).$$

(b) Para $a \in A$ y $x \in X$ elementos homogéneos, entonces se cumple que

$$\hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i)a, x\right) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}}\hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i), ax\right).$$

Sean $a \in A$ y $x \in X$ homogéneos

$$\hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i)a, x\right) = \hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i a, x)\right)$$

$$= \sum_i \tau_i(m_i a\otimes x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} \sum \tau_i(m_i\otimes ax)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}}\hat{\phi}\left(\sum_i \sigma_i(m_i), ax\right).$$

Por la propiedad universal del producto tensorial, tenemos

$$\begin{tikzcd}
(\coprod_{i\in I} M_i)\times X \arrow[r, "\hat{\phi}"] \arrow[d] & \coprod_{i\in I}(M_i\otimes_A X) \\
(\coprod_{i\in I} M_i)\otimes_A X \arrow[ur, dotted, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que en los generadores cumple que $\phi\left(\sum_i \sigma_i(m_i)\otimes x\right) = \sum_i \tau_i(m_i\otimes x)$. Ahora veamos que $\phi\circ\psi = 1$ y que $\psi\circ\phi = 1$. Es suficiente con probarlo en los generadores. Por un lado, tenemos

$$(\phi\circ\psi)\left(\sum_i \tau_i(m_i\otimes x)\right) = \phi\left(\psi\left(\sum_i \tau_i(m_i\otimes x)\right)\right)$$

$$= \phi\left(\sum_i (\sigma_i(m_i)\otimes x)\right) = \sum_i \tau_i(m_i\otimes x).$$

Por otro,

$$(\psi\circ\phi)\left(\sum_i \sigma_i(m_i)\otimes x\right) = \psi\left(\phi\left(\sum_i \sigma_i(m_i)\otimes x\right)\right)$$

$$= \psi\left(\sum_i \tau_i(m_i \otimes x)\right) = \sum_i \sigma_i(m_i) \otimes x.$$

Así, hemos demostrado la proposición.

□

PROPOSICIÓN 3.88.
$\varphi_m : M[1] \otimes_A X \longrightarrow (M \otimes_A X)[1]$ *es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\lambda : M[1] \times X \longrightarrow (M \otimes_A X)[1]$ la función tal que para $m \in M[1]^i$ y $x \in X^j$, $\lambda(m,x) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m \otimes x)$. Veamos que:

(a) λ es graduada.
Sean $m \in M[1]^i$, y $x \in X^j$. Note que $m \in M^{i+1}$, luego,

$$\lambda(m,x) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m \otimes x) \in (M \otimes_A X)^{i+1+j} = (M \otimes_A X)[1]^{i+j},$$

entonces λ es graduada.

(b) λ es bilineal.
Sean $m_1, m_2 \in M[1]$ y $x \in X$, entonces

$$\lambda(m_1 + m_2, x) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}[(m_1 + m_2) \otimes x] = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m_1 \otimes x + m_2 \otimes x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m_1 \otimes x) + (-1)^{grx}(m_2 \otimes x) = \lambda(m_1, x) + \lambda(m_2, x).$$

Ahora, sean $x_1, x_2 \in X^j$. Entonces,

$$\lambda(m, x_1 + x_2) = (-1)^j(m \otimes [x_1 + x_2]) = (-1)^j(m \otimes x_1 + m \otimes x_2)$$

$$= (-1)^j(m \otimes x_1) + (-1)^j(m \otimes x_2) = \lambda(m, x_1) + \lambda(m, x_2).$$

Así hemos probado que es bilineal $\lambda \mid_{M[1] \times X^i}$. Por definición, λ extiende bilinealmente a las restricciones anteriores.

(c) $\lambda(m \cdot a, x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}}\lambda(m, ax)$.
La acción es $m \cdot a = (-1)^{\mathrm{gr(a)}}ma$.

$$\lambda(m \cdot a, x) = \lambda((-1)^{\mathrm{gr(a)}}ma, x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(x)}}(ma \otimes x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(x)+gr(a)gr(x)}}(m \otimes ax) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}}\lambda(m, ax).$$

Por la propiedad universal del producto tensorial, tenemos que existe φ_M homogéneo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M[1] \times X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & (M \otimes_A X)[1] \\
M[1] \otimes_A X \arrow[ur, "\varphi_M"'] &
\end{tikzcd}$$

y es tal que si $x \in X$ es homogéneo, $\varphi_M(m \otimes x) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m \otimes x)$. Veamos que φ_M conmuta con la diferencial. Recordemos que la diferencial de $(M \otimes_A X)[1]$ es por definición $d_{[1]} = -d$, donde d es la diferencial de $M \otimes_A X$. Debemos probar que $d_{[1]}\varphi_M = \varphi_M d$. Sabemos que

$$d_{[1]}\varphi_M(m \otimes x) = d_{[1]}((-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m \otimes x)) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}+1}d(m \otimes x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(x)}+1}[(-1)^{\mathrm{gr(x)}}d_M(m) \otimes x + m \otimes d_X(x)]$$

$$= (-1)d_M(m) \otimes x + (-1)^{\mathrm{gr(x)}+1}m \otimes d_X(x).$$

Por otro lado,

$$\varphi_M(d_{M[1] \otimes X}(m \otimes x)) = \varphi_M((-1)^{\mathrm{gr(x)}}d_{M[1]}(m) \otimes x + m \otimes d_X(x))$$

$$= d_{M[1]}(m) \otimes x + (-1)^{\mathrm{gr(x)}+1}(m \otimes d_X(x)) = -d_M(m) \otimes x + (-1)^{\mathrm{gr(x)}+1}(m \otimes d_X(x)).$$

Luego, tenemos que $d_{[1]}\varphi_M = \varphi_M d$.

Ahora vamos a dar el morfismo inverso de φ_M. Procederemos como sigue: Sea $\gamma : M \times X \longrightarrow (M[1] \otimes_A X)[-1]$ la función tal que, si $m \in M$ y $x \in X^j$, $\gamma(m, x) := (-1)^{\mathrm{gr(x)}}m \otimes x$. Afirmamos que:

(a) γ es graduada.
Note que, si $m \in M^i$ y $x \in X^j$, $m \in M[1]^{i-1}$. Luego,

$$\gamma(m, x) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m \otimes x) \in (M[1] \otimes_A X)^{i+j-1} = (M[1] \otimes_A X)[-1]^{i+j}$$

y, así, γ es graduada.

(b) γ es bilineal.
Sean $m_1, m_2 \in M$ y $x \in X^j$, entonces

$$\gamma(m_1 + m_2, x) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}([m_1 + m_2] \otimes x) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m_1 \otimes x) + (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m_2 \otimes x)$$

$$= \gamma(m_1 \otimes x) + \gamma(m_2 \otimes x).$$

Sean $x_1, x_2 \in X^j$, entonces

$$\gamma(m, x_1 + x_2) = (-1)^j(m \otimes [x_1 + x_2]) = (-1)^j(m \otimes x_1) + (-1)^j(m \otimes x_2)$$

$$= \gamma(m, x_1) + \gamma(m, x_2).$$

Así, hemos probado que es bilineal $\gamma \mid_{M \times X^j}$. La bilinealidad de γ se obtiene de esto, pues γ extiende bilinealmente esas restricciones, por definición de γ.

(c) $\gamma(m \cdot a, x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}}\gamma(m, ax)$.

$$\gamma(ma, x) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}ma \otimes x = (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(x)}}(m \cdot a \otimes x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(x)+gr(a)gr(x)}}(m \otimes ax).$$

Por otro lado, $\gamma(m, ax) = (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(x)}}m \otimes ax$. Luego, tenemos que $\gamma(m \cdot a, x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}}\gamma(m, ax)$.

Por la propiedad universal del producto tensorial, tenemos que existe ϕ_M homogénea que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \times X \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & (M[1] \otimes_A X)[-1] \\
M \otimes_A X \arrow[ur, "\phi_M"'] &
\end{tikzcd}$$

y, es tal que, para $x \in X$ homogénea y $m \in M$, $\phi_M(m \otimes x) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}} m \otimes x$. Por el lema 3.28, para mostrar que φ_M es isomorfismo, bastará ver que es biyectivo. Es claro que $\Gamma := \phi_M$ es un morfismo en $\mathcal{G}$, por el lema 3.51, podemos considerar el morfismo en $\mathcal{G}$ $\Gamma[1] : (M \otimes_A X)[1] \longrightarrow M[1] \otimes_A X$.

Ahora veamos que $\Gamma[1]$ es el inverso de φ_M. Sabemos que

$$(\Gamma[1] \circ \varphi_M)(m \otimes x) = \Gamma[1]((-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m \otimes x)) = (-1)^{\mathrm{gr(x)+gr(x)}}(m \otimes x) = m \otimes x.$$

Por otro lado,

$$(\varphi_M \circ \Gamma[1])(m \otimes x) = \varphi_M((-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m \otimes x)) = (-1)^{\mathrm{gr(x)+gr(x)}}(m \otimes x) = m \otimes x.$$

□

Dados A, B álgebras diferenciales, tenemos definido al funtor

$$T_X : \mathscr{C}(A) \longrightarrow \mathscr{C}(B)$$

En lo que sigue vamos a definir un funtor $H_X : \mathscr{C}(B) \longrightarrow \mathscr{C}(A)$ tal que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(\mathrm{M}, \mathrm{H_X(N)}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(B)}(\mathrm{T_X(M)}, \mathrm{N})$$

para ello, veamos lo siguiente:

DEFINICIÓN 3.89.

Sea B un álgebra graduada. $\mathcal{G}rB$ es la categoría cuyos objetos son B-módulos graduados y cuyos morfismos $f : M \longrightarrow N$ son homogéneos de grado i, es decir, son transformaciones lineales que satisfacen :

i) $f(M^s) \subset N^{s+i}$, $\forall s \in \mathbb{Z}$.

ii) $f(mb) = (-1)^{igrb} f(m)b$, *para cada* $m \in M$ *y* $b \in B$ *homogéneo.*

Observemos que si $M \xrightarrow{f} N$ *es homogéneo de grado* i *y* $N \xrightarrow{g} L$ *es homogéneo de grado* j, *tenemos que* $(g \circ f)(M^s) \subset g(N^{s+i}) \subset L^{s+i+j}$ *y que* $(g \circ f)(mb) = (-1)^{grb(i+j)}(g \circ f)(m)b$, *por tanto* $gf : M \longrightarrow L$ *es homogéneo de grado* $\mathrm{gr(gf)} = \mathrm{gr(g)} + \mathrm{gr(f)}$. *Denotaremos por* $\mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ *al espacio formado por los morfismos homogéneos de grado* i. *Finalmente,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) := \bigoplus_{\mathrm{i} \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

PROPOSICIÓN 3.90.
Para cada $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \simeq \mathrm{Hom}^{0}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{M},\mathrm{N[i]}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{M},\mathrm{N[i]})$.

DEMOSTRACIÓN.
Sea f en $\mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ entonces, $\forall s \in \mathbb{Z}$, $f(M^s) \subseteq N^{s+i} = (N[i])^s$. Recordemos que si $n \in N[i]$ y $b \in B$ son homogéneos, $n \cdot b = (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} nb$. Veamos que f es de Mod-B. Para $m \in M$ y $b \in B$ homogéneos tenemos $f(mb) = (-1)^{grfgrb} f(m)b = f(m) \cdot b$, en $N[i]$. Luego,

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{M},\mathrm{N[i]}) = \mathrm{Hom}^{0}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{M},\mathrm{N[i]}).$$

Ahora sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{M},\mathrm{N[i]})$, luego $g(M^s) \subseteq (N[i])^s = N^{s+i}$ $\forall s \in \mathbb{Z}$. Tenemos, $g(mb) = g(m) \cdot b = (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} g(m)b$ así, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{M},\mathrm{N[i]}) \subset \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$.
□

PROPOSICIÓN 3.91.
Si A, B *son* k*-álgebras graduadas y* X *es un* AB*-bimódulo graduado, entonces* $H_X(N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{N})$ *es un* A*-módulo graduado derecho.*

DEMOSTRACIÓN.
Por las definiciones anteriores tenemos que $H_X(N) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{N})$ es un espacio vectorial graduado. Ahora definiremos una acción de $A = \bigoplus A^j$. Es suficiente con definir la acción en los elementos homogéneos. Sean $a \in A^i$ y $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{j}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{N})$ un morfismo de B-módulos graduados de grado j. Definimos $f * a : X \longrightarrow N$ de grado $i + j$, para $x \in X$, como

$$(f * a)(x) := (-1)^{ji} f(ax).$$

Verifiquemos que $f * a$ es un morfismo de B-módulos graduados.
Sea $b \in B$ homogéneo, entonces

$$\begin{aligned}(f{*}a)(xb) = (-1)^{ji} f(a(xb)) = (-1)^{ji} f((-1)^{i\mathrm{gr(b)}}(ax)b) &= (-1)^{(ji+i\mathrm{gr(b)})} f((ax)b) \\ = (-1)^{(ji+i\mathrm{gr(b)})}(-1)^{j\mathrm{gr(b)}} f(ax)b &= (-1)^{ji+(j+i)\mathrm{gr(b)}} f(ax)b \\ &= (-1)^{(j+i)\mathrm{gr(b)}} (f * a)(x)b.\end{aligned}$$

Así, $f * a \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i+j}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{N}) \subseteq \mathrm{H_X(N)}$. Hemos definido una función $*^{i,j} : H_X(N)^i \times A^j \longrightarrow H_X(N)$. Veamos que es bilineal. Sean $f \in H_X(N)^i$ y $a_1, a_2 \in A^j$, probemos que $f * (a_1 + a_2) = f * a_1 + f * a_2$. Sea $x \in X$. Entonces,

$$(f * (a_1 + a_2))(x) = (-1)^{ji} f((a_1 + a_2)x) = (-1)^{ji} f(a_1x + a_2x)$$

$$= (-1)^{ji}[f(a_1x) + f(a_2x)] = (-1)^{ji} f(a_1x) + (-1)^{ji} f(a_2x) = (f{*}a_1)(x) + (f{*}a_2)(x).$$

Si f, g están en $H_X(N)^i$ y a en A^j, de manera similar se prueba que $(f + g) * a = f * a + g * a$. En efecto,

$$((f + g) * a)(x) = (-1)^{ji}(f + g)(ax) = (-1)^{ji}(f(ax) + g(ax))$$

$$= (-1)^{ji} f(ax) + (-1)^{ji} g(ax) = f * a(x) + g * a(x).$$

Ahora, definimos la acción de A sobre $H_X(N)$ $* : H_X(N) \times A \longrightarrow H_X(N)$ extendiendo por bilinealidad todas las $*^{i,j}$, es decir

$$\left(\sum_j f^j\right) * \left(\sum_i a^i\right) := \sum_{i,j} f^j * a^i.$$

Ahora probemos la asociatividad: Sean a_1 y a_2 elementos homogéneos de A, y $f : X \longrightarrow N$ un morfismo homogéneo de grado j. Entonces,

$$[(f * a_1) * a_2](x) = (-1)^{(j+\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1))\mathrm{gr}(\mathrm{a}_2)}(f * a_1)(a_2 x)$$

$$= (-1)^{(j+\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1))\mathrm{gr}(\mathrm{a}_2)}(-1)^{j(\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1)} f(a_1(a_2 x)) = (-1)^{(j+\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1))\mathrm{gr}(\mathrm{a}_2)+\mathrm{j}(\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1)} f(a_1(a_2 x))$$

$$= (-1)^{(j+\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1))\mathrm{gr}(\mathrm{a}_2)+\mathrm{j}(\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1))} f((a_1 a_2)x)$$

$$= (-1)^{(j+\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1))\mathrm{gr}(\mathrm{a}_2)+\mathrm{j}(\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1))+(\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1)+\mathrm{gr}(\mathrm{a}_2))\mathrm{j}}[f * (a_1 a_2)](x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr}(\mathrm{a}_1)\mathrm{gr}(\mathrm{a}_2)}[f * (a_1 a_2)](x).$$

□

PROPOSICIÓN 3.92.
Si A, B son k-álgebras diferenciales y X es un AB-bimódulo diferencial, entonces $H_X(N)$ es un A-módulo diferencial derecho.

DEMOSTRACIÓN.
Lo único que falta para ver que es un A-módulo diferencial, es dar la diferencial. Es suficiente con definir la diferencial en los elementos homogéneos. Si $X \xrightarrow{f} N \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{N})$. Entonces definimos $\delta(f) := d_N f - (-1)^i f d_X$.

(i) $\delta(f)$ es morfismo homogéneo de B-módulos de grado $i+1$:
Sea $b \in B$ homogéneo, entonces

$$\delta(f)[xb] = d_N(f(xb)) - (-1)^i f(d_X(xb))$$

$$= (-1)^{i\mathrm{gr}(\mathrm{b})} d_N(f(x)b) - (-1)^i f((-1)^{\mathrm{gr}(\mathrm{b})} d_X(x)b + xd(b))$$

$$= (-1)^{i\mathrm{gr}(\mathrm{b})}(f(x)d(b) + (-1)^{\mathrm{gr}(\mathrm{b})} d_N(f(x))b) - (-1)^i f[(-1)^{\mathrm{gr}(\mathrm{b})} d_X(x)b$$

$$+xd(b)] = (-1)^{i\mathrm{gr}(\mathrm{b})}(-1)^{\mathrm{gr}(\mathrm{b})} d_N(f(x))b + (-1)^{i\mathrm{gr}(\mathrm{b})} f(x)d(b)$$

$$-(-1)^{i+\mathrm{gr}(\mathrm{b})}(-1)^{i\mathrm{gr}(\mathrm{b})} f(d_X(x))b - (-1)^i(-1)^{i(\mathrm{gr}(\mathrm{b})+1)} f(x)d(b)$$

$$= (-1)^{(i+1)\mathrm{gr}(\mathrm{b})} d_N(f(x))b - (-1)^{i+(1+i)\mathrm{gr}(\mathrm{b})} f(d_X(x))b$$

$$= (-1)^{(i+1)\mathrm{gr}(\mathrm{b})}[d_N(f(x)) - (-1)^i f(d_X(x))]b = (-1)^{(i+1)\mathrm{gr}(\mathrm{b})}\delta(f)[x]b.$$

Luego, $\delta(f) \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i+1}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{N})$.

(ii) $\delta^2 = 0$. Si f tiene grado i, $\delta(f)$ tiene grado $i+1$. Luego,

$$\delta^2(f) = \delta(\delta(f)) = \delta[d_N f - (-1)^i f d_X]$$

$$= d_N(d_N f - (-1)^i f d_X) - (-1)^{i+1}(d_N f - (-1)^i f d_X) d_X$$

$$= -(-1)^i d_N f d_X - (-1)^{i+1} d_N f d_X = 0.$$

(iii) Condición de Leibniz. Veamos que $\delta(f * a) = f * d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}}\delta(f) * a$. Sea $x \in X$, por un lado tenemos que

$$\delta(f * a)(x) = d_N((f * a)(x)) - (-1)^{\mathrm{gr(f)+gr(a)}}(f * a)(d_X(x))$$

$$= d_N((-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} f(ax)) - (-1)^{\mathrm{gr(f)+gr(a)+gr(f)gr(a)}} f(a d_X(x))$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} d_N(f(ax)) - (-1)^{\mathrm{gr(f)+gr(a)+gr(f)gr(a)}} f(a d_X(x)).$$

Por otro lado,

$$(-1)^{\mathrm{gr(a)}}((\delta f) * a)(x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)}}(-1)^{\mathrm{(gr(f)+1)gr(a)}}(\delta f)(ax)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(f)fgr(a)}}\{d_N f(ax) - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f(d_X(ax))\}$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} d_N f(ax) - (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)+gr(f)}}\{f(d(a)x + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a d_X(x))\}$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} d_N f(ax) - (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)+gr(f)}} f(d(a)x)$$

$$-(-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)+gr(f)+gr(a)}} f(a d_X(x))$$

y además $(f * d(a))(x) = (-1)^{\mathrm{gr(f)(gr(a)+1)}} f(d(a)x)$. Sumando estos dos últimos términos,

$$(-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} d_N f(ax) - (-1)^{\mathrm{gr(f)(gr(a)+1)}} f(d(a)x)$$

$$-(-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)+gr(f)+gr(a)}} f(a d_X(x)) + (-1)^{\mathrm{gr(f)(gr(a)+1)}} f(d(a)x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} d_N f(ax) - (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(f)+gr(f)gr(a)+gr(f)}} f(a d_X(x)).$$

Entonces, tenemos que $\delta(f * a) = (-1)^{\mathrm{gr(a)}}(\delta f * a) + f * d(a)$, es decir $H_X(N)$ es un Mod-A diferencial.

□

PROPOSICIÓN 3.93.
Sea $N_1 \xrightarrow{u} N_2$ *un morfismo de* B*-módulos diferenciales derechos, entonces induce un morfismo* $H_X(u) : H_X(N_1) \longrightarrow H_X(N_2)$ *de* A*-módulos diferenciales derechos.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}_1)$, así tenemos la siguiente sucesión $X \xrightarrow{f} N_1 \xrightarrow{u} N_2$. Entonces definimos a $H_X(u)[f] = uf$. Como $uf(X^s) \subseteq u(N_1^{s+i}) \subseteq N_2^{s+i}$ resulta uf homogéneo de grado i. Sea $x \in X$ y $b \in B$ homogéneos, entonces

$$(uf)(xb) = u[f(xb)] = u[(-1)^{\mathrm{gr(f)gr(b)}} f(x)b] = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(b)}} uf(x)b.$$

Luego, $H_X(u)[f] = uf \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}_2) \subseteq \mathrm{H}_\mathrm{X}(\mathrm{N}_2)$. Claramente $H_X(u)$ es lineal. Ahora veamos que saca los elementos de A:

$$\begin{aligned} H_X(u)(f * a)(x) &= u(f * a)(x) = u[(f * a)(x)] = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} uf(ax) \\ &= (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} (uf)(ax) = (H_X(u)[f] * a)(x). \end{aligned}$$

Luego tenemos que $H_X(u)$ es morfismo de A-módulos graduados derechos. Falta ver que $H_X(u)$ conmuta con la diferencial. Supongamos que δ_1 es la diferencial de $H_X(N_1)$ y δ_2 la de $H_X(N_2)$, entonces

$$\begin{aligned} H_X(u)[\delta_1(f)] &= u[d_{N_1} f - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f d_X] = u d_{N_1} f - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} uf d_X \\ &= d_{N_2} uf - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} uf d_X = \delta_2[H_X(u)(f)]. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.94.

$H_X : \mathscr{C}(B) \longrightarrow \mathscr{C}(A)$ *es un k-funtor.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $N \in \mathcal{C}(B)$, por la proposición 3.92 tenemos que $H_X(N)$ es un Mod-A diferencial. Ahora veamos en morfismos. Sea $u : N_1 \longrightarrow N_2$, por la proposición 3.93 tenemos que $H_X(u) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{A})}(\mathrm{H_X(N_1)}, \mathrm{H_X(N_2)})$. Sean $N_1 \xrightarrow{u} N_2 \xrightarrow{v} N_3$ morfismos en $\mathscr{C}(B)$, así $H_X(vu)f = (vu)f = v(uf) = H_X(v)H_X(u)(f)$. Ahora consideramos a $N \xrightarrow{1_N} N$ y $f \in H_X(N_1)$. Luego, $H_X(1_N)(f) = f = 1_{H_X(N)}(f)$. Entonces hemos visto que H_X es un funtor.

□

PROPOSICIÓN 3.95.

Sea X un AB-bimódulo diferencial, entonces H_X conmuta con coproductos si y sólo si X_B es un $\mathcal{G}(B)$-compacto.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de B-módulos diferenciales derechos y sea $\lambda_j : M_j \longrightarrow \coprod_{i \in I} M_i$ la inyección canónica, $\forall j \in I$. Entonces, si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, -)$ conmuta con coproductos, tenemos que, $\forall s \in \mathbb{Z}$, en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, \mathrm{M_i[s]}) \arrow[r, "\Psi^s"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, [\coprod_{\mathrm{i \in I}} \mathrm{M_i}][\mathrm{s}]) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, \mathrm{M_j[s]}) \arrow[u, "\sigma_j^s"] \arrow[ur, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, \lambda_\mathrm{j}[\mathrm{s}])"'] &
\end{tikzcd}$$

Ψ^s es isomorfismo. Esto es equivalente a decir que en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}^{\mathrm{s}}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{M_i}) \arrow[r, "\Psi^s"] & \mathrm{Hom}^{\mathrm{s}}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\coprod_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{M_i}) \\
\mathrm{Hom}^{\mathrm{s}}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{M_j}), \arrow[u, "\sigma_j^s"'] \arrow[ur, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\lambda_\mathrm{j})"'] &
\end{tikzcd}$$

Ψ^s es isomorfismo,$\forall s \in \mathbb{Z}$. Esto equivale a decir que en el siguiente diagrama, obtenido de los anteriores sumando sobre $s \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}^{\mathrm{s}}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{M_i}) \arrow[r, "\oplus\Phi^s"] & \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{s}}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\coprod_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{M_i}) \\
\bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{s}}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{M_j}) \arrow[u, "\oplus\sigma_j^s"'] \arrow[ur, "\oplus\mathrm{Hom}^{\mathrm{s}}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\lambda_\mathrm{j})"'] &
\end{tikzcd}$$

tenemos que $\bigoplus \Phi^s$ es isomorfismo. Notemos que la suma directa de arriba a la izquierda se toma en $\coprod_{i\in I} \mathrm{Hom_k}(\mathrm{X},\mathrm{M_i})$ y además,

$$\coprod_{i\in I}\bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{s}}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{M_i}) = \bigoplus_{\mathrm{s\in\mathbb{Z}}}\coprod_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{s}}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{M_i}).$$

Luego, el triángulo anterior es precisamente

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} H_X(M_i) \arrow[r, "\Phi"] & H_X(\coprod_{i\in I} M_i) \\
H_X(M_j) \arrow[u, "\sigma_j"] \arrow[ur, "H_X(\lambda_j)"'] &
\end{tikzcd}$$

y Φ es isomorfismo. Hemos visto que si X_B es $\mathcal{G}(B)$-compacto, H_X conmuta con coproductos. Recíprocamente, si H_X conmuta con coproductos, podemos remontar el argumento anterior y al final especializamos en $s = 0$ para obtener que X_B es $\mathcal{G}(B)$-compacto.

□

PROPOSICIÓN 3.96.

Sean $M \in \mathscr{C}(A)$ y $N \in \mathscr{C}(B)$. Entonces se tiene que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{B})}(\mathrm{T_X}(\mathrm{M}),\mathrm{N}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{A})}(\mathrm{M},\mathrm{H_X}(\mathrm{N}))$$

donde el isomorfismo es natural en M y en N.

DEMOSTRACIÓN.

Construiremos un morfismo $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{B})}(\mathrm{T_X}(\mathrm{M}),\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{A})}(\mathrm{M},\mathrm{H_X}(\mathrm{N}))$, para $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{B})}(\mathrm{T_X}(\mathrm{M}),\mathrm{N})$ y m en M^i, queremos definir a $\eta(h)(m)$ el cual estará en $H_X(N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{N})$.
Si $x \in X$ es homogéneo, hacemos $\eta(h)(m)(x) := (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}}h(m\otimes x)$. Veamos que se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) $\eta(h)(m)$ es homogéneo de grado i.
Observemos que si x está en X^j tenemos que $m \otimes x$ está en $T_X(M)^{i+j}$ y esto implica que $(-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} h(m \otimes x) = \eta(h)(m)(x)$ está en N^{i+j}. Por lo tanto, $\eta(h)(m)$ es homogéneo de grado i.

(b) $\eta(h)(m)$ es un morfismo homogéneo de Mod-B de grado i.
Si $b \in B$ es homogéneo,

$$\eta(h)(m)(xb) = (-1)^{\mathrm{gr(m)(gr(x)+gr(b))}} h(m \otimes xb)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)+gr(m)gr(b)}} h(m \otimes x)b$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(b)}} \eta(h)(m)(x)b.$$

(c) $\eta(h)$ es morfismo de Mod-A graduados.
Debemos probar que $\eta(h)(ma) = [\eta(h)(m)] * a$. Podemos suponer que $m \in M$ y $a \in A$ son homogéneos. Luego,

$$\eta(h)(ma)(x) = (-1)^{\mathrm{(gr(m)+gr(a))gr(x)}} h(ma \otimes x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{(gr(m)+gr(a))gr(x)+gr(a)gr(x)}} h(m \otimes ax) = (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} h(m \otimes ax)$$

$$= (-1)^{i\mathrm{gr(a)+gr(m)(gr(a)+gr(x))}} h(m \otimes ax) = (-1)^{i\mathrm{gr(a)}} \eta(h)(m)(ax)$$

$$= [\eta(h)(m) * a](x).$$

Como, además, $\eta(h)(M^i) \subseteq \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}) = \mathrm{H_X(N)^i}$ entonces $\eta(h)$ es un morfismo de Mod-A graduados.

