



Universidad Nacional Autónoma  
de México

---

---

Instituto de Física

Dinámica de las interacciones en autómatas  
celulares elementales probabilísticos.

Tesis presentada al

**Instituto de Física de la Universidad Nacional  
Autónoma de México**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestría en Ciencias Físicas**

por

Gamaliel Esaú Percino Figueroa

Director de Tesis

Dr. Octavio Miramontes Vidal





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

México D.F.  
confirmar

**Título:** Dinámica de las interacciones en autómatas celulares elementales probabilísticos.

**Estudiante:** GAMALIEL ESAÚ PERCINO FIGUEROA

COMITÉ

---

Dr. Octavio Miramontes Vidal  
Propietario

---

Dr. Christopher Stephens  
Propietario

---

Dr. Ricardo Mansilla  
Propietario

---

Dr. Denis Pierre Boyer  
Suplente

---

Dr. Humberto Arce Rincón  
Suplente



---

---

# Índice general

Índice general	III
Agradecimientos	v
Introducción	VII
Resumen	XI
<b>1. Autómata celular</b>	<b>1</b>
1.1. Definición de autómata celular . . . . .	1
1.2. Clasificación de los autómatas celulares . . . . .	4
1.3. Propiedades locales de un autómata celular . . . . .	7
1.4. Clasificación jerárquica de patrones . . . . .	13
1.5. Propiedades globales de un autómata celular . . . . .	17
1.6. Entropía de conjunto de un autómata celular . . . . .	20
<b>2. Teoría de la información y medidas de complejidad</b>	<b>23</b>
2.1. Teoría de la información . . . . .	23
2.2. Teoría de la información y mecánica estadística . . . . .	24
2.3. Información Relativa . . . . .	27
2.4. Entropía de Shannon . . . . .	28
2.5. Entropía de bloques . . . . .	29
2.6. Medidas de complejidad . . . . .	32
2.7. ¿Que es un sistema complejo? . . . . .	32
2.8. ¿Que es un comportamiento complejo? . . . . .	32
2.9. Información de correlación . . . . .	33
2.10. Medida de complejidad efectiva . . . . .	36
2.11. Complejidad de Lempel-Ziv . . . . .	37
<b>3. Interacción dinámica de AC elementales</b>	<b>39</b>
3.1. Interacción dinámica de AC como modelo formación de patrones biológicos . . . . .	39
3.2. Interacción dinámica de AC como un modelo de AC probabilístico . .	41

<b>4. Resultados</b>	<b>45</b>
4.1. Interacción dinámica de reglas sinónimas . . . . .	46
4.2. Interacción dinámica de reglas no sinónimas . . . . .	56
4.2.1. Reglas $\phi_1 = 62$ y $\phi_2 = 118$ . . . . .	61
4.2.2. Reglas $\phi_1 = 126$ y $\phi_2 = 129$ . . . . .	72
4.2.3. Reglas $\phi_1 = 82$ y $\phi_2 = 26$ . . . . .	82
<b>5. Conclusiones</b>	<b>95</b>
<b>A. Conjunto <math>L</math> de 29 variables subjetivas</b>	<b>99</b>
<b>B. Conjunto de reglas sinónimas de AC elementales</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>

# Introducción

La teoría de los autómatas celulares tuvo sus comienzos en 1949 con J. von Neumann (teoría de auto reproducción automática); pero fue hasta inicios de los 80's con los trabajos de S. Wolfram en que la comunidad científica de diversas áreas comenzó a tener un interés en ellos, encontrando una gran variedad de aplicaciones que van desde la física estadística como el modelo de Ising, las reacciones químicas de Belousov-Zhabotinsky, formación de patrones y morfogénesis en sistemas biológicos, e inclusive se han aplicado a sistemas sociales. El impacto de los autómatas celulares se debe a dos características importantes: la arquitectura es muy simple, lo que significa que no se requiere de grandes esfuerzos computacionales para construir un autómata celular y la segunda es que el comportamiento evolutivo de los autómatas celulares basado en reglas muy simples puede ser tan complejo que describe de manera natural ciertos comportamientos de los sistemas complejos de la naturaleza.

El presente trabajo es la continuación de un trabajo previo, en el que se exponen ideas para la implementación de autómatas celulares en el área de morfogénesis de sistemas biológicos [1]. Las ideas, o bien, el modelo que se desarrolla tiene su fundamentación biológica en el modelo de información posicional y crecimiento clonal de L. Wolpert, mismo que a lo largo de este trabajo lo llamaremos el modelo de *interacción dinámica* de autómatas celulares elementales. Aunque la riqueza de este modelo en la morfogénesis de los sistemas biológicos es enorme, no pondremos tanta atención a los aspectos biológicos si no que, nos interesaremos más por el comportamiento evolutivo de la interacción dinámica desde el marco teórico de la teoría de la información, tomando las ideas de auto-organización en autómatas celulares elementales propuestas por Wolfram, Grassberger y otros autores que se citarán en el desarrollo de este trabajo. Sin embargo, nuestros resultados nos podrán llevar a realizar una serie de conclusiones relativas a algunos aspectos biológicos relevantes.

El motivo principal de este trabajo es el estudio de la interacción dinámica de autómatas celulares, es decir, dada dos reglas de evolución nos interesa saber si al interactuar mediante una distribución de probabilidad lineal, se forman estructuras auto-organizadas. El modelo de interacción dinámica es, en si, un modelo de autómata celular probabilístico, en donde los elementos probabilísticos representan una forma de ruido o perturbación dinámica, este ruido no es del todo azaroso, pues obedece reglas de evolución que se generan durante la interacción; esto provocará que en algunos casos la interacción presente estructuras auto-organizadas. En realidad nuestro estudio es fenomenológico y sólo abarca algunos casos, por lo que

está lejos de una generalización. Sin embargo los casos que presentamos reflejan que la auto-organización durante la interacción dinámica de autómatas celulares, dependerá del número de mapeos que se generan durante la interacción dinámica, y que son correspondientes a las reglas de evolución de autómatas celulares que se producen durante la interacción dinámica, también dependerá de ciertas propiedades de las reglas, como son las paridades de estas y si las reglas que interactúan entran o no en conflicto al interactuar.

En el capítulo 1 se define un autómata celular. En particular nuestro interés se enfoca en los autómatas celulares elementales, posteriormente se hablará de las clasificaciones de los autómatas celulares propuesta por S. Wolfram y su correspondencia con los sistemas dinámicos, después se explica brevemente las propiedades locales y globales de los autómatas celulares. La primera propiedad está relacionada con la influencia de las condiciones iniciales sobre la evolución de los autómatas celulares, estos efectos son visualizados por medio de la densidad de estados, también se define el patrón de un autómata celular y se proporciona una clasificación jerárquica de los patrones [1]. La segunda propiedad está más apegada con el enfoque de los sistemas dinámicos ya que considera el conjunto de todas las configuraciones de un autómata celular, esto nos lleva a la definición de entropía de un autómata celular.

En el capítulo 2 se hace una introducción a la teoría de la información basada en la definición de información de C. Shannon, se discute brevemente la relación entre mecánica estadística y teoría de la información. Información y entropía son sinónimos, esto nos llevará a definir cantidades en términos de la entropía, como es la entropía de bloques introducida por Grassberger y que proporciona una medida de complejidad de carácter físico como es la medida de complejidad efectiva. Antes se hablará de la información relativa que proporciona una definición de información más general que la definición de Shannon, esta permitirá dar una definición de la información de correlación y un enfoque de las correlaciones de un sistema más general que el proporcionado por la información mutua. Se discute brevemente algunas propiedades de los sistemas complejos, sin la intención de proporcionar una definición y también algunas propiedades de las medidas de complejidad, finalmente se hablará de la complejidad de Lempel-Ziv que representa un algoritmo que permite visualizar la formación y complejidad de patrones en autómatas celulares.

En el capítulo 3 se expone el modelo de interacción dinámica de autómatas celulares elementales desde su motivación en aplicaciones a la morfogénesis de sistemas biológicos basado en el modelo de información posicional y crecimiento clonal de Wolpert, así como también su construcción con autómatas celulares elementales, mediante las probabilidades de evolución de las reglas en un espacio acotado por las condiciones periódicas en la frontera. Posteriormente se trata el modelo de interacción dinámica de autómatas celulares elementales como un autómata celular probabilístico. Este enfoque nos permite ser un poco más rigurosos y exponer el modelo de ruido dinámico inducido a un autómata celular elemental propuesto por Billings, lo que nos llevara a poder expresar una regla de autómata celular probabilístico mediante un polinomio.

---

En el capítulo 4 se exponen los resultados de las simulaciones, partiendo de una explicación cualitativa de lo que ocurre cuando dos reglas de evolución sinónimas y no sinónimas interactúan, esta explicación se basa fundamentalmente en observar el número de mapeos que son afectados por la distribución de probabilidad lineal durante la interacción dinámica. El conjunto de mapeos afectados por la distribución lineal y el conjunto de mapeos no afectados, forman durante la interacción dinámica reglas de evolución de autómata celular y la auto-organización de la interacción dinámica dependerá de la diversidad de clases de reglas que se generan durante dicha interacción. Las reglas que se utilizan para el análisis numérico fueron elegidas según su proximidad o debido a que dichas reglas no son sinónimas de otras reglas como se va a explicar en el capítulo 1. Los resultados expuestos son los más significativos que se obtuvieron en el desarrollo de este trabajo. Diversas cantidades expuestas en el capítulo 2 como medida de entropía, entropía de bloques, información de correlación y complejidad de Lempel-Ziv proporcionan evidencias de que la interacción dinámica puede llevarse a cabo de manera auto-organizada y también en algunas casos de manera completamente desordenada. Finalmente en el capítulo 5 se exponen las conclusiones.



# Resumen

La interacción dinámica de autómatas celulares se ha implementado como modelo de la morfogénesis de organismos vivos, reproduciendo algunas estructuras como las manchas de la piel de los animales [1], sin embargo, para que dos reglas de autómatas celulares elemental interactuando produzcan una estructura bien definida, deberán tener ciertas características en sus composiciones. En este trabajo se analiza algunos ejemplos de reglas de autómatas celulares elementales,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , que interactúan y se buscan las condiciones, como por ejemplo, los mapeos que las componen, las paridades de las reglas y la proximidad que éstas pueden tener, para que den lugar a estructuras auto-organizadas. Se analiza la interacción dinámica de los conjuntos de reglas sinónimas, a partir de los mapeos que componen a estas reglas, también a partir de sus paridades y si las reglas de estos conjuntos que interactúan tienen un código decimal  $\leq 127$  y  $\geq 128$ , se encuentran ciertas características, tales como que el patrón de la interacción dinámica puede seguir siendo sinónimo a las reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , o puede ser un patrón distorsionado o bien desordenado. También se analizan la interacción dinámica de reglas de autómatas celular elemental que entran en conflicto y se encuentra que el patrón de la interacción dinámica siempre será desordenado o nulo, sin embargo, se encuentran que hay reglas próximas entre si, que al interactuar, producen un patrón auto-organizado y que esto dependerá de los mapeos durante la interacción dinámica y las reglas de evolución que se generan durante la interacción. Diversas cantidades basadas en la información de Shannon permiten visualizar la auto-organización durante la interacción dinámica.





# capitulo 1

## Autómata celular

### 1.1. Definición de autómata celular

Los autómatas celulares (AC) pueden ser considerados como sistemas dinámicos discretos en el espacio y en el tiempo, donde dada una condición inicial y las interacciones locales de una vecindad, la evolución del AC estará completamente determinada. Una de las características de los AC es su construcción simple, sin embargo, al evolucionar pueden generar comportamientos espacio-temporales extremadamente complejos similares a los observados en la naturaleza como es el caso de los patrones de manchas en la piel de algunos animales o el crecimiento de vegetación [1].

Los AC están constituidos por una parte espacial y una temporal de la siguiente forma:

1. Una malla de sitios de una, dos o más dimensiones.
2. Todos los sitios son equivalentes (homogeneidad).
3. Un conjunto de estados  $S = \{0, \dots, k-1\}$ , de los cuales, los sitios pueden tomar solo un valor  $\sigma_i \in S$ .
4. Una vecindad de sitios ocupados por los estados.
5. Condiciones en la frontera  $\sigma_0 = \sigma_{n+1}$ .
6. Una regla de evolución  $\phi$  que es definida por la interacción de los sitios de la vecindad.

La vecindad estará completamente determinada por un número de sitios ó bien un rango  $r$  de interacción entre ellos que determinará la evolución del AC, además la condición en la frontera propiciará una evolución del AC en un espacio finito y no infinito. El rango de iteracción  $r$  formará vecindades de  $n$ -tuplas  $n = 2r + 1$ , esta

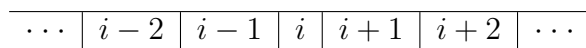
vecindad de sitios con una interacción dada determinará el valor de estado de un sitio para un paso temporal  $t$ , de esta forma la regla de evolución del  $AC$  es una función de los sitios de la vecindad

$$\sigma_i(t+1) = \phi(\sigma_{i-r}(t), \dots, \sigma_i(t), \dots, \sigma_{i+r}(t)) \quad (1.1)$$

donde la regla estará completamente determinada una vez que se halla especificado cada una de las  $k^{2r+1}$  posibles configuraciones para una vecindad dada, así habrá un total de  $k^{k^{2r+1}}$  posibles reglas de evolución.

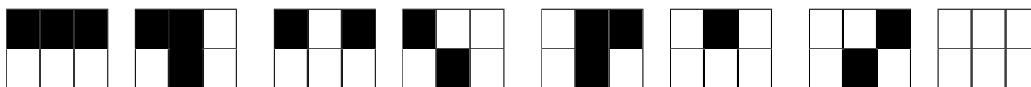
En este trabajo sólo consideraremos aquellos  $AC$  de una dimensión donde cada uno de los sitios sólo puede tomar dos estados del conjunto de estados y la interacción de los sitios es a primeros vecinos, siendo estas las características de un  $AC$  elemental.

Un  $AC$  elemental es unidimensional, esto significa que es un arreglo ó malla lineal de sitios como el cuadro 1.1,



Cuadro 1.1: Arreglo unidimensional.

dónde los sitios de la malla sólo pueden tomar dos estados  $k = 2$  del conjunto de estados  $S = \{0, 1\}$ , la interacción es a primeros vecinos  $r = 1$ , lo que nos da una vecindad de  $n = 3$  sitios con  $k^{2r+1} = 8$  posibles configuraciones de esta vecindad y  $k^{k^{2r+1}} = 256$  posibles reglas de evolución.



Cuadro 1.2: Ocho posibles configuraciones de una vecindad y la primera generación de estados de una regla de evolución  $\phi$ .

En el cuadro 1.2 el renglón superior muestra las ocho posibles configuraciones de la vecindad y el cuadro del renglón inferior, la primera generación de una regla de evolución  $\phi$ , los cuadros negros indican que el valor del sitio  $\sigma$  es 1 y los cuadros blancos que el valor del sitio  $\sigma$  es 0. Las ocho posibles configuraciones de la vecindad serán llamadas las componentes de la regla de evolución.

Se dice que un  $AC$  es binario cuando sus sitios sólo pueden tomar dos valores 0 y 1, entonces en el cuadro 1.2 tenemos un  $AC$  binario, donde a cada paso temporal  $t$  arrojará una cadena binaria (bits), la combinación 000 arroja el bit menos significativo y la combinación 111 el bit más significativo de tal forma que podemos acomodar la cadena binaria de bits colocando el bit más significativo en el extremo izquierdo y el menos significativo en el extremo derecho, entonces para el caso del cuadro 1.2 la cadena binaria es  $\phi = 01011010$  y su representación decimal es

## 1.1 Definición de autómata celular

---

$$\phi = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 = 90. \quad (1.2)$$

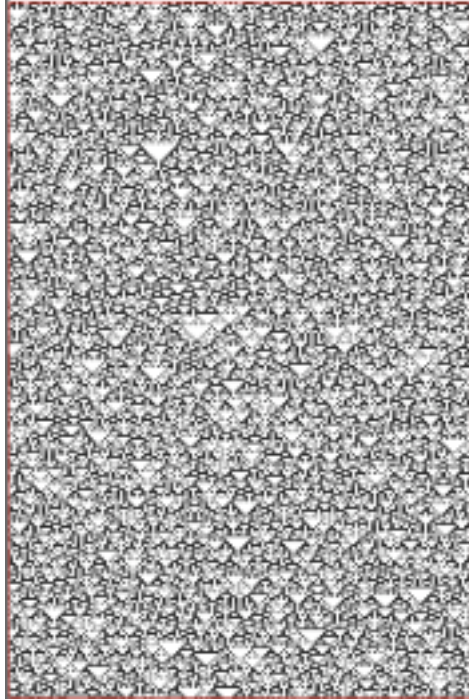


Figura 1.1: 300 generaciones de un  $AC$  con regla de evolución 90 en un arreglo de malla unidimensional de 200 sitios y condiciones en la frontera periódicas.

La fig.1.1 muestra las primeras 300 generaciones de la regla  $\phi = 90$ . De aquí en adelante nos referiremos a un  $AC$  por su representación decimal.

La evolución de un  $AC$  es local tanto en espacio como en el tiempo y se lleva a cabo en una malla con condiciones periódicas en la frontera (en nuestro caso la malla es unidimensional, evolucionando sobre un cilindro), para un estado inicial  $t = 0$  los sitios de la malla tienen un único valor  $\sigma_i(t = 0) \in S$  asignados en cada sitio por dominios alternados o de forma aleatoria, cuando la regla de evolución actúa sobre el estado inicial actualiza los estados de los sitios de forma sincrónica mediante un mapeo de la forma  $\phi : S^{2r+1} \rightarrow S$  (componentes de la regla, cuadro 1.2). Este proceso se lleva a cabo de forma indefinida de tal manera que comienzan a emerger comportamientos que pueden ser visualizados mediante un patrón  $P_\phi(t)$  que es una gráfica de todos los sitios  $\sigma_i$  con respecto al tiempo como la fig.1.1.

Debido a la gran cantidad de reglas de evolución que pueden existir para una vecindad dada, habrá algunas reglas con propiedades similares unas a otras, lo que lleva a clasificarlas [2].

Las reglas legales definen las siguientes propiedades:

1.  $\phi(0, 0, \dots, 0) = 0$ .

$$2. \phi(\sigma_{i-r}, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_{i+r}) = \phi(\sigma_{i+r}, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_{i-r}).$$

La primera propiedad nos dice que la regla de evolución aplicada a estados nulos seguirán siendo nulos, la segunda es simplemente una propiedad simétrica. Las reglas legales son del tipo  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_2\alpha_5\alpha_40$  con  $\alpha_i \in S = \{0, 1\}$ . Para el caso de *AC* simples esta propiedad reduce el numero de reglas de 256 a 32.

Las reglas totalísticas son funciones de las sumas de los valores de los sitios de la vecindad

$$\phi_{tot} = \phi_{tot}\left(\sum_{j=-r}^r \sigma_{i+j}\right). \quad (1.3)$$

En el caso de *AC* simples hay 8 reglas totalísticas.

Las reglas totalísticas externas son funciones de un sitio tomado de su vecindad y de la suma de los valores de los sitios restantes de la vecindad de tal sitio

$$\phi_{ext-tot} = \phi_{ext-tot}\left(\sigma_i, \sum_{j=-r}^r \sigma_{i+j} - \sigma_i\right). \quad (1.4)$$

Estas reglas tienen la forma  $\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2\alpha_20\alpha_20$ . En *AC* simples hay 8 reglas totalísticas externas.

Las reglas aditivas tienen la característica de obedecer un principio de superposición aditivo  $\phi(\sigma_a + \sigma_b) = \phi(\sigma_a) + \phi(\sigma_b)$ , y son funciones lineales de los sitios de la vecindad

$$\phi_{aditiva} = \sum_{j=-r}^r \alpha_j \sigma_{i+j} \pmod{k}, \quad \alpha_j \in S \quad (1.5)$$

donde *mod k* indica que la suma es de *modulo k* y la aditividad no necesariamente se debe de entender desde el punto de vista de los números reales [2]. Las reglas aditivas son de la forma  $\alpha_1\alpha_20\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_30$  donde  $\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1 \pmod{k}$ .

## 1.2. Clasificación de los autómatas celulares

Los tipos de posibles reglas de evolución ya mencionadas tienen la característica de que dada una condición inicial aleatoria pueden conducir al *AC* después de un cierto tiempo a estados muy simples o muy complejos; por ejemplo, la fig.1.2 muestra esta clase de comportamiento. (a) y (b) son un caso de comportamiento simple que corresponde a las reglas de *AC* legal  $\phi = 4$  y totalística  $\phi = 50$ , (c) es un caso complejo correspondiente a la regla del *AC* legal  $\phi = 90$ . Mas adelante se explicará que es lo que realmente se quiere decir, cuando decimos que es simple ó complejo.

Observamos que partiendo de una condición inicial aleatoria, la regla  $\phi = 4$  en (a) provoca que inmediatamente los valores de algunos sitios se mantengan constantes

## 1.2 Clasificación de los autómatas celulares

---

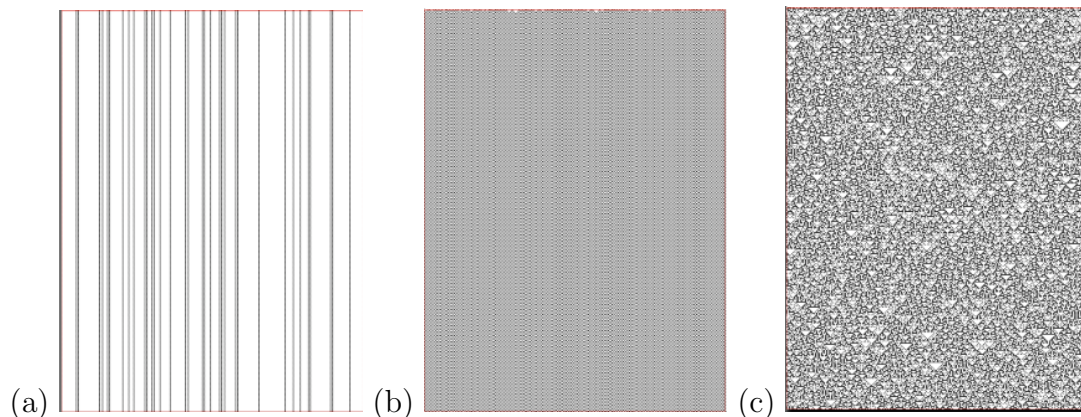


Figura 1.2: Ejemplos de tres tipos de comportamientos de las reglas de evolución. En (a) observamos la regla  $\phi = 4$ , en (b) la regla  $\phi = 50$  y en (c) la regla  $\phi = 90$ .

durante la evolución del *AC*. Con la regla  $\phi = 50$  en (b) hay un tiempo muy corto de transientes, después los sitios toman valores alternados para cada paso temporal. La regla  $\phi = 90$  en (c) es más complicada que las anteriores, debido a que durante la evolución aparecen estructuras triangulares auto-similares, la aparición de estas estructuras triangulares partiendo de una condición inicial aleatoria es característica de auto-organización durante la evolución del *AC*.

Los comportamientos durante la evolución descritos de manera cualitativa ponen en manifiesto, el porqué definir a un *AC* como un sistema dinámico discreto. Wolfram [3] propuso la idea de clasificar los *AC* en cuatro clases según su comportamiento o dinámica de manera análoga a la teoría de sistemas dinámicos. En la teoría de sistemas dinámicos la evolución de un sistema (físico, biológico etc.) estará completamente determinada dado un conjunto de ecuaciones dinámicas y un conjunto de condiciones iniciales. Dada una condición inicial el sistema evolucionará hacia un estado formando ciertas estructuras en su espacio fase llamadas *atractores*. Los sistemas dinámicos pueden manifestar tres tipos de atractores, el primero y más simple es el atractor de punto fijo, en el cual, todas las trayectorias del espacio fase convergen hacia un solo punto. El segundo atractor manifiesta periodicidad en el espacio fase y se le conoce como ciclo límite. El tercer atractor manifiesta estructuras geométricas complicadas, auto-similares, en el espacio fase, además, el comportamiento es impredecible siendo muy sensible a las condiciones iniciales, a este atractor se le llama atractor caótico o extraño. Entonces de las observaciones cualitativas de las fig.1.2, el *AC*  $\phi = 4$  en (a) parece comportarse como el atractor de punto límite, debido a que los valores en cada sitio evolucionan a un solo valor. El *AC*  $\phi = 50$  en (b) se comporta como un ciclo límite, debido a que después de un número de pasos temporales, los valores de los sitios van oscilando entre dos valores 0 y 1. El *AC*  $\phi = 90$  en (c) tiene las características de comportarse como un atractor extraño, sus estructuras son auto-similares y es sensible a las condiciones iniciales

[3, 1].

Hasta ahora se ha mencionado la existencia de tres clases de *AC*. Wolfram [3] menciona la existencia de un cuarto atractor o clase. El *AC* de cuarta clase tiene la propiedad de llevar a cabo tareas de cómputo universal [3], esto implica que no se puede predecir su comportamiento mediante algoritmos finitos, además no existe un atractor análogo a este en la teoría de sistemas dinámicos; sin embargo Langton [5] propone una similitud del *AC* de cuarta clase con las transiciones de fase en mecánica estadística. Los *AC* de cuarta clase tienen la propiedad de que en su comportamiento se presentan transientes de larga duración, correlaciones de largo alcance, propagan estructuras, y los procesamientos de información son de máxima complejidad debido a los efectos de las correlaciones de largo alcance. Langton argumenta que este tipo de comportamiento se manifiesta en una región crítica donde existe una mezcla de estados estables (puntos límite y ciclos límite) y estados completamente impredecibles (caóticos) llamada el *borde del caos*.

Entonces sólo existe cuatro tipos de clasificación de los *AC* y son las siguientes:

1. *AC* de primera clase: Evolucionan hacia un atractor de punto límite.
2. *AC* de segunda clase: Evolucionan hacia un atractor de ciclo límite.
3. *AC* de tercera clase: Evolucionan hacia un atractor caótico.
4. *AC* de cuarta clase: Tiene la característica de realizar cómputo universal.

Los *AC* de cuarta clase son abundantes en arreglos de mallas de dos o más dimensiones, sin embargo, para el caso unidimensional la existencia de esta clase sólo será para el caso en el que los posibles estados sean  $k > 2$  y el radio de interacción de los sitios de la vecindad sea  $r \geq 2$ . También son posibles para los casos  $k = 2$ ,  $r \geq 2$  y  $k > 2$ ,  $r = 1$ . El cuadro 1.3 [3] muestra una aproximación de la abundancia en las clases de *AC* para diferentes vecindades y números de estados.

Clase	$k = 2, r = 1$	$k = 2, r = 2$	$k = 3, r = 3$	$k = 3, r = 1$
1	0,50	0,25	0,09	0,12
2	0,25	0,16	0,11	0,19
3	0,25	0,53	0,73	0,60
4	0,0	0,06	0,06	0,07

Cuadro 1.3: Aproximación de la abundancia en las clases de *AC* para diferentes vecindades y posibles estados [3]

### 1.3. Propiedades locales de un autómata celular

Ahora se revisará cuales son las propiedades locales de un  $AC$ ; esto significa que será de interés saber cual es el comportamiento de una configuración dada por la evolución del  $AC$  a cada paso temporal, esto es proporcionado por las propiedades estadísticas del conjunto de valores de los sitios  $\sigma$  en una configuración individual del  $AC$ , de esta forma consideramos la densidad de estados  $\rho_k$  [1, 2] como la cantidad estadística mas simple para determinar el comportamiento del  $AC$  durante su evolución de forma local.

Las condiciones iniciales tendrán influencia sobre el comportamiento en las configuraciones de algunos  $AC$  durante la evolución. Una condición inicial es un arreglo lineal como el cuadro 1.1 de longitud  $N$ , donde los valores de los sitios se asignarán de forma aleatoria o mediante una distribución de energía mínima, cuando la asignación de valores por sitio es aleatoria y equiprobable, tendremos una cadena de bits inicial  $\dots 001011101 \dots$  de tamaño  $N$  y, cuando se asignan mediante una distribución de energía mínima, se asignan los valores de los sitios de manera ordenada y periódica mediante el cociente  $p/q$  donde  $p$  es el número de estados de un mismo tipo distribuido en  $q$  lugares. Por ejemplo

1.  $\dots 1010101010 \dots$   $p/q = 1/2$  (un uno cada dos lugares).
2.  $\dots 1001001001 \dots$   $p/q = 1/3$  (un uno cada tres lugares).

La densidad de estados  $\rho_k(t)$  es el número de veces que se repite un estado  $k$  en un paso temporal  $t$  y puede comportarse de manera constante, periódica o caótica. No confundamos el comportamiento de las densidades de estados con la clasificación de Wolfram [3] que está sustentada en el comportamiento del espacio fase de un sistema dinámico.

Otro aspecto importante es las similitud en los patrones, así, diremos que dos patrones  $P_{\phi_1}(t)$  y  $P_{\phi_2}(t)$  son idénticos si y solo si son iguales punto a punto:

$$P_{\phi_1}(t) = P_{\phi_2}(t) \Leftrightarrow \sigma_i(t) = \sigma_j(t) \quad \forall t, \quad (i = j). \quad (1.6)$$

Cuando el comportamiento dinámico de dos patrones sea el mismo diremos que hay una equivalencia topológica entre los patrones. Con respecto a las condiciones iniciales; diremos que los cambios en ellas son no esenciales si tales cambios no alteran la equivalencia topológica entre los patrones antes y después del cambio. Si el cambio en las condiciones iniciales altera la equivalencia topológica, entonces diremos que el cambio en las condiciones iniciales es esencial [1].

Ahora veamos como los cambios en las condiciones iniciales pueden influir en el comportamiento dinámico de los autómatas celulares; nos enfocaremos en la regla no legal  $\phi = 82$ , tratamientos similares para reglas legales de primera, segunda y tercera clase pueden consultarse en [1, 2]. La razón por la que se toma la regla no legal  $\phi = 82$  se debe a que muestra sensibilidad en las condiciones iniciales, sin embargo, no es un  $AC$  de tercera clase, puesto que las estructuras triangulares de sus



patrones no son auto-similares y se comportan de manera periódica. En el capítulo 4 se volverá a discutir esta regla. En la fig.1.3 vemos el patrón del AC no legal  $\phi = 82$  con una condición inicial ordenada  $p/q = 1/5$  y longitud  $N = 80$ , la densidad de unos  $\rho_1$  se comporta de manera periódica con una periodicidad de cuatro pasos temporales  $\rho_1(t) = \rho_1(t + 4)$ ; en la fig.1.4 vemos el patrón para la misma regla pero con condiciones iniciales ordenadas  $p/q = 1/6$ , la densidad de unos  $\rho_1$  para esta condición se mantiene constante durante la evolución; en la fig.1.5 la condición inicial es  $p/q = 1/8$ , al tercer paso temporal el patrón muere; en la fig.1.6 la condición inicial es  $p/q = 1/10$  el comportamiento es periódico con periodicidad  $\rho_1(t) = \rho_1(t + 2)$  y el patrón se caracteriza por las estructuras triangulares; en la fig.1.7 la condición inicial  $p/q = 1/27$  nos lleva nuevamente a estructuras triangulares periódicas con periodicidad  $\rho_1(t) = \rho_1(t + 30)$ ; finalmente en la fig.1.8 la condición inicial es aleatoria y se observa que después de 10 pasos temporales el comportamiento se vuelve periódico con periodicidad  $\rho_1(t) = \rho_1(t + 10)$ .

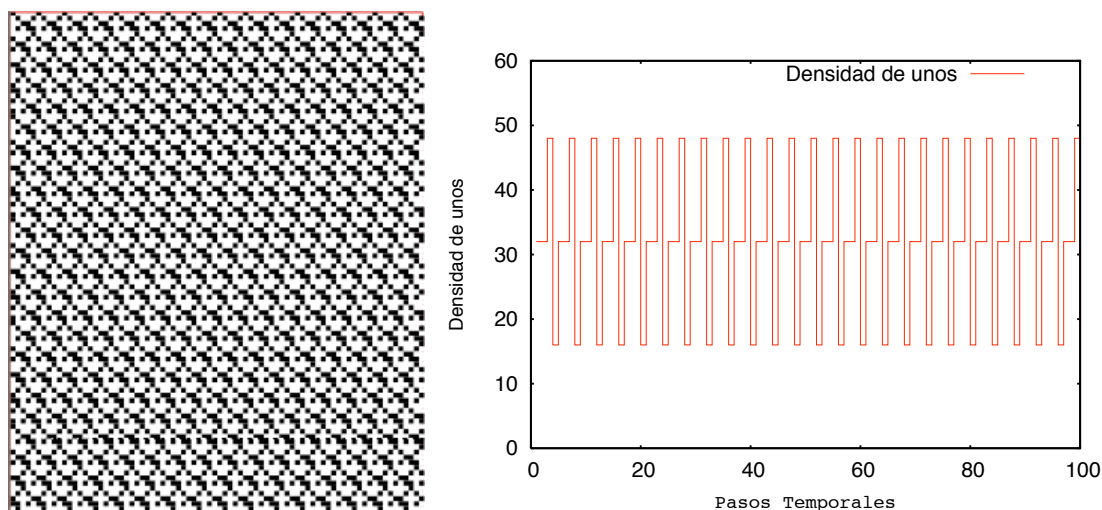


Figura 1.3: AC  $\phi = 82$  con condiciones iniciales de longitud  $N = 80$  de energía mínima  $p/q = 1/5$  y  $t = 100$  pasos temporales.

Ahora se verá como un cambio en la longitud de las condiciones iniciales puede influir en el comportamiento de las configuraciones del AC a cada paso temporal. En la fig.1.9 se observan tres patrones generados nuevamente con la regla de evolución  $\phi = 82$  con condiciones iniciales aleatorias. En (a) la longitud de la condición inicial es de  $N = 100$ , en (b)  $N = 110$  y en (c)  $N = 115$ , es claro que a pesar de la gran similitud que existe entre los patrones, el comportamiento de la densidad de unos para cada configuración difiere, entre cada uno de los patrones, sin embargo, para los tres casos se mantiene el comportamiento periódico. Por otro lado, los AC de tercera clase se comportan de manera periódica después de un tiempo de transientes que incrementa con la longitud inicial [1, 2], incrementando el periodo en función de la longitud inicial  $N$  con periodicidad de  $2^N$  generaciones después del transiente

### 1.3 Propiedades locales de un autómata celular

---

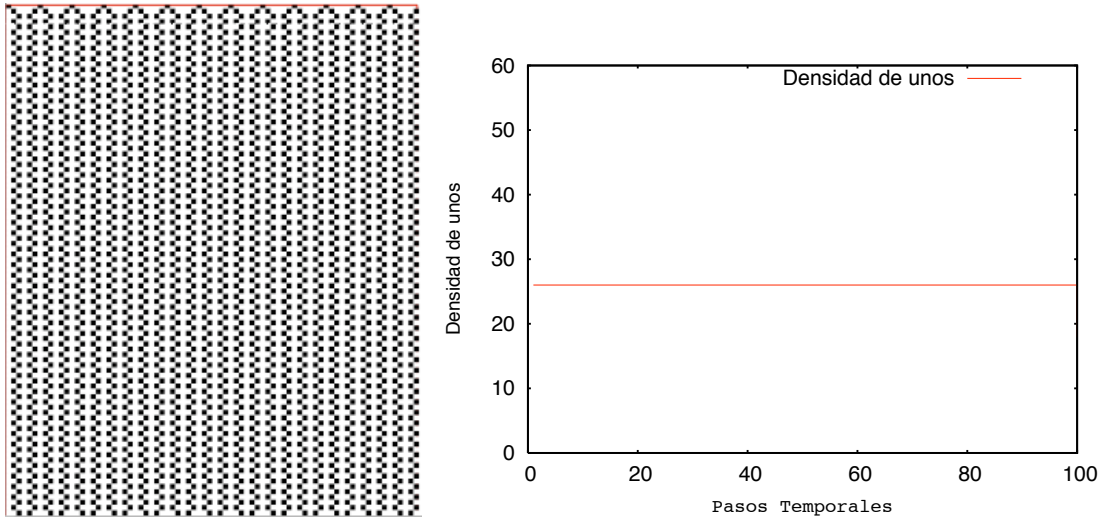


Figura 1.4:  $AC \phi = 82$  con condiciones iniciales de longitud  $N = 80$  de energía mínima,  $p/q = 1/6$  y  $t = 100$  pasos temporales.

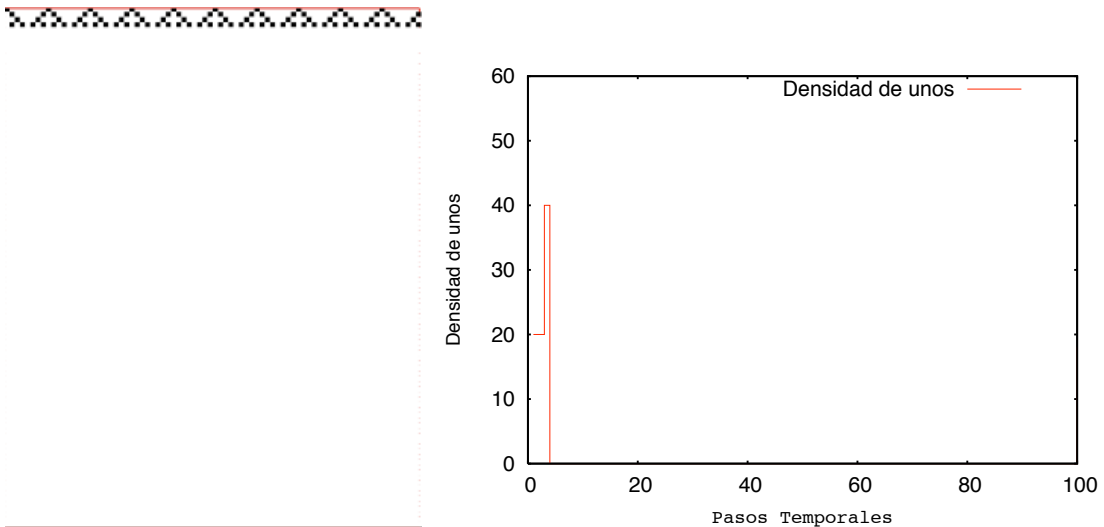


Figura 1.5:  $AC \phi = 82$  con condiciones iniciales de longitud  $N = 80$  de energía mínima  $p/q = 1/8$  y  $t = 100$  pasos temporales.

y se caracterizan por sus estructuras triangulares auto-similares. Para el caso de la regla  $\phi = 82$  el tiempo de transiente es extremadamente pequeño extendiéndose hasta  $t \approx 10$  pasos temporales y no parecen incrementar considerablemente al extender la longitud inicial, además las estructuras triangulares son periódicas y no auto-similares, sin embargo, los cambios en las condiciones iniciales son esenciales para el comportamiento del  $AC \phi = 82$ . Para el caso de condiciones iniciales orde-

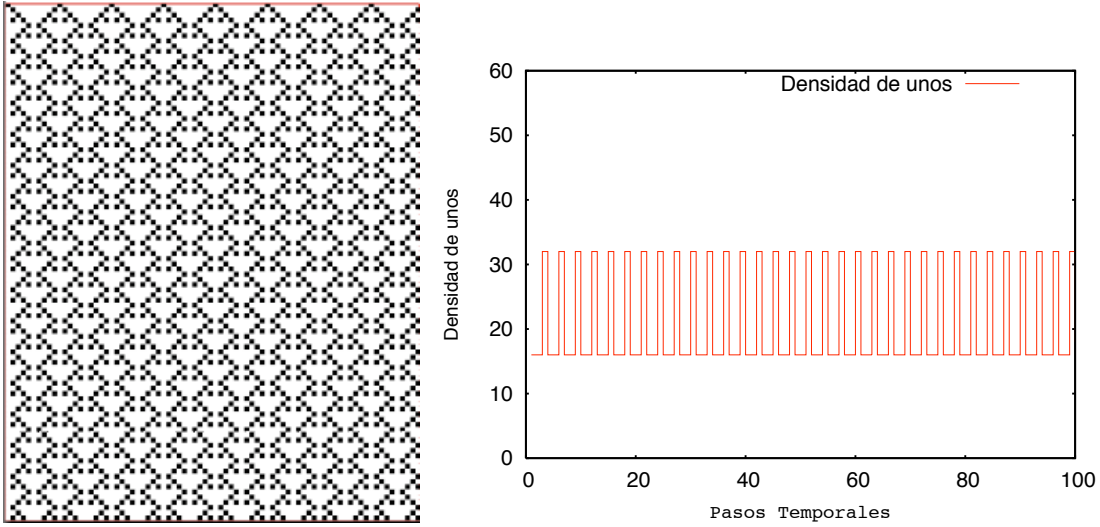


Figura 1.6:  $AC \phi = 82$  con condiciones iniciales de longitud  $N = 80$  de energía mínima  $p/q = 1/10$  y  $t = 100$  pasos temporales.

