



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CLASES DE DIGRÁFICAS CON K-NÚCLEO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ERICK MARTÍNEZ SÁMANO

DIRECTORA DE TESIS:

MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ

2009



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

للأختماني

للأخمي

أعوذ بالله من الشيطان الرجيم

أشكر كلَّ أصدقائي من درس اللغة العربيّة على جميع الوقت الذي قضيناه معاً، شكراً
يا إبراهيم ويوسف وإسبانيكاس ولورا وراغب وحموناس (إيمانويل) ولأنّة بيرو
ومارسيللا وموسى واري سوبرميل وعائدة واربيل والخائن وأوسكر ولانا وليونور وسيليا
والأجمل منهم كانيني

أودّ أنّ أشكر الأستاذ حميد (برعمه اللهم) لأنّه درّسني الكتابة والقراءة بالعربيّة، لست
أناك أهدرا يا أستاذي

أشكر السيّد الزراع القوي (انا سيابوس) خاصّة على الترويح النحويّة ونصويّات
نصّي

Gracias a mis amigos de la Facultad de Ciencias por su valiosa compañía.

لست، تعرف أنّ ساكوف ممنونا لست ولأنا يا الذي يعطي السعادة

Agradezco a mis sinodales por sus comentarios, y especialmente a mi directora de tesis por toda la paciencia, tiempo y esfuerzo dedicados a este trabajo.

1. Datos del alumno

Martínez

Sámano

Erick

5512996426

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

098242052

2. Datos del tutor

Mat.

Laura

Pastrana

Ramírez

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Hortensia

Galeana

Sánchez

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Hugo Alberto

Rincón

Mejía

5. Datos del sinodal 3

M. en C.

César

Hernández

Cruz

6. Datos del sinodal 4

Mat.

María del Rocío

Sánchez

López

7. Datos del trabajo escrito

Clases de Digráficas con k-núcleo

220 páginas

2009

Índice

Introducción	IX
1. Conceptos básicos	1
1.1. Digráficas	2
1.2. El juego de los palillos	3
1.3. Núcleos en digráficas	5
1.4. Resultados básicos acerca de núcleos	7
1.5. Existencia de núcleos	9
1.6. Seminúcleos	18
1.7. Cuasinúcleos	27
1.8. (k, l) – núcleos	30
2. Operaciones en digráficas	43
2.1. Digráficas generadoras	44
2.2. $L(D)$	46
2.3. Digráficas adheribles	48
2.4. $S(D)$	52
2.5. $S^k(D)$	54
2.6. $Q^k(D)$	65
2.7. $R^k(D)$	70
2.8. $T^k(D)$	78
2.9. $\bar{L}(D), \bar{Q}^k(D), \bar{T}^k(D)$	85
2.10. Obteniendo digráficas a partir de $S^k(D)$	91
2.11. Obteniendo digráficas a partir de $R^k(D)$	97
3. Orientaciones de la gráfica de trayectorias	101
3.1. Gráficas	103
3.2. La gráfica de trayectorias	107

3.3.	Algunas propiedades de $T(G)$	112
3.4.	Lemas sobre ciclos con cuerdas en $T(G)$	114
3.5.	k -núcleos en orientaciones de $T(G)$	123
3.6.	Núcleos en orientaciones de $T(G)$	151
3.7.	Acerca de la gráfica de trayectorias	156
4.	Exactamente n k-núcleos	163
4.1.	Digráficas fuertemente conexas simétricas	164
4.2.	Digráficas fuertemente conexas asimétricas	164
4.3.	Más ejemplos	186
4.4.	n k -núcleos y m k -soluciones	202
	Bibliografía	209

Introducción

El núcleo de una gráfica dirigida o digráfica es un subconjunto de vértices S que es independiente y absorbente. Independiente significa que no hay flechas entre los elementos de S ; absorbente que, cualquier vértice que no pertenezca a S , tiene una flecha que va hacia algún elemento de S .

Este concepto fue introducido en 1944 por Von Neumann y Morgenstern [15], en el contexto de la teoría de juegos.

Dada la importancia que tiene para resolver juegos, problemas de toma de decisiones y otros, se han buscado y encontrado condiciones para garantizar su existencia en algunas digráficas.

El teorema de Richardson [16] establece que toda digráfica tal que la longitud de todos sus ciclos dirigidos es par, tiene núcleo.

En 1981, Maria Kwaśnik [13] definió (k, l) -núcleo de la siguiente manera:

Si un subconjunto de vértices J cumple que entre sus elementos no hay trayectorias dirigidas de longitud menor que k ($k \geq 2$) y además que, para todo vértice no perteneciente a J hay una trayectoria dirigida de longitud a lo más l ($l \geq 1$), que va de dicho vértice hacia algún elemento de J , entonces J es (k, l) -núcleo. Esta definición generaliza el concepto de núcleo pues un núcleo es un $(2, 1)$ -núcleo.

Kwaśnik también demostró que toda digráfica fuertemente conexa y tal que todos sus ciclos dirigidos poseen longitud congruente con cero módulo k , tiene $(k, k - 1)$ -núcleo. Este resultado es una generalización del teorema de Richardson. De entre los (k, l) -núcleos, el $(k, k - 1)$ -núcleo recibe el nombre de k -núcleo y tiene una gran importancia.

Condiciones suficientes y necesarias para la existencia de k -núcleos ($k \geq 2$) han sido estudiadas en los últimos años por investigadores como Claude Berge [1], Hortensia Galeana Sánchez [5] [4], Magdalena Kucharska [12], Maria Kwaśnik [13], Víctor Neumann Lara [6], Laura Pastrana Ramírez [7] [8], Hugo Rincón Mejía [10], Jerzy Topp [18] y muchos otros.

Tomando como base artículos de investigación, principalmente de los autores antes mencionados, en el primer capítulo de este trabajo, recopilaremos algunos resultados sobre la existencia de k -núcleos en digráficas.

En el segundo capítulo construiremos, partiendo de una digráfica, toda una familia de digráficas tal que, cada uno de sus elementos tendrá k -núcleo.

Para una digráfica D , Jerzy Topp [18] definió las digráficas $S(D)$, $Q(D)$, $R(D)$ y $T(D)$, además demostró, entre otras cosas, que $S(D)$, $R(D)$ y $Q(D)$ siempre tienen núcleo y que $T(D)$ tiene núcleo, si D no posee ciclos dirigidos.

En un artículo aún por publicar, Galeana Sánchez y Pastrana Ramírez [7], generalizaron la idea de la definición de $S(D)$ para obtener una clase de digráficas $\mathfrak{S}^k(D)$ tal que, cualquier digráfica $S^k(D) \in \mathfrak{S}^k(D)$ tiene k -núcleo para $k \geq 2$.

Las definiciones de $Q(D)$, $R(D)$ y $T(D)$ también fueron generalizadas para obtener familias de digráficas con k -núcleo.

Daremos a conocer lo expuesto en el artículo mencionado anteriormente y lo extenderemos con las digráficas $\overline{Q}_m^k(D)$, $\overline{T}_m^k(D)$ y otras más, obtenidas de $S^k(D)$ y $R^k(D)$.

En el tercer capítulo, para una gráfica H construiremos su gráfica de trayectorias. A las aristas de esta última gráfica se les puede asignar una dirección (o ambas) para obtener una digráfica que tendrá k -núcleo, bajo ciertas hipótesis.

Obtendremos los siguientes resultados:

I. Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias, $k \geq 3$ y D una orientación de $T(G)$ tal que $Asim(D)$ es fuertemente conexa y todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene dos flechas simétricas.

Si todo ciclo dirigido de D , de longitud no congruente con cero módulo k y mayor que 3 tiene una cuerda larga o dos cuerdas cortas (c, d) , (e, f) con (e, f) distinto de (d, c) , entonces D tiene k -núcleo.

II. Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias, $k \geq 3$ y D una orientación de $T(G)$ tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene todas sus flechas simétricas y además $Asim(D)$ es fuertemente conexa.

Si todo ciclo dirigido en D , de longitud no congruente con cero módulo k y mayor que 3 tiene dos cuerdas, entonces D tiene k -núcleo.

Estos teoremas son análogos a los obtenidos en [8] para orientaciones de la gráfica de líneas.

También veremos una parte de otro artículo inédito de Galeana Sánchez y Pastrana Ramírez para encontrar núcleos en orientaciones de $T(G)$.

En el cuarto capítulo propondremos digráficas asimétricas fuertemente conexas con tantos k -núcleos y k -soluciones como deseemos generalizando de esta forma, para k -núcleos, un trabajo de Matúš Harminc en cuanto a núcleos [11].

Capítulo 1

Conceptos básicos

Nuestra principal tarea en este capítulo es presentar los resultados fundamentales acerca de núcleos en digráficas.

Comenzaremos con la definición de digráfica, los conceptos de *exgrado*, *ingrado* y *núcleo*, demostraremos que un núcleo es un conjunto *máximo independiente* y *mínimo absorbente por contención*, además de demostrar que todas las digráficas *simétricas* tienen núcleo.

Veremos que no todas las digráficas tienen núcleo y que algunas pueden tener más de uno.

Seguiremos con las definiciones de *camino dirigido*, *ciclo dirigido* y probaremos que todas las digráficas *acíclicas* tienen núcleo.

Luego utilizaremos los *seminúcleos* y *cuasinúcleos* para encontrar núcleos en digráficas sin ciclos dirigidos impares y digráficas *transitivas*, respectivamente.

Finalizaremos con una generalización del concepto de núcleo, el (k, l) -núcleo y observaremos que un núcleo es un (k, l) -núcleo para $k = 2$ y $l = k - 1 = 1$, es decir, un núcleo es un $(k, k - 1)$ -núcleo con $k = 2$. En vista de esta similitud, al $(k, k - 1)$ -núcleo con $k \geq 3$ lo distinguiremos con el nombre de k -núcleo.

Para k y l arbitrarios, demostraremos que las digráficas acíclicas siempre tienen k -núcleo pero no siempre tienen (k, l) -núcleo.

Observaremos la analogía que hay entre el teorema de Richardson y las digráficas *fuertemente conexas* que no poseen ciclos dirigidos de longitud no congruente con cero módulo k .

1.1. Digráficas

Definición 1.1.1. Una digráfica D es un par ordenado $(V(D), F(D))$, tal que:

- $V(D)$ es un conjunto finito y no vacío.
- $F(D) \subseteq V(D) \times V(D)$.

A los elementos de $V(D)$ se les denomina vértices y a los de $F(D)$, flechas.

A $|V(D)|$ se le llama orden de D y a $|F(D)|$, tamaño de D .

Si $(x, y) \in F(D)$ o $(y, x) \in F(D)$ diremos que x y y son adyacentes.

En una digráfica, a las flechas de la forma (x, x) se les denomina *lazos*. A lo largo de todo este trabajo siempre utilizaremos digráficas sin lazos.

Para apreciar visualmente una digráfica, dibujaremos una serie de puntos y flechas.

Cada punto corresponderá a un vértice de la digráfica y habrá una flecha desde el punto que representa a x hacia el que representa a y por cada $(x, y) \in F(D)$.

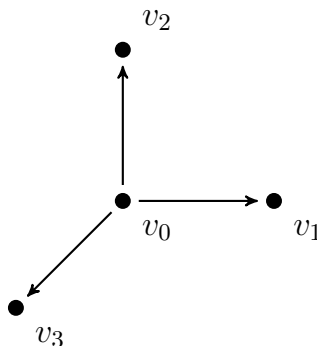
Ejemplos:

1) $V(D) = \{v_1\}, F(D) = \emptyset$.

A esta digráfica se le conoce como la digráfica trivial.



2) $V(D) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}. F(D) = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3)\}$.



Siempre que tenemos una colección de objetos y una relación binaria entre ellos, es posible obtener una digráfica.

Con las digráficas podemos modelar, por ejemplo, el comportamiento de algunos juegos como el que presentamos a continuación.

1.2. El juego de los palillos

Es un juego para dos personas. Se puede jugar con cualquier número de palillos, dispuestos sobre una mesa. Cada jugador, en su turno, puede tomar uno, dos o tres palillos. Pierde aquel que retire el último.

Ejemplo:

Los jugadores A y B deciden jugar con 11 palillos. A tiene el primer turno.

- A escoge un palillo.
- B toma uno.
- A dos.
- B dos.
- A uno.
- B tres.
- A pierde al tomar el último.

Deciden volver a jugar con los mismos 11 palillos y A volverá a tirar primero.

Se sabe que B es uno de los mejores en este juego. ¿Será posible que A pueda ganar?

Podemos representar todos los posibles escenarios del juego con una digráfica. Cada vértice representará el número de palillos que quedan sobre la mesa y se dibujará una flecha del vértice n al m siempre que, teniendo n palillos, puedan quedar m al retirar uno, dos o tres de ellos (véase la figura 1.1).

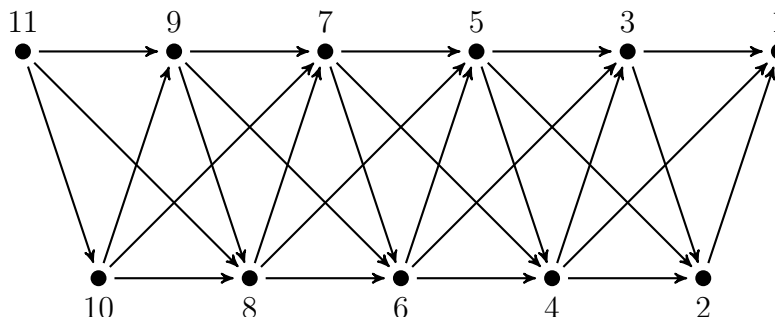
Se puede pensar que, al iniciar el juego, A está *parado* en el vértice 11. Cuando A retire palillos, hará que B se *pare* en algún otro vértice (8, 9 o 10). Pensando así, el jugador que se pare en el vértice 1 será el perdedor (pues no puede más que tomar el último palillo).

Si A quiere ganar, necesita hacer que B se pare en el 1 y, para lograrlo, A debe poder pararse en alguno de los vértices 2, 3 o 4 (pues en estos vértices, existe una manera de tomar cierta cantidad de palillos para lograr que B caiga en el 1).

¿Qué sucedería si A se detuviese en el 5?

Si lo hiciera, entonces, a la hora de quitar palillos, B quedaría en alguno de los vértices 2, 3 o 4 y de ahí, B puede hacer que A caiga en el 1 y pierda el juego.

Figura 1.1. Representación del juego para 11 palillos.



De lo anterior, lo más conveniente para A es no pararse en el 5. Y no sólo eso, si se asegura de que B pise el 5, entonces A se detendrá en alguno de 2, 3 o 4 y así ganará.

Para asegurar que B caiga en el 5, A tiene que pararse en cualquiera de los vértices 6, 7 u 8.

Si A se parara en 9, entonces B se pararía en alguno de los vértices 6, 7 u 8 y desde éstos, sería fácil para B hacer que A caiga en el 5 para después derrotarlo.

De nuevo, A no debe pararse en 9 y además, si logra hacer que B se detenga en el 9, entonces A lograría la meta de llegar a 6, 7 u 8 y ganar.

Como están jugando con 11 palillos, el primer movimiento de A debe ser: *tomar 2 palillos*. Entonces B cae en 9. No importa lo que B haga, A puede obligarlo a caer en 5 y luego en 1.

Esa es una forma de que gane A , es decir, hacer que B caiga en los vértices de $\{9,5,1\}$ pero, a lo largo de la argumentación, se vió que si A se equivocase y B hiciera que A cayera en alguno de esos vértices, entonces A perdería.

Veamos qué tiene de especial el conjunto de vértices $\{9, 5, 1\}$.

Aunque en el ejemplo se usaron 11 palillos, se puede jugar con cualquier cantidad, digamos p .

El conjunto que nos interesa ahora es $\{1, 5, 9, \dots, 4m + 1 \mid 4m + 1 \leq p\} = \bar{1}$. Cuando el jugador A logra que B juegue con una cantidad $q = 4n + 1 \in \bar{1}$; sin importar cuantos palillos tome B , siempre dejará sobre la mesa una cantidad q' tal que $q' \notin \bar{1}$ pues $q - 1 = 4n + 0$, $q - 2 = 4(n - 1) + 3$, $q - 3 = 4(n - 1) + 2$.

Después, cuando A juegue con los q' palillos restantes, puede obligar a que B juegue con $q'' \in \bar{1}$ palillos, porque siempre que $q' \notin \bar{1}$:

- Si $q' = 4n' + 0$, A puede tomar 3 y $q'' = q' - 3 \in \bar{1}$.
- Si $q' = 4n' + 2$, A puede tomar 1 y $q'' = q' - 1 \in \bar{1}$.
- Si $q' = 4n' + 3$, A puede tomar 2 y $q'' = q' - 2 \in \bar{1}$.

Dibujando una digráfica D con las mismas reglas que aquella mostrada en la figura 1.1, tenemos que $\bar{1} \subset V(D)$ tiene la propiedad de que $\forall q' \notin \bar{1} \exists q'' \in \bar{1}$ tal que existe una flecha de q' a q'' .

Otra propiedad que tiene, es que entre dos vértices cualesquiera de $\bar{1}$, no existen flechas. Lo cual es importante pues, si se recuerda, aquel jugador A que cae en un elemento de $\bar{1}$ tiene todas las de perder. Si su contrincante B juega de manera óptima, es imposible que A haga caer a B en algún elemento de $\bar{1}$.

En digráficas, a un conjunto con tales propiedades se le llama *núcleo*. Para dar una definición formal de núcleo se necesitan algunos conceptos básicos.

1.3. Núcleos en digráficas

Definición 1.3.1. Sea D una digráfica y sea $x \in V(D)$, se definen los siguientes conjuntos:

$$\Gamma_D^+(x) = \{y \in V(D) \mid (x, y) \in F(D)\}$$

$$\Gamma_D^-(x) = \{y \in V(D) \mid (y, x) \in F(D)\}.$$

A los elementos del primer conjunto se les llama *vecinos exteriores de x en D* y a los del segundo, *vecinos interiores de x en D* .

A la cardinalidad de $\Gamma_D^+(x)$ se le denota como $\delta_D^+(x)$ y se dice que es el *exgrado de x en D* .

De manera análoga, $|\Gamma_D^-(x)|$ es denotada por $\delta_D^-(x)$ y recibe el nombre de *ingrado de x en D* .

Definición 1.3.2. Extendemos la definición anterior. Sea $X \subseteq V(D)$:

$$\Gamma_D^+(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma_D^+(x), \quad \Gamma_D^-(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma_D^-(x).$$

Definición 1.3.3. Se dice que un conjunto $S \subseteq V(D)$ es núcleo de la digráfica D si y sólo si:

- I) $\forall x \in V(D)$, si $x \in S$, entonces $\Gamma_D^+(x) \cap S = \emptyset$.
- II) $\forall x \in V(D)$, si $x \notin S$, entonces $\Gamma_D^+(x) \cap S \neq \emptyset$.

Nótese que la condición II también puede escribirse como $\forall x \in V(D)$, si $\Gamma_D^+(x) \cap S = \emptyset$, entonces $x \in S$. De ahí, si $\Gamma_D^+(x) = \emptyset$, $\Gamma_D^+(x) \cap S = \emptyset$ y luego, $x \in S$. Es decir, S contiene a todos los vértices de exgrado cero en D .

Además, de nuevo por la condición II, se tiene que $S \neq \emptyset$ ¹.

Definición 1.3.4. $S \subseteq V(D)$, es *independiente* en la digráfica D si y sólo si $\forall x, y \in S$ $(x, y), (y, x) \notin F(D)$.

Definición 1.3.5. $S \subseteq V(D)$, es *absorbente* en la digráfica D si y sólo si $\forall x \in V(D) - S \exists y \in S$ tal que $(x, y) \in F(D)$.

Dese cuenta que el conjunto vacío no puede ser absorbente.

Las condiciones I y II de la definición 1.3.3, son equivalentes a las definiciones 1.3.4 y 1.3.5 respectivamente.

Si suponemos cierta a I, entonces para cualesquiera vértices $x, y \in S \subseteq V(D)$, se tiene que $\Gamma_D^+(x) \cap S = \emptyset = \Gamma_D^+(y) \cap S$ y de ahí tenemos que $x \notin \Gamma_D^+(y)$ y que $y \notin \Gamma_D^+(x)$.

Por lo tanto, $(x, y), (y, x) \notin F(D)$ y con esto, S es independiente en D .

Ahora, si suponemos que S es independiente en D , tenemos que $\forall x, y \in S$, $(x, y) \notin F(D)$ y se sigue que $y \notin \Gamma_D^+(x)$.

Por lo tanto, para todo $x \in S$ se cumple que $\Gamma_D^+(x) \cap S = \emptyset$.

La equivalencia entre II y 1.3.5 es inmediata.

Ahora sabemos que se puede reescribir la definición de núcleo como sigue:

Definición 1.3.6. $S \subseteq V(D)$ es núcleo de D si y sólo si S es absorbente e independiente en D .

Notación. Cuando $(x, y) \in F(D)$, usaremos la notación $\overrightarrow{xy} \in F(D)$ o simplemente \overrightarrow{xy} y leeremos: *la flecha de x a y* . También diremos que y *absorbe* a x .

Para simplificar más, sea $S \subseteq V(D)$. Si $x \in V(D)$ y $\exists y \in S$ tal que $\overrightarrow{xy} \in F(D)$, escribiremos \overrightarrow{xS} y diremos que hay una xS -flecha o que S *absorbe* a x .

De forma análoga, si $\overrightarrow{yx} \in F(D)$ con $y \in S$, escribiremos \overrightarrow{Sx} y diremos que hay una Sx -flecha.

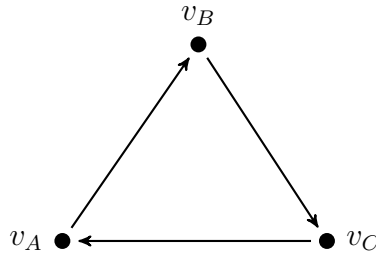
Más aún, si $S_1, S \subset V(D)$ y tenemos \overrightarrow{xS} con $x \in S_1$, diremos que hay una S_1S -flecha y escribiremos $\overrightarrow{S_1S}$.

Aunque en la digráfica que se usó para representar *el juego de los palillos* obtuvimos un núcleo, no siempre es posible, dada cualquier digráfica, encontrar un subconjunto de vértices que sea núcleo.

¹Si $S = \emptyset$, entonces $\Gamma_D^+(x) \cap S = \emptyset$ y no se cumple II.

Por ejemplo:

Figura 1.2. C_3 es una digráfica sin núcleo.



Los únicos conjuntos independientes de vértices que podrían ser absorbentes en esta digráfica son: $\{v_A\}$, $\{v_B\}$ y $\{v_C\}$. Pero ninguno de ellos es núcleo pues $\{v_A\}$ no absorbe a v_B , $\{v_B\}$ no absorbe a v_C y $\{v_C\}$ no absorbe a v_A .

¿Qué condiciones debe cumplir una digráfica para tener núcleo?

Para responder a esta pregunta primero demostraremos algunos resultados y luego definiremos algunos conceptos más.

1.4. Resultados básicos acerca de núcleos

Lema 1.4.1. Sea $\mathbb{I} = \{I \subseteq V(D) \mid I \text{ es independiente}\}$. Si S es núcleo de D , entonces S es máximo por contención en \mathbb{I} , es decir, para todo $I \in \mathbb{I}$, si $S \subset I$, tendremos que $S = I$.

Demostración. Sea S núcleo de D y sea $I \in \mathbb{I}$ tal que $S \subset I$. Basta probar que $I \subset S$, esto es, para todo x , $x \in I$ implica que $x \in S$ o, lo que es lógicamente equivalente, para cualquier x , si $x \notin S$, entonces $x \notin I$.

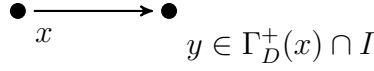
Sea $x \in V(D)$ tal que $x \notin S$.

Por ser S núcleo, $\Gamma_D^+(x) \cap S \neq \emptyset$ (por II de la definición 1.3.3). Sea y en esta intersección. Tenemos que $y \in \Gamma_D^+(x)$ y $y \in S$. Por hipótesis sabemos que $S \subset I$, lo cual indica que $y \in I$ y por consiguiente $y \in \Gamma_D^+(x) \cap I$ (ver la figura 1.3).

Al ser I independiente, se sigue que $x \notin I$.

Hemos demostrado que $I \subset S$ y $S = I$.

□

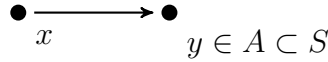
Figura 1.3. Relación entre x y y .

Lema 1.4.2. Sea $\mathbb{A} = \{A \subset V(D) \mid A \text{ es absorbente}\}$. Si S es núcleo de D , entonces S es mínimo por contención en \mathbb{A} , es decir, para todo $A \in \mathbb{A}$, si $A \subset S$, entonces $S = A$.

Demostración. Sea S núcleo de D y sea $A \in \mathbb{A}$ tal que $A \subset S$. Es suficiente probar que $S \subset A$.

De la misma manera que en la demostración anterior, tomemos x de forma que $x \notin A$ y veamos que $x \notin S$.

Como A es absorbente, $\exists y \in A$ tal que $\overrightarrow{xy} \in F(D)$.



Por hipótesis $A \subset S$, entonces $y \in S$.

Al ser independiente S , se sigue que $x \notin S$.

Concluimos que $S \subset A$ y $S = A$.

□

Lema 1.4.3. $S \subseteq V(D)$ es núcleo de D si y sólo si la función característica de S , definida como:

$$\Phi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S, \\ 0 & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

Cumple que $\forall x \in V(D)$, $\Phi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma_D^+(x)} \{\Phi_S(y)\}$.

Convenimos que si $\Gamma_D^+(x) = \emptyset$, entonces $\max_{y \in \Gamma_D^+(x)} \{\Phi_S(y)\} = 0$.

Demostración. Para probar la suficiencia, sea S un núcleo de D y sea x un elemento de $V(D)$.

- Si $\Phi_S(x) = 1$, entonces $x \in S$ y, por la condición I de la definición 1.3.3, tenemos que $\Gamma_D^+(x) \cap S = \emptyset$. De lo anterior se sigue que $\forall y$, si $y \in \Gamma_D^+(x)$, y no puede ser elemento de S y por ende $\forall y \in \Gamma_D^+(x)$, $\Phi_S(y) = 0$.

Por lo tanto, $\max_{y \in \Gamma_D^+(x)} \{\Phi_S(y)\} = 0$.

Así, $\Phi_S(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - \max_{y \in \Gamma_D^+(x)} \{\Phi_S(y)\}$.

- Si $\Phi_S(x) = 0$, entonces $x \notin S$ y $\Gamma_D^+(x) \cap S \neq \emptyset$ (pues S es absorbente), lo cual implica que $\exists y \in \Gamma_D^+(x)$ tal que $y \in S$. Por ende existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ tal que $\Phi_S(y) = 1$.

Por lo tanto, $\max_{y \in \Gamma_D^+(x)} \{\Phi_S(y)\} = 1$.

Así, $\Phi_S(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - \max_{y \in \Gamma_D^+(x)} \{\Phi_S(y)\}$.

Por consiguiente $\forall x \in V(D)$, $\Phi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma_D^+(x)} \{\Phi_S(y)\}$.

Supongamos que $\forall x \in V(D)$, $\Phi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma_D^+(x)} \{\Phi_S(y)\}$ para probar la necesidad.

- Si $x \in S$, entonces $\Phi_S(x) = 1 = 1 - 0$, luego, $\max_{y \in \Gamma_D^+(x)} \{\Phi_S(y)\} = 0$, de aquí tenemos que $\forall y \in \Gamma_D^+(x)$, $y \notin S$ y se sigue que $\Gamma_D^+(x) \cap S = \emptyset$.

Deducimos que si $x \in S$, entonces $\Gamma_D^+(x) \cap S = \emptyset$.

- Si $x \notin S$, entonces $\Phi_S(x) = 0 = 1 - 1$. De lo anterior concluimos que $\max_{y \in \Gamma_D^+(x)} \{\Phi_S(y)\} = 1$ y por consiguiente existe $y \in \Gamma_D^+(x) \ni y \in S$, lo cual equivale a decir que $\Gamma_D^+(x) \cap S \neq \emptyset$.

En resumen, si $x \notin S$, entonces $\Gamma_D^+(x) \cap S \neq \emptyset$.

Hemos probado que S es núcleo de D . □

1.5. Existencia de núcleos

Veamos algunas condiciones suficientes para que una digráfica tenga núcleo.

Definición 1.5.1. Si en una digráfica D se cumple que $\forall x, y \in V(D)$ si $\vec{xy} \in F(D)$, entonces $\vec{yx} \in F(D)$, decimos que D es simétrica.

D es asimétrica siempre que $\forall x, y \in V(D)$ si $\vec{xy} \in F(D)$, entonces $\vec{yx} \notin F(D)$

Lo anterior nos permite a enunciar el siguiente resultado:

Teorema 1.5.1. Sea D una digráfica simétrica. Si $S \subseteq V(D)$ es independiente máximo (por contención), entonces S es núcleo de D .

Demostración. Sea S como en la hipótesis. Como S es ya independiente, basta probar que es absorbente.

Veamos que S es absorbente.

Tomemos $x \in V(D) - S$. Sea $S_1 = S \cup \{x\}$. Dado que S máximo independiente, $S \subset S_1$ y $S \neq S_1$, se sigue que S_1 no es independiente². Como S sí es independiente y como S_1 no lo es, debe existir $y \in S$ tal que $\overrightarrow{xy} \in F(D)$ o $\overrightarrow{yx} \in F(D)$ ³. En cualquier caso, tenemos la flecha \overrightarrow{xy} pues D es simétrica, por lo tanto S absorbe a x .

Entonces S es absorbente.

Por consiguiente S es núcleo. □

Corolario 1.5.2. *Toda digráfica simétrica tiene núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica simétrica. Por el teorema anterior, lo único que debemos hacer, es encontrar un subconjunto de vértices que sea independiente máximo.

Sea x_0 un vértice arbitrario y sea $S_0 = \{x_0\}$.

Si S_0 es absorbente, entonces es núcleo. Si no:

Sea $x_1 \notin \Gamma_D^+(S_0)$ y sea $S_1 = S_0 \cup \{x_1\}$.

S_1 es independiente pues, por la elección de x_1 , $\overrightarrow{x_0x_1} \notin F(D)$. Lo anterior implica, al ser D simétrica, que $\overrightarrow{x_1x_0} \notin F(D)$.

Si S_1 es absorbente, es núcleo. Si no:

Sea $x_2 \notin \Gamma_D^+(S_1)$ y sea $S_2 = S_1 \cup \{x_2\}$.

S_2 es independiente ya que, por la elección de x_2 , $\overrightarrow{x_ix_2} \notin F(D)$, $i = 0, 1$.

Como antes, tenemos que $\overrightarrow{x_2x_i} \notin F(D)$, $i = 0, 1$.

Si S_2 es absorbente, es núcleo. Si no:

⋮

Para obtener S_j , escogemos siempre un vértice x_j tal que $x_j \notin \Gamma_D^+(S_{j-1})$, así, $S_j = S_{j-1} \cup \{x_j\}$ y además $\overrightarrow{x_ix_j} \notin F(D)$ y $\overrightarrow{x_jx_i} \notin F(D)$, con $i = 0, \dots, j-1$. Es decir, todos los conjuntos S_j son independientes.

Entonces podemos seguir este procedimiento hasta obtener S_m independiente máximo, es decir, S_m tal que no podamos tomar otro vértice para formar S_{m+1} . Esto se debe a que la digráfica es finita. □

Si observamos a C_3 , es decir, nuestro ejemplo de la digráfica sin núcleo (figura 1.2), notamos que sus vértices y flechas se comportan de una forma particular:

- Todos sus vértices tienen exgrado mayor que cero.

²Recuérdese la definición de máximo por contención dada en el lema 1.4.1.

³También recuérdese que no consideramos los lazos, por lo cual no podemos tener la flecha \overrightarrow{xx} .

- Todos tienen ingrado no negativo.
- Se puede ir de un vértice a cualquier otro *caminando*, es decir, siguiendo el sentido de las flechas.
- También se puede empezar a caminar desde cualquier vértice y continuar caminando, pasando por todos los otros y utilizando todas las flechas, para regresar al punto de partida sin haber pasado dos veces por el mismo vértice exceptuando al inicial.

Este tipo de digráficas reciben el nombre de *ciclos dirigidos*. A continuación daremos su definición.

Definición 1.5.2. Un camino dirigido, en una digráfica D , es una sucesión de vértices, $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in F(D) \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Además, si $x_0 = x_n$, se dice que C es un camino dirigido *cerrado*.

Como caso especial consideramos también a $C = (x_i)$ como un camino dirigido cerrado.

Definición 1.5.3. Una trayectoria dirigida, en una digráfica D , es un camino dirigido $T = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $x_i \neq x_j$ para todo i y j con $0 \leq i < j \leq n$. Es decir, las trayectorias dirigidas, son caminos dirigidos que no repiten vértices.

Definición 1.5.4. Un ciclo dirigido, en una digráfica D , es un camino dirigido cerrado con al menos dos vértices distintos $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x_0)$ tal que para cada i y j con $0 \leq i < j < n$, $x_i \neq x_j$. Es decir, los ciclos dirigidos son caminos dirigidos cerrados cuyos únicos vértices que se repiten son el inicial y el final.

Notemos que al camino dirigido cerrado que consta de un sólo vértice no lo consideraremos ciclo dirigido.

Diremos que dos ciclos C_1 y C_2 son iguales, si tienen los mismos vértices y para cualquier x , el sucesor de x en C_1 es el sucesor de x en C_2 .

Si en una digráfica no hay más que los vértices de una trayectoria dirigida y las flechas de la misma, diremos que la digráfica en cuestión es una trayectoria dirigida.

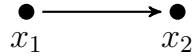
Análogamente, cuando en una digráfica no haya más que los vértices de un ciclo dirigido y las flechas del mismo, diremos que la digráfica es un ciclo dirigido.

Acerca de si todos los vértices tienen ingrado o exgrado mayor que cero, se conocen los dos resultados siguientes.

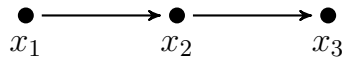
Lema 1.5.3. *Sea D una digráfica. Si $\forall x \in V(D)$, $\delta_D^+(x) > 0$, entonces existe un ciclo dirigido en D .*

Demostración. Construyamos un ciclo dirigido.

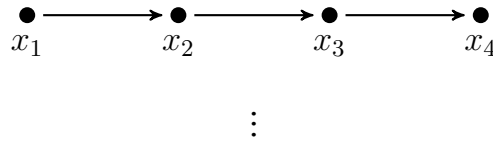
Sea x_1 un vértice cualquiera. Por hipótesis, x_1 tiene al menos un vecino exterior, digamos x_2 .



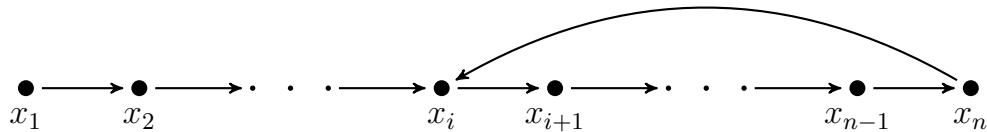
También es cierto que x_2 tiene al menos un vecino exterior, llamémoslo x_3 . Si $x_3 = x_1$, $C = (x_1, x_2, x_1)$ es un ciclo dirigido. Si no:



x_3 tiene algún vecino exterior x_4 . Si $x_4 = x_1$ o si $x_4 = x_2$, entonces $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ o $C = (x_2, x_3, x_2)$ son ciclos dirigidos. Si no:



Seguimos hasta obtener, un vértice x_n tal que, alguno de sus vecinos exteriores, x_{n+1} es igual a x_i para algún $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Esto se logra porque la digráfica es finita.



De esta manera tenemos el ciclo $C = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_i)$.

□

Lema 1.5.4. *Sea D una digráfica. Si $\forall x \in V(D)$, $\delta_D^-(x) > 0$, entonces existe un ciclo dirigido en D .*

Demostración. Apartir de D definimos la digráfica D' como sigue:

$$V(D') = V(D).$$

$$F(D') = \{(y, x) \mid (x, y) \in F(D)\}.$$

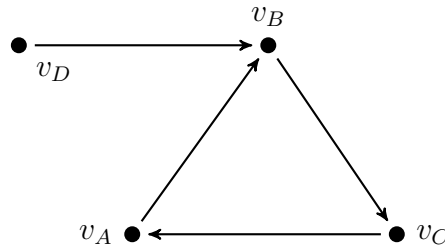
En palabras, D' se obtiene de D cambiando la dirección de las flechas.

Así como en D se cumple que todo vértice tiene ingrado mayor que cero, en D' se cumple que todo vértice tiene exgrado mayor que cero. Por el lema 1.5.3, D' tiene un ciclo $C' = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$. Lo cual, por definición de D' , nos da el ciclo $C = (x_1, x_n, \dots, x_2, x_1)$ en D .

□

Sabiendo ahora que la digráfica mostrada en la figura 1.2 es un ciclo dirigido, y volviendo a la búsqueda de condiciones para que una digráfica tenga núcleo, dibujemos otra digráfica D_1 y veamos si tiene núcleo o no.

Figura 1.4. D_1 es otra digráfica sin núcleo.



Tampoco tiene núcleo porque si suponemos que $R \subset V(D_1)$ es un núcleo de D_1 , entonces se cumple que $v_D \in R$ o que $v_D \notin R$.

Si $v_D \in R$, entonces $v_B \notin R$ (pues R es independiente). Ahora, R debe absorber a v_B , por lo cual necesitamos que $v_C \in R$ pues es el único vértice que absorbe a v_B . Así, $v_A \notin R$ y v_A no es absorbido por R .

Si $v_D \notin R$, se sigue que $v_B \in R$, entonces $v_A \notin R$ y $v_C \notin R$ pero v_C no es absorbido.

Por lo tanto D_1 no puede tener núcleo.

Examinando con cuidado la digráfica del juego de los palillos (figura 1.1), se puede ver que no hay ciclos dirigidos, a diferencia de C_3 (figura 1.2) y D_1 .

Si tenemos una digráfica sin ciclos, siempre es posible encontrar un núcleo. Para demostrar la afirmación anterior, necesitamos más definiciones.

Definición 1.5.5. Se le llama *acíclica* a aquella digráfica que no tiene ciclos dirigidos.

Definición 1.5.6. Sea D una digráfica y $X \subsetneq V(D)$. Definimos la digráfica $H = D - X$ como:

- $V(H) = V(D) - X$.
- $F(H) = F(D) - \{(x, y) \in F(D) \mid x \in X \text{ o } y \in X\}$.

Teorema 1.5.5. *Sea D una digráfica acíclica. Entonces D tiene un núcleo y solamente uno.*

Demostración. Por la contrapositiva del lema 1.5.3 y porque no hay ciclos dirigidos en D , se sigue que $\exists x \in V(D)$ tal que $\delta_D^+(x) \leq 0$, lo cual implica que hay vértices de exgrado igual a cero pues ningún vértice puede tener exgrado negativo.

Sea $X_0 = \{x \in V(D) \mid \delta_D^+(x) = 0\}$ y sea $Y_0 = \Gamma_D^-(X_0)$

Nótese que en Y_0 están todos los vértices que son absorbidos por el conjunto X_0 .

Si $V(D) - (X_0 \cup Y_0) = \emptyset$, entonces X_0 es núcleo pues es independiente (al tener todos sus elementos exgrado cero, no puede haber flechas entre ellos) y es absorbente por definición de Y_0 .

Si $V(D) - (X_0 \cup Y_0) \neq \emptyset$:

Sea $D_1 = D - (X_0 \cup Y_0)$. Entonces D_1 es acíclica pues se obtuvo de D quitando vértices y flechas, lo cual no forma ciclos, y se sigue que existe $x \in V(D_1)$ tal que $\delta_{D_1}^+(x) = 0$.

Sea $X_1 = \{x \in V(D_1) \mid \delta_{D_1}^+(x) = 0\}$ y sea $Y_1 = \Gamma_{D_1}^-(X_1)$.

Si $V(D_1) - (X_1 \cup Y_1) = \emptyset$:

- $X_0 \cup X_1$ es independiente en D :

$\nrightarrow_{X_0 X_1}$ pues los elementos de X_0 tienen exgrado cero en D .

$\nrightarrow_{X_1 X_0}$ porque los elementos de X_1 son vértices de D_1 , la cual se obtuvo quitando, en particular, a los vértices del conjunto Y_0 que son todos los que tienen flechas hacia X_0 .

X_1 es independiente en D . Pues si $a, b \in X_1$, el exgrado en D_1 de ambos es cero, y esto implica que en D_1 no existen las flechas \overrightarrow{ab} y \overrightarrow{ba} . Por lo tanto, en D tampoco existen dichas flechas pues aunque D_1 fue obtenida eliminando flechas de D , las flechas entre a y b no fueron alteradas de ninguna forma.

Ya sabíamos que X_0 era independiente.

Por lo anterior $X_0 \cup X_1$ es independiente en D .

- $X_0 \cup X_1$ es absorbente en D :

Sea $x \in V(D) - (X_0 \cup X_1)$.

Como $V(D_1) = V(D) - (X_0 \cup Y_0)$ y $V(D_1) - (X_1 \cup Y_1) = \emptyset$, se sigue que $\forall x \in V(D) - (X_0 \cup X_1)$, $x \in Y_0$ o $x \in Y_1$.

Por definición de Y_0 y Y_1 , existe alguna xX_0 -flecha o alguna xX_1 -flecha.

Por consiguiente $X_0 \cup X_1$ es absorbente en D .

Concluimos que $X_0 \cup X_1$ es núcleo de D .

Si $V(D_1) - (X_1 \cup Y_1) \neq \emptyset$:

Sea $D_2 = D_1 - (X_1 \cup Y_1)$. D_2 es acíclica y tiene vértices de exgrado cero.

Sea $X_2 = \{x \in V(D_2) \mid \delta_{D_2}^+(x) = 0\}$ y sea $Y_2 = \Gamma_{D_2}^-(X_2)$.

⋮

Continuamos hasta obtener una digráfica D_n tal que $V(D_n) - (X_n \cup Y_n) = \emptyset$, con $X_n = \{x \in V(D_n) \mid \delta_{D_n}^+(x) = 0\}$ y $Y_n = \Gamma_{D_n}^-(X_n)$ lo cual es posible porque D es finita.

Entonces, los conjuntos X_i definidos en cada paso forman un núcleo para D , es decir, $N = \bigcup_{i=0}^n X_i$ es núcleo de D .

Afirmación. N es independiente en D .

- $\forall i$, X_i es independiente.

Para simplificar, escribimos $D = D_0$.

Sean $x, y \in X_i$. Entonces ambos tienen exgrado cero en D_i , lo que implica que no hay flecha entre ellos en D_i . Como las flechas se eliminan cuando alguno de los dos extremos se quita, y x y y no son removidos sino hasta la posible obtención de D_{i+1} , se sigue que en D tampoco hay flecha entre ellos.

Por ende cada X_i es independiente en D .

- $\nexists \overrightarrow{X_j X_i}$ y $\nexists \overrightarrow{X_i X_j}$ para $i \neq j$.

Podemos pensar que $i < j$. Sean $a \in X_i$ y $b \in X_j$.

Entonces, $\delta_{D_i}^+(a) = 0$ y como $i < j$, se tiene que $a, b \in V(D_i)$. De ahí, tenemos que en D_i $\nexists \overrightarrow{ab}$ y por lo tanto tampoco existe esa flecha en D pues las flechas entre a y b no se quitan hasta eliminar a alguno de ellos.

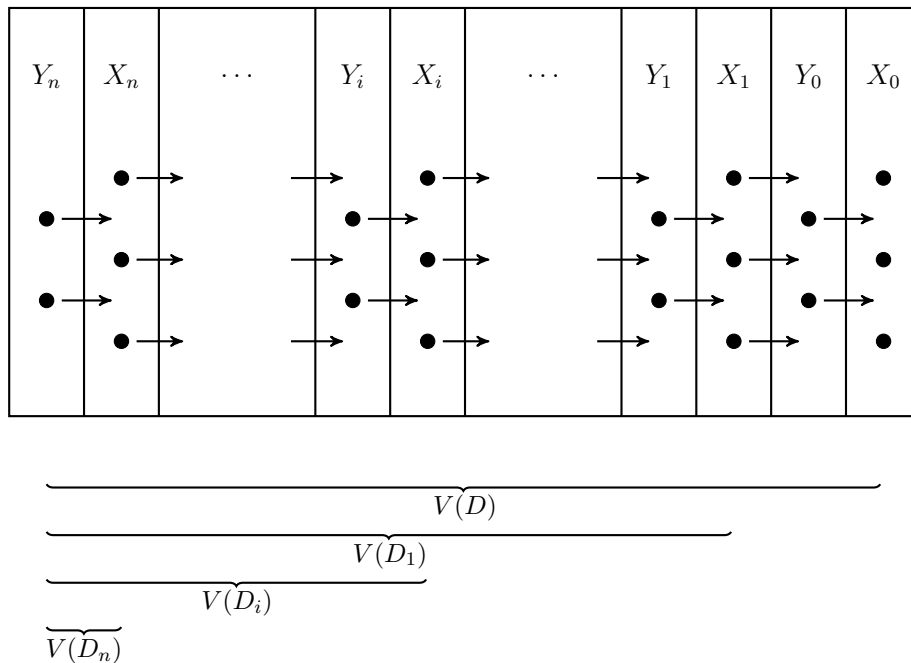
Por lo antes dicho, en D , $\nexists \overrightarrow{X_i X_j}$.

$\nexists \overrightarrow{ba} \in F(D)$ pues si existiera, como los dos son vértices de D_i , b pertenecería a Y_i , lo cual no es posible pues $b \in V(D_j)$ y D_j se obtuvo después de quitar a $X_i \cup Y_i$.

Así, en D , $\nexists \overrightarrow{X_j X_i}$.

Concluimos que N es independiente en D .

Figura 1.5. Partición de $V(D)$.



Afirmación. N es absorbente en D .

N es absorbente en D pues si $x \notin N$, entonces $x \in Y_i$ para algún i y es absorbido por X_i .

Esto se debe a que, como fuimos quitando los X_i y los Y_i , obtuvimos una partición $\{X_0, X_1, \dots, X_n, Y_0, Y_1, \dots, Y_n\}$ ⁴ de $V(D)$ (ver figura 1.5).

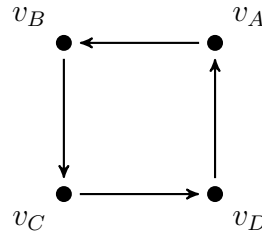
Por lo tanto N es absorbente en D .

N es único pues cualquier conjunto S que sea núcleo, necesariamente tiene a todos los elementos de X_0 , por lo cual S no puede tener a los de Y_0 , forzosamente tiene a todos los elementos de X_1 y no puede tener a los de Y_1 y así sucesivamente. Es decir, $N \subset S$ y por el lema 1.4.1, $N = S$.

□

A pesar de que el teorema anterior garantiza la existencia de núcleos en las digráficas acíclicas, resulta no ser tan útil, es decir, tenemos digráficas con ciclos dirigidos que tienen núcleo y no sólo uno. Como ejemplo consideremos la digráfica mostrada en la figura 1.6.

Figura 1.6. C_4 . $\{v_A, v_C\}$ y $\{v_B, v_D\}$ son núcleos.



La diferencia de este ejemplo con los anteriores, es que esta digráfica es un ciclo dirigido de *longitud par*.

Definición 1.5.7. Si $C = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ es un camino dirigido, diremos que su longitud es el número de flechas $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Se conoce un resultado todavía mejor que el teorema 1.5.5.

Teorema. *Toda digráfica sin ciclos dirigidos impares tiene núcleo.*

La demostración original se debe a M. Richardson [16] pero es muy difícil de explicar, por ello daremos una demostración que utiliza como herramienta el concepto de *seminúcleo*.

⁴Es posible que en el último paso, Y_n sea igual al conjunto vacío, en ese caso, la partición sería $\{X_0, X_1, \dots, X_n, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$.

1.6. Seminúcleos

Definición 1.6.1. Sea D una digráfica. Se dice que $S \subseteq V(D)$ es seminúcleo de D si:

- a) S es independiente.
- b) $\forall x \in V(D) - S$, si existe alguna Sx -flecha, entonces debe existir alguna xS -flecha.

Las *subdigráficas inducidas* también nos serán de gran utilidad. Definémoslas y veamos, a partir de ellas, algunos ejemplos de seminúcleos.

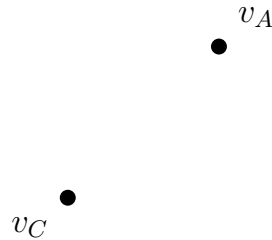
Definición 1.6.2. H es una subdigráfica inducida de D si:

- $V(H) \subseteq V(D)$.
- $F(H) = \{\vec{xy} \in F(D) \mid x, y \in V(H)\}$.

Si se tiene $I \subset V(D)$ tal que $I \neq \emptyset$, se denota por $D[I]$ a la subdigráfica inducida de D por el conjunto I ⁵.

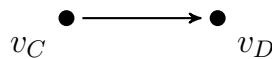
Ejemplos:

- 1) Sea $D = C_4$ (figura 1.6), $I = \{v_C, v_A\}$. Entonces $D[I]$ es:



$\{v_A\}$, $\{v_C\}$ y $\{v_A, v_C\}$ son seminúcleos de $D[I]$.

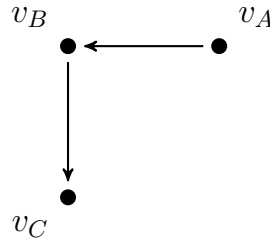
- 2) Sea $D = C_4$ como antes, $I = \{v_C, v_D\}$. Entonces $D[I]$ es:



⁵A partir de la definición 1.5.6, se puede definir a la digráfica inducida por I como $D[I] = D - I^c$, siendo I^c el complemento de I relativo a $V(D)$.

$\{v_D\}$ es seminúcleo de $D[I]$, $\{v_C, v_D\}$ no lo es porque no es independiente. $\{v_C\}$ tampoco es seminúcleo porque tenemos una $\{v_C\}v_D$ -flecha pero ninguna $v_D\{v_C\}$ -flecha.

3) Sea $D = C_4$, $I = \{v_A, v_B, v_C\}$. Entonces $D[I]$ es:



$\{v_C\}$ es seminúcleo de $D[I]$.

También $\{v_A, v_C\}$ es seminúcleo pues es independiente y para verificar la otra condición notemos que $v_B \notin \{v_A, v_C\}$ y que $\overrightarrow{\{v_A, v_C\}v_B}$ existe, pero también $\exists \overrightarrow{v_B\{v_A, v_C\}}$.

4) Sea $D = C_3$ (figura 1.2), recordemos que $V(D) = \{v_A, v_B, v_C\}$.

$\{v_A\}$, $\{v_B\}$, $\{v_C\}$ son los únicos conjuntos independientes no vacíos de D . $\{v_A\}$ no es seminúcleo pues existe la $\{v_A\}v_B$ -flecha pero no hay ninguna $v_B\{v_A\}$ -flecha. Análogamente $\{v_B\}$ y $\{v_C\}$ no pueden ser seminúcleos.

Por lo tanto, el único conjunto de $V(D)$ que puede ser seminúcleo es el conjunto vacío, pues es independiente y la segunda condición de seminúcleo se cumple por vacuidad.

En el ejemplo 4 podemos observar que, a diferencia del núcleo, el seminúcleo sí puede ser \emptyset .

Si en D existe v tal que $\delta_D^+(v) = 0$, entonces $\{v\}$ es seminúcleo de D al ser independiente y al no salir ninguna flecha de él.

En el ejemplo 3, $\{v_C\}$ es seminúcleo pero no es núcleo al no ser absorbente. Esto prueba que un seminúcleo no necesariamente es núcleo.

Veamos ahora la relación que hay entre núcleos y seminúcleos.

Lema 1.6.1. Si $S \subseteq V(D)$ es núcleo de D , entonces S es seminúcleo de D .

Demostración. Debemos probar que S cumple las condiciones *a* y *b* de la definición 1.6.1.

Como S es núcleo, es independiente y entonces cumple *a*.

Falta ver que para todo $x \in V(D) - S$, si existe \overrightarrow{Sx} , entonces existe \overrightarrow{xS} .

Sea $x \in V(D) - S$ tal que $\exists \overrightarrow{Sx}$. Como S es núcleo y $x \notin S$, x es absorbido por S , es decir, $\exists \overrightarrow{xS}$.

Por lo tanto S cumple b .

□

Teorema 1.6.2. *Sea D una digráfica. Si toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Ya que D misma es una subdigráfica inducida de D , tiene seminúcleo no vacío (por hipótesis).

Sea S un seminúcleo máximo por contención de D .⁶ Entonces $S \neq \emptyset$. Consideremos $\Gamma_D^-(S)$.

Si $V(D) - (S \cup \Gamma_D^-(S)) = \emptyset$, tenemos que S es núcleo de D pues es independiente y además es absorbente porque $S \cup \Gamma_D^-(S) = V(D)$.

Asegurémonos que $V(D) - (S \cup \Gamma_D^-(S)) = \emptyset$.

Supongamos que $V(D_1) = V(D) - (S \cup \Gamma_D^-(S)) \neq \emptyset$.

Por hipótesis, la digráfica $D_1 = D[V(D_1)]$ ⁷ tiene seminúcleo no vacío, digamos S_1 .

Nótese que $S \cap S_1 = \emptyset$.

Afirmación. $S \cup S_1$ es seminúcleo de D .

- $S \cup S_1$ es independiente en D .

Entre elementos de S no hay flechas pues es independiente en D .

Si $x, y \in S_1$, no hay flecha entre ellos en D porque S_1 es independiente en D_1 y las flechas entre vértices de D_1 no sufrieron ningún cambio al quitar a $S \cup \Gamma_D^-(S)$.

$\nexists \overrightarrow{S_1S}$ en D porque $S_1 \subset V(D_1)$ y D_1 se construyó quitando en particular a $\Gamma_D^-(S)$.

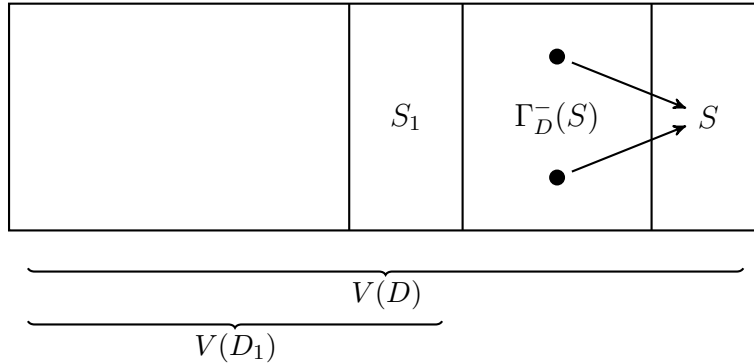
$\nexists \overrightarrow{SS_1}$ porque S es seminúcleo de D y si existiera alguna SS_1 -flecha, existiría alguna S_1S -flecha (cuya existencia ya se descartó).

Por lo tanto $S \cup S_1$ es independiente en D .

⁶Como D es finita, $\Sigma = \{V \subset V(D) \mid V \text{ es seminúcleo de } D\}$ es finito, y cada $V \in \Sigma$ es finito. Para conseguir un seminúcleo máximo por contención, podemos tomar un V_j tal que $|V_j| = n$ con $n = \max\{|V| \mid V \in \Sigma\}$.

⁷O lo que es lo mismo, $D_1 = D - (S \cup \Gamma_D^-(S))$.

Figura 1.7. S y S_1 son seminúcleos no vacíos de D y D_1 respectivamente.



- $\forall x \in V(D) - (S \cup S_1)$, si $\exists \overrightarrow{(S \cup S_1)x}$ en D , entonces $\exists \overrightarrow{x(S \cup S_1)}$ en D .

Sea $x \in V(D) - (S \cup S_1)$ tal que $\exists \overrightarrow{(S \cup S_1)x}$.

Como se tiene $\overrightarrow{(S \cup S_1)x}$, hay dos casos:

Si tenemos una Sx -flecha, como $x \notin S$ y al ser S seminúcleo de D , deducimos que $\exists \overrightarrow{xS}$ en D .

Si tenemos una S_1x -flecha:

Si $x \in \Gamma_D^-(S)$, entonces $\exists \overrightarrow{xS}$ en D y si $x \notin \Gamma_D^-(S)$, se sigue que x pertenece a $V(D_1)$. Como $x \notin S_1$ y éste es seminúcleo de D_1 , $\exists \overrightarrow{xS_1}$ en D_1 y por consiguiente en D .

Por lo tanto $\forall x \in V(D) - (S \cup S_1)$ si existe $\overrightarrow{(S \cup S_1)x}$ en D , entonces existe $\overrightarrow{x(S \cup S_1)}$ en D (ver la figura 1.7).

Por ende $S \cup S_1$ es seminúcleo de D .

Lo cual es una contradicción pues $S \subsetneq S \cup S_1$ debido a que los vértices de S_1 no están en S y éste es un seminúcleo máximo por contención de D .

Luego, $V(D) - (S \cup \Gamma_D^-(S)) = \emptyset$ como queríamos demostrar.

□

Sabiendo ahora que los seminúcleos nos pueden ayudar a encontrar núcleos en una digráfica, recordemos que queríamos demostrar que toda digráfica sin ciclos dirigidos impares tiene núcleo. Para facilitar la demostración, probemos antes un par de lemas acerca de ciclos dirigidos y un teorema.

Lema 1.6.3. *Todo camino dirigido cerrado, de longitud mayor que cero, contiene un ciclo dirigido.*

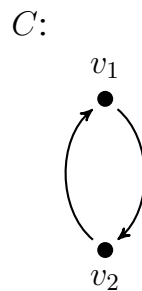
Es decir, si $C = (x_1, x_2, \dots, x_1)$ es un camino dirigido cerrado, entonces existen x_i, x_{i+1}, \dots, x_j tales que $C_D = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j, x_i)$ es un ciclo dirigido.

Demostración. Sea C un camino dirigido cerrado.

Procederemos por inducción sobre la longitud de C .

No hay caminos dirigidos cerrados de longitud uno.

Si la longitud es dos, C es un ciclo dirigido contenido en sí mismo.



Hipótesis de inducción: Si C' es un camino dirigido cerrado de longitud l' con $l' < l$, entonces C' contiene un ciclo dirigido.

Sea $C = (x_1, x_2, \dots, x_l, x_1)$ un camino dirigido cerrado de longitud l . Hay que demostrar que C contiene un ciclo dirigido.

Hay dos casos, de acuerdo a la estructura de C :

- $\forall i \neq j, x_i \neq x_j$.

En este caso, C mismo es un ciclo dirigido y hemos terminado la demostración.

- $\exists i, j$ con $i \neq j$ tal que $x_i = x_j$. Podemos pensar que $i < j$.

Entonces $C = (x_1, x_2, \dots, x_i = x_j, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_l, x_1)$.

Sea $A = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i)$. Entonces A es un camino dirigido cerrado de longitud menor a l y, por hipótesis de inducción, A contiene un ciclo dirigido B .

Por lo tanto, C contiene también a B .

□

Se conoce otro resultado, muy parecido al anterior.

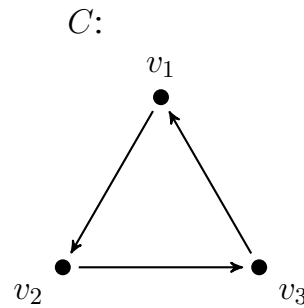
Lema 1.6.4. *Todo camino dirigido cerrado de longitud impar, contiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

Demostración. Sea C un camino dirigido cerrado de longitud impar y sea l dicha longitud.

Procederemos por inducción sobre l .

No hay caminos dirigidos cerrados de longitud 1.

Para $l = 3$, tenemos que C mismo es un ciclo dirigido impar.



Hipótesis de inducción: si C' es un camino dirigido cerrado de longitud l' impar, con $l' < l$, entonces C' contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Sabemos que $C = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{l-1}, x_l, x_1)$

Tenemos dos casos de acuerdo a la estructura de C :

- $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$.

Entonces C es un ciclo dirigido de longitud impar y hemos terminado la demostración.

- $x_i = x_j$, para algún $i < j$.

Así, $C = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_l, x_1)$.

Sean $A = (x_1, x_2, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_l, x_1)$ y $B = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i)$ caminos dirigidos cerrados contenidos en C .

Necesariamente uno y sólo uno de los caminos dirigidos A y B posee longitud impar, pues la longitud de C es la de A más la de B .

Podemos suponer que A tiene longitud impar.

Entonces, por hipótesis de inducción, A contiene un ciclo dirigido de longitud impar, digamos C_i , y como A es un camino dirigido contenido en C , tenemos que C contiene a C_i . □

Definición 1.6.3. Sean $A = (x_1, x_2, \dots, x_a)$ y $B = (x_a, x_{a+1}, \dots, x_b)$ caminos dirigidos.

Se define AB como el camino dirigido $(x_1, x_2, \dots, x_a, x_{a+1}, \dots, x_b)$.

Como las flechas se pueden considerar caminos dirigidos, si tenemos por ejemplo la flecha $\overrightarrow{x_a x_1}$, podemos escribir $\overrightarrow{x_a x_1}A$ o $A\overrightarrow{x_a x_1}$.

Ahora veamos un teorema muy importante.

Teorema (Neumann Lara) 1.6.5. *Toda digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar tiene seminúcleo no vacío.*

Demostración. Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar.

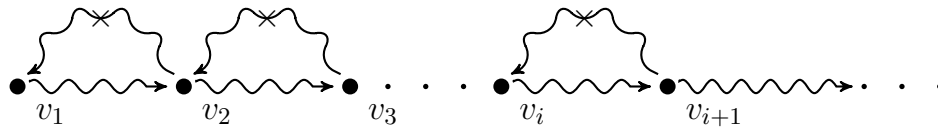
Observemos que $\exists v_0 \in V(D)$ tal que $\forall v \in V(D)$, si $\exists v_0 v$ -camino dirigido⁸, entonces $\exists v v_0$ -camino dirigido.

Pues de lo contrario tendríamos que, para todos los vértices v de D existe otro vértice w , de tal forma que existe un vw -camino dirigido pero no existe ningún wv -camino dirigido.

Así, tomando un vértice cualquiera v_1 , $\exists v_2$ y $\exists v_1 v_2$ -camino dirigido pero $\nexists v_2 v_1$ -camino dirigido.

Definimos recursivamente al vértice v_{i+1} como aquel vértice tal que existe $v_i v_{i+1}$ -camino dirigido pero $\nexists v_{i+1} v_i$ -camino dirigido.

De esta forma obtenemos una serie de vértices, $v_1, v_2, v_3, \dots \in V(D)$ tal que para todo i , existe un $v_i v_{i+1}$ -camino dirigido pero no hay ningún $v_{i+1} v_i$ -camino dirigido. Lo anterior implica que $v_{i+1} \neq v_j \forall j \leq i$ pues si v_{i+1} fuese igual a algún v_j con $j \leq i$, entonces habría un $v_{i+1} v_i$ -camino dirigido porque siempre hay camino dirigido desde un vértice con índice menor hacia cualquier otro con índice mayor o igual.



Entonces, el conjunto $V(D)$ sería infinito.

Por lo tanto $\exists v_0 \in V(D)$ tal que $\forall v \in V(D)$, si $\exists v_0 v$ -camino dirigido, entonces $\exists v v_0$ -camino dirigido, pues $V(D)$ sí es finito.

Ahora, sean $S = \{v \in V(D) \mid \exists v_0 v\text{-camino dirigido de longitud par}\}$ e $I = \{v \in V(D) \mid \exists v_0 v\text{-camino dirigido de longitud impar}\}$.

⁸Es decir, un camino dirigido tal que su vértice inicial es v_0 y el final es v .

Afirmación. $S \cap I = \emptyset$.

Si $\exists y \in S \cap I$, entonces existe un v_0y -camino dirigido, digamos A , de longitud par y existe un camino dirigido B , de v_0 a y de longitud impar y, dada la elección de v_0 , existe un yv_0 -camino dirigido C .

Si la longitud de C es impar, entonces CA es un camino dirigido cerrado de longitud impar y, por el lema 1.6.4, contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Si la longitud de C es par, entonces CB es un camino dirigido cerrado de longitud impar y, por el lema anteriormente citado, contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

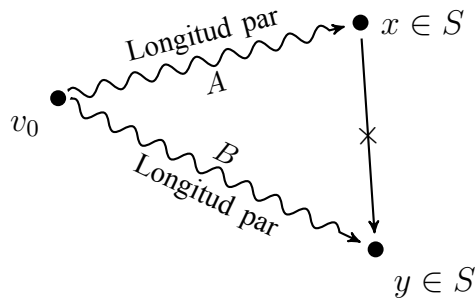
Como D no contiene ciclos dirigidos impares, se sigue que $S \cap I = \emptyset$.

Afirmación. S es seminúcleo no vacío de D .

- $v_0 \in S$ pues un v_0v_0 -camino dirigido de longitud cero es $C = (v_0)$.
- S es independiente.

Sean $x, y \in S$. No puede existir $\overrightarrow{xy} \in F(D)$ porque existen caminos dirigidos A y B , de v_0 a x y de v_0 a y respectivamente, de longitud par y si \overrightarrow{xy} perteneciese a $F(D)$, $A\overrightarrow{xy}$ sería un v_0y -camino dirigido de longitud impar, lo cual implicaría que $y \in S \cap I$.

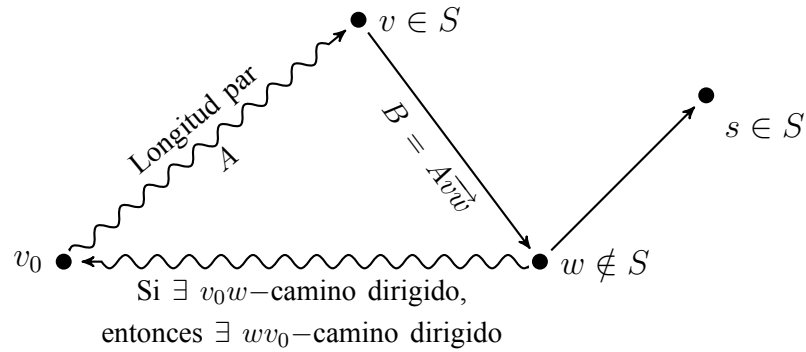
Análogamente, no puede existir $\overrightarrow{yx} \in F(D)$.