(d) $\eta(h)$ conmuta con las diferenciales.
Veamos que se cumple que $\eta(h)(d(m)) = \delta(\eta(h)(m))$, $\forall m \in M$, homogéneo. Sea $x \in X$ homogéneo, entonces

$$\eta(h)(d(m))(x) = (-1)^{\mathrm{(gr(m)+1)gr(x)}} h(d(m) \otimes x).$$

Como $d(m \otimes x) = m \otimes d(x) + (-1)^{\mathrm{gr(x)}} d(m) \otimes x$ despejando, tenemos

$$(-1)^{\mathrm{gr(x)}} d(m) \otimes x = d(m \otimes x) - m \otimes d(x).$$

Entonces, si $\mathrm{gr(m) = i}$, como $\mathrm{gr(\eta(h)(m)) = i}$, tenemos

$$\eta(h)(d(m))(x) = (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} [h(d(m \otimes x)) - h(m \otimes d(x))]$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} d(h(m \otimes x)) - (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} h(m \otimes d(x))$$

$$= d(\eta(h)(m)(x)) - (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)+gr(m)(gr(x)+1)}} \eta(h)(m)(d_X(x))$$

$$= d_N(\eta(h)(m)(x)) - (-1)^i \eta(h)(m)(d_X(x)) = \delta(\eta(h)(m))(x).$$

Luego, tenemos que $\eta(h)$ es un morfismo de A-módulos diferenciales derechos.

Sólo queda por demostrar que η es isomorfismo. Sea $h : T_X(M) \longrightarrow N$ tal que $\eta(h) = 0$. Queremos ver que $h = 0$. Tenemos $\eta h(m)(x) = 0$ $\forall m \in M$ y $\forall x \in X$ homogéneos, es decir, $\eta h(m)(x) = (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} h(m \otimes x) = 0$. Por lo tanto, para todo m en M, x en X homogéneos, tenemos $h(m \otimes x) = 0$. Como los elementos $m \otimes x$ generan a $M \otimes_A X$ entonces $h = 0$. Así η es monomorfismo.

Ahora veamos que η es epimorfismo. Sea $u : M \longrightarrow H_X(N)$, deseamos encontrar $h : T_X(M) \longrightarrow N$ tal que $\eta(h) = u$. Sea $M \times X \xrightarrow{\overline{\lambda}} N$ la transformación bilineal tal que para elementos homogéneos $m \in M$, $x \in X$ $\overline{\lambda}(m, x) = (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} u(m)(x)$.

(a) $\overline{\lambda}$ es homogénea.
Claramente $\overline{\lambda}(M^i \times X^j) \subseteq N^{i+j}$, pues si $m \in M^i$, $u(m) \in H_X(N)^i$.

(b) $\overline{\lambda}$ es bilineal.
Por construcción.

(c) $\overline{\lambda}(ma, x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} \overline{\lambda}(m, ax)$
Sean m en M, a en A y x en X elementos homogéneos, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}(ma, x) &= (-1)^{\mathrm{(gr(m)+gr(a))gr(x)}} u(ma)[x] \\ &= (-1)^{\mathrm{(gr(m)+gr(a))gr(x)}} [u(m) * a][x] \\ &= (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)+gr(a)gr(x)+gr(m)gr(a)}} u(m)[ax]. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\overline{\lambda}(m, ax) = (-1)^{\mathrm{gr(m)(gr(a)+gr(x))}} u(m)[ax]$$

así que

$$\overline{\lambda}(ma, x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} \overline{\lambda}(m, ax).$$

Entonces tenemos la existencia de $\lambda : M \otimes_A X \longrightarrow N$ homogéneo tal que $\lambda(m \otimes x) = (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} u(m)[x]$, es decir, tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times X \arrow[r, "\overline{\lambda}"] \arrow[d] & N \\ M \otimes_A X. \arrow[ur, dotted, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

(c) λ es morfismo de B-módulos
Sea $m \in M$, $x \in X$ y $b \in B$ elementos homogéneos, luego

$$\begin{aligned} \lambda(m \otimes xb) &= (-1)^{\mathrm{gr(m)(gr(x)+gr(b))}} u(m)(xb) \\ &= (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)+gr(m)gr(b)}} u(m)(xb) \\ &= (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} (u(m)[x])b = \lambda(m \otimes x)b. \end{aligned}$$

(d) λ conmuta con la diferencial.
Si $m \in M$ y $x \in X$ son homogéneos, tenemos

$$\delta(u(m)) = d_N u(m) - (-1)^{\mathrm{gr(m)}} u(m) d_X.$$

Luego

$$\begin{gathered}
d_N \lambda(m \otimes x) = (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} d_N(u(m)[x]) \\
= (-1)^{\mathrm{gr(m)(gr(x)+1)}} u(m)[d_X(x)] + (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} d_N(u(m)[x]) \\
-(-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)+gr(m)}} u(m)(d_X[x]) = (-1)^{\mathrm{gr(m)(gr(x)+1)}} u(m)[d_X(x)] \\
+(-1)^{\mathrm{gr(x)gr(m)}} [d_N u(m) - (-1)^{\mathrm{gr(m)}} u(m) d_X][x] \\
= (-1)^{\mathrm{gr(m)(gr(x)+1)}} u(m)[d_X(x)] + (-1)^{\mathrm{gr(x)gr(m)}} \delta(u(m))[x] \\
= (-1)^{\mathrm{gr(x)}} [(-1)^{\mathrm{(gr(m)+1)gr(x)}} u(d_M(m))[x] + (-1)^{\mathrm{gr(m)(gr(x)+1)}} u(m)[d_X(x)] \\
= (-1)^{\mathrm{gr(x)}} \lambda(d_M(m) \otimes x) + \lambda(m \otimes d_X(x)) = \lambda(d(m \otimes x)).
\end{gathered}$$

Por lo tanto, $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{B})}(\mathrm{T_X(M), N})$ y $\eta(\lambda) = u$. Esto comprueba que η es un isomorfismo. Es fácil ver que η es natural en M y N.

□

OBSERVACIÓN 3.97.
Dado un AB-bimódulo X, las recetas dadas para H_X y T_X también definen funtores $T_X : \mathcal{G}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(B)$ y $H_X : \mathcal{G}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(B)$. El argumento anterior también muestra que hay un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{T_X(M), N}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{A})}(\mathrm{M, H_X(N)})$$

que es natural en $M \in \mathcal{G}(A)$ y $N \in \mathcal{G}(B)$.

PROPOSICIÓN 3.98.
Los funtores $H_X : \mathcal{G}(B) \longrightarrow \mathcal{G}(A)$ y $H_X : \mathscr{C}(B) \longrightarrow \mathscr{C}(A)$ son exactos izquierdos.

DEMOSTRACIÓN.
Veamos primero que $H_X : \mathcal{G}(B) \longrightarrow \mathcal{G}(A)$ es exacto izquierdo. Sea

$$\xi : \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[r, "g"] & N_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

una sucesión exacta en $\mathcal{G}(B)$. Mostremos la exactitud en $\mathcal{G}(A)$ de

$$H_X(\xi) : \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_X(N_1) \arrow[r, "H_X(f)"] & H_X(N_2) \arrow[r, "H_X(g)"] & H_X(N_3). \end{tikzcd}$$

Claramente, como f es inyectiva, también lo es $H_X(f)$. Como H_X es un funtor aditivo $H_X(g)H_X(f) = H_X(gf) = 0$. Veamos que el $\mathrm{Ker(H_X(g))} \subseteq \mathrm{Im(H_X(f))}$. Bastará probar que para cada $u \in \mathrm{Ker(H_X(g))}$ homogéneo, es decir

$u \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}_2)$ tal que $gu = 0$, tenemos $u \in \mathrm{Im}(\mathrm{H}_{\mathrm{X}}(\mathrm{f}))$. Por la proposición 3.90, tenemos que $\mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, \mathrm{N}_2[\mathrm{i}])$. Luego, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, dotted, "v"'] \arrow[d, "u"] & & \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f"'] & N_2 \arrow[r, "g"'] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con renglón exacto en $\mathcal{G}(B)$ y donde v existe en $\mathcal{G}(B)$ tal que $fv = u$ porque $gu = H_X(g)[u] = 0$. Luego $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, \mathrm{N}_1[\mathrm{i}]) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}_1)$ es tal que $H_X(f)[v] = fv = u$. Luego, la sucesión $H_X(\xi)$ es exacta en $\mathcal{G}(A)$. Para la segunda parte, notemos que una sucesión en $\mathscr{C}(A)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es exacta si y sólo si su imagen bajo el funtor olvidadizo $F : \mathscr{C}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(A)$ lo es. Notemos también que tenemos el siguiente cuadro conmutativo de funtores:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(B) \arrow[r, "H_X"] \arrow[d, "F"'] & \mathscr{C}(A) \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{G}(B) \arrow[r, "H_X"'] & \mathcal{G}(A).
\end{tikzcd}$$

Como el reglón inferior es exacto izquierdo, también lo es el superior.

□

LEMA 3.99.
La sucesión $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ *es exacta en* $\mathcal{G}$ *si y sólo si,* $\forall L \in \mathcal{G}$, *la siguiente sucesión es exacta* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{N}, \mathrm{L}) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{E}, \mathrm{L}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M}, \mathrm{L})$.

DEMOSTRACIÓN.
$\boxed{\Rightarrow}$ Es claro que $f^*g^* = (gf)^* = 0$. Si $f^*(\alpha) = 0$, con $\alpha : E \longrightarrow L$, tenemos que $\alpha f = f^*(\alpha) = 0$, luego existe el morfismo $\beta : N \longrightarrow L$ tal que $\alpha = \beta g$. Por tanto $\alpha \in \mathrm{Im}(\mathrm{g}^*)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Tomemos $N = L$, vemos que $gf = f^*g^*(1_N) = 0$. Luego, tomando $L = \mathrm{Coker}(\mathrm{f})$, vemos que la proyección canónica $\pi : E \longrightarrow \mathrm{Coker}(\mathrm{f})$ satisface $0 = \pi f = f^*(\pi)$. Entonces, existe $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{N}, \mathrm{L})$ tal que $\sigma g = g^*(\sigma) = \pi$, de modo que $\mathrm{Ker}(\mathrm{g}) \subseteq \mathrm{Ker}(\sigma\mathrm{g}) = \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(\mathrm{f})$

□

LEMA 3.100.
Los funtores $T_X : \mathcal{G}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(B)$ *y* $T_X : \mathscr{C}(A) \longrightarrow \mathscr{C}(B)$ *son exactos derechos.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{G}(A)$. Consideremos la sucesión

$$M \otimes_A X \xrightarrow{f\otimes 1} E \otimes_A X \xrightarrow{g\otimes 1} N \otimes_A X \longrightarrow 0.$$

Como cada generador $n \otimes x \in N \otimes_A X$ es de la forma $m \otimes x = (g \otimes 1)[e \otimes 1]$ para alguna $e \in E$, $g \otimes 1$ es suprayectivo. Por el lema 3.99, para ver la exactitud de la sucesión en $E \otimes_A X$, bastará mostrar que, para cada $L \in \mathcal{G}(A)$, es exacto el primer renglón del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(B)}(N \otimes_A X, L) \arrow[r, "(g\otimes 1)^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(B)}(E \otimes_A X, L) \arrow[r, "(f\otimes 1)^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(B)}(N \otimes_A X, L) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(A)}(N, H_X(L)) \arrow[r, "g^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(A)}(E, H_X(L)) \arrow[r, "f^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(A)}(N, H_X(L)).
\end{tikzcd}$$

El renglón inferior es exacto por el lema anterior y, entonces, también el primero lo es.

□

Veamos las siguientes propiedades importantes que tienen H_X y T_X.

PROPOSICIÓN 3.101.
Si $0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta en* $\mathscr{C}(B)$ *que se divide en la categoría graduada* $\mathcal{G}(B)$*, entonces tenemos que la sucesión* $0 \longrightarrow H_X(N_1) \xrightarrow{H_X(f)} H_X(N_2) \xrightarrow{H_X(g)} H_X(N_3) \longrightarrow 0$ *es exacta en* $\mathscr{C}(A)$ *y se divide en la categoría graduada* $\mathcal{G}(A)$*. Esto es* $H_X(\mathscr{E}(B)) \subseteq \mathscr{E}(A)$*.*

DEMOSTRACIÓN.
Tenemos que H_X induce un funtor de $\mathcal{G}(B)$ en $\mathcal{G}(A)$ y la siguiente sucesión se divide en $\mathcal{G}(B)$, $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$, Entonces al aplicarle el funtor H_X la sucesión resultante se divide en $\mathcal{G}(A)$.

□

PROPOSICIÓN 3.102.
Si $0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta en* $\mathscr{C}(A)$ *que se divide en* $\mathcal{G}(A)$*. Entonces al aplicarle el funtor* T_X *a la sucesión anterior obtenemos* $0 \longrightarrow T_X(N_1) \xrightarrow{T_X(f)} T_X(N_2) \xrightarrow{T_X(g)} T_X(N_3) \longrightarrow 0$ *la cual es exacta en* $\mathscr{C}(B)$ *y se divide en* $\mathcal{G}(B)$*. Esto es* $T_X(\mathscr{E}(A)) \subseteq \mathscr{E}(B)$*.*

DEMOSTRACIÓN.
La demostración es análoga a la anterior.

□

PROPOSICIÓN 3.103.

Sea M $\mathscr{E}(A)$-proyectivo, entonces $T_X(M)$ es $\mathscr{E}(B)$-proyectivo.

DEMOSTRACIÓN.
Consideremos la siguiente $\mathscr{E}(B)$-sucesión $N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$. Al aplicarle el funtor covariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(B)}(T_X(M),-)$ obtenemos la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}B)}(T_X(M),N_1)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(B)}(T_X(M),N_2) \longrightarrow$$

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(B)}(T_X(M),N_3) \longrightarrow 0$
pero esta sucesión es equivalente a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(M,H_X(N_1)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(M,H_X(N_2)) \longrightarrow$$

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(M,H_X(N_3)) \longrightarrow 0$
Como M es $\mathscr{E}(A)$-proyectivo, la última sucesión es exacta, luego la primera sucesión también lo es, y esto nos dice que $T_X(M)$ es $\mathscr{E}(B)$-proyectivo.

□

PROPOSICIÓN 3.104.

Si N es $\mathscr{E}(B)$-inyectivo, entonces tenemos que $H_X(N)$ es $\mathscr{E}(A)$-inyectivo.

DEMOSTRACIÓN.
Al igual que en la proposición anterior apliquemos el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(-,H_X(N))$ a la $\mathscr{E}(A)$-sucesión $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ para obtener la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(M_3,H_X(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(M_2,H_X(N)) \longrightarrow$$

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(M_1,H_X(N)) \longrightarrow 0$
la cual es equivalente a la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(B)}(T_X(M_3),N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(B)}(T_X(M_2),N) \longrightarrow$$

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(B)}(T_X(M_3),N) \longrightarrow 0$.
Esta última es exacta ya que N es $\mathscr{E}(B)$-inyectivo, y esto implica que la primera sucesión también resulta exacta y por lo tanto $H_X(N)$ es $\mathscr{E}(A)$-inyectivo.

□

DEFINICIÓN 3.105.

Por todo lo anterior, tenemos que el funtor T_X manda proyectivos en proyectivos, entonces T_X induce un funtor entre las categorías estables $\underline{\mathscr{C}}(B)$ y $\underline{\mathscr{C}}(A)$, es decir $\underline{\mathscr{C}}(A) \xrightarrow{T_X} \underline{\mathscr{C}}(B)$ como es de Frobenius, tenemos que también el funtor H_X induce un funtor entre las respectivas categorías estables $\underline{\mathscr{C}}(B) \xrightarrow{H_X} \underline{\mathscr{C}}(A)$.

Lo que veremos a continuación, es que el funtor T_X es un funtor exacto de categorías trianguladas. Para ello requeriremos lo siguiente.

LEMA 3.106.
Si $M \xrightarrow{u_M} J(M) \xrightarrow{v_M} M[1]$ *es la $\mathscr{E}$-sucesión canónica asociada a M, hay un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}(B)$*

$$\begin{tikzcd}
T_X(M) \arrow[r, "T_X(u_M)"] \arrow[d, equal] & T_X(J(M)) \arrow[r, "T_X(v_M)"] \arrow[d, "\psi_M"] & T_X(M[1]) \arrow[d, "\varphi_M"] \\
T_X(M) \arrow[r, "u_{T_X(M)}"'] & J(T_X(M)) \arrow[r, "v_{T_X(M)}"'] & T_X(M)[1]
\end{tikzcd}$$

donde: el primer renglón es la imagen bajo T_X de la $\mathscr{E}$-sucesión de arriba, el segundo renglón es la $\mathscr{E}$-sucesión canónica asociada a $T_X(M)$, φ_M es el isomorfismo de la proposición 3.88 y ψ_M es también isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\widehat{\psi}_M : J(M) \times X \longrightarrow J(T_X(M))$ la función bilineal definida por

$$\widehat{\psi}_M\left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, x\right) = \begin{pmatrix} m \otimes x \\ m \otimes d(x) + (-1)^{\mathrm{gr(x)}} n \otimes x \end{pmatrix}.$$

Claramente, $\widehat{\psi}_M(J(M)^i \times X^j) \subseteq J(T_X(M))^{i+j}$.
Si $m \in M^i, n \in M^{i+1}, x \in X^j, a \in A^t$, tenemos

$$\widehat{\psi}_M\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} a, x\right] = \widehat{\psi}_M\left[\begin{pmatrix} ma \\ md(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} na \end{pmatrix}, x\right]$$

$$= \begin{pmatrix} ma \otimes x \\ ma \otimes d(x) + (-1)^{\mathrm{gr(x)}} md(a) \otimes x + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(x)}} na \otimes x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} m \otimes ax \\ (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}}[(-1)^{\mathrm{gr(a)}} m \otimes ad(x) + (-1)^{2\mathrm{gr(x)}} m \otimes d(a)x + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(x)}} n \otimes ax] \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\widehat{\psi}_M\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, ax\right] = \begin{pmatrix} m \otimes ax \\ m \otimes d(ax) + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(x)}} n \otimes ax \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m \otimes ax \\ m \otimes d(a)x + m \otimes (-1)^{\mathrm{gr(a)}} ad(x) + (-1)^{\mathrm{gr(a)+gr(x)}} n \otimes ax \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\widehat{\psi}_M\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} a, x\right] = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(x)}} \widehat{\psi}_M\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, ax\right]$$

y $\widehat{\psi}_M$ es A-balanceada. Luego, tenemos una función lineal y homogénea $\psi_M : J(M)\otimes_A X \longrightarrow J(T_X(M))$ tal que

$$\psi_M\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes x\right] = \begin{pmatrix} m\otimes x \\ m\otimes d(x)+(-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x \end{pmatrix}.$$

Veamos que ψ_M es morfismo de B-módulos graduados derechos:

$$\psi_M\left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes x\right)b = \begin{pmatrix} m\otimes x \\ m\otimes d(x)+(-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x \end{pmatrix}b$$

$$= \begin{pmatrix} m\otimes xb \\ m\otimes xd(b)+(-1)^{\mathrm{gr(b)}}[m\otimes d(x)+(-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x]b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m\otimes xb \\ m\otimes [xd(b)+(-1)^{\mathrm{gr(b)}}d(x)b]+(-1)^{\mathrm{gr(x)+gr(b)}}n\otimes xb \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m\otimes xb \\ m\otimes d(xb)+(-1)^{\mathrm{gr(x)+gr(b)}}n\otimes xb \end{pmatrix}$$

$$= \psi_M\left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes xb\right) = \psi_M\left(\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes x\right]b\right).$$

Veamos que conmuta con las diferenciales

$$\psi_M d\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes x\right] = \psi_M\left[(-1)^{\mathrm{gr(x)}}d\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes x + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes d(x)\right]$$

$$= \psi_M\left[(-1)^{\mathrm{gr(x)}}\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}\otimes x + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes d(x)\right]$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x + m\otimes d(x) \\ (-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes d(x)+m\otimes d^2(x)+(-1)^{\mathrm{gr(x)}+1}n\otimes d(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m\otimes d(x)+(-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$d\psi_M\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes x\right] = d\begin{bmatrix} m\otimes x \\ m\otimes d(x)+(-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m\otimes d(x)+(-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces $\psi_M d = d\psi_M$ y ψ_M es morfismo en $\mathscr{C}$. Ahora veamos que conmuta el cuadro derecho:

$$\varphi_M T_X(v_M)\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes x\right] = \varphi_M[(d_{M[1]}(m)+n)\otimes x]$$

$$= \varphi_M[-d_M(m)\otimes x + n\otimes x] = -(-1)^{\mathrm{gr(x)}}d_M(m)\otimes x + (-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x.$$

Por otro lado,

$$v_{T_X(M)}\psi_M\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\otimes x\right] = v_{T_X(M)}\left[\begin{array}{c} m\otimes x \\ m\otimes d(x) + (-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x \end{array}\right]$$

$$= d_{(M\otimes X)[1]}(m\otimes x) + m\otimes d(x) + (-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x$$

$$= -(-1)^{\mathrm{gr(x)}}d(m)\otimes x - m\otimes d(x) + m\otimes d(x) + (-1)^{\mathrm{gr(x)}}n\otimes x.$$

Así $\varphi_M T_X(v_M) = v_{T_X(M)}\psi_M$. Veamos que el primer cuadro también conmuta

$$\psi_M T_X(u_M)[m\otimes x] = \psi_M\left[\begin{pmatrix} m \\ d(m) \end{pmatrix}\otimes x\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} m\otimes x \\ m\otimes d(x) + (-1)^{\mathrm{gr(x)}}d(m)\otimes x \end{array}\right] = u_{T_X(M)}[m\otimes x].$$

Como el diagrama conmuta con el isomorfismo φ_M y ambos renglones son $\mathscr{E}$-sucesiones, luego ψ_M también es isomorfismo.

□

PROPOSICIÓN 3.107.
El funtor $T_X : \underline{\mathscr{C}}(A) \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}(B)$ *es funtor exacto de categorías trianguladas.*

DEMOSTRACIÓN.
Sean $M, E, N \in \mathscr{C}(A)$ y consideremos el siguiente triángulo en $\underline{\mathscr{C}}(A)$ $M \xrightarrow{\pi(f)} E \xrightarrow{\pi(g)} N \xrightarrow{\pi(w)} M[1]$. Podemos suponer que tenemos una $\mathscr{E}$-sucesión $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[d, "w"] \\
M \arrow[r] & J(M) \arrow[r] & M[1].
\end{tikzcd}$$

Aplicándole el funtor T_X y agregando el diagrama del lema anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones

$$\begin{tikzcd}
T_X(M) \arrow[r, "T_X(f)"] \arrow[d, equal] & T_X(E) \arrow[r, "T_X(g)"] \arrow[d] & T_X(N) \arrow[d, "T_X(w)"] \\
T_X(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_X(J(M)) \arrow[r] \arrow[d] & T_X(M[1]) \arrow[d, "\varphi_M"] \\
T_X(M) \arrow[r] & J(T_X(M)) \arrow[r] & T_X(M)[1].
\end{tikzcd}$$

Luego, $T_X(M) \xrightarrow{T_X(f)} T_X(E) \xrightarrow{T_X(g)} T_X(N) \xrightarrow{\varphi_M T_X(w)} T_X(M)[1]$ es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}(B)$.

□

PROPOSICIÓN 3.108.
$H_X(M[1]) \cong H_X(M)[1]$.

DEMOSTRACIÓN.
Notemos que

$$H_X(M[1])^i = \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{M}[1]) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{i+1}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{M}) = \mathrm{H_X(M)^{i+1}} = \mathrm{(H_X(M)[1])^i}$$

luego tenemos que $H_X(M[1]) = H_X(M)[1]$. Ahora veamos que el isomorfismo conmuta con las diferenciales Si $f \in H_X(M[1])^i$,

$$d_{H_X(M[1])}(f) = d_{M[1]}f - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f d_X = -d_M f - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f d_X$$

$$= -d_M f + (-1)^{\mathrm{gr(f)}+1} f d_X.$$

Por otro lado,

$$d_{H_X(M)[1]}(f) = -d_{H_X(M)}(f) = -d_M f + (-1)^{\mathrm{gr(f)}+1} f d_X$$

donde la última igualdad se cumple ya que el grado de f en $H_X(M)$ es $i+1$.

□

LEMA 3.109.
Si $M \xrightarrow{u_M} J(M) \xrightarrow{v_M} M[1]$ *es la* $\mathscr{E}$*-sucesión canónica asociada a* M*, hay una diagrama conmutativo en* $\mathscr{C}(A)$

$$\begin{tikzcd}
H_X(M) \arrow[r, "H_X(u_M)"] \arrow[d, equal] & H_X(J(M)) \arrow[r, "H_X(v_M)"] \arrow[d, "\phi_M"] & H_X(M[1]) \arrow[d, equal] \\
H_X(M) \arrow[r, "u_{H_X(M)}"'] & J(H_X(M)) \arrow[r, "v_{H_X(M)}"'] & H_X(M)[1]
\end{tikzcd}$$

donde: el primer renglón es la imagen bajo H_X *de la* $\mathscr{E}$*-sucesión de arriba, el segundo renglón es la* $\mathscr{E}$*-sucesión canónica asociada a* $H_X(M)$ *y* ϕ_M *es isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\phi_M : H_X(J(M)) \longrightarrow J(H_X(M))$ la transformación lineal definida como sigue. Sea $f \in H_X(J(M))^i = \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{J(M)})$, entonces f tiene restricciones que determinan funciones lineales $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom_k(X, M)}$,

$$f^j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \end{pmatrix} : X^j \longrightarrow M^{i+j} \oplus M^{i+j+1},$$

y hacemos $\phi_M(f) := \begin{pmatrix} f_1 \\ \widehat{f_2} \end{pmatrix}$ donde $f_1 \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{M})$ y $\widehat{f_2} := f_2 - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f_1 d_X \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i+1}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{M})$. Veamos que $\phi_M(f)$ está bien definido. Sean $b \in B$ y $x \in X^j$, luego

$$\begin{pmatrix} f_1(xb) \\ f_2(xb) \end{pmatrix} = f(xb) = (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} f(x)b = (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} b$$

$$= (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} \begin{pmatrix} f_1(x)b \\ f_1(x)d(b) + (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f_2(x)b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} f_1(x)b \\ (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} f_1(x)d(b) + (-1)^{i\mathrm{gr(b)}+\mathrm{gr(b)}} f_2(x)b \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $f_1(xb) = (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} f_1(x)b$, y tenemos que $f_2(xb) = (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} f_1(x)d(b) + (-1)^{i\mathrm{gr(b)}+\mathrm{gr(b)}} f_2(x)b$. Luego, $f_1 \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{M})$. Veamos que $\widehat{f_2} \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i+1}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{M})$.

$$\widehat{f_2}(xb) = [f_2 - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f_1 d_X](xb) = f_2(xb) - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f_1(d_X(xb))$$

$$= (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} f_1(x)d(b) + (-1)^{i\mathrm{gr(b)}+\mathrm{gr(b)}} f_2(x)b - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f_1[xd(b) + (-1)^{\mathrm{gr(b)}} d_X(x)b]$$

$$= (-1)^{i\mathrm{gr(b)}} f_1(x)d(b) + (-1)^{i\mathrm{gr(b)}+\mathrm{gr(b)}} f_2(x)b - (-1)^{\mathrm{gr(f)}+\mathrm{i(gr(b)+1)}} f_1(x)d(b)$$

$$-(-1)^{\mathrm{gr(f)+gr(b)+igr(b)}} f_1(d(x))b$$

$$= (-1)^{i\mathrm{gr(b)}+\mathrm{gr(b)}} f_2(x)b - (-1)^{i\mathrm{gr(b)}+\mathrm{gr(b)}+\mathrm{gr(f)}} f_1(d(x))b$$

$$= (-1)^{(i+1)\mathrm{gr(b)}} [f_2(x) - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f_1(d(x))]b = (-1)^{(i+1)\mathrm{gr(b)}} \widehat{f_2}(x)b.$$

Veamos que $\phi_M : H_X(J(M)) \longrightarrow J(H_X(M))$ es morfismo de A-módulos derechos. Sean $f \in H_X(J(M))$ y $a \in A$ homogéneos. Entonces $\phi_M(fa) = \begin{pmatrix} (fa)_1 \\ (\widehat{fa})_2 \end{pmatrix}$ y $\phi_M(f)a = \begin{pmatrix} f_1 \\ \widehat{f_2} \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} f_1 a \\ f_1 d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} \widehat{f_2} a \end{pmatrix}$.
Debemos mostrar que $(fa)_1 = f_1 a$ y que $\widehat{fa}_2 = f_1 d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} \widehat{f_2} a$. Sea $x \in X$ homogéneo. Entonces,

$$\begin{pmatrix} (fa)_1(x) \\ (fa)_2(x) \end{pmatrix} = (fa)(x) = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} f(ax) = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} \begin{pmatrix} f_1(ax) \\ f_2(ax) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$(fa)_1(x) = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} f_1(ax) = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)+gr(f_1)gr(a)}} (f_1 a)(x) = (f_1 a)(x).$$

Luego, $(fa)_1 = f_1 a$. Pero, también tenemos $(fa)_2(x) = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} f_2(ax)$. Entonces:

$$[f_1 d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} \widehat{f_2} a](x) = (f_1 d(a))[x] + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} (\widehat{f_2} a)(x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{(gr(a)+1)gr(f)}} f_1(d(a)x) + (-1)^{\mathrm{gr(a)+(gr(f)+1)gr(a)}} \widehat{f_2}(ax)$$

$$= (-1)^{(\mathrm{gr(a)}+1)\mathrm{gr(f)}} f_1(d(a)x) + (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}}[f_2 + (-1)^{\mathrm{gr(f)}+1} f_1 d_X][ax]$$
$$= (-1)^{(\mathrm{gr(a)}+1)\mathrm{gr(f)}} f_1(d(a)x) + (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} f_2(ax) + (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}+\mathrm{gr(f)}+1} f_1[d_X(ax)]$$
$$= (-1)^{(\mathrm{gr(a)}+1)\mathrm{gr(f)}} f_1(d(a)x) + (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} f_2(ax)$$
$$+(-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}+\mathrm{gr(f)}+1} f_1[d(a)x + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} a d_X(x)]$$
$$= (-1)^{(\mathrm{gr(a)}+1)\mathrm{gr(f)}} f_1(d(a)x) + (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}} f_2(ax)$$
$$+(-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}+\mathrm{gr(f)}+1} f_1(d(a)x) + (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(a)}+\mathrm{gr(f)}+1+\mathrm{gr(a)}} f_1(a d_X(x))$$
$$= (fa)_2[x] + (-1)^{\mathrm{gr(f)}+\mathrm{gr(a)}+1}(fa)_1[d_X(x)] = [(fa)_2 + (-1)^{\mathrm{gr(f)}+\mathrm{gr(a)}+1}(fa)_1 d_X][x]$$
$$= \widehat{(fa)}_2[x].$$

Así, tenemos $\widehat{(fa)}_2 = f_1 d(a) + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} \widehat{f}_2 a$, como deseabamos demostrar. Ahora veamos que $\phi_M d_{H_X(J(M))} = d_{J(H_X(M))}\phi_M$. Sea $f \in H_X(J(M))^i$, luego

$$d_{J(H_X(M))}\phi_M(f) = d_{J(H_X(M))} \begin{pmatrix} f_1 \\ \widehat{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{f}_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\phi_M d_{H_X(J(M))}(f) = \phi_M[d_{J(M)} f - (-1)^i f d_X] = \phi_M \left(\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1)^i \begin{pmatrix} f_1 d_X \\ f_2 d_X \end{pmatrix} \right)$$
$$= \phi_M \begin{pmatrix} f_2 - (-1)^i f_1 d_X \\ -(-1)^i f_2 d_X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} f_2 - (-1)^i f_1 d_X \\ -(-1)^i f_2 d_X - (-1)^{grf+1}[f_2 - (-1)^i f_1 d_X] d_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 - (-1)^i f_1 d_X \\ 0 \end{pmatrix}$$

y tenemos $[d_{J(H_X}\phi_M(f) = d_{J(H_X(M))}\phi_M(f)$. Ahora veamos que el primer cuadrado conmuta.

$$\phi_M H_X(u_M)(f) = \phi_M(u_M f) = \phi_M \begin{pmatrix} f \\ d_M f \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} f \\ d_M f - (-1)^{grf} f d_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ d_{H_X(M)}(f) \end{pmatrix} = u_{H_X(M)}(f).$$

Ahora veamos que el segundo cuadrado conmuta

$$v_{H_X(M)}\phi_M(f) = v_{H_X(M)} \begin{pmatrix} f_1 \\ \widehat{f}_2 \end{pmatrix} = d_{H_X(M)[1]}(f_1) + \widehat{f}_2$$
$$= -d_{H_X(M)}(f_1) + f_2 - (-1)^{grf} f_1 d_X = -d_M f_1 + (-1)^i f_1 d_X + f_2 - (-1)^{grf} f_1 d_X$$
$$= f_2 - d_M f_1 = f_2 + d_{M[1]} f_1 = (d_{M[1]}, 1_{M[1]}) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$
$$= v_M \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = H_X(v_M)(f).$$

Luego, $\phi_M : H_X(J(M)) \longrightarrow J(H_X(M))$ resulta isomorfismo.

□

PROPOSICIÓN 3.110.
El funtor $H_X : \underline{\mathscr{C}}(B) \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}(A)$ *es un funtor exacto de categorías trianguladas.*

DEMOSTRACIÓN.
Veamos que H_X manda triángulos en triángulos:
Sea $M \xrightarrow{\pi(f)} E \xrightarrow{\pi(g)} N \xrightarrow{\pi(w)} M[1]$ un triángulo en $\mathscr{C}(B)$. Podemos suponer que $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ es una $\mathscr{E}$-sucesión y que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[d, "w"] \\
M \arrow[r] & J(M) \arrow[r] & M[1].
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor H_X y aplicando el diagrama del lema 3.109, obtenemos el diagrama conmutativo con renglones $\mathscr{E}$-sucesiones

$$\begin{tikzcd}
H_X(M) \arrow[r, "H_X(f)"] \arrow[d, equal] & H_X(E) \arrow[r, "H_X(g)"] \arrow[d] & H_X(N) \arrow[d, "H_X(w)"] \\
H_X(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_X(J(M)) \arrow[r] \arrow[d] & H_X(M[1]) \arrow[d] \\
H_X(M) \arrow[r] & J(H_X(M)) \arrow[r] & H_X(M)[1].
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $H_X(M) \xrightarrow{H_X(f)} H_X(E) \xrightarrow{H_X(g)} H_X(N) \xrightarrow{H_X(w)} H_X(M)[1]$ es un triángulo en $\underline{\mathscr{C}}(A)$, luego H_X manda triángulos en triángulos, así que es un funtor exacto.

□

PROPOSICIÓN 3.111.
Sean $L, M \in \mathscr{C}$ *y* $M[-1] \xrightarrow{u_{M[-1]}} J(M[-1]) \xrightarrow{v_{M[-1]}} M$ *es la* $\mathscr{E}$*-sucesión canónica de* $M[-1]$*, entonces* $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(1_L, v_{M[-1]})) = \mathrm{P}(L, M)$*. En consecuencia,* $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(L, M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(L, M)/\mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}(1_L, v_{M[-1]})\right)$.

DEMOSTRACIÓN.
Recordemos que $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(L, M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(L, M)/\mathrm{P}(L, M)$, donde $P(L, M)$ es el subespacio vectorial formado por los morfismos $L \xrightarrow{f} M$ que se factorizan por proyectivos. Vamos a probar que $\mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}(1_L, v_{M[-1]})\right) = \mathrm{P}(L, M)$. Dado M, tenemos la $\mathscr{E}$-sucesión $M[-1] \xrightarrow{u_{M[-1]}} J_{M[-1]} \xrightarrow{v_{M[-1]}} M$. Sea $h \in \mathrm{Hom}(L, J(M[-1]))$.

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom(L,-)}$ a la sucesión anterior tenemos la siguiente sucesión $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{L},\mathrm{M}[-1]) \xrightarrow{u^*_{M[-1]}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{L},\mathrm{J}_{\mathrm{M}[-1]}) \xrightarrow{v^*_{M[-1]}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{L},\mathrm{M})$ donde $v^*_{M[-1]} := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1_{\mathrm{L}},\mathrm{v}_{\mathrm{M}[-1]})$. Observemos que $\mathrm{Im}(\mathrm{v}^*_{\mathrm{M}[-1]}) \subset \mathrm{P(L,M)}$. Sea $f \in P(L,M)$, entonces tenemos un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, bend right, "t"'] & & M \\
& Q \arrow[ur, bend right, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

donde Q es $\mathscr{E}$-proyectivo. Por esta razón, existe un morfismo $\eta : Q \longrightarrow J_{M[-1]}$

$$\begin{tikzcd}
& & Q \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[d, "s"] \\
M[-1] \arrow[r, "u_{M[-1]}"'] & J_{M[-1]} \arrow[r, "v_{M[-1]}"'] & M
\end{tikzcd}$$

tal que $v_{M[-1]}\eta = s$. Notemos que $f = st = v_{M[-1]}(\eta t) = v^*_{M[-1]}(\eta t) \in Imv^*_{M[-1]}$. Entonces tenemos que $\mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}(1_{\mathrm{L}},\mathrm{v}_{\mathrm{M}[-1]})\right) = \mathrm{Im}(\mathrm{v}^*_{\mathrm{M}[-1]}) = \mathrm{P(L,M)}$. □

PROPOSICIÓN 3.112.
Para $M \in \underline{\mathscr{C}}(A)$ y $N \in \underline{\mathscr{C}}(B)$ se tiene un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(\mathrm{B})}(\mathrm{T_X(M),N}) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(\mathrm{A})}(\mathrm{M,H_X(N)})$$

que es natural en M y en N.

DEMOSTRACIÓN.
Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{A})}(\mathrm{M},\mathrm{H_X}(\mathrm{J}(\mathrm{N}[-1]))) \arrow[d, "\phi^*_{N[-1]}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{B})}(\mathrm{T_X}(\mathrm{M}),\mathrm{J}(\mathrm{N}[-1])) \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "v^*_{N[-1]}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{A})}(\mathrm{M},\mathrm{J}(\mathrm{H_X}(\mathrm{N})[-1])) \arrow[d, "v^*_{H_X(N)[-1]}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{B})}(\mathrm{T_X(M),N}) \arrow[r, "\eta"'] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{A})}(\mathrm{M},\mathrm{H_X(N)}) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(\mathrm{B})}(\mathrm{T_X(M),N}) \arrow[r, "\overline{\eta}"'] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(\mathrm{A})}(\mathrm{M},\mathrm{H_X(N)}),
\end{tikzcd}$$

donde η es el isomorfismo de la proposición 3.96,

$$\begin{tikzcd} N[-1] \arrow[r] & J(N[-1]) \arrow[r, "v_{N[-1]}"] & N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H_X(N)[-1] \arrow[r] & J(H_X(N)[-1]) \arrow[r, "v_{H_X(N)[-1]}"] & H_X(N) \end{tikzcd}$$

son las $\mathscr{E}$-sucesiones canónicas, y $\phi_{N[-1]} : H_X(J(N[-1])) \longrightarrow J(H_X(N)[-1])$ es el isomorfismo del lema 3.109. Como η es natural en la segunda variable, el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(B)}(\mathrm{T_X(M), J(N[-1])}) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "v^*_{N[-1]}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(\mathrm{M, H_X(J(N[-1]))}) \arrow[d, "H_X(v_{N[-1]})^*"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(B)}(\mathrm{T_X(M), N}) \arrow[r, "\eta"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(\mathrm{M, H_X(N)}). \end{tikzcd}$$

Por otro lado, por el lema 3.109, tenemos $v_{H_X(N[-1])}\phi_{N[-1]} = H_X(v_{N[-1]})$. Hemos tomado por definición el isomorfismo $\eta' := \phi^*_{N[-1]}\eta$. Entonces,

$$\begin{aligned} v^*_{H_X(N)[-1]}\eta' = v^*_{H_X(N)[-1]}\phi^*_{N[-1]}\eta &= (v_{H_X(N[-1])}\phi_{N[-1]})^*\eta \\ = H_X(v_{N[-1]})^*\eta &= \eta v^*_{N[-1]}. \end{aligned}$$

Es decir, conmuta el cuadrado superior del diagrama. Por la proposición 3.111, esto implica que existe $\overline{\eta}$ isomorfismo tal que conmuta con el cuadrado inferior del diagrama. La naturalidad del isomorfismo $\overline{\eta}$ en ambas variables se sigue de la del isomorfismo η. □

PROPOSICIÓN 3.113.
Supongamos que ${}_AX_B$ y ${}_BY_C$ son bimódulos diferenciales. Entonces, hay un isomorfismo natural $T_Y \cdot T_X \cong T_{X\otimes_B Y}$ de funtores de $\mathscr{C}(A)$ en $\mathscr{C}(C)$.

DEMOSTRACIÓN.
Dado un A-módulo diferencial derecho M, consideremos el morfismo

$$T_Y(T_X(M)) = (M \otimes_A X) \otimes_B Y \xrightarrow{\eta_M} M \otimes_A (X \otimes_B Y) = T_{X\otimes_B Y}(M)$$

construido en el lema 3.64. Sólo nos resta observar que η_M es natural en M, pues si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo en $\mathscr{C}(A)$, conmuta

$$\begin{tikzcd} T_Y(T_X(M)) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "T_YT_X(f)"'] & (M \otimes_A X) \otimes_B Y \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "(f\otimes 1_X)\otimes 1_Y"] & M \otimes_A (X \otimes_B Y) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "f\otimes 1_{X\otimes_B Y}"'] & T_{X\otimes_A Y}(M) \arrow[d, "T_{X\otimes_B Y}(f)"] \\ T_Y(T_X(N)) \arrow[r, phantom, "="] & (N \otimes_A X) \otimes_B Y \arrow[r, "\eta_N"'] & N \otimes_A (X \otimes_B Y) \arrow[r, phantom, "="] & T_{X\otimes_B Y}(N) \end{tikzcd}$$

□

PROPOSICIÓN 3.114.
Sean X_1, X_2 dos AB-bimódulos y h un morfismo de AB-bimódulos entre ellos. Entonces h induce un morfismo de funtores exactos de $\underline{\mathscr{C}}(A)$ en $\underline{\mathscr{C}}(B)$ $T_h := T_{X_1} \longrightarrow T_{X_2}$. Para cada $M \in \mathscr{C}(A)$,

$$(T_h)_M := 1_M \otimes h : T_{X_1}(M) = M \otimes_A X_1 \longrightarrow M \otimes_A X_2 = T_{X_2}(M).$$

DEMOSTRACIÓN.
Recordemos, del lema 3.65, que $(T_h)_M = 1 \otimes h : T_{X_1}(M) \longrightarrow T_{X_2}(M)$ es un morfismo de B-módulos diferenciales derechos, que satisface

$$(1 \otimes h)[m \otimes x] = m \otimes h(x)$$

para $m \in M$ y $x \in X_1$. Veamos que T_h es natural en M. Sea $u : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos diferenciales derechos. Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
T_{X_1}(M) \arrow[r, "1\otimes h"] \arrow[d, "u\otimes 1_{X_1}"'] & T_{X_2}(M) \arrow[d, "u\otimes 1_{X_2}"] \\
T_{X_1}(N) \arrow[r, "1\otimes h"'] & T_{X_2}(N).
\end{tikzcd}$$

Sea $m \otimes x$ un generador de $T_{X_1}(M)$, entonces

$$(u \otimes 1_{X_2}) \circ (1 \otimes h)(m \otimes x) = (u \otimes 1_{X_2})(m \otimes h(x)) = u(m) \otimes h(x)$$

por otro lado,

$$(1 \otimes h) \circ (u \otimes 1_{X_1})(m \otimes x) = (1 \otimes h)(u(m) \otimes x) = u(m) \otimes h(x).$$

Entonces el diagrama es conmutativo. Ahora veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
T_{X_1}(M[1]) \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "(1\otimes h)"'] & (T_{X_1}M)[1] \arrow[d, "(1\otimes h)[1]"] \\
T_{X_2}(M[1]) \arrow[r, "\varphi_M"'] & (T_{X_2}M)[1].
\end{tikzcd}$$

Sea $m \otimes x$ un generador homogéneo de $T_{X_1}(M[1])$, digamos que $m \in M^{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\varphi_M((1 \otimes h)(m \otimes x)) = \varphi_M(m \otimes h(x)) = (-1)^{\mathrm{gr(h(x))}}(m \otimes h(x)).$$

Pero gr(h(x)) = gr(x), pues h es un morfismo de AB bimódulos, así que

$$\varphi_M((1 \otimes h)(m \otimes x)) = \varphi_M(m \otimes h(x)) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m \otimes h(x)).$$

Por otro lado

$$(1 \otimes h)[1](\varphi_M(m \otimes x)) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(1 \otimes h)[1](m \otimes x) = (-1)^{\mathrm{gr(x)}}(m \otimes h(x)).$$

Entonces tenemos que $1 \otimes h$ es morfismo de funtores exactos.

□

PROPOSICIÓN 3.115.
Sean ${}_AX_B$ y ${}_CY_B$ dos bimódulos diferenciales, entonces, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *es un CA-bimódulo diferencial.*

DEMOSTRACIÓN.
Tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{H_X}(\mathrm{Y})$, por lo tanto es un Mod-A diferencial. Dado $h \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ tenemos que es un morfismo $h : X \longrightarrow Y$ de grado i tal que para toda $x \in X$ y $b \in B$ homogéneos $[h(xb) = (-1)^{i\mathrm{gr(b)}}h(x)b$. Ahora analicemos la acción izquierda $C \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ dada por $(c \cdot h)(x) := ch(x)$ para $c \in C$ y $x \in X$. Para h, c elementos homogéneos, tenemos que $\mathrm{gr(c \cdot h) = gr(c) + gr(h)}$.

(a) Veamos que $c \cdot h$ saca los elementos de B de forma adecuada.

$$\begin{aligned}(c \cdot h)(xb) = ch(xb) = c[(-1)^{i\mathrm{gr(b)}}h(x)b] &= (-1)^{i\mathrm{gr(b)+gr(c)gr(b)}}(ch(x))b \\ &= (-1)^{\mathrm{(gr(c)+i)gr(b)}}[ch(x)]b.\end{aligned}$$

(b) Cumple la asociatividad. $c \cdot (c' \cdot h)(x) = c(c'h(x)) = cc'h(x) = (cc') \cdot h(x)$.

(c) Satisface la condición de Leibniz con respecto a la diferencial δ del A-módulo diferencial derecho $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Es decir que

$$\delta(ch) = d_C(c)h + (-1)^{\mathrm{gr(c)}}c\delta(h).$$

$$\begin{aligned}\delta(ch)(x) &= d_Y(ch(x)) - (-1)^{\mathrm{gr(c)+gr(h)}}ch(d_X(x)) \\ &= d_C(c)h(x) + (-1)^{\mathrm{gr(c)}}cd_Y(h(x)) - (-1)^{\mathrm{gr(c)+gr(h)}}ch(d_X(x)).\end{aligned}$$

Pero, por otro, lado tenemos que

$$(-1)^{\mathrm{gr(c)}}c\delta(h(x)) = (-1)^{\mathrm{gr(c)}}c[d_Y(h(x)) - (-1)^{\mathrm{gr(h)}}h(d_X(x))];$$

sumándole $d_C(c)h(x)$ obtenemos

$$d_C(c)h(x) + (-1)^{\mathrm{gr(c)}}cd_Y(h(x)) - (-1)^{\mathrm{gr(c)+gr(h)}}ch(d_X(x)).$$

Así tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ es un C-módulo diferencial izquierdo. Finalmente, veamos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ es un CA-bimódulo. Sean $c \in C$, $x \in X$, $a \in A$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ elementos homogéneos. Luego,

$$c(h \cdot a)(x) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(h)}}c(h(ax)).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}[(ch) \cdot a](x) = (-1)^{\mathrm{(gr(c)+gr(h))gr(a)}}(ch)(ax) &= (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(a)+gr(h)gr(a)}}(ch)(ax) \\ = (-1)^{\mathrm{gr(c)gr(a)}}(-1)^{\mathrm{gr(h)gr(a)}}(ch)(ax) &= (-1)^{\mathrm{gr(h)gr(a)}}c(h(ax)).\end{aligned}$$

Entonces, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ es un CA-bimódulo.

□

DEFINICIÓN 3.116.

Si X es un AB-bimódulo diferencial, por definición su dual (derecho) es el BA-bimódulo $X^* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{B})$, donde la B dentro de los paréntesis denota el bimódulo diferencial regular (ver observación 3.62).

PROPOSICIÓN 3.117.

Sea X un AB-bimódulo diferencial. Entonces, hay un morfismo natural $\psi : T_{X^*} \longrightarrow H_X$ tal que $\forall N \in \mathscr{C}(B)$,

$$\psi_N : T_{X^*}(N) = N \otimes_B X^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}) = \mathrm{H_X}(\mathrm{N})$$

satisface $\psi(n \otimes h)[x] = (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} nh(x)$, para $n \in N, h \in H_X(N)$ y $x \in X$ homogéneos.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\varphi : N \times X^* \longrightarrow H_X(N)$ la función bilineal, tal que

$$\varphi(n,h)(x) = (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} nh(x)$$

$\forall n \in N$, $h \in X^*_A$, $x \in X$ homogéneos. Veamos que φ está bien definida y que es B-balanceada.

(a) Para $n \in N$ y $h \in X^*$, homogéneos, $\varphi(n,h) : X \longrightarrow N$ es morfismo de B-módulos derechos derechos de $\mathrm{gr}(\varphi(\mathrm{n},\mathrm{h})) = \mathrm{gr(n)} + \mathrm{gr(h)}$. Sean x en X y b en B homogéneos, luego $\varphi(n,h)(xb) = (-1)^{\mathrm{gr(n)(gr(x)+gr(b))}} nh(xb)$, pero

$$h(xb) = (-1)^{\mathrm{gr(h)gr(b)}} h(x) * b = (-1)^{\mathrm{gr(h)gr(b)+(gr(h)+gr(x))gr(b)}} h(x)b$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(x)gr(b)}} h(x)b.$$

Entonces,

$$\varphi(n,h)(xb) = (-1)^{\mathrm{gr(n)(gr(x)+gr(b))+gr(x)gr(b)}} n[h(x)b]$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)(gr(x)+gr(b))+gr(x)gr(b)}} (-1)^{\mathrm{(gr(h)+gr(x))gr(b)}} [nh(x)]b$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)+gr(n)gr(b)+gr(b)gr(h)}} [nh(x)]b$$
$$= (-1)^{\mathrm{(gr(n)+gr(h))gr(b)}} [(-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} nh(x)]b$$
$$= (-1)^{\mathrm{(gr(n)+gr(h))gr(b)}} [\varphi(n,h)(x)]b.$$

(b) Por (a), $\varphi(N^i \times (X^*)^j) \subseteq \mathrm{Hom}^{\mathrm{i+j}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}) = \mathrm{H_X(N)^{i+j}}$. Así, φ es homogéneo.

(c) $\varphi(nb,h) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(h)}} \varphi(n,bh)$.
Por un lado, tenemos

$$\varphi(nb,h)(x) = (-1)^{\mathrm{(gr(n)+gr(b))gr(x)}} (nb)h(x) = (-1)^{\mathrm{(gr(n)+gr(b))gr(x)}} (nb)h(x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)+gr(b)gr(x)+gr(b)(gr(h)+gr(x))}} n[bh(x)]$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)+gr(b)gr(h)}} n[(bh)(x)].$$

Por otro,

$$\varphi(n, bh)(x) = (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} n[(bh)(x)]$$

y, entonces,

$$\varphi(nb, h)(x) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(h)}} \varphi(n, bh)(x).$$

Por lo anterior, tenemos que existe $N \otimes_B X^* \xrightarrow{\psi} H_X(N)$ homogéneo tal que para $n \in N$, $h \in X^*$ y $x \in X$, homogéneos se tiene

$$\psi(n \otimes h)(x) = (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} nh(x).$$

Notemos lo siguiente:

(i) ψ es morfismo de A-módulos graduados derechos.
Lo que deseamos probar es que si $n \in N, h \in X^*$ y $a \in A$ son homogéneos,

$$\psi(n \otimes h) * a = \psi(n \otimes ha).$$

Sea $x \in X$ homogéneo, entonces

$$[\psi(n \otimes h) * a](x) = (-1)^{\mathrm{(gr(n)+gr(h))gr(a)}} \psi(n \otimes h)(ax)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(a)+gr(h)gr(a)}} (-1)^{\mathrm{gr(n)(gr(a)+gr(x))}} nh(ax)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(h)gr(a)+gr(n)gr(x)}} nh(ax).$$

Por otro lado,

$$\psi(n \otimes ha)(x) = (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} n[(ha)(x)]$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} (-1)^{\mathrm{gr(h)gr(a)}} nh(ax) = (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)+gr(h)gr(a)}} nh(ax).$$

y, entonces, ψ es morfismo de A-módulos graduados derechos.

(ii) ψ conmuta con la diferencial.

$$\delta(\psi(n \otimes h))(x) = [d_N \psi(n \otimes h) - (-1)^{\mathrm{gr(n)+gr(h)}} \psi(n \otimes h) d_X](x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} d_N(nh(x)) - (-1)^{\mathrm{gr(n)+gr(h)+(gr(x)+1)gr(n)}} nh(d_X(x))$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)+gr(h)+gr(x)}} d_N(n)h(x) + (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} n d_B(h(x))$$

$$-(-1)^{\mathrm{gr(h)+gr(x)gr(n)}} nh(d_X(x))$$

por otro lado, tenemos

$$\psi(d(n \otimes h))(x) = \psi((-1)^{\mathrm{gr(h)}} d(n) \otimes h + n \otimes \delta(h))[x]$$

$$= \psi((-1)^{\mathrm{gr(h)}} d(n) \otimes h)[x] + \psi(n \otimes \delta(h))[x]$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(h)+(gr(n)+1)gr(x)}} d(n)h(x) + (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} n\delta(h)[x].$$

Pero

$$\delta(h)[x] = d_N(h(x)) - (-1)^{\mathrm{gr(h)}} h(d_X(x))$$

y, sustituyendo, tenemos

$$(-1)^{\mathrm{gr(h)+(gr(n)+1)gr(x)}} d(n)h(x) + (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} n[d_N(h(x)) - (-1)^{\mathrm{gr(h)}} h(d_X(x))]$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(h)+(gr(n)+1)gr(x)}} d(n)h(x) + (-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)}} nd_B(h(x))$$
$$-(-1)^{\mathrm{gr(n)gr(x)+gr(h)}} nh(d_X(x)).$$

Así, tenemos que ψ conmuta con la diferencial y, en consecuencia, ψ es un morfismo de A-módulos diferenciales derechos.

Finalmente, veamos que conmuta el cuadro para toda $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{B})}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$

$$\begin{tikzcd} M \otimes X^* \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d, "f\otimes 1"'] & H_X(M) \arrow[d, "H_X(f)"] \\ N \otimes X^* \arrow[r, "\psi_N"'] & H_X(N). \end{tikzcd}$$

Sean $m \in M$, $h \in X^*$ y $x \in X$ elementos homogéneos. Entonces,

$$(\psi_N(f \otimes 1)[m \otimes h])(x) = \psi_N(f(m) \otimes h)[x] = (-1)^{\mathrm{gr(f(m))gr(x)}} f(m)h(x)$$
$$= (-1)^{\mathrm{gr(m)gr(x)}} f(mh(x)) = f(\psi_M(m \otimes h)[x]) = (H_X(f)\psi_M(m \otimes h))[x].$$

□

LEMA 3.118.
Si X es un AB-bimódulo diferencial, el morfismo $\psi : T_{X^*} \longrightarrow H_X$ de funtores de $\mathscr{C}(B)$ en $\mathscr{C}(A)$ determina un morfismo $\overline{\psi} : T_{X^*} \longrightarrow H_X$ de funtores exactos de $\underline{\mathscr{C}}(B)$ en $\underline{\mathscr{C}}(A)$.