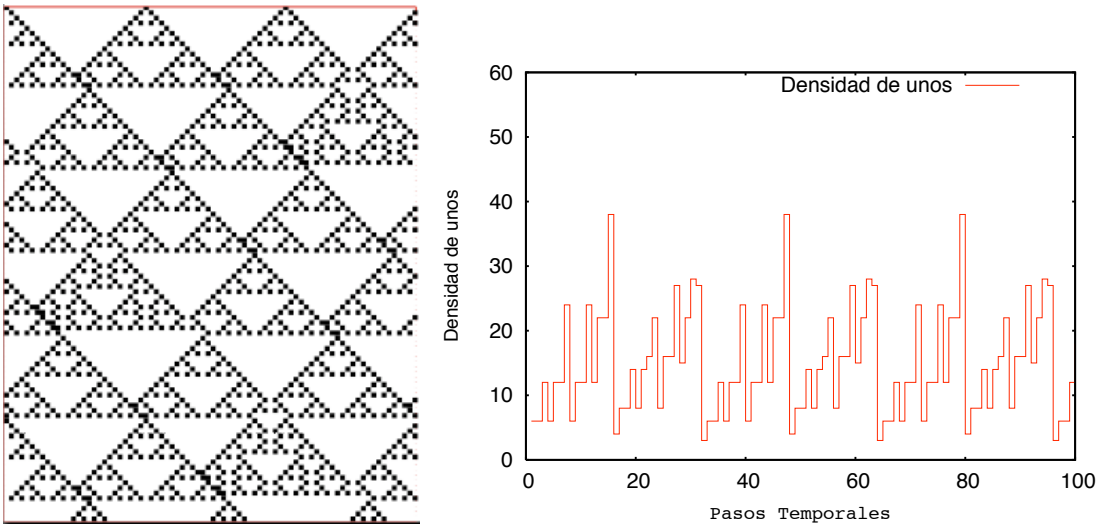


Figura 1.7:  $AC \phi = 82$  con condiciones iniciales de longitud  $N = 80$  de energía mínima  $p/q = 1/27$  y  $t = 100$  pasos temporales.

nadas, las estructuras de los patrones se modifican considerablemente y para el caso de condiciones iniciales aleatorias el comportamiento periódico se modifica debido a los corrimientos de las bandas de ancho variable compuestas por las estructuras triangulares y los corrimientos que van hacia la derecha, por lo que se podría pensar, que la distribución de los estados en la condición inicial afectará las estructuras triangulares que se propagan en bandas de ancho variable, incrementándolas o dimi-

### 1.3 Propiedades locales de un autómata celular

---

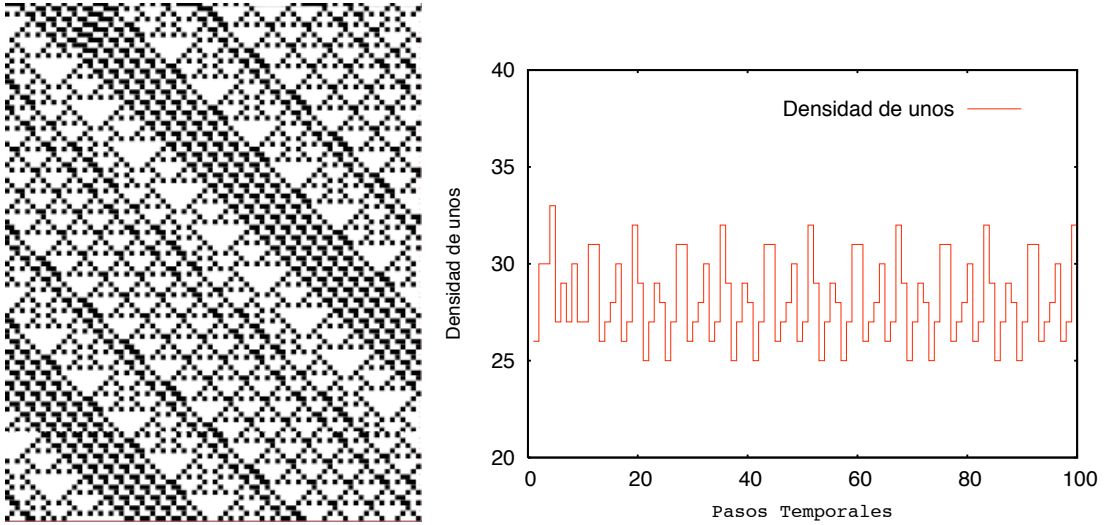


Figura 1.8:  $AC$   $\phi = 82$  con condiciones iniciales aleatorias y de longitud  $N = 80$  y  $t = 100$  pasos temporales.

nuyéndolas. Como veremos más adelante, la distribución de los estados de los sitios afecta la robustez de la regla no local  $\phi = 82$  y también se podrá argumentar que esta regla es sensible ante condiciones iniciales con entropía  $< 1$ .

Podemos decir dos cosas fundamentales sobre los  $AC$ :

1. Los  $AC$  de primera clase y segunda clase mantienen la equivalencia topológica y preservan el comportamiento dinámico ante un cambio en las condiciones iniciales, tanto en la distribución de los estados como en su longitud y los cambios en las condiciones iniciales son no esenciales.
2. Los  $AC$  de tercera clase no mantienen la equivalencia topológica y no preservan el comportamiento dinámico ante un cambio en las condiciones iniciales, así los cambios en las condiciones iniciales son esenciales.

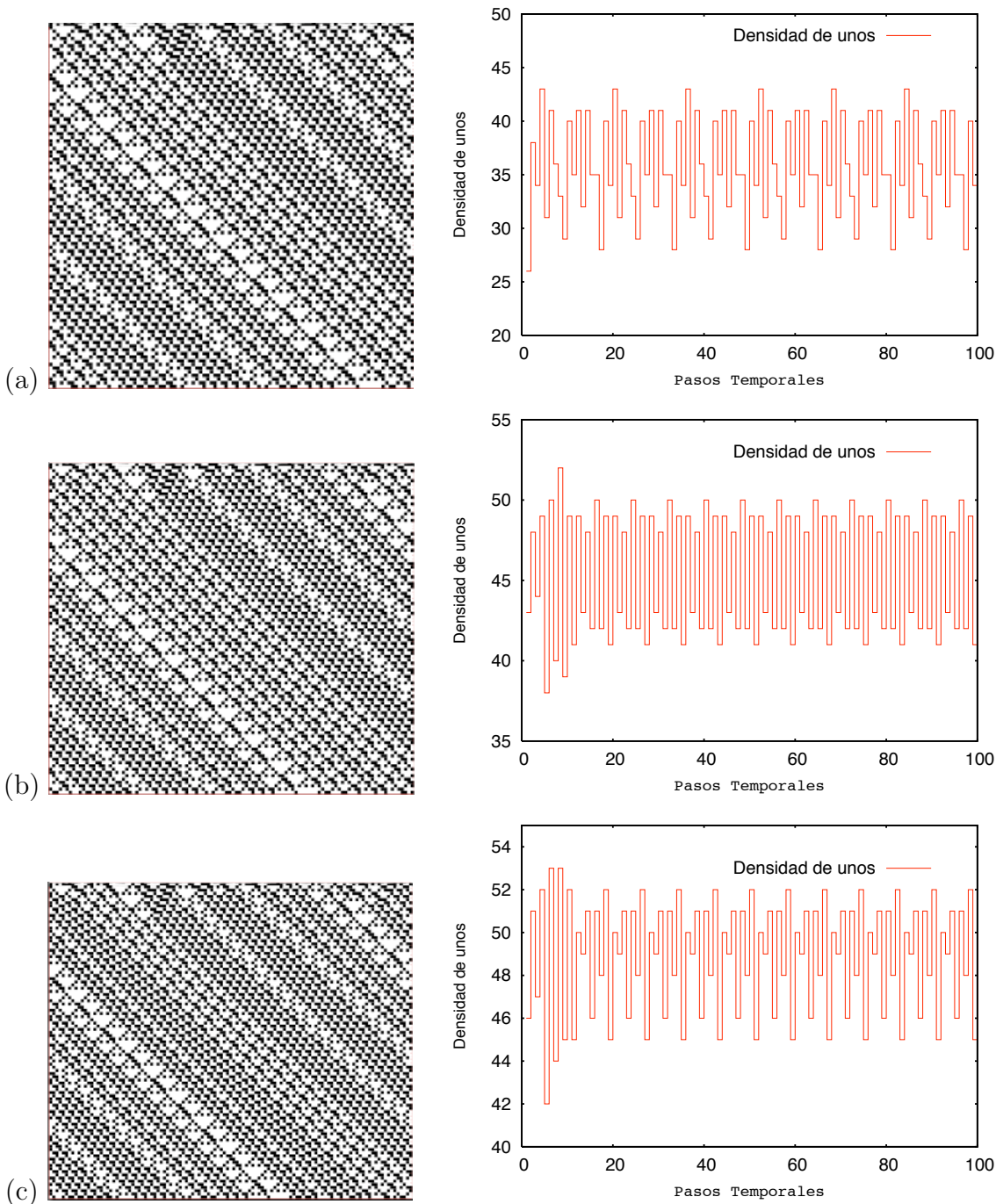


Figura 1.9: Patrones del  $AC \phi = 82$  con tres distintas longitudes en las condiciones iniciales aleatorias y una evolución de 100 pasos temporales. (a) condición inicial aleatoria de longitud  $N = 100$ . (b) condición inicial aleatoria de longitud  $N = 110$ . (c) condición inicial aleatoria inicial de longitud  $N = 110$ .

## 1.4. Clasificación jerárquica de patrones

Uno de los aspectos importantes en un  $AC$  es la dependencia de las condiciones iniciales sobre el patrón que genera. Es necesario clasificar los patrones ante la influencia de las condiciones iniciales, Miramontes [1] propone un método para la clasificación de patrones, basada en la selección de las condiciones iniciales. Para esto supóngase que se selecciona un caso extremo en las condiciones iniciales ordenadas, es decir, se selecciona por ejemplo, el caso  $p/q = 1$ , (recordemos que la regla de evolución es local y sólo tres sitios de una vecindad influyen en la evolución del patrón) entonces solamente la vecindad 111 determinará la forma del patrón, así, esta condición inicial sólo proporcionará tres distintos patrones, el primero sólo genera unos, el segundo genera unos y ceros alternados y el tercero genera puros ceros, la fig.1.10 muestra los tres tipos de patrones para esta condición inicial.

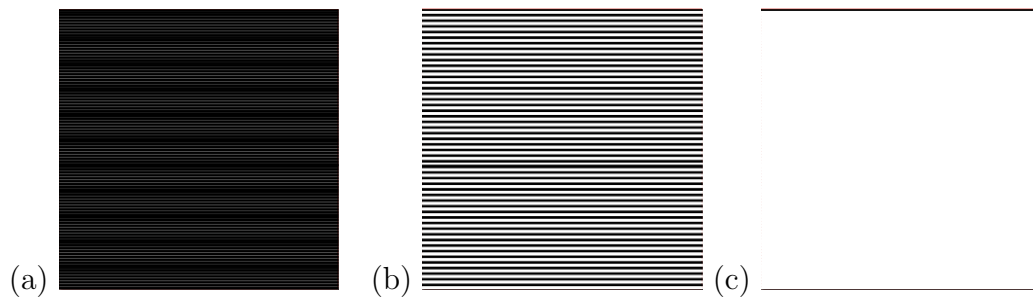


Figura 1.10: Tres posibles patrones generados mediante una condición inicial  $p/q = 1$ . (a) la evolución genera puros unos. (b) la evolución genera unos y ceros alternados. (c) la evolución manda los estados de la condición inicial a ceros.

Para saber cual de todas las posibles reglas llevará a un patrón de puros unos, ceros o ceros y unos alternados veamos las siguientes propiedades de las reglas de evolución: Recuérdese que la regla de evolución es una cadena de bits, donde el bit más significativo es proporcionado por la combinación de la vecindad 111 y el bit menos significativo por la combinación 000, entonces

1. Si 111 propaga un uno, la regla de evolución será mayor o igual a 128, si propaga un cero, la regla de evolución será menor o igual a 127.
2. Si 000 propaga un uno la regla será un número impar, si propaga un cero la regla es par.

De esta manera podremos determinar el tipo de patrón que se forma. El cuadro 1.4 muestra el tipo de reglas de evolución que cumplen con estas propiedades, note que en un tipo determinado de patrón existen reglas de distintas clases que lo producen.

111	000	propiedad	tipo de patrón
1	1	$\phi \geq 128$ , $\phi$ impar	unos
1	0	$\phi \geq 128$ , $\phi$ par	alternados
0	1	$\phi \leq 127$ , $\phi$ impar	alternados
0	0	$\phi \leq 127$ , $\phi$ par	ceros

Cuadro 1.4: Propiedades y tipos de patrones generados por la condición inicial 111.

Considerando casos distintos a los casos límite de condiciones ordenadas  $p/q = 1$ , el número de patrones incrementa, y si consideramos condiciones iniciales aleatorias con una probabilidad  $p = 0,5$  para cada estado el número máximo de patrones distintos será menor a 256 [1]. Esto significa que se observará que existen patrones generados por un cierto número de reglas de evolución que compartirán ciertos rasgos en sus estructuras. Los rasgos en las estructuras de los patrones se proponen como variables subjetivas, estas permitirán visualizar los rasgos que ciertas reglas comparten. Un patrón puede contener más de una variable, y se proponen en total 29 variables que los patrones de los AC elemental pueden contener, las 29 variables o  $p$ -variables forman el conjunto  $L$ , y el número de variables que el patrón de una regla puede contener forma un subconjunto  $l$ , en el Apendice A se muestra una tabla con las 29 variables que un patrón de AC elemental puede contener, para una revisión mas detallada de la forma de cada una de las variables se puede consultar la referencia [1].

Para poder agrupar los AC en una familia según el patrón que producen, Miramontes [1] hace uso de la siguiente definición:

**Definición 1.4.1** *Sea  $L$  el conjunto de todas las  $p$ -variables que describen a un conjunto  $P$  de patrones y sean  $P_{\phi_1}(t)$  y  $P_{\phi_2}(t)$  dos patrones de  $P$  generados por las reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Diremos que ambos patrones son **próximos** si los subconjuntos  $l_1$  y  $l_2$  de  $L$  que los describen son iguales y diremos, en este caso, que las reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son **sinónimas**. Además entenderemos como grupo, clase o familia al conjunto formado por los patrones que son **próximos** entre si.*

Se va a aclarar lo que se quiere decir con el término **próximos** para poder introducirnos a la idea de clasificación jerárquica de patrones.

En la fig.1.11 hay cinco patrones de AC generados con las reglas de evolución correspondientes a  $\phi = 18$ ,  $\phi = 129$ ,  $\phi = 22$ ,  $\phi = 11$  y  $\phi = 60$ . Como se explico el conjunto de variables  $L$  esta compuesto de los rasgos subjetivos que contienen cada unos de los patrones, el cuadro 1.5 muestra los subconjuntos  $l$ 's de variables y lo que se puede notar es que los patrones de las reglas de evolución  $\phi = 18$  y  $\phi = 22$  contienen las mismas variables, así ellas son iguales, por lo que se puede argumentar que bajo los subconjunto de variables  $l$ 's,  $\phi = 18$  y  $\phi = 22$  son **próximos**. Las reglas  $\phi = 129$  y  $\phi = 60$  tienen una intersección con el subconjunto de variables de la



## 1.4 Clasificación jerárquica de patrones

---

regla  $\phi = 18$  o  $\phi = 22$  mediante las variables  $V1$  y  $V4$  para el caso  $\phi = 129$ , es decir, difieren en el color de los triángulos y mediante la variables  $V1$  para el caso  $\phi = 60$ , lo que nos dice que difieren en la forma de los triángulos. La regla  $\phi = 11$  no comparte ningún rasgo con la demás reglas, esto se muestra en el cuadro 1.6.

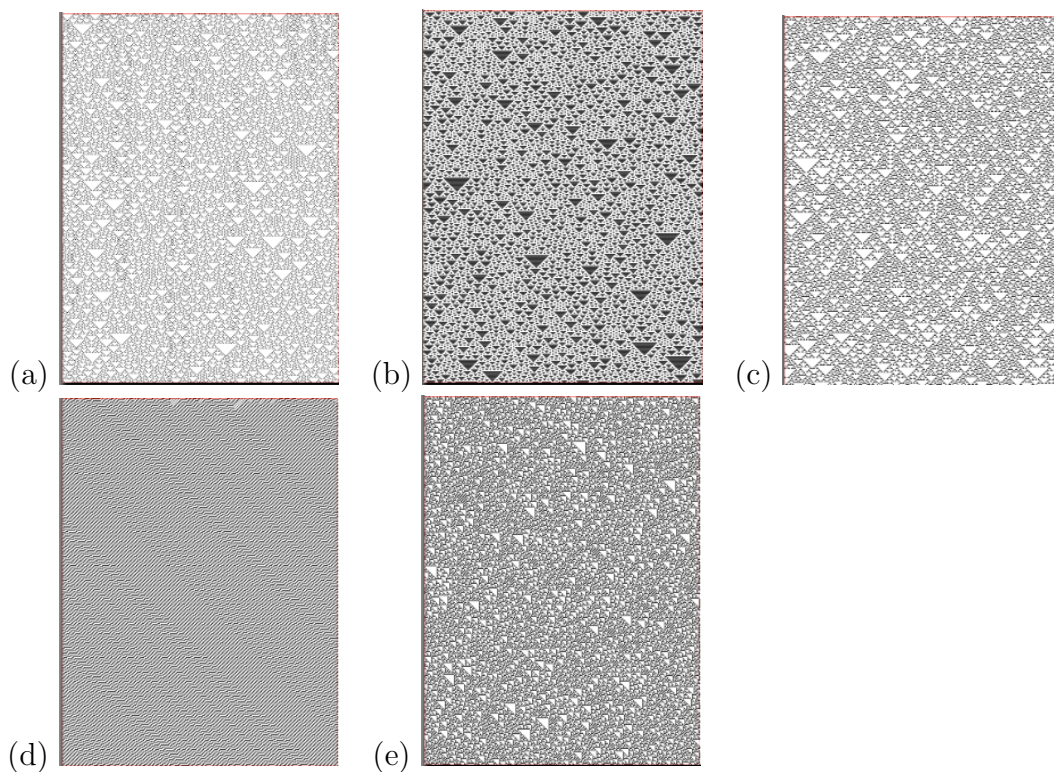


Figura 1.11: (a) regla  $\phi = 18$ , (b) regla  $\phi = 129$ , (c) regla  $\phi = 22$ , (d) regla  $\phi = 11$  y (e) regla  $\phi = 60$ .

Es importante tener un criterio para jerarquizar la clasificación de patrones, lo que implica imponer una norma al conjunto de variables para poder especificar que variable o rasgo es de mayor importancia y así determinar la proximidad de los patrones, se podría proponer que las reglas  $\phi = 18$  y  $\phi = 22$  son más próximas de lo que son  $\phi = 18$  y  $\phi = 60$ . Supóngase que se le da mayor importancia a la variable que representa la forma del triángulo que a cualquier otra, entonces se puede decir que las reglas  $\phi = 18$  y  $\phi = 22$  son más próximas y por lo tanto forman una primera familia en el nivel máximo de proximidad, las regla  $\phi = 18$ ,  $\phi = 22$  y  $\phi = 129$  forman una segunda familia, las reglas  $\phi = 18$ ,  $\phi = 22$ ,  $\phi = 129$  y  $\phi = 60$  forman una tercera familia, y finalmente la regla  $\phi = 11$  se agrega a las anteriores para formar una cuarta familia con proximidad mucho menor a las anteriores. Miramontes [1] presenta un extenso análisis de la proximidad de reglas de  $AC$  elementales; en este trabajo se explica brevemente las ideas desarrolladas en ese análisis, recordando que en el Apéndice A se proporciona el conjunto  $L$  de 29 variables subjetivas.



Variable	Rasgo
V1	Triángulos
V2	Triángulos blancos
V3	Triángulos negros
V4	Triángulos equiláteros
V5	Triángulos rectos
V6	Corimientto izquierdo

Cuadro 1.5: Variables de los patrones definidas según sus rasgos o características.

Patrón	Variable
18	V1, V2, V4
11	V6
129	V1, V3, V4
60	V1, V2, V5
22	V1, V2, V4

Cuadro 1.6: Patrones y variables que contienen cada uno.

Para poder dar una descripción de los 256 patrones, Miramontes [1] define el conjunto  $L$  de  $p$ -variables subjetivas, que en total suman 29 y define una matriz  $A$  que es llamada matriz de datos, formada por 256 renglones y 29 columnas, donde cada columna corresponde a cada una de la 29 variables de  $L$  y cada renglón corresponde a cada uno de los patrones. Una entrada de la matriz  $a_{ij}$  registra la presencia o ausencia de la  $j$ -ésima variable del  $i$ -ésimo patrón, así, un 0 en la correspondiente entrada corresponde a la ausencia de alguna variable, mientras que un 1 corresponde a la presencia. La interpretación matemática de esta matriz radica en considerar los renglones como 256 vectores en un espacio ortogonal de dimensión 29, Miramontes desarrollo un análisis de la proximidad de patrones mediante el coeficiente de disimilitud entre patrones, para poder agrupar aquellos con menor coeficiente de disimilitud y posteriormente utilizó el coeficiente de disimilitud entre grupos para poder comparar con un único vector, y encontró que dividiendo la matriz de datos en dos submatrices de tal forma que una contiene los  $AC$  con la característica de corrimientos en los patrones y la otra no contiene los  $AC$  con estas características, en total hay 155 reglas no sinónimas.

Se puede concluir que la clasificación de Wolfram [3] de los  $AC$  elementales, es de gran utilidad al dar un análisis de las propiedades locales de un  $AC$ , sin embargo, la interpretación de un sistema dinámico esta estrechamente relacionada con las propiedades globales de un  $AC$  que veremos a continuación. La interpretación de un  $AC$  va más allá de ser considerados como sistemas dinámicos, en realidad se ha considerado a los  $AC$  como universos lógicos de gran complejidad [5, 12, 13],

---

## 1.5 Propiedades globales de un autómata celular

---

capaces de realizar tareas de computo, esto significa que son capaces de almacenar, procesar y transmitir información de manera local, los *AC* de cuarta clase tienen esta propiedad.

### 1.5. Propiedades globales de un autómata celular

En esta sección se revisará el comportamiento de un *AC* a partir de su entropía, esto proporciona una conexión con la teoría de los sistemas dinámicos, dado que se considera el conjunto de todas las posibles configuraciones (ensamble) del *AC*, esto es análogo al espacio fase de la mecánica estadística clásica.

Considérese una cadena binaria formada por 0's y 1's de longitud  $L$ , si la cadena es completamente ordenada, los 0's y los 1's aparecerán de forma periódica, y, si la cadena es completamente desordenada, los 0's y los 1's aparecerán de forma equiprobable. Para saber cual es el grado de desorden que una cadena binaria puede presentar, se consideran subcadenas o bloques de tamaño  $n$ , tal que  $n \ll L$ , y todas las posibles configuraciones de las subcadenas, y se determina la probabilidad con la que se presentan en la cadena binaria de tamaño  $L$ , por ejemplo: Considérese una cadena binaria de tamaño  $L = 10$  cuya estructura es 0101101001, para conocer el grado de desorden de esta cadena considérese una subcadena binaria de tamaño  $n = 2$ , esta subcadena tiene  $2^2 = 4$  posibles configuraciones, estas configuraciones son simplemente 00, 01, 10, 11. Se toma la subcadena 00 y se observa cuantas veces se repite en la cadena de tamaño  $L$ , considerando los traslapes, esto quiere decir que de la cadena de tamaño  $L$  se toma primero la subcadena 01, esto es, se toman las posiciones 1 y 2 (de izquierda a derecha) de la cadena y se verifica si es igual a la subcadena 00, si no lo es se recorren las posiciones un lugar, y si lo es, se cuenta su aparición. Ahora se toma la subcadena 10 correspondientes a las posiciones 2 y 3 de la cadena de tamaño  $L$ , y se repite el proceso de verificación de igualdad de subcadenas, si son iguales, se cuenta su aparición, y así, se repite el proceso hasta haber recorrido toda la cadena de tamaño  $L$ . Este proceso se hace con todas las subcadenas de tamaño  $n = 2$ , y se cuenta cuantas veces aparecieron en la cadena de tamaño  $L$ , el número total de aparición en la cadena de tamaño  $L$  dividido entre el tamaño de la cadena será la probabilidad con la que estas subcadenas aparecen en la cadena de tamaño  $L$ . Estas probabilidades permitirán obtener el grado de desorden de la cadena, y la cantidad que involucra estas probabilidades se conoce como medida de entropía.

La medida de entropía o también llamada entropía métrica proporciona una forma cuantitativa de medir orden y caos en el comportamiento espacio-temporal de la evolución de un *AC* y se define como:

$$H_n^{(M)}(t) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k^n} p_i(t) \log p_i(t), \quad (1.7)$$

donde  $k^n$  denota todas las posibles configuraciones de una subcadena  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$

de longitud  $n$  como se explico anteriormente, definiéndose  $H_0 = 0$  para  $n = 0$ , (para el caso de un  $AC$  elemental  $k = 2$ ,  $n \ll L$  =condición inicial del  $AC$  y  $\sigma_i \in \{0, 1\}$ ) las  $p_i(t)$ 's son las probabilidades de que cada una de las subcadenas se presenten en cada una de las configuraciones o cadenas de longitud  $L$  generadas a cada paso temporal  $t$  por la evolución del  $AC$  y  $\log$  es el logaritmo de base 2; así, la entropía se mide en *bits*.  $H_n^{(M)}(t)$  es el número promedio de *bits* necesarios para especificar completamente un estado en un ensamble estadístico de todos los posibles estados. En el siguiente capítulo se profundizará en el concepto de entropía y su relación con la teoría de información.

Ahora considérese tres tipos de comportamientos como se muestra en la fig.1.12, en (a) se muestra un patrón cuya estructura es completamente ordenada, en (b) se muestra un patrón de  $AC$  cuyas estructuras son triangulares y es correspondiente a la regla de  $AC$  elemental  $\phi = 122$  y en (c) se muestra un patrón con una estructura desordenada, creado por un generador de números aleatorios. En el caso ordenado la entropía será mínima, mientras que en el caso del comportamiento desordenado la medida de entropía será máxima. La fig.1.13 muestra la entropía en función de los pasos temporales  $t = 25$ , el valor máximo de *1bit* corresponde al comportamiento desordenado y el valor mínimo de *0bit* corresponde al caso ordenado, donde, solo ocurre una subcadena de longitud  $n$  de las  $k^n$  posibles configuraciones de subcadenas. La fig.1.14 muestra la entropía para  $t = 25$  pasos temporales para diferentes longitudes de subcadenas de la regla de evolución  $\phi = 122$ .

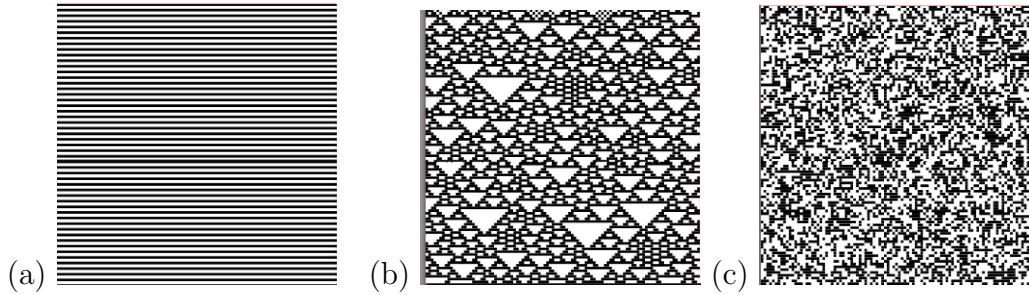


Figura 1.12: Tres clases de comportamientos, en (a) el comportamiento es completamente ordenado, en (b) la evolución da lugar a estructuras triangulares y en (c) el comportamiento es completamente desordenado.

Uno de los aspectos importantes de la evolución de los  $AC$  es la reversibilidad y la irreversibilidad, si la medida de entropía experimenta un incremento entonces el  $AC$  es localmente reversible y si experimenta un decrecimiento entonces el  $AC$  es irreversible. En un  $AC$  reversible cada estado tiene un único descendiente y un único ancestro o predecesor, mientras que en un  $AC$  irreversible, una configuración particular tiene un único descendiente pero puede tener varios ancestros; un ejemplo es la regla  $\phi = 0$  en la que todas las configuraciones iniciales evolucionan después de un paso temporal a la misma configuración nula. En un  $AC$  reversible el número

## 1.5 Propiedades globales de un autómata celular

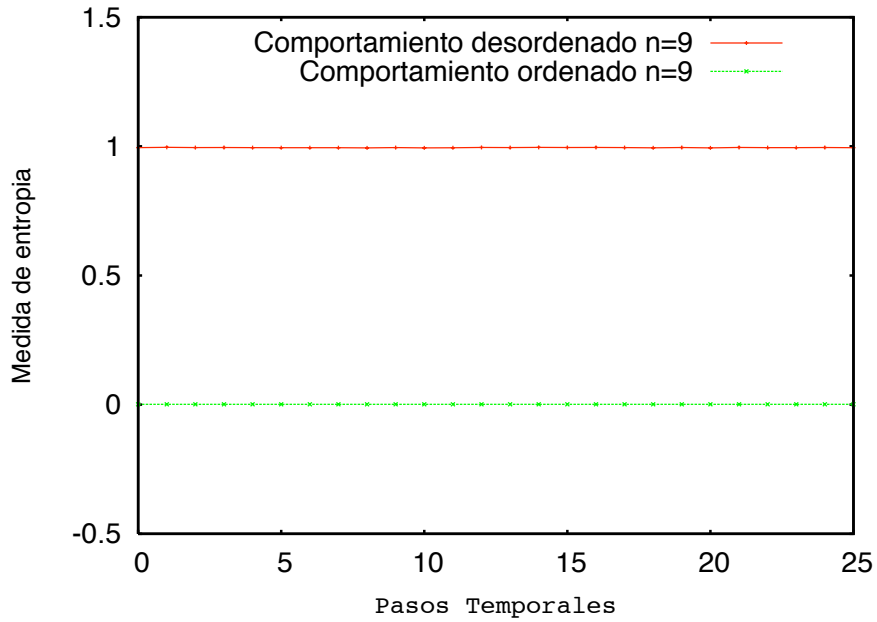


Figura 1.13: Entropía de los comportamientos extremos, orden y desorden, el valor máximo de entropía de  $1bit$  corresponde al desorden y el valor mínimo de  $0bit$  al orden. Se tomo una subcadena de longitud  $n = 9$ , para cualquier longitud  $n$  los valores de la entropía se mantienen.

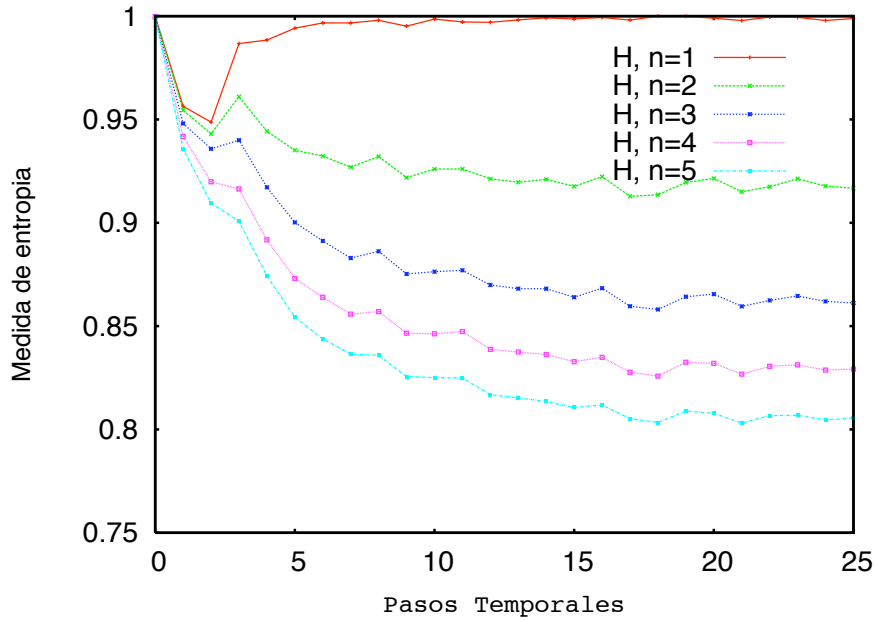


Figura 1.14: Se muestra la entropía métrica en función de los paso temporales  $t = 25$  y subcadenas de longitud hasta  $n = 5$  de la regla  $\phi = 122$ .

total de posibles configuraciones se mantiene constante durante la evolución y en un *AC* irreversible el número total de posibles configuraciones puede decrecer, lo que hace posible el fenómeno de auto-organización [2, 3]. Pueden existir tres tipos de configuraciones en la evolución de un *AC*:

1. Estados jardín de Eden: son aquellas configuraciones que nunca se generan durante la evolución del *AC* y solo pueden existir como condiciones iniciales.
2. Estados cíclicos: son configuraciones que son visitadas con frecuencia durante la evolución del *AC* y corresponden a los estados atractores.
3. Estados transientes: son aquellos que solo pueden surgir en los primeros  $t < 2^N$  pasos temporales y una vez que han muerto no vuelven a surgir en la evolución del *AC*, además los comportamientos de los estados transientes no son periódicos.

En la fig.1.14 se observa el decrecimiento de la medida entropía de la regla de evolución  $\phi = 122$ , lo que hace que esta regla sea irreversible, la condición inicial es equiprobable (aleatoria) y todas las posibles configuraciones de una subcadena de longitud  $n$  aparecen con igual probabilidad, teniendo su máximo valor de entropía de 1 *bit*, la evolución auto-organizada modifica las probabilidades iguales para todas las posibles configuraciones de las subcadenas de longitud  $n$  hasta alcanzar un valor de equilibrio después de un tiempo de transientes.

La medida de entropía satisface las siguiente relación:

$$(n_1 + n_2)H_n^{(M)}(n_1 + n_2) \leq n_1H_n^{(M)}(n_1) + n_2H_n^{(M)}(n_2), \quad (1.8)$$

lo que nos dice que la medida de entropía decrece con el tamaño de la longitud de las subsecuencias.

## 1.6. Entropía de conjunto de un autómata celular

La medida de entropía de un *AC* está basada en la probabilidad de que cada una de las  $k^n$  subcadenas se presenten en cada una de las configuraciones generadas por la evolución de un *AC* a cada paso temporal  $t$ . Ahora trataremos con la entropía de conjunto, también llamada entropía topológica, esta se difiere de la medida entropía en el hecho de que no está basada en el concepto de probabilidad, si no que considera el número total de subcadenas de longitud  $n$  generadas a cada paso temporal  $t$ , la entropía de conjunto matemáticamente se define como

$$H_n^C(t) = \frac{1}{L} \log N(n, t), \quad (1.9)$$

donde  $N(n, t)$  es el número total de subcadenas de longitud  $n$  generadas (proceso de aparición de subcadenas explicado anteriormente) a cada paso temporal  $t$ ,  $L$  es

## 1.6 Entropía de conjunto de un autómata celular

---

el tamaño de la condicioón inicial del  $AC$  o tamaño del  $AC$  y  $\log$  es el logaritmo de base 2, con unidades en *bits*.

La entropía de conjunto toma su valor máximo de 1 *bit* cuando todas las  $k^n$  configuraciones de subcadenas son generadas en el tiempo  $t$  y toma su valor mínimo cuando en el tiempo  $t$  solo se genera una subcadena de longitud  $n$  de las  $k^n$  posibles configuraciones. Wolfram [4] encontró que un  $AC$  describe un lenguaje regular que es representado mediante un grafo de transición de estados, a este grafo se le conoce como  $AC$  finito y su complejidad llamada complejidad algorítmica es determinada por el numero de estados o nodos del grafo. En general, la entropía de conjunto esta asociada con el grafo de transición de estados de un  $AC$  finito y representa la complejidad del grafo; para algunos caso de  $AC$  de tercera clase el grafo representa un lenguaje regular cuya complejidad muestra incrementos rápidos. Debido a la dificultad computacional Wolfram solo pudo calcular la complejidad de algunos grafos de transición de estado finitos de  $AC$  legales de tercera clase para cinco pasos temporales.

La medida entropía y la entropía de conjunto son derivadas de la teoría de la información, y en realidad información y entropía resultan tener el mismo significado, en los siguientes capítulos se revisará en lo mas breve los conceptos de la teoría de la información y esta permitirá hacer un análisis del comportamiento dinámico generado al interaccionar dos  $AC$  mediante distribuciones lineales de probabilidad.



## capitulo 2

# Teoría de la información y medidas de complejidad

En este capítulo se revisarán los aspectos fundamentales de la teoría de la información y también algunas medidas de complejidad como son la información mutua y las medidas propuestas por Lempel-Ziv [11] y Grassberger [7]. La teoría de la información fue formalizada por C. E. Shannon [10] (1948) conectando los conceptos de información y entropía de un mensaje compuesto de caracteres, posteriormente se relacionó con la mecánica estadística [14, 15] y sus aplicaciones en la actualidad abarcan distintas ramas de la investigación, en el caso de autómatas celulares a tenido un gran éxito debido a la capacidad de describir ciertas características del comportamiento dinámico. La teoría de la información está basada en el concepto de probabilidad y la definición de cantidad de información es equivalente al de entropía de un mensaje.

Uno de los aspectos importantes en la dinámica de diversos sistemas físicos, biológicos, químicos, etc. es el comportamiento complejo que manifiestan, en particular, es interesante observar que algunos sistemas son descritos mediante modelos muy simples y sin embargo son capaces de manifestar estructuras muy complejas en su comportamiento dinámico, el ejemplo típico es el mapeo logístico  $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$ ,  $x_n \in [0, 1]$ . Los *AC* como ya hemos visto, son otro ejemplo de la manifestación de estructuras complejas a partir de una construcción muy simple. Las medidas de complejidad que trataremos están relacionadas con el concepto de información y cada una de ellas pertenece a una de las dos clases de complejidades conocidas como *complejidad estática* y *complejidad dinámica* [26].

### 2.1. Teoría de la información

La información de un sistema esta representada en unidades binarias de *bits*, y es entendida como la cantidad de información que se puede almacenar en un símbolo binario. La cantidad de información es definida en términos de probabilidades. La



información está relacionada con lo inesperado de un evento y con la probabilidad con la que este ocurra. Matemáticamente la información para un evento con una probabilidad *a priori* es

$$I(p) = -\log(p). \quad (2.1)$$

Si el evento pertenece a una serie de  $N$  eventos con igual probabilidad  $p = \frac{1}{N}$ , la información entonces será  $I(N) = \log(N)$ , donde  $\log$  es el logaritmo de base 2 y las unidades son *bits*.

La ec.(2.1) es una definición matemática de la información, que se asemeja a lo que la intuición dice sobre la información, es decir, si se espera que ocurra un evento que ya se conoce,  $p = 1$ , la información es cero y si se espera que ocurra un evento que no se conoce,  $p \ll 1$ , la información es máxima, este fue el enfoque que proporcionó Shannon [10] hacia el concepto de información.