- $\forall v, w$, si $\exists \overrightarrow{vw} \in F(D)$ con $v \in S$ y $w \notin S$, entonces $\exists \overrightarrow{ws} \in F(D)$ para algún $s \in S$.

Si $\overrightarrow{vw} \in F(D)$ con $v \in S$ y $w \notin S$, tenemos que $\exists A$, un v_0v -camino dirigido de longitud par, entonces $B = A\overrightarrow{vw}$ es un camino dirigido de

v_0 a w de longitud impar, por lo que $w \in I$ y entonces $\exists wv_0$ -camino dirigido (por la propiedad de v_0), por consiguiente w tiene exgrado al menos uno, es decir, $\exists \overrightarrow{ws} \in F(D)$. Observemos que $B\overrightarrow{ws}$ es un v_0s -camino dirigido de longitud par, por lo cual $s \in S$.



Por lo antes dicho $\exists \overrightarrow{ws}$ con $s \in S$.

Entonces, hemos probado que S es seminúcleo no vacío de D . □

Ya podemos dar la demostración que quedó pendiente.

Corolario 1.6.6. *Toda digráfica sin ciclos dirigidos impares tiene núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos impares. Se demostrará que toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío.

Sea H una subdigráfica inducida de D , entonces H tampoco tiene ciclos dirigidos impares, luego, por el teorema 1.6.5, H tiene seminúcleo no vacío.

Por tanto, toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío.

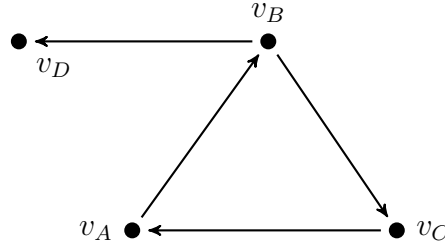
Se sigue del teorema 1.6.2 que D tiene núcleo. □

Aunque este último corolario nos garantiza la existencia de núcleos en más digráficas sigue sin ser suficiente, por ejemplo:

Es fácil modificar a D_1 (figura 1.4) para que tenga núcleo. Sea D_2 la digráfica mostrada en la figura 1.8.

$\{v_A, v_D\}$ es núcleo de D_2 .

Dejemos a los ciclos dirigidos y busquemos núcleos en otro tipo de digráficas.

Figura 1.8. D_2 sí tiene núcleo y tiene ciclos dirigidos de longitud impar.

1.7. Cuasinúcleos

Definición 1.7.1. Una digráfica D se llama transitiva si $\forall u, v, w \in V(D)$, si $\vec{uv} \in F(D)$ y $\vec{vw} \in F(D)$, entonces $\vec{uw} \in F(D)$.

Se sabe que todas las digráficas transitivas tienen núcleo y la demostración es muy sencilla, si se usa una pequeña generalización del concepto de núcleo, el llamado *cuasinúcleo*.

Definición 1.7.2. Sea D una digráfica y sean $x, y \in V(D)$.

Si existe alguna xy -trayectoria dirigida, denotamos por $d_D(x, y)$ a la longitud de la trayectoria dirigida más corta de x a y .

Si no existe ninguna xy -trayectoria dirigida, definimos $d_D(x, y) = \infty$.

Definición 1.7.3. Extendemos la definición anterior. Sea $X \subset V(D)$ con $X \neq \emptyset$. Definimos:

$$d_D(x, X) = \min_{y \in X} \{d_D(x, y)\},$$

$$d_D(X, x) = \min_{y \in X} \{d_D(y, x)\}.$$

Definición 1.7.4. $Q \subseteq V(D)$ es cuasinúcleo de la digráfica D si:

- Q es independiente en D .
- $\forall x \in V(D) - Q, \exists y \in Q$ tal que $d_D(x, y) \leq 2$.

La segunda condición se lee: Q absorbe a todos los vértices que no pertenecen a Q , a distancia menor o igual que dos. También se puede escribir así: $\forall x \in V(D) - Q, d_D(x, Q) \leq 2$.

Nótese que el cuasinúcleo no puede ser vacío.

Ejemplos:

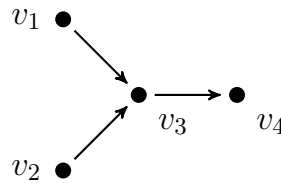
1) C_3 (figura 1.2).

$\{v_A\}$ es cuasinúcleo porque $d_{C_3}(v_C, v_A) = 1$ y $d_{C_3}(v_B, v_A) = 2$. Análogamente $\{v_B\}$ y $\{v_C\}$ son cuasinúcleos.

2) C_4 (figura 1.6).

$\{v_A, v_C\}$ es cuasinúcleo porque, directamente de la definición de cuasinúcleo, tenemos que todos los núcleos son cuasinúcleos.

3) Sea D la siguiente digráfica.



$\{v_4\}$ es cuasinúcleo porque $d_D(v_1, v_4) = 2$, $d_D(v_2, v_4) = 2$ y $d_D(v_3, v_4) = 1$.

$\{v_1, v_2, v_4\}$ también es cuasinúcleo.

$\{v_3\}$ no es cuasinúcleo pues $d_D(v_4, v_3) = \infty$.

En todos los ejemplos anteriores, pudimos encontrar un cuasinúcleo. Esto no fue suerte, se trata de un hecho en general.

Teorema 1.7.1. *Toda digráfica tiene cuasinúcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica con $|V(D)| = n$.

Procederemos por inducción sobre n .

Si $n = 1$, entonces $V(D)$ es cuasinúcleo.



Hipótesis de inducción: Si $|V(D')| < n$, entonces D' tiene cuasinúcleo.

Sea $w \in V(D)$.

Si $V(D) = \{w\} \cup \Gamma_D^-(w)$, entonces $\{w\}$ es cuasinúcleo.

Si no:

Sea $D' = D - (\{w\} \cup \Gamma_D^-(w))$, entonces $|V(D')| < n$. Sea Q' un cuasinúcleo de D' .

No existe $Q'w$ -flecha en D , pues $Q' \subset V(D')$ y para construir D' se quitó a $\Gamma_D^-(w)$.

Haremos dos casos:

- $\exists wQ'$ -flecha en D .

Q' es independiente en D porque es independiente en D' y las flechas entre sus elementos no se alteraron cuando se construyó D' .

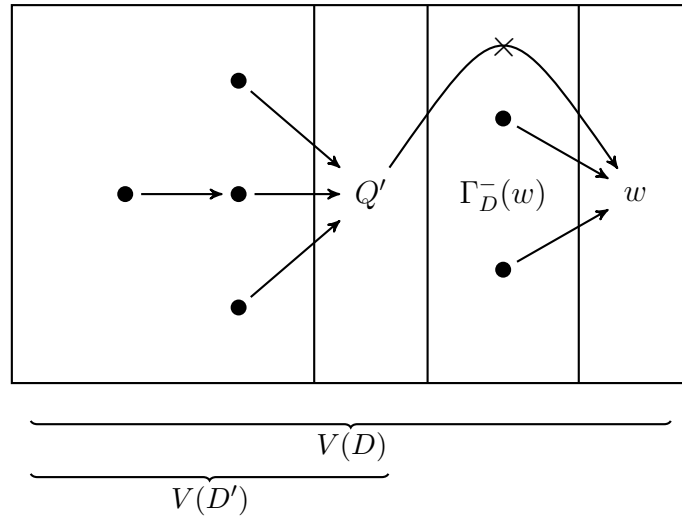
Tomamos $x \in V(D) - Q'$:

Si $x \in V(D')$, entonces Q' absorbe a x a distancia 1 o 2 porque Q' es cuasinúcleo de D' .

Si $x \notin V(D')$, entonces $x \in \Gamma_D^-(w)$ o $x = w$. Si $x \in \Gamma_D^-(w)$, entonces Q' absorbe a x a distancia 2. Si $x = w$, entonces Q' absorbe a x a distancia 1.

Por lo tanto Q' es cuasinúcleo de D .

Figura 1.9. Q' o $Q' \cup \{w\}$ son cuasinúcleos de D .



- $\nexists wQ'$ -flecha en D .

$Q' \cup \{w\}$ es independiente en D , pues Q' lo es y no hay $Q'w$ -flecha ni wQ' -flecha en D .

Sea $x \in V(D) - (Q' \cup \{w\})$:

Si $x \in V(D')$, entonces Q' absorbe a x a distancia 1 o 2 y por lo tanto, $Q' \cup \{w\}$ absorbe a x a distancia 1 o 2.

Si $x \notin V(D')$, entonces $x \in \Gamma_D^-(w)$ y por lo tanto, $Q' \cup \{w\}$ absorbe a x a distancia 1.

De lo anterior tenemos que $Q' \cup \{w\}$ es cuasinúcleo de D .

Concluimos que toda digráfica tiene cuasinúcleo (ver figura 1.9). \square

Conociendo este último resultado es fácil demostrar que todas las digráficas transitivas tienen núcleo.

Teorema 1.7.2. *Toda digráfica transitiva tiene núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica transitiva.

Por el teorema 1.7.1, D tiene un cuasinúcleo Q .

Para que Q sea núcleo de D , sólo hay que ver que es absorbente.

Sea $x \in V(D) - Q$, entonces $\exists j \in Q$ tal que $d_D(x, j) \leq 2$.

Si $d_D(x, j) = 1$, hay una trayectoria dirigida de longitud 1 de x a j , es decir, hay una flecha de x a j y por lo tanto Q absorbe a x .

Si $d_D(x, j) = 2$, tenemos una trayectoria dirigida $T = (x, z, j)$, de longitud 2 de x a j , lo cual implica que $\vec{xz}, \vec{zj} \in F(D)$, luego $\vec{xj} \in F(D)$ pues D es transitiva. Por consiguiente Q absorbe a x .

Entonces Q es núcleo de D . \square

Con este teorema hemos terminado de presentar los resultados básicos acerca de la existencia de núcleos en digráficas. Ahora enfocaremos nuestra atención hacia una generalización del concepto de núcleo, el (k, l) -núcleo, y hacia algunas condiciones que garantizan su existencia.

1.8. (k, l) – núcleos

Definición 1.8.1. Sean $k, l \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ y $l \geq 1$. $J \subseteq V(D)$ es un (k, l) -núcleo de la digráfica D si:

- $\forall x, y \in J$, si $x \neq y$, entonces $d_D(x, y) \geq k$.

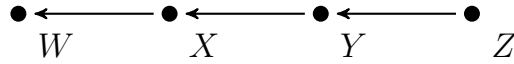
En palabras: J es k -independiente.

- $\forall x \in (V(D) - J) \exists y \in J$ tal que $d_D(x, y) \leq l$.

En palabras: J es l -absorbente.

Ejemplos:

1) Sea D la siguiente trayectoria dirigida:



$\{W\}$ es un $(2, 3)$ –núcleo pues $d_D(Z, W) = 3$, $d_D(Y, W) = 2$ y, por último, $d_D(X, W) = 1$. Como sólo tiene un elemento, es 2–independiente.

Si J es un conjunto l –absorbente, entonces $\forall x \in (V(D) - J) \exists y \in J$ tal que $d_D(x, y) \leq l$ y por ende, $\forall x \in (V(D) - J) \exists y \in J$ tal que $d_D(x, y) \leq l + 1$.

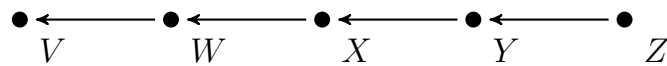
Por lo tanto, $\{W\}$ es $(2, 4)$ –núcleo, $(2, 5)$ –núcleo, etc.

$\{W, Y\}$ es $(2, 1)$ –núcleo pues $d_D(W, Y) = \infty$ y $d_D(Y, W) = 2$, lo cual muestra que es 2–independiente y es 1–absorbente pues $d_D(X, W) = d_D(Z, Y) = 1$.

$\{W, Z\}$ no es un conjunto 4–independiente pues $d_D(Z, W) = 3$.

Como $d_D(Z, W) = 3$ y $d_D(W, Z) = \infty$, $d_D(Y, W) = 2$ y $d_D(X, W) = 1$, $\{W, Z\}$ es $(2, 2)$ –núcleo.

2) Sea D esta otra trayectoria dirigida:



$\{V, Z\}$ es un $(4, 3)$ –núcleo, pues $d_D(Z, V) = 4$ y $d_D(V, Z) = \infty$, además $d_D(Y, V) = 3$, $d_D(X, V) = 2$ y $d_D(W, V) = 1$.

También es un $(3, 3)$ –núcleo y un $(2, 3)$ –núcleo. Esto porque si un conjunto J es k –independiente, entonces se cumple que $\forall x, y \in J$, si $x \neq y$, entonces $d_D(x, y) \geq k$ y también, se cumple que $\forall x, y \in J$, si $x \neq y$, entonces $d_D(x, y) \geq k - 1$.

$\{V, X\}$ y $\{V, Y\}$ son $(2, 2)$ –núcleos.

$\{V, X, Z\}$ es $(2, 1)$ –núcleo.

$\{V\}$ es $(23, 48)$ –núcleo pues es 23–independiente y para todo $i \in \{W, X, Y, Z\}$, $d_D(i, V) \leq 48$.

En los ejemplos podemos observar que los conjuntos que son $(2, 1)$ -núcleo, también son núcleo y que aquellos conjuntos que son $(2, 2)$ -núcleo, también son cuasinúcleo. Esto no es coincidencia.

Lema 1.8.1. *Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$.*

N es núcleo de D si y sólo si N es $(2, 1)$ -núcleo de D .

Demostración. Para probar la suficiencia:

Si N es núcleo, N es independiente, entonces $\forall x, y \in N$ no existe la flecha de x a y , en particular para $x \neq y$. Por lo tanto $d_D(x, y) \geq 2$.

También tenemos que N es absorbente, entonces $\forall x \in V(D) - N$, existe $y \in N$ y la flecha de x a y , de ahí $d_D(x, y) \leq 1$.

Por consiguiente N es $(2, 1)$ -núcleo de D

Para demostrar la necesidad:

Si N es $(2, 1)$ -núcleo, N es 2-independiente, es decir, para cualquier par de vértices $x, y \in N$, si $x \neq y$, tenemos que $d_D(x, y) \geq 2$, entonces no hay flechas entre elementos de N pues si existiese la flecha \overrightarrow{xy} , se seguiría que $d_D(x, y) = 1$. Por lo tanto N es independiente.

También N es 1-absorbente, así, si tomamos $x \in V(D) - N$, entonces $\exists y \in N$ tal que $d_D(x, y) \leq 1$. Como $d_D(x, y)$ no puede ser cero porque $x \neq y$, se tiene que $d_D(x, y) = 1$. Por lo tanto hay una trayectoria dirigida de longitud 1 de x a y y la única flecha de dicha trayectoria es \overrightarrow{xy} . Luego, N es absorbente.

Por ende N es núcleo de D . □

Lema 1.8.2. *Sea D una digráfica y $Q \subseteq V(D)$.*

Q es cuasinúcleo de D si y sólo si Q es $(2, 2)$ -núcleo de D .

Demostración. En la demostración del lema anterior se vió que Q es 2-independiente si y sólo si Q es independiente.

La segunda condición de la definición 1.7.4 es equivalente a que Q sea 2-absorbente. □

Para $k = 2$, un núcleo es lo mismo que un $(k, k - 1)$ -núcleo. Dada esta semejanza, una clase especial de (k, l) -núcleos son los llamados k -núcleos.

Definición 1.8.1. Sea $k \geq 2$. Un k -núcleo es un $(k, k - 1)$ -núcleo.

En nuestro ejemplo de la trayectoria (Z, Y, X, W, V) podemos decir que:

$\{V, X, Z\}$ es 2–núcleo.

$\{V, Y\}$ es 3–núcleo.

$\{V, Z\}$ es 4–núcleo.

$\{V\}$ es 5–núcleo pues es 5–independiente y $\forall i \in \{W, X, Y, Z\}$ tenemos que $d_D(i, V) \leq 4$.

$\{V\}$ también es 6–núcleo, 7–núcleo, etc.

No es casualidad que en el último ejemplo hayamos encontrado un k –núcleo para cualquier k .

Teorema 1.8.3. *Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Si D es una digráfica acíclica, D tiene k –núcleo.*

Demostración. Sean k y D como en las hipótesis. Se define la digráfica D_k :

- $V(D_k) = V(D)$.
- $\forall x \neq y, \vec{xy} \in F(D_k)$ si y sólo si $d_D(x, y) \leq k - 1$.

Afirmación. D_k es acíclica.

Si D_k tuviera un ciclo dirigido $C = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x_1)$, se tendría que, en D , hay una $x_i x_{i+1}$ –trayectoria dirigida⁹ $\forall i$. Todas esas trayectorias tendrían longitud mayor o igual que 1 y uniéndolas obtendríamos un camino dirigido cerrado C' , de longitud mayor que cero. Entonces, por el lema 1.6.3, tendríamos un ciclo dirigido en D .

De lo anterior, siendo D acíclica, se sigue que D_k también lo es.

Por el teorema 1.5.5 D_k tiene un núcleo S .

Afirmación. S es k –núcleo de D .

- $\forall x, y \in S$, si $x \neq y$, entonces $d_D(x, y) \geq k$.

Sean $x, y \in S$ con $x \neq y$. Como S es independiente en D_k , $\vec{xy} \notin F(D_k)$ y por definición de D_k tenemos $d_D(x, y) \not\leq k - 1$.

Por lo tanto $d_D(x, y) > k - 1$, lo cual implica que $d_D(x, y) \geq k$.

⁹Pues existiría la $x_i x_{i+1}$ –flecha en D_k , lo que implicaría que $d_D(x_i, x_{i+1}) \leq k - 1$ y como $d_D(x_i, x_{i+1})$ es la longitud de la trayectoria dirigida más corta de x_i a x_{i+1} , resulta que sí existiría la trayectoria arriba mencionada.

- $\forall x \in V(D) - S \exists y \in S$ tal que $d_D(x, y) \leq k - 1$.

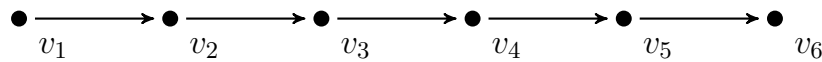
Sea $x \in V(D) - S$. Como S es núcleo de D_k , $\exists y \in S$ tal que $\overrightarrow{xy} \in F(D_k)$ entonces, por definición de D_k , $d_D(x, y) \leq k - 1$.

Concluimos que S es k -núcleo de D .

□

Si nos preguntamos por un resultado similar, para las digráficas acíclicas y los (k, l) -núcleos, la respuesta es que no siempre se puede encontrar un (k, l) -núcleo para k y l arbitrarios.

Por ejemplo:



Esta digráfica no tiene $(6, 4)$ -núcleo, porque todo conjunto J que sea 4-absorbente debe tener como elemento a v_6 . Si además quisiéramos que J fuera 6-independiente, necesitaríamos tener a v_6 como único elemento. Pero el conjunto $\{v_6\}$ no es 4-absorbente pues la distancia de v_1 a v_6 es cinco.

Tampoco tiene $(5, 3)$ -núcleo, porque si queremos hallar un conjunto J que sea 5-independiente y 3-absorbente a la vez necesitamos que v_6 pertenezca a J , lo cual impide que v_3, v_4 y v_5 pertenezcan a J . Como la distancia de v_2 a v_6 es cuatro, si v_2 pertenece a J , se pierde la 5-independencia y si v_2 no pertenece a J , se pierde la 3-absorbencia. Por lo tanto no hay $(5, 3)$ -núcleo.

Tampoco hay $(4, 2)$ -núcleo ni $(3, 1)$ -núcleo. Estas afirmaciones se pueden demostrar con el siguiente teorema de las autoras M. Kucharska y M. Kwaśnik.

Teorema 1.8.4. *Si T es una trayectoria dirigida, $|V(T)| = m$, $m = nk + r$, $n, r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < k$ y $n \geq 1$. Entonces T tiene un (k, l) -núcleo¹⁰ si y sólo si $k \leq l + 1$.*

Demostración. Primero probemos que la hipótesis $n \geq 1$ es equivalente a $m \geq k$.

Si $n \geq 1$, entonces $nk \geq k$, luego, $nk + r \geq k + r$ y así $m = nk + r \geq k + r \geq k$, finalmente $m \geq k$.

Si $m \geq k$, entonces $nk + r \geq k > r$ y por ende $nk \geq k - r > 0$, luego $nk > 0$ y por lo tanto $n \geq 1$.

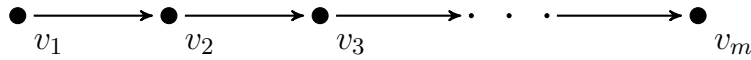
Por consiguiente $n \geq 1$ si y sólo si $m \geq k$.

¹⁰Recuérdese que los (k, l) -núcleos sólo están definidos para $k \geq 2$ y $l \geq 1$.

Para la suficiencia:

Sea J un (k, l) -núcleo de T .

T se ve así:



- Si $|J| = 1$:

J debe ser igual a $\{v_m\}$, por consiguiente $d_T(v_i, v_m) \leq l$ para todo i , en particular, $d_T(v_1, v_m) \leq l$ pero es obvio que $d_T(v_1, v_m) = m - 1$, por lo tanto $m - 1 \leq l$, entonces $k - 1 \leq m - 1 \leq l$ (pues $k \leq m$).

Por lo antes dicho, $k \leq l + 1$.

- Si $|J| > 1$:

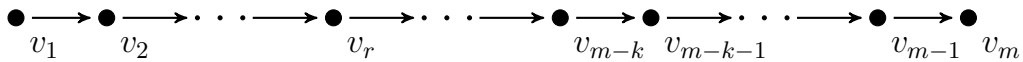
Sean $v_i, v_j \in J$ con $i < j$ y tales que $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1} \notin J$. Como J es (k, l) -núcleo, sucede que $d_T(v_i, v_j) \geq k$ y además, sabemos que $d_T(v_i, v_j) = d_T(v_i, v_{i+1}) + d_T(v_{i+1}, v_j)$.

Entonces $1 + d_T(v_{i+1}, v_j) = d_T(v_i, v_j) \geq k$, es decir, $d_T(v_{i+1}, v_j) \geq k - 1$.

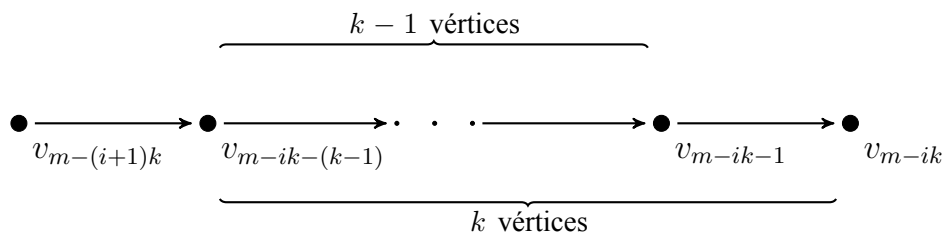
También, como J es l -absorbente, $d_T(v_{i+1}, v_j) \leq l$ pues entre v_i y v_j ningún vertice pertenece a J , lo cual nos dice que v_{i+1} debe ser l -absorbido por v_j .

Por lo tanto $l \geq d_T(v_{i+1}, v_j) \geq k - 1$, es decir, $l \geq k - 1$ y $k \leq l + 1$.

Para la necesidad, supongamos que $k \leq l + 1$:



Afirmación. $J = \{v_m, v_{m-k}, \dots, v_{m-nk} = v_r\}$ es (k, l) -núcleo de T .



Entre dos vértices consecutivos de J , $v_{m-(i+1)k}$ y v_{m-ik} , es cierto que $d_T(v_{m-(i+1)k}, v_{m-ik}) = k$ y $d_T(v_{m-ik}, v_{m-(i+1)k}) = \infty$.

De lo anterior, se sigue que $\forall x, y \in J$, si $x \neq y$, entonces $d_T(x, y) \geq k$.

Si $x \notin J$, x está entre dos vértices $v_{m-(i+1)k}, v_{m-ik}$ de J para algún i y por lo tanto, x es absorbido a distancia menor o igual que $k - 1$ por v_{m-ik} . Lo cual prueba que $\forall x \in V(T) - J \exists j \in J$ tal que $d_T(x, j) \leq k - 1$ y por hipótesis, $k - 1 \leq l$.

Concluimos que J es (k, l) -núcleo de T . \square

Ya podemos decir que una digráfica acíclica tiene (k, l) -núcleo siempre que $k \leq l + 1$. Para obtenerlo sólo hay que encontrar un $(l + 1, l)$ -núcleo, o lo que es lo mismo un $l + 1$ -núcleo, el cual existe por el teorema 1.8.3.

Si $k \leq l + 1$, un $(l + 1, l)$ -núcleo, también es un (l, l) -núcleo, un $(l - 1, l)$ -núcleo, \dots un (k, l) -núcleo, etc.

Una de las hipótesis del último teorema es $m = nk + r$. Cuando tres números enteros, $k \geq 2$, m y r cumplen esa relación se dice que m es congruente con r módulo k .

Definición 1.8.2. Sean $a, b, k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Se dice que a es congruente con b módulo k , denotado por $a \equiv b \pmod{k}$, si y sólo si $(a - b)/k \in \mathbb{Z}$.

Vale la pena mencionar que si m es un múltiplo de k , es decir, $m = nk$, entonces m es congruente con cero módulo k y viceversa.

Si fijamos k , se sabe que los conjuntos $K_i = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv i \pmod{k}\}$, con $i = 0, \dots, k - 1$ forman una partición de \mathbb{Z} .

Probemos un lema que nos ayudará a encontrar k -núcleos en más digráficas.

Lema 1.8.5. Sea C un camino dirigido cerrado. Si todos los ciclos dirigidos que contiene C poseen longitud congruente con cero módulo k , entonces C tiene longitud congruente con cero módulo k .

Demostración. Si la longitud de C es cero, terminamos con la demostración. Si no:

Como la longitud de C es mayor que cero, C contiene al menos un ciclo dirigido (lema 1.6.3).

Sea N el número de ciclos dirigidos que contiene C .

Procederemos por inducción sobre N .

Si $N = 1$, entonces C debe ser un ciclo dirigido.

Si no lo fuera, tendríamos que al menos dos vértices de C se repiten, es decir, $C = (x_1, x_2, \dots, x_i = x_j, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_1)$. Entonces,

$A = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_{j+1}, \dots, x_1)$ y $B = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i)$ serían caminos dirigidos cerrados contenidos en C y cada uno de ellos contendría, al menos, un ciclo dirigido. Por lo tanto C contendría más de un ciclo dirigido.

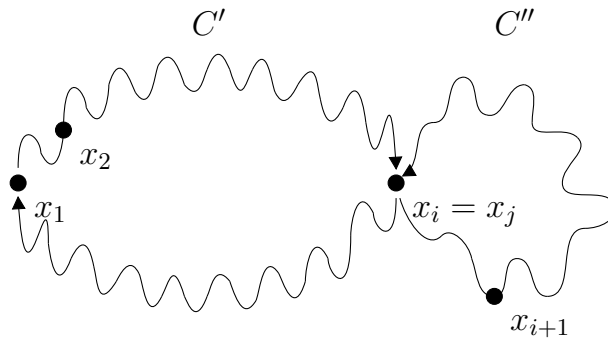
Como $N = 1$, C es un ciclo dirigido que, por hipótesis, tiene longitud congruente con cero módulo k .

Hipótesis de inducción: Si C' es un camino dirigido cerrado que contiene menos de N ciclos dirigidos y tal que todos ellos poseen longitud congruente con cero módulo k , entonces C' tiene longitud congruente con cero módulo k .

Supongamos que C contiene N ciclos dirigidos ($N > 1$), todos ellos de longitud congruente con cero módulo k .

C es igual a $(x_1, x_2, \dots, x_i = x_j, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_1)$ pues no es un ciclo dirigido.

Sea $C' = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_{j+1}, \dots, x_1)$ y sea $C'' = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i)$, entonces C' y C'' son caminos dirigidos cerrados que contienen menos de N ciclos dirigidos y además, cada ciclo dirigido γ contenido en C' o en C'' también está contenido en C , por lo que γ tiene longitud congruente con cero módulo k .



Por lo tanto tenemos dos caminos dirigidos cerrados, con menos de N ciclos dirigidos y tales que todos los ciclos dirigidos que contienen poseen longitud congruente con cero módulo k .

Entonces, por hipótesis de inducción, tanto C' como C'' tienen longitud congruente con cero módulo k , digamos que tienen longitud n_1k y n_2k respectivamente.

Sabemos que la longitud de C es igual a la de C' más la de C'' , por lo tanto dicha longitud es $n_1k + n_2k = (n_1 + n_2)k$.

Por consiguiente, la longitud de C es congruente con cero módulo k .

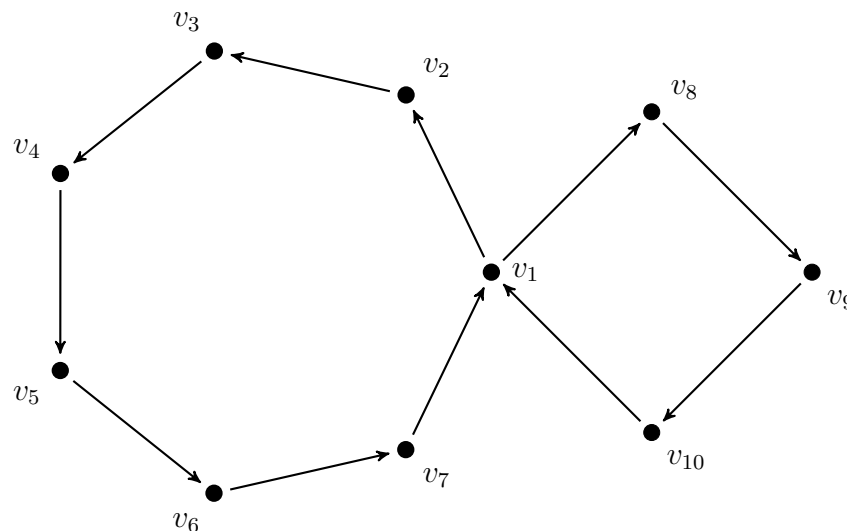
□

El lema anterior también nos dice que si tenemos un camino dirigido cerrado C de longitud no congruente con cero módulo k , entonces C debe contener un ciclo de longitud no congruente con cero módulo k .

Esto no quiere decir que si tenemos un camino dirigido cerrado de longitud $m = nk + r$, con $r \neq 0$, éste va contener algún ciclo dirigido con longitud $m_1 = n_1k + r$. Lo único que nos dice es que contiene algún ciclo de longitud no congruente con cero módulo k .

Por ejemplo, si $C = (v_1, v_2, \dots, v_7, v_1, v_8, v_9, v_{10}, v_1)$, entonces C tiene longitud 11, $11 \equiv 2 \pmod{3}$ y C no contiene ningún ciclo dirigido de longitud congruente con 2 módulo 3 pues los dos que tiene son de longitud 4 y 7 (ver figura 1.10).

Figura 1.10. $C = (v_1, v_2, \dots, v_7, v_1, v_8, v_9, v_{10}, v_1)$



Vimos que las digráficas sin ciclos dirigidos de longitud impar tienen 2-núcleo, o lo que es equivalente, las digráficas tales que todos los ciclos dirigidos que contienen son de longitud par poseen 2-núcleo.

Si un ciclo dirigido tiene longitud par, entonces esa longitud es congruente con cero módulo 2.

De lo anterior, podemos decir que si una digráfica es tal que todos sus ciclos dirigidos son congruentes con cero módulo 2, entonces tiene un 2-núcleo.

Lo ideal sería obtener un resultado similar para las digráficas cuyos ciclos dirigidos son todos de longitud congruente con cero módulo k .

Desafortunadamente sólo se puede probar para las digráficas *fuertemente conexas*.

Definición 1.8.3. Una digráfica es fuertemente conexa si para cualquier par de vértices x, y , se cumple que \exists un xy –camino dirigido y \exists un yx –camino dirigido.

Teorema (Kwaśnik) 1.8.6. Sea D una digráfica fuertemente conexa.

Si todos los ciclos dirigidos de D son de longitud congruente con cero módulo k , entonces D tiene k –núcleo.

Demostración. Como D es fuertemente conexa, existe un camino dirigido cerrado C que pasa por todos los vértices de D ¹¹.

Por el lema 1.8.5 sabemos que C tiene longitud congruente con cero módulo k pues todos los ciclos que contiene C son también ciclos de D .

Escribimos $C = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{wk-1}, v_{wk} = v_0)$.

Afirmación. $J = \{v_0, v_k, v_{2k}, \dots, v_{(w-1)k}\}$ es k –núcleo de D .

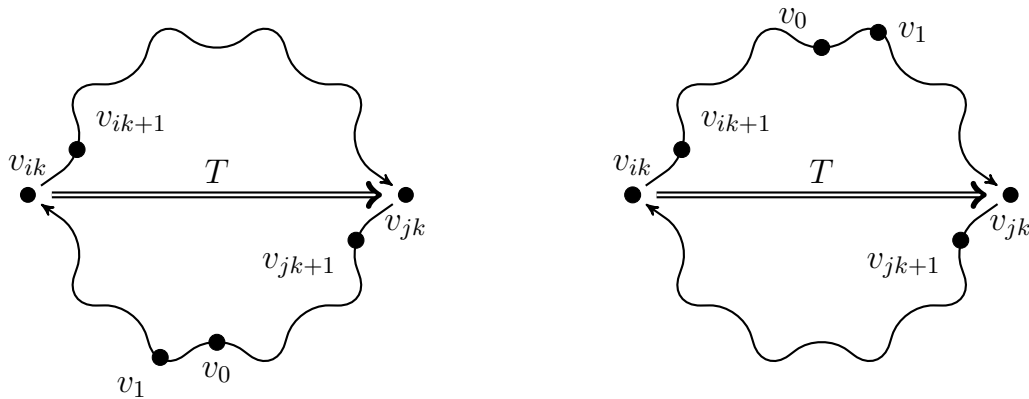
- $\forall x, y \in J$, si $x \neq y$, entonces $d_D(x, y) \geq k$.

Sean $v_{ik} \in J$ y $v_{jk} \in J$ distintos.

Si tuviéramos alguna trayectoria dirigida T , de v_{ik} a v_{jk} de longitud no congruente con cero módulo k , podríamos construir un camino dirigido cerrado C' , de v_{ik} hacia sí mismo, de longitud no congruente con cero módulo k .

Para construir dicho C' , caminamos según T ; después, cuando lleguemos a v_{jk} caminamos como lo marca C . Si $i < j$, vamos así: $B = (v_{jk}, v_{jk+1}, \dots, v_0, v_1, \dots, v_{ik})$. Si $i > j$, vamos así: $B = (v_{jk}, v_{jk+1}, \dots, v_{ik})$.

$$B = (v_{jk}, v_{jk+1}, \dots, v_0, v_1, \dots, v_{ik}) \text{ o } B = (v_{jk}, v_{jk+1}, \dots, v_{ik})$$



¹¹ $V(D) = \{a_1, a_2, \dots, a_z\}$ entonces, al ser fuertemente conexa, hay un $a_i a_{i+1}$ –camino dirigido para todo i y también está el $a_z a_1$ –camino dirigido. Juntando todos esos caminos, obtenemos el que pasa por todos los vértices.

Entonces tendríamos un camino dirigido cerrado TB de longitud $(n_1k + r) + n_2k$, $r \neq 0$ pues la longitud de T no es congruente con cero módulo k y la de B , no importa como sea éste, sí es congruente con cero módulo k .

Por ende, la longitud de TB no sería congruente con cero módulo k .

Por el lema 1.8.5, existiría un ciclo dirigido de longitud no congruente con cero módulo k contenido en TB y que también estaría contenido en D . Lo cual es imposible pues todos los ciclos dirigidos de D , sí tienen longitud congruente con cero módulo k .

Por consiguiente todas las trayectorias dirigidas de v_{ik} a v_{jk} son de longitud congruente con cero módulo k , es decir, de longitud $k, 2k, 3k, \dots$ (cero no porque son distintos).

Por lo tanto $d_D(v_{ik}, v_{jk}) \geq k$.

- $\forall x \notin J \exists y \in J$ tal que $d_D(x, y) \leq k - 1$.

Si $x \notin J$, entonces $x = v_{nk+r}$ para algún n y algún r con $0 < r < k$, entonces x es absorbido por $v_{(n+1)k}$ a distancia menor o igual que $k-1$.

Concluimos que J es k -núcleo de D . □

¿Por qué es necesaria la hipótesis de ser fuertemente conexa?

Consideremos la digráfica mostrada en la página siguiente.

Esa digráfica no es fuertemente conexa pues, por ejemplo, no existe un camino dirigido de v_{c_0} hacia v_0 .

Todos sus ciclos dirigidos son de longitud congruente con cero módulo 4, pero no tiene 4-núcleo.

Tratemos de construir un 4-núcleo, digamos N . Primero hay que tomar los vértices de exgrado cero, es decir, $V^0 = \{v_{c_0}, v_{c_2}, v_{c_4}, v_{c_5}, v_{c_7}\} \subset N$.

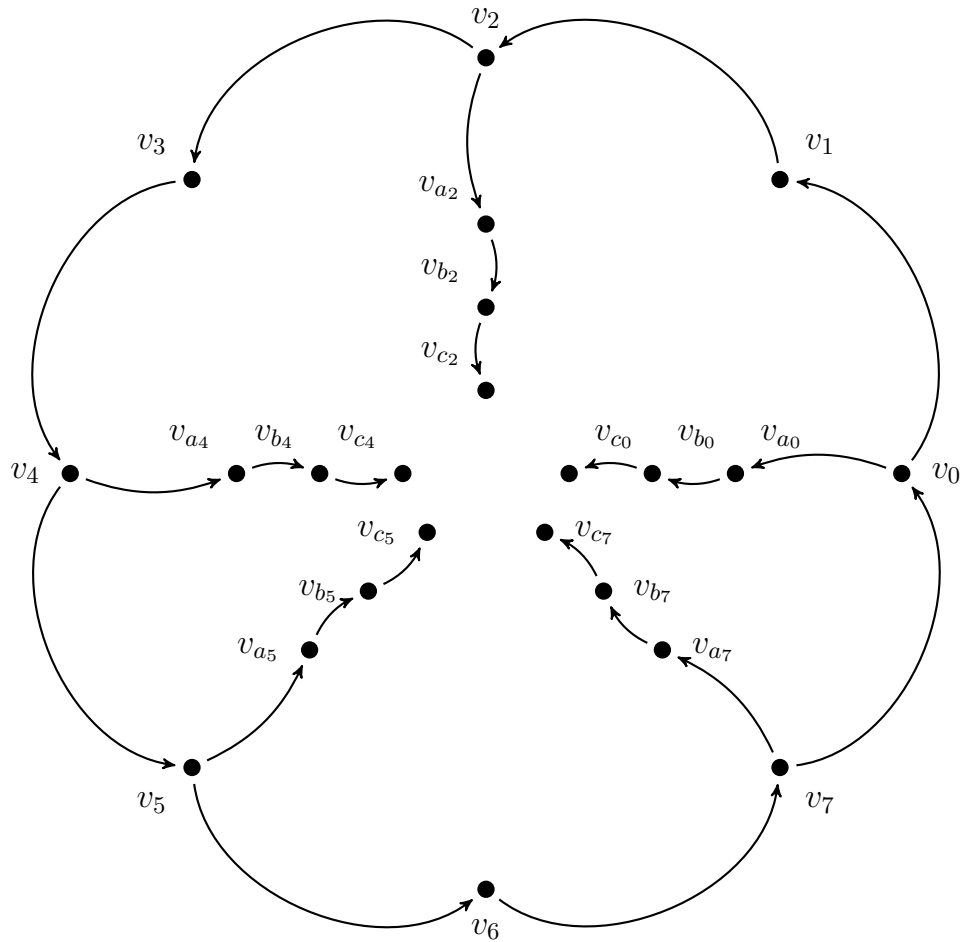
Ningún vértice de $\{v_0, v_2, v_4, v_5, v_7\}$ puede pertenecer a N pues $d_D(v_j, v_{c_j}) = 3$, $j = 0, 2, 4, 5, 7$ y necesitamos que N sea 4-independiente.

Tampoco podemos tener en N algún vértice con subíndice a o b .

Aún no sabemos si v_1, v_3 y v_6 pertenecen o no a N .

Lo que sí sabemos es que $v_1 \in N$ o $v_1 \notin N$.

Si $v_1 \in N$, entonces $v_3 \notin N$ y $v_6 \notin N$ pues v_6 es 3-absorbido por v_1 y $d_D(v_1, v_3) = 2$. Entonces, N sería igual a $V^0 \cup \{v_1\}$ que no es 4-núcleo porque no absorbe a distancia menor o igual que 3 a v_2 .



Si $v_1 \notin N$, entonces v_1 tiene que ser 3-absorbido, por lo que necesariamente $v_3 \in N$. Pero si $v_3 \in N$, $v_6 \notin N$ porque $d_D(v_3, v_6) = 3$. Por lo tanto, N sería igual a $V^0 \cup \{v_3\}$ que no es 4-núcleo pues no absorbe a v_6 .

Por lo tanto, no podemos construir un 4-núcleo.

Con las digráficas simétricas, se puede dar una demostración análoga a la del teorema 1.8.3 (probaríamos con facilidad que D_k es simétrica) para demostrar que tienen k -núcleo para todo k .

Para finalizar este capítulo, veamos que las digráficas transitivas tienen (k, l) -núcleo para k y l arbitrarios.

Sea D una digráfica transitiva. Por el teorema 1.7.2, sabemos que D tiene 2-núcleo J .

Entonces, J es 1-absorbente y por lo tanto, es también l -absorbente para cualquier l .

Sean $x, y \in J$, $x \neq y$.

Como J es 2-núcleo de D , no hay flechas entre x y y . Además, tampoco hay trayectorias dirigidas entre ellos porque si $T = (x, x_1, x_2, \dots, x_z = y)$ fuese una trayectoria dirigida de D , tendríamos la flecha \overrightarrow{xy} pues, por la transitividad, tendríamos las flechas $\overrightarrow{xx_2}, \overrightarrow{xx_3}, \overrightarrow{xx_4}, \dots, \overrightarrow{xy}$, lo cual es imposible. Análogamente, si T fuese una yx -trayectoria dirigida, entonces tendríamos la flecha \overrightarrow{yx} .

Al no existir trayectorias dirigidas entre los elementos de J , $d_D(x, y) = \infty$.

Por lo tanto, J es k -independiente para k arbitrario.

Capítulo 2

Operaciones en Digráficas

En este capítulo estudiaremos ciertas operaciones en digráficas, la mayoría de ellas de aridad uno, es decir, a partir de una digráfica obtendremos una nueva.

Definiremos distintos tipos de digráficas comenzando con las *generadoras*, en las cuales, cualquier subconjunto de vértices l -absorbente lo es también en la digráfica original.

Presentaremos las definiciones de la *digráfica de líneas*, $L(D)$ y de las digráficas *adheribles*. Demostraremos que, bajo ciertas hipótesis, la digráfica que resulta de adherir dos digráficas con (k, l) -núcleo tiene (k, l) -núcleo.

Después conoceremos a las digráficas $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$ pero no nos detendremos a recordar los resultados obtenidos por Jerzy Topp [18] para núcleos, ya que muchos de ellos se obtienen de los teoremas concernientes a las generalizaciones $S_m^k(D)$, $R_m^k(D)$, $Q_m^k(D)$ y $T_m^k(D)$ para k -núcleos.

Veremos que sin importar la elección que hagamos de D , $S_m^k(D)$, $R_m^k(D)$ y $Q_m^k(D)$ tendrán k -núcleo para $k \geq 2$ y $T_m^k(D)$ tendrá también k -núcleo para $k \geq 3$.

Seguiremos con las definiciones de $\bar{Q}_m^k(D)$ y $\bar{T}_m^k(D)$ que son digráficas muy parecidas a $Q_m^k(D)$ y $T_m^k(D)$.

Usaremos las mismas demostraciones de $Q_m^k(D)$ y $T_m^k(D)$ para probar que $\bar{Q}_m^k(D)$ y $\bar{T}_m^k(D)$ tienen k -núcleo.

Finalizaremos con digráficas obtenidas aumentando la cantidad de flechas en $S_m^k(D)$ y $R_m^k(D)$ que también tienen k -núcleo.

2.1. Digráficas generadoras

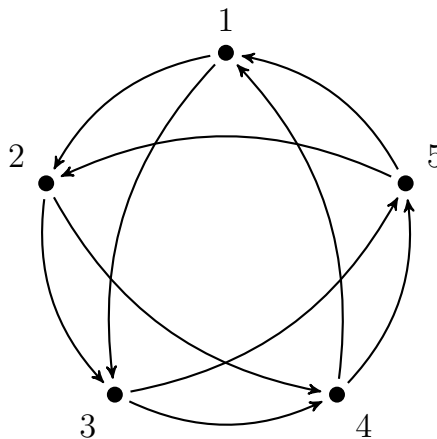
Si queremos construir nuevas digráficas a partir de las que ya tenemos, es mejor empezar por la que es quizás la más simple de todas.

Definición 2.1.1. Sea D una digráfica. Una digráfica generadora de D , llamémosla G , es tal que:

- $V(G) = V(D)$.
- $F(G) \subseteq F(D)$.

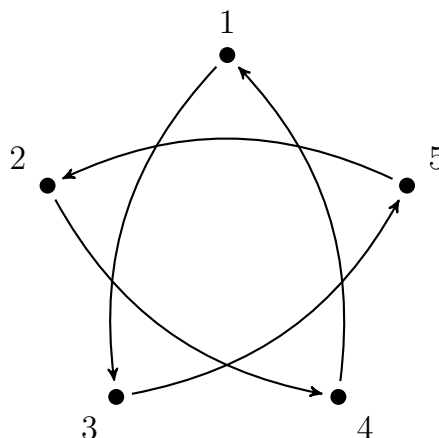
Ejemplos:

1) Sea D la siguiente digráfica:



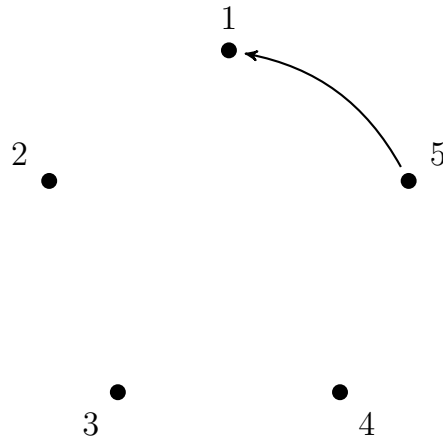
El siguiente es un ejemplo de digráfica generadora de D :

H :



Obsérvese que $d_D(2, 3) = 1$, pero en H la mínima trayectoria dirigida de 2 a 3 tiene longitud tres.

Otra digráfica generadora de D es:



2) Para cualquier D , D es una digráfica generadora de sí misma.

3) Para cualquier D , $D' = (V(D), \emptyset)$ es una digráfica generadora de D .

En resumen, para obtener una digráfica generadora, basta con eliminar (si así lo deseamos) algunas flechas de la digráfica original. Por lo cual, es obvio que si un conjunto es k -independiente en D , lo es también en cualquier digráfica generadora de D .

Las digráficas generadoras tienen una propiedad muy útil con respecto a los conjuntos l -absorbentes.

Lema 2.1.1. *Sea H una digráfica generadora de D . Si $S \subseteq V(H) = V(D)$ es l -absorbente en H , entonces lo es también en D .*

Demostración. Sean H y S como en las hipótesis.

Por consiguiente, $\forall x \in V(D) - S \exists y \in S$ tal que $d_H(x, y) \leq l$.

Sea $x \in V(D) - S$ y sea $y \in S$ tal que $d_H(x, y) \leq l$.

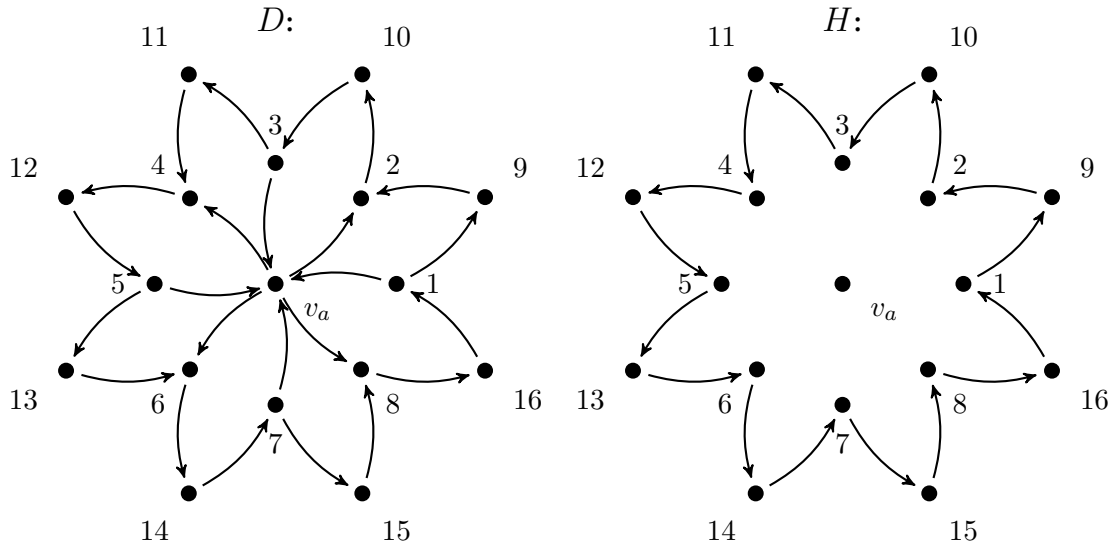
Para demostrar que S es l -absorbente en D basta con observar que $d_D(x, y) \leq d_H(x, y)$.

Sea T una xy -trayectoria dirigida en H de longitud $d_H(x, y)$. Debido a que $F(H) \subseteq F(D)$, T también es una trayectoria dirigida de D .

Por lo tanto, siendo que $d_D(x, y)$ es la longitud de la xy -trayectoria dirigida más corta en D y T es una trayectoria dirigida en D , tenemos que $d_D(x, y)$ es menor o igual que la longitud de T , la cual es igual a $d_H(x, y)$.

□

No hay un lema análogo para los conjuntos k -independientes, pues si un conjunto S es k -independiente en H , H digráfica generadora de D , lo más probable es que S no sea k -independiente en D , por ejemplo, si D y H son como se muestran a continuación:



En H , el conjunto $\{2, 4, 6, 8, v_a\}$ es 4-independiente, mientras que en D no lo es.

2.2. $L(D)$

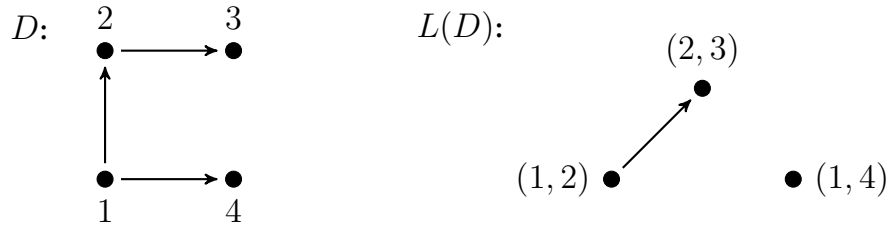
Una digráfica muy famosa es la *digráfica de líneas*.

Definición 2.2.1. Sea D una digráfica tal que $F(D) \neq \emptyset$. $L(D)$, la digráfica de líneas de D cumple:

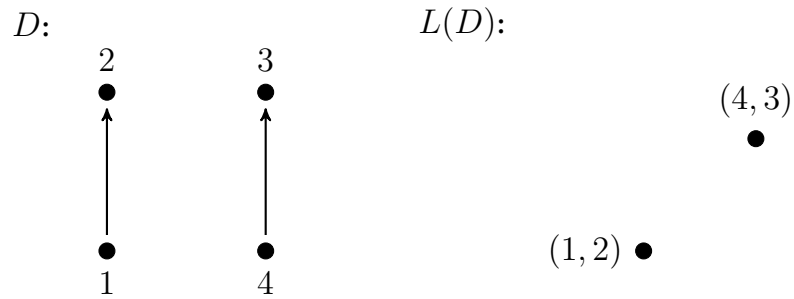
- $V(L(D)) = F(D)$.
- $p = (a, b) \in F(L(D))$ si y sólo si $a = (u, v)$ y $b = (v, w)$ con $a, b \in F(D)$.

Ejemplos:

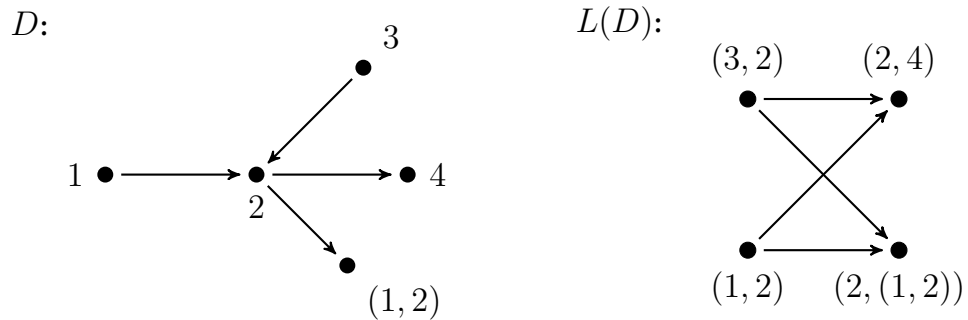
- 1) $V(D) = \{1, 2, 3, 4\}$; $F(D) = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}$.



2) $V(D) = \{1, 2, 3, 4\}; F(D) = \{(1, 2), (4, 3)\}$.



3) $V(D) = \{1, 2, 3, 4, (1, 2)\}; F(D) = \{(1, 2), (3, 2), (2, 4), (2, (1, 2))\}$.



Parte de la fama de la digráfica de líneas de D se debe a que tiene tantos $(2, 1)$ -núcleos como D . Una demostración de este hecho se encuentra en [18].

Recientemente Lu Qin, Shan Er-fang y Zhao Min [14] demostraron que si en D todos los vértices tienen ingrado mayor o igual que uno y la longitud de todos sus ciclos dirigidos es mayor o igual que k , $k \geq 2$, entonces D y $L(D)$ tienen el mismo número de (k, l) -núcleos con $1 \leq l \leq k$.

Aunque no veremos las demostraciones de estos resultados, emplearemos la digráfica de líneas para definir otras digráficas.

2.3. Digráficas adheribles

Notación. Sean D y D' digráficas. Usaremos la notación $D \cup D'$ para referirnos a la digráfica definida por:

- $V(D \cup D') = V(D) \cup V(D')$.
- $F(D \cup D') = F(D) \cup F(D')$.

Ejemplos:

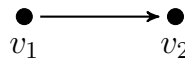
1) $D \cup D = D$ para cualquier digráfica D porque $V(D) \cup V(D) = V(D)$ y $F(D) \cup F(D) = F(D)$.

2) $V(D) = \{v_1, v_2\}$, $F(D) = \{(v_1, v_2)\}$.

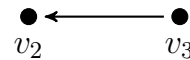
$V(D') = \{v_2, v_3\}$, $F(D') = \{(v_3, v_2)\}$.

Entonces $V(D) \cup V(D') = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $F(D) \cup F(D') = \{(v_1, v_2), (v_3, v_2)\}$.

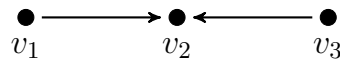
D :



D' :



$D \cup D'$:

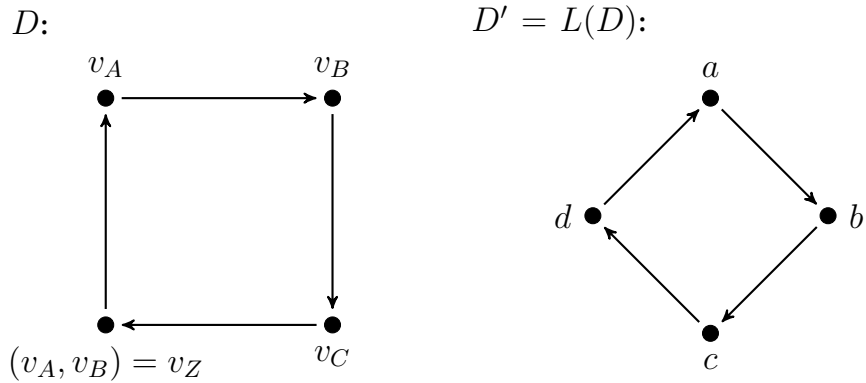


3) $V(D) = \{v_A, v_B, v_C, (v_A, v_B)\}$.

$F(D) = \{(v_A, v_B), (v_B, v_C), (v_C, (v_A, v_B)), ((v_A, v_B), v_A)\}$.

$D' = L(D)$.

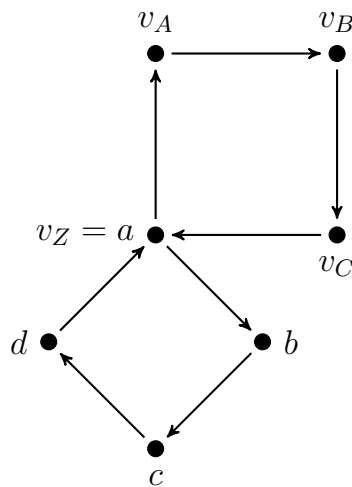
Sean $v_Z = (v_A, v_B) \in V(D)$, $a = (v_A, v_B)$, $b = (v_B, v_C)$, $c = (v_C, v_Z)$ y $d = (v_Z, v_A)$.



$$V(D \cup D') = \{v_A, v_B, v_C, (v_A, v_B), (v_B, v_C), (v_C, v_Z), (v_Z, v_A)\}.$$

$$F(D \cup D') = \{(v_A, v_B), (v_B, v_C), (v_C, v_Z), (v_Z, v_A), (a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}.$$

Nótese que $a = v_Z$ y entonces $D \cup D'$ se ve de esta forma:



4) En el ejemplo anterior, si $v_Z = v_D$ con $v_D \neq (v_A, v_B)$, tenemos:

$$V(D) = \{v_A, v_B, v_C, v_D\}. F(D) = \{(v_A, v_B), (v_B, v_C), (v_C, v_D), (v_D, v_A)\}.$$

$$a = (v_A, v_B), b = (v_B, v_C), c = (v_C, v_D), d = (v_D, v_A).$$

$$D' = L(D).$$

$$V(D \cup D') = \{v_A, v_B, v_C, v_D, (v_A, v_B), (v_B, v_C), (v_C, v_D), (v_D, v_A)\}.$$

$$F(D \cup D') = \{(v_A, v_B), (v_B, v_C), (v_C, v_D), (v_D, v_A), (a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}.$$

Entonces la forma de dibujar $D \cup D'$ sería dibujar tanto D como D' , una junto a la otra.

En los ejemplos 2 y 3, observamos que las digráficas D y D' se pegaron al construir $D \cup D'$.

Definición 2.3.1. Se dice que las digráficas D y D' son adheribles si $V(D) \cap V(D') \neq \emptyset$.

Teorema 2.3.1. Sean D y D' digráficas adheribles tales que $J_1 \subset V(D)$ y $J_2 \subset V(D')$ son (k, l) -núcleos de ellas respectivamente.

Si $J_1 \cap J_2 = V(D) \cap V(D')$, entonces $J_1 \cup J_2$ es (k, l) -núcleo de $D \cup D'$.

Demostración. Sea $H = D \cup D'$.

Afirmación. $J_1 \cup J_2$ es l -absorbente en H .

Sea $x \in V(H) - (J_1 \cup J_2)$.

Si $x \in V(D)$, sabemos que $x \notin J_1$, por lo tanto, existe $y \in J_1$ tal que $d_D(x, y) \leq l$. Como en H tenemos todas las trayectorias dirigidas de D , $d_H(x, y) \leq d_D(x, y) \leq l$.

Si $x \in V(D')$, $x \notin J_2$, por lo tanto, existe $y \in J_2$ tal que $d_{D'}(x, y) \leq l$. Igual que antes, en H tenemos todas las trayectorias dirigidas de D' , entonces $d_H(x, y) \leq d_{D'}(x, y) \leq l$.

Luego, $J_1 \cup J_2$ es l -absorbente en H .

Afirmación. $J_1 \cup J_2$ es k -independiente en H .

Sean $x, y \in J_1 \cup J_2$, con $x \neq y$. Sea $T = (x = x_1, x_2, \dots, x_n = y)$ una xy -trayectoria dirigida en H .

Si $\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in F(D)$ para todo i , con $1 \leq i < n$, entonces T es una xy -trayectoria dirigida en D , por lo tanto, la longitud de T es mayor o igual que k pues tanto x como y pertenecen a $V(D)$, de lo cual podemos obtener que $x, y \in J_1^1$.

Si $\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in F(D')$ para cada i , con $1 \leq i < n$, entonces T es una xy -trayectoria dirigida en D' , por lo tanto, la longitud de T es mayor o igual que k pues $x, y \in J_2$.

Si en T hay flechas de D y de D' :

Sean $n_1 = \min\{i \mid \overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in F(D)\}$ y $n_2 = \min\{i \mid \overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in F(D')\}$.

Entonces, $T_1 = (x = x_1, x_2, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1})$ es una trayectoria dirigida de D' por la propiedad de n_1 , y además $x \in V(D')$ lo cual implica que $x \in J_2$.

¹Pues $x \in J_1 \cup J_2$. Si $x \in J_2$, entonces x también pertenece a $V(D')$ y por hipótesis tenemos que $x \in J_1 \cap J_2$; lo mismo sucede con y .

Si $1 \neq n_1$, como $\overrightarrow{x_{n_1}x_{n_1+1}} \in F(D)$, tenemos que $x_{n_1} \in V(D) \cap V(D')$. Por hipótesis, $x_{n_1} \in J_1 \cap J_2$ y por consiguiente T_1 tiene longitud mayor o igual que k pues J_2 es k -independiente en D' .

Por consiguiente la longitud de T es mayor o igual que k en H .

Si $1 = n_1$, entonces por la propiedad de n_2 , $T_2 = (x = x_1 = x_{n_1}, x_2, \dots, x_{n_2})$ es una trayectoria dirigida de D y $x \in V(D)$, lo cual indica que $x \in J_1$.

Sabemos que $x_{n_2} \in V(D')$ pues $\overrightarrow{x_{n_2}x_{n_2+1}} \in F(D')$, por lo tanto, $x_{n_2} \in J_1$.

$x \neq x_{n_2}$ pues si sucediese que $x = x_{n_2}$, tendríamos que $x = x_1 = x_{n_1} = x_{n_2}$. De esta manera, $\overrightarrow{x_{n_1}x_2} \in F(D)$ y $\overrightarrow{x_{n_2}x_2} \in F(D')$, por ende, $x_2 \in V(D) \cap V(D')$ entonces, $x_2 \in J_1 \cap J_2$. Así, J_1 o J_2 no serían k -independientes.

Por ende, T_2 es una trayectoria de longitud mayor o igual que k en D y se sigue que la longitud de T es mayor o igual que k en H .

Por lo tanto $J_1 \cup J_2$ es k -independiente en H . □

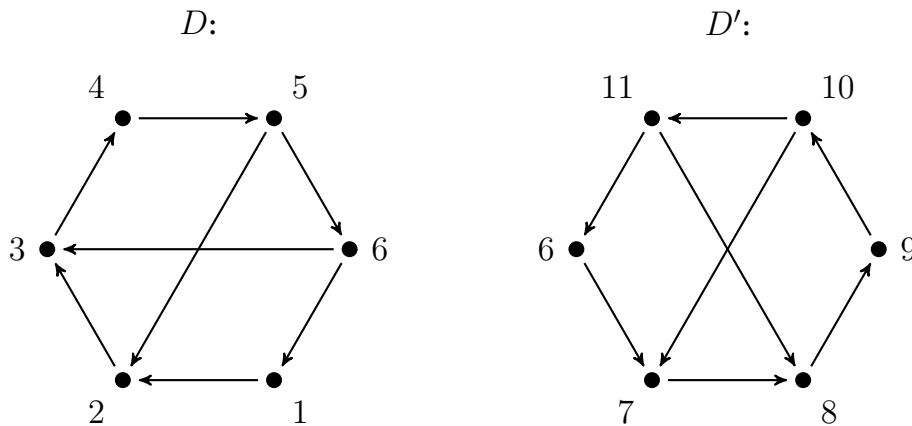
Si miramos de nuevo el ejemplo 3, tenemos que $N_1 = \{v_Z = a, v_B\}$ y $N_2 = \{a, c\}$ son $(2, 1)$ -núcleos de D y D' respectivamente; $V(D) \cap V(D') = N_1 \cap N_2$ y resulta que $\{a, v_B, c\}$ es $(2, 1)$ -núcleo de $D \cup D'$.

Si no nos aseguramos que $J_1 \cap J_2$ sea igual a $V(D) \cap V(D')$, siendo J_1 y J_2 (k, l) -núcleos de D y D' , $J_1 \cup J_2$ no necesariamente será (k, l) -núcleo de $D \cup D'$.

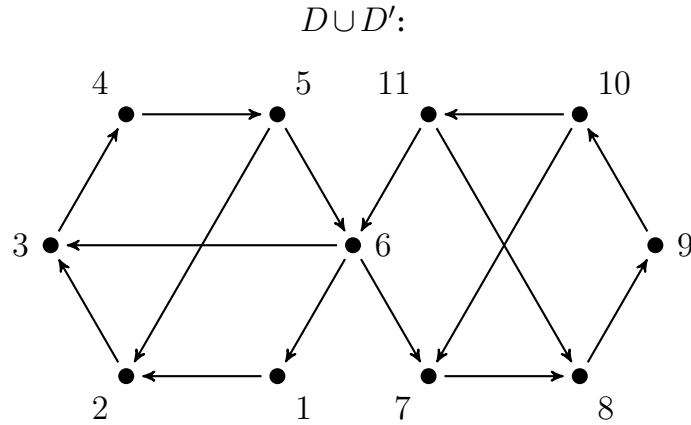
Para muestra, en el mismo ejemplo 3, $\{v_A, v_C\}$ es 2-núcleo de D y $\{a, c\}$ es 2-núcleo de D' , pero $\{v_A, v_C, a, c\}$ no es 2-núcleo de $D \cup D'$.

Incluso, aunque D y D' tengan los (k, l) -núcleos J_1 y J_2 , si $V(D) \cap V(D')$ es diferente de $J_1 \cap J_2$, es posible que $D \cup D'$ ni siquiera tenga (k, l) -núcleo.

Por ejemplo:



$J_1 = \{1, 4\}$ es 3-núcleo de D . $J_2 = \{6, 9\}$ es 3-núcleo de D' .
 $V(D) \cap V(D') = \{6\} \neq J_1 \cap J_2 = \emptyset$.