DEMOSTRACIÓN.
Tenemos la transformación natural $\pi_A\psi : \pi_A T_{X^*} \longrightarrow \pi_A H_X$ de funtores de $\mathscr{C}(B)$ en $\underline{\mathscr{C}}(A)$, donde $\pi_A : \mathscr{C}(A) \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}(A)$ es la proyección canónica. Puesto que ambos funtores $\pi_A T_{X^*}$ y $\pi_A H_X$ se factorizan por $\pi_B : \mathscr{C}(B) \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}(B)$, resulta que la transformación $\overline{\psi} : T_{X^*} \longrightarrow H_X$ definida por $\overline{\psi}_M := \pi_A(\psi_M)$, para $M \in \underline{\mathscr{C}}(B)$, es morfismo de funtores de $\underline{\mathscr{C}}(B)$ en $\underline{\mathscr{C}}(A)$. Para ver que $\overline{\psi}$ es morfismo de funtores exactos, veamos primero que conmuta el siguiente cuadro en $\mathscr{C}(A)$

$$\begin{tikzcd} T_{X^*}(M[1]) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi_{M[1]}"'] & T_{X^*}(M)[1] \arrow[d, "(\psi_M)[1]"] \\ H_X(M[1]) \arrow[r, "\varphi'"'] & H_X(M)[1], \end{tikzcd}$$

donde φ y φ' son los isomorfismos canónicos. Sean $m \in M^{i+1} = M[1]^i$, $h \in X^*$, y $x \in X$ homogéneos, entonces

$$(\varphi' \psi_{M[1]}(m \otimes h))[x] = \psi_{M[1]}(m \otimes h)[x] = (-1)^{i\mathrm{gr(x)}} m * h(x)$$

$$= (-1)^{\mathrm{gr(h)+(i+1)gr(x)}} mh(x) = (-1)^{\mathrm{gr(h)}} \psi_M(m \otimes h)[x] = (\psi_M[1])((-1)^{\mathrm{gr(h)}} m \otimes h)[x]$$

$$= [\psi_M[1])\varphi(m \otimes h)][x],$$

donde $*$ es la acción de B en $M[1]$. Luego, conmuta el cuadro en $\underline{\mathscr{C}}(A)$

$$\begin{tikzcd} T_{X^*}(M[1]) \arrow[r, "\pi_A(\varphi)"] \arrow[d, "\overline{\psi}_{M[1]}"'] & T_{X^*}(M)[1] \arrow[d, "(\overline{\psi}_M)[1]"] \\ H_X(M[1]) \arrow[r, "\pi_A(\varphi')"'] & H_X(M)[1]. \end{tikzcd}$$

□

3.5. Cohomología y módulos acíclicos.

DEFINICIÓN 3.119.
Sea M un A-módulo diferencial derecho, definiremos la i-ésima cohomología de M como el espacio vectorial

$$H^i(M) := \frac{\mathrm{Ker(d_M) \cap M^i}}{d_M(M) \cap M^i} = \frac{\mathrm{Ker(d_M) \cap M^i}}{d_M(M^{i-1})}.$$

PROPOSICIÓN 3.120.
Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo diferencial, entonces f induce un morfismo $H^i(f) : H^i(M) \longrightarrow H^i(N)$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo diferencial. Deseamos ver que este morfismo nos induce una transformación lineal

$$H^i(M) = \tfrac{\mathrm{Ker(d_M) \cap M^i}}{d_M(M) \cap M^i} \longrightarrow \tfrac{\mathrm{Ker(d_N) \cap N^i}}{d_N(N) \cap N^i} = H^i(N).$$

Sea $x \in \mathrm{Ker(d_M) \cap M^i}$, luego $0 = f(d_M(x)) = d_N(f(x))$. Tenemos que $f(x) \in \mathrm{Ker(d_N)}$ y $f(x) \in N^i$ es decir $f(x) \in \mathrm{Ker(d_N) \cap N^i}$, entonces f induce un morfismo $\mathrm{Ker(d_M) \cap M^i} \longrightarrow \mathrm{Ker(d_N) \cap N^i}$. Ahora,

$$f(d_M(M) \cap M^i) = f d_M(M^{i-1}) = d_N f(M^{i-1}) \subseteq d_N(N^{i-1}) = d_N(M) \cap N^i.$$

Por lo visto anteriormente tenemos que el morfismo $f : M \longrightarrow N$ induce una transformación lineal $H^i(f) : H^i(M) \longrightarrow H^i(N)$.

$\square$

OBSERVACIONES 3.121.
(1) *Si* $m \in \mathrm{Ker(d_M)} \cap \mathrm{M^i}$*, denotaremos por* $\underline{m}$*, su clase en* $H^i(M)$*.*

(2) *Si* $m \in \mathrm{Ker(d_M)} \cap \mathrm{M^i}$ *entonces* $H^i(f)(\underline{m}) = \underline{f(m)}$*.*

PROPOSICIÓN 3.122.
$H^i : \mathscr{C} \longrightarrow k\text{-}Mod$ *es un funtor covariante.*

DEMOSTRACIÓN.
Dado $M \in \mathscr{C}$ tenemos $H^i(M) \in k$-Mod y dado un morfismo diferencial $f : M \longrightarrow N$, H^i lo envia a $H^i(f) : H^i(M) \longrightarrow H^i(N)$. Observemos que lo único que hace falta probar para que H^i sea un funtor es que, si $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow L$ son morfismos de módulos diferenciales se cumple que $H^i(gf) = H^i(g)H^i(f)$ y $H^i(1_M) = 1_{H^i(M)}$. Sea $\underline{m} \in H^i(M)$ con $m \in \mathrm{Ker(d_M)} \cap \mathrm{M^i}$, entonces

$$H^i(g)H^i(f)(\underline{m}) = H^i(g)(\underline{f(m)}) = \underline{g(f(m))} = \underline{gf(m)} = H^i(gf)(\underline{m}).$$

Para $1_M : M \longrightarrow M$ y $\underline{m} \in H^i(M)$, con $m \in \mathrm{Ker(d_M)} \cap \mathrm{M^i}$, vale

$$H(1_M)(\underline{m}) = \underline{1_M(m)} = \underline{m} = 1_{H^i(M)}(\underline{m}).$$

$\square$

PROPOSICIÓN 3.123.
Sea M *un Mod-A diferencial, entonces tenemos que* $H^i(J(M)) = 0$.

DEMOSTRACIÓN.
Consideremos el siguiente diagrama

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-2}_{J(M)}} M^{i-1} \oplus M^i \xrightarrow{d^{i-1}_{J(M)}} M^i \oplus M^{i+1} \xrightarrow{d^{i}_{J(M)}} M^{i+1} \oplus M^{i+2} \xrightarrow{d^{i+1}_{J(M)}} \cdots$$

donde $d^i_{J(M)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Veamos que la sucesión dada es exacta, es decir que $\mathrm{Im(d^{i-1}_{J(M)})} = \mathrm{Ker(d^i_{J(M)})}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Sea $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ en $J(M)^{i-1}$ entonces

$$d^i_{J(M)} d^{i-1}_{J(M)} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así $\mathrm{Im(d^{i-1}_{J(M)})} \subset \mathrm{Ker(d^i_{J(M)})}$. Ahora tomemos $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker(d^i_{J(M)})}$. Por un lado

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = d^i_{J(M)} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde tenemos que $n = 0$. Note que $y = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$ está en $J(M)^{i-1}$ y que

$$d^i_{J(M)}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{J(M)}}) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{d}^{\mathrm{i-1}}_{\mathrm{J(M)}})$. Luego $\mathrm{Im}(\mathrm{d}^{\mathrm{i-1}}_{\mathrm{J(M)}}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{J(M)}})$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ y esto implica que $H^i(J(M)) = 0$.

□

PROPOSICIÓN 3.124.
Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de $\mathscr{C}(A)$. Entonces f se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo si y sólo si se factoriza a través de $J(M)$.

DEMOSTRACIÓN.
$\boxed{\Rightarrow}$ Como la categoría $\mathscr{C}(A)$ es de Frobenius, tenemos que para M en $\mathscr{C}(A)$ existe una $\mathscr{E}$-sucesión $M \xrightarrow{u} J(M) \xrightarrow{v} M[1]$. Supongamos que f se factoriza a través del $\mathscr{E}$-proyectivo P. Recordemos que como P es proyectivo=inyectivo, tenemos que existe un morfismo $t : J(M) \longrightarrow P$ en $\mathscr{C}(A)$ tal que $tu = \beta$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\beta"] & J(M) \arrow[r, "v"] \arrow[d, dotted, "t"] & M[1] \\
N & P. \arrow[l, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

Luego, tenemos que $f = \gamma\beta = \gamma t u$ y definiendo $\lambda := \gamma t$, tenemos que $f = \lambda u$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Por hipótesis tenemos la existencia de morfismos $\lambda : J(M) \longrightarrow N$ y $u : M \longrightarrow J(M)$ tales que $f = \lambda u$, y sabemos que $J(M)$ es proyectivo-inyectivo, entonces $f = \lambda u$.

□

PROPOSICIÓN 3.125.
El funtor H^i induce un funtor $\underline{\mathscr{C}} \longrightarrow k\text{-}Mod$, de la categoría estable de $\mathscr{C}$ que denotaremos con el mismo símbolo H^i.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de $\mathscr{C}$ que se factoriza a través de un $\mathscr{E}$-proyectivo. Por la proposición 3.124, tenemos una factorización de la forma

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & N \\
& J(L). \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Aplicándole el funtor de cohomología H^i nos queda el triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} H^i(M) \arrow[rr, "H^i(f)"] \arrow[dr, "H^i(u)"'] & & H^i(N) \\ & H^i(J(L)). \arrow[ur, "H^i(v)"'] & \end{tikzcd}$$

Pero $H^i(J(L)) = 0$ implica $H^i(f) = 0$.

□

DEFINICIÓN 3.126.
Un morfismo diferencial $f : M \longrightarrow N$ *se dice que es un cuasi-isomorfismo si* $H^i(f)$ *es isomorfismo* $\forall i \in \mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN 3.127.
Diremos que un A-módulo diferencial L es acíclico si y sólo si $H^i(L) = 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 3.128.
Sea $M \xrightarrow{\pi(f)} N \xrightarrow{\pi(g)} L \xrightarrow{\pi(w)} M[1]$ *un triángulo en* $\underline{\mathscr{C}}$, *entonces el morfismo diferencial f es cuasi-isomorfismo si y sólo si L es acíclico.*

DEMOSTRACIÓN.
Podemos suponer que el triángulo dado es estandar. Luego, $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ es una $\mathscr{E}$-sucesión en $\mathscr{C}$, y tenemos que la sucesión larga de cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}(L) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(M) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(N) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(L) \xrightarrow{\delta^i} \cdots$$

que es exacta.
$\boxed{\Rightarrow}$ La hipótesis implica que se cumplen las siguientes igualdades $\mathrm{Im}(\delta^{\mathrm{i}-1}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H^i(f)}) = 0$ y $\mathrm{Ker}(\mathrm{H^i(g)}) = \mathrm{Im}(\mathrm{H^i(f)}) = \mathrm{H^i(N)}$. Entonces $H^i(g) = 0$ y $\delta^i = 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $0 = ImH^i(g) = ker\delta^i = H^i(L)$, es decir tenemos que L es acíclico.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $H^i(L) = 0\ \forall i \in \mathbb{Z}$. Esto nos dice que en la sucesión larga de cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}(L) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(M) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(N) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(L) \longrightarrow \cdots$$

que es exacta, contiene, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $0 \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(M) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(N) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(g)} 0$. Por la exactitud tenemos que $H^i(f)$ es isomorfismo.

□

DEFINICIÓN 3.129.
Sea $M \in \mathscr{C}$, *para* $i \in \mathbb{Z}$, *definimos* $Z^i(M) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d_M}) \cap \mathrm{M^i}$. *Sea* $f : M \longrightarrow N$ *en* $\mathscr{C}$, *denotaremos por* $Z^i(f) : Z^i(M) \longrightarrow Z^i(N)$ *a la restricción de f. Notemos que* $Z^i : \mathscr{C} \longrightarrow k\text{-}Mod$ *es un funtor* $\forall i \in \mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 3.130.
Para todo M en $\mathscr{C}$ existe un isomorfismo $\varphi_M : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \longrightarrow Z^0(M)$, *natural en M*

DEMOSTRACIÓN.
Primero vamos a definir al morfismo φ_M. Sea $h : A \longrightarrow M$ un morfismo de A-módulos diferenciales derechos, por tanto $h(1) \in M^0$. Al aplicar la diferencial d obtenemos $d_M(h(1)) = h(d(1)) = 0$. Por lo tanto, tenemos que $h(1) \in Z^0(M) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d_M}) \cap \mathrm{M}^0$. Así, definimos $\varphi_M(h) := h(1)$. Es fácil de ver que φ_M es lineal y que es natural en M. Veamos que φ_M es isomorfismo.

(i) φ_M es monomorfismo:
Sea $h : A \longrightarrow M$ un morfismo diferencial tal que $\varphi_M(h) = 0$, por tanto $h(1) = 0$. Para toda $a \in A$ tenemos que $h(a) = h(1a) = h(1)a = 0$, entonces $h = 0$.

(ii) φ_M es epimorfismo.
Sea $m \in Z^0(M)$, definamos $g : A \longrightarrow M$, por $g(a) := m * a$, $\forall a \in A$. Veamos que g es morfismo de A-módulos diferenciales derechos. Sean a, b elementos homogéneos de A. Entonces,

$$g(a * b) = g((-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}ab) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}g(ab) = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(b)}}m(ab)$$
$$= (ma)b = g(a) * b.$$

Además,

$$d_M g(a) = d_M(m * a) = m * d(a) + (-1)^{\mathrm{gra}} d_M(m)a$$
$$= md(a) = g(1)d(a) = g(d(a)) = gd_N(a),$$

y entonces $d_M g = gd_N$. Finalmente, si $a \in A^p$, $g(a) = m * a \in A^p$. Luego, $g(A^p) \subseteq A^p$. Entonces $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{M})$ y $\varphi_M(g) = g(1) = m$.

Así, hemos visto que φ_M es epimorfismo.

□

PROPOSICIÓN 3.131.
$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \cong \mathrm{H}^0(\mathrm{M})$.

DEMOSTRACIÓN.
Por la proposición 3.111 tenemos que $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{A}, \mathrm{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{M})/\mathrm{Im}(\mathrm{v}^*_{\mathrm{M}[-1]})$. Recordemos que tenemos la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} M[-1] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1_{M[-1]} \\ d_{M[-1]} \end{pmatrix}"] & J(M[-1]) \arrow[r, "(d_M, 1_M)"] & M. \end{tikzcd}$$

Sea $\beta := (d_M, 1_M)$, y definamos

$$\beta^* = \mathrm{Hom}(1_\mathrm{A}, \beta) := \mathrm{Hom}(\mathrm{A}, \mathrm{J}(\mathrm{M}[-1])) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{A}, \mathrm{M}).$$

Por la proposición 3.130 tenemos los siguientes isomorfismos

$$\varphi_{J(M[-1])} : \mathrm{Hom(A, J(M[-1]))} \longrightarrow Z^0(J(M[-1]))$$

$$\varphi_M : \mathrm{Hom(A, M)} \longrightarrow Z^0(M).$$

El siguiente diagrama es conmutativo por la proposición **??**

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom(A, J(M[-1]))} \arrow[r, "\varphi_{J(M[-1])}"] \arrow[d, "\beta^*"'] & Z^0(J(M[-1])) \arrow[d, "Z^0(\beta)"] \\
\mathrm{Hom(A, M)} \arrow[r, "\varphi_M"'] & Z^0(M).
\end{tikzcd}$$

Como $J(M[-1])^0 = M^{-1} \oplus M^0 \xrightarrow{d_{J(M[-1])}} M^0 \oplus M^1 = J(M[-1])^1$ donde $d_{J(M)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sea $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in J(M[-1])$ donde $m \in M^{-1}$ y $n \in M^0$ entonces $d_{J(M)} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ está en $Z^0(J(M[-1]))$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = d_{J(M)} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esta igualdad se cumple si y sólo si $n = 0$. Por tanto $Z^0(J(M[-1])) = M^{-1}$. Además,

$$Z^0(\beta) \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = (d_M, 1_M) \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = d_M(m).$$

Así el diagrama anterior se transforma en el primer cuadro del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}\mathrm{(A, J(M[-1]))} \arrow[r, "\varphi_{J(M[-1])}"] \arrow[d, "\beta^*"'] & M^{-1} \arrow[d, "d_M"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}\mathrm{(A, M)} \arrow[r, "\varphi_M"'] \arrow[d] & Z^0(M) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}\mathrm{(A, M)} = \frac{\mathrm{Hom(A,M)}}{\mathrm{Im}\beta^*} \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & \frac{Z^0(M)}{d_M(M^{-1})} = H^0(M).
\end{tikzcd}$$

El segundo cuadro, se construye a partir del primero, usando que sus lados son las proyecciones canónicas. El morfismo inducido $\overline{\varphi}$ es isomorfismo porque φ_M y $\varphi_{J(M[-1])}$ lo son.

□

OBSERVACIÓN 3.132.
Note que si M es un A-módulo diferencial y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $H^i(M[n]) = H^{i+n}(M)$. Además, $T^n : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ es automorfimo que preserva proyectivos, luego $T^n(P) \subseteq P$ y entonces, induce un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{M[n]}, \mathrm{N[n]}).$$

Luego, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{A[-n]}, \mathrm{M}) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{A}, \mathrm{M[n]}) \cong \mathrm{H}^0(\mathrm{M[n]}) \cong \mathrm{H}^{\mathrm{n}}(\mathrm{M}).$$

El isomorfismo $\overline{\theta}_M : H^n(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{A}, \mathrm{M[n]})$ está inducido por la función $\theta_M : Z^n(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{M[n]})$ tal que para $m \in Z^n(M)$ y $a \in A$, se tiene $\theta(m)[a] = m * a$.

Los isomorfismos anteriores son naturales en M.

COROLARIO 3.133.
Sea $M \in \mathscr{C}$. Entonces, M es acíclico si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{A[n]}, \mathrm{M}) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 3.134.
Sea $\mathscr{U}$ la subcategoría plena de $\underline{\mathscr{C}}$ cuyos objetos son los acíclicos. Entonces $\mathscr{U}$ es una subcategoría triangulada, cerrada bajo coproductos e isomorfismos.

DEMOSTRACIÓN.
Veamos que efectivamente $\mathscr{U}$ es subcategoría triangulada.

(a) $\mathscr{U}$ es cerrada bajo traslaciones.
Sea $M \in \mathscr{U}$, entonces $M[n]$ también es acíclico, $\forall n \in \mathbb{Z}$, luego $M[n] \in \mathscr{U}$.

(b) Sea $M_1 \xrightarrow{u} M_2$ un morfismo en $\mathscr{U}$ y $M_1 \xrightarrow{u} M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow M_1[1]$ es un triángulo, con $M_1, M_2 \in \mathscr{U}$, entonces, por la proposición 3.128, $M_3 \in \mathscr{U}$.

(c) $\mathscr{U}$ es cerrada bajo coproductos.
Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{U}$. Veamos que $\coprod_{i\in I} M_i \in \mathscr{U}$. Por un lado, tenemos que $\mathrm{Hom}(\mathrm{A[n]}, \mathrm{M_i}) = 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{A[n]}, \coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{M_i}) = \coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{A[n]}, \mathrm{M_i}) = 0$$

Aplicando el corolario 3.133 terminamos.

□

OBSERVACIÓN 3.135.
Por la proposición 3.128 los cuasi-isomorfismos definidos en 3.126 coinciden con los $\mathscr{U}$-cuasi-isomorfismos de la definición **??** *del capítulo 1.*

3.6. P-módulos diferenciales y q-proyectivos.

DEFINICIÓN 3.136.
Diremos que $M \in \mathscr{C}$ *tiene la propiedad (P) si existe una serie de submódulos diferenciales*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots \subset M$$

con las siquientes propiedades

(a) $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$

(b) Existen $\mathscr{E}$*-sucesiones* $M_i \xrightarrow{\sigma_i} M_{i+1} \longrightarrow T_i$ *donde* σ_i *es la inclusión y* $T_i = \coprod_{j\in J_i} A[t_j]$*, para cada* $i \geq 0$*.*

PROPOSICIÓN 3.137.
Si M *tiene la propiedad* (P)*, hay una* $\mathscr{E}$*-sucesión en* $\mathscr{C}$

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i \xrightarrow{\Phi} \coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j \xrightarrow{\Psi} M.$$

DEMOSTRACIÓN.
Como $\mathscr{C}$ tiene coproductos, $\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i$ es un A-módulo diferencial derecho. Sea $\lambda_s : M_s \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i$ la inyección canónica, para $s \in \mathbb{N}$. Para $s \in \mathbb{N}$, definamos el siguiente morfismo $\varphi_s : M_s \longrightarrow \coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j$ como $\varphi_s := \lambda_s - \lambda_{s+1}\sigma_s$ donde $\sigma_s : M_s \longrightarrow M_{s+1}$ denota el morfismo inclusión. Por la propiedad universal del coproducto, existe el morfismo Φ tal que $\Phi\lambda_s = \varphi_s$ $\forall s \in \mathbb{N}$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i \arrow[rr, dotted, "\Phi"] & & \coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j \\
& M_s. \arrow[ul, "\lambda_s"] \arrow[ur, "\varphi_s"'] &
\end{tikzcd}$$

De manera análoga, tenemos la existencia del morfismo Ψ que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j \arrow[rr, dotted, "\Psi"] & & M \\
& M_s \arrow[ul, "\lambda_s"] \arrow[ur, "\tau_s"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\tau_s : M_s \longrightarrow M$ denota la inclusión. Note que hemos construido la siguiente sucesión $\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i \xrightarrow{\Phi} \coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j \xrightarrow{\Psi} M$. Veamos que se trata de una $\mathscr{E}$-sucesión:

(a) Ψ es epimorfismo.
Por la manera en que se construyó, pues $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j$.

(b) Φ es monomorfismo.
Sea $m \in \coprod_{i \in \mathbb{N}} M_i$, luego $m = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i(m_i)$. Supongamos que $\Phi(m) = 0$. Veamos que $m = 0$:

$$0 = \Phi(m) = \Phi(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i(m_i)) = \sum_{i=1}^{t} \Phi(\lambda_i(m_i)) = \sum_{i=1}^{t} \varphi_i(m_i).$$

Pero, por otro lado,

$$0 = \sum_{i=1}^{t} \varphi_i(m_i) = \varphi_1(m_1) + \varphi_2(m_2) + \cdots + \varphi_t(m_t)$$

$$= [\lambda_1(m_1) - \lambda_2(m_1)] + \cdots + [\lambda_t(m_t) - \lambda_{t+1}(m_t)] \in \coprod_{i \in \mathbb{N}} M_i.$$

Luego,

$$\lambda_1(m_1) = 0, \lambda_2(m_1) = \lambda_2(m_2), \ldots, \lambda_t(m_{t-1}) = \lambda_t(m_t), \text{ y } -\lambda_{t+1}(m_t) = 0.$$

De donde obtenemos que $\lambda_l(m_l) = 0$ para $l = 1, \ldots, t$, y esto implica que $m = 0$.

(c) $\Psi\Phi = 0$.
Sea $i \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\Psi\Phi\lambda_i = \Psi\varphi_i = \Psi(\lambda_i - \lambda_{i+1}\sigma_i) = \Psi\lambda_i - \Psi\lambda_{i+1}\sigma_i = \tau_i - \tau_{i+1}\sigma_i = 0.$$

Por tanto $\Psi\Phi = 0$.

(d) $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Psi)$.
Por el inciso anterior tenemos que $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathrm{Ker}(\Psi)$. Ahora veamos que $\mathrm{Ker}(\Psi) \subset \mathrm{Im}(\Phi)$. Sea $m \in \coprod_{j \in \mathbb{N}} M_j$ tal que $\Psi(m) = 0$. Deseamos ver que $m \in \mathrm{Im}(\Phi)$. Como $m \in \coprod_{j \in \mathbb{N}} M_j$ luego $m = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j(m_j)$. Entonces,

$$\Psi(m) = \Psi(\sum_{j=1}^{t} \lambda_j(m_j)) = \sum_{j=1}^{t} \Psi(\lambda_j(m_j)) = \sum_{j=1}^{t} \tau_j(m_j) = 0.$$

De donde, se tiene que $\sum_{j=1}^{t} m_j = 0$ y, despejando, obtenemos

$$m_t = -(m_1 + m_2 + \cdots + m_{t-1}).$$

Recordemos que

$$m = \lambda_1(m_1) + \lambda_2(m_2) + \cdots + \lambda_{t-1}(m_{t-1}) + \lambda_t(m_t),$$

al sustituir m_t obtenemos

$$m = \lambda_1(m_1) + \cdots + \lambda_{t-1}(m_{t-1}) + \lambda_t(-(m_1 + m_2 + \cdots + m_{t-1})))$$

$$= \lambda_1(m_1) - \lambda_t(m_1) + \lambda_2(m_2) - \lambda_t(m_2) + \cdots + \lambda_{t-1}(m_{t-1}) - \lambda_t(m_{t-1}).$$

Si logramos probar que $\lambda_i(m_i) - \lambda_{i+p}(m_i) \in \mathrm{Im}(\Phi)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, habremos terminado. Veamos que es cierta la afirmación anterior. La demostración la haremos por inducción sobre p. Si $p = 1$, tenemos

$$\lambda_i(m_i) - \lambda_{i+1}(m_i) = \Phi(\lambda_i(m_i)).$$

Supongamos que se vale la afirmación para $p - 1$. Veamos que es cierta para $p \geq 2$. Tenemos

$$\lambda_i(m_i) - \lambda_{i+p}(m_i) = \lambda_i(m_i) - \lambda_{i+p-1}(m_i) + \lambda_{i+p-1}(m_i) - \lambda_{i+p}(m_i)$$

notemos que $\lambda_i(m_i) - \lambda_{i+p-1}(m_i) \in \mathrm{Im}(\Phi)$ por hipótesis de inducción y $\lambda_{i+p-1}(m_i) - \lambda_{i+p}(m_i) = \Phi(\lambda_{i+p-1}m_i)$. Entonces tenemos que $m \in \mathrm{Im}(\Phi)$.

(e) La sucesión $\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i \xrightarrow{\Phi} \coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j \xrightarrow{\Psi} M$ se divide en $\mathcal{G}$.
Daremos el morfismo de A-módulos graduados derechos

$$\phi : \coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j \longrightarrow \coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i$$

y posteriormente veremos que $\phi\Phi = 1_{\coprod M_i}$. Por hipótesis, tenemos las siguientes $\mathscr{E}$-sucesiones en $\mathscr{C}$ $M_i \xrightarrow{\sigma_i} M_{i+1} \longrightarrow T_i$ las cuales se dividen en $\mathcal{G}$, es decir existen, $\forall i \in \mathbb{Z}$, los morfismos de módulos graduados $\zeta_i : M_{i+1} \longrightarrow M_i$, tales que $\zeta_i\sigma_i = 1_{M_i}$. Definamos morfismos

$$\phi_s := \begin{cases} 0 & \text{si } s = 1 \\ -(\lambda_1\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_{s-1} + \lambda_2\zeta_2\cdots\zeta_{s-1} + \cdots + \lambda_{s-1}\zeta_{s-1}) & \text{si } s > 1 \end{cases}$$

y consideremos el morfismo ϕ determinado por la familia $\{\phi_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ y la propiedad universal del coproducto $\coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j$ en $\mathcal{G}$. Luego, conmuta el diagrama en $\mathcal{G}$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j \arrow[r, "\phi"] & \coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i \\
M_s \arrow[u, "\lambda_s"] \arrow[ur, "\phi_s"'] &
\end{tikzcd}$$

$\forall s \in \mathbb{N}$. Veamos que $\phi\Phi\lambda_s = \lambda_s$, $\forall s \in \mathbb{N}$:

$$\phi\Phi\lambda_s = \phi(\lambda_s - \lambda_{s+1}\sigma_s) = \phi\lambda_s - \phi\lambda_{s+1}\sigma_s$$

$$= -(\lambda_1\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_{s-1} + \lambda_2\zeta_2\cdots\zeta_{s-1} + \cdots + \lambda_{s-1}\zeta_{s-1})$$

$$+(\lambda_1\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_s + \lambda_2\zeta_2\cdots\zeta_s + \cdots + \lambda_s\zeta_s)\sigma_s = 0 + \cdots + \lambda_s.$$

Entonces $\phi\Phi\lambda_s = \lambda_s$ para toda $s \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\phi\Phi = 1_{\coprod M_i}$ y tenemos que la sucesión $\coprod_{i\in\mathbb{Z}} M_i \xrightarrow{\Phi} \coprod_{j\in\mathbb{Z}} M_j \xrightarrow{\Psi} M$ se divide en $\mathcal{G}$.