El concepto de información está relacionado a la expectación de un evento, cuando se tiene una serie de eventos  $i = 1, \dots, n$  y todos ellos son descritos mediante una distribución de probabilidad  $P = \{p\}_{i=1}^n$ , la cantidad promedio de información que se espera recibir al hacer una medición es dada por el valor de expectación, o bien, la cantidad promedio de información dada por

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i I(p_i) = - \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i). \quad (2.2)$$

La ec.(2.2) es mejor conocida como la entropía de Shannon y se define  $0 \cdot \log(0) = 0$ . La entropía de Shannon tiene las siguientes propiedades:

1.  $H$  es una función continua de  $p_i$ .
2. Cuando  $P = (n^{-1}, n^{-1}, \dots, n^{-1})$ , entonces  $H$  es una función que incrementa monótonamente con el entero  $n$ .
3.  $H$  es aditiva bajo la descomposición del espacio de muestras.

Shannon da una serie de ejemplos de aplicaciones de esta cantidad de información a mensajes telegráficos, textos literarios y otros relacionados con fuentes de información continuas, en este trabajo no se dedicará atención a esa clase de ejemplos, solo se dirá que la fuente de información es discreta.

## 2.2. Teoría de la información y mecánica estadística

Ahora se verá cual es la relación entre la teoría de la información y la mecánica estadística [15]. En mecánica estadística un sistema compuesto de muchas partículas estará descrito por su macroestado que es una distribución de probabilidad  $P$  de

---

## 2.2 Teoría de la información y mecánica estadística

---

los microestados, esto define los observables del sistema tal como energía, número de partículas, temperatura, presión, etc.. Se puede calcular la entropía conociendo la energía total del sistema, el número de partículas y el volumen del sistema  $H(N, V, E)$ , y ésta llevará a conocer la temperatura y la presión del sistema

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = T, \quad (2.3)$$

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = P, \quad (2.4)$$

sin embargo la información que se tiene acerca del sistema es muy limitada. El principio de máxima entropía dice que el sistema se encontrará en aquel estado cuya distribución de probabilidad maximiza la entropía y satisface las constricciones físicas del sistema, esto se explica de la siguiente forma: el sistema se encontrará sujeto a constricciones macroscópicas que la distribución de probabilidad  $P$  debe de satisfacer y son expresadas como

$$\langle f_k \rangle = \sum_{i=1}^n p_i f_k(i) = F_k \quad (k = 1, \dots, r), \quad (2.5)$$

lo que significa que se tienen  $r$  funciones  $f_k(i)$ ,  $k = 1, \dots, r$  de los microestados  $i$  cuyos valores de expectación son cantidades macroscópicas del sistema como por ejemplo la energía, número de partículas, temperatura, presión, etc., para hallar la distribución de probabilidad  $P = \{p_i\}_{i=1}^n$  que maximiza la entropía

$$H[P] = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (2.6)$$

se debe utilizar el formalismo de Lagrange, entonces de la función

$$\begin{aligned} L(p_1, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu) = & H(P) + \sum_{k=1}^r \lambda_k \left( F_k - \sum_{i=1}^n p_i f_k(i) \right) \\ & + (\mu - 1) \left( 1 - \sum_{i=1}^n p_i \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde se introduce los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_k$  para las  $r$  condiciones y  $\mu - 1$  para la condición de normalización

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (2.8)$$

se reduce el problema a encontrar  $P$ ,  $\lambda_k$  y  $\mu$  que maximizan la función  $L$ . Si derivamos la ec.(2.7) con respecto a  $p_i$  resulta

$$-\frac{\partial L}{\partial p_i} = \ln p_j + 1 + \sum_{k=1}^r \lambda_k f_k(j) + \mu - 1. \quad (2.9)$$

con el requerimiento de que  $\partial L / \partial p_j = 0$  se obtiene la distribución de probabilidad

$$p_j = \exp\left(-\mu - \sum_{k=1}^r \lambda_k f_k(j)\right) = \exp(-\mu - \lambda \cdot \mathbf{f}(j)), \quad (2.10)$$

conocida como *distribución de Gibbs* y satisface  $p_j \geq 0$ . Se puede determinar  $\mu$  en función de  $\lambda$  a partir de la condición de normalización resultando

$$\mu(\lambda) = \ln Z(\lambda), \quad (2.11)$$

donde

$$Z(\lambda) = \sum_{j=1}^n \exp(-\lambda \cdot \mathbf{f}(j)). \quad (2.12)$$

Finalmente las variables de Lagrange son determinadas mediante

$$\frac{\partial \mu(\lambda)}{\partial \lambda} = -\mathbf{F}, \quad (2.13)$$

entonces la máxima entropía en términos de las variables de Lagrange es

$$H[P] = \mu + \lambda \cdot \mathbf{F}, \quad (2.14)$$

así la escasa información que se tiene acerca del sistema permite encontrar una gran variedad de posibilidades para el sistema [14], sin embargo si se tuviera la manera de tener información adicional del sistema, el número de posibilidades se reduciría y de esta forma la entropía dejaría de ser máxima. Brillouin [14] encontró que la mecánica estadística generalizada de Fermi-Dirac conduce directamente a la teoría de la información y que la información contenida en un mensaje puede ser conectada directamente con el decrecimiento de la entropía en el sistema, esto significa que la información contenida en un mensaje juega el papel de la negentropía

$$H_{\text{mensaje}} = H_{\text{física}} - I, \quad (2.15)$$

donde  $H_{\text{mensaje}}$  es la entropía del mensaje correspondiente a una distribución de probabilidad específica,  $H_{\text{física}}$  es la entropía física correspondiente a una distribución de probabilidad de Fermi-Dirac y  $I$  es la información contenida en el mensaje o negentropía. Otra importante relación de la teoría de la información con la mecánica estadística, se encuentra en la información relativa que se verá a continuación.

## 2.3. Información Relativa

El concepto de entropía de Shannon es sinónimo de *incertidumbre*, en teoría de información existe otra cantidad importante relacionada con el concepto de información, que es conocida como la información relativa ó información de Kullback [24], esta representa la *ganancia de información* cuando la distribución de probabilidad  $P^0$  es cambiada a  $P$  y es definida como

$$K[p^0; p] = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{p_i^0}. \quad (2.16)$$

La información relativa tiene las siguientes propiedades:

1.  $K$  es una función continua de  $p_i$  y  $p^0$ .
2.  $K$  no depende en la forma que sean etiquetados una serie de resultados  $(1, 2, \dots, n)$  de un experimento aleatorio.
3.  $K = 0$  cuando  $P = P^0$ .
4. Cuando  $P^0 = (n_0^{-1}, n_0^{-1}, \dots, n_0^{-1})$  y  $P = (n^{-1}, n^{-1}, \dots, n^{-1}) (n \leq n_0)$  entonces  $K$  es una función que incrementa monótonamente con el entero  $n_0$  y una función que decrece con el entero  $n$ .
5.  $K$  es aditiva bajo la descomposición del espacio de muestras.

Las propiedades 1, 4 y 5 son análogas a las propiedades de la entropía de Shannon, las propiedades 2 y 3 son las que determinan si una expresión puede ser interpretada como ganancia de información o no. Las propiedades de la información de Kullback llevan a una teoría de la información más general de la que proporciona el enfoque de Shannon [16], eso se debe a que la información de Shannon considera una distribución de probabilidad a priori constante, mientras que la información de Kullback permite cambios en la distribución de probabilidad a priori. Otro aspecto importante se debe al hecho de que para el caso de espacios continuos se deben hacer modificaciones a la información de Shannon ya que exhibe divergencias en este tipo de espacios. Cuando se tiene una serie de datos aditivos, la información de Shannon no manifiesta la propiedad aditiva, mientras que la información de Kullback si será aditiva. La información de Kullback y la información de Shannon son equivalentes cuando la distribución a priori  $P^0$  es constante y la distribución de máxima información consistente con las constricciones físicas es  $P^m = \delta_{ij}$ . La información relativa conduce a una teoría de máxima entropía más general [16].

La información relativa esta relacionada con el concepto termodinámico de *exergía*, esto quiere decir que si consideramos un sistema lo suficientemente grande y en equilibrio, donde cada uno de los elementos de volumen son descrito por una distribución de probabilidad a priori  $p_i^0$ , tal que satisfacen las constricciones físicas

y de esta forma maximizan la entropía, al desviarse del equilibrio uno de los subsistemas, este deberá ser descrito en ese momento por una nueva distribución de probabilidad  $p_i$  que deberá satisfacer las nuevas constricciones físicas, la información asociada al reemplazar  $p_i^0$  por  $p_i$  es la información relativa  $K[p^0; p]$ , entonces el trabajo extraído cuando el subsistema alcanza el equilibrio con todo el sistema es proporcional a la cantidad de información de haber reemplazado  $p_i^0$  por  $p_i$ , esto es la *exergía* del subsistema [25]

$$E = k_B T_0 \ln 2 K[p^0; p], \quad (2.17)$$

donde  $T_0$  es la temperatura de todo el sistema y  $k_B$  es la constante de Boltzmann.

## 2.4. Entropía de Shannon

Una vez explicado de manera breve la relación de la teoría de la información con la mecánica estadística, se revisarán algunas características de la definición de información de Shannon y vamos a definir otras cantidades de información. Como se había mencionado la información de un sistema esta medida en *bit* y es definida en términos de la distribución de probabilidad de que ocurran ciertos eventos denotada como  $P = \{p_i\}_{i=1}^n$ , las probabilidades deben cumplir con las siguientes propiedades:

1.  $p_i \geq 0$ .
2.  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

y la entropía o expectación es dada como la cantidad promedio de información de los eventos

$$H[P] = \langle -\log p_i \rangle = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (2.18)$$

donde  $0 \cdot \log 0 = 0$  y  $\log$  es el logaritmo de base 2, ya que se toman unidades de *bits*. La entropía esta acotada en el intervalo  $[0, \log n]$ ; considérese un sistema que solo puede tomar dos posibles estados  $n = 2$  y que la distribución de probabilidad para ellos es  $p$  y  $1 - p$ , entonces la entropía estará dada por

$$H[p] = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p). \quad (2.19)$$

La fig.2.1 muestra el comportamiento para esta distribución de probabilidades.

Considérese un sistema compuesto por  $N$  partes independientes, entonces cada una de las  $N$  partes tendrá una distribución de probabilidad  $P_1 = \{p_{1j}\}_{j=1}^n$ ,  $P_2 = \{p_{2j}\}_{j=1}^m, \dots, P_N = \{p_{Nk}\}_{k=1}^l$  y el sistema compuesto en su totalidad tendrá una distribución de probabilidad dada por el producto de las distribuciones de cada una de sus partes

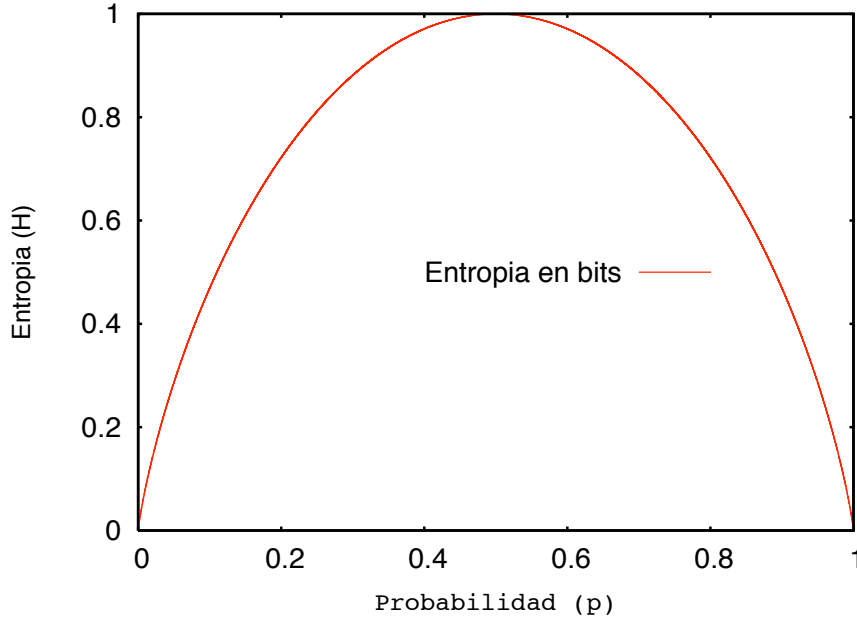


Figura 2.1: Entropía correspondiente a dos estados  $n = 2$ , para  $p = 0$  y  $p = 1$  habrá mínima entropía  $H = 0 \text{ bits}$ , y para  $p = 1/2$  la entropía será máxima  $H = 1 \text{ bits}$ .

$$P = \{p_{1_i} p_{2_j} \cdots p_{N_k}\}_{i=1, j=1, \dots, k=1}^{n, m, \dots, l} \quad (2.20)$$

Entonces la entropía será la suma de cada una de las partes independientes del sistema

$$\begin{aligned} H[P] &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \cdots \sum_{k=1}^l p_{1_i} p_{2_j} \cdots p_{N_k} \log(p_{1_i} p_{2_j} \cdots p_{N_k}) \\ &= - \sum_{i=1}^n p_{1_i} \log p_{1_i} - \sum_{j=1}^m p_{2_j} \log p_{2_j} - \cdots - \sum_{k=1}^l p_{N_k} \log p_{N_k} \\ &= H[P_1] + H[P_2] + \cdots + H[P_N], \end{aligned} \quad (2.21)$$

de esta forma la entropía es aditiva.

## 2.5. Entropía de bloques

En esta sección se definirá la *entropía de bloques*, esta permitirá desarrollar un análisis del comportamiento dinámico de autómatas celulares, también explicaremos

la relación que hay entre *información mutua*, *información relativa* ó de *Kullback* y la *entropía de bloques*, para formar el concepto de *complejidad efectiva*, esto después de haber revisado las definiciones de complejidad.

Considérese una cadena de símbolos que son generados mediante un proceso estocástico estacionario que implica la invariancia de traslación en la cadena, las cadenas son infinitas por un lado  $x_1, x_2, \dots$  donde  $x_i \in S = \{0, 1, \dots, k-1\}$  (en el caso de autómatas celulares elementales  $k = 2$ ), dado que son generadas mediante un procesos estocástico estacionario con variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots$ , las probabilidades no dependen del tiempo ni de la posición, entonces

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_{1+m}, x_{2+m}, \dots, x_{n+m}), \quad \forall n, m \in \{0, 1, \dots, d-1\}, \quad (2.22)$$

de esta forma, se ha caracterizado el sistema mediante una distribución de probabilidad  $P_n$  de cadenas de longitud finita  $n$ ,

$$P_n = \{p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.23)$$

$P_n$  satisfacen las propiedades 1 y 2 de 2.4. Otra propiedad que cumplen las probabilidades, esta basada en que la distribución de probabilidad de una cadena de longitud  $n-1$  contiene la distribución de la cadena de longitud  $n$

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{x_{n+1} \in S} p_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \quad y \quad (2.24)$$

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{x_0 \in S} p_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (2.25)$$

Para subcadenas o bloques de longitud  $n$  y todas sus posibles  $k^n$  configuraciones, cada una de las configuraciones tendrá una probabilidad  $p$ , entonces se define la *entropía de conjunto* como

$$H_n^{(C)} = \frac{1}{n} \log N^{(n)}(n), \quad (2.26)$$

donde  $N^{(n)}(n)$  es el número total de configuraciones que pueden ser obtenidas, por ejemplo, en el caso de un *AC* a cada paso temporal  $t$ . La entropía de conjunto tiene una definición similar a la dimensión fractal  $D_F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln[N(\epsilon)] / \ln(\frac{1}{\epsilon})$  que dice cuanta información se necesita para especificar la localización de un atractor de un sistema dinámico dentro de una exactitud  $\epsilon$ , siendo  $\epsilon$  los lados de unas cajas de partición  $d$ -dimensionales.

Como se había mencionado, la entropía de conjunto es también llamada entropía topológica y no depende de las probabilidades de las posibles configuraciones, lo que permite caracterizar el conjunto de configuraciones en el atractor de un *AC* mediante un grafo de transición de estados.

Tomando en cuenta las probabilidades de las diferentes configuraciones, se define la *medida de entropía* como

$$H_n^{(M)} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k^n} p_i \log p_i, \quad (2.27)$$

como se había mencionado, la medida de entropía es también llamada entropía métrica, para bloques de longitud  $n = 1$  la medida de entropía esta relacionada a las densidades de estados  $\rho_k$ .

Pensando nuevamente en el caso de sistemas dinámicos, la medida de entropía tiene una definición similar a la dimensión de información  $D_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon)/\ln(\frac{1}{\epsilon})$  que generaliza la dimensión fractal  $D_F$  de un atractor, tomando en cuenta la frecuencia relativa con la que son visitadas cada una de las cajas  $\epsilon$  por cada uno de los puntos del atractor.

Se define la entropía de bloques desde el punto de vista de Grassberger [6, 7, 8] como la diferencia de *medidas de entropía* de longitud  $n + 1$  y  $n$ , entonces

$$h_n = H_{n+1} - H_n = \Delta H_n, \quad (2.28)$$

esto quiere decir que  $H_n$  y  $H_{n+1}$  es la entropía de Shannon almacenada por los bloques de longitud  $n$  y  $n + 1$ , definidas por la ec.(2.27), donde se define  $H_0 = 0$  para  $n = 0$  y la diferencia de entropías proporciona la información adicional necesaria para predecir el símbolo  $x_{n+1}$  una vez dado el bloque  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , esto en términos de la probabilidad quedará expresado mediante una distribución de probabilidad condicional  $p(x_{n+1}|x_1, x_2, \dots, x_n)$  como

$$h_n = - \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) \log p(x_{n+1}|x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.29)$$

sin embargo la expresión(2.28) facilita mucho los cálculos numéricos, debido a que encontrar un estimador para la distribución de probabilidad condicional es muy complicado [9], en la literatura existen diversas formas de estimar la distribución de probabilidad, sin embargo ninguna de estas brinda una buena confiabilidad.

Las cantidades que se acaban de definir pueden ser interpretadas de la misma forma tanto en el espacio como en el tiempo.

La entropía de Shannon  $h$  por símbolo es obtenida tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta H_n \quad (2.30)$$

Tanto la medida de entropía como la entropía de bloques permiten determinar algunas propiedades globales de los *AC*, como es el caso de irreversibilidad y reversibilidad de un *AC* (ver capítulo anterior). Para el caso de un *AC* reversible la entropía de Shannon experimenta un incremento, mientras que para el caso de un *AC* irreversible la entropía de Shannon decrece hasta alcanzar un valor de equilibrio. Un aspecto importante es el hecho de poder determinar las correlaciones de largo alcance que se manifiestan entre los sitios del *AC*. La existencia de estas correlaciones

---



están íntimamente ligadas al concepto de información de correlación y complejidad. A continuación se definirán estos conceptos.

## 2.6. Medidas de complejidad

En el capítulo anterior se ha mencionado que un  $AC$  puede comportarse de manera simple o compleja, en este capítulo se aclara que es lo que realmente se quiere decir con simple y complejo. Para entender estos dos conceptos se harán las siguientes preguntas: ¿Que es un sistema complejo? y ¿Que es un comportamiento complejo?, los autómatas celulares son modelos que capturan la esencia de lo que es un sistema complejo y, un comportamiento complejo, abarca un gran espectro que va desde lo trivial como es la regla de evolución nula  $\phi = 0$  hasta el cómputo universal, como es por ejemplo el juego de la vida de John Conway.

## 2.7. ¿Que es un sistema complejo?

Aunque no existe una definición formal de lo que es un sistema complejo, en la naturaleza estamos rodeados de muchos ejemplos de lo que es un sistema complejo, desde la turbulencia en un fluido hasta los patrones del clima global, desde las estructuras de las galaxias hasta los organismos vivos, todos estos ejemplos tienen algo en común, y es que todos ellos están constituidos por una gran cantidad de componentes interconectadas e interactuando mutuamente, lo cual quiere decir que un sistema complejo no solamente se debe entender en términos de el número de sus componentes, si no también desde la topología de las interconexiones y las interacciones entre cada una de las componentes. De esta manera si se quiere definir una medida de complejidad, esta medida deberá respetar tanto la estructura como la dinámica de un sistema complejo.

Una de las preguntas fundamentales en el estudio de los sistemas complejos es si todos ellos obedecen un conjunto de principios universales; la respuesta aún no se sabe, pero las evidencias sugieren que el comportamiento cualitativo de los sistemas que emergen sobre las macro escalas a menudo es similar al de los sistemas que comparten la misma organización básica estructural, el mismo conjunto básico de interacciones entre las componentes del cual están contruidos, los mismos patrones básicos de información, etc., la meta de la ciencia de la complejidad es hallar los principios universales que determinan o forman a los sistemas complejos.

## 2.8. ¿Que es un comportamiento complejo?

El comportamiento complejo cuantifica la noción de complejidad, describe la relación entre información y complejidad, y comprende el papel que juega la complejidad en los contextos físicos y computacionales. Es fácil distinguir entre un objeto

complejo y uno no tan complejo, pero no es trivial proponer algo que vaya más allá de una caracterización vaga de como se hace. Hasta la fecha existen diversas propuestas para cuantificar la noción de complejidad [3, 6, 7, 8, 11, 18, 20].

Considérese nuevamente la fig.1.12 (capítulo 1) en el que se tienen tres tipos de comportamientos (a) ordenado, (b) estructurado y (c) desordenado. Estos patrones ilustran la incongruencia que existe entre la noción matemática de entropía o cantidad de desorden en un sistema y la noción intuitiva de complejidad. Mientras que el patrón (b) es intuitivamente el patrón más complejo de los tres patrones, este tendrá ya sea la entropía más alta o la más baja. El problema es hallar una medida de complejidad de un sistema que este de acuerdo con la intuición.

Todos tenemos una intuición de complejidad, el problema es expresar esta intuición de manera formal, para definir una medida que además de capturar nuestro sentido intuitivo de lo que es complejo y simple, también deba proporcionar una base objetiva para formular conjeturas y teorías sobre la complejidad. Todas las propuestas que existen de complejidad caen en dos clases generales [26]:

1. Complejidad estática: Se refiere a como un objeto o sistema esta compuesto y es independiente de los procesos por el cual la información es codificada y decodificada.
2. Complejidad dinámica: Se refiere a cuantos esfuerzos dinámicos o computacionales se requieren para describir el contenido de información de un objeto o estado de un sistema.

La complejidad estática influye en la complejidad dinámica pero no son equivalentes ya que un sistema puede ser estructuralmente más simple pero tener un comportamiento dinámico complejo, como es el caso del mapeo logístico de Feigenbaum.

Las medidas de complejidad que se consideran en este trabajo, son tanto estáticas como dinámicas y cada una de ellas tienen virtudes y deficiencias. En particular existe un interés en la definición hecha por Lempel-Ziv y Grassberger. La última es definida en términos de la información de correlación, que como un caso particular en la longitud de los bloques de secuencias, es igual a la información mutua entre dos procesos estocásticos.

## 2.9. Información de correlación

Considérese dos procesos estocásticos  $X_1$  y  $X_2$  independientes, donde los posibles resultados de estas variables son elementos de  $S$ , si se supone que son independientes y con probabilidades  $p(x)$ , la entropía es la suma de la entropía de los procesos

$$H[X_1, X_2] = H[X_1] + H[X_2]. \quad (2.31)$$

Si los procesos no fueran independientes, y se considerará que hay correlaciones entre ellos, entonces se define la entropía conjunta como

$$H(X_1, X_2) = - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p(x_1, x_2) \log p(x_1, x_2) \quad (2.32)$$

donde  $H[X_1, X_2] \leq H[X_1] + H[X_2]$ , entonces la *información mutua*  $I[X_1; X_2]$  se define como

$$\begin{aligned} I[X_1; X_2] &= H[X_1] + H[X_2] - H[X_1, X_2] = \sum_{x_1, x_2} p(x_1, x_2) \log \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_1)p(x_2)} \\ &= K[P(X_1)P(X_2); P(X_1, X_2)] \geq 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde se hizo uso de las ec.(2.24) y ec.(2.25) para expresar la información mutua en términos de la información relativa ó de Kullback [25], entonces la información mutua es la ganancia de información que se obtiene al cambiar las probabilidades independientes  $P(X_1)$  y  $P(X_2)$  por una descripción de probabilidades conjuntas  $P(X_1, X_2)$ .

Otra forma de escribir la información mutua, es mediante la probabilidad condicionada, definida como la probabilidad  $p(x_2|x_1)$  de que se de  $x_2$  si se ha dado  $x_1$ , entonces mediante la relación

$$p(x_2|x_1) = \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_1)}, \quad (2.34)$$

la información mutua es

$$I[X_1; X_2] = \sum_{x_1 x_2} p(x_1) p(x_2|x_1) \log \frac{p(x_2|x_1)}{p(x_2)} = \sum_{x_1} p(x_1) K[P(X_2); P(X_2|x_1)], \quad (2.35)$$

donde en este caso la información de Kullback representa la ganancia de información al remplazar la distribución de probabilidad  $P(X_2)$  por la distribución de probabilidad condicional  $P(X_2|x_1)$ , lo que proporciona las correlaciones que existen entre  $X_2$  y algún resultado  $x_1$  del proceso estocástico  $X_1$ .

Se puede ser más general y encontrar una expresión para la información mutua en términos de la entropía de bloques, lo que permitirá calcular información mutua ó bien información de correlación entre bloques de distintas longitudes [25]. Se introduce la probabilidad condicional de un simbolo  $x_{n+1}$  una vez ha sido observada la precedente secuencia  $x_1 \dots x_n$

$$p(x_{n+1}|x_1 \dots x_n) = \frac{p(x_1 \dots x_{n+1})}{p(x_1 \dots x_n)}, \quad (2.36)$$

---

## 2.9 Información de correlación

y la información de Kullback nos proporcionará la generalización que se busca de la siguiente forma: supóngase una distribución de probabilidad condicional *a priori*  $P^{(0)}(x_{n+1}|x_2\dots x_n)$  para un símbolo  $x_{n+1}$  dado  $x_2\dots x_n$ , entonces es de interés la información que se obtiene al cambiar la descripción de probabilidad del símbolo  $x_{n+1}$  a  $P(x_{n+1}|x_1x_2\dots x_n)$ . La probabilidad *a priori*  $P^{(0)}$  no puede incluir correlaciones de longitud  $x_{n+1}$ , pero con la nueva distribución  $P$  las correlaciones podrán manifestarse, entonces la información de Kullback entre las distribuciones  $P^{(0)}$  y  $P$  medirán estas correlaciones con

$$K[P^{(0)}; P] = \sum_{x_{n+1}} p(x_{n+1}|x_1x_2\dots x_n) \log \frac{p(x_{n+1}|x_1x_2\dots x_{n+1})}{p(x_{n+1}|x_2\dots x_n)}. \quad (2.37)$$

Promediando sobre todas las posibles secuencias  $x_1x_2\dots x_n$  se obtiene la información de correlación  $K_n$  de longitud  $n$ ,

$$K_n = \sum_{x_1\dots x_n} p(x_1\dots x_n) K[P^{(0)}; P] = \sum_{x_1\dots x_{n+1}} \log \frac{p(x_1\dots x_{n+1})}{p^-(x_1\dots x_{n+1})}, \quad (2.38)$$

o bien,

$$K_n = K[P_n^-; P_n], \quad (2.39)$$

donde

$$p^-(x_1\dots x_{n+1}) = \frac{p(x_1\dots x_n)p(x_2\dots x_{n+1})}{p(x_2\dots x_n)}, \quad n > 2, \quad (2.40)$$

$$p^-(x_1x_2) = p(x_1)p(x_2), \quad n = 2. \quad (2.41)$$

La distribución de probabilidad  $P_n$  no incluye correlaciones de longitud  $n + 1$ , mientras que la distribución  $P^-$  si incluye esas correlaciones. Para el caso en que  $n = 2$  la información de correlación de longitud  $n$  es igual a la información mutua ec.(2.33). Se puede escribir la información de correlación  $K_n$ , mediante una descomposición de logaritmos, en términos de la entropía de bloques [25],

$$K_n = \Delta H_{n+1} - \Delta H_n, \quad (2.42)$$

con  $H_0 = 0$  y  $K_n \geq 0$ . Se define la *densidad de información*  $K_1$  como

$$K_1 = K[P_1^0; P_1] = \sum_{x_1} p(x_1) \log \frac{p(x_1)}{\frac{1}{k}} = \log k - H_1, \quad (2.43)$$

también se puede decir que es la información de Kullback que se obtiene entre una distribución *a priori*  $P_1^0$  y una distribución  $P_1$ , para el AC simple  $k = 2$ . La información de correlación  $K_{corr}$  será la suma de todas las contribuciones de las cantidades de información  $K_n (n = 2, 3, 4, \dots)$ ,

$$K_{corr} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n = k - \lim_{n \rightarrow \infty} (h_{n-1} - h_n) = \log k - h. \quad (2.44)$$

A partir de cada una de las contribuciones de los bloques de información de correlación, Grassberger define la *medida de complejidad efectiva* que se revisará a continuación.

## 2.10. Medida de complejidad efectiva

Grassberger [7, 8] definió la medida de complejidad efectiva como un intento de definir una medida de complejidad de carácter física, lo que la hace una medida observable. La medida de complejidad efectiva (MCE) se define como la mínima información que debe ser almacenada para predicciones óptimas y su expresión es

$$MCE = \sum_{n=1}^{\infty} nK_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(h_{n-1} - h_n), \quad (2.45)$$

que también puede ser escrita como

$$MCE = \sum_{n=0}^{\infty} (h_n - h), \quad h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n. \quad (2.46)$$

Si las secuencias de símbolos contienen correlaciones espaciales de corto alcance, entonces  $h_n$  converge hacia la entropía de Shannon exponencialmente más rápido provocando que  $MCE$  sea finita. Si las secuencias contienen correlaciones de largo alcance la  $MCE$  diverge, esto sucede cuando la entropía de bloques  $h_n$  converge a  $h$  lentamente según  $\frac{1}{n}$ , la fig.(2.2) muestra el comportamiento de entropía temporal y espacial de bloques del  $AC \phi = 22$ , podemos observar que tanto en el tiempo como en el espacio la entropía decae lentamente, lo que significa que el  $AC \phi = 22$  mantiene correlaciones de largo alcance muy fuertes.

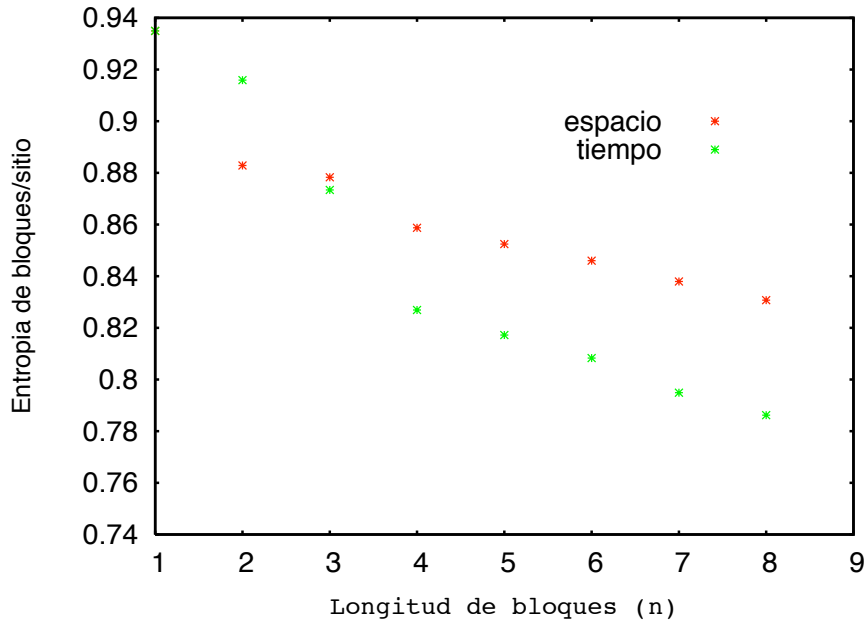


Figura 2.2: Entropía de bloques como una función de la longitud  $n$  del AC  $\phi = 22$ , los triángulos representan la entropía espacial de bloques y los puntos entropía temporal de bloques.

## 2.11. Complejidad de Lempel-Ziv

Lempel y Ziv [11] definieron una medida de complejidad algorítmica  $C(n)$  (complejidad dinámica), posteriormente Kaspar y Schuster [21] la introdujeron para caracterizar patrones espacio-temporales, en el caso particular de AC simples, la formación de patrones se refleja en un decrecimiento de  $C(n)$  con el tiempo de evolución. Considérese una secuencia compuesta por ceros y unos, es de interés conocer el mínimo esfuerzo computacional para generar esta secuencia, un algoritmo general que determine el mínimo esfuerzo no existe, sin embargo Lempel y Ziv eligieron de todos los posibles programas uno que solo permite dos operaciones: *copiar* e *insertar*. En lugar de calcular la longitud del programa que genera la cadena, ellos calcularon el número  $C(n)$  el cual es una medida de la longitud.

Para entender como funciona la complejidad de Lempel-Ziv se darán unos ejemplos simples, la prueba matemática y una explicación extensa del algoritmo se encuentran en el artículo original de Lempel y Ziv. El caso más simple es cuando tenemos una secuencia formada de puros ceros, la complejidad es mínima, ya que solamente se debe copiar e insertar el primer cero y de esa forma generamos toda la secuencia, así la complejidad de la secuencia es  $C = 2$ . Otro ejemplo es cuando tenemos una cadena formada por ceros y unos dispuestos de manera alternada  $010101\dots$ , en este caso para generar la secuencia debemos insertar el dígito uno, después copiar

e insertar la unidad 01, de esta forma la complejidad de la cadena es  $C = 3$ . Como ejemplo final, considérese la secuencia 0010, el primer dígito siempre se inserta 0, entonces al copiar e insertar el segundo dígito 0 · 0, se verifica si 01 pertenece a la secuencia 00, dado que no pertenece generamos la cadena 0 · 01, ahora se verifica si el ultimo elemento de la secuencia 0 pertenece a la secuencia 001, dado que si pertenece se inserta ese dígito, finalmente el numero de pasos en la producción de la cadena están referenciados por los puntos en la secuencia 0 · 01 · 0, así la complejidad de esta secuencia es  $C = 3$ .

Lempel y Ziv mostraron que para la mayoría de los números irracionales  $x \in [0, 1]$  en sus representaciones se secuencias binarias, la complejidad  $C(n)$  tiende al valor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = b(n) \equiv n / \log_2 n, \quad (2.47)$$

donde  $b(n)$  proporciona el comportamiento asintótico de  $C(n)$  para una secuencia aleatoria,  $b(n)$  permite normalizar la complejidad  $C(n)$  tomando valores en un radio finito  $0 \leq C(n)/b(n) \leq 1$ , en el capítulo 5 se considerará esta normalización. Existe una relación entre la complejidad de Lempel-Ziv y la entropía de Shannon, dada por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = hb(n) \quad (2.48)$$

donde  $h$  es la entropía de Shannon de dos eventos ec.(2.19).

El marco teórico propuesto en este capítulo será de gran utilidad al comprender el comportamiento de  $AC$ , en particular el comportamiento que se genera cuando dos reglas de evolución de  $AC$  interaccionan mediante probabilidades de evolución, a este tipo de interacción la llamaremos interacción dinámica de  $AC$  elemental y en el siguiente capítulo se explicará su construcción.

## capitulo 3

# Interacción dinámica de $AC$ elementales

El interés de este trabajo se enfoca en determinar como es el comportamiento dinámico cuando dos reglas de evolución de  $AC$  elemental, interactúan mediante una distribución de probabilidad lineal. El modelo de interacción de dinámicas ha tenido aplicaciones en el estudio de problemas biológicos, como es el caso de la morfogénesis [1], de esta forma, primero vamos a describir la idea que encierra este modelo, posteriormente se hará con rigurosidad y se dará una descripción matemática mediante un modelo de  $AC$  probabilístico.

### 3.1. Interacción dinámica de $AC$ como modelo formación de patrones biológicos

El modelo de interacción dinámica de  $AC$  como modelo de formación de patrones biológicos está basado en la hipótesis de la información posicional y crecimiento clonal. Supóngase que en un espacio va a ocurrir el crecimiento de un tejido celular, en un extremo de ese espacio se coloca una cadena lineal de células, en el mismo espacio existe alguna sustancia química que actuará como un morfógeno, la concentración del morfógeno es mayor en la región donde se colocó la cadena lineal de células, y la concentración disminuye en la dirección en la que ocurre la división celular. A medida que el frente celular formado por las células más jóvenes avanza, encuentra una disminución gradual de la concentración del morfógeno. Si las células son capaces de percibir la concentración por medio de mecanismos de umbral, las células podrían diferenciarse en distintos tipos celulares, dependiendo de la concentración. Así, las células se diferenciarían de acuerdo a su posición relativa en el gradiente de concentración. Esta hipótesis se conoce como hipótesis de información posicional [17].

Miramontes [1] propone un modelo de formación de patrones biológicos compuesto por  $AC$  simples, en base a la hipótesis de información posicional y crecimiento



clonal, en el cual, el espacio donde evoluciona el AC se distribuyen dos morfógenos  $m_1$  y  $m_2$ , la concentración de  $m_1$  es máxima al inicio de la evolución y mínima al final, la concentración de  $m_2$  es mínima al inicio y máxima al final. La concentración  $m_1$  se interpreta como la probabilidad  $p_1$  de que el AC evolucione con la regla  $\phi_1$  y la concentración  $m_2$  como la probabilidad  $p_2$  de que el AC evolucione con la regla  $\phi_2$ ; entonces  $p_1$  decrece linealmente al mismo tiempo que  $p_2$  crece de tal manera que  $p_1 + p_2 = 1$ . La fig.(3.1) muestra el comportamiento de las probabilidades  $p_1$  y  $p_2$  en función de los pasos temporales  $t$  del modelo de interacción dinámica, al disminuir la probabilidad  $p_1$  de evolución de la regla  $\phi_1$ , la probabilidad  $p_2$  de evolución de la regla  $\phi_2$  incrementa. Para la definición del estado en cada sitio, se genera un número aleatorio entre el intervalo  $[0, 1]$ : si resulta mayor o igual a  $p_1$  entonces el AC evoluciona con la regla  $\phi_1$ , si sucede lo contrario, entonces evoluciona con la regla  $\phi_2$ , consideraremos en todos los casos condiciones iniciales aleatorias y condiciones periódicas en la frontera.

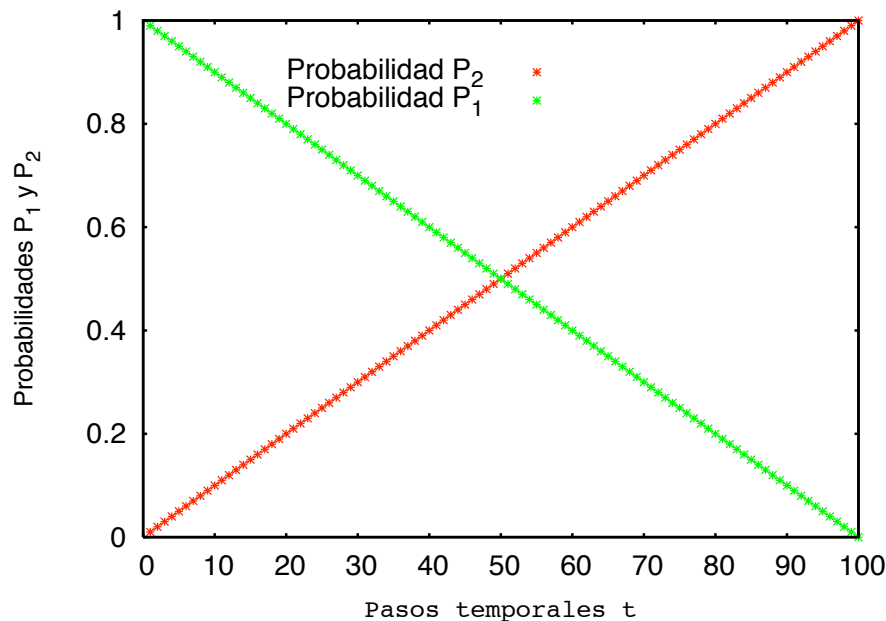


Figura 3.1: Probabilidades  $p_1$  y  $p_2$  en función de los pasos temporales.  $p_1$  es máxima al inicio de la evolución y  $p_2$  en mínima, conforme la evolución temporal  $t$  continua,  $p_1$  disminuye mientras que  $p_2$  se hace máxima.

Hay que recordar que las reglas de evolución de un AC son funciones de los sitios de la vecindad, y que estas actualizan los estados de los sitios de forma sincrónica mediante un mapeo de la forma  $\phi : S^3 \rightarrow S$ , estos mapeos forman las componentes de la regla del AC, y como se vio en el capítulo 1 (pag.2), las reglas de AC elementales tienen 8 componentes:

### 3.2 Interacción dinámica de $AC$ como un modelo de $AC$ probabilístico

---

000 001 010 011  
100 101 110 111.

De esta forma, cuando dos reglas de  $AC$  interactúan siguiendo el modelo ya descrito, las componentes de las reglas de evolución se modificarán de acuerdo a la probabilidad de evolución de cada una de las reglas, en el próximo capítulo se verá con mucho detalle este hecho.

### 3.2. Interacción dinámica de $AC$ como un modelo de $AC$ probabilístico

El modelo de interacción de dinámicas es en si un modelo de  $AC$  probabilísticos ( $ACP$ ), los cuales se construyen introduciendo elementos probabilísticos a las reglas de evolución deterministas, también se conocen como  $AC$  estocásticos. Los elementos probabilísticos representan una forma de ruido que puede ser estático o dinámico. El ruido estático se induce una vez que la evolución del  $AC$  a iniciado y después se modifican al azar un número limitados de valores binarios de acuerdo a una probabilidad específica  $p$ , donde  $p = q_1/q_2$ ,  $q_1$  es el número de sitios que serán modificados y  $q_2$  el número total sitios en el patrón del  $AC$ . El ruido dinámico esta directamente involucrado con la evolución del  $AC$ , este se induce especificando que uno o más componentes (pero no todos) de la regla de evolución generaran un uno con probabilidad  $p_1$  y un cero con probabilidad  $p_2 = 1 - p_1$ , esta probabilidad puede ser fija o depender de los pasos temporales de la evolución del  $AC$ , como es el caso del modelo de interacción dinámica. En el caso del modelo de interacción dinámica, el ruido que se le induce es dinámico, por lo que se entenderá sólo el caso de ruido dinámico. Con el fin de dar una descripción matemática al modelo de interacción de dinámicas, se expresará la regla de evolución de un  $AC$  en forma de una función booleana [22, 23] mediante los operadores booleanos  $AND$  y  $XOR$ , entonces cada regla de  $AC$  con una vecindad de  $n$  sitios  $\{s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n)\}$ , donde  $x_j$  es la coordenada espacial del sitio en la malla de sitios, puede ser expresada como

$$\sigma_d(x_j) = a_0 \oplus a_1 \sigma(x_1) \oplus \dots \oplus a_V (\sigma(x_1) * \dots * \sigma(x_n)), \quad (3.1)$$

donde  $V = 2^n - 1$ ,  $x_j$  es el sitio que será actualizado,  $\sigma(x_i)$  es el estado del sitio  $s(x_i)$  en el tiempo  $t - 1$ ,  $\sigma_d(x_j)$  es el estado actualizado por la regla de evolución en el tiempo  $t$  en el sitio  $s(x_j)$ , el subíndice  $d$  se usa para indicar que la regla de evolución es determinista,  $a_i (i = 0, \dots, V)$  son números binarios; si  $a_i = 1$  entonces el siguiente término es incluido en la expresión booleana, y si  $a_i = 0$  entonces el siguiente término no es incluido en la expresión booleana,  $\oplus$  y  $*$  representan los operadores booleanos  $XOR$  y  $AND$  respectivamente. Los operadores  $XOR$  y  $AND$  pueden sustituirse por los operadores algebraicos de suma y multiplicación mediante las identidades  $h_1 * h_2 = h_1 \times h_2$  y  $h_1 \oplus h_2 = h_1 + h_2 - 2h_1 \times h_2$ , aplicando esta

substitución de operadores a la ec.(3.1), la regla de evolución de un AC puede ser representada en forma de un polinomio [22, 23]

$$\sigma_d(x_j) = \theta_1\sigma(x_1) + \cdots + \theta_n\sigma(x_n) + \cdots + \theta_V(\sigma(x_1) \times \cdots \times \sigma(x_n)) \quad (3.2)$$

donde las  $\theta_i (i = 1, \dots, V)$  son un conjunto de enteros tal que la ec.(3.2) mapea a  $\sigma_d(x_j)$  en  $\{0, 1\}$ . El número de posibles expresiones en la ec.(3.2) es exactamente  $2^8 = 256$ , correspondiente al número de posibles reglas de evolución de AC, lo que hace que esta representación sea única.

Se puede representar el modelo de ACP mediante un polinomio. Tomando en cuenta las componentes de las reglas de evolución que serán afectadas por las probabilidades, la probabilidad de que dichas componentes tomen los valores de estado uno o cero será  $p_1$  (denotada como  $\frac{1}{p_1}$  y  $\frac{0}{p_1}$  respectivamente) y la probabilidad de que tomen los valores de estado cero y uno será  $1 - p_1$  (denotada como  $\frac{0}{1-p_1}$  y  $\frac{1}{1-p_1}$  respectivamente), con base en esto se puede representar la regla de evolución probabilística como [22, 23]

$$\sigma_p(x_j) = \begin{cases} \sigma_d(x_j) & \text{con probabilidad } 1 - p_1 \\ 1 - \sigma_d(x_j) & \text{con probabilidad } p_1 \end{cases} \quad (3.3)$$

considerando que  $\sigma_p(x_j)$ ,  $\sigma_d(x_j)$  y  $\sigma(x_i) (i = 1, \dots, n)$  son temporalmente dependientes, se puede ver a la regla probabilística como una serie de tiempo definida por la ec.(3.2), donde la evolución es perturbada por una señal de ruido dependiente del tiempo, la cual, ocasionalmente cambia el estado actualizado, entonces introduciendo la parte temporal  $t$ ,  $\sigma_p(x_j; t)$ ,  $\sigma_d(x_j; t)$  y  $\sigma(x_i; t - 1)$ , la señal de ruido es definida como

$$\eta(t) = \sigma_p(x_j; t) - \sigma_d(x_j; t), \quad (3.4)$$

sustituyendo la ec.(3.3) en la ec.(3.4) y considerando la dependencia temporal se obtiene una expresión para  $\eta$

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & 1 - p_1 \\ 1 - 2\sigma_d(x_j; t) & p_1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Se asume que la señal de ruido es no estacionaria y no lineal, de acuerdo a [22], se puede expandir en una serie la señal de ruido como

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{m_\eta} g_i(\xi(t-1), \dots, \xi(t-n_\eta)) \times \beta_i(t) + \xi(t), \quad (3.6)$$

donde la  $g_i (i = 1, \dots, m_\eta)$  son funciones no lineales y  $\xi(t)$  es una secuencia de ruido blanco. La naturaleza no estacionaria de  $\eta(t)$  es denotada por la dependencia temporal del parámetro  $\beta_i$ ; entonces, cada regla de ACP con una vecindad de sitios  $\{s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n)\}$  puede ser expresada como

### 3.2 Interacción dinámica de AC como un modelo de AC probabilístico

$$\sigma_p(x_j; t) = \theta_1 \sigma(x_1; t-1) + \dots + \theta_n \sigma(x_n; t-1) + \dots + \theta_V (\sigma(x_1; t-1) \times \dots \times \sigma(x_n; t-1)) + \eta(t). \quad (3.7)$$

La ec.(3.2) también puede ser expresada como

$$\sigma_d(x_j; t) = \sigma(\mathbf{t} - \mathbf{1}) \times \bar{\theta} \quad (3.8)$$

donde

$$\bar{\theta} = [ \theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \theta_V ]^T$$

y

$$\sigma(\mathbf{t} - \mathbf{1}) = [ \sigma(x_1; t-1) \quad \dots \quad \sigma(x_n; t-1) \quad \dots \quad \sigma(x_1; t-1) \times \dots \times \sigma(x_n; t-1) ],$$

o en forma matricial

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\Sigma} \times \bar{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.9)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma}_d = [ \sigma_d(x_j; 1) \quad \sigma_d(x_j; 2) \quad \dots \quad \sigma_d(x_j; N) ]^T$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = [ \boldsymbol{\sigma}^T(0) \quad \boldsymbol{\sigma}^T(1) \quad \dots \quad \boldsymbol{\sigma}^T(N-1) ]^T = [ \boldsymbol{\sigma}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\sigma}_V ]^T$$

y  $N$  es el número total de pasos temporales en la evolución del AC. La matriz  $\boldsymbol{\Sigma}$  puede ser descompuesta como  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \times \mathbf{Q}$ , donde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_1(0) & \dots & e_V(0) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ e_1(N-1) & \dots & e_V(N-1) \end{bmatrix} = [ \mathbf{e}_1 \quad \dots \quad \mathbf{e}_V ]$$

y  $\mathbf{Q}$  es una matriz triangular superior con elementos en la diagonal unitarios

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1V} \\ & 1 & q_{23} & \dots & q_{2V} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & q_{V-1V} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

La ecuación ec.(3.9) puede ser expresarse como

$$\sigma_d = \mathbf{E} \times \mathbf{Q} \times \bar{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{E} \times \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.10)$$

donde  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Q} \times \bar{\boldsymbol{\theta}} = [\tilde{\theta}_1 \ \dots \ \tilde{\theta}_V]^T$ .

De esta forma se puede escribir la ec.(3.2) como

$$\sigma_d = \sum_{i=1}^V e_i(t-1) \times \tilde{\theta}_i. \quad (3.11)$$

sustituyendo la ec.(3.11) en la ec.(3.7) se obtiene una expresión para  $\sigma_p$ , como

$$\sigma_p(x_j; t) = \sum_{i=1}^V e_i(t-1) \times \tilde{\theta}_i + \eta(t). \quad (3.12)$$

# capitulo 4

## Resultados

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos de las simulaciones del modelo de interacción dinámica de  $AC$ . La interacción dinámica de dos reglas de evolución  $\phi_1$  y  $\phi_2$  de  $AC$  elementales puede llevar a comportamientos muy simples (desorden) o muy complejos (auto-organizados), de la misma forma que una sola regla aplicada a una vecindad de sitios como condición inicial. En el capítulo 3 se explicaron diversas medidas de información y complejidad que permiten determinar el comportamiento de la evolución durante la interacción dinámica de las reglas de  $AC$  elementales.

Antes, se explica brevemente los posibles patrones que se pueden manifestar durante la interacción dinámica de dos reglas de evolución, primero se considera la interacción dinámica de reglas sinónimas, y posteriormente las reglas próximas entre si. Los posibles patrones durante la interacción dinámica en si pueden ser más de los que se mencionan en este trabajo, considerando la interacción dinámica entre reglas de evolución cuyos atractores pertenezcan a distintas clases, así que, los casos de interacción dinámica presentados aquí están lejos de ser generales para interacciones dinámicas entre cualquier tipo de reglas, sin embargo, los casos que se presentan aquí resultan manifestar dos tipos de comportamientos, simples y complejos, que es una de las motivaciones principales del estudio de interacciones dinámicas.

Las simulaciones se realizaron con el lenguaje  $c++$ , los cálculos cualitativos para el caso de las reglas de  $AC$  simples se produjeron tomando una condición inicial aleatoria de 1000 sitios, 1000 pasos temporales y condiciones periódicas en la frontera, cada programa se corrió 20 veces y los datos resultantes se promediaron. Las figuras de los patrones de las reglas de  $AC$  simples se produjeron con una condición inicial aleatoria de 300 sitios, 400 pasos temporales y condiciones periódicas en la frontera. Los cálculos cualitativos para el caso de la interacción dinámica de las reglas de  $AC$  elementales se produjeron tomando condiciones inicial aleatorias de 10000 sitios, 10000 pasos temporales y condiciones periódicas en la frontera, cada uno de los programas se corrió 40 veces, con excepción de la interacción dinámica de las reglas  $\phi_1 = 82$  y  $\phi_2 = 26$ , se corrieron 100 veces y los datos resultantes se promediaron. Las figuras de los patrones de la interacción dinámica de las reglas se produjeron

con una condición inicial aleatoria de 400 sitios, 700 pasos temporales y condiciones periódicas en la frontera. Para llevar acabo las mediciones se dejó que la regla con mayor probabilidad de evolución inicial alcanzara un estado de equilibrio con el fin de evitar los estados transientes, posteriormente se introdujeron las probabilidades para cada una de las reglas.

## 4.1. Interacción dinámica de reglas sinónimas

Como se menciona en el capítulo 1, los patrones sinónimos son aquellos cuyas variables que los describen son iguales. El apéndice B muestra los conjuntos de todas las reglas sinónimas, estos conjuntos están formados por puras reglas pares, puras reglas impares y por reglas pares e impares (ver capítulo 1 pag.13). Las interacciones dinámicas entre reglas sinónimas puede producir los siguientes tipos de patrones:

1. Si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son reglas sinónimas con la misma paridad, pero durante la interacción dinámica el número de componentes de las reglas afectadas por la probabilidad lineal es  $\leq 2$ , el patrón de interacción dinámica será sinónimo al de las reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .
2. Si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son reglas sinónimas con la misma paridad, pero durante la interacción dinámica el número de componentes afectadas por la probabilidad lineal es  $\geq 3$ , el patrón de interacción dinámica será un patrón similar al de las reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  pero distorsionado.
3. Si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son reglas sinónimas pero con diferente paridad y la regla par es  $\leq 127$  y la regla impar es  $\geq 128$ , el patrón de interacción dinámica será un patrón desordenado.
4. Si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son reglas sinónimas pero con diferente paridad y ambas reglas son  $\geq 128$  entonces el patrón de interacción dinámica será sinónimo al de las reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .

Para aclarar estos cuatro puntos, considérese las componentes de las reglas de *AC* elemental, estas son:

000	001	010	011
100	101	110	111.

La paridad de una regla es definida por las componentes del bit más significativo dado por la vecindad 111 y del bit menos significativo dado por la vecindad 000 como ya se explicó anteriormente (capítulo 1, pag.13). Cuando dos reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  con la misma paridad interactúan mediante una probabilidad lineal, y ambas reglas son  $\leq 127$  o  $\geq 128$ , el bit más significativo y el bit menos significativo no se verán afectados por la probabilidad, las otras componentes se verán afectadas según

## 4.1 Interacción dinámica de reglas sinónimas

---

que tan diferentes sean los mapeos de las reglas para estas componentes. Entre menos componentes afecte la probabilidad lineal, el patrón de la interacción dinámica mantendrá las variables que hacen que ambas reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  sean sinónimas, de esta forma el patrón de la interacción dinámica será también sinónimo a  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , esto provocará que la transición de la regla  $\phi_1$  a la regla  $\phi_2$  sea mediante un atractor de la misma clase y un patrón sinónimo al de las reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . En el caso en que ambas reglas sean sinónimas y con la misma paridad, pero una de ellas sea  $\leq 127$  y la otra  $\geq 128$ , el bit más significativo se verá afectado por la probabilidad lineal, en el caso de reglas pares, y en el caso de reglas impares, el bit menos significativo es el que se verá afectado por la probabilidad lineal.

Durante la interacción dinámica de las reglas con la misma paridad se generan mapeos de reglas de AC elemental de la misma paridad que las reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , sin importar que el bit más significativo sea afectado o el bit menos significativo, pero el tipo de atractor puede diferir, esto se debe a que en el conjunto de reglas de evolución de AC elemental existen atractores de punto fijo, ciclo límite y atractores extraños de paridad par o impar.

Como ejemplo considérese las reglas  $\phi_1 = 11$  y  $\phi_2 = 47$ , ambas son sinónimas e impares y son de segunda clase, con un atractor cíclico, el subconjunto de variables  $l$  (capítulo 1 pag.14) que las describen es  $l = \{\text{corrimiento, corrimiento alternado, corrimiento izquierdo, corrimiento derecho, corrimiento doble}\}$ , las representaciones binarias de estas dos reglas son:  $\phi_1 = 00001011$  y  $\phi_2 = 00101111$ , la fig.(4.1) muestra los patrones de ambas reglas.

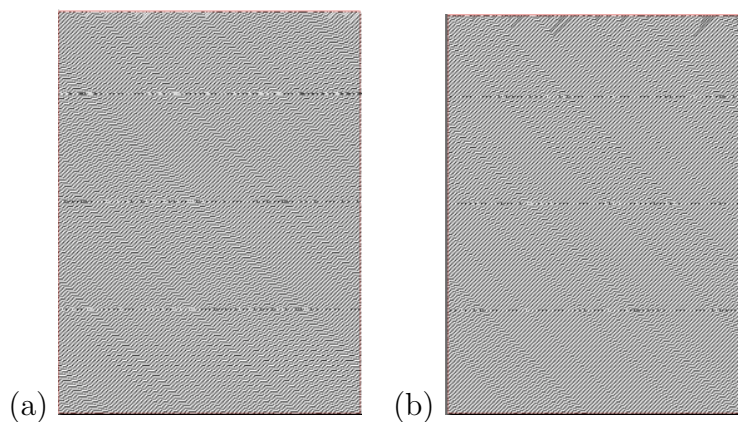


Figura 4.1: Patrones de las reglas sinónimas, (a)  $\phi_1 = 11$  y (b)  $\phi_2 = 47$ .

Los mapeos de las componentes de estas reglas de evolución son: para la regla  $\phi_1 = 11$

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 1 & 001 \longrightarrow 1 & 010 \longrightarrow 0 & 011 \longrightarrow 1 \\ 100 \longrightarrow 0 & 101 \longrightarrow 0 & 110 \longrightarrow 0 & 111 \longrightarrow 0, \end{array}$$

y para la regla  $\phi_2 = 47$



$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 1 & 001 \longrightarrow 1 & 010 \longrightarrow 1 & 011 \longrightarrow 1 \\ 100 \longrightarrow 0 & 101 \longrightarrow 1 & 110 \longrightarrow 0 & 111 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Se observa que los únicos mapeos de las componentes que difieren en ambas reglas corresponden a las vecindades 101 y 010, así que, al interactuar ambas reglas  $\phi_1 = 11$  y  $\phi_2 = 47$ , estas componentes son las únicas que se verán afectadas por la probabilidad lineal. Durante la interacción dinámica de ambas reglas se observará el posible mapeo

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 1 & 001 \longrightarrow 1 & 010 \longrightarrow 0,1 & 011 \longrightarrow 1 \\ 100 \longrightarrow 0 & 101 \longrightarrow 0,1 & 110 \longrightarrow 0 & 111 \longrightarrow 0, \end{array}$$

de estos mapeos solamente se tendrán dos posibles reglas actuando durante la interacción dinámica correspondientes a  $\phi = 00001111$  y  $\phi = 00101011$ , con representación decimal  $\phi = 15$  y  $\phi = 43$ , ambas reglas son impares y de segunda clase, la regla  $\phi = 43$  es sinónima a las reglas  $\phi_1 = 11$  y  $\phi_2 = 47$ , la regla  $\phi = 15$  es próxima a estas, el subconjunto de variables  $l$  que forman el patrón de esta regla es  $l = \{\text{corrimiento, corrimiento alternado, corrimiento izquierdo, corrimiento recto, corrimiento simple}\}$ , las variables que hacen que estas reglas no sean sinónimas son: *corrimiento doble y corrimiento simple*. El patrón que se genera durante la interacción dinámica es sinónimo a los patrones formados por las reglas  $\phi_1 = 11$ ,  $\phi_2 = 47$  y  $\phi = 43$ , la proximidad de la regla  $\phi = 15$  no afecta al patrón que se genera durante la interacción dinámica. La fig.(4.2) muestra el patrón durante la interacción dinámica, se observa que el patrón que se forma durante la interacción es similar al de las reglas  $\phi_1 = 11$  y  $\phi_2 = 47$ , por lo tanto la transición de una regla de evolución a otra se lleva a cabo sin ningún efecto.

Cuando el número de mapeos de las componentes afectados por la probabilidad lineal aumenta durante la interacción dinámica de las reglas sinónimas, se van modificando las variables características que forman los patrones de ambas reglas, esto se debe a que el número de reglas que se crean durante la interacción dinámica aumenta, algunas de estas reglas ya no serán sinónimas a las reglas que generan la interacción dinámica y se alejarán en su proximidad. Considérese nuevamente la regla  $\phi_1 = 11$ , al interactuar esta regla con otra regla sinónima, por ejemplo, la regla  $\phi_2 = 81$ , el patrón que se producirá se verá afectado debido a que el número de mapeos de las componentes de estas reglas difiere en la mitad del número total de las posibles vecindades. La representación decimal de la regla de evolución  $\phi_2 = 81$  es  $\phi_2 = 01010001$ , entonces durante la interacción dinámica se tendrán los posibles mapeos de las componentes

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 1 & 001 \longrightarrow 1,0 & 010 \longrightarrow 0 & 011 \longrightarrow 1,0 \\ 100 \longrightarrow 0,1 & 101 \longrightarrow 0 & 110 \longrightarrow 0,1 & 111 \longrightarrow 0, \end{array}$$

cuatro componentes serán afectadas por la distribución de probabilidad y se tendrán  $2^4 - 2 = 14$  reglas, las catorce reglas que se generan son impares de segunda clase y  $\leq 127$ , dos de ellas son las reglas  $\phi = 75$  y  $\phi = 89$ , estas son sinónimas entre

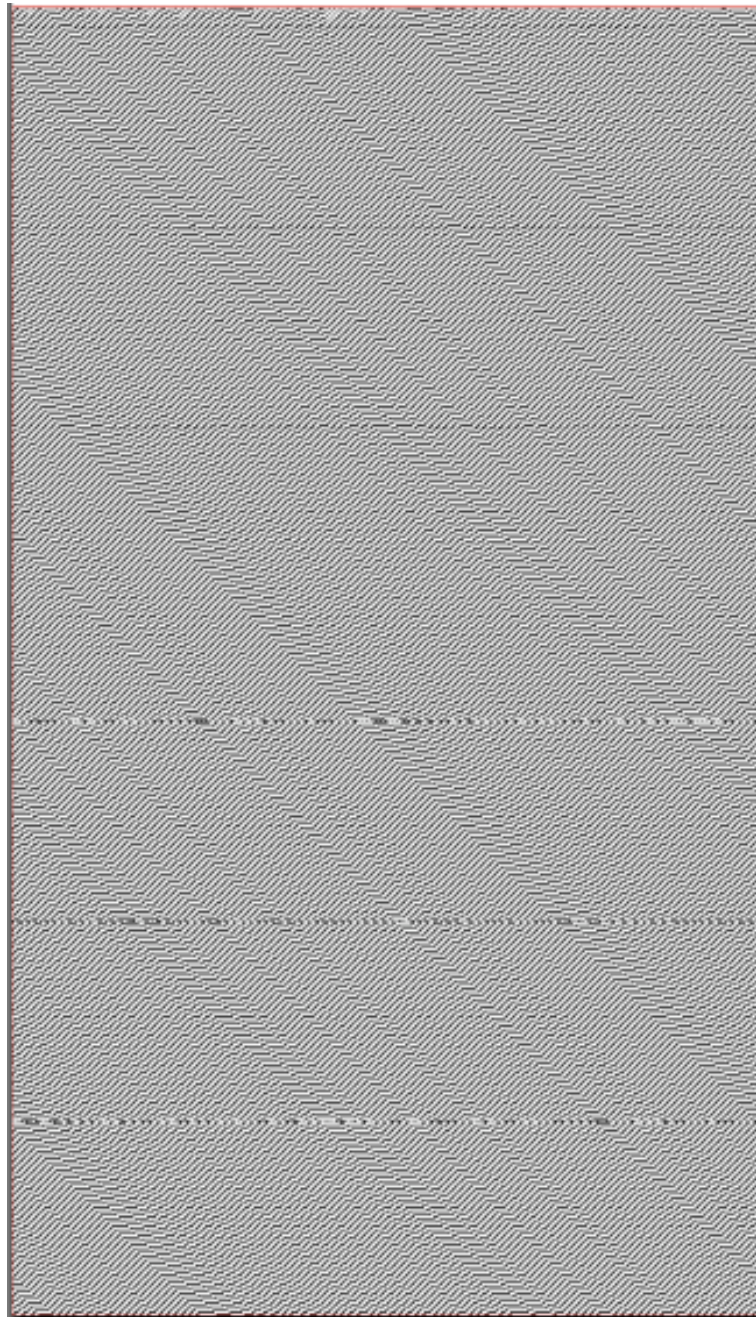


Figura 4.2: Patrón de la interacción de reglas sinónimas,  $\phi_1 = 11$  y  $\phi_2 = 47$ .

ellas, el subconjunto de variables  $l$  que conforman sus patrones son  $l = \{Escalamiento\ múltiple, Pseudo\ Triángulo\}$ , ambas reglas de evolución no son próximas a las reglas de evolución  $\phi_1 = 11$  y  $\phi_2 = 81$ . La fig.(4.3) muestra el patrón de la regla  $\phi_2 = 81$  y la fig.(4.4) el patrón de la interacción dinámica de las reglas  $\phi_1 = 11$  y  $\phi_2 = 81$ . Se puede observar que las estructuras de las reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se ven fuertemente alteradas

debido a la diversidad de reglas que se generan durante la interacción.

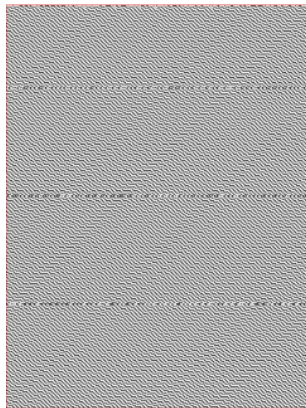


Figura 4.3: Patrón de la regla de evolución  $\phi_2 = 81$ .

Se revisaron una gran cantidad de casos de interacción dinámica de reglas sinónimas con la misma paridad y se observó que entre mayor es el número de componentes que son afectadas por la distribución de probabilidad lineal, la interacción dinámica afectará el patrón. En el mayor número de los casos se encontró que el máximo número de componentes afectadas por la distribución de probabilidad lineal para que el patrón durante la interacción dinámica se mantenga sinónimo a las reglas de evolución  $\phi_1$  y  $\phi_2$  debe ser dos. Existen casos como el de la regla de evolución  $\phi = 2$  y sus sinónimas que al interactuar entre ellas el patrón de la interacción dinámica permanece sinónimo a estas, debido a que el número máximo de componentes que se ven afectadas por la distribución de probabilidad es dos.

Si ahora se considera una interacción dinámica entre reglas pares y reglas impares, sinónimas, el patrón de interacción dinámica será el resultado de un conflicto entre reglas [1]. Debe observarse que hay conjuntos de reglas sinónimas que están formados tanto por reglas de evolución pares como reglas de evolución impares, y que hay conjuntos donde las reglas de evolución pares son  $\leq 127$  y las reglas de evolución impares son  $\geq 128$ , esto alterara de manera drástica la forma del patrón, ya que durante la interacción dinámica se generaran mapeos de componentes de reglas de evolución tanto pares como impares, por ejemplo, si se considera un caso simple correspondiente a una regla de primera clase, donde su atractor es un punto fijo como lo es la regla evolución  $\phi_1 = 4$  y esta interactúa con una regla sinónima, por ejemplo la regla  $\phi_2 = 203$ , el resultado es un fuerte conflicto. El subconjunto de variables que describen estas reglas es;  $l = \{Corrimiento, Corrimiento recto, Corrimirnto simple\}$ , las representaciones binarias de ambas reglas son:  $\phi_1 = 00000100$  y  $\phi_2 = 11001011$ , la fig.(4.5) muestra los patrones de estas reglas.

De la representación binaria de las reglas se puede observar que los bits más significativos y los bits menos significativos se verán afectados por la probabilidad



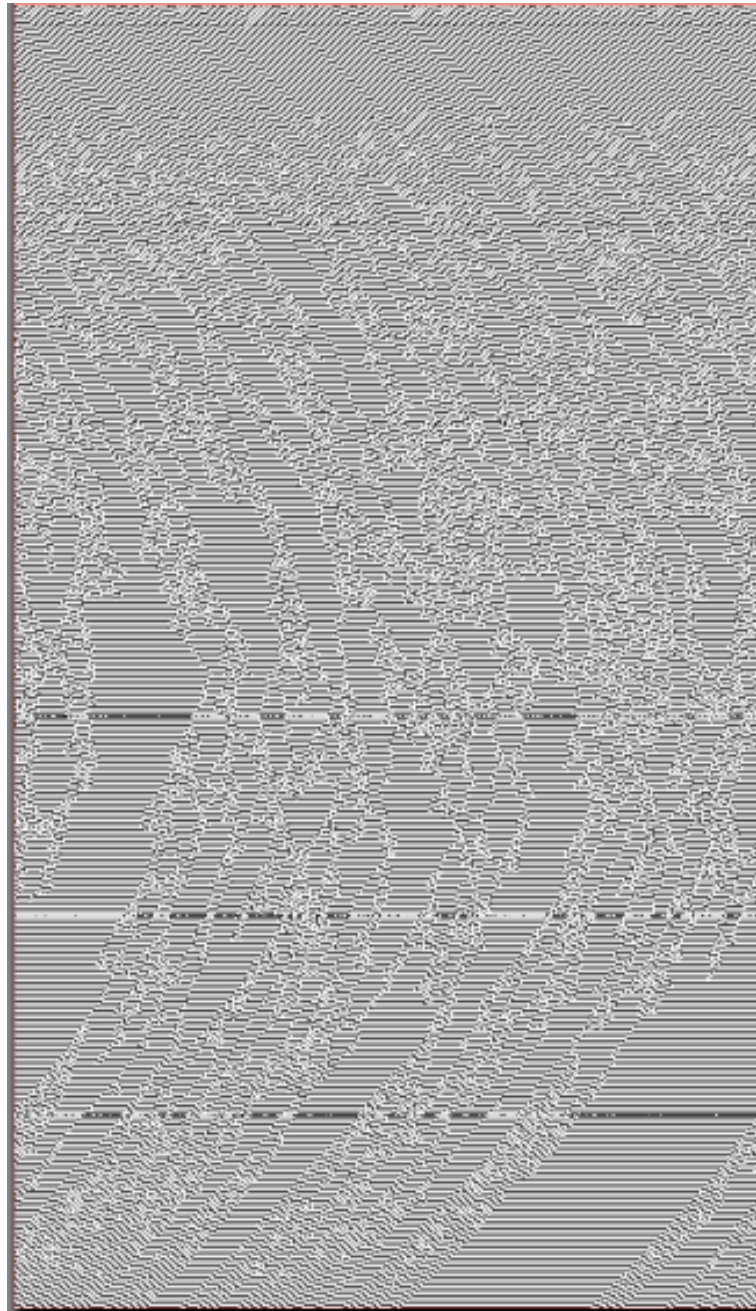


Figura 4.4: Patrón de la interacción de reglas sinónimas,  $\phi_1 = 11$  y  $\phi_2 = 81$ .

lineal, este provocara que durante la interacción dinámica se produzcan mapeos de reglas de evolución pares  $\leq 127$  y  $\geq 128$ , así como reglas de evolución impares  $\leq 127$  y  $\geq 128$ . Durante la interacción dinámica se tendrán los mapeos de las componentes

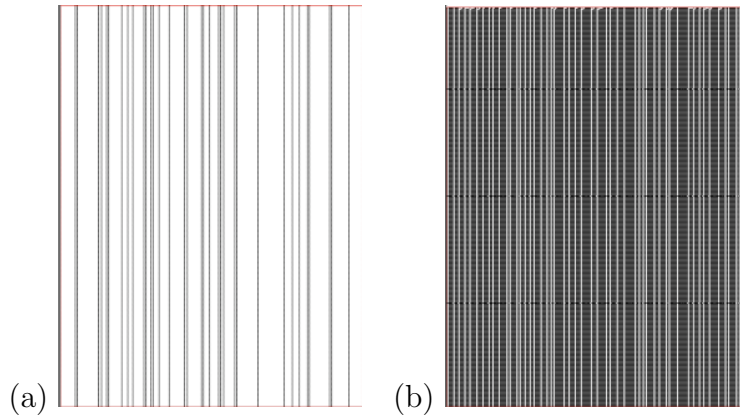


Figura 4.5: Patrones de las reglas sinónimas, (a)  $\phi_1 = 4$  y (b)  $\phi_2 = 203$ .

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0,1 & 001 \longrightarrow 0,1 & 010 \longrightarrow 1,0 & 011 \longrightarrow 0,1 \\ 100 \longrightarrow 0 & 101 \longrightarrow 0 & 110 \longrightarrow 0,1 & 111 \longrightarrow 0,1, \end{array}$$

seis vecindades son afectadas por la distribución de probabilidad, lo que dará un total de  $2^6 - 2 = 62$  reglas, las reglas que se generan durante la interacción dinámica son de los tres tipos de atractores correspondientes a las tres primeras clases de la calificación de Wolfram.

La fig.(4.6) muestra el patrón de la interacción dinámica. Puede observarse que durante la interacción dinámica no se obtiene ninguna estructura definida lo cual lleva a pensar que la interacción dinámica de esta naturaleza da como consecuencia un patrón constituido por puro ruido, este ruido visto desde el punto de vista de las variables que constituyen un patrón, surge debido a la existencia de variables de conflicto que ambas reglas tienen entre sí, las variables de conflicto aparecen en pares y describen características encontradas de las reglas de evolución, en este caso la variable de conflicto es el color de los patrones [1]. Si se ve desde el punto de vista de la interacción dinámica como un modelo de ruido dinámico, el ruido dinámico actúa en seis de los mapeos de las reglas de evolución, lo que hace que la interacción dinámica sea altamente perturbada. Mas adelante se tratarán los casos de las reglas  $\phi_1 = 126$  y  $\phi_2 = 129$ , estas reglas no son sinónimas, pero son las que mayor conflicto presentan debido a que estas representan la transición de las reglas de evolución que son  $\leq 127$  y  $\geq 128$ .

Considérese ahora el caso en el que las reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son sinónimas pero con distinta paridad y ambas son  $\geq 128$ , en este caso, durante la interacción dinámica no hay efectos drásticos como en el caso anterior, este se debe, a que no existe una variable de conflicto entre ellas como el color, por lo que la transición de la regla  $\phi_1$  a  $\phi_2$  será mediante un patrón sinónimo a estas, en general el número de mapeos de las componentes afectados por probabilidad lineal es a lo máximo de cuatro componentes, como es el caso en la interacción dinámica de las reglas  $\phi_1 = 170$  y  $\phi_2 =$

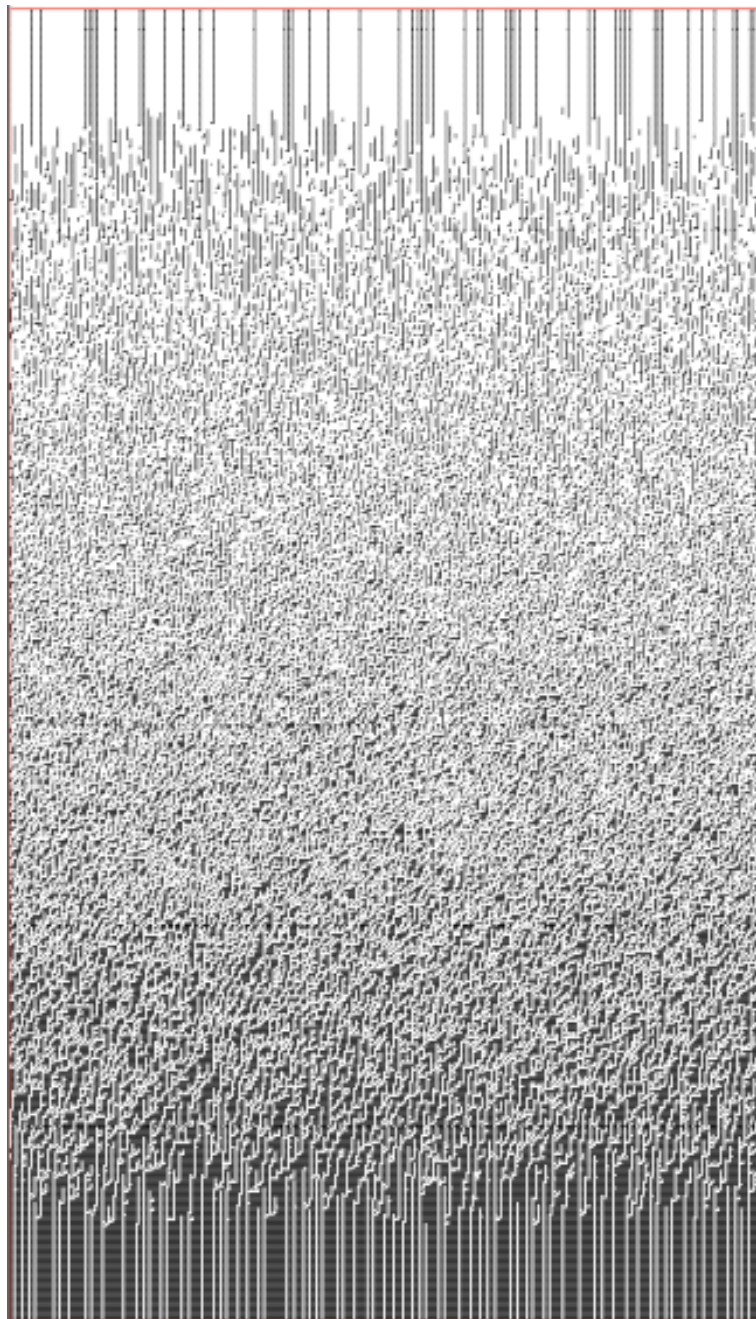


Figura 4.6: Patrón de la interacción de reglas sinónimas,  $\phi_1 = 4$  y  $\phi_2 = 203$ .

189, ambas son sinónimas y con distinta paridad, el subconjunto de variables  $l$  que describen los patrones de estas reglas es  $l = \{Corrimiento, Corrimiento Izquierdo\}$ , el patrón durante la interacción dinámica mantendrá las variables características de estas reglas. La fig.(4.7) muestra los patrones de las reglas  $\phi_1 = 170$  y  $\phi_2 = 189$ .



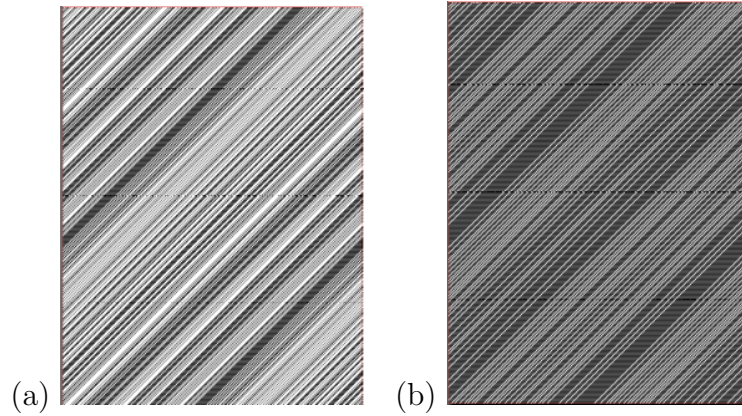


Figura 4.7: Patrones de las reglas sinónimas, (a)  $\phi_1 = 170$  y (b)  $\phi_2 = 189$ .

Las representaciones binarias de ambas reglas son:  $\phi_1 = 10101010$  y  $\phi_2 = 10111101$ , las reglas difieren en cuatro mapeos de componentes

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0,1 & 001 \longrightarrow 1,0 & 010 \longrightarrow 0,1 & 011 \longrightarrow 1 \\ 100 \longrightarrow 0,1 & 101 \longrightarrow 1 & 110 \longrightarrow 0 & 111 \longrightarrow 1, \end{array}$$

el bit menos significativo se ve afectado por la probabilidad lineal, esto genera tanto reglas pares como impares debido a que la interacción dinámica es provocada por dos reglas de evolución de distinta paridad, de estos posibles mapeos se obtienen  $2^4 - 2 = 14$  reglas, doce de estas reglas de evolución son próximas a las reglas de evolución  $\phi_1 = 170$  y  $\phi_2 = 189$  y las otras dos son puntos fijos con corrimientos rectos.

La fig.(4.8) muestra el patrón durante la interacción dinámica, se puede observar como la transición de una regla a otra se lleva a cabo mediante un patrón sinónimo a las reglas  $\phi_1 = 170$  y  $\phi_2 = 189$ .

A diferencia de los casos anteriores, donde el número de mapeos afectados por la probabilidad lineal es determinante para el grado de ruido dinámico inducido durante la interacción dinámica, estas reglas sinónimas de diferente paridad mantienen localmente sus estructuras, esto se podría explicar a partir del hecho de que durante la interacción dinámica, los mapeos de las componentes que se generan son correspondientes a reglas próximas, tal proximidad no provocará ningún efecto de ruido sobre el patrón de la interacción dinámica, estos efectos son vistos en todos los conjuntos formados de reglas sinónimas que son  $\geq 128$ .

Se ha visto mediante estos ejemplos, que la interacción dinámica de las reglas de evolución sinónimas generan cuatro tipos de comportamiento, se pueden considerar otros casos de interacciones dinámicas entre reglas de evolución que pertenezcan a diferentes clases de AC elemental y con diferentes paridades, por ejemplo interacción entre atractores de puntos fijos con atractores extraños, ciclos límites con puntos fijos. etc, sin embargo, posiblemente no todo tipo de interacción dinámica entre reglas

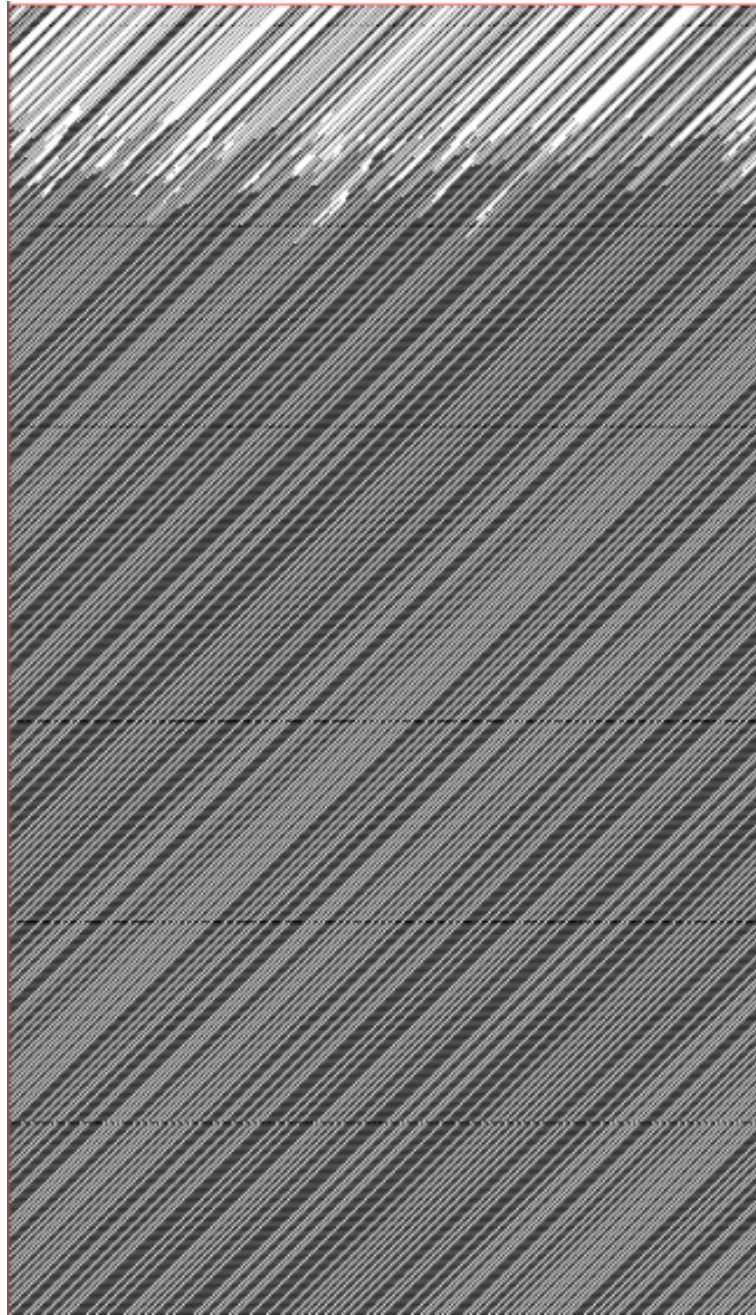


Figura 4.8: Patrón de la interacción de reglas sinónimas,  $\phi_1 = 170$  y  $\phi_2 = 189$ .

de diferentes clases den como resultado un patrón o un comportamiento interesante.



## 4.2. Interacción dinámica de reglas no sinónimas

Un aspecto que resulta interesante en la interacción dinámica, es cuando dos reglas no sinónimas y próximas entre si interaccionan. Más adelante se tratara el análisis de algunas reglas de evolución próximas entre si, por el momento se tratará la interacción dinámica de reglas no sinónimas próximas entre si y que tienen variables de conflicto entre si. Este tipo de interacción tendrá como resultado en el patrón cuatro posibles tipos de comportamiento:

1. La anulación (orden) total de toda estructura durante la interacción dinámica.
2. Una semidestrucción de las estructuras durante la interacción dinámica.
3. Una destrucción (desorden) total de las estructuras durante la interacción dinámica.
4. La aparición de estructuras auto-organizadas.

Se encontró que la anulación total de estructuras durante la interacción dinámica es muy común en reglas de evolución proximas entre si y cuyas variables de conflicto son corrimientos izquierdos y derechos. De esta forma las variables de conflicto son opuestas a si mismas (Apendice A). Por ejemplo consideremos el caso de las reglas  $\phi_1 = 20$  y  $\phi_2 = 134$ , el subconjunto de variables  $l_1$  que describen el patrón de la regla  $\phi_1 = 20$  es  $l_1 = \{ \text{corrimiento}, \text{corrimiento derecho}, \text{corrimiento trebol} \}$  y el subconjunto de variables  $l_2$  que describen el patrón de la regla  $\phi_2 = 134$  es  $l_2 = \{ \text{corrimiento}, \text{corrimiento izquierdo}, \text{corrimiento trebol} \}$ , las variables que hace que estas reglas no sean sinónimas son *corrimiento derecho* y *corrimiento izquierdo*. La fig.(4.9) muestra los patrones de estas reglas.

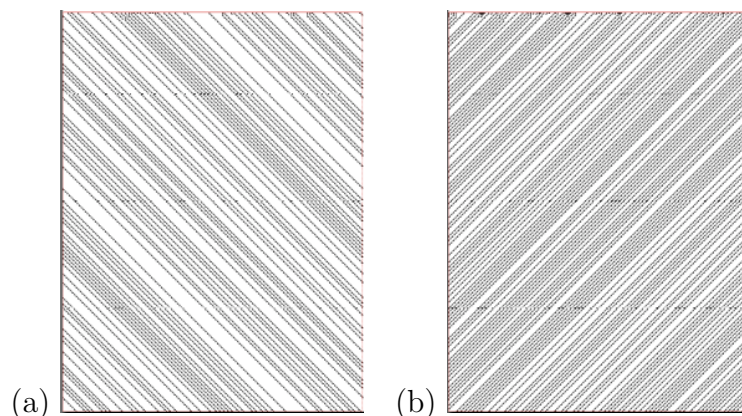


Figura 4.9: Patrones de las reglas no sinónimas y próximas entre si, (a)  $\phi_1 = 20$  y (b)  $\phi_2 = 134$ .

---

## 4.2 Interacción dinámica de reglas no sinónimas

---

En este caso las variables de conflicto son los corrimientos izquierdos y derechos de ambas reglas, al interactuar  $\phi_1 = 20$  y  $\phi_2 = 134$  el resultado será la anulación total de toda estructura. La fig.(4.10) muestra la interacción dinámica de estas reglas, se puede observar que una vez comenzada la interacción dinámica el conflicto provoca ramificaciones, estas ramificaciones son producto de los mapeos de las componentes de las reglas que se generan durante la interacción dinámica.

La representación binaria de estas reglas de evolución son:  $\phi_1 = 00010100$  y  $\phi_2 = 10000110$ , los mapeos difieren en tres componentes, los posibles mapeos serán

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0 & 001 \longrightarrow 0,1 & 010 \longrightarrow 1 & 011 \longrightarrow 0 \\ 100 \longrightarrow 1,0 & 101 \longrightarrow 0 & 110 \longrightarrow 0 & 111 \longrightarrow 0,1, \end{array}$$

tres vecindades son afectadas por la probabilidad, el bit más significativo 111, y los bits 001 y 100, ambos bits mapean de forma antisimétrica, estas vecindades son las responsables de la variable corrimiento trébol fig.(4.11), al evolucionar la interacción dinámica, aumentará la probabilidad de que el mapeo del bit 100 correspondiente a la regla de evolución  $\phi_2 = 134$  anule la estructura trébol formada por la regla de evolución  $\phi_1 = 20$ , también el mapeo del bit 011 no permitirá que las estructuras trébol de la regla de evolución  $\phi_2 = 134$  crezcan, de esta forma la densidad de estados ceros crecerá rápidamente, las ramificaciones que emergen durante la interacción dinámica se deben a los mapeos de las reglas generadas que intentan emerger, pero la escasa densidad de estados unos impide que estas reglas formen una estructura.

Los mapeos de las componentes de reglas que se generan durante la interacción dinámica corresponden a atractores extraños, puntos fijos y ciclos límites, son  $2^3 - 2 = 6$  reglas que se generan siendo estas  $\phi = 22, 146, 150$  correspondientes a atractores extraños,  $\phi = 4, 132$  correspondientes a puntos fijos y  $\phi = 6$  correspondiente a un ciclo límite. Para que las estructuras triangulares correspondientes a los atractores extraños emerjan se requieren de una abundante distribución de unos a cada paso temporal, los puntos fijos requieren del mapeo de la componente  $010 \longrightarrow 1$ , sin embargo dado que las estructuras que se generan durante la interacción dinámica son ramificadas, los vecinos próximos anularán los puntos fijos. La regla correspondiente al ciclo límite es próxima a las reglas  $\phi_2 = 134$ , por lo que la regla  $\phi_2 = 20$  se encontrara en conflicto con esta regla.

También se observa una semidestrucción de las estructuras correspondientes a las reglas, considérese por ejemplo las reglas  $\phi_1 = 110$  y  $\phi_2 = 124$ , se ha encontrado que la regla  $\phi_1 = 110$  tiene comportamientos de cuarta clase, por lo que su atractor no es extraño [27], debido a la proximidad de la regla  $\phi_2 = 124$  con la regla  $\phi_1 = 110$  y a la forma del patrón, es posible que  $\phi_2 = 124$  también corresponda a una regla de cuarta clase, se pensaba que los AC elementales no manifestaban este tipo de atractor. El subconjunto de variables  $l_1$  que describen el patrón de la regla  $\phi_1 = 110$  es  $l_1 = \{\text{triángulo blanco, escalamiento múltiple, triángulo recto, triángulo recto izquierdo}\}$  y el subconjunto de variables  $l_2$  que describe el patrón de la regla  $\phi_2 = 134$  es  $l_2 = \{\text{triángulo blanco, escalamiento múltiple, triángulo recto, triángulo recto}\}$

---

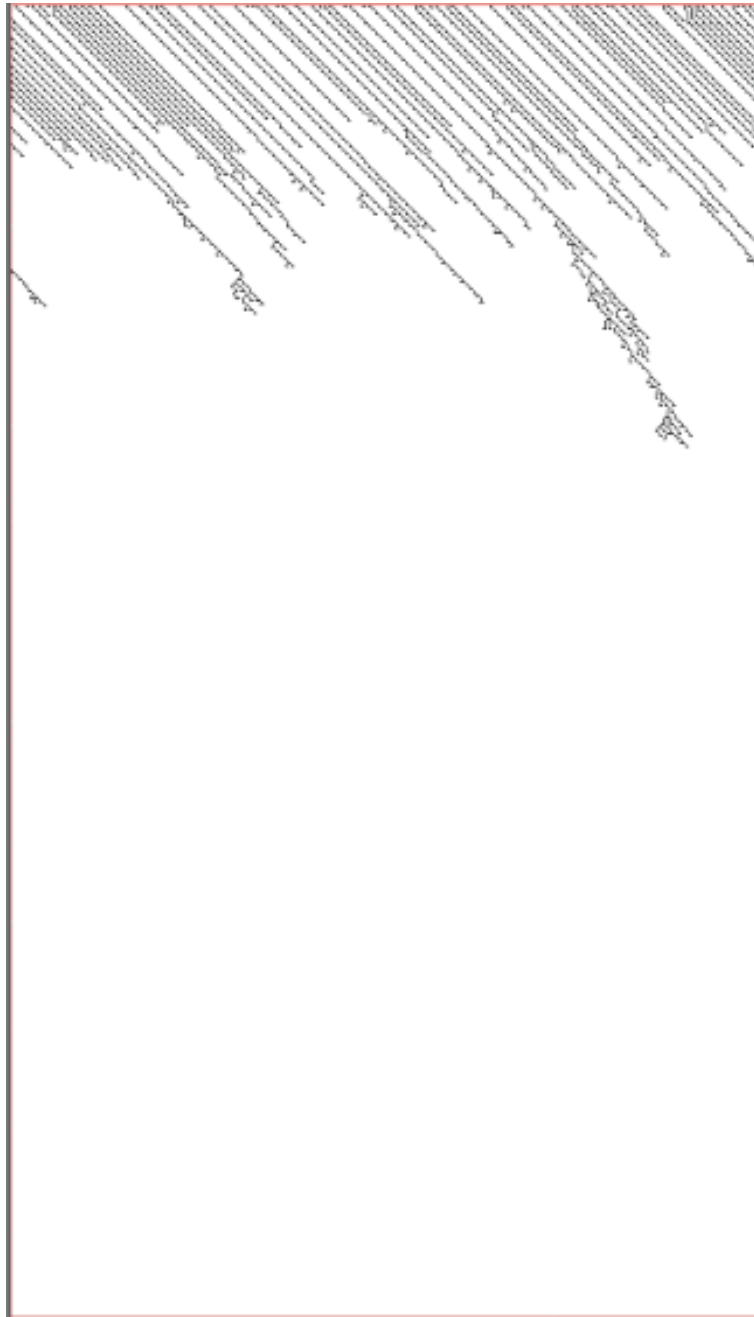


Figura 4.10: Patrón de la interacción de las reglas ,  $\phi_1 = 20$  y  $\phi_2 = 134$ .

*derecho*}, las variables que hacen que estas reglas no sean sinónimas son *triángulo recto izquierdo* y *triángulo recto derecho*.

La interacción dinámica de estas reglas resulta en una semidestrucción de los triángulos que son estructuras de estas reglas. La fig.(4.12) muestra los patrones de las reglas y la fig.(4.13) muestra la interacción dinámica.

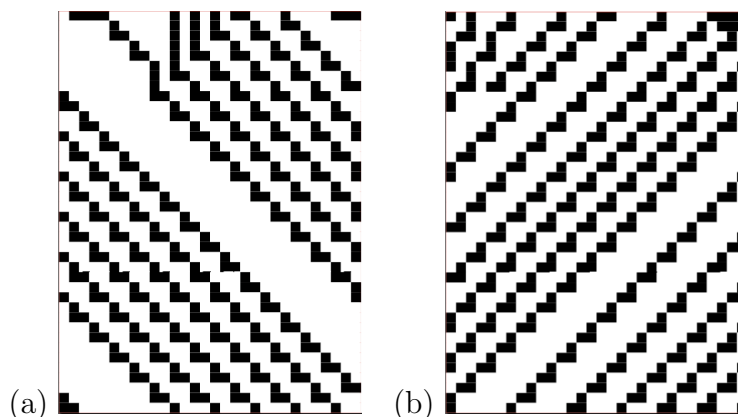


Figura 4.11: Corrimientos trébol de los patrones correspondientes a las reglas de evolución, (a)  $\phi_1 = 20$  y (b)  $\phi_2 = 134$ .

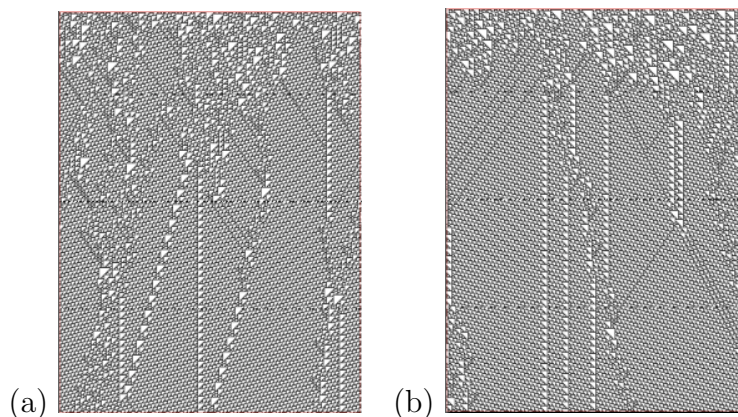


Figura 4.12: Patrones correspondientes a las reglas de evolución, (a)  $\phi_1 = 110$  y (b)  $\phi_2 = 124$ .

Durante la interacción dinámica el conflicto entre estas reglas no es muy fuerte y se da mediante las variables *triángulo recto izquierdo* y *triángulo recto derecho*, esto provocara que durante la interacción dinámica las estructuras sean de forma triangular pero sin los vértices derecho e izquierdo que generan el conflicto entre ambas variables.

La representación binaria de las regla  $\phi_1 = 110$  es  $\phi_1 = 01101110$  y la representación binaria de la regla  $\phi_2 = 124$  es  $\phi_2 = 011111100$ , durante la interacción dinámica los posibles mapeos de las componentes que se generan son:

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0 & 001 \longrightarrow 1,0 & 010 \longrightarrow 1 & 011 \longrightarrow 1 \\ 100 \longrightarrow 0,1 & 101 \longrightarrow 1 & 110 \longrightarrow 1 & 111 \longrightarrow 0, \end{array}$$



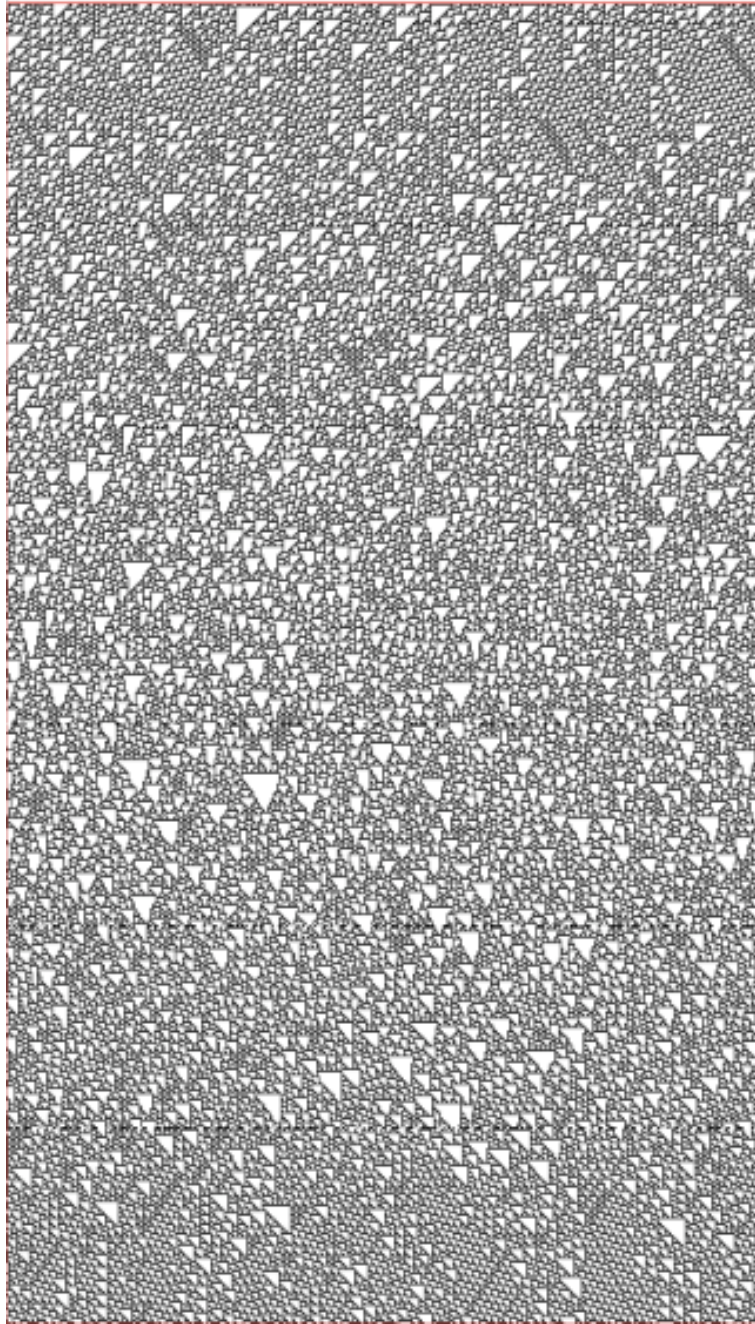


Figura 4.13: Patrón de la interacción de reglas sinónimas,  $\phi_1 = 110$  y  $\phi_2 = 124$ .

solo dos componentes se ven afectadas, y los mapeos corresponden a las reglas  $\phi = 126, 108$ ,  $\phi = 126$  pertenece a un regla de segunda clase, mientras que  $\phi = 108$  es de primera clase. Durante la interacción dinámica las estructuras mas predominantes son los triángulos blancos pero sin los vértices derechos e izquierdos debido al conflicto

en las estructuras de las reglas  $\phi_1 = 110$  y  $\phi_2 = 124$ .

Como se había mencionado, otros tipos de comportamiento durante la interacción dinámica son los que llevan a una destrucción total de las estructuras y los que dan lugar a estructuras auto-organizadas. A continuación se discutirán algunos casos correspondientes a este tipo de comportamiento, utilizando las definiciones de información y complejidad propuestas en el capítulo 2, la interacción dinámica de las reglas de evolución que a continuación se analizan manifiestan comportamientos interesantes.

#### 4.2.1. Reglas $\phi_1 = 62$ y $\phi_2 = 118$

Considérese las reglas  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$ , los subconjuntos de variables que describen los patrones generados por estas reglas de evolución están compuestos por las variables  $l_1 = \{ \text{corrimiento}, \text{corrimiento derecho}, \text{corrimiento doble}, \text{triángulo blanco}, \text{triángulo equilátero}, \text{triángulo no fractal} \}$  y  $l_2 = \{ \text{corrimiento}, \text{corrimiento izquierdo}, \text{corrimiento doble}, \text{triángulo blanco}, \text{triángulo equilátero}, \text{triángulo no fractal} \}$  y son muy próximas entre si; las únicas variables que hace que no sean próximas y que sus reglas no sean sinónimas son las variables *corrimiento izquierdo* y *corrimiento derechos*, así que los patrones de estas reglas difieren solo en una variable, la fig.4.14, muestra los patrones producidos por estas reglas, en (a) se observa el corrimiento derecho y en (b) el corrimiento izquierdo, también ambas reglas son pares y  $\leq 127$ .

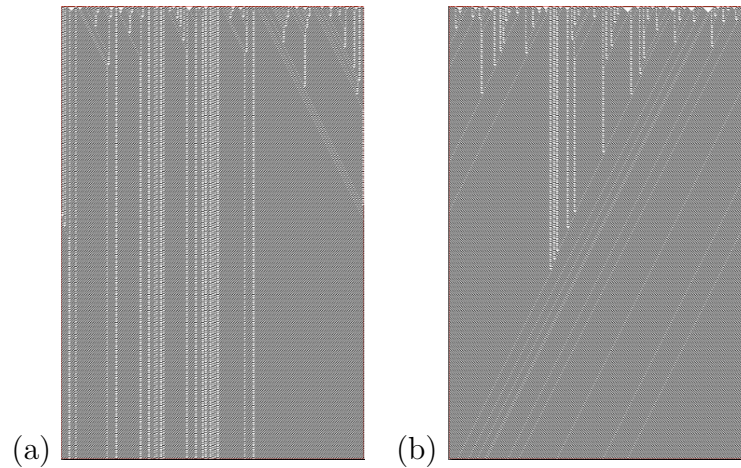


Figura 4.14: Patrones de las reglas no legales, (a)  $\phi_1 = 62$  y (b)  $\phi_2 = 118$ .

En la fig.4.15 se observan diversas cantidades que se midieron para la regla  $\phi_1 = 62$ , en (a) se muestra la densidad de unos en función de los pasos temporales partiendo del valor  $\rho_1 = 0,5$ ; debido a la distribución equiprobable de los estados, al evolucionar el *AC*, se observa inmediatamente que la densidad de unos alcanza un valor periódico estable que oscila alrededor de  $\rho_1 = 0,64$ , esto se debe a que despues

de un tiempo de estados transientes los valores de estados alcanzan un atractor de segunda clase (estados cíclicos) como indica la medida de entropía.

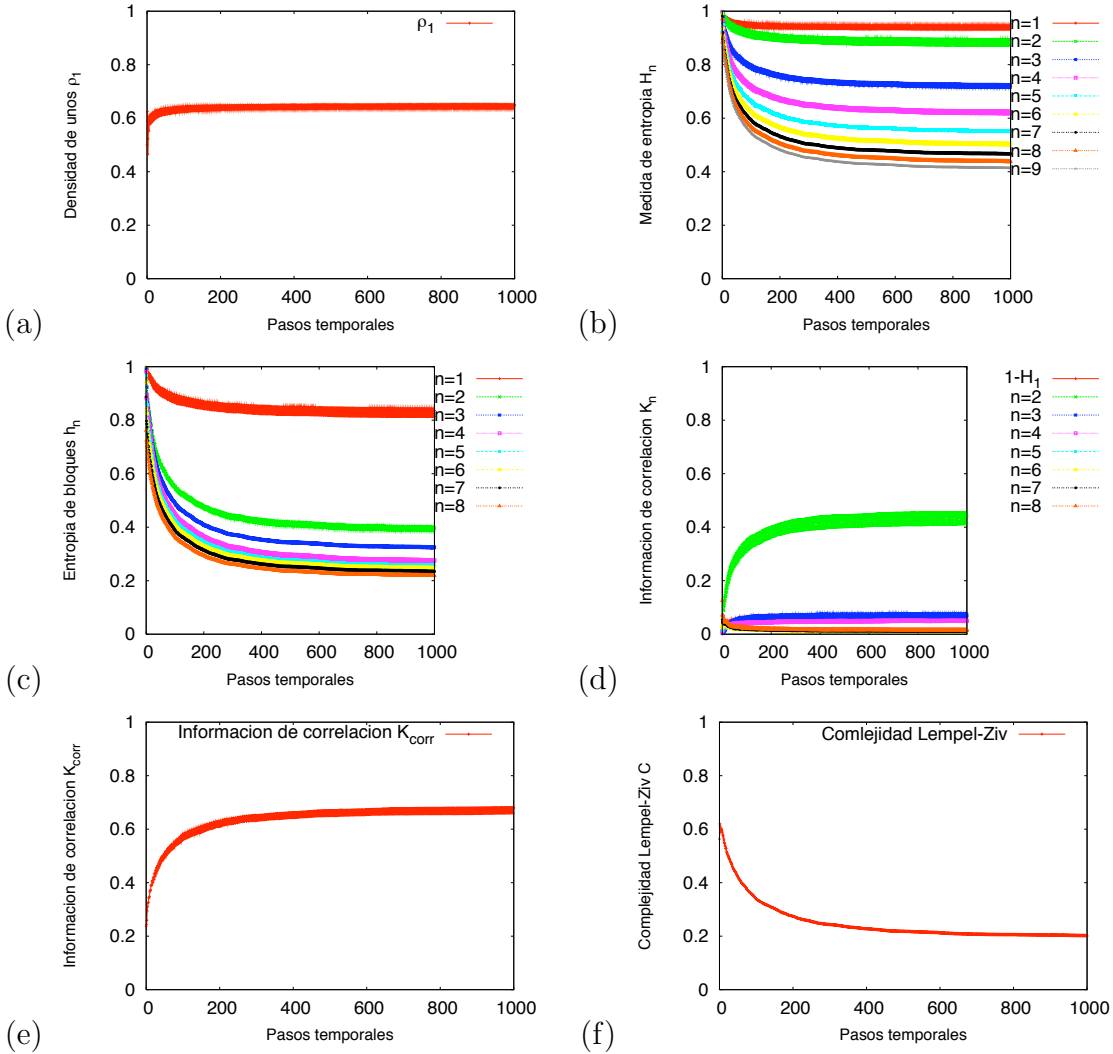


Figura 4.15: Evolución de la regla  $\phi_1 = 62$ , en (a) se muestra la densidad de unos, en (b) se observa la medida de entropía  $H_n$ , en (c) la entropía de bloques  $h_n$ , en (d) la información de bloques de  $K_1$  hasta  $K_8$ , en (e) la información de correlación  $K_{corr}$  y en (f) la complejidad de Lempel-Ziv  $C$ . Todas estas cantidades como una función de los pasos temporales.

Como se había mencionado anteriormente, la medida de entropía  $H_n$  ec.(2.27) nos proporciona una conexión con la teoría de los sistemas dinámicos ya que considera el conjunto de todas las posibles configuraciones del AC, en la fig.4.15 (b) se observa el comportamiento de la medida de entropía  $H_n$  en función de los pasos temporales para diferentes longitudes de subcadenas  $n = 1, 2, \dots, 9$ , la medida de entropía  $H_n$

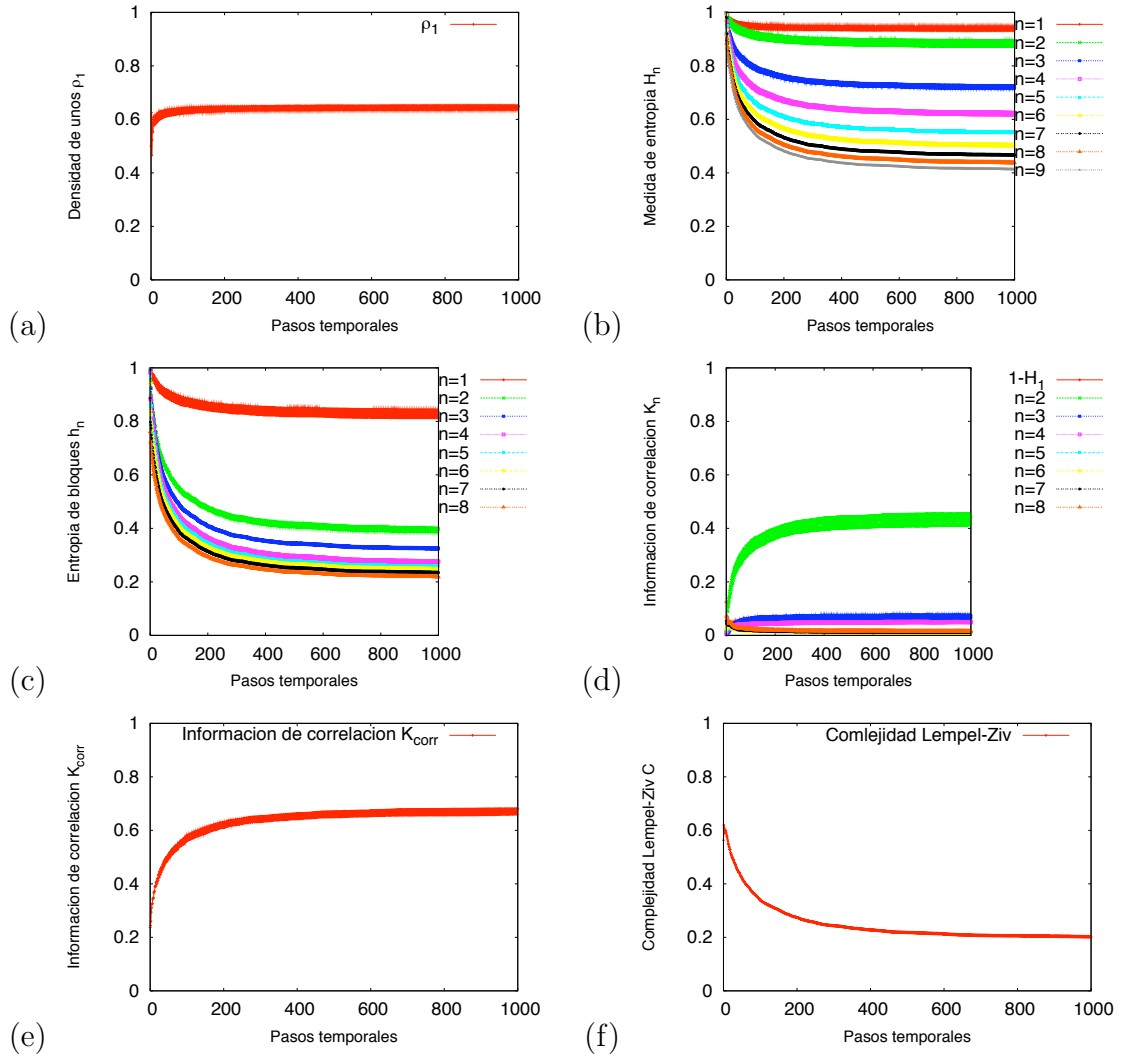


Figura 4.16: Evolución de la regla  $\phi_2 = 118$ , en (a) se muestra la densidad de unos, en (b) se observa la medida de entropía  $H_n$ , en (c) la entropía de bloques  $h_n$ , en (d) la información de bloques de  $K_1$  hasta  $K_8$ , en (e) la información de correlación  $K_{corr}$  y en (f) la complejidad de Lempel-Ziv  $C$ . Todas estas cantidades como una función de los pasos temporales.

toman el valor  $H_{n=1,\dots,9} = 1 \text{ bit}$  en el tiempo correspondiente a la condición inicial  $t = 0$  debido a que dicha condición toma sus valores de estados aleatoriamente y corresponden a estados de máximo desorden, donde todas las posibles configuraciones de las subsecuencias pueden ocurrir con igual probabilidad, conforme el tiempo transcurre se confirma la existencia de estados transientes y la medida de entropía se desvía de su máximo valor, decayendo hacia un valor de equilibrio y entonces la regla de evolución  $\phi_1 = 62$  genera estructuras periódicas con periodos cortos; la me-



dida de entropía para  $n = 1$  está relacionada a la densidad de estados y conforme se incrementa la longitud de subcadenas se observa un mayor decaimiento en la medida de entropía que se aproxima rápidamente a cero conforme incrementa la longitud  $n$ . Otro aspecto importante en el patrón de la regla de evolución  $\phi_1 = 62$  es la persistencia de tres de las variables que la conforman, correspondientes a la composición de triángulos equiláteros blancos no fractales. En la fig.4.15 (c) se observa la entropía de bloques  $h_n$  ec.(2.28) para  $n = 1, \dots, 8$  en función de los pasos temporales y de la misma forma que la medida de entropía, esta decrece al incrementar  $n$ , sólo que esta decrece más rápido y se aproxima más rápido a cero conforme se incrementa  $n$ . Es importante recordar que la medida de entropía representa la información de Shannon almacenada en una subcadena  $x_1 \dots x_n$  de longitud  $n$  y la entropía de bloques representa la información necesaria para predecir un  $x_{n+1}$  dado  $x_1 \dots x_n$ , así que es obvio que la entropía de bloques decrezca ya que la incertidumbre acerca de  $x_n$  no puede incrementar. Para el caso de la regla  $\phi_1 = 62$ , el decrecimiento es muy rápido debido a que la evolución genera estructuras periódicas y persistentes y, debido a esto, la incertidumbre se aproxima a cero con mayor rapidez. En la fig.4.15 (d) se observa la información de correlación  $K_n$  ec.(2.42) de cada una de las subcadenas en función de los pasos temporales, la información mutua  $K_2$  es la que proporciona mayor contribución a la información de correlación  $K_{corr}$ ,  $K_2$  inicia partiendo de cero dado que la condición inicial es desordenada y no hay correlación entre los sitios del  $AC$ , inmediatamente crece y alcanza un valor periódico debido a las estructuras periódicas y persistentes que se generan durante la evolución. En la fig.4.15 (f) se muestra una estimación a la información de correlación  $K_{corr}$  ec.(2.44), en función de los pasos temporales. En la fig.4.15 se muestra la complejidad de Lempel-Ziv ec.(2.47) normalizada  $C/b$ ; el decaimiento en  $C/b$  representa la selección de patrones en la evolución del  $AC$  [21]. En la fig.4.16 se observan los mismos resultados para el caso de la regla de evolución  $\phi_2 = 118$ , debido a la proximidad con la regla  $\phi_1 = 62$  los comportamientos en la evolución son similares.

Ahora ambas reglas  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$  interactúan, al inicio  $\phi_1 = 62$  tiene máxima probabilidad de evolución  $p_1 = 1$  y  $\phi_2 = 118$  tiene mínima probabilidad de evolución  $p_2 = 1 - p_1 = 0$ , en la fig.4.17 se observa el patrón de interacción de estas reglas. Durante la interacción hay una abundancia de estructuras triangulares similares a las de un  $AC$  de tercera clase, lo que llevaría a pensar que la interacción de ambas reglas generan auto-organización y con una complejidad mayor a la de las reglas por si solas. En la fig.4.18-(a) se muestra la medida de entropía  $H_n$  para  $n = 1, \dots, 9$  antes durante y después de la interacción en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ) y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), la probabilidad corre únicamente en el rango  $[0, 1]$  y durante la interacción dinámica, mientras que los pasos temporales de toda la dinámica va del rango  $[0, 10000]$ , como la gráfica lo indica aproximadamente 400 pasos temporales de la primera regla de evolución  $\phi_1$  fueron suprimidos para eliminar los estados transientes. Es muy claro el incremento de  $H_n$  durante la interacción ya que la evolución de la regla  $\phi_1 = 62$  genera estructuras periódicas y persistentes para condiciones iniciales aleatorias, tal que

---

#### 4.2.1 Reglas $\phi_1 = 62$ y $\phi_2 = 118$

al introducir las probabilidades de evolución de las reglas, estas estructuras pierden su periodicidad al mismo tiempo que las estructuras triangulares persistentes dejan de serlo y, comienzan a distribuirse de forma irregular, esto lleva a un incremento de  $H_n$ .

