



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

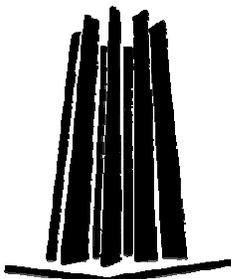
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ARAGÓN

“ ARMADURAS ESTÁTICAMENTE
DETERMINADAS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
I N G E N I E R O C I V I L
P R E S E N T A :
JUAN CARLOS TAPIA GUZMÁN

ASESOR DE TESIS:
M. en I. DANIEL VELÁZQUEZ VÁZQUEZ



2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi novia:

Por estar siempre a mi lado y apoyarme en los momentos buenos y malos y llenar mi vida de felicidad y amor.
--En el momento mas difícil de mi vida --
¡ Gracias por todo princesa !

A mi papá:

Por sus consejos y su ayuda para terminar mi carrera

A mi mamá:

Por darme la oportunidad de existir y estar con migo en todo momento.

A mi hermana:

Por levantarme todas las mañanas para poder ir a la escuela, y ayudarme cuando el tiempo no era suficiente.

A mi hermanita:

Por transmitirme un poco de su alegría.

A mis abuelos:

Por el cariño que siempre me han demostrado.

A mis tíos y primos:

Por ayudarme en cada momento que los necesité.

A DVV:

Por brindarme su amistad incondicional y por transmitirme sus conocimientos para poder llevar a cabo este trabajo.

A la UNAM y a mis profesores:

Por todos sus conocimientos trasmitidos para poderme realizar como Ingeniero Civil

A mi abuelo:

Le dedico este trabajo por que continuamente estuvo a mi lado y me enseñó como era la vida y aunque ya no esta, siento como si estuviera conmigo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO 1	
ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO	3
Condiciones de Equilibrio de un Cuerpo Rígido.....	3
Consideraciones para Trazar un Diagrama de Cuerpo Libre.....	5
Reacciones de Soporte.....	5
Procedimiento para Trazar un Diagrama de Cuerpo Libre.....	8
Ecuaciones de Equilibrio.....	10
Conjuntos Alternativos de Ecuaciones de Equilibrio.....	10
Procedimiento de Análisis.....	11
CAPÍTULO 2	
LAS ARMADURAS	14
Fuerza Axial.....	15
Estructuración de las Armaduras.....	15
Tipos de Armaduras.....	17
Análisis de Estaticidad.....	21
CAPÍTULO 3	
MÉTODO DE LOS NODOS	25
CAPÍTULO 4	
MÉTODO DE LAS SECCIONES	67
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	104
GLOSARIO	107
BIBLIOGRAFÍA	108

INTRODUCCIÓN

En la Carrera de Ingeniería Civil se estudian las áreas de ambiental, construcción, sistemas y transporte, hidráulica, geotecnia y estructuras. Cada una de ellas se divide en dos grupos de asignaturas: Ciencias de la Ingeniería e Ingeniería Aplicada; las primeras son las que presentan mayor dificultad para el proceso enseñanza-aprendizaje, según lo indican los registros de calificaciones de la Facultad de Estudios superiores Aragón.

Para el área de estructuras, las asignaturas de Estructuras Isostáticas y Mecánica de Materiales I se ubican como las materias con mayor índice de reprobación. Esto se debe, entre varios factores, a que son las dos primeras asignaturas del área y, por lo tanto, representan nuevos conceptos para los estudiantes y un reto de la enseñanza para los profesores.

En particular, Estructuras Isostáticas antecede a la de Mecánica de Materiales I y las disfunciones en el proceso enseñanza-aprendizaje de la primera se refleja negativamente en la segunda. Esta situación hace necesario que la enseñanza y el aprendizaje de la materia de Estructuras Isostáticas sea de mayor apremio si se desea mejorar la eficiencia en ambas asignaturas y en las subsecuentes de la misma área.

Por lo anterior, se deben crear formas alternativas de la enseñanza en las materias de Ciencias de la Ingeniería y particularmente en las del área de estructuras. Una de las alternativas que alcanzamos a observar para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje es la elaboración de materiales didácticos, diseñados específicamente para dichos cursos. Los recursos que se podrían considerar son: apuntes, libros tradicionales, libros y presentaciones electrónicas, entre otros.

Esta situación sirvió de guía para realizar una propuesta simplificada y sistematizada para la enseñanza y el estudio de las “armaduras estáticamente determinadas” o mejor conocidas como “armaduras isostáticas”. Este tema es parte del tercer capítulo de la materia de “Estructuras Isostáticas”, denominado “Análisis de Estructuras Isostáticas Sometidas a Fuerza Axial”, donde se estudia a las armaduras simplemente apoyadas.

Se inicia con los principios de equilibrio para comprender las características de un cuerpo rígido en equilibrio, las ecuaciones de la estática, se explica la definición de las armaduras, características de estructuración y además se describe, en forma breve, la historia de las armaduras y como se les dio el nombre a sus distintos tipos. Se menciona, también, el nombre de las barras que forman una armadura y el análisis de elasticidad de una armadura.

Por último, la aportación más importante de este trabajo es la explicación paso por paso del procedimiento para la solución de armaduras por el método de los nodos y el método de las secciones. Los ejercicios propuestos por ambos métodos fueron diseñados y resueltos con la asesoría y colaboración del Profesor Daniel Velázquez Vázquez.

CAPÍTULO 1

ECUACIONES DE EQUILIBIO ESTÁTICO

Condiciones de Equilibrio de un Cuerpo Rígido

Una partícula está en equilibrio si permanece en reposo o se mueve con una velocidad constante. Para tener esta situación es necesario y suficiente que la fuerza resultante que actúe sobre la partícula sea igual a cero.

Utilizando este hecho, desarrollaremos las condiciones requeridas para mantener el equilibrio para un cuerpo rígido. Con este fin, consideremos el cuerpo rígido en la figura 1a, fijo en el sistema de referencia x, y, z y que se encuentra en reposo o bien se mueve a velocidad constante con el sistema de referencia.

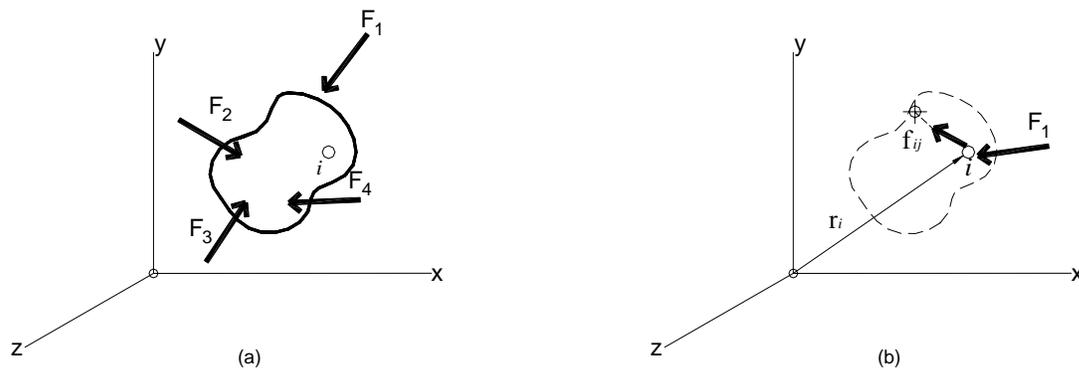


Figura 1.- Cuerpo Rígido.

La figura 1b muestra un diagrama de cuerpo libre de una partícula arbitraria del cuerpo. Hay dos tipos de fuerzas que actúan sobre la partícula. Las fuerzas internas simbólicamente son representadas como

$$\sum_{\substack{j=i \\ (j \neq i)}}^n f_{ij} = f_i$$

Son fuerzas que todas las demás partículas ejercen sobre la partícula i ésima y producen la resultante f_i . Aunque sólo una de estas partículas se muestran en la figura 1b, la suma se extiende a todas las n partículas de que se compone el cuerpo. En esta suma, se observará que $i = j$ no tendría sentido por que la partícula no ejerce fuerza sobre si misma.

La fuerza externa F_i resultante representa, por ejemplo, los efectos de fuerzas gravitacionales, eléctricas, magnéticas o de contacto entre la partícula i ésima y cuerpos

adyacentes o partículas no incluidas en el cuerpo. Si la partícula está en equilibrio, entonces, aplicando la primera ley de Newton tenemos

$$F_i + f_i = 0$$

Cuando se aplica la ecuación de equilibrio a cada una de las demás partículas del cuerpo, se encuentra ecuaciones semejantes. Si se suman vectorialmente todas estas ecuaciones, se obtiene

$$\sum F_i + \sum f_i = 0$$

La suma de las fuerzas internas da cero, ya que las fuerzas internas entre las partículas dentro del cuerpo ocurren en pares de fuerzas opuestas de la misma magnitud, de acuerdo a la tercera ley de Newton. Por tanto, sólo queda la suma de las fuerzas externas; por lo que, escribiendo $\Sigma F_i = \Sigma F$, la ecuación precedente se puede escribir

$$\Sigma F = 0$$

Consideremos ahora los momentos de las fuerzas que actúan sobre la partícula *i*ésima respecto al punto arbitrario *O*, Figura 1b. Usando la ecuación de equilibrio de una partícula y la ley distributiva del producto vectorial se tendrá

$$r_i \times (F_i + f_i) = r_i \times F_i + r_i f_i = 0$$

Para las demás partículas del cuerpo, pueden escribirse ecuaciones semejantes y, al sumarlas vectorialmente, obtendremos

$$\Sigma r_i \times F_i + \Sigma r_i \times f_i = 0$$

El segundo término es cero, ya que, como antes se dijo, las fuerzas internas ocurren en pares iguales en magnitud, colineales pero de sentido opuesto y, por la transmisibilidad de una fuerza, el momento de cada par de fuerzas alrededor del punto *O* es, por tanto, cero. Así pues, usando la notación $\Sigma M_O = \Sigma r_i \times F_i$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\Sigma M_O = 0$$

Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido se resumen como:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones establecen que un cuerpo rígido estará en equilibrio siempre y cuando la suma de todas las **fuerzas externas** que actúan sobre el cuerpo sea cero y la suma de los momentos de las fuerzas externas respecto a un punto sea cero. Se acaba de demostrar que estas condiciones son necesarias para que haya equilibrio. También son condiciones suficientes. Para demostrarlo, supongamos que el cuerpo no se encuentra en equilibrio y, sin embargo el sistema de fuerzas que actúa sobre él satisface las ecuaciones

$\Sigma F = 0$ y $\Sigma M_o = 0$. Supongamos que se requiere una fuerza adicional F' para mantener el cuerpo en equilibrio. En consecuencia, las ecuaciones de equilibrio vienen a ser:

$$\Sigma F + F' = 0$$

$$\Sigma M_o + M'_o = 0$$

Donde M'_o es el momento de F' alrededor de o . Ya que $\Sigma F = 0$ y $M_o = 0$, entonces requerimos $F' = 0$ (también $M'_o = 0$). En consecuencia, la fuerza adicional F' no se requiere para sujetar el cuerpo y, de hecho, las ecuaciones $\Sigma F = 0$ y $\Sigma M_o = 0$ también son condiciones suficientes de equilibrio.

Consideraciones para Trazar un Diagrama de Cuerpo Libre

Para una adecuada aplicación de las ecuaciones de equilibrio se necesita una especificación completa de todas las fuerzas externas conocidas y desconocidas que actúan sobre el cuerpo. La mejor forma de tomarlas en cuenta a todas es trazar el diagrama del cuerpo libre. Este diagrama es un croquis de la forma del cuerpo que lo representa como aislado o “libre” de su entorno.

En este bosquejo es necesario mostrar todas las fuerzas y momentos de pares que el entorno ejerce sobre el cuerpo. Usando este diagrama, los efectos de todas las fuerzas aplicadas y todos los momentos de pares que actúan sobre el cuerpo serán tomados en cuenta, cuando se apliquen las ecuaciones de equilibrio. Por esta razón, es de primordial importancia entender cabalmente el diagrama de cuerpo libre y su trazada para resolver los problemas de mecánica que se nos presenten.

Reacciones de Soporte

Antes de presentar el procedimiento de cómo trazar un diagrama de cuerpo libre, se consideraran los tipos de reacciones que ocurren en los puntos de apoyo entre cuerpos sujetos a sistemas de fuerzas coplanares (en el plano).

Los principios implicados para determinar estas reacciones se pueden ilustrar considerando tres maneras en que un miembro horizontal, como una estructura, suele apoyarse en su extremo. El primer método de soporte consiste en un rodillo o cilindro, figura 2a. Ya que este tipo de soporte sólo impide la traslación de la estructura en dirección vertical, es necesario que el rodillo ejerza una fuerza sobre la estructura en esta dirección, figura 2b.



Figura 2.- Apoyo tipo Rodillo.

La estructura puede soportarse de manera más restrictiva usando un pasador ó perno como en la figura 3a. El pasador pasa por dos agujeros en la estructura y dos hojas fijas en el apoyo. Aquí el pasador impedirá la traslación de la estructura en **cualquier dirección Φ** , figura 3b, y por tanto, debe ejercer una fuerza **F** sobre la estructura en esta dirección. Para fines de análisis estructural, es más fácil representar este efecto por sus dos componentes **F_x** y **F_y**, figura 3c.

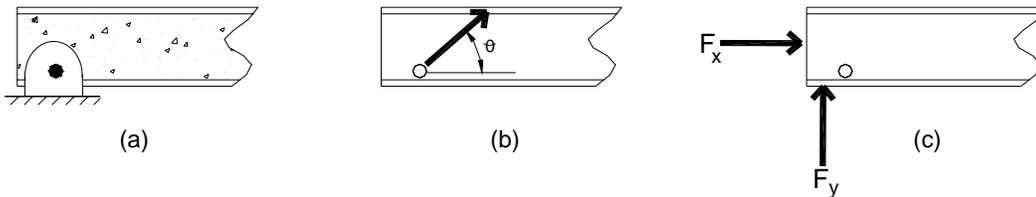


Figura 3.- Apoyo Fijo.

La manera más restrictiva de apoyar la estructura sería con la utilización de un **apoyo fijo**, como se muestra en la figura 4a. Este apoyo impedirá tanto la traslación como la rotación de la estructura y, por tanto, para hacerlo deben desarrollarse una fuerza y un momento de un par sobre la estructura en su punto de unión, figura 4b. Como en el caso del pasador, la fuerza suele representarse por sus componentes **F_x** y **F_y**.

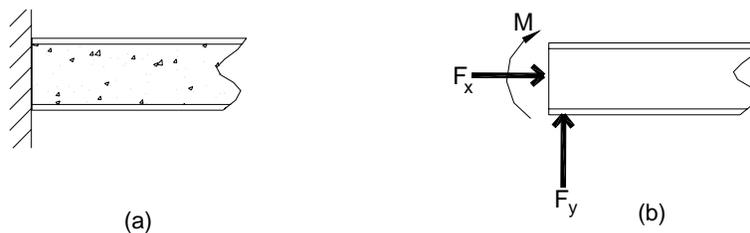
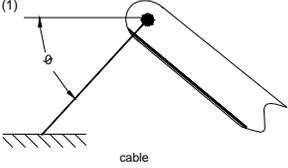
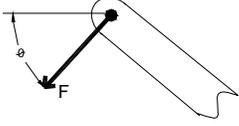
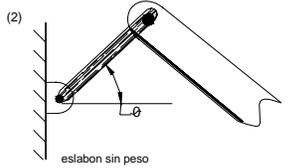
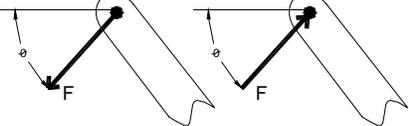
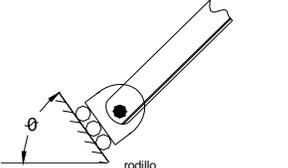
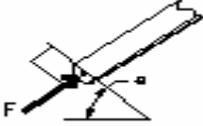
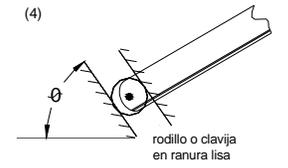
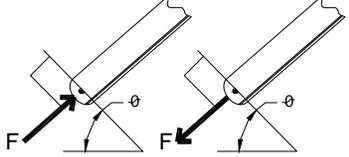
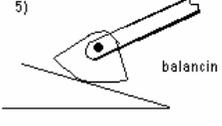
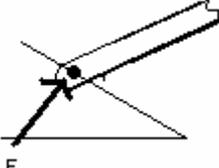
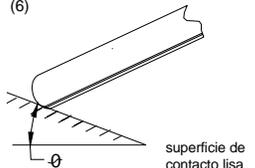
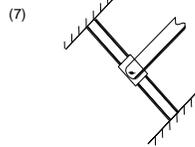
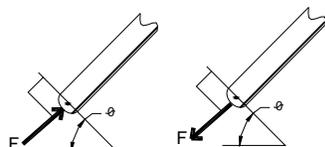
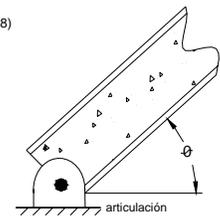
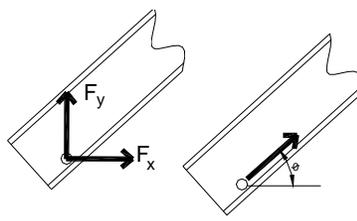
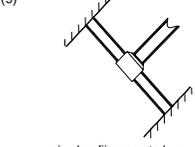
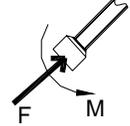
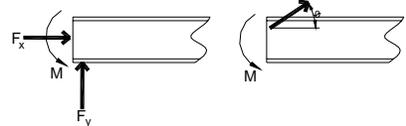


Figura 4.- Empotramiento.

Por lo que podemos establecer enunciado general relativo a los tipos de reacciones que se desarrollan en un miembro de contacto por cualquier tipo de apoyo. A este respecto, si un soporte impide traslación en una dirección dada, entonces se desarrolla una fuerza en el miembro de contacto en esa dirección. Asimismo, si se impide la rotación, un momento de par se ejercerá en el miembro. La siguiente tabla muestra una lista de tipos comunes de soportes usados para soportar cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas.

Soportes para cuerpos rígidos sujetos a sistemas de fuerzas en dos dimensiones

Tipos de conexiones	Reacción	Número de incógnitas
<p>(1)</p>  <p>cable</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza de tensión que actúa en la dirección y sentido del cable y hacia fuera del miembro.</p>
<p>(2)</p>  <p>eslabon sin peso</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa a lo largo del eje del eslabón.</p>
 <p>rodillo</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto</p>
<p>(4)</p>  <p>rodillo o clavija en ranura lisa</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la ranura.</p>
<p>5)</p>  <p>balancin</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(6)</p>  <p>superficie de contacto lisa</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>

<p>(7)</p>  <p>miembro conectado a un collarin sobre barra lisa</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.</p>
<p>(8)</p>  <p>articulación</p>		<p>Dos incógnitas. Las reacciones son dos componentes de fuerza o la magnitud y dirección Φ de la fuerza resultante. Debe observarse que Φ y θ no necesariamente son iguales (generalmente no, a menos que la verilla mostrada se un eslabón como en 2).</p>
<p>(9)</p>  <p>miembro fijo conectado a un collarin sobre barra lisa</p>		<p>Dos incógnitas. Las reacciones son el momento de par y la fuerza que actúa perpendicularmente a la barra</p>
<p>(10)</p>  <p>soporte fijo ó empotrado</p>		<p>Tres incógnitas. Las reacciones son el momento de par y las dos componentes de fuerza, o el momento de par y la magnitud y la dirección Φ de la fuerza resultante.</p>

Procedimiento para Trazar un Diagrama de Cuerpo Libre

Para trazar un diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido o un grupo de cuerpos considerados como un solo sistema, deberán considerar los pasos siguientes:

Paso 1. Imaginar como aislado y libre de sus restricciones y conexiones, y trazar (bosquejar) la forma de su entorno.

Paso 2. Identificar todas las fuerzas externas y momentos de pares que actúan sobre el cuerpo. Deben ser:

1. Cargas aplicadas.
2. Reacciones que se dan en los apoyos o puntos de contacto con otros cuerpos.
3. El peso del cuerpo.

Para darse cuenta de todos estos efectos, puede ser útil calcular la frontera, y anotar con cuidado cada fuerza o momento de un par que se ejerza.

Paso 3. Indicar las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de fuerzas. Las fuerzas y momentos de pares que se conozcan deberán etiquetarse con sus magnitudes y direcciones apropiadas. Se usan letras para representar las magnitudes y ángulos de dirección de las fuerzas y momentos de pares que se desconozcan. En particular, si una fuerza o momento de par tiene línea de acción conocida, pero magnitud desconocida, puede suponerse la punta de flecha que define el sentido del vector. Lo acertado de la suposición se verá después de resolver las ecuaciones de equilibrio para obtener la magnitud desconocida. La magnitud de un vector es siempre positiva, de modo que si la solución da un escalar “negativo”, el signo menos indica que el sentido del vector es opuesto al que fue supuesto inicialmente.

Ejemplo:

a) Armadura

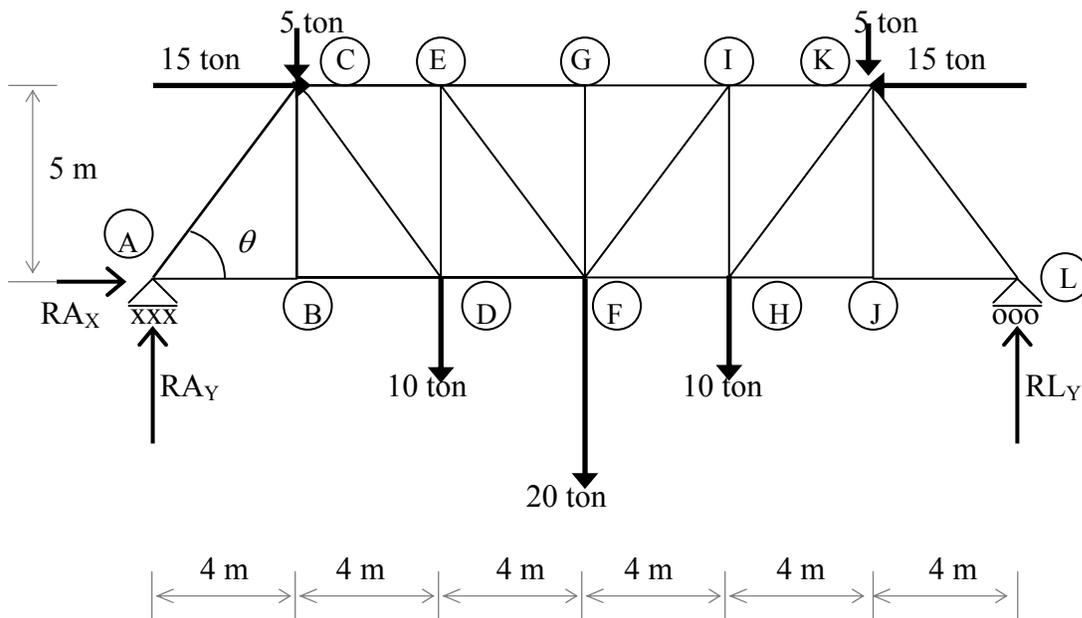


Figura 5.- Armadura tipo Howe.

b) Diagrama de Cuerpo Libre

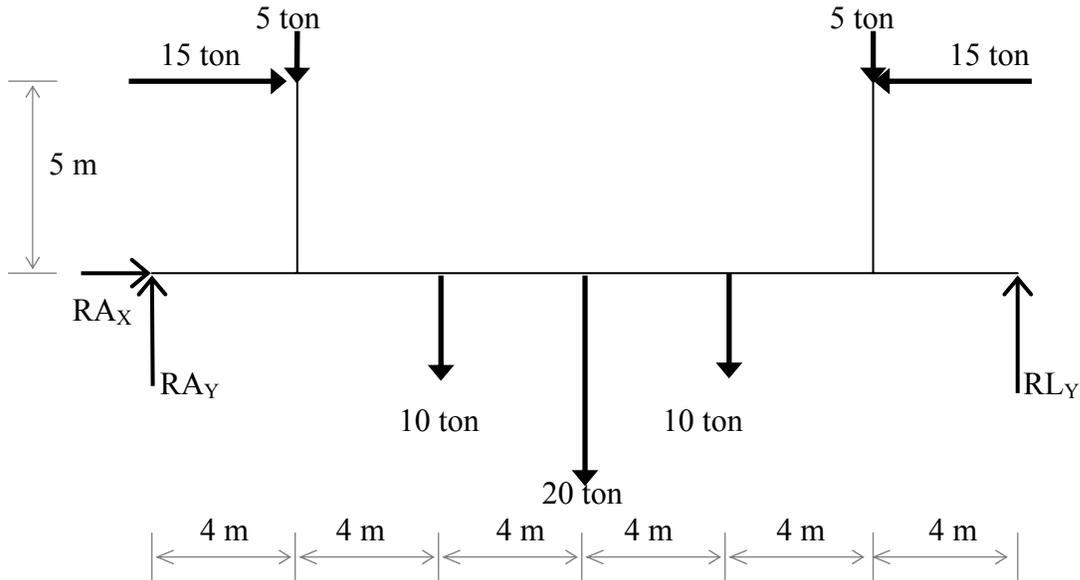


Figura 6.- Diagrama de Cuerpo Libre de una Armadura.

Ecuaciones de Equilibrio

En las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido se mostraron dos ecuaciones que son necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido, a saber, $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$. Cuando el cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas que están todas contenidas en el plano x - y , entonces las fuerzas se pueden resolver en sus componentes x , y . En consecuencia, las condiciones para el equilibrio en dos dimensiones son.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 && \text{..... (1)} \\ \Sigma F_y &= 0 && \text{..... (2)} \\ \Sigma M_O &= 0 && \text{..... (3)} \end{aligned}$$

Aquí ΣF_x y ΣF_y representan, respectivamente, las sumas algebraicas de las componentes x , y de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, ΣM_O representa la suma algebraica de los momentos de par y los momentos de todas las componentes de fuerza alrededor de un eje perpendicular al plano x - y que pasa por el punto arbitrario O que puede encontrarse en el cuerpo o fuera de él.

Conjuntos Alternativos de Ecuaciones de Equilibrio:

Aunque las más utilizadas son las tres ecuaciones anteriores para resolver problemas de equilibrio que incluyen sistemas coplanares de fuerzas, pueden usarse dos conjuntos alternativos más. Uno de ellos es:

$$\begin{aligned} \Sigma F_a &= 0 && \text{..... (4)} \\ \Sigma M_A &= 0 && \text{..... (5)} \\ \Sigma M_B &= 0 && \text{..... (6)} \end{aligned}$$

Cuando se usan estas ecuaciones se requiere que los puntos de momento A y B no estén sobre una recta perpendicular al eje a . Para demostrar que las ecuaciones 1, 2 y 3 proporcionan las condiciones de equilibrio, consideremos el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo de forma arbitraria, Figura 7a. La acción de las cargas sobre el cuerpo puede reemplazarse por una sola fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$, que actúe en el punto A , y un momento de un par resultante $\mathbf{M}_{RA} = \Sigma \mathbf{M}_A$, Figura 7b. Para el equilibrio se requiere que: $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$ y $\mathbf{M}_{RA} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, si se satisface $\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ será necesario que $\mathbf{M}_{RA} = \mathbf{0}$. Además, para que \mathbf{F}_R satisfaga $\Sigma \mathbf{F}_a = \mathbf{0}$, debe no tener componente a lo largo del eje a y, por lo tanto, su línea de acción debe ser perpendicular al eje a , Figura 7c. Finalmente, si se requiere que $\Sigma \mathbf{M}_B = \mathbf{0}$, donde B no está en la línea de acción de \mathbf{F}_R entonces $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$ y, de hecho, el cuerpo que se ve en la Figura 7a debe estar en equilibrio.

El otro conjunto alternativo de ecuaciones de equilibrio es:

$$\Sigma \mathbf{M}_A = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_B = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_C = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

Aquí es necesario que los puntos A , B y C no se encuentren en la misma recta. Para demostrar que cuando estas ecuaciones son satisfechas implican el equilibrio, consideremos nuevamente el diagrama de cuerpo libre Figura 7b. Si $\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ debe satisfacerse, entonces, el momento de un par resultante $\mathbf{M}_{RA} = \mathbf{0}$. $\Sigma \mathbf{M}_B = \mathbf{0}$ se satisface si la recta de acción de \mathbf{F}_R pasa por el punto B como se muestra y, finalmente, si requerimos que $\Sigma \mathbf{M}_C = \mathbf{0}$, donde C no se encuentra sobre la recta AB , es necesario que $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$, y el cuerpo de la Figura 7a debe estar entonces en equilibrio.

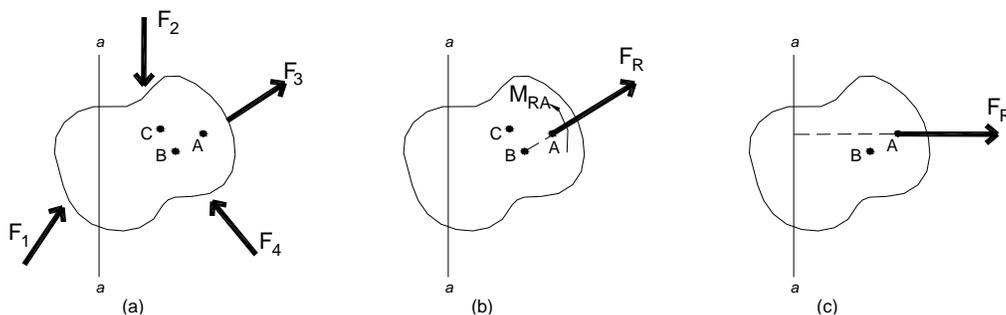


Figura 7.- Diagrama de Cuerpo Libre de un Cuerpo Rígido.

Procedimiento de Análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método para resolver problemas de equilibrio de fuerzas coplanares:

Diagrama de cuerpo libre

Trazamos un diagrama de cuerpo libre como se explicó anteriormente. Esto significa mostrar todas las fuerzas externas y momentos de par que actúan sobre el cuerpo (conocidas como Fuerzas Actuantes). Las magnitudes de estos vectores se etiquetarán y se especificarán sus direcciones. Las dimensiones del cuerpo requeridas para calcular los momentos de las fuerzas se incluirán también en el diagrama de cuerpo libre. Identificar las incógnitas. Se puede *suponer* el sentido de cada fuerza o momento de par que tenga una magnitud desconocida, pero línea de acción conocida.

Ecuaciones de equilibrio

Establecer los ejes x , y , z , y aplicar las ecuaciones de equilibrio: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_o = 0$, (o como alternativa, los conjuntos de ecuaciones de la ecuación 4 a la 9). Para evitar tener que resolver ecuaciones simultáneas, aplicar la ecuación de momentos $\Sigma M_o = 0$, alrededor del punto (o) que éste en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas. En esta forma, los momentos de estas incógnitas son *ceros* alrededor de o y así se puede obtener una *solución directa* para la tercera incógnita. Cuando se apliquen las ecuaciones de fuerza $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, orientar los ejes x y y a lo largo de las líneas que proporcionen la resolución más simple de las fuerzas en sus componentes x, y . Si la solución de las ecuaciones de equilibrio diera un escalar negativo para una fuerza o momento de un par desconocido, esto indicaría que el sentido es contrario al supuesto en el diagrama de cuerpo libre.

Ejemplo: Determinar las componentes horizontal y vertical de las reacciones para la armadura (conocidas como Fuerzas Reactivas) cargada que se muestra en la Figura 8. Se desprecia el peso de la armadura en los cálculos.

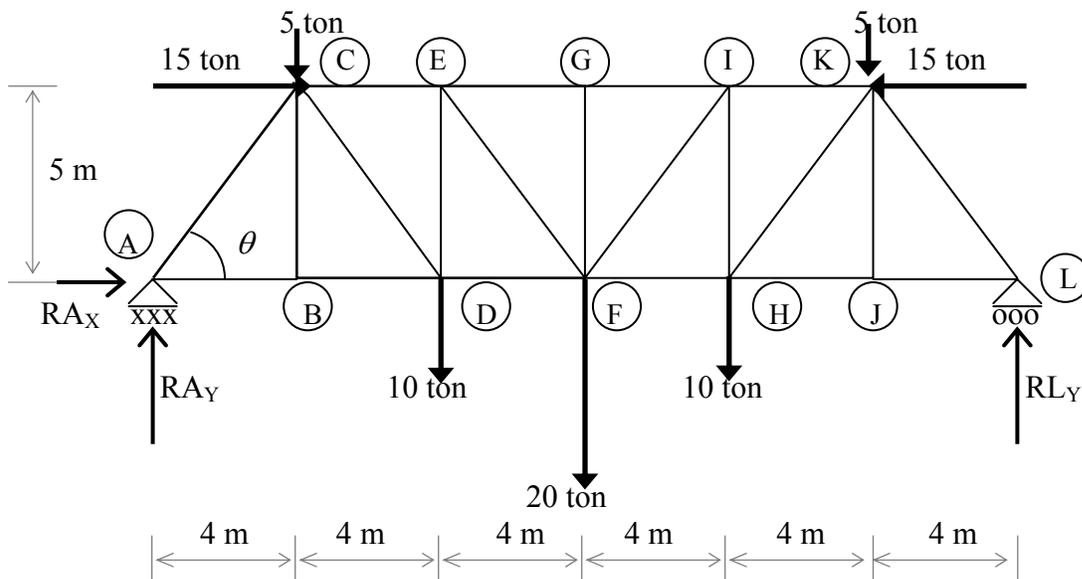


Figura 8.- Armadura.

Diagrama de cuerpo libre. Se pueden identificar cada una de las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la armadura, figura 9. Por sencillez en la aplicación de las ecuaciones de equilibrio.

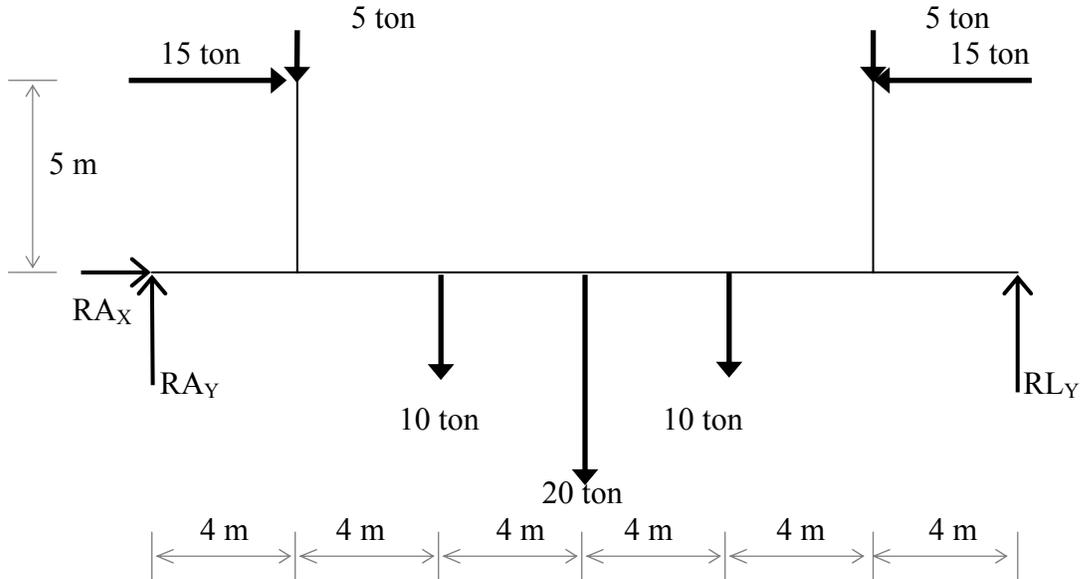


Figura 9.- Diagrama de cuerpo libre de la Armadura anterior.

Ecuaciones de equilibrio. Al sumar fuerzas en la dirección x , se obtiene

$$\Sigma F_x = 0; \quad R_{Ax} = 15 - 15$$

$$\mathbf{R_{Ax} = 0 \text{ Ton}}$$

Puede obtenerse una solución directa para L_y y aplicando la ecuación de momentos $\Sigma M_A = 0$ alrededor del punto A. Para llevar a cabo los cálculos puede notarse que las reacciones A_x , A_y no producen momentos alrededor de A. Con la rotación de sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de A, definida como positiva tenemos.

$$\Sigma M_A = 0; \quad 5(4) + 10(8) + 20(12) + 10(16) + 5(20) + 15(5) - 15(5) - R_{Ly}(24) = 0$$

$$R_{Ly} = \frac{600}{24}$$

$$\mathbf{R_{Ly} = 25 \text{ ton}}$$

Si se suman fuerzas en la dirección, y , se utiliza el resultado $L_y = 25 \text{ Ton}$, obtenemos

$$\Sigma F_y = 0; \quad 5 - 10 - 20 - 10 - 5 + 25 + R_{Ay} = 0$$

$$\mathbf{R_{Ay} = 25 \text{ ton}}$$

CAPÍTULO 2

LAS ARMADURAS

Las armaduras se han usado desde hace muchos siglos, para cubrir distancias más o menos grandes, debido a su sencillez en la forma y sus características únicas.

Se tiene registro que en el año 105 el ingeniero romano Apolodoro construyó un puente del tipo de armadura con tramos múltiples para cruzar el río Danubio. Cada tramo del puente tomo una forma semejante a la de arco que se muestra en la figura 10.

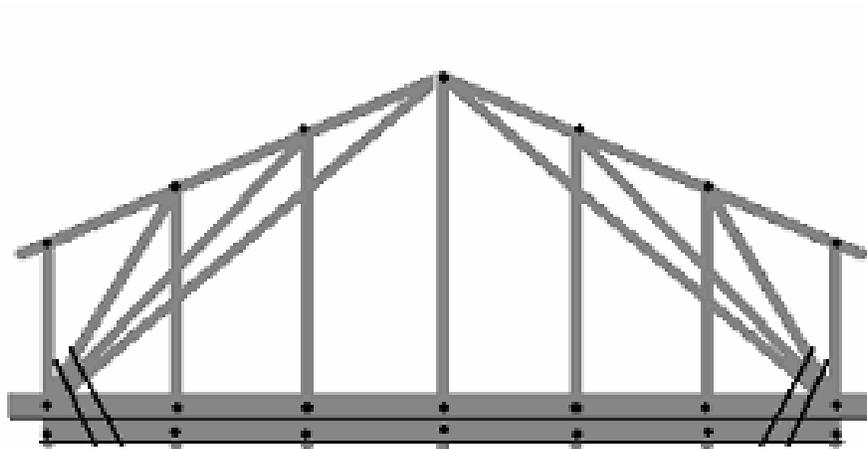


Figura 10.- Puente de Apolodoro a través del río Danubio.

El diseño de las armaduras para el uso en puentes, no estaba basado en los principios matemáticos y físicos.

Durante la Revolución Industrial la disponibilidad del hierro forjado en Europa y la expansión hacia el oeste de los ferrocarriles en Estados Unidos presionaron a los ingenieros a desarrollar diseños mas complejos y a su vez mas racionales de armaduras para puentes ligeros y de tramos largos.

Las armaduras se construyen de diversas maneras. Los materiales usados en las armaduras incluyen madera en su construcción, acero y aluminio o la combinación de ellos. Los miembros de una armadura se unen mediante pernos, placas metálicas para armadura, soldadura, articulaciones en forma de un solo pasador de gran tamaño, a estas uniones se les conoce como nodos.

Las uniones(nodos) de las armaduras se colocan en los extremos de sus miembros, es la intersección de los centros de gravedad de cada miembro o ejes principales para evitar que se presenten fuerzas internas no consideradas en el diseño.

La característica clave de una armadura que la distingue de otras formas estructurales es que opone resistencia a las cargas a través de fuerzas axiales en sus miembros. Es decir, los miembros de una armadura se diseñan para soportar tensión o compresión. Aunque pueden presentarse fuerzas flexionantes o cortantes, pero su efecto sobre un miembro de la armadura es de muy poca importancia.

Fuerza Axial

Los esfuerzos a que se ven sometidos los materiales y las estructuras derivan de dos básicos, la compresión y la tensión, conocidos como esfuerzos simples y como fuerzas axiales.

La compresión se puede definir como la aplicación de dos fuerzas opuestas y colineales que tienden a juntarse. Ciertos materiales tienen la capacidad de resistir tales esfuerzos, pero al ser rebasado su límite resistente, puede ocasionarse la deformación excesiva del material o del elemento estructural llegando incluso al colapso.

Tal deformación puede ser por aplastamiento o bien por flexión de la pieza, situación que puede ejemplificarse con facilidad con el uso de miembros cortos o miembros largos respectivamente.

En el caso de que del uso de miembros cortos, el elemento sometido a compresión tenderá al aplastamiento deformándose en dos sentidos, aumentando su sección transversal y reduciendo su longitud, en tanto que un miembro largo sobre la que actúe una fuerza similar se flexionará lateralmente.

La tensión se puede definir como un par de fuerzas opuestas y colineales que tienden a separarse, la tensión ocasiona el estiramiento de la pieza, cuando supera su resistencia de un miembro tiende a fallar por alargamiento y disminución de su sección transversal ocasionando una cintura en el miembro o a veces una ruptura.

El uso de las armaduras ha sido aprovechado para cubrir grandes claros, y además nos da una solución práctica, debido a que una armadura puede soportar fuertes cargas en comparación con su peso propio, sin la necesidad de colocar columnas intermedias, y además es una opción bastante económica en comparación con otras; por ello se utilizan para naves industriales, cines, teatros, puentes, etc.

Estructuración de las Armaduras

Las armaduras son estructuras ligeras formadas mediante la unión de barras rígidas y que son utilizadas para cubrir grandes claros en muy diverso tipo de construcciones, especialmente de techumbres. Se basan en el principio físico de la indeformabilidad del triángulo, figura geométrica estable por excelencia. Tres barras unidas en sus extremos

constituyen un conjunto indeformable y permiten que las cargas exteriores se resistan únicamente como fuerzas axiales en los elementos y por consecuencia no cambia su composición al aplicar dichas fuerzas, por lo tanto consideramos que es una armadura estable, de lo contrario si fuera una formación cuadrada no permitiría la rigidez, por lo tanto sería una armadura inestable, y tenderá a ser deformada con facilidad.

Una armadura se puede clasificar como una estructura de peso ligero, debido a que sus miembros soportan una carga exterior considerablemente mayor a su peso propio.

Por lo general los miembros de una armadura son delgados, rectos y pueden soportar poca carga lateral, están diseñados para soportar dos fuerzas colineales de igual magnitud, pero de sentidos opuestos y por lo cual las cargas actúan en los nodos.

Una armadura se diseña de manera que las cargas principales se apliquen en los nodos, si no fuera así y las fuerzas se aplicaran fuera de los nodos, los miembros tenderían a fallar por flexión debido a que son muy delgados y rectos

Al suponer que las cargas actúan en los nodos, el peso de cada una de las barras debe repartirse, en mitad en cada uno de sus nodos extremos.

Igualmente al considerar que las barras están articuladas, la soldadura o remaches o pernos u otro tipo de unión deben ubicarse lo mas cercanos al nodo a fin de evitar que se presenten fuerzas internas que provoquen momentos flexionantes.

En una armadura debemos distinguir cuatro tipos barras que son:

- a) Cuerda superior: Es el conjunto de barras que conforman la parte mas elevada de la estructura. Para solicitaciones de tipo gravitacional, normalmente son piezas que trabajan a compresión.
- b) Cuerda inferior: Es el conjunto barras que conforman la parte mas baja de la estructura. Para solicitaciones de tipo gravitacional, normalmente son piezas que trabajan a tensión.
- c) Montantes: son miembros que cumplen la función de reforzar y dar rigidez a la armadura y evitar el pandeo de la cuerda inferior o superior, denominados así a las barras verticales de una armadura.
- d) Diagonales: son piezas que, como su nombre lo indica, tienen posición inclinada, dependiendo su orientación se encuentran sometidas a compresión o tensión según sea el caso.

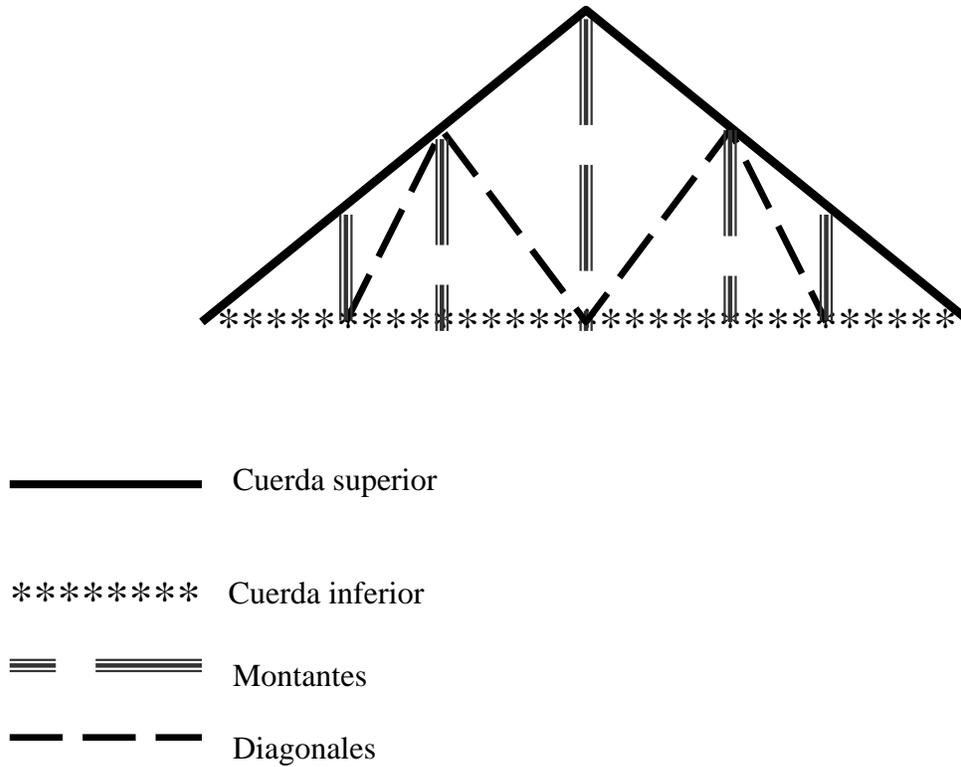


Figura 11.- Tipos de barras.

Tipos de Armaduras

Existen varios tipos de arreglos geométricos para las armaduras y ello nos permite hacer distinciones.

Algunos de los tipos mas comunes son las que describimos a continuación y por lo general se respeta que los de las diagonales tengan un valor promedio comprendido entre 30° y 60° .

También existen armaduras especiales, pero solo analizaremos armaduras planas por ser del tipo estáticamente determinadas

Los ingenieros que desarrollaron el diseño de varios tipos armaduras les dieron su nombre:

La armadura **Howe** fue diseñada y patentada por William Howe en el año de 1840. El diseño de Howe fue un mejoramiento de un diseño previo en el que se usaba un enrejado de piezas diagonales.

Howe simplificó el diseño y le agregó elementos verticales de hierro forjado.

Cuando las cargas se aplican a lo largo de la cuerda inferior de la armadura, los miembros verticales (montantes) se encuentran sometidos a tensión y los diagonales a compresión.

Howe fue de los primeros en utilizar el hierro forjado en los puentes debido a la capacidad superior para resistir los efectos de la tensión.

En el año de 1844 Thomas **Pratt** y su padre Caleb modificaron el diseño realizado por Howe para así poder crear la armadura Pratt. Su diseño consistió en invertir el sentido de los miembros diagonales, esto tuvo como efecto que las diagonales se encuentren sometidas a tensión y los elementos verticales a compresión. Este diseño se realizó debido al incremento en el uso del hierro como material de construcción para puentes completos.

Las armaduras tipo Pratt tienen sus montantes sometidos a compresión, mientras sus diagonales están sometidas a tensión.

La armadura Pratt se usa para claros no muy largos debido a su composición y el acomodo de sus diagonales

En la armadura Pratt los miembros a compresión (verticales) son más cortos que la armadura Howe esto nos produce un incremento en la estabilidad de dichos miembros.

En la actualidad la Armadura Howe y la Pratt se diferencian por la orientación de sus diagonales y no por el material del cual sean construidas.

En 1848, James **Warren** y W. T. Manzoni patentaron en Inglaterra un diseño de una armadura formada por cuerdas superior e inferior horizontales y sus diagonales con una inclinación de 60° .

La construcción de la armadura Warren consiste en el uso de la fundición para formar secciones triangulares que constan de la cuerda superior y dos diagonales de un tramo. Estas secciones se unen mediante varillas roscadas de hierro forjado que formaban la cuerda inferior.

Al agregar un miembro vertical por cada tramo, o en tramos alternados, los miembros verticales tienen la función de reforzar la cuerda superior para evitar que ocurra el pandeo bajo fuerzas de compresión.

La aplicación de la armadura Warren, es para soportar un sistema de cargas móvil y por ello las barras pueden trabajar tanto a tensión como a compresión.

Albert **Fink**, ingeniero nacido en Alemania y empresario de ferrocarriles, realizó mejoramientos adicionales en el diseño de los puentes de acero de los ferrocarriles, así logró un diseño que es muy usado en la actualidad. Fink patentó su diseño en 1851 y este se conoce como la armadura Fink. Esta configuración es una armadura compuesta hecha con elementos simples. Fink se dio cuenta que con este acomodo de los miembros hace que la cuerda inferior no sea indispensable, solo con la cuerda superior es suficiente para satisfacer el buen funcionamiento de la armadura.

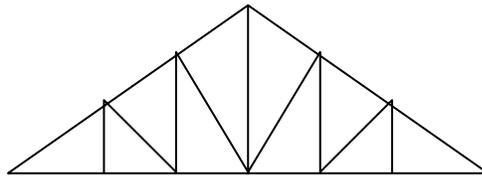
Cuando se requiere para cubrir claros no muy largos es recomendable utilizar las de tipo Fink, debido a que esta formada por una serie de barras cortas que trabajan a compresión.

Cuando existe la necesidad del paso de la luz a través de la estructura del techo, como es muy común en las industrias, lo ideal será el uso de las armaduras **Diente de sierra**.

Existen otros tipos como son las de **Tijeras**, tipo **K**, armaduras triarticuladas o bases para torres de alta tensión o tanque de almacenamiento.

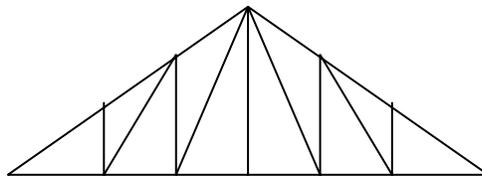
ARMADURAS UTILIZADAS EN TECHOS

Howe



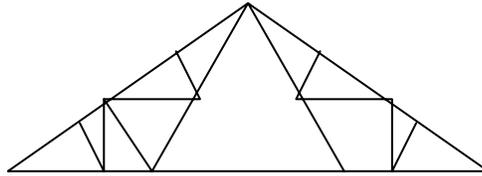
Las diagonales trabajan a compresión y montantes a tensión

Pratt



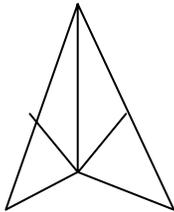
Las diagonales trabajan a tensión y montantes a compresión

Fink



Las barras a compresión son las mas pequeñas

Tijera



Diente de sierra

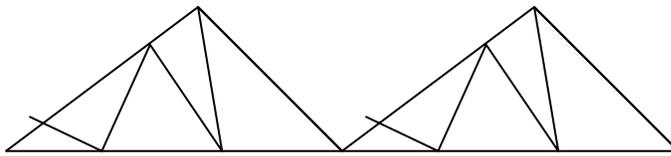
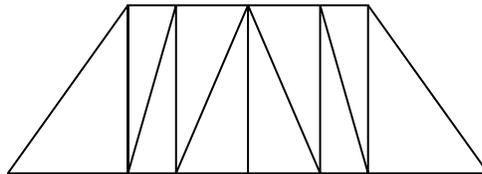


Figura 12.- Tipos de armaduras usadas en techo.

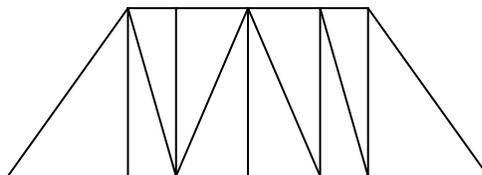
ARMADURAS UTILIZADAS EN PUENTES

Howe



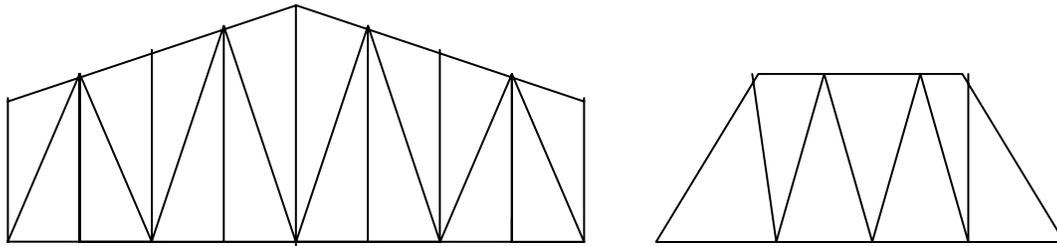
Las diagonales trabajan a compresión y montantes a tensión

Pratt



Las diagonales trabajan a tensión y montantes a compresión

Warren



Ideales para puentes

Figura 13.- Tipos de armaduras utilizadas en puentes.

Análisis de Estaticidad

La estática se ocupa de las condiciones que deben reunir los sistemas de las fuerzas que actúan sobre una estructura en reposo para que se encuentre en equilibrio, para evitar el movimiento de los cuerpos y deformaciones, pero esto sucede solo a simple vista.

La mayor parte de los cuerpos suponemos que son rígidos, definiéndose el sólido rígido como aquel que no se deforma. Las armaduras, sin embargo, no son nunca absolutamente rígidas y se deforman bajo las cargas a las que son sometidas. Pero estas deformaciones son muy pequeñas y no afectan apreciablemente las condiciones de equilibrio o movimiento de la estructura considerada. Son importantes, sin embargo en lo que concierne a la resistencia a la rotura de la estructura, y son analizadas en el estudio de la resistencia de materiales.

Las fuerzas que actúan sobre una armadura pueden dividirse en dos grupos:

- a) fuerzas exteriores: representan la acción de otros cuerpos sobre el sólido rígido considerado. Son enteramente responsables del comportamiento externo que tiene la armadura. De tal manera que provocaran el movimiento o permanezca en reposo.
- b) fuerzas interiores: son aquellas que mantienen unidas a todas las partículas que forman una armadura.

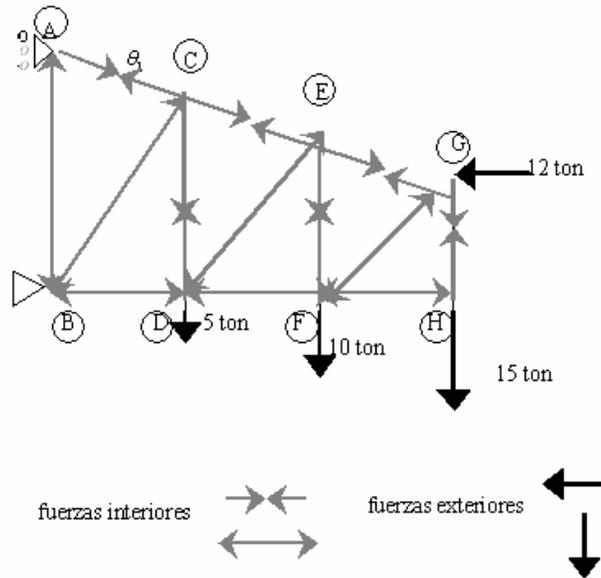


Figura 14.- Fuerzas actuantes en una armadura

El análisis de estática de una armadura que se constituye por b barras y n nodos articulados.

El número de ecuaciones disponibles será.

Ecuación de barra	$3b$
Ecuación de nodo (articulación)	$2n$

Por su parte el número de incógnitas será:

Sistema interno (barra articulada)	$4b$
Sistema externo (reacciones)	R

La armadura será estáticamente determinada cuando el número de incógnitas corresponda con el número de ecuaciones, de tal manera que se cumpla:

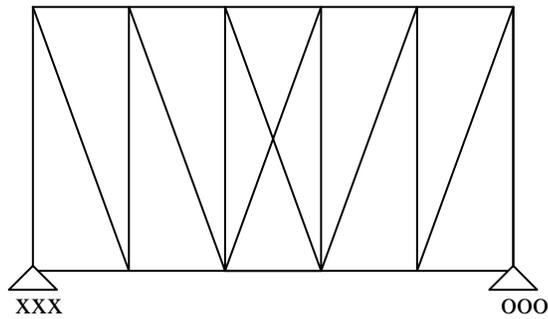
$$3b + 2n = 4b + R$$

o sea:

$$2n = R + b$$

la expresión anterior es la condición de isostaticidad, según la cual el doble del número de nodos tiene que ser igual al número de reacciones mas el número de barras de la armadura.

Ejemplo: en cada una de las armaduras de la figura 15, analizar su estaticidad.

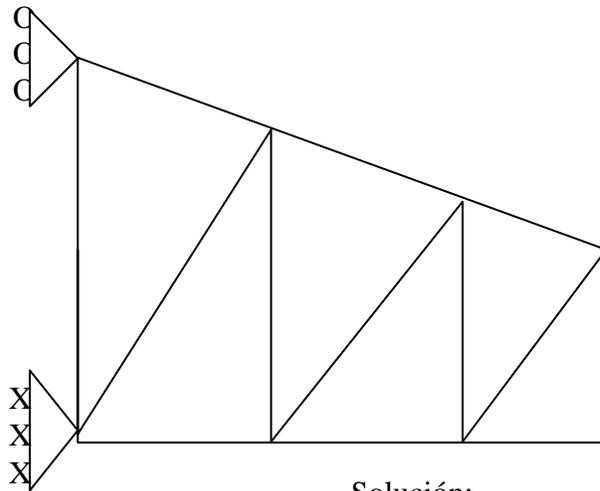


Solución:

$$\begin{aligned} n &= 12 \\ b &= 22 \\ R &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(12) &\neq 22 + 3 \\ E &< I \end{aligned}$$

La armadura es hiperestática debido a las barras que se cruzan en la crujía central, por lo cual ocasiona que tenga menor número de ecuaciones que de incógnitas.

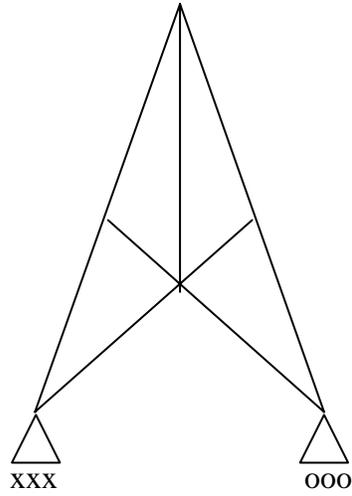


Solución:

$$\begin{aligned} n &= 8 \\ b &= 13 \\ R &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(8) &= 13 + 3 \\ E &= I \end{aligned}$$

La estructura es isostática por cumplir con la condición de tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.



Solución:

$$\begin{aligned} n &= 6 \\ b &= 9 \\ R &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(6) &\neq 9 + 2 \\ E &> I \end{aligned}$$

Figura 15

La armadura por disponer de mayor número de ecuaciones que incógnitas y como ambos apoyos son simples, resulta ser hipostática.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE LOS NODOS

Este procedimiento de cálculo consiste en analizar todas y cada una de las articulaciones de la armadura, haciendo un diagrama de cuerpo libre en cada caso, presentándose un sistema de fuerzas concurrentes, según el número de barras que incidan en dicho nodo, por lo tanto, se deben cumplir dos ecuaciones de equilibrio: una de proyecciones horizontales y otra de proyecciones verticales (figura 16).

NODO (H)

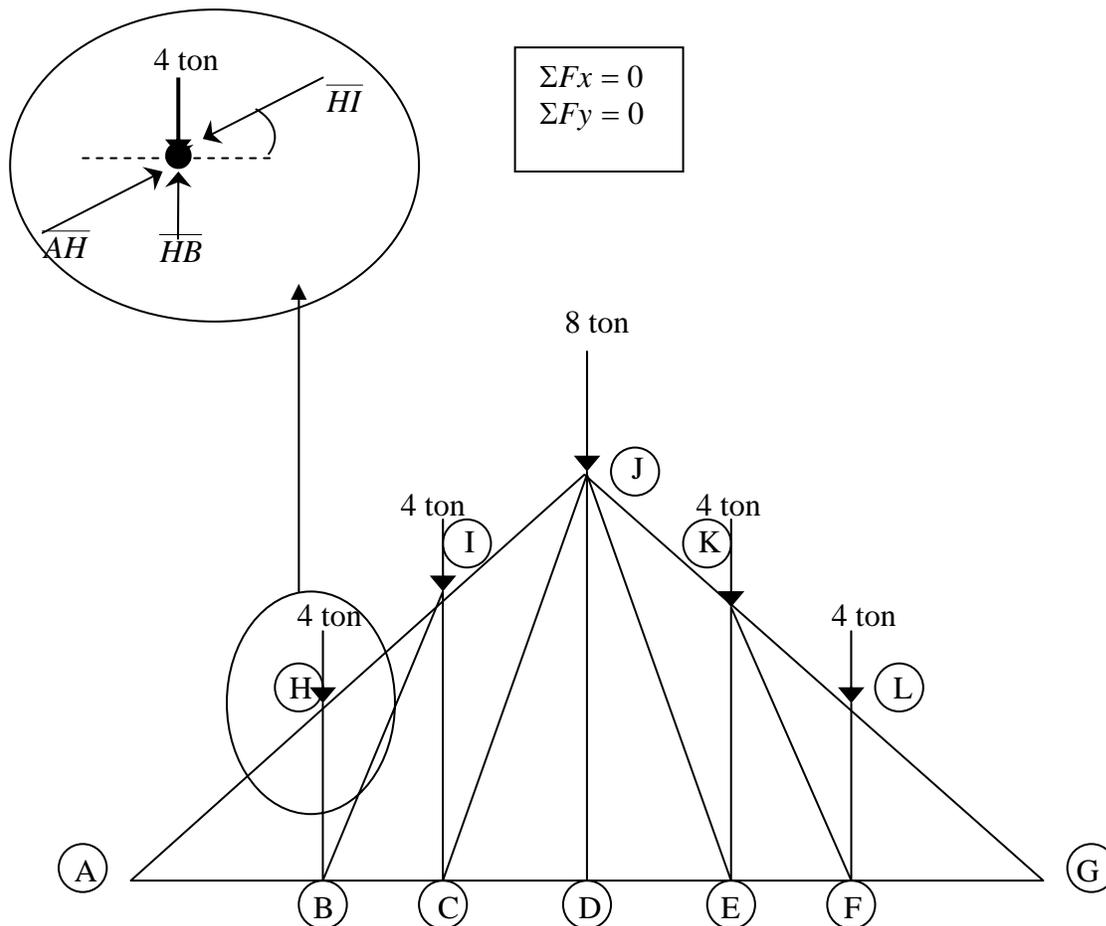


Figura 16.- Armadura tipo Pratt.

Mostremos este método con un ejemplo. Resolvamos por el método de los nodos la armadura de tipo Pratt que se muestra en la figura 17.

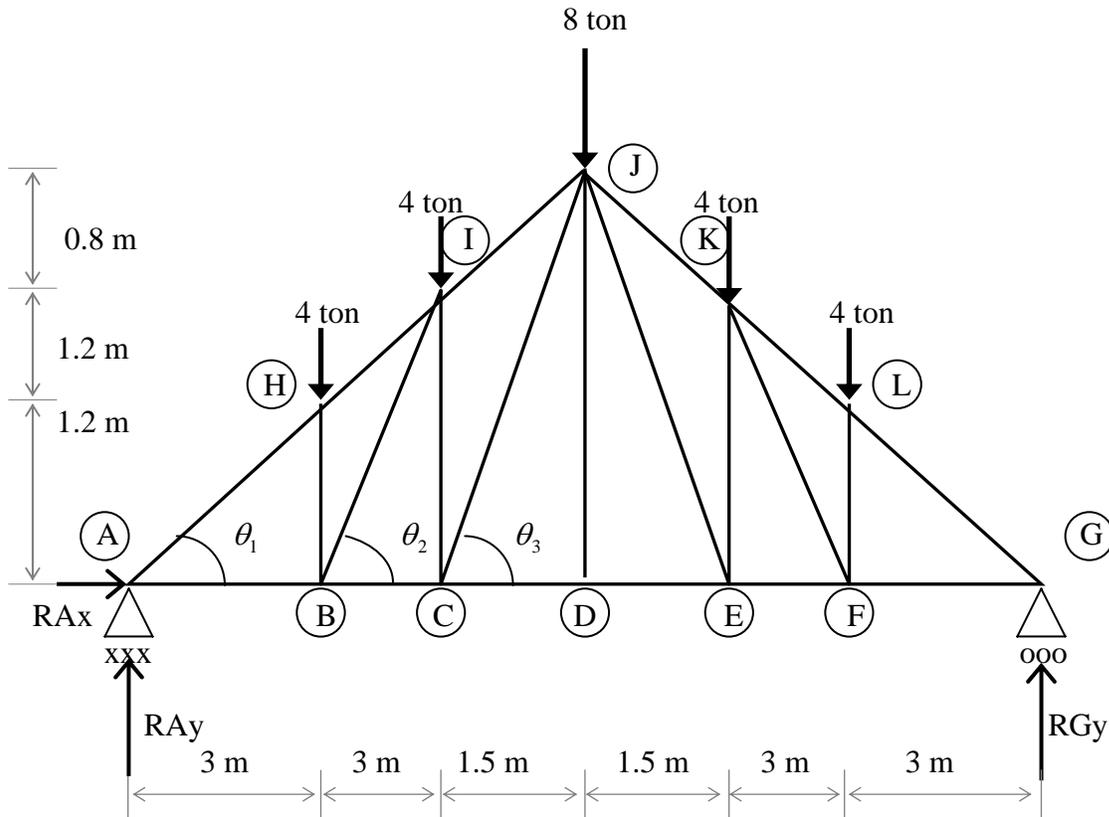


Figura 17.- armadura Tipo Pratt.

En primer lugar, debemos calcular todos los elementos geométricos que serán necesarios en el transcurso del procedimiento. También se requiere calcular las reacciones en los apoyos. Los elementos geométricos se anotan en la figura 18.

CÁLCULO DE ÁNGULOS

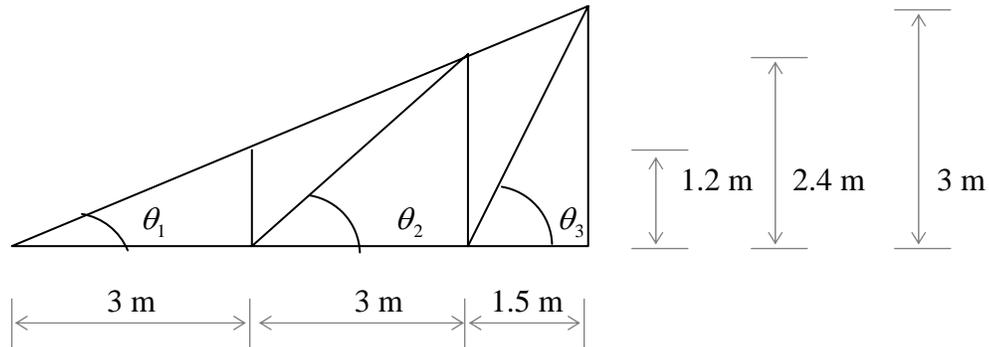


Figura 18.- Ángulos de la armadura.

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1.2}{3}\right) = 21.80^\circ$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2.4}{3}\right) = 38.66^\circ$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{1.5}\right) = 63.43^\circ$$

CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$4(3 + 6 + 9 + 12) + 8(7.5) - RGy(15) = 0$$

$$RGy = \frac{180}{15}$$

$$RGy = 12 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$RA_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$12 - 4 - 4 - 8 - 4 - 4 + RA_y = 0$$

$$RA_y = 12 \text{ ton}$$

El método de los nodos lo iniciaremos por un de los apoyos, digamos “A”. En este punto dibujamos el diagrama de cuerpo libre y representamos las fuerzas de compresión como vectores que llegan al nodo y las fuerzas de tensión las representaremos como vectores que salen del nodo (figura 19).

NODO (A)

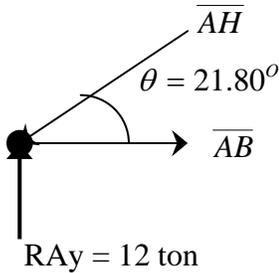


Figura 19

$$\Sigma Fy = 0$$

$$12 - \overline{AH} \text{sen} 21.80^\circ = 0$$

$$\overline{AH} = \frac{12}{\text{SEN} 21.80^\circ}$$

$$\boxed{\overline{AH} = 32.31 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$\overline{AB} - 32.31 \cos 21.80^\circ = 0$$

$$\boxed{\overline{AB} = 30 \text{ ton}}$$

De igual manera, recorreremos nodo tras nodo para efectuar los cálculos, en el entendimiento que no pueden existir mas de dos incógnitas en cada caso (figuras 20, 21, 22, 23, 24 y 25).

NODO (H)

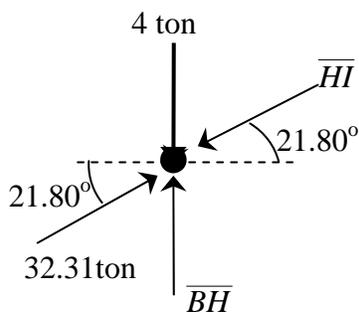


Figura 20

$$\Sigma Fx = 0$$

$$32.31 \cos 21.80^\circ - \overline{HI} \cos 21.80^\circ = 0$$

$$\boxed{\overline{HI} = 32.31 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$32.31 \text{sen} 21.80^\circ - 32.31 \text{sen} 21.80^\circ - 4 + \overline{BH} = 0$$

$$\boxed{\overline{BH} = 4 \text{ ton}}$$

NODO (B)

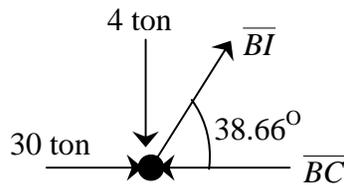


Figura 21

$$\Sigma Fy = 0$$

$$-4 + \overline{BI} \text{sen} 38.66^\circ = 0$$

$$\overline{BI} = \frac{4}{\text{sen} 38.66^\circ}$$

$$\overline{BI} = 6.40 \text{ ton}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$-30 + \overline{BC} + 6.40 \cos 38.66^\circ = 0$$

$$\overline{BC} + 25 = 0$$

$$\overline{BC} = 25 \text{ ton}$$

NODO (I)

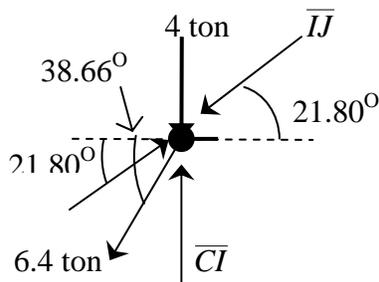


Figura 22

$$\Sigma Fx = 0$$

$$32.31 \cos 21.8^\circ - 6.4 \cos 38.66^\circ - \overline{IJ} \cos 21.8^\circ = 0$$

$$\overline{IJ} - 26.92 \text{ ton} = 0$$

$$\overline{IJ} = 26.93 \text{ ton}$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$-4 + 32.31 \text{sen} 21.8^\circ - 6.4 \text{sen} 38.66^\circ + \overline{CI} - 26.92 \text{sen} 21.8^\circ = 0$$

$$\overline{CI} - 6 = 0$$

$$\overline{CI} = 6 \text{ ton}$$

NODO (C)

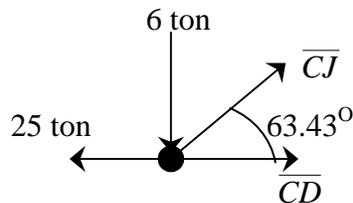


Figura 23

$$\Sigma Fy = 0$$

$$-6 + \overline{CJ} \text{sen} 63.43^\circ = 0$$

$$\overline{CJ} = \frac{6}{\text{sen} 63.43^\circ}$$

$$\overline{CJ} = 6.7 \text{ ton}$$

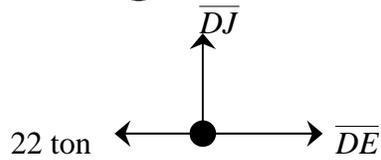
$$\Sigma Fx = 0$$

$$-25 + \overline{CD} + 6.7 \cos 63.43^\circ = 0$$

$$\overline{CD} - 22 = 0$$

$$\overline{CD} = 22 \text{ ton}$$

NODO (D)



$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ -22 + \overline{DE} &= 0 \end{aligned}$$

$\overline{DE} = 22 \text{ ton}$

Figura 24

$$\Sigma F_y = 0$$

$\overline{DJ} = 0 \text{ ton}$

NODO (J)

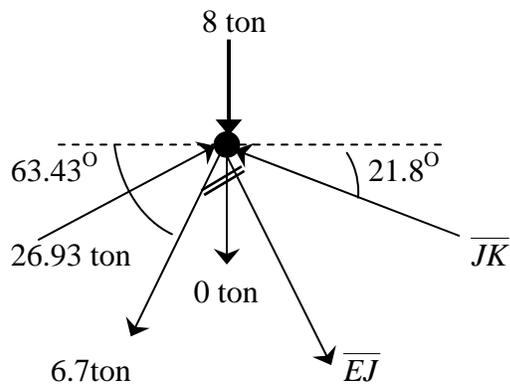


Figura 25

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\begin{aligned} 26.92 \cos 21.8^\circ - 6.7 \cos 63.43^\circ + \overline{EJ} \cos 63.43^\circ - \overline{JK} \cos 21.8^\circ &= 0 \\ 22 + \overline{EJ} \cos 63.43^\circ - \overline{JK} \cos 21.8^\circ &= 0 \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\begin{aligned} -8 + 26.92 \sin 21.8^\circ - 6.7 \sin 63.43^\circ - \overline{EJ} \sin 63.43^\circ + \overline{JK} \sin 21.8^\circ &= 0 \\ -4 - \overline{EJ} \sin 63.43^\circ + \overline{JK} \sin 21.8^\circ &= 0 \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

por eliminación de elementos similares

$$22 + \overline{EJ}0.447 - \overline{JK}0.928 = 0 \quad \text{multiplicamos por 2} \quad (3)$$

$$-4 - \overline{EJ}0.894 + \overline{JK}0.371 = 0 \quad (4)$$

$$44 + \overline{EJ}0.894 - \overline{JK}1.856 = 0$$

$$\overline{JK} = \frac{40}{1.485}$$

$$\begin{array}{r} -4 - \overline{EJ}0.894 + \overline{JK}0.371 = 0 \\ \hline 40 \quad 0 \quad -\overline{JK} 1.485 = 0 \end{array}$$

$\overline{JK} = 26.93 \text{ ton}$

Sustituimos \overline{JK} en 3

$$22 + \overline{EJ}0.447 - (26.93)0.928 = 0$$

$$\overline{EJ} = \frac{2.99}{0.447}$$

$\overline{EJ} = 6.7 \text{ ton}$

Por simetría: $\overline{AH} = \overline{LG}$, $\overline{HI} = \overline{KL}$, $\overline{IJ} = \overline{JK}$, $\overline{AB} = \overline{FG}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\overline{CD} = \overline{DE}$, $\overline{HB} = \overline{LF}$, $\overline{IC} = \overline{KE}$, $\overline{BI} = \overline{KF}$, $\overline{JC} = \overline{JE}$, \overline{JD} .

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDA A:
Cuerda superior	$\overline{AH} = \overline{LG}$	32.31	Compresión
	$\overline{HI} = \overline{KL}$	32.31	Compresión
	$\overline{IJ} = \overline{JK}$	26.93	Compresión
Cuerda inferior	$\overline{AB} = \overline{FG}$	30.00	Tensión
	$\overline{BC} = \overline{EF}$	25.00	Tensión
	$\overline{CD} = \overline{DE}$	22.00	Tensión
Montantes	$\overline{HB} = \overline{LF}$	4.00	Compresión
	$\overline{IC} = \overline{KE}$	6.00	Compresión
	\overline{JD}	0.00	No trabaja
Diagonales	$\overline{BI} = \overline{KF}$	6.40	Tensión
	$\overline{JC} = \overline{JE}$	6.70	Tensión

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 26.

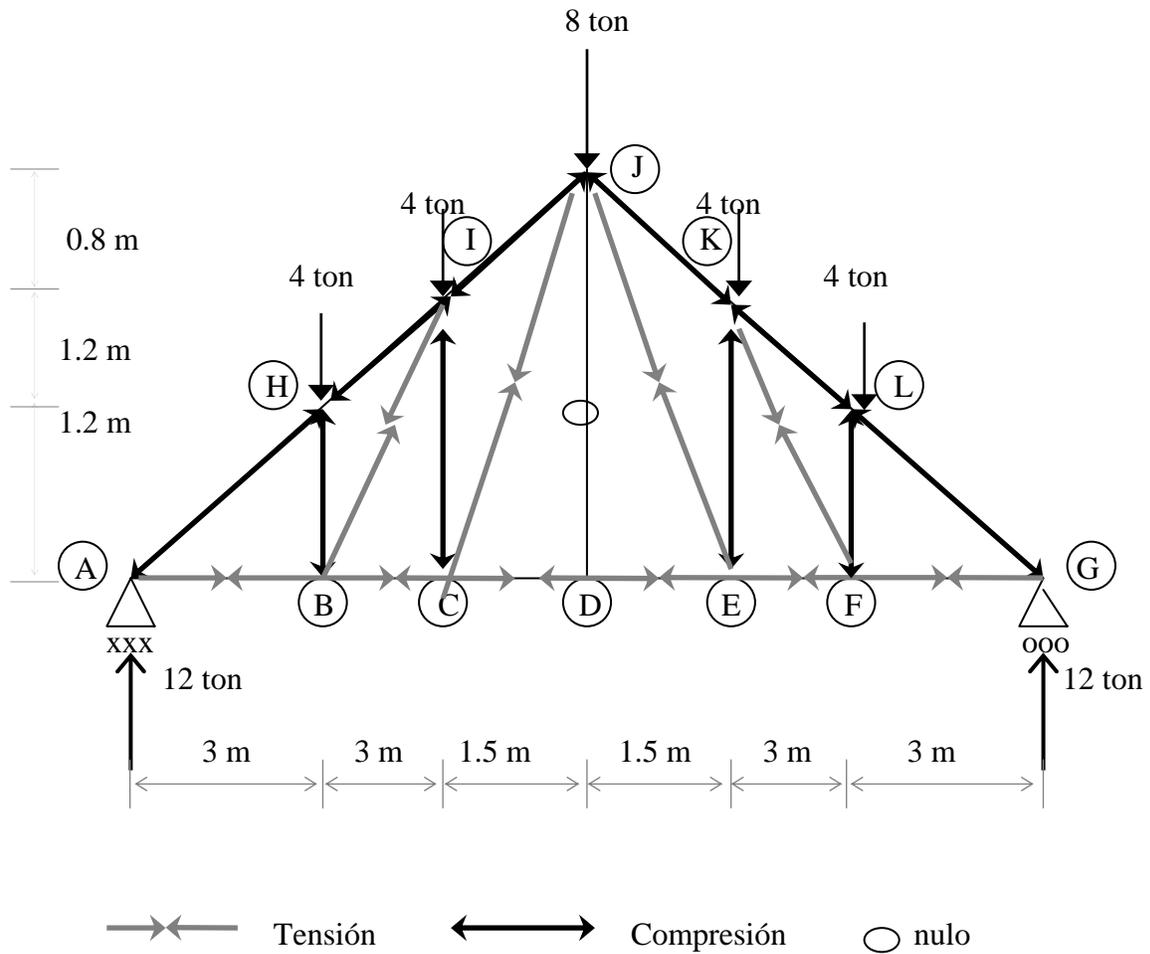
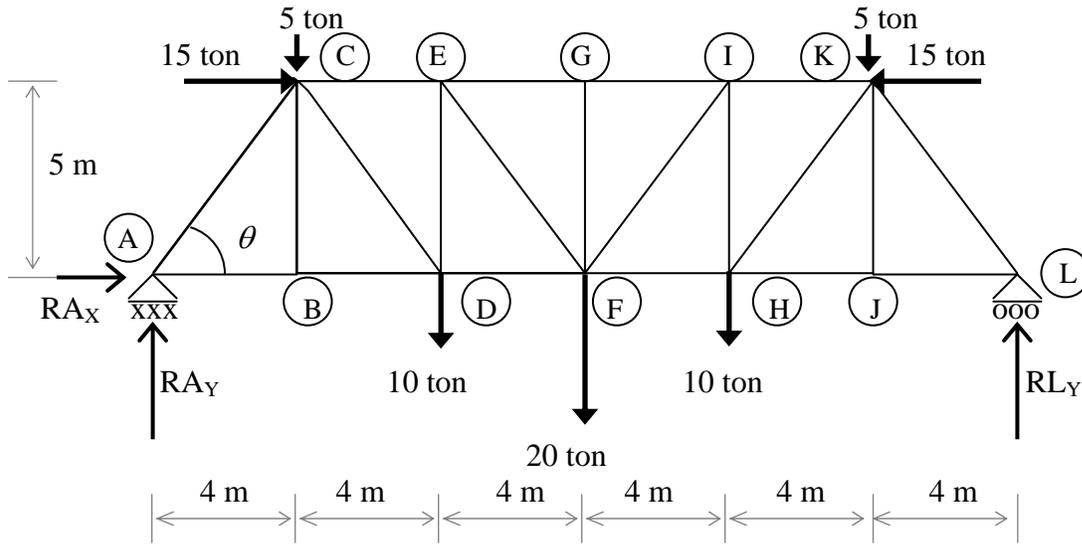


Figura 26.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

SEGUNDO ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS



CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$5(4) + 10(8) + 20(12) + 10(16) + 5(20) + 15(5) - 15(5) - RLy(24) = 0$$

$$RLy = \frac{600}{24}$$

$$RLy = 25 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$15 - 15 + RAx = 0$$

$$RAx = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$5 - 10 - 20 - 10 - 5 + 25 + RAy = 0$$

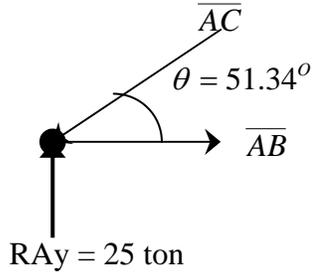
$$RAy = 25 \text{ ton}$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = 51.34^\circ$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS

NODO (A)



$$\Sigma Fy = 0$$

$$25 - \overline{AC} \text{sen} 51.34^\circ = 0$$

$$\overline{AC} = \frac{25}{\text{sen} 51.34^\circ}$$

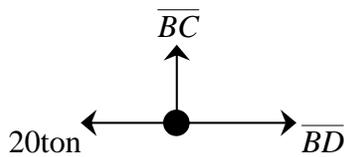
$$\overline{AC} = 32.02 \text{ ton}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$\overline{AB} - 32.02 \cos 51.34^\circ = 0$$

$$\overline{AB} = 20 \text{ ton}$$

NODO (B)



$$\Sigma Fy = 0$$

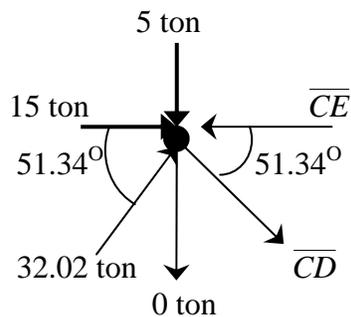
$$\overline{BC} = 0$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$\overline{BD} - 20 = 0$$

$$\overline{BD} = 20 \text{ ton}$$

NODO (C)



$$\Sigma Fy = 0$$

$$-5 + 32.02 \text{sen} 51.34^\circ - \overline{CD} \text{sen} 51.34^\circ = 0$$

$$\overline{CD} = \frac{20}{\text{sen} 51.34^\circ}$$

$$\overline{CD} = 25.62 \text{ ton}$$

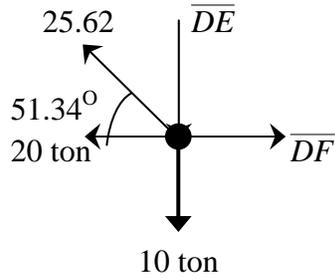
$$\Sigma Fx = 0$$

$$15 - \overline{CE} + 32.02 \cos 51.34^\circ + 25.62 \cos 51.34^\circ = 0$$

$$\overline{CE} + 51 = 0$$

$$\overline{CE} = 51 \text{ ton}$$

NODO (D)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$-10 - \overline{DE} + 25.62 \text{sen} 51.34^\circ = 0$$

$$-\overline{DE} + 10 = 0$$

$$\boxed{\overline{DE} = 10 \text{ ton}}$$

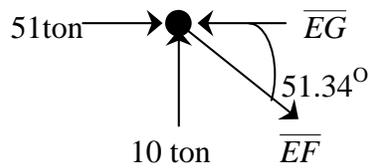
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-20 + \overline{DF} - 25.62 \text{cos} 51.34^\circ = 0$$

$$\overline{DF} - 36 = 0$$

$$\boxed{\overline{DF} = 36 \text{ ton}}$$

NODO (E)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$10 - \overline{EF} \text{sen} 51.34^\circ = 0$$

$$\overline{EF} = \frac{10}{\text{sen} 51.34^\circ}$$

$$\boxed{\overline{EF} = 12.81 \text{ ton}}$$

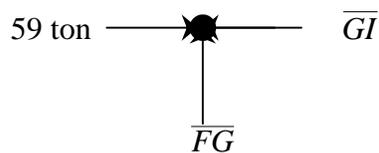
$$\Sigma F_x = 0$$

$$51 - \overline{EG} + 12.81 \text{cos} 51.34^\circ = 0$$

$$\overline{EG} - 59 = 0$$

$$\boxed{\overline{EG} = 59 \text{ ton}}$$

NODO (G)



$$\Sigma F_x = 0$$

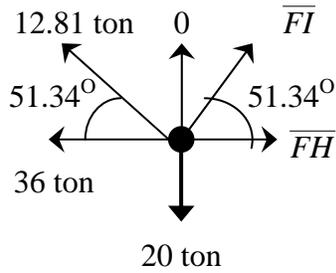
$$59 - \overline{GI} = 0$$

$$\boxed{\overline{GI} = 59 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\boxed{\overline{FG} = 0 \text{ ton}}$$

NODO (F)



$$\Sigma Fy = 0$$

$$12.81 \text{sen} 51.34^\circ - 20 + \overline{FI} \text{sen} 51.34^\circ$$

$$\overline{FI} = \frac{10}{\text{sen} 51.34^\circ}$$

$$\overline{FI} = 12.81 \text{ ton}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$-36 + 12.81 \text{sen} 51.34 - 12.81 \text{sen} 51.34 + \overline{FH} = 0$$

$$\overline{FH} = 36 \text{ ton}$$

Por simetría: $\overline{CE} = \overline{IK}$, $\overline{EG} = \overline{GI}$, $\overline{AB} = \overline{JL}$, $\overline{BD} = \overline{HJ}$, $\overline{DF} = \overline{FH}$, $\overline{BC} = \overline{JK}$, $\overline{DE} = \overline{HI}$, $\overline{AC} = \overline{KL}$, $\overline{CD} = \overline{HK}$, $\overline{EF} = \overline{FI}$, \overline{FG} .

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A:
Cuerda superior	$\overline{CE} = \overline{IK}$	51.00	Compresión
	$\overline{EG} = \overline{GI}$	59.00	Compresión
Cuerda inferior	$\overline{AB} = \overline{JL}$	20.00	Tensión
	$\overline{BD} = \overline{HJ}$	20.00	Tensión
	$\overline{DF} = \overline{FH}$	36.00	Tensión
Montantes	$\overline{BC} = \overline{JK}$	0.00	No trabaja
	$\overline{DE} = \overline{HI}$	10.00	Compresión
	\overline{FG}	0.00	No trabaja
Diagonales	$\overline{AC} = \overline{KL}$	32.02	Compresión
	$\overline{CD} = \overline{HK}$	25.61	Tensión
	$\overline{EF} = \overline{FI}$	12.81	Tensión

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 27.

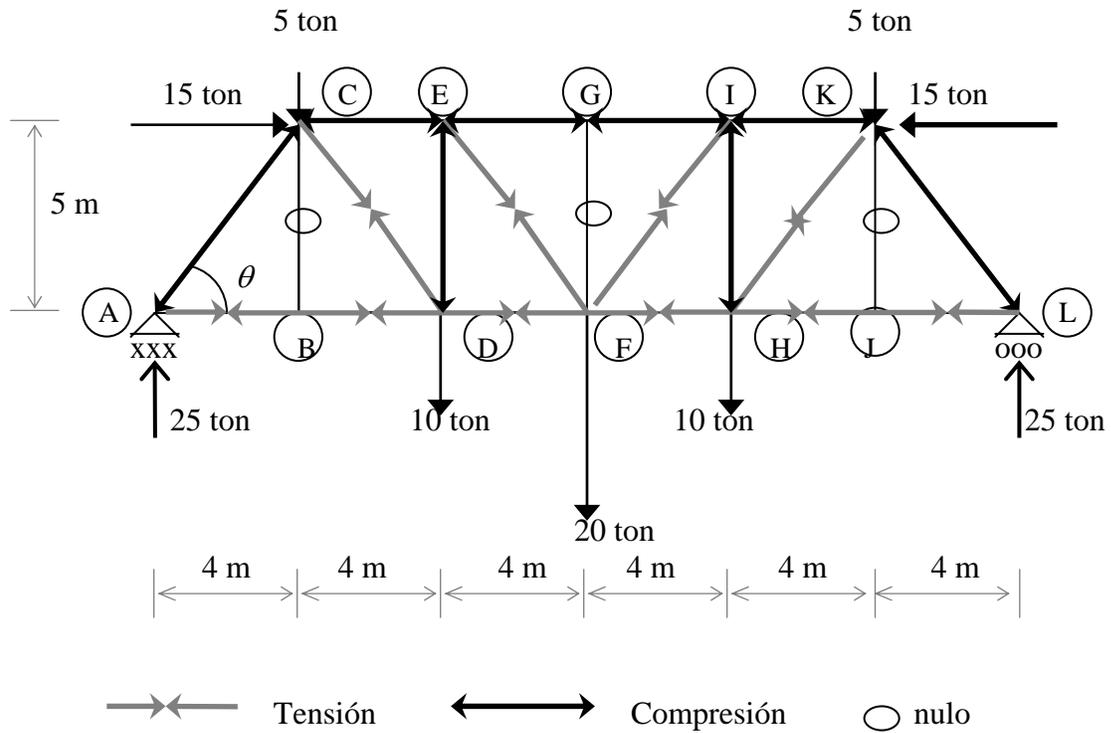
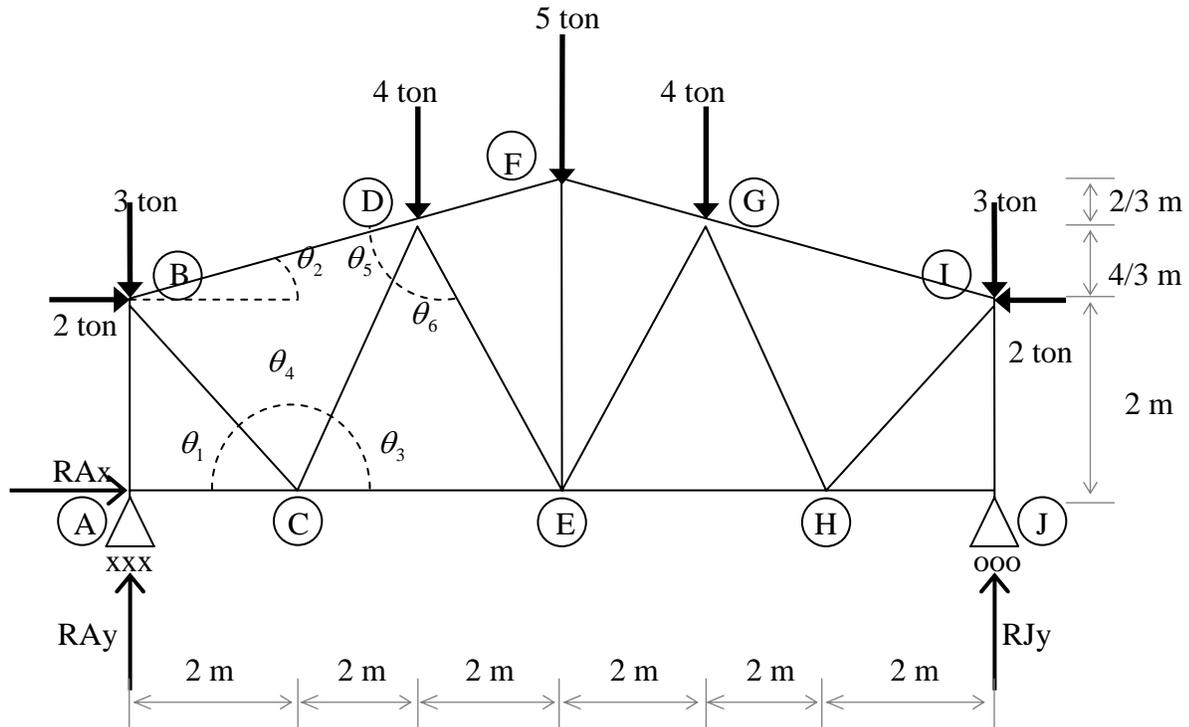


Figura 27.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

TERCER ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS



CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$2(2-2) + 4(4+8) + 5(6) + 3(12) - RJy(12) = 0$$

$$RJy = \frac{114}{12}$$

$$RJy = 9.5 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$2 - 2 + RAx = 0$$

$$RAx = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$9.5 - 3 - 4 - 5 - 4 - 3 + RAy = 0 \quad RAy = 9.5 \text{ ton}$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 45^\circ$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{6}\right) = 18.43^\circ$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{10/3}{2}\right) = 59.03^\circ$$

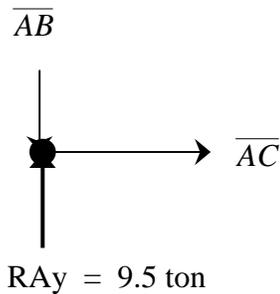
$$\theta_4 = 180 - \theta_1 - \theta_2 = 75.96$$

$$\theta_5 = 180 - (2(59.03)) = 61.94$$

$$\theta_6 = 180 - 63.43 - 75.96$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS

NODO (A)



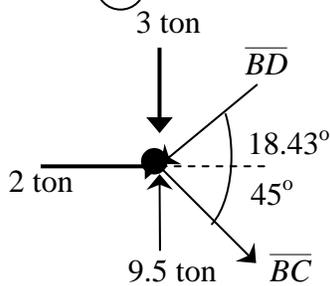
$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \overline{AC} - 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\overline{AC} = 0 \text{ ton}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ -\overline{AB} + 9.5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\overline{AB} = 9.5 \text{ ton}$$

NODO (B)



$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ 2 - \overline{BD} \cos 18.43^\circ + \overline{BC} \cos 45^\circ &= 0 \\ 2 - 0.9487 \overline{BD} + 0.7071 \overline{BC} &= 0 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ 9.5 - 3 - \overline{BD} \sin 18.43^\circ - \overline{BC} \sin 45^\circ &= 0 \\ 6.5 - 0.3161 \overline{BD} - 0.7071 \overline{BC} &= 0 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

Ahora por el método de eliminación de elementos semejantes tendremos:

$$2 - 0.9487 \overline{BD} + 0.7071 \overline{BC} = 0$$

$$6.5 - 0.3161 \overline{BD} - 0.7071 \overline{BC} = 0$$

$$\frac{8.5 - 1.2648 \overline{BD}}{0.7071} = 0$$

$$\overline{BD} = \frac{-8.5}{-1.2648}$$

$$\overline{BD} = 6.72 \text{ ton}$$

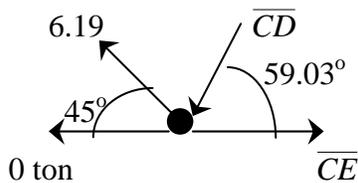
ahora se sustituye \overline{BD} en la ecuación 2

$$6.5 - 0.3161(6.72) - 0.7071 \overline{BC} = 0$$

$$\overline{BC} = \frac{4.3758}{0.7071}$$

$$\overline{BC} = 6.19 \text{ ton}$$

NODO (C)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$6.19 \text{sen} 45^\circ - \overline{CD} \text{sen} 59.03^\circ = 0$$

$$\overline{CD} = \frac{4.3769}{\text{sen} 59.03^\circ}$$

$$\overline{CD} = 5.10 \text{ ton}$$

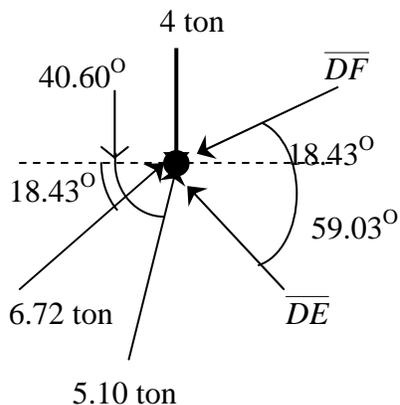
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-6.19 \text{cos} 45^\circ - 5.10 \text{cos} 59.03^\circ + \overline{CE} = 0$$

$$\overline{CE} - 7 = 0$$

$$\overline{CE} = 7 \text{ ton}$$

NODO (D)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$-4 + 6.72 \text{sen} 18.43^\circ + 5.10 \text{sen} 59.03^\circ + \overline{DE} \text{sen} 59.03^\circ - \overline{DF} \text{sen} 18.43^\circ = 0$$

$$2.497 + 0.8574 \overline{DE} - 0.1362 \overline{DF} = 0 \dots\dots (3)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$6.72 \text{cos} 18.43^\circ + 5.10 \text{cos} 59.03^\circ - \overline{DE} \text{cos} 59.03^\circ - \overline{DF} \text{cos} 18.43^\circ = 0$$

$$9 - 0.5145 \overline{DE} - .9486 \overline{DF} = 0 \dots\dots (4)$$

Multiplicamos la ecuación 3 por -3 para poder aplicar el método de eliminación de elementos semejantes y obtendremos:

$$\begin{array}{r} -2.5722 \overline{DE} - 0.9486 \overline{DF} = 7.491 \\ -0.5185 \overline{DE} + 0.9486 \overline{DF} = -9 \\ \hline -3.0907 \overline{DE} = -1.509 \end{array}$$

$$\overline{DE} = \frac{-1.509}{-0.30907}$$

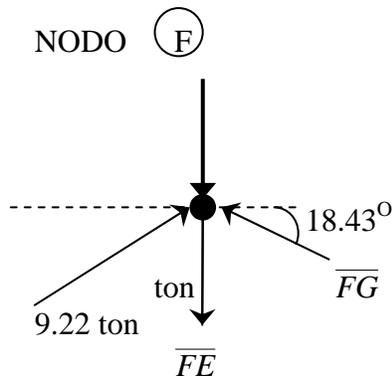
Sustituimos \overline{DE} en la ecuación 4

$$\overline{DE} = 0.488 \text{ ton}$$

$$9 - 0.5145(0.488) - 0.9486 \overline{DF} = 0$$

$$\overline{DF} = \frac{-8.7489}{-0.9486}$$

$$\overline{DF} = 9.22 \text{ ton}$$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$9.22 \cos 18.43^\circ - \overline{FG} \cos 18.43^\circ = 0$$

$$\overline{FG} = \frac{9.22 \cos 18.43^\circ}{\cos 18.43^\circ}$$

$$\overline{FG} = 9.22 \text{ ton}$$

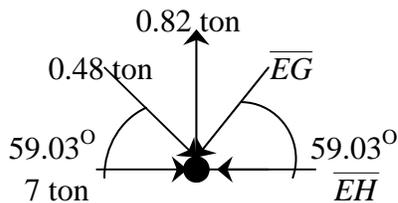
$$\Sigma F_y = 0$$

$$9.22 \sin 18.43^\circ + 9.22 \sin 18.43^\circ - 5 - \overline{FE} = 0$$

$$- \overline{FE} + 5.82 - 5 = 0$$

$$\overline{FE} = 0.82 \text{ ton}$$

NODO (E)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$-0.48 \sin 59.03^\circ + 0.82 - \overline{EG} \sin 59.03^\circ$$

$$- \overline{EG} + 0.48 = 0$$

$$\overline{EG} = 0.48 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$7 + 0.48 \cos 59.03^\circ - 0.48 \cos 59.03^\circ = 0$$

$$\overline{EH} = 7 \text{ ton}$$

Por simetría: $\overline{BD} = \overline{GI}$, $\overline{DF} = \overline{FG}$, $\overline{AC} = \overline{HJ}$, $\overline{CE} = \overline{EH}$, $\overline{AB} = \overline{IJ}$, \overline{FE} , $\overline{BC} = \overline{HI}$, $\overline{CD} = \overline{GH}$, $\overline{DE} = \overline{EG}$.

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A:
Cuerda superior	$\overline{BD} = \overline{GI}$	6.72	Compresión
	$\overline{DF} = \overline{FG}$	9.22	Compresión
Cuerda inferior	$\overline{AC} = \overline{HJ}$	0.00	No trabaja
	$\overline{CE} = \overline{EH}$	7.00	Tensión
Montantes	$\overline{AB} = \overline{IJ}$	9.50	Compresión
	\overline{FE}	0.82	Tensión
Diagonales	$\overline{BC} = \overline{HI}$	6.19	Tensión
	$\overline{CD} = \overline{GH}$	5.10	Compresión
	$\overline{DE} = \overline{EG}$	0.48	Compresión

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 28.

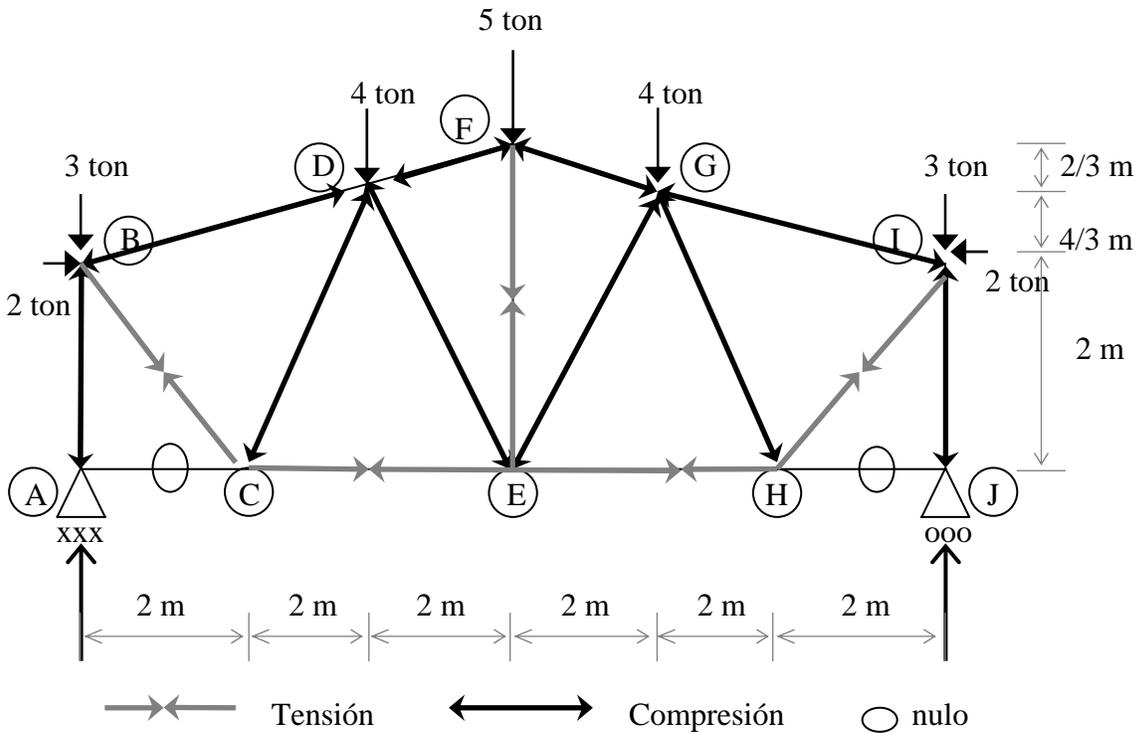
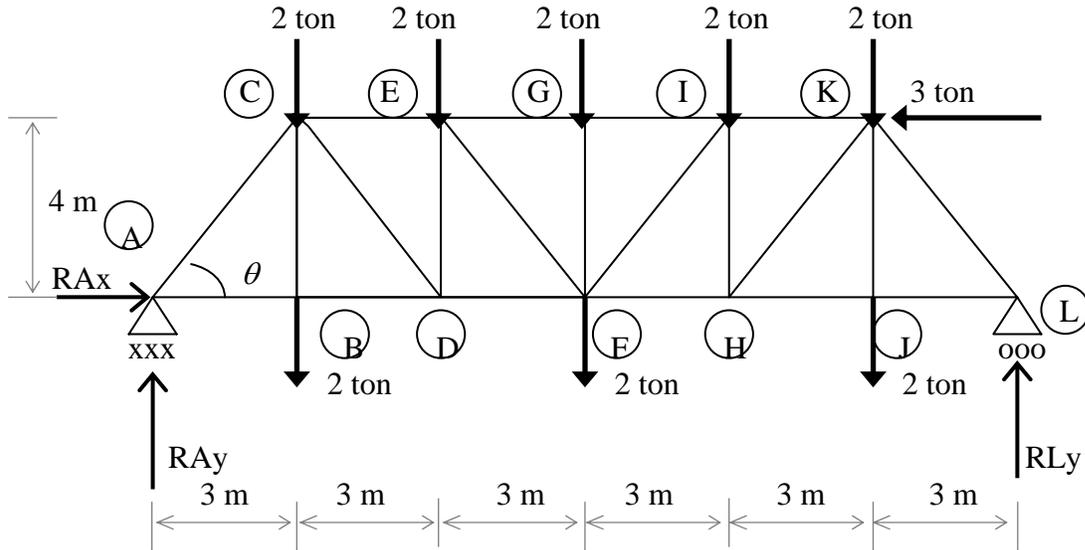


Figura 28.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

CUARTO ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS



CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$4(3 + 9 + 15) + 2(6 + 12) - 3(4) - RLy(18) = 0$$

$$RLy = \frac{132}{18}$$

$$RLy = 7.33 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-3 + RAx = 0$$

$$RAx = 3 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-4 - 2 - 4 - 2 - 4 - 4 + 7.33 + RAy = 0$$

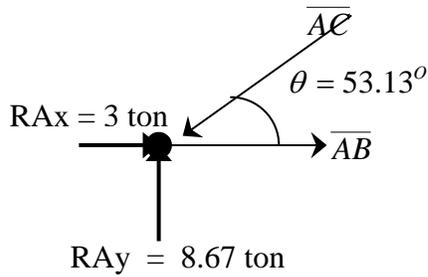
$$RAy = 8.67 \text{ ton}$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 51.34^\circ$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS

NODO (A)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$8.67 - \overline{AC} \text{sen} 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{AC} = \frac{8.67}{\text{sen} 53.13^\circ}$$

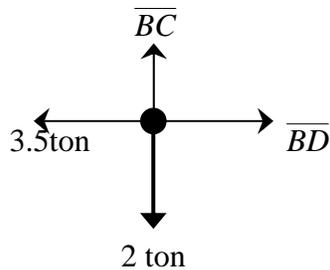
$$\overline{AC} = 10.84 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\overline{AB} - 10.84 \cos 53.13^\circ + 3 = 0$$

$$\overline{AB} = 3.5 \text{ ton}$$

NODO (B)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$\overline{BC} - 2 = 0$$

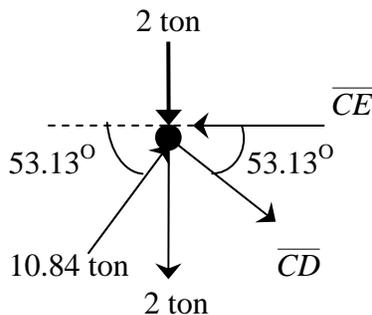
$$\overline{BC} = 2 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\overline{BD} - 3.5 = 0$$

$$\overline{BD} = 3.5 \text{ ton}$$

NODO (C)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$-2 - 2 + 10.84 \text{sen} 53.13^\circ - \overline{CD} \text{sen} 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{CD} = \frac{3.2}{\text{SEN} 53.13^\circ}$$

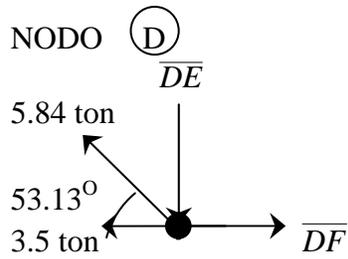
$$\overline{CD} = 5.84 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-\overline{CE} + 10.84 \cos 53.13^\circ + 5.84 \cos 53.13^\circ = 0$$

$$-\overline{CE} + 10 = 0$$

$$\overline{CE} = 10 \text{ ton}$$



$$\Sigma Fy = 0$$

$$5.84 \text{sen} 53.13^\circ - \overline{DE} = 0$$

$$-\overline{DE} + 4.67 = 0$$

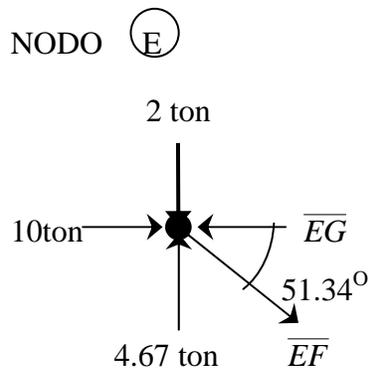
$$\boxed{\overline{DE} = 4.67 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$-3.5 + \overline{DF} - 5.84 \cos 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{DF} - 7 = 0$$

$$\boxed{\overline{DF} = 7 \text{ ton}}$$



$$\Sigma Fy = 0$$

$$4.67 - \overline{EF} \text{sen} 53.13^\circ - 2 = 0$$

$$\overline{EF} = \frac{2.67}{\text{sen} 53.13^\circ}$$

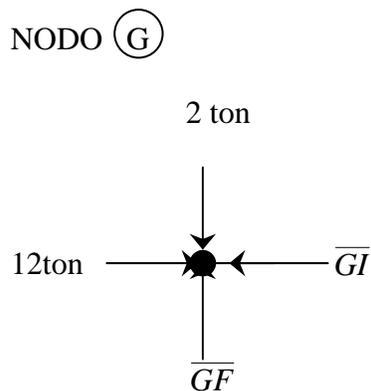
$$\boxed{\overline{EF} = 3.34 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$10 - \overline{EG} + 3.34 \cos 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{EG} - 12 = 0$$

$$\boxed{\overline{EG} = 12 \text{ ton}}$$



$$\Sigma Fx = 0$$

$$12 - \overline{GI} = 0$$

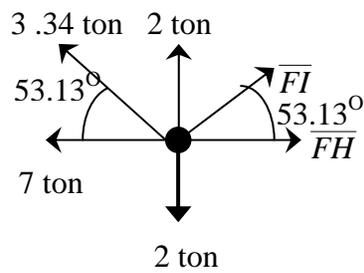
$$\boxed{\overline{GI} = 12 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$\overline{GF} - 2 = 0$$

$$\boxed{\overline{GF} = 2 \text{ ton}}$$

NODO (F)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$3.34 \text{sen} 53.13^\circ - 4 + \overline{FI} \text{sen} 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{FI} = \frac{1.33}{\text{sen} 53.13^\circ}$$

$$\overline{FI} = 1.67 \text{ ton}$$

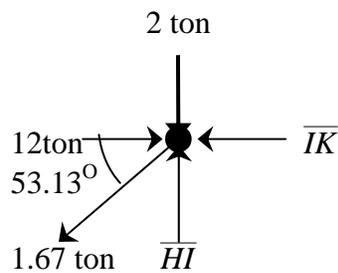
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-7 + 1.67 \cos 53.13 - 3.34 \cos 3.13 + \overline{FH} = 0$$

$$\overline{FH} - 8 = 0$$

$$\overline{FH} = 8 \text{ ton}$$

NODO (I)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$\overline{HI} - 1.67 \text{sen} 53.13^\circ - 2 = 0$$

$$\overline{HI} - 3.34 = 0$$

$$\overline{IH} = 3.34 \text{ ton}$$

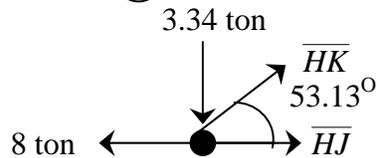
$$\Sigma F_x = 0$$

$$12 - \overline{IK} - 1.67 \cos 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{IK} - 11 = 0$$

$$\overline{IK} = 11 \text{ ton}$$

NODO (H)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$\overline{HK} \text{sen} 53.13^\circ - 3.34 = 0$$

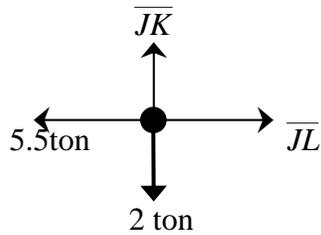
$$\overline{HK} = 4.17 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\overline{HJ} + 4.17 \cos 53.13^\circ - 8 = 0$$

$$\overline{HJ} = 5.50 \text{ ton}$$

NODO (J)



$$\Sigma Fy = 0$$

$$\overline{JK} - 2 = 0$$

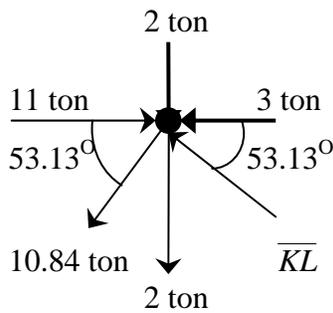
$$\boxed{\overline{JK} = 2 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$\overline{JL} - 5.5 = 0$$

$$\boxed{\overline{JL} = 5.5 \text{ ton}}$$

NODO (K)



$$\Sigma Fx = 0$$

$$11 - 3 - 4 - 4.17 \cos 53.13^\circ + \overline{KL} \cos 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{KL} = \frac{5.5}{\cos 53.13^\circ}$$

$$\boxed{\overline{KL} = 9.16 \text{ ton}}$$

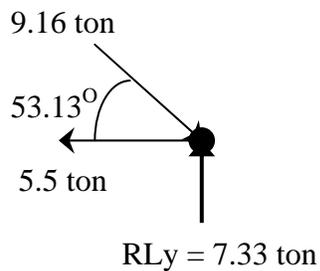
$$\Sigma Fy = 0$$

$$-2 - 2 + 9.16 \sin 53.13^\circ - 4.17 \sin 53.13^\circ = 0$$

$$0 = 0$$

$$\boxed{0 \text{ ton}}$$

NODO (L)



$$\Sigma Fy = 0$$

$$7.33 - 9.16 \sin 53.13^\circ = 0$$

$$0 = 0$$

$$\boxed{0 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$9.16 \cos 53.13 - 5.5 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\boxed{0 \text{ ton}}$$

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A:
Cuerda superior	\overline{CE}	10.00	Compresión
	\overline{EG}	12.00	Compresión
	\overline{GI}	12.00	Compresión
	\overline{IK}	11.00	Compresión
Cuerda inferior	\overline{AB}	3.50	Tensión
	\overline{BD}	3.50	Tensión
	\overline{DF}	7.00	Tensión
	\overline{FH}	8.00	Tensión
	\overline{HJ}	5.50	Tensión
	\overline{JL}	5.50	Tensión
Montantes	\overline{CB}	2.00	Tensión
	\overline{ED}	4.67	Compresión
	\overline{GF}	2.00	Compresión
	\overline{IH}	3.34	Compresión
	\overline{KJ}	2.00	Tensión
Diagonales	\overline{AC}	10.84	Compresión
	\overline{CD}	5.84	Tensión
	\overline{EF}	3.34	Tensión
	\overline{FI}	1.67	Tensión
	\overline{HK}	4.17	Tensión
	\overline{KL}	9.16	Compresión

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 29.

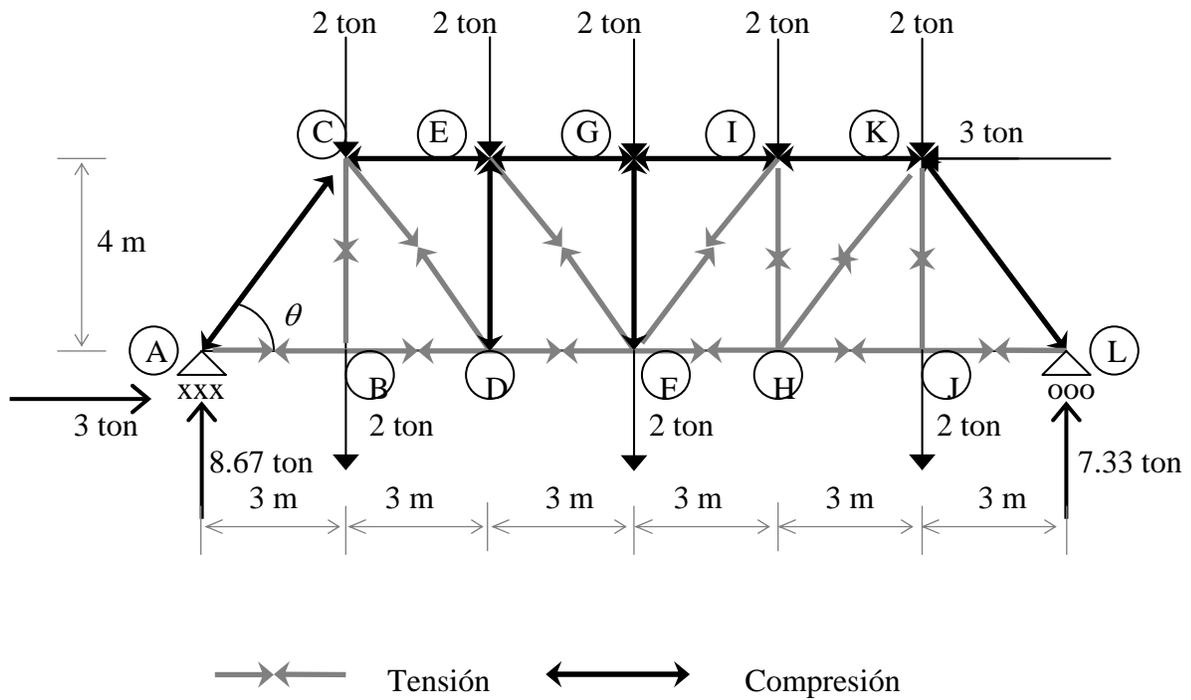
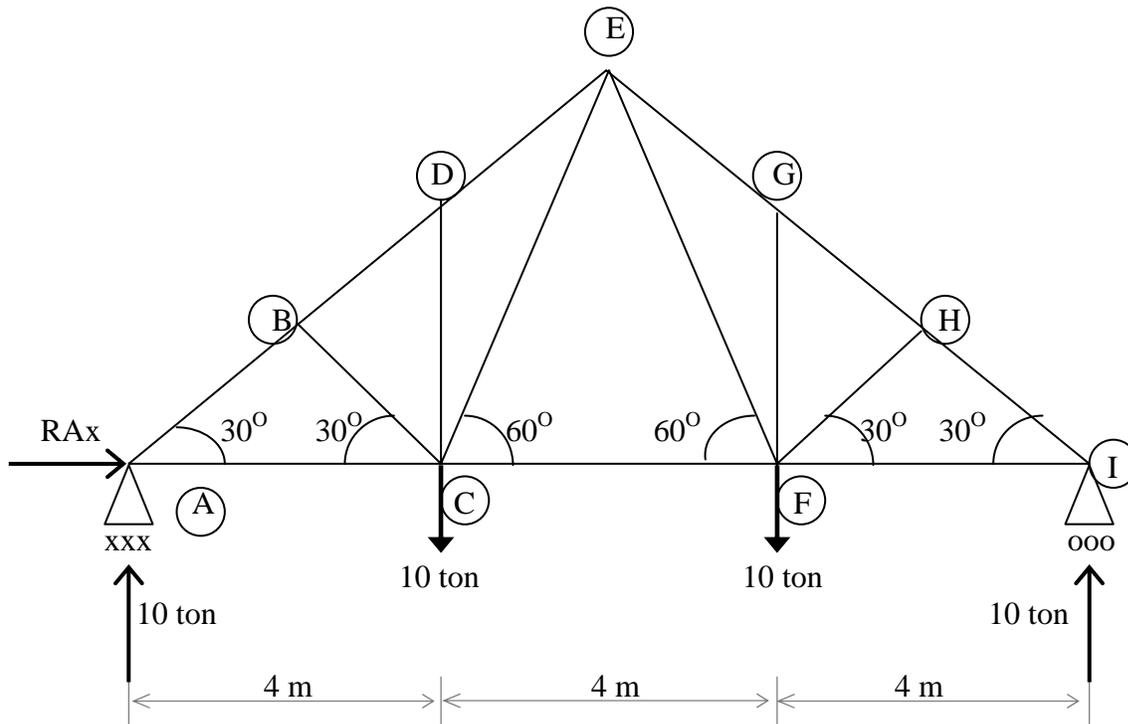


Figura 29.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

QUINTO ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS



CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$10(4 + 8) - RIy(12) = 0$$

$$RIy = \frac{120}{10}$$

$$RIy = 10 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$RAx = 0$$

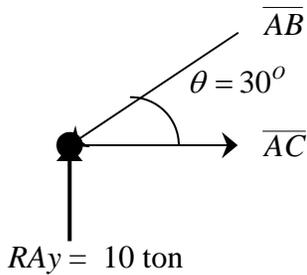
$$\Sigma F_y = 0$$

$$10 - 10 - 10 + RAy = 0$$

$$RAy = 10 \text{ ton}$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS

NODO (A)



$$\Sigma Fy = 0$$

$$10 - \overline{AB} \text{sen} 30^\circ = 0$$

$$\overline{AB} = \frac{10}{\text{sen} 30^\circ}$$

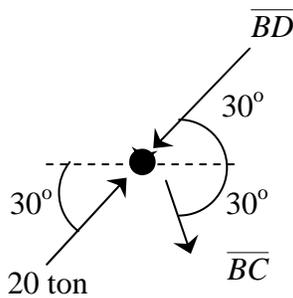
$$\boxed{\overline{AB} = 20 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$-20 \cos 30^\circ + \overline{AC} = 0 = 0$$

$$\boxed{\overline{AC} = 30 \text{ ton}}$$

NODO (B)



$$\Sigma Fx = 0$$

$$20 \cos 30^\circ - \overline{BD} \cos 30^\circ + \overline{BC} \cos 30^\circ = 0$$

$$\overline{BC} = \overline{BD} - 20 \dots\dots (1)$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$20 \text{sen} 30^\circ - \overline{BD} \text{sen} 30^\circ - \overline{BC} \text{sen} 30^\circ = 0 \dots (2)$$

sustituimos la ecuación 1 en la ecuación 2

$$20 \text{sen} 30^\circ - \overline{BD} \text{sen} 30^\circ - (\overline{BD} - 20) \text{sen} 30^\circ = 0$$

$$20 \text{sen} 30^\circ - \overline{BD} \text{sen} 30^\circ -$$

$$- \overline{BD} \text{sen} 30^\circ + 20 \text{sen} 30^\circ = 0$$

$$-2 \overline{BD} \text{sen} 30^\circ + 40 \text{sen} 30^\circ = 0$$

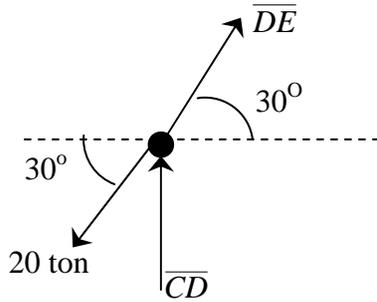
$$\boxed{\overline{BD} = 20 \text{ ton}}$$

sustituimos \overline{BD} en la ecuación 1

$$\overline{BC} = 20 - 20$$

$$\boxed{\overline{BC} = 0 \text{ ton}}$$

NODO (D)



$$\Sigma F_x = 0$$

$$20 \cos 30^\circ - \overline{DE} \cos 30^\circ = 0$$

$$\overline{DE} = \frac{20 \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

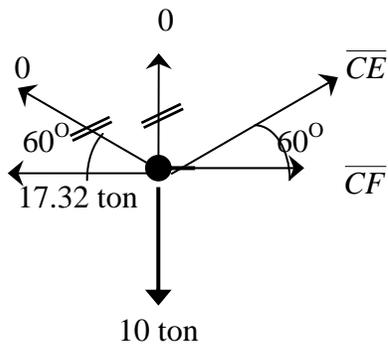
$$\boxed{\overline{DE} = 20 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\overline{DC} + 20 \sin 30^\circ - 20 \sin 30^\circ$$

$$\boxed{\overline{CD} = 0 \text{ ton}}$$

NODO (C)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$\overline{CE} \sin 60^\circ - 10 = 0$$

$$\overline{CE} = \frac{10}{\sin 60^\circ}$$

$$\boxed{\overline{CE} = 11.55 \text{ ton}}$$

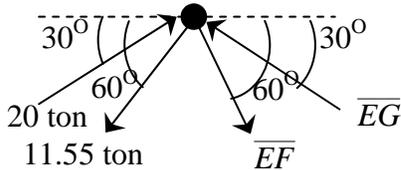
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-17.32 + 11.55 \cos 60^\circ - \overline{CF} = 0$$

$$- \overline{CF} + 11.55 = 0$$

$$\boxed{\overline{CF} = 11.55 \text{ ton}}$$

NODO (E)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$20 \text{sen} 30^\circ - 11.55 \text{sen} 60^\circ - \overline{EF} \text{sen} 60^\circ + \overline{EG} \text{sen} 30^\circ = 0$$

$$= -\overline{EF} 0.866 + \overline{EG} 0.50 = 0$$

$$\overline{EG} = \overline{EF} 1.732 \dots\dots (1)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$20 \cos 30^\circ - 11.55 \cos 60^\circ + \overline{EF} \cos 60^\circ - \overline{EG} \cos 30^\circ = 0$$

$$11.55 + \overline{EF} 0.50 - \overline{EG} 0.866 = 0 \dots\dots (2)$$

sustituimos la ecuación 1 en la ecuación 2

$$11.55 + \overline{EF} 0.50 - (\overline{EF} 1.732) 0.866 = 0$$

$$11.55 - \overline{EF} = 0$$

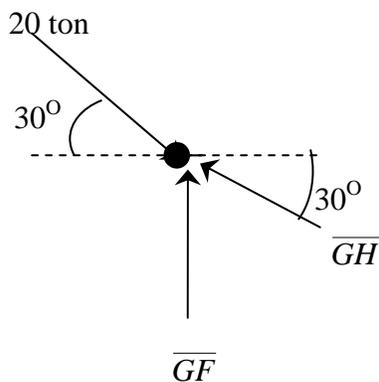
$$\overline{EF} = 11.55 \text{ ton}$$

sustituimos \overline{EG} en la ecuación 1

$$\overline{EG} = (11.55) 1.732$$

$$\overline{EG} = 20 \text{ ton}$$

NODO (G)



$$\Sigma F_x = 0$$

$$20 \cos 30^\circ - \overline{GH} \cos 30^\circ = 0$$

$$\overline{GH} = \frac{20 \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$\overline{GH} = 20 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$20 \text{sen} 30^\circ - 20 \text{sen} 30^\circ + \overline{GF} = 0$$

$$\overline{GF} = 0 \text{ ton}$$

Por simetría: $\overline{AB} = \overline{HI}$, $\overline{BD} = \overline{GH}$, $\overline{DE} = \overline{EG}$, $\overline{AC} = \overline{FI}$, \overline{CF} , $\overline{DC} = \overline{GF}$, $\overline{BC} = \overline{FH}$, $\overline{CE} = \overline{EF}$.

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A :
Cuerda superior	$\overline{AB} = \overline{HI}$	20.00	Compresión
	$\overline{BD} = \overline{GH}$	20.00	Compresión
	$\overline{DE} = \overline{EG}$	20.00	Compresión
Cuerda inferior	$\overline{AC} = \overline{FI}$	17.32	Tensión
	\overline{CF}	11.55	Tensión
Montantes	$\overline{DC} = \overline{GF}$	0.00	No trabaja
Diagonales	$\overline{BC} = \overline{FH}$	0.00	No trabaja
	$\overline{CE} = \overline{EF}$	11.55	Tensión

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 30.

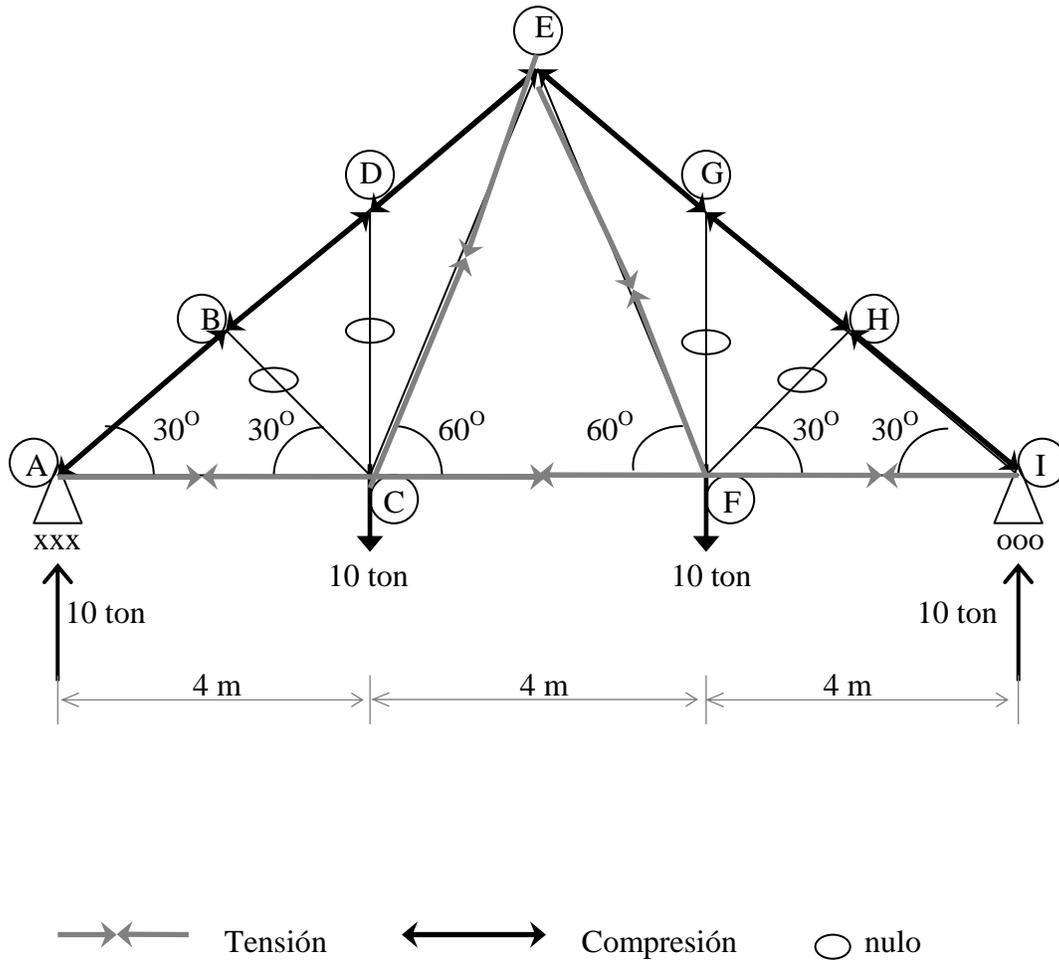
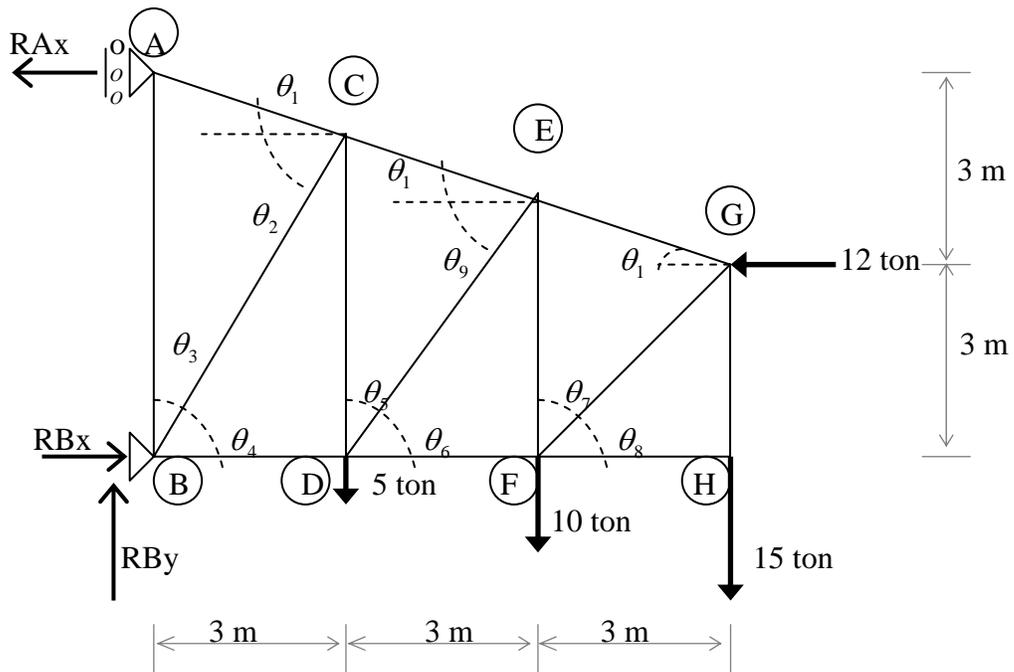


Figura 30.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

SEXTO ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS



CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$5(3) + 10(6) + 15(9) + 12(3) - RBx = 0$$

$$RBx = \frac{246}{6}$$

$$RBx = 41 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$41 - 12 - RAx = 0$$

$$RAx = 29 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$RBy - 5 - 10 - 15 = 0$$

$$RBy = 30 \text{ ton}$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18.43^\circ$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 59.04^\circ = \theta_4$$

$$\theta_3 = 180 - 59.04 = 30.96^\circ$$

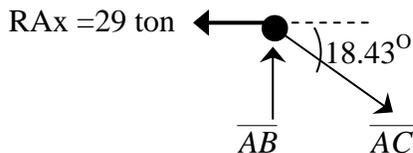
$$\theta_5 = \frac{3}{4} = 36.87^\circ$$

$$\theta_6 = 180 - 36.87 = 53.13^\circ = \theta_8$$

$$\theta_7 = \theta_8 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = 45^\circ$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS

NODO (A)



$$\Sigma F_x = 0$$

$$-29 + \overline{AC} \cos 18.43^\circ = 0$$

$$\overline{AC} = \frac{29}{\cos 18.43^\circ}$$

$$\overline{AC} = 30.57 \text{ ton}$$

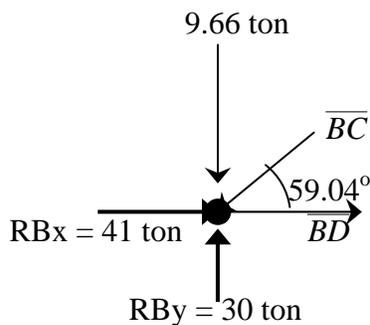
$$\Sigma F_y = 0$$

$$\overline{AB} - 30.57 \sin 18.43^\circ = 0$$

$$\overline{AB} - 9.66 = 0$$

$$\overline{AB} = 9.66 \text{ ton}$$

NODO (B)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$30 - 9.66 + \overline{BC} \sin 59.04^\circ = 0$$

$$\overline{BC} = \frac{20.34}{\sin 59.04^\circ} = 23.72$$

$$\overline{BC} = 23.72 \text{ ton}$$

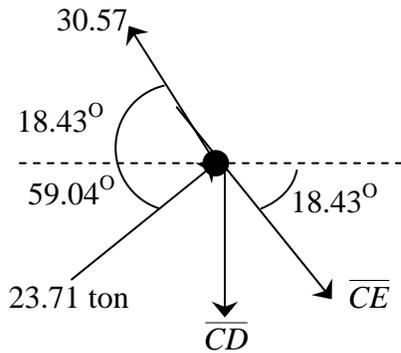
$$\Sigma F_x = 0$$

$$41 - 23.72 \cos 59.04^\circ - \overline{BD} = 0$$

$$28.80 - \overline{BD} = 0$$

$$\overline{BD} = 28.80 \text{ ton}$$

NODO (C)



$$\Sigma F_x = 0$$

$$-30.57 \cos 18.43^\circ + 23.71 \cos 59.04^\circ + \overline{CE} \cos 18.43^\circ = 0$$

$$\overline{CE} = \frac{16.82}{\cos 18.43^\circ}$$

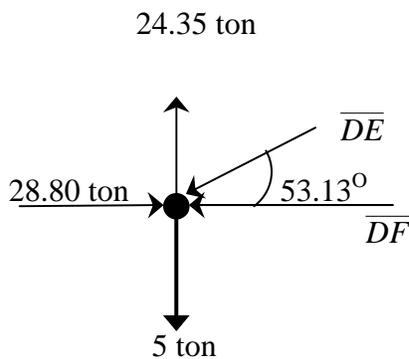
$$\overline{CE} = 17.70 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$30.57 \sin 18.43^\circ + 23.71 \sin 59.04^\circ - \overline{CD} - \overline{CD} + 24.40$$

$$\overline{CD} = 24.40 \text{ ton}$$

NODO (D)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$24.40 - 5 - \overline{DE} \sin 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{DE} = \frac{19.40}{\sin 53.13^\circ}$$

$$\overline{DE} = 24.25 \text{ ton}$$

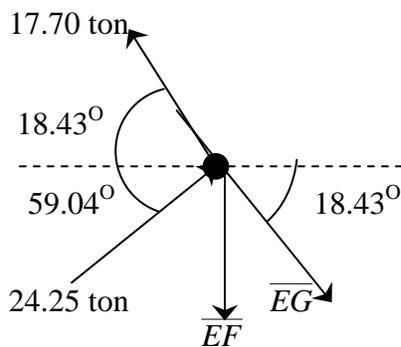
$$\Sigma F_x = 0$$

$$28.80 - \overline{DF} - 24.25 \cos 53.13^\circ = 0$$

$$-\overline{DF} + 14.25 = 0$$

$$\overline{DF} = 14.25 \text{ ton}$$

NODO (E)



$$\Sigma F_x = 0$$

$$\overline{EG} \cos 18.43^\circ - 17.70 \cos 18.43^\circ + 24.25 \cos 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{EG} = \frac{2.24}{\cos 18.43^\circ}$$

$$\overline{EG} = 2.36 \text{ ton}$$

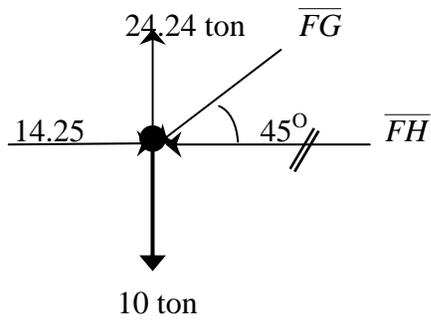
$$\Sigma F_y = 0$$

$$17.70 \sin 18.43^\circ + 24.25 \sin 53.13^\circ - \overline{EF} - 2.36 \sin 18.43^\circ = 0$$

$$-\overline{EF} + 24.26 = 0$$

$$\overline{EF} = 24.24 \text{ ton}$$

NODO (F)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$24.24 - 10 - \overline{FG} \text{sen} 45^\circ = 0$$

$$\overline{FG} = \frac{14.24}{\text{sen} 45^\circ}$$

$$\overline{FG} = 20.14 \text{ ton}$$

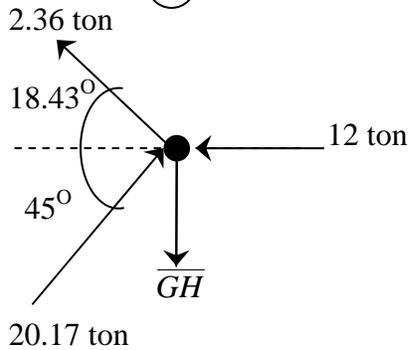
$$\Sigma F_x = 0$$

$$14.24 - \overline{FH} - 20.14 \cos 45^\circ = 0$$

$$-\overline{FH} = 0$$

$$\overline{FH} = 0 \text{ ton}$$

NODO (G)



$$\Sigma F_x = 0$$

$$-2.36 \cos 18.43^\circ + 20.14 \cos 45^\circ - 12 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 \text{ ton}$$

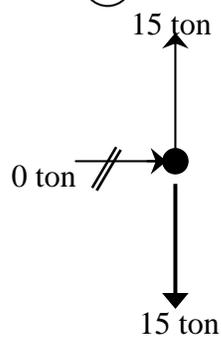
$$\Sigma F_y = 0$$

$$20.14 \text{sen} 45^\circ + 2.36 \text{sen} 18.43^\circ - \overline{GH} = 0$$

$$-\overline{GH} + 15 = 0$$

$$\overline{GH} = 15 \text{ ton}$$

NODO (H)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$15 - 15 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$0 \text{ ton}$$

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A:
Cuerda superior	\overline{AC}	30.57	Tensión
	\overline{CE}	17.70	Tensión
	\overline{EG}	2.34	Tensión
Cuerda inferior	\overline{BD}	28.80	Compresión
	\overline{DF}	14.25	Compresión
	\overline{FH}	0	No trabaja
Montantes	\overline{AB}	9.66	Compresión
	\overline{CD}	24.40	Tensión
	\overline{EF}	24.24	Tensión
	\overline{GH}	15	Tensión
Diagonales	\overline{BC}	23.71	Compresión
	\overline{DE}	24.25	Compresión
	\overline{FG}	20.14	Compresión

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 31.

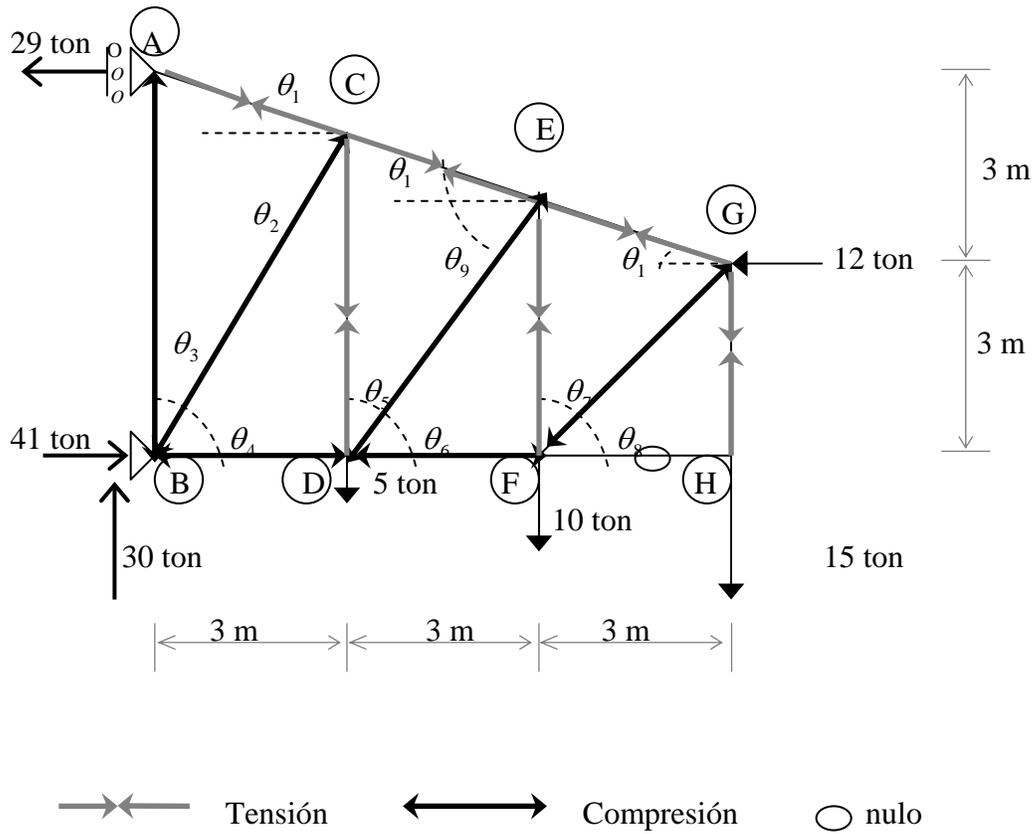
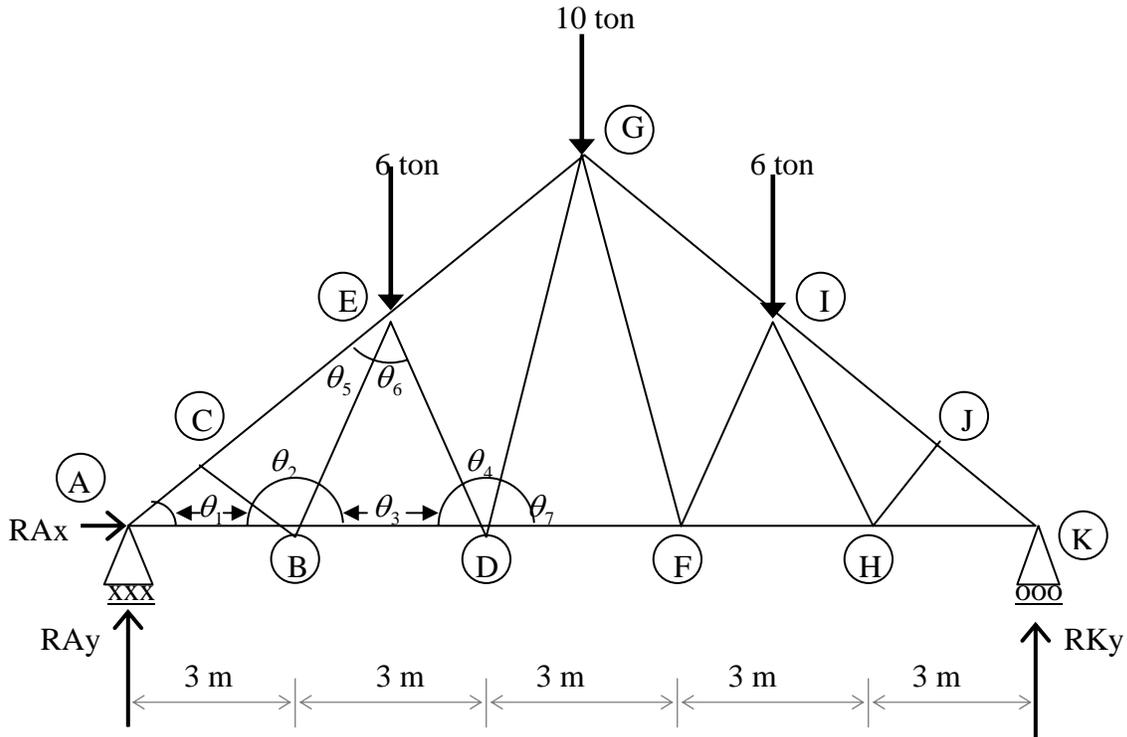


Figura 31.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

SÉPTIMO ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS



ÁNGULOS

$$\theta_1 = 33.69^\circ \quad \theta_2 = 82.88^\circ \quad \theta_3 = 63.43^\circ \quad \theta_4 = 53.14^\circ$$

$$\theta_5 = 29.74^\circ \quad \theta_6 = 53.13^\circ \quad \theta_7 = 73.30^\circ$$

CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$6(4.5) + 10(7.5) + 6(10.5) - RKy(15) = 0$$

$$RKy = \frac{165}{15} \quad RKy = 11 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

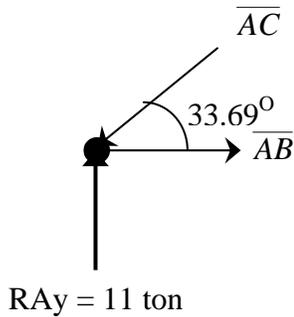
$$15 - 15 + RAx = 0 \quad RAx = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$11 - 6 - 6 - 10 + RAy = 0 \quad RAy = 11 \text{ ton}$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS

NODO (A)



$$\Sigma Fy = 0$$

$$- 11 + \overline{AC} \text{ sen}33.69^{\circ}$$

$$\overline{AC} = \frac{11}{\text{sen}33.69^{\circ}}$$

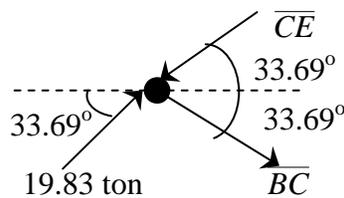
$$\overline{AC} = 19.83 \text{ ton}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$\overline{AB} - 19.83 \cos 33.69^{\circ} = 0 \cos 18.43^{\circ} = 0$$

$$\overline{AB} = 9.66 \text{ ton}$$

NODO (C)



$$\Sigma Fx = 0$$

$$19.83 \cos 33.69^{\circ} - \overline{CE} \cos 33.69^{\circ} +$$

$$+ \overline{BC} \cos 33.69^{\circ} = 0$$

$$16.50 - \overline{CE} 0.320 + \overline{BC} 0.8320 = 0$$

$$\overline{CE} = 19.83 + \overline{BC} \dots\dots\dots (1)$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$19.83 \text{ sen}33.69^{\circ} - \overline{CE} \text{ sen}33.69^{\circ} - \dots\dots\dots (2)$$

$$- \overline{BC} \text{ SEN}33.69^{\circ} = 0$$

Sustituimos la ecuación 1 en la ecuación 2

$$19.83 \text{ sen}33.69^{\circ} - (19.83 + \overline{BC}) \text{ sen}33.69^{\circ} -$$

$$- \overline{BC} \text{ sen}33.69^{\circ} = 0$$

$$19.83 \text{ sen}33.69^{\circ} - 19.83 \text{ sen}33.69^{\circ} -$$

$$- \overline{BC} \text{ sen}33.69^{\circ} - \overline{BC} \text{ sen}33.69^{\circ} = 0$$

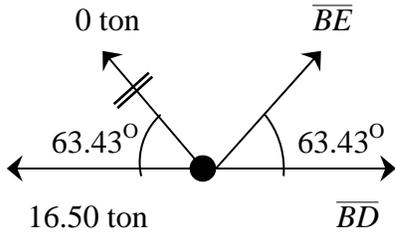
$$\overline{BC} = 0 \text{ ton}$$

Sustituimos \overline{BC} en la ecuación 1

$$\overline{CE} = 19.83 + \overline{BC}$$

$$\overline{CE} = 19.83 \text{ ton}$$

NODO (B)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$0 + \overline{BE} \sin 63.43^\circ = 0$$

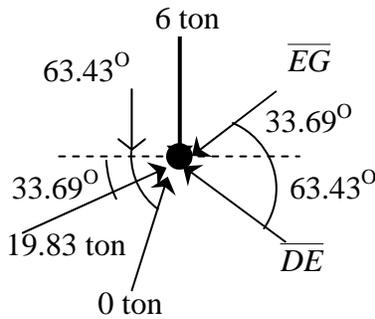
$$\boxed{\overline{BE} = 0 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\overline{BD} - 16.50 = 0$$

$$\boxed{\overline{BD} = 16.50 \text{ ton}}$$

NODO (E)



$$\Sigma F_x = 0$$

$$19.83 \cos 33.69^\circ - \overline{EG} \cos 33.69^\circ - \overline{DE} \cos 63.43^\circ = 0$$

$$16.50 - \overline{EG} 0.8320 - \overline{ED} 0.4473$$

$$\overline{EG} = 19.83 - \overline{ED} 0.5376 \quad \dots\dots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-6 + 19.83 \sin 33.69^\circ - \overline{EG} \sin 33.69^\circ + \dots\dots (2)$$

$$+ \overline{ED} \sin 63.43^\circ = 0$$

Sustituimos la ecuación 1 en la ecuación 2

$$-6 + 19.83 \sin 33.69^\circ - (19.83 - \overline{ED}) \sin 33.69^\circ +$$

$$+ \overline{ED} \sin 63.43^\circ = 0$$

$$-6 + 19.83 \sin 33.69^\circ - 19.83 \sin 33.69^\circ +$$

$$+ \overline{DE} \sin 33.69^\circ + \overline{DE} \sin 63.43^\circ = 0$$

$$-6 + \overline{DE} 1.193 = 0$$

$$\overline{ED} = \frac{6}{1.193}$$

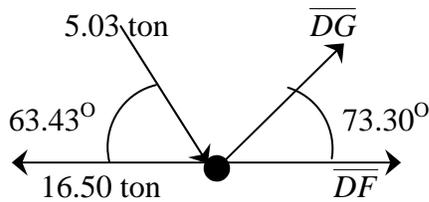
$$\boxed{\overline{DE} = 5.03 \text{ ton}}$$

sustituimos \overline{DE} en la ecuación 1

$$\overline{EG} = 19.83 - 5.03(0.5376)$$

$$\boxed{\overline{EG} = 17.12 \text{ ton}}$$

NODO (D)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$\overline{DG} \text{sen} 73.03^\circ - 5.03 \text{sen} 63.43^\circ = 0$$

$$\overline{DG} = \frac{4.50}{0.958}$$

$$\overline{DG} = 4.70 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$4.70 \text{cos} 73.30^\circ + 5.03 \text{cos} 63.43^\circ +$$

$$+ \overline{DF} - 16.50 = 0$$

$$\overline{DF} - 12.90 = 0$$

$$\overline{DF} = 12.90 \text{ ton}$$

Por simetría: $\overline{AC} = \overline{JK}$, $\overline{CE} = \overline{IJ}$, $\overline{EG} = \overline{GI}$, $\overline{AB} = \overline{HK}$, $\overline{BD} = \overline{FH}$, \overline{DF} , $\overline{BC} = \overline{HJ}$, $\overline{BE} = \overline{IH}$, $\overline{ED} = \overline{IF}$, $\overline{DG} = \overline{GF}$.

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A:
Cuerda superior	$\overline{AC} = \overline{JK}$	19.83	Compresión
	$\overline{CE} = \overline{IJ}$	19.83	Compresión
	$\overline{EG} = \overline{GI}$	17.12	Compresión
Cuerda inferior	$\overline{AB} = \overline{HK}$	16.50	Tensión
	$\overline{BD} = \overline{FH}$	16.50	Tensión
	\overline{DF}	12.90	Tensión
Diagonales	$\overline{BC} = \overline{HJ}$	0.00	No trabaja
	$\overline{BE} = \overline{IH}$	0.00	No trabaja
	$\overline{ED} = \overline{IF}$	5.03	Compresión
	$\overline{DG} = \overline{GF}$	4.70	Tensión

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 32.

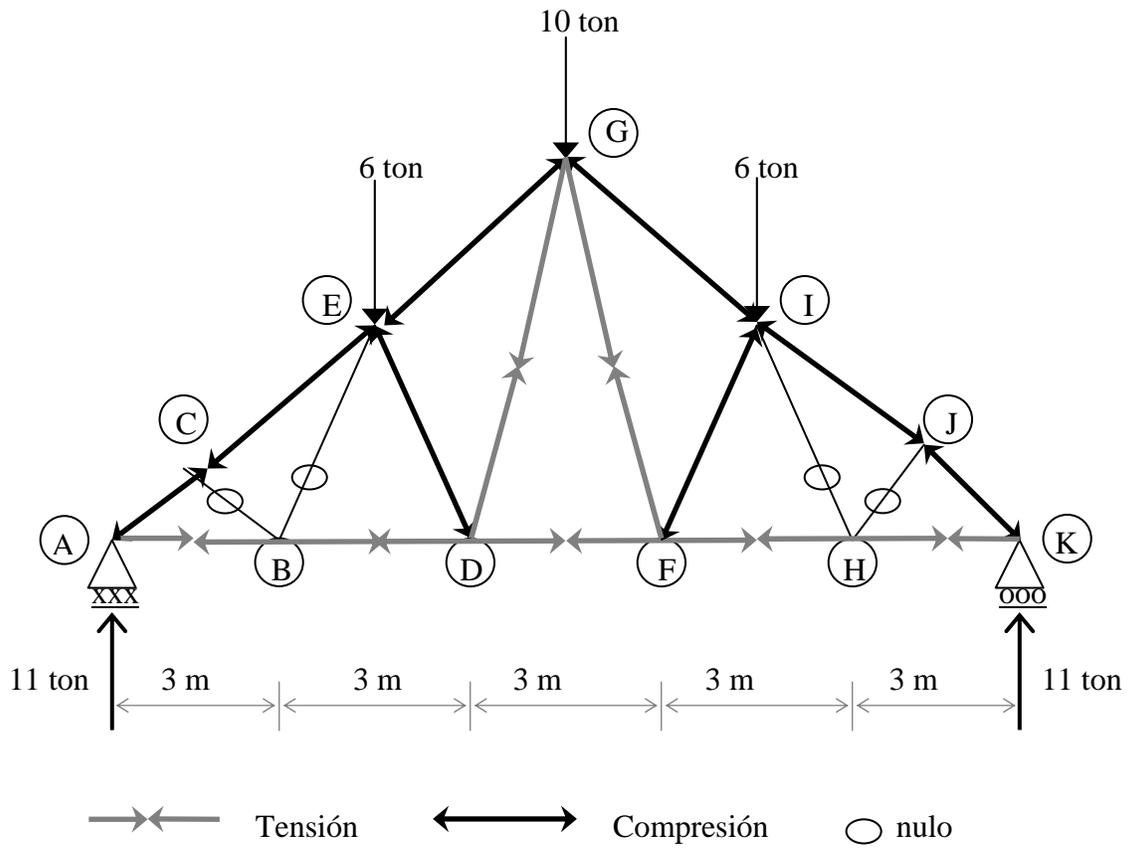


Figura 32.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

CAPÍTULO 4

MÉTODO DE LAS SECCIONES

Muchas veces es preciso conocer las fuerzas internas de algunas barras, para lo cual no es necesario calcular la armadura nodo por nodo.

En este caso se aplica el método de las secciones que consiste en seccionar la estructura cortando tres de sus barras. En cada sección se presenta un sistema de fuerzas cualesquiera que, al contar con tres incógnitas requiere de tres ecuaciones de equilibrio: dos de proyecciones y una de momentos. Esto supone que las barras cortadas virtualmente son fuerzas a las que se les considera un sentido cualquiera. La solución final nos indicará si el sentido supuesto fue correcto o no. un signo negativo en el resultado indica que el sentido correcto es contrario al supuesto.

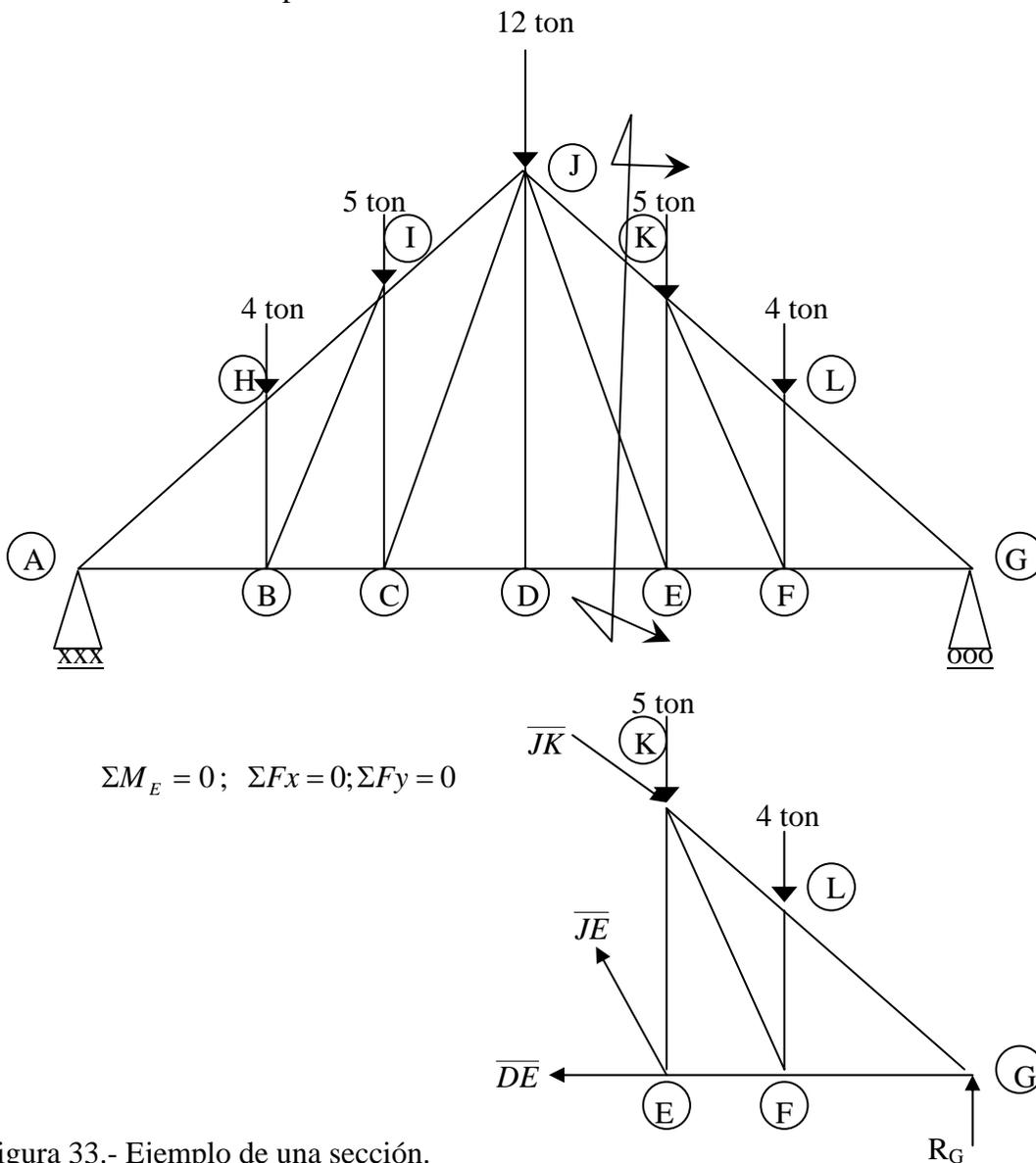


Figura 33.- Ejemplo de una sección.

Para comprender mejor este procedimiento de cálculo, resolveremos la siguiente armadura tipo Howe.

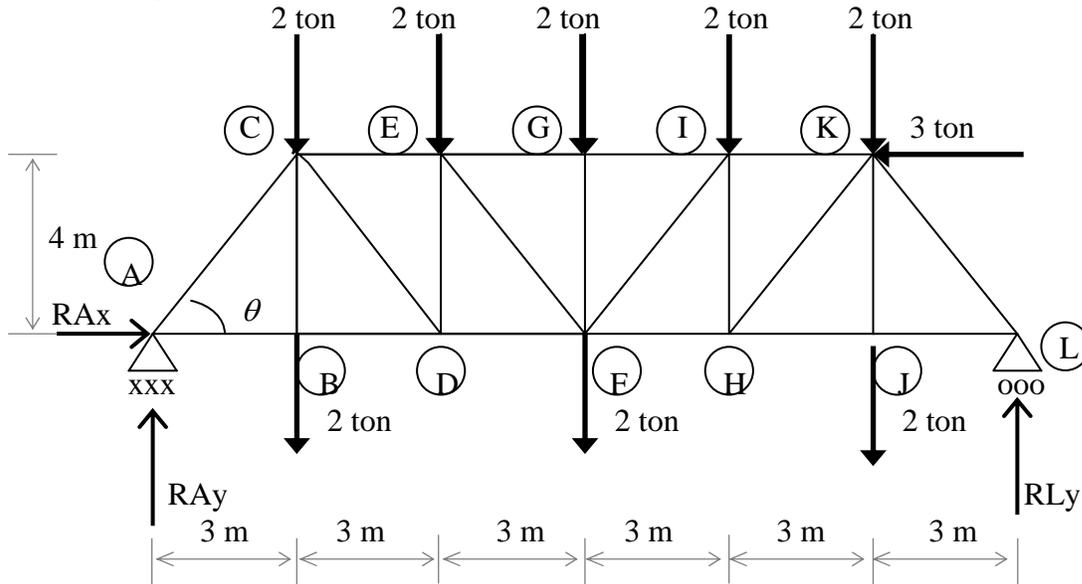


Figura 34.- Armadura a resolver por el método de las secciones.

Calculemos sus reacciones los elementos geométricos necesarios:

CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$4(3 + 9 + 15) + 2(6 + 12) - 3(4) - RLy(18) = 0$$

$$RLy = \frac{132}{18}$$

$$RLy = 7.33 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-3 + RAx = 0$$

$$RAx = 3 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-4 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 + 7.33 + RAy = 0$$

$$RAy = 8.67 \text{ ton}$$

CÁLCULO DE ANGULOS

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13^\circ$$

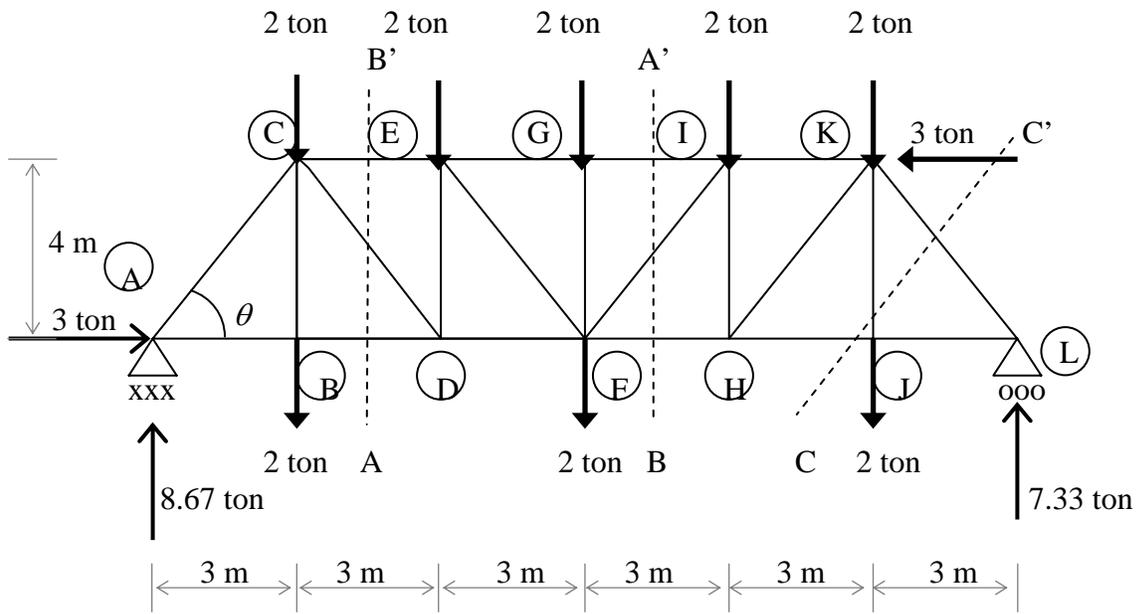


Figura 35.- Secciones en que se dividirá la estructura.

Determinemos las secciones que vamos a considerar como aparecen en la figura anterior y empezamos el cálculo por la sección A' - A, tomando la parte derecha de la armadura:

$$\Sigma M_I = 0$$

$$4(3) - 7.33(6) + \overline{FH}(4) = 0$$

$$\overline{FH} = \frac{31.98}{4}$$

$$\boxed{\overline{FH} = 8 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$7.33 - 6 - \overline{FI} \text{sen} 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{FH} = \frac{1.33}{\text{sen} 53.13^\circ}$$

$$\boxed{\overline{FH} = 1.66 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\overline{GI} - 8 - 3 - 1.66 \cos 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{GI} - 43.99 = 0$$

$$\boxed{\overline{GI} = 12 \text{ ton}}$$

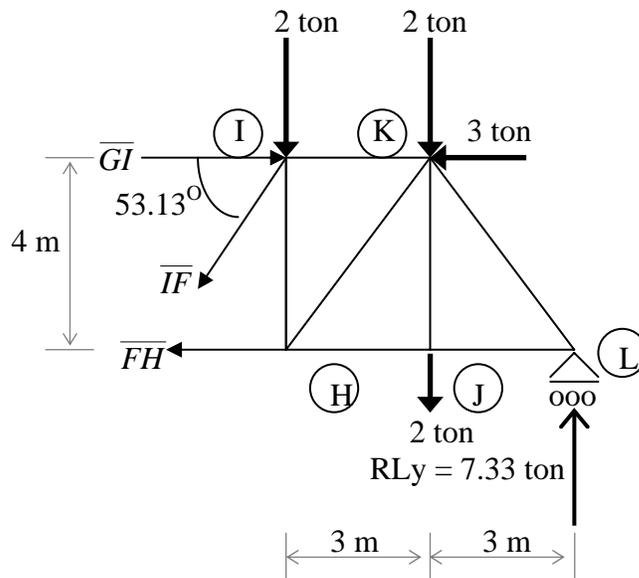


Figura 36.- sección A - A'.

De manera similar, analizaremos las demás secciones cerciorándonos que no puede haber mas de tres incógnitas en cada corte o sección.

$$\Sigma M_c = 0$$

$$8.67(4) - \overline{BD}(4) - 3(4) = 0$$

$$\overline{BD} = \frac{14.01}{4}$$

$$\boxed{\overline{BD} = 3.5 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$8.67 - 4 - \overline{CD} \text{sen} 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{CD} = \frac{4.67}{\text{sen} 53.13^\circ}$$

$$\boxed{\overline{CD} = 5.84 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$-\overline{CE} + 3 + 5.84 \cos 53.13^\circ + 3.5 = 0$$

$$-\overline{CE} + 10 = 0$$

$$\boxed{\overline{CE} = 10 \text{ ton}}$$

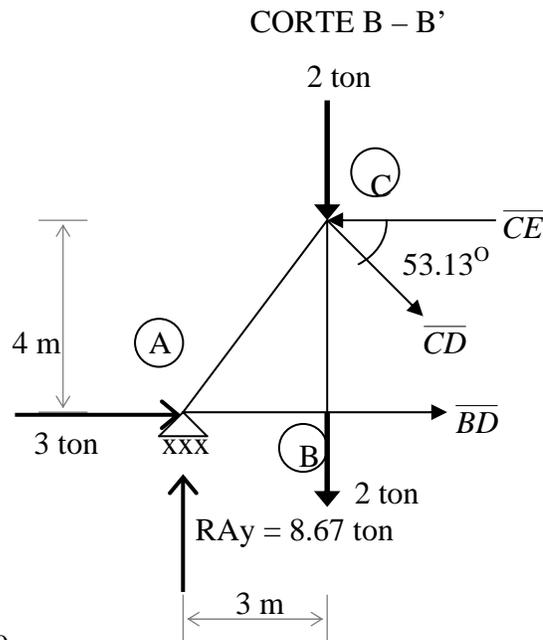


Figura 37.- sección B - B'

$$\Sigma M_j = 0$$

$$-7.33(3) + \overline{KL} \cos 53.13^\circ (4) = 0$$

$$\overline{KL} = \frac{21.99}{(4) \cos 53.13^\circ}$$

$$\boxed{\overline{KL} = 9.16 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$7.33 - 9.16 \text{ sen} 53.13^\circ - 2 + \overline{JK} = 0$$

$$\overline{JK} - 2 = 0$$

$$\boxed{\overline{JK} = 2 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$-\overline{HJ} + 9.16 \cos 53.13^\circ = 0$$

$$-\overline{HJ} + 5.50 = 0$$

$$\boxed{\overline{HJ} = 5.50 \text{ ton}}$$

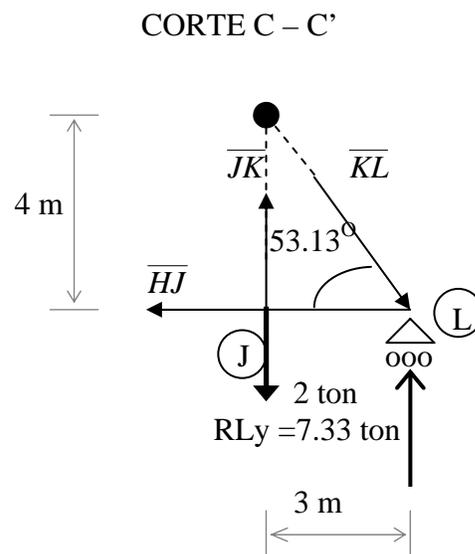


Figura 38.- sección C - C'

De manera análoga seleccionamos otras secciones y las fuerzas de las barras las incluimos en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A:
Cuerda superior	\overline{CE}	10.00	Compresión
	\overline{EG}	12.00	Compresión
	\overline{GI}	12.00	Compresión
	\overline{IK}	11.00	Compresión
Cuerda inferior	\overline{AB}	3.50	Tensión
	\overline{BD}	3.50	Tensión
	\overline{DF}	7.00	Tensión
	\overline{FH}	8.00	Tensión
	\overline{HJ}	5.50	Tensión
	\overline{JL}	5.50	Tensión
Montantes	\overline{CB}	2.00	Tensión
	\overline{ED}	4.67	Compresión
	\overline{GF}	2.00	Compresión
	\overline{IH}	3.34	Compresión
	\overline{KJ}	2.00	Tensión
Diagonales	\overline{AC}	10.84	Compresión
	\overline{CD}	5.84	Tensión
	\overline{EF}	3.34	Tensión
	\overline{FI}	1.67	Tensión
	\overline{HK}	4.17	Tensión
	\overline{KL}	9.16	Compresión

Estos resultados son exactamente los mismos a los que se encontraron con el método de los nodos . Ver la tabla de resultados de la página 48.

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 39.

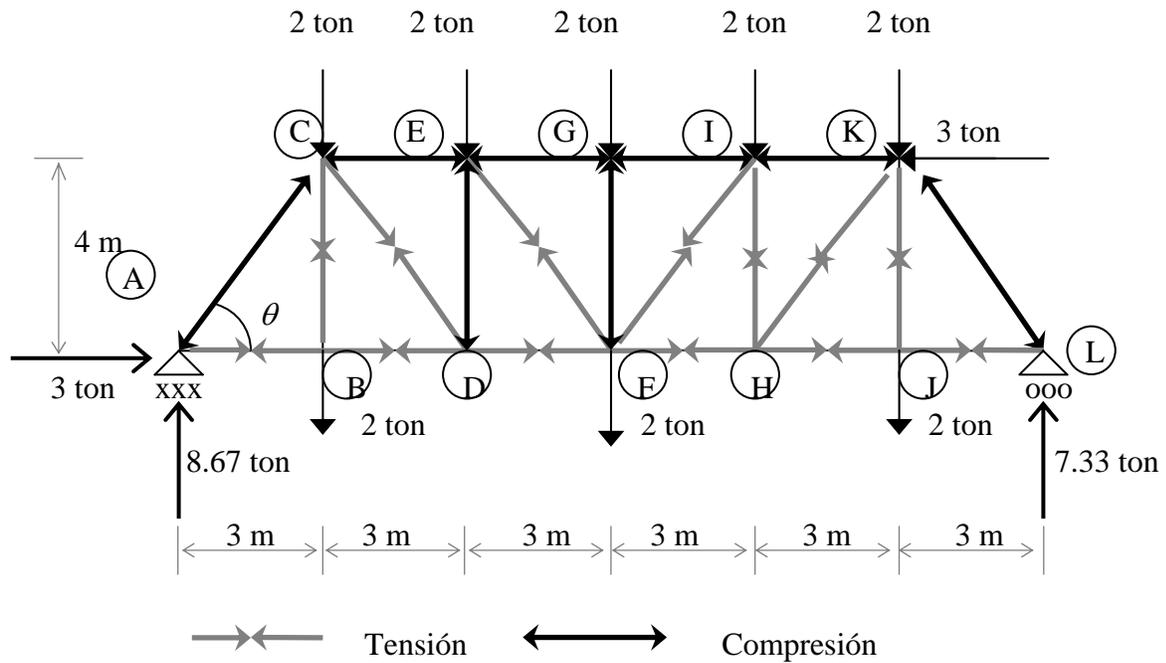
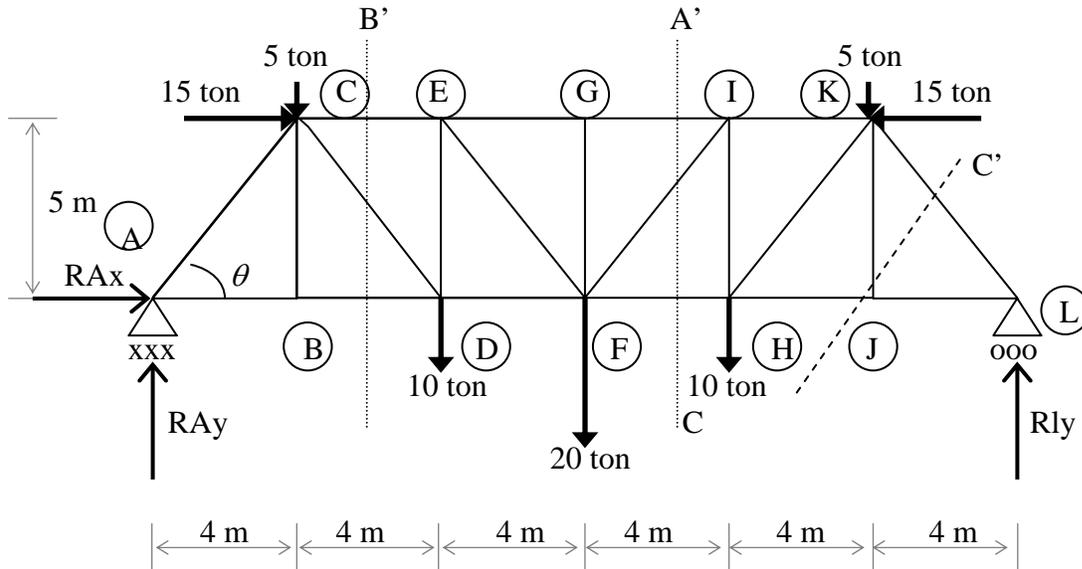


Figura 39.- Fuerzas que actúan sobre las barras de la armadura.

SEGUNDO ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES



CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$5(4) + 10(8) + 20(12) + 10(16) + 5(20) + 15(5) - 15(5) - R_{Ly}(24) = 0$$

$$R_{Ly} = \frac{600}{24}$$

$$R_{Ly} = 25 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$15 - 15 + R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$5 - 10 - 20 - 10 - 5 + 25 + R_{Ay} = 0$$

$$R_{Ay} = 25 \text{ ton}$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = 51.34^\circ$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES
CORTE A' - A

$$\Sigma M_I = 0$$

$$5(4) - 25(8) + \overline{FH}(5) = 0$$

$$\overline{FH} = \frac{180}{5}$$

$$\boxed{\overline{FH} = 36 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-10 - 5 - 15 - \overline{FI} \text{sen} 51.34^\circ = 0$$

$$\overline{FI} = \frac{10}{\text{SEN} 51.34^\circ}$$

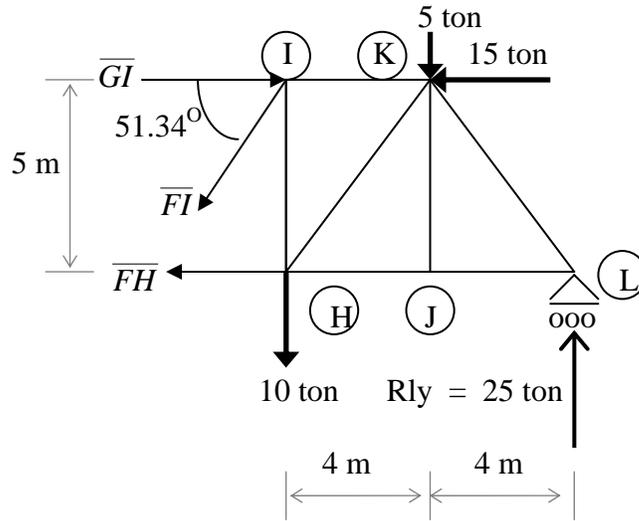
$$\boxed{\overline{FI} = 12.80 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\overline{GI} - 36 - 12.80 \cos 51.34^\circ - 15 = 0$$

$$\overline{GI} - 59 = 0$$

$$\boxed{\overline{GI} = 59 \text{ ton}}$$



CORTE B - B'

$$\Sigma M_C = 0$$

$$25(4) - \overline{BD}(5) = 0$$

$$\overline{BD} = \frac{100}{5}$$

$$\boxed{\overline{BD} = 20 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$25 - 5 - \overline{CD} \text{sen} 51.34^\circ = 0$$

$$\overline{CD} = \frac{20}{\text{sen} 51.34^\circ}$$

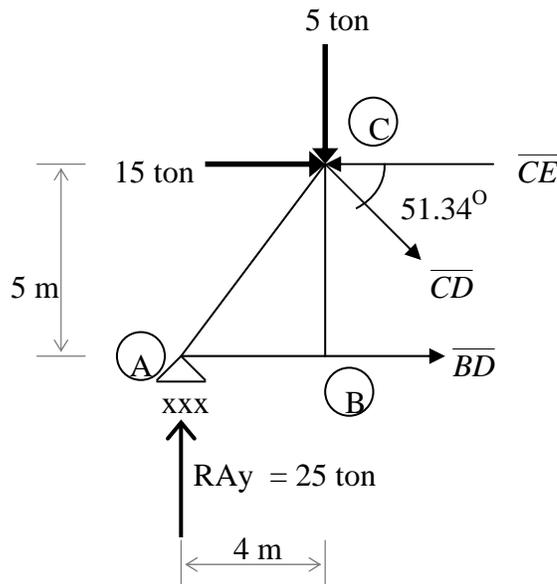
$$\boxed{\overline{CD} = 25.61 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-\overline{CE} + 20 + 25.61 \cos 51.34^\circ + 15 = 0$$

$$-\overline{CE} + 51 = 0$$

$$\boxed{\overline{CE} = 51 \text{ ton}}$$



$$\Sigma M_J = 0$$

$$-25(4) + \overline{KL} \cos 51.34^\circ (5) = 0$$

$$\overline{KL} = \frac{100}{(5) \cos 51.34^\circ}$$

$$\boxed{\overline{KL} = 32.02 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$25 - 32.02 \sin 51.34^\circ + \overline{JK} = 0$$

$$\overline{JK} + 25 - 25 = 0$$

$$\boxed{\overline{JK} = 0 \text{ ton}}$$

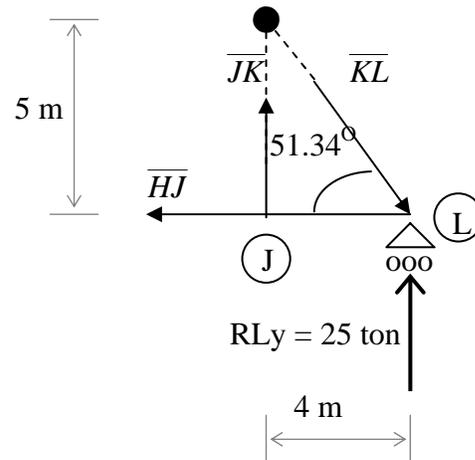
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-\overline{HJ} + 32.02 \cos 51.34^\circ = 0$$

$$-\overline{HJ} + 20 = 0$$

$$\boxed{\overline{HJ} = 20 \text{ ton}}$$

CORTE C - C'



Por simetría: $\overline{CE} = \overline{IK}$, $\overline{EG} = \overline{GI}$, $\overline{AB} = \overline{JL}$, $\overline{BD} = \overline{HJ}$, $\overline{DF} = \overline{FH}$, $\overline{BC} = \overline{JK}$, $\overline{DE} = \overline{HI}$, \overline{FG} , $\overline{AC} = \overline{KL}$, $\overline{CD} = \overline{HK}$, $\overline{EF} = \overline{FI}$.

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A:
Cuerda superior	$\overline{CE} = \overline{IK}$	51.00	Compresión
	$\overline{EG} = \overline{GI}$	59.00	Compresión
Cuerda inferior	$\overline{AB} = \overline{JL}$	20.00	Tensión
	$\overline{BD} = \overline{HJ}$	20.00	Tensión
	$\overline{DF} = \overline{FH}$	36.00	Tensión
Montantes	$\overline{BC} = \overline{JK}$	0.00	No trabaja
	$\overline{DE} = \overline{HI}$	10.00	Compresión
	\overline{FG}	0.00	No trabaja
Diagonales	$\overline{AC} = \overline{KL}$	32.02	Compresión
	$\overline{CD} = \overline{HK}$	25.61	Tensión
	$\overline{EF} = \overline{FI}$	12.81	Tensión

Estos resultados son exactamente los mismos a los que se encontraron con el método de los nodos . Ver la tabla de resultados de la página 36.

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 40

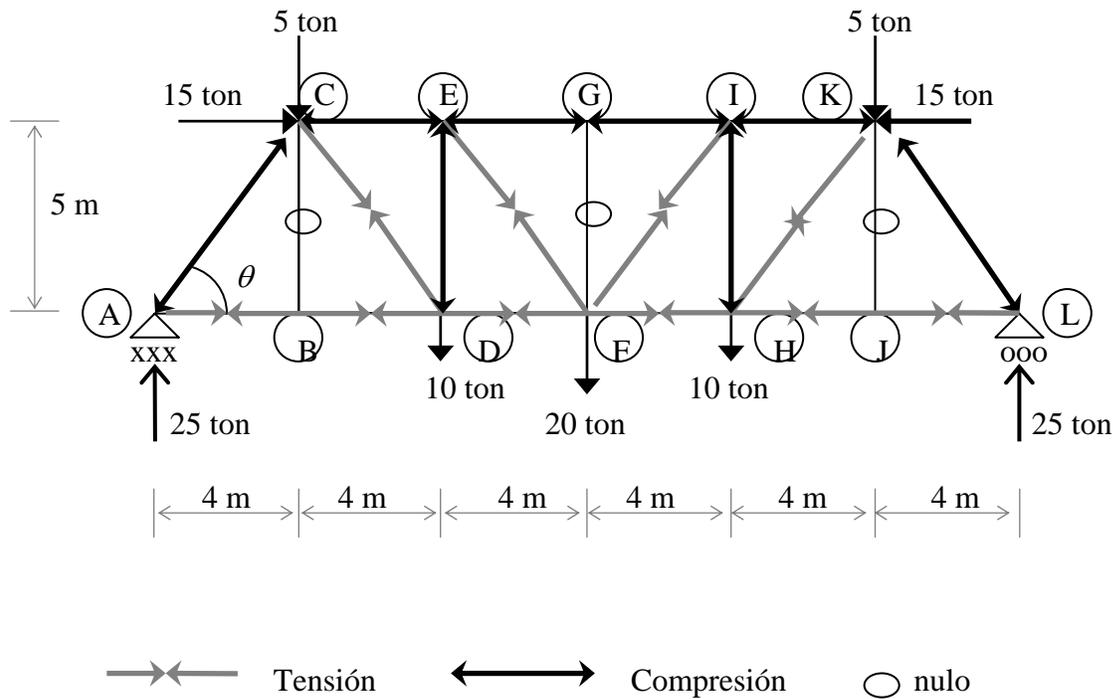
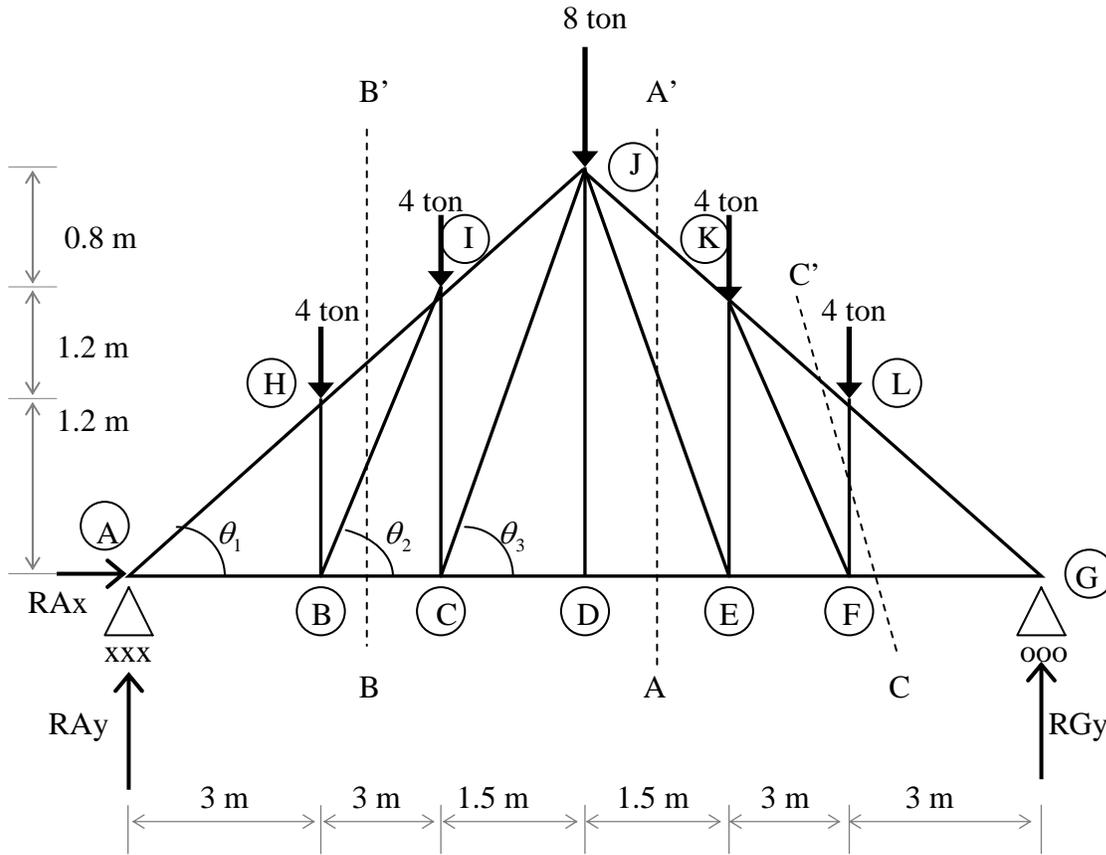


Figura 40.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

TERCER ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES



CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$4(3 + 6 + 9 + 12) + 8(7.5) - RGy(15) = 0$$

$$RGy = \frac{180}{15}$$

$$RGy = 12 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$RA_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$12 - 4 - 4 - 8 - 4 - 4 + RA_y = 0 \quad RA_y = 12 \text{ ton}$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1.2}{3}\right) = 21.80^\circ$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2.4}{3}\right) = 38.66^\circ$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{1.5}\right) = 63.43^\circ$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES CORTE A' - A

$$\Sigma M_E = 0$$

$$3(4) + \overline{JK} \cos 21.80^\circ (2.4) - 12(6) = 0$$

$$\overline{KL} = \frac{60}{(2.4)\cos 21.80^\circ}$$

$$\boxed{\overline{JK} = 26.93 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$12 - 26.93 \sin 21.80^\circ - 8 + \overline{EJ} \sin 63.43^\circ = 0$$

$$\overline{EJ} = \frac{6}{\sin 63.43^\circ}$$

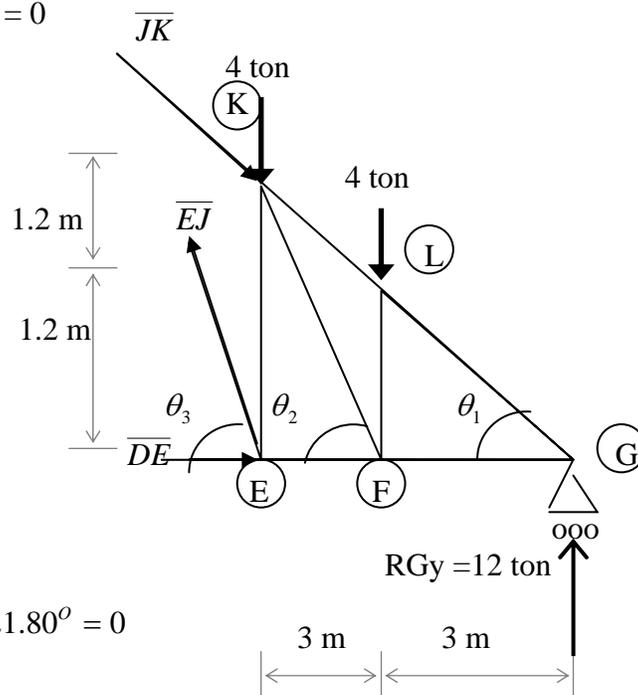
$$\boxed{\overline{EJ} = 6.7 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-\overline{DE} - 6.7 \cos 63.43^\circ + 26.93 \cos 21.80^\circ = 0$$

$$-\overline{DE} + 22 = 0$$

$$\boxed{\overline{DE} = 22 \text{ ton}}$$



$$\Sigma M_B = 0$$

$$12(3) + \overline{HI} \cos 21.80^\circ (1.2) = 0$$

$$\overline{HI} = \frac{36}{(1.2)\cos 21.80^\circ}$$

$$\boxed{\overline{HI} = 32.31 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$12 - 4 - 32.31 \text{ sen} 21.80^\circ + \overline{BI} \text{ sen} 38.66^\circ = 0$$

$$\overline{BI} = \frac{4}{\text{sen} 38.66^\circ}$$

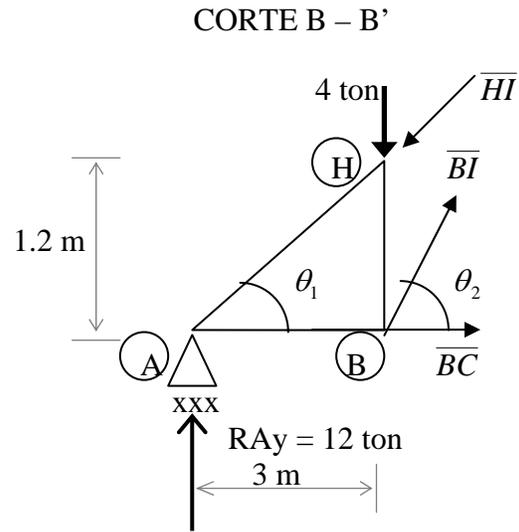
$$\boxed{\overline{JE} = 6.40 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\overline{BC} + 6.4 \cos 38.66^\circ - 32.31 \cos 21.80^\circ = 0$$

$$\overline{BC} - 25 = 0$$

$$\boxed{\overline{BC} = 25 \text{ ton}}$$



$$\Sigma M_L = 0$$

$$-12(3) + \overline{FG} (1.2) = 0$$

$$\overline{FG} = \frac{36}{1.2}$$

$$\boxed{\overline{FG} = 30 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\overline{KL} \cos 21.80^\circ - 30 = 0$$

$$\overline{KL} = \frac{30}{\text{sen} 21.80^\circ}$$

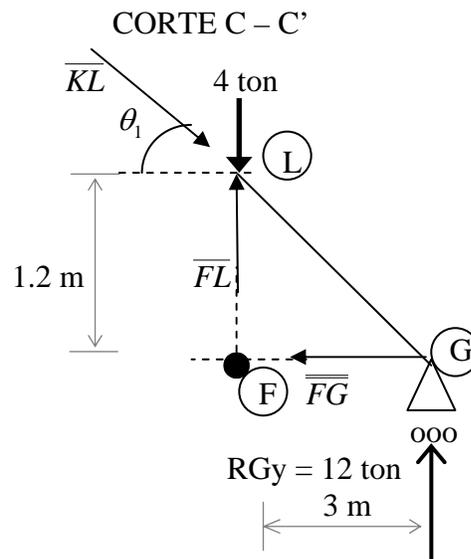
$$\boxed{\overline{KL} = 32.31 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$12 - 4 - 32.31 \text{ sen} 21.80^\circ + \overline{FL} = 0$$

$$\overline{FL} - 4 = 0$$

$$\boxed{\overline{FL} = 4 \text{ ton}}$$



Por simetría $\overline{AH} = \overline{LG}$, $\overline{HI} = \overline{KL}$, $\overline{IJ} = \overline{JK}$, $\overline{AB} = \overline{FG}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\overline{CD} = \overline{DE}$,
 $\overline{HB} = \overline{LF}$, $\overline{IC} = \overline{KE}$, \overline{JD} , $\overline{BI} = \overline{KF}$, $\overline{JC} = \overline{JE}$

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDA A:
Cuerda superior	$\overline{AH} = \overline{LG}$	32.31	Compresión
	$\overline{HI} = \overline{KL}$	32.31	Compresión
	$\overline{IJ} = \overline{JK}$	26.93	Compresión
Cuerda inferior	$\overline{AB} = \overline{FG}$	30.00	Tensión
	$\overline{BC} = \overline{EF}$	25.00	Tensión
	$\overline{CD} = \overline{DE}$	22.00	Tensión
Montantes	$\overline{HB} = \overline{LF}$	4.00	Compresión
	$\overline{IC} = \overline{KE}$	6.00	Compresión
	\overline{JD}	0.00	No trabaja
Diagonales	$\overline{BI} = \overline{KF}$	6.40	Tensión
	$\overline{JC} = \overline{JE}$	6.70	Tensión

Estos resultados son exactamente los mismos a los que se encontraron con el método de los nodos . Ver la tabla de resultados de la página 31.

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 41.

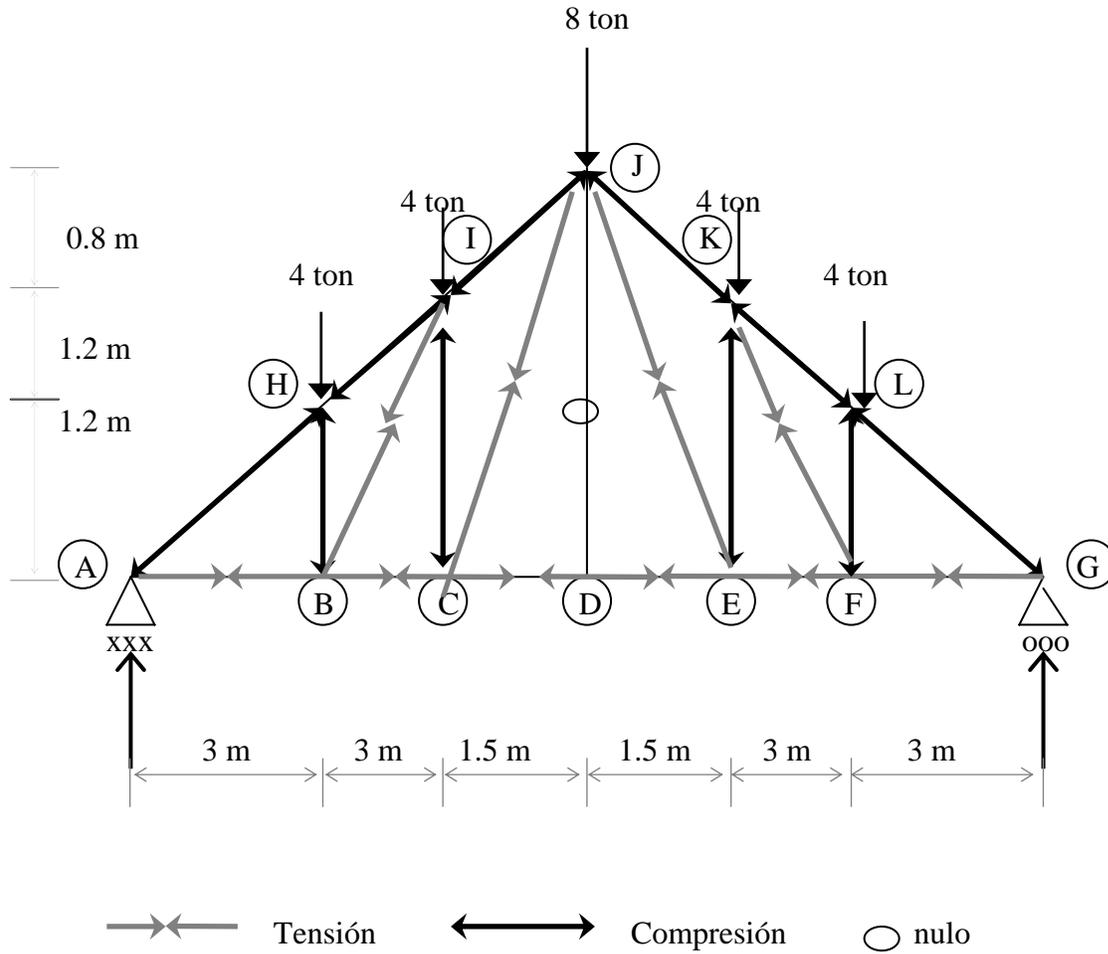
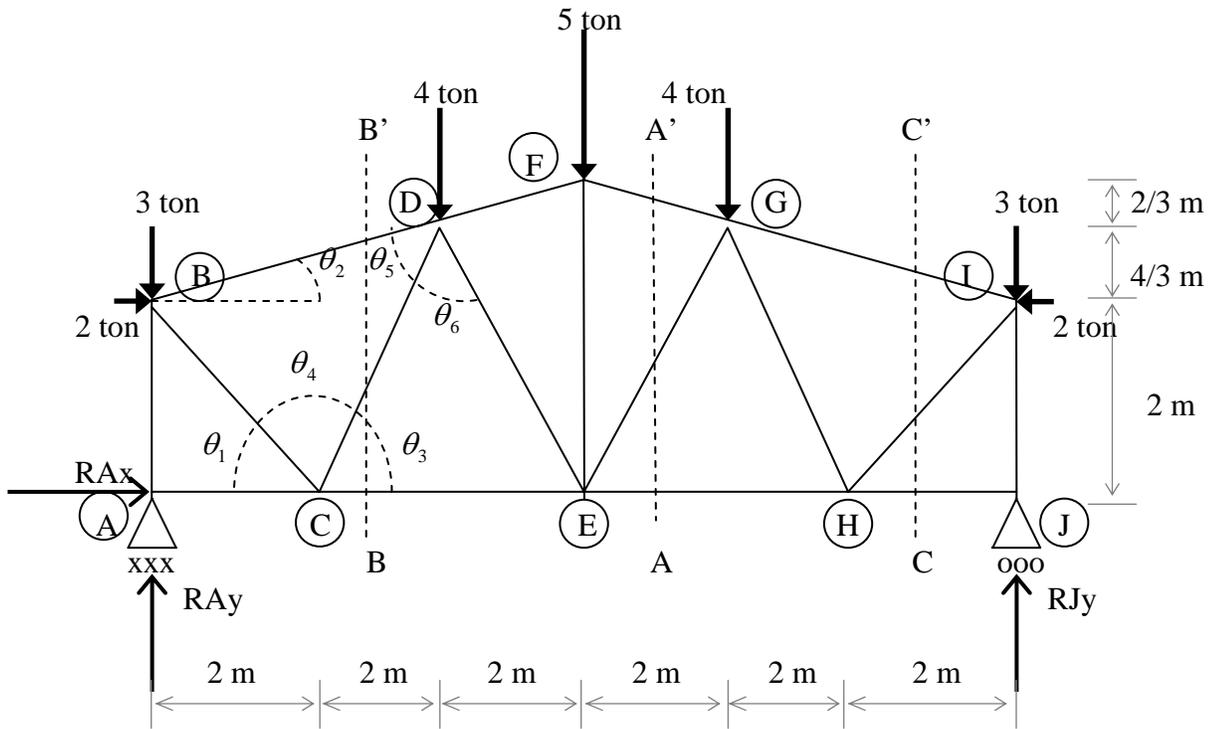


Figura 41.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

CUARTO ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES



CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$2(2-2) + 4(4+8) + 5(6) + 3(12) - RJy(12) = 0$$

$$RJy = \frac{114}{12}$$

$$RJy = 9.5 \text{ ton}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$2 - 2 + RAx = 0$$

$$RAx = 0$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$9.5 - 3 - 4 - 5 - 4 - 3 + RAy = 0$$

$$RAy = 9.5 \text{ ton}$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 45^\circ \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{6}\right) = 18.43^\circ \quad \theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{10/3}{2}\right) = 59.03^\circ$$

$$\theta_4 = 180 - \theta_1 - \theta_2 = 75.96 \quad \theta_5 = 180 - (2(59.03)) = 61.94 \quad \theta_6 = 180 - 63.43 - 75.96$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES CORTE A' - A

$$\Sigma M_G = 0$$

$$-9.5(4) + \overline{EH} (10/3) + 3(4) + 2(4/3) = 0$$

$$\overline{EH} = \frac{23.33}{10/3}$$

$$\boxed{\overline{EH} = 7 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-7 + \overline{EG} \cos 59.03^\circ + \overline{FG} \cos 18.43^\circ - 2 = 0$$

$$-9 + \overline{EG} 0.51459 + \overline{FG} 0.94871 = 0 \quad \dots(1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$9.5 - 7 + \overline{EG} \sin 59.03^\circ - \overline{FG} \sin 18.43^\circ = 0$$

$$2.5 + \overline{EG} 0.85744 - \overline{FG} 0.31614 = 0 \quad \dots\dots (2)$$

Multiplicamos por 3 la ecuación 2 y aplicamos el método de eliminación de elementos semejantes

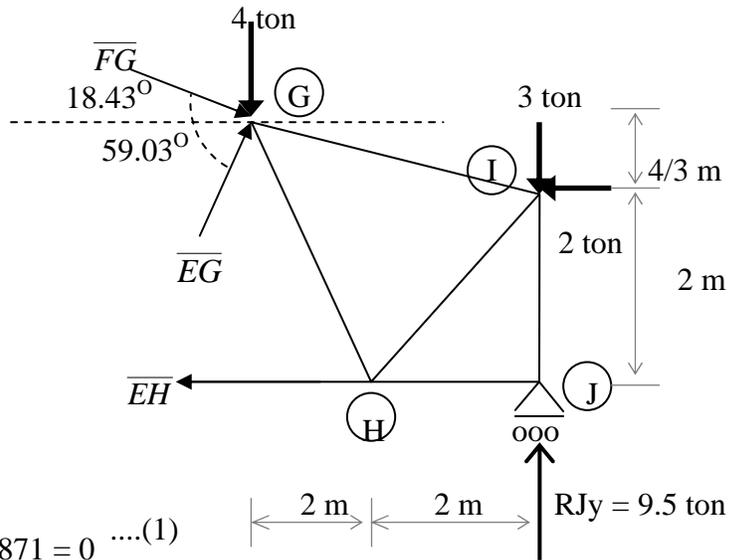
$$-9 + \overline{EG} 0.51459 + \overline{FG} 0.94871 = 0$$

$$7.5 + \overline{EG} 2.57232 - \overline{FG} 0.94872 = 0$$

$$-1.5 + \overline{EG} 3.08691 + 0$$

Despejamos \overline{EG}

$$\overline{EG} = \frac{1.5}{3.08691} \quad \boxed{\overline{EG} = 0.48 \text{ ton}}$$



Sustituimos \overline{FG} en la ecuación 1

$$-9 + (0.48)(0.51459) + \overline{FG} 0.94871 = 0$$

$$\overline{FG} = \frac{8.75}{0.94871}$$

$$\boxed{\overline{FG} = 9.22 \text{ ton}}$$

$$\Sigma M_C = 0$$

$$9.5(2) - \overline{BD}(2)(\cos 18.43^\circ) - \overline{BD}(2)(\sin 18.43^\circ) - 3(2) + 2(2) = 0$$

$$\overline{BD} = \frac{17}{2.53}$$

$$\boxed{\overline{BD} = 6.72 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$9.5 - 3 - \overline{CD} \sin 59.03^\circ - 6.72 \sin 18.43^\circ = 0$$

$$\overline{CD} = \frac{4.375}{0.857}$$

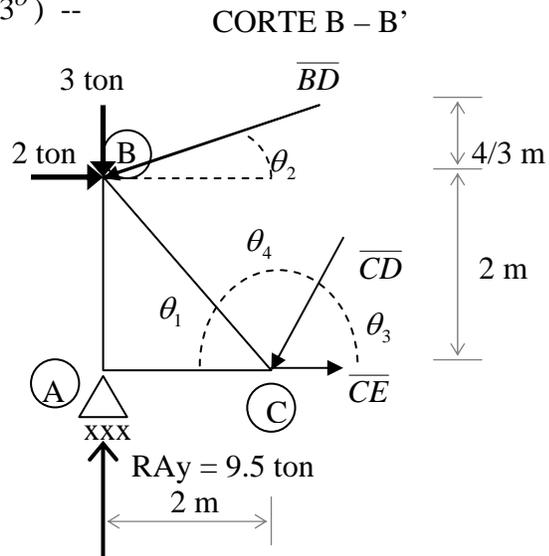
$$\boxed{\overline{CD} = 5.10 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$2 - 5.10 \cos 59.03^\circ + \overline{CE} - 6.72 \cos 18.43^\circ = 0$$

$$\overline{CE} - 7 = 0$$

$$\boxed{\overline{CE} = 7 \text{ ton}}$$



$$\Sigma M_I = 0$$

$$\overline{HJ} (2) = 0$$

$$\boxed{\overline{HJ} = 0 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$9.5 - 3 - \overline{HI} \text{ sen}45^\circ - \overline{GI} \text{ sen}18.43^\circ = 0$$

$$6.5 - \overline{HI} 0.7071 - \overline{GI} 0.3161 = 0 \dots\dots (1)$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$-2 - \overline{HI} \text{ cos}45^\circ + \overline{GI} \text{ cos}18.43^\circ = 0$$

$$-2 - \overline{HI} 0.7071 + \overline{GI} 0.9487 = 0 \dots\dots (2)$$

Multiplicamos por -1 la ecuación 1

$$6.5 - \overline{HI} 0.7071 - \overline{GI} 0.3161 = 0 \text{ (-1)}$$

Aplicamos el método de eliminación de elementos semejantes

$$\begin{array}{r} -6.5 + \overline{HI} 0.7071 + \overline{GI} 0.3161 = 0 \\ -2 - \overline{HI} 0.7071 + \overline{GI} 0.9487 = 0 \\ \hline -8.5 \quad 0 \quad + \overline{GI} 1.2648 = 0 \end{array}$$

Despejamos \overline{GI}

$$\overline{GI} = \frac{8.5}{1.2648}$$

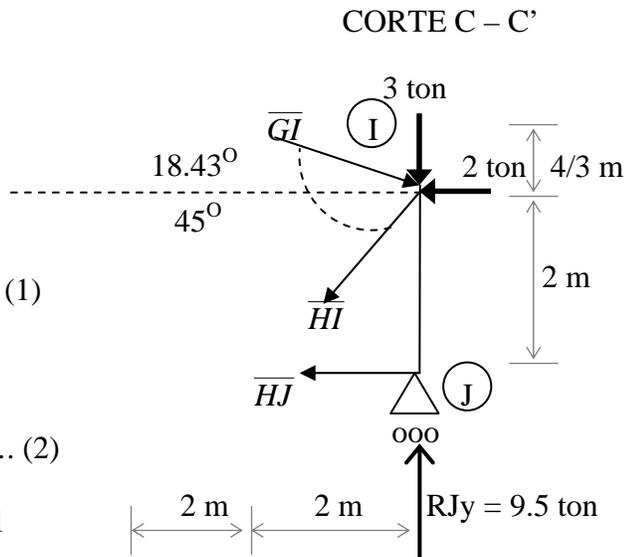
$$\boxed{\overline{GI} = 6.72 \text{ ton}}$$

Sustituimos \overline{GI} en la ecuación 2

$$-2 - \overline{HI} (0.7071) + 6.72(0.9487) = 0$$

$$\overline{HI} = \frac{4.3753}{0.7071}$$

$$\boxed{\overline{HI} = 6.19 \text{ ton}}$$



Por simetría: $\overline{BD} = \overline{GI}$, $\overline{DF} = \overline{FG}$, $\overline{AC} = \overline{HJ}$, $\overline{CE} = \overline{EH}$, $\overline{AB} = \overline{IJ}$, \overline{FE} , $\overline{BC} = \overline{HI}$,
 $\overline{CD} = \overline{GH}$, $\overline{DE} = \overline{EG}$.

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A:
Cuerda superior	$\overline{BD} = \overline{GI}$	6.72	Compresión
	$\overline{DF} = \overline{FG}$	9.22	Compresión
Cuerda inferior	$\overline{AC} = \overline{HJ}$	0.00	No trabaja
	$\overline{CE} = \overline{EH}$	7.00	Tensión
Montantes	$\overline{AB} = \overline{IJ}$	9.50	Compresión
	\overline{FE}	0.82	Tensión
Diagonales	$\overline{BC} = \overline{HI}$	6.19	Tensión
	$\overline{CD} = \overline{GH}$	5.10	Compresión
	$\overline{DE} = \overline{EG}$	0.48	Compresión

Estos resultados son exactamente los mismos a los que se encontraron con el método de los nodos . Ver la tabla de resultados de la página 42.

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 42.

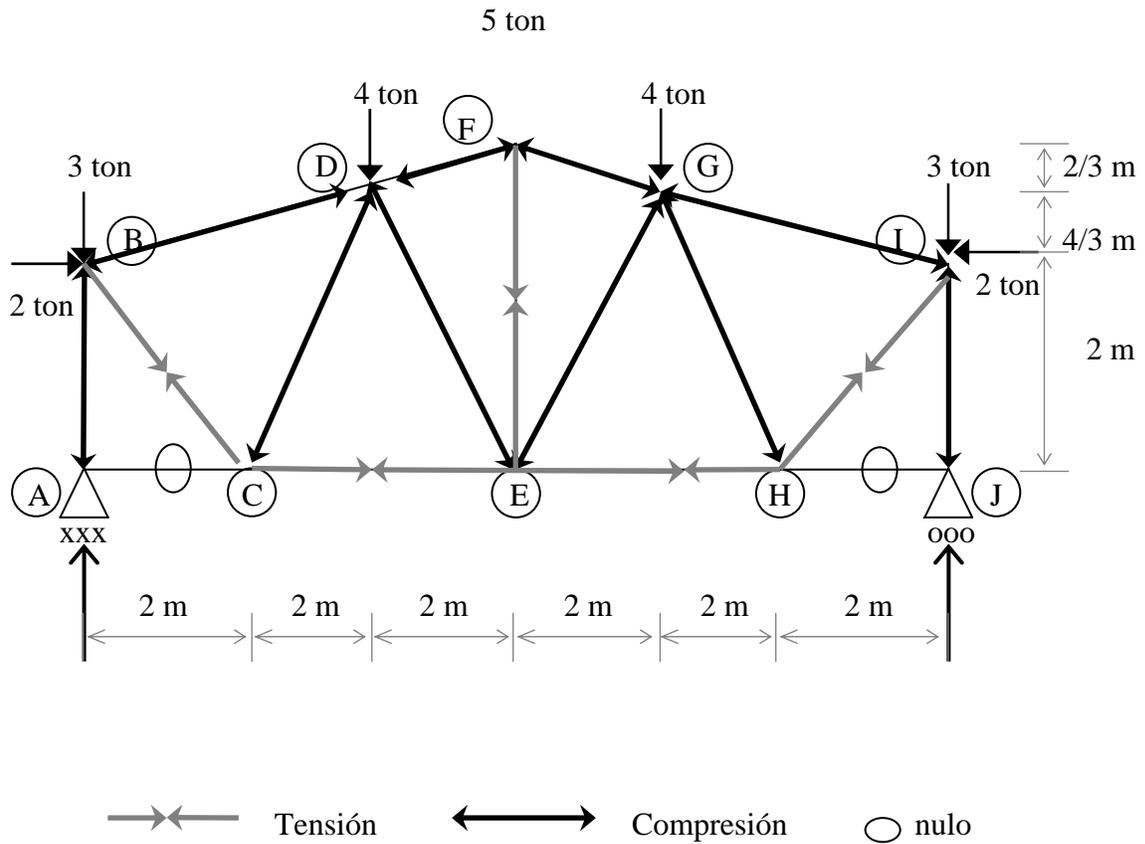
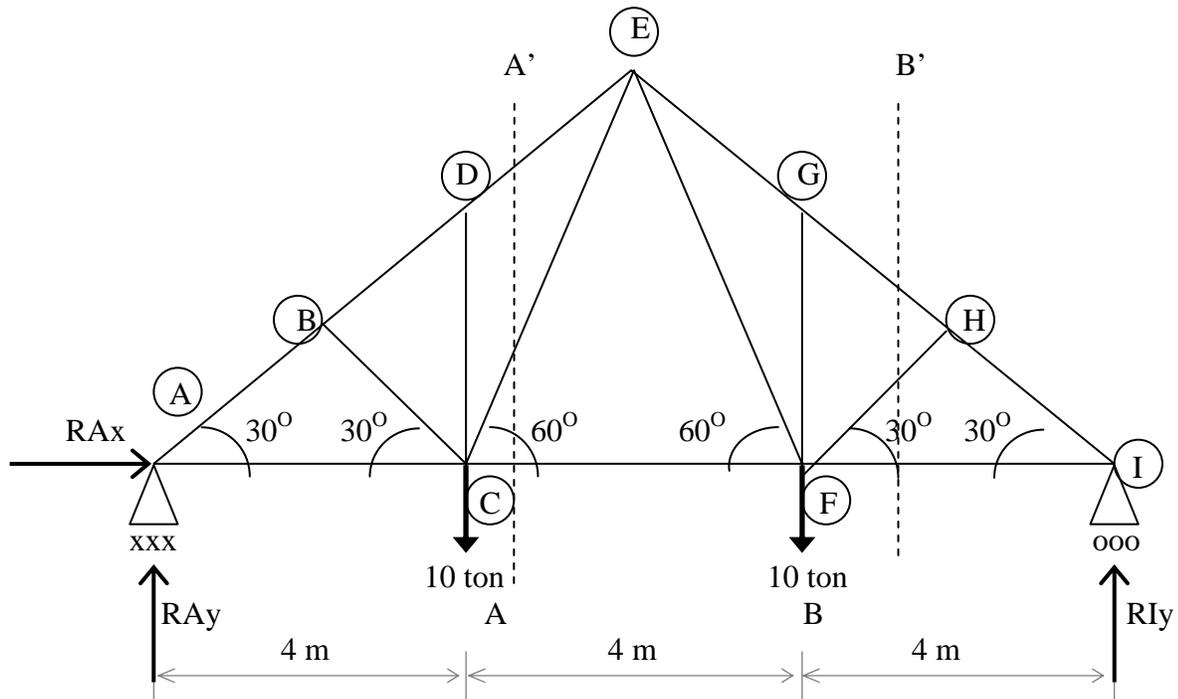


Figura 42.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

QUINTO ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES



CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$10(4 + 8) - R_{Iy}(12) = 0$$

$$R_{Iy} = \frac{120}{10}$$

$$R_{Iy} = 10 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

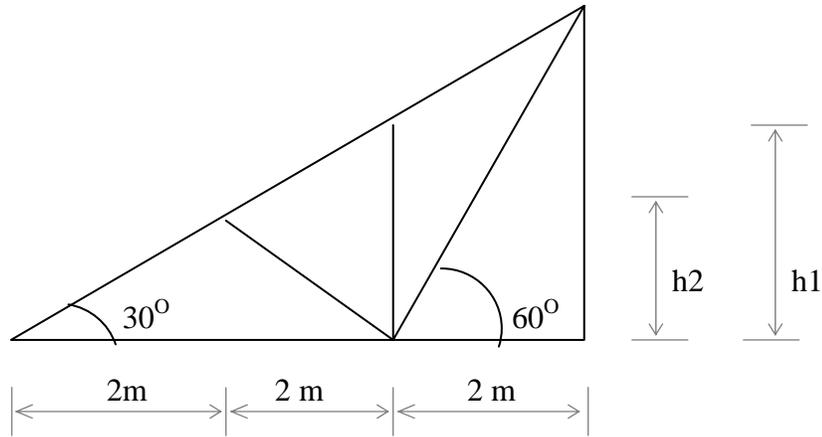
$$R_{Ax} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$10 - 10 - 10 + R_{Ay} = 0$$

$$R_{Ay} = 10 \text{ ton}$$

CÁLCULO DE LA ALTURAS



$$h1 = 4 \tan 30^\circ = 2.3 \text{ m}$$

$$h2 = 2 \tan 30^\circ = 1.15 \text{ m}$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES CORTE A' - A

$$\Sigma M_c = 0$$

$$4(10) - \overline{DE} \cos 30^\circ (2.3) = 0$$

$$\overline{DE} = \frac{40}{(2.3) \cos 30^\circ}$$

$$\boxed{\overline{DE} = 20 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$20 \sin 30^\circ + \overline{CE} \sin 60^\circ = 0$$

$$\overline{CE} = \frac{10}{\sin 60^\circ}$$

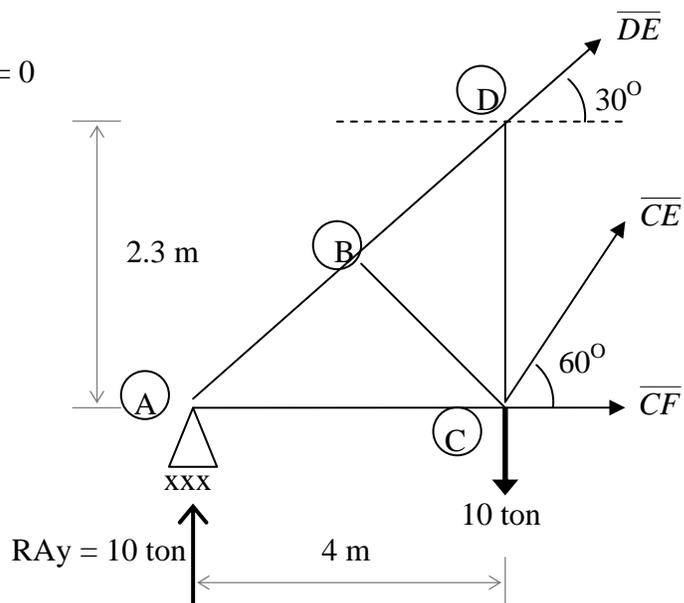
$$\boxed{\overline{CE} = 11.55 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-20 \cos 30^\circ + 11.55 \cos 60^\circ + \overline{CF} = 0$$

$$\overline{CF} - 11.55 = 0$$

$$\boxed{\overline{CF} = 11.55 \text{ ton}}$$



$$\Sigma M_H = 0$$

$$-10(2) + \overline{FI} (1.1547) = 0$$

$$\overline{FI} = \frac{20}{1.1547}$$

$$\boxed{\overline{FI} = 17.32 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-17.32 + \overline{GH} \cos 30^\circ - \overline{FH} \cos 30^\circ = 0$$

$$-17.32 + \overline{GH} 0.866 - \overline{FH} 0.866 = 0$$

$$\overline{GH} = \overline{FH} + 20 \dots\dots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$10 - \overline{GH} \sin 30^\circ - \overline{FH} \sin 30^\circ \dots\dots (2)$$

sustituimos la ecuación 1 en la ecuación 2

$$10 - (\overline{FH} + 20) \sin 30^\circ - \overline{FH} \sin 30^\circ = 0$$

$$10 - 0.5 \overline{FH} - 10 - 0.5 \overline{FH}$$

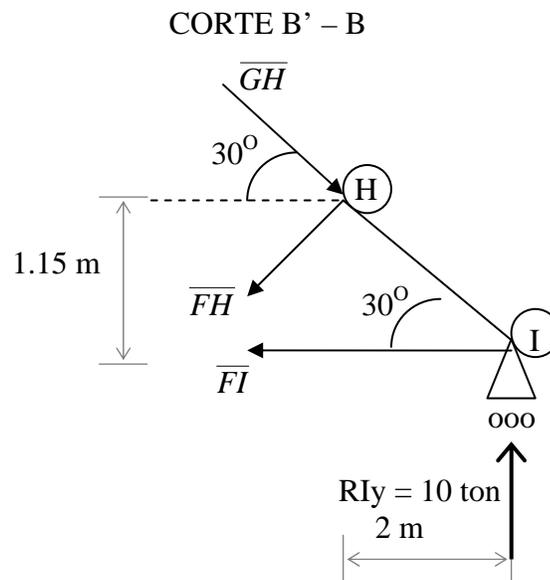
$$0 - \overline{FH} = 0$$

$$\boxed{\overline{FH} = 0 \text{ ton}}$$

sustituimos \overline{FH} en la ecuación 1

$$\overline{GH} = 0 + 20$$

$$\boxed{\overline{GH} = 20 \text{ ton}}$$



Por simetría: $\overline{AB} = \overline{HI}$, $\overline{BD} = \overline{GH}$, $\overline{DE} = \overline{EG}$, $\overline{AC} = \overline{FI}$, \overline{CF} , $\overline{DC} = \overline{GF}$, $\overline{BC} = \overline{FH}$, $\overline{CE} = \overline{EF}$.

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A :
Cuerda superior	$\overline{AB} = \overline{HI}$	20.00	Compresión
	$\overline{BD} = \overline{GH}$	20.00	Compresión
	$\overline{DE} = \overline{EG}$	20.00	Compresión
Cuerda inferior	$\overline{AC} = \overline{FI}$	17.32	Tensión
	\overline{CF}	11.55	Tensión
Montantes	$\overline{DC} = \overline{GF}$	0.00	No trabaja
Diagonales	$\overline{BC} = \overline{FH}$	0.00	No trabaja
	$\overline{CE} = \overline{EF}$	11.55	Tensión

Estos resultados son exactamente los mismos a los que se encontraron con el método de los nodos . Ver la tabla de resultados de la página 54.

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 43.

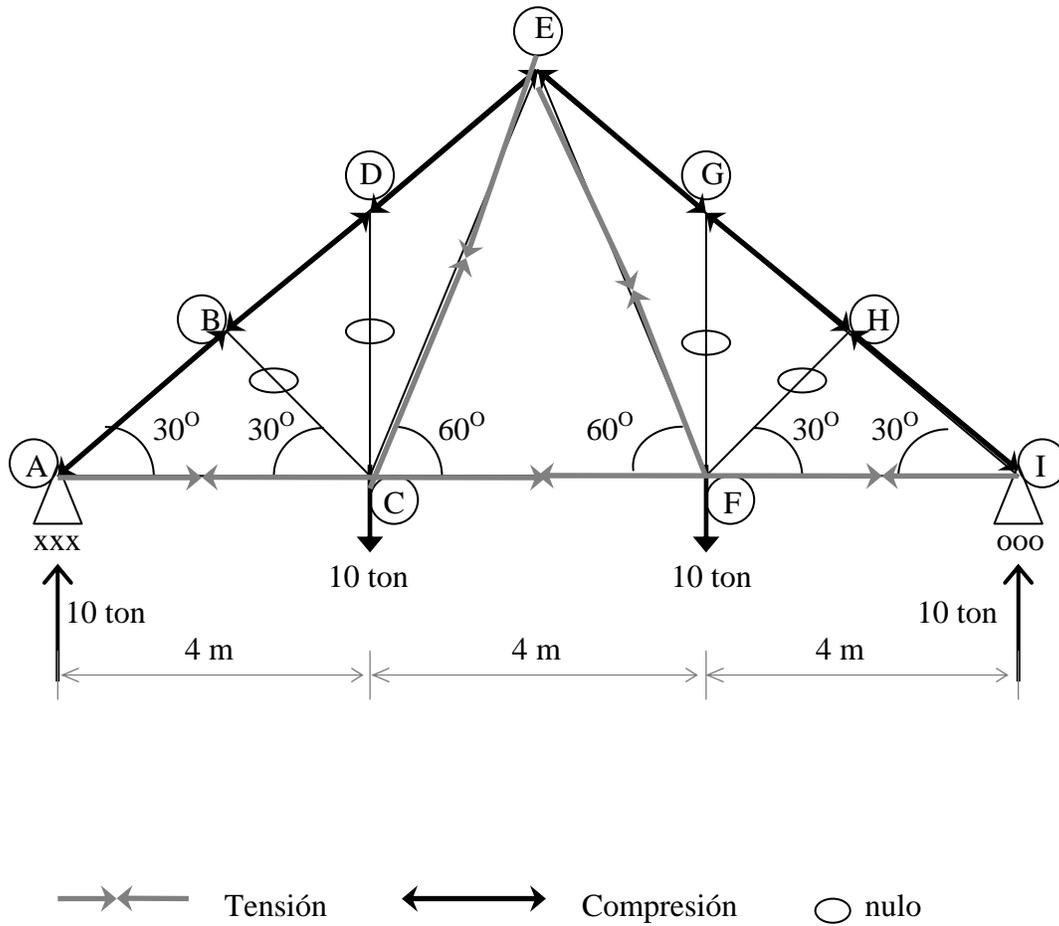
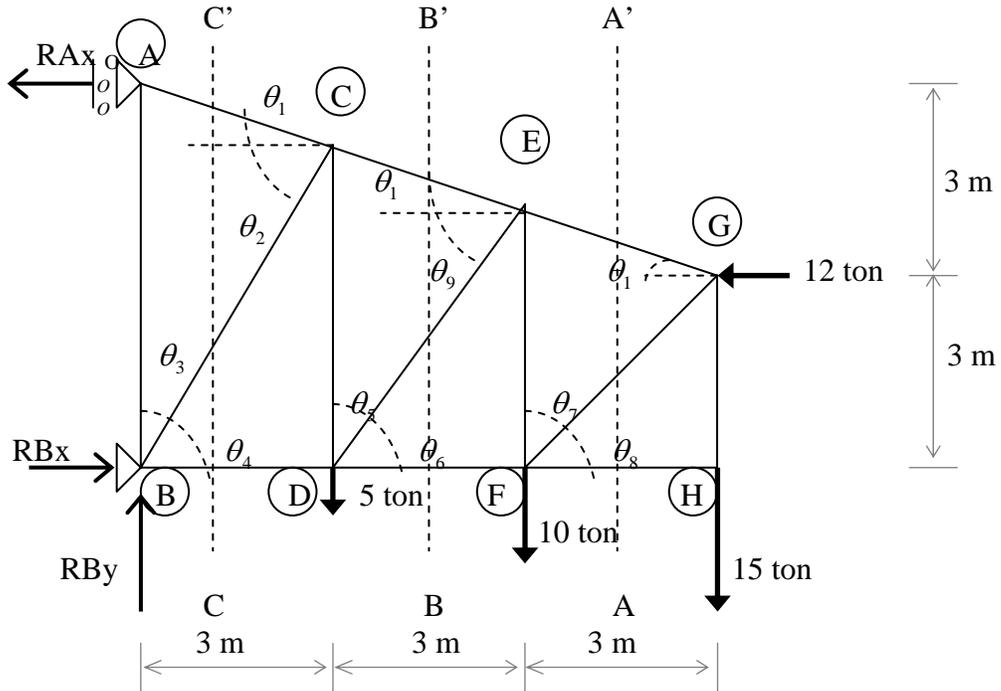


Figura 43.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

SEXTO ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES



CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$5(3) + 10(6) + 15(9) + 12(3) - RBx = 0$$

$$RBx = \frac{246}{6}$$

$$RBx = 41 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$41 - 12 - RAx = 0$$

$$RAx = 29 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$RAy - 5 - 10 - 15 = 0$$

$$RAy = 30 \text{ ton}$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18.43^\circ \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 59.04^\circ = \theta_4 \quad \theta_3 = 180 - 59.04 = 30.96^\circ$$

$$\theta_5 = \frac{3}{4} = 36.87^\circ \quad \theta_6 = 180 - 36.87 = 53.13^\circ = \theta_9 \quad \theta_7 = \theta_8 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = 45^\circ$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES CORTE A' - A

$$\Sigma M_G = 0$$

$$\overline{HF} (3) = 0$$

$$\boxed{\overline{HF} = 0}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-15 + \overline{FG} \sin 45^\circ + \overline{EG} \sin 18.43^\circ = 0$$

$$-15 + \overline{FG} 0.7071 + \overline{EG} 0.3161 = 0$$

$$\overline{FG} = -\overline{EG} 0.4471 + 21.2134 \quad \dots\dots (1)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-12 + \overline{FG} \cos 45^\circ - \overline{EG} \cos 18.43^\circ = 0$$

$$-12 + \overline{FG} 0.7071 + \overline{EG} 0.9487 = 0 \quad \dots\dots (2)$$

sustituimos la ecuación 1 en la ecuación 2

$$-12 + (-\overline{EG} 0.4471 + 21.2154) 0.7071 - \overline{EG} 0.9487 = 0$$

$$-12 - \overline{EG} 0.3161 + 15 - \overline{EG} 0.9487 = 0$$

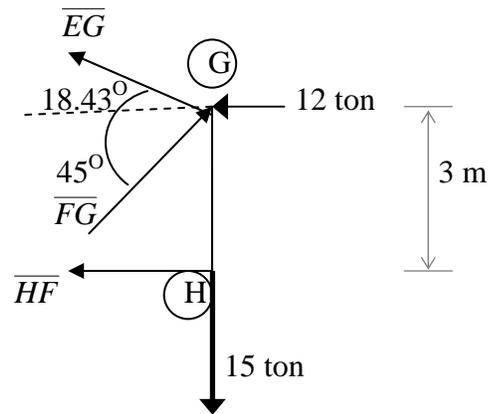
$$3 - \overline{EG} 1.2648 = 0$$

$$\boxed{\overline{EG} = 2.37 \text{ ton}}$$

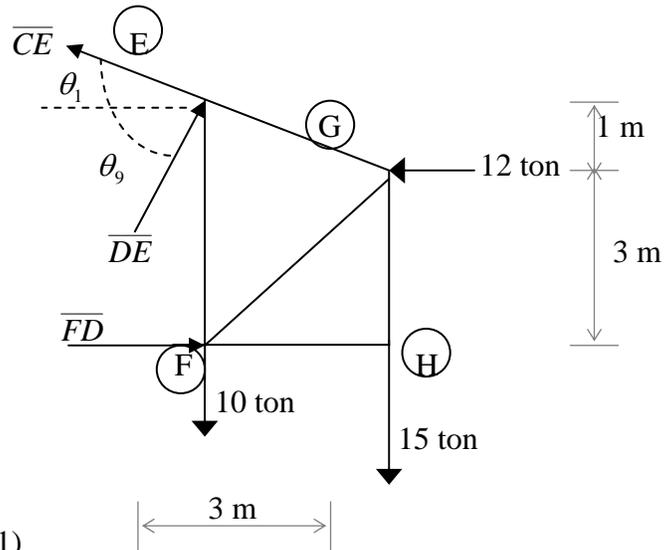
Sustituimos \overline{EG} en la ecuación 1

$$\overline{FG} = -(2.37) 0.4471 + 21.2134$$

$$\boxed{\overline{FG} = 20.15 \text{ ton}}$$



CORTE B – B'



$$\Sigma M_E = 0$$

$$15(3) - \overline{FD}(4) + 12(1) = 0$$

$$\boxed{\overline{FD} = 14.25 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-25 + \overline{CE} \sin 18.43^\circ + \overline{DE} \sin 53.13^\circ = 0$$

$$\overline{CE} = 79.0889 - 2.5305 \overline{DE} \dots (1)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$2.25 - \overline{CE} \cos 18.43^\circ + \overline{DE} \cos 53.13^\circ = 0$$

$$2.25 - \overline{CE} 0.9487 + \overline{DE} 0.60 = 0 \dots (2)$$

sustituimos la ecuación 1 en la ecuación 2

$$2.25 - (79.0889 + 2.5305 \overline{DE}) 0.9487 - \overline{DE} \cos 53.13^\circ = 0$$

$$2.25 - 75.0325 + 3 \overline{DE} = 0$$

$$\overline{DE} = \frac{72.7825}{3}$$

$$\boxed{\overline{DE} = 24.26 \text{ ton}}$$

Sustituimos \overline{DE} en la ecuación 1

$$\overline{CE} = 79.0889 - 2.5305(24.26)$$

$$\boxed{\overline{CE} = 17.70 \text{ ton}}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-29(6) + \overline{AC} \cos 18.43^\circ (6) = 0$$

$$\overline{AC} = \frac{174}{\cos 18.43^\circ (6)}$$

$$\boxed{\overline{AC} = 30.57 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$30 - 30.57 \sin 18.43^\circ - \overline{BC} \sin 59.04^\circ$$

$$\overline{BC} = \frac{20.3361}{\sin 59.04^\circ}$$

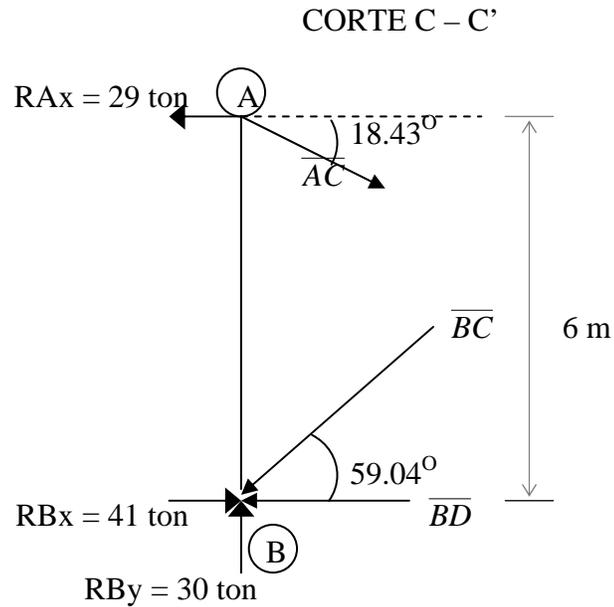
$$\boxed{\overline{BC} = 23.71 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$41 - 29 + 30.57 \cos 18.43^\circ - 23.71 \cos 59.04^\circ - \overline{BD} = 0$$

$$41 - 12.197 - \overline{BD} = 0$$

$$\boxed{\overline{BD} = 28.80 \text{ ton}}$$



Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A:
Cuerda superior	\overline{AC}	30.57	Tensión
	\overline{CE}	17.70	Tensión
	\overline{EG}	2.34	Tensión
Cuerda inferior	\overline{BD}	28.80	Compresión
	\overline{DF}	14.25	Compresión
	\overline{FH}	0	No trabaja
Montantes	\overline{AB}	9.66	Compresión
	\overline{CD}	24.40	Tensión
	\overline{EF}	24.24	Tensión
	\overline{GH}	15	Tensión
Diagonales	\overline{BC}	23.71	Compresión
	\overline{DE}	24.25	Compresión
	\overline{FG}	20.14	Compresión

Estos resultados son exactamente los mismos a los que se encontraron con el método de los nodos . Ver la tabla de resultados de la página 60.

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 44.

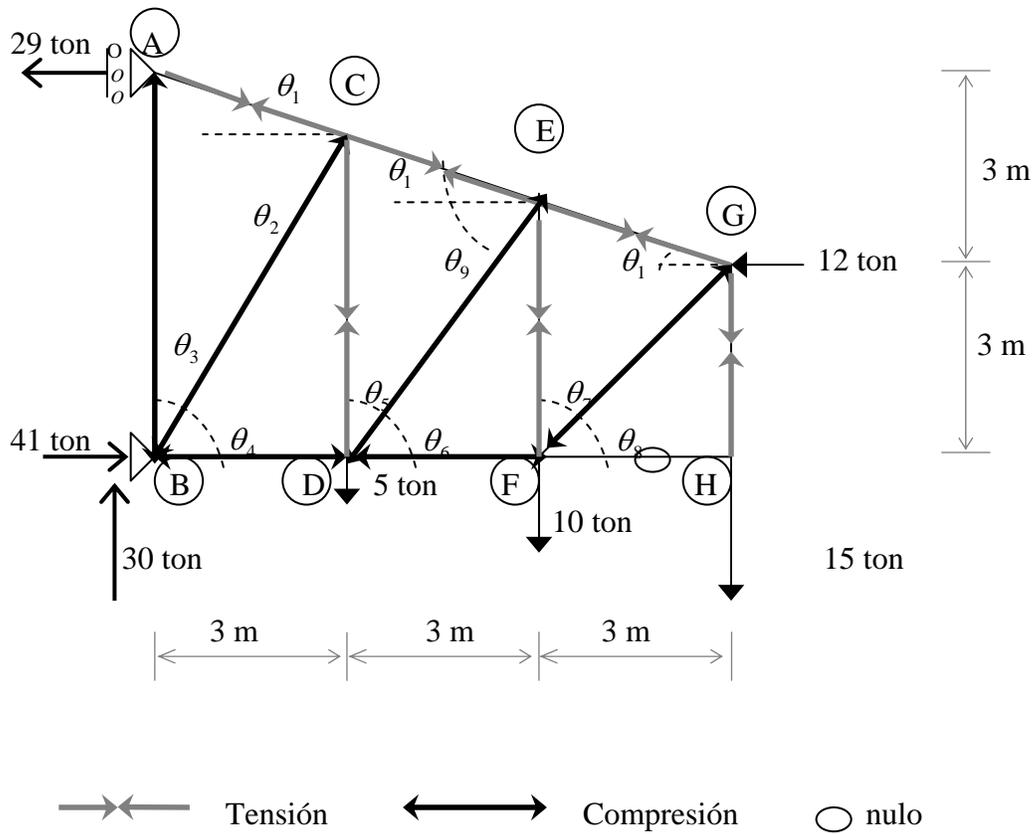
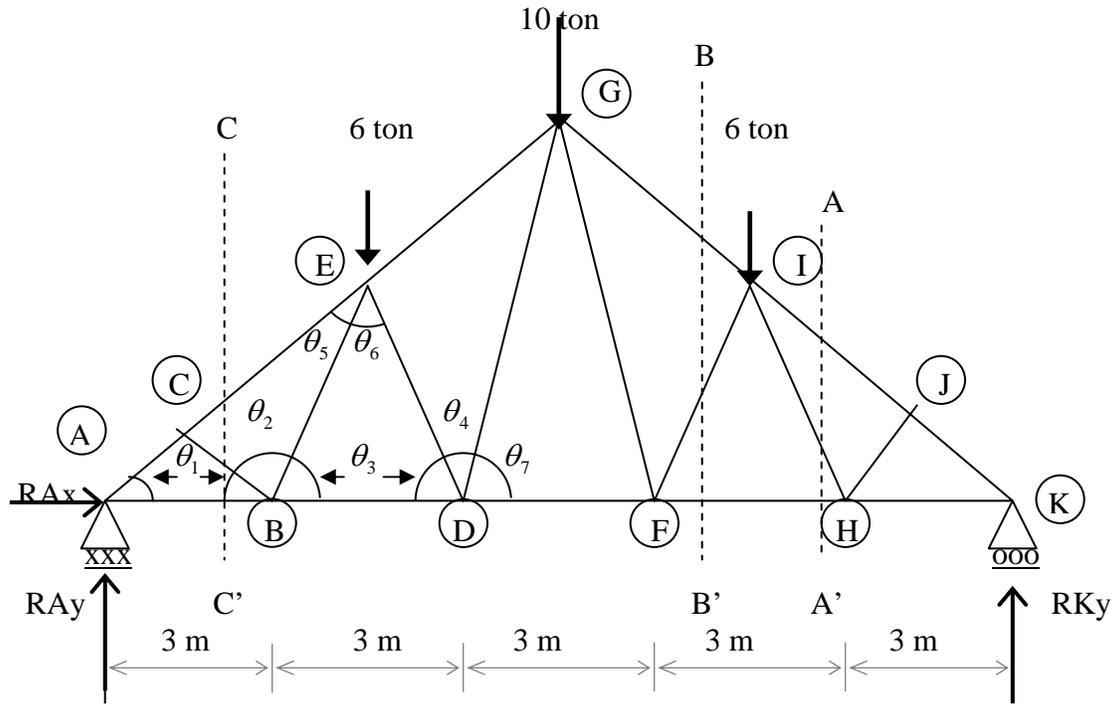


Figura 44.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

SÉPTIMO ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES

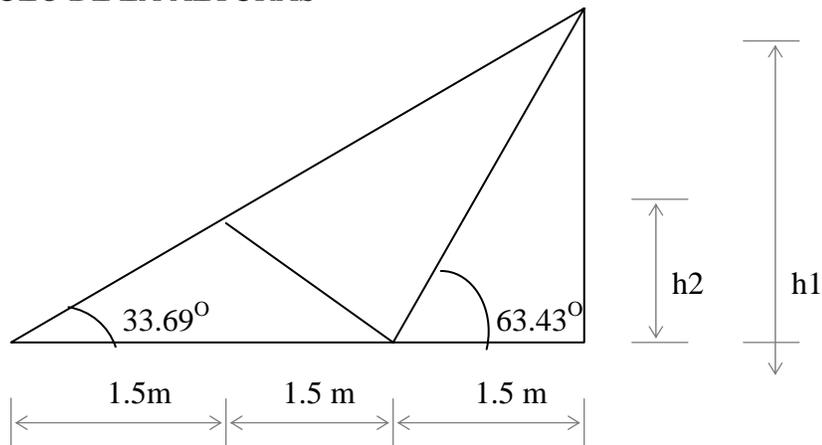


ÁNGULOS

$\theta_1 = 33.69^\circ$ $\theta_2 = 82.88^\circ$ $\theta_3 = 63.43^\circ$ $\theta_4 = 53.14^\circ$

$\theta_5 = 29.74^\circ$ $\theta_6 = 53.13^\circ$ $\theta_7 = 73.30^\circ$

CÁLCULO DE LA ALTURAS



$h1 = 4.5 \tan 33.69^\circ = 3 \text{ m}$
 $h2 = 1.5 \tan 33.69^\circ = 1 \text{ m}$

CÁLCULO DE REACCIONES

$$\Sigma M_A = 0$$

$$6(4.5) + 10(7.5) + 6(10.5) - RKy(15) = 0$$

$$RKy = \frac{165}{15} \quad RKy = 11 \text{ ton}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$15 - 15 + RAx = 0 \quad RAx = 0$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$11 - 6 - 6 - 10 + RAy = 0 \quad RAy = 11 \text{ ton}$$

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES CORTE A' - A

$$\Sigma M_H = 0$$

$$-11(3) + \overline{IJ} \cos 33.69^\circ (1) + \overline{IJ} \text{sen} 33.69^\circ (1.5) = 0$$

$$-33 + \overline{IJ} 0.83(1) + \overline{IJ} 0.55(1.5) = 0$$

$$\overline{IJ} = \frac{33}{1.664}$$

$$\boxed{\overline{IJ} = 19.83 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$11 - 19.83 \text{sen} 33.69^\circ + \overline{HI} \text{sen} 63.43^\circ$$

$$0 + \overline{HI} \text{sen} 63.43^\circ = 0$$

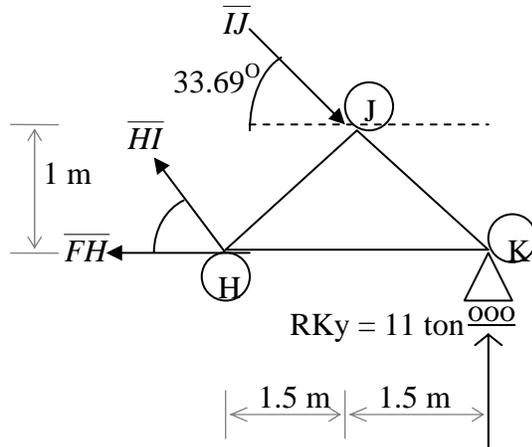
$$\overline{HI} = \frac{0}{\text{sen} 63.43^\circ} \quad \boxed{\overline{HI} = 0 \text{ ton}}$$

$$\Sigma Fx = 0$$

$$19.83 \cos 33.69^\circ - \overline{FH} = 0$$

$$16.50 - \overline{FH} = 0$$

$$\boxed{\overline{FH} = 16.50 \text{ ton}}$$



CORTE B' - B

$$\Sigma M_I = 0$$

$$-11(4.5) + \overline{FH}(3) = 0$$

$$\overline{FH} = \frac{49.5}{3}$$

$$\boxed{\overline{FH} = 16.50 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$5 - \overline{GI} \sin 33.69^\circ + \overline{FI} \sin 63.43^\circ$$

$$5 - 0.555 \overline{GI} + 0.894 \overline{FI} = 0$$

$$\overline{GI} = 1.6108 \overline{FI} + 9 \dots \dots (1)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\overline{GI} \cos 33.69^\circ + \overline{FI} \cos 63.43^\circ - 16.50 = 0$$

$$\overline{GI} 0.832 + \overline{FI} 0.447 - 16.50 = 0 \dots \dots (2)$$

Sustituimos al ecuación 1 en la ecuación 2

$$(1.6108 \overline{FI} + 9) 0.832 + 0.447 \overline{FI} - 16.50 = 0$$

$$1.3402 \overline{FI} + 7.488 + 0.447 \overline{FI} - 16.50 = 0$$

$$\overline{FI} = \frac{9}{1.7872}$$

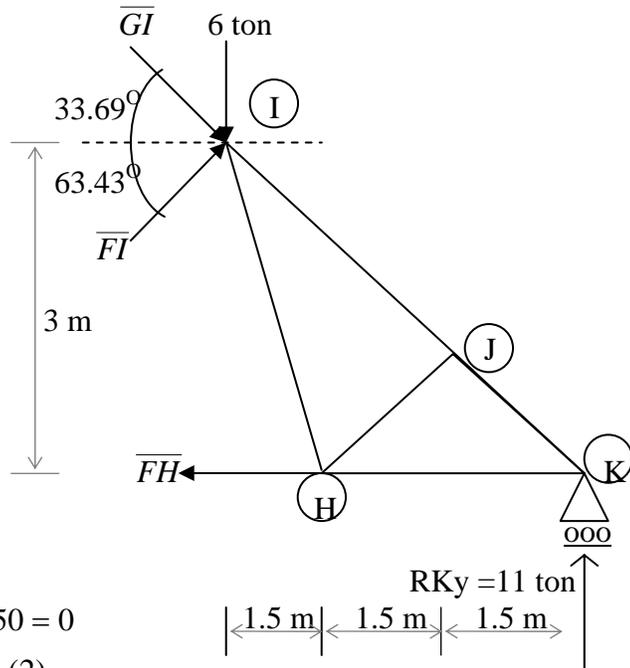
$$\boxed{\overline{FI} = 5.03 \text{ ton}}$$

Sustituimos \overline{FI} en la ecuación 1

$$\overline{GI} = \overline{FI} 1.6108 + 9$$

$$\overline{GI} = (5.03) 1.6108 + 9$$

$$\boxed{\overline{GI} = 17.11 \text{ ton}}$$



$$\Sigma M_C = 0$$

$$-11(1.5) + \overline{HF}(1) = 0$$

$$\boxed{\overline{HF} = 16.50 \text{ ton}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$11 - \overline{CB} \sin 33.69^\circ - \overline{CE} \sin 33.69^\circ = 0$$

$$\overline{BC} = 19.83 - \overline{CE} \dots\dots (1)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-\overline{CE} \cos 33.69^\circ + \overline{BC} \cos 33.69^\circ + 16.50 = 0$$

$$-\overline{CE} 0.832 + \overline{BC} 0.832 + 16.50 = 0 \dots\dots (2)$$

Sustituimos la ecuación 1 en la ecuación 2

$$-\overline{CE} 0.832 + (19.83 - \overline{CE}) 0.832 + 16.50 = 0$$

$$-\overline{CE} 0.832 - \overline{CE} 0.832 + 16.50 + 16.50 = 0$$

$$-\overline{CE} 1.664 + 33 = 0$$

$$\overline{CE} = \frac{33}{1.664}$$

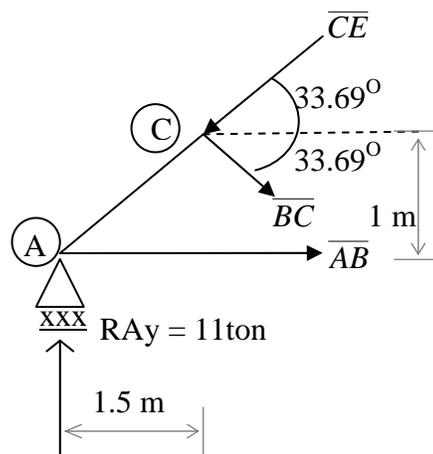
$$\boxed{\overline{CE} = 19.83 \text{ ton}}$$

sustituimos \overline{CE} en la ecuación 1

$$\overline{BC} = 19.83 - 19.83 = 0$$

$$\boxed{\overline{BC} = 0 \text{ ton}}$$

CORTE C' - C



Por simetría: $\overline{AC} = \overline{JK}$, $\overline{CE} = \overline{IJ}$, $\overline{EG} = \overline{GI}$, $\overline{AB} = \overline{HK}$, $\overline{BD} = \overline{FH}$, \overline{DF} , $\overline{BC} = \overline{HJ}$,
 $\overline{BE} = \overline{IH}$, $\overline{ED} = \overline{IF}$, $\overline{DG} = \overline{GF}$.

Es costumbre ofrecer una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la siguiente tabla.

TIPO DE BARRA	IDENTIFICACIÓN	FUERZA (ton)	SOMETIDO A:
Cuerda superior	$\overline{AC} = \overline{JK}$	19.83	Compresión
	$\overline{CE} = \overline{IJ}$	19.83	Compresión
	$\overline{EG} = \overline{GI}$	17.12	Compresión
Cuerda inferior	$\overline{AB} = \overline{HK}$	16.50	Tensión
	$\overline{BD} = \overline{FH}$	16.50	Tensión
	\overline{DF}	12.90	Tensión
Diagonales	$\overline{BC} = \overline{HJ}$	0.00	No trabaja
	$\overline{BE} = \overline{IH}$	0.00	No trabaja
	$\overline{ED} = \overline{IF}$	5.03	Compresión
	$\overline{DG} = \overline{GF}$	4.70	Tensión

Estos resultados son exactamente los mismos a los que se encontraron con el método de los nodos . Ver la tabla de resultados de la página 65.

Las fuerzas de tensión y compresión que actúan sobre las barras de la armadura se ilustran en la figura 45

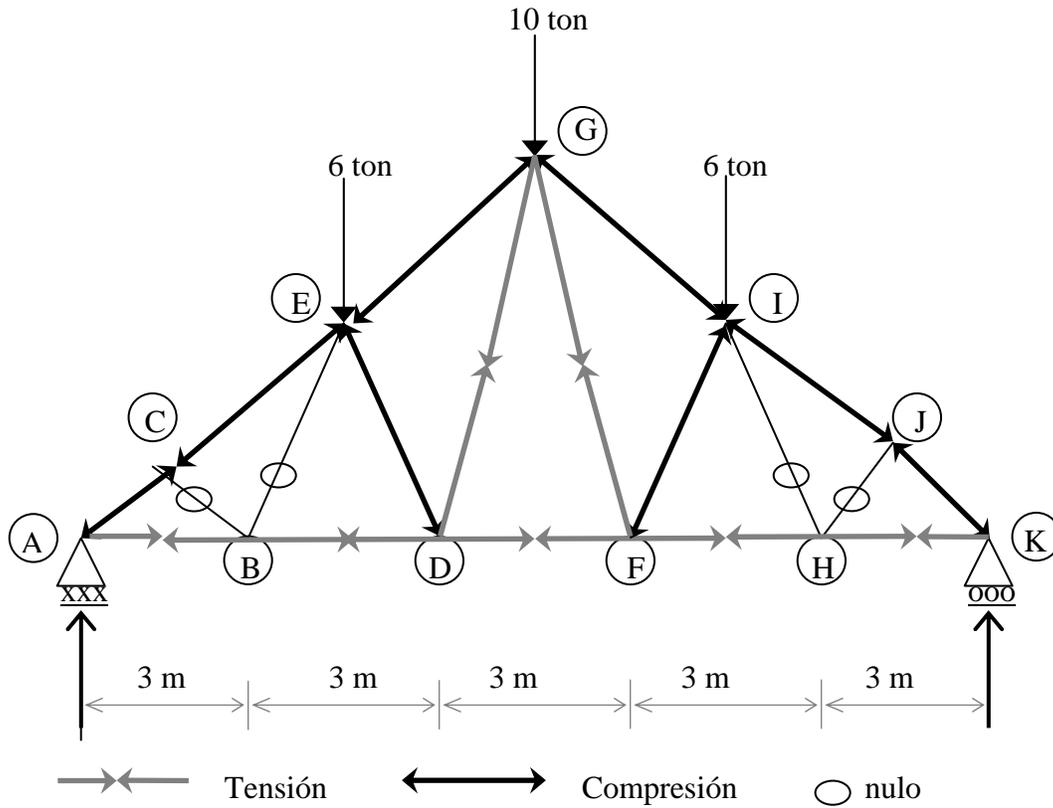


Figura 45.- Fuerzas actúan sobre las barras de la armadura.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones:

Este trabajo habla de las condiciones de equilibrio. Que dice que un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio si permanece en reposo o en movimiento con una velocidad constante. Para que se cumpla esta situación la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo debe ser cero. A partir de este hecho consideraremos la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, que son: $\sum M = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum F_x = 0$.

Para una buena aplicación de las ecuaciones de equilibrio en una estructura haremos uso del diagrama de cuerpo libre. Este consiste en representar la estructura como un cuerpo aislado de su entorno, abarcando todas las fuerzas externas conocidas y desconocidas, momentos actuantes, que afectan a la estructura y despreciando el peso propio. Cuando aplicamos las ecuaciones de equilibrio podemos obtener la magnitud de las fuerzas que no conocíamos en sentido vertical u horizontal según sea el caso.

La parte fundamental de este trabajo es la que trata de las armaduras como una estructura ligera constituida por barras rectas que se articulan en sus extremos (nodos), en forma de triángulo, esto es por que el triángulo es una figura rígida y estable por excelencia. Las armaduras están formadas por cuatro tipos de barras que son: 1) Cuerda superior, 2) Cuerda inferior, 3) Montantes, y 4) Diagonales.

Las armadura es una solución práctica y económica para la construcción de puentes, espacios dedicados a la cultura, el arte y el entretenimiento y naves industriales, debido a que no es necesario la colocación de columnas intermedias para soportar grandes cargas muy superiores a su peso propio.

Cuando comenzó el uso de las armaduras su diseño no estaba basado en los principios matemáticos y físicos, los diseños eran muy simples. Fue en la Revolución Industrial y la introducción del hierro forjado lo que obligó a los ingenieros a perfeccionar los diseños, por lo cual surgieron Armaduras mas complejas y cada ingeniero le dio su nombre a la armadura que diseñó.

1. William Howe, patentó la armadura Howe en el año 1840. En esta estructura, las diagonales trabajan a compresión y los montantes a tensión.
2. Thomas Pratt y su padre Caleb, modificaron la armadura Howe y le dieron el nombre de armadura Pratt en el año de 1844. En esta estructura, las diagonales trabajan a tensión y los montantes a compresión.
3. James Warrem, Patentó en Inglaterra la armadura Warrem en el año 1848. La armadura Warrem es ideal para soportar cargas móviles, por el

acomodo de sus diagonales que pueden trabajar a tensión o a compresión.

4. Albert Fink, Ingeniero Alemán y empresario de ferrocarriles. Modificó todos los puentes de acero para ferrocarriles y logró el diseño que lo llamó armadura Fink, en el año 1851. La armadura Fink es ideal para cubrir claros cortos.
5. Si se requiere el paso de la luz a través de la estructura del techo se recomienda usar la armadura diente de sierra.

Para analizar la estaticidad de una armadura aplicamos la ecuación: $2n = R + b$. Si se cumple esta ecuación, la armadura será estáticamente determinada. Si no se cumple y el resultado es: a) Si $2n > R + b$ es Hipostática, b) Si $2n < R + b$ es Hiperestática .

Para resolver armaduras existen dos métodos: El primero es el método de los nodos, consiste en analizar nodo por nodo para resolver la armadura. Los pasos a seguir del método de los nodos es:

- Calculamos la reacciones de la estructura
- Escoger los nodos tomando en cuenta que solo tengan dos incógnitas en cada uno.
- Elegimos los sentidos de cada fuerza incógnita.
- Planteamos dos ecuaciones de fuerzas ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$) en cada nodo donde se involucren dos incógnitas y se resuelve el sistema de ecuaciones.
- El último nodo sirve para verificar los cálculos.

El segundo método es el de las secciones, consiste en escoger una sección de la armadura para resolverla sin la necesidad de hacerlo nodo por nodo. Los pasos siguientes

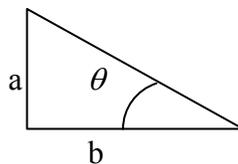
- Calculamos la reacciones de la estructura.
- Seleccionar las secciones mas apropiadas de manera que solo haya tres incógnitas.
- Plantear tres Ecuaciones de Equilibrio Estático $\Sigma M = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma F_x = 0$, que contengan a las tres incógnitas que define el corte o sección, y resolver el sistema.
- Algunas secciones solo podrán calcularse una vez resuelta otra que permita definir fuerzas.
- La última sección nos permite comprobar cálculos.

Recomendaciones

Para el cálculo de armaduras por el método de los nodos y de las secciones, se recomienda tener los siguientes cuidados para no tener equivocaciones en los resultados.

- Calcular las reacciones de la estructura en forma correcta, para cualquiera de los dos métodos.
- Verificar que los ángulos han sido calculados de forma correcta. La ecuación para obtener los ángulos es:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a}{b}$$



- Escoger correctamente los nodos a calcular
- Tener cuidado en el sentido de las fuerzas al trasladar a los nodos que tengan en común dichas fuerzas.
- Observar detalladamente el nodo para poder plantear las ecuaciones de forma correcta, con el ángulo, signos y magnitud apropiadas, sin tener errores.
- Tomar en cuenta que una equivocación en alguno de los nodos acarrearía errores en los nodos siguientes, pues el método depende de los resultados de los nodos anteriores.
- Escoger correctamente las secciones o corte de la estructura, cortando solo tres barras.
- Tener cuidado en el sentido de las fuerzas.

Finalmente, este trabajo puede ser un auxiliar pedagógico para los profesores que imparten las asignaturas de Estructuras Isostáticas y Mecánica de Materiales I, ubicadas como las materias con mayor índice de reprobación del área de Estructuras de la Carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Estudios Superiores Aragón de la Universidad Nacional Autónoma de México.

GLOSARIO

Apoyo: Es un elemento de unión entre la estructura y el sistema tierra, con el propósito de evitar los desplazamientos lineales y el angular.

Armadura Estáticamente Determinada (armadura isostática): Una estructura de barras unidas por sus extremos de manera que constituyan una unidad rígida en forma triangular, y para ser isostática debe cumplir con la condición de estaticidad que dice: $2n = R + b$.

Cuerpo Rígido: es la combinación de gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí, un cuerpo rígido no se deforma bajo a las cargas que este sujeto.

Equilibrio: Estado en que se encuentra un cuerpo cuando las fuerzas que actúan sobre él se compensan y anulan mutuamente

Escalar: magnitud que carece de dirección y se expresa, por tanto, solamente con un número, por ejemplo: el volumen, la masa, la energía, entre otros.

Eslabón: elemento que une una estructura con un tipo de apoyo fijo.

Estructura Isostáticas: es un conjunto de elementos con forma geométrica que unidos entre sí soportan cargas que son transmitidas a sus apoyos a través de los elementos estructurales que la integran y que el número de incógnitas (I) debe ser igual al número de las ecuaciones del equilibrio estático (E).

Flexión: movimiento del cuerpo causado por el efecto de una fuerza, esto ocasiona que el cuerpo tienda a doblarse o doblar uno de sus miembros.

Fuerza Axial: es la fuerza resultante de las fuerzas exteriores, perpendicular al plano de la sección. Fuerzas divergentes tensión. Fuerzas convergentes compresión.

Fuerzas Coplanares: fuerzas que actúan en un mismo plano.

Momento: es una fuerza multiplicada por una distancia referenciada a un punto de un cuerpo cualquiera.

Partícula: la palabra partícula la utilizamos para simplificar la solución de problemas, debido a que el tamaño y la forma del cuerpo no afecta considerablemente.

Reacciones de Soporte: son las fuerzas con las que responde los apoyos para soportar la estructura, pueden ser horizontales y/o verticales.

Rotación: movimiento de un cuerpo que da vueltas especialmente alrededor de su eje.

Traslación: movimiento de un cuerpo en cualquier eje.

BIBLIOGRAFÍA

LIBROS

- **BEER, Ferdinand y JOHNSTON, Russell**
Mecánica Vectorial para Ingenieros (Estática).
Editorial McGraw-Hill.
México 1990

- **HIBBELER, Rousell.**
Mecánica Vectorial para Ingenieros (Estática).
Editorial CECSA.
México 1993.

- **NORRIS, Wilbur.**
Análisis Elemental de Estructuras.
Editorial McGraw-Hill.
México 1982.

- **TORRES, Jaime.**
Mecánica Aplicada.
Editorial Representaciones y
Servicios de Ingeniería.
México 1969.

- **WEST, Harry.**
Análisis de Estructuras.
Editorial CECSA.
México 1984.

DIRECCIONES ELECTRÓNICAS

- webpages.ull.es/users/paceitun/armaduras.pdf
- www.ugr.es/~fisicat/Arturo/ProbProp/prop11.pdf
- www.arquys.com/contenidos/armaduras.html