□

COROLARIO 3.138.
Sea $M \in \mathscr{C}$ con la propiedad (P). Entonces hay un triángulo

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i \xrightarrow{\pi(\Phi)} \coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j \xrightarrow{\pi(\Psi)} M \xrightarrow{\pi(\omega)} \left(\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i\right)[1]$$

en $\underline{\mathscr{C}}$.

DEMOSTRACIÓN.
Se sigue de la proposición 3.137 y del lema **??**.

□

DEFINICIÓN 3.139.
X se llamará q-proyectivo si $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = 0$ *para toda $Y \in \mathscr{U}$ (esto es si X es $\mathscr{U}$-cuasi-proyectivo, ver definición* **??***).*

PROPOSICIÓN 3.140.
Si $M \in \mathscr{C}$ tiene la propiedad (P), entonces M es q-proyectivo.

DEMOSTRACIÓN.
Sea M con la propiedad (P). Mostraremos que es q-proyectivo. Note que $A[n]$ es q-proyectivo para toda $n \in \mathbb{Z}$ por el corolario 3.133. Además con la notación de la definición 3.136 en mente, para $L \in \mathscr{U}$ tenemos

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{T_i},\mathrm{L}) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\coprod_{\mathrm{j}\in\mathrm{J_i}} \mathrm{A}[\mathrm{t_j}],\mathrm{L}) = \prod_{\mathrm{j}\in\mathrm{J_i}} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{A}[\mathrm{t_i}],\mathrm{L}) = 0.$$

Luego, los T_i también son q-proyectivos. Vamos a probar por inducción, que M_i es q-proyectivo para toda $i \in \mathbb{N}$. Ya sabemos que $M_0 = 0$ es q-proyectivo. Suponga que hemos probado que los primeros M_i son q-proyectivos, veamos que M_{i+1} también lo es. Tomemos la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión

$$M_i \xrightarrow{\sigma_i} M_{i+1} \xrightarrow{\zeta_i} T_i$$

y consideremos al triángulo inducido por el lema **??**

$$M_i \xrightarrow{\pi(\sigma_i)} M_{i+1} \xrightarrow{\pi(\zeta_i)} T_i \xrightarrow{\pi(w_i)} M_i[1].$$

Como $M_i, T_i, M_i[1]$ son q-proyectivos entonces M_{i+1} también lo es. Por tanto M_i es q-proyectivo para toda $i \in \mathbb{N}$. Luego, tenemos que $\coprod_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ es q-proyectivo. Como M tiene la propiedad (P), tenemos el siguiente triángulo

$$\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i \xrightarrow{\pi(\Phi)} \coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j \xrightarrow{\pi(\Psi)} M \xrightarrow{\pi(\omega)} \left(\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i\right)[1].$$

Como $\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i, \coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j, \left(\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i\right)[1]$ son q-proyectivos, entonces, por la proposición **??**, M también lo es.

□

PROPOSICIÓN 3.141.
Sea ${}_AX_B$ q-proyectivo como B-módulo. Si $N \in \mathscr{C}(B)$ es acíclico entonces $H_X(N)$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN.
Como N es acíclico, también lo es $N[-n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, luego

$$0 = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(B)}(X, N[-n]) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(B)}(X[n], N) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(B)}(T_X(A)[n], N)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(B)}(T_X(A[n]), N) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(A)}(A[n], H_X(N)),$$

Por lo tanto $H_X(N)$ es acíclico. Note que hemos usado la proposición 3.112, las proposiciones 3.63 y 3.88, así como el corolario 3.133.

□

PROPOSICIÓN 3.142.
Sea ${}_AX_B$ q-proyectivo como B-módulo. Si $u : N_1 \longrightarrow N_2$ es cuasi-isomorfismo. Entonces $H_X(u) : H_X(N_1) \longrightarrow H_X(N_2)$ es cuasi-isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.
Recordemos que $H_X : \underline{\mathscr{C}}(B) \longrightarrow \underline{\mathscr{C}}(A)$ es un funtor exacto, entonces manda triángulos en triángulos. Consideremos el siguiente triángulo

$$N_1 \xrightarrow{u} N_2 \xrightarrow{v} C \longrightarrow N_1[1]$$

donde C es acíclico, pues por hipótesis u es cuasi-isomorfismo. Aplicamos el funtor exacto H_X y obtenemos un triángulo:

$$H_X(N_1) \xrightarrow{H_X(u)} H_X(N_2) \xrightarrow{H_X(v)} H_X(C) \longrightarrow H_X(N_1[1]).$$

Por la proposición 3.141, $H_X(C)$ es acíclico. Entonces $H_X(u)$ es cuasi-isomorfismo.

□

PROPOSICIÓN 3.143.
Suponga que ${}_AX_B$ es q-proyectivo como B-módulo, y que Z es q-proyectivo en $\mathscr{C}(A)$, entonces $T_X(Z)$ es también q-proyectivo.

DEMOSTRACIÓN.
Sea N en $\mathscr{C}(B)$ acíclico, luego tenemos

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(B)}(T_X(Z), N) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}(A)}(Z, H_X(N)) = 0,$$

pues, por la proposición 3.141, $H_X(N)$ es acíclico, y Z es q-proyectivo.

□

OBSERVACIÓN 3.144.

Si A, B son k-álgebras diferenciales, podemos considerar la k-álgebra diferencial $A \otimes_k B^{op}$. También podemos considerar su $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencial regular izquierdo $X = A \otimes_k B^{op}$ con la acción dada por:

$$(a \otimes b) \cdot (a_1 \otimes b_1) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(a_1)}} aa_1 \otimes b * b_1.$$

Resulta entonces que X es un AB-bimódulo diferencial con acción izquierda de A: $a \cdot (a_1 \otimes b_1) = (a \otimes 1) \cdot (a_1 \otimes b_1) = aa_1 \otimes b_1$ y con acción derecha de B: $(a_1 \otimes b_1) \cdot b = (1 \otimes b) \cdot (a_1 \otimes b_1) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(a_1)}} a_1 \otimes b * b_1$, de acuerdo con la proposición 3.56. Este es el AB-bimódulo considerado en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.145.

Si C es un Mod-A diferencial acíclico, entonces $C \otimes_A (A \otimes_k B^{op})$ es un B-módulo diferencial derecho acíclico.

DEMOSTRACIÓN.

Recordemos que tenemos isomorfismos de B-módulos diferenciales

$$C \otimes_A (A \otimes_k B^{op}) \approx (C \otimes_A A) \otimes_k B^{op} \simeq C \otimes_k B^{op}.$$

Veremos que $C \otimes_k B^{op}$ es acíclico. Tomemos la siguiente sucesión exacta de k-módulos diferenciales, la cual también es de complejos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z(B^{op}) \arrow[r, "j"] & B^{op} \arrow[r, "d"] & d(B^{op})[1] \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde d es la diferencial del álgebra B y j es la inclusión. Como espacio vectorial tenemos los siguientes complejos, las fronteras

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d^{i-1}"] & (B^{op})^{i-1} \arrow[r, "d^i"] & (B^{op})^i \arrow[r, "d^{i+1}"] & (B^{op})^{i+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

y la de los ciclos

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "0"] & Z(B^{op})^{i-1} \arrow[r, "0"] & Z(B^{op})^i \arrow[r, "0"] & Z(B^{op})^{i+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Notemos que como espacio vectorial $Z(B^{op}) \simeq \bigoplus_{i \in I} k$ y que $(\bigoplus[\oplus_{i \in I} k][n_i])$ es un complejo cuya diferencial es cero, donde la graduación esta dada por $(\bigoplus[\oplus_{i \in I} k][n_i])^s = \bigoplus[\oplus k]^{s-n_i}$ y al verlo como espacio vectorial se tiene que $\bigoplus[\oplus k]^{s-n_i} = \bigoplus_{i \in I} k$. Como tenemos que cada cuadrado conmuta en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "0"] & Z(B^{op})^{i-1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\tau"'] & Z(B^{op})^i \arrow[r, "0"] \arrow[d, "z"'] & Z(B^{op})^{i+1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\zeta"] & {} \\ \cdots \arrow[r, "0"] & (\bigoplus[\oplus_{i \in I} k][n_i])^{s-1} \arrow[r, "0"'] & (\bigoplus[\oplus_{i \in I} k][n_i])^s \arrow[r, "0"'] & (\bigoplus[\oplus_{i \in I} k][n_i])^{s+1} \arrow[r, "0"'] & {} \end{tikzcd}$$

donde τ, z y ζ son isomorfismos de espacios vectoriales. Entonces tenemos que $Z(B^{op}) = (\bigoplus[\oplus_{i\in I} k[n_i]])$. Demanera similar se puede ver que $d(B^{op}) = (\bigoplus[\oplus_{i\in I} k][l_i])$. Consideremos a la siguiente sucesión de k-módulos diferenciales derechos

$$0 \longrightarrow C \otimes_k Z(B^{op}) \xrightarrow{1\otimes j} C \otimes_k B^{op} \xrightarrow{1\otimes d} C \otimes_k d(B^{op})[1] \longrightarrow 0.$$

Al realizar el producto tensorial sobre los espacios vectoriales tenemos

$$C \otimes_k Z(B^{op}) \simeq \coprod_{i\in I} (C \otimes_k k[n_i]) \simeq \coprod_{i\in I} [C \otimes_k k][n_i] \simeq \coprod_{i\in I} C[n_i]$$

y como C es acíclico, $C[n_i]$ lo es, y por tanto $\coprod_{i\in I} C[n_i]$ es acíclico. Además, tenemos que

$$C \otimes_k d(B^{op})[1] \simeq \coprod_{i\in I} (C \otimes_k k[l_i]) \simeq \coprod_{i\in I} (C \otimes_k k)\, [l_i] \simeq \coprod_{i\in I} C[l_i]$$

como $C[l_i]$ es acíclico, $\coprod_{i\in I} C[l_i]$ también lo es y por tanto $C \otimes_k d(B^{op})[1]$ es acíclico. Por lo anterior y por la sucesión larga de homología tenemos que $C \otimes_k B^{op}$ es acíclico.

□

PROPOSICIÓN 3.146.
Sea C un A-módulo diferencial derecho acíclico y M un AB-bimódulo diferencial tal que M es un $A \otimes_k B^{op}$-módulo con la propiedad (P). Entonces $T_M(C)$ es B-módulo diferencial acíclico.

DEMOSTRACIÓN.
Por la proposición 3.137, tenemos la $\mathscr{E}$-sucesión de $A \otimes_k B^{op}$-módulos diferenciales izquierdos $\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i \xrightarrow{\Phi} \coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j \xrightarrow{\Psi} M$. Además, tenemos las siguientes $\mathscr{E}$-sucesiones de $A\otimes_k B^{op}$-módulos izquierdos $M_i \xrightarrow{s_i} M_{i+1} \xrightarrow{\rho_i} T_i$ donde M_0 y T_i son sumas directas de módulos de la forma $(A \otimes_k B^{op})\,[n]$. Consideremos la siguiente $\mathscr{E}$-sucesión de B-módulos derechos

$$C \otimes_A \left(\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i\right) \xrightarrow{T_\Phi} C \otimes_A \left(\coprod_{j\in\mathbb{N}} M_j\right) \xrightarrow{T_\Psi} C \otimes_A M$$

y notemos que, como

$$C \otimes_A \left(\coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i\right) \simeq \coprod_{i\in\mathbb{N}} \left(C \otimes_A M_i\right),$$

es suficiente con probar que $C \otimes_A M_i$ es acíclico $\forall i \in \mathbb{N}$. Por la misma razón, tenemos la $\mathscr{E}$-sucesión de Mod-B diferenciales

$$C \otimes_A M_i \xrightarrow{T_{s_i}} C \otimes_A M_{i+1} \xrightarrow{T_{\rho_i}} C \otimes_A T_i.$$

Así que basta ver que $C \otimes_A M_0$ y $C \otimes_A T_i$ son acíclicos $\forall i \in \mathbb{N}$. De nuevo como $C \otimes_A -$ conmuta con sumas directas, lo que debemos probar es que

$$C \otimes_A (A \otimes_k B^{op})\,[n] \simeq (C \otimes_A (A \otimes_k B^{op}))\,[n]$$

es acíclico, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pero en la proposición 3.145 se vió que $C \otimes_A (A \otimes_k B^{op})$ es acíclico, luego tenemos que $C \otimes M_0$ y $C \otimes T_i$ son acíclicos, $\forall i \in \mathbb{N}$ y esto nos implica que $C \otimes M_{i+1}$ es acíclico, $\forall i \in \mathbb{N}$, por tanto hemos probado la proposición.

□

Capítulo 4

El Teorema de J. Rickard

Con el material visto en el capítulo anterior estamos preparados para probar nuestro resultado central, el cual es demostrar que si A y B son dos k-álgebras y $G : \mathscr{D}(A) \longrightarrow \mathscr{D}(B)$ una equivalencia de categorías, existe una equivalencia de categorías $F : \mathscr{D}(A) \longrightarrow \mathscr{D}(B)$ con F dado por el producto tensorial de un complejo finito de AB-bimódulos. Para esto necesitaremos definir y estudiar con detalle varios funtores dados por productos tensoriales.

4.1. Categoría homotópica y categoría estable.

En esta sección vamos analizar el concepto de homotopía para Mod-A diferenciales. Primero recordemos algunas definiciones.

DEFINICIÓN 4.1.
Si R es una k-álgebra, la categoría $\widehat{\mathscr{C}}(R)$ de R-complejos tiene por objetos $X = (\{X^i\}, \{d_X^i\})_{i\in\mathbb{Z}}$ las sucesiones de R-módulos y morfismos de R-módulos

$$\cdots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} \cdots$$

tales que $d_X^{i+1} d_X^i = 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Un morfismo de R-complejos $f : X \longrightarrow Y$ es una familia $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de morfismos de R-módulos tales que $f^{i+1} d_X^i = d_Y f^i$ $\forall i \in \mathbb{Z}$.

OBSERVACIÓN 4.2.
Si R es una k-álgebra, podemos pensarla como una k-álgebra diferencial. Esto es podemos considerar el álgebra graduada $\widehat{R}$, tal que $\widehat{R}^0 := R$ y $\widehat{R}^i = 0$ $\forall i \neq 0$, y por definición $d_{\widehat{R}} = 0$. Entonces, podemos pensar a la categoría de R-complejos como la categoría de $\widehat{R}$-módulos diferenciales izquierdos. En efecto, tenemos la equivalencia de categorías

$$E : \widehat{\mathscr{C}}(R) \longrightarrow \mathscr{C}(\widehat{R})$$

que envía cada R-complejo X en el $\widehat{R}$-módulo diferencial izquierdo, es decir, $E(X) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} X^i$ con diferencial d_X inducida por la familia $\{d_X^i\}$. Si tenemos que $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de R-complejos, entonces $E(f) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} f^i$.

DEMOSTRACIÓN.
$E(X)$ es $\widehat{R}$-módulo diferencial pues, claramente,

$$d_X(X^i) \subseteq X^{i+1}; d_X^2 = 0, \hat{R}^i X^j \subseteq X^{i+j},$$

y tenemos

$$d(ax) = d(a)x + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} ad(x)$$

para cada $x \in X$ y $a \in \widehat{R}$ homogéneos (en efecto, si $a \neq 0$, $a \in \hat{R}^0 = R$ y $d(a) = 0$, tendremos $d(ax) = ad(x)$, ya que d_X^i morfismo de R-módulos). La casi inversa $E' : \mathscr{C}(\widehat{R}) \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}}(R)$ envía cada $X = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} X^i$ en el complejo

$$\cdots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

donde d_X^i es la restricción de d_X a X^i y a X^{i+1}; E' envia a cada morfismo de A-módulos diferenciales $f : X \longrightarrow Y$ en el morfismo $E'(f) = \{f^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, donde $f^i : X^i \longrightarrow Y^i$ es la restricción de f, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

□

DEFINICIÓN 4.3.
Sea R una k-álgebra. Entonces un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de R-complejos es homotópico a cero si existe una familia $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de morfismos de R-módulos tales que,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_X^{i-2}"] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] \arrow[dl, "\alpha^{i-2}"'] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"'] \arrow[dl, "\alpha^{i-1}"'] & X^{i+1} \arrow[r, "d_X^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"'] \arrow[dl, "\alpha^i"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_Y^{i-2}"'] & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"'] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"'] & Y^{i+1} \arrow[r, "d_Y^{i+1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde $f^i = d_Y^{i-1}\alpha^{i-1} + \alpha^i d_X^i$.

Ahora bien, en la categoría $\mathscr{C}(\widehat{R})$, ¿qué significa que un morfismo diferencial sea homotópico a cero?

Notemos que en la definición anterior tenemos que el siguiente morfismo $E(\alpha) := \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}} : X[1] \longrightarrow Y$ es de módulos graduados.

DEFINICIÓN 4.4.
Sea A una k-álgebra diferencial y sea $X \xrightarrow{f} Y$ un morfismo diferencial. Diremos que f es homotópico a cero y escribiremos $f \sim 0$ si existe un morfismo de módulos graduados $\alpha : X[1] \longrightarrow Y$, tal que $f^i = d_Y^i \alpha^{i-1} + \alpha^i d_X^i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 4.5.

Sea f un morfismo diferencial. $f \sim 0$ si y sólo si f se factoriza a través de un módulo diferencial proyectivo.

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponga que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ y que $f \sim 0$. Entonces existe α en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{X}[1],\mathrm{Y})$ tal que $f^i = d^i_Y\alpha^{i-1} + \alpha^i d^i_X$. Por **??**, tenemos un isomorfismo $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J}(\mathrm{X}),\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{X}[1],\mathrm{Y})$. Luego tenemos que $\psi^{-1}(\alpha) = \gamma$ donde $\gamma^i = (d_Y\alpha^{i-1},\alpha^i) : X^i \oplus X^{i+1} \longrightarrow Y^i$.

Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & J(X) \arrow[r, "v"] \arrow[dl, "\gamma"] & X[1] \\
Y, & &
\end{tikzcd}$$

donde el renglón es la $\mathscr{E}$-sucesión canónica de X. Recordemos que $u := \{u^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y cada u^i es $(1_X, d_X)^t$. Para $x \in X^i$ tenemos que

$$\gamma^i u^i(x) = (d_Y\alpha^{i-1},\alpha^i)\begin{pmatrix} 1_X \\ d_X \end{pmatrix}(x) = d_Y\alpha^{i-1}(x) + \alpha^i d^i_X(x) = f^i(x),$$

$\forall i \in \mathbb{Z}$. Esto nos dice que $\gamma u = f$. Entonces f se factoriza a través del proyectivo $J(X)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ se factoriza a través de un proyectivo, luego por la proposición **??** tenemos la existencia de $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{J}(\mathrm{X}),\mathrm{Y})$ tal que $f = \lambda u$, donde $\lambda = \{\lambda^i\}$ con $\lambda^i = (d^i_Y\alpha^{i-1},\alpha^i)$ y $\alpha^i : X^i \longrightarrow Y^{i-1}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Ahora definamos a $\alpha := \{\alpha^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, entonces por la proposición **??** sabemos que $\psi(\lambda) = \alpha$ está en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{X}[1],\mathrm{Y})$, donde

$$f^i(x) = (d_Y\alpha^{i-1},\alpha^i)\begin{pmatrix} 1_X \\ d_X \end{pmatrix}(x) = d_Y\alpha^{i-1}(x) + \alpha^i d^i_X(x),$$

$\forall i \in \mathbb{Z}$.

□

DEFINICIÓN 4.6.

Si R es una k-álgebra, la categoría homotópica $\widehat{K}(R)$ de R es la categoría que se obtiene al hacer el cociente de la categoría $\widehat{K}(R)$, de R-complejos, módulo el ideal de los morfismos de complejos que son homotópicos a cero.

OBSERVACIONES 4.7.

(1) *Sea R una k-álgebra que pensamos como k-álgebra diferencial $\widehat{R}$, con diferencial cero. Entonces, la equivalencia*

$$E : \hat{\mathscr{C}}(R) \longrightarrow \mathscr{C}(\hat{R})$$

satisface que, para cada morfismo de R-complejos f, $f \simeq 0$ si y sólo si $E(f)$ se factoriza por un $\mathscr{E}$-proyectivo. Luego, E induce una equivalencia $\underline{E}$ que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathscr{C}}(R) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "\hat{\pi}"'] & \mathscr{C}(\hat{R}) \arrow[d, "\pi"] \\
\widehat{K}(R) \arrow[r, "\underline{E}"'] & \underline{\mathscr{C}}(\widehat{R}).
\end{tikzcd}$$

(2) *Hemos visto así que*

(a) Si $A = R$ y definimos la categoría homotópica $K(A)$ de A como $\mathscr{C}(A)$ módulo homotopía, obtenemos $\underline{\mathscr{C}}(\widehat{R})$.

(b) Si R es un álgebra, la categoría homotópica $\widehat{K}(R)$ puede identificarse con $\underline{\mathscr{C}}(\widehat{R})$ $(= K(\widehat{R}))$.

DEMOSTRACIÓN.
$f \simeq 0$ en $\widehat{\mathscr{C}}(R)$ si y sólo si $E(f) \simeq 0$ en $\mathscr{C}(\widehat{R})$, y podemos aplicar la proposición 4.5

□

4.2. Categoría derivada.

A continuación daremos la definición de un sistema multiplicativo

DEFINICIÓN 4.8.
Sea $\mathscr{C}$ una categoría y Σ una clase de morfismos en $\mathscr{C}$. Para X y Y objetos de $\mathscr{C}$, denotamos por $\Sigma_{X,Y}$ la familia de morfismos de X en Y contenidos en Σ. Decimos que Σ es un sistema multiplicativo si para cada X, Y, Z objetos de $\mathscr{C}$ se cumple que:

M1 (a) Si $s \in \Sigma_{X,Y}$, $t \in \Sigma_{Y,Z}$, entonces $ts \in \Sigma_{X,Z}$.

(b) $1_X \in \Sigma_{X,X}$.

M2 (a) Dados $u : X \longrightarrow Y$ y $s \in \Sigma_{Z,Y}$, entonces existen $v : W \longrightarrow Z$ y $t \in \Sigma_{W,X}$ tales que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dotted, "v"] \arrow[d, dotted, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y.
\end{tikzcd}$$

(b) Dados $u : Y \longrightarrow X$ *y* $s \in \Sigma_{Y,Z}$*, entonces existen* $v : Z \longrightarrow W$ *y* $t \in \Sigma_{X,W}$ *tales que el diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
W & Z \arrow[l, dotted, "v"'] \\
X \arrow[u, dotted, "t"] & Y. \arrow[u, "s"'] \arrow[l, "u"']
\end{tikzcd}$$

M3 Sean $u, v : X \longrightarrow Y$ *. Entonces, existe* $s \in \Sigma_{Y,W'}$ *tal que* $su = sv$ *si y sólo si existe* $t \in \Sigma_{W,X}$ *tal que* $ut = vt$*.*

Si además se cumple que:

M4 Para cada $X \in \mathscr{C}$ *existe un conjunto* $\mathcal{F}_X$ *de objetos de* $\mathscr{C}$ *tal que para cualquier* $s \in \Sigma_{W,X}$ *existe* $Z \in \mathcal{F}_X$ *y un morfismo* $\lambda : Z \longrightarrow W$ *tal que la composición* $Z \xrightarrow{\lambda} W \xrightarrow{s} X$ *está en* Σ*.*

entonces decimos que Σ *es un sistema multiplicativo localmente pequeño a la izquierda.*

TEOREMA 4.9. *B. Keller*
Para toda $M \in \mathscr{C}$*, existe un cuasi-isomorfismo* $P_M \longrightarrow M$ *, tal que* P_M *tiene la propiedad* (P)*.*

DEMOSTRACIÓN.
La demostración de este teorema se puede ver en [**?**] inciso (b) página 7.

□

Ahora ya estamos en condiciones de probar la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 4.10.
La colección de cuasi-isomorfismos en $\mathscr{C}$*, denotada por* Σ*, forma un sistema multiplicativo localmente pequeño a la izquierda.*

DEMOSTRACIÓN.
Veamos que Σ satisface los axiomas de un sistema multiplicativo.

M1 (a) Sean $f \in \Sigma_{X,Y}$ y $g \in \Sigma_{Y,Z}$. Veamos que $gf \in \Sigma_{X,Z}$. Como tanto f y g son cuasi-isomorfismos, luego $H^i(f)$ y $H^i(g)$ son isomorfismos. Recordemos que H^i es un funtor, así $H^i(g)H^i(f) = H^i(gf)$ y $H^i(gf)$ es isomorfismo. Entonces gf es un cuasi-isomorfismo y $gf \in \Sigma_{X,Z}$.

(b) Veamos que 1_X está en $\Sigma_{X,X}$ Como H^i es un funtor tenemos que $H^i(1_X) = 1_{H^i(X)}$ es un isomorfismo, por tanto 1_X es cuasi-isomorfismo.

M2 (a) Sea $u : X \longrightarrow Y$ y $s \in \Sigma_{Z,Y}$, veamos la existencia de $v : W \longrightarrow Z$ y $t \in \Sigma_{W,X}$ tales que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dotted, "v"] \arrow[d, dotted, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Como $s : Z \longrightarrow Y$ es un morfismo de $\underline{\mathscr{C}}$, tenemos el siguiente triángulo

$$Z \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{w} Z[1] \ .$$

Note que también tenemos el morfismo $\alpha u : X \longrightarrow L$ en $\underline{\mathscr{C}}$ y con él obtenemos el siguiente triángulo

$$X \xrightarrow{\alpha u} L \xrightarrow{\beta} E \xrightarrow{w'} X[1]$$

el cual, al recorrerlo, da por resultado el siguiente triángulo

$$E[-1] \xrightarrow{-w'[-1]} X \xrightarrow{\alpha u} L \xrightarrow{\beta} E.$$

Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E[-1] \arrow[r, "-w'[-1]"] \arrow[d, dotted, "\gamma[-1]"'] & X \arrow[r, "\alpha u"] \arrow[d, "u"'] & L \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, equal] & E \arrow[d, dotted, "\gamma"] \\
Z \arrow[r, "s"] & Y \arrow[r, "\alpha"] & L \arrow[r, "w"] & Z[1]
\end{tikzcd}$$

donde γ existe por los axiomas de triangulación al trasladar los dos triángulos anteriores, luego, también existe $\gamma[-1]$. Por la proposición **??**, como $s \in \Sigma_{Z,Y}$, tenemos que L es acíclico.
Así, también, tenemos que $t := -w'[-1]$ es cuasi-isomorfismo. Si hacemos $v := \gamma[-1] : E[-1] \longrightarrow Z$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\underline{\mathscr{C}}$:

$$\begin{tikzcd}
E[-1] \arrow[r, dotted, "v"] \arrow[d, dotted, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

(b) Sean $u : Y \longrightarrow X$ y $s \in \Sigma_{Y,Z}$ Veamos que existen $v : Z \to W$ y $t \in \Sigma_{X,W}$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
W & Z \arrow[l, dotted, "v"'] \\
X \arrow[u, dotted, "t"] & Y. \arrow[l, "u"] \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

Como $s : Y \longrightarrow Z$ es un morfismo de $\underline{\mathscr{C}}$, tenemos el triángulo

$$Y \xrightarrow{s} Z \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{w} Y[1]$$

el cual, al recorrerlo, obtenemos

$$L[-1] \xrightarrow{-w[-1]} Y \xrightarrow{s} Z \xrightarrow{\alpha} L.$$

También tenemos que $-uw[-1] : L[-1] \longrightarrow Y$ es base de algún triángulo, digamos

$$L[-1] \xrightarrow{-uw[-1]} X \xrightarrow{t} W \xrightarrow{w'} L.$$

Luego, por los axiomas de triangulación, existe un morfismo v que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
L[-1] \arrow[r, "-w[-1]"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "s"] \arrow[d, "u"] & Z \arrow[r, "w'"] \arrow[d, dotted, "v"] & L \arrow[d, equal] \\
L[-1] \arrow[r, "-uw[-1]"'] & X \arrow[r, "t"'] & W \arrow[r, "w'"'] & L.
\end{tikzcd}$$

Como s es cuasi-isomorfismo, por la proposición **??** tenemos que L es acíclico y esto mismo implica que t es cuasi-isomorfismo.

M3 Notemos que como $X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y$ podemos definir a $\eta := u - v : X \longrightarrow Y$ y entonces debemos probar que existe $s \in \Sigma_{Z,X}$ tal que $\eta s = 0$ si y sólo si existe $t \in \Sigma_{Y,W}$ tal que $t\eta = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Como $s : Z \longrightarrow X$ es un morfismo, hay un triángulo

$$Z \xrightarrow{s} X \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{w} Z[1]$$

el cual, al recorrerlo, nos da el triángulo

$$C[-1] \xrightarrow{-w[-1]} Z \xrightarrow{s} X \xrightarrow{\alpha} C.$$

Por hipótesis $\eta s = 0$, entonces $s^*(\eta) = 0$, donde tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{C}, \mathrm{Y}) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \xrightarrow{s^*} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{C}}}(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}).$$

Luego, tenemos la existencia del morfismo μ tal que $\mu\alpha = \eta$ y podemos construir el triángulo $(C, Y, L, \mu, t, \gamma)$ que inicia en C. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C[-1] \arrow[r, "-w[-1]"] & Z \arrow[r, "s"] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta"'] & C \arrow[d, "\mu"] & & \\
& & Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, "t"] & L \arrow[r, "\gamma"] & C[1]
\end{tikzcd}$$

Observemos que $t\eta = t\mu\alpha = 0$. Como $s \in \Sigma_{Z,X}$ tenemos que C es acíclico y esto implica que t es cuasi-isomorfismo.
$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora suponga que t es un cuasi-isomorfismo tal que $t\eta = 0$. Tenemos un triángulo

$$Y \xrightarrow{t} W \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} L,$$

que, al recorrerlo, proporciona el siguiente triángulo

$$C[-1] \xrightarrow{-v} Y \xrightarrow{t} W \xrightarrow{u} L.$$

Por hipótesis tenemos que $\eta : X \longrightarrow Y$, tal que $t\eta = 0$ entonces existe el morfismo γ tal que $-v\gamma = \eta$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\gamma"'] & X \arrow[d, "\eta"] & & \\
C[-1] \arrow[r, "-v"'] & Y \arrow[r, "t"'] & W \arrow[r, "u"'] & L
\end{tikzcd}$$

Consideremos un triángulo $X \xrightarrow{\gamma} C[-1] \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ y recorriéndolo obtenemos $Z[-1] \xrightarrow{s} X \xrightarrow{\gamma} C[-1] \longrightarrow Z$. C es acíclico pues t es cuasi-isomorfismo, luego $C[-1]$ también es acíclico. Entonces s es cuasi-isomorfismo tal que $\eta s = -v\gamma s = 0$.

M4 Veamos que para cada $X \in \mathscr{C}$ existe un conjunto $\mathcal{F}_X$ de objetos de $\mathscr{C}$ tal que para cualquier $s \in \Sigma_{W,X}$ existe $Z \in \mathcal{F}_X$ y $Z \xrightarrow{t} W$ tal que $s \circ t \in \Sigma$.

Sea $X \in \mathscr{C}$ y sea $s \in \Sigma_{W,X}$. El siguiente triángulo se obtiene con base en el morfismo s $W \xrightarrow{s} X \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} W[1]$, con C acíclico. Por el teorema de Keller 4.9 y la proposición **??**, para todo X existe un q-proyectivo pX y un cuasi-isomorfismo $h : pX \longrightarrow X$. Entonces, existe el morfismo t tal que $h = s \circ t$, ya que $us = 0$ y $uh = 0$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "s"] & X \arrow[r, "u"] & C \arrow[r, "v"] & W[1] \\
 & pX \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, dotted, "t"] & &
\end{tikzcd}$$

luego tenemos que $\mathcal{F}_X = \{pX\}$.

□

Nuestro objetivo es entender el concepto de categoría derivada de $\mathscr{C}(A)$. Para ello recordemos la definición de funtor localización de Σ

DEFINICIÓN 4.11.

Si $\mathscr{B}$ es una categoría aditiva y Σ un sistema multiplicativo de morfismos de $\mathscr{B}$. Un funtor aditivo $Q : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}_\Sigma$ se llama una localización con respecto al sistema Σ si

(i) $Obj\mathscr{B} = Obj\mathscr{B}_\Sigma$ y Q es la identidad en objetos.

(ii) Si $f \in \Sigma$, entonces $Q(f)$ es isomorfismo.

(iii) Si $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{L}$ es un funtor aditivo tal que $G(f)$ es isomorfismo para todo morfismo f en Σ entonces existe un único funtor $\overline{G}$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{B} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "Q"'] & \mathscr{L} \\
\mathscr{B}_\Sigma . \arrow[ur, dotted, "\overline{G}"'] &
\end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 4.12.

*Sea A una k-álgebra diferencial, denotemos por $\mathscr{C}(A)$ la categoría de Mod-A diferenciales y por $K(A)$ la categoría homotópica. Σ representará la clase de los cuasi-isomorfismos en $\underline{\mathscr{C}} = K(A)$, sabemos que por la proposición 4.10 es un sistema multiplicativo. Entonces como se explica en el trabajo de [**?**] existe un funtor*

$$Q : K(A) \longrightarrow K(A)_\Sigma$$

que es una localización de $K(A)$ con respecto al sistema Σ. Por definición, $\mathscr{D}(A) := K(A)_\Sigma$ es la categoría derivada de A.

PROPOSICIÓN 4.13.

El funtor localización $Q : K(A) \longrightarrow \mathscr{D}(A)$ satisface las siguientes propiedades, para todo morfismo $h : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{D}(A)$.

(i) Existe un morfismo $u : Z \longrightarrow X$ en Σ y $f : Z \longrightarrow Y$ tal que

$$h = Q(f)Q(u)^{-1}.$$

(ii) Si $h = Q(f)Q(u)^{-1} = Q(f')Q(u')^{-1}$ con $u' : Z' \longrightarrow X$ en Σ y $f' : X' \longrightarrow Y$, entonces existen $\lambda : W \longrightarrow Z$ y $\mu : W \longrightarrow Z'$ con $u\lambda = \mu u'$ en Σ y $f\lambda = f'\mu$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & W \arrow[u, "\lambda"'] \arrow[d, "\mu"] & Y \\
 & Z' . \arrow[ul, "u'"] \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 4.14.
Si A es una k-álgebra diferencial,

(i) $\mathscr{D}(A)$ es una categoría triangulada con coproductos. Por definición sus triángulos son isomorfos a imágenes bajo Q de triángulos en $K(A)$.

(ii) El funtor $Q : K(A) \longrightarrow \mathscr{D}(A)$ es exacto y conmuta con coproductos.

(iii) Si $G : K(A) \longrightarrow \mathscr{T}$ es un funtor exacto de categorías trianguladas que conmuta con coproductos y tal que $G(u)$ es isomorfismo para cada $u \in \Sigma$, entonces el funtor

$$\overline{G} : \mathscr{D}(A) \longrightarrow \mathscr{T}$$

es exacto y conmuta con coproductos.

DEMOSTRACIÓN.
La demostración de esta proposición aparece con detalle en el capítulo 4, páginas 93-122 de [**?**]. Aquí sólo probaremos (ii). Notemos que $Q_A(M) = M$, entonces tenemos que $Q_A(M[1]) = Q_A(M)[1]$. Así tenemos que la identidad es el isomorfismo que nos funciona. Ahora veamos que el isomorfismo anterior envia triángulos en triángulos. Consideremos el siguiente triángulo en $K(A)$

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} E \xrightarrow{w} M[1]$$

aplicandole el funtor Q_A obtenemos la siguiente sucesión

$$Q_A(M) \xrightarrow{Q_A(f)} Q_A(N) \xrightarrow{Q_A(g)} Q_A(E) \xrightarrow{\quad Q_A(w) \quad} Q_A(M[1]) = Q_A(M)[1]$$

la cual es un triángulo en la categoría $\mathscr{D}(A)$. Luego tenemos que Q_A es un funtor exacto.

□

PROPOSICIÓN 4.15.
Si X es un q-proyectivo entonces para cualquier $Y \in K(A)$ el funtor Q induce un isomorfismo

$$Q : \mathrm{Hom}_{\mathrm{K(A)}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{A})}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

DEMOSTRACIÓN.
Primero veamos que Q es un monomorfismo. Para esto consideramos $f : X \longrightarrow Y$, tal que $Q(f) = 0$ en $\mathscr{D}(A)$. Así tenemos que

$$Q(f)Q(1_X)^{-1} = Q(0)Q(1_X)^{-1} = 0.$$

Por tanto por (ii) de la proposición 4.13 existen $\lambda : W \longrightarrow X$ y $\mu : W \longrightarrow X$ tal que $\lambda = 1_X\lambda = 1_X\mu$ está en Σ y $f\lambda = 0\mu = 0$.

Como $\lambda \in \Sigma$, existe un triángulo $W \xrightarrow{\lambda} X \xrightarrow{h} C \longrightarrow W[1]$ con C acíclico. Debido a que $f\lambda = 0$ existe $s : C \longrightarrow Y$ tal que $sh = f$ pero $h = 0$ en $K(A)$, por tanto $f = 0$ y esto nos implica que Q es monomorfismo.

Ahora veamos que Q es suprayectivo.
Sea $h : X \longrightarrow Y \in \mathscr{D}(A)$, entonces por (i) de la proposición 4.13, existe $u : Z \longrightarrow X$ en Σ y $f : Z \longrightarrow Y$ tal que $h = Q(f)Q(u)^{-1}$. Consideremos un triángulo que inicie en u $Z \xrightarrow{u} X \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} Z[1]$ (con C acíclico). Como $u \in \Sigma$ existe $\lambda : X \longrightarrow Z$ con $u\lambda = 1_X$. Por tanto $Q(u)Q(\lambda)^{-1} = 1_X$, de donde obtenemos

$$Q(\lambda) = Q(u)^{-1}.$$

Por consiguiente $h = Q(f)Q(u)^{-1} = Q(f)Q(\lambda) = Q(f\lambda)$.

□

OBSERVACIÓN 4.16.
Por la proposición **??** *y el teorema 4.9, tenemos un funtor exacto*

$$p : K(A) \longrightarrow K(A)$$

tal que para cada $M \in K(A)$*, hay un cuasi-isomorfismo* $h_M : pM \longrightarrow M$ *en* $K(A)$*, donde* pM *tiene la propiedad* (P)*.*

PROPOSICIÓN 4.17.
El funtor p *de la observación 4.16 induce un nuevo funtor exacto que conmuta con coproductos*

$$p_A : \mathscr{D}(A) \longrightarrow K(A),$$

tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "Q_A"'] & K(A) \\
\mathscr{D}(A). \arrow[ur, "p_A"'] &
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN.
Primero, observemos que

$$p : K(A) \longrightarrow K(A)$$

envía todo cuasi-isomorfismo $u : M \longrightarrow N$ en un cuasi-isomorfismo $pu : pM \longrightarrow pN$. En efecto, por la definición de p en la proposición **??**, el cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd}
pM \arrow[r, "h_M"] \arrow[d, "pu"'] & M \arrow[d, "u"] \\
pN \arrow[r, "h_N"'] & N.
\end{tikzcd}$$

Si aplicamos H^s a este cuadrado conmutativo, resulta

$$H^s(h_N)H^s(pu) = H^s(u)H^s(h_M).$$

Pero, h_M, u, h_N son cuasi-isomorfismos, entonces $H(h_M), H^s(u)$ y $H^s(h_N)$ son isomorfismos. Luego, también $H^s(pu)$ lo es, $\forall s \in \mathbb{Z}$. Se sigue que pu es cuasi-isomorfismo. Si denotamos por $K_p(A)$ la subcategoría plena de $K(A)$ formada por los A-módulos diferenciales con la propiedad (P), entonces por la proposición 4.15, el funtor $Q : K_p(A) \longrightarrow \mathscr{D}(A)$ es una equivalencia de categorías (Q es denso por el teorema 4.9). Esto implica que todo cuasi-isomorfismo en $K_p(A)$ es isomorfismo. Entonces, por la propiedad universal de $\mathscr{D}(A)$, hay un funtor p' que hace conmutar al triángulo

$$\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "Q"'] & K_p(A) \\
\mathscr{D}(A). \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego, tenemos el funtor composición $\mathscr{D}(A) \xrightarrow{p'} K_p(A) \xrightarrow{i} K(A)$, donde i es el funtor inclusión. Como p' e i son exactos y conmutan con coproductos, lo mismo ocurre con su composición $p_A := ip'$.

□

LEMA 4.18.
Si B es una k-álgebra diferencial y $s \in \mathbb{Z}$, el funtor $H^s : K(B) \longrightarrow k\text{-}Mod$ induce un funtor $\overline{H}^s : \mathscr{D}(B) \longrightarrow k\text{-}Mod$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K(B) \arrow[r, "H^s"] \arrow[d, "Q_B"'] & k\text{-}Mod \\
\mathscr{D}(B). \arrow[ur, "\overline{H}^s"'] &
\end{tikzcd}$$

Más aún, $\overline{H}^s$ conmuta con coproductos.

DEMOSTRACIÓN.
Por definición si h es un cuasi-isomorfismo en $K(B)$, $H^s(f)$ es un isomorfismo en k-Mod. Por la propiedad universal de $\mathscr{D}(B)$, existe

$$\overline{H}^s : \mathscr{D}(B) \longrightarrow k\text{-Mod},$$

tal que $\overline{H}^s Q_B = H^s$. Para ver que $\overline{H}^s$ conmuta con coproductos consideremos $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}(B)$. Entonces, si $\{M_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod_{i\in I} M_i\}_{j\in I}$ es su coproducto en $\mathscr{C}(B)$, $\{M_j \xrightarrow{\pi\sigma_j} \coprod_{i\in I} M_i\}_{j\in I}$ es su coproducto en $K(B)$, y $\{M_j \xrightarrow{Q\pi\sigma_j} \coprod_{i\in I} M_i\}_{j\in I}$ es su coproducto en $\mathscr{D}(B)$.

Consideremos el morfismo de conmutación

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} H^s(M_i) \arrow[rr, "\underline{\Phi}"] & & H^s(\coprod_{i\in I} M_i) \\
& H^s(M_j), \arrow[ul, "\sigma_{H^s(M_j)}"] \arrow[ur, "H^sQ_A\pi(\sigma_j)"'] &
\end{tikzcd}$$

notemos que $\underline{\Phi} = Q_A\pi(\Phi)$, donde Φ es el morfismo de conmutación de $H^s : \mathscr{C}(A) \longrightarrow k\text{-Mod}$:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} H^s(M_i) \arrow[rr, "\Phi"] & & H^s(\coprod_{i\in I} M_i) \\
& H^s(M_j). \arrow[ul, "\sigma_{H^s(M_j)}"] \arrow[ur, "H^s(\sigma_j)"'] &
\end{tikzcd}$$

Basta ver que Φ es isomorfismo. Recordemos que, por definición, $\delta_{\coprod M_i} = \coprod_{i\in I} \delta_{M_i}$, donde δ_{M_i} es la diferencial de M_i. Si $\Sigma\overline{m}_j \in \coprod_{i\in I} H^s(M_i)$, entonces

$$\Phi(\Sigma\overline{m}_i) = \overline{\Sigma m_i} \in H^s(\coprod_{i\in I} M_i).$$

Así, Φ es claramente suprayectiva. Si $\Phi(\Sigma\overline{m_i}) = 0$, entonces

$$\Sigma m_i = \delta_{\coprod M_i}(\Sigma n_i) = \Sigma\delta_{M_i}(n_i)$$

y resulta que $m_i = \delta_{M_i}(n_i)$, $\forall i \in I$. Esto es, $\overline{m}_i = 0\ \forall i \in I$. Luego Φ es inyectiva.

□

PROPOSICIÓN 4.19.

Si $f : Z \longrightarrow W$ *es un morfismo en* $\mathscr{D}(A)$*, entonces* f *es isomorfismo si y sólo si, para toda* $s \in \mathbb{Z}$ $\overline{H}^s(f) : \overline{H}^s(Z) \longrightarrow \overline{H}^s(W)$ *es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.

Como f es un morfismo en $\mathscr{D}(A)$, entonces $f = Q(u)Q(t)^{-1}$ con $t \in \Sigma$, de donde vemos que $fQ(t) = Q(u)$. Notemos que

(a) f es isomorfismo si y sólo si $Q(u)$ es isomorfismo en $\mathscr{D}(A)$.
Es claro ya que como $t \in \Sigma$, entonces $Q(t)$ es isomorfismo.

(b) $\overline{H}^s(f)$ es isomorfismo si y sólo si $\overline{H}^s(Q(u))$ es isomorfismo.
Por un argumento análogo al hecho en el inciso (a), pues

$$\overline{H}^s(f) = \overline{H}^s(Q(u))\overline{H}^s(Q(t^{-1})).$$

Por (a) y (b) basta ver que $Q(u)$ es isomorfismo en $\mathscr{D}(A) \Leftrightarrow \overline{H}^s(Q(u))$ es isomorfismo en k-Mod, $\forall s \in \mathbb{Z}$. Notemos que si $Q(u)$ es isomorfismo en $\mathscr{D}(A)$, entonces

$\overline{H}^s(Q(u))$ es isomorfismo en k-Mod para toda $s \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, supongamos que $\overline{H}^s(Q(u))$ es isomorfismo en k-Mod para toda $s \in \mathbb{Z}$. Por el lema 4.18 tenemos que $\overline{H}^s(Q(u)) = H^s(u)$, así tenemos que $H^s(u)$ es isomorfismo, y esto nos dice que u es un cuasi-isomorfismo en $K(A)$. Luego tenemos que $Q(u)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}(A)$. En conclusión hemos visto que f es isomorfismo en $\mathscr{D}(A)$ si y sólo si $Q(u)$ es isomorfismo en $\mathscr{D}(A)$ si y sólo si $\overline{H}^s(Q(u))$ es isomorfismo en k-Mod si y sólo si $\overline{H}^s(f)$ es isomorfismo en k-Mod

□

DEFINICIÓN 4.20.
Si R es una k-álgebra, por definición, la categoría derivada $\mathscr{D}(R)$ se obtiene de la categoría homotópica $\widehat{K}(R)$ localizando en el sistema multiplicativo $\widehat{\Sigma}$ de $\widehat{K}(R)$ formado por los cuasi-isomorfismos de $\widehat{K}(R)$.

OBSERVACIÓN 4.21.
Si R es una k-álgebra y la pensamos como la k-álgebra diferencial $\hat{R}$ con diferencial cero, la equivalencia $\underline{E}$ de la observación 4.7 induce una equivalencia $\overline{\underline{E}}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{K}(R) \arrow[r, "\underline{E}"] \arrow[d, "Q_R"'] & K(\widehat{R}) \arrow[d, "Q_{\widehat{R}}"] \\
\mathscr{D}(R) \arrow[r, "\overline{\underline{E}}"'] & \mathscr{D}(\widehat{R}).
\end{tikzcd}$$

Esto nos permitirá estudiar categorías derivadas de álgebras en el contexto más amplio de las categorías derivadas de álgebras diferenciales.

4.3. Los Funtores LT_X y RH_X.

DEFINICIÓN 4.22.
Si ${}_AX_B$ es un bimódulo diferencial, definimos el funtor derivado izquierdo

$$LT_X : \mathscr{D}(A) \longrightarrow \mathscr{D}(B)$$

como la composición $LT_X := Q_BT_Xp_A$. Luego, tenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(A) \arrow[r, "LT_X"] \arrow[d, "p_A"'] & \mathscr{D}(B) \\
K(A) \arrow[r, "T_X"'] & K(B). \arrow[u, "Q_B"']
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 4.23.

El funtor LT_X es un funtor exacto y conmuta con coproductos.

DEMOSTRACIÓN.

Como los funtores Q_B, p_A, T_X son exactos y conmutan con coproductos, luego tenemos que LT_X es exacto y conmuta con coproductos.

$\square$

DEFINICIÓN 4.24.

Si ${}_AX_B$ es un bimódulo diferencial, definimos el funtor derivado derecho

$$RH_X : \mathscr{D}(B) \longrightarrow \mathscr{D}(A)$$

como la composición $RH_X := Q_AH_Xp_B$. Luego, tenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(B) \arrow[r, "RH_X"] \arrow[d, "p_B"'] & \mathscr{D}(A) \\
K(B) \arrow[r, "H_X"'] & K(A). \arrow[u, "Q_A"']
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 4.25.

El funtor RH_X es exacto.

DEMOSTRACIÓN.

Es claro ya que por la manera en que definimos al funtor RH_X tenemos que es una composición de funtores exactos y que conmutan con coproductos.

$\square$

LEMA 4.26.

Sea ${}_AX_B$ un AB-bimódulo diferencial tal que X_B es q-proyectivo. Por la proposición **??**, *$H_X : K(B) \longrightarrow K(A)$ conserva cuasi-isomorfismos. Por la propiedad universal de $\mathscr{D}(B)$, H_X induce un funtor $\overline{H}_X$ que hace conmutar el cuadro*

$$\begin{tikzcd}
K(B) \arrow[r, "H_X"] \arrow[d, "Q_B"'] & K(A) \arrow[d, "Q_A"] \\
\mathscr{D}(B) \arrow[r, "\overline{H}_X"'] & \mathscr{D}(A).
\end{tikzcd}$$

Además, tenemos un isomorfismo de funtores: $\overline{H}_X \cong RH_X$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $M \in K(B)$. Como H_X conserva cuasi-isomorfismos por la proposición **??**, y tenemos un cuasi-isomorfismo $H_X(h_M) : H_X(pM) \longrightarrow H_X(M)$. Podemos considerar el isomorfismo

$$\eta_M := Q_AH_X(h_M) = Q_AH_Xp_B(M) : RH_X(M) \longrightarrow H_X(M) = \overline{H}_X(M).$$

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo en $K(B)$, recordemos que tenemos el cuadrado conmutativo en $K(B)$:

$$\begin{tikzcd}
pM \arrow[r, "h_M"] \arrow[d, "pf"'] & M \arrow[d, "f"] \\
pN \arrow[r, "h_N"'] & N,
\end{tikzcd}$$

y el triángulo conmutativo de funtores

$$\begin{tikzcd}
K(B) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "Q"'] & K(B) \\
\mathscr{D}(B). \arrow[ur, "p_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor $Q_A H_X$ al cuadrado anterior, obtenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Q_A H_X p_B(M) \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "Q_A H_X p_B Q_B(f)"'] & Q_A H_X M = \overline{H}_X Q_B(M) \arrow[d, "Q_A H_X(f) = \overline{H}_X Q_B(f)"] \\
Q_A H_X p_B(N) \arrow[r, "\eta_N"'] & Q_A H_X N = \overline{H}_X Q_B(N).
\end{tikzcd}$$

Luego, $\eta : Q_A H_X p_B \longrightarrow \overline{H}_X$ es un isomorfismo de funtores.

□

PROPOSICIÓN 4.27.
Para M en $\mathscr{D}(A)$, N en $\mathscr{D}(B)$ y ${}_AX_B$ q-proyectivo como B-módulo, se tiene un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(B)}(\mathrm{LT_X(M), N}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(\mathrm{M, RH_X(N)})$$

que es natural en M y N. Esto es, los funtores LT_X y RH_X son adjuntos.

DEMOSTRACIÓN.
Como $p_A(M)$ es q-proyectivo, por la proposición **??** tenemos que $T_X p_A(M)$ también es q-proyectivo, entonces, usando las proposiciones **??** y 4.15

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(B)}(\mathrm{LT_X(M), N}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(B)}(\mathrm{Q_B T_X p_A(M), N})$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(B)}(\mathrm{T_X p_A(M), N}) \simeq \mathrm{Hom}_{K(B)}(\mathrm{T_X p_A(M), N})$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{K(A)}(\mathrm{p_A(M), H_X(N)}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(\mathrm{p_A(M), \overline{H}_X(N)})$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(\mathrm{M, RH_X(N)})$$

□

PROPOSICIÓN 4.28.
Sean X_1, X_2 dos AB bimódulos y $h : X_1 \longrightarrow X_2$ *un morfismo de AB bimódulos, entonces* $LT_h := Q_B T_h p_A : LT_{X_1} \longrightarrow LT_{X_2}$ *es un morfismo de funtores exactos.*

DEMOSTRACIÓN.
Se concluye partiendo del hecho de que, por la proposición **??** que $T_h : T_{X_1} \longrightarrow T_{X_2}$ es un morfismo de funtores exactos, y, luego, podemos aplicar el lema **??** (aplicando Q_B a la izquierda y p_A a la derecha).

□

LEMA 4.29.
Si A es una k-álgebra diferencial y A es el A-módulo diferencial regular derecho, entonces:

(a) A es un generador de $\mathscr{D}(A)$*;*

(b) $\mathfrak{X} = \{A[n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *es un sistema de generadores compactos, cerrados bajo traslación de* $\mathscr{D}(A)$*.*

DEMOSTRACIÓN.
Haremos la demostración de cada uno de los incisos:

(a) Ya sabemos que $\mathscr{D}(A)$ es una categoría triangulada con coproductos. Sea $\mathscr{T}$ una subcategoría triangulada de $\mathscr{D}(A)$, cerrada bajo coproductos e isomorfismos, que contiene a $\mathfrak{X} = \{A\}$. Para comprobar el inciso (a) debemos ver que $\mathscr{T} = \mathscr{D}(A)$.

Por el teorema de Keller 4.9, para cada $M \in K(A)$ hay un cuasi-isomorfismo $h_M : pM \longrightarrow M$ donde pM tiene la propiedad (P). Luego, $pM \cong M$ en $\mathscr{D}(A)$. Como $\mathscr{T}$ es cerrado bajo isomorfismos, bastará ver que $pM \in \mathscr{T}$. Por simplicidad, supongamos que M satisface la propiedad (P), y adoptemos la notación de la definición **??**. Como $\mathscr{T}$ es cerrada bajo traslaciones, $A[i] \in \mathscr{T}$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Como $\mathscr{T}$ es cerrada bajo coproductos, $\coprod_{j \in J_i} A[t_j] \in \mathscr{T}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo. Luego, $M_1 \in \mathscr{T}$. Supongamos que hemos verificado que $M_s \in \mathscr{T}$ para $s \in \mathbb{N}$ con $1 \leq s \leq i$, donde $i \in \mathbb{N}$ es fijo. Como M tiene la propiedad (P), hay una $\mathscr{E}$-sucesión en $K(A)$

$$M_i \xrightarrow{\sigma_i} M_{i+1} \xrightarrow{\tau_i} T_i$$

donde $T_i = \coprod_{j \in J_i} A[t_j] \in \mathscr{T}$. Consideremos un triángulo en $\mathscr{D}(A)$;

$$M_i \xrightarrow{\pi(\sigma_i)} M_{i+1} \xrightarrow{\pi(\tau_i)} T_i \xrightarrow{\pi(w_i)} TM_i.$$

Como $\mathscr{T}$ es subcategoría triangulada, cerrada bajo isomorfismo y $M_i, T_i \in \mathscr{T}$, resulta que $M_{i+1} \in \mathscr{T}$. Luego, $M_i \in \mathscr{T}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Finalmente, consideremos el triángulo

$$\coprod_{i \in \mathbb{N}} M_i \longrightarrow \coprod_{j \in \mathbb{N}} M_j \longrightarrow M \longrightarrow \left(\coprod_{i \in \mathbb{N}} M_i\right)[1]$$

construido en el corolario **??** . Como antes, $M \in \mathscr{T}$ pues los otros términos del triángulo están en $\mathscr{T}$.

(b) Por el inciso (a) $\mathfrak{X}$ es un sistema de generadores para $\mathscr{D}(A)$. Además, claramente $\mathfrak{X}$ es cerrado bajo traslaciones. Por la proposición **??**, puesto que $M \longrightarrow M[1]$ es un automorfismo de $\mathscr{D}(A)$, bastará probar que A es compacto en $\mathscr{D}(A)$.
Como $\pi : \mathscr{C}(A) \longrightarrow K(A)$ y $Q : K(A) \longrightarrow \mathscr{D}(A)$ conmutan con coproductos, dada la familia $\{M_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}(A)$, utilizamos el símbolo $\coprod_{i\in I} M_i$ para denotar el coproducto de la familia en $\mathscr{C}(A)$, en $K(A)$ y en $\mathscr{D}(A)$. Notemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(\mathrm{A}, \mathrm{M_i}) \arrow[r, "\Psi_{\mathscr{C}}"] \arrow[d, "\coprod \pi"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(A)}(\mathrm{A}, \coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{M_i}) \arrow[d, "\pi"] \\
\coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K(A)}}(\mathrm{A}, \mathrm{M_i}) \arrow[r, "\Psi_K"] \arrow[d, "\coprod Q"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K(A)}}(\mathrm{A}, \coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{M_i}) \arrow[d, "Q"] \\
\coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(\mathrm{A}, \mathrm{M_i}) \arrow[r, "\Psi_{\mathscr{D}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(A)}(\mathrm{A}, \coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{M_i})
\end{tikzcd}$$

donde $\Psi_{\mathscr{C}}, \Psi_K, \Psi_{\mathscr{D}}$ son los morfismos de conmutación. Por la observación **??**, $\Psi_{\mathscr{C}}$ es isomorfismo. Como π es epimorfismo resulta Ψ_K epimorfismo. Si $\Psi_K([\pi(f_i)]) = 0$, tenemos $\pi\Psi_{\mathscr{C}}[(f_i)] = \Psi_K(\pi(f_i)) = 0$. Luego, existe P $\mathscr{E}$-proyectivo y morfismos

$$g : A \longrightarrow P, \qquad h : P \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i$$

tales que $\Psi_{\mathscr{C}}[(f_i)] = hg$. Sea $\pi_j : \coprod M_i \longrightarrow M_j$ la proyección j-ésima, para $j \in I$. Luego, $h_j := \pi_j h : P \longrightarrow M_j$ satisface

$$f_j = \pi_j f = \pi_j hg = h_j g,$$

y f_j se factoriza por un $\mathscr{E}$-proyectivo. Luego, $[\pi(f_i)] = 0$ y Ψ_K es inyectivo. Así, hemos visto que Ψ_K es isomorfismo. Como A satisface la propiedad (P), A es q-proyectivo. Entonces, por la proposición 4.15, resulta que también $\Psi_{\mathscr{D}}$ es isomorfismo.

□

PROPOSICIÓN 4.30.

Como sabemos, tener un AB-bimódulo diferencial X es equivalente a tener un $A\otimes B^{op}$*-módulo diferencial izquierdo X. Por el teorema de Keller 4.9 existe pX un* $A \otimes_k B^{op}$*-módulo diferencial con la propiedad (P) y un cuasi-isomorfismo de* $A \otimes_k B^{op}$*-modulos* $h : pX \longrightarrow X$ *. En particular pX es un AB-bimódulo* *diferencial y* $h : pX \longrightarrow X$ *un morfismo de* AB*-bimódulos. Entonces* $LT_h : LT_{pX} \longrightarrow LT_X$ *es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.
Por la proposición 4.28 tenemos el siguiente morfismo de funtores exactos

$$LT_{pX} \xrightarrow{LT_h} LT_X.$$

Probemos que es un isomorfismo de funtores de $\mathscr{D}(A)$ en $\mathscr{D}(B)$. Por el lema 4.29 y la proposición **??**, basta probar que $(LT_h)_A : LT_{pX}(A) \longrightarrow LT_X(A)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}(B)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}(B)$.

$$\begin{tikzcd}
T_X(A) \arrow[d, equal] & T_{pX}(A) \arrow[l, "(T_h)_A"'] \arrow[d, equal] \\
A \otimes_A X & A \otimes_A pX \arrow[l, "1\otimes h"] \\
X_B \arrow[u] & pX, \arrow[l, "h"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son los isomorfismos de la proposición **??**. Como h es cuasi-isomorfismo en $\mathscr{C}(A \otimes_k B^{op})$

$$H^i(h) : H^i(pX) \longrightarrow H^i(X),$$

es isomorfismo para toda $i \in \mathbb{Z}$. Luego, $h : pX \longrightarrow X$ es cuasi-isomorfismo en $\mathscr{C}(B)$. Entonces,

$$(T_h)_A : T_{pX}(A) \longrightarrow T_X(A)$$

es cuasi-isomorfismo en $\mathscr{C}(B)$. Como $p_A(A) = A$, tenemos que

$$Q_A T_h p_A : Q_A T_{pX} p_A(A) \longrightarrow Q_A T_X p_A(A)$$

es isomorfismo en $\mathscr{D}(B)$.

□

PROPOSICIÓN 4.31.
Si ${}_AX_B$ es un bimódulo diferencial, hay un isomorfismo de funtores exactos, de $K(A)$ en $\mathscr{D}(B)$.

DEMOSTRACIÓN.
Para $M \in K(A)$, por el teorema de Keller (teorema 4.9), tenemos un cuasi-isomorfismo $q_M : pM \longrightarrow M$. Consideremos el morfismo

$$LT_{pX} Q_A(M) = Q_B T_{pX}(pM) \xrightarrow{\tau_M} T_{pX}(M) = Q_B T_{pX}(M),$$

donde $\tau_M := Q_B T_{pX}(q_M)$. Notemos que al aplicar el funtor exacto T_{pX} a un triángulo $pM \xrightarrow{q_M} M \longrightarrow C \longrightarrow pM[1]$, donde C es acíclico, obtenemos

$$T_{pX}(pM) \xrightarrow{T_{pX}(q_M)} T_{pX}(M) \longrightarrow T_{pX}(C) \longrightarrow T_{pX}(pM[1]).$$

Por la proposición **??**, como C es acíclico, $T_{pX}(C)$ es acíclico. Entonces, $T_{pX}(q_M)$ es cuasi-isomorfismo y τ_M es isomorfismo en $\mathscr{D}(B)$. Veamos ahora que

$$\tau : LT_{pX}Q_A \longrightarrow Q_B T_{pX}$$

es una transformación natural. Tenemos el funtor $p'_A : K(A) \longrightarrow K(A)$ definido por tomar $p'_A(M) = pM$ y por el cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd}
pM \arrow[r, "q_M"] \arrow[d, "p'_A(f)"'] & M \arrow[d, "f"] \\
pN \arrow[r, "q_N"'] & N,
\end{tikzcd}$$

para cada morfismo $f : M \longrightarrow N$ de $K(A)$. Apliquemos el funtor $Q_B\ T_{p_X}$ al cuadro anterior para obtener el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Q_B T_{pX}(pM) \arrow[r, "Q_B T_{pX}(q_M)"] \arrow[d, "Q_B T_{pX} p'_A(f)"'] & Q_B T_{pX}(M) \arrow[d, "Q_B T_{pX}(f)"] \\
Q_B T_{pX}(pN) \arrow[r, "Q_B T_{pX}(q_N)"'] & Q_B T_{pX}(N).
\end{tikzcd}$$

Puesto que $p'_A = p_A Q_A$, vemos que el cuadro anterior es

$$\begin{tikzcd}
LT_{pX}Q_A(M) \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, "LT_{pX}Q_A(f)"'] & Q_B T_{pX} Q_A(M) \arrow[d, "Q_B T_{pX}(f)"] \\
LT_{pX}Q_A(N) \arrow[r, "\tau_N"'] & Q_B T_{pX}(N).
\end{tikzcd}$$

Para ver que τ es un morfismo de funtores exactos nos falta ver que conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
LT_{pX}Q_A(M[1]) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\tau_{M[1]}"'] & LT_{pX}Q_A(M)[1] \arrow[d, "(\tau_M)[1]"] \\
Q_B T_{pX}(M[1]) \arrow[r, "\Phi'"'] & Q_B T_{pX}(M)[1]
\end{tikzcd}$$

en donde $\Phi = \eta T_{pX}(q_n)\psi_{q_M} Q_B T_{pX}(\varphi)$ y $\Phi' = \eta Q_B \psi$, por el lema **??** son los morfismos de conmutación, ya que φ, ψ, y η los morfismos de conmutación de los funtores exactos p, T_{pX} y Q_B respectivamente. Notemos que el cuadrado anterior es equivalente al siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd}
Q_B T_{pX} p'_A(M[1]) \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "Q_B T_{pX}(q_{M[1]})"'] & Q_B T_{pX} p'_A(M)[1] \arrow[d, "Q_B T_{pX}(q_M)[1]"] \\
Q_B T_{pX}(M[1]) \arrow[r, "\Theta'"'] & Q_B T_{pX}(M)[1].
\end{tikzcd}$$

Al componer $T_{pX} p$ obtenemos el siguiente diagrama que es conmutativo por la proposición **??**

$$\begin{tikzcd}
T_{pX}(pM[1]) \arrow[r, "T_{pX}(\varphi)"] \arrow[d, "T_{pX}(q_{M[1]})"'] & T_{pX}((pM)[1]) \arrow[r, "\psi pM"] \arrow[d, "T_{pX}(q_M[1])"] & T_{pX}(pM)[1] \arrow[d, "(T_{pX} q_M)[1]"] \\
T_{pX}(M[1]) \arrow[r, equal] & T_{pX}(M[1]) \arrow[r, "\psi_M"'] & (T_{pX} M)[1]
\end{tikzcd}$$

Aplicandole el funtor exacto Q_B al diagrama anterior y nuevamente por la proposicion **??**, obtenemos el siguiente diagrama donde cada uno de los cuadrados interiores es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Q_B(T_{pX}(pM[1])) \arrow[r, "Q_B T_{pX}(\varphi)"] \arrow[d, "Q_B T_{pX}(q_{M[1]})"'] & Q_B(T_{pX}((pM)[1])) \arrow[r, "\psi q_M"] \arrow[d, "Q_B T_{pX}(q_M[1])"] & Q_B(T_{pX}(pM)[1]) \arrow[d, "Q_B(T_{pX} q_M)[1]"] \\
Q_B(T_{pX}(M[1])) \arrow[r, equal] & Q_B(T_{pX}(M[1])) \arrow[r, "Q_B \psi"'] & Q_B((T_{pX} M)[1])
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q_B(T_{pX}(pM)[1]) \arrow[r, "\eta T_{pX}(q_M)"] \arrow[d, "Q_B(T_{pX} q_M)[1]"'] & (Q_B T_{pX} pM)[1] \arrow[d, "(Q_B T_{pX}(q_M))[1]"] \\
Q_B((T_{pX} M)[1]) \arrow[r, "\eta"'] & (Q_B T_{pX} M)[1].
\end{tikzcd}$$

De aquí se sigue nuestro resultado.

□

PROPOSICIÓN 4.32.

Si ${}_A X_B$ es un AB-bimódulo diferencial, ${}_B Y_C$ un BC-bimódulo entonces

$$LT_Y LT_X \cong LT_{X \otimes pY}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(A) \arrow[r, "LT_X"] \arrow[d, "p_A"'] & \mathscr{D}(B) \arrow[r, "LT_{pY}"] \arrow[d, shift left, "p_B"] & \mathscr{D}(C) \\
K(A) \arrow[r, "T_X"'] \arrow[rr, bend right, "T_X \otimes p_Y"'] & K(B) \arrow[r, "T_{pY}"'] \arrow[u, shift left, "Q_B"] & K(C) \arrow[u, "Q_C"']
\end{tikzcd}$$

Por las proposiciones 4.30,4.31 y **??** resulta que

$$LT_Y LT_X \cong LT_{pY} LT_X = LT_{pY} Q_B T_X p_A \cong Q_C T_{pY} T_X p_A$$

$$\cong Q_C T_{X \otimes p_Y} p_A = LT_{X \otimes pY}.$$

□

LEMA 4.33.
Sean $X, Y \in \mathscr{C}(B)$. Consideremos al complejo de k-espacios vectoriales $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \bigoplus_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$*, cuya diferencial vimos en la proposición* **??**. *Entonces*

$$H^s(\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{K(B)}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y[s]})$$

donde el isomorfismo es natural en Y.

DEMOSTRACIÓN.
Recordemos que, para $s \in \mathbb{Z}$, por definición

$$H^s(\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})) = \frac{\mathrm{Z^s}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))}{\mathrm{B^s}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})),}$$

y que si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ es homogéneo, $\delta(f) = d_Y f - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f d_X$. Por la proposición **??** tenemos el siguiente isomorfismo

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \xrightarrow{\varphi'_s} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{(B)}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y[s]})$$

el cual al restringirlo, nos da el isomorfismo

$$Z^s(\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))) \xrightarrow{\varphi_s} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\mathrm{(B)}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y[s]}).$$

Sea $W(X, Y[s]) := \{h \sim 0 \mid h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\mathrm{(B)}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y[s]})\}$. Ahora veamos que

$$\varphi_s[B^s(\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))] = \mathrm{W}(\mathrm{X}, \mathrm{Y[s]}).$$

Sea $h \in B^s(\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))$, entonces existe $u \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{s}-1}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ tal que $h = \delta(u)$, así tenemos $h = d_Y u - (-1)^{s-1} u d_X$. Entonces

$$\varphi_{s-1}(u) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y[s-1]}) \text{ y } \alpha := (-1)^{\mathrm{s}} \varphi_{\mathrm{s}-1}(\mathrm{u})[1] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{(B)}}(\mathrm{X[1]}, \mathrm{Y[s]})$$

satisface

$$h = (-1)^s d_Y[(-1)^s u] + [(-1)^s u] d_X = d_{Y[s]}[(-1)^s u] + [(-1)^s u] d_X$$

y de allí que $h^i = d^i_{Y[s]} \alpha^{i-1} + \alpha^i d^i_X$, para toda $i \in \mathbb{Z}$. Por la definición 4.4 tenemos que $h \sim 0$.

Ahora, supongamos que $h \sim 0$, es decir existe la familia de morfismos $\alpha := (\alpha^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{r(B)}}(\mathrm{X[1], Y[s]})$, tales que

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_X^{i-2}"] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[dl, "\alpha^{i-2}"'] \arrow[d, "h^{i-1}"'] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[dl, "\alpha^{i-1}"'] \arrow[d, "h^i"'] & X^{i+1} \arrow[r, "d_X^{i+1}"] \arrow[dl, "\alpha^i"'] \arrow[d, "h^{i+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_{Y[s]}^{i-2}"'] & Y[s]^{i-1} \arrow[r, "d_{Y[s]}^{i-1}"'] & Y[s]^i \arrow[r, "d_{Y[s]}^i"'] & Y[s]^{i+1} \arrow[r, "d_{Y[s]}^{i+1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y tenemos que $h^i = d_{Y[s]}^i \alpha^{i-1} + \alpha^i d_X^i \; \forall i \in \mathbb{Z}$. Luego tenemos

$$h^i = (-1)^s d_Y^i \alpha^{i-1} + \alpha^i d_X^i = d_Y^i[(-1)^s \alpha^{i-1}] - (-1)^{s-1}[(-1)^s \alpha^i] d_X^i$$

$\forall i \in \mathbb{Z}$. Entonces $u := (-1)^s \varphi_{s-1}^{-1}(\alpha[-1]) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}^{\mathrm{s-1}}(\mathrm{X, Y})$ satisface $h = d_Y u - (-1)^{s-1} u d_X$. Así, $h \in B^s(\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X, Y}))$.

□

LEMA 4.34.
Sea ${}_AX_B$ un AB-bimódulo diferencial y $M \in \mathscr{D}(B)$, con X_B q-proyectivo, entonces

$$H^s(RH_X(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X, M[s]}),$$

donde el isomorfismo es natural en M.

DEMOSTRACIÓN.
El isomorfismo del enunciado se obtiene componiendo los isomorfismos del siguiente diagrama. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo en $\mathscr{D}(B)$. Note que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^s(RH_X(M)) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "H^s(RH_X(f))"'] & H^s(H_XpM) \arrow[r] \arrow[d, "H^s(H_X(pf))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K(B)}}(\mathrm{X, (pM)[s]}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom(1,(pf)[s])}"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X, p(M[s])}) \arrow[d, "\mathrm{Hom(1,p(f[s]))}"] \\
H^s(RH_X(N)) \arrow[r, phantom, "="] & H^s(H_XpN) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K(B)}}(\mathrm{X, (pN)[s]}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X, p(N[s])})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X, p(M[s])}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom(1,p(f[s]))}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X, M[s]}) \arrow[d, "\mathrm{Hom(1,f[s])}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X, p(N[s])}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X, N[s]})
\end{tikzcd}$$

donde el primer cuadrado conmuta por definición de $H^s : \mathscr{D}(B) \longrightarrow k\text{-Mod}$, el segundo por el lema 4.33, el tercero lo hace por el lema **??** y el cuarto por la proposición **??**.

□

PROPOSICIÓN 4.35.

Sea ${}_AX_B$ y X_B q-proyectivo como B-módulo. Entonces el funtor RH_X conmuta con coproductos si y sólo si X_B es compacto.

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que RH_X conmuta con coproductos. Por el lema 4.18, también lo hace H^0RH_X y por el lema 4.34 se tiene que $H^0RH_X \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, -)$. Por el lema **??**, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, -)$ conmuta con coproductos y X es compacto en $\mathscr{D}(B)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si X_B es compacto en $\mathscr{D}(B)$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, -)$ preserva coproductos. Por el lema **??**, T conmuta con coproductos. Por la proposición **??**, T^s también. Luego, nuevamente por la proposición **??**, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{B})}(\mathrm{X}, \mathrm{T}^{\mathrm{i}}(-))$ conmuta con coproductos. Por el lema **??** y por el lema 4.34 H^sRH_X conmuta con coproductos. Por el lema 4.18 también H^s lo hace. Luego tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^s(\coprod_{i\in I} RH_X(M_i)) & \coprod_{i\in I} H^sRH_X(M_i) \arrow[l, "\Phi_{H^s}"'] \arrow[r, "\Phi_{H^sRH_X}"] & H^sRH_X(\coprod_{i\in I} M_i) \\
& H^sRH_X(M_j) \arrow[ul, "H^s(\sigma_{H^sRH_X(M_j)})"] \arrow[u, "\sigma_{H^sRH_X(M_j)}"] \arrow[ur, "H^sRH_X(\sigma_{M_j})"'] &
\end{tikzcd}$$

donde Φ_{H^s} y $\Phi_{H^sRH_X}$ son isomorfismos. Queremos ver que en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} RH_X(M_i) \arrow[rr, "\Phi_{RH_X}"] & & RH_X(\coprod_{i\in I} M_i) \\
& RH_X(M_j) \arrow[ul, "\sigma_{RH_X(M_j)}"] \arrow[ur, "RH_X(\sigma_{M_j})"'] &
\end{tikzcd}$$

Φ_{RH_X} es isomorfismo. Pero tal diagrama se obtiene de aplicar el funtor Q_A al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} H_X(M_i) \arrow[rr, "\Phi_{H_X}"] & & H_X(\coprod_{i\in I} M_i) \\
& H_X(M_j). \arrow[ul, "\sigma_{H_X(M_j)}"] \arrow[ur, "H_X(\sigma_{M_j})"] &
\end{tikzcd}$$

Luego, basta ver que Φ_{H_X} es cuasi-isomorfismo. Lo cual se sigue de que $H^s(\Phi_{H_X}) = \Phi_{H^sRH_X}\Phi_{H^s}^{-1}$ es isomorfismo.

□

PROPOSICIÓN 4.36.
Sea ${}_AX_B$ un AB bimódulo, donde A, B son álgebras diferenciales. X_B es q-proyectivo y compacto. Definamos $\mu := Q_A\overline{\psi}p_B$. Entonces

$$\mu : LT_{X^*} \longrightarrow RH_X$$

es un isomorfismo de funtores exactos. Aquí $\overline{\psi} : T_{X^*} \longrightarrow H_X$ es el morfismo del lema **??**.

DEMOSTRACIÓN.
μ es un morfismo de funtores exactos por los lemas **??** y **??**.
Sea $\mathfrak{X} = \{B\}$, el cual es un sistema de generadores por el lema 4.29 para $\mathscr{D}(B)$. Por la proposición 4.23 y la proposición 4.35 tenemos que LT_{X^*} y RH_X son funtores exactos que conmutan con coproductos. Por la proposición **??**, el teorema queda demostrado si vemos que

$$\mu_B : LT_{X^*}(B) \longrightarrow RH_X(B)$$

es isomorfismo en $\mathscr{D}(A)$. Notemos que dado $M \in \mathscr{D}(B)$, si vemos que

$$\overline{\psi}_{p_B(M)} : T_{X^*}(p_B(M)) \longrightarrow H_X(p_B(M))$$

es isomorfismo en $\underline{\mathscr{C}}(A)$ obtenemos que

$$\mu_M = (Q_A\overline{\psi}p_B)_M : LT_{X^*}(M) = Q_AT_{X^*}p_B(M) \longrightarrow Q_AH_Xp_B(M) = RH_X(M)$$

también lo es. Recordemos que $p_BB = B$ y que $T_{X^*}(B) = B \otimes_B X^*$ y si $b \in B$, $f \in X^* = \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}\mathrm{rB}}(\mathrm{X}, \mathrm{B})$ y $x \in X$ son homogéneos,

$$\psi_B(b\otimes f)(x) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(x)}}b{*}f(x) = (-1)^{\mathrm{gr(b)gr(x)+gr(b)(gr(f)+gr(x))}}bf(x) = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(x)}}bf(x).$$

Luego,

$$\psi_B : B \otimes_B X^* = T_{X^*}(B) \longrightarrow H_X(B) = X^*$$

coincide con el isomorfismo en $\mathscr{C}(A)$ descrito en la proposición **??** Luego tenemos que $\overline{\psi}_B$ es isomorfismo de $\underline{\mathscr{C}}(A)$. Hemos visto entonces que μ_B es isomorfismo en $\mathscr{D}(A)$.

□

4.4. Prueba del Teorema de Rickard.

PROPOSICIÓN 4.37.
Sea A un álgebra diferencial. Entonces, el 0-grupo de homología $H^0(A)$, de A es una k-álgebra.

DEMOSTRACIÓN.
Lo que veremos es que $H^0(A)$ es el cociente de la subálgebra $Z^0(A)$ de A por el ideal bilateral $B^0(A)$ de la subálgebra.

(a) $Z^0(A)$ es una subálgebra de A.
Recordemos que $Z^0(A) = \{a \in A^0 | d(a) = 0\}$ y que $1 \in Z^0(A)$, de estos hechos notamos que es cerrado bajo sumas y productos.

(b) $B^0(A)$ es un ideal bilateral de $Z^0(A)$.
Ya sabemos que $B^0(A) = \{d(b) | b \in A^{-1}\}$ es subespacio vectorial de $Z^0(A)$. Ahora veamos que es un ideal izquierdo. Sea $a \in Z^0(A)$. Luego, si $b \in A^{-1}$,

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^{\mathrm{gr(a)}} ad(b) = ad(b).$$

Veamos que es ideal derecho:

$$d(ba) = d(b)a + (-1)^{\mathrm{gr(b)}} bd(a) = d(b)a.$$

Luego, tenemos que $B^0(A)$ es un ideal bilateral de $Z^0(A)$.

□

PROPOSICIÓN 4.38.
Definamos a

$$\mathscr{T}^{\leq 0}(A)^j = \begin{cases} 0 & si\ j > 0 \\ Z^0(A) & si\ j = 0 \\ A^j & si\ j < 0. \end{cases}$$

Entonces, $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)^j$ *es una subálgebra diferencial de A. Además,*

$$H^n(\mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)) = H^n(A)$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN.
Claramente $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$ es un subespacio vectorial de A.

(a) $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$ es un espacio vectorial graduado.
Notemos que por la manera en que se define $\mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)$, es graduada.

(b) $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$ es una subálgebra de A.
Sean $a, b \in \mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)$ elementos homogéneos, veamos que es cerrada bajo productos. Lo haremos por casos:

1. Si $\mathrm{gr(a)}, \mathrm{gr(b)} > 0$ trivialmente tenemos que ab está en $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$

2. Si $\mathrm{gr(a)} = 0 = \mathrm{gr(b)}$, por la proposición 4.37 tenemos que ab está en $\mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)^0 = Z^0(A)$.
3. Si $\mathrm{gr(a)}, \mathrm{gr(b)} \leq 0$ y uno de ellos es negativo.
   Como $\mathrm{gr(ab)} = \mathrm{gr(a)} + \mathrm{gr(b)} < 0$ luego tenemos que

$$ab \in A^{\mathrm{gr(a)+gr(b)}} = \left(\mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)^{\mathrm{gr(a)+gr(b)}}\right)$$

por lo tanto $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$ es una subálgebra de A.

(c) $d\,(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \subseteq \mathscr{T}^{\leqslant 0}A$.
Lo haremos por casos:

1. Si $\mathrm{gr(a)} \geq 0$, $d(a) = 0 \in \mathscr{T}^{\leqslant 0}A$.
2. Si $\mathrm{gr(a)} = -1$, $d(a) \in Z^0(A)$, por tanto $d(a) \in \mathscr{T}^{\leqslant 0}A$.
3. Si $\mathrm{gr(a)} < -1$. Tenemos que $a \in \mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)^{\mathrm{gr(a)}} = A^{gra}$, luego $d(a) \in A^{\mathrm{gr(a)+1}} = \mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)^{\mathrm{gr(a)+1}}$.

Así tenemos que $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$ es una subálgebra diferencial de A.

Finalmente veamos que $H^n(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) = H^n(A)$. Por definición de $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$, si $n > 0$, tenemos que $H^n(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) = 0$. También, si $n \leq 0$,

$$H^n(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) = H^n(A).$$

□

LEMA 4.39.
Sea B un álgebra diferencial y sea X un B-módulo diferencial derecho. Entonces $A := End_{\mathscr{G}r(B)}(X)$ es una k-álgebra diferencial con la composición como producto y con diferencial

$$d_A(h) = d_X h - (-1)^{\mathrm{gr(h)}} h d_X,$$

$\forall h \in A$. X es un AB-bimódulo diferencial, donde $f \cdot x := f(x)$ para cada $f \in A$ y $x \in X$. Además, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(A) \cong \mathrm{Hom_{K(B)}(X, X[n])}$. En particular, la k-álgebras $H^0(A)$ y $End_{K(B)}(X)$ coinciden.

DEMOSTRACIÓN.
A es una k-álgebra diferencial por **??**. Por el lema 4.33,

$$H^n(A) = \mathrm{Hom_{K(B)}(X, X[n])},$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Lo único que nos hace falta ver es que

(a) X es un A-módulo diferencial izquierdo.
Es claro que la acción dada $f \cdot x := f(x)$, para toda $f \in A, x \in X$, le

da a X estructura de A-módulo izquierdo. Veamos que d_X satisface la condición de Leibniz (como en la definición **??**). Por un lado tenemos

$$d_X(f \cdot x) = d_X(f(x))$$

por otro lado $d_A(f) \cdot x = d_X(f(x)) - (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f(d_X(x))$. Entonces,

$$d_X(f \cdot x) = d_A(f) \cdot x + (-1)^{\mathrm{gr(f)}} f \cdot d_X(x).$$

(b) $(f \cdot x) * b = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(b)}} f \cdot (x * b)$.
Sean $f \in A, x \in X, b \in B$ homogenéos, por un lado

$$(f \cdot x) * b = (f(x)) * b = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(b)}} f(xb) = (-1)^{\mathrm{gr(f)gr(b)}} f \cdot (x * b).$$

Entonces por la proposición **??**, X es un AB-bimódulo con diferencial d_X.

Si $h \in Z^0(A)$, $h \in End_{\mathscr{G}rB}(X)$ tiene grado cero y satisface:

$$0 = d_A(h) = d_X h - h d_X,$$

luego, $h \in End_{\mathcal{C}(B)}(X)$. Ahora bien, si $h \in B^0(A)$, es decir si $h = d_A(g)$ con $g \in A^{-1}$, es decir $g : X \longrightarrow X$ tiene grado -1 y $h = d_X g - (-1)^{\mathrm{gr(g)}} g d_X = d_X g + g d_X$, tenemos que h es homotópica a cero. Luego,

$$H^0(A) = \frac{Z^0(A)}{B^0(A)} = \frac{End_{\mathscr{C}(B)}(X)}{\mathscr{P}(X,X)} = End_{K(B)}(X).$$

□

PROPOSICIÓN 4.40.
Existe un epimorfismo de álgebras graduadas $\lambda : \mathscr{T}^{\leqslant 0}(A) \longrightarrow H^0(A)$.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\eta :\ Z^0(A) \longrightarrow H^0(A)$ el morfismo cociente y definamos
$\lambda :\ \mathscr{T}^{\leqslant 0}(A) \longrightarrow H^0(A)$ tal que

$$\lambda(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ \eta(a) & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

claramente λ es un epimorfismo de álgebras graduadas.

□

PROPOSICIÓN 4.41.
A tiene estructura de $\mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)$*-A bimódulo diferencial.*

DEMOSTRACIÓN.
Consideremos el AA-bimódulo diferencial regular A. Luego, como $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$ es subálgebra diferencial de A, obtenemos una estructura de $\mathscr{T}^{\leqslant 0}AA$-bimódulo diferencial para A. Así, estamos considerando la acción derecha de A sobre A que define al A-módulo regular derecho. Esto es: si a, a_1 en A son homogéneos $a \cdot a_1 = (-1)^{\mathrm{gr(a)gr(a_1)}} aa_1$ y la acción izquierda de $\mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)$ en A, para b en $\mathscr{T}^{\leqslant 0}(A)$ y a en A homogéneos como $b \cdot a = ba$.

□

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema fundamental del presente trabajo. Primero recordemos que si R es una k-álgebra y la pensamos como la k-álgebra diferencial $\widehat{R}$ con diferencial cero, la equivalencia $\underline{E}$ de la observación 4.21 induce una equivalencia $\overline{E}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{K}(R) \arrow[r, "\underline{E}"] \arrow[d, "Q_R"'] & K(\widehat{R}) \arrow[d, "Q_{\widehat{R}}"] \\
\widehat{\mathscr{D}}(R) \arrow[r, "\overline{E}"'] & \mathscr{D}(\widehat{R}).
\end{tikzcd}$$

Además haremos un abuso en la notación identificaremos $\widehat{\mathscr{D}}(R)$ con $\mathscr{D}(\widehat{R})$.

PROPOSICIÓN 4.42.
Sea X un complejo de R_1R_2*-bimódulos tal que*

(i) X_{R_2} *es q-proyectivo, compacto y generador.*

(ii) El morfismo de anillos $\lambda : R_1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(R_2)}(X_{R_2}, X_{R_2})$ *es isomorfismo. Donde* λ *es la acción por la izquierda del bimódulo.*

(iii) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(R_2)}(X_{R_2}, X_{R_2}[n]) = 0$ *si* $n \neq 0$*. Entonces el funtor*

$$LT_X : \mathscr{D}(R_1) \longrightarrow \mathscr{D}(R_2)$$

es una equivalencia de categorías.

DEMOSTRACIÓN.
Por la proposición 4.23 LT_X es un funtor exacto y conmuta con coproductos. Veamos que LT_X satisface las hipótesis del teorema **??**. Por el lema 4.29 tenemos que $\mathfrak{X} = \{R_1[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de generadores para $\mathscr{D}(R_1)$:

(a) $LT_X : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(R_1)}(R_1[n], R_1[m]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(R_2)}(LT_X(R_1[n]), LT_X(R_1[m]))$ es isomorfismo $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

En realidad vamos a probar que

$$LT_X : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{R}_1)}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_1[\mathrm{m}]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{R}_2)}(\mathrm{LT}_\mathrm{X}(\mathrm{R}_1), \mathrm{LT}_\mathrm{X}(\mathrm{R}_1[\mathrm{m}]))$$

es isomorfismo para toda $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \neq 0$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{R}_1)}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_1[\mathrm{m}]) \arrow[r, "LT_X"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{R}_2)}(\mathrm{LT}_\mathrm{X}(\mathrm{R}_1), \mathrm{LT}_\mathrm{X}(\mathrm{R}_1)[\mathrm{m}]) \arrow[d, "\cong"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{R}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}[\mathrm{m}]) = 0
\end{tikzcd}$$

así tenemos que LT_X es un isomorfismo. Si $m = 0$,

$$\begin{tikzcd}
R_1 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{R}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{R}_1)}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_1) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{R}_2)}(\mathrm{LT}_\mathrm{X}(\mathrm{R}_1), \mathrm{LT}_\mathrm{X}(\mathrm{R}_1))
\end{tikzcd}$$

y como λ es isomorfismo, entonces tenemos que LT_X también lo es. Por el lema **??** se tiene

$$LT_X : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{R}_1)}(\mathrm{R}_1[\mathrm{n}], \mathrm{R}_1[\mathrm{m}]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{R}_2)}(\mathrm{LT}_\mathrm{X}(\mathrm{R}_1[\mathrm{n}]), \mathrm{LT}_\mathrm{X}(\mathrm{R}_1[\mathrm{m}]))$$

es isomorfismo para toda $n, m \in \mathbb{Z}$.

(b) $LT_X(R_1[n])$ es compacto, para toda $n \in \mathbb{Z}$.
Como

$$LT_X(R_1[n]) \cong LT_X(R_1)[n] \cong X[n]$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $LT_X(R_1[n])$ es compacto, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

(c) La familia $\{LT_X(R_1[n])\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de generadores de $\mathscr{D}(R_2)$.
Como $\{R_1[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de generadores para $\mathscr{D}(R_1)$, luego por el inciso (b) tenemos que

$$\{LT_X R_1[n]\}_{n\in\mathbb{Z}} \cong \{X[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

lo que nos dice que $\{LT_X(R_1[n])\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de generadores compacto de $\mathscr{D}(R_2)$.

Entonces por el teorema **??**, LT_X es una equivalencia.

□

TEOREMA 4.43. ***De Rickard.***
Sean R_1, R_2 dos k-álgebras y $F : \mathscr{D}(R_1) \longrightarrow \mathscr{D}(R_2)$ una equivalencia de categorías trianguladas, esto es, F es un funtor exacto y equivalencia de categorías. Entonces existe un complejo de R_1R_2-bimódulos ${}_{R_1}W_{R_2}$ con las siguientes propiedades:

(a) W_{R_2} *es un generador q-proyectivo y compacto en* $\mathscr{D}(R_2)$*.*

(b) $LT_W : \mathscr{D}(R_1) \longrightarrow \mathscr{D}(R_2)$ *es una equivalencia de categorías triangulas.*

DEMOSTRACIÓN.
Como R_1 es una k-álgebra, consideremos su k-álgebra diferencial $\widehat{R}_1$. Notemos que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(R_1) \arrow[r, "F"] & \mathscr{D}(R_2) \\
\mathscr{D}(\widehat{R}_1) \arrow[u, "\underline{E}_{R_1}"] \arrow[r, dotted, "\widehat{F}"'] & \mathscr{D}(\widehat{R}_2) \arrow[u, "\underline{E}_{R_2}"']
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

de donde observamos que la equivalencia F nos induce a la siguiente equivalencia $\widehat{F} : \mathscr{D}(\widehat{R}_1) \longrightarrow \mathscr{D}(\widehat{R}_2)$. Por el lema 4.29 $\widehat{R}_1$ es un generador compacto de $\mathscr{D}(\widehat{R}_1)$. Al aplicarle el funtor $\widehat{F}$, obtenemos

$$\widehat{F}(\widehat{R}_1) = X_0 \in \mathscr{D}(\widehat{R}_2).$$

Como $\widehat{F}$ es equivalencia de categorías, por el lema **??** tenemos que X_0 es un generador compacto de $\mathscr{D}(\widehat{R}_2)$. Por el teorema de Keller 4.9 existe un q-proyectivo $X = pX_0$ y un cuasi-isomorfismo $X \xrightarrow{h_{X_0}} X_0$. Luego, $Q(h_{X_0})$ es isomorfismo en $\mathscr{D}(\widehat{R}_2)$, y $X \simeq X_0$.

Sea $A = End_{\mathcal{G}r(\widehat{R}_2)}(X)$ el cual por el lema 4.39 resulta ser un álgebra diferencial y tenemos que

$$H^n(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}[\mathrm{n}]),$$

para toda n en $\mathbb{Z}$. Entonces, calculando la cohomología

$$H^n(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}[\mathrm{n}]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}[\mathrm{n}])$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_0[\mathrm{n}]) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\widehat{\mathrm{F}}(\widehat{\mathrm{R}}_1), \widehat{\mathrm{F}}(\widehat{\mathrm{R}}_1)[\mathrm{n}])$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\widehat{\mathrm{F}}(\widehat{\mathrm{R}}_1), \widehat{\mathrm{F}}(\widehat{\mathrm{R}}_1[\mathrm{n}])) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_1)}(\widehat{\mathrm{R}}_1, \widehat{\mathrm{R}}_1[\mathrm{n}])$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_1)}(\widehat{\mathrm{R}}_1, \widehat{\mathrm{R}}_1[\mathrm{n}])$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Ahora notemos lo siguiente, a la k-álgebra diferencial $\widehat{R}_1$ le corresponde el siguiente complejo concentrado en cero $\underline{\widehat{R}}_1 = \underline{E}(\underline{R}_1)$. Observemos que

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathrm{K}}(\mathrm{R}_1)}(\underline{\mathrm{R}}_1, \underline{\mathrm{R}}_1[\mathrm{n}]) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ R_1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Así, tenemos que por la conmutatividad del diagrama 4.1

$$H^n(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_1)}(\widehat{\mathrm{R}}_1, \widehat{\mathrm{R}}_1[\mathrm{n}]) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathrm{K}}(\mathrm{R}_1)}(\underline{\mathrm{R}}_1, \underline{\mathrm{R}}_1[\mathrm{n}]).$$

En consecuencia

$$H^n(A) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ R_1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por el lema 4.39 X es un $A\widehat{R}_2$-bimódulo. Luego, por el lema 4.23, tenemos el siguiente funtor exacto que conmuta con coproductos.

$$LT_X : \ \mathscr{D}(A) \longrightarrow \mathscr{D}(\widehat{R}_2).$$

Notemos que por el lema 4.29 A es un generador compacto de $\mathscr{D}(A)$. Por la proposición **??** $T_X(A) \simeq X$, luego, tenemos que $LT_X(A) = T_X(A) \simeq X \simeq X_0$.

Por tanto $LT_X(A)$ es un generador compacto de $\mathscr{D}(\widehat{R}_2)$. Veamos que LT_X es una equivalencia. Para ello observemos que el siguiente diagrama conmuta para toda $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A}[\mathrm{n}]) \arrow[r, "(LT_X)_{A,A[n]}"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{T_X}(\mathrm{A}), \mathrm{T_X}(\mathrm{A}[\mathrm{n}])) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A}[\mathrm{n}]) \arrow[u, "Q_A"] \arrow[r, "(T_X)_{A,A[n]}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{T_X}(\mathrm{A}), \mathrm{T_X}(\mathrm{A}[\mathrm{n}])) \arrow[u, "Q_{\widehat{R}_2}"']
\end{tikzcd}$$

ya que, como vimos antes, A es q-proyectivo, luego,

$$LT_X Q_A = (Q_{\widehat{R}_2} T_X p_A) Q_A = Q_{\widehat{R}_2} T_X p = Q_{\widehat{R}_2} T_X$$

donde la segunda igualdad es por la proposición 4.17 y la tercera es porque en $K(A)$ vale $pA[n] = A[n]$. Por **??**, A es q-proyectivo en $K(A)$ y X es q-proyectivo en $K(\widehat{R}_2)$, luego Q_A y $Q_{\widehat{R}_2}$ son isomorfismos. Resta ver que $(T_X)_{A,A[n]}$ es isomorfismo para toda $n \in \mathbb{Z}$. Observemos que si $n \neq 0$ tenemos que T_X es isomorfismo, ya que por la observación **??** y el lema 4.39,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A}[\mathrm{n}]) \arrow[r, "T_X"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathrm{K}}(\mathrm{R}_2)}(\mathrm{T_X A}, \mathrm{T_X A}[\mathrm{n}]) \\
0 = H^n(A) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathrm{K}}(\mathrm{R}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}[\mathrm{n}]). \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Entonces es suficiente con probar el caso $n = 0$. Notemos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo por propiedades funtoriales, para toda $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{T_X}(\mathrm{A}), \mathrm{T_X}(\mathrm{A}[\mathrm{n}])) \arrow[r, "\zeta"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{T_X}(\mathrm{A}), \mathrm{T_X}(\mathrm{A})[\mathrm{n}]) \arrow[r, "\xi"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}[\mathrm{n}]) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{T_X}(\mathrm{A}), \mathrm{T_X}(\mathrm{A}[\mathrm{n}])) \arrow[u, "Q_{\widehat{R}_2}"] \arrow[r, "\rho"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{T_X}(\mathrm{A}), \mathrm{T_X}(\mathrm{A})[\mathrm{n}]) \arrow[u, "Q_{\widehat{R}_2}"'] \arrow[r, "\varsigma"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}[\mathrm{n}]) \arrow[u, "Q_{\widehat{R}_2}"']
\end{tikzcd}$$

donde $\zeta := \mathrm{Hom}(1_{\mathrm{T_X(A)}}, \varphi)$, $\xi(f) := \sigma[n]f\sigma^{-1}$, $\rho := \mathrm{Hom}(1_{\mathrm{T_X(A)}}, \varphi)$ y $\varsigma(g) := \sigma[n]g\sigma^{-1}$, con φ dado por la proposición **??** y σ dado por la proposición **??**. En particular para $n = 0$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{T_X(A)}, \mathrm{T_X(A)}) \arrow[r, "\xi"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{T_X(A)}, \mathrm{T_X(A)}) \arrow[u, "Q_{\widehat{R}_2}"] \arrow[r, "\varsigma"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}). \arrow[u, "Q_{\widehat{R}_2}"']
\end{tikzcd}$$

Veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A}) \arrow[r, "T_X"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{T_X(A)}, \mathrm{T_X(A)}) \arrow[r, "\varsigma"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) \\
Z^0(A) \arrow[u, "\theta_A"] \arrow[rr, equal] & & Z^0(A) \arrow[u, "\theta'"']
\end{tikzcd}$$

donde θ_A es el morfismo descrito en la observación **??**. Sea $h \in Z^0(A)$, veamos que $\varsigma T_X\theta(h) = h$. Tenemos

$$\varsigma T_X\theta(h) = \sigma(T_X(\theta(h)))\sigma^{-1},$$

evaluando en $x \in X$

$$\varsigma T_X\theta(h)(x) = \sigma(T_X(\theta(h)))\sigma^{-1}(x) = \sigma(T_X(h)[1 \otimes x])$$

$$= \sigma([\theta(\overline{h}) \otimes 1)(1 \otimes x)]) = \sigma(h \otimes x) = (-1)^{0\mathrm{gr(x)}+0\mathrm{gr(x)}}h \cdot x = h(x).$$

Esta conmutatividad nos implica la del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A}) \arrow[r, "T_X"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{T_X(A)}, \mathrm{T_X(A)}) \arrow[r, "\varsigma"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) \\
H^0(A) \arrow[u, "\overline{\theta}_A"] \arrow[rr, equal] & & H^0(A) \arrow[u, "\theta'"']
\end{tikzcd}$$

y como $\overline{\theta}_A, \theta'$ y ς son isomorfismos, luego T_X lo es. Luego por el lema **??** tenemos que $(LT_X)_{A[m],A[n]}$ es isomorfismo, para toda $m, n \in \mathbb{Z}$. Por el teorema **??** LT_X es equivalencia pues por la proposición 4.23, LT_X es exacto y conmuta con coproductos.

Como $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$ es subálgebra diferencial de A, podemos considerar al $(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A)A$-bimódulo diferencial, $Y := A$ determinado por el AA-bimódulo regular A, el cual es q-proyectivo por la derecha. Consideremos el funtor

$$LT_Y : \mathscr{D}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \longrightarrow \mathscr{D}(A).$$

Por el lema 4.29, $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$ es generador compacto de $\mathscr{D}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A)$. Como

$$LT_Y(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) = T_Y(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \cong A,$$

tenemos que $LT_Y(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A)$ es generador compacto de $\mathscr{D}(A)$. Veamos que LT_Y es una equivalencia. Para ello observemos que el siguiente diagrama conmuta para toda $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}(\mathrm{A}))}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}, \mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A[n]}) \arrow[r, "LT_Y"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A[n]})) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}, \mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A[n]}) \arrow[u, "Q_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A}"] \arrow[r, "T_Y"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A[n]})). \arrow[u, "Q_A"']
\end{tikzcd}$$

Efectivamente ya que

$$LT_Y Q_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A} = (Q_A T_Y p_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A}) Q_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A} = Q_A T_Y p = Q_A T_Y$$

donde la segunda igualdad es por la proposición 4.17 y la tercera es porque en $K(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A)$ se tiene $p_{(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A[n])} = \mathscr{T}^{\leqslant 0}A[n]$. Como A es q-proyectivo en $K(A)$ y $\mathscr{T}^{\leqslant 0}A$ es q-proyectivo en $K(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A)$, luego Q_A y $Q_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A}$ son isomorfismos. Resta ver que $(T_Y)_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A, \mathscr{T}^{\leqslant 0}A[n]}$ es isomorfismo para toda $n \in \mathbb{Z}$. Observemos que si $n \neq 0$ tenemos que T_Y es isomorfismo, ya que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}, \mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A[n]}) \arrow[r, "T_Y"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathrm{K}}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}, \mathrm{T_Y}\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A[n]}) \\
0 = H^n(A) \cong H^n(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathrm{K}}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A[n]}). \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

donde por la proposición 4.38 se tiene que $H^n(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \cong H^n(A)$.Entonces es suficiente con probar el caso $n = 0$. Como antes, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo por propiedades funtoriales, para toda $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A[n]})) \arrow[r, "\zeta"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})[\mathrm{n}]) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A[n]})) \arrow[u, "Q_A"] \arrow[r, "\rho"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})[\mathrm{n}]) \arrow[u, "Q_A"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})[\mathrm{n}]) \arrow[r, "\xi"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A[n]}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})[\mathrm{n}]) \arrow[u, "Q_A"'] \arrow[r, "\varsigma"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A[n]}) \arrow[u, "Q_A"']
\end{tikzcd}$$

donde $\zeta := \mathrm{Hom}(1_{\mathrm{T_X(A)}}, \varphi)$, $\xi(f) := \sigma[n] f \sigma^{-1}$, $\rho := \mathrm{Hom}(1_{\mathrm{T_X(A)}}, \varphi)$ y $\varsigma(g) := \sigma[n] g \sigma^{-1}$, con φ dado por la proposición **??** y σ dado por la proposición **??**. En particular para $n = 0$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})) \arrow[r, "\xi"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})) \arrow[u, "Q_A"] \arrow[r, "\varsigma"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A}). \arrow[u, "Q_A"']
\end{tikzcd}$$

Veamos que el siguiente diagrama conmuta para $n = 0$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}, \mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}) \arrow[r, "T_Y"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})) \arrow[d, "\varsigma"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A}) \\
Z^0(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \arrow[uu, "\theta''"] \arrow[r, equal] & Z^0(A) \arrow[u, "\theta_A"']
\end{tikzcd}$$

donde θ'' y θ_A son los morfismos descritos en la observación **??**. Sea $h \in Z^0(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A)$, veamos que $\varsigma T_Y \theta''(h) = \theta(h)$.

$$\varsigma T_Y \theta''(h) = \sigma(T_Y(\theta''(h)))\sigma^{-1},$$

evaluando en $f \in A$

$$\begin{aligned}
\varsigma T_Y \theta''(h)(f) &= \sigma(T_Y(\theta''(f)))\sigma^{-1}(y) = \sigma[T_Y(\theta''(h))[1 \otimes f] \\
&= \sigma[\theta''(h) \otimes 1)(1 \otimes f)] = \sigma(h \otimes f) \\
&= (-1)^{0\mathrm{gr(f)}+0\mathrm{gr(f)}} h \cdot f = hf = \theta_A(h)f).
\end{aligned}$$

Esta conmutatividad nos implica la del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}, \mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}) \arrow[r, "T_Y"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})}(\mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}), \mathrm{T_Y}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})) \arrow[d, "\varsigma"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{A})}(\mathrm{A}, \mathrm{A}) \\
H^0(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \arrow[uu, "\overline{\theta''}"] \arrow[r, equal] & H^0(A) \arrow[u, "\overline{\theta_A}"']
\end{tikzcd}$$

y como $\overline{\theta}_A, \overline{\theta''}$ y ς son isomorfismos, entonces tenemos que T_Y también es isomorfismo. Por lo tanto $(LT_Y)_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A, \mathscr{T}^{\leqslant 0}A[n]}$ es isomorfismo, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Luego por el lema **??** tenemos que $(LT_Y)_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A[m], \mathscr{T}^{\leqslant 0}A[n]}$ es isomorfismo, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$. Nuevamente por el teorema **??**

$$LT_Y : \mathscr{D}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \longrightarrow \mathscr{D}(A)$$

es equivalencia, pues por la proposición 4.23, LT_Y es exacto y conmuta con coproductos.

En la proposición 4.40 construimos un epimorfismo de álgebras graduadas

$$\lambda : \mathscr{T}^{\leqslant 0}A \longrightarrow H^0(A)$$

por lo tanto $Z := H^0(A)$ es un $(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A)H^0(A)$-bimódulo diferencial que es, por el lema 4.29, q-proyectivo, compacto y generador de $\mathscr{D}(H^0(A))$, por lo tanto el funtor

$$LT_Z: \ \mathscr{D}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \longrightarrow \mathscr{D}(H^0(A))$$

es tal que

$$LT_Z(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) = T_Z(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \cong Z.$$

Veamos que LT_Z también es una equivalencia. Es suficiente con probarlo en los generadores. Sabemos que, al igual que en los casos anteriores, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}, \mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}[\mathrm{n}]) \arrow[r, "LT_Z"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathrm{H}^0(\mathrm{A}))}(\mathrm{H}^0(\mathrm{A}), \mathrm{H}^0(\mathrm{A})[\mathrm{n}]) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}, \mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}[\mathrm{n}]) \arrow[r, "T_Z"'] \arrow[u, "Q_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A}"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{H}^0(\mathrm{A}))}(\mathrm{H}^0(\mathrm{A}), \mathrm{H}^0(\mathrm{A})[\mathrm{n}]) \arrow[u, "Q_{H^0(A)}"']
\end{tikzcd}$$

así, para que LT_Z sea isomorfismo, es suficiente con probar que T_Z lo es. Por la observación **??**, conmuta el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A})}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}, \mathscr{T}^{\leqslant 0}\mathrm{A}[\mathrm{n}]) \arrow[r, "T_Z"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{H}^0(\mathrm{A}))}(\mathrm{H}^0(\mathrm{A}), \mathrm{H}^0(\mathrm{A})[\mathrm{n}]) \\
H^n(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \arrow[r, "H^n(\lambda)"'] \arrow[u, "\theta''"] & H^n(H^0(A)). \arrow[u, "\theta_{H^0(A)}"']
\end{tikzcd}$$

Si $n \neq 0$, tenemos que $H^n(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) = 0$ y $H^n(H^0(A)) = 0$ luego $H^n(\lambda)$ es isomorfismo. Por otro lado, si $n = 0$,

$$H^n(\lambda) : H^0(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) = H^0(A) \xrightarrow{Id} H^0(A) = H^0(H^0(A))$$

es también un isomorfismo. Así, hemos visto que $LT_Z|_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A, \mathscr{T}^{\leqslant 0}A[n]}$ es isomorfismo para toda n en $\mathbb{Z}$ y entonces tenemos que $LT_Z|_{\mathscr{T}^{\leqslant 0}A[m], \mathscr{T}^{\leqslant 0}A[n]}$ es un isomorfismo para toda m, n en $\mathbb{Z}$. Por el teorema **??**, tenemos que

$$LT_Z: \ \mathscr{D}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \longrightarrow \mathscr{D}(H^0(A))$$

es una equivalencia. Como los funtores LT_Z y RH_Z son adjuntos y LT_Z es una equivalencia entonces $RH_Z: \ \mathscr{D}(H^0(A)) \longrightarrow \mathscr{D}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A)$ es una equivalencia. Además $Z_{H^0(A)}$ es q-proyectivo y compacto, por la proposición 4.36 se tiene que $RH_Z \simeq LT_{Z^*}$. Por tanto, tenemos la siguiente equivalencia

$$LT_{Z^*} : \mathscr{D}(H^0(A)) \longrightarrow \mathscr{D}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A).$$

Finalmente, como $H^0(A) \cong R_1$, tenemos las siguientes equivalencias

$$\mathscr{D}(\widehat{R}_1) \xrightarrow{LT_{Z^*}} \mathscr{D}(\mathscr{T}^{\leqslant 0}A) \xrightarrow{LT_Y} \mathscr{D}(A) \xrightarrow{LT_X} \mathscr{D}(\widehat{R}_2).$$

La composición resulta ser una equivalencia y por la proposición 4.32,

$$LT_X \circ (LT_Y \circ LT_{Z^*}) \cong LT_X \circ (LT_{Z^* \otimes pY}) \cong LT_{Z^* \otimes pY \otimes pX}.$$

Sea $W = Z^* \otimes pY \otimes pX$, W es un $\widehat{R}_1\widehat{R}_2$-bimódulo diferencial. Como $\widehat{R}_1$ es un generador compacto de $\mathscr{D}(\widehat{R}_1)$ y $LT_W(\widehat{R}_1) = W$, tenemos que W, como $\widehat{R}_2$-módulo, es un generador compacto de $\mathscr{D}(\widehat{R}_2)$ por el lema **??**. Por la proposición **??**, W es q-proyectivo. Notemos que tenemos la siguiente equivalencia

$$LT_W : \mathscr{D}(\widehat{R}_1) \longrightarrow \mathscr{D}(\widehat{R}_2).$$

Además tenemos, para $m \neq 0$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_1)}(\widehat{\mathrm{R}}_1, \widehat{\mathrm{R}}_1[\mathrm{m}]) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{LT_W}(\widehat{\mathrm{R}}_1), \mathrm{LT_W}(\widehat{\mathrm{R}}_1[\mathrm{m}])) \arrow[dd, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_1)}(\widehat{\mathrm{R}}_1, \widehat{\mathrm{R}}_1[\mathrm{m}]) \arrow[u, "\cong"] \arrow[d, equal] & \\
0 & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{W}, \mathrm{W}[\mathrm{m}])
\end{tikzcd}$$

lo que nos implica que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{W}, \mathrm{W}[\mathrm{m}]) = 0$. Afirmamos que

$$\widehat{\lambda} : \widehat{R}_1 \longrightarrow End_{\mathscr{D}(\widehat{R}_2)}(W)$$

es un isomorfismo. Efectivamente, ya que tenemos el siguiente diagrama cuyas flechas son isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_1)}(\widehat{\mathrm{R}}_1, \widehat{\mathrm{R}}_1) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{LT_W}(\widehat{\mathrm{R}}_1), \mathrm{LT_W}(\widehat{\mathrm{R}}_1)) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_1)}(\widehat{\mathrm{R}}_1, \widehat{\mathrm{R}}_1) \arrow[u, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{W}, \mathrm{W}) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\widehat{\mathrm{R}}_1, \widehat{\mathrm{R}}_1) \arrow[u, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{W}, \mathrm{W}) \arrow[d, "\cong"] \\
\widehat{R}_1 \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\widehat{\lambda}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{R}}_2)}(\mathrm{W}, \mathrm{W}).
\end{tikzcd}$$

Entonces por la proposición 4.42 tenemos que $LT_W : \mathscr{D}(\widehat{R}_1) \longrightarrow \mathscr{D}(\widehat{R}_2)$ es una equivalencia de categorías trianguladas. Aplicandole a W el funtor equivalencia $\overline{\underline{E}}^{-1}$ obtenemos el complejo de R_1R_2-bimódulos $\overline{\underline{E}}^{-1}(W)$ el cual satisface las hipótesis de la proposición 4.42 y esta proposición nos induce a la equivalencia $LT_{\underline{\overline{E}}^{-1}(W)} : \mathscr{D}(R_1) \longrightarrow \mathscr{D}(R_2)$

□

Bibliografía

[1] Anderson, F. Fuller, K. "*Rings and Categories of Modules*". Springer Verlag. Second Edition.

[2] Dräxler, P. Reiten, I. Smalo, S. O, Solberg. "*Exact Categories and Vector Space Categories*". Transactions American Mathematical Society 351(1999)647-682

[3] Happel, D. "*Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*". London Mathematical Society Lecture Note Series. 119. Cambridge University Press (1988).

[4] Ibrahim, A., Simson D., Skowroński "*Techniques of the Representation Theory of Associative Algebras*". London Mathematical Society.

[5] Jacobson, N, "*Basic Algebra II*" Segunda Edición. Universidad de Yale.

[6] Keller, B. "*Deriving DG Categories*". Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série, t. 27 (1994) 63-102.

[7] Mahanta, S, "*Noncommutative Geometry in the Framework of Differential Graded Categories*". arXiv:0805.1628 v1 [math. AG]

[8] Sotelo, N. "*La Categoría Derivada de Álgebras con Carcaj Graduables*". Tesis de Maestría (2009).

[9] Weibel, C. "*An introduction to homological algebra*". Cambridge studies in advanced mathematics 38. Cambridge University Press (2003).

Índice alfabético