Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

UNA CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
DANIEL VELÁZQUEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO SÁNCHEZ

2009

Agradecimientos

Quisiera agradecer a:

Mis padres, por todas las oportunidades que me dieron para poder estudiar y por haberme inculcado el amor que le tengo a la UNAM.

Mi hermana, por haberme guiado en aquellos tiempos complicados cuando empecé la universidad y por enseñarme todo lo que necesitaba saber sobre la facultad.

Irazi, por haber sido paciente, por todas las tardes que te quedaste conmigo en la facultad pero sobretodo, por tu apoyo durante toda la carrera y tu fe en mí.

Oscar, por mantener mi entusiasmo en las matemáticas cuando más lo necesitaba, por tu apoyo en este proceso de tesis, por haber sido mi mentor y por haberme dado la oportunidad de enseñar.

Javier, por mantenerme motivado en las matemáticas, por ayudarme a formarme como docente y por enseñarme una nueva forma de ver las matemáticas.

Santiago, por haberme dado la oportunidad de trabajar contigo en esta tesis y por haber sido una inspiración para mí.

Los doctores Antonio Lascurain, Guillermo Sienra y Alberto Verjobsky por haberme brindado su apoyo y tiempo durante la realización de esta tesis.

La Universidad Nacional Autónoma de México por haberme brindado la oportunidad de estudiar.

Todos aquellos que directa o indirectamente apoyaron en la realización de esta tesis y por alguna razón se me ha olvidado mencionar.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.
   Velázquez
   López
   Daniel
   56 18 98 80
   Universidad Nacional Autonoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemático
   302510584
2. Datos del tutor
   Dr
   Santiago
   López de Medrano
   Sánchez
3. Datos de sinodal 1
   Dr
   Santiago Alberto
   Verjovsky
   Solá
4. Datos de sinodal 2
   Dr
   Antonio
   Lascurain
   Orive
5. Datos de sinodal 3
   Dr
   Oscar Alfredo
   Palmas
   Velasco
6. Datos de sinodal 4
   Dr
   Guillermo
   Sienra
   Loera
7. Datos de la tesis
   Una construccion de la funcion zeta de Riemann
   44 p.
   2009

Índice general

Introducción

La presente tesis surge de un seminario del Doctor Santiago López de Medrano donde se presentaron los temas del producto infinito, funciones especiales como lo son la función gamma y la función zeta de Riemann. El propósito es integrar diferentes textos que se siguieron para desarrollar dichos temas, que en el momento se mostraron algo complicados, y de esta manera unificar y simplificar la presentación para futuros lectores del tema.

En la actualidad existen muchos libros que tratan la construcción de la función zeta de Riemann. Algunos libros están dedicados únicamente al manejo de la función y a resultados que se desprenden de ésta. Otros, que tratan con el análisis complejo presentan la función, ya que por medio de su construcción se puede ver una aplicación de la variable compleja. La función zeta de Riemann es importante por sus repercusiones en la teoría de números, a pesar de que en la actualidad existen otras demostraciones del teorema de los números primos que no hacen uso de toda la herramienta de análisis complejo sigue siendo importante el estudio por medio de éste. A continuación presento una comparación entre diversos textos consultados donde resalto similitudes, ventajas y desventajas para su uso en la construcción de la función zeta de Riemann.

Como se mencionó anteriormente una gran cantidad de libros de análisis complejo abordan la construcción de la función, en un principio puede parecer que lo abordan de manera diferente y algunos con una mayor complejidad como es el caso de Lang [8]. Este libro, como introducción al tema se puede mostrar difícil de comprender pero en realidad sigue la misma línea en la construcción de la función que muchos libros.

En general, las demostraciones siguen los pasos a continuación, se introduce el concepto de producto infinito con el cual se demuestra el teorema de Weierstrass. Seguir este primer paso tiene la ventaja de que sirve para argumentar que la función no se anula en el semiplano $\Re z > 1$ y da lugar al planteamiento de las funciones gamma y zeta.

Un ejemplo de un libro que no sigue esta línea es Ivić [7], ya que es un libro que está orientado hacia temas más avanzados de la función y supone el manejo de temas como productos infinitos, transformadas de Fourier y otros temas. En lugar de usar el teorema de Weierstrass para justificar la validez de la expresión de la función como producto infinito, hace uso del teorema que dice que si $f(n)$ es una función de variable real o compleja que satisface que $(m,n)=1$ entonces $f(mn)=f(m)f(n)$ tal que $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}|f(n)|<\infty$, entonces $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}f(n)=\prod_{n}(1+f(p)+f(p^2)+\cdots)$. Además de que justifica que la función no se anula sacando exponencial y logaritmos usando la expresión de la función como un producto.

El siguiente paso es introducir a la función gamma y su teoría. En este paso existen varias formas de hacerlo y cambian de acuerdo al enfoque del libro, si el libro está orientado al análisis normalmente empieza definiendo la función e inclusive en la forma como definen a la función existen dos formas distintas, por ejemplo: Gamelin [6] Empieza definiendo a la función gamma como la siguiente integral $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}$ y en contraste Conway [4], Lang [8] y Ahlfors [1] empiezan usando la definición de Gamma como producto infinito. Pero entre estos últimos tres sobresale Ahlfors [1] ya que su punto de partida no es la definición sino parte de la construcción del seno como producto infinito y a partir de ésta se pregunta por una función con ciertos ceros que da pie a la función gamma. En particular yo prefiero el último enfoque constructivo ya que enseña paso a paso como aplicar el material construido en la parte de productos infinitos. Éste es el que se sigue para el primer capítulo de este trabajo.

El siguiente paso en la construcción de la función zeta es demostrar la igualdad entre las dos formas de la función gamma es decir mostrar que el producto es igual a la integral. Este paso es necesario ya que se necesita la expresión de gamma en forma de integral para extender la función zeta. Los libros toman diferentes formas de mostrar esta igualdad, Ahlfors [1] introduce la fórmula de Stirling con la cual después demuestra la igualdad entre ambas expresiones, Gamelin [6] usa integración por partes para demostrar que se puede escribir como un producto, con esto muestra el comportamiento como función factorial de la función gamma y lo compara con un producto factorial obteniendo el resultado. Conway [4] demuestra este hecho usando el teorema de Bohr-Mallerup, es interesante este teorema porque hace uso del concepto de convexidad para demostrar la unicidad de la función gamma y una ventaja de este teorema es la sencillez de la demostración, por esto se va a usar esta demostración de la igualdad entre las dos definiciones en este trabajo.

Con los preliminares construidos, se introduce la definición de la función zeta de Riemann. La mayoría de los libros introduce a la función como una serie ya sea por seguir el desarrollo histórico de la función o porque es una herramienta más familiar. Después siguen con dar la igualdad entre ésta y el producto infinito éste resultados conocidos mas antiguos en el estudio de la función y se le atribuye a Euler. En el fondo, las demostraciones que dan los libros son lo mismo, usan el argumento que un número tiene una única descomposición en números primos, pero entre todas sobresale la de Ahlfors [1] ya que es sencilla y fácil de entender e inclusive el argumento sirve para probar que la cardinalidad de los números primos es infinita, resultado debido a Euler.

El siguiente paso es el mismo en Gamelin [6], Ahlfors [1], Conway [4] y en Lang [8]. Extienden a la función demostrando la igualdad entre ésta y una integral que está definida en todo el plano con un polo. La única diferencia que vale la pena remarcar es que Lang [8] introduce en general las funciones zeta de Hurwitz e introduce la transformada de Mellin, que es el proceso que los otros libros siguen y pronto se reduce al caso de la función zeta de Riemann. Es importante remarcar que los libros orientados exclusivamente a la función zeta enuncian el teorema que se puede extender la función a todo el plano. Este último resultado fue una de las más grandes aportaciones de Riemann a la función, ya que fue el primero en pensar en la variable de la función como un número complejo Edwards [5]. Con este paso se concluye la construcción de la función zeta.

Lo que sigue normalmente es demostrar la ecuación funcional que cumple la función zeta. Este paso es igual en la mayoría de los libros salvo en Conway [4] que hace una demostración larga, con un enfoque analista y con mucho detalle, lo cual la hace una demostración complicada de leer y entender. Con este paso algunos libros concluyen el estudio de la función, pero Gamelin [6] y Lang [8] continúan el estudio para demostrar el teorema de los números primos, ambos siguen la demostración dada por Newman y en particular Gamelin [6] sigue el artículo de Zagier [10]. Ambos demuestran de la misma manera que la función no tiene ceros con parte real 1 por ser una demostración que hace uso de series es más complicada que las demás, Edwards [5] trae la demostración de Hadamard de que la función no tiene ceros con parte real 1, como es la demostración original, ésta está más complicada de entender. En esta tesis se sigue la demostración planteada en las notas de un curso impartido en MIT por Kiran Sridhara Kedlaya, la demostración es sencilla y no usa herramienta complicada. También existe otra forma de demostrar el teorema por medio del uso de la transformada de Fourier, ésta se puede encontrar en Bost, Jean-Benoît [3].

Ofrezco una disculpa ya que por falta de tiempo, este trabajo deja de lado la presentación histórica de la construcción de la función zeta de Riemann y el contexto en el que surge la función. Si algún lector se encuentra interesado en este desarrollo y en más temas que involucran a la función zeta se recomienda el libro de Edwards [5] en el cual se pueden seguir algunas demostraciones muy apegadas a las demostraciones originales y se encuentra una reproducción del artículo original de Riemann traducido al inglés.

Capítulo 1

Productos infinitos

Un producto infinito de números complejos se denota por $\prod_{n=1}^{\infty} P_n$ y se evalúa por medio del límite de sus productos parciales $P_n = p_1 p_2 \cdots p_n$. Se dice que el producto converge al valor $P = \lim P_n$ si el límite existe y es diferente de cero. Es importante excluir el cero como posible resultado ya que al permitir que el límite tome el valor cero cualquier producto con un cero como factor convergería sin importar el comportamiento de los demás términos.

Claro que estas condiciones resultarán demasiado estrictas, ya que en el futuro se buscará la representación de una función con todos sus ceros determinados con ayuda de los productos infinitos. Por lo tanto, se da la siguiente definición de convergencia para productos infinitos.

Definición 1.0.1. *El producto $\prod_{n=1}^{\infty} P_n$ converge si y sólo si a lo más un número finito de elementos se anulan y el resto de los productos no nulos converge a algo distinto del cero.*

A continuación se obtendrá una condición necesaria para la convergencia de un producto infinito, esta condición se obtiene del hecho que los términos $p_n \to 1$ esto se debe a que $p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$; bajo estas suposiciones, al pasar al límite se obtiene que el $\lim p_n = 1$. Debido a este resultado se acostumbra a escribir el producto infinito de la siguiente forma

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \tag{1.1}$$

donde $a_n \to 0$. Si se observa esta condición necesaria existe un paralelismo con la condición necesaria para la convergencia de series en la cual para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja es necesario que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Se buscará usar toda la herramienta de series para desarrollar la teoría de productos infinitos. Gracias al comportamiento de la función log, es decir que $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, se podrá comparar el producto infinito con una serie. Es claro que hay que pedir que no se anulen los términos para que esté bien definido la función log.

Entonces se compara el producto 1.1 con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n). \tag{1.2}$$

Como se habla de números complejos se escoge la rama principal del logaritmo es decir la rama es tal que $|\Im \log z| < \pi$. Se tiene que las sumas parciales de 1.2 están relacionadas de la siguiente forma $P_n = e^{(S_n)}$ donde $S_n = \sum_{m=1}^{n} \log(1 + a_m)$. Con esto, si se tiene que $\lim S_n = s$ se sigue que $\lim P_n = P = e^s$; es decir, es suficiente que la serie converja para que el producto también converja.

Lo interesante es que ésta resulta ser una condición necesaria. Antes de enunciar el resultado y demostrarlo es importante notar que hay que resistir la tentación de decir que el valor de la rama principal converge al valor de la rama principal. En cambio lo que se demostrará aquí es que S_n converge a un valor de $\log P$ para alguna rama del logaritmo.

Teorema 1.0.2. *El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ con $1 + a_n \neq 0$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ converge tomando los valores de la rama principal del logaritmo.*

Demostración. Se tiene que $\frac{P_n}{P} \to 1$ por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \log(\frac{P_n}{P}) = 0$. Es claro que existe un h_n tal que $\log(\frac{P_n}{P}) = S_n - \log(P) + h_n 2\pi i$; ahora haciendo la resta entre $\log(\frac{P_n}{P}), \log(\frac{P_{n+1}}{P})$ y factorizando se obtiene

$$\begin{aligned}(h_{n+1} - h_n)2\pi i &= \log\left(\frac{P_{n+1}}{P}\right) - \log\left(\frac{P_n}{P}\right) - S_{n+1} + S_n \\ &= \log\left(\frac{P_{n+1}}{P}\right) - \log\left(\frac{P_n}{P}\right) - \log(1 + a_{n+1})\end{aligned}$$

en este contexto

$$(h_{n+1} - h_n)2\pi = \operatorname{Arg}\left(\frac{P_{n+1}}{P}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{P_n}{P}\right) - \operatorname{Arg}(1 + a_{n+1});$$

como se tomó la rama principal se tiene que $|\operatorname{Arg}(1 + a_{n+1})| \leq \pi$ y, por otro lado, $\operatorname{Arg}\left(\frac{P_{n+1}}{P}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{P_n}{P}\right) \to 0$; entonces como h_n es un entero, para n suficientemente grande es necesario que $h_{n+1} = h_n$ ya que si n es suficientemente grande se puede hacer $\operatorname{Arg}\left(\frac{P_{n+1}}{P}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{P_n}{P}\right) < \pi$ entonces $(h_{n+1} - h_n)2\pi < 2\pi$ lo cual implica que $h_{n+1} - h_n < 1$ y, por ser un entero, tiene que ser igual a cero. Con esto se concluye que a partir de una n suficientemente grande h_n es constante y por lo tanto $\lim S_n = \log P - h2\pi$. Lo cual concluye la prueba ya que la otra parte del teorema quedó demostrada anteriormente. $\square$

A continuación se probará un resultado que relaciona la convergencia absoluta de la serie $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ y la convergencia absoluta de $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n$. Esto nos será útil ya que gracias al Teorema 1.0.2 se tiene que la convergencia del producto infinito depende de la convergencia de la serie $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(1 + a_n)$.

Proposición 1.0.3. *Sea $\Re(z_n) > -1$, entonces la serie $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$ converge absolutamente si y sólo si la serie $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} z_n$ converge de manera absoluta.*

Demostración. Si se toma la expansión en serie de $\log(1 + z)$ alrededor de $z = 0$ con radio de convergencia 1

$$\log(1 + z) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$$

y $|z| < \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$\left|1 - \frac{\log(1 + z)}{z}\right| = \left|\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z^2 + \dots\right| \leq \frac{1}{2}(|z| + |z|^2 + \dots) = \frac{1}{2}\left(\frac{|z|}{1 - |z|}\right) \leq \frac{1}{2}$$

usando la desigualdad del triángulo se tienen las siguientes desigualdades

$$1 - \frac{|\log(1 + z)|}{|z|} \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{|\log(1 + z)|}{|z|} - 1 \leq \frac{1}{2}$$

con esto se tiene que

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1 + z)| \leq \frac{3}{2}|z|. \tag{1.3}$$

Así las cosas, se tiene que si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge entonces para n suficientemente grande $z_n \to 0$; entonces la desigualdad 1.3 nos da que $\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1+z_n)|$ está dominada por una serie convergente; de manera análoga se tiene el otro resultado. □

Definición 1.0.4. *Si $\Re(a_n) > 0$ para toda n entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ converge absolutamente.*

Vale la pena aclarar que la convergencia se define de esta manera para que la convergencia absoluta del producto infinito implique la convergencia normal, ya que de definirse de manera que el producto converge absolutamente si converge el producto $\prod_{n=1}^{\infty} |1+a_n|$ no sería suficiente para garantizar la convergencia del producto $\prod_{n=1}^{\infty} 1+a_n$. Una muestra que esta definición sería insuficiente es el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ donde $z_n = (-1)^n$, así definido se tiene que converge de manera absoluta y es claro que en este caso el producto no converge. Gracias a la proposición anterior y de la definición es inmediato el siguiente resultado.

Corolario 1.0.5. *El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.*

Es claro qué quiere decir que un producto infinito de funciones converja, lo único que nos podría causar problema son los ceros de las funciones pero basta con pedir que a lo más en un punto se anule un número finito de funciones. Como con todo lo relacionado con convergencia de funciones, nos interesan condiciones que garanticen la convergencia uniforme de dichas sucesiones de funciones. El primer resultado estará relacionado con la condición en la cual la convergencia uniforme de $f_n \to f$ implique la convergencia uniforme de $exp(f_n) \to exp(f)$.

Lema 1.0.6. *Sea X un conjunto y sean $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ funciones de X en $\mathbb{C}$ tales que $f_n \to f$ de manera uniforme en X. Si existe una constante a tal que $Re(f(x)) \leq a$ para toda x en X entonces $exp(f_n(x)) \to exp(f(x))$ de manera uniforme en X.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, entonces como $exp(z)$ es continua en cero existe una δ tal que si $|z| < \delta$ se tiene que $|e^z - 1| < \epsilon e^{-a}$. Ahora sea n_0 tal que $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ para toda $x \in X$ para $n \geq n_0$. Con lo anterior se tiene que:

$$\epsilon e^{-a} > \left| \frac{exp f_n(x)}{exp f(x)} - 1 \right|$$

entonces como $|expf(x)| \leq e^a$ se cumple que para toda x en X con $n \geq n_0$,

$$|expf_n(x) - expf(x)| < \epsilon e^{-a}|expf(x)| \leq \epsilon.$$

□

Teorema 1.0.7. *Sea $\{X, d\}$ un espacio métrico compacto. Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ tal que $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente y uniformemente para toda x en X. Entonces el producto*

$$f(x) = \prod_{\mathrm{n=1}}^{\infty}(1 + f_n)$$

converge absolutamente y uniformemente en X. Además, existe un n_0 tal que f(x)=0 si y sólo si $f_n(x) = -1$ para alguna n, $1 \leq n \leq n_0$

Demostración. Como $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} f_n(x)$ converge de manera uniforme se tiene que $|f_n(x)| < \frac{1}{2}$ para toda x en X entonces por 1.3 se tiene que

$$h(x) = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \log(1 + f_n(x))$$

converge de manera uniforme en X. Como h es continua y X es compacto entonces h tiene una cota superior, por el lema 1.0.6 se tiene que $exp(h(x)) = \prod_{\mathrm{n=1}}^{\infty}(1 + f_n(x))$. Como exp nunca se anula alguna de las funciones debe ser igual a -1. □

Si $G(z) = g_1(z) \cdots g_m(z)$ se puede obtener la derivada logarítmica de $G(z)$ de la siguiente manera, se compone el logaritmo con $G(z)$ y, después se obtiene la derivada con lo cual se obtiene lo siguiente

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{g_1'(z)}{g_1(z)} + \cdots + \frac{g_m'(z)}{g_m(z)};$$

lo importante de este procedimiento es que sigue siendo válido para productos infinitos que convergen uniformemente, el procedimiento se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.0.8. *Sean $f_k, k \geq 1$ funciones analíticas en un dominio D tales que $\prod_{n=1}^{m} f_k(z)$ converge uniformemente en D a $F(z) = \prod_{\mathrm{n=1}}^{\infty} f_k(z)$. Entonces*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}, \qquad z \in D \tag{1.4}$$

donde la suma converge normalmente en D.

Demostración. Primero por hipótesis se tiene que $f_k(z) \to 1$ lo cual nos implica que para k suficientemente grande se tiene que $\frac{f_k'(z)}{f_k(z)}$ es analítica en D y como la convergencia uniforme sobre compactos no se ve afectada por los primeros términos y los polos de $\frac{f_k'(z)}{f_k(z)}$ no afectan la convergencia ya que estos ocurren en los primeros términos. Con lo anterior, se tiene que como la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de una sucesión implica la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de las derivadas, tomando los productos parciales y obteniendo la derivada logarítmica de éstos al pasar al limite se tiene la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de la serie. □

1.1. Teorema de Weierstrass para productos

En esta sección se resolverá el problema de obtener una función con una infinidad de ceros prescritos en ciertos $\{z_n\}$ y con multiplicidades $\{k_n\}$.

Una función es entera si es analítica en todo el plano. Se demostrará que una función que es entera y que no se anula es de la forma $e^{g(z)}$. Para esto se toma la derivada logarítmica de f, como $f(z) \neq 0$ se tiene que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ es analítica en todo el plano complejo, por lo tanto es la derivada de una función entera $g(z)$. Entonces se obtiene que

$$\begin{aligned}(f(z)e^{-g(z)})' &= f'(z)e^{-g(z)} - g'(z)f(z)e^{-g(z)}\\ &= f'(z)e^{-g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}f(z)e^{-g(z)} = 0\end{aligned}$$

por lo tanto $f(z)e^{-g(z)} = k$ donde k es constante; con esto se obtiene lo que se quería ya que la constante puede ser incorporada a la función $g(z)$.

Siguiendo este método se puede conseguir la representación de una función entera con un número finito de ceros, ya que si $f(z)$ tiene un cero en el origen de multiplicidad m, y los demás ceros son $a_1, a_2, \ldots, a_N$, se tiene la siguiente representación:

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_1^N \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Si se quisiera obtener la misma representación para una función con un número infinito de ceros se podría pensar en la siguiente generalización:

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), \tag{1.5}$$

el problema de esta representación es que para que tenga sentido es necesario que el producto infinito converja y, en general, esto no sucede.

Como en general el producto infinito de 1.5 no siempre converge es necesario introducir factores que aseguren la convergencia. Entonces se probará que existen factores que aseguran la convergencia del producto dada una sucesión de números complejos a_n tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Es decir se probará que existen polinomios $p_n(z)$ tales que

$$\prod_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z)} \tag{1.6}$$

converge a una función entera. Recordando que la convergencia del producto está ligada con la serie con término general

$$r_n(z) = \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + p_n(z)$$

donde la rama del logaritmo es tomada de tal forma que la parte imaginaria de $r_n(z)$ se encuentra entre $-\pi$ y π. Sea $R > 0$ dado, sólo se considerarán los términos con $|a_n| > R$. En el disco $|z| \leq R$ se puede desarrollar $\log(1 - z/a_n)$ en una serie de Taylor

$$\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3 - \cdots$$

Si se invierten los signos y se toma a $p_n(z)$ como la siguiente suma parcial

$$p_n = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}.$$

Se tiene que r_n se expresa de la siguiente forma

$$r_n(z) = -\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1} - \frac{1}{m_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2} - \cdots; \tag{1.7}$$

usando que $|z| \leq R$ se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
|r_n(z)| &\leq \left| \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{m_n+1} \right| + \left| \frac{1}{m_n+2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{m_n+2} \right| + \cdots \\
&\leq \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{m_n+1} \left[1 + \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^2 + \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^3 + \cdots \right] \\
&\leq \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{m_n+1} \left(1 - \frac{R}{|a_n|} \right)^{-1};
\end{aligned} \tag{1.8}$$

donde la última desigualdad se obtiene de usar el hecho de que $|a_n| > R$ y con lo cual se obtiene que $\left(1 - \frac{R}{|a_n|}\right) > 0$, entonces se tiene la siguiente desigualdad

$$|r_n(z)| \left(1 - \frac{R}{|a_n|} \right) \leq \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{m_n+1}. \tag{1.9}$$

Ahora, si la serie

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{m_n+1} \tag{1.10}$$

converge por 1.9 se tiene $r_n(z) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, además la serie $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} r_n(z)$ es absolutamente y uniformemente convergente para $|z| \leq R$, con lo cual el producto 1.5 representa una función analítica para $|z| < R$. Es claro que los términos a_n satisfacen $|a_n| \leq R$ no afectan la convergencia uniforme ya que se tiene que el $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ lo cual implica que es un número finito de a_n las que no cumplen con que $|a_n| > R$.

Lo único que falta es mostrar que la serie 1.10 se puede hacer convergente para cualquier R, pero esto es fácil de lograr si se toma $m_n = n$ entonces 1.10 es dominada por la serie geométrica $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{R}{|a_n|}$. La última serie es convergente gracias a que $\frac{R}{|a_n|} < 1$. Todo lo anterior se resume en el siguiente teorema que se debe a Weierstrass.

Teorema 1.1.1 (Weierstrass)**.** *Sea $\{a_n\}$ un conjunto finito o infinito (numerable) de números comlejos, en caso de que sea un número infinito es necesario que $a_n \to \infty$. Entonces existe una función entera con a_n como sus ceros y cualquier función entera que tenga exclusivamente estos ceros se* *puede escribir de la forma*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{\text{n=1}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}} \tag{1.11}$$

donde el producto se toma sobre todos los $a_n \neq 0$*, los* m_n *son ciertos enteros, y* $g(z)$ *es una función entera.*

Como consecuencia se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.1.2. *Toda función meromorfa en todo el plano, es cociente de dos funciones enteras.*

Esto es fácil de ver ya que se puede encontrar una función entera $g(z)$ con ceros en los polos de $F(z)$. Entonces el producto $F(z)g(z)$ es una función entera $f(z)$, y se tiene que $F(z) = f(z)/g(z)$.

En la prueba del teorema de Weierstrass se muestra que el producto 1.11 converge si para ciertos m_n se tiene que la serie 1.10 converge. Si se tiene que se pueden tomar todos los m_n iguales entre sí se tendría que el siguiente producto

$$\prod_{\text{n=1}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{h}} \tag{1.12}$$

converge si la serie

$$\sum_{\text{n=1}}^{\infty} \frac{1}{h+1} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{h+1} = \frac{R^{h+1}}{h+1} \sum_{\text{n=1}}^{\infty} \left(\frac{1}{|a_n|}\right)^{h+1}$$

converge para toda R, es decir si

$$\sum_{\text{n=1}}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{h+1}} < \infty. \tag{1.13}$$

Cuando esto suceda se toma h como el mínimo entero que hace que la serie converja; entonces al producto 1.12 se le llamará producto canónico asociado a la serie a_n y, a h se le llamará el género del producto canónico.

Un ejemplo del teorema será el desarrollo de la función $\operatorname{sen}(\pi z)$ como producto infinito. Es importante destacar que los ceros de $\operatorname{sen}(\pi z)$ se encuentran en todos los enteros. Por el teorema 1.1.1 se necesita ver para que h se tiene que $\sum 1/n^{h+1}$ converge; entonces se sabe que $\sum 1/n$ diverge y que $\sum 1/n^2$

converge por lo tanto se necesita $h = 1$ entonces $\operatorname{sen} \pi z$ tiene la siguiente representación como producto infinito

$$\operatorname{sen} \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

para encontrar quién es $g(z)$ se toma la derivada logarítmica. Por el teorema de derivada logarítmica 1.4 se tiene que

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + g' + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

entonces como

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

se tiene que $g' = 0$; entonces, $g(z)$ es constante. Tomando el límite cuando z tiende a cero en la siguiente expresión

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = \frac{e^{g(z)}}{\pi} \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}};$$

se tiene que $e^{g(z)} = \pi$ con lo cual se obtiene

$$\operatorname{sen} \pi z = z\pi \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

Con esta última representación se puede reordenar los términos y juntar los que corresponden a n y $-n$ para obtener la siguiente forma del seno

$$\operatorname{sen} \pi z = z\pi \prod_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{1.14}$$

Capítulo 2

La función Gamma

En la sección anterior se construyó una función que tenía sus ceros en todos los enteros, ahora se cambiará el enfoque a la función cuyos ceros se encuentran en los enteros positivos o negativos. Por lo antes visto la función con ceros en los enteros negativos se puede escribir como

$$G(z) = \prod_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

Al comparar esta función con la función del seno 1.14 se tiene que para que se de una igualdad hace falta los ceros correspondientes a los enteros negativos y al cero, los cuales se pueden obtener al multiplicar la función $G(-z)$ por $G(z)$ y z, entonces la representación 1.14 se puede reescribir como

$$zG(z)G(-z) = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi}. \tag{2.1}$$

Analizando la función $G(z)$ se tiene que se construyó como la función con ceros en los naturales. Entonces al hacer una traslación del dominio a la izquierda por una unidad se va a tener que la nueva función contará con los mismos ceros de la función $G(z)$ y además de un nuevo cero en $z = 0$. Con el teorema obtenido antes se puede construir esta función usando la representación 1.5; entonces se tiene lo siguiente

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)}G(z)$$

donde $\gamma(z)$ es una función entera. Para poder determinar a $\gamma(z)$ se usa la derivada logarítmica como se usó en el desarrollo del seno. Entonces, derivando logarítmicamente se obtiene lo siguiente

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\gamma'+\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right) \tag{2.2}$$

entonces en la suma del lado izquierdo se puede sustituir n por $n+1$

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}-1+\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right);$$

ahora sumando un cero dentro de la serie se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right)&=\frac{1}{z}-1+\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{z}-1+\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)+\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

donde el último paso se justifica porque ambas series existen; de hecho, el último sumando es una suma telescópica y como el primer término que no se anula es uno se tiene que suma uno. Entonces se tiene que la ecuación 2.2 se reduce a $\gamma'=0$.

Con lo cual $\gamma(z)$ es una constante γ, a ésta se le conoce como la constante de Euler y $G(z)$ tiene la propiedad $G(z-1)=e^{\gamma}zG(z)$. Por simplicidad se toma $H(z)=G(z)e^{\gamma z}$, ya que tomando así a $H(z)$ se tiene la siguiente relación:

$$H(z-1)=G(z-1)e^{\gamma(z-1)}=e^{\gamma+\gamma(z-1)}zG(z)=zG(z)e^{\gamma z}=zH(z).$$

Para determinar el valor de γ se evalúa en $z=1$ y se obtiene que

$$1=G(0)=e^{\gamma}G(1)$$

entonces se tiene que

$$e^{-\gamma}=\prod_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-1/n}.$$

Tomando los productos parciales se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} P(n) &= \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{m}\right) e^{-1/m} \\ &= \prod_{m=1}^{n} \left(\frac{m+1}{m}\right) e^{-1/m} \\ &= (n+1)e^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+1/n)}. \end{aligned}$$

Así las cosas,

$$\begin{aligned} e^{-\gamma} &= \lim_{n\to\infty} P(n) \\ \log e^{-\gamma} &= \lim_{n\to\infty} \log P(n) \\ \gamma &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ahora sumando y restando $\log n$ dentro del límite en la última expresión y usando que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$ se obtiene que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \log(n). \tag{2.4}$$

Ahora como $H(z)$ satisface que $H(z-1) = zH(z)$, entonces $\Gamma(z) = \frac{1}{zH(z)}$ satisface

$$\Gamma(z-1) = \frac{1}{(z-1)H(z-1)} = \frac{1}{(z-1)zH(z)} = \frac{\Gamma(z)}{z-1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación funcional de $\Gamma(z)$.

Entonces a $\Gamma(z)$ se le conoce como la función gamma de Euler y tiene la siguiente representación

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}; \tag{2.5}$$

usando las ecuaciones 2.4 y 2.5 se puede obtener la fórmula de Gauss para la función gamma de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \\ &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{ne^{z/n}}{z+n} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{e^{-\gamma z} m!}{z(z+1)\cdots(z+m)} e^{z(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m})}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Analizando qué es

$$\begin{aligned}e^{-\gamma z} e^{z(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m})} &= e^{-z\gamma+z(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m})} \\ &= e^{-z\gamma+z(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m)+z\log m} \\ &= m^z e^{-z\gamma+z(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m)}\end{aligned} \tag{2.7}$$

y sustituyendo en el límite se obtiene la siguiente ecuación para Gamma.

Ecuación de Gauss para $z \neq 0, -1, \ldots$

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{m^z m!}{z(z+1)\cdots(z+m)}.$$

Con todo lo anterior, la fórmula 2.2 se convierte en lo siguiente

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{1}{zH(z)(1-z)H(1-z)} \\ &= \frac{1}{zH(z)H(-z)} \\ &= \frac{1}{zG(z)e^{\gamma z}G(-z)e^{-\gamma z}} \\ &= \frac{1}{zG(z)G(-z)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z};\end{aligned} \tag{2.8}$$

por construcción la función Gamma es una función meromorfa con polos en $z \in \{0, -1, -2, \ldots\}$ pero sin ceros. Además, como $\Gamma(1) = 1$ y por la ecuación funcional se obtiene que $\Gamma(2) = 1$ y, de manera general, se tiene que

$\Gamma(n) = (n-1)!$ en este contexto, se tiene de 2.8 sustituyendo $z = 1/2$ que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Tomando la derivada logarítmica de $\Gamma(z)$ y usando 1.4, se tiene que

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)} \tag{2.9}$$

con lo cual para sacar la derivada de 2.9 basta con derivar término a término la serie, por lo tanto se obtiene

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}. \tag{2.10}$$

Analizando la función $\Gamma(2z)$ tiene polos cuando z toma algún valor dentro del conjunto $\{0, -1/2, -1, -3/2, \dots\}$, haciendo un análisis similar $\Gamma(z+1/2)$ tiene sus polos cuando $z \in \{-1/2 + 3/2 + \dots\}$ ya que el dominio se traslada media unidad a la izquierda; con esto se obtiene que $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$ tiene los mismos polos que $\Gamma(2z)$. Ahora usando 2.10 se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}\right) &= \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{(z+n+\frac{1}{2})^2} \\
&= 4\left[\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n)^2} + \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n+1)^2}\right] \\
&= 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2z+m)^2} \\
&= 2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right);
\end{aligned}$$

entonces integrando

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} + a$$

volviendo a integrar y usando que $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ es la derivada de $\log \Gamma(z)$

$$\log \Gamma(z) + \log \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \log \Gamma(2z) + az + b$$

por lo tanto sacando exponencial de ambos lados se tiene que

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\Gamma(2z)e^{az+b}.$$

Para calcular las constantes a, b se evalúa en $z=\frac{1}{2}$ y $z=1$. Recordando que $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y $\Gamma(2)=1$ se obtiene que

$$\sqrt{\pi}=e^{\frac{a}{2}+b}, \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2}=e^{a+b},$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{1}{2}\log\pi=\frac{a}{2}+b, \qquad \frac{1}{2}\log\pi-\log 2=a+b,$$

de lo cual se tiene

$$a=-2\log 2, \quad \text{y} \quad b=\tfrac{1}{2}\log\pi+\log 2.$$

Sustituyendo se tiene la llamada ecuación de duplicación de Legendre:

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

2.1. Convexidad y el teorema de Bohr-Mollerup

Definición 2.1.1. *Si $[a,b]$ es un intervalo en la recta real, entonces la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es convexa si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 en $[a,b]$,*

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$$

con $\lambda_1,\lambda_2\geq 0, \lambda_1+\lambda_2=1$.

Proposición 2.1.2. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diferenciable, es convexa si y sólo si f' es creciente.*

Demostración. Sean $x_1<x<x_2$ se tiene que $x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ con $\lambda_1=(x_2-x)/(x_2-x_1), \lambda_2=(x-x_1)/(x_2-x_1)$; por definición, se tiene que

$$(x_2-x_1)f(x)\leq(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)$$
$$(x_2-x+x-x_1)f(x)\leq(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)$$
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{(x-x_1)}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{(x_2-x)}, \tag{2.11}$$

con lo cual se obtiene lo que se quería demostrar. $\square$

Lema 2.1.3. *Si f es convexa y $x_1 < x < x_2$ entonces*

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{(x-x_1)} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)} \tag{2.12}$$

Demostración. Sean $x_1 < x < x_2$ se tiene que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ entonces como f es convexa se tiene que $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$. Con lo cual, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(x_1)}{(x-x_1)} &\leq \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) - f(x_1)}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_1)(\lambda_1 - 1) + \lambda_2 f(x_2)}{x_1(\lambda_1 - 1) + \lambda_2 x_2} \\ &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

□

Retomando la ecuación 2.10 se observa que el lado derecho siempre es positivo; es decir, la derivada de $\log \Gamma(z)$ siempre es positiva, entonces esto dice que la función $\Gamma(z)$ es logarítmicamente convexa en el eje real positivo, esta propiedad junto con la ecuación funcional y $\Gamma(1) = 1$ determinan de manera única la función en los reales, lo cual se enuncia y demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.4 (Bohr-Mollerup)**.** *Sea f una función en $(0, \infty)$ tal que $f(x) > 0$ para toda $x > 0$. Si f cumple lo siguiente:*

(i) $\log f(x)$ *es una función convexa;*

(ii) $f(x+1) = xf(x)$ *para toda x;*

(iii) $f(1) = 1$.

Entonces $f(x) = \Gamma(x)$ para toda x.

Demostración. Como f cumple con la propiedad (ii), se tiene

$$f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x) \tag{2.14}$$

para $n \in \mathbb{N}$ entonces si $f(x) = \Gamma(x)$ para $0 < x \leq 1$, se tendría que f y Γ serían iguales para todo el eje real. Sea $0 < x \leq 1$ y sea n natural mayor a 2. Por 2.11 y 2.12 se cumple que

$$\frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{(n-1)-n} \leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n)-n} \leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1)-n}$$

usando 2.14 y $f(1) = 1$, se tiene que $f(m) = (m-1)!$; entonces la ecuación anterior se convierte en

$$-\log(n-2)! + \log(n-1)! \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leq \log n! - \log(n-1)!$$

$$\log \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leq \log \frac{n!}{(n-1)!}$$

$$x \log(n-1) \leq \log f(x+n) - \log(n-1)! \leq x \log n$$

o lo que es lo mismo tomando exponenciales

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x (n-1)!$$

usando 2.14

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n)!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \left[\frac{x+n}{n}\right].$$

Pasando al límite, usando que $\lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{n} = 1$ y la ecuación de Gauss se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 2.1.5. *Si $\Re z > 0$ entonces*

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}$$

es convergente.

Demostración. Se demostrará que la integral cumple un criterio de Cauchy cuando $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 e^{-t} t^{z-1}$ y de la misma manera que cumple un criterio de Cauchy para $\lim_{\epsilon\to\infty} \int_1^\epsilon e^{-t} t^{z-1}$. Sean $S = \{z : a \leq \Re z \leq A\}$ con $0 < a < A < \infty$, $0 < t \leq 1$ y $z \in S$, se tiene que $(\Re z - 1)\log t \leq (a-1)\log t$. Entonces $|e^{-t} t^{z-1}| \leq t^{\Re z - 1} \leq t^{a-1}$; como consecuencia si $0 < \alpha < \beta < 1$

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{z-1} \right| \leq \int_\alpha^\beta t^{a-1} = \frac{1}{a}(\beta^a - \alpha^a)$$

para toda $z \in S$, con lo cual se puede escoger $\delta > 0$ para toda ϵ. Ahora, sea $z \in S$ y $t \geq 1$, $|t^{z-1}| \leq t^{A-1}$. Como la exponencial crece mas rápido que cualquier polinomio se tiene que $\lim_{t\to 0} t^{A-1}e^{-t/2} = 0$ entonces existe c cota superior de $t^{A-1}e^{-t/2}$ para todo $z \in S$. Por lo tanto, se tiene que

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t}t^{z-1} \right| \leq c \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t}{2}} = 2c(e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}})$$

con lo cual se concluye que la integral es convergente. $\square$

Teorema 2.1.6. *Si* $\Re z > 0$ *entonces*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}.$$

Demostración. Se probarán las tres condiciones del teorema de Bohr-Mollerup usando $f(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}$, que por el teorema anterior está bien definida.

1. $f(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} = -e^{-t}|_0^{\infty} = 1.$

2. Integrando por partes se tiene que

$$f(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z} = -\int_0^{\infty} t^{z-1}d(e^{-t}) = -[t^z e^{-t}]_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt;$$

   donde $t^z e^{-t}$ se anula en 0 y $\lim_{r\to\infty} t^z e^{-t} = 0$ entonces se obtiene

$$f(z+1) = zf(z).$$

3. Sean $x, y > 0$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
\log f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \log \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\lambda x+(1-\lambda)y-1}dt \\
&= \log \int_0^{\infty} e^{-t(\lambda+1-\lambda)}t^{\lambda x-\lambda+(1-\lambda)y-1+\lambda}dt \\
&= \log \int_0^{\infty} (e^{-t}t^{x-1})^{\lambda}(e^{-t}t^{y-1})^{1-\lambda}dt \\
&\leq \log \left[\left(\int_0^{\infty} (e^{-t}t^{x-1}) \right)^{\lambda} \left(\int_0^{\infty} (e^{-t}t^{y-1}) \right)^{1-\lambda} \right] \\
&= \lambda \log f(x) + (1-\lambda)\log f(y)
\end{aligned}$$

donde la desigualdad es válida por la desigualdad de Hölder y por lo tanto $\log f(z)$ es convexa.

Como $\Gamma(z)$ y $\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}$ coinciden en el eje real se puede concluir que las dos funciones son iguales para todo el semiplano derecho. $\square$

Usando la representación de Gamma como una integral se puede sustituir $z = 1/2$ y entonces se obtiene que

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s^2}s^{-1}(2s)ds \\ &= 2\int_0^\infty e^{-s^2}ds;\end{aligned} \tag{2.15}$$

esta identidad es muy usada en probabilidad.

Capítulo 3

La Función Zeta de Riemann

Cuando se trabaja con la función zeta de Riemmann es tradición denotar a la variable compleja como $s = \sigma + it$. Hay que notar que si n es un natural entonces $|n^s| = |e^{s \log n}| = e^{\Re z \log n}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n} |m^{-z}| &= \sum_{m=0}^{n} e^{\Re z \log m} \\ &= \sum_{m=0}^{n} m^{-\Re z}.\end{aligned}$$

Se sabe que la serie $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ converge uniformemente para todo real mayor o igual a un $\sigma_0 > 1$ fijo, ya que si $\sigma \geq \sigma_0$ se tiene que $n^{-\sigma_0} \geq n^{-\sigma}$. Entonces por lo anterior se tiene que

$$\zeta(s) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} n^{-s} \tag{3.1}$$

está dominada por la suma $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} n^{-\sigma}$, con lo cual se obtiene por medio del teorema de Weierstrass para series que 3.1 es una función analítica para toda s en el semiplano $\Re s > 1$. A la función $\zeta(s)$ se le conoce como la *función zeta de Riemann*.

3.1. Producto Infinito

Teorema 3.1.1. *Sean $\sigma > 1$, y $\{p_n\}$ el conjunto de los primos en orden ascendente. Entonces*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(1 - p_n^{-s}). \tag{3.2}$$

Demostración. Por el teorema 1.0.7 el producto converge uniformemente para $\sigma \geq \sigma_0 > 1$ si la serie $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} |p_n^{-s}| = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} p_n^{-\sigma}$. La última serie está dominada por $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} n^{-\sigma}$, ya que $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} p_n^{-\sigma}$ se obtiene de omitir términos positivos en la serie geométrica. Usando la convergencia uniforme de la serie geométrica para $\sigma \geq \sigma_0$ se tiene que el producto converge y está bien definido como función.

Usando que $\sigma > 1$ se tiene que

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(2n)^{-s} = \sum m^{-s},$$

donde m toma valores en los naturales impares. Siguiendo el mismo análisis se tiene que

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) = \sum m^{-s},$$

donde ahora m toma valores sobre los naturales que no son divisibles entre 2 o 3. En general,

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) \cdots (1 - p_n^{-s}) = \sum m^{-s},$$

donde la suma de la derecha está tomada sobre todos los naturales que no son divisibles entre los primos $2, 3, \ldots, p_n$. El primer valor de la suma es 1 y cuando se hace tender $n \to \infty$ se tiene que los términos tienden a cero ya que la suma es convergente; entonces se concluye que

$$\lim_{N \to \infty} \zeta(s) \prod_{n=1}^{N}(1 - p_n^{-s}) = 1$$

con lo cual se obtiene lo que se quería demostrar.

$\square$

La ecuación para el producto de $\zeta(s)$ es conocida como la ecuación de Euler. Es prudente notar que se utiliza de manera implícita el conocido hecho que los números primos son infinitos; de lo contrario, al suponer que son finitos y usando que la serie geométrica diverge se llegaría a que por un lado es un producto finito que por ser finito existe, mientras que en el otro lado se tiene una serie geométrica divergente, lo cual es una contradicción.

La importancia de la ecuación 3.2 es que nos muestra, por medio de todo lo visto de productos infinitos, que para $\sigma > 1$ se tiene que $\zeta(s)$ está bien definida y además no tiene ceros ni polos en dicho semiplano. Después en el texto se retomará la discusión sobre los ceros de la función $\zeta(s)$.

3.2. Extensión de $\zeta(s)$ a todo el plano

Ahora lo que se busca es extender el dominio de la función $\zeta(s)$, para poder hacer esto se buscará poner a $\zeta(s)$ como una integral de línea que a su vez nos ayudará obtener una formula para extender el dominio de la función. Se hace un corte rama sobre el eje real positivo para poder considerar la siguiente función

$$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash[0,\infty),$$

con $\pi < \Im(-z) < \pi$, sea γ la siguiente curva, donde ésta sigue el corte desde

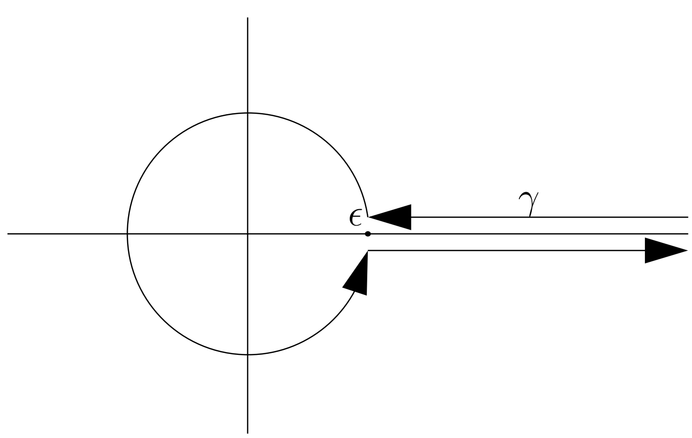

Figura 3.1: Curva para la integral de línea

$+\infty$ a ϵ, después sigue sobre el círculo de radio ϵ con centro en el origen y regresa desde ϵ a $+\infty$. Se considera la siguiente función

$$\phi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz. \tag{3.3}$$

Primero se demuestra un lema sobre la convergencia de la integral pero sobre el eje real.

Lema 3.2.1. *1. Sea $S = \{z : \Re z \geq a\}$ donde $a > 1$. Entonces dada $\epsilon > 0$ existe un $\delta, 0 < \delta < 1$, tal que para toda z en S*

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x)^{s-1}}{e^x-1}dx\right| < \epsilon$$

cuando $\delta > \beta > \alpha > 0$

2. Sea $S = \{z : \Re z \leq A\}$ donde $-\infty < A < \infty$. Entonces dada $\epsilon > 0$ existe un $\kappa > 1$, tal que para toda z en S

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x)^{s-1}}{e^x-1}dx\right| < \epsilon$$

cuando $\beta > \alpha > \kappa$

Demostración. 1. Como $e^t - 1 \geq t$ para toda $t \geq 0$, se sigue que

$$\left|\left(e^t-1\right)^{-1}t^{z-1}\right| \leq t^{a-2}.$$

Como $a > 1$ se tiene que la integral $\int_0^1 t^{a-2}$ existe y por lo tanto se puede encontrar un δ que cumpla lo requerido.

2. Como $t \geq 1$ y $z \in S$, se tiene como en el teorema 2.1.5 que existe una constante c tal que

$$\left|(e^t-1)^{-1}t^{z-1}\right| \leq (e^t-1)^{-1}t^{A-1} \leq ce^{\frac{t}{2}}(e^t-1)^{-1}.$$

como $e^{\frac{t}{2}}(e^t-1)^{-1}$ es integrable se tiene que existe κ que cumpla lo requerido.

□

Uniendo estos dos resultados se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2. *1. Sea $S = \{z : a \leq \Re z \leq A\}$ donde $1 < a < A < \infty$ se tiene que la integral*

$$\int_0^\infty \frac{(x)^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

converge de manera uniforme en S.

2. Sea $S = \{z : \Re z \leq A\}$ donde $-\infty < A < \infty$ se tiene que la integral

$$\int_1^\infty \frac{(x)^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

converge de manera uniforme en S.

Para evaluar la integral se asume $\Re s > 1$, y se parte la integral en la sección sobre el corte rama, sobre el círculo y después debajo del corte rama. Nótese que el integrando es analítico y tiene polos en $2\pi ni$; entonces, si se pide que $\epsilon < 2\pi$ se tiene por el teorema de Cauchy que el valor de la integral no depende de γ ya que esta no envuelve a alguno de los polos, por lo tanto se puede hacer tender ϵ a cero y por todo lo antes dicho se tiene que

$$\phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\infty^\epsilon \frac{e^{(s-1)(\log x - i\pi)}}{e^x - 1} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_\epsilon^\infty \frac{e^{(s-1)(\log x + i\pi)}}{e^x - 1} dx.$$

Ahora como $e^z - 1$ tiene un cero simple en $z = 0$, entonces se tiene que

$$\left| \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \right| = \left| (-z)^{s-2} \frac{-z}{e^z - 1} \right| \tag{3.4}$$

como $\frac{-z}{e^z-1}$ y $(-z)^{s-2}$ son analíticas alcanzan su máximo en la frontera y en particular $\frac{-z}{e^z-1}$ está acotada en la frontera, entonces se tiene que 3.4 está acotado en el círculo de radio ϵ por $C\epsilon^{\Re s-2}$; entonces

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| \leq \frac{C\epsilon^{\Re s-2}}{2\pi} \int_{|z|=\epsilon} |dz| = C\epsilon^{\Re s-1}.$$

Ahora como se supuso que $\Re s > 1$, se tiene que al hacer tender a ϵ a cero la integral tiende a cero. Pasando al límite se tiene que

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \frac{-1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-(s-1)i\pi}}{e^x-1}dx + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{(s-1)i\pi}}{e^x-1}dx \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(e^{(s-1)i\pi} - e^{-(s-1)i\pi}\right)\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx.\end{aligned}$$

El término entre paréntesis es $2i\operatorname{sen}(\pi(s-1)) = -2i\operatorname{sen}(\pi s)$; por lo tanto

$$\phi(s) = -\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx. \tag{3.5}$$

La parte $1/(e^x-1) = e^{-x}/(1-e^{-x})$ se puede ver como una serie geométrica, entonces se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \int_0^\infty \left(\sum_{\mathrm{n}=1}^\infty e^{-nx}\right)x^{s-1}dx; \tag{3.6}$$

como la serie geométrica converge uniformemente para todo intervalo $[\epsilon,\infty)$ y la integral converge de manera uniforme ya que $\Re s > 1$ se puede intercambiar la suma con la integral se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \sum_{\mathrm{n}=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx. \tag{3.7}$$

Haciendo el cambio de variable $nx = t$ en la siguiente integral se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{1}{n^s}\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$$

y, entonces, 3.7 se convierte en

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \Gamma(s)\zeta(s), \qquad \Re s > 1.$$

Usando esto en 3.5 y usando que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$ de 2.8 se tiene

$$\phi(s) = -\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi}\Gamma(s)\zeta(s) = -\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)},$$

o lo que es lo mismo

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz.$$

Esta identidad se demostró para $\sigma > 1$, pero el lado derecho es válido para todo el plano; por lo tanto se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3. *Para el corte rama de $(-z)^{s-1}$ y para γ como en la figura 3.1 se tiene que*

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz. \tag{3.8}$$

Se procede a demostrar que $\phi(s)$ es una función entera. Esto se demuestra usando el siguiente teorema que viene en [8] y ahí se incluye una demostración de éste.

Teorema 3.2.4. *Sea I un intervalo de números reales, posiblemente infinito. Sea U un conjunto abierto de números complejos. Sea $f = f(t,z)$ una función continua en $I \times U$. Si:*

1. *Para todo subconjunto compacto K de U la integral*

$$\int_I f(t,z)dt$$

es uniformemente convergente para toda $z \in K$.

2. *Para cada t la función $z \to f(t,z)$ es analítica. Sea*

$$F(z) = \int_t f(t,z)dt.$$

Entonces F es analítica en U.

Con ayuda de este teorema basta demostrar la convergencia uniforme en cualquier compacto de la integral que define a $\phi(s)$, o lo que es lo mismo, basta demostrar la convergencia uniforme para discos $|s| \leq A$. Es útil notar que lo que realmente se tiene que demostrar es que la integral converge uniformemente para los segmentos infinitos de la curva, ya que un segmento finito de curva es compacto e inmediatamente se tiene la convergencia uniforme.

El integrando sobre el segmento que va de ∞ a 1 esta dado por

$$\frac{e^{(s-1)\log x - i\pi}}{e^x - 1} = \frac{x^{s-1}e^{\pi(s-1)i}}{e^x - 1},$$

como $e^{\pi(s-1)i}$ no depende de x sale de la integral como constante y la integral que queda se demostró en el corolario 3.2.2 que converge de manera uniforme con limites de integración $1, \infty$. Análogamente se hace para para el segmento 1 a ∞, y se tiene que $\phi(s)$ es una función entera.

La importancia de la ecuación 3.8 es el hecho de que el lado derecho de la ecuación está bien definido y es meromorfo para toda $s \in \mathbb{C}$. Como se tiene que $\phi(s)$ es una función entera y $\Gamma(1-z)$ es meromorfa con polos en $s = 1, 2, \ldots$ se sabe, gracias a la ecuación de Euler para $\zeta(s)$, que la función es analítica para todo el semiplano $\sigma < 1$, entonces debe ocurrir que los polos en los enteros $n \geq 2$ se cancelan con los ceros de la integral. En $s = 1, -\Gamma(1-s)$ tiene un polo sencillo con residuo 1 ya que por 2.5 se tiene que $\lim_{s\to 0} s\Gamma(s) = 1$. Además como

$$\phi(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{e^z - 1} = Res\left[\frac{1}{e^z - 1}, 1\right] = 1,$$

se tiene que $\zeta(s)$ tiene residuo 1 en $s = 1$. Se enuncian estos resultados como teorema.

Teorema 3.2.5. *La función $\zeta(s)$ es una función meromorfa en todo el plano con un único polo en $s = 1$ y con residuo 1.*

3.3. Ecuación funcional

Riemann reconoció que existe una relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$, y la usó para analizar el comportamiento para $\zeta(s)$ en el semiplano $\sigma < 0$. Esto se debe a que si $\sigma < 0$ esto implica que $1 < 1 - \sigma$ con lo cual nos relaciona el semiplano negativo con el semiplano $\sigma > 1$. A la relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$ se le conoce como la ecuación funcional de la función zeta y se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *La función $\zeta(s)$ satisface la ecuación funcional*

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{3.9}$$

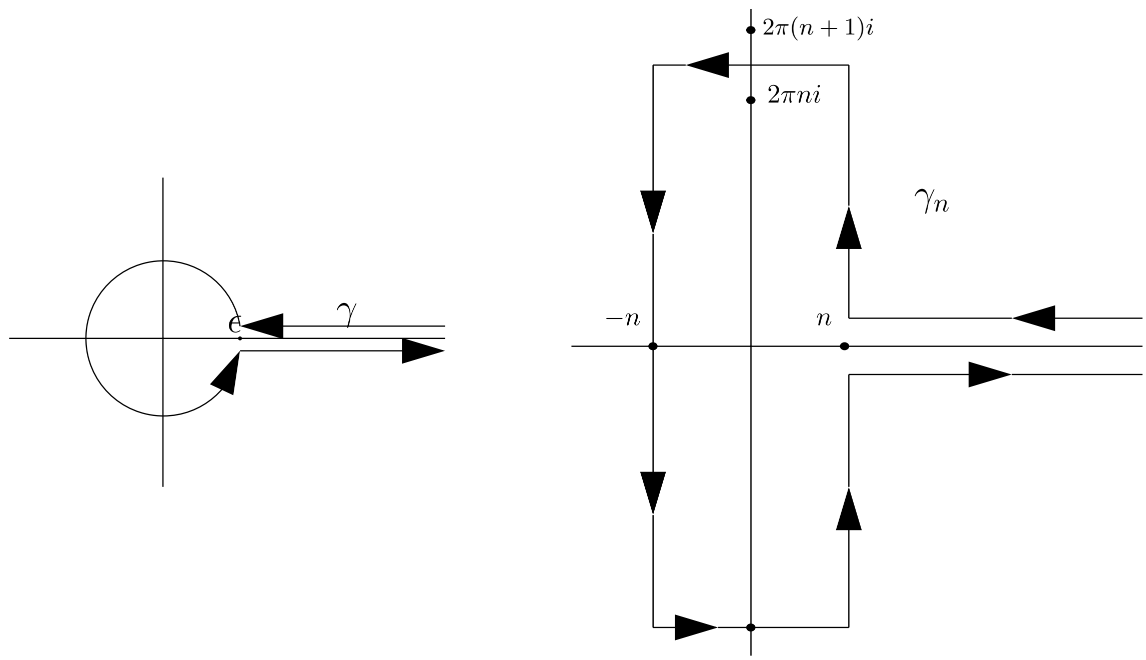

Figura 3.2: Curva modificada para la integral de línea

Para la demostración, se va a modificar la curva γ usada en la definición $\phi(s)$. Sea γ_n obtenida de γ al remplazar el segmento de recta que empieza en n por el rectángulo R_n que tiene sus lados en $t = \pm(2n+1)\pi$ y $\sigma = \pm n$, como en la figura (3.2). Fijando a s como un real negativo, se define

$$\phi_n(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}dz.$$

Así las cosas como $|e^z - 1| > \frac{1}{2}$ en los ejes del rectángulo y como $s < 0$ se tiene que $s-1 < 0$ se concluye que la norma del numerador es decreciente. Entonces como consecuencia se tiene que el integrando está acotado por $2n^{s-1}$, por lo tanto

$$|\phi_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_n} \left|\frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\right| dz \leq \frac{2n^{s-1}}{2\pi}(n(4\pi+2)+\pi).$$

Con esto, la integral está acotada y recordando que $s < 0$ se tiene que el lado derecho de la desigualdad converge a 0 cuando $n \to \infty$, por lo tanto,

$\phi_n(s) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ahora se analiza la siguiente diferencia:

$$\int_{\gamma_n} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz - \int_{\gamma} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = \int_{c} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

donde c es la curva cerrada que va sobre el rectángulo y después continúa por γ y no corta el corte rama; la curva c se ilustra en la figura 3.3. Observando

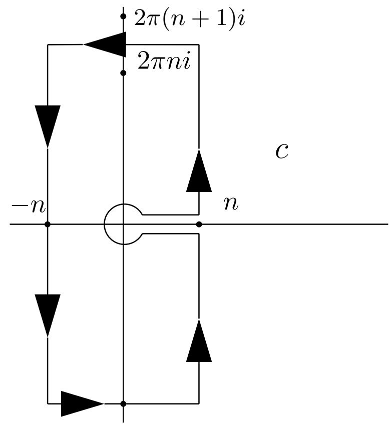

Figura 3.3: Curva c

que la curva envuelve a los polos del integrando es necesario hacer un análisis sobre estos puntos. El integrando tiene polos en los puntos $\pm 2\pi ki, 0 < k \leq n$, como $e^z - 1$ tiene un cero simple en estos puntos se tiene que cada polo es un polo sencillo. El siguiente paso es analizar el residuo; para hacer esto nos fijamos en $(-z)^{s-1}/(e^z - 1)'$ y evaluamos en los puntos para obtener el residuo en los puntos. Con esto se obtiene que el integrando tiene como residuo:

$$\left.\frac{(-z)^{s-1}}{e^z}\right|_{z=\pm 2\pi ki} = (2\pi)^{s-1} |k|^{s-1} e^{(s-1)\log(\pm i)}$$

Por medio del teorema del residuo y agrupando los términos para k y $-k$ se obtiene

$$\phi_n(s) - \phi(s) = (2\pi)^{s-1} \left(e^{(s-1)i\pi/2} + e^{-(s-1)i\pi/2}\right) \sum_{k=1}^{n} k^{s-1},$$

sustituyendo en la ecuación

$$e^{(s-1)i\pi/2} + e^{-(s-1)i\pi/2} = 2\cos\left((s-1)\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

y haciendo $n \to \infty$ se obtiene que

$$-\phi(s) = 2^s \pi^{s-1}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Usando lo anterior en 3.8 se obtiene la ecuación funcional para $s < 0$. Como ambos lados son meromorfos para toda s y además se tiene que son iguales para todo $\sigma < 0$, por medio del principio de unicidad para funciones meromorfas se tiene como consecuencia que la identidad se cumple para toda s en los complejos.

Otra forma de obtener la extensión analítica a todo el plano complejo de la función zeta es por medio de la ecuación funcional, como ya se mencionó antes el comportamiento de la función zeta en el semiplano $\sigma < 0$ está dado por la ecuación funcional por medio del semiplano $\sigma > 1$, con lo cual bastaría obtener una extensión de zeta a la franja $0 < \sigma \leq 1$.

Una forma de obtener esta extensión puede ser por medio de la función eta de Dirichlet, que se define como

$$\eta(s) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s},$$

observando que la serie anterior es una serie de Dirichlet para encontrar donde converge basta encontrar un punto $z = x_0 + iy_0$ en el plano complejo para el cual converja la serie. Por un resultado de series de Dirichlet se obtiene que la serie es una función analítica en todo el semiplano $S = \{z : \Re z > x_0\}$. Si se toma a s como real por un resultado de Calculo se tiene que como es una serie alternante basta que $1/n^s$ converja a cero pero esto siempre sucede cuando $s > 0$ lo cual implica que $\eta(s)$ es analítica en todo el semiplano positivo.

Proseguimos a obtener una relación entre $\eta(s)$ y $\zeta(s)$. Si se observa que para $\Re s > 1$ se pueden separar los términos negativos y positivos de $\eta(s)$ y sumando un cero se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\eta(s) &= \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} - \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^s} = \zeta(s) - \frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s).\end{aligned}$$

Entonces se obtiene que $\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1-2^{1-s}}$ para $\Re s > 1$ pero como $\eta(s)$ es analítica en el semiplano positivo, se tiene que $\zeta(s)$ puede ser extendida al semiplano positivo y usando la ecuación funcional se obtiene que $\zeta(s)$ es analítica en todo el plano complejo.

Como se mencionó en el inicio de esta sección, con la ecuación funcional se pueden sacar conclusiones sobre los ceros de la función $\zeta(s)$ en el semiplano $\sigma < 0$. Para lograr esto, se recuerda que $\zeta(s)$ tiene una representación como un producto infinito que no se anula en el semiplano $\sigma > 1$. Por lo tanto cuando $\sigma < 0$ se tiene que $1 < 1 - \sigma$ con lo cual $\zeta(1 - s)$ no se anula.

Con esto y con el hecho de que $\Gamma(1-s)$ nunca se anula, la fórmula funcional 3.9 nos muestra que los ceros de $\zeta(s)$ en el semiplano $\sigma < 0$ se encuentran en los ceros de la función $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)$. Entonces cuando $s = -2, -4, -6, \ldots$ se tiene que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ tiene un cero simple y por lo tanto $\zeta(s)$ tiene un cero simple. A estos ceros se les conoce como los **ceros triviales** de la función zeta. A continuación se muestra una demostración de que la función ζ no tiene ceros con parte real igual a uno.

Lema 3.3.2. *Para toda $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 1$, se tiene que*

$$\left|\zeta^3(x)\zeta^4(x + iy)\zeta^2(x + 2iy)\right| \geq 1 \tag{3.10}$$

Demostración. Como $\zeta(s)$ para $\sigma > 1$ se puede representar como el producto 3.2, basta demostrar la desigualdad para todos los primos p, por lo tanto, se necesita probar que

$$\left|\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^{x+iy}}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{p^{x+2iy}}\right)^2\right| \leq 1.$$

Reescribiendo la desigualdad usando $\frac{1}{p^x} = r$ y $\frac{1}{p^{iy}} = e^{i\theta}$, con lo cual $0 < r < 1$, se tiene

$$|(1 - r)^3(1 - re^{i\theta})^4(1 - re^{2i\theta})^2| \leq 1.$$

Con lo anterior se tiene que basta demostrar la desigualdad para todo $0 < r < 1$ y para todo $\theta \in \mathbb{R}$, o lo que es lo mismo demostrar que

$$|(1 - re^{i\theta})^4(1 - re^{2i\theta})^2| \leq \frac{1}{(1 - r)^3}. \tag{3.11}$$

Tomando a r fija sea $f(\theta) = |(1-re^{i\theta})^4(1-re^{2i\theta})^2|$ desarrollando a $f(\theta)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= |(1-re^{i\theta})^4(1-re^{2i\theta})^2| \\
&= |(1-re^{i\theta})^2(1-re^{2i\theta})|^2 \\
&= \left[(1-re^{i\theta})\overline{(1-re^{i\theta})}\right]^2(1-re^{2i\theta})\overline{(1-re^{2i\theta})} \\
&= \left[(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})\right]^2(1-re^{2i\theta})(1-re^{-2i\theta}) \\
&= (1+r^2-2r\cos\theta)^2(1+r^2-2r\cos 2\theta).
\end{aligned}$$

Usando la identidad trigonométrica $\cos\theta = 2\cos^2\theta - 1$ y sustituyendo $u = \cos\theta$, $f(\theta)$ se puede reescribir como:

$$g(u) := (1+r^2-2ru)^2(1+r^2+2r-4ru^2).$$

Recordemos la siguiente desigualdad entre las medias aritmética y geométrica de tres números:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

tomando a $a = (1+r^2-2ru), b = (1+r^2-2ru)$ y $c = (1+r^2+2r-4ru^2)$ se tiene

$$g(u) \leq h(u) := \frac{(3+3r^2-2r(2u^2+2u-1))^3}{27}$$

el siguiente paso es usar cálculo para encontrar su máximo, tenemos que

$$h'(u) = \frac{-2r}{9}\left(3+3\,r^2-2\,r\left(2\,u^2+2\,u-1\right)\right)^2(4\,u+2)$$

entonces cuando $u = -1/2$ se tiene un punto crítico. Evaluando en la segunda deriva se puede observar que es un máximo ya que:

$$h''(-\frac{1}{2}) = \frac{-8r}{9}\left(3+3\,r^2-2\,r\right)^2 < 0.$$

Cuando $u = -1/2$ se tiene que $a = c = 1+r+r^2$ con lo cual tenemos que

$$\max_\theta f(\theta) = g(-\frac{1}{2}) = (1+r+r^2)^3 < (1+r+r^2+\dots)^3 = \frac{1}{(1-r)^3},$$

y se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 3.3.3. $\zeta(s) \neq 0$ *en el semiplano* $\sigma \geq 1$.

Demostración. Por el teorema 3.1.1 se tiene que $\zeta(s) \neq 0$ para $\sigma > 1$, por lo tanto falta ver que $\zeta(s)$ no tiene ceros tales que $\sigma = 1$. Si $\zeta(s)$ tiene un cero en $s = 1 + it_0$, usando la desigualdad 3.10, y el hecho de que el único polo de $\zeta(s)$ se encuentra en $s = 1$, se tiene que $\zeta(s)$ es analítica en $s = 1 + 2it_0$ y por lo tanto

$$\lim_{\sigma \to +1} \zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it_0)\zeta^2(\sigma + 2it_0) = 0$$

lo cual es una contradicción con la desigualdad 3.10. □

Juntando las conclusiones; se tiene que que los ceros no triviales de la función se encuentran en la franja $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < 1\}$; a ésta se lo conoce como la **franja crítica**. Riemann en su artículo de 1859 [9], el cual se puede encontrar traducido al inglés en [5], conjeturó que los ceros no triviales de la función zeta se encuentran en la recta real $\sigma = \frac{1}{2}$, esta conjetura se ha vuelto uno de los problemas abiertos importantes de la matemática y sigue sin ser resuelto.

La importancia de la función zeta de Riemann es que la ecuación 3.2 muestra que la función zeta de Riemann está relacionada con los números primos; en el artículo de Riemann [9] se discute la relación entre la función zeta y sobre la cantidad de números primos antes de un número primo.

El teorema 3.3.3 es importante ya que como consecuencia se tiene el Teorema de los números primos que dice que el número $\pi(x)$ de primos que no exceden x satisface que $\pi(x) \sim x/\log x$; en el libro de Gamelin [6] se presenta una demostración reciente que sigue el artículo de Zagier [10]. El libro de Edwards [5] sigue la demostración que hizo Hadamard en 1896 por último en el articulo de Bost [3] se puede encontrar una demostración corta del teorema para el lector que tiene experiencia en transformadas de Fourier.

Si el lector está interesado en seguir el desarrollo de la función zeta de Riemann existen varias obras, entre las cuales destaca el libro de Ivić [7], considerado como uno de los principales expertos en el tema. También resulta interesante leer el articulo de Morales-Luna [2] en el cual se muestra la importancia de la hipótesis de Riemann a través de sus resultados en criptología y algunas de las posibles consecuencias de esta hipótesis.

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., Nueva York, tercera edición, 1978.

[2] J. J. Angel Angel y G. Morales-Luna. La hipótesis de Riemann y primalidad. *Carta Informativa, Sociedad Matemática Mexicana*, volumen No. 53, pp. 8–14., Julio 2007.

[3] J.-B. Bost. Le théorème des nombres premiers et la transformation de Fourier. *La fonction zêta*, pages 1–35. Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2003.

[4] J. B. Conway. *Functions of one complex variable*, volumen 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Nueva York, segunda edición, 1978.

[5] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function.* Dover Publications Inc., Mineola, Nueva York, 2001.

[6] T. W. Gamelin. *Complex analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Nueva York, 2001.

[7] A. Ivić. *The Riemann zeta-function.* Dover Publications Inc., Mineola, Nueva York, 2003.

[8] S. Lang. *Complex analysis*, volumen 103 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, Nueva York, cuarta edición, 1999.

[9] B. Riemann. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, Noviembre 1859.

[10] D. Zagier. Newman's short proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly*, 104(8):705–708, 1997.