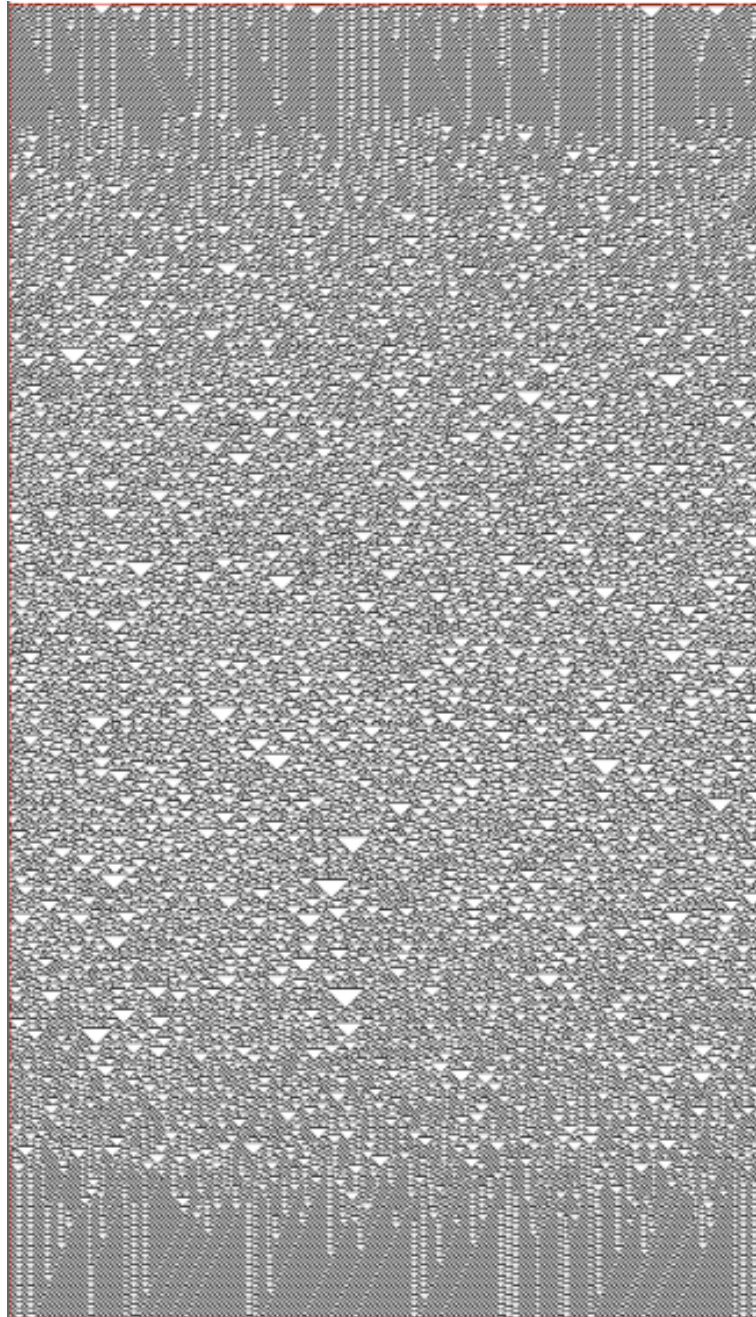


Figura 4.17: Patrón de la interacción de reglas no legales,  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$ .

Se denomina la región de transición como aquella que se encuentra acotada

---

entre los valores de probabilidad  $p_2 = 0,25$  y  $p_2 = 0,75$  para ambas reglas [1] y se observa que en la región de transición las estructuras triangulares son abundantes y de tamaño variable, el reescalamiento que se encuentra en la fig.4.18-(a) muestra con detalle el comportamiento de la medida de entropía  $H_n$  para  $n = 1, \dots, 9$  en la región de interacción dinámica y muestra ligeros decaimientos en  $H_{n=2,\dots,9}$  lo que indica una desviación del valor máximo en la medida de entropía alcanzado entre  $0 < 1 - p_1 \leq 0,2$ , debido a una ligera disminución en las posibles configuraciones de subcadenas, esto es señal de que en esa región la evolución de la interacción dinámica es auto-organizada, además la desviación se lleva a cabo gradualmente hasta alcanzar un mínimo en  $1 - p_1 = 0,5$ ; también el decaimiento en  $H_n$  es muy lento al incrementar el tamaño de las subcadenas, a diferencia de las reglas  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$  cuyo decaimiento en  $H_{n=1,\dots,9}$  se aproxima rápidamente a cero. Cuando  $1 - p_1 > 0,5$ , la regla  $\phi_2 = 118$  comienza a dominar en la evolución, esto se ve reflejado en que las medidas de entropía  $H_{n=1,\dots,9}$  experimentan un crecimiento lento hasta alcanzar un valor máximo para  $0,8 < 1 - p_1 \leq 1$ ,  $0 < p_1 \leq 0,2$  igual al valor máximo obtenido para  $0,8 < p_1 \leq 1$  y  $0 < 1 - p_2 \leq 0,2$ , esto se debe a que en esas regiones la evolución de la interacción dinámica es ligeramente desordenada y la proximidad y robustez de ambas reglas producen una interacción dinámica simétrica, finalmente para  $1 - p_1 = 1$  y  $p_1 = 0$  el atractor de la regla  $\phi_2 = 118$  es recuperado en gran parte de sus estructuras periódicas y persistentes características.

## 4.2.1 Reglas $\phi_1 = 62$ y $\phi_2 = 118$

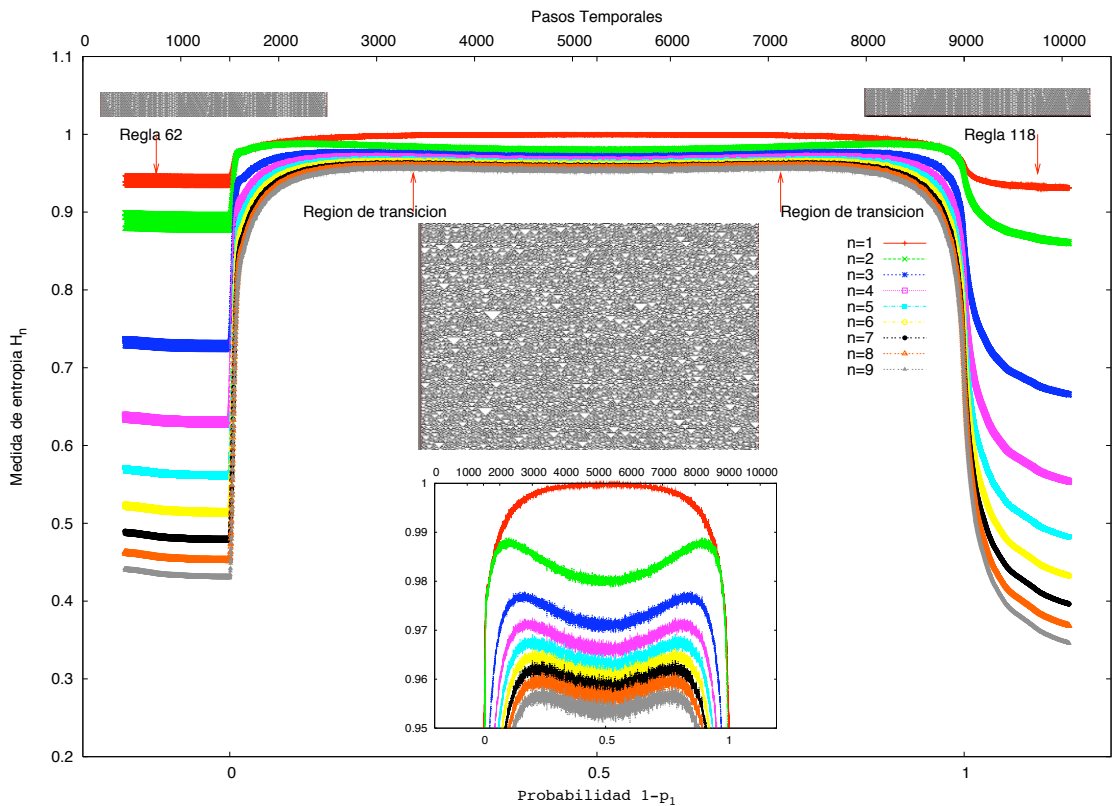


Figura 4.18-(a): Medida de entropía  $H_n$  de subsecuencias de tamaño  $n=1, \dots, 9$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes durante y después de la interacción dinámica, y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje superior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

En la fig.4.18-(b) se observa la entropía de bloques  $h_n$  de la interacción dinámica para  $n = 1, \dots, 8$  en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica y en función de los pasos temporales durante toda la dinámica (eje superior  $X$ ), el reescalamiento muestra que para el caso  $n = 1$  hay un decaimiento en  $h_1$ , de esta forma la información necesaria para predecir una subcadena  $x_2x_3$  dada  $x_1$  decrece rápidamente en comparación a  $h_{n=2, \dots, 8}$  hasta que las probabilidades alcanzan el valor  $p_1 = 1 - p_1 = 0,5$ ; esto se debe a la diferencia de valores que hay entre  $H_1$  y  $H_2$ , para el caso  $n > 1$  la desviaciones de  $h_{n=2, \dots, 8}$  de sus valores máximos es muy ligero y sin gran diferencia del valor máximo.

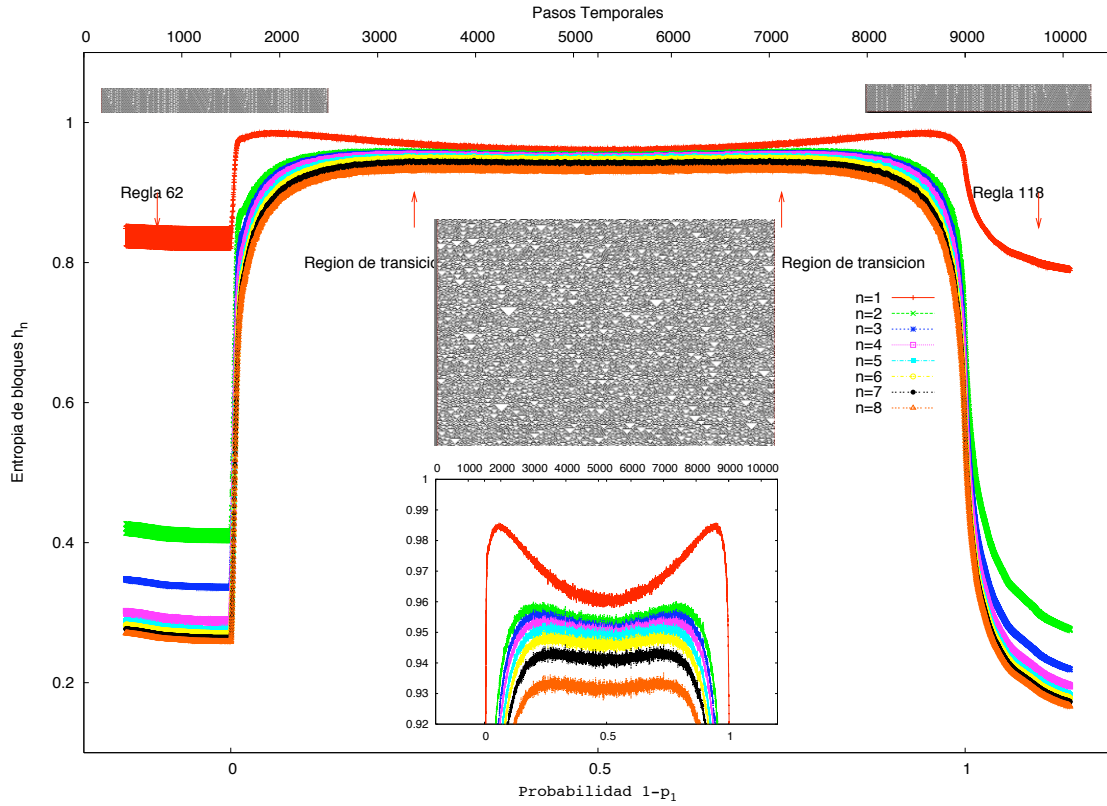


Figura 4.18-(b): Entropía de bloques  $h_n$  de subsecuencias de tamaño  $n=1, \dots, 8$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica, y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

En la fig.4.18-(c) se observan las contribuciones  $K_n$  a la información de correlación  $K_{corr}$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), durante toda la dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica, el reescalamiento de la gráfica muestra con detalle lo que ocurre con cada una de las contribuciones a  $K_{corr}$ , cada una de estas contribuciones representan la cantidad promedio para el cual la incertidumbre del valor  $x_{i+n}$  en el sitio  $i$  decrece debido al conocimiento de  $x_i$ , también cada una de estas contribuciones son conocidas como *información mutua de n-esimo orden* [6]. Se observa que la densidad de información  $K_1 = 1 - H_1$  tiene la menor contribución a  $K_{corr}$ , la información mutua  $K_2$  es mucho menor a la información mutua de las reglas  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$  lo mismo sucede para  $h_{n=3,4,5,6}$ . Para  $K_7$  se observa un incremento en la información de correlación, para  $n = 8$  la información de correlación  $K_8$  es mayor que la información mutua  $K_2$  y mayor que  $K_8$  para  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$  de esta manera la interacción dinámica parece manifestar correlaciones para longitudes  $n > 8$  mayores a las de las reglas  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$  cuya máxima contribución a  $K_{corr}$  es dada por la información mutua  $K_2$ .



## 4.2.1 Reglas $\phi_1 = 62$ y $\phi_2 = 118$

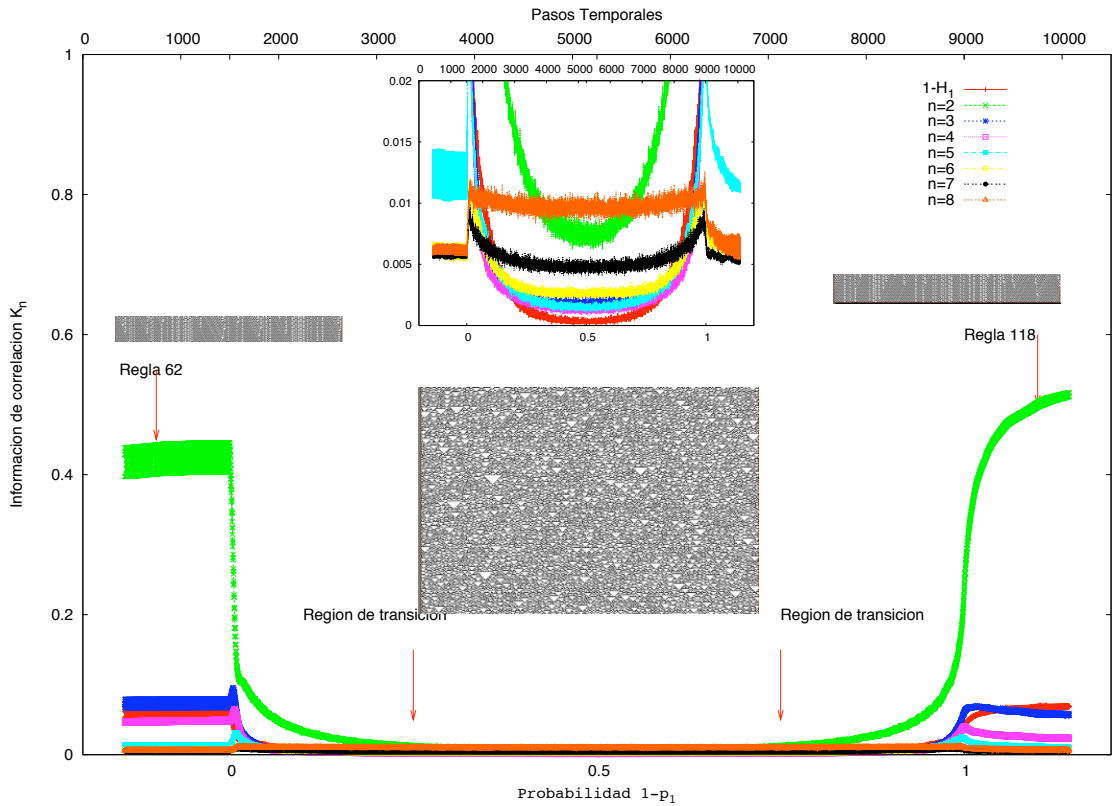


Figura 4.18-(c): Contribuciones a la información de correlación  $K_n$  de subsecuencias de tamaño  $n=1, \dots, 8$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

La fig.4.18-(d) muestra una estimación de la información de correlación  $K_{corr}$  de las subsecuencias  $n = 1, \dots, 8$  consideradas en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), durante toda la dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica. Al igual que la información mutua  $K_{corr}$  alcanza su valor mínimo en  $p_1 = 1 - p_1 = 0,5$  lo que lleva a pensar que las estructuras triangulares en la región de transición a pesar de ser abundantes, estas son muy irregulares debido al ruido dinámico inducido por las probabilidades de cada regla de evolución, lo que está de acuerdo con el hecho de que las estructuras con mayor irregularidad requieren menor auto-organización y el decaimiento en la medida de entropía será menor que para el caso de estructuras regulares [3], sin embargo, la interacción dinámica parece ser de mayor complejidad que las reglas  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$ , esto puede verse en la complejidad de Lempel-Ziv normalizada  $C/b$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), durante toda la dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica. La fig.4.18-(e), muestra que durante la interacción dinámica existirá selección de patrones con complejidad mayor que los que se generan en la evolución de las reglas  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$ .

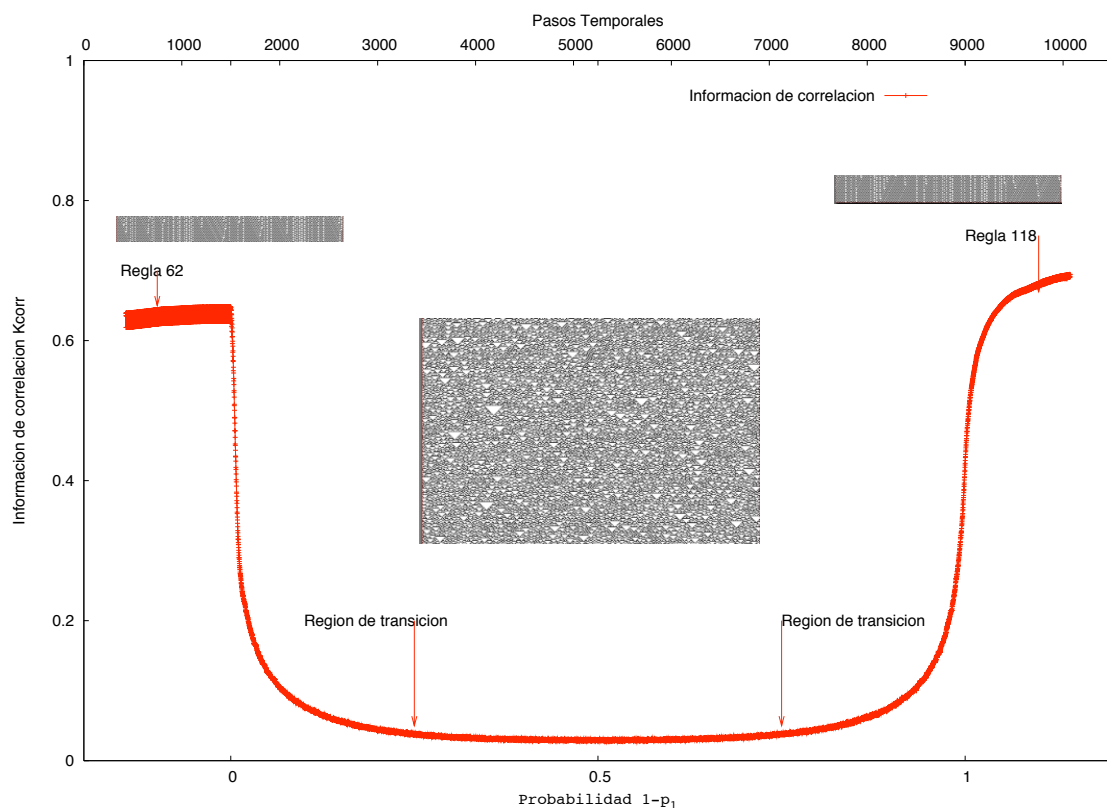


Figura 4.18-(d): Información de correlación  $K_{corr}$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

Las probabilidades no alteran los valores de estado de todas las vecindades de cada una de las reglas de  $AC$ , en si solo afectan a cierto número de vecindades. Considérese los mapeos de cada una de las componentes de las reglas de  $AC$ , para el caso de la regla  $\phi_1 = 62$  los mapeos de las ocho componentes son:

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0 & 001 \longrightarrow 1 & 010 \longrightarrow 1 & 011 \longrightarrow 1 \\ 100 \longrightarrow 1 & 101 \longrightarrow 1 & 110 \longrightarrow 0 & 111 \longrightarrow 0, \end{array}$$

para la regla  $\phi_2 = 118$ , los mapeos para las ocho componentes son:

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0 & 001 \longrightarrow 1 & 010 \longrightarrow 1 & 011 \longrightarrow 0 \\ 100 \longrightarrow 1 & 101 \longrightarrow 1 & 110 \longrightarrow 1 & 111 \longrightarrow 0, \end{array}$$

las representaciones binaria de ambas reglas son:  $\phi_1 = 00111110$  y  $\phi_2 = 01110110$ .

## 4.2.1 Reglas $\phi_1 = 62$ y $\phi_2 = 118$

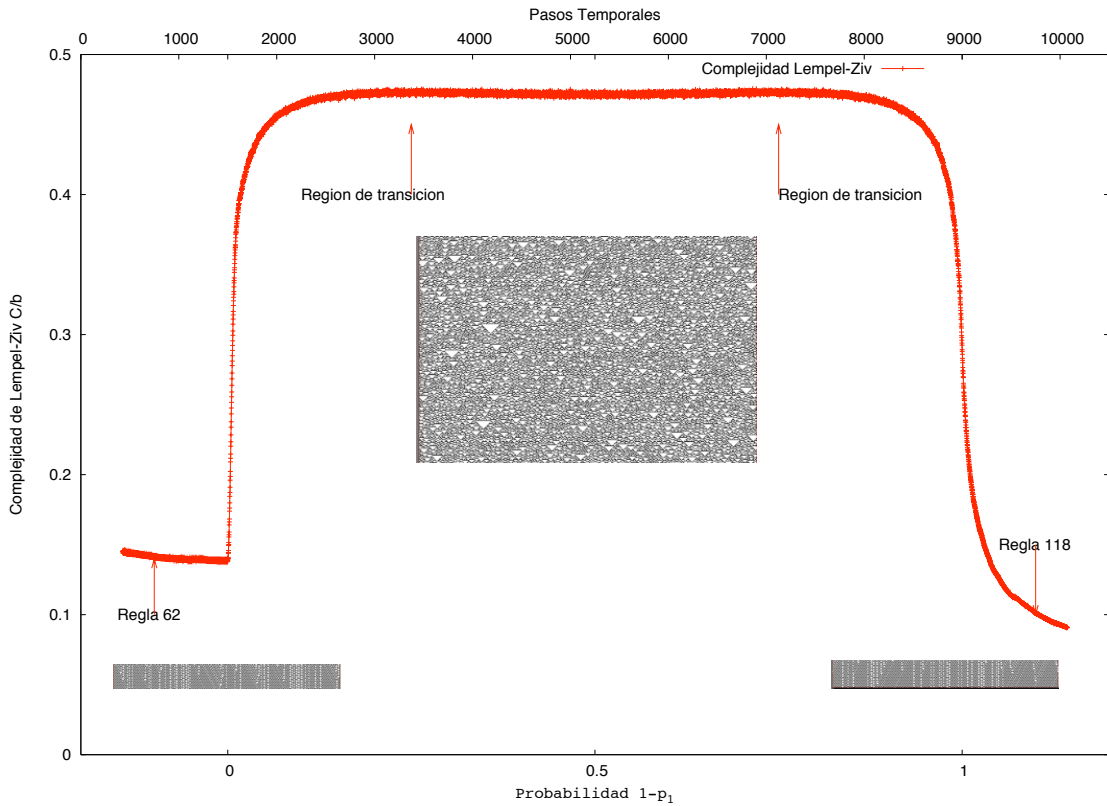


Figura 4.18-(e): Complejidad de Lempel-Ziv normalizada  $C/b$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

Los mapeos solo difieren en dos componentes 011 y 110, las demás componentes para ambas reglas mapean a los mismos valores, el ruido dinámico es entonces inducido por medio de las componentes 011 y 110, en la región de la interacción dinámica donde la probabilidad de evolución para ambas reglas es  $p_1 = 1 - p_1 = 0,5$  hay dos mapeo con igual probabilidad de ocurrir

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0 & 001 \longrightarrow 1 & 010 \longrightarrow 0 & 011 \longrightarrow 1,0 \\ 100 \longrightarrow 1 & 101 \longrightarrow 0 & 110 \longrightarrow 0,1 & 111 \longrightarrow 0 \end{array}$$

estos mapeos corresponden a dos diferentes reglas de evolución con representación binaria  $\phi = 00110110$ ,  $\phi = 01111110$ , y con representación decimal  $\phi = 54$  y  $\phi = 126$  respectivamente.  $\phi = 54$  y  $\phi = 126$  son reglas pares, la interacción dinámica de las reglas de evolución  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$  forma un patrón que es una mezcla de los patrones de las reglas  $\phi = 54$  y  $\phi = 126$ , que se muestran en la fig.4.18.

Wolfram [4] encontró que las complejidades algorítmicas de los lenguajes regulares de estas reglas incrementan rápidamente hasta alcanzar una complejidad que sólo es posible calcularla mediante un lenguaje sin constricciones, libre de memoria, sin embargo para  $t \leq 5$  pasos temporales, la complejidad algorítmica de los lenguajes regulares para estas reglas, cuadro 4.1, muestran que la regla  $\phi = 54$  tiene mayor complejidad con nueve estados o nodos y dieciséis arcos [4], y su complejidad



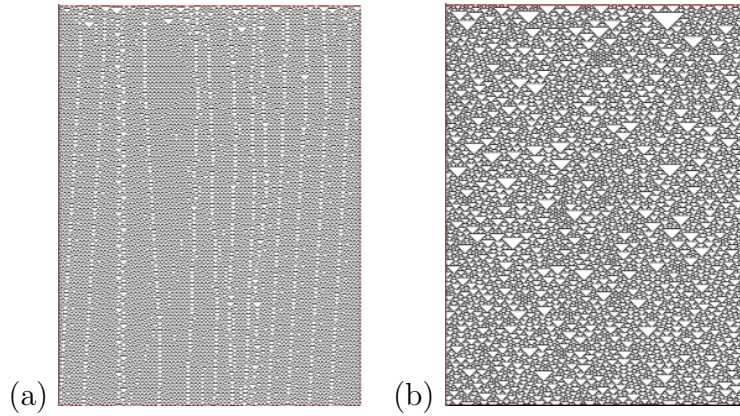


Figura 4.18: (a) Patrón de la regla  $\phi = 54$  y (b) patrón de la regla  $\phi_2 = 126$ .

incrementa al transcurrir el tiempo, mientras que las reglas  $\phi_1 = 62$ ,  $\phi_2 = 118$  y  $\phi = 126$  son de menor complejidad para  $t = 1$  paso temporal, la regla  $\phi = 126$  es la que presenta un incremento más rápido que las demás, esto está de acuerdo con nuestros resultados en el incremento de las posibles subcadenas generadas durante la interacción y que se refleja en la medida de entropía, la entropía de bloques y la complejidad de Lempel-Ziv durante la interacción dinámica.

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t > 5$
62	5[9]	21[39]	61[114]	81[150]	129[240]	—
118	5[9]	16[29]	49[92]	74[139]	95[175]	—
54	9[16]	17[32]	94[179]	675[1316]	—	—
126	3[5]	13[23]	107[198]	2867[5476]	—	—

Cuadro 4.1: Complejidad de los lenguajes regulares de las reglas que producen la interacción dinámica y de las reglas que se generan durante la interacción dinámica [4] (NODOS[ARCOS]), (— sin determinar).

Se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Que sucede en el caso de una interacción dinámica producida por dos reglas que difieren en todos sus mapeos y en su paridad?, el siguiente caso es un ejemplo de interacción dinámica mediante dos reglas que difieren en todos su mapeos y en sus paridades, ademas como habiamos mencionado, estas representan la transición de las reglas que son  $\leq 127$  y  $\geq 128$ , ademas no son sinónimas.

### 4.2.2. Reglas $\phi_1 = 126$ y $\phi_2 = 129$

Consideremos ahora las reglas de tercera clase  $\phi_1 = 126$  y  $\phi_2 = 129$ , los subconjuntos  $l_1$  y  $l_2$  de variables que describen los patrones generados por estas reglas de

evolución están compuestos de tres variables,  $l_1 = \{\text{triángulo blanco, escalamiento múltiple, triángulo equilátero}\}$  y  $l_2 = \{\text{triángulo negro, escalamiento múltiple, triángulo equilátero}\}$ , esto indica que las únicas variables que impiden que sean próximas entre si y que sus reglas no sean sinónimas son las variables *triángulo blanco* y *triángulo negro*, en la fig.4.19 se muestran los patrones generados por (a) la regla legal de tercera clase  $\phi_1 = 126$  y (b) la regla no legal de tercera clase  $\phi_2 = 129$ , la característica que hace que la regla  $\phi_2 = 129$  no se legal es que esta no mapea los estados nulos a estados nulos, pero tiene la característica de ser simétrica, además es una regla impar, esto provocara que durante la evolución se generen las estructuras triangulares negras, mientras que la regla  $\phi_1 = 126$  es una regla par.

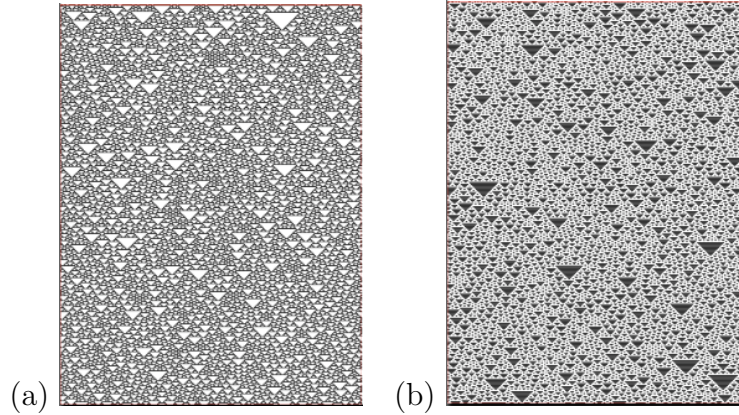


Figura 4.19: (a) Patrón de la regla  $\phi_1 = 126$  y (b) patrón de la regla  $\phi_2 = 129$ .

En la fig.4.20 y fig.4.21 se muestran las cantidades que se midieron para estas reglas, se consideran solamente subcadenas de tamaño  $n = 1, 2, 3, 4$ . Debido a que las reglas solo difieren en una variable (color de los triángulos), el comportamiento en las cantidades medidas es similar, en (a) de ambas figuras 4.20 y 4.21, se muestra la densidad de estados en función de los pasos temporales, en (b) fig.4.20 y fig.4.21, es interesante observar el decaimiento en la medida de entropía  $H_n$  en función de los pasos temporales para  $n = 1, 2, 3, 4$  del valor máximo  $H_{n=1,2,3,4} = 1bit$ , ya que este decaimiento es resultado de la evolución auto-organizada y de la naturaleza irreversible de las reglas de tercera clase [3], en (c) fig.4.20 y fig.4.21, se observa los decaimientos de la entropía de bloques  $h_{n=1,2,3,4}$  en función de los pasos temporales, en (d) fig.4.20 y fig.4.21, se muestra las contribuciones que cada una de las subsecuencias  $K_{n=1,2,3,4}$  hace a la información de correlación  $K_{corr}$ , la información mutua  $K_2$  es la que mayor contribuye a  $K_{corr}$  durante la evolución partiendo de  $K_2 = 0bit$  en  $t = 0$  debido a la distribución desordenada de los estados en los sitios del arreglo e incrementando su valor hasta alcanzar un valor de equilibrio, mientras que la densidad de información  $1 - H_1$  es prácticamente nula debido a que  $H_1 = 1bit$  a lo largo de la evolución, para  $n > 2$  las contribuciones a la información de correlación comienzan a decrecer, en (e) fig.4.20 y fig.4.21 se muestra una estimación a la infor-

mación de correlación  $K_{corr}$  y en (f) fig.4.20 y fig.4.21 la complejidad de Lempel-Ziv decrece debido a la formación de patrones durante la evolución.

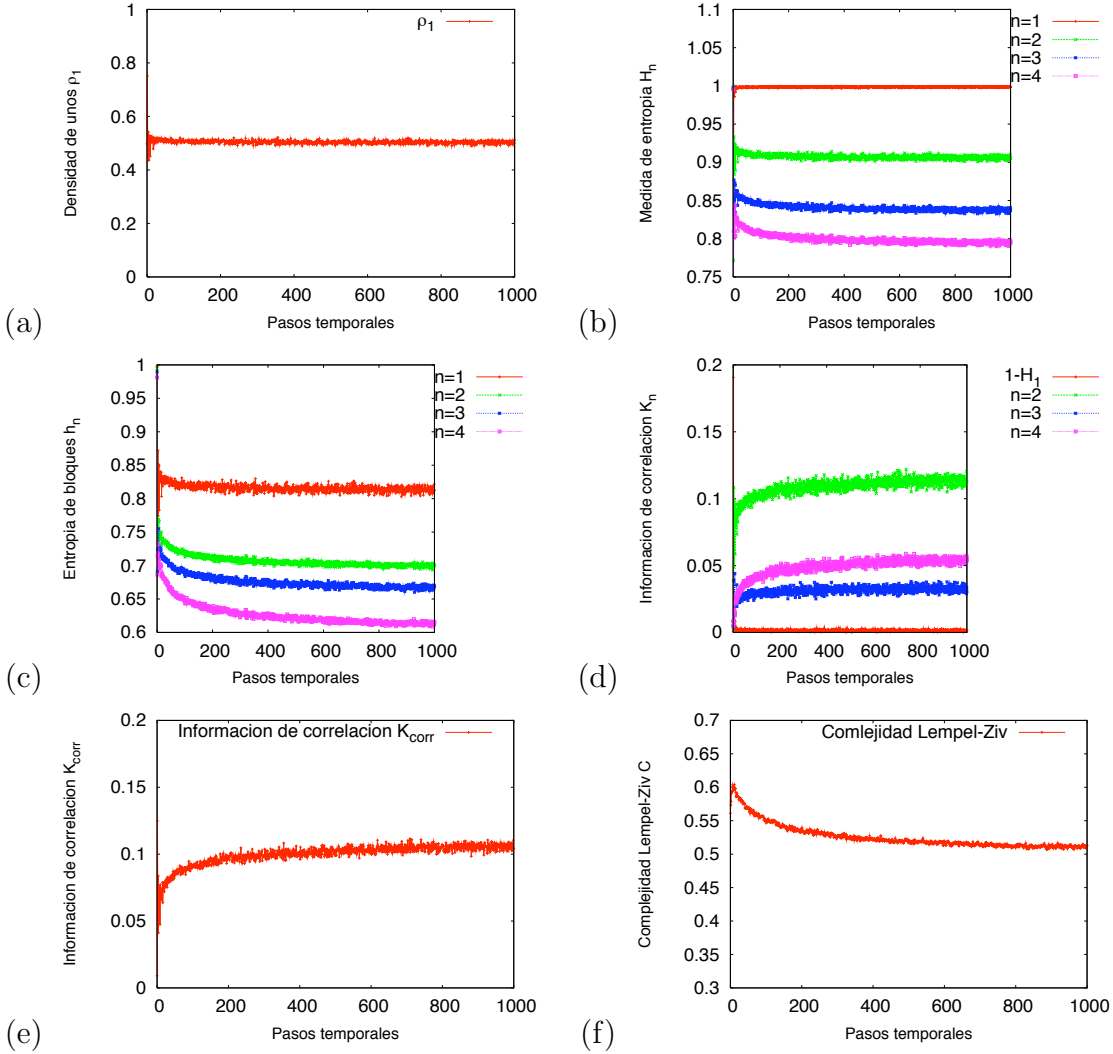


Figura 4.20: Evolución de la regla  $\phi_2 = 126$ , en (a) se muestra la densidad de unos, en (b) se observa la medida de entropía  $H_n$ , en (c) la entropía de bloques  $h_n$ , en (d) la información de bloques de  $K_1$  hasta  $K_8$ , en (e) la información de correlación  $K_{corr}$  y en (f) la complejidad de Lempel-Ziv  $C$ , todas estas cantidades como una función de los pasos temporales.

Ahora ambas reglas de evolución  $\phi_1 = 126$  y  $\phi_2 = 129$  interactúan. En la fig.4.22 observamos el patrón de la interacción de ambas reglas, la regla  $\phi_1 = 126$  es la que al inicio toma mayor probabilidad de evolución  $p_1 = 1$  y  $\phi_2 = 129$  es la que tomara menor probabilidad de evolución  $1 - p_1 = 0$ , en la región de transición  $p_2 = 0,25$  y  $p_2 = 0,75$  se observa que la interacción dinámica destruye toda estructura generada

## 4.2.2 Reglas $\phi_1 = 126$ y $\phi_2 = 129$

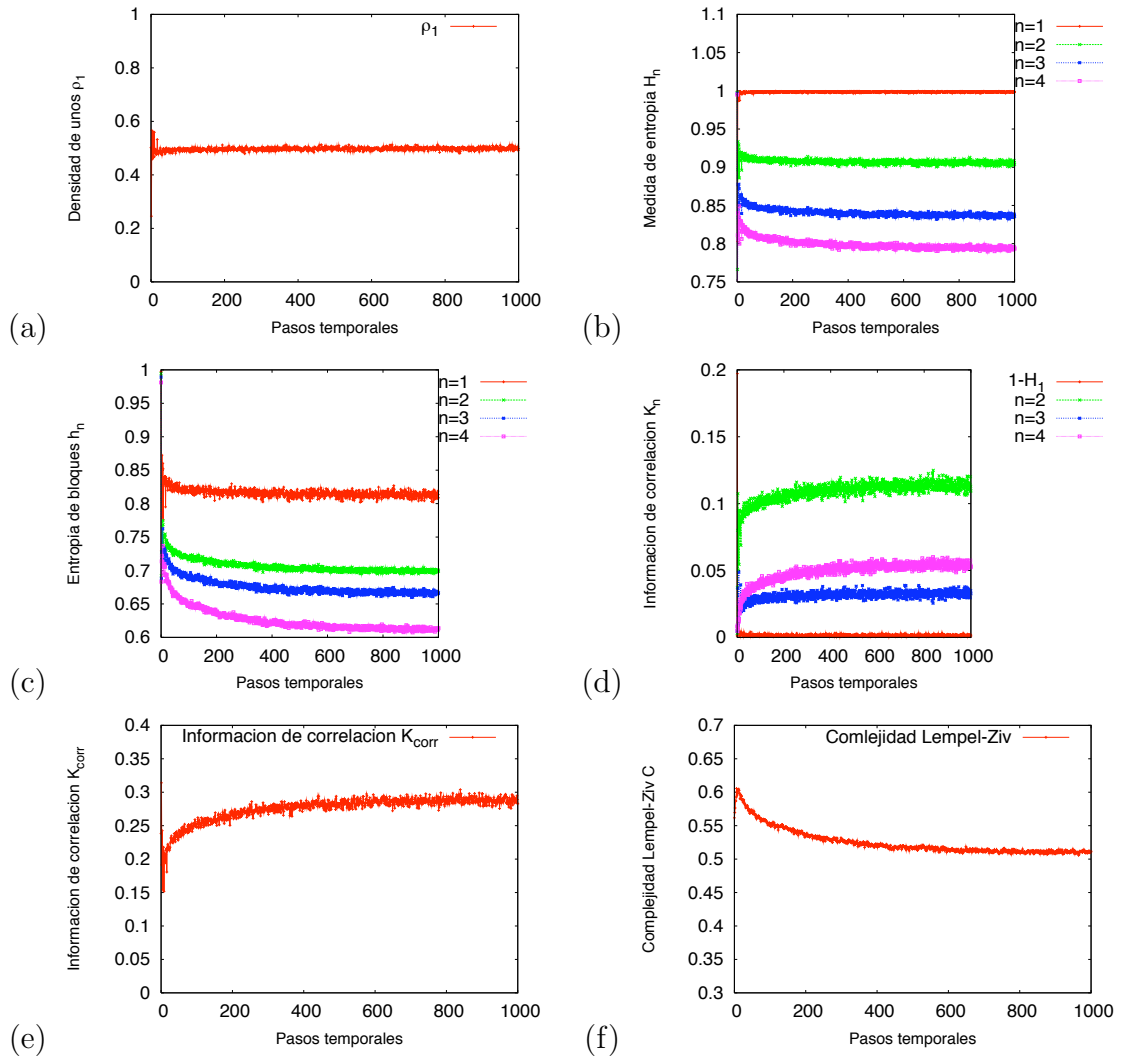


Figura 4.21: Evolución de la regla  $\phi_2 = 129$ , en (a) se muestra la densidad de unos, en (b) se observa la medida de entropía  $H_n$ , en (c) la entropía de bloques  $h_n$ , en (d) la información de bloques de  $K_1$  hasta  $K_8$ , en (e) la información de correlación  $K_{corr}$  y en (f) la complejidad de Lempel-Ziv  $C$ , todas estas cantidades como una función de los pasos temporales.

por ambas reglas, esto se debe a un conflicto que se genera en las variables *triángulo blanco* y *triángulo negro*, asociado a la paridad de las reglas [1], esto nos lleva a pensar que la interacción dinámica de estas reglas es completamente desordenada y sin ninguna señal de poseer estructuras regulares o irregulares como en el caso de las reglas  $\phi = 62$  y  $\phi = 118$ , esto se debe a la influencia que tienen las probabilidades sobre las ocho posibles configuraciones de las vecindades para ambas reglas, este hecho se revisará con mas detalle mas adelante.



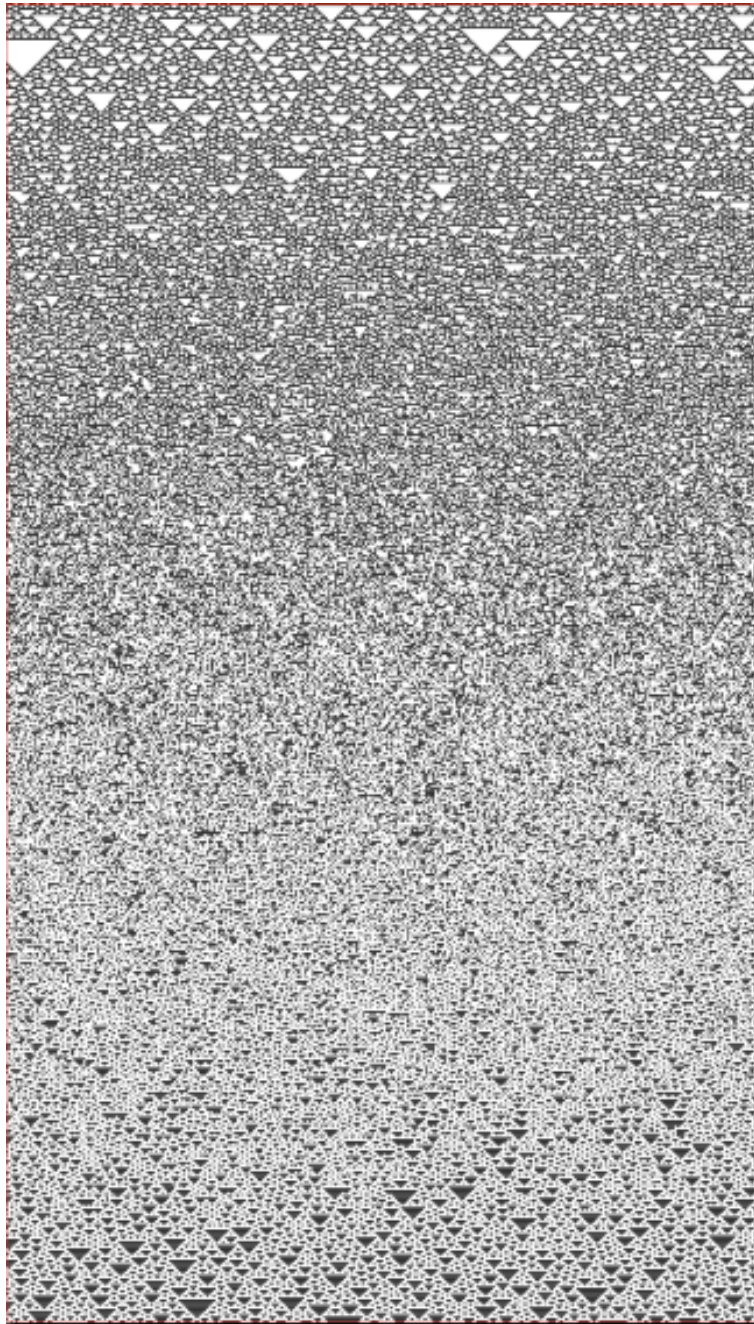


Figura 4.22: Patrón de la interacción de reglas no legales,  $\phi_1 = 126$  y  $\phi_2 = 129$ .

Debido a que la interacción dinámica genera un patrón desordenado, es suficiente considerar subcadenas de longitud hasta  $n = 4$ . En la fig.4.23-(a) se observa la medida de entropía  $H_n$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), durante toda la dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante

la interacción dinámica, para  $n = 1, 2, 3, 4$ .  $H_1$  experimenta un decaimiento para  $p_1 = 1$  y  $1 - p_1 = 0$  debido a que la densidad de unos incrementa y la densidad de ceros disminuye, durante la región de transición,  $H_1$  incrementa aproximándose rápidamente al desorden total en  $p_1 = 1 - p_1 = 0,5$ , en ese punto la densidad de unos y ceros se igualan debido a la dinámica desordenada donde podremos encontrar unos y ceros con igual probabilidad, para  $1 - p_1 > 0,5$  y  $p_1 < 1 - p_1$  la regla de evolución  $\phi_2 = 129$  comienza a dominar la dinámica lo que se refleja en un incremento de la medida de entropía  $H_1$  de la misma magnitud que el decrecimiento en  $1 < p_1 \leq 0,75$  y  $0 < 1 - p_1 \leq 0,25$ , hasta que finalmente en  $1 - p_1 = 1$  y  $p_1 = 0$  la regla  $\phi_2 = 129$  alcanza su máxima probabilidad de evolución recuperando toda la información que la caracteriza. Las medidas de entropía  $H_{n=2,3,4}$  experimentan un salto que crece gradualmente en la región de transición hasta alcanzar el máximo valor en  $H_{n=1,2,3,4} = 1bit$  correspondiente a la región de máximo desorden en  $p_1 = 1 - p_1 = 0,5$ , en esta región todas las posibles configuraciones de subsecuencias son igualmente probables, posteriormente decae debido a que la regla  $\phi_2 = 129$  comienza a dominar la dinámica y las estructuras triangulares negras comienzan a crearse hasta que finalmente el atractor de la regla  $\phi_2 = 129$  se recupera. Hay que notar que a pesar del fuerte conflicto que hay entre estas dos reglas de evolución, la interacción dinámica es completamente simétrica debido a que los estados generados durante la interacción no influyen sobre la dinámica de la regla  $\phi_2 = 129$ , ya que es un *AC* de tercera clase cuyo patrón es estructurado, multiescalado y aperiódico que solo es distorsionado al inducirle ruido dinámico con baja probabilidad.

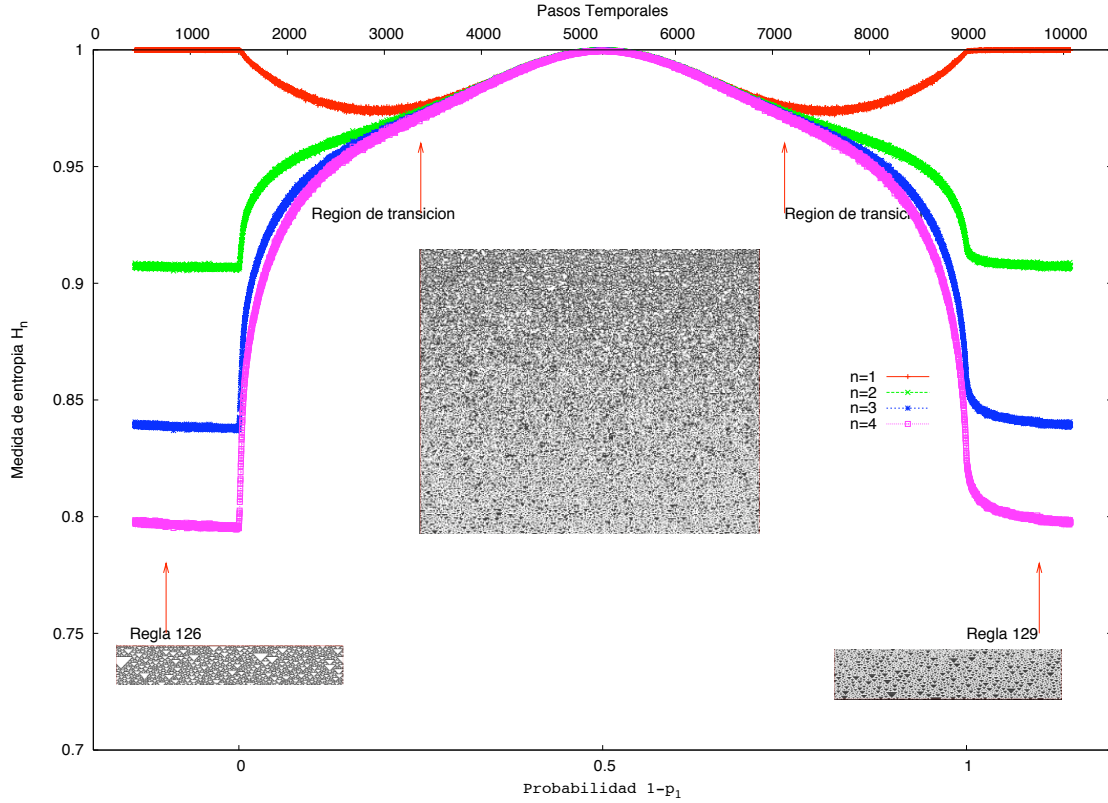


Figura 4.23-(a): Medida de entropía  $H_n$  de subsecuencias de tamaño  $n=1, \dots, 4$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

El decaimiento en la entropía de bloques  $h_n$  para  $n = 1, 2, 3, 4$  fig.4.23-(b), se aproxima rápidamente a la región desordenada  $p_1 = 1 - p_1 = 0,5$ , esto confirma la dinámica altamente desordenada que se genera en la interacción de las reglas  $\phi_1 = 126$  y  $\phi_2 = 129$ . Como es de esperarse, en un sistema completamente desordenado las correlaciones que existen entre las componentes del sistema, en nuestro caso sitios de la malla en la que evoluciona nuestro  $AC$ , es completamente nula, debido a que no hay ninguna dependencia entre los estados de los sitios de la malla, de esta forma la información mutua  $K_2$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), durante toda la dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica, fig.4.23-(c), se aproxima rápidamente a su mínimo valor nulo debido al rompimiento de las estructuras generadas por la regla  $\phi_1 = 126$  al inducirle ruido dinámico que crece gradualmente, en la región de transición toda información de correlación se destruye hasta que la regla  $\phi_2 = 129$  domina en la dinámica. La densidad de información  $K_1 = 1 - H_1$  parece contribuir más a la información de correlación  $K_{corr}$  solo en aquellas regiones para la cual la probabilidad esta entre los valores  $0,75 < p_1 \leq 1$  y  $0 < 1 - p_1 \leq 0,25$  ya que en esas regiones la dinámica parece comportarse mas como la regla  $\phi_1 = 126$  y  $\phi_2 = 129$  respectivamente, pero

## 4.2.2 Reglas $\phi_1 = 126$ y $\phi_2 = 129$

en  $0,25 < p_1 = 1 - p_1 < 0,75$  la densidad de información  $1 - H_1$  cae a cero.

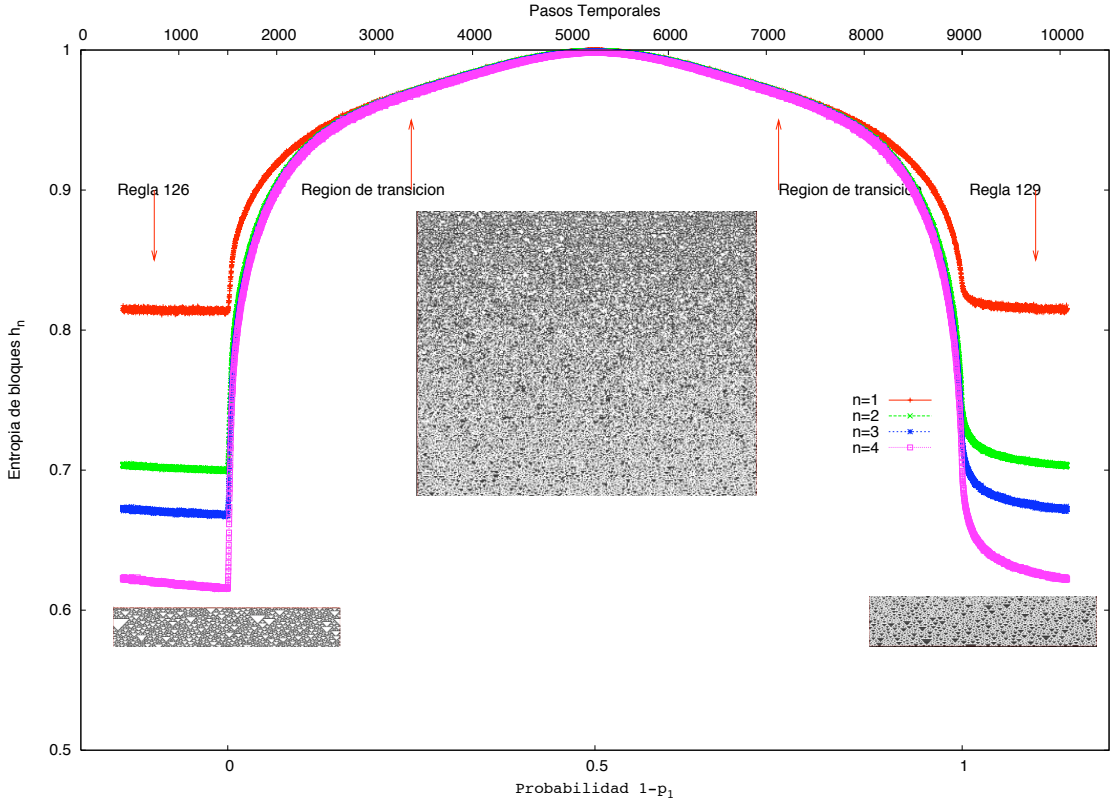


Figura 4.23-(b): Entropía de bloques  $h_n$  de subsecuencias de tamaño  $n = 1, \dots, 4$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

Una estimación a la información de correlación  $K_{corr}$  fig.4.23-(d), refleja lo dicho anteriormente, en la región de transición el decaimiento de la información de correlación es más rápido hasta alcanzar el valor cero. La complejidad de Lempel-Ziv normalizada  $C/b$ , fig.4.23-(e), se maximiza, esto se debe a que desde el punto de vista de Lempel-Ziv, un sistema desordenado requiere más esfuerzo dinámico o computacional que un sistema con estructuras multiescaladas y aperiódicas como las generadas por los  $AC$  de tercera clase para ser reproducido, esto lleva a cuestionar si la medida de complejidad de Lempel-Ziv puede realmente ser considerada una medida de complejidad a favor de nuestra intuición, puesto que varios autores [6, 7, 8, 5] *et. al.* han encontrado y propuesto el hecho de que para otros tipos de medida de complejidad como es el caso de la información mutua, un sistema desordenado es aquel de mínima complejidad.



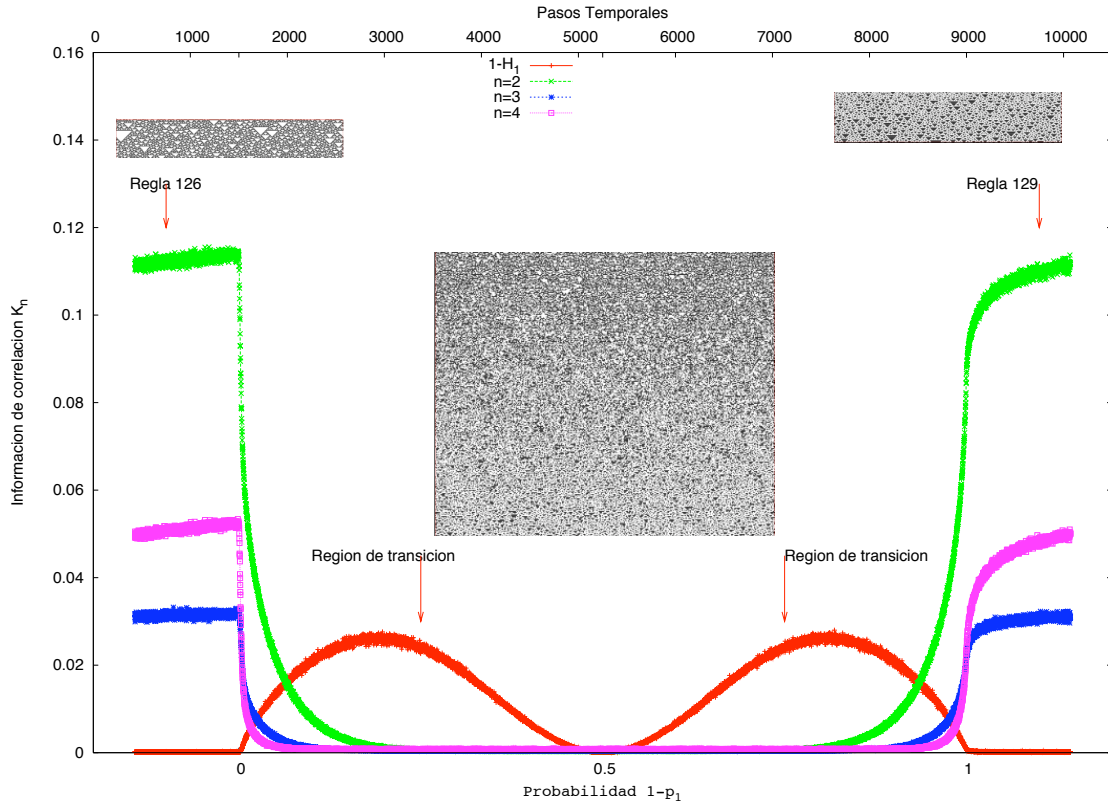


Figura 4.23-(c): Contribuciones a la Información de correlación  $K_n$  de subsecuencias de tamaño  $n=1, \dots, 4$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

Las reglas  $\phi_1 = 126$  y  $\phi_2 = 129$  pertenecen a conjuntos distintos de los  $AC$  elementales, la regla  $\phi_1 = 126$  pertenece al conjunto de las reglas legales y tiene la propiedad de ser par, la  $\phi_2 = 129$  pertenece al conjunto que no satisface los criterios de legalidad y tiene la propiedad de ser impar, ambas reglas no son sinónimas,  $\phi_1 = 126$  es  $\leq 127$  y  $\phi_2 = 129$  es  $\geq 128$ , esto parece producir un conflicto en los mapeos de las vecindades durante la interacción dinámica. Para el caso de la regla legal  $\phi_1 = 126$  los mapeos para las ocho componentes son:

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0 & 001 \longrightarrow 1 & 010 \longrightarrow 1 & 011 \longrightarrow 1 \\ 100 \longrightarrow 1 & 101 \longrightarrow 1 & 110 \longrightarrow 1 & 111 \longrightarrow 0, \end{array}$$

para el caso de la regla no legal  $\phi_1 = 129$  los mapeos para las ocho componentes son:

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 1 & 001 \longrightarrow 0 & 010 \longrightarrow 0 & 011 \longrightarrow 0 \\ 100 \longrightarrow 0 & 101 \longrightarrow 0 & 110 \longrightarrow 0 & 111 \longrightarrow 1, \end{array}$$

las representaciones binaria de ambas reglas son:  $\phi_1 = 01111110$  y  $\phi_2 = 10000001$ .

## 4.2.2 Reglas $\phi_1 = 126$ y $\phi_2 = 129$

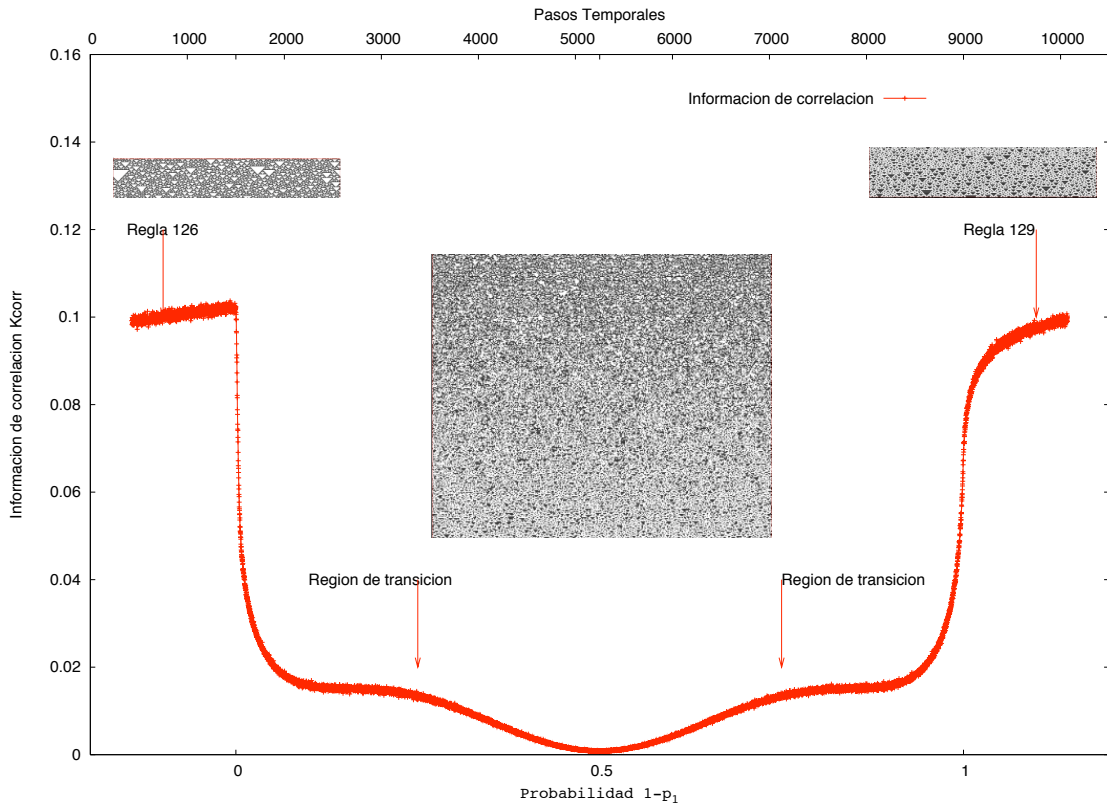


Figura 4.23-(d): Información de correlación  $K_{corr}$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

Los mapeos defieren en las ocho posibles componentes, en la región de la interacción dinámica donde las probabilidades de evolución para ambas reglas es  $p_1 = 1 - p_1 = 0,5$  todas las componentes tendrán igual probabilidad de mapear valores 0 o 1,

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0,1 & 001 \longrightarrow 1,0 & 010 \longrightarrow 1,0 & 011 \longrightarrow 1,0 \\ 100 \longrightarrow 1,0 & 101 \longrightarrow 1,0 & 110 \longrightarrow 1,0 & 111 \longrightarrow 0,1 \end{array}$$

esto provoca  $2^8$  posibles formas de que las vecindades arrojen los valores 0 o 1, pero esto corresponde a las 256 reglas de evolución de  $AC$  elemental, entonces, durante la interacción dinámica se generan las 256 reglas de evolución de  $AC$  elemental, lo que provoca que exista una mezcla de 256 patrones que interfieren entre si destruyendo toda posible estructura y generando puro ruido blanco, se puede argumentar que en el caso de  $AC$  elementales el ruido blanco es la interferencia de las 256 reglas de evolución, esto esta de acuerdo con el ruido blanco que se estudia en ramas de la Física como la Óptica y la Acústica donde el ruido blanco es la interferencia de todas las frecuencias y todas predominan con igual intensidad.

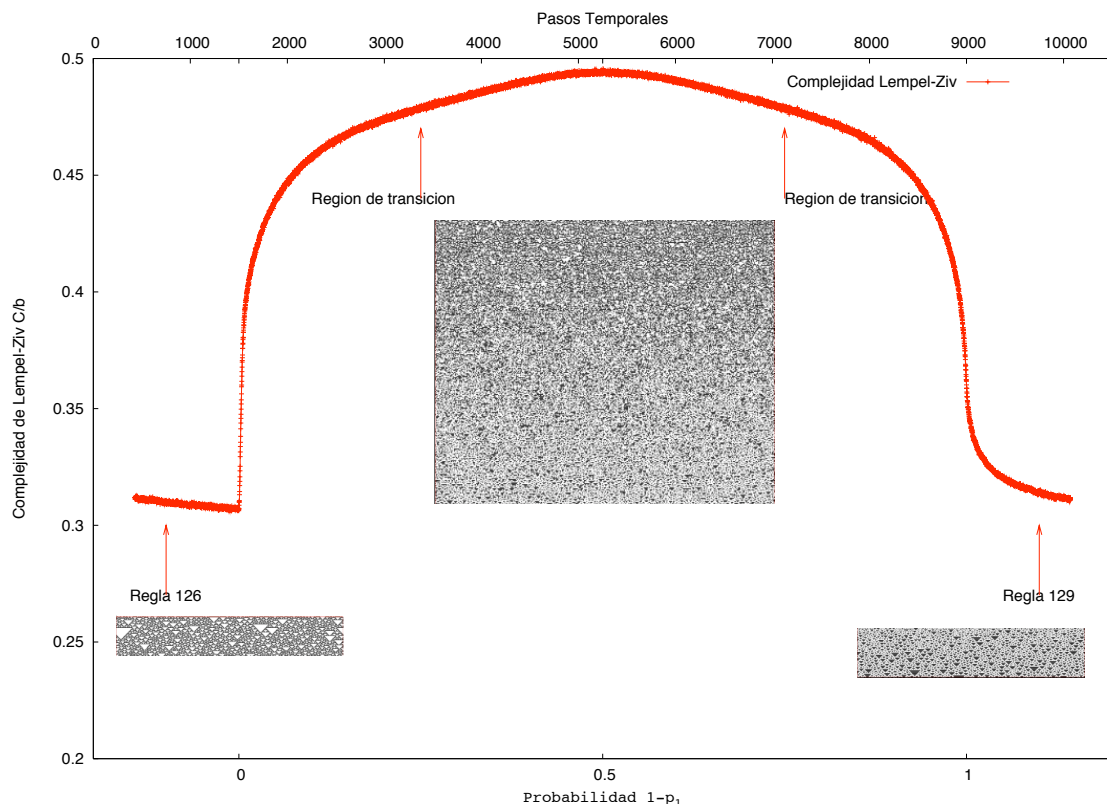


Figura 4.23-(e): Complejidad de Lempel-Ziv normalizada  $C/b$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

### 4.2.3. Reglas $\phi_1 = 82$ y $\phi_2 = 26$

Consideremos ahora un caso quizás más interesante que los anteriores compuesto por las reglas  $\phi_1 = 82$  y  $\phi_2 = 26$ , los patrones de ambas reglas están compuestos por el subconjunto de variables  $l_1 = \{\text{corrimiento}, \text{corrimiento derecho}, \text{corrimiento trebol}, \text{triángulo blanco}, \text{triángulo equilátero}, \text{triángulo no fractal}\}$  y  $l_2 = \{\text{corrimiento}, \text{corrimiento izquierdo}, \text{corrimiento trebol}, \text{triángulo blanco}, \text{triángulo equilátero}, \text{triángulo no fractal}\}$ , al igual que en los casos anteriores, estos patrones solo difieren en una sola variable, la dirección del corrimiento, por lo que sus reglas no son sinónimas, pero ambas reglas son pares y  $\leq 127$ . La fig.4.23 muestra los corrimientos de cada una de estas reglas, manifestándose mediante bandas compuestas por triángulos no fractales de ancho variable y corrimientos trebol. Como se había visto en el capítulo 1, la regla  $\phi_1 = 82$  manifiesta sensibilidad ante las condiciones iniciales ordenadas. Debido a la proximidad que la regla  $\phi_2 = 26$  tiene con la regla  $\phi_1 = 82$ , esta también tendrá los mismos efectos ante este tipo de condiciones iniciales. De la fig.4.23 y del análisis hecho en capítulo 1, las estructuras generadas por estas reglas son periódicas, de esta forma la densidad de unos

### 4.2.3 Reglas $\phi_1 = 82$ y $\phi_2 = 26$

$\rho_1$ , la medida de entropía  $H_n$ , la entropía de bloques  $h_n$ , las contribuciones  $K_n$  a la información de correlación  $K_{corr}$  y la complejidad de Lempel-Ziv normalizada  $C/b$  se comportaran, después de un tiempo transiente  $t_{trans}$  de máxima duración  $t_{trans} \leq 10$  pasos temporales, de forma periódica, esto se muestra en las fig.4.24 y 4.25. Lo interesante ocurre cuando estas reglas interactúan.

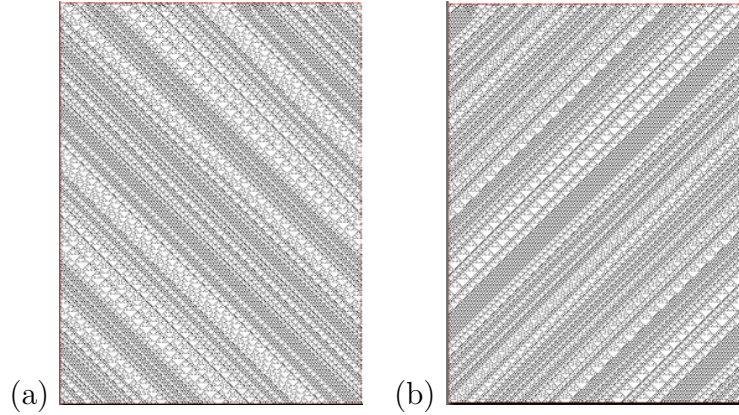


Figura 4.23: (a) Patrón de la regla no legal  $\phi_1 = 82$  y (b) patrón de la regla no legal  $\phi_2 = 26$ .

La interacción se lleva a cabo con probabilidad inicial  $p_1 = 1$  para la regla  $\phi_1 = 82$  y con probabilidad inicial  $1 - p_1 = 0$  para la regla  $\phi_2 = 26$ , el patrón generado durante la interacción dinámica se observa en la fig.4.26, en la región de transición se aprecia que las estructuras triangulares blancas, que forman parte del subconjunto de las variables de los patrones de ambas reglas, comienzan a dispersarse y los corrimientos trebol se ramifican; la interacción dinámica presenta mayor auto-organización que el caso de las reglas  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$ , esta auto-organización parece tener grandes efectos sobre la regla  $\phi_2 = 26$ , ya que una vez alcanzada su máxima probabilidad de evolución  $1 - p_1 = 1$  el ancho de las bandas de triángulos blancos incrementan considerablemente y los corrimientos trebol disminuyen drásticamente, por lo que su patrón no recupera las bandas de ancho variable que generaría si partiera de una condición inicial aleatoria. Por lo descrito en capítulo 1 para la regla  $\phi_1 = 82$  y por lo que se verá, este efecto es consecuencia de configuraciones de estados de entropía  $< 1$ .

En la fig.4.27-(a) la medida de entropía  $H_n$ , para  $n = 1, \dots, 9$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), durante toda la dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica, experimenta un decaimiento considerable durante la interacción dinámica, este decaimiento se debe a que el número de posibles configuraciones de subsecuencias generadas por la evolución de la regla  $\phi_1 = 82$  disminuye gradualmente durante la interacción dinámica, debido a la dispersión de triángulos blancos; esto es un comportamiento típico en la evolución de los  $AC$  de tercera clase debido a su naturaleza auto-organizada e irre-

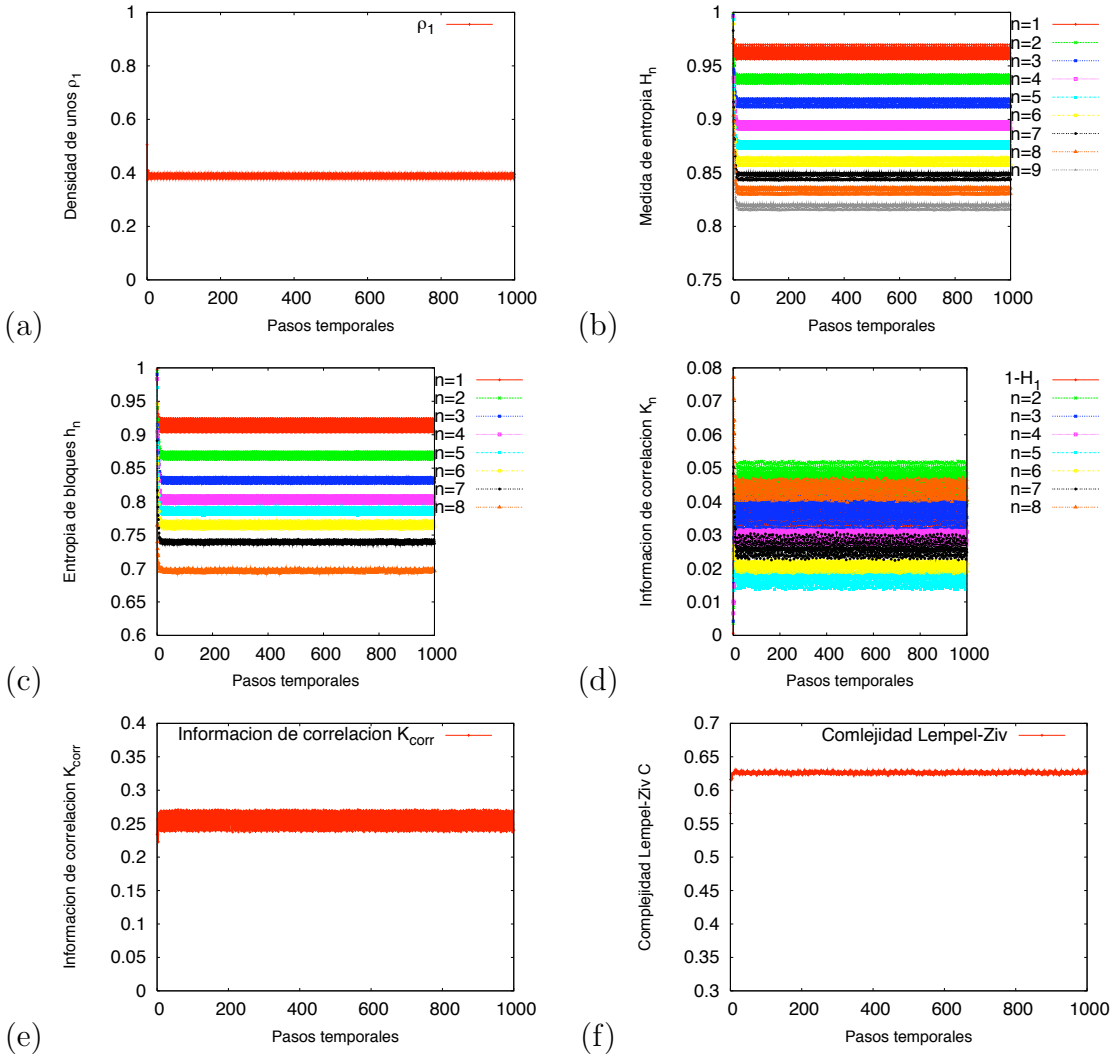


Figura 4.24: Evolución de la regla  $\phi_2 = 82$ , en (a) se muestra la densidad de unos, en (b) se observa la medida de entropía  $H_n$ , en (c) la entropía de bloques  $h_n$ , en (d) la información de bloques de  $K_1$  hasta  $K_8$ , en (e) la información de correlación  $K_{corr}$  y en (f) la complejidad de Lempel-Ziv  $C$ , todas estas cantidades como una función de los pasos temporales, en un arreglo de 1000 sitios y 1000 pasos temporales.

versible [3]. A pesar de la existencia de estructuras ramificadas descendientes de los corrimientos trebol, el decaimiento de la medida de entropía muestra que las estructuras triangulares blancas se dispersan de manera regular (a diferencia del caso de las reglas  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$  en el que observamos un ligero decaimiento en la media de entropía), además la ramificaciones no parecen afectar las estructuras triangulares, debido a la influencia que las probabilidades de las reglas tienen sobre las vecindades durante la interacción dinámica, las ramificaciones también colaboran en la

### 4.2.3 Reglas $\phi_1 = 82$ y $\phi_2 = 26$

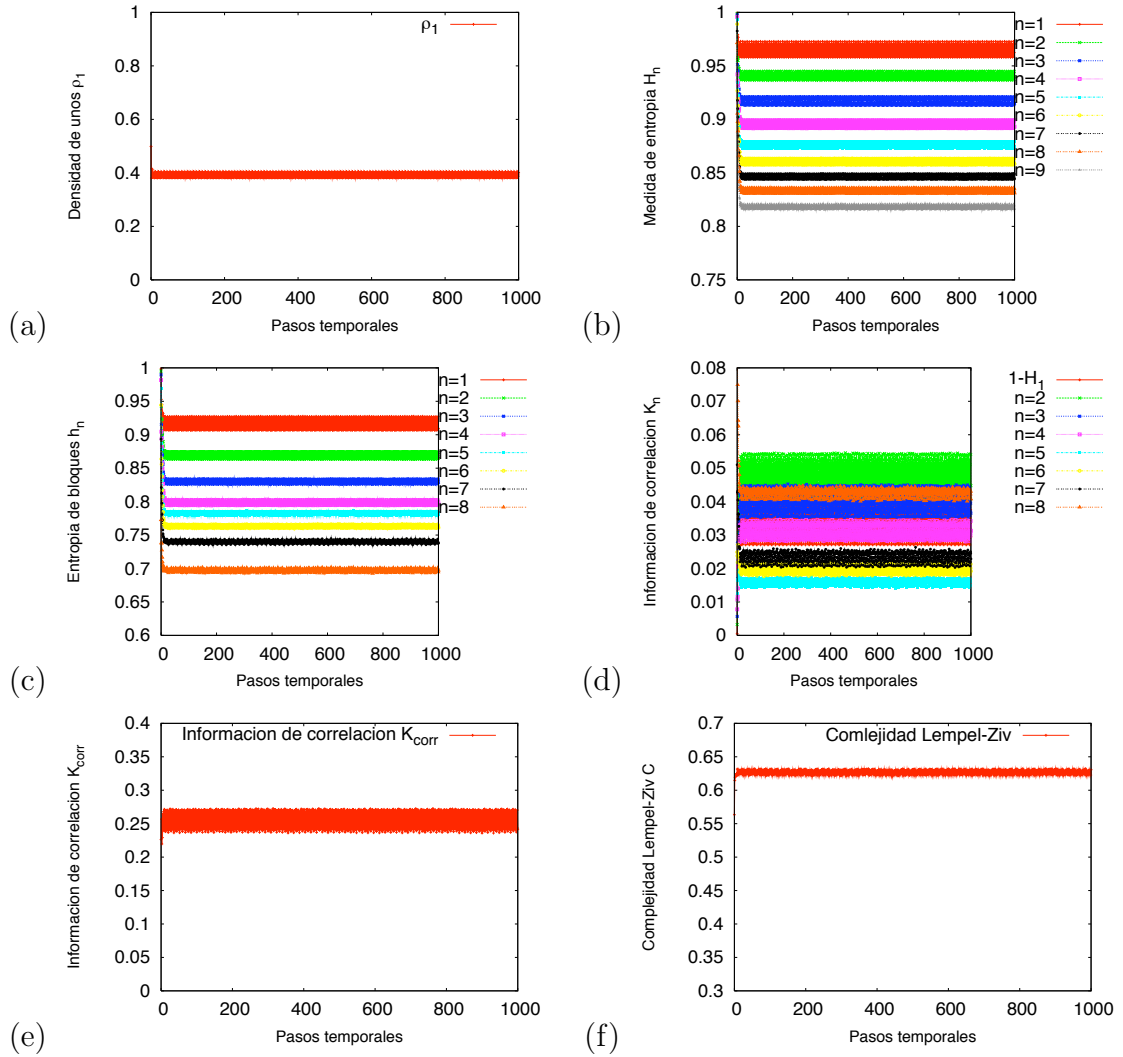


Figura 4.25: Evolución de la regla  $\phi_2 = 26$ , en (a) se muestra la densidad de unos, en (b) se observa la medida de entropía  $H_n$ , en (c) la entropía de bloques  $h_n$ , en (d) la información de bloques de  $K_1$  hasta  $K_8$ , en (e) la información de correlación  $K_{corr}$  y en (f) la complejidad de Lempel-Ziv  $C$ , todas estas cantidades como una función de los pasos temporales, en un arreglo de 1000 sitios y 1000 pasos temporales.

producción de estructuras triangulares, sin embargo la transición auto-organizada e irreversible de la regla  $\phi_1 = 82$  a la regla  $\phi_2 = 26$  afecta al atractor de la regla  $\phi_2 = 26$ .

Desde el punto de vista computacional de los *AC*, una condición inicial puede ser considerada como la información de entrada (llamada *input*), o los datos de inicio, y la regla de evolución  $\phi$  puede considerarse como el *algoritmo* que opera sobre el *input*, tal que aplicar el *algoritmo*  $\phi$  al *input*, el *AC* llevara a cabo tareas de



procesamiento de información produciendo información de salida (llamada *output*), si se introducen anomalías o modificaciones al *input* y el *algoritmo* no se ve afectado por estas, tal que continua produciendo el *output* sin modificación alguna, entonces se dice que el algoritmo es *robusto*, si el *output* es modificado entonces el *algoritmo* carece de *robustez*.

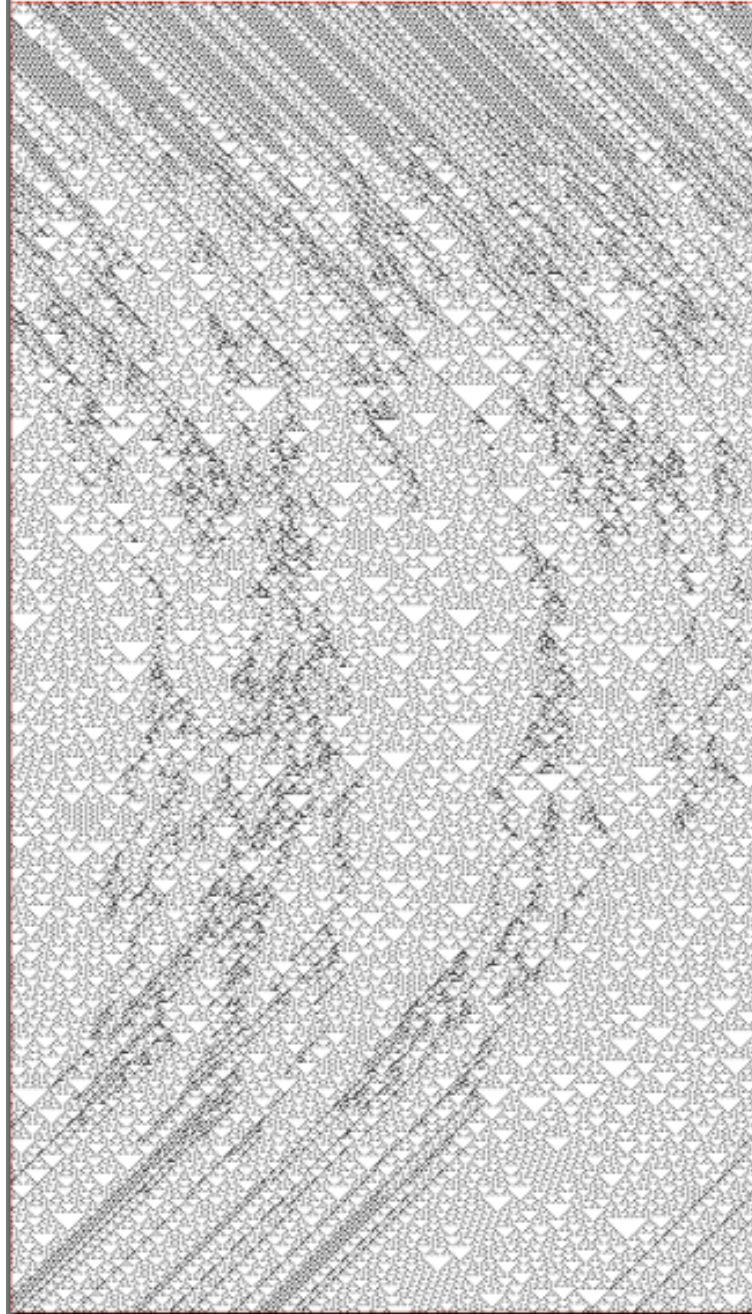


Figura 4.26: Patrón de la interacción de reglas no legales,  $\phi_1 = 82$  y  $\phi_2 = 26$ .

Se puede interpretar a las reglas  $\phi_1 = 82$  y  $\phi_2 = 26$  como algoritmos que carecen de robustez, dado que son muy sensibles a las modificaciones del input. El patrón de la interacción dinámica y la medida de entropía  $H_n$  indican que cuando la probabilidad de evolución de la regla  $\phi_2 = 26$  alcanza su máximo valor  $1 - p_1 = 1$ , las configuraciones de subcadenas y la densidad de ceros y unos ha disminuido drásticamente en comparación a las configuraciones de subcadenas y densidades de ceros y unos que se obtienen cuando la condición inicial es aleatoria, esto lleva a que las condiciones, o bien el input del algoritmo (regla)  $\phi_2 = 26$  haya experimentado alguna modificación en la información durante la interacción dinámica, tal que el output (en este caso el atractor) se ve altamente modificado, pero a pesar de la disminución de corrimientos trébol, el comportamiento de los triángulos blancos sigue manteniéndose periódico. Se podría resumir esto, diciendo que existe un conjunto de condiciones iniciales (input) con medida de entropía  $H_n < 1$ , para el cual el atractor (output) de estas reglas se ve afectado. Un aspecto que surge al iniciar la interacción dinámica,  $p_1 = 1$  y  $1 - p_1 = 0$ , es la presencia de estados transientes y que son detectados a partir de subsecuencias de longitud  $n = 4$  en forma de picos en la medida de entropía  $H_n$  y que se deben a una transición de las estructuras de bandas de ancho variable formadas por triángulos y corrimientos trébol de la regla  $\phi_1 = 82$  a la estructuras triangulares que se dispersan y a las estructuras ramificadas. Lo anterior también puede ser observado en la entropía de bloques  $h_n$  para  $n = 1, \dots, 8$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), durante toda la dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ) durante la interacción dinámica, fig.4.27-(b), solo que en este caso, los estados transientes que surgen al iniciar la interacción dinámica son detectados a partir de subcadenas de tamaño  $n = 2$ , esto se debe a que la entropía de bloques es más sensible que la medida de entropía. Las contribuciones a la información de correlación en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), durante toda la dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica, fig.4.27-(c), indican que durante la interacción dinámica la densidad de información  $1 - H_1$  es la que mayor contribuye a la información de correlación  $K_{corr}$ , mientras que la información mutua  $K_2$  esta por debajo de la densidad de información, para  $n > 3$  las contribuciones a la información de correlación comienzan a disminuir gradualmente. Un aspecto interesante que se puede notar de las contribuciones a la información de correlación esta en la densidad de información  $1 - H_1$  y la información mutua  $K_2$ , cuando la regla  $\phi_2 = 26$  parte de una condición inicial aleatoria, la información mutua  $K_2$  es la que mayor contribución hace a la información de correlación  $K_{corr}$ , esto no sucede despues de la interacción dinámica debido a que la regla  $\phi_2 = 26$  no es robusta, las contribuciones de correlación  $K_n$  se verán afectadas y la densidad de información es la que mayor contribución tendrá a la información de correlección.



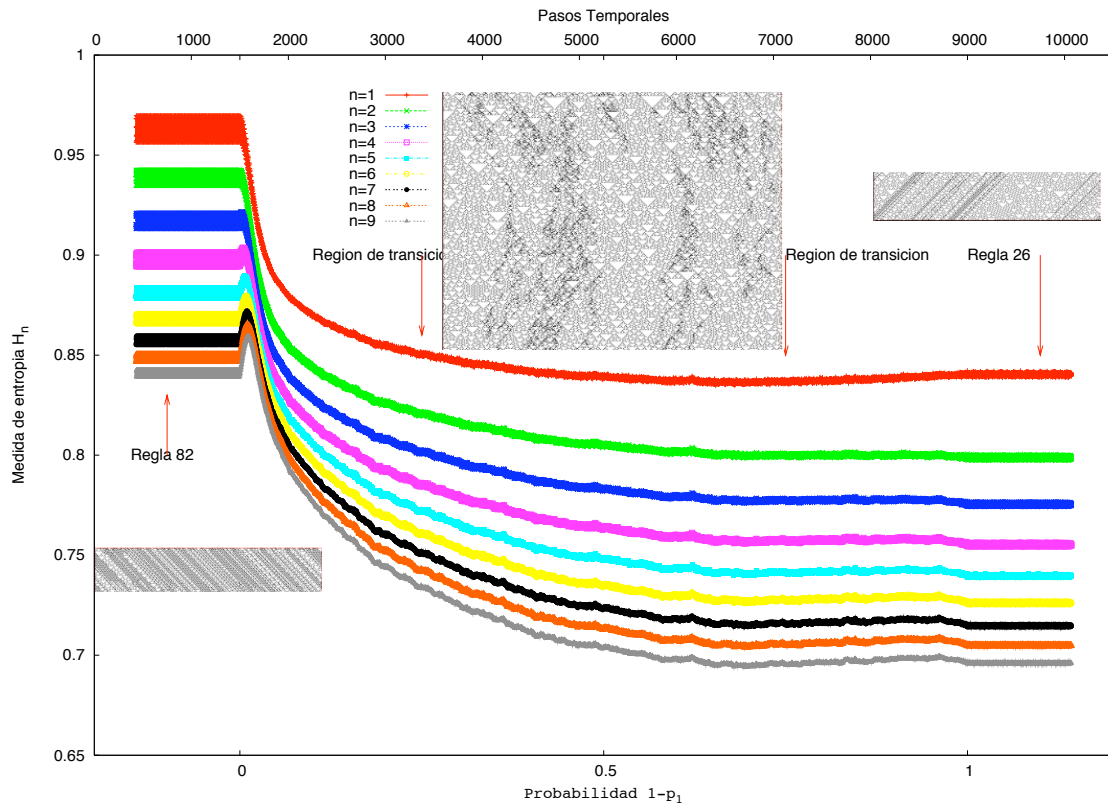


Figura 4.27-(a): Medida de entropía  $H_n$  de subsecuencias de tamaño  $n = 1, \dots, 9$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

Una estimación a la información de correlación, fig.4.27-(d), muestra que las correlación para  $p_1 = 1 - p_1 = 0,5$  son mayores que las que presentan las reglas de evolución  $\phi_1 = 82$  y  $\phi_2 = 26$  ya que la interacción dinámica se auto-organiza mediante reglas de evolución de tercera clase y con estructuras regulares. La complejidad normalizada de Lempel-Ziv  $C/b$  fig.4.27-(e) muestra que durante la interacción dinámica se forman patrones, esto se refleja en su decaimiento, lo cual significa que durante la interacción dinámica, la formación de patrones de triángulos blancos y ramificaciones, disminuyen la formación de posibles subsecuencias debido a las reglas de evolución que se generan durante la interacción.

### 4.2.3 Reglas $\phi_1 = 82$ y $\phi_2 = 26$

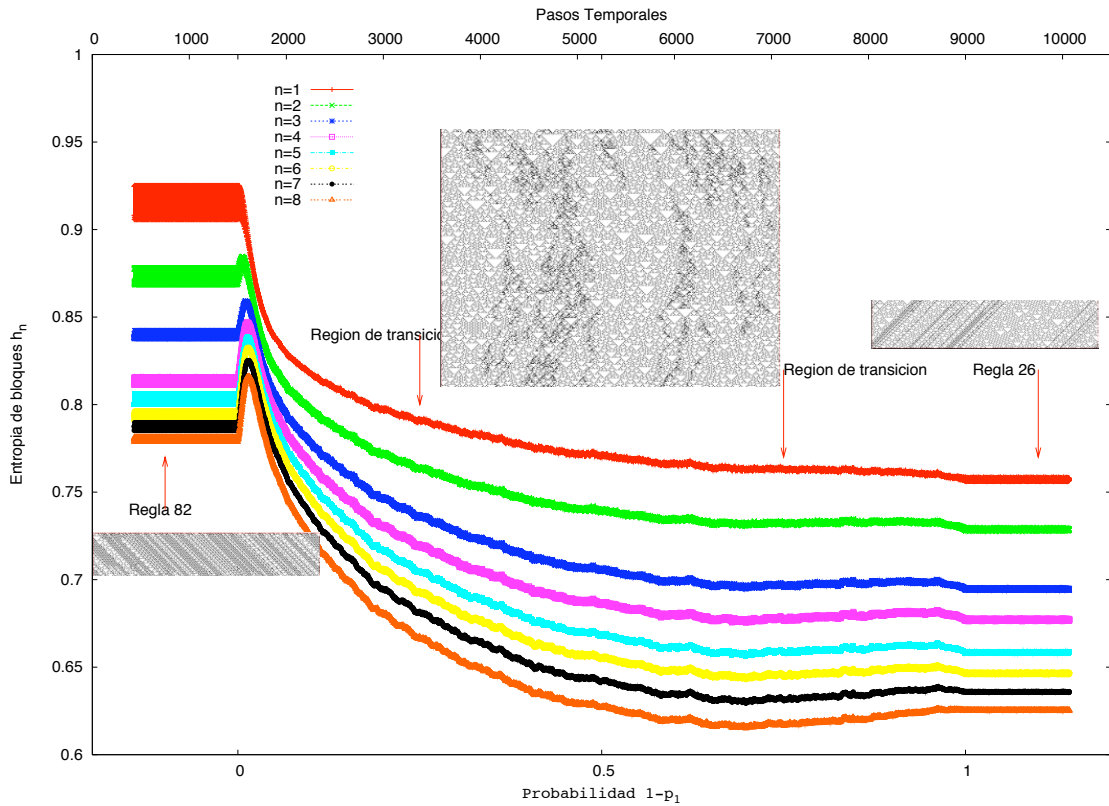


Figura 4.27-(b): Entropía de bloques  $h_n$  de subsecuencias de tamaño  $n = 1, \dots, 8$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

Dado que las reglas  $\phi_1 = 82$  y  $\phi_2 = 26$  son pares y próximas entre si, solo una variable las separa, las probabilidades de evolución de cada regla no afectan a todas las componentes, considerando los mapeos de las componentes de cada regla, los mapeos de las ocho componentes de la regla  $\phi_1 = 82$  son:

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0 & 001 \longrightarrow 1 & 010 \longrightarrow 0 & 011 \longrightarrow 0 \\ 100 \longrightarrow 1 & 101 \longrightarrow 0 & 110 \longrightarrow 1 & 111 \longrightarrow 0, \end{array}$$

los mapeos de las ocho componentes para la regla  $\phi_2 = 26$  son:

$$\begin{array}{cccc} 000 \longrightarrow 0 & 001 \longrightarrow 1 & 010 \longrightarrow 0 & 011 \longrightarrow 1 \\ 100 \longrightarrow 1 & 101 \longrightarrow 0 & 110 \longrightarrow 0 & 111 \longrightarrow 0, \end{array}$$

la representaciones binaria de ambas reglas son:  $\phi_1 = 01010010$  y  $\phi_2 = 00011010$ .

Los mapeos de las ocho componentes solo difieren en las vecindades 011 y 110, las demás componentes mapean a los mismos valores, en la región de interacción dinámica donde la probabilidad de evolución para ambas reglas es  $p_1 = 1 - p_1 = 0,5$  existe dos mapeos con igual probabilidad de ocurrir

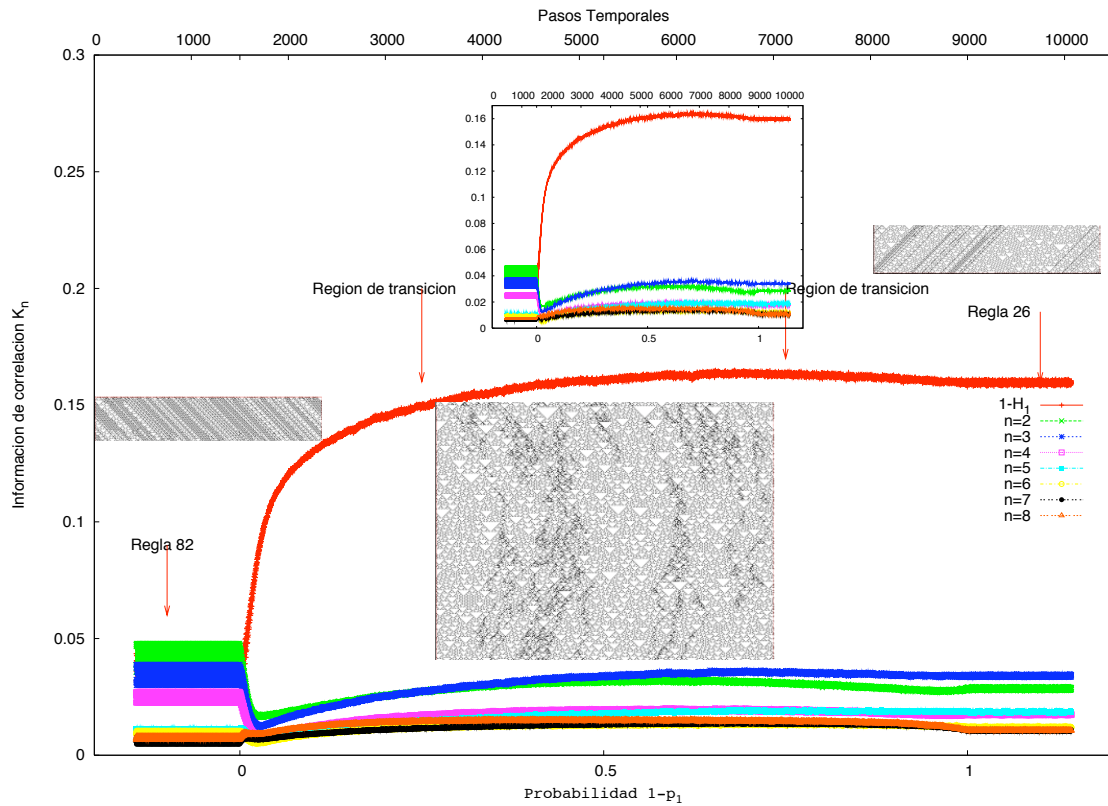


Figura 4.27-(c): Contribuciones a la Información de correlación  $K_n$  de subsecuencias de tamaño  $n = 1, \dots, 8$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

$$\begin{array}{cccc}
 000 \longrightarrow 0 & 001 \longrightarrow 1 & 010 \longrightarrow 0 & 011 \longrightarrow 0, 1 \\
 100 \longrightarrow 1 & 101 \longrightarrow 0 & 110 \longrightarrow 1, 0 & 111 \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

estos mapeos corresponden a dos diferentes reglas de evolución de  $AC$  elemental, la regla  $\phi = 01011010$  y la regla  $\phi = 00010010$ , con representación decimal  $\phi = 90$  y  $\phi = 18$  respectivamente, ambas reglas son pares,  $< 127$  y son de tercera clase [2], la fig.4.27 muestra los patrones de las reglas de evolución de las reglas legales  $\phi = 90$  y  $\phi = 18$ , la razón por la que las ramificaciones descendientes de los corrimientos trebol contribuyan a la creación de estructuras triangulares tiene su origen en la regla  $\phi = 90$ , y la dispersión regular de las estructuras triangulares blancas tiene su origen en la regla  $\phi = 18$ . De esta forma la interacción dinámica de las reglas de evolución no legal  $\phi_1 = 82$  y  $\phi = 26$  se lleva acabo de manera auto-organizada mediante reglas que manifiesta auto-organización.

### 4.2.3 Reglas $\phi_1 = 82$ y $\phi_2 = 26$

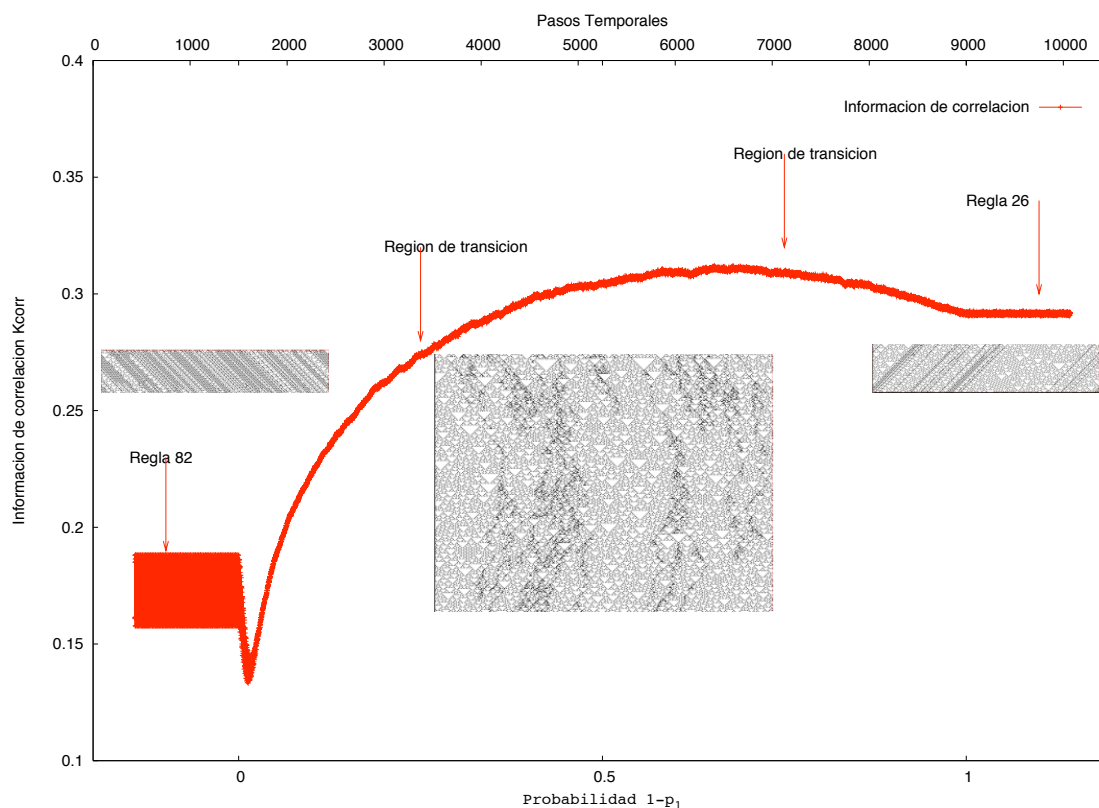


Figura 4.27-(d): Información de correlación  $K_{corr}$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

Las complejidades algorítmicas [4], cuadro 4.2, de los lenguajes regulares muestran que las reglas  $\phi_1 = 82$  y  $\phi_2 = 26$  son de mayor complejidad para  $t = 1$  paso temporal con trece nodos y quince arcos, y crecen rápidamente, mientras que la complejidad de la regla  $\phi = 18$  es de cinco nodos y nueve arcos, su crecimiento es moderado para  $t \leq 4$  en comparación a  $\phi_1 = 82$  y  $\phi_2 = 26$ , pero para  $t \geq 4$  la complejidad se dispara, la regla  $\phi = 90$  es muy simple su complejidad algorítmica se mantiene constante con un nodo y dos arcos.

Esto indica que durante la interacción dinámica se generan reglas que provocarán una disminución en las posibles configuraciones de subsecuencias, esto se refleja en nuestros resultados de la medida de entropía, entropía de bloques y complejidad de Lempel-Ziv.

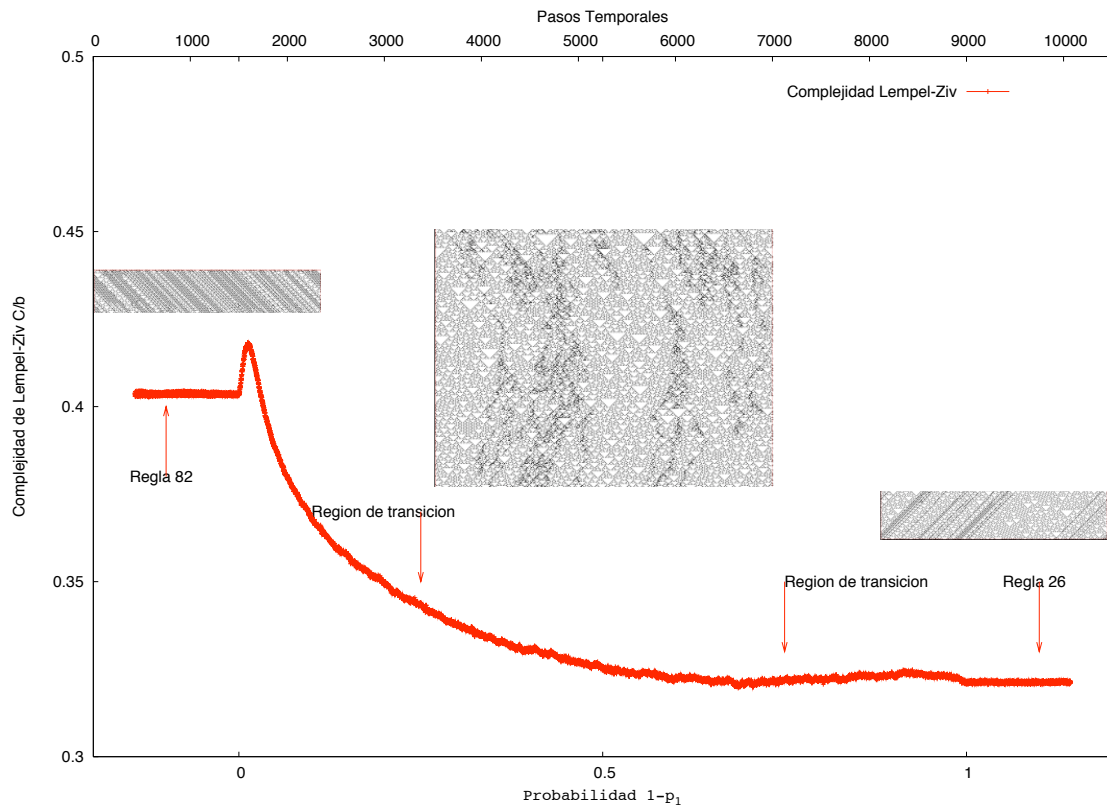


Figura 4.27-(e): Complejidad de Lempel-Ziv normalizada  $C/b$  en función de los pasos temporales (eje superior  $X$ ), antes, durante y después de la interacción dinámica y en función de la probabilidad  $1 - p_1$  (eje inferior  $X$ ), durante la interacción dinámica.

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t > 5$
82	13[25]	167[331]	3134[6257]	—	—	—
26	13[25]	92[179]	2238[4454]	—	—	—
18	5[9]	47[91]	143[270]	—	—	—
90	1[2]	1[2]	1[2]	1[2]	1[2]	1[2]

Cuadro 4.2: Complejidad de los lenguajes regulares de las reglas que producen la interacción dinámica y de las reglas que se generan durante la interacción dinámica [4] (NODOS[ARCOS]), (— sin determinar).

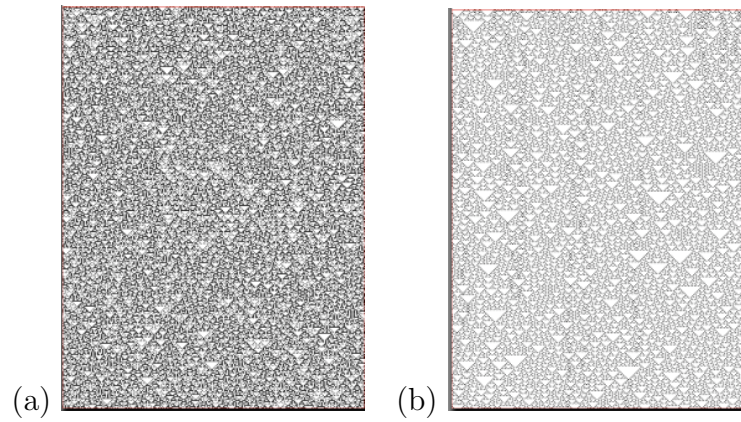


Figura 4.27: (a) Patrón de la regla legal  $\phi = 90$  y (b) patrón de la regla legal  $\phi_2 = 18$ .



## capitulo 5

# Conclusiones

Los  $AC$  elementales han sido muy estudiados en la literatura básica de los sistemas complejos, sin embargo, tienen una inagotable aplicación en modelos capaces de exhibir el comportamiento de fenómenos que se presentan en la naturaleza, tal es el caso de la morfogénesis de las estructuras vivas. El modelo de interacción dinámica de  $AC$  elemental exhibe este comportamiento y nos proporciona información acerca del mecanismo y de las posibilidades de obtener una estructura bien definida con un número mínimo de reglas, así como también indica que entre mayor es el número de reglas interactuando se tienen menos posibilidades de obtener una estructura compleja.

Se puede decir, de la interacción dinámica de todas las reglas sinónimas que fueron analizadas, que la paridad, así como también el hecho de que sean  $\leq 127$  y  $\geq 128$ , es determinante para el tipo de comportamiento que se obtendrá durante la interacción dinámica, esto también tendrá una fuerte relación con las diferencias en los mapeos de dos reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Se puede tocar dos puntos importantes: 1) la interacción dinámica es un modelo de ruido dinámico, al poner en interacción dos reglas de evolución, un mecanismo probabilista se pone en marcha mediante los mapeos o componentes de las reglas, según que tanto difieren las dos reglas sinónimas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  en los mapeos, el mecanismo probabilista afectará cierto número de mapeos, esto es inducir ruido dinámico a las componentes de las reglas de evolución, sin embargo, esto es, de cierta forma un tanto determinista, ya que una vez dada dos reglas de evolución  $\phi_1$  y  $\phi_2$  para que estas interactúen, uno puede determinar cuantos mapeos o componentes de las reglas se verán afectados, lo cual quiere decir, que la interacción dinámica, en sí, no es un proceso tan azaroso como uno podría pensar, 2) el hecho de que durante la interacción dinámica emergan patrones distorsionados, con estructuras no definidas, o bien, con estructuras bien definidas, podría estar estrechamente relacionado con la proximidad de las reglas de evolución que se generan durante la interacción dinámica, también con la diversidad de estas reglas y también con la paridad de las reglas de evolución  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , ya que en los análisis que se hicieron se encontró que entre más diferencias tienen dos reglas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  en paridad, también en el hecho de que una sea  $\leq 127$  y la otra sea  $\geq 128$  y en los



mapeos, se generaran más reglas de evolución de distintas clases, puntos fijos, ciclos límite, atractores extraños, retomando lo del primer punto, entre más perturbadas sean las reglas, se generará una mayor diversidad de reglas durante la interacción dinámica. De estos dos puntos, se puede decir de las reglas analizadas, que cuando dos reglas mantienen variables de conflicto, una gran diversidad de reglas se generan durante la interacción dinámica, como es el caso de la interacción dinámica de las reglas  $\phi_1 = 4$  y  $\phi_2 = 203$  correspondientes a atractores de puntos fijos, la interacción dinámica genera una alta perturbación y por ende una gran variedad de reglas de evolución, tal que, durante la interacción dinámica ningún patrón estructurado emerge. El caso extremo de los AC elementales es el de las reglas  $\phi_1 = 126$  y  $\phi_2 = 129$ , la paridad en estos casos resultó ser un aspecto importante y también el hecho de que una de las reglas es  $< 127$  y la otra  $> 128$ . Otro aspecto de las variables de conflicto fue la anulación total de toda estructura, esto se encontró en la gran mayoría de interacciones dinámicas de reglas no sinónimas con las variables de conflicto corrimiento izquierdo y derecho, en este caso la paridad de las reglas no pareció ser trascendental, y el patrón que se obtiene es, después de ciertos pasos temporales de la interacción dinámica, nulo.

Los resultados más interesantes son aquellos que corresponden a reglas de evolución que al interactuar manifiestan auto-organización. La interacción dinámica de las reglas  $\phi_1 = 62$  y  $\phi_2 = 118$  manifestó estructuras triangulares dispersas irregularmente durante la evolución, según los criterios de Wolfram [3], las estructuras irregulares tienen una medida de entropía en equilibrio  $\geq 0,9$ . Wolfram hizo estos calculos para bloques de tamaño hasta  $n = 8$ , esto implica, como se mostró en los resultados que las estructuras irregulares que se generaron durante la interacción dinámica requirieron de menor decaimiento en la medida de entropía y en la entropía de bloques, así, estructuras irregulares implican altos valores de entropía y bajos valores en las correlaciones. La interacción dinámica de las reglas  $\phi_1 = 81$  y  $\phi_2 = 26$  mostró un comportamiento auto-organizado, lo que dio lugar a un decaimiento notable en la medida de entropía y en la entropía de bloques, así, las estructuras que emergieron durante la interacción fueron triangulares y regulares, con un grado de correlación considerable, sin embargo, ambas reglas parecen tener la característica de ser sensibles a las condiciones iniciales, en cuanto a como los estados son distribuidos, es decir son sensibles a condiciones iniciales ordenas, como se vio en el capítulo 1, y por los resultados obtenidos en el capítulo 4, y de forma más general, son sensibles a condiciones iniciales con entropía  $< 1$ , las reglas  $\phi_1 = 81$  y  $\phi_2 = 26$  son no robustas.

Desde el punto de vista de la formación de patrones biológicos, el modelo de interacción dinámica sugiere que cuando dos concentraciones de morfógeno  $m_1$  y  $m_2$  actúan sobre un tejido celular pueden generar conflictos en las interacciones celulares a tal grado de destruir o inhibir toda estructura del tejido en el momento que los morfógenos alcanzan la misma concentración, lo que hace que la diferenciación entre células sea extremadamente fuerte, esto dependerá de los tipos de morfógeno y los conflictos entre ellos. El otro caso es el de la formación de estructuras en tejidos celulares, esto se lograría con los morfógenos adecuados, tal que la diferenciación

---

celular y la información posicional sea correlacionada para mantener estructuras celulares auto-organizadas.



# Apéndice A

Conjunto *L* de 29 variables subjetivas

Variable	Característica o rasgo
1	Corrimiento
2	Corrimiento alternado
3	Corrimiento izquierdo
4	Corrimiento derecho
4	Corrimiento derecho
5	Corrimiento recto
6	Corrimiento trebol
7	Corrimiento doble
8	Corrimiento L
9	Corrimiento simple
10	Triángulo blanco
11	Escalamiento multiple
12	Triángulo recto
13	Triángulo equilatero
14	Triángulo negro
15	Triángulo recto izquierdo
16	Triángulo recto derecho
17	Triángulo alternado
18	Pseudo triángulo
19	Homogeneo en ceros
20	Homogeneo en unos
21	Fondo de malla
22	Estructuras H
23	Monte izquierdo
24	Monte derecho

*APÉNDICE A. CONJUNTO L DE 29 VARIABLES SUBJETIVAS*

---

Variable	Característica o rasgo
25	Monte blanco
26	Monte negro
27	Corrimiento sierra
28	Monte
29	Triángulo no fractal

# Apéndice B

## Conjunto de reglas sinónimas de AC elementales

Regla	Reglas sinónimas
0	8, 32, 40, 64, 96, 128
1	5, 19, 23, 33, 37, 51, 55, 91, 127
2	34, 66, 98, 130
3	7, 31, 63, 123
4	12, 36, 44, 68, 100, 203, 207, 217, 219, 221, 223
5	19, 23, 33, 37, 51, 55, 91, 127
6	38, 155, 159
9	25, 27, 39, 41, 103, 111
10	42, 138, 139
11	43, 47, 59, 81, 113, 115, 117
15	87
16	24, 48, 56, 231
17	21, 61, 119
18	22, 54, 122, 126
20	52, 211, 215
29	71
30	86, 90
35	49
45	75, 89, 101, 105
46	142
53	65, 67, 83, 125
72	104
74	173
76	204, 205
80	208, 209, 240, 241, 244, 245

---

*APÉNDICE B. CONJUNTO DE REGLAS SINÓNIMAS DE AC ELEMENTALES*

---

Regla	Reglas sinónimas
82	210
84	212, 213
97	121
129	147, 151, 161, 183
131	162
132	164
135	149, 165
136	168
140	141, 172
146	182
154	158
156	198
166	167
170	171, 174, 175, 185, 187, 189, 190, 191
180	181
184	226, 227
192	224
193	195
196	197, 228
200	232, 233, 236
216	220
218	222
234	235, 238
237	239, 251, 253, 255
248	249, 252
250	254

# Bibliografía

- [1] Miramontes, O. (1989). Algunos aspectos de la teoría de autómatas celulares y sus aplicaciones en biofísica. Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación. Año V Num. 35. Facultad de Ciencias, UNAM, México.
- [2] Wolfram, S. (1983). Statistical mechanics of cellular automata, Rev. Mod. Phys. 55, 601.
- [3] Wolfram, S. (1984). Universality and complexity in cellular automata, Physica 10D, 1.
- [4] Wolfram, S. (1984). Computation theory of cellular automata, Commun. Math. Phys. 96, 15.
- [5] Langton, C. (1990). Computation at the edge of chaos: phase transition and emergent computation, Physica D 42 12-37.
- [6] Grassberger, P. (1986). Long-range effects in an elementary cellular automaton, J. Stat. Phys. 45 27-39.
- [7] Grassberger, P. (1986). Toward a Quantitative Theory of Self-Generated Complexity, Int. J. of Theo. Phy., Vol.25, 9.
- [8] Grassberger, P. (1986). How to measure self-generated complexity, Physica 140A, 319-325.
- [9] Schürmann, T. and Grassberger, P. Entropy estimation of symbol sequences, [arxiv.org/abs/cond-mat/0203436](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0203436).
- [10] Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication, Bell Syst. Technol. J. Vol. 27, pp. 379-423. 623-656, July, October.
- [11] Lempel, A. and Ziv, J. (1976). On the complexity of finite sequences, IEEE Trans. Inf. Theory IT-22, 75
- [12] Forrest, S. (1990). Emergent Computation: self-organizing, collective, and cooperative phenomena in natural and artificial computing networks, Physica D 42, 1-11.



- [13] Mitchell, M. (1998). Computation in cellular automata: A selected review. In T. Gramss, S. Bornholdt, M. Gross, M. Mitchell, and T. Pellizzari, *Nonstandard Computation*, pp. 95–140. Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft.
- [14] Brillouin, L. (1951). Physical entropy and information.II, *J. Stat.Phys.* 22, 338-343.
- [15] Jaynes, E. T. (1957). Information theory and statistical mechanics, *Phys. Rev.* Vol.106, 4, 620-630.
- [16] Hobson, A. and Bin-Kang Cheng (1973). A comparison of the Shannon and Kullback information measures, *J. of Statistical Physics*, Vol.7, 4(1973) 301-310.
- [17] Wolpert, L. (1978). Pattern formation in biological, *Scientific American* 4, 239
- [18] Kolmogorov A.N. (1964). *Probl. Inf. Control.* 7, 224.
- [19] Martin-Löf, P. (1966). The definition of random sequences, *Information and Control*, 602.
- [20] Chaitin, G. J. (1966). On the length of programs for computing finite binary sequences, *J. Assoc. Comput. Machinery* 13, 547.
- [21] Kaspar, F. and Shuster, H. G. (1987) Easily calculable measure for complexity of spatiotemporal patterns, *Phys. Rev. A*, 36,842-848.
- [22] Billings, S. A. and Yingxu Yang (2003). Identification of probabilistic cellular automata, *IEEE Transcation on Systems, man, and cybernetics Part B: Cybernetics*, Vol. 33, No. 2.
- [23] Billings, S. A. and Yingxu Yang (200). Neighborhood detection and rules selection from cellular automata patterns, *IEEE Transcation on Systems, man, and cybernetics Part A: Systems and humans*, Vol. 30, No. 6.
- [24] Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency, *Annals of Math.* 22, 79.
- [25] Lindgren, K. (2003). Information theory for complex systems, lecture notes, 90pp. (Physical Resource Theory/Complex Systems).
- [26] Ilachinsky, A. (2001). *Cellular automata-A discrete universe*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd Singapore.
- [27] Martínez, Genaro Juárez, Seck Tuo Mora, Juan Carlos, MacIntosh, Harold V. (2006). *Int. Journ. of Unconventional Computing* 2/1:1-49.