Supongamos que $H = D \cup D'$ tiene un 3-núcleo J .

Si el vértice 6 perteneciese a J , entonces J no sería 2-absorbente pues $1, 2, 3, 4, 5 \notin J$, $d_H(3, 6) \geq 3$ y $d_H(3, i) \geq 4$, para todo $i \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$, es decir, no habría forma de absorber al vértice 3. Por lo tanto, $6 \notin J$.

Si $7 \in J$, $6, 8, 9, 10, 11 \notin J$ y J no es 2-absorbente pues $d_H(8, 7) \geq 3$ y $d_H(8, j) \geq 4$ para todo $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Por lo anterior, $7 \notin J$.

Si $8 \in J$, $6, 7, 9, 10, 11 \notin J$ y J no es 2-absorbente pues $d_H(9, 8) \geq 3$ y $d_H(9, j) \geq 4$ para todo $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Por lo tanto $8 \notin J$.

Si $9 \in J$, para absorber al vértice 10, necesariamente $6 \in J$. Como ya sabemos que $6 \notin J$, tenemos que $9 \notin J$.

Si $10 \in J$, el vértice 7 no es absorbido y si $11 \in J$, 8 no es absorbido.

Como conclusión de lo anterior, $6, 7, 8, 9, 10, 11 \notin J$.

No importa cuál de los vértices $1, 2, 3, 4, 5$ pertenezca a J pues ninguno de ellos puede absorber a distancia 2 al vértice 9.

Por lo tanto J no es 2-absorbente y entonces J no es 3-núcleo.

Concluimos que H no tiene 3-núcleo.

De ahora en adelante centraremos nuestra atención en los k -núcleos.

2.4. S(D)

Usando nuestra notación, veamos la definición de $S(D)$ según Jerzy Topp.

Definición 2.4.1. Sea D una digráfica, el conjunto de vértices de $S(D)$ es $V(D) \cup F(D)$. A continuación, para cada vértice de $S(D)$ definiremos su conjunto de vecinos exteriores, así tendremos definidas las flechas de $S(D)$.

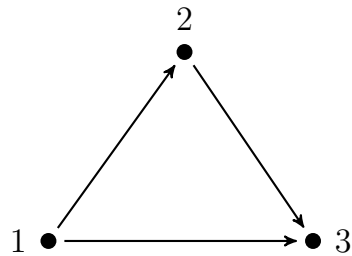
$$\Gamma_{S(D)}^+(x) = \begin{cases} \{x\} \times \Gamma_D^+(x) & \text{si } x \in V(D), \\ \{w\} & \text{si } x = (v, w) \in F(D). \end{cases}$$

También definimos las digráficas $R(D) = S(D) \cup D$, $Q(D) = S(D) \cup L(D)$ y $T(D) = S(D) \cup D \cup L(D)$.

Ejemplos:

1) Sea D dada por $V(D) = \{1, 2, 3\}$ y $F(D) = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

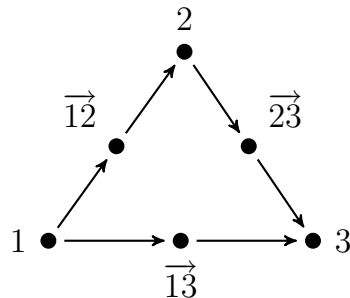
D :



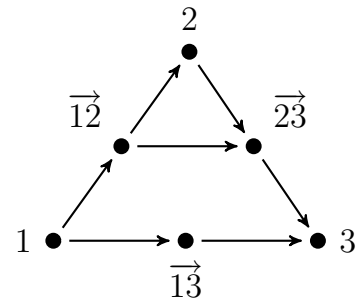
Entonces $\Gamma_{S(D)}^+(1) = \{1\} \times \{2, 3\}$, $\Gamma_{S(D)}^+(2) = \{2\} \times \{3\}$, $\Gamma_{S(D)}^+(\vec{12}) = \{2\}$, $\Gamma_{S(D)}^+(\vec{13}) = \{3\}$, $\Gamma_{S(D)}^+(\vec{23}) = \{3\}$. Por lo tanto, los vecinos exteriores del vértice 1 serán las flechas $(1, 2)$ y $(1, 3)$ de $F(D)$.

Dibujemos $S(D)$, $Q(D)$, $R(D)$ y $T(D)$.

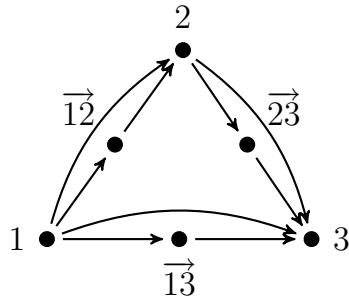
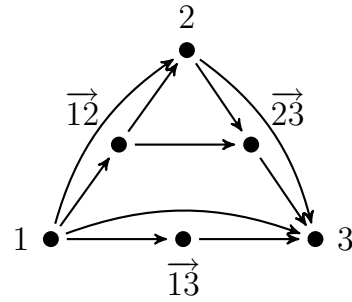
$S(D)$:



$Q(D)$:



Observemos que, por cada flecha de D tenemos una trayectoria dirigida de longitud 2 en $S(D)$.

$R(D)$: $T(D)$:

2.5. $S^k(D)$

Dada una digráfica, usando la idea de la definición de $S(D)$, construiremos toda una clase de digráficas tal que cada una de ellas tendrá k -núcleo. No importará si la digráfica con la que empezamos posee o no k -núcleo.

Para construir esta clase partiremos de digráficas pertenecientes a lo que llamaremos \mathfrak{D}^* pues, si no se ha dado cuenta el lector, $S(D)$ podría no estar bien definida si en una digráfica D , $V(D) \cap F(D) \neq \emptyset$.

Definición 2.5.1. $\mathfrak{D}^* = \{D \mid D \text{ es digráfica y } V(D) \cap F(D) = \emptyset\}$.

Definición 2.5.2. Sean $k \geq 2$, $D \in \mathfrak{D}^*$ y $m : F(D) \rightarrow \mathbb{N}$ una función.

Enumeramos las flechas de D como $a^1, a^2, a^3, \dots, a^n$.

Se define $\mathfrak{C}_m^k(D) =$

$$\begin{aligned} &\{a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_{m(a^1)k+(k-1)}^1, \\ &a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{m(a^2)k+(k-1)}^2, \\ &\vdots \\ &a_1^n, a_2^n, a_3^n, \dots, a_{m(a^n)k+(k-1)}^n\} \end{aligned}$$

Convenimos que si $F(D) = \emptyset$, entonces $\mathfrak{C}_m^k(D) = \emptyset$.

Además, $\mathfrak{C}_m^k(D)$ cumple:

- Todos sus elementos son distintos dos a dos.
- $\forall a^j \in F(D), a^j = a_{m(a^j)k+(k-1)}^j$.
- Cada a_i^j , con $a_i^j \neq a^j$, es un objeto arbitrario que no pertenece a $V(D)$, es decir, $V(D) \cap \mathfrak{C}_m^k(D) = \emptyset$.

Definición 2.5.3. Sean k, D y m como en la definición anterior, y sea $a^j = (u, w) \in F(D)$.

Definimos la trayectoria β_{a^j} como $(u = a_0^j, a_1^j, a_2^j, \dots, a_{m(a^j)k+(k-1)}^j = a^j)$ tal que $a_z^j \in \mathfrak{C}_m^k(D), \forall z$ con $0 < z \leq m(a^j)k + (k - 1)$.

Obsérvese que la longitud de β_{a^j} es congruente con $k - 1$ módulo k y que el vértice inicial de la flecha a^j pertenece a $V(\beta_{a^j})$ pero el vértice final no.

Otra observación es que $\forall a^i, a^j \in F(D)$, si $i \neq j$, $a^i = (u, v)$ y $a^j = (u, w)$, entonces el vértice u recibe la etiqueta a_0^i en β_{a^i} y también la etiqueta a_0^j en β_{a^j} .

Ahora tenemos todo lo necesario para definir $S_m^k(D)$, la cual, al variar la función m , nos permitirá construir la clase de digráficas que habíamos mencionado.

Definición 2.5.4. Sean k, D y m igual que antes. Se define la digráfica $S_m^k(D)$ de la siguiente manera:

- $V(S_m^k(D)) = V(D) \cup \mathfrak{C}_m^k(D)$.
- $F(S_m^k(D)) = [\bigcup_{a^j \in F(D)} F(\beta_{a^j})] \cup \{(a^j, w) \mid a^j \in F(D) \text{ y el vértice final de } a^j \text{ es } w\}$.

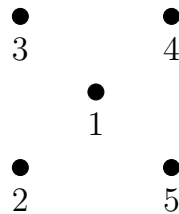
Convenimos que si $F(D) = \emptyset$, entonces $F(S_m^k(D)) = \emptyset$.

Ejemplos:

1) $V(D) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, F(D) = \emptyset, k = 2$.

Entonces $\mathfrak{C}_m^2(D) = \emptyset; V(S_m^2(D)) = V(D) \cup \emptyset = V(D); F(S_m^2(D)) = \emptyset$.

$D = S_m^2(D)$:



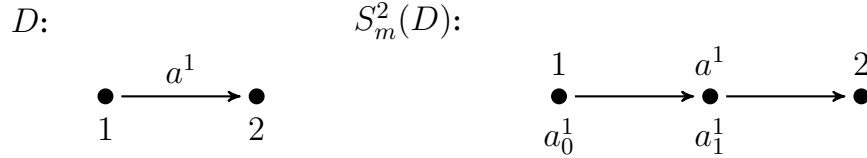
2) $V(D) = \{1, 2\}, F(D) = \{a^1 = (1, 2)\}, k = 2, m(a^1) = 0$.

Entonces $\mathfrak{C}_m^2(D) = \{a_1^1 = a_{m(a^1)2+(2-1)}^1\}$.

$\beta_{a^1} = (a_0^1 = 1, a_{m(a^1)2+(2-1)}^1 = a^1)$.

$$V(S_m^2(D)) = V(D) \cup \mathfrak{C}_m^2(D) = \{1, 2\} \cup \{a^1 = a_1^1\} = \{1, 2, (1, 2)\}.$$

$$F(S_m^2(D)) = F(\beta_{a^1}) \cup \{(a^1, 2)\} = \{(1, a^1), (a^1, 2)\}.$$



- 3) $V(D) = \{1, 2, 3\}$, $F(D) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $k = 2$, $m((1, 2)) = 0$,
 $m((2, 1)) = 1$.

Aunque deberíamos empezar por enumerar las flechas de D , en lugar de eso, definimos $a = (1, 2)$ y $b = (2, 1)$, lo cual disminuirá los índices y nos facilitará la escritura.

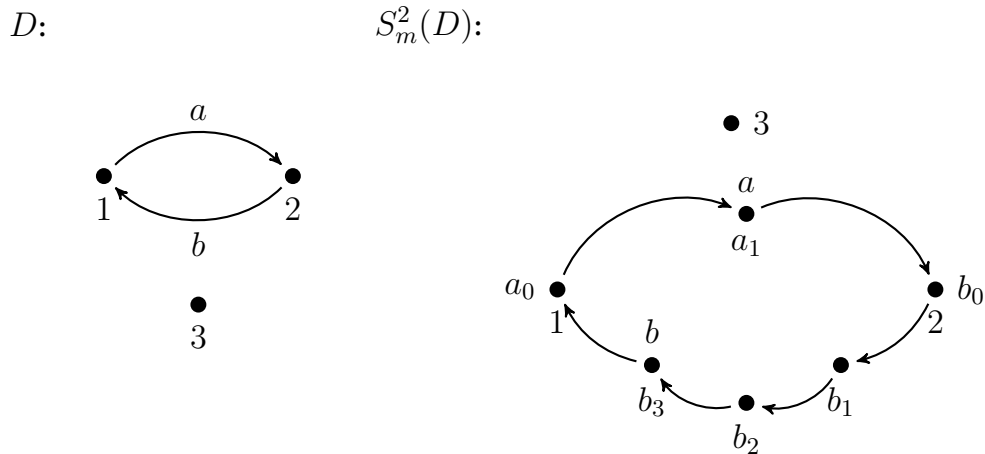
Entonces $\mathfrak{C}_m^2(D) = \{a_1 = a_{m(a)2+(2-1)}, b_1, b_2, b_3 = b_{m(b)2+(2-1)}\}$.

$$\beta_a = (a_0 = 1, a_{m(a)2+(2-1)} = a) = (a_0, a_1).$$

$$\beta_b = (b_0 = 2, b_1, b_2, b_{m(b)2+(2-1)} = b) = (b_0, b_1, b_2, b_3).$$

$$V(S_m^2(D)) = V(D) \cup \mathfrak{C}_m^2(D) = \{1, 2, 3\} \cup \{a_1, b_1, b_2, b_3\} = \{1, 2, 3, a_1, b_1, b_2, b_3\} = \{1, 2, 3, a, b_1, b_2, b\}.$$

$$F(S_m^2(D)) = F(\beta_a) \cup F(\beta_b) \cup \{(a, 2), (b, 1)\} = \{(a_0, a_1)\} \cup \{(b_0, b_1), (b_1, b_2), (b_2, b_3)\} \cup \{(a, 2), (b, 1)\} = \{(1, a), (2, b_1), (b_1, b_2), (b_2, b_3), (a, 2), (b, 1)\}.$$



- 4) $V(D) = \{A, B, C\}$, $F(D) = \{(A, B), (A, C)\}$, $k = 3$, $a = (A, B)$,
 $b = (A, C)$, $m(a) = 1$, $m(b) = 1$.

Entonces $\mathfrak{C}_m^3(D) =$

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 = a_{m(a)3+(3-1)}, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 = b_{m(b)3+(3-1)}\}.$$

$$\beta_a = (a_0 = A, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 = a).$$

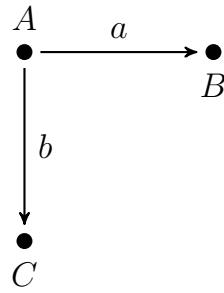
$$\beta_b = (b_0 = A, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 = b).$$

$$V(S_m^3(D)) = \{A, B, C, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}.$$

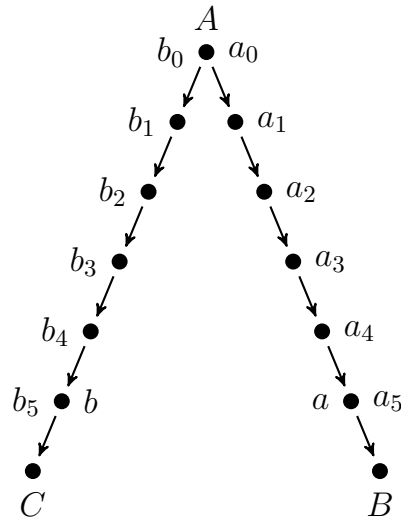
$$F(S_m^3(D)) = F(\beta_a) \cup F(\beta_b) \cup \{(a, B), (b, C)\} =$$

$$\{(a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_5), (b_0, b_1), (b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_3, b_4), (b_4, b_5), (a, B), (b, C)\}.$$

D :



$S_m^3(D)$:

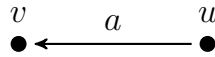


En este ejemplo, en $S_m^3(D)$, se puede observar que $A = a_0 = b_0$ pertenece tanto a la trayectoria β_a como a β_b , mientras que B y C no son vértices de ninguna trayectoria β_i .

Visualmente, lo que ocurre con $S_m^k(D)$ respecto a D es que, si tenemos la flecha $a = (u, v) \in F(D)$, a se sustituye por una trayectoria dirigida de longitud congruente con cero módulo k en $S_m^k(D)$.

En dibujos:

En D :



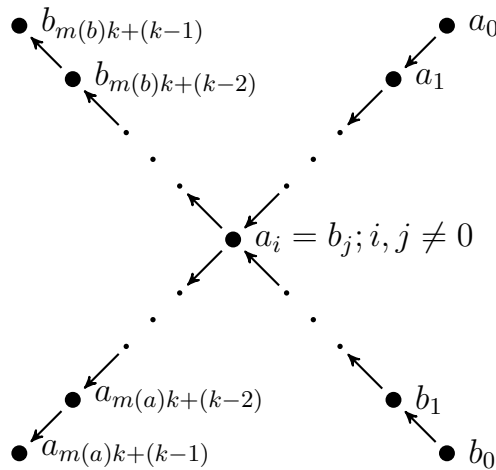
En $S_m^k(D)$:



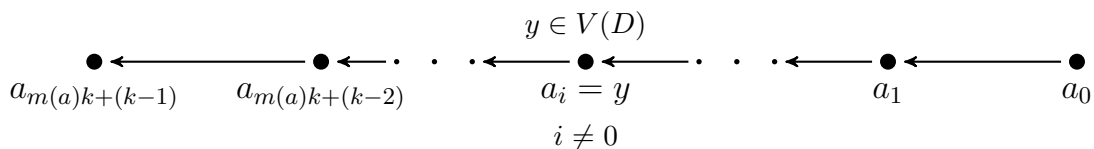
Por lo tanto podemos pensar que $S_m^k(D)$ se obtiene, a partir de D , cambiando las flechas de D por trayectorias dirigidas de longitud congruente con cero módulo k .

Es importante mencionar que, como los elementos de $\mathfrak{C}_m^k(D)$ son distintos dos a dos y $\mathfrak{C}_m^k(D) \cap V(D) = \emptyset$, las trayectorias β_i sólo tienen un vértice de D y si llegasen a compartir algún vértice, sería únicamente el inicial.

Es decir, con las trayectorias β_a y β_b no sucede lo siguiente:



Y tampoco ocurre lo siguiente:



Lo cual es muy útil pues nos garantiza que:

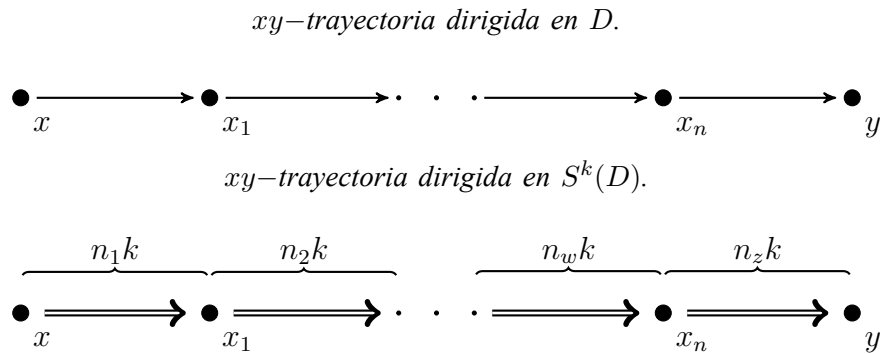
Si $v \in V(D)$, cualquier flecha, digamos $f = (v, w) \in F(D)$, se reemplaza por una trayectoria dirigida en $S^k(D)$. Tal trayectoria inicia en v , pasa por los vértices f_1, f_2, \dots , por f quien ahora es un vértice de $S^k(D)$ y finalmente llega a $w \in V(D)$. Es decir, fijándonos en $S_m^k(D)$, tenemos una trayectoria dirigida de longitud $(m(f) + 1)k$ entre v y w .



De lo anterior y por construcción de $S_m^k(D)$, podemos concluir que las xy -trayectorias dirigidas en $S_m^k(D)$, para cualesquiera $x, y \in V(D)$, necesariamente son de longitud congruente con cero módulo k . Esto porque cualquier xy -trayectoria dirigida en $S_m^k(D)$, proviene de una trayectoria $T = (x = x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = y)$ en D y cada flecha $\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in F(D)$, se cambia por una trayectoria dirigida de longitud congruente con cero módulo k , en $S_m^k(D)$.

Entonces tenemos:

Figura 2.1. Cualquier xy -trayectoria dirigida en $S_m^k(D)$, con $x, y \in V(D)$ y $x \neq y$, contiene vértices $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = y \in V(D)$ tales que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$.

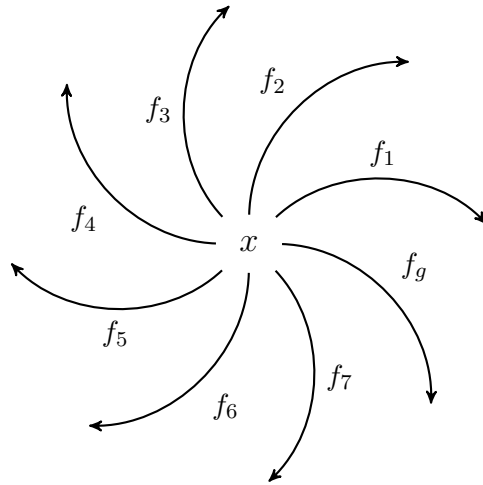


En cuanto al exgrado de los vértices en D y en $S_m^k(D)$ tenemos que:

Si un vértice x , tiene exgrado g en D ; en $S_m^k(D)$ también tiene exgrado g . Esto se debe a que las g flechas que salen de x , se sustituyen por g trayectorias dirigidas que inician en x .

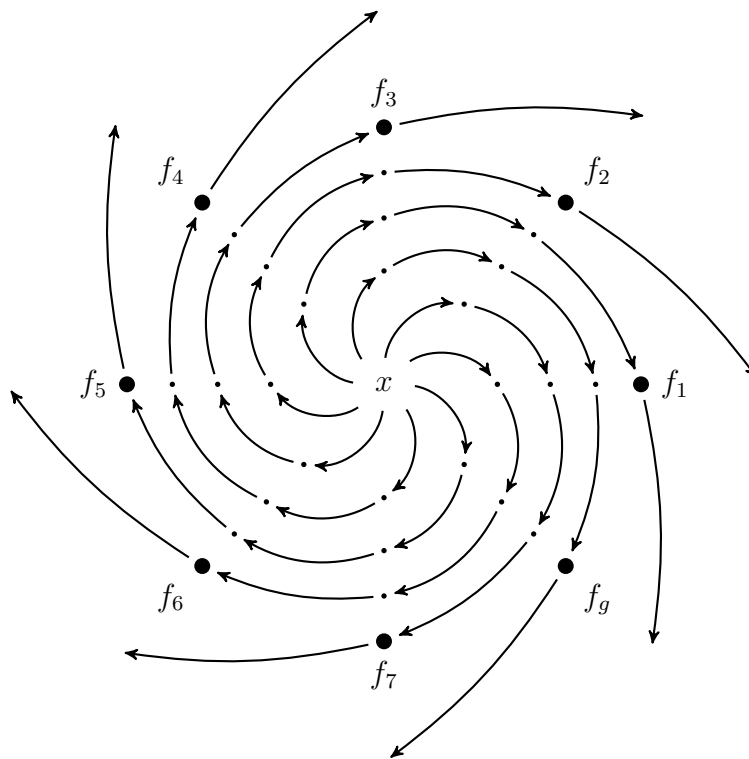
Representemos lo anterior con imágenes:

Si en la digráfica D , el vértice x se viese así:



Entonces, en $S_m^k(D)$, x se vería así:

Figura 2.2. Las flechas que salen de x , en D , se cambian por trayectorias en $S_m^k(D)$.



Si x tiene exgrado cero en D , también tiene exgrado cero en $S_m^k(D)$.

De manera natural, si consideramos $a = (u, v) \in F(D)$, entonces a es sustituida por una trayectoria dirigida de longitud zk para algún z , y si ahora tomamos los vértices $\{a_i \mid i \equiv 0 \pmod{k}\}$, junto con v , tenemos un k -núcleo para esa trayectoria.

Esta idea nos ayudará a encontrar un k -núcleo en $S_m^k(D)$.

Veamos la demostración.

Definición 2.5.5. Sean $D \in \mathcal{D}^*$ y $k \geq 2$. Al conjunto de todas las digráficas $S_m^k(D)$ lo denotamos por $\mathfrak{S}^k(D)$.

Teorema (Galeana Sánchez y Pastrana Ramírez) 2.5.1. Sean $D \in \mathcal{D}^*$, $k \geq 2$ y $S^k(D) \in \mathfrak{S}^k(D)$. Entonces $S^k(D)$ tiene k -núcleo.

Demostración. Sea $a \in F(D)$, definimos $\mathbb{K}_a = \{a_i \in V(\beta_a) \mid i \equiv 0 \pmod{k}\}$.

También se define $V^0(D) = \{u \in V(D) \mid \delta_D^+(u) = 0\}$.

Afirmación. $J = [V^0(D) \cup (\bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a)]$ es k -núcleo de $S^k(D)$.

Notemos que $V(D) \subset J$, pues si $u \in V(D)$ es tal que $\delta_D^+(u) \neq 0$, entonces tenemos alguna flecha $a = (u, v) \in F(D)$. Así, $a_0 = u \in \mathbb{K}_a \subset J$. Si u tiene exgrado cero en D , entonces pertenece a J por definición.

- J es k -independiente en $S^k(D)$.

Sean $x, y \in J$ con $x \neq y$. Debemos probar que $d_{S^k(D)}(x, y) \geq k$. Tenemos cuatro casos posibles:

I) $x, y \in V^0(D)$.

Entonces $d_{S^k(D)}(x, y) = \infty$, pues x tiene exgrado cero en D y por lo tanto, también en $S^k(D)$.

II) $x \in V^0(D)$ y $y \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a$.

Entonces $d_{S^k(D)}(x, y) = \infty$.

III) $x \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a$ y $y \in V^0(D) \subset V(D)$.

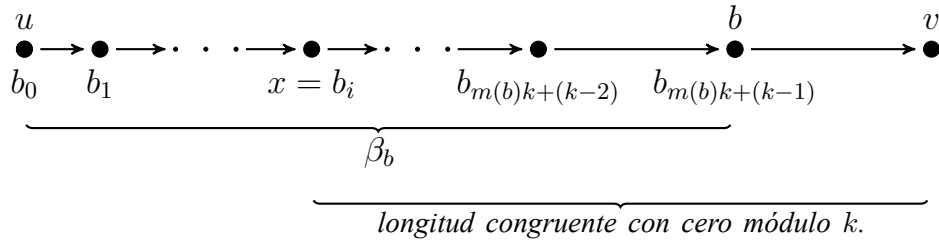
Si $x \in V(D)$, entonces $d_{S^k(D)}(x, y) \geq k$ pues todas las xy -trayectorias dirigidas en $S^k(D)$ provienen de flechas de D , y éstas se

volvieron trayectorias dirigidas de longitud congruente con cero módulo k en $S^k(D)$ (ver figura 2.1).

Entonces $d_{S^k(D)}(x, y) \equiv 0 \pmod{k^2}$ y no es cero, ya que x no es y .

Por consiguiente $d_{S^k(D)}(x, y) \geq k$.

Si $x \notin V(D)$, entonces $\exists b = (u, v) \in F(D)$ tal que $x \in \mathbb{K}_b$ y no sólo eso, además $x \in V(\beta_b)$ y $x = b_i$ para algún $i \neq 0$ e $i \equiv 0 \pmod{k}$.



Por construcción de $S^k(D)$, toda trayectoria dirigida que va de x a y pasa por v , entonces $d_{S^k(D)}(x, y) = d_{S^k(D)}(x, v) + d_{S^k(D)}(v, y)$.

Al ser $i \equiv 0 \pmod{k}$, se sigue que $d_{S^k(D)}(x, v) \equiv 0$ y es diferente de cero pues $v \notin V(\beta_b)$ y $x \in V(\beta_b)$ ³.

Por lo anterior $d_{S^k(D)}(x, y) \geq k$.

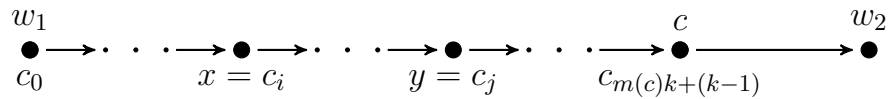
IV) $x, y \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a$.

En esta situación tenemos dos casos.

i) $x, y \in \mathbb{K}_c \subset V(\beta_c)$ para algún c .

Escribimos $c = (w_1, w_2)$. Así, $x = c_i, y = c_j$ con $i, j \equiv 0 \pmod{k}$.

Si $i < j$:



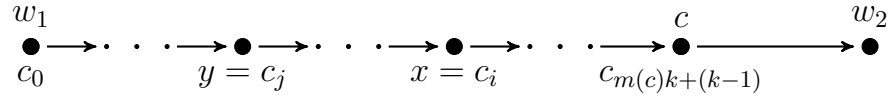
Entonces, la única trayectoria dirigida que va de x a y tiene longitud congruente con cero módulo k . Es única pues debe ser $(c_i, c_{i+1}, \dots, c_j)$.

Por ende $d_{S^k(D)}(x, y) \geq k$ (recuérdese que $x \neq y$).

²En realidad $d_{S^k(D)}(x, y) \equiv 0 \pmod{k}$ o $d_{S^k(D)}(x, y) = \infty$.

³También, en este caso $x \notin V(D)$ pero $v \in V(D)$.

Si $i > j$:



Cualquier xy -trayectoria dirigida en $S^k(D)$, necesariamente pasa por w_2 , así $d_{S^k(D)}(x, y) = d_{S^k(D)}(x, w_2) + d_{S^k(D)}(w_2, y)$.

Como $i \equiv 0 \pmod k$, se sigue que $d_{S^k(D)}(x, w_2) \equiv 0 \pmod k$.

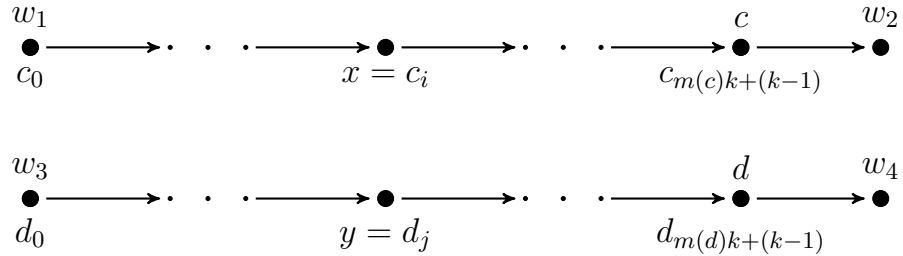
$d_{S^k(D)}(x, w_2) \neq 0$ pues $w_2 \notin V(\beta_c)$ (por definición de β_c), mientras que $x \in V(\beta_c)$.

Entonces $d_{S^k(D)}(x, w_2) \geq k$.

Por lo tanto $d_{S^k(D)}(x, y) \geq k$.

ii) $x \in \mathbb{K}_c \subset V(\beta_c)$ y $y \in \mathbb{K}_d \subset V(\beta_d)$ con $c \neq d$.

Escribimos $c = (w_1, w_2)$, $d = (w_3, w_4)$, $x = c_i$, $y = d_j$ con $i, j \equiv 0 \pmod k$.



Cualquier xy -trayectoria dirigida debe pasar por el vértice w_3 , es decir, $d_{S^k(D)}(x, y) = d_{S^k(D)}(x, w_3) + d_{S^k(D)}(w_3, y)$.

Podemos suponer que $x \neq w_3$ pues si x fuera igual a w_3 , tendríamos que $x, y \in \mathbb{K}_d$ y estaríamos en el anterior caso i .

Si $x = w_1$, entonces $d_{S^k(D)}(x, w_3) \geq k$ porque, como vimos antes, la distancia en $S^k(D)$ entre dos vértices cualesquiera de D , es congruente con cero módulo k (o infinita).

Luego, $d_{S^k(D)}(x, y) \geq k$.

Si $x \neq w_1$, cualquier xw_3 -trayectoria dirigida debe pasar por w_2 , entonces $d_{S^k(D)}(x, w_3) = d_{S^k(D)}(x, w_2) + d_{S^k(D)}(w_2, w_3)$.

Como $x = c_i$ e $i \equiv 0 \pmod k$, tenemos que $d_{S^k(D)}(x, w_2) \geq k$ (recuérdese que w_2 no es un vértice de β_c).

Esto último nos indica que $d_{S^k(D)}(x, w_3) \geq k$.

Así, $d_{S^k(D)}(x, y) \geq k$.

Hemos probado que J es k -independiente.

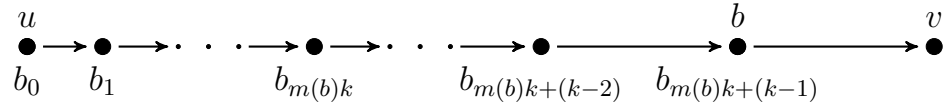
- J es $(k - 1)$ -absorbente en $S^k(D)$.

Consideremos x tal que $x \notin J$.

Probaremos que $\exists y \in J$ tal que $d_{S^k(D)}(x, y) \leq k - 1$.

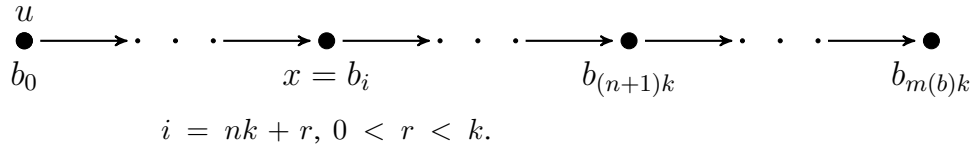
Si $x \notin J$, $x \notin V(D)$ ya que $V(D) \subset J$.

Entonces, por construcción de $S^k(D)$, $x \in V(\beta_c)$ para algún $b \in F(D)$ con $b = (u, v)$ y también, $x = b_i$ tal que $i \not\equiv 0 \pmod k$.

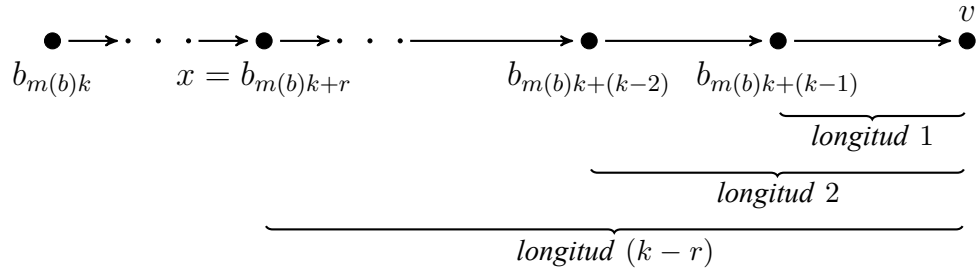


Tenemos que $i = nk + r$ con $0 < r < k$.

Si $i < m(b)k$, entonces x es $(k - 1)$ -absorbido por $b_{(n+1)k} \in J$ pues $d_{S^k(D)}(b_i = b_{nk+r}, b_{(n+1)k}) = (k - r) \leq k - 1$.



Si $i > m(b)k$, entonces $n = m(b)$ y x es $(k - 1)$ -absorbido por v porque $d_{S^k(D)}(b_i = b_{m(b)k+r}, v) = (k - r) \leq k - 1$. Sabemos que $v \in V(D) \subset J$.



Por lo tanto J es $(k - 1)$ -absorbente.

Así demostramos que J es k -núcleo de $S^k(D)$. \square

Como conclusión tenemos que $S_m^k(D)$ tiene k -núcleo sin importar quiénes sean D y m .

2.6. $Q^k(D)$

¿Cuál es la utilidad de la condición $\forall a^j \in F(D), a^j = a_{m(a)k+(k-1)}^j \in \mathfrak{C}_m^k(D)$?

Con eso se garantiza que $F(D) \subset \mathfrak{C}_m^k(D)$ y por lo tanto, $F(D) \subset V(S_m^k(D))$. Si recordamos que los vértices de la digráfica de líneas de D son las flechas de D , la digráfica que resultará de adherir $L(D)$ con $S_m^k(D)$ será interesante.

Definición 2.6.1. Sean $D \in \mathfrak{D}^*$, $k \geq 2$ y $m : F(D) \rightarrow \mathbb{N}$.

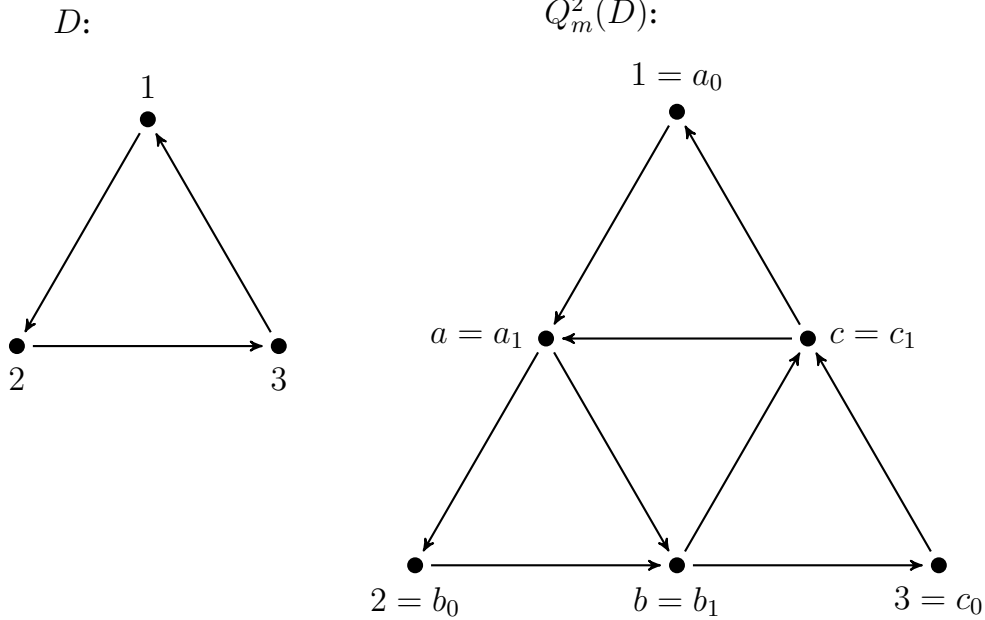
$Q_m^k(D) = S_m^k(D) \cup L(D)$, siempre que $F(D) \neq \emptyset$.

$Q_m^k(D) = S_m^k(D)$, cuando $F(D) = \emptyset$.

Ejemplos:

1) $V(D) = \{1, 2, 3\}$. $F(D) = \{a = (1, 2), b = (2, 3), c = (3, 1)\}$.

$k = 2$ y $\forall x \in F(D), m(x) = 0$.



De esa forma debe verse $Q_m^2(D)$ pues:

$V(Q_m^2(D)) = V(S_m^2(D)) \cup V(L(D))$, lo cual implica que $V(Q_m^2(D)) = V(S_m^2(D))$ porque $V(L(D)) = F(D) \subset V(S_m^2(D))$.

$F(Q_m^2(D)) = F(S_m^2(D)) \cup F(L(D)) = F(\beta_a) \cup F(\beta_b) \cup F(\beta_c) \cup \{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\} \cup \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$.

2) En el ejemplo anterior, podemos ver que:

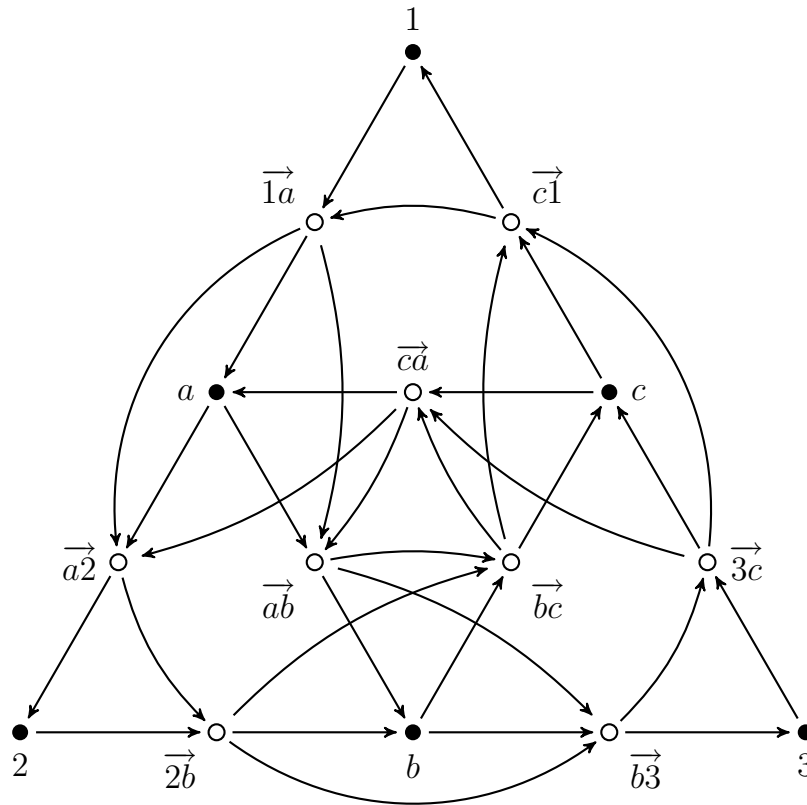
$$V(Q_m^2(D)) = \{1, 2, 3, a, b, c\}.$$

$$F(Q_m^2(D)) = \{(a_0, a_1), (b_0, b_1), (c_0, c_1), (a, 2), (b, 3), (c, 1), (a, b), (b, c), (c, a)\}.$$

También observamos que: $V(Q_m^2(D)) \cap F(Q_m^2(D)) = \emptyset$.

Por lo tanto, $Q_m^2(D) \in \mathfrak{D}^*$ y podemos construir $Q_p^2(Q_m^2(D))$ con $p(x) = 0 \forall x \in F(Q_m^2(D))$.

$Q_p^2(Q_m^2(D))$:



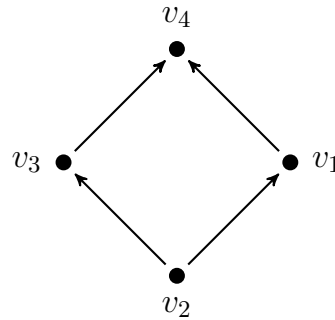
En el dibujo, los vértices negros representan a los vértices de $Q_m^2(D)$ y los blancos corresponden a los elementos de $F(Q_m^2(D))$.

Los vértices de $Q_p^2(Q_m^2(D))$ son los vértices negros junto con los blancos y sólo esos, pues p es la función constante cero.

Recordemos que para cualquier par de vértices, f_1, f_2 de $V(L(Q_m^2(D))) = F(Q_m^2(D))$, la flecha de f_1 a f_2 pertenece a $F(L(Q_m^2(D)))$ si y sólo si el vértice final de f_1 es el inicial de f_2 .

3) Sea D la siguiente digráfica.

D :

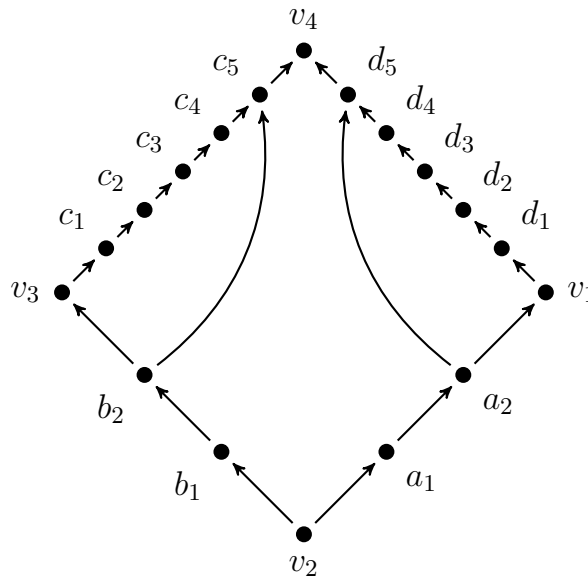


Sean $k = 3$, $a = \overrightarrow{v_2v_1}$, $b = \overrightarrow{v_2v_3}$, $c = \overrightarrow{v_3v_4}$ y $d = \overrightarrow{v_1v_4}$.

$m(a) = m(b) = 1$, $m(c) = m(d) = 0$.

Dibujemos $Q_m^3(D)$.

$Q_m^3(D)$:



Lema 2.6.1. Para cualesquiera $D \in \mathcal{D}^*$, $k \geq 2$ y $m : F(D) \rightarrow \mathbb{N}$, $S_m^k(D)$ es una digráfica generadora de $Q_m^k(D)$.

Demostración. Cuando $F(D) = \emptyset$, tenemos de inmediato que $V(S_m^k(D)) = V(Q_m^k(D))$ y que $F(S_m^k(D)) \subseteq F(Q_m^k(D))$.

Si $F(D) \neq \emptyset$:

$V(S_m^k(D)) = V(S_m^k(D)) \cup V(L(D)) = V(Q_m^k(D))$, pues $V(L(D)) = F(D) \subset V(S_m^k(D))$.

$F(Q_m^k(D)) = F(S_m^k(D)) \cup F(L(D))$, por lo tanto $F(S_m^k(D)) \subseteq F(Q_m^k(D))$. \square

Teorema (Galeana Sánchez y Pastrana Ramírez) 2.6.2. Sean $k \geq 2$, $D \in \mathfrak{D}^*$ tal que $F(D) \neq \emptyset$ y $S^k(D) \in \mathfrak{S}^k(D)$.

$Q^k(D) = S^k(D) \cup L(D)$ tiene k -núcleo.

Demostración. Sea J el mismo conjunto usado en la demostración del teorema 2.5.1.

Entonces J es $(k-1)$ -absorbente en $S^k(D)$ y, como sabemos que ésta es una digráfica generadora de $Q^k(D)$, J también es $(k-1)$ -absorbente en $Q^k(D)$.

Por ende sólo demostraremos que J es k -independiente en $Q^k(D)$.

Sean $x, y \in J$, $x \neq y$. Probaremos que $d_{Q^k(D)}(x, y) \geq k$.

I) $x, y \in V^0(D)$.

Tenemos que $d_{Q^k(D)}(x, y) = \infty$.

II) $x \in V^0(D)$, $y \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a$.

También, $d_{Q^k(D)}(x, y) = \infty$.

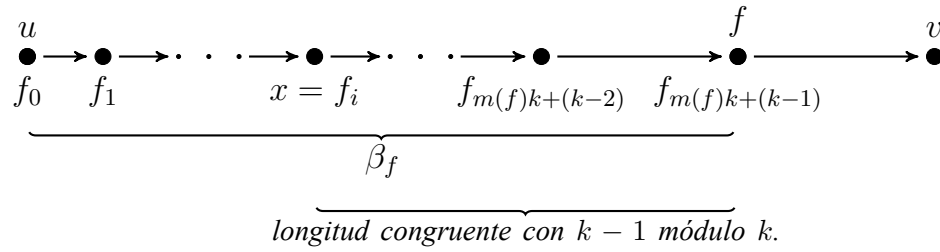
III) $x \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a$, $y \in V^0(D) \subset V(D)$.

Si $x \in V(D)$, tenemos que $\delta_D^+(x) > 0$ porque $x \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a$. De esta forma, si f_1, \dots, f_g son las flechas que salen de x en D , entonces cualquier trayectoria dirigida en $Q^k(D)$ que inicie en x , necesariamente pasa por algún vértice $f \in \{f_1, \dots, f_g\}$ (véase la figura 2.2).

Por construcción de $Q^k(D)$, $x = f_0$ y $f = f_{m(f)k+(k-1)}$.

Entonces tenemos que $d_{Q^k(D)}(x, y) = d_{Q^k(D)}(x, f) + d_{Q^k(D)}(f, y)$ para alguna flecha $f \in F(D)$.

Si $x \notin V(D)$, entonces $x \in \mathbb{K}_f$ para alguna f pero además $x = f_i$ con $f = (u, v) \in F(D)$, $i \equiv 0 \pmod k$, $i \neq 0$ y $f = f_{m(f)k+(k-1)}$.



Y otra vez, por construcción de $Q^k(D)$:

$$d_{Q^k(D)}(x, y) = d_{Q^k(D)}(x, f) + d_{Q^k(D)}(f, y).$$

Ya sea que $x \in V(D)$ o que $x \notin V(D)$, se sigue que existe $f \in F(D)$ de tal forma que $d_{Q^k(D)}(x, y) = d_{Q^k(D)}(x, f) + d_{Q^k(D)}(f, y)$; y en ambos casos, $d_{Q^k(D)}(x, f) \equiv k - 1 \pmod k$.

Como $V(D) \cap F(D) = \emptyset$, $d_{Q^k(D)}(f, y) \neq 0$.

Por consiguiente $d_{Q^k(D)}(x, f) \geq k - 1$ y $d_{Q^k(D)}(f, y) \geq 1$.

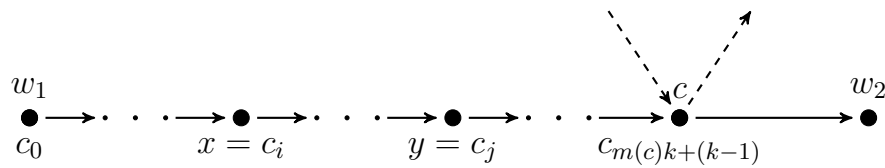
Luego, $d_{Q^k(D)}(x, y) \geq k$.

IV) $x, y \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a$.

i) $x, y \in \mathbb{K}_c \subset V(\beta_c)$ para algún $c = (w_1, w_2)$.

Entonces $x = c_i, y = c_j$ con $i, j \equiv 0 \pmod k$.

Si $i < j$:

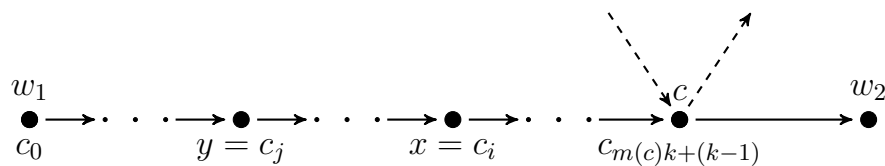


En $Q^k(D)$, la única xy -trayectoria dirigida es $(c_i, c_{i+1}, \dots, c_j)$.

Por lo tanto, $d_{Q^k(D)}(x, y) \equiv 0 \pmod k$ y no es cero pues $x \neq y$.

Así, $d_{Q^k(D)}(x, y) \geq k$.

Si $i > j$:



De nuevo, por construcción de $Q^k(D)$, para ir de x a y , hay que pasar primero por c .

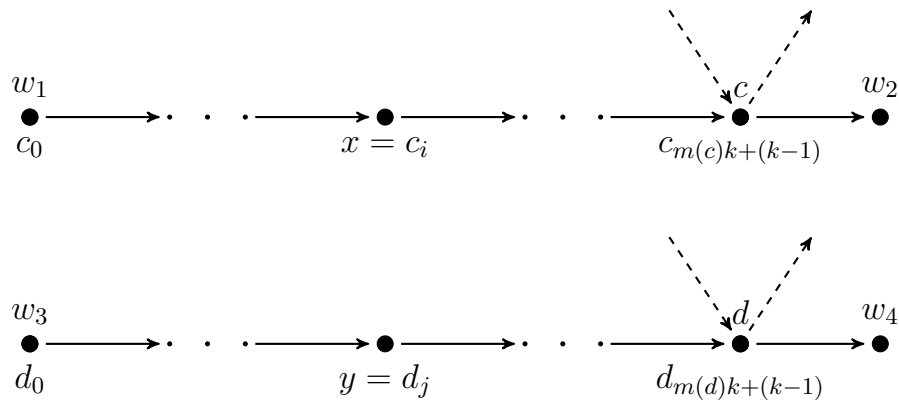
Por lo anterior, $d_{Q^k(D)}(x, y) = d_{Q^k(D)}(x, c) + d_{Q^k(D)}(c, y)$.

Tenemos que $d_{Q^k(D)}(x, c) \equiv (k-1) \pmod k$ y $d_{Q^k(D)}(c, y) \geq 1$.

Entonces $d_{Q^k(D)}(x, y) \geq k$.

ii) $x \in \mathbb{K}_c, y \in \mathbb{K}_d$ con $c \neq d$.

Escribimos $c = (w_1, w_2)$, $d = (w_3, w_4)$, $x = c_i$, $y = d_j$, $i, j \equiv 0 \pmod k$.



Si $i = 0$, se puede cambiar de c para tener que:

$$d_{Q^k(D)}(x, y) = d_{Q^k(D)}(x, c) + d_{Q^k(D)}(c, y).$$

Si $i \neq 0$, nos quedamos con la misma c .

Tenemos que $d_{Q^k(D)}(x, c) \equiv (k-1) \pmod k$ y $d_{Q^k(D)}(c, y) \geq 1$.

Por lo tanto $d_{Q^k(D)}(x, y) \geq k$

Hemos demostrado que J es k -independiente en $Q^k(D)$. □

2.7. $R^k(D)$

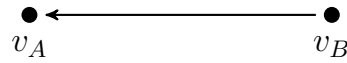
Definición 2.7.1. Sean $D \in \mathfrak{D}^*$, $k \geq 2$, $m : F(D) \rightarrow \mathbb{N}$.

$$R_m^k(D) = S_m^k(D) \cup D.$$

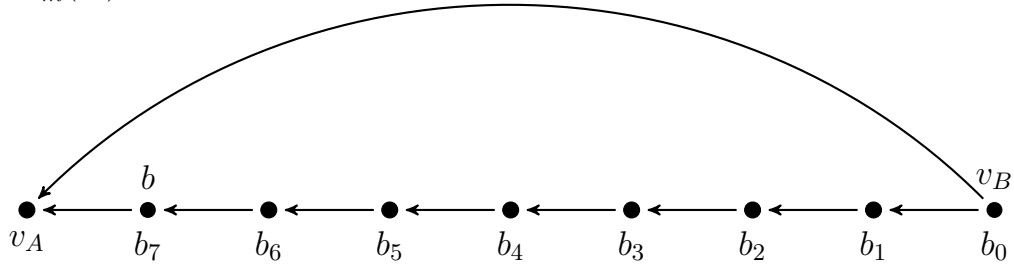
Ejemplos:

1) $V(D) = \{v_A, v_B\}$, $F(D) = \{b = (v_B, v_A)\}$, $k = 4$, $m(b) = 1$.

D :

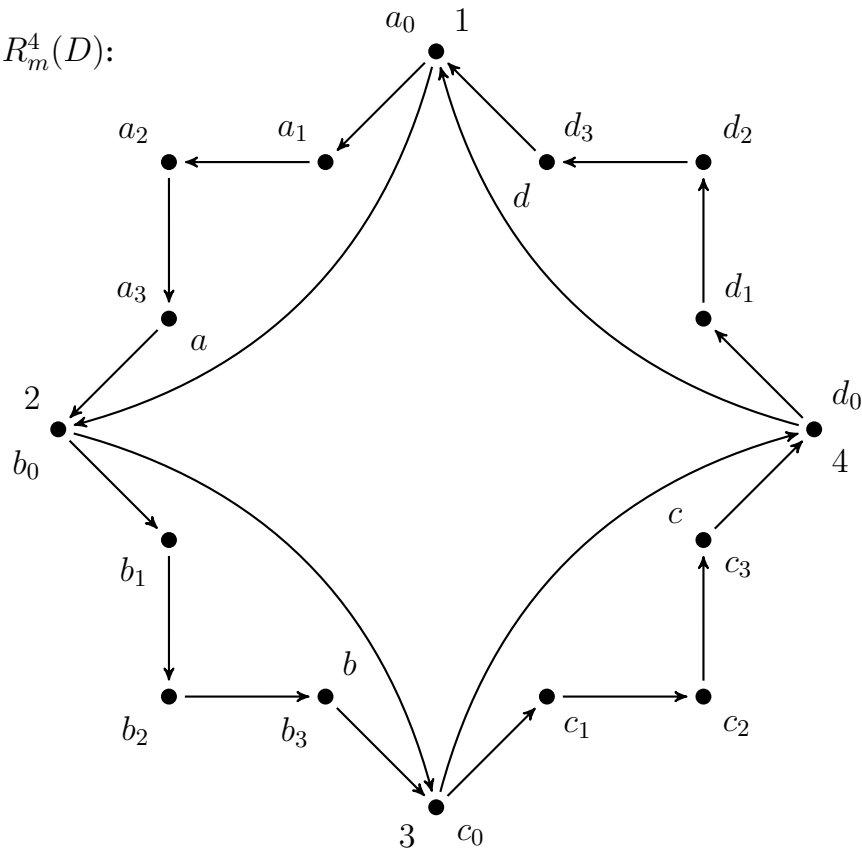


$R_m^4(D)$:



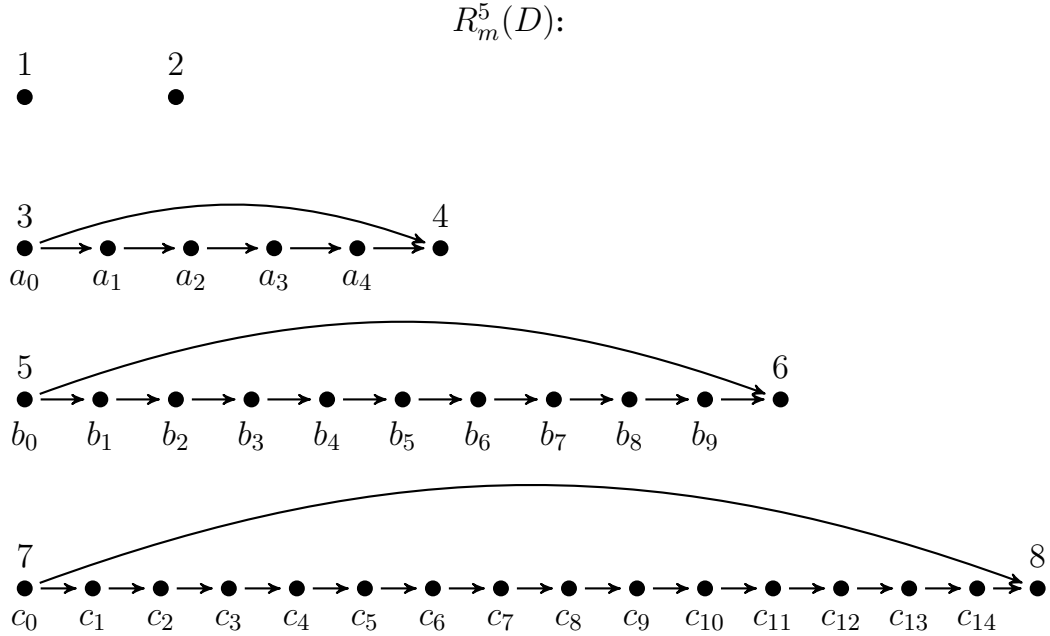
- 2) $V(D) = \{1, 2, 3, 4\}$, $F(D) = \{a = (1, 2), b = (2, 3), c = (3, 4), d = (4, 1)\}$,
 $k = 4$, m la función constante 0.

$R_m^4(D)$:



En este ejemplo y en el anterior, podemos darnos cuenta que, en general,
 $R_m^k(D) \notin \mathcal{D}^*$.

- 3) $V(D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $F(D) = \{a = (3, 4), b = (5, 6), c = (7, 8)\}$.
 $m(a) = 0$, $m(b) = 1$, $m(c) = 2$, $k = 5$.



Sea $u \in V(D)$:

Si $\delta_D^+(u) = 0$, por definición de $S_m^k(D)$, $\delta_{S_m^k(D)}^+(u) = 0$ y como $R_m^k(D) = D \cup S_m^k(D)$, se sigue que $\delta_{R_m^k(D)}^+(u) = 0$.

Si $\delta_D^+(u) > 0$, por cada flecha $f = (u, v) \in F(D)$, tenemos las flechas (u, f_1) , $(u, v) \in F(R_m^k(D))$ y sólo estas dos flechas.

Por lo tanto si $\delta_D^+(u) = e$, entonces $\delta_{R_m^k(D)}^+(u) = 2e$.

Análogamente, si $\delta_D^-(u) = e$, entonces $\delta_{R_m^k(D)}^-(u) = 2e$.

Pues, si $\delta_D^-(u) > 0$, por cada flecha $f = (v, u) \in F(D)$, tenemos las flechas (f, u) , $(v, u) \in F(R_m^k(D))$.

La demostración de que $R_m^k(D)$ tiene k -núcleo no es tan fácil como la de $S_m^k(D)$.

Teorema (Galeana Sánchez y Pastrana Ramírez) 2.7.1. Sean $D \in \mathcal{D}^*$, $k \geq 2$, $S^k(D) \in \mathfrak{S}^k(D)$.

$R^k(D) = S^k(D) \cup D$ tiene k -núcleo.

Demostración. Para cada $a = (u, v) \in F(D)$ se define:

$$\mathbb{K}_a = \{a_i \in V(\beta_a) \mid i \equiv 0 \pmod k \text{ e } i \neq 0\} \cup \{v\}, \text{ si } \delta_D^+(v) = 0.$$

$$\mathbb{K}_a = \{a_i \in V(\beta_a) \mid i \equiv 1 \pmod k\}, \text{ si } \delta_D^+(v) \neq 0.$$

$$A_D = \{v \in V(D) \mid \delta_D^-(v) = \delta_D^+(v) = 0\}.$$

$$\text{Sea } J = A_D \cup \left(\bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a\right).$$

Afirmación. J es k -núcleo de $R^k(D)$.

- J es k -independiente.

Sean $x, y \in J$, $x \neq y$. Por demostrar que $D_{R^k(D)}(x, y) \geq k$.

$$\text{I) } x, y \in A_D.$$

$d_{R^k(D)}(x, y) = \infty$ pues no hay ninguna xy -trayectoria dirigida en D y por lo tanto, tampoco la hay en $R^k(D)$.

$$\text{II) } x \in A_D, y \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a.$$

Igual que en el caso anterior, $d_{R^k(D)}(x, y) = \infty$ pues no hay ninguna xy -trayectoria dirigida en $R^k(D)$.

$$\text{III) } x \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a, y \in A_D.$$

Tanto el ingrado como el exgrado de y en $R^k(D)$ son cero y por lo tanto $d_{R^k(D)}(x, y) = \infty$, al no existir ninguna xy -trayectoria dirigida en $R^k(D)$.

$$\text{IV) } x, y \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a.$$

Tenemos dos casos posibles:

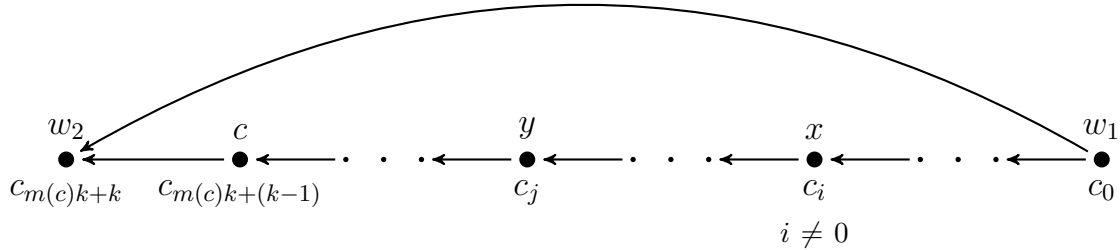
$$i) \ x, y \in \mathbb{K}_c, c = (w_1, w_2).$$

Cuando $d_D^+(w_2) = 0$:

$$\mathbb{K}_c = \{c_i \in V(\beta_c) \mid i \equiv 0 \pmod k \text{ e } i \neq 0\} \cup \{w_2\}.$$

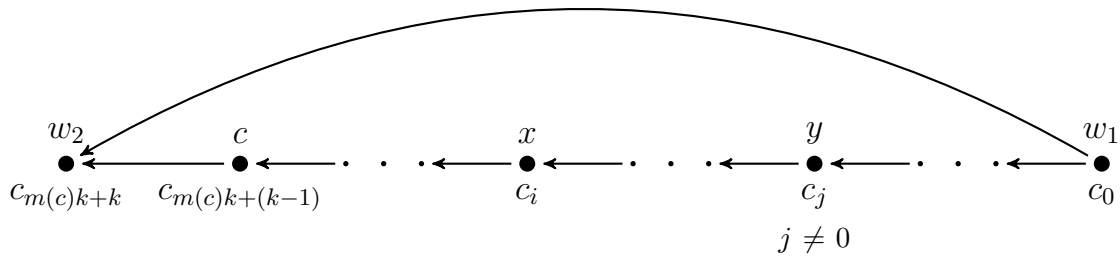
Escribimos $w_2 = c_{m(c)k+k} = c_{(m(c)+1)k}$. Entonces $x = c_i, y = c_j$, con $i, j \equiv 0 \pmod k, i \neq 0 \neq j$.

Si $i < j$, tenemos:



Por construcción de $R^k(D)$, la única xy -trayectoria dirigida que hay es $(c_i, c_{i+1}, \dots, c_j)$ y por lo tanto, $d_{R^k(D)}(x, y) \equiv 0 \pmod k$. Luego, $d_{R^k(D)}(x, y) \geq k$.

Si $i > j$, tenemos:



Entonces, $d_{R^k(D)}(x, y) = d_{R^k(D)}(x, w_2) + d_{R^k(D)}(w_2, y)$.

Pero sabemos que $\delta_D^+(w_2) = 0 = \delta_{R^k(D)}^+(w_2)$.

Por lo tanto $d_{R^k(D)}(w_2, y) = \infty$.

Por consiguiente $d_{R^k(D)}(x, y) \geq k$.

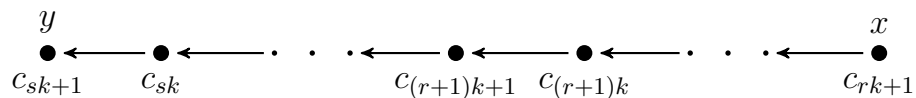
Cuando $\delta_D^+(w_2) > 0$:

$$\mathbb{K}_c = \{c_i \in V(\beta_c) \mid i \equiv 1 \pmod k\}.$$

Escribimos $w_2 = c_{(m(c)+1)k}$.

Ahora tenemos que $x = c_i, y = c_j, i, j \equiv 1 \pmod k$, es decir, $x = c_{rk+1}, y = c_{sk+1}$.

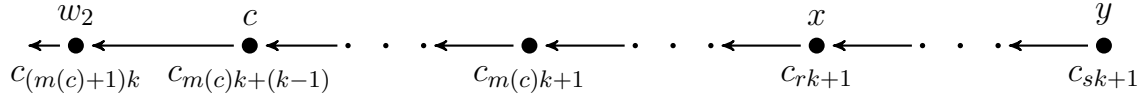
Si $i < j$:



De nuevo, $d_{R^k(D)}(x, y) \equiv 0 \pmod k$.

Así, $d_{R^k(D)}(x, y) \geq k$.

Si $i > j$:



Entonces $d_{R^k(D)}(x, y) = d_{R^k(D)}(x, c_{(r+1)k})^4 + d_{R^k(D)}(c_{(r+1)k}, y)$.

Sabemos que $d_{R^k(D)}(x = c_{rk+1}, c_{(r+1)k}) = k - 1$.

Y que $d_{R^k(D)}(c_{(r+1)k}, y = c_{sk+1}) \geq 1$.

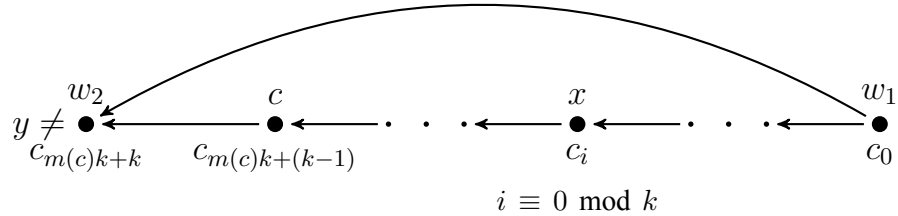
De lo anterior deducimos que $d_{R^k(D)}(x, y) \geq k$

Con esto se termina el caso i .

ii) $x \in \mathbb{K}_c, y \in \mathbb{K}_d$, con $c \neq d, c = (w_1, w_2), d = (w_3, w_4)$.

Cuando $\delta_D^+(w_2) = 0$:

Escribimos $w_2 = c_{m(c)k+k}$, así tenemos que $x = c_i$ con $i \equiv 0 \pmod k$ e $i \neq 0$.



Podemos decir que $y \neq c_{sk}$ para todo s , porque si y fuese igual a c_{sk} para algún s , tanto x como y pertenecerían a \mathbb{K}_c y estaríamos en el caso anterior.

Entonces, $d_{R^k(D)}(x, y) = d_{R^k(D)}(x, w_2) + d_{R^k(D)}(w_2, y)$.

Como $\delta_{R^k(D)}^+(w_2) = 0, d_{R^k(D)}(w_2, y) = \infty$.

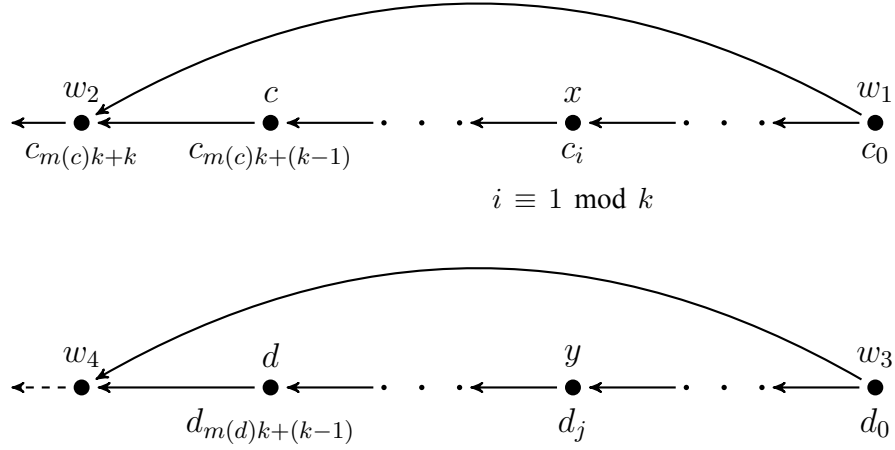
Por lo tanto $d_{R^k(D)}(x, y) \geq k$.

Cuando $\delta_D^+(w_2) > 0$:

Ahora $x = c_i, i \equiv 1 \pmod k; y = d_j$.

Decimos que $w_2 = c_{m(c)k+k}$.

⁴Nótese que $c_{(r+1)k}$ puede ser igual a w_2 .



Entonces, $d_{R^k(D)}(x, y) = d_{R^k(D)}(x, w_2) + d_{R^k(D)}(w_2, y)$.

Sabemos que $d_{R^k(D)}(x, w_2) \equiv (k-1) \pmod{k}$.

$w_2 \neq y$ pues para cada flecha $f = (w_2, z) \in F(D)$, se tiene que $w_2 = f_0$ y por definición de \mathbb{K}_f , $f_0 \notin \mathbb{K}_f$. Por lo tanto $w_2 \notin \bigcup_{a \in F(D)} (\mathbb{K}_a)$.

De lo anterior, $d_{R^k(D)}(w_2, y) \geq 1$.

Por ende $d_{R^k(D)}(x, y) \geq k$.

Concluimos que J es k -independiente en $R^k(D)$.

- J es $(k-1)$ -absorbente.

Sea $x \in V(R^k(D)) - J$. Debemos demostrar que $\exists y \in J$ tal que $d_{R^k}(x, y) \leq k-1$.

Obsérvese que A_D también es igual a $\{v \in V(R^k(D)) \mid \delta_{R^k(D)}^+(v) = \delta_{R^k(D)}^-(v) = 0\}$.

Por lo anterior, $x \in V(\beta_c) \cup \{w_2\}$ para alguna $c = (w_1, w_2) \in F(D)$, es decir, $x \in \{c_0 = w_1, c_1 \dots c, w_2\}$ con $c \in F(D)$.

Escribamos $w_2 = c_{m(c)k+k}$.

Si $\delta_D^+(w_2) = 0$:

Entonces $x \notin \{c_k, c_{2k} \dots c_{m(c)k}, c_{m(c)k+k}\} = \mathbb{K}_c$.

Se sigue que $x = c_0$ o $x = c_{rk+j}$, con $0 \leq r \leq m(c)$ y $1 \leq j \leq k-1$.

Si $x = c_0$, entonces $d_{R^k(D)}(x, w_2) = 1 \leq k-1$ y $w_2 \in J$.

Si $x = c_{rk+j}$, entonces $d_{R^k(D)}(x, c_{(r+1)k}) = (k-j) \leq k-1$ y $c_{(r+1)k} \in J$.

Ahora, si $\delta_D^+(w_2) > 0$:

Entonces $x \notin \{c_1, c_{k+1}, c_{2k+1} \dots c_{m(c)k+1}\} = \mathbb{K}_c$.

Sabemos que $x = c_i$ para algún i tal que $0 \leq i \leq m(c)k + k$.

Haremos dos casos:

a) $0 \leq i \leq m(c)k$.

Si $x = c_{rk}$ con $r \in \{0, 1, \dots, m(c)\}$, $d_{R^k(D)}(x, c_{rk+1}) = 1 \leq k - 1$ y $c_{rk+1} \in J^5$.

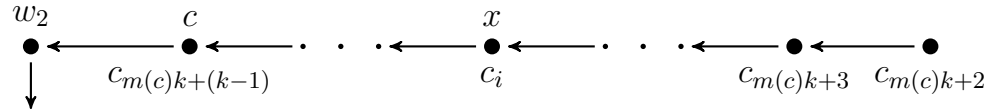
Si $x = c_{rk+j}$, con $r \in \{0, 1, \dots, m(c) - 1\}$ y $2 \leq j \leq k - 1^6$, entonces $d_{R^k(D)}(x, c_{(r+1)k+1}) = [(r+1)k+1] - [rk+j] = k+1-j$.

Como $2 \leq j$, $k+1-(k-1) \leq j$, por consiguiente $k+1-j \leq k-1$.

Por lo tanto $d_{R^k(D)}(x, c_{(r+1)k+1}) \leq k-1$ y $c_{(r+1)k+1} \in J$.

b) $m(c)k < i \leq m(c)k + k$.

Tenemos que $x \neq c_{m(c)k+1}$ pues $x \notin \mathbb{K}_c$, entonces $x \in \{c_{m(c)k+2}, c_{m(c)k+3} \dots c_{m(c)k+(k-1)}, c_{m(c)k+k} = w_2\}$.



Como $\delta_D^+(w_2) > 0$, existe $d = (w_2, w_3) \in F(D)$.

Si $\delta_D^+(w_3) = 0$, $w_3 \in \mathbb{K}_d \subset J$.

Sabemos que $d_{R^k(D)}(x, w_3) = d_{R^k(D)}(x, w_2) + d_{R^k(D)}(w_2, w_3)$.

Pero $d_{R^k(D)}(x, w_2) \leq k - 2$ y $d_{R^k(D)}(w_2, w_3) = 1$.

Luego, $d_{R^k(D)}(x, w_3) \leq k - 1$.

Si $\delta_D^+(w_3) > 0$, entonces $d_1 \in \mathbb{K}_d \subset J$.

Similarmente, $d_{R^k(D)}(x, d_1) = d_{R^k(D)}(x, w_2) + d_{R^k(D)}(w_2, d_1)$.

Entonces $d_{R^k(D)}(x, d_1) \leq k - 1$.

Por lo tanto J es $(k - 1)$ -absorbente en $R^k(D)$. □

⁵Si $k = 2$, aquí terminaría el caso cuando $i \leq m(c)k$.

⁶Esta desigualdad sólo tiene sentido cuando $k \geq 3$. Si k fuera igual a 2, no estaríamos en esta situación.

2.8. $T^k(D)$

Definición 2.8.1. Sean $D \in \mathfrak{D}^*$, $m : F(D) \rightarrow \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

$$T_m^k(D) = S_m^k(D) \cup D \cup L(D), \text{ si } F(D) \neq \emptyset.$$

$$T_m^k(D) = S_m^k(D) \cup D, \text{ si } F(D) = \emptyset.$$

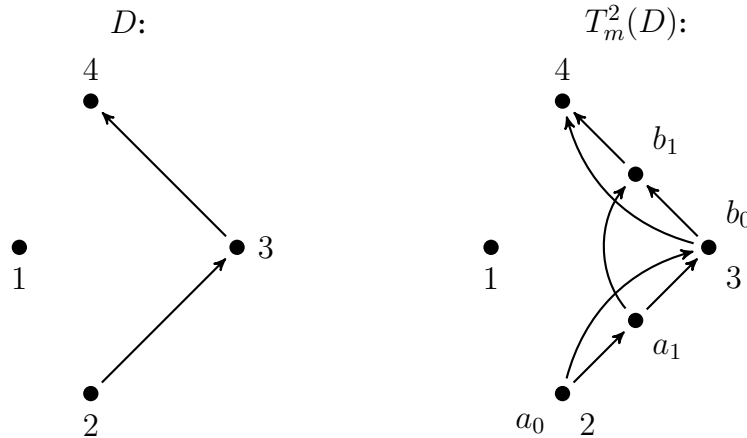
Esta definición equivale a decir que $T_m^k(D) = Q_m^k(D) \cup D$.

De las definiciones 2.7.1 y 2.8.1 tenemos que $V(T_m^k(D)) = V(R_m^k(D))$.

La diferencia entre $T_m^k(D)$ y $R_m^k(D)$ es añadir, posiblemente, flechas entre los elementos de $F(D) \subset V(T_m^k(D))$.

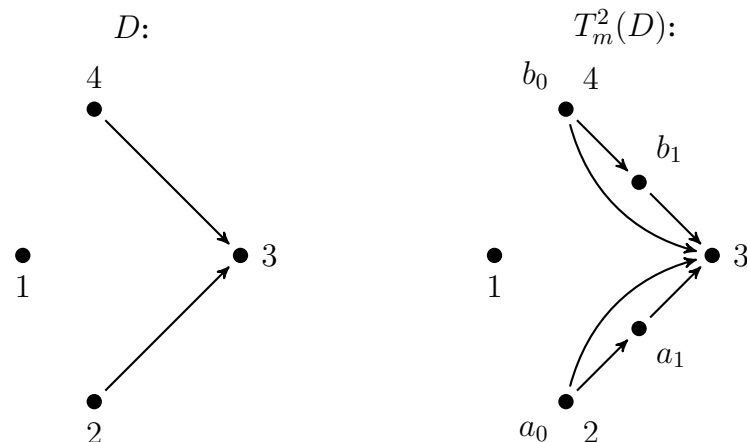
Ejemplos:

- 1) $V(D) = \{1, 2, 3, 4\}$, $F(D) = \{a = (2, 3), b = (3, 4)\}$, $k = 2$, m la función constante cero.

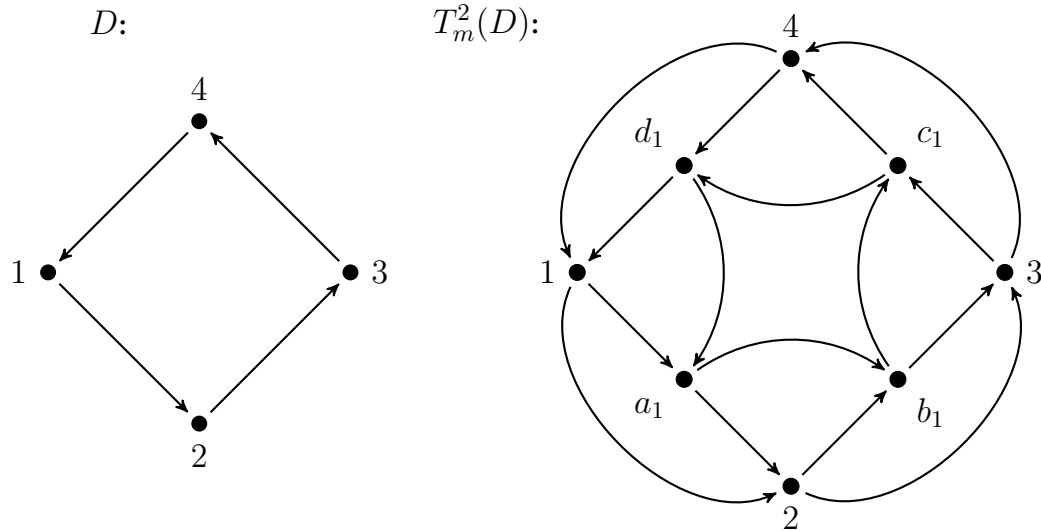


- 2) $V(D) = \{1, 2, 3, 4\}$, $F(D) = \{a = (2, 3), b = (4, 3)\}$, $k = 2$, m la función constante cero.

Como vemos, esta digráfica D es casi idéntica a la del ejemplo anterior, sólo hemos cambiado la dirección de la flecha b .



- 3) $V(D) = \{1, 2, 3, 4\}$, $F(D) = \{a = (1, 2), b = (2, 3), c = (3, 4), d = (4, 1)\}$,
 $k = 2$, m la función constante cero.



Veamos que $T_m^2(D)$ no tiene 2-núcleo.

Supongamos J es 2-núcleo.

Si el vértice 1 pertenece a J , los vértices d_1 y 4 son absorbidos por 1; por la 2-independencia, $a_1, 2 \notin J$ y $b_1 \in J$ pues al vértice a_1 ya sólo le queda ser absorbido por b_1 , entonces $3, c_1 \notin J$. Como 4 y d_1 no pertenecen a J pues $1 \in J$, es imposible absorber a c_1 .

Por consiguiente $1 \notin J$.

Por simetría, podemos dar una argumentación totalmente análoga para demostrar que $2, 3, 4 \notin J$.

Para que J sea absorbente, necesitamos que los vértices a_1, b_1, c_1 y d_1 pertenezcan a J para absorber a 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Pero si a_1, b_1, c_1 y d_1 perteneciesen a J , entonces J no sería independiente.

Por lo tanto no puede existir un 2-núcleo.

Acabamos de ver que $T_m^k(D)$ no necesariamente tiene k -núcleo para $k = 2$, pero se puede probar que si $k \geq 3$, entonces sí tiene k -núcleo.

Observe que si $F(D) = \emptyset$, entonces $T_m^k(D) = R_m^k(D)$ y de hecho $T_m^k(D) = R_m^k(D) = Q_m^k(D) = S_m^k(D) = D$.

Teorema (Galeana Sánchez y Pastrana Ramírez) 2.8.1. Sean $k \geq 3$, $D \in \mathfrak{D}^*$ tal que $F(D) \neq \emptyset$ y $S^k(D) \in \mathfrak{S}^k(D)$.

$T^k(D) = S^k(D) \cup D \cup L(D)$ tiene k -núcleo.

Demostración. Para cada $a = (u, v) \in F(D)$, se define el mismo conjunto usado en la demostración del teorema 2.7.1, es decir:

$$\mathbb{K}_a = \{a_i \in V(\beta_a) \mid i \equiv 0 \pmod{k}, i \neq 0\} \cup \{v\}, \text{ si } \delta_D^+(v) = 0.$$

$$\mathbb{K}_a = \{a_i \in V(\beta_a) \mid i \equiv 1 \pmod{k}\}, \text{ si } \delta_D^+(v) > 0.$$

$$A_D = \{v \in V(D) \mid \delta_D^+(v) = \delta_D^-(v) = 0\}.$$

$$J = A_D \cup \left(\bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a \right).$$

Afirmación. J es k -núcleo de $T^k(D)$.

- J es k -independiente.

Sean $x, y \in J$, $x \neq y$. Demostremos que $d_{T^k(D)}(x, y) \geq k$.

Si $x \in A_D$ o $y \in A_D$, exactamente igual que en la demostración del teorema 2.7.1, se tiene $d_{T^k(D)}(x, y) = \infty$.

Nos falta ver qué sucede si $x, y \in \bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a$.

i) $x, y \in \mathbb{K}_c$, $c = (w_1, w_2) \in F(D)$.

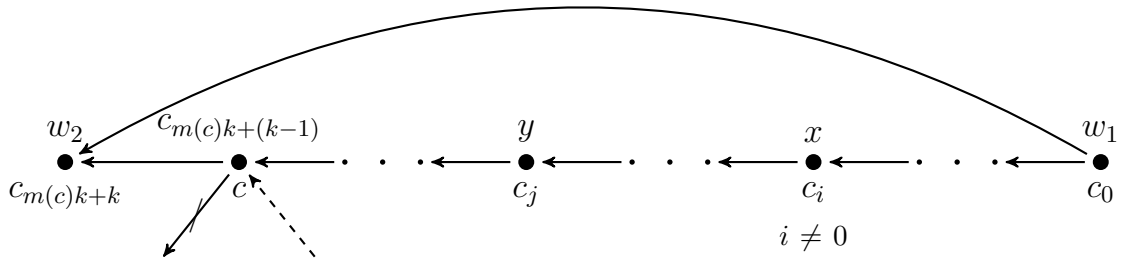
Si $\delta_D^+(w_2) = 0$:

Escribimos $w_2 = c_{m(c)k+k}$, así, $\mathbb{K}_c = \{c_k, c_{2k} \dots c_{m(c)k}, c_{m(c)k+k}\}$.

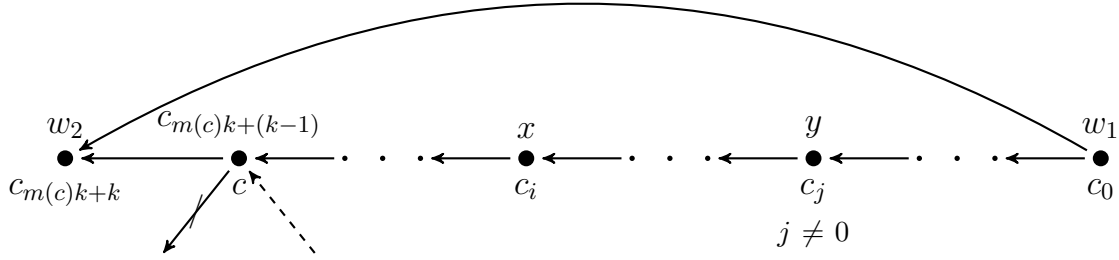
Luego, $x = c_i$, $y = c_j$ con $i, j \equiv 0 \pmod{k}$, $i \neq 0 \neq j$.

Si $i < j$, entonces $d_{T^k(D)}(x, y) \equiv 0 \pmod{k}$ pues la trayectoria dirigida más corta de x a y es $(c_i, c_{i+1} \dots c_{j-1}, c_j)$ y además es la única en $T^k(D)$.

De lo anterior deducimos que $d_{T^k(D)}(x, y) \geq k$.



Si $i > j$:



Como $\delta_D^+(w_2) = 0$, no podemos tener ninguna flecha (w_2, z) en D , por lo cual $\delta_{T^k(D)}^+(c) = 0$.

Por lo tanto, no hay ninguna xy -trayectoria dirigida en $T^k(D)$.

Entonces $d_{T^k(D)}(x, y) = \infty$.

Si no supiéramos que $\delta_{T^k(D)}^+(c) = 0$ podríamos argumentar de la siguiente manera:

Si $x = w_2$, entonces $d_{T^k(D)}(x, y) = \infty$.

Si $x \neq w_2$, $d_{T^k(D)}(x, y) = d_{T^k(D)}(x, c) + d_{T^k(D)}(c, y)$.

Sabemos que $d_{T^k(D)}(x, c) \equiv (k - 1) \pmod k$ y $d_{T^k(D)}(c, y) \geq 1$.

Luego, $d_{T^k(D)}(x, y) \geq k$.

Todo lo anterior es cuando $\delta_D^+(w_2) = 0$.

Ahora supongamos que $\delta_D^+(w_2) > 0$.

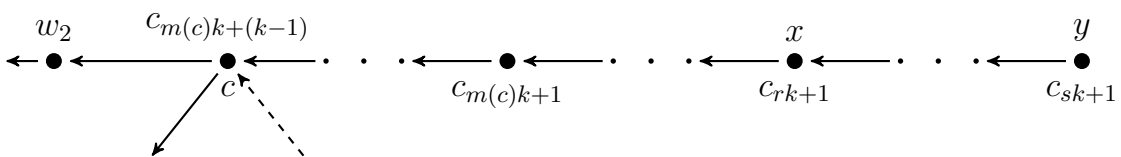
Tenemos que $\mathbb{K}_c = \{c_1, c_{k+1}, c_{2k+1} \dots c_{m(c)k+1}\} \subset V(\beta_c)$.

Entonces $x = c_i = c_{rk+1}$, $y = c_j = c_{sk+1}$.

Si $i < j$, entonces $d_{T^k(D)}(x, y) = (sk + 1) - (rk + 1) = (s - r)k \equiv 0 \pmod k$.

Por consiguiente $d_{T^k(D)}(x, y) \geq k$.

Si $i > j$:

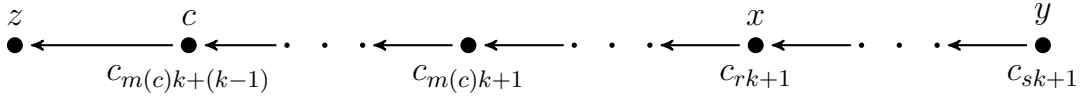


Por construcción de $T^k(D)$, $d_{T^k(D)}(x, y) = d_{T^k(D)}(x, c) + d_{T^k(D)}(c, y)$.

Sabemos que $d_{T^k(D)}(x, c) = [m(c)k + (k - 1)] - (rk + 1) = [m(c) - r]k + (k - 2) \equiv (k - 2) \pmod{k}$.

Por lo anterior $d_{T^k(D)}(x, c) \geq (k - 2)$.

En $T^k(D)$, las flechas que salen de c son de la forma (c, z) , con $z = w_2$ o $z \in F(D)$.



Entonces $d_{T^k(D)}(c, y) = d_{T^k(D)}(c, z) + d_{T^k(D)}(z, y)$.

Si $z = w_2$, sabemos que $z \neq c$ y además que $z \neq y$ pues, en este caso $y = c_{sk+1} \in \mathbb{K}_c \subset V(\beta_c)$ y $z = w_2 \notin V(\beta_c)$.

Por lo tanto $d_{T^k(D)}(c, z) = 1$ y $d_{T^k(D)}(z, y) \geq 1$.

Si $z \in F(D)$, tenemos que $c \neq z$ ya que la flecha (c, z) proviene de $L(D)$ ⁷.

También $z \neq y$ porque si z fuera igual a y , tendríamos que tanto $c \in F(D)$ como $z \in F(D)$ pertenecerían a $V(\beta_c)$, lo cual no es posible dado que $c \neq z$.

Por ende $d_{T^k(D)}(c, z) = 1$ y $d_{T^k(D)}(z, y) \geq 1$.

En resumen, $d_{T^k(D)}(x, y) = d_{T^k(D)}(x, c) + d_{T^k(D)}(c, z) + d_{T^k(D)}(z, y)$ y hemos demostrado que $d_{T^k(D)}(x, c) \geq (k - 2)$, $d_{T^k(D)}(c, z) = 1$ y $d_{T^k(D)}(z, y) \geq 1$.

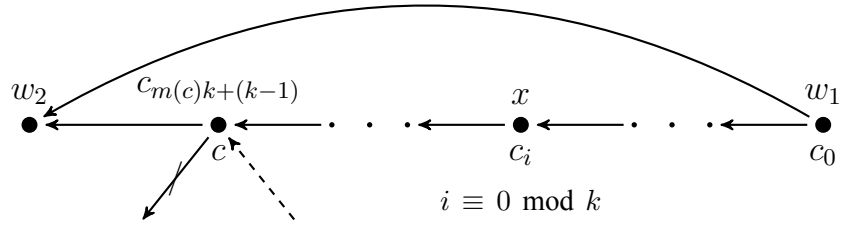
Luego, $d_{T^k(D)}(x, y) \geq k$.

ii) $x \in \mathbb{K}_c$, $y \in \mathbb{K}_d$, $c = (w_1, w_2) \in F(D)$, $d = (w_3, w_4) \in F(D)$, $c \neq d$.

Si $\delta_D^+(w_2) = 0$:

Entonces $\mathbb{K}_c = \{c_k, c_{2k} \dots c_{m(c)k}, w_2\}$ y $x = c_i$, $i \neq 0$ e $i \equiv 0 \pmod{k}$ o $x = w_2$.

⁷Si en $L(D)$ tuviéramos la flecha (c, c) , esto implicaría que el vértice final de c es igual al vértice inicial de c , es decir, $w_2 = w_1$ y tendríamos el lazo $c = (w_1, w_1)$ en $F(D)$, lo cual es imposible.



Tenemos que $y \notin \mathbb{K}_c$ y que $\delta_{T^k(D)}^+(c) = 0$.

Por construcción de $T^k(D)$, se sigue que $d_{T^k(D)}(x, y) = \infty$.

Si no supiéramos que $\delta_{T^k(D)}^+(c) = 0$:

Podríamos decir que $d_{T^k(D)}(x, y) = \infty$, si $x = w_2$.

Si $x \neq w_2$, se tendría que $d_{T^k(D)}(x, y) = d_{T^k(D)}(x, c) + d_{T^k(D)}(c, y)$.

Sabemos que $d_{T^k(D)}(x, c) \geq k - 1$.

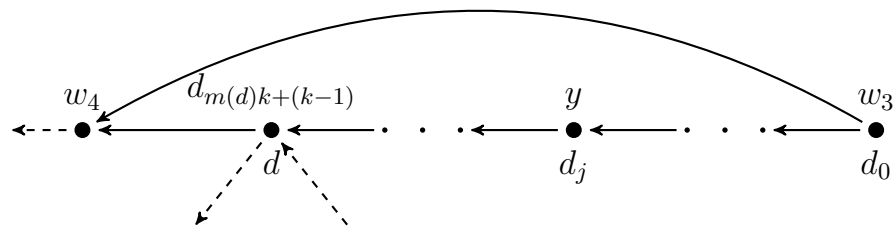
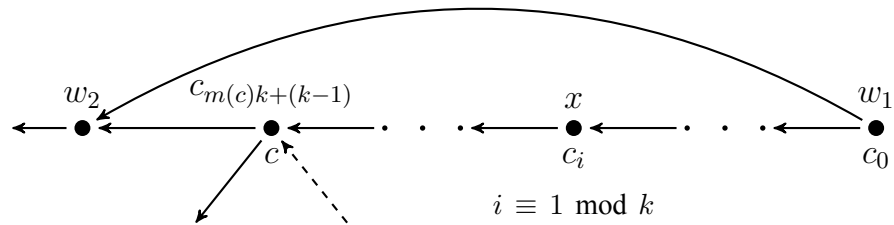
$c \neq y$ pues si c fuera igual a y , como $y \in \{w_3 = d_0, d_1 \dots d, w_4\}$, se tendría que $c = w_4 \in V(D)$, o que $c \in V(\beta_d)$ y es imposible que suceda alguna de estas dos cosas.

Por consiguiente $d_{T^k(D)}(c, y) \geq 1$.

De lo anterior, $d_{T^k(D)}(x, y) \geq k$.

Si $\delta_D^+(w_2) > 0$:

$\mathbb{K}_c = \{c_1, c_{k+1}, c_{2k+1} \dots c_{m(c)k+1}\} \subset V(\beta_c)$ y $x = c_i, i \equiv 1 \pmod k$.



Sabemos que $y = d_j$ para alguna j .

Nuevamente, por construcción de $T^k(D)$:

$d_{T^k(D)}(x, y) = d_{T^k(D)}(x, c) + d_{T^k(D)}(c, z) + d_{T^k(D)}(z, y)$, con $z = w_2$ o $z \in F(D)$.

Es sencillo ver que $d_{T^k(D)}(x, c) \geq k - 2$.

Cuando $z = w_2$:

$c \neq z$ y además $z \neq y$ pues sabemos que el único elemento que podrían tener en común $V(D)$ y \mathbb{K}_d es w_4 ($w_3 = d_0 \notin \mathbb{K}_d$) y la única forma de que w_4 pertenezca a \mathbb{K}_d es cuando $\delta_D^+(w_4) = 0$; recordando que $z = w_2 \in V(D)$ y que $y \in \mathbb{K}_d$, si z fuera igual a y tendríamos necesariamente que $w_2 = z = y = w_4$ lo cual es imposible porque $\delta_D^+(w_2) > 0$.

Por lo tanto $d_{T^k(D)}(c, z) = 1$ y $d_{T^k(D)}(z, y) \geq 1$.

Cuando $z \in F(D)$:

$c \neq z$, pues no podemos tener el lazo (c, c) .

Para toda flecha $f \in F(D)$, $f \notin \mathbb{K}_f$ debido a que $f = f_{m(f)k+(k-1)}$. $m(f)k + (k - 1)$ nunca es congruente con cero módulo k y tampoco es congruente con uno módulo k para $k \geq 3$.

Entonces $z \notin J$ y se sigue que $z \neq y$.

Así, $d_{T^k(D)}(c, z) = 1$ y $d_{T^k(D)}(z, y) \geq 1$.

Concluimos que sin importar cómo sea z , $d_{T^k(D)}(x, y) \geq k$.

Hemos demostrado que J es k -independiente en $T^k(D)$.

- J es $(k - 1)$ -absorbente en $T^k(D)$.

En $T^k(D)$ tenemos los mismos vértices que en $R^k(D)$, también tenemos las mismas flechas que en $R^k(D)$ y posiblemente algunas más entre los elementos de $F(D)$.

De lo anterior, se sigue que $R^k(D)$ es una digráfica generadora de $T^k(D)$.

Como J es un conjunto $(k - 1)$ -absorbente en $R^k(D)$ (ver la demostración del teorema 2.7.1), por el lema 2.1.1, lo es también en $T^k(D)$.

□

En general, si D y D' son acíclicas, $D \cup D'$ no necesariamente lo es. Por ejemplo si $V(D) = V(D') = \{1, 2\}$, $F(D) = \{(1, 2)\}$ y $F(D') = \{(2, 1)\}$.

A pesar de esto, es fácil ver que por la forma como está definida, si D es acíclica, $T_m^k(D)$ también lo es.

Por lo tanto, $T_m^k(D)$ tendrá 2-núcleo, siempre que D sea acíclica.

De la lectura de [7] observamos que los teoremas 2.6.2 y 2.8.1 pueden aplicarse a otro tipo de digráficas, las cuales hemos llamado $\bar{Q}_m^k(D)$ y $\bar{T}_m^k(D)$.

2.9. $\bar{L}(\mathbf{D})$, $\bar{Q}^k(\mathbf{D})$, $\bar{T}^k(\mathbf{D})$

En la demostración anterior, en algunas ocasiones, aun cuando sabíamos que $\delta_{T^k}(c)$ era igual a cero ($c \in F(D)$), escribimos también la prueba como si no lo supiéramos. Hicimos esto porque en realidad no son tan importantes las adyacencias entre elementos de $F(D)$ para la demostración.

Definición 2.9.1. Sea D tal que $F(D) \neq \emptyset$. $\bar{L}(D) = \{L \mid L \text{ es digráfica y } V(L) = F(D)\}$.

Definición 2.9.2. Sea $D \in \mathfrak{D}^*$ tal que $F(D) \neq \emptyset$, $k \geq 2$, $m : F(D) \rightarrow \mathbb{N}$ y $\bar{L}(D) \in \bar{L}(D)$.

$$\bar{Q}_m^k(D) = S_m^k(D) \cup \bar{L}(D).$$

Definición 2.9.3. Sean D , k , m y $\bar{L}(D)$ como en la definición anterior.

$$\bar{T}_m^k(D) = S_m^k(D) \cup D \cup \bar{L}(D).$$

Notemos que:

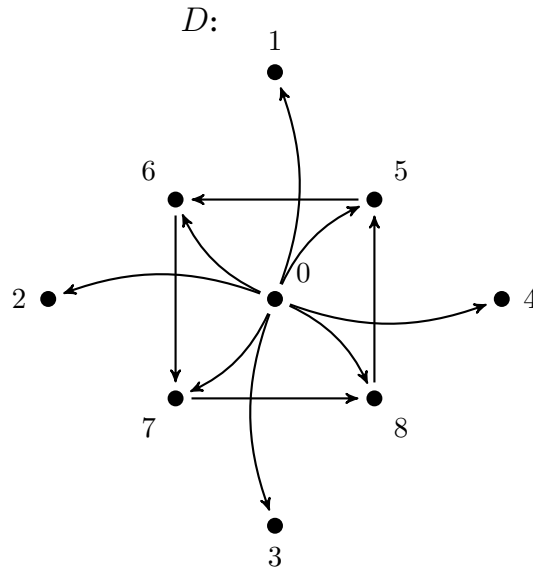
Las digráficas $\bar{Q}_m^k(D)$ y $\bar{T}_m^k(D)$ dependen, en gran medida, de la elección que hagamos de $\bar{L}(D)$, es decir, no estamos definiendo una única digráfica $\bar{Q}_m^k(D)$ ni una única $\bar{T}_m^k(D)$.

Podemos obtener alguna $\bar{Q}_m^k(D)$ a partir de $S_m^k(D)$, con sólo hacer adyacentes, como lo deseemos, a los elementos de $F(D)$ ⁸. Del mismo modo, podemos obtener alguna $\bar{T}_m^k(D)$ a partir de $R_m^k(D)$.

Ejemplos:

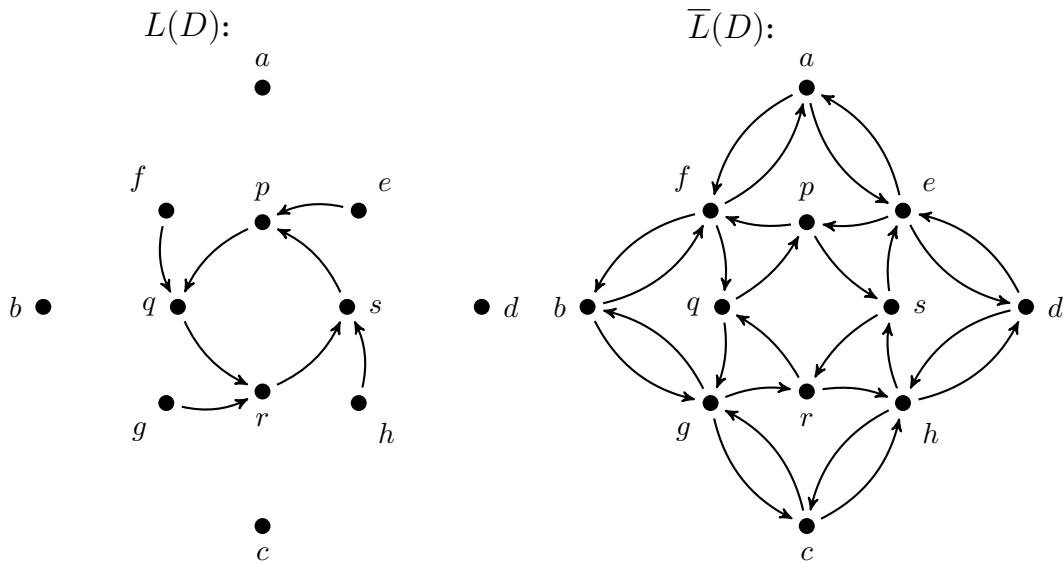
- 1) $V(D) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $F(D) = \{\vec{0i} \mid i = 1, 2, 3, \dots, 8\} \cup \{(5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 5)\}$.

⁸Claro, hacerlos adyacentes sin que se formen lazos.



Escribimos $\vec{01} = a, \vec{02} = b, \vec{03} = c, \vec{04} = d, \vec{05} = e, \vec{06} = f, \vec{07} = g, \vec{08} = h,$
 $\vec{56} = p, \vec{67} = q, \vec{78} = r, \vec{85} = s.$

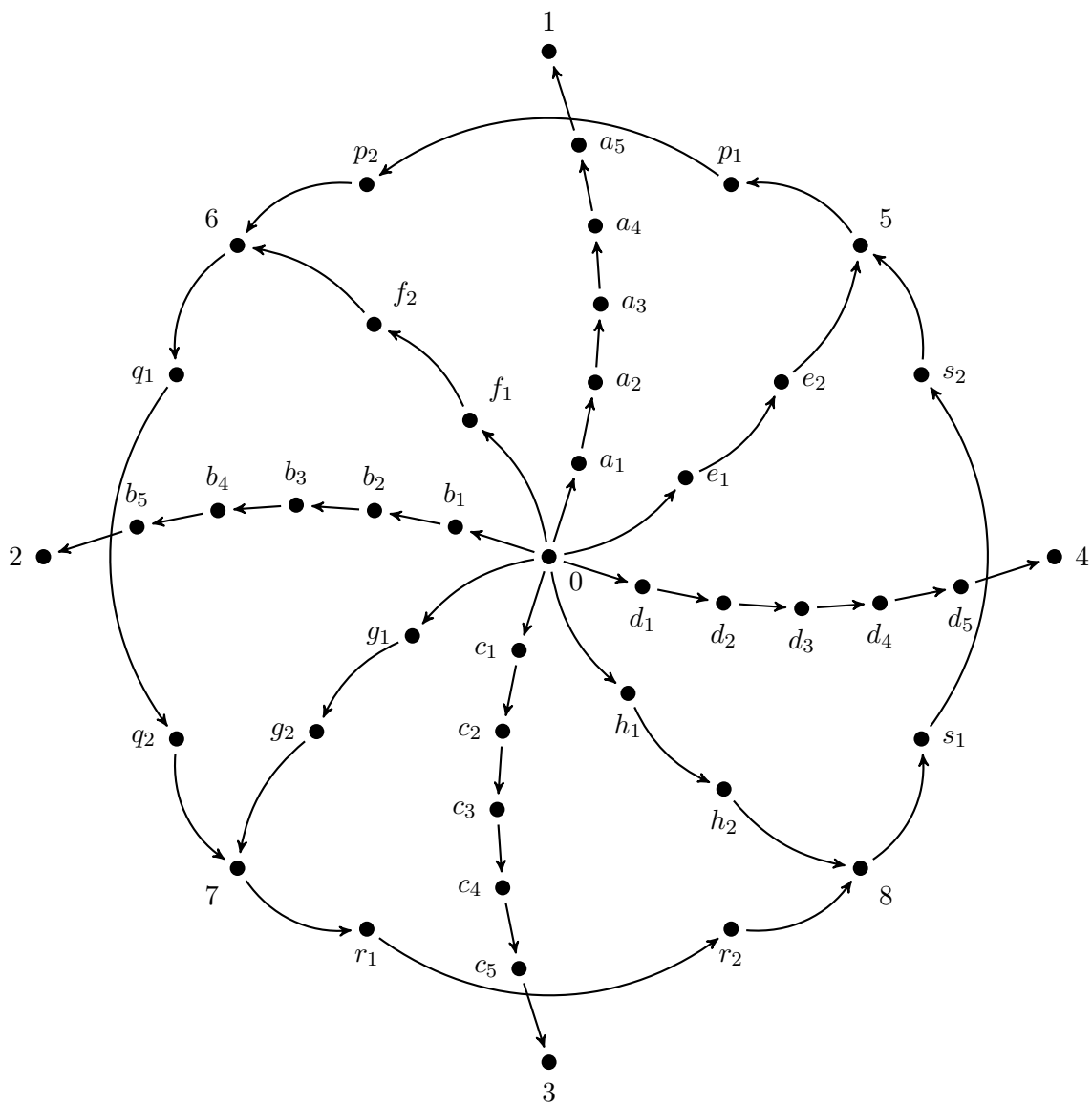
Escogemos $\bar{L}(D)$ como se muestra a continuación.

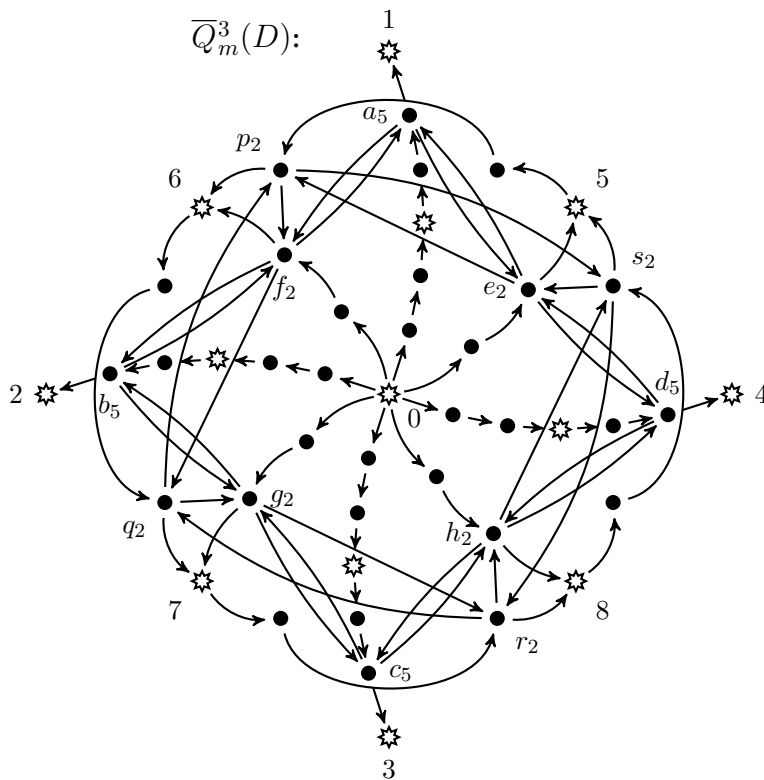
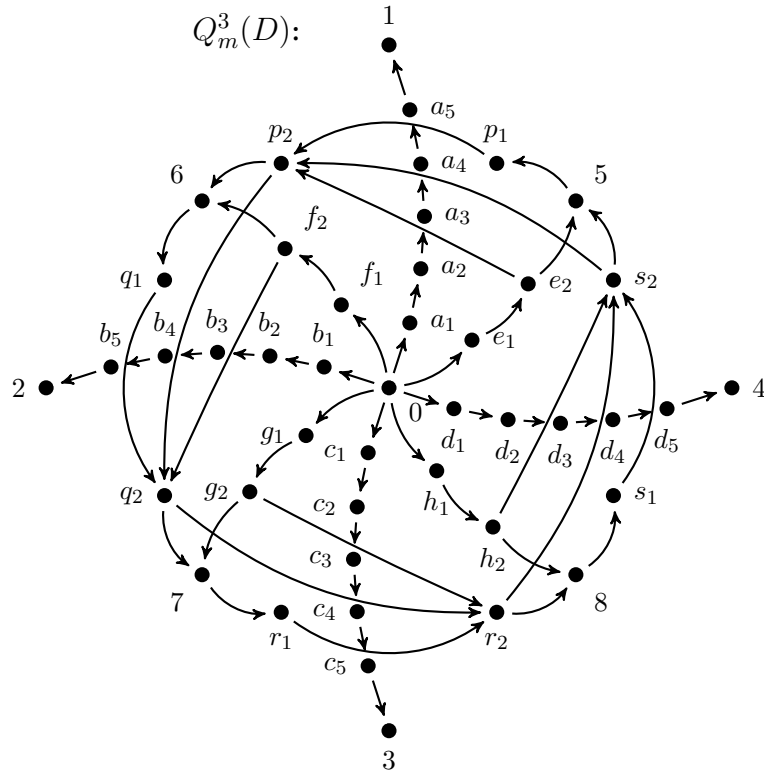


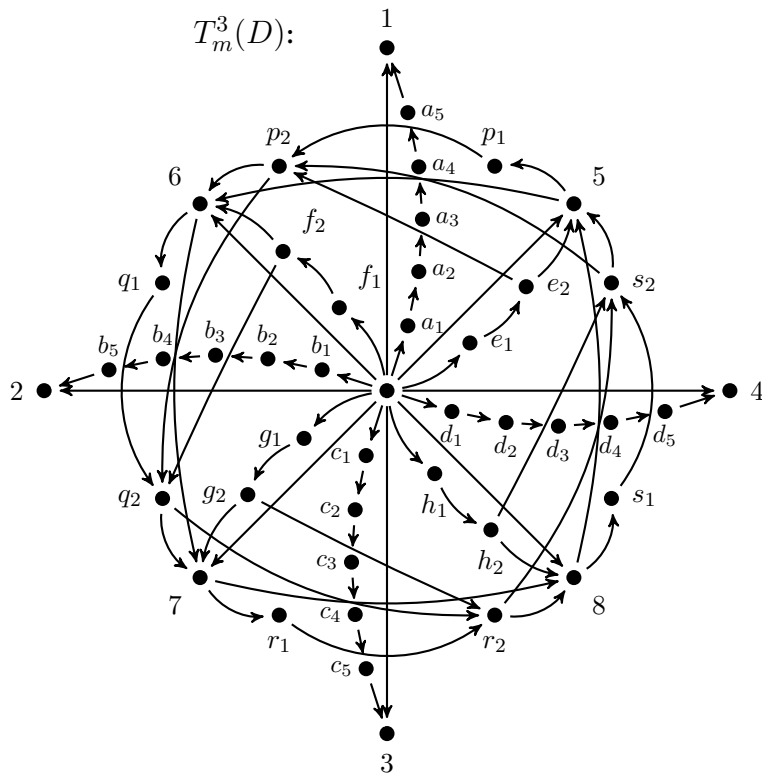
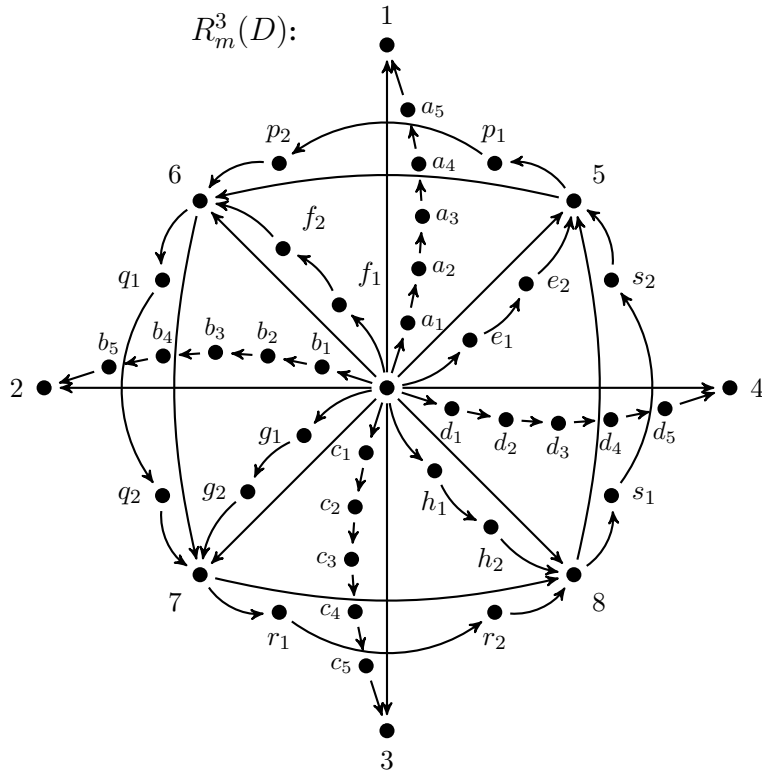
Sean $k = 3$ y $m : F(D) \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $m(\vec{0i}) = 1$ para $i = 1, 2, 3, 4,$ y $m(z) = 0$ para las demás flechas.

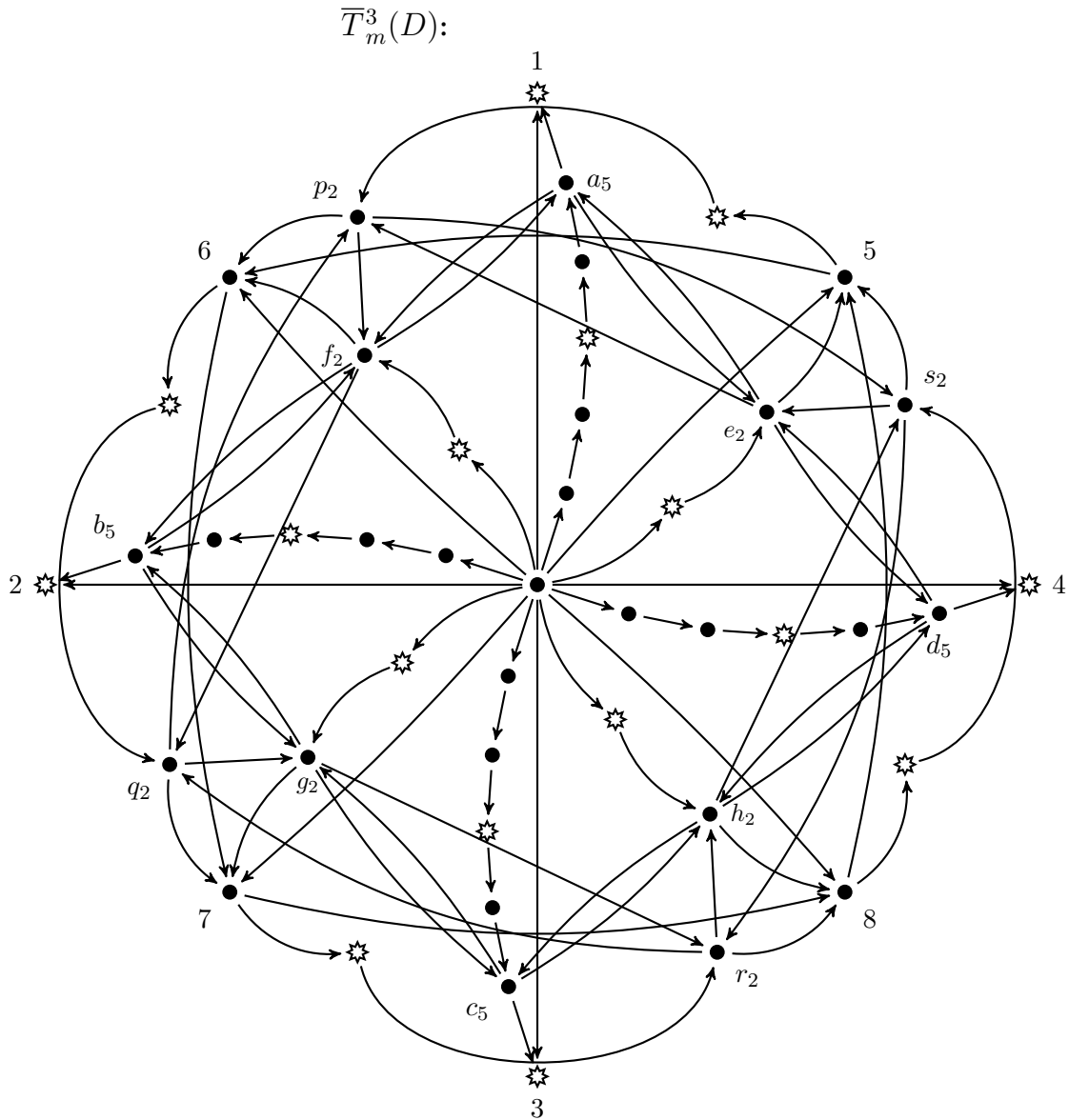
En lugar de dibujar únicamente $\bar{Q}_m^k(D)$ y $\bar{T}_m^k(D),$ dibujaremos todas las digráficas que hemos visto desde $S_m^k(D)$ hasta $\bar{T}_m^k(D).$

$S_m^3(D)$:









En las digráficas $\bar{Q}_m^3(D)$ y $\bar{T}_m^3(D)$ hemos distinguido los vértices que forman un 3-núcleo para cada una de ellas.

Para demostrar que $\bar{Q}_m^k(D)$ y $\bar{T}_m^k(D)$ tienen k -núcleo para $k \geq 2$ y $k \geq 3$ respectivamente, hacemos exactamente lo mismo que en las pruebas de los teoremas 2.6.2 y 2.8.1.

Por consiguiente, el conjunto J definido en la página 61 es k -núcleo tanto de $S_m^k(D)$ como de $\bar{Q}_m^k(D)$.

Como dijimos antes, $\bar{Q}_m^k(D)$ se obtiene de $S_m^k(D)$ haciendo adyacentes a ciertos vértices de ésta. Por este hecho, decidimos investigar qué tipo de vértices se podrían hacer adyacentes en $S_m^k(D)$ de manera tal, que J se mantenga como k -núcleo de la digráfica resultante.

2.10. Obteniendo digráficas a partir de $S^k(\mathcal{D})$

Definición 2.10.1. Sean $D \in \mathcal{D}^*$, $k \geq 2$ y $S^k(D) \in \mathcal{S}^k(D)$.

Llamaremos vértices de clase cero a los elementos de $[\{v \in V(S^k(D)) \mid \delta_{S^k(D)}^+(v) = 0\} \cup \{v \in V(S^k(D)) \mid v = f_z \text{ con } f \in F(D) \text{ y } z \equiv 0 \pmod{k}\}]$, a este conjunto lo denotaremos por X_0 o por X_k .

De forma similar, llamaremos vértices de clase r , $1 \leq r \leq k-1$, a los pertenecientes a $\{v \in V(S^k(D)) \mid v = f_z \text{ con } f \in F(D) \text{ y } z \equiv r \pmod{k}\} = X_r$.

Obsérvese que J de la demostración del teorema 2.5.1 es igual a X_0 .

También nótese que si $F(D) \neq \emptyset$, entonces los conjuntos X_z no son vacíos y forman una partición de $V(S^k(D))$ pues son ajenos dos a dos.

Sea x un vértice de clase cero y de exgrado mayor o igual a uno.

Así, $x = f_z$ con $z \equiv 0 \pmod{k}$ para alguna $f \in F(D)$. Si $z = 0$, todas las flechas (x, z) de $S^k(D)$ son de la forma (x, a_1) siendo a una flecha de D . Si z no es cero, entonces la única flecha en $S^k(D)$ con vértice inicial x es (x, f_{z+1}) .

Por lo tanto, toda flecha $(x, y) \in F(S^k(D))$ con $x \in X_0$ es una X_0X_1 -flecha.

Ahora sea x un vértice de clase i , $1 \leq i < k-1$.

Entonces $x = f_z$, $z \equiv i \pmod{k}$ para alguna $f \in F(D)$ y x es vértice de la trayectoria β_f . Como $i < k-1$, x no es el vértice final de β_f y (x, f_{z+1}) pertenece a $F(S^k(D))$ que además es la única flecha con vértice inicial x .

Por ende, toda flecha $\overrightarrow{xy} \in F(S^k(D))$ con $x \in X_i$ es una X_iX_{i+1} -flecha.

Supongamos que x es un vértice de clase $k-1$, es decir, $x = f_z$ para alguna $f = (u, v) \in F(D)$ y $z \equiv k-1 \pmod{k}$.

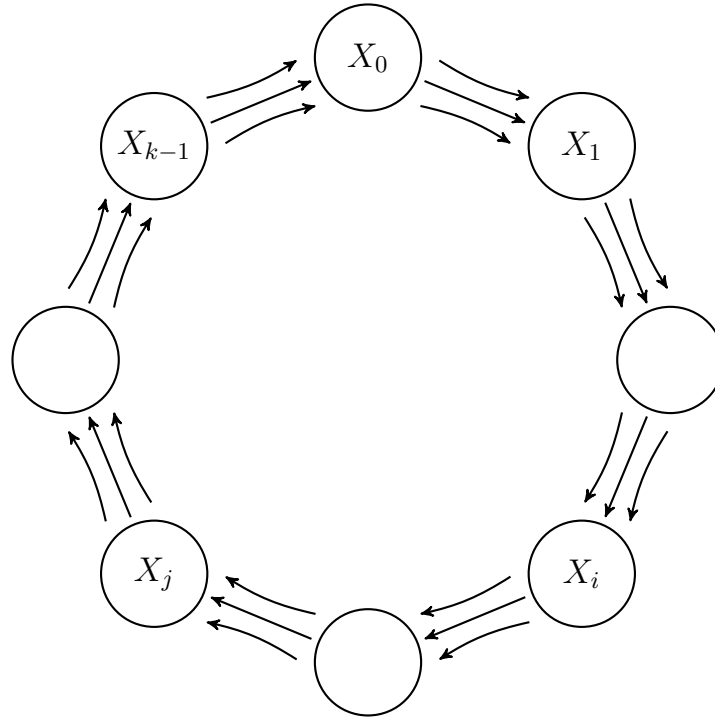
Si x no es el vértice final de β_f , la única flecha que sale de x es (x, f_{z+1}) y si x es el vértice final de β_f , entonces (x, v) es la única flecha que inicia en x . Si el exgrado de v en D es mayor que cero, $v = a_0$ para alguna $a \in F(D)$ y si el exgrado es cero, v también tiene exgrado cero en $S^k(D)$.

De lo anterior, todas las flechas \overrightarrow{xy} con $x \in X_{k-1}$ son $X_{k-1}X_0$ -flechas.

Concluimos además que todo X_z es 2-independiente.

En $S^k(D)$ toda trayectoria dirigida entre dos elementos diferentes de X_0 tiene longitud mayor o igual a k .

Se sigue de los argumentos antes presentados que, si T es una X_0X_0 -trayectoria dirigida de longitud mayor a cero, entonces su m -ésima flecha necesariamente es una X_mX_{m+1} -flecha.

Diagrama de los vértices de $S^k(D)$.

Para obtener más digráficas que conserven a X_0 como k -núcleo, podemos añadir más flechas de X_i a X_{i+1} , $0 \leq i \leq k-1$. Esto lo haremos, a la vez, con todos los X_i o con los que deseemos.

Así, en la digráfica resultante, toda xy -trayectoria dirigida T con $x, y \in X_0$ y $x \neq y$ seguirá cumpliendo que su m -ésima flecha es una $X_{m-1}X_m$ -flecha. Por consiguiente la longitud de T será mayor o igual que k .

Por lo anterior, la k -independencia de X_0 no se verá afectada.

Adicionalmente, podemos agregar X_jX_i -flechas para cualesquiera i y j tales que $0 < i < j \leq k-1$. Enfatizamos que en esta ocasión i es diferente de cero.

Haciendo esto, si T es una xy -trayectoria dirigida con $x, y \in X_0$ y $x \neq y$, entonces T sigue necesitando al menos una X_yX_{y+1} -flecha, $y \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Por lo tanto la longitud de T es mayor o igual a k .

Otra forma de argumentar que la longitud de T es mayor o igual a k es la siguiente:

- La primer flecha de T es una X_0X_1 -flecha.
- Los únicos vértices con flechas hacia X_0 son los de clase $k-1$. Por lo cual, la última flecha de T es una $X_{k-1}X_0$ -flecha.

Por ende T necesita ir de X_1 a X_{k-1} .

- La distancia de X_1 a X_{k-1} sigue siendo $k - 2$.

Luego, la longitud de T es mayor o igual a k .

Tomando en cuenta lo anterior, incluso podemos colocar flechas entre elementos de X_i para los conjuntos X_i que deseemos, siempre y cuando i sea distinto de cero.

Aumentar flechas en una digráfica, no afecta a la $(k - 1)$ -absorbencia de sus subconjuntos de vértices, pues si las digráficas D y D_1 son tales que D_1 resulta de incrementar el número de flechas de D , entonces D es una digráfica generadora de D_1 y podemos aplicar el lema 2.1.1.

Por lo tanto $J = X_0$ seguirá siendo k -núcleo de todas las digráficas que hemos obtenido hasta ahora.

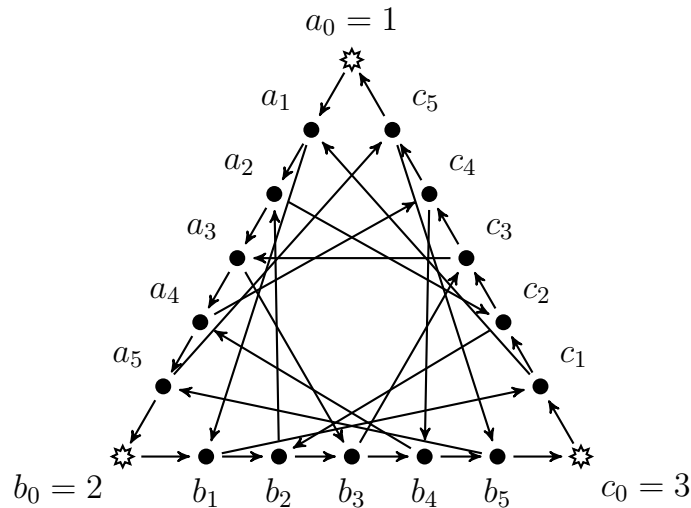
Es obvio que añadir flechas de X_i a X_j , con $i < i + 1 < j$, puede afectar la k -independencia de X_0 .

Ejemplos:

- 1) Sean $D = (\{1, 2, 3\}, \{\overrightarrow{12} = a, \overrightarrow{23} = b, \overrightarrow{31} = c\})$, $k = 6$ y m la función constante cero.

Es claro que $X_i = \{a_i, b_i, c_i\}$, $0 \leq i \leq 5 = k - 1$.

Agregamos a $S_m^6(D)$ las flechas $\overrightarrow{a_i b_i}, \overrightarrow{b_i c_i}, \overrightarrow{c_i a_i}$ con $i \in \{1, 3\}$ y las flechas $\overrightarrow{a_i c_i}, \overrightarrow{c_i b_i}, \overrightarrow{b_i a_i}$ con $i \in \{2, 4, 5\}$, es decir, aumentamos la cantidad de $X_i X_i$ -flechas, $i \neq 0$. Así obtenemos la siguiente digráfica:



Notemos que el 6-núcleo $J = \{a_0, b_0, c_0\} = X_0$ de $S_m^6(D)$, es también 6-núcleo de esta digráfica.

También, si dibujásemos alguna flecha de a_1 hacia b_3, b_4 o b_5 , X_0 dejaría de ser 6-independiente. Lo mismo ocurriría si tuviésemos alguna flecha de a_1, a_2, a_3 o a_4 hacia c_0 .

2) Sea D como en el ejemplo anterior, m la función constante uno y $k = 3$.

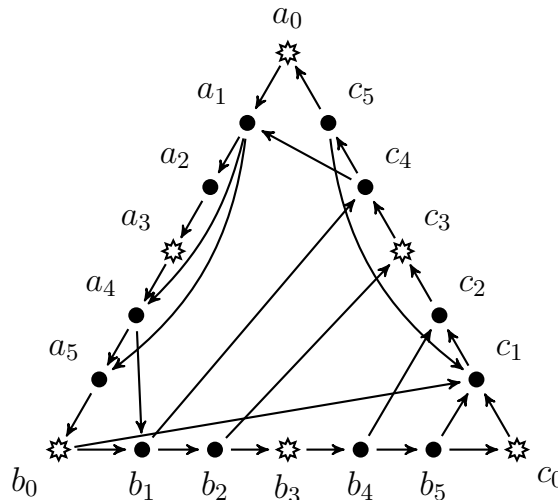
Ahora $X_0 = \{a_0, a_3, b_0, b_3, c_0, c_3\}$, $X_1 = \{a_1, a_4, b_1, b_4, c_1, c_4\}$,

$X_2 = \{a_2, a_5, b_2, b_5, c_2, c_5\}$.

Modificamos $S_m^3(D)$ como se explica a continuación:

Agregamos (b_0, c_1) que es una X_0X_1 -flecha. Entre vértices de clase uno, añadimos las flechas del ciclo dirigido $(a_1, a_4, b_1, c_4, a_1)$. De X_1 a X_2 , dibujamos las flechas (a_1, a_5) y (b_4, c_2) .

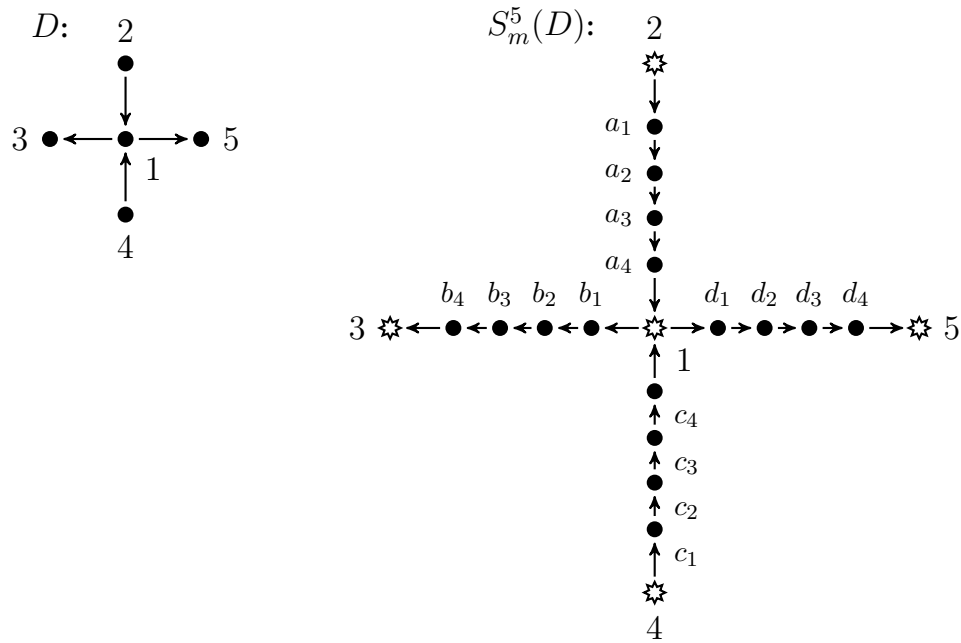
De X_2 a X_1 pondremos las flechas (b_5, c_1) y (c_5, c_1) . Finalmente colocamos la flecha, de $X_{k-1} = X_2$ a X_0 , (b_2, c_3) .



X_0 sigue siendo 3-núcleo.

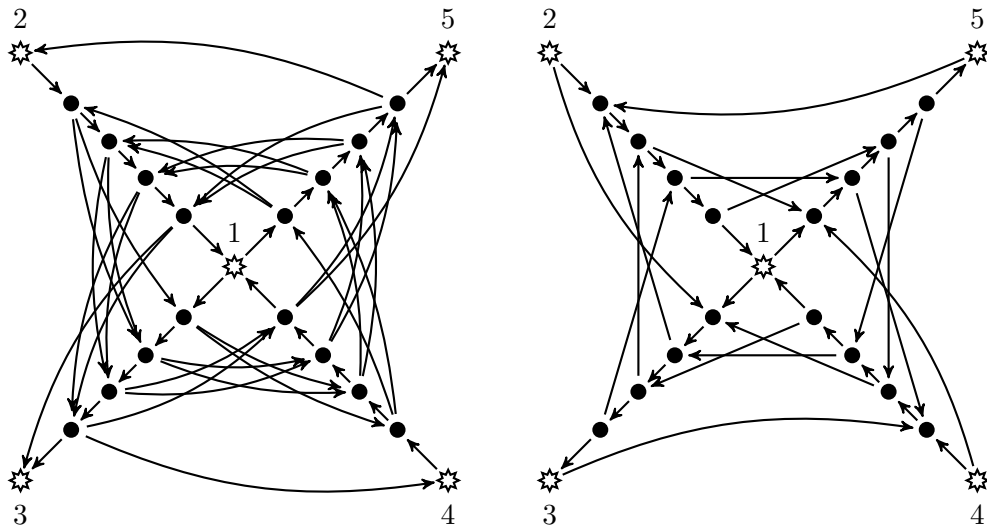
Observemos que si añadiéramos la flecha (b_1, c_0) , la distancia de b_0 a c_0 sería dos y X_0 dejaría de ser 3-núcleo.

3) Sean $D = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\vec{21} = a, \vec{13} = b, \vec{41} = c, \vec{15} = d\})$, $m(f) = 0$ para todo $f \in F(D)$ y $k = 5$.



$X_0 = V(D)$ es 5-núcleo de $S_m^5(D)$.

Dibujemos dos digráficas obtenidas de $S_m^5(D)$ que conservan a X_0 como 5-núcleo.



En la digráfica de la izquierda, hemos puesto $X_i X_i$ -flechas y $X_i X_{i+1}$ -flechas, $i \neq 0$. En la derecha hemos dibujado flechas de X_0 a X_1 , de X_4 a X_3 , de X_3 a X_2 y de X_2 a X_1 .

Vale la pena mencionar que en si en D tenemos alguna flecha $a = (u, v)$ y $m(a) = 0$, entonces en $S_m^k(D)$ tendremos al menos un vértice de cada clase i con $1 \leq i \leq k - 1$, a saber, los vértices a_1, a_2, \dots, a_{k-1} . Si $m(a) = 1$, entonces tendremos al menos dos vértices de cada clase i , desde la clase uno hasta la $k - 1$. En general, si $m(a) = z$, entonces tendremos al menos $z + 1$ vértices de cada clase i , $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$.

Sea $D \in \mathfrak{D}^*$, tal que $F(D) \neq \emptyset$.

Entonces podemos hallar alguna función m_2 tal que el número de vértices de clase uno de $S_{m_2}^2(D)$ sea mayor o igual que $|V(D)|$.

Modifiquemos a $S_{m_2}^2(D)$.

Sea A un subconjunto de vértices de clase uno de $S_{m_2}^2(D)$ tal que A tiene tantos elementos como $V(D)$ y sea ϕ una función biyectiva de A a $V(D)$.

Colocaremos la flecha \overrightarrow{xy} con $x, y \in A$ si y solo si $\overrightarrow{\phi(x)\phi(y)} \in F(D)$. Llamaremos D_2 a la digráfica resultante.

Al hacer esto $D_2[A]$, la subdigráfica inducida de D_2 por el conjunto A , tiene la misma estructura que D .

Sabemos que D_2 tiene 2-núcleo pues fue obtenida de $S_{m_2}^2(D)$ aumentando flechas entre vértices de clase uno.

Ahora podemos encontrar alguna $S_{m_3}^3(D_2)$ tal que sus vértices de clase uno sean tantos o más que los de D y sus vértices de clase dos sean tantos o más que los de D_2 . Esto es posible pues D_2 tiene alguna flecha f y si $m_3(f) = y$, siendo $y = \max\{|V(D)|, |V(D_2)|\}$, entonces hay al menos $y + 1$ vértices de clase uno y clase dos de $S_{m_3}^3(D_2)$.

Nuevamente modificamos a $S_{m_3}^3(D_2)$ para obtener D_3 , una digráfica con 3-núcleo tal que un subconjunto de vértices de clase uno de $S_{m_3}^3(D_2)$ tiene la misma estructura de D y otro subconjunto de vértices de clase dos de $S_{m_3}^3(D_2)$ tiene la misma estructura de D_2 .

Siguiendo este procedimiento, obtenemos una digráfica D_k con k -núcleo la cual tiene subdigráficas inducidas con $(k - 1)$ -núcleo, $(k - 2)$ -núcleo, \dots 2-núcleo. Si la D con la que iniciamos no es una trayectoria dirigida, se puede asegurar que dichas subdigráficas no son trayectorias dirigidas.

D_k sería la digráfica obtenida de $S_{m_k}^k(D_{k-1})$ tal que existe un subconjunto de vértices de clase i con la misma estructura que D_i para todo $i = 1, 2, \dots, k - 1$, definiendo $D_1 = D$. Para asegurarnos de tener suficientes vértices, elegimos m_k con $m_k(f) = y$ para alguna $f \in F(D_{k-1})$, $y = \max\{|V(D_i)| \mid 1 \leq i \leq k - 1\}$.

2.11. Obteniendo digráficas a partir de $\mathcal{R}^k(\mathcal{D})$

Sean $D \in \mathcal{D}^*$, $k \geq 2$ y $S^k(D) \in \mathcal{S}^k(D)$. Recordemos la definición de J , el k -núcleo que conocemos para $R^k(D) = S^k(D) \cup D$.

Para cada flecha $a = (u, v) \in F(D)$:

$$\mathbb{K}_a = \{a_i \in V(\beta_a) \mid i \equiv 0 \pmod k \text{ e } i \neq 0\} \cup \{v\}, \text{ si } \delta_D^+(v) = 0.$$

$$\mathbb{K}_a = \{a_i \in V(\beta_a) \mid i \equiv 1 \pmod k\}, \text{ si } \delta_D^+(v) \neq 0.$$

$$A_D = \{v \in V(D) \mid \delta_D^-(v) = \delta_D^+(v) = 0\}.$$

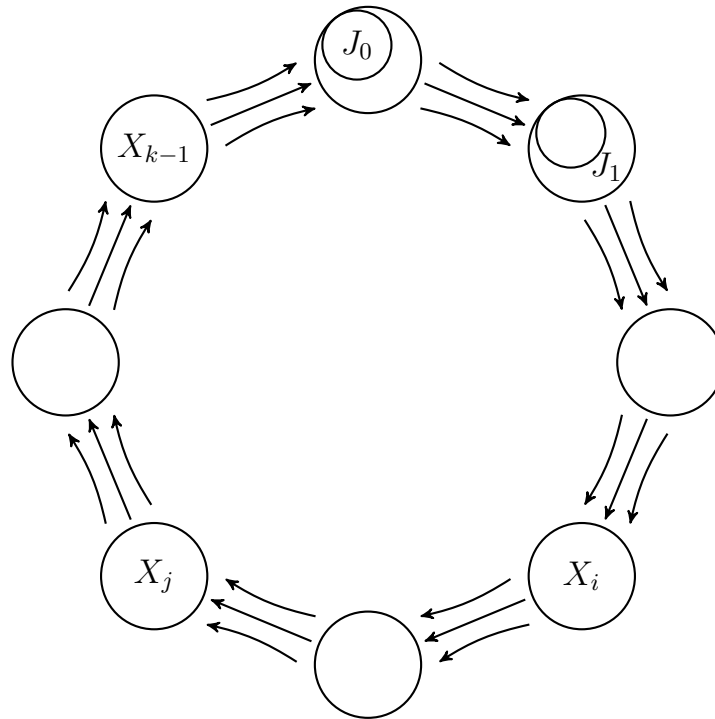
$$J = A_D \cup \left(\bigcup_{a \in F(D)} \mathbb{K}_a \right).$$

Definimos los vértices de clase cero y los de clase r exactamente igual a la definición 2.10.1.

Por lo tanto, cuando $\delta_D^+(v) = 0$, $\mathbb{K}_a \subset X_0$ y cuando $\delta_D^+(v) \neq 0$, $\mathbb{K}_a \subset X_1$. También ocurre que $A(D) \subset X_0$.

Sean $J_0 \subset X_0$ y $J_1 \subset X_1$ tales que $J = J_0 \cup J_1$.

Diagrama de los vértices de $R^k(D)$.



En $R^k(D)$ ya no es cierto que todas las flechas que salen de vértices de clase cero van hacia vértices de clase uno, por ejemplo si $(u, v) \in F(D)$ y $\delta_D^+(v) = 0$, entonces $\vec{uv} \in F(R^k(D))$.

Pero se sigue cumpliendo que para salir de los vértices de clase i , hay que ir a los de clase $i + 1$ y para salir de X_{k-1} se debe ir a X_0 .

Tengamos en cuenta que si en D todos sus vértices tienen exgrado mayor que cero, entonces $X_1 = J$. Lo cual implica que los vértices de clase uno en $R^k(D)$ se comportan de forma análoga a los de clase cero en $S^k(D)$.

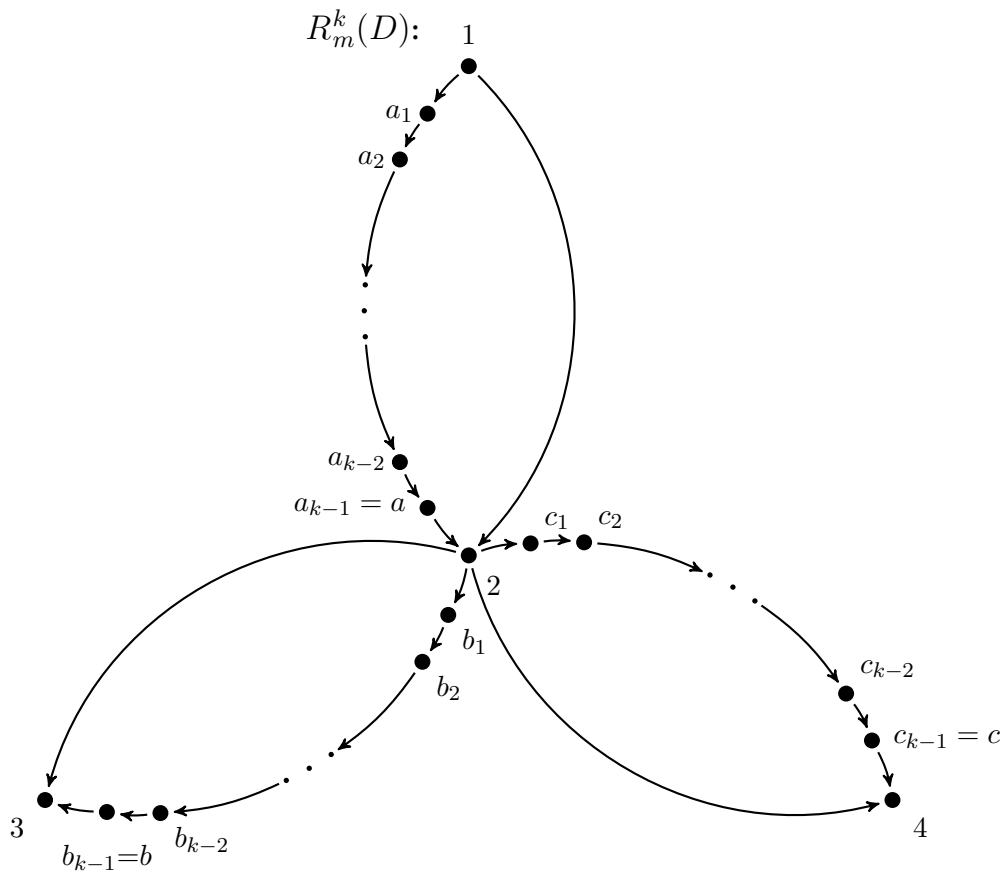
En el caso general, J contiene tanto vértices de X_0 como de X_1 .

A diferencia de lo que sucede con $S^k(D)$, si incrementamos la cantidad de $X_i X_{i+1}$ -flechas con $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, J puede ya no ser k -independiente.

Veamos un par de ejemplos:

- Si agregásemos alguna $J_0 J_1$ -flecha, J no sería k -independiente.
- Sean $k \geq 3$ y $D = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\overrightarrow{12} = a, \overrightarrow{23} = b, \overrightarrow{24} = c\})$, $m(f) = 0$ para todo $f \in F(D)$.

Dibujemos $R_m^k(D)$ y veamos qué ocurre cuando aumentamos el número de $X_i X_{i+1}$ -flechas y de $X_{k-1} X_0$ -flechas.



$J = \{a_1, 3, 4\}$ es k -núcleo de $R_m^k(D)$.

3 es vértice de clase cero y a_1 es vértice de clase uno. Si agregamos la flecha $\overrightarrow{3a_1}$, J ya no es k -independiente.

a_i y b_{i+1} con $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$ son vértices de clase i e $i+1$ respectivamente. Como $d_{R_m^k(D)}(a_1, a_i) = i-1$ y $d_{R_m^k(D)}(b_{i+1}, 3) = k-i-1$, si añadimos la flecha $\overrightarrow{a_i b_{i+1}}$, entonces la distancia de a_1 a 3 es $i-1+1+k-i-1 = k-1$ en la digráfica resultante.

Si dibujáramos la flecha $\overrightarrow{a_{k-1}4}$ que es una $X_{k-1}X_0$ -flecha, la distancia de a_1 a 4 se reduciría en uno.

Tampoco podemos agregar flechas entre vértices de clase uno, pues es posible que J_1 se vea afectado. Por esta razón, en ocasiones $T^k(D)$ resulta sin 2-núcleo debido a que los elementos de $F(D)$ son vértices de clase uno para $k=2$.

Lo que sí podemos hacer es añadir todas las $X_i X_i$ -flechas que queramos, para todo i tal que $2 \leq i \leq k-1$.

Al hacer esto, cualquier $J_0 J_1$ -trayectoria dirigida T , necesariamente tendrá como primer flecha una $J_0(X_1 - J_1)$ -flecha, la segunda será una $X_1 X_2$ -flecha y a partir de entonces, debemos regresar de X_2 a los vértices de clase cero pues éstos son los únicos que tienen flechas hacia X_1 . Así, T tendrá al menos una $X_i X_{i+1}$ -flecha para $2 \leq i \leq k-1$ y una $X_{k-1} X_0$ -flecha. Por ende, la longitud de T será mayor o igual que k .

Las $J_1 J_0$ -trayectorias dirigidas contienen al menos una $X_i X_{i+1}$ -flecha para todo $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ⁹.

Sea T una $J_1 J_0$ -trayectoria dirigida. Por lo antes dicho, la longitud de T es al menos $k-1$. Fijémonos en las primeras $k-1$ flechas de T :

Si alguna de ellas es una $X_i X_i$ -flecha para algún i , entonces la longitud de T es mayor o igual que k .

Si ninguna es una $X_i X_i$ -flecha, la primer flecha es una $X_1 X_2$ -flecha, la segunda una $X_2 X_3$ -flecha y así sucesivamente. La $(k-1)$ -ésima flecha de T es una $X_{k-1} X_0$ -flecha. Como no hemos alterado las $X_i X_{i+1}$ -flechas, con las primeras $k-1$ flechas de T tenemos una trayectoria dirigida de $R^k(D)$. Sabemos que las $J_1 J_0$ -trayectorias dirigidas en $R^k(D)$ son de longitud mayor o igual que k . Luego, la parte de T formada por las primeras $k-1$ flechas no es una $J_1 J_0$ -trayectoria dirigida.

Por lo tanto T tiene al menos otra flecha y longitud mayor o igual que k .

⁹Recordemos que $X_k = X_0$.

Análogamente a S^k las trayectorias dirigidas de longitud mayor a cero de J_0 a J_0 y de J_1 a J_1 necesitan al menos una $X_i X_{i+1}$ -flecha para cada i , $0 \leq i \leq k-1$.

Con esto demostramos que J sigue siendo k -independiente cuando incrementamos la cantidad de $X_i X_i$ -flechas, $2 \leq i \leq k-1$. Es decir, podemos poner más flechas entre vértices de la misma clase.

Además también probamos que podemos hacer esto con todas las clases de vértices, desde la dos hasta la $k-1$, a la vez o con las clases que deseemos.

Análoga y adicionalmente, también podemos agregar $X_j X_i$ -flechas siempre que $k-1 \geq j > i \geq 2$ sin perder la k -independencia de J . Nótese que añadir $X_{k-1} X_1$ -flechas puede afectar a J_1 .

J seguiría siendo $(k-1)$ -absorbente y k -núcleo de las digráficas resultantes.

Al igual que en S^k tampoco se pueden incrementar las $X_i X_j$ -flechas, $i < j$.

Capítulo 3

Orientaciones de la gráfica de trayectorias

En este capítulo recordaremos lo que es una *gráfica* y sus *orientaciones*.

Definiremos $T(G)$, la *gráfica de trayectorias de G* , para cualquier gráfica G .

Para una clase especial de gráficas demostraremos un par de propiedades en cuanto a *orden* y *regularidad* de su gráfica de trayectorias.

Veremos que los ciclos con una *cuerda larga* o dos *cuerdas cortas* en $T(G)$, cumplen algunas condiciones que nos serán de utilidad para encontrar k -núcleos en orientaciones de $T(G)$.

Probaremos que siendo D una orientación de $T(G)$, bajo ciertas hipótesis, si todo ciclo dirigido de D y de longitud no congruente con cero módulo k tiene una cuerda larga o dos cuerdas cortas, entonces todo ciclo dirigido de D y de longitud no congruente con cero módulo k tiene dos flechas simétricas.

Utilizaremos el resultado anterior, junto con un teorema de Galeana Sánchez y Ricón Mejía [10], para demostrar el siguiente teorema:

Teorema. *Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias, $k \geq 3$ y D una orientación de $T(G)$ tal que $Asim(D)$ es fuertemente conexa y todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene dos flechas simétricas.*

Si todo ciclo dirigido en D , de longitud no congruente con cero módulo k y mayor que 3 tiene una cuerda larga o dos cuerdas cortas (c, d) , (e, f) con $(e, f) \neq (d, c)$, entonces D tiene k -núcleo.

Para los núcleos, usaremos un teorema de Galeana Sánchez y Neumann Lara [6] acerca de *polos consecutivos*, para obtener el siguiente resultado:

Teorema. *Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias y D una orientación de $T(G)$ tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene todas sus flechas simétricas.*

Si todo ciclo dirigido de D , de longitud impar y mayor que 5, tiene una cuerda larga o dos cuerdas cortas, entonces D tiene núcleo.

Finalizaremos con algunas reflexiones sobre la definición de $T(G)$.

3.1. Gráficas

Definición 3.1.1. Una gráfica es un par ordenado $G = (V(G), A(G))$ tal que:

- $V(G)$ es un conjunto no vacío y finito.
- $A(G) \subseteq \{\alpha \mid \alpha \text{ es un subconjunto de } V(G) \text{ y } |\alpha| = 2\}$.

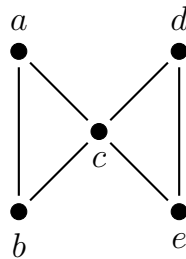
Los elementos de $V(G)$ reciben el nombre de vértices y los de $A(G)$, aristas. La cardinalidades de $V(G)$ y $A(G)$ son el orden y el tamaño de G respectivamente.

Ejemplos:

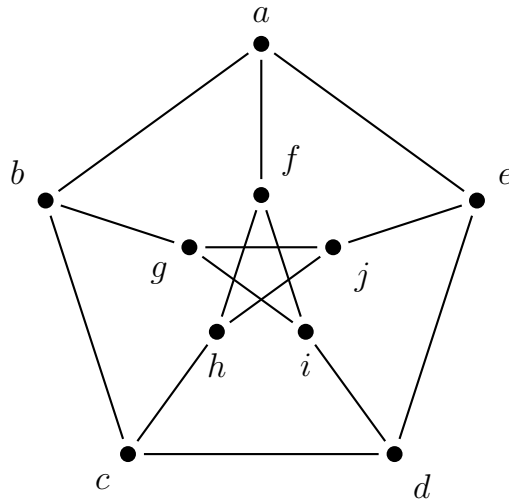
- 1) La gráfica trivial. $G = (\{v_1\}, \emptyset)$.



- 2) El moño. $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$, $A(G) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$.



- 3) La gráfica de Petersen. $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $A(G) = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}, \{a, f\}, \{b, g\}, \{c, h\}, \{d, i\}, \{e, j\}, \{f, h\}, \{h, j\}, \{j, g\}, \{g, i\}, \{i, f\}\}$.



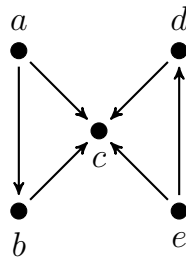
Definición 3.1.2. Sea G una gráfica. Una orientación de G es una digráfica \vec{G} , tal que, $V(G) = V(\vec{G})$ y las flechas de \vec{G} se obtienen de las aristas de G , asignándoles una o ambas direcciones.

Ejemplos:

- 1) Cualquier orientación de la gráfica trivial es igual a la digráfica trivial.

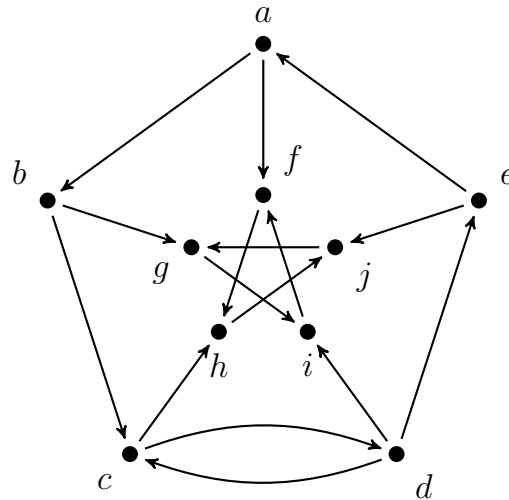


- 2) La digráfica siguiente es una orientación del moño:



En esta ocasión, se le ha dado una y sólo una de las dos posibles direcciones a cada arista del moño.

- 3) Una orientación de la gráfica de Petersen se muestra en la página siguiente.



Ahora, al darle ambas direcciones a la arista $\{c, d\}$, tenemos las flechas \overrightarrow{cd} y \overleftarrow{cd} .

Notación. De ahora en adelante, en lugar de usar llaves para escribir las aristas de las gráficas usaremos corchetes, por ejemplo, en vez de escribir la arista $\{x, y\}$, escribiremos $[x, y]$.

Si $[a, b] \in A(G)$, decimos que a es adyacente a b y que b es adyacente a a , además si $e_1 = [a, b], e_2 = [b, c] \in A(G)$ con $a \neq c$, decimos que las aristas e_1 y e_2 son adyacentes o que tienen un extremo en común.

En las digráficas sabemos lo que es un camino dirigido, una trayectoria dirigida y un ciclo dirigido. En las gráficas tenemos conceptos similares a éstos.

Definición 3.1.3. Sea G una gráfica. Un camino de G es una sucesión de vértices (v_1, v_2, \dots, v_n) , tal que $\forall i$ con $1 \leq i \leq n - 1$, $[v_i, v_{i+1}] \in A(G)$.

La longitud de un camino es el número de aristas $[v_i, v_{i+1}]$.

Como caso especial, las sucesiones que constan de un sólo vértice de G también se consideran caminos.

Si $C = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es un camino, a v_1 se le llama vértice inicial o extremo inicial de C y a v_n vértice final o extremo final de C .

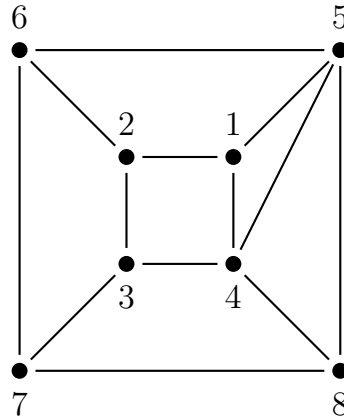
Cuando $v_1 = v_n$, se dice que el camino es cerrado.

Definición 3.1.4. Sea G una gráfica. Una trayectoria de G es un camino (v_1, v_2, \dots, v_n) , tal que $v_i \neq v_j, \forall i \neq j$.

Definición 3.1.5. Sea G una gráfica. Un ciclo de G es un camino cerrado $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_1)$ con al menos tres vértices distintos, tal que (v_1, \dots, v_{n-1}) es una trayectoria.

Ejemplos:

1) Sea G como sigue:



$C_1 = (1, 5, 8, 5)$ es un camino de G pues cumple que $[1, 5]$, $[5, 8]$, $[8, 5]$ pertenecen a $A(G)$.

$C_2 = (1, 5)$ es una trayectoria de G porque todos los vértices que tiene son diferentes dos a dos.

$C_3 = (1, 5, 1)$ es un camino cerrado pues el extremo inicial es igual que el extremo final. No es un ciclo porque no tiene 3 vértices distintos.

$C_4 = (4, 5, 8, 4)$ es un camino cerrado y sí es un ciclo porque tiene al menos 3 vértices distintos y $(4, 5, 8)$ es una trayectoria.

$C_5 = (1, 5, 4, 8, 5)$ no es una trayectoria ya que se está repitiendo el vértice 5.

$C_6 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ es una trayectoria.

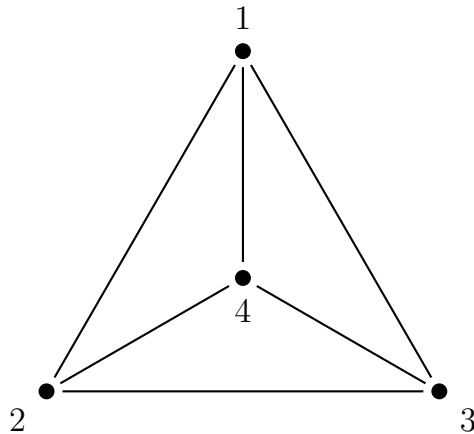
En el ejemplo anterior, las trayectorias C_2 y C_6 *comparten* un extremo, a saber, el vértice 1.

Definición 3.1.6. Sean $T_1 = (a_1, \dots, a_n)$ y $T_2 = (b_1, \dots, b_m)$ trayectorias. Se dice que T_1 y T_2 comparten extremos si $\{a_1, a_n\} \cap \{b_1, b_m\} \neq \emptyset$.

Decimos que T_1 y T_2 comparten un extremo y sólo uno, si $|\{a_1, a_n\} \cap \{b_1, b_m\}| = 1$.

Ejemplos:

1) Considérese la gráfica mostrada en la página siguiente.



Se definen las trayectorias: $T_a = (1, 4)$, $T_b = (1, 2)$, $T_c = (4, 1)$, $T_d = (4, 3, 1)$, $T_e = (2, 3)$.

T_a comparte un extremo con T_b pues $\{1, 4\} \cap \{1, 2\} \neq \emptyset$.

T_a y T_c comparten un extremo ya que $\{1, 4\} \cap \{4, 1\} \neq \emptyset$. En este caso comparten los dos extremos.

T_a y T_d también comparten los dos extremos.

Como $\{1, 4\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$, se sigue que T_a y T_e no comparten ningún extremo.

Definición 3.1.7. Sea $T = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$ una trayectoria. Decimos que la trayectoria A es inversa de T si y sólo si $A = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1)$.

Ahora construiremos una gráfica a partir de otra, pero antes, observemos que cada que tenemos una trayectoria T_1 , siempre tendremos una trayectoria inversa a T_1 , digamos T_2 . Para todo lo que sigue, convendremos que $T_1 = T_2$.

3.2. La gráfica de trayectorias

Definición 3.2.1. Sea G una gráfica con $A(G) \neq \emptyset$. La gráfica de trayectorias de G , $T(G)$ es tal que:

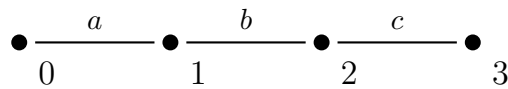
- $V(T(G)) = \{t \mid t \text{ es una trayectoria de } G \text{ de longitud mayor que } 0\}$.
- $A(T(G)) = \{[a, b] \mid a, b \in V(T(G)), a \text{ y } b \text{ comparten un extremo y sólo uno}\}$.

Nótese que si tenemos la arista $[a, b] \in A(T(G))$, entonces $a \neq b$ porque, al ser adyacentes en $T(G)$, a y b comparten un extremo y sólo uno (si a fuese igual a b , compartirían ambos extremos, el vértice final y el inicial). Por lo tanto, $A(T(G))$ está bien definido.

Ejemplos:

1) Veamos la siguiente gráfica y construyamos su gráfica de trayectorias.

G :



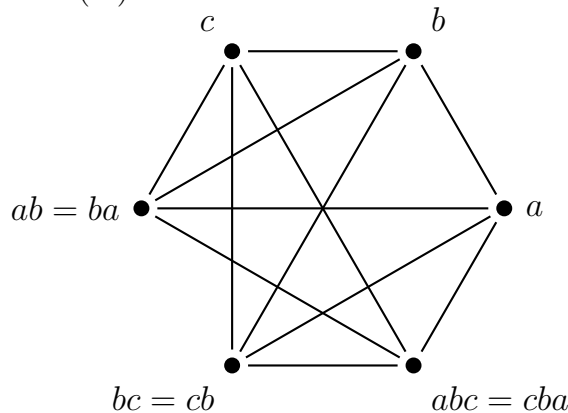
Las trayectorias que se tienen son: $T_1 = (0, 1) = (1, 0)$, $T_2 = (1, 2) = (2, 1)$, $T_3 = (2, 3) = (3, 2)$, $T_4 = (0, 1, 2) = (2, 1, 0)$, $T_5 = (0, 1, 2, 3) = (3, 2, 1, 0)$, $T_6 = (1, 2, 3) = (3, 2, 1)$.

Para escribir menos, identificamos cada trayectoria con las aristas que se definen según los vértices que tiene. Es decir, escribiremos $T_1 = a$, $T_2 = b$, $T_3 = c$, $T_4 = ab = ba$, $T_5 = abc = cba$, $T_6 = bc = cb$.

Se puede ver que a será adyacente a ab y a abc en $T(G)$. También, que b lo será a $ba = ab$ y a bc . En general, las aristas de G serán adyacentes a las trayectorias que inician (o terminan) en ellas.

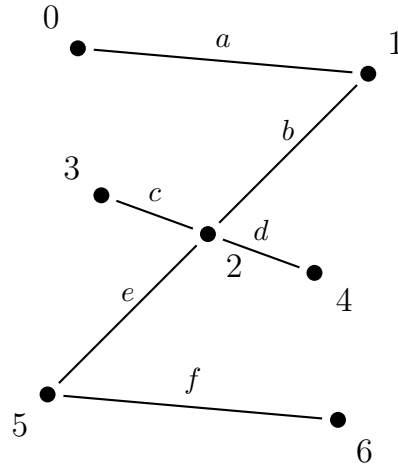
Por lo anterior, ab será adyacente a c , pues b es la arista final de ab y es adyacente en G a c , que es la arista inicial o final de la trayectoria c .

$T(G)$:



Vemos que a no es adyacente a c ; ni b a abc ; ni ab a $bc = cb$ pues, aunque ab y cb tienen como arista final a b , no comparten ningún extremo.

2) Sea G de esta forma:



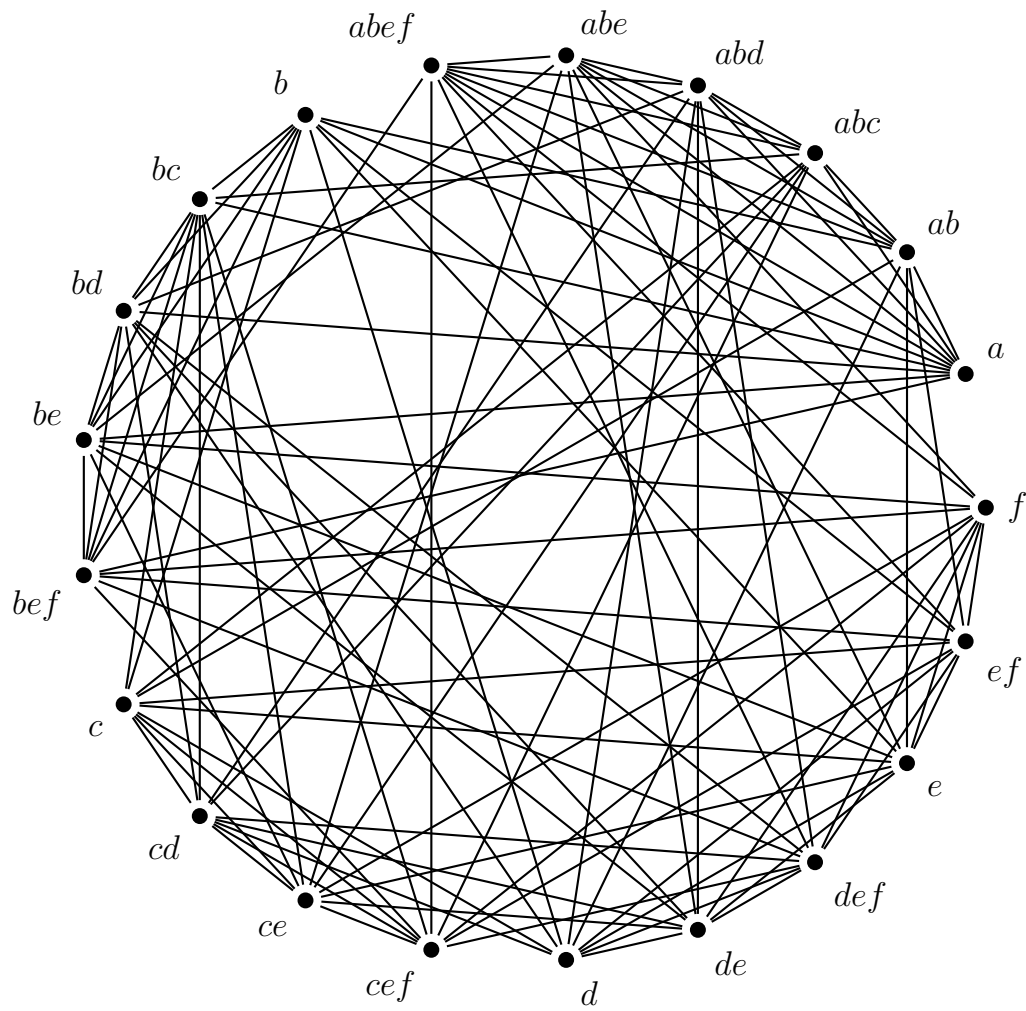
Enlistamos todas las trayectorias: $a, ab, abc, abd, abe, abef, b, ba, bc, bd, be, bef, c, cb, cba, cd, ce, cef, d, db, dba, dc, de, def, e, eb, eba, ec, ed, ef, f, fe, feb, feba, fec, fed$.

Quitamos las trayectorias que se repiten y nos queda: $a, ab, abc, abd, abe, abef, b, bc, bd, be, bef, c, cd, ce, cef, d, de, def, e, ef, f$.

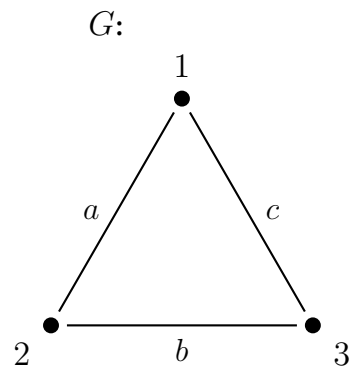
Escribiremos $x - y$ para indicar que existe la arista $[x, y]$, de esta forma, en $T(G)$, tenemos las aristas siguientes:

$a - ab, a - abc, a - abd, a - abe, a - abef, a - b, a - bc, a - bd, a - be, a - bef, ab - abc, ab - abd, ab - abe, ab - abef, ab - b, ab - c, ab - d, ab - e, ab - ef, abc - abd, abc - abe, abc - abef, abc - bc, abc - c, abc - cd, abc - ce, abc - cef, abd - abe, abd - abef, abd - bd, abd - cd, abd - d, abd - de, abd - def, abe - abef, abe - be, abe - ce, abe - de, abe - e, abe - f, abef - bef, abef - cef, abef - def, abef - ef, abef - f, b - bc, b - bd, b - be, b - bef, b - c, b - d, b - e, b - ef, bc - bd, bc - be, bc - bef, bc - c, bc - cd, bc - ce, bc - cef, bd - be, bd - bef, bd - cd, bd - d, bd - de, bd - def, be - bef, be - ce, be - de, be - e, be - f, bef - cef, bef - def, bef - ef, bef - f, c - cd, c - ce, c - cef, c - d, c - e, c - ef, cd - ce, cd - cef, cd - d, cd - de, cd - def, ce - cef, ce - de, ce - e, ce - f, cef - def, cef - ef, cef - f, d - de, d - def, d - e, d - ef, de - def, de - e, de - f, def - ef, def - f, e - ef, e - f, ef - f$.

$T(G)$:

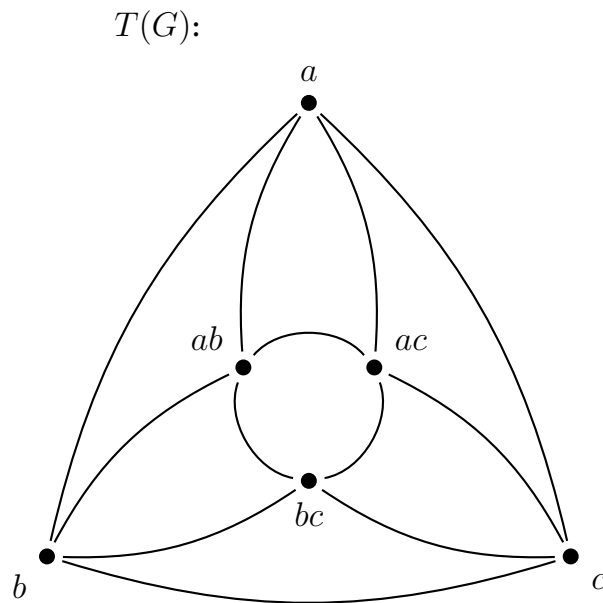


3) Veamos un ejemplo más sencillo. Sea G la gráfica que se muestra a continuación.

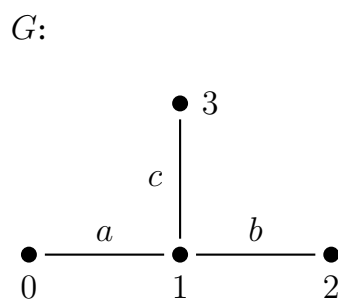


Entonces, se tienen las trayectorias a, ab, ac, b, bc, c .

Las aristas $a - ab, a - ac, a - b, a - c, ab - ac, ab - b, ab - bc, ac - bc, ac - c, b - bc, b - c, bc - c$.



4) Tenemos la gráfica:



Las trayectorias que tiene son: a, ab, ac, b, bc y c .

Y las adyacencias en su gráfica de trayectorias: $a - ab, a - ac, a - b, a - c, ab - ac, ab - b, ab - bc, ac - bc, ac - c, b - bc, b - c, bc - c$.

Entonces, los vértices y las adyacencias son iguales a los de la gráfica de trayectorias mostrada en el ejemplo anterior.

Si observamos detenidamente los ejemplos 1, 2 y 4, cada par de vértices de la respectiva gráfica $T(G)$ está presente en el mismo número de aristas; por ejemplo, hay tantas aristas con extremo a como aristas con extremo b ; lo mismo sucede con b y c .

Es verdad que la obtención de la gráfica de trayectorias es complicada pero, para ciertas gráficas, la gráfica de trayectorias resulta interesante.

3.3. Algunas propiedades de $T(G)$

Veamos ciertas propiedades de la gráfica $T(G)$ cuando G es *conexa* y sin ciclos.

Utilizaremos, sin demostración, resultados acerca de gráficas conexas y sin ciclos que pueden ser consultados en [2].

Definición 3.3.1. Se dice que la gráfica G es *conexa*, si $\forall x, y \in V(G)$, hay un camino con vértice inicial x y vértice final y .

Definición 3.3.2. El grado de un vértice, v , en la gráfica G es el número de aristas $[v, Z]$ que hay en $A(G)$, $Z \in V(G)$, y se denota por $\delta_G(v)$.

Definición 3.3.3. Sea $r \in \mathbb{N}$. Decimos que la gráfica G es r -regular si $\forall v \in V(G)$, $\delta_G(v) = r$.

Ejemplos:

- 1) La gráfica trivial es 0-regular.
- 2) La gráfica de Petersen es 3-regular.
- 3) La siguiente gráfica es 1-regular:



Teorema 3.3.1. Sean G una gráfica conexa y sin ciclos y $n = |A(G)| \geq 1$. Entonces $T(G)$ es $2(n - 1)$ -regular.

Demostración. Sea G como en las hipótesis. Se sabe que, si G tiene n aristas, entonces G tiene $n + 1$ vértices (véase [2]).

Sea $x \in V(G)$, entonces para todo vértice z , con $z \neq x$, se sigue que existe un camino de x a z , tal camino forzosamente es una trayectoria pues G no tiene ciclos.

Se sabe que la trayectoria que une a dos vértices de G es única (véase [2]). Así, existen exactamente n trayectorias de longitud mayor que cero con vértice inicial x , pues hay una y sólo una por cada otro vértice de G .

Sea $T = (v_1, v_2, \dots, v_s)$ una trayectoria de G .

En $T(G)$, T es adyacente a todas las trayectorias (de longitud mayor que cero) que inician (o finalizan) en v_1 , excepto a sí misma y además, es adyacente a todas las trayectorias que empiezan (o terminan) en v_s , excepto a sí misma, valga la redundancia.

Es decir, por el lado de v_1 , T es adyacente a $n - 1$ trayectorias, pues sabemos que hay n trayectorias que inician en v_1 , por consiguiente hay $n - 1$ trayectorias que inician en v_1 descartando a la misma T . Por el lado de v_s , hay otras n trayectorias que inician en v_s de las cuales, T es adyacente a $n - 1$ pues estamos considerando que la trayectoria inversa de T es igual a T .

Exceptuando a T , las trayectorias con extremo v_1 son diferentes de las que tienen como extremo a v_s . De ahí que $\delta_{T(G)}(T) = 2n - 2$.

Por lo tanto $T(G)$ es $2(n - 1)$ -regular. □

Definición 3.3.4. Análogamente a las digráficas, también se tienen subgráficas inducidas. Sean G una gráfica y $S \subset V(G)$, $S \neq \emptyset$, la subgráfica inducida de G por el conjunto S , $G[S]$ es tal que:

- $V(G[S]) = S$.
- $A(G[S]) = \{[a, b] \in A(G) \mid a, b \in S\}$.

Teorema 3.3.2. Sea G una gráfica conexa y sin ciclos, $n = |A(G)| \geq 1$. Entonces $|V(T(G))| = \sum_{i=1}^n i$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n .

Si $n = 1$, entonces G tiene una única arista y por ende sólo tiene una trayectoria de longitud mayor que cero. Por lo tanto $|V(T(G))| = 1$.

Hipótesis de inducción: Si G' es una gráfica conexa y sin ciclos, con n aristas, entonces $|V(T(G'))| = \sum_{i=1}^n i$.

Sea G una gráfica conexa y acíclica con $n+1$ aristas. Hay que demostrar que $|V(T(G))| = \sum_{i=1}^{n+1} i$.

Otro hecho conocido es que G tiene un vértice de grado 1, digamos v . Como v tiene grado 1, tenemos una arista $a = [v, w]$ (consúltese [2]).

Además se sabe que $G' = G[V(G) - \{v\}]$ es una gráfica conexa, acíclica y que tiene todas las aristas de G , excepto a a (véase [2]).

Entonces todos los vértices de $T(G')$ serán vértices de $T(G)$. Pero $T(G)$ tiene más vértices: aquellos que son trayectorias de G (de longitud mayor que cero) y que tienen como extremo a v .

Es decir, $|V(T(G))| = |V(T(G'))| + \alpha$, donde α representa a las trayectorias de G que tienen como extremo a v .

Por hipótesis de inducción $|V(T(G'))| = \sum_{i=1}^n i$. Como G tiene $n + 1$ aristas, entonces tiene $n + 2$ vértices, por lo que hay exactamente $n + 1$ trayectorias, de longitud mayor que cero, que tienen como extremo a v .

Por ende $\alpha = n + 1$.

Concluimos que $|V(T(G))| = \sum_{i=1}^{n+1} i$.

□

También es sabido que para cualquier gráfica conexa G existe $Ag(G)$, una gráfica con los mismos vértices de G y con $A(Ag(G)) \subseteq A(G)$ tal que es conexa y sin ciclos (consúltese [2]). Como consecuencia, $T(Ag(G))$ es un subgráfica inducida de $T(G)$. Tomando en cuenta los lemas anteriores, en general, no es raro encontrar ciclos en $T(G)$.

A continuación veremos algunos resultados acerca de ciclos con *cuerdas* en la gráfica de trayectorias.

3.4. Lemas sobre ciclos con cuerdas en $T(G)$

Definición 3.4.1. Sean G una gráfica y C un ciclo de G . Recordando que los ciclos son sucesiones de vértices, si i es un vértice de C , al sucesor de i lo denotamos por $i \xrightarrow{C} 1$ y a su antecesor por $i \xleftarrow{C} 1$. Cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos simplemente $i + 1$ o $i - 1$.

De esta forma, por ejemplo, el sucesor del sucesor de i en C será $i + 2$ y el antecesor del antecesor de i , $i - 2$.

Se dice que dos vértices de C son consecutivos si uno es sucesor del otro.

Así, si tenemos un ciclo $C = (1, 2, 3, 1)$, 1 y 2 son consecutivos, 2 y 3 son consecutivos, y por último, 3 y 1 también lo son.

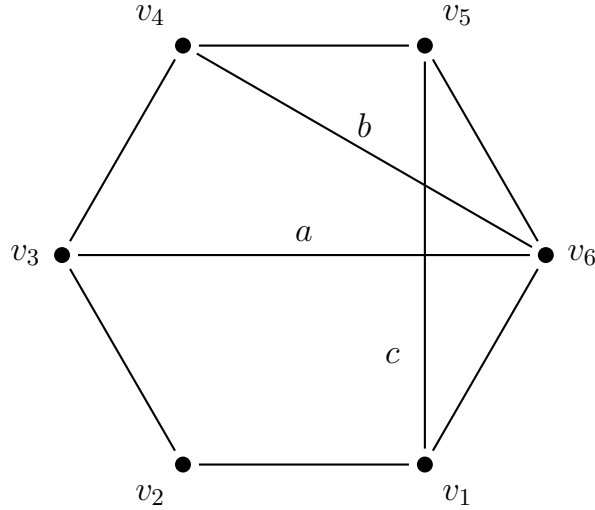
Definición 3.4.2. Sean G una gráfica y C un ciclo de G , se dice que $c = [i, j] \in A(G)$, es una cuerda de C , si i y j son vértices de C y además no son consecutivos.

c es una cuerda corta, si $j = i + 2$ o $j = i - 2$.

c es una cuerda larga, si no es corta.

Ejemplos:

1) Sean G la siguiente gráfica y $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1)$.



b es cuerda corta de C pues $v_6 = v_4 + 2$.

a es cuerda larga porque $v_6 \neq v_3 + 2 = v_5$ y $v_6 \neq v_3 - 2 = v_1$.

c es cuerda corta porque $v_5 = v_1 - 2$.

2) Los ciclos que constan de 4 o 5 vértices sólo pueden tener cuerdas cortas.

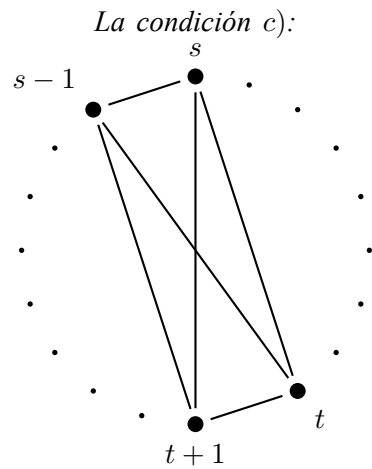
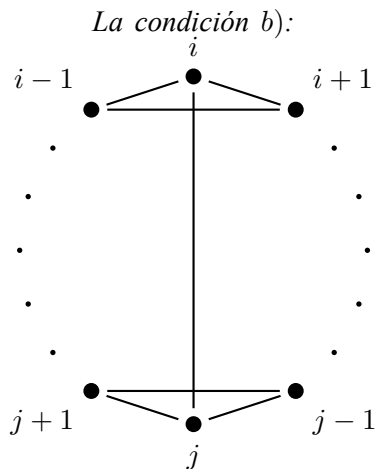
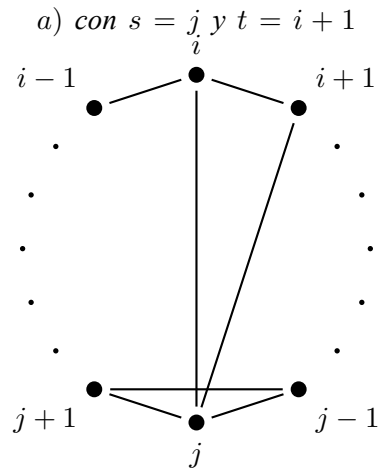
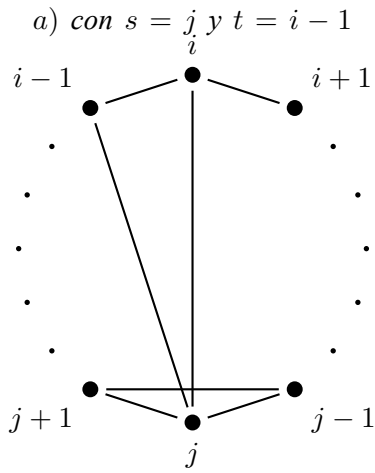
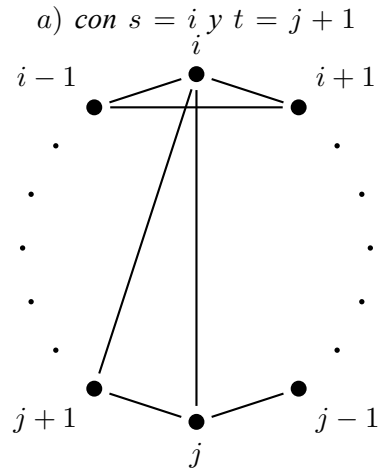
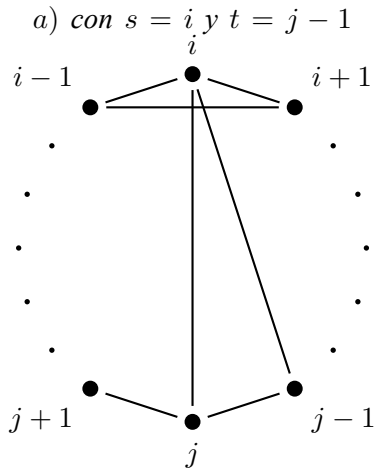
Definición 3.4.3. Sea G una gráfica, G es completa siempre que para todo par de vértices $x, y \in V(G)$ si $x \neq y$, entonces $[x, y] \in A(G)$.

Lema 3.4.1. Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias y C un ciclo de $T(G)$. Si C tiene una cuerda larga $c = [i, j]$, entonces al menos una de las siguientes condiciones se cumple:

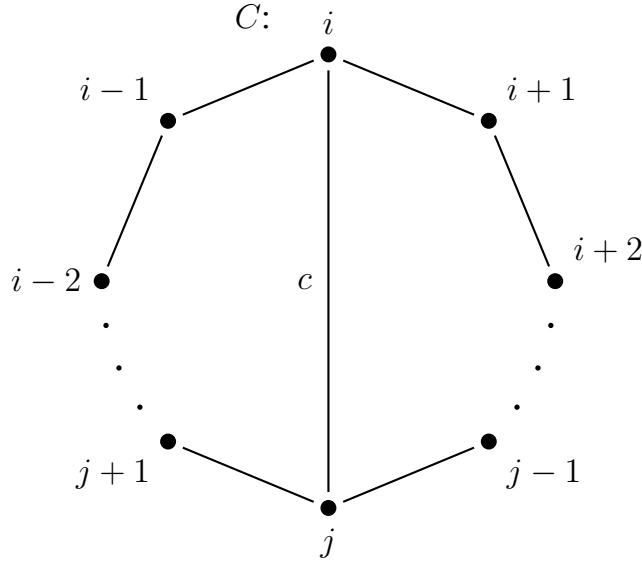
- $\{[s-1, s+1], [s, t]\} \subset A(T(G))$ con $(s = i \text{ y } t \in \{j-1, j+1\})$ o $(s = j \text{ y } t \in \{i-1, i+1\})$.
- $\{[i-1, i+1], [j-1, j+1]\} \subset A(T(G))$.
- $T(G)[\{s-1, s, t, t+1\}] \cong K_4$ con $s \in \{i, i+1\}, t \in \{j-1, j\}$ ¹.

¹La expresión $T(G)[\{s-1, s, t, t+1\}] \cong K_4$ se lee: la subgráfica inducida de $T(G)$ por el conjunto $\{s-1, s, t, t+1\}$ es una gráfica completa de 4 vértices.

Ilustrando las condiciones anteriores, tendremos:

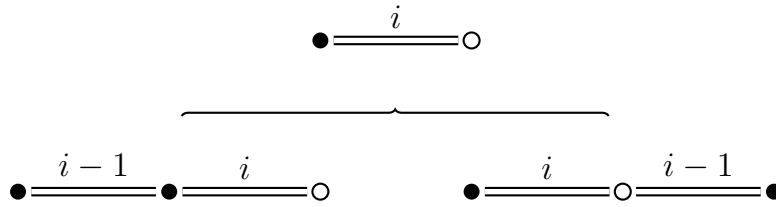


Demostración. Como c es una cuerda larga, $j \neq i + 2$ y $j \neq i - 2$, por ende $j - 1 \neq i + 1$ y $j + 1 \neq i - 1$. Como $i \neq j$, se sigue que $i - 1 \neq j - 1$ e $i + 1 \neq j + 1$. Por lo tanto, C tiene al menos 6 vértices.



Como C es un ciclo en $T(G)$, se tiene que i es una trayectoria de G que comparte un extremo con la trayectoria $i - 1$.

Entonces tenemos dos casos: $i - 1$ e i comparten el vértice inicial de i o comparten el vértice final de i .



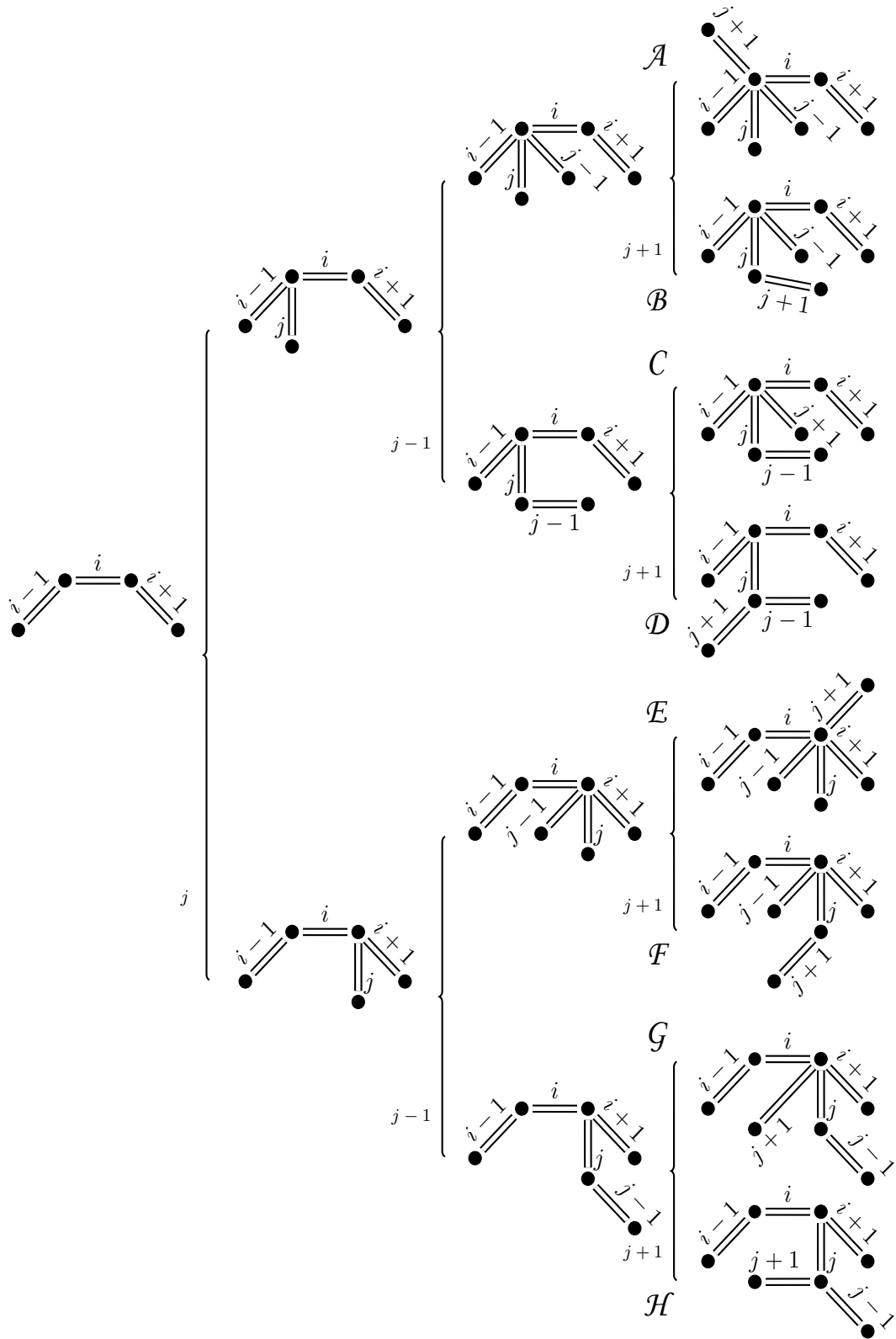
Si comparten el vértice inicial de i :

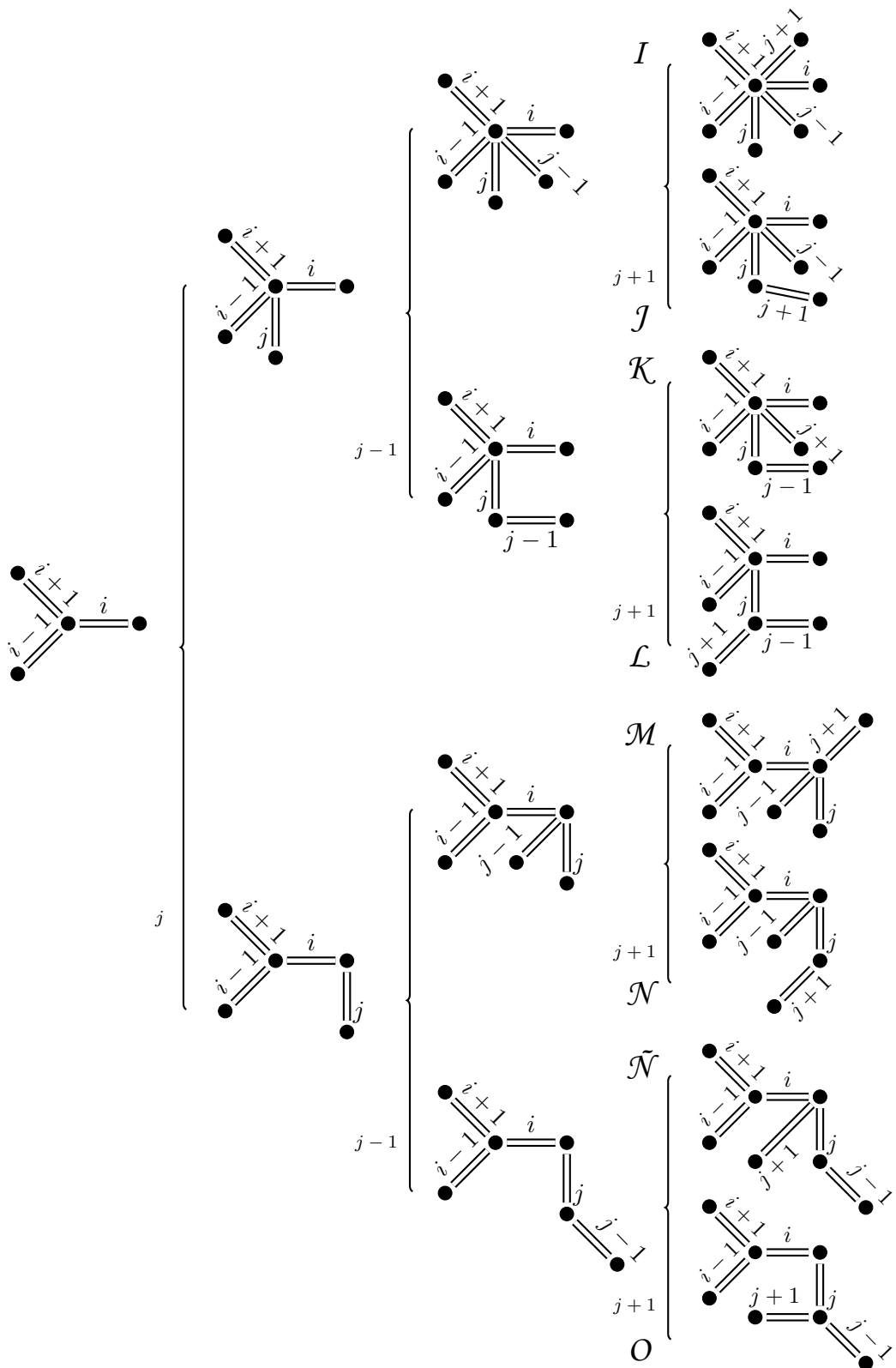
Como $i + 1$ es adyacente a i en $T(G)$, tenemos otros dos casos: estas dos trayectorias comparten el extremo inicial de i o el final.

Como j es adyacente a i en $T(G)$, de nuevo dos casos: estas dos trayectorias comparten el extremo inicial de i o el final.

Como $j - 1$ es adyacente a j en $T(G)$, otro par de casos: estas dos trayectorias comparten el extremo final de j o el inicial.

Como $j + 1$ es adyacente a j en $T(G)$, dos casos: estas dos trayectorias comparten el extremo inicial de j o el final.





En las dos páginas anteriores se ilustraron todos los posibles casos descritos para las trayectorias $i+1, j, j-1$ y $j+1$. Cada caso está marcado con una letra.

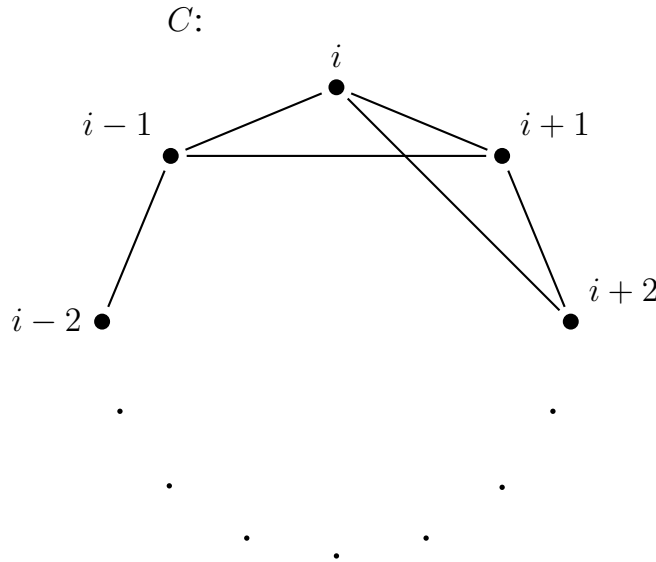
A continuación diremos cuál de las condiciones $a)$, $b)$ o $c)$ se cumple según la situación.

- \mathcal{A} . Se cumplen $c)$ con $s = i, t = j - 1$ o con $s = i, t = j$ y $a)$ con $s = j, t = i - 1$.
- \mathcal{B} . $c)$ con $s = i, t = j - 1$.
- \mathcal{C} . $c)$ con $s = i, t = j$.
- \mathcal{D} . $a)$ con $s = j, t = i - 1$.
- \mathcal{E} . $a)$ con $s = j, t = i + 1$; $c)$ con $s = i + 1, t = j - 1$ o $t = j$.
- \mathcal{F} . $c)$ con $s = i + 1, t = j - 1$.
- \mathcal{G} . $c)$ con $s = i + 1, t = j$.
- \mathcal{H} . $a)$ con $s = j, t = i + 1$.
- \mathcal{I} . $a)$ y $c)$ se cumplen para s y t libres (respetando las respectivas condiciones); $b)$ se cumple.
- \mathcal{J} . $a)$ con $s = i, t = j - 1$; $c)$ con $s = i$ o $s = i + 1, t = j - 1$.
- \mathcal{K} . $a)$ con $s = i, t = j + 1$; $c)$ con $s = i$ o $s = i + 1, t = j$.
- \mathcal{L} . $a)$ con $s = j, t = i - 1$ o $t = i + 1$; $b)$.
- \mathcal{M} . $a)$ con $s = i, t = j - 1$ o $t = j + 1$; $b)$.
- \mathcal{N} . $a)$ $s = i, t = j - 1$.
- $\tilde{\mathcal{N}}$. $a)$ $s = i, t = j + 1$.
- \mathcal{O} . $b)$.

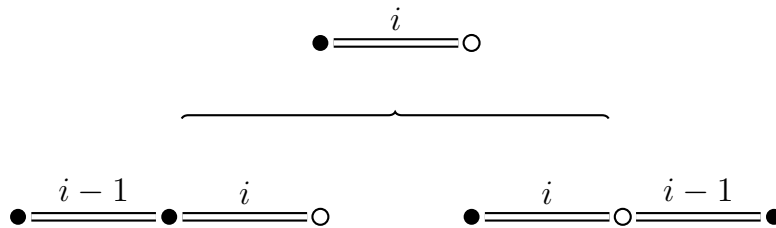
El caso cuando i e $i - 1$ comparten el vértice final de i es totalmente análogo a cuando comparten el vértice inicial. \square

Lema 3.4.2. Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias y $C = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$ un ciclo de $T(G)$. Si existe i , vértice de C , tal que $\{[i-1, i+1], [i, i+2]\} \subset A(T(G))$, entonces al menos una de las aristas $[i-1, i+2]$, $[i, i+3]$, $[i+1, i+3]$, $[i-2, i]$, $[i-2, i+1]$ pertenece a $A(T(G))$.

Demostración. Supongamos que existe i , vértice de C , tal que $\{[i-1, i+1], [i, i+2]\} \subset A(T(G))$.

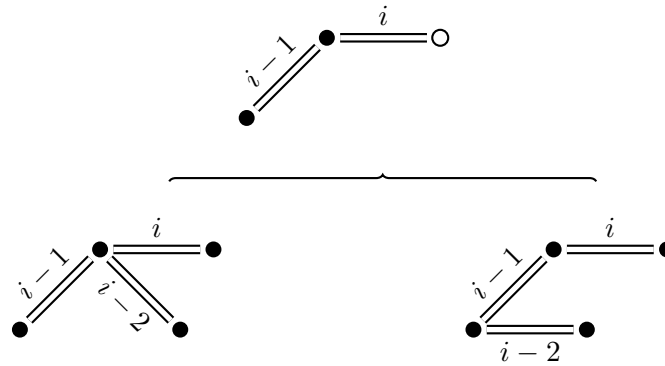


Entonces la trayectoria i , de G , comparte su vértice inicial o final con la trayectoria $i-1$.



Los casos son análogos, uno del otro, así que supondremos que comparten el vértice inicial de i .

La trayectoria $i-2$ comparte un extremo con $i-1$.
Tenemos los dos casos siguientes.

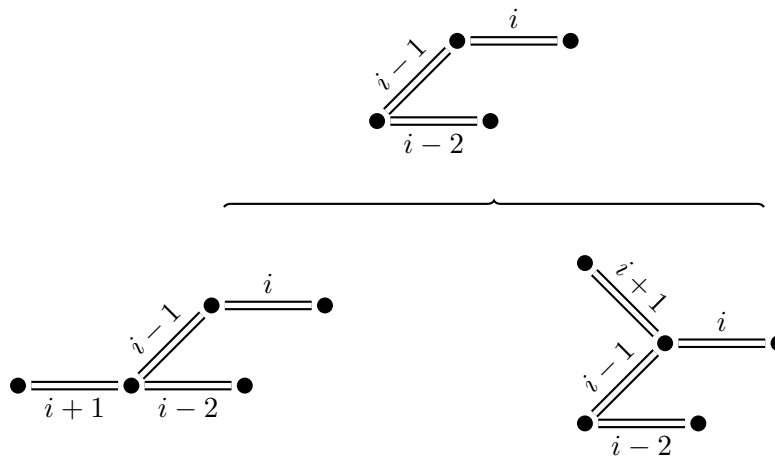


Si sucede el caso mostrado en la izquierda de la figura anterior, entonces $[i - 2, i] \in A(T(G))$.

Si ocurre el de la derecha:

Sabemos que la trayectoria $i + 1$ comparte un extremo con la $i - 1$, porque tenemos la arista $[i - 1, i + 1]$ en $T(G)$.

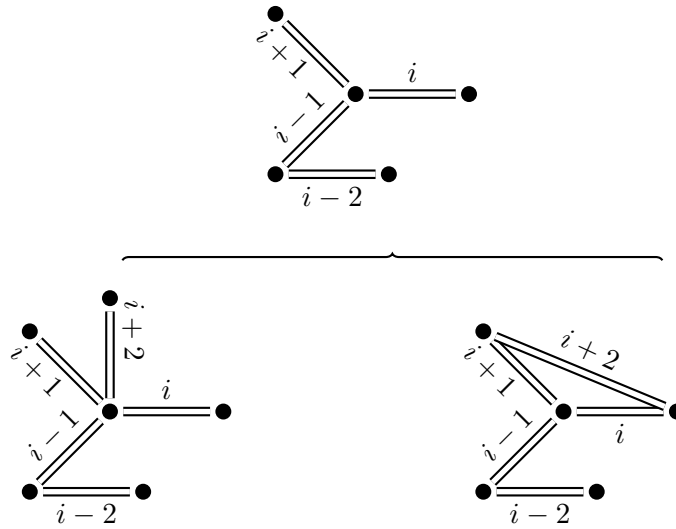
Entonces tenemos dos casos:



Si ocurre el caso de la izquierda entonces $[i - 2, i + 1] \in A(T(G))$.

Si sucede el de la derecha:

Ahora, $i + 2$ comparte un extremo con i y también comparte un extremo con $i + 1$, y como sólo puede compartir uno con cada una de las trayectorias $i, i + 1$, tenemos los siguientes dos casos:



Si pasa el de la izquierda, se tiene que $[i - 1, i + 2] \in A(T(G))$.

Y si pasa el de la derecha:

$i + 2$ comparte un extremo con $i + 3$ por lo que $i + 3$ compartirá un extremo con i o con $i + 1$.

Si $i + 3$ comparte un extremo con i , entonces $[i, i + 3] \in A(T(G))$.

Si $i + 3$ comparte un extremo con $i + 1$, entonces $[i + 1, i + 3] \in A(T(G))$. \square

3.5. k -núcleos en orientaciones de $T(G)$

Definición 3.5.1. Decimos que una gráfica H satisface la propiedad \mathfrak{T}^* si: Todo ciclo C de H , cumple las dos condiciones siguientes:

I. Si C tiene una cuerda larga $c = [i, j]$, entonces al menos una de las siguientes propiedades se cumple:

- a) $\{[s - 1, s + 1], [s, t]\} \subset A(T(G))$ con $(s = i \text{ y } t \in \{j - 1, j + 1\})$ o $(s = j \text{ y } t \in \{i - 1, i + 1\})$.
- b) $\{[i - 1, i + 1], [j - 1, j + 1]\} \subset A(T(G))$.
- c) $T(G)[\{s - 1, s, t, t + 1\}] \cong K_4$ con $s \in \{i, i + 1\}, t \in \{j - 1, j\}$.

II. Si existe i , vértice de C , tal que $\{[i - 1, i + 1], [i, i + 2]\} \subset A(H)$, entonces al menos una de las aristas $[i - 1, i + 2], [i, i + 3], [i + 1, i + 3], [i - 2, i], [i - 2, i + 1]$ pertenece a $A(H)$.

De los lemas 3.4.1 y 3.4.2 se sigue que, para cualquier G , $T(G)$ satisface la propiedad \mathfrak{T}^* .

Hasta ahora no hemos dicho nada de los k -núcleos, pero pronto hablaremos de ellos, sólo faltan algunos lemas más.

Como trabajaremos con ciclos dirigidos, necesitaremos algunas definiciones que son prácticamente las mismas que para ciclos.

Definición 3.5.2. Sean D una digráfica, \vec{C} un ciclo dirigido de D e i uno de sus vértices. Recordando que los ciclos dirigidos son sucesiones, al sucesor de i lo denotamos por $i \stackrel{\vec{C}}{\pm} 1$ y a su antecesor por $i \stackrel{\vec{C}}{-} 1$. Cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos simplemente $i + 1$ o $i - 1$.

Dos vértices de \vec{C} son consecutivos, si uno es sucesor del otro.

$\vec{c} = (i, j) \in F(D)$ es una cuerda de \vec{C} , si i, j son vértices no consecutivos de \vec{C} .

\vec{c} es una cuerda larga si $j \neq i - 2$ y $j \neq i + 2$.

\vec{c} es una cuerda corta, si no es larga.

También necesitaremos algunas definiciones para las flechas.

Definición 3.5.3. Sea D una digráfica. Una flecha \vec{xy} es simétrica si $\vec{xy}, \vec{yx} \in F(D)$.

Si $\vec{yx} \notin F(D)$ y $\vec{xy} \in F(D)$, decimos que \vec{xy} es asimétrica.

Lema (Galeana Sánchez y Pastrana Ramírez) 3.5.1. Sean H una gráfica que satisface la propiedad \mathfrak{T}^* , D una orientación de H tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene dos flechas simétricas y $k \in \mathbb{Z}, k \geq 3$.

Si cada ciclo dirigido de D , de longitud no congruente con cero módulo k y mayor que 3 tiene una cuerda larga o dos cuerdas cortas $(c, d), (e, f)$ con $(e, f) \neq (d, c)$, entonces todo ciclo dirigido de D , de longitud no congruente con cero módulo k , tiene dos flechas simétricas.

Demostración. Sean H, D y k como en las hipótesis.

Hay que demostrar que todo ciclo dirigido de D , de longitud no congruente con cero módulo k tiene dos flechas simétricas.

Procederemos por inducción sobre la longitud del ciclo.

Si $\vec{C} = (v_0, v_1, v_0)$ es un ciclo de longitud 2 de D , entonces, tanto la flecha (v_0, v_1) como la flecha (v_1, v_0) son flechas de \vec{C} y ambas son simétricas.

Si \vec{C} tiene longitud 3, entonces, por hipótesis, \vec{C} tiene dos flechas simétricas.

Sea \vec{C} un ciclo dirigido de D , de longitud igual a $n > 3$ y $n \not\equiv 0 \pmod k$.
 Hay que probar que \vec{C} tiene dos flechas simétricas.

Hipótesis de inducción: Si \vec{C}_i es un ciclo dirigido de D , de longitud $l < n$ tal que $l \not\equiv 0 \pmod k$, entonces \vec{C}_i tiene dos flechas simétricas.

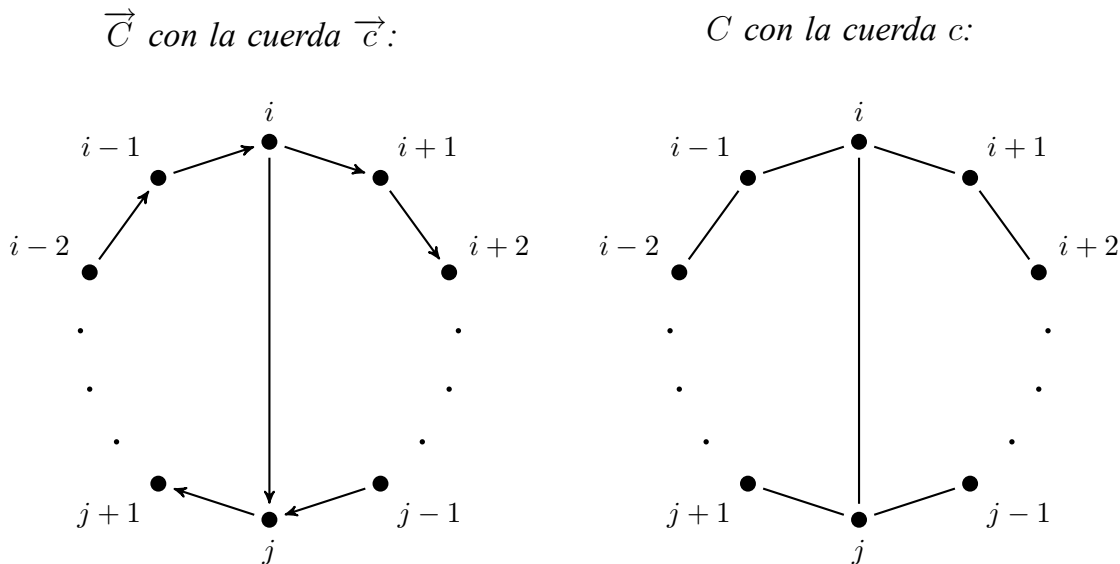
Como \vec{C} es un ciclo dirigido de D , de longitud no congruente con cero módulo k y mayor que 3, por hipótesis, se sigue que tiene una cuerda larga o dos cuerdas cortas.

También, ya que \vec{C} es un ciclo dirigido de D y D es una orientación de H , \vec{C} proviene de orientar un ciclo C de H .

Podemos suponer que \vec{C} y C se definen con la misma sucesión de vértices.

Hay dos casos, dependiendo si \vec{C} tiene una cuerda larga o dos cortas.

Si $\vec{c} = (i, j)$ es una cuerda de \vec{C} tal que $j \notin \{i - 2, i + 2\}$, es decir, si \vec{c} es cuerda larga:



Ya que j no es $i - 2$ ni $i + 2$, en C tenemos la cuerda larga $c = [i, j]$.

Como H es una gráfica que cumple la propiedad \mathcal{T}^* y tenemos en ella al ciclo C y a una cuerda larga de C , se sigue que se debe cumplir alguna de las tres propiedades enlistadas en I de la definición 3.5.1.

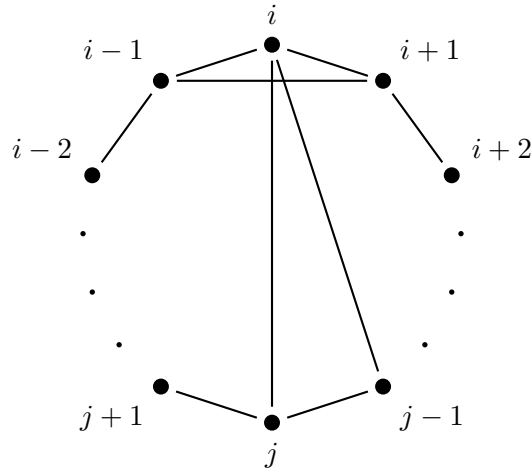
Supongamos que se cumple la propiedad a):

Entonces tenemos cuatro casos dependiendo de s y t .

a.1 $s = i, t = j - 1$.

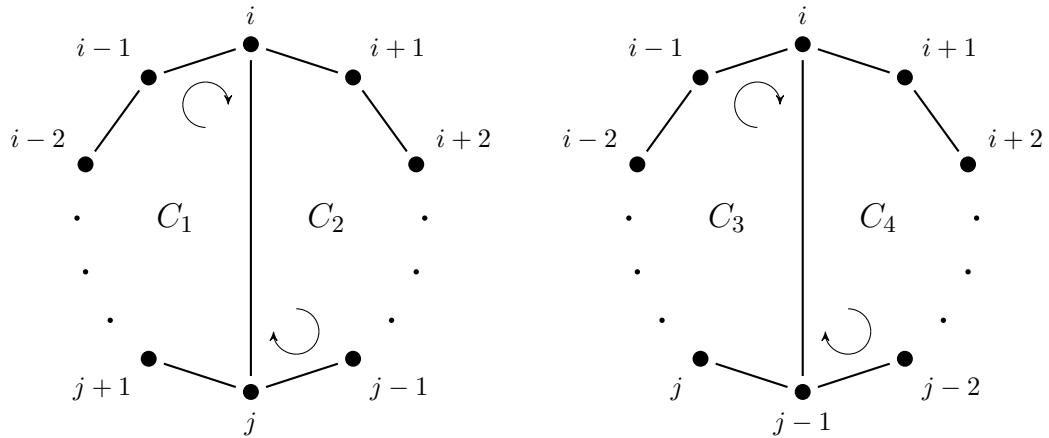
Entonces $[i - 1, i + 1], [i, j - 1] \in A(H)$.

C y sus cuerdas:



Definimos en H , los ciclos $C_1 = (i, j, [C], i)$, $C_2 = (j, i, [C], j)$, $C_3 = (i, j - 1, [C], i)$, $C_4 = (j - 1, i, [C], j - 1)$.

La notación $(i, j, [C], i)$ significa que el ciclo C_1 comenzará en i , seguirá con j y, a partir de ahí, continuará con la sucesión marcada por C , es decir, $j + 1, j + 2 \dots$ hasta regresar a i . Lo mismo para los otros ciclos.



Hagamos otros tres subcasos:

- I. Las longitudes de C_1 y C_2 no son congruentes con cero módulo k .
- II. La longitud de C_1 es congruente con cero módulo k y la de C_2 no lo es.
- III. La longitud de C_2 es congruente con cero módulo k , sin importar si la de C_1 es o no congruente con cero módulo k .

a.1.I Si (i, j) es una flecha asimétrica de D :

Entonces el ciclo dirigido $\vec{C}_1 = (i, j, [\vec{C}], i)$ tiene longitud menor que la de \vec{C} y no es congruente con cero módulo k pues la longitud de C_1 es la misma que la de \vec{C}_1 .

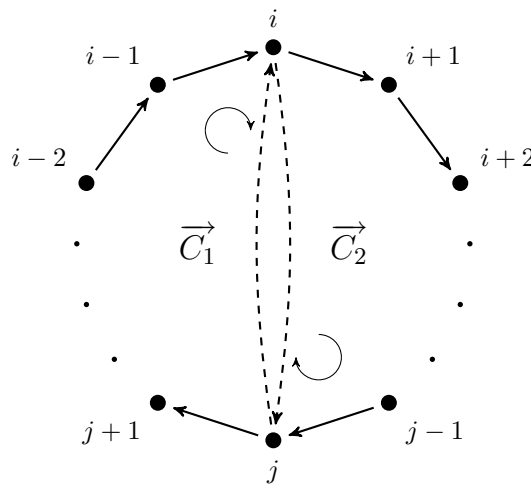
Por hipótesis de inducción, \vec{C}_1 tiene dos flechas simétricas que deben ser flechas de \vec{C} .

Si (i, j) es una flecha simétrica de D :

Entonces tenemos en D tanto la flecha (i, j) como la (j, i) .

Definimos el ciclo dirigido $\vec{C}_2 = (j, i, [\vec{C}], j)$ y el ciclo dirigido \vec{C}_1 como antes.

Tenemos que la longitud de \vec{C}_2 es la misma que la de C_2 y es menor que la de \vec{C} .



Por hipótesis de inducción, tanto \vec{C}_1 como \vec{C}_2 tienen dos flechas simétricas.

Con certeza, una de las flechas simétricas de \vec{C}_1 no es (i, j) por lo que tal flecha es una flecha de \vec{C} .

Ciertamente, una de las flechas simétricas de \vec{C}_2 no es (j, i) por lo que tal flecha es una flecha de \vec{C} .

Como \vec{C}_1 y \vec{C}_2 no tienen flechas en común, se sigue que \vec{C} tiene dos flechas simétricas.

Para evitar escribir más casos, pensemos que tenemos la flecha asimétrica (j, i) en D :

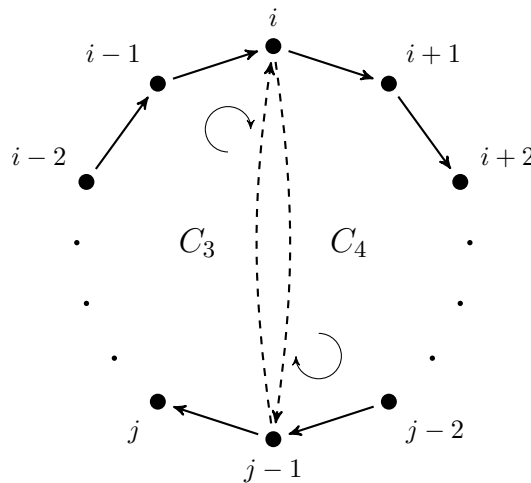
Sea \vec{C}_2 definido como antes. Entonces, por hipótesis de inducción, \vec{C}_2 tiene dos flechas simétricas que también son flechas de \vec{C} .

a.1.II Como la longitud de C_1 es congruente con cero módulo k , se sigue que la de C_3 es congruente con 1.

Ahora fijémonos en la longitud de C_4 .

Si la longitud de C_4 no es congruente con cero módulo k :

Argumentamos de la misma forma que en el caso a.1.I, cambiando j por $j - 1$ y los ciclos C_1 por C_3 y C_2 por C_4 .



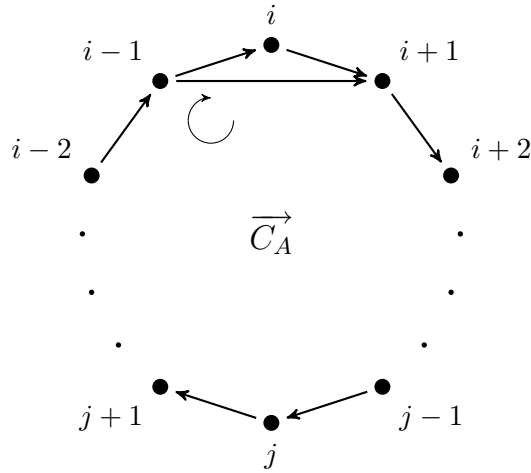
Si la longitud de C_4 sí es congruente con cero módulo k :

Como la longitud de C_3 es congruente con 1, se sigue que la longitud de C es congruente con $k - 1$.

Ya que $k \geq 3$, la longitud de C no es congruente con 1.

Como este es uno de los subcasos de $a.1$, en C tenemos la cuerda $[i - 1, i + 1]$, la cual tiene alguna orientación en D .

Si en D tenemos la flecha asimétrica $(i - 1, i + 1)$:



Tenemos el ciclo dirigido $\vec{C}_A = (i - 1, i + 1, [\vec{C}], i - 1)$. Como la longitud de C no es congruente con 1, la de \vec{C}_A no es congruente con cero y además es menor que la de \vec{C} .

Por hipótesis de inducción, \vec{C}_A tiene dos flechas simétricas que también deben ser flechas de \vec{C} .

Si en D tenemos el par de flechas $(i - 1, i + 1), (i + 1, i - 1)$:

Definimos \vec{C}_A como antes, entonces por hipótesis de inducción, \vec{C}_A tiene dos flechas simétricas, una de las cuales no es $(i - 1, i + 1)$. Tal flecha es flecha de \vec{C} .

El ciclo dirigido $T = (i - 1, i, i + 1, i - 1)$, por hipótesis, tiene dos flechas simétricas, una de las cuales no es $(i + 1, i - 1)$. Tal flecha es flecha de \vec{C} .

Como \vec{C}_A y T no comparten flechas, se sigue que \vec{C} tiene dos flechas simétricas.

Si en D tenemos la flecha asimétrica $(i + 1, i - 1)$:

T , definido como antes, tiene dos flechas simétricas que también son flechas de \vec{C} .

a.1.III Como la longitud de C_2 es congruente con cero, la de C_4 es congruente con $k - 1$ módulo k .

Consideremos la longitud de C_3 .

Si la longitud de C_3 no es congruente con cero:

Procedemos de la misma forma que en el caso a.1.II cuando la longitud de C_4 no es congruente con cero.

Si la longitud de C_3 es congruente con cero:

Entonces, la longitud de C_1 es congruente con $k - 1$ (no hay que olvidar esto pues lo usaremos más adelante en varias ocasiones).

Ahora vamos a fijarnos en la flecha (i, j) . Para ahorrarnos algunos casos, consideraremos posible tener la flecha asimétrica (j, i) .

Si la flecha (i, j) es asimétrica:

Usamos la misma demostración que en el caso a.1.I.

Ahora nos falta ver qué sucede cuando (j, i) es asimétrica y cuando tenemos el par de flechas (i, j) y (j, i) . Antes de continuar observemos que, como seguimos todavía en el caso a.1, C tiene la cuerda $[i, j - 1]$, la cual en D tiene alguna o ambas direcciones.

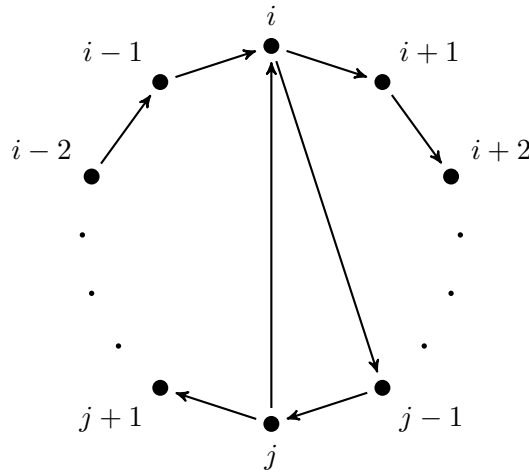
Si en D , $(j - 1, i)$ es una flecha asimétrica:

Ya que la longitud de C_4 no es congruente con cero, argumentamos como en el caso a.1.I, cuando pensamos que teníamos la flecha asimétrica (j, i) , sólo hay que cambiar j por $j - 1$ y C_2 por C_4 , así obtendremos el ciclo dirigido $\vec{C}_4 = (j - 1, i, [\vec{C}], j - 1)$.

En vista de lo anterior, únicamente nos ocuparemos de ver si la arista $[i, j - 1]$ recibió la dirección $(i, j - 1)$ o ambas.

Nótese también, que gracias a la flecha $(j - 1, i)$ se puede construir \vec{C}_4 , el cual tiene una flecha simétrica en común con \vec{C} .

Continuamos. Si (j, i) es asimétrica en D :

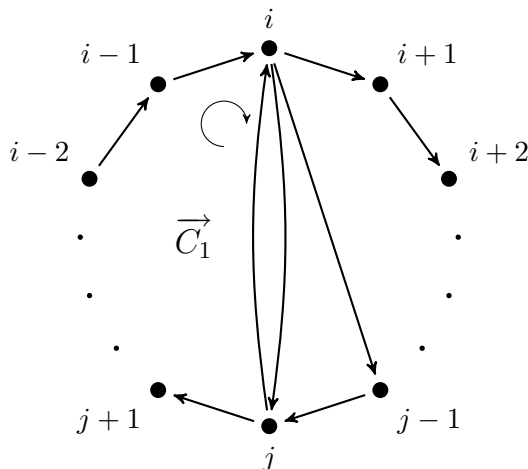


Ciertamente tenemos el ciclo $(j, i, j - 1, j)$, que, por hipótesis, tiene dos flechas simétricas, las cuales son $(j - 1, j)$, $(i, j - 1)$. De ahí tenemos la flecha $(j - 1, i)$, la cual permite construir \vec{C}_4 , quien tiene una flecha simétrica en común con \vec{C} , dicha flecha, junto con $(j - 1, j)$ son dos flechas simétricas de \vec{C} .

Si tenemos las flechas, (i, j) y (j, i) en D :

Entonces tenemos el ciclo dirigido \vec{C}_1 , de longitud congruente con $k - 1$ y menor que la de \vec{C} , que por hipótesis de inducción, tiene dos flechas simétricas, una de las cuales es flecha de \vec{C} .

\vec{C}_1 tiene dos flechas simétricas:



Para encontrar otra flecha simétrica en \vec{C} , usamos el ciclo dirigido $(j, i, j-1, j)$, el cual, por hipótesis, tiene dos flechas simétricas. Si $(j-1, j)$ es simétrica, ya tenemos dos flechas simétricas en \vec{C} . Si $(i, j-1)$ es simétrica entonces tenemos la flecha $(j-1, i)$ y el ciclo dirigido \vec{C}_4 quien comparte una flecha simétrica con \vec{C} , así tenemos dos flechas simétricas en \vec{C} .

Aquí se termina el caso *a.1.III* y con él, el caso *a.1*.

a.2 $s = i, t = j + 1$.

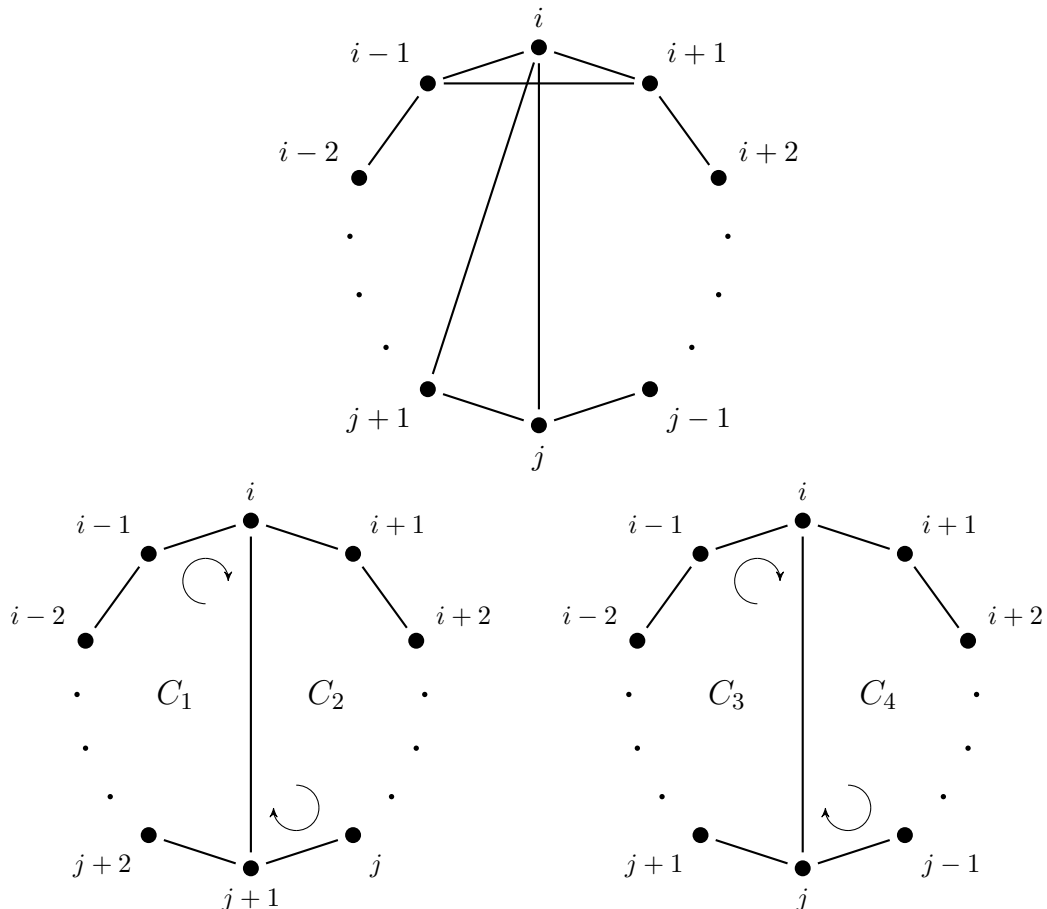
Entonces $[i-1, i+1], [i, j+1] \in A(H)$.

Definimos, en H , los ciclos $C_1 = (i, j+1, [C], i)$, $C_2 = (j+1, i, [C], j+1)$, $C_3 = (i, j, [C], i)$, $C_4 = (j, i, [C], j)$.

Procedemos de la misma manera que en el caso *a.1*.

Para *a.2.I*, cambiamos j por $j + 1$ en *a.1.I*.

C y sus cuerdas en el caso *a.2*:



Para $a.2.II$, si la longitud de C_4 no es congruente con cero, procedemos como en $a.1.I$ pero cambiamos C_1 por C_3 y C_2 por C_4 .

Si la longitud de C_4 es congruente con cero, argumentamos como en $a.1.II$.

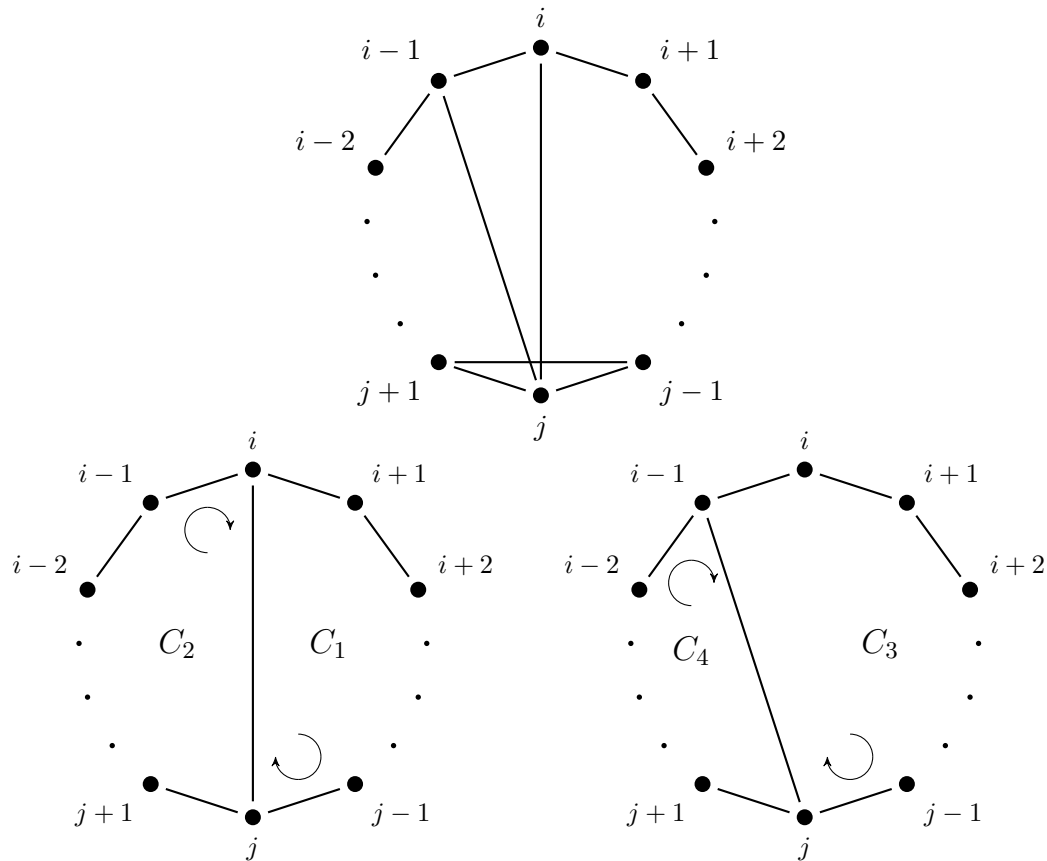
Para $a.2.III$, argumentamos como en el caso $a.1.III$, pero en lugar de fijarnos en la flecha (i, j) , consideraremos todas las posibles orientaciones de la cuerda $[i, j + 1]$. También, en vez de utilizar la cuerda $[i, j - 1]$ (misma que ya no sabemos si la tenemos), usaremos la flecha (i, j) .

Así se termina el caso $a.2$.

$a.3$ $s = j, t = i - 1$.

Entonces $[j - 1, j + 1], [j, i - 1] \in A(H)$.

C y sus cuerdas para el caso $a.3$:



Hacemos lo mismo que en el caso $a.1$ pero intercambiando i por j (incluso para definir los ciclos C_1, C_2, C_3 y C_4).

a.4 $s = j, t = i + 1$.

Entonces $[j - 1, j + 1], [j, i + 1] \in A(H)$.

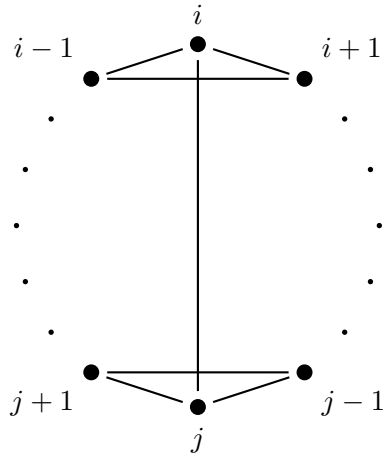
Argumentamos como en el caso a.2 pero intercambiando i por j (incluso para definir los ciclos C_1, C_2, C_3 y C_4).

Hemos terminado con todo lo que podría pasar si se cumpliera la propiedad a).

Veamos qué sucede si ocurre la propiedad b).

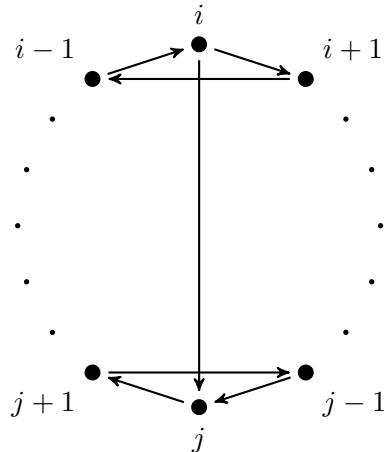
Entonces tenemos que $[i - 1, i + 1], [j - 1, j + 1] \in A(H)$.

C y sus cuerdas cuando se cumple b):



Hacemos cuatro casos, dependiendo de la dirección dada a cada una de las aristas $[i - 1, i + 1], [j - 1, j + 1]$.

b.1 Tenemos en D las flechas $(i + 1, i - 1)$ y $(j + 1, j - 1)$.



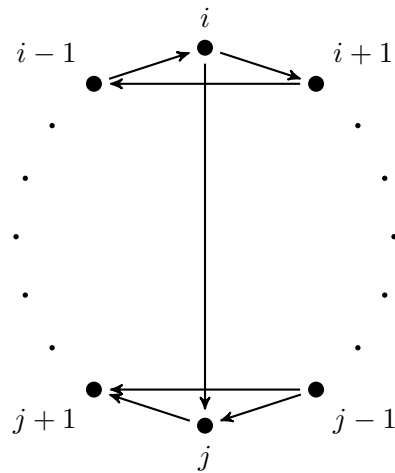
Los ciclos dirigidos $T_0 = (i - 1, i, i + 1, i - 1)$ y $T_1 = (j - 1, j, j + 1, j - 1)$, por hipótesis, tienen dos flechas simétricas cada uno.

Por lo tanto, forzosamente, \vec{C} tiene dos flechas simétricas.

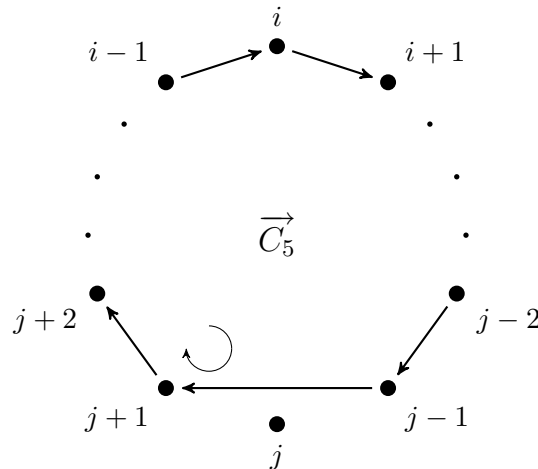
Obsérvese que no importa si $(i + 1, i - 1)$, $(j + 1, j - 1)$, son simétricas o asimétricas, basta con tener estas flechas para concluir que \vec{C} tiene dos flechas simétricas.

b.2 Tenemos las flechas $(i + 1, i - 1)$ y $(j - 1, j + 1)$.

Podemos suponer que $(j - 1, j + 1)$ es asimétrica (si fuera simétrica, estaríamos en el caso b.1).



Definimos el ciclo dirigido $\vec{C}_5 = (j - 1, j + 1, [\vec{C}], j - 1)$.



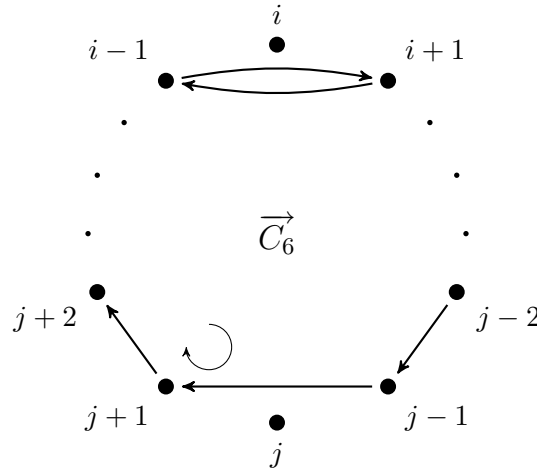
Si la longitud de \vec{C}_5 no es congruente con cero módulo k :

Como la longitud de \vec{C}_5 es menor que la de \vec{C} , \vec{C}_5 tiene dos flechas simétricas por hipótesis de inducción y como $(j - 1, j + 1)$ es asimétrica, entonces dichas flechas son flechas de \vec{C} .

Si la longitud de \vec{C}_5 sí es congruente con cero módulo k :

Podemos suponer que $(i + 1, i - 1)$ es simétrica, porque si fuera asimétrica, el ciclo dirigido T_0 (véase el caso b.1), tendría sus dos flechas simétricas en común con \vec{C} y habríamos terminado.

Entonces tenemos la flecha $(i - 1, i + 1)$. Definimos el ciclo dirigido $\vec{C}_6 = (i - 1, i + 1, [\vec{C}_5], i - 1)$



Sabemos que la longitud de \vec{C}_6 es congruente con $k - 1$, debido a que la de \vec{C}_5 es congruente con cero, y es menor que la de \vec{C} . Por lo tanto, por hipótesis de inducción, \vec{C}_6 tiene dos flechas simétricas, una de ellas es $(i - 1, i + 1)$ y la otra debe ser flecha de \vec{C} ya que $(j - 1, j + 1)$ es asimétrica.

Además, sabemos que el ciclo T_0 tiene dos flechas simétricas, una es $(i + 1, i - 1)$ y la otra debe ser $(i - 1, i)$ o $(i, i + 1)$.

Por consiguiente \vec{C} tiene dos flechas simétricas.

b.3 Tenemos las flechas $(i - 1, i + 1)$ y $(j + 1, j - 1)$.

Utilizamos la misma argumentación que en el caso b.2, lo único que hacemos diferente es intercambiar i y j . Notemos que si cambiamos i por j en la definición de T_0 , obtenemos la de T_1 .

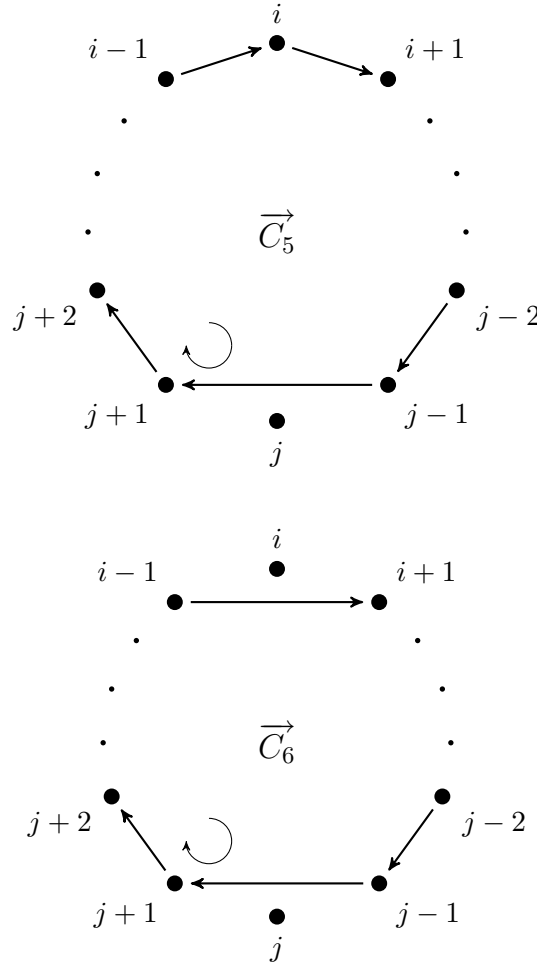
b.4 Tenemos las flechas $(i - 1, i + 1)$ y $(j - 1, j + 1)$.

Si $(i - 1, i + 1)$ es simétrica, regresamos al caso b.2.

Si $(j - 1, j + 1)$ es simétrica, regresamos al caso b.3.

Podemos suponer que ambas son asimétricas.

Definimos los ciclos dirigidos \vec{C}_5 y \vec{C}_6 igual que en el caso b.2.



Si la longitud de \vec{C}_6 no es congruente con cero módulo k :

Usando que su longitud es menor que la de \vec{C} , se sigue que \vec{C}_6 tiene dos flechas simétricas (por hipótesis de inducción), las cuales también son flechas de \vec{C} .

Si la longitud de \vec{C}_6 es congruente con cero módulo k :

Entonces la longitud de \vec{C}_5 es congruente con 1 y podemos aplicarle la hipótesis de inducción para obtener dos flechas simétricas de \vec{C} .

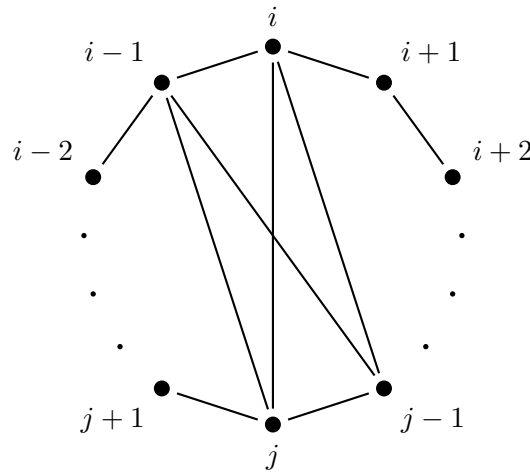
Se han terminado los casos cuando se cumple *b*). Ahora sólo nos falta ver qué sucedería, si se cumpliera *c*).

Supongamos que $H[\{s-1, s, t, t+1\}] \cong K_4$ con $s \in \{i, i+1\}$, $s \in \{j-1, j\}$.

c.1 $s = i, t = j - 1$.

Entonces, tenemos las cuerdas $[i - 1, j]$, $[i - 1, j - 1]$, $[i, j - 1]$ y la que ya teníamos $[i, j]$.

C y sus cuerdas para el caso *c.1*:



Definimos los ciclos $C_1 = (i, j, [C], i)$, $C_2 = (j, i, [C], j)$,

$C_3 = (i, j - 1, [C], i)$, $C_4 = (j - 1, i, [C], j - 1)$, $C_7 = (i - 1, j, [C], i - 1)$,
 $C_8 = (j, i - 1, [C], j)$.

Volveremos a usar los mismos subcasos que utilizamos para *a*):

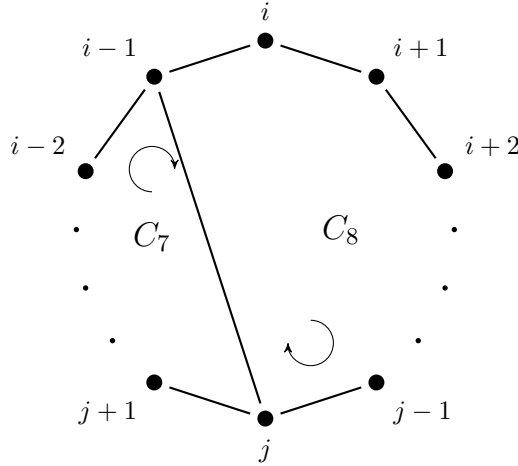
- I. Las longitudes de C_1 y C_2 no son congruentes con cero módulo k .
- II. La longitud de C_1 es congruente con cero módulo k y la de C_2 no lo es.
- III. La longitud de C_2 es congruente con cero módulo k , sin importar si la de C_1 es o no congruente con cero módulo k .

Podemos observar que los ciclos C_1, C_2, C_3, C_4 son idénticos a los definidos en *a.1*.

c.1.I Hacemos exactamente lo mismo que en el caso *a.1.I*.

c.1.II Si la longitud de C_4 no es congruente con cero, regresamos al caso a.1.II.

Si la longitud de C_4 es congruente con cero:



Dado que la longitud de C_1 es congruente con cero, la de C_7 es congruente con $k - 1$ módulo k .

Como la longitud de C_4 es congruente con cero, tenemos que la de C_8 es congruente con 2 módulo k , y como $k \geq 3$, se sigue que la longitud de C_8 no es congruente con cero.

Argumentamos de forma similar a la del caso a.1.I, pero fijándonos en la dirección dada a la arista $[i - 1, j]$ y utilizando C_7 y C_8 en lugar de C_1 y C_2 respectivamente.

c.1.III Si la longitud de C_3 no es congruente con cero, regresamos al caso a.1.III.

Si la longitud de C_3 es congruente con cero:

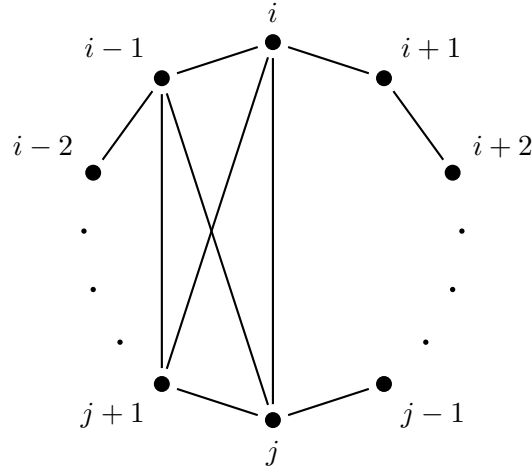
Como la longitud de C_2 es congruente con cero, la de C_8 es congruente con 1.

Ya que la longitud de C_3 es congruente con cero, se sigue que la de C_1 es congruente con $k - 1$, por ende, la longitud de C_7 es congruente con $k - 2$ módulo k . Como $k \geq 3$, la longitud de C_7 no es congruente con cero.

Nuevamente, argumentamos de forma similar a la del caso a.1.I, pero fijándonos en la dirección dada a la arista $[i - 1, j]$ y utilizando C_7 y C_8 en lugar de C_1 y C_2 respectivamente.

c.2 $s = i, t = j$.

C y sus cuerdas para el caso c.2:

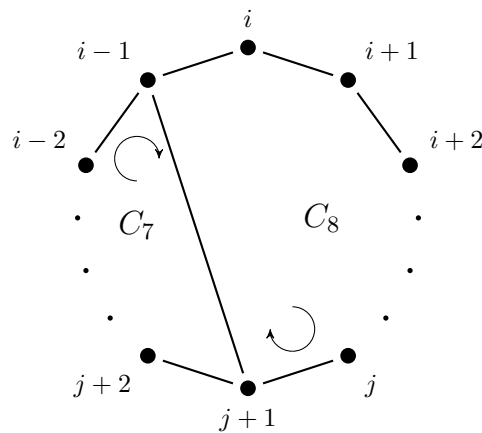


Haremos, principalmente, dos casos: $j \neq i - 3$ o $j = i - 3$.

• $j \neq i - 3$.

Ahora, definimos $C_1 = (i, j + 1, [C], i)$, $C_2 = (j + 1, i, [C], j + 1)$, $C_3 = (i, j, [C], i)$, $C_4 = (j, i, [C], j)$, $C_7 = (i - 1, j + 1, [C], i - 1)$, $C_8 = (j + 1, i - 1, [C], j + 1)$.

C_1, C_2, C_3, C_4 , son idénticos a los definidos en a.2.



De nuevo haremos los subcasos I, II, III.

c.2.I Procedemos como en a.1.I, pero cambiamos j por $j + 1$ (lo mismo que hicimos para el caso a.2.I).

c.2.II Si la longitud de C_4 no es congruente con cero, procedemos como en el caso a.2.II.

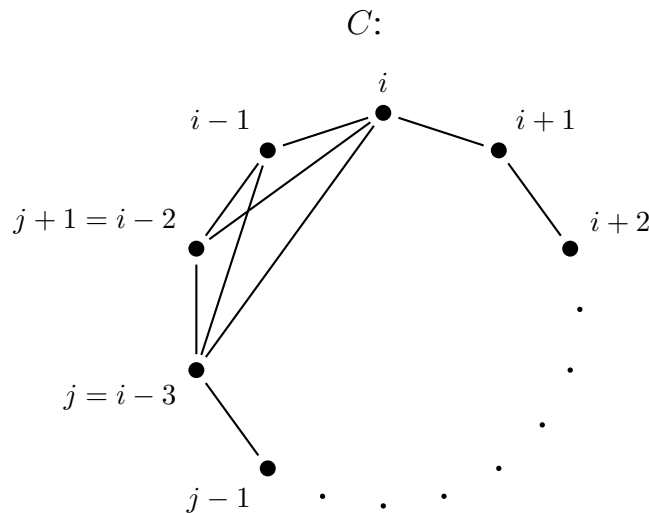
Si la longitud de C_4 es congruente con cero módulo k :

Argumentamos como en el caso c.1.II cambiando j por $j + 1$.

c.2.III Si la longitud de C_3 no es congruente con cero módulo k , regresamos al caso a.2.II.

Si la longitud de C_3 es congruente con cero módulo k , argumentamos como en c.1.III.

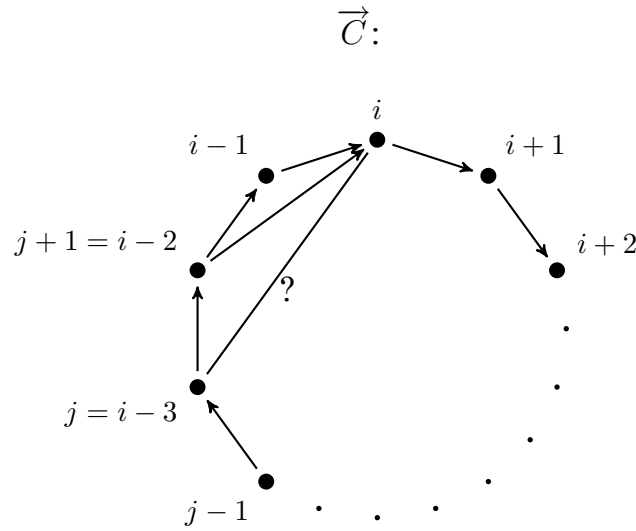
- $j = i - 3$.



Hay que observar la orientación dada a la arista $[i - 2, i]$.

Si la flecha $(i, i - 2)$ es asimétrica, entonces el ciclo dirigido $T_2 = (i - 2, i - 1, i, i - 2)$ tiene dos flechas simétricas (por hipótesis) que también son flechas de \vec{C} .

En vista de lo anterior, sólo nos ocuparemos de ver si tenemos la flecha $(i - 2, i)$ o las flechas $(i - 2, i)$ e $(i, i - 2)$.



Sean $C_9 = (i - 2, i, [C], i - 2)$ y $C_{10} = (j, i, [C], j)$.

Si la longitud de C_9 no es congruente con cero módulo k :

Si la flecha $(i - 2, i)$ es asimétrica, entonces el ciclo dirigido $\overrightarrow{C}_9 = (i - 2, i, [\overrightarrow{C}], i - 2)$ tiene dos flechas simétricas en común con \overrightarrow{C} , por hipótesis de inducción.

Si la flecha $(i, i - 2)$ es simétrica, entonces en T_2 se encuentra una flecha simétrica de \overrightarrow{C} y en \overrightarrow{C}_9 se encuentra otra.

Si la longitud de C_9 es congruente con cero módulo k :

Entonces la longitud de C_{10} es congruente con $k - 1$.

Si tuvieramos la flecha asimétrica (j, i) , entonces al ciclo dirigido $\overrightarrow{C}_{10} = (j, i, [\overrightarrow{C}], j)$ le podríamos aplicar la hipótesis de inducción para obtener dos flechas simétricas de \overrightarrow{C} .

Si (i, j) es asimétrica, entonces el ciclo dirigido $T_3 = (j, i - 2, i, j)$ tiene dos flechas simétricas, las cuales son $(i - 3, i - 2)$ e $(i - 2, i)$.

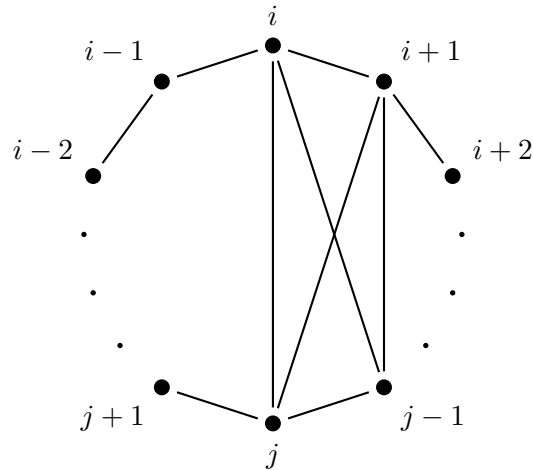
Entonces tenemos el ciclo T_2 y en él una flecha simétrica de \overrightarrow{C} que junto con $(i - 3, i - 2)$ son las dos flechas simétricas de \overrightarrow{C} que buscamos.

Si (i, j) es simétrica, entonces \overrightarrow{C}_{10} comparte una flecha simétrica con \overrightarrow{C} y, en T_3 , $(i - 3, i - 2)$ es simétrica o $(i - 2, i)$ es simétrica, por lo cual otra flecha simétrica de \overrightarrow{C} se encuentra en T_3 o en T_2 .

Y con esto termina el caso $c.2$.

c.3 $s = i + 1, t = j - 1$.

C y sus cuerdas para el caso c.3:

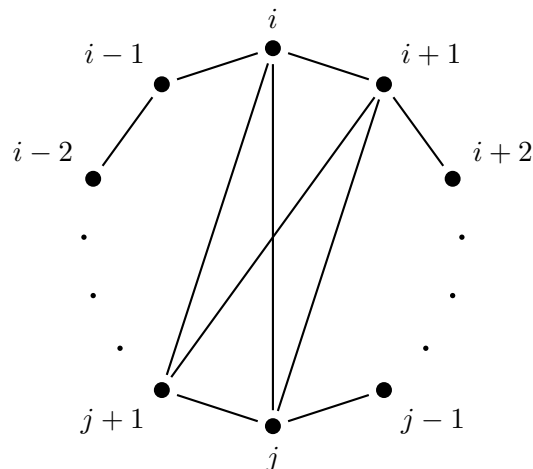


Al observar la figura anterior, nos damos cuenta que este caso es como el caso *c.2*, sólo que intercambiando j por i , así que se puede dar una argumentación análoga.

c.4 $s = i + 1, t = j$.

Este caso es como el caso *c.1*, como si hubiésemos sumado 1 a todos los vértices, por lo que podemos argumentar de forma análoga.

C y sus cuerdas para el caso c.4:

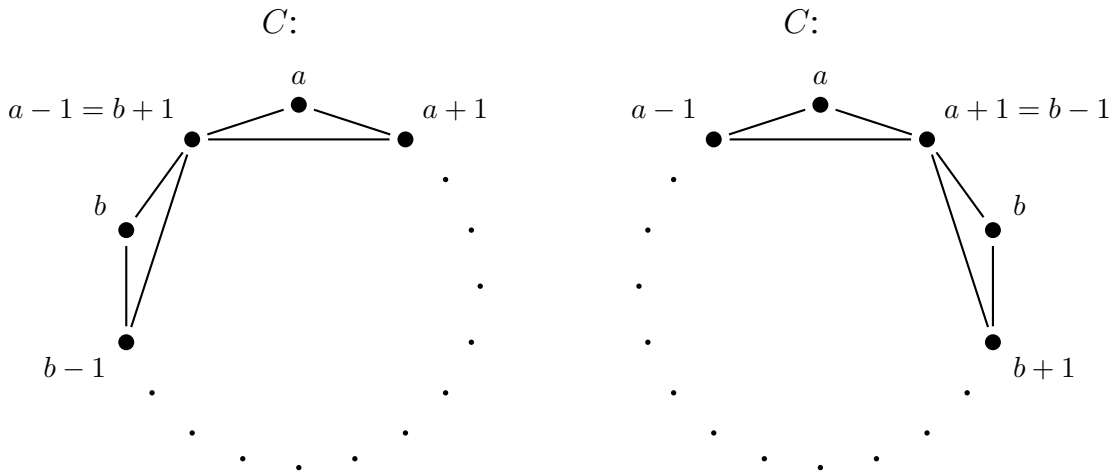


$a)$, $b)$ o $c)$ ocurrían porque supusimos que \vec{C} tenía una cuerda larga. Ahora supongamos que \vec{C} no tiene ninguna cuerda larga.

Por hipótesis, \vec{C} tiene las cuerdas cortas (c, d) , (e, f) , con $(e, f) \neq (d, f)$. Por lo anterior, C también tiene dos cuerdas cortas, $A = [a - 1, a + 1]$ y $B = [b - 1, b + 1]$.

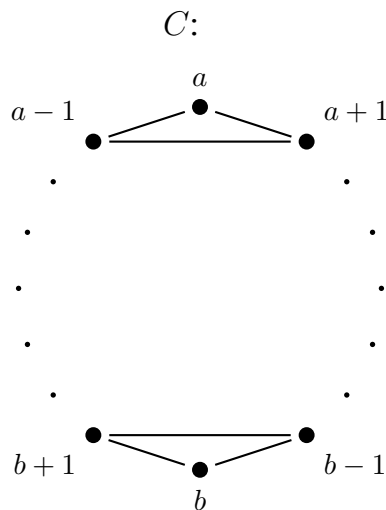
A y B pueden compartir un vértice o ninguno.

Tenemos dos casos si comparten algún vértice, aunque en realidad uno se obtiene del otro intercambiando a y b .



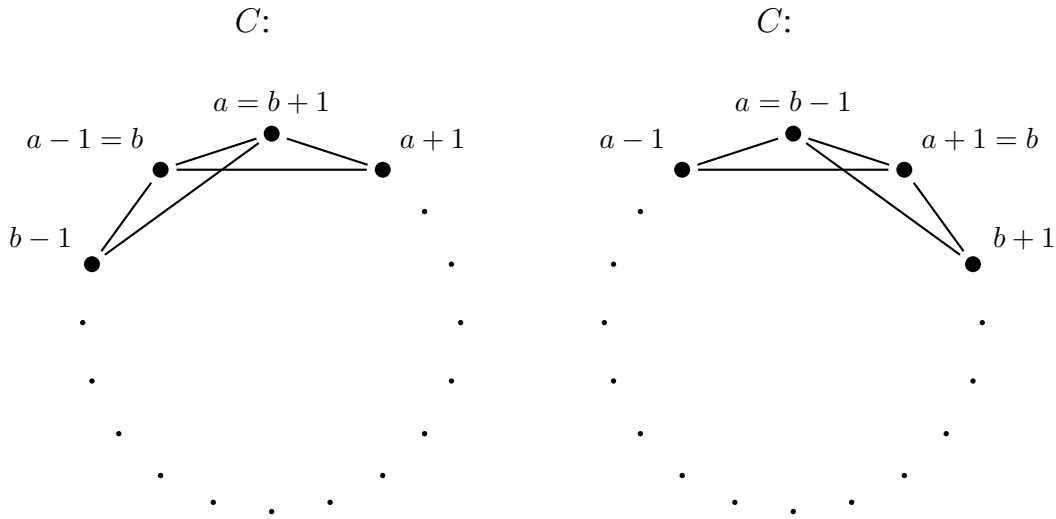
Para probar que \vec{C} tiene dos flechas simétricas, procedemos de la misma forma que cuando \vec{C} tenía una cuerda larga y se cumplía $b)$, sólo hay que cambiar i por a y j por b .

Si A y B no comparten ningún vértice, entonces tenemos tres casos, uno de ellos es el mostrado en la figura siguiente.



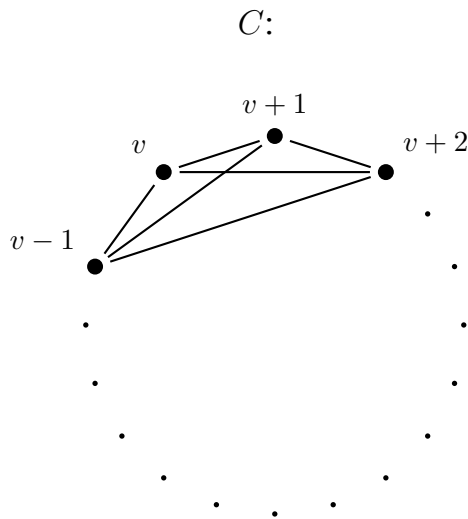
De nuevo, para probar que \vec{C} tiene dos flechas simétricas, procedemos de la misma forma que cuando \vec{C} tenía una cuerda larga y se cumplía b), sólo hay que cambiar i por a y j por b .

Los dos casos que faltan son los que se exhiben a continuación, y de hecho, uno se obtiene del otro intercambiando a y b :



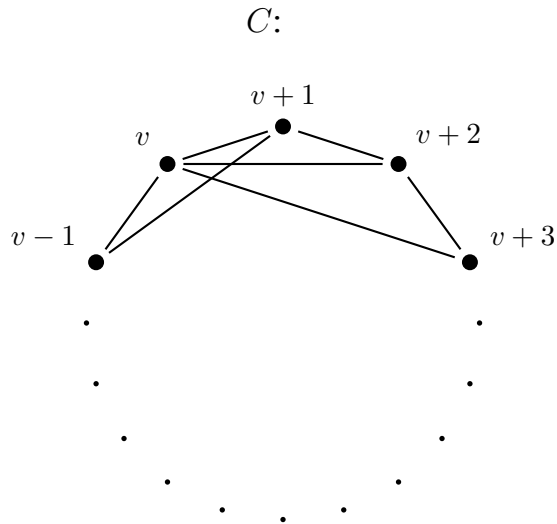
Por lo tanto, tenemos un vértice v de C tal que $[v-1, v+1], [v, v+2] \in A(H)$. Dado que C es un ciclo de H y debido a que H satisface la propiedad \mathcal{T}^* , tenemos cinco posibles casos:

- $[v-1, v+2] \in A(H)$.



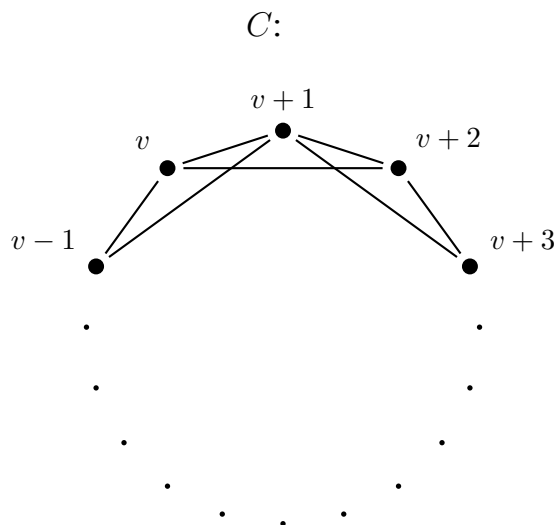
Este caso es análogo al caso $c.2$ cuando $j = i - 3$.

- $[v, v + 3] \in A(H)$.



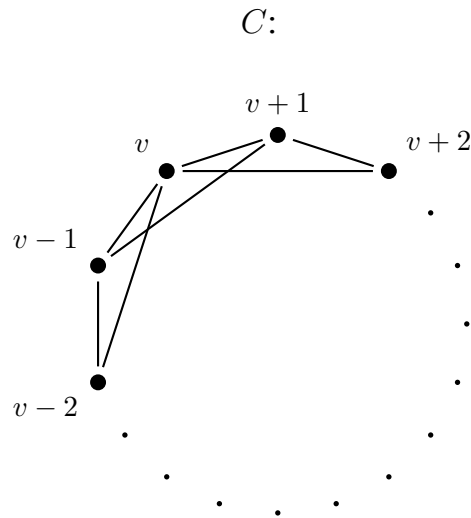
Este caso es similar al caso *a.1*, si cambiamos i por v y j por $v + 3$ aunque no tengamos la hipótesis de que $j \neq i - 2$ ($v + 3 \neq v - 2$), la argumentación sigue siendo válida.

- $[v + 1, v + 3] \in A(H)$.



Este caso ya lo hemos analizado antes, cuando las cuerdas A y B compartían un vértice.

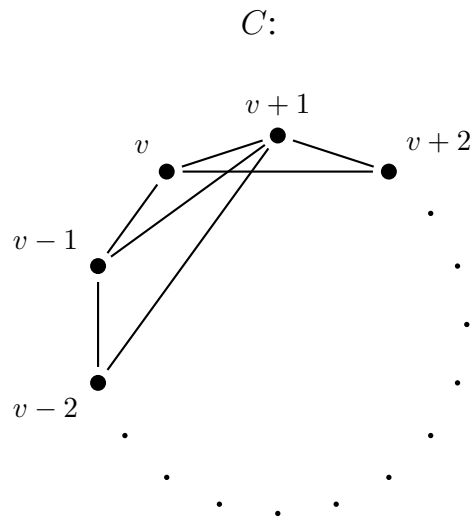
•••• $[v - 2, v] \in A(H)$.



Este caso ya lo analizamos (igual que el caso anterior).

— $[v - 2, v + 1] \in A(H)$.

Este caso es similar a *a.2*, si cambiamos i por $v + 1$ y j por $v - 2$ aunque no tengamos la hipótesis de que $j \neq i + 2$ ($v - 2 \neq v + 3$), la argumentación sigue siendo válida.



Por lo tanto \vec{C} de longitud $n \not\equiv 0 \pmod k$ tiene dos flechas simétricas.

□

Lema 3.5.2. Sean H una gráfica que satisface la propiedad \mathcal{T}^* , D una orientación de H tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene todas sus flechas simétricas y $k \geq 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si todo ciclo dirigido de D , de longitud no congruente con cero módulo k y mayor que 3 tiene dos cuerdas, entonces todo ciclo dirigido de D , de longitud no congruente con cero módulo k tiene dos flechas simétricas.

Demostración. Sea \vec{C} un ciclo dirigido de longitud no congruente con cero.

Si la longitud de \vec{C} es 2 o 3, hemos terminado.

Si \vec{C} tiene dos cuerdas:

Una de ellas puede ser larga o ambas son cortas.

Si usamos la misma demostración del lema 3.5.1, el único caso que nos falta es cuando las cuerdas cortas son, digamos, (c, d) y (d, c) .

Si $(c, d) = (d, c)$, entonces, como son cuerdas cortas, $d = c + 2$ o $d = c - 2$.

Si $d = c + 2$, tendremos el ciclo dirigido $(c, c + 1, c + 2, c)$. Si $d = c - 2$, tendremos el ciclo dirigido $(c - 2, c - 1, c, c - 2)$.

Cualquiera de estos dos ciclos tiene longitud tres y, por lo tanto, sus tres flechas son simétricas, dos de las cuales son flechas de \vec{C} .

□

Lema 3.5.3. Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias, D una orientación de $T(G)$ tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene sus tres flechas simétricas y $k \geq 3$.

Si todo ciclo dirigido de D , de longitud no congruente con cero módulo k y mayor que 3 tiene dos cuerdas, entonces todo ciclo dirigido de D , de longitud no congruente con cero módulo k tiene dos flechas simétricas.

Demostración. Se sigue del lema 3.5.2 pues sabemos que $T(G)$ cumple la propiedad \mathcal{T}^* .

□

Ya es tiempo de regresar a los k -núcleos. Los lemas anteriores hablan acerca de ciclos dirigidos con un par de flechas simétricas, se enunciará un teorema que relaciona esta situación con la existencia de k -núcleos.

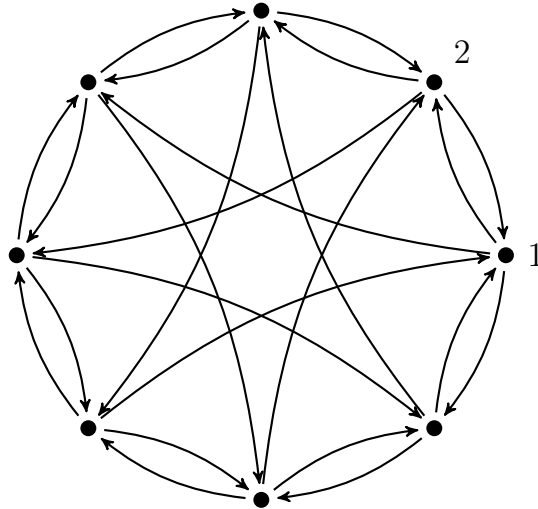
Definición 3.5.4. Sea D una digráfica, la digráfica $Asim(D)$ se define como sigue:

- $V(Asim(D)) = V(D)$.
- $F(Asim(D)) = \{(a, b) \in F(D) \mid (b, a) \notin F(D)\}$.

Se puede decir que, para obtener $Asim(D)$, sólo hay que copiar todos los vértices de D y las flechas que son asimétricas en D .

Ejemplos:

1) Sea D como en la figura siguiente.

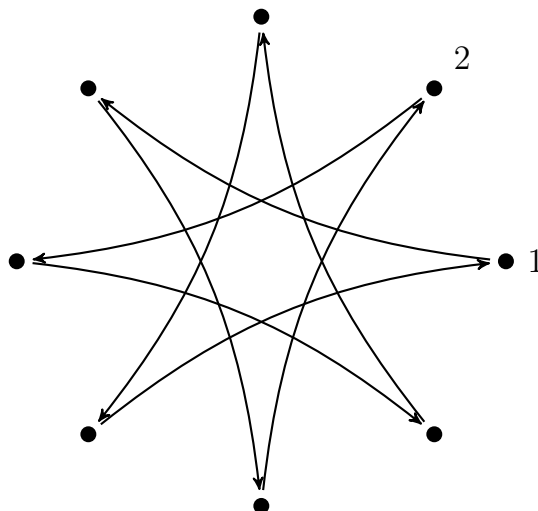


$(1, 2)$ no es flecha de $Asim(D)$ pues $(2, 1) \in F(D)$, tampoco $(2, 1)$ ya que $(1, 2) \in F(D)$.

Lo mismo sucede con las demás flechas simétricas.

Las flechas asimétricas ciertamente pertenecen a $F(Asim(D))$.

Por lo tanto, $Asim(D)$ será de esta forma:



Teorema 3.5.4. *Sea D una digráfica tal que $Asim(D)$ es fuertemente conexa y sea $k \geq 2$. Si todo ciclo dirigido de D de longitud no congruente con cero módulo k , tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D tiene k -núcleo.*

Gracias a este teorema, podemos utilizar todo lo que se ha probado hasta ahora, con sólo añadir una hipótesis más.

Teorema (Galeana Sánchez y Rincón Mejía) 3.5.5. *Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias, $k \geq 3$ y D una orientación de $T(G)$ tal que $Asim(D)$ es fuertemente conexa y todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene dos flechas simétricas.*

Si todo ciclo dirigido en D , de longitud no congruente con cero módulo k y mayor que 3 tiene una cuerda larga o dos cuerdas cortas (c, d) , (e, f) con $(e, f) \neq (d, c)$, entonces D tiene k -núcleo.

Demostración. Como $T(G)$ satisface la propiedad \mathfrak{T}^* , se sigue del lema 3.5.1 que los ciclos dirigidos de D , de longitud no congruente con cero módulo k tienen dos flechas simétricas y entonces, se puede usar el teorema 3.5.4 para concluir que D tiene k -núcleo. □

Teorema 3.5.6. *Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias, $k \geq 3$, D una orientación de $T(G)$ tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene todas sus flechas simétricas y además $Asim(D)$ es fuertemente conexa.*

Si todo ciclo dirigido en D , de longitud no congruente con cero módulo k y mayor que 3 tiene dos cuerdas, entonces D tiene k -núcleo.

Demostración. Sabiendo que $T(G)$ cumple la propiedad \mathfrak{T}^* , usamos el lema 3.5.2 y el teorema 3.5.4 para concluir que D tiene k -núcleo. □

En 1976, H. Meyniel conjeturó que si todos los ciclos dirigidos de longitud impar de una digráfica D tienen dos cuerdas, entonces D tenía núcleo.

Galeana Sánchez [4] demostró la falsedad de esta conjetura.

Una posible generalización de la conjetura de Meyniel para k -núcleos, con $k \geq 3$ sería: si todos los ciclos dirigidos de D , de longitud no congruente con cero módulo k , tienen dos cuerdas, entonces D tiene k -núcleo.

En [8], se muestran ejemplos que prueban la falsedad de esta aseveración. Además estos ejemplos cumplen todas las hipótesis del teorema 3.5.5 excepto la hipótesis de que D es una orientación de $T(G)$.

En el mismo teorema, tenemos como hipótesis que todos los ciclos dirigidos de longitud no congruente con cero módulo k y mayor que tres tienen una cuerda larga o dos cuerdas cortas.

Para orientaciones de la gráfica de líneas, en [8] se muestran ejemplos que prueban que no basta con pedir que tales ciclos tengan una cuerda (corta).

No hemos podido hallar ejemplos similares para orientaciones de la gráfica de trayectorias por la principal razón de que $T(G)$ resulta con muchos vértices y aristas.

3.6. Núcleos en orientaciones de $T(G)$

Anteriormente obtuvimos resultados para k -núcleos con $k \geq 3$. Ahora nos dedicaremos a encontrar 2-núcleos.

Definición 3.6.1. Sean D una digráfica, \vec{C} un ciclo dirigido de D , i y j vértices de \vec{C} tales que j no es antecesor de i .

i es un polo de \vec{C} , si $\vec{j}i \in F(D)$.

Si y y z son vértices consecutivos de \vec{C} y además son polos, decimos que son polos consecutivos de \vec{C} .

Con esta definición, los vértices finales de las cuerdas cortas o largas de un ciclo dirigido, son polos del mismo.

También, si en un ciclo dirigido $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$ de longitud mayor que dos tenemos alguna flecha $\overrightarrow{v_i v_{i+1}}$ simétrica, entonces v_i es un polo.

Lema 3.6.1. Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias y D una orientación de $T(G)$ tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene todas sus flechas simétricas.

Si todo ciclo dirigido de D , de longitud impar y mayor que 5, tiene una cuerda larga o dos cuerdas cortas, entonces todo ciclo dirigido de longitud impar de D tiene dos polos consecutivos.

Demostración. Sea \vec{C} un ciclo dirigido de longitud impar.

Si la longitud de \vec{C} es 3, entonces tiene todas sus flechas simétricas (por hipótesis) y cualquier vértice de \vec{C} es un polo.

Entonces \vec{C} tiene dos polos consecutivos.

Si la longitud de \vec{C} es mayor que tres:

Por hipótesis, en \vec{C} hay una cuerda larga o dos cuerdas cortas.

- Si \vec{C} tiene una cuerda larga $\vec{c} = (i, j)$:

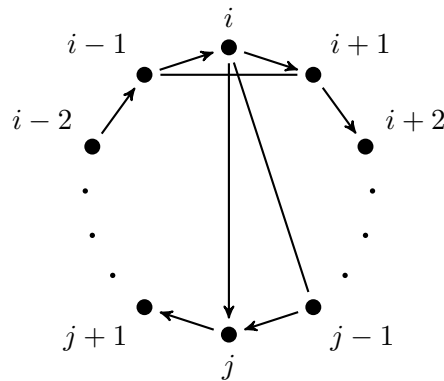
Debido a que \vec{C} es un ciclo de D , la cual es una orientación de $T(G)$, \vec{C} proviene de orientar un ciclo C .

Entonces tenemos en C una cuerda larga $c = [i, j]$ y se cumple alguna de las condiciones a), b) o c) del lema 3.4.1.

Si se cumple a) con $s = i$ y $t = j - 1$:

Las aristas $[i - 1, i + 1], [i, j - 1]$ tienen alguna orientación en \vec{C} :

\vec{C} y sus cuerdas con $s = i$ y $t = j - 1$:



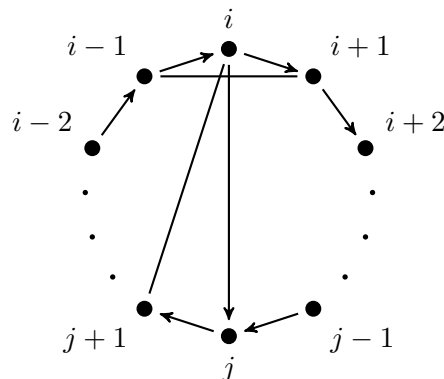
Si $[i - 1, i + 1]$ está orientada como $(i + 1, i - 1)$, entonces el ciclo dirigido $(i - 1, i, i + 1, i - 1)$ tiene longitud tres y, por hipótesis, las flechas $(i - 1, i)$ e $(i, i + 1)$ son simétricas. Por lo tanto, $i - 1$ e i son polos consecutivos de \vec{C} .

Si la orientación de $[i - 1, i + 1]$ es $(i - 1, i + 1)$, nos fijamos en la dirección de $[i, j - 1]$. Si tenemos $(i, j - 1)$, entonces $j - 1$ y j son polos consecutivos de \vec{C} . Si tenemos $(j - 1, i)$, entonces i e $i + 1$ son polos.

Por consiguiente \vec{C} tiene dos polos consecutivos.

Si se cumple a) con $s = i$ y $t = j + 1$:

\vec{C} y sus cuerdas con $s = i$ y $t = j + 1$:



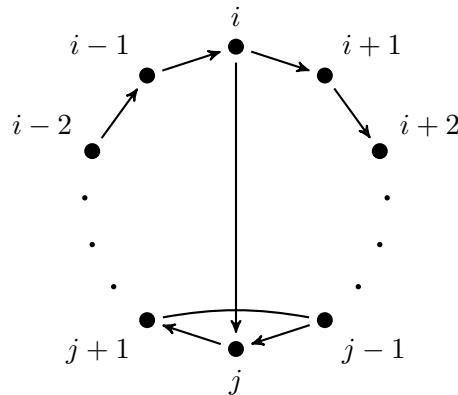
Aunque este caso es análogo al anterior, daremos otra argumentación.

Si tenemos la flecha $(i, j + 1)$, entonces j y $j + 1$ son polos.

Si la flecha que tenemos es $(j + 1, i)$, cualquiera que sea la orientación de $[i - 1, i + 1]$, tendremos los polos $i - 1$ e i , o i e $i + 1$.

Por ende \vec{C} tiene dos polos consecutivos.

Ahora, si ocurre a) con $s = j$ o b), C tiene la cuerda $[j - 1, j + 1]$ y en \vec{C} tenemos:

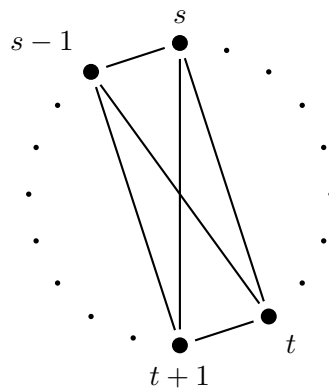


Sin importar la dirección que tenga $[j - 1, j + 1]$, tendremos que $j - 1$ o $j + 1$ son polos y junto con j , serán dos polos consecutivos.

Entonces \vec{C} tiene dos polos consecutivos.

Si se cumple la condición c), existen s y t , vértices de C , tales que $T(G)[\{s - 1, s, t, t + 1\}]$ es una gráfica completa con cuatro vértices, siendo alguna de sus aristas la cuerda larga $[i, j]$.

C en el caso c):



Sabemos que en \vec{C} están las flechas $(s - 1, s)$ y $(t, t + 1)$.

Si tenemos la flecha $(t + 1, s - 1)$:

Si $(t + 1, s) \in F(D)$, $s - 1$ y s son polos de \vec{C} . Si $(s, t + 1) \in F(D)$, entonces tenemos el ciclo dirigido $(s - 1, s, t + 1, s - 1)$ y por hipótesis, podemos concluir que $(t + 1, s) \in F(D)$.

Si tenemos la flecha $(s - 1, t + 1)$:

Si $(s, t) \in F(D)$, entonces t y $t + 1$ son polos y si $(t, s) \in F(D)$, tendremos la flecha $(s - 1, t)$ o la flecha $(t, s - 1)$, con lo cual obtendremos los polos t y $t + 1$ o $s - 1$ y s .

Por lo tanto \vec{C} tiene dos polos consecutivos cuando se cumple c).

• Si \vec{C} no tiene ninguna cuerda larga:

Por hipótesis, \vec{C} tiene dos cuerdas cortas.

Si para algún vértice i de \vec{C} , tuviésemos la cuerda corta $(i + 1, i - 1)$, tendríamos el ciclo dirigido $(i - 1, i, i + 1, i - 1)$ y los polos $i - 1$ e i que son consecutivos.

Por lo anterior, supondremos que todas las cuerdas de \vec{C} son de la forma $(i - 1, i + 1)$ y son asimétricas.

Sea D_1 la digráfica inducida de D por los vértices de \vec{C} .

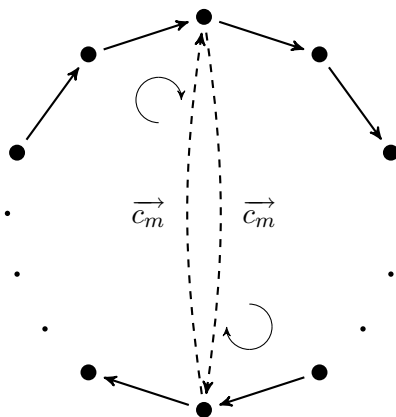
De los ciclos de D_1 tales que al menos una de sus flechas es cuerda de \vec{C} , sea \vec{C}_m uno de longitud mínima.

Observemos que todos los vértices de \vec{C}_m son vértices de \vec{C} .

Como una de las flechas de \vec{C}_m es cuerda de \vec{C} y éstas son asimétricas, se sigue que \vec{C}_m no es de longitud 2 ni 3.

También veamos que \vec{C}_m no puede tener cuerdas.

Si \vec{C}_m tuviese una cuerda:



Ya que toda cuerda \vec{c}_m de \vec{C}_m es cuerda de \vec{C} , si \vec{C}_m tuviese una cuerda \vec{c}_m , tendríamos en D_1 un ciclo tal que una de sus flechas sería cuerda de \vec{C} (la flecha \vec{c}_m), de longitud menor que \vec{C}_m , lo cual es imposible dada la elección que hicimos de éste.

Debido a que \vec{C}_m es también un ciclo dirigido de D , si su longitud fuese impar mayor o igual que 5:

Por hipótesis tendríamos al menos una cuerda \vec{c}_m , cuya existencia ya descartamos.

Se sigue que la longitud de \vec{C}_m no puede ser impar mayor o igual que 5.

De ahí, la longitud de \vec{C}_m es par y mayor que 2.

Las flechas de \vec{C}_m no pueden ser todas cuerdas de \vec{C} pues eso implicaría que la longitud de \vec{C} es par, debido a que todas las cuerdas de \vec{C} son de la forma $(i-1, i+1)$.

Por lo anterior, en \vec{C}_m encontramos una flecha de \vec{C} inmediatamente seguida por una cuerda del mismo \vec{C} o una cuerda de \vec{C} inmediatamente seguida por una flecha de \vec{C} . Es decir, existe j , un vértice de \vec{C} , tal que en \vec{C}_m tenemos las flechas $(j-\frac{c}{2}, j-\frac{c}{2}+1)$ y $(j-\frac{c}{2}+1, j+\frac{c}{2})$ o las flechas $(j-\frac{c}{2}+1, j+\frac{c}{2})$ y $(j+\frac{c}{2}+1, j+\frac{c}{2}+2)$.

Sea $\vec{C}_s = (j-\frac{c}{2}+1, j, j+\frac{c}{2}+1, [\vec{C}_m], j-\frac{c}{2}+1)$. Entonces la longitud de \vec{C}_s es la longitud de \vec{C}_m más uno.

Por lo tanto, la longitud de \vec{C}_s es mayor o igual que 5.

Las cuerdas de \vec{C}_s son cuerdas cortas de \vec{C} y una de ellas es $(j-\frac{c}{2}+1, j+\frac{c}{2}+1)$.

Por hipótesis, \vec{C}_s tiene otra cuerda \vec{s} ya que es también ciclo de D .

\vec{s} debe ser $(j-\frac{c}{2}, j)$ o $(j, j+\frac{c}{2}+2)$ pues \vec{C}_m no tiene cuerdas y el único vértice de \vec{C}_s que no es vértice de \vec{C}_m es j .

Por ende en \vec{C} tenemos los polos consecutivos $j, j+1$ o $j+1, j+2$. □

El lema anterior es útil debido a que se conoce el siguiente resultado.

Teorema (Galeana Sánchez y Neumann Lara) 3.6.2. *Si D es una digráfica tal que todos sus ciclos de longitud impar tienen dos polos consecutivos, entonces D tiene núcleo.*

Si utilizamos este teorema junto con el lema 3.6.1, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.6.3. Sean G una gráfica, $T(G)$ su gráfica de trayectorias y D una orientación de $T(G)$ tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene todas sus flechas simétricas.

Si todo ciclo dirigido de D , de longitud impar y mayor que 5, tiene una cuerda larga o dos cuerdas cortas, entonces D tiene núcleo.

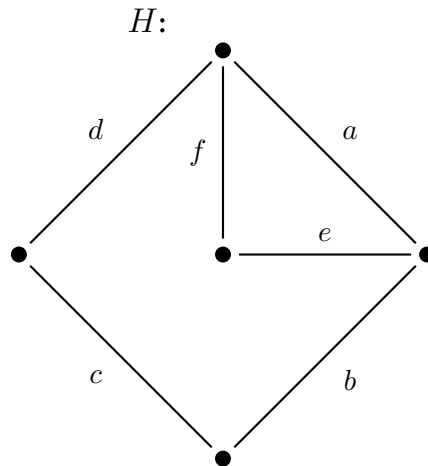
3.7. Acerca de la gráfica de trayectorias

En la definición 3.2.1, sería más sencillo que dos trayectorias fuesen adyacentes cuando compartiesen al menos un extremo, sin preocuparnos de que sea sólo uno. Veamos qué sucede si cambiamos la definición.

Definición 3.7.1. Sea G una gráfica con $A(G) \neq \emptyset$. La gráfica de trayectorias sin restricción de G , $T_l(G)$, es tal que:

- $V(T_l(G)) = \{t \mid t \text{ es una trayectoria de } G \text{ de longitud mayor que } 0\}$.
- $A(T_l(G)) = \{\{a, b\} \mid a, b \in V(T_l(G)), a \text{ y } b \text{ comparten un extremo y } a \neq b\}$.

Veamos un ejemplo.



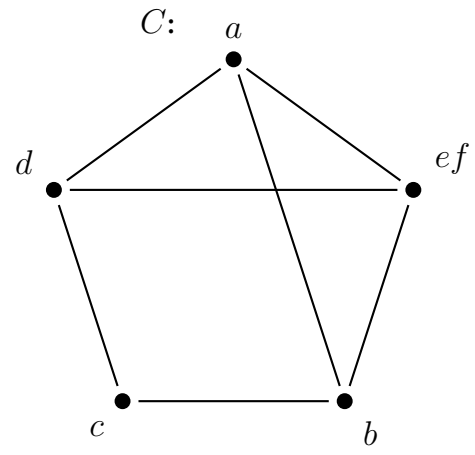
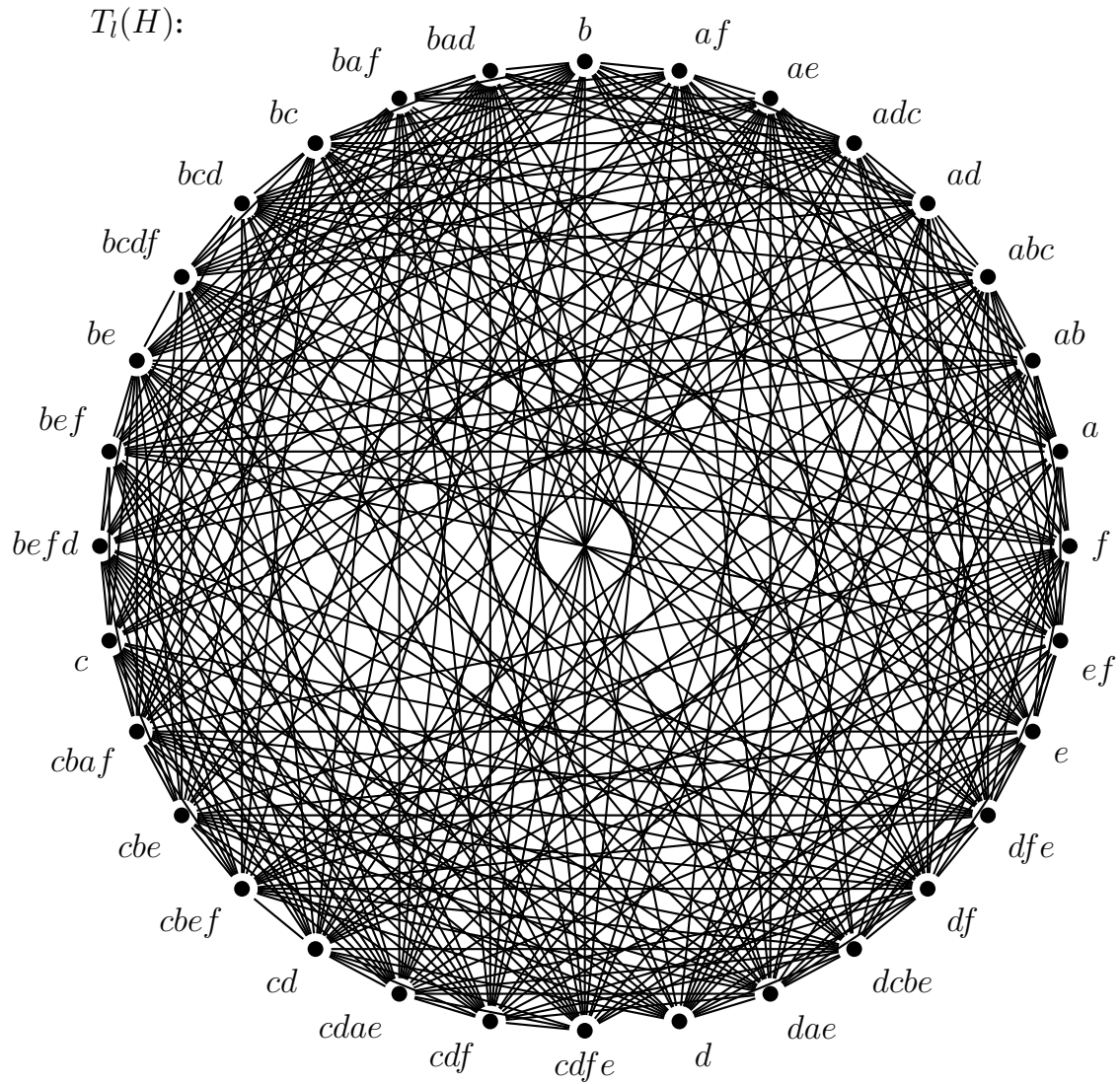
Las trayectorias que tiene H son: $a, ab, abc, ad, adc, ae, af, b, bad, baf, bc, bcd, bcdf, be, bef, befd, c, cbaf, cbe, cbef, cd, cdae, cdf, cdfe, d, dae, dcbe, df, dfe, e, ef, f$.

Las adyacencias en $T_l(H)$ son: $a - ab, a - abc, a - ad, a - adc, a - ae, a - af, a - b, a - bc, a - bcd, a - bef, a - cbef, a - cd, a - cdfe, a - d, a - dfe, a - e, a - ef, a - f, ab - abc, ab - adc, ab - ae, ab - b, ab - bcd, ab - be, ab - bef, ab - befd,$

$ab - cbe f, ab - cd, ab - cdae, ab - cdf, ab - d, ab - dcbe, ab - ef, ab - f, abc - ad,$
 $abc - ae, abc - bad, abc - bc, abc - bcd, abc - bef, abc - befd, abc - c, abc - cbe f,$
 $abc - cd, abc - d, abc - dae, abc - df, abc - dfe, abc - ef, abc - f, ad - adc,$
 $ad - af, ad - b, ad - bad, ad - bc, ad - bcd, ad - bcdf, ad - befd, ad - c, ad - cba f,$
 $ad - cbe, ad - cdfe, ad - d, ad - d, ad - dae, ad - df, ad - dfe, ad - ef, adc - af,$
 $adc - b, adc - bad, adc - baf, adc - bc, adc - bcd, adc - bcdf, adc - be, adc - bef,$
 $adc - befd, adc - c, adc - cd, adc - cdae, abc - cdf, adc - cdfe, adc - dfe, adc - e,$
 $adc - ef, ae - af, ae - baf, ae - e, ae - bcd, ae - bcdf, ae - be, ae - bef, ae - cba f,$
 $ae - cbe, ae - cbe f, ae - cd, ae - cdae, ae - cdf, ae - d, ae - dae, ae - dcbe,$
 $ae - df, ae - e, ae - ef, ae - f, af - b, af - baf, af - bc, af - bcd, af - bcdf,$
 $af - be, af - cba f, af - cbe, af - cdae, af - cdf, af - cdfe, af - dae, af - dcbe,$
 $af - df, af - dfe, af - e, af - f, b - bad, b - baf, b - bc, b - bcd, b - bcdf,$
 $b - be, b - bef, b - befd, b - c, b - cd, b - cdae, b - cdf, b - cdfe, b - dfe, b - e,$
 $b - ef, bad - baf, bad - bc, bad - be, bad - bef, bad - befd, bad - c, bad - cba f,$
 $bad - cbe, bad - cbe f, bad - cd, bad - cdae, bad - cdf, bad - cdfe, bad - d, bad - dae,$
 $bad - df, bad - dfe, baf - bcdf, baf - be, baf - bef, baf - befd, baf - c, baf - cba f,$
 $baf - cd, baf - cdae, baf - cdf, baf - cdfe, baf - dae, baf - dcbe, baf - df,$
 $baf - e, baf - f, bc - bcd, bc - bcdf, bc - befd, bc - c, bc - cba f, bc - cbe, bc - cbe f,$
 $bc - d, bc - dae, bc - df, bc - dfe, bc - e, bc - ef, bcd - bcdf, bcd - bef, bcd - cbe f,$
 $bcd - cd, bcd - cdfe, bcd - d, bcd - dcbe, bcd - dfe, bcd - e, bcd - ef, bcd - f,$
 $bcdf - be, bcdf - cba f, bcdf - cbe, bcdf - cdae, bcdf - cdf, bcdf - cdfe, bcdf - dae,$
 $bcdf - dcbe, bcdf - df, bcdf - dfe, bcdf - e, bcdf - ef, bcdf - f, be - bef, be - befd,$
 $be - c, be - cba f, be - cbe, be - cd, be - cdae, be - cdf, be - cdfe, be - dae, be - dcbe,$
 $be - df, be - e, be - f, bef - befd, bef - c, bef - cbe f, bef - cd, bef - cdae,$
 $bef - cdf, bef - cdfe, bef - d, bef - dcbe, bef - ef, bef - f, befd - c, befd - cba f,$
 $befd - cbe, befd - cbe f, befd - cd, befd - cdae, befd - cdf, befd - cdfe, befd - d,$
 $befd - dae, befd - df, befd - dfe, c - cba f, c - cbe, c - cbe f, c - cd, c - cdae,$
 $c - cdf, c - cdfe, c - d, c - dae, c - df, c - dfe, cba f - cbe, cba f - cbe f, cba f - cdae,$
 $cba f - cdf, cba f - d, cba f - dae, cba f - dcbe, cba f - df, cba f - dfe, cba f - e,$
 $cba f - f, cbe - cbe f, cbe - cdae, cbe - cdf, cbe - d, cbe - dae, cbe - dcbe, cbe - df,$
 $cbe - dfe, cbe - e, cbe - f, cbe f - cd, cbe f - d, cbe f - dae, cbe f - dcbe, cbe f - df,$
 $cbe f - dfe, cbe f - ef, cbe f - f, cd - cdae, cd - cdf, cd - cdfe, cd - d, cd - dcbe,$
 $cd - ef, cd - f, cdae - cdf, cdae - cdfe, cdae - dae, cdae - dcbe, cdae - df, cdae - e,$
 $cdae - f, cdf - cdfe, cdf - dae, cdf - dcbe, cdf - df, cdf - e, cdf - f, cdfe - dfe,$
 $cdfe - e, cdfe - ef, d - dae, d - dcbe, d - df, d - dfe, d - ef, d - f, dae - dcbe,$
 $dae - df, dae - dfe, dae - e, dae - f, dcbe - df, dcbe - e, dcbe - ef, dcbe - f,$
 $df - dfe, df - e, df - f, dfe - e, dfe - ef, e - ef, e - f, ef - f.$

Hemos escrito $x - y$ para indicar que tenemos la arista $[x, y]$ en $T_l(H)$.

En $T_l(H)$ tenemos muchísimos ciclos, pero uno de ellos, $C = (a, ef, b, c, d, a)$ merece especial atención.



En C , existe $i = a$ tal que $[i - 1, i + 1], [i, i + 2] \in A(T_l(H))$.

Como $i - 1 = d, i - 2 = i + 3 = c, i + 1 = ef, i + 2 = b$, se sigue que ninguna de las aristas $[i - 1, i + 2], [i, i + 3], [i + 1, i + 3], [i - 2, i], [i - 2, i + 1]$ pertenece a $A(T_l(H))$, pues, en $T_l(H)$, d no es adyacente a b ; a no es adyacente a c ; ef no es adyacente a c ; $[i - 2, i] = [i, i + 3]$ y por último, $[i - 2, i + 1] = [i + 1, i + 3]$.

De lo anterior, concluimos que $T_l(H)$ no satisface la propiedad \mathfrak{T}^* .

¿Sin la hipótesis de que $T_l(H)$ cumple la propiedad \mathfrak{T}^* pero con todas las demás hipótesis del lema 3.5.1, podríamos demostrar que en cualquier orientación de $T_l(H)$ todo ciclo dirigido de longitud no congruente con cero módulo k , tiene dos flechas simétricas?

Supongamos que hay una orientación de $T_l(H)[V(T_l(H)) - \{d, a, ef, b, c\}]$ sin ciclos dirigidos, llamemos a esta orientación D_1 .

Después, orientamos a $T_l(H)[V(T_l(H)) - \{a, ef, b, c\}]$, respetando la orientación de D_1 y haciendo que todas las aristas de la forma $[Z, d]$ reciban la dirección \overrightarrow{Zd} (y sólo esta dirección). Así tenemos la orientación D_2 .

Ahora orientemos a $T_l(H)[V(T_l(H)) - \{ef, b, c\}]$, respetando D_2 y orientando las aristas $[Z, a]$ como \overrightarrow{Za} , incluyendo a la arista $[d, a]$. Esta orientación será nombrada D_3 .

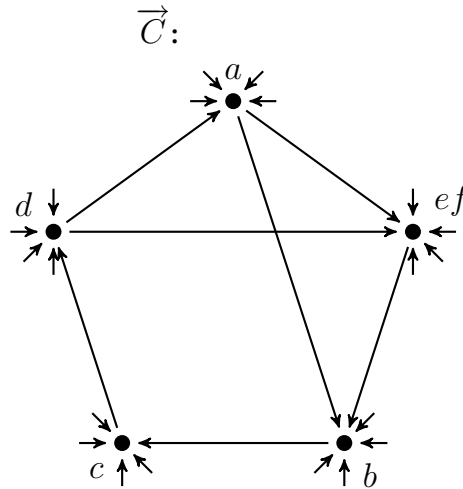
Seguimos, esta vez orientando a $T_l(H)[V(T_l(H)) - \{b, c\}]$, respetando D_3 y orientando las aristas $[Z, ef]$ como \overrightarrow{Zef} , incluidas las aristas $[a, ef]$ y $[d, ef]$. Así tenemos una nueva orientación, D_4 .

Continuamos orientando a $T_l(H)[V(T_l(H)) - \{c\}]$, respetando D_4 y orientando las aristas $[Z, b]$ como \overrightarrow{Zb} , esto incluye a las aristas $[a, b]$ y $[ef, b]$. A esta orientación la llamamos D_5 .

Finalmente, orientamos a $T_l(H)$, respetando D_5 y orientando casi todas las aristas $[Z, c]$ como \overrightarrow{Zc} . La única arista que incide en c y que orientamos de forma diferente es $[d, c]$, a ésta la orientaremos como \overrightarrow{cd} . Nombramos D a esta última orientación.

De esa forma lograríamos construir una orientación de $T_l(H)$, D , con sólo tres ciclos dirigidos, uno $\overrightarrow{C} = (d, a, ef, b, c, d)$, de longitud 5, y otro par de ciclos de longitud 4.

Sea $k = 4$. Entonces todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene dos flechas simétricas y todo ciclo dirigido de D , de longitud no congruente con cero módulo k tiene dos cuerdas cortas (las cuerdas de \overrightarrow{C} son (d, e) , (a, b)). Por lo tanto, D cumple con las otras hipótesis del lema 3.5.1.



Pero el único ciclo dirigido de longitud no congruente con cero módulo k es \vec{C} que no tiene dos flechas simétricas.

Por lo tanto, a pesar de que tenemos las demás hipótesis del lema 3.5.1, sin la hipótesis de que $T_i(H)$ satisface la propiedad \mathcal{T}^* no podemos demostrar la conclusión de dicho lema.

La afirmación anterior todavía no está demostrada pues supusimos que había una orientación de $T_i(H)[V(T_i(H)) - \{d, a, ef, b, c\}]$ sin ciclos dirigidos. Veamos que en efecto se puede encontrar tal orientación.

Teorema 3.7.1. *Para toda gráfica G existe una orientación D , tal que D no tiene ciclos dirigidos.*

Demostración. Sea G una gráfica.

Procederemos por inducción sobre el número de vértices de G .

Si G tiene un único vértice, $D = G$ es una digráfica acíclica.

Si G tiene dos vértices, digamos v_1 y v_2 :

Si $A(G) = \emptyset$, entonces $D = G$ y hemos terminado.

Si $A(G) \neq \emptyset$, entonces $A(G) = \{[v_1, v_2]\}$ y la orientación buscada, consistirá en asignar una y sólo una dirección a la arista $[v_1, v_2]$.

Hipótesis de inducción: Si G' es una gráfica con n vértices, entonces existe una orientación de G' , D' , tal que no tiene ciclos dirigidos.

Supongamos que G tiene $n+1$ vértices. Debemos demostrar que G tiene una orientación D , tal que D es acíclica.

Sea $g \in V(G)$.

Sea G_1 la subgráfica inducida $G[V(G) - \{g\}]$. Entonces G_1 es una gráfica con n vértices que, por hipótesis de inducción tiene una orientación acíclica, D_1 .

Sabemos que $A(G) = A(G_1) \cup \{[z, g] \in A(G) \mid z \in V(G) - \{g\}\}$.

A las aristas de G les asignamos la dirección siguiente para construir la orientación D :

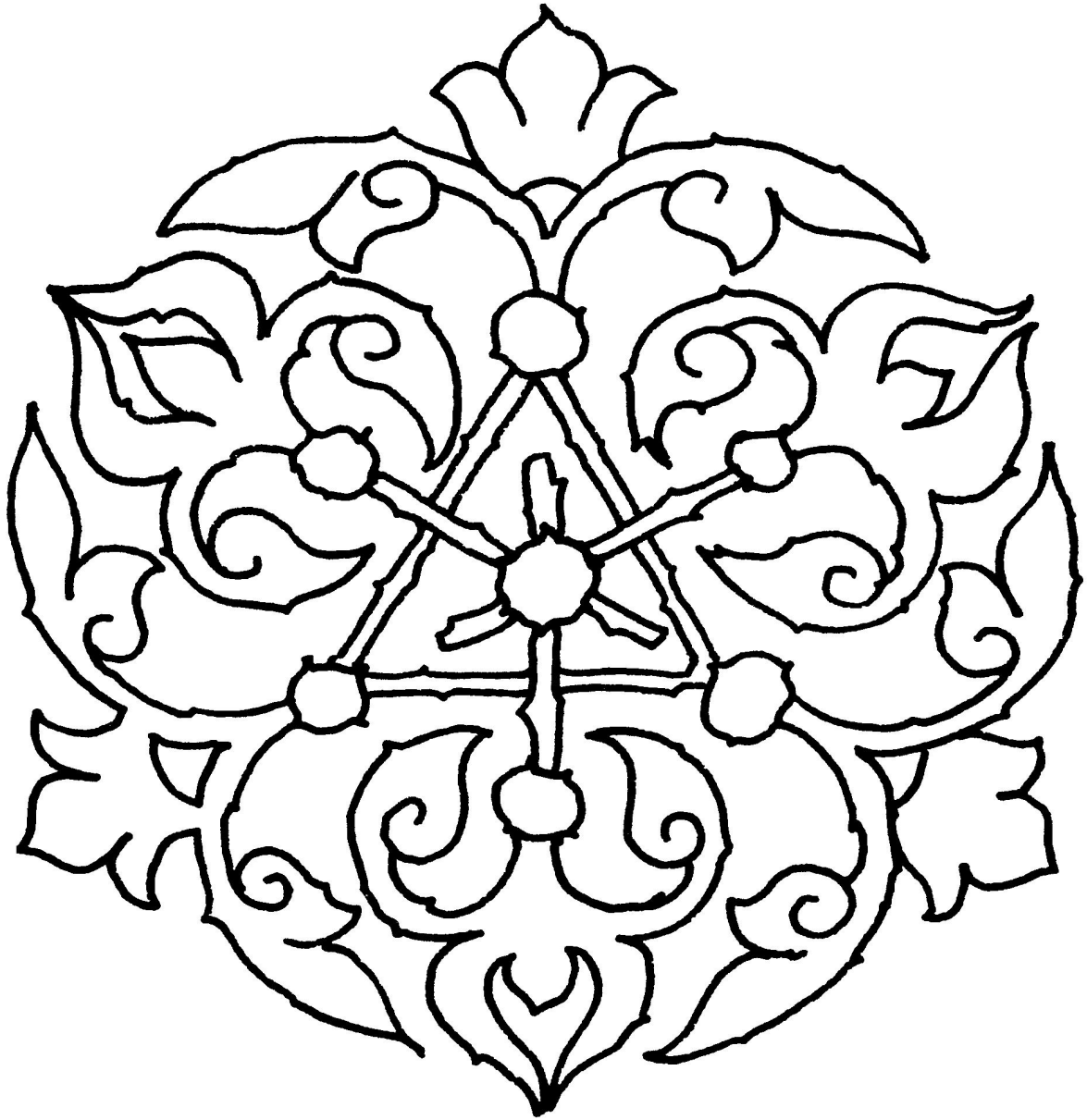
Si $a \in A(G_1)$, a recibe la misma dirección que tiene en D_1 .

Si $a = [z, g]$, a recibe la dirección \overrightarrow{zg} .

Así, D es una orientación de G y además es acíclica pues:

Para cualquier sucesión de vértices, $C = (v_1, v_2, \dots, v_1)$, si g aparece en tal sucesión, como $\delta_D^+(g) = 0$, se sigue que C no es ciclo dirigido de D y si g no aparece en dicha sucesión, entonces todos los vértices de C son vértices de D_1 , con lo cual C no es ciclo dirigido pues D_1 es acíclica.

□



Capítulo 4

Exactamente n k -núcleos

Ya hemos visto muchas digráficas con k -núcleo, pero hasta ahora sólo nos hemos preocupado por encontrar al menos un k -núcleo en cada una de ellas.

En el primer capítulo demostramos el teorema 1.8.6, el cual dice:

Sea D una digráfica fuertemente conexa. Si todos los ciclos dirigidos de D son de longitud congruente con cero módulo k , entonces D tiene k -núcleo

Si observamos con más cuidado su demostración, notaremos que toda digráfica D con $|V(D)| > 1$ y que cumpla con las hipótesis, tiene al menos k k -núcleos, $k = k$.

Una de las hipótesis del teorema arriba mencionado es que D debe ser fuertemente conexa. De ahí nos surgen las siguiente preguntas:

¿Habrá digráficas fuertemente conexas que tengan menos de k k -núcleos, para $k = k$, o que tengan más?

¿Las habrá con tantos k -núcleos como queramos?

Matúš Harminc [11] resolvió estas cuestiones para los 2-núcleos.

En este capítulo, además de presentar sus resultados, daremos nuestros propios ejemplos de digráficas con exactamente n subconjuntos de vértices que son k -núcleo, para cualesquiera números enteros $n \geq 1$ y $k \geq 3$.

La última parte, la dedicaremos a obtener digráficas con tantos k -núcleos y k -soluciones como deseemos.

4.1. Digráficas fuertemente conexas simétricas

Si nos permitimos utilizar flechas simétricas, entonces resulta muy fácil construir digráficas fuertemente conexas con exactamente n 2 -núcleos.

Basta con tomar una digráfica D con n vértices y tal que para cualesquiera $x, y \in V(D)$, $x \neq y$, se tiene que $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yx} \in F(D)$.

De esta forma, cualquier conjunto $\{x\} \subset V(D)$ es un 2 -núcleo de D , pues es absorbente e independiente.

Como el conjunto $\{\{x\} \mid x \in V(D)\}$ tiene cardinalidad n , D es una digráfica con al menos n 2 -núcleos.

D no puede tener más 2 -núcleos pues cualquier subconjunto de $V(D)$ con más de un elemento no es 2 -independiente.

Por lo tanto, D tiene exactamente n 2 -núcleos.

Para $k \geq 3$ observemos que $\{x\}$ no sólo es un 2 -núcleo, también es un k -núcleo porque es k -independiente y, al ser absorbente, es $(k - 1)$ -absorbente.

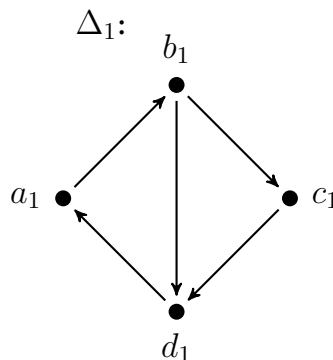
También es imposible que D tenga más k -núcleos pues los subconjuntos de $V(D)$ de más de un elemento no son 2 -independientes y mucho menos son k -independientes para $k > 2$.

Por lo tanto, D tiene exactamente n k -núcleos para todo $k \geq 3$.

Así hemos terminado pues las digráficas simétricas son fuertemente conexas.

4.2. Digráficas fuertemente conexas asimétricas

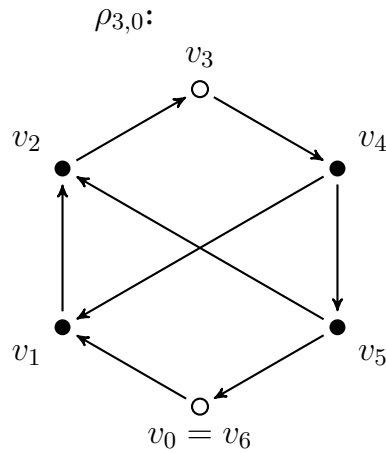
Veamos la digráfica con exactamente un 2 -núcleo propuesta en [11].



Es obvio de Δ_1 es fuertemente conexas.

$N = \{a_1, c_1\}$ es núcleo de Δ_1 y es el único porque cualquier conjunto con un sólo vértice no es absorbente; con dos vértices y que no sea N , no es independiente; con tres o cuatro vértices tampoco es independiente.

La siguiente digráfica es fuertemente conexa con exactamente un 3–núcleo.



Es fácil ver que $\rho_{3,0}$ es asimétrica y $J = \{v_0, v_3\}$ es un 3–núcleo de ella.

También se puede ver que cualquier conjunto con más de dos vértices de $\rho_{3,0}$ no es 3–independiente.

Probemos que J es único.

Supongamos que J' es un 3–núcleo de $\rho_{3,0}$. Entonces $v_3 \in J'$ o $v_3 \notin J'$.

Si $v_3 \notin J'$, entonces debe ser 2–absorbido por algún otro vértice, de donde obtenemos que v_4, v_1 o v_5 pertenecen a J' .

Si $v_4 \in J'$, ningún otro vértice puede pertenecer a J' pues J' es 3–independiente. Pero si sólo tuvieramos a v_4 en J' , J' no sería 2–absorbente pues no absorbería a v_5 .

Si $v_1 \in J'$, ningún otro vértice puede pertenecer a J' pues J' es 3–independiente. Pero si sólo tuvieramos a v_1 en J' , J' no sería 2–absorbente pues no absorbería a v_2 .

Si $v_5 \in J'$, ningún otro vértice puede pertenecer a J' pues J' es 3–independiente. Pero si sólo tuvieramos a v_5 en J' , J' no sería 2–absorbente pues no absorbería a v_0 .

Por lo tanto, $v_3 \in J'$.

Sabiendo ahora que $v_3 \in J'$, también debe suceder que $v_6 \in J'$.

Como sabemos que ningún conjunto con más de dos vértices puede ser 3–núcleo, se sigue que $J' = J$.

Concluimos que $\rho_{3,0}$ sólo tiene un 3–núcleo.

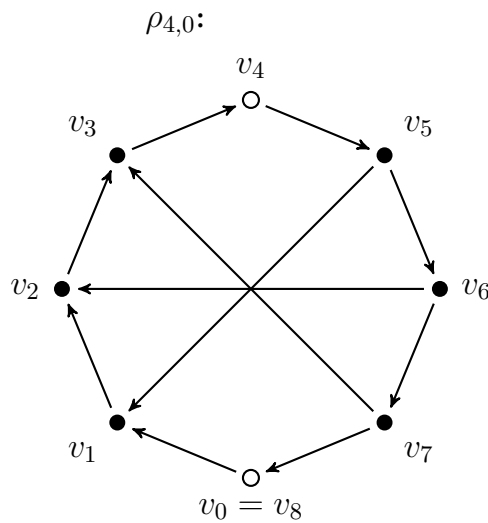
A continuación daremos la forma de construir una digráfica fuertemente conexa y asimétrica con exactamente un k –núcleo para cualquier $k \geq 3$.

Definición 4.2.1. Sea $k \geq 3$. La digráfica $\rho_{k,0}$ está determinada por:

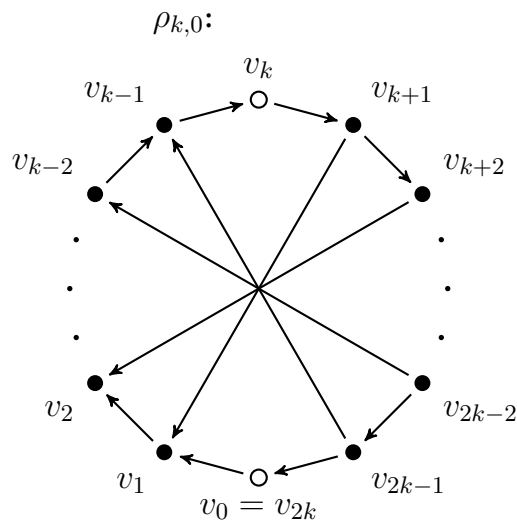
- $V(\rho_{k,0}) = \{v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k} = v_0\}$.
- $F(\rho_{k,0}) = \{\overrightarrow{v_i v_{i+1}} \mid 0 \leq i \leq 2k - 1\} \cup \{\overrightarrow{v_{k+l} v_l} \mid 1 \leq l \leq k - 1\}$.

Ejemplos:

- 1) $\rho_{4,0}$ tiene vértices $v_0, v_1, \dots, v_7, v_8 = v_0$, flechas $(v_i, v_{i+1}), \forall i, 0 \leq i \leq 7$ y $\overrightarrow{v_{4+1} v_1}, \overrightarrow{v_{4+2} v_2}, \overrightarrow{v_{4+3} v_3}$.



- 2) En general, $\rho_{k,0}$ se ve de esta forma:



Teorema 4.2.1. *Sea $k \geq 3$. La digráfica $\rho_{k,0}$ tiene exactamente un k -núcleo.*

Demostración. Sea i tal que $0 \leq i \leq k - 1$.

En $\rho_{k,0}$ tenemos el ciclo dirigido $C = (v_0, v_1, \dots, v_{2k} = v_0)$, en el que aparecen todos los vértices. Por lo tanto para v_i , existen las trayectorias dirigidas $T'_i = (v_i, [C], v_{k+i})^1$ y $T''_i = (v_{k+i}, [C], v_i)$, cada una de longitud k .

Sea $I \subset V(\rho_{k,0})$ un conjunto k -independiente.

Si $v_i \in I$, entonces, por las trayectorias T'_i y T''_i , ningún otro vértice, excepto posiblemente v_{k+i} , puede pertenecer a I .

Análogamente, si $v_{k+i} \in I$, ningún otro vértice, a excepción quizás de v_i , puede pertenecer a I .

Por consiguiente, cualquier conjunto k -independiente no puede tener más de dos vértices de $\rho_{k,0}$.

Sea j tal que $1 \leq j \leq k - 1$.

Para cada flecha (v_{k+j}, v_j) :

Si $v_{k+j} \in I$, se sigue que $I = \{v_{k+j}\}$ pues $d_{\rho_{k,0}}(v_{k+j}, v_j) = 1$.

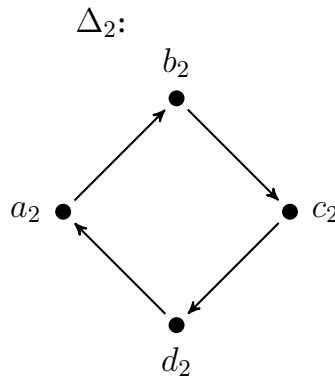
Si $v_j \in I$, por la misma razón que antes, $I = \{v_j\}$.

$\{v_j\}$ y $\{v_{k+j}\}$ no son $(k - 1)$ -absorbentes porque $d_{\rho_{k,0}}(v_{j+1}, v_j) \geq k$ y $d_{\rho_{k,0}}(v_{k+j+1}, v_{k+j}) \geq k$ debido a la estructura de $\rho_{k,0}$.

Por lo anterior, los vértices que son extremos de las flechas (v_{k+j}, v_j) no son elementos de ningún k -núcleo.

Como $\{v_0, v_k\}$ es k -núcleo porque las únicas trayectorias entre v_0 y v_k son T'_0 y T''_0 , las cuales garantizan la k -independencia y la $(k - 1)$ -absorbencia, tenemos en $\rho_{k,0}$ exactamente un k -núcleo. \square

Para conseguir una digráfica con exactamente dos 2-núcleos, M. Harminc elimina la cuerda $\overrightarrow{b_1 d_1}$ en la digráfica Δ_1 , así obtiene la digráfica Δ_2 .



¹Es decir, T'_i iniciará en v_i , continuará con el camino marcado por C y finalizará en v_{k+i} .

Los dos 2-núcleos que hay en Δ_2 son $\{a_2, c_2\}$ y $\{b_2, d_2\}$.

Ahora tenemos ejemplos con $1, 2, \dots, k$ k-núcleos para $k = k = 2$.

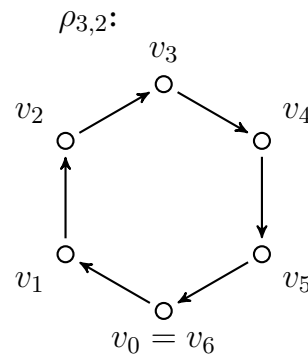
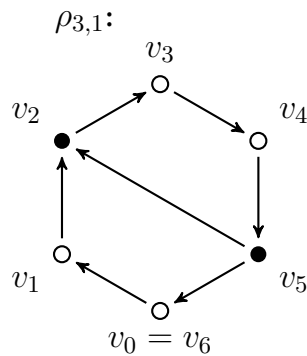
Fijando $k \geq 3$, seguiremos con ejemplos de digráficas con exactamente dos, tres, cuatro, \dots hasta k k-núcleos, $k = k$.

Definición 4.2.2. Sea $k \geq 3$. La digráfica $\rho_{k,i}$ con $0 < i \leq k - 1$, está definida por:

- $V(\rho_{k,i}) = V(\rho_{k,0})$.
- $F(\rho_{k,i}) = F(\rho_{k,0}) - \{(v_{k+1}, v_1), (v_{k+2}, v_2), \dots, (v_{k+i}, v_i)\}$.

Ejemplos:

- 3) $F(\rho_{3,1}) = F(\rho_{3,0}) - \{\overrightarrow{v_{3+1}v_1}\}$.
 $F(\rho_{3,2}) = F(\rho_{3,0}) - \{\overrightarrow{v_{3+1}v_1}, \overrightarrow{v_{3+2}v_2}\}$.

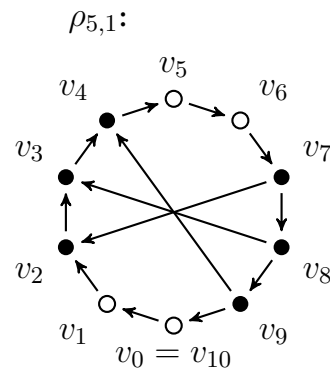
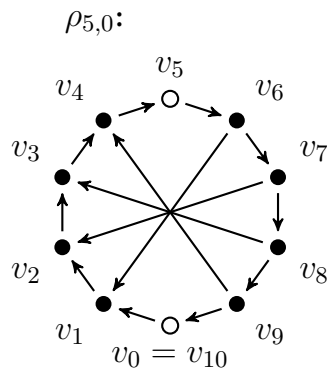


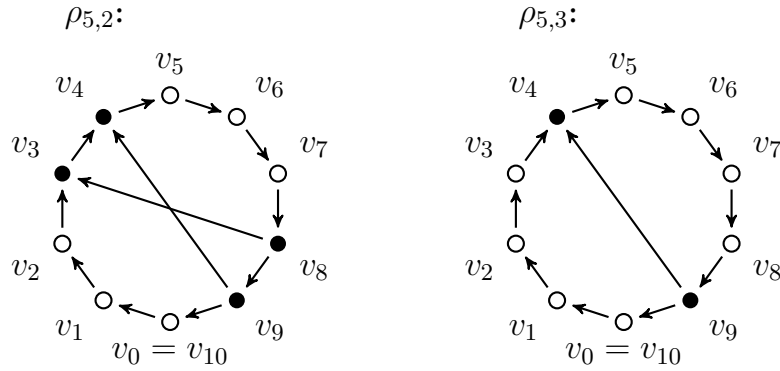
4) Podemos pensar que:

$\rho_{5,1}$ se obtiene de $\rho_{5,0}$ eliminando la flecha $\overrightarrow{v_6v_1}$.

$\rho_{5,2}$ se obtiene de $\rho_{5,1}$ eliminando la flecha $\overrightarrow{v_7v_2}$.

$\rho_{5,3}$ se obtiene de $\rho_{5,2}$ eliminando la flecha $\overrightarrow{v_8v_3}$.





En los ejemplos se aprecia que $\rho_{3,1}$ tiene exactamente dos 3-núcleos y que $\rho_{3,2}$ tiene tres 3-núcleos. También que $\rho_{5,1}$, $\rho_{5,2}$, $\rho_{5,3}$ tienen, respectivamente, dos, tres y cuatro 5-núcleos.

Vale la pena mencionar que la mínima longitud que puede tener un ciclo dirigido de $\rho_{k,y}$ es $k + 1$. La explicación de por qué sucede esto es la siguiente:

Todo ciclo dirigido de $\rho_{k,y}$ usa alguna flecha (v_{k+j}, v_j) o no usa ninguna flecha (v_{k+j}, v_j) .

Si el ciclo no usa ninguna flecha de las mencionadas, entonces el ciclo dirigido en cuestión es $(v_0, v_1, \dots, v_{2k} = v_0)$.

Si usa alguna flecha (v_{k+j}, v_j) , entonces el ciclo dirigido del que estamos hablando es $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_{k+j}, v_j)$.

Teorema 4.2.2. *Sea $y \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ con $k \geq 3$. La digráfica $\rho_{k,y}$ tiene exactamente $(y + 1)k$ -núcleos.*

Demostración. Como la longitud de todos los ciclos dirigidos de $\rho_{k,y}$ es mayor o igual que $k + 1$, los conjuntos que constan de un sólo vértice no son absorbentes, pues para cualquier vértice v_z , $d_{\rho_{k,y}}(v_{z+1}, v_z) \geq k$, ya que toda trayectoria de v_{z+1} a v_z forma junto con la flecha (v_z, v_{z+1}) un ciclo, el cual tiene longitud mayor o igual que $k + 1$.

Podemos argumentar de forma análoga a la demostración del teorema 4.2.1 para obtener que los vértices iniciales o finales de las flechas (v_{k+j}, v_j) no pertenecen a ningún k -núcleo y, que éstos últimos no pueden tener más de dos vértices.

Siendo J un k -núcleo, es sencillo ver que si $v_i \in J$, entonces $v_{k+i} \in J$ y si $v_{k+i} \in J$, $v_i \in J$ ($0 \leq i \leq k - 1$).

Afirmación. Todo conjunto $\{v_i, v_{k+i}\}$ con $0 \leq i \leq k - 1$ tal que (v_{k+i}, v_i) no pertenece a $F(\rho_{k,y})$ es k -núcleo.

La $(k - 1)$ -absorbencia se debe a las trayectorias $(v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{k+i})$ y $(v_{k+i+1}, v_{k+i+2}, \dots, v_{2k} = v_0, \dots, v_i)$ que tienen longitud igual a $k - 1$.

La k -independencia se da porque las $v_i v_{k+i}$ -trayectorias dirigidas tienen longitud k y son únicas (son T'_i y T''_i de la página 167).

Así, $\{v_i, v_{k+i}\}$ con $0 \leq i \leq k - 1$ tal que $(v_{k+i}, v_i) \notin F(\rho_{k,y})$ es k -núcleo.

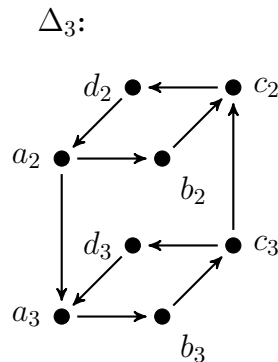
Por lo tanto, los k -núcleos de $\rho_{k,y}$ están totalmente determinados por los pares de vértices $\{v_i, v_{k+i}\}$ tales que $(v_{k+i}, v_i) \notin F(\rho_{k,y})$.

Por definición, las flechas $\overrightarrow{v_k v_0}, \overrightarrow{v_{k+1} v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{k+y} v_y}$ no pertenecen a $F(\rho_{k,y})$. Lo cual implica que hay exactamente $(y + 1) k$ -núcleos. □

Del teorema anterior, concluimos que $\rho_{k,1}$ tiene exactamente dos k -núcleos, $\rho_{k,2}$ tiene tres, $\rho_{k,3}$ tiene cuatro, \dots $\rho_{k,k-1}$ tiene k .

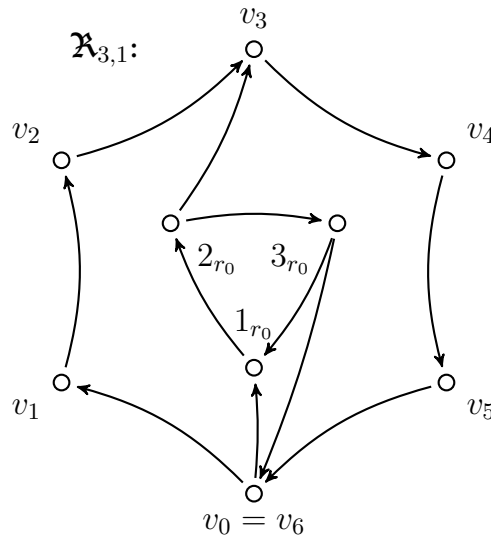
Veamos digráficas asimétricas con exactamente $(k + 1) k$ -núcleos.

Para $k = 2$:



Observamos que Δ_3 , también propuesta por Matúš Harminc, es fuertemente conexa y sus núcleos son $\{a_3, c_3, b_2, d_2\}$, $\{b_3, d_3, a_2, c_2\}$ y $\{b_3, d_3, b_2, d_2\}$.

Para $k = 3$:



$\mathfrak{X}_{3,1}$ es fuertemente conexa y tiene cuatro 3-núcleos: $\{v_0, v_3\}$, $\{v_1, v_4, 1_{r_0}\}$, $\{v_2, v_5, 2_{r_0}\}$, $\{v_2, v_5, 3_{r_0}\}$.

Probemos que $\mathfrak{X}_{3,1}$, no tiene más de cuatro 3-núcleos.

Supongamos que J es un 3-núcleo de $\mathfrak{X}_{3,1}$.

Llamemos CE_6 y r_0 a los ciclos dirigidos $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_5, v_0)$ y $(1_{r_0}, 2_{r_0}, 3_{r_0}, 1_{r_0})$ respectivamente.

Observemos que si $v_z \in J$, $v_{z+1}, v_{z+2}, v_{z-1}, v_{z-2}$ no son elementos de J pues $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(v_z, v_{z+1}) = 1 = d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(v_{z-1}, v_z)$, $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(v_z, v_{z+2}) = 2 = d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(v_{z-2}, v_z)$. Por lo tanto, si $v_i \in J$ con $i = 0, 1, 2$, el único vértice que podría pertenecer a J es v_{3+i} y viceversa.

Además $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(x_{r_0}, y_{r_0}) \leq 2$ con $x, y \in \{1, 2, 3\}$. Por consiguiente, si algún vértice de r_0 pertenece a J , ningún otro vértice de r_0 pertenece a J .

Si $v_0 \in J$, como $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(v_0, 1_{r_0}) = 1$, $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(v_0, 2_{r_0}) = 2$ y $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(3_{r_0}, v_0) = 1$, ninguno de los vértices de r_0 pertenece a J . Por lo que dijimos antes, de los vértices de CE_6 sólo v_3 podría pertenecer a J . Como $\{v_0\}$ no es 2-absorbente al no absorber a v_1 , se sigue que $v_3 \in J$ porque $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(v_1, v_3) = 2$.

Si $v_3 \in J$, $v_4, v_5 \notin J$. Para absorber a distancia menor o igual que 2 a v_4 , o 2-absorber a v_4 , $v_0 \in J$ y, por lo anterior, se sigue que $J = \{v_0, v_3\}$.

Si $v_1 \in J$, entonces $v_2, v_3 \notin J$. Como J es 2-absorbente tenemos que, para absorber a v_2 , $v_4 \in J$ y entonces J no puede tener a más vértices de CE_6 .

$v_1 \in J$ implica que $3_{r_0} \notin J$ pues $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(3_{r_0}, v_1) = 2$ y $v_4 \in J$ implica que $2_{r_0} \notin J$ porque $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(2_{r_0}, v_4) = 2$.

Como $\{v_1, v_4\}$ no 2-absorbe a 1_{r_0} pues $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(1_{r_0}, v_1) = 4$ y $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(1_{r_0}, v_4) = 3$, se sigue que $1_{r_0} \in J$ y por consiguiente $J = \{v_1, v_4, 1_{r_0}\}$.

Si $v_4 \in J$, entonces $v_2, v_3 \notin J$. Si v_1 no perteneciera a J , tendría que ser absorbido por v_2 o por v_3 , pues son los únicos que 2-absorben a v_1 . De ahí v_1 pertenece a J y por lo antes dicho, $J = \{v_1, v_4, 1_{r_0}\}$.

Si $1_{r_0} \in J$, entonces $v_3, v_5 \notin J$ porque $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(v_5, 1_{r_0}) = 2 = d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(1_{r_0}, v_3)$. Los vértices que 2-absorben a v_3 son v_4 y v_5 y por ende $v_4 \in J$. Por lo anterior, $J = \{v_1, v_4, 1_{r_0}\}$.

Si $v_2 \in J$, entonces $v_3, v_4 \notin J$, para 2-absorber a v_3 , necesariamente $v_5 \in J$.

Si $v_5 \in J$ y v_2 no perteneciera a J , debería ser absorbido por v_3 o por v_4 . Pero $v_5 \in J$ implica que ni v_3 ni v_4 pertenecen a J . Por lo tanto $v_2 \in J$.

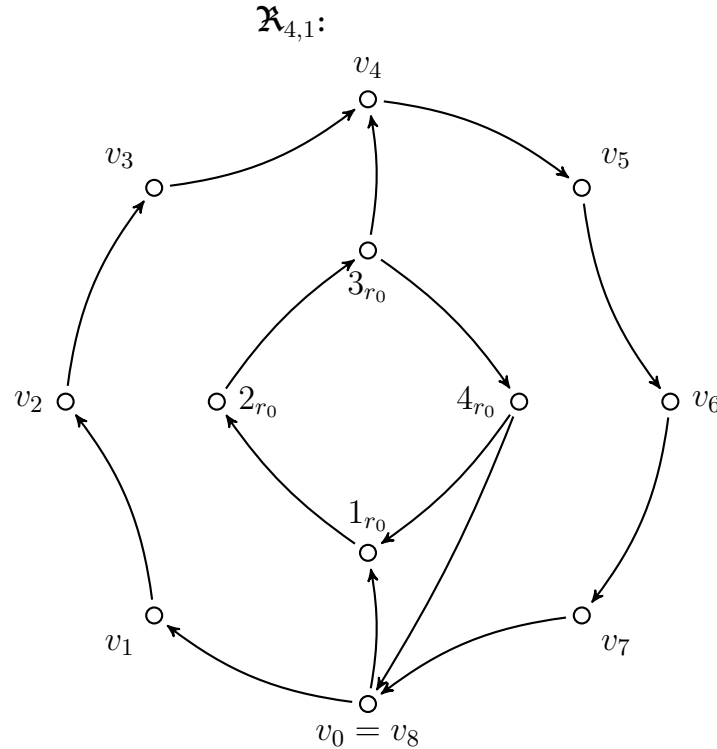
Por lo tanto $v_2 \in J$ si y sólo si $v_5 \in J$. El conjunto $\{v_2, v_5\}$ no es 2-absorbente pues no absorbe a ningún vértice de r_0 en particular, $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(2_{r_0}, v_5) = 3$ y $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(2_{r_0}, v_2) = 4$.

Si $2_{r_0} \in J$, $v_3, v_4 \notin J$ porque $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(2_{r_0}, v_3) = 1$ y $d_{\mathfrak{X}_{3,1}}(2_{r_0}, v_4) = 2$, entonces v_3 debe ser absorbido por v_5 . Por lo tanto, $J = \{v_2, v_5, 2_{r_0}\}$.

Si $3_{r_0} \in J$, entonces ningún otro vértice de r_0 puede pertenecer a J , tampoco v_0 ni v_1 . Para 2-absorber a v_0 sólo queda v_2 . Por lo tanto $J = \{v_2, v_5, 3_{r_0}\}$.

Por lo tanto, $\mathfrak{X}_{3,1}$ posee exactamente cuatro 3-núcleos.

La digráfica que se muestra a continuación es fuertemente conexa y tiene exactamente cinco 4-núcleos.



Sea J un 4-núcleo de $\mathfrak{X}_{4,1}$.

Sean $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ y $x \in \{1, 2, 3\}$.

Si $v_i \in J$, para 3-absorber a v_{i+1} , se necesita que v_{4+i} pertenezca a J .

Si $v_4 \in J$, para absorber a v_5 , necesariamente $v_0 \in J$.

Si $v_{4+j} \in J$ y v_j no perteneciera a J , sería imposible absorberlo.

Ahora llamaremos r_0 al ciclo dirigido $(1_{r_0}, 2_{r_0}, 3_{r_0}, 4_{r_0}, 1_{r_0})$.

Notemos que $\vec{C} = (v_0, 1_{r_0}, 2_{r_0}, 3_{r_0}, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$ es un ciclo de longitud 8.

Además, si $x_{r_0} \in J$, de los vértices de \vec{C} sólo v_{4+x} podría pertenecer a J y viceversa.

Si $x_{r_0} \in J$, para 3-absorber a v_4 , se necesita que v_{4+x} pertenezca a J .

Si $4_{r_0} \in J$, entonces $v_0, v_1, v_2 \notin J$ y para absorber a v_0 , se necesita que v_3 pertenezca a J .

Los conjuntos $\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_7\}$ no son 4-núcleos pues no absorben a $1_{r_0}, 2_{r_0}, 3_{r_0}$ (o 4_{r_0}), respectivamente. $\{1_{r_0}\}, \{2_{r_0}\}, \{3_{r_0}\}, \{4_{r_0}\}$ tampoco son 4-núcleos al no absorber a v_1 .

Por todo lo anterior, los únicos 4-núcleos que tiene $\mathfrak{X}_{4,1}$ son $\{v_1, v_5, 1_{r_0}\}$, $\{v_2, v_6, 2_{r_0}\}$, $\{v_3, v_7, 3_{r_0}\}$, $\{v_3, v_7, 4_{r_0}\}$ y $\{v_0, v_4\}$.

Para $k \geq 3$, como ejemplo de digráfica asimétrica con exactamente $(k + 1)$ k -núcleos, proponemos a $\mathfrak{X}_{k,1}$.

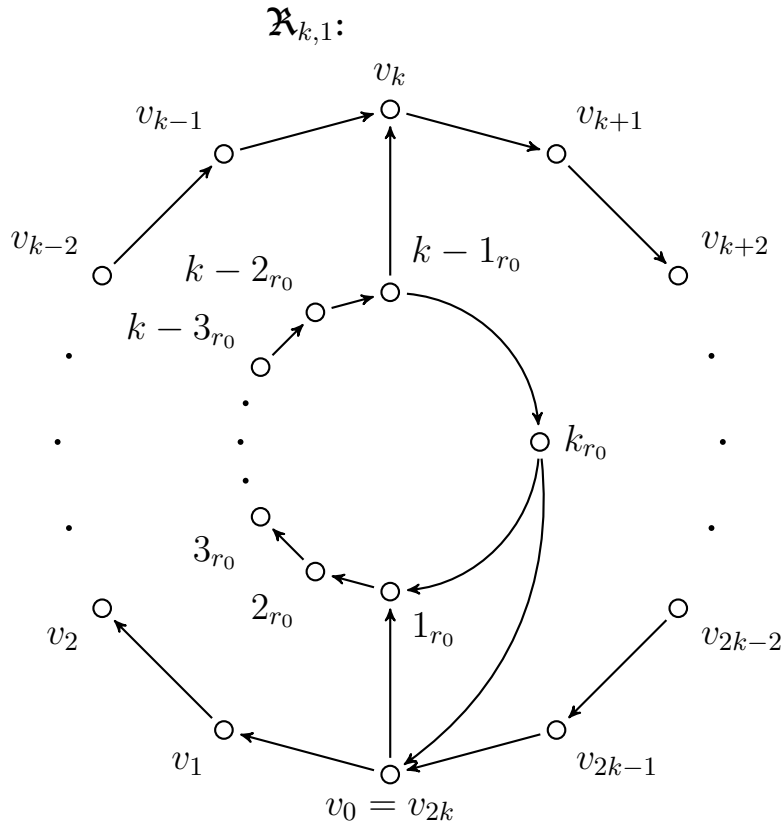
Definición 4.2.3. Sea $k \geq 3$. Definimos la digráfica $\mathfrak{X}_{k,1}$ como:

- $V(\mathfrak{X}_{k,1}) = \{v_0 = v_{2k}, v_1, \dots, v_{2k-1}\} \cup \{(1)_{r_0}, (2)_{r_0}, \dots, (k)_{r_0}\}$.

Cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos X_{r_0} en lugar de $(X)_{r_0}$.

- $F(\mathfrak{X}_{k,1}) = \{\overrightarrow{v_i v_{i+1}} \mid 0 \leq i \leq 2k - 1\} \cup \{(1_{r_0}, 2_{r_0}), (2_{r_0}, 3_{r_0}), \dots, ((k - 1)_{r_0}, k_{r_0}), (k_{r_0}, 1_{r_0})\} \cup \{\overrightarrow{v_0 1_{r_0}}, \overrightarrow{(k - 1)_{r_0} v_k}, \overrightarrow{k_{r_0} v_0}\}$.

Al ciclo dirigido $(v_0, v_1, \dots, v_{2k-1}, v_{2k} = v_0)$ lo llamaremos CE_{2k} y a $(1_{r_0}, 2_{r_0}, \dots, k_{r_0}, 1_{r_0})$, $r_{k,0}$ o simplemente r_0 .



De la definición de $\mathfrak{X}_{k,1}$, podemos darnos cuenta que es fuertemente conexas.

Teorema 4.2.3. *Sea $k \geq 3$. $\mathfrak{X}_{k,1}$ tiene exactamente $(k + 1)$ k -núcleos.*

Demostración. Sean J un k -núcleo de $\mathfrak{X}_{k,1}$ y $x \in \{1, 2, \dots, k - 2, k - 1\}$.

Si $v_0 \in J$, entonces $v_1, v_2, \dots, v_{k-1} \notin J$. Para $(k - 1)$ -absorber a v_1 , necesariamente $v_k \in J$.

Si $v_k \in J$, entonces $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{2k-1} \notin J$. Para $(k - 1)$ -absorber a v_{k+1} , necesariamente $v_0 \in J$.

Si $v_x \in J$, entonces $v_{x+1}, v_{x+2}, \dots, v_{x+k-1} \notin J$ pues J es k -independiente. Para $(k - 1)$ -absorber a v_{x+1} , necesariamente $v_{x+k} \in J$.

Si $v_{x+k} \in J$, entonces ningún vértice de CE_{2k} , excepto v_x puede pertenecer a J . Si v_x no perteneciese a J , sería imposible absorberlo pues los vértices que lo $(k - 1)$ -absorben son $v_{x+1}, v_{x+2}, \dots, v_{x+k-1}$. Por lo tanto, $v_x \in J$.

También, como $\forall y, z d_{\mathfrak{X}_{k,1}}(y_{r_0}, z_{r_0}) \leq k$, si algún vértice de r_0 pertenece a J , ningún otro vértice de r_0 pertenece a J .

$d_{\mathfrak{X}_{k,1}}(x_{r_0}, v_{k+x}) = k$, pues la trayectoria dirigida más corta de x_{r_0} a v_{k+x} es $(x_{r_0}, [r_0], (k - 1)_{r_0}, v_k, [CE_{2k}], v_{k+x})$, la cual tiene longitud k .

Por consiguiente, si $x_{r_0} \in J$, entonces $v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+x-1} \notin J$.

$d_{\mathfrak{X}_{k,1}}(v_{k+x}, x_{r_0}) = k$ porque la única trayectoria dirigida de v_{k+x} a x_{r_0} es $(v_{k+x}, [CE_{2k}], v_{2k}, 1_{r_0}, [r_0], x_{r_0})$ y tiene longitud k .

Por lo tanto, si $x_{r_0} \in J$, entonces $v_{2k}, v_{2k-1}, \dots, v_{k+x+1} \notin J$.

Por ende, si $x_{r_0} \in J$, entonces $v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+x-1}, v_{k+x+1}, \dots, v_{2k} \notin J$.

Si $x_{r_0} \in J$ y v_{k+x} no perteneciese a J , sería imposible $(k - 1)$ -absorber a v_k .

Luego, si $x_{r_0} \in J$, $v_{k+x} \in J$.

$d_{\mathfrak{X}_{k,1}}(k_{r_0}, v_{k-1}) = k$ pues la trayectoria dirigida $(k_{r_0}, v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ es la más corta de k_{r_0} a v_{k-1} .

Si $k_{r_0} \in J$, entonces $v_0, v_1, \dots, v_{k-2} \notin J$. Como $v_0 \notin J$, se sigue que $v_k \notin J$. Para absorber a v_1 , necesariamente $v_{k-1} \in J$.

Cualquier k -núcleo de $\mathfrak{X}_{k,1}$ tiene algún vértice de r_0 o no tiene ningún vértice de r_0 .

Como hemos visto antes, si $x_{r_0} \in J$, $v_{k+x} \in J$, por consiguiente $v_x \in J$. Así, J no puede contener otros vértices. $\{x_{r_0}, v_x, v_{k+x}\}$ es k -núcleo pues es obvio que es $(k - 1)$ -absorbente y la k -independencia se obtiene de los siguientes hechos:

Sabemos que $d_{\mathfrak{X}_{k,1}}(v_x, v_{k+x}) = d_{\mathfrak{X}_{k,1}}(v_{k+x}, v_x) = k$.

Vimos que $d_{\mathfrak{X}_{k,1}}(x_{r_0}, v_{k+x}) = d_{\mathfrak{X}_{k,1}}(v_{k+x}, x_{r_0}) = k$.

Ahora, $d_{\mathfrak{A}_{k,1}}(v_x, x_{r_0}) \geq k$ porque cualquier trayectoria dirigida de v_x a x_{r_0} contiene al camino dirigido $(v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k})$. $d_{\mathfrak{A}_{k,1}}(x_{r_0}, v_x) = k + 1$ debido a que la trayectoria dirigida más corta de x_{r_0} a v_x es $(x_{r_0}, (x+1)_{r_0}, \dots, (k-1)_{r_0}, k_{r_0}, v_0, v_1, \dots, v_x)$, la cual tiene longitud $k + 1$.

También vimos que si $k_{r_0} \in J$, $v_{k-1} \in J$ y por ende $v_{2k-1} \in J$.

$\{k_{r_0}, v_{k-1}, v_{2k-1}\}$ obviamente es $(k-1)$ -absorbente y es k -independiente pues $d_{\mathfrak{A}_{k,1}}(k_{r_0}, v_{k-1}) = k$, $d_{\mathfrak{A}_{k,1}}(v_{k-1}, k_{r_0}) \geq k$, $d_{\mathfrak{A}_{k,1}}(v_{2k-1}, k_{r_0}) = k + 1$, $d_{\mathfrak{A}_{k,1}}(k_{r_0}, v_{2k-1}) \geq k$ y $d_{\mathfrak{A}_{k,1}}(v_{k-1}, v_{2k-1}) = d_{\mathfrak{A}_{k,1}}(v_{2k-1}, v_{k-1}) = k$.

Concluimos que por cada vértice de r_0 tenemos un k -núcleo.

Si J no contiene a ningún vértice de r_0 , entonces debe absorberlos a todos ellos, por lo que tendremos algún vértice de CE_{2k} en J y por lo antes visto, para alguna x se cumplirá que $\{v_x, v_{k+x}\} = J$ o $\{v_0, v_k\} = J$.

El conjunto $\{v_x, v_{k+x}\}$ no es $(k-1)$ -absorbente pues no absorbe a x_{r_0} . Por ende $J \neq \{v_x, v_{k+x}\}$.

Se puede ver sin dificultad que $\{v_0, v_k\}$ realmente es k -núcleo.

Por lo tanto, tenemos al menos $(k+1)$ k -núcleos y no hay más pues ningún k -núcleo puede tener más de dos vértices de CE_{2k} y tampoco puede tener más de uno de r_0 , debido a la k -independencia. □

Regresando a los 2-núcleos, en vez de seguir con digráficas que tengan exactamente cuatro 2-núcleos, veamos la generalización hecha por Matúš Harminc para obtener digráficas con exactamente n núcleos, $n \geq 1$.

Definición 4.2.4. Sea $m \geq 2$. Definimos recursivamente a la digráfica Δ_{m+1} con los vértices y flechas a continuación describimos:

- $V(\Delta_{m+1}) = V(\Delta_m) \cup \{a_{m+1}, b_{m+1}, c_{m+1}, d_{m+1}\}$ siendo éste último un conjunto tal que $V(\Delta_m) \cap \{a_{m+1}, b_{m+1}, c_{m+1}, d_{m+1}\} = \emptyset$.
- $F(\Delta_{m+1}) = F(\Delta_m) \cup \{\overrightarrow{a_{m+1}b_{m+1}}, \overrightarrow{b_{m+1}c_{m+1}}, \overrightarrow{c_{m+1}d_{m+1}}, \overrightarrow{d_{m+1}a_{m+1}}\} \cup \{\overrightarrow{c_{m+1}c_m}, \overrightarrow{a_2a_{m+1}}, \overrightarrow{a_3a_{m+1}}, \dots, \overrightarrow{a_ma_{m+1}}\}$.

Ejemplos:

5) Δ_3 de la definición anterior es la Δ_3 que ya conocemos.

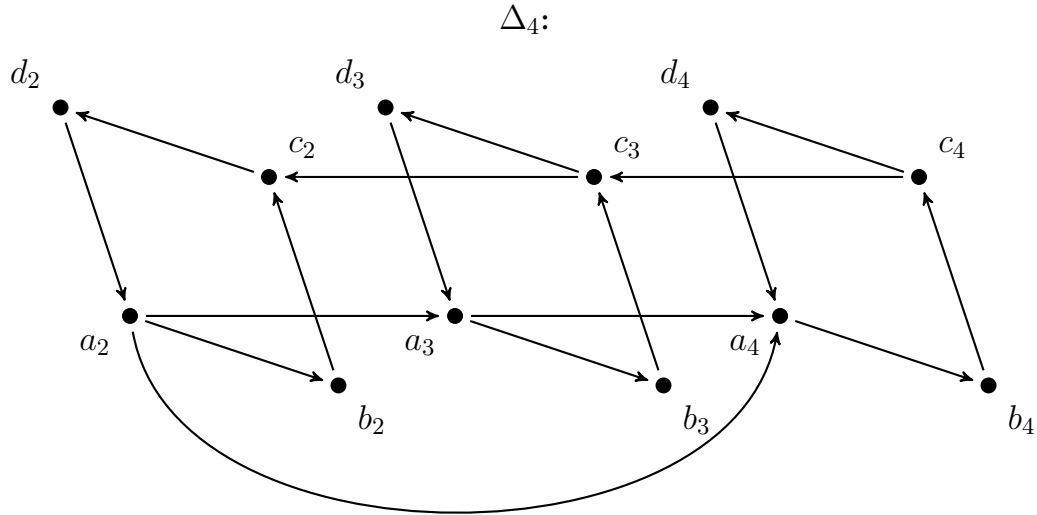
Recordemos que Δ_2 es el ciclo dirigido $(a_2, b_2, c_2, d_2, a_2)$.

Entonces, $V(\Delta_3) = \{a_2, b_2, c_2, d_2, a_2\} \cup \{a_3, b_3, c_3, d_3, a_3\}$.

$F(\Delta_3) = F(\Delta_2) \cup \{\overrightarrow{a_3b_3}, \overrightarrow{b_3c_3}, \overrightarrow{c_3d_3}, \overrightarrow{d_3a_3}\} \cup \{\overrightarrow{c_3c_2}, \overrightarrow{a_2a_3}\}$.

$$6) V(\Delta_4) = V(\Delta_3) \cup \{a_4, b_4, c_4, d_4, a_4\}.$$

$$F(\Delta_4) = F(\Delta_3) \cup \{\overrightarrow{a_4 b_4}, \overrightarrow{b_4 c_4}, \overrightarrow{c_4 d_4}, \overrightarrow{d_4 a_4}\} \cup \{\overrightarrow{c_4 c_3}, \overrightarrow{a_2 a_4}, \overrightarrow{a_3 a_4}\}.$$



La digráfica Δ_{m+1} es fuertemente conexa, pues podemos recorrer todos sus vértices en el siguiente orden: $c_{m+1}, d_{m+1}, a_{m+1}, b_{m+1}, c_{m+1}, c_m, \dots, c_2, d_2, a_2, b_2, c_2, d_2, a_2, a_{m+1}, b_{m+1}, c_{m+1}$. Aclaremos que cuando lleguemos a un vértice c_i , recorreremos todo el ciclo dirigido $(c_i, d_i, a_i, b_i, c_i)$ y continuamos con c_{i-1} . Esto se puede hacer gracias a que tenemos las flechas $(c_3, c_2), (c_4, c_3), \dots, (c_{m+1}, c_m)$ y la flecha (a_2, a_{m+1}) .

Teorema 4.2.4. *Sea $n \geq 1$, Δ_n tiene exactamente n núcleos.*

Demostración. Para Δ_1, Δ_2 y Δ_3 ya hemos comprobado que exactamente tienen uno, dos y tres núcleos respectivamente.

Procederemos por inducción sobre n .

Hipótesis de inducción: Δ_n tiene exactamente n núcleos.

Probemos que Δ_{n+1} tiene exactamente $n + 1$ núcleos.

Sea K un núcleo de Δ_{n+1} . Entonces $b_{n+1} \in K$ o $b_{n+1} \notin K$.

Si $b_{n+1} \notin K$, entonces $c_{n+1} \in K$ dado que es el único vértice que absorbe a b_{n+1} , entonces $d_{n+1} \notin K$ pues éste es independiente y por consiguiente $a_{n+1} \in K$.²

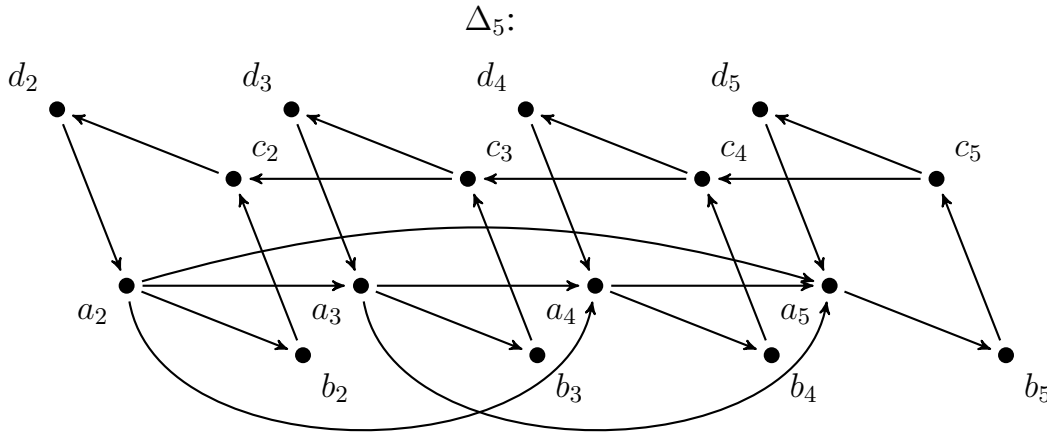
²Nótese que b_x sólo puede ser absorbido por c_x y que a d_x sólo lo absorbe a_x , siendo x un elemento de $\{2, 3, \dots, n + 1\}$.

Sea $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.

Como en Δ_{n+1} existen las flechas $\overrightarrow{a_2 a_{n+1}}, \overrightarrow{a_3 a_{n+1}}, \dots, \overrightarrow{a_n a_{n+1}}$, concluimos que $a_i \notin K$ para todo i .

Los vértices d_i sólo pueden ser absorbidos por el respectivo a_i . Sabiendo ahora que ningún a_i pertenece a K , tenemos que para todo i , $d_i \in K$. De lo anterior se sigue que $c_i \notin K$ y como los vértices c_i son los únicos que absorben a los b_i , concluimos que para cualquier i , $b_i \in K$.

Por lo tanto $K = \{c_{n+1}, a_{n+1}, b_n, d_n, b_{n-1}, d_{n-1}, \dots, b_2, d_2\}$.



Si $b_{n+1} \in K$, $a_{n+1}, c_{n+1} \notin K$ y $d_{n+1} \in K$. Por lo tanto $\{b_{n+1}, d_{n+1}\} \subset K$.

De la definición de Δ_{n+1} , tenemos que $\Delta_n = \Delta_{n+1} - \{a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}\}$ y además, ningún vértice de Δ_n es adyacente a b_{n+1} o a d_{n+1} .

Por lo anterior, $K - \{b_{n+1}, d_{n+1}\}$ es núcleo de Δ_n pues como K es núcleo de Δ_{n+1} y b_{n+1}, d_{n+1} sólo absorben a c_{n+1} y a_{n+1} respectivamente, se tiene que $K - \{b_{n+1}, d_{n+1}\}$ es independiente y absorbente en Δ_n .

Así, si $b_{n+1} \in K$, $K = K' \cup \{b_{n+1}, d_{n+1}\}$ para algún núcleo K' de Δ_n .

Es sencillo ver que, si K' es núcleo de Δ_n , entonces $K' \cup \{b_{n+1}, d_{n+1}\}$ es núcleo de Δ_{n+1} .

Por hipótesis de inducción Δ_n tiene exactamente n núcleos.

Por consiguiente, en Δ_{n+1} hay exactamente n núcleos que tienen como elemento a b_{n+1} y hay un único núcleo al que no pertenece b_{n+1} .

Por lo tanto Δ_{n+1} posee exactamente $n + 1$ núcleos.

□

Hemos visto digráficas con uno, dos, $\dots, k, k + 1, k - 1$ núcleos para $k \geq 3$. Proponemos a $\mathfrak{X}_{k,j}$, definida a continuación, como ejemplo de digráfica fuertemente conexas y asimétrica con exactamente $k + j$ núcleos.

Definición 4.2.5. Sean $k \geq 3, j \geq 1$ y $E = \{0, 1, \dots, j - 1\}$.

Sea $\{r_{k,0}, r_{k,1}, \dots, r_{k,j-1}\}$ una colección de ciclos dirigidos tal que para todo y diferente de z $V(r_{k,y}) \cap V(r_{k,z}) = \emptyset, |V(r_{k,i})| = k$ para cualquier $i \in E$ y finalmente $CE_{2k} \cap V(r_{k,i}) = \emptyset, \text{ para todo } i \in E.$

Como hicimos antes, simplemente escribiremos r_i en lugar de $r_{k,i}$ cuando no hay riesgo de confusión.

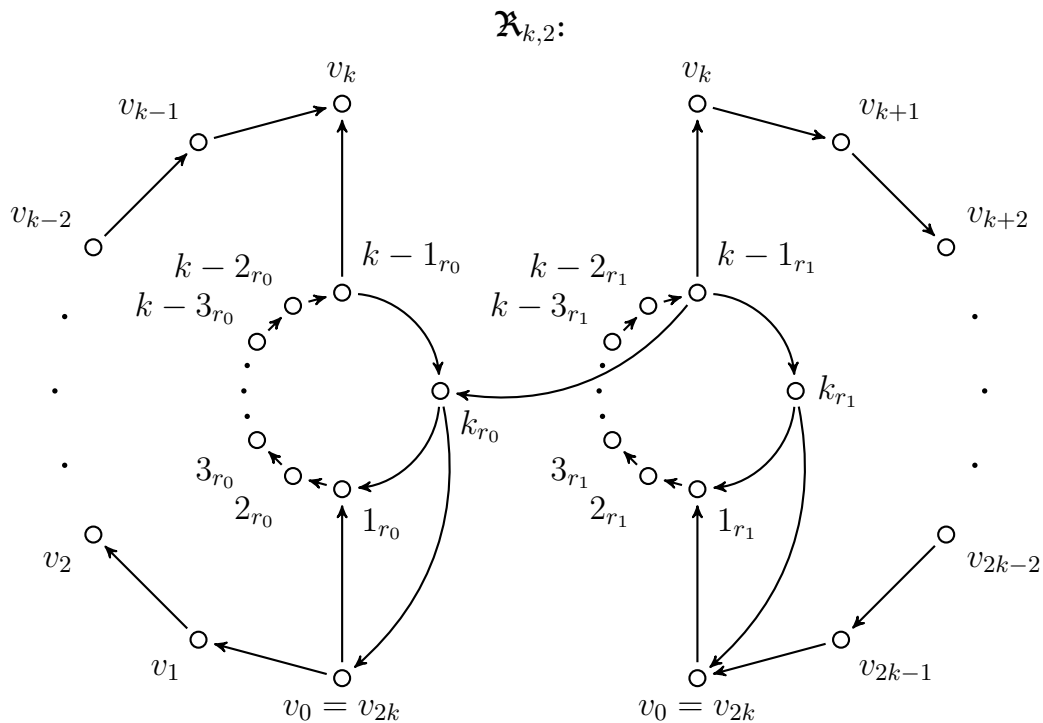
Convenimos que $V(r_i) = \{(1)_{r_i}, (2)_{r_i}, \dots, (k)_{r_i}\} \forall i, 0 \leq i \leq j - 1$ y escribiremos X_{r_i} en vez de $(X)_{r_i}$.

$\mathfrak{X}_{k,j}$ es la digráfica definida por:

- $V(\mathfrak{X}_{k,j}) = V(CE_{2k}) \cup \bigcup_{i=0}^{j-1} V(r_i).$
- $F(\mathfrak{X}_{k,j}) = F(CE_{2k}) \cup \bigcup_{i=0}^{j-1} F(r_i) \cup \{ \overrightarrow{(k-1)_{r_i} v_k}, \overrightarrow{k_{r_i} v_0}, \overrightarrow{v_0 1_{r_i}} \mid i \in E \} \cup \{ \overrightarrow{(k-1)_{r_x} k_{r_y}} \mid j-1 \geq x > y \geq 0 \}.$

Ejemplos:

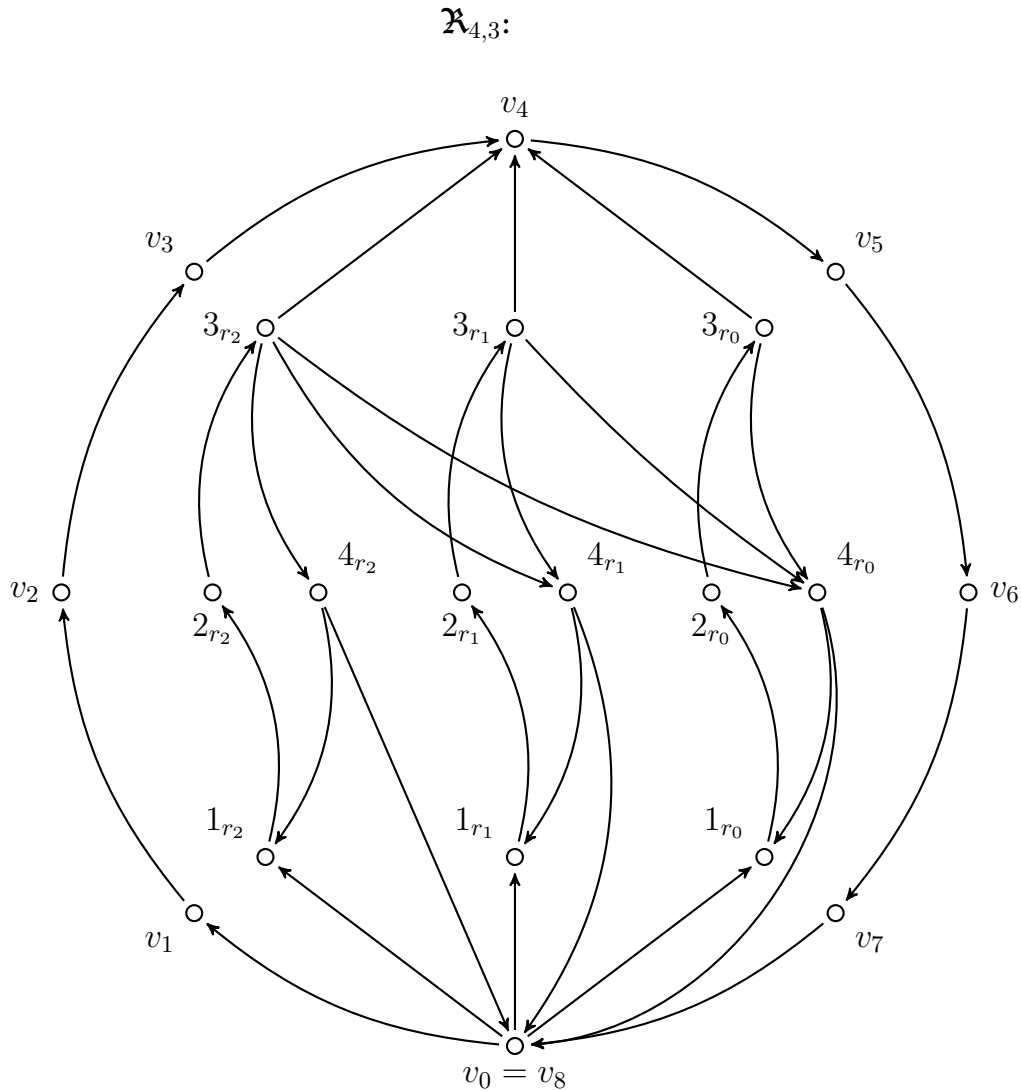
7) Para apreciar la estructura de $\mathfrak{X}_{k,2}$, la dibujamos de forma diferente a la acostumbrada con la finalidad de no encimar los ciclos r_0 y r_1 . Aunque hemos dibujado dos vértices v_0 y v_k , en realidad sólo hay uno de cada uno.



Después veremos que $\mathfrak{X}_{k,2}$ tiene exactamente $k + 2$ k -núcleos.

8) Podemos construir $\mathfrak{A}_{4,3}$ a partir de los ciclos dirigidos CE_8 y r_0, r_1, r_2 .

Para $i = 0, 1, 2$ tenemos las flechas $(v_0, 1_{r_i}), (3_{r_i}, v_4), (4_{r_i}, v_0)$ y $(3_{r_x}, 4_{r_y})$ siempre que $x > y$.



Nótese que $\mathfrak{A}_{k,j}$ es fuertemente conexa pues para todo $i \in \{0, 1, \dots, j - 1\}$ tenemos las flechas $(v_0, 1_{r_i}), ((k - 1)_{r_i}, v_k)$ y (k_{r_i}, v_0) las cuales nos permiten hallar, sin dificultad, un camino dirigido cerrado que contiene a todos los vértices.

Si demostrásemos que tiene exactamente $k + j$ k -núcleos, tendríamos ejemplos de digráficas con exactamente n k -núcleos para cualquier $n \geq 1$.

Probemos primero algunos lemas para demostrar que, efectivamente, $\mathfrak{A}_{k,j}$ tiene $k + j$ k -núcleos.

Lema 4.2.5. Sean $k \geq 3$, $j \geq 2$ y $x \in \{1, 2, \dots, k-2\}$. Supongamos que J es k -núcleo de $\mathfrak{X}_{k,j}$.

Si existe $i \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\}$ tal que $x_{r_i} \in J$, entonces $x_{r_y} \in J$ para cualquier $y \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\}$ y además $J = \{v_x, v_{k+x}, x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_{j-1}}\}$.

Demostración. Sea i tal que $x_{r_i} \in J$.

Argumentos totalmente análogos a los usados en la demostración del teorema 4.2.3 nos permiten concluir que:

- I. $x_{r_i} \in J$ implica que $v_{k+x}, v_x \in J$.
- II. Es imposible que algún vértice w_{r_y} pertenezca a J para algún y y para algún $w \in (\{1, 2, \dots, k-2\} - \{x\})$, pues de lo contrario tendríamos que $v_{k+w}, v_w \in J$, en contradicción a la k -independencia de J .
- III. Es imposible que $(k-1)_{r_y}$ o k_{r_y} pertenezcan a J para algún y . Pues tendríamos que $v_{2k-1}, v_{k-1} \in J$, nuevamente contradiciendo la k -independencia de J .
- IV. Para todo y , $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(x_{r_y}, v_{k+x}) = k = d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(v_{k+x}, x_{r_y})$.

Para cualquier y , $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(x_{r_y}, v_x) = d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(x_{r_y}, (k-1)_{r_y}) + d_{\mathfrak{X}_{k,j}}((k-1)_{r_y}, v_0) + d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(v_0, v_x) = (k-1-x) + 2 + x = k+1$ pues para ir de x_{r_y} a v_x , forzosamente hay que pasar por $(k-1)_{r_y}$ y después hay que pasar por v_0 .

Entonces, por IV y por lo anterior, el conjunto $\{v_x, v_{k+x}\}$ no absorbe a ningún x_{r_y} . Llamamos a esta conclusión V.

Sean $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\}$, $a \neq b$.

Veamos que $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(x_{r_a}, x_{r_b}) \geq k$.

Cualquier $x_{r_a} x_{r_b}$ -trayectoria dirigida necesariamente pasa primero por $(k-1)_{r_a}$, luego pasa por 1_{r_b} y finalmente llega a x_{r_b} , es decir:

$$d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(x_{r_a}, x_{r_b}) = d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(x_{r_a}, (k-1)_{r_a}) + d_{\mathfrak{X}_{k,j}}((k-1)_{r_a}, 1_{r_b}) + d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(1_{r_b}, x_{r_b}).$$

$d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(1_{r_b}, x_{r_b})$ está dada por la trayectoria dirigida $(1_{r_b}, 2_{r_b}, \dots, x_{r_b})$, la cual tiene longitud $x-1$.

Como no hay flechas de $(k-1)_{r_a}$ a 1_{r_b} , $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}((k-1)_{r_a}, 1_{r_b}) \geq 2$.

Es sencillo ver que $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(x_{r_a}, (k-1)_{r_a}) = k-1-x$.

Por lo tanto, para $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\}$ con $a \neq b$, $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(x_{r_a}, x_{r_b}) \geq k$. A esta conclusión la llamamos VI.

Queremos demostrar que para todo $y \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\}$, $x_{r_y} \in J$. Supongamos que existe y tal que $x_{r_y} \notin J$.

De I, II, III, IV, V y VI se sigue que J no $(k-1)$ -absorbe a x_{r_y} , contradiciendo el hecho de que J es k -núcleo.

Por consiguiente $x_{r_y} \in J$ para todo y .

Luego, $\{v_x, v_{k+x}, x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_{j-1}}\} \subset J$.

Además, J ya no puede contener otro vértice pues ya tenemos un vértice de cada ciclo r_y y dos de CE_{2k} . □

Lema 4.2.6. Sean $k \geq 3$, $j \geq 2$, $a, b \in \{0, 1 \dots j - 1\}$, $a \neq b$. Entonces $d_{\mathbf{x}_{k,j}}((k-1)_{r_a}, (k-1)_{r_b}) \geq k$ y $d_{\mathbf{x}_{k,j}}(k_{r_a}, k_{r_b}) \geq k$.

Demostración. Para ir a $(k-1)_{r_b}$ desde $(k-1)_{r_a}$, necesariamente pasamos por 1_{r_b} y sabemos que $d_{\mathbf{x}_{k,j}}(1_{r_b}, (k-1)_{r_b}) = k-2$ pues la $1_{r_b}(k-1)_{r_b}$ -trayectoria dirigida de longitud mínima es $(1_{r_b}, 2_{r_b}, \dots, (k-1)_{r_b})$ que además es la única.

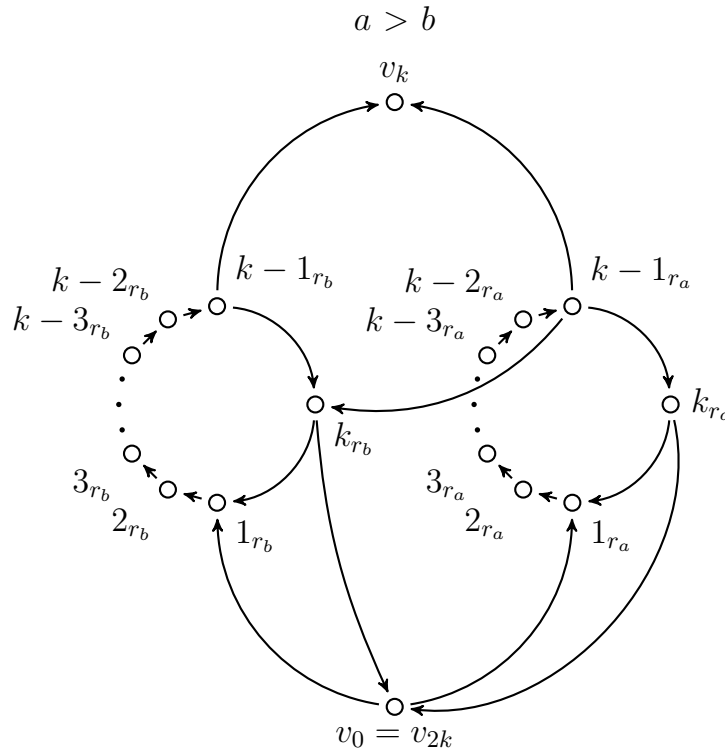
Como no hay flecha de $(k-1)_{r_a}$ a 1_{r_b} , entonces $d_{\mathbf{x}_{k,j}}((k-1)_{r_a}, 1_{r_b}) \geq 2$.

De lo anterior se sigue que:

$d_{\mathbf{x}_{k,j}}((k-1)_{r_a}, (k-1)_{r_b}) = d_{\mathbf{x}_{k,j}}((k-1)_{r_a}, 1_{r_b}) + d_{\mathbf{x}_{k,j}}(1_{r_b}, (k-1)_{r_b}) \geq 2 + k - 2 = k$, para cualesquiera $a, b \in \{0, 1 \dots j - 1\}$, $a \neq b$.

Ahora veamos qué sucede con $d_{\mathbf{x}_{k,j}}(k_{r_a}, k_{r_b})$.

Si $a > b$:



Entonces tenemos la flecha $\overrightarrow{(k-1)_{r_a} k_{r_b}}$. Toda $k_{r_a} k_{r_b}$ -trayectoria dirigida pasa por v_0 o 1_{r_a} .

Si pasa por v_0 , como $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(v_0, k_{r_b}) = k$, tenemos una $k_{r_a}k_{r_b}$ -trayectoria dirigida de longitud mayor a k .

Si pasa por 1_{r_a} , como $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(1_{r_a}, (k-1)_{r_a}) = k-2$ y $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}((k-1)_{r_a}, k_{r_b}) = 1$, tenemos una $k_{r_a}k_{r_b}$ -trayectoria dirigida de longitud k .

Si $b > a$:

Entonces, para ir a k_{r_b} desde k_{r_a} , debemos pasar por 1_{r_b} pues aunque existiera alguna flecha $(k-1)_{r_a}k_{r_z}$, tendríamos que $a > z$, con lo que $b > z$ y entonces $k_{r_b} \neq k_{r_z}$.

Sabemos que $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(1_{r_b}, k_{r_b}) = k-1$ y la trayectoria dirigida más corta de k_{r_a} a 1_{r_b} es $(k_{r_a}, v_0, 1_{r_b})$ de longitud 2.

Luego, toda $k_{r_a}k_{r_b}$ -trayectoria dirigida es de longitud mayor que k .

Por ende $d_{\mathfrak{X}_{k,j}}(k_{r_a}, k_{r_b}) \geq k$, para cualesquiera $a, b \in \{0, 1 \dots j-1\}$, $a \neq b$. \square

Lema 4.2.7. Sean $k \geq 3$ y $j \geq 2$. Supongamos que J es k -núcleo de $\mathfrak{X}_{k,j}$.

Si existe $i \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\}$ tal que $(k-1)_{r_i} \in J$ o $k_{r_i} \in J$, entonces para cualquier $y \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\}$, $(k-1)_{r_y} \in J$ o $k_{r_y} \in J$.

Además, $J = \{v_{k-1}, v_{2k-1}, k_{r_0}, k_{r_1} \dots k_{r_{j-1}}\}$ o $J = \{v_{k-1}, v_{2k-1}, (k-1)_{r_0}, (k-1)_{r_1} \dots (k-1)_{r_M}, k_{r_{M+1}}, k_{r_{M+2}}, \dots, k_{r_{j-1}}\}$ con $M = \max\{y \mid (k-1)_{r_y} \in J\}$.

Demostración. Sea i tal que $(k-1)_{r_i} \in J$ o $k_{r_i} \in J$.

Análogamente a la demostración del teorema 4.2.3, $v_{k-1}, v_{2k-1} \in J$.

Haremos dos casos: $(k-1)_{r_i} \in J$ o $k_{r_i} \in J$.

• Si $(k-1)_{r_i} \in J$:

Sea $M = \max\{y \mid (k-1)_{r_y} \in J\}$.

Entonces $k_{r_m} \notin J$ para todo m , $0 \leq m \leq M$, porque siempre está la flecha $(k-1)_{r_M}k_{r_m}$, también $(k-1)_{r_L} \notin J$ para todo L , $j-1 \geq L > M$, por la elección que hicimos de M .

En vista del lema 4.2.5, $(k-1)_{r_y}$ o k_{r_y} son los únicos vértices de los ciclos r_y que pueden pertenecer a J .

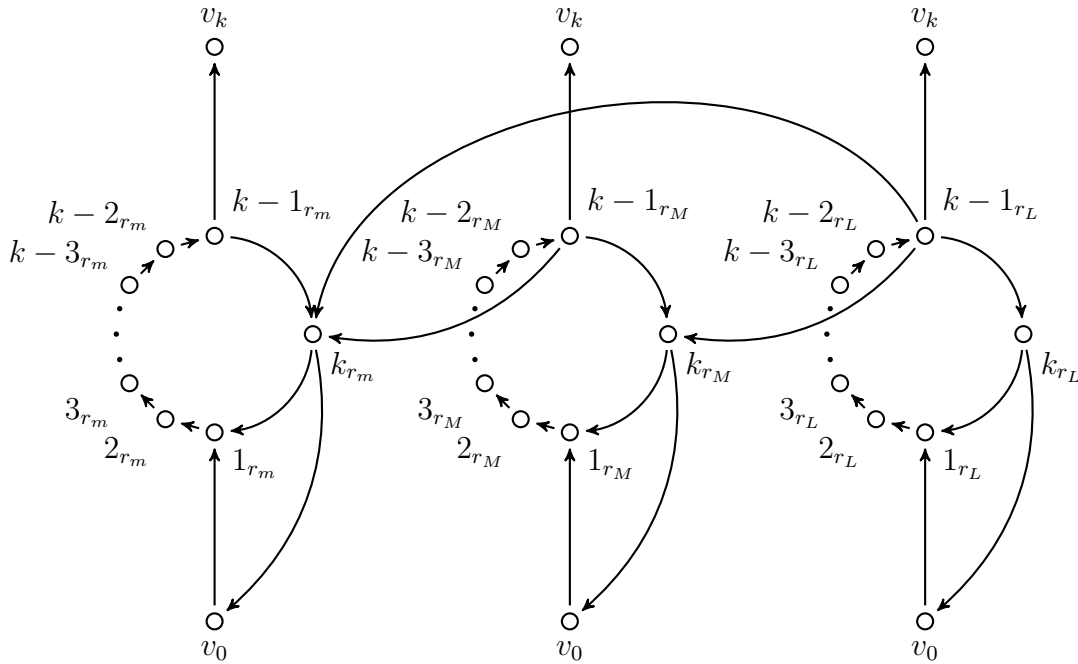
Supongamos que existe $L > M$ tal que $k_{r_L} \notin J$.

Entonces k_{r_L} no es $(k-1)$ -absorbido por v_{k-1} , por v_{2k-1} ni por ningún k_{r_y} (por el lema 4.2.6).

¿Podría ser que k_{r_L} fuese absorbido por $(k-1)_{r_m}$ para algún $m \leq M$?

Supongamos que $a > b$.

Figura 4.1. Aspecto de los ciclos r_L , r_M y r_m con $0 \leq m < M < L \leq j - 1$.



Entonces, $d_{\mathfrak{A}_{k,j}}(k_{r_a}, (k-1)_{r_b}) = k$ pues necesariamente, de k_{r_a} debemos ir a 1_{r_b} y de éste a $(k-1)_{r_b}$, por lo tanto $d_{\mathfrak{A}_{k,j}}(k_{r_a}, (k-1)_{r_b}) = d_{\mathfrak{A}_{k,j}}(k_{r_a}, 1_{r_b}) + d_{\mathfrak{A}_{k,j}}(1_{r_b}, (k-1)_{r_b}) = 2 + k - 2 = k$.

Por lo anterior y debido a la desigualdad $L > M \geq m$, k_{r_L} no es absorbido por $(k-1)_m \forall m \leq M$.

Luego, aunque en J tuviésemos a $(k-1)_m \forall m \leq M$, si $k_{r_L} \notin J$, J no sería $(k-1)$ -absorbente, lo cual es una contradicción pues J es k -núcleo.

Por consiguiente $k_{r_L} \in J$ para todo $L > M$.

Supongamos que $(k-1)_{r_m} \notin J$ para algún $m < M$.

Entonces $(k-1)_{r_m}$ no es $(k-1)$ -absorbido por v_{k-1} , por v_{2k-1} ni por ningún $(k-1)_{r_y}$ (por el lema 4.2.6).

¿Podría ser que $(k-1)_{r_m}$ fuese absorbido por algún k_{r_L} con $L > M > m$?

Supongamos que $a > b$.

Entonces $d_{\mathfrak{A}_{k,j}}((k-1)_{r_b}, k_{r_a}) \geq k$ pues de $(k-1)_{r_b}$ a k_{r_a} sólo se puede llegar mediante algún $(k-1)_{r_z}$, $z \geq a$, y por el lema 4.2.6, $d_{\mathfrak{A}_{k,j}}((k-1)_{r_b}, (k-1)_{r_z}) \geq k$.

Como $L > m$, tenemos que $(k-1)_{r_m}$ no es absorbido por $k_{r_L} \forall L > m$.

Así, aunque $k_{r_L} \in J$ para todo $L > M$, si $(k-1)_{r_m} \notin J$, J no sería $(k-1)$ -absorbente, contradiciendo el hecho de que J es k -núcleo.

Por lo tanto $(k-1)_{r_m} \in J$ para todo $m < M$.

En resumen, si $(k-1)_{r_M} \in J$, siendo $M = \max\{y \mid (k-1)_{r_y} \in J\}$, entonces $k_{r_L} \in J$ para todo $L > M$ y $(k-1)_{r_m} \in J$ para cada $m \leq M$, es decir, $\{v_{k-1}, v_{2k-1}, (k-1)_{r_0}, (k-1)_{r_1} \dots (k-1)_{r_M}, k_{r_{M+1}}, k_{r_{M+2}}, \dots, k_{r_{j-1}}\} \subset J$. Además, J no puede contener otro vértice porque ya contiene uno de cada ciclo r_y y dos de CE_{2k} .

- Si $k_{r_i} \in J$:

Sea $N = \min\{y \mid k_{r_y} \in J\}$.

Entonces $(k-1)_{r_L} \notin J$ para todo L con $j-1 \geq L > N$ pues tenemos la flecha $(k-1)_{r_L} k_{r_N}$, y $k_{r_m} \notin J$ para cada m tal que $N > m \geq 0$ por la cualidad de N como mínimo.

Nuevamente, en vista del lema 4.2.5, $(k-1)_{r_y}$ o k_{r_y} son los únicos vértices de los ciclos r_y que pueden pertenecer a J .

Si hubiese un y tal que $k_{r_y} \notin J$, entonces k_{r_y} no sería $(k-1)$ -absorbido por v_{k-1} ni por v_{2k-1} ni por ningún k_{r_z} (por el lema 4.2.6).

Por lo tanto, si $(k-1)_{r_y} \notin J$ para todo y , entonces $k_{r_y} \in J$ para todo y pues descartando a los vértices $(k-1)_{r_y}$, J ya sólo puede contener a los vértices k_{r_y} y si alguno de ellos faltase, J no sería k -núcleo.

Concluimos que $J = \{v_{k-1}, v_{2k-1}, k_{r_0}, k_{r_1} \dots k_{r_{j-1}}\}$, si $\forall y (k-1)_{r_y} \notin J$.

Sabiendo esto, podemos suponer que existe $M \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ tal que $(k-1)_{r_M} \in J$ y además, $M = \max\{y \mid (k-1)_{r_y} \in J\}$.

Es obvio que $M \neq N$.

Ya sabemos que $M \not\geq N$ pues $(k-1)_{r_L} \notin J$ para todo L y $j-1 \geq L > N$.

Por ende $M < N$.

Es fácil demostrar que $M = N - 1$ pues si M fuera menor que $N - 1$, entonces, por el caso anterior, tendríamos que $k_{N-1} \in J$ contradiciendo que N es mínimo.

Se sigue que $M = N - 1$.

Por el caso anterior, $k_{r_L} \in J$ para todo $L > M$ y $(k-1)_{r_m} \in J \forall m \leq M$.

Por lo tanto, si existe i tal que $(k-1)_{r_i} \in J$ o $k_{r_i} \in J$, entonces para todo y , $(k-1)_{r_y} \in J$ o $k_{r_y} \in J$. \square

Teorema 4.2.8. Sean $k \geq 3$, $j \geq 2$. La digráfica $\mathfrak{X}_{k,j}$ posee exactamente $(k+j)$ k -núcleos.

Demostración. Sea J un k -núcleo de $\mathfrak{X}_{k,j}$.

Entonces $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\} J \cap V(r_i) = \emptyset$ o $\exists i \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\}$ tal que $J \cap V(r_i) \neq \emptyset$.

Si sucede que $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\} J \cap V(r_i) = \emptyset$:

Entonces, como J es $(k-1)$ -absorbente, existen vértices del ciclo CE_{2k} que pertenecen a J .

Análogamente al teorema 4.2.3, tenemos que J sólo contiene a un par de vértices de CE_{2k} y también que J no puede ser igual a $\{v_w, v_{k+w}\}$ para algún $w \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

Por lo tanto $J = \{v_0, v_k\}$, que ciertamente es k -núcleo de $\mathfrak{X}_{k,j}$.

Si sucede que $\exists i \in \{0, 1, 2, \dots, j-1\}$ tal que $J \cap V(r_i) \neq \emptyset$:

Entonces existe $x_{r_i} \in J$.

Si $x \in \{1, 2, 3 \dots k-2\}$:

Por el lema 4.2.5, $\{v_x, v_{k+x}, x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_{j-1}}\} = J$.

Por ende, hay un k -núcleo de la forma $\{v_x, v_{k+x}, x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_{j-1}}\}$ por cada $x \in \{1, 2, 3 \dots k-2\}$.

Si $x \notin \{1, 2, 3 \dots k-2\}$, entonces $x = k-1$ o $x = k$.

Si $(k-1)_{r_i} \in J$:

Entonces fijémonos en $M = \max\{y \mid (k-1)_{r_y} \in J\}$.

Del lema 4.2.7 concluimos que $J = \{v_{k-1}, v_{2k-1}, (k-1)_{r_0}, (k-1)_{r_1}, \dots, (k-1)_{r_M}, k_{r_{M+1}}, k_{r_{M+2}}, \dots, k_{r_{j-1}}\}$.

Como M tiene j posibilidades, es decir, $M = 0$ o $M = 1$ o \dots $M = j-1$, tenemos un k -núcleo por cada una de ellas.

Si $k_{r_i} \in J$:

Sea $N = \min\{y \mid k_{r_y} \in J\}$.

Si $N = 0$, entonces no hay ningún $(k-1)_{r_y} \in J$, del lema 4.2.7 tenemos que $J = \{v_{k-1}, v_{2k-1}, k_{r_0}, k_{r_1}, \dots, k_{r_{j-1}}\}$.

Si $N > 0$, entonces tenemos algún $(k-1)_{r_y} \in J$ y también $M = N-1$ siendo $M = \max\{y \mid (k-1)_{r_y} \in J\}$ y tenemos que $J = \{v_{k-1}, v_{2k-1}, (k-1)_{r_0}, (k-1)_{r_1}, \dots, (k-1)_{r_M}, k_{r_{M+1}}, k_{r_{M+2}}, \dots, k_{r_{j-1}}\}$.

Resumiendo:

Tenemos un único k -núcleo que no tiene vértices de los ciclos r_y , el k -núcleo $\{v_0, v_k\}$.

Cuando hay vértices $x_{r_i} \in J$ con $x \in \{1, 2, 3 \dots k-2\}$:

Tenemos $(k-2)$ k -núcleos de la forma $\{v_x, v_{k+x}, x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_{j-1}}\}$.

Cuando no hay vértices x_{r_i} que pertenezcan a J :

Si ningún $(k - 1)_{r_y}$ pertenece a J , es decir, si no existe $M = \max\{y \mid (k - 1)_{r_y} \in J\}$, tenemos el k -núcleo $\{v_{k-1}, v_{2k-1}, k_{r_0}, k_{r_1}, \dots, k_{r_{j-1}}\}$.

Tenemos j k -núcleos $\{v_{k-1}, v_{2k-1}, (k - 1)_{r_0}, (k - 1)_{r_1}, \dots, (k - 1)_{r_M}, k_{r_{M+1}}, k_{r_{M+2}}, \dots, k_{r_{j-1}}\}$ si existe $M = \max\{y \mid (k - 1)_{r_y} \in J\}$, $M = 0, 1, 2, \dots, j - 1$.

Y es imposible que haya más k -núcleos.

Luego, $\mathfrak{X}_{k,j}$ posee exactamente $1 + (k - 2) + 1 + j = (k + j)$ k -núcleos. \square

4.3. Más ejemplos

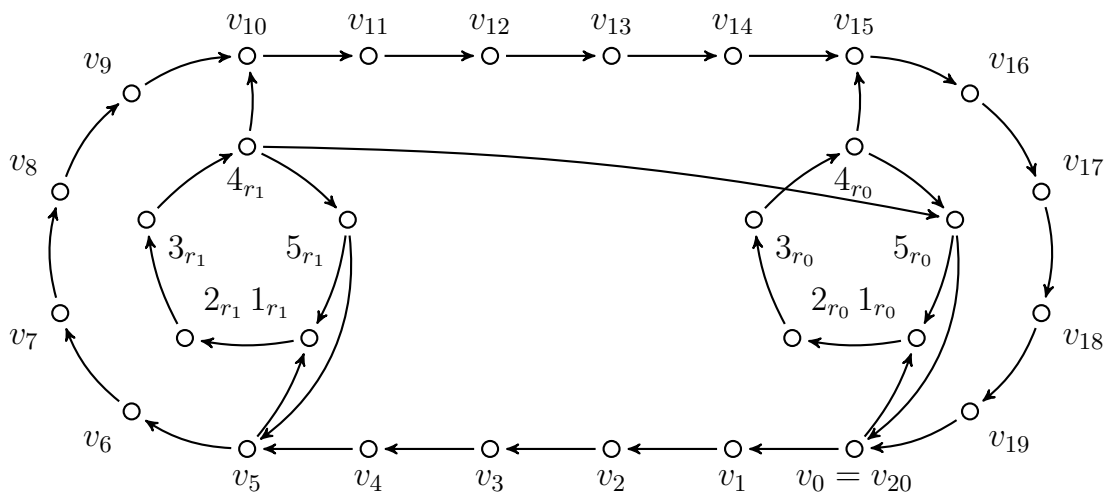
Ahora que conocemos digráficas con exactamente n k -núcleos, es natural preguntarnos si los ejemplos mostrados son los únicos con tal característica.

Difícilmente son los únicos. Pensemos en $\mathfrak{X}_{k,j}$.

$\mathfrak{X}_{k,j}$ tiene exactamente $k + j$ k -núcleos y en gran medida esto se debe a que, de cierta forma, si J es un k -núcleo y contiene algún vértice de los ciclos r_i , entonces están totalmente determinados los otros vértices que pertenecen a J .

Observemos la siguiente digráfica.

$\mathfrak{X}_{5,2}$:



Sean $k = 5$, $j = 2$ y $x \in \{1, 2, 3, 4 = k - 1\}$.

Sea T_{ik} la trayectoria dirigida $(v_{ik+1}, v_{ik+2}, v_{ik+3}, v_{ik+4})$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Llamaremos \bar{v}_0 a cualquier vértice que pertenezca a $\{v_z \mid z \equiv 0 \pmod k\}$ y en general \bar{v}_w a cualquier vértice que pertenezca a $\{v_z \mid z \equiv w \pmod k\}$.

Sea J un 5-núcleo de $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_{5,2}$.

I Es fácil ver que si $v_0 \in J$, entonces $v_5 \in J$; si $v_5 \in J$, $v_{10} \in J$; si $v_{10} \in J$, $v_{15} \in J$ y si $v_{15} \in J$, $v_{20} = v_0 \in J$.

Es decir, si en J está algún $\overline{v_0}$, entonces contiene a todos los $\overline{v_0}$ y sólo a ellos.

II Si J es un k -núcleo y $\exists i$ tal que $J \cap V(T_{ik}) = \emptyset$, para absorber a v_{ik+1} , necesariamente $v_{(i+1)k} \in J$ y por I, J es el conjunto que contiene a todos los $\overline{v_0}$.

III También, si $\exists i$ tal que $J \cap V(T_{ik}) \neq \emptyset$, entonces $v_{(i+1)k} \notin J$ y por I, sabemos que J no contiene a ningún $\overline{v_0}$.

IV Se sigue de II y III que si $J \cap V(T_{ik}) \neq \emptyset$ para algún i , entonces para todo i $J \cap V(T_{ik}) \neq \emptyset$.

V Si $J \cap V(T_{ik}) \neq \emptyset$ para todo i entonces J contiene a todos los vértices $\overline{v_w}$ para algún $w \in \{1, 2, 3, 4 = k - 1\}$.

Para convencernos de lo anterior, observemos que:

J sólo puede tener un vértice de cada trayectoria T_{ik} .

La longitud del ciclo dirigido $S = (v_0, v_1, \dots, v_{2jk} = v_0)$ es congruente con cero módulo k .

Como J es k -independiente, no pueden pertenecer a J dos vértices $\overline{v_w}, \overline{v_z}$ con $z \not\equiv w \pmod{k}$.

VI Si tenemos en J algún x_{r_z} , entonces $v_{zk} \notin J$ pues $(v_{zk}, 1_{r_z}, 2_{r_z}, \dots, k_{r_z}, v_{zk})$ es un ciclo de longitud $k + 1$ y por II, $J \cap V(T_{ik}) \neq \emptyset$ para todo i .

VII Si algún x_{r_z} pertenece a J , entonces fijándonos en la parte superior de la digráfica $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_{5,2}$, tenemos que en J no puede haber vértices $\overline{v_0}$, ni $\overline{v_1}, \dots$ ni $\overline{v_{x-1}}$; y fijándonos en la parte inferior, en J no puede haber vértices $\overline{v_{x+1}}$, ni $\overline{v_{x+2}}, \dots$ ni $\overline{v_{k-1}}$.

Por V y VI, si $x_{r_z} \in J$ con $x \in \{1, 2, 3, 4 = k - 1\}$, entonces J debe contener a todos los $\overline{v_x}$ pues $J \cap V(T_{ik}) \neq \emptyset$ para todo i .

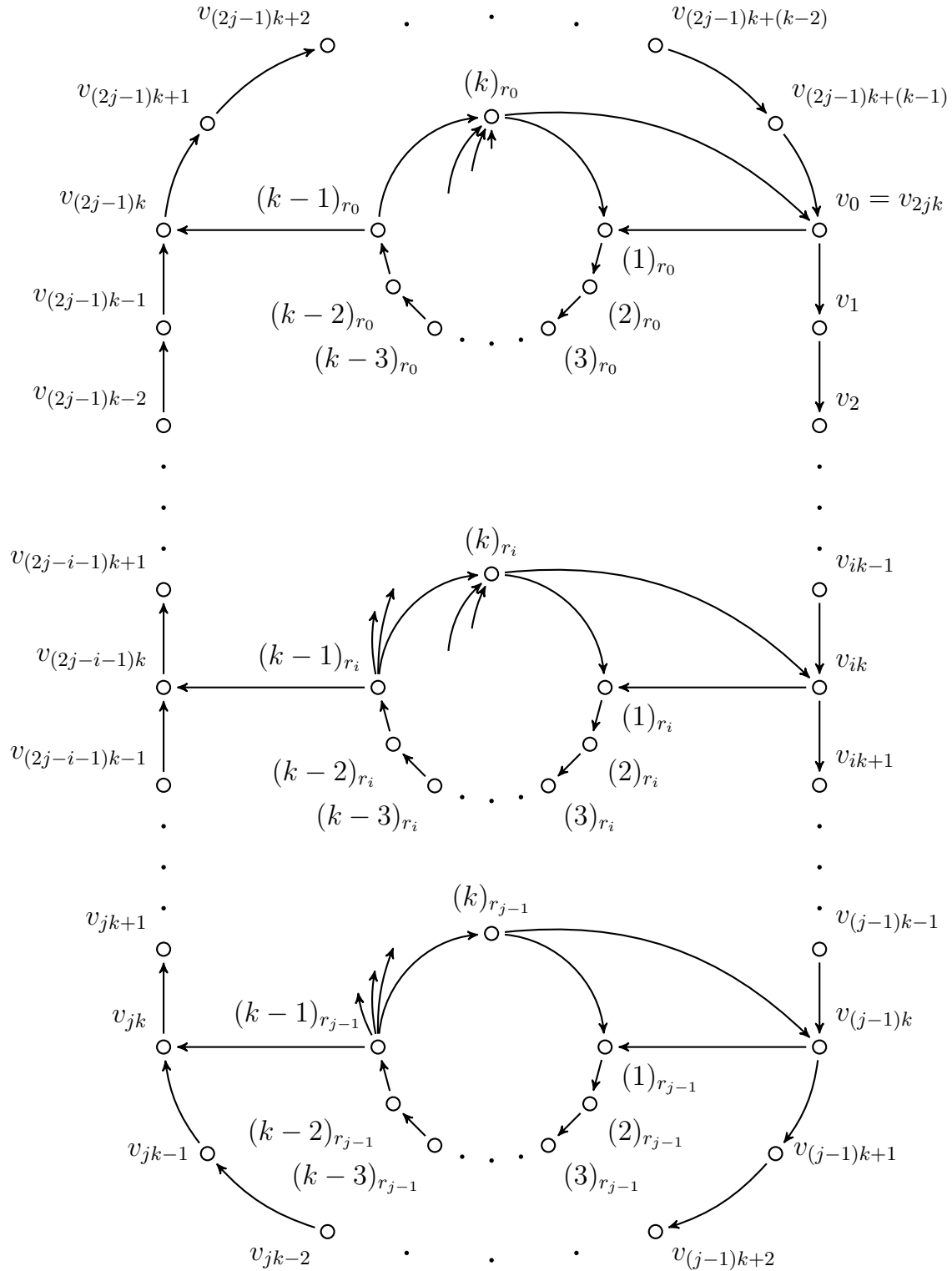
VIII Podemos demostrar que si $k_{r_z} \in J$, entonces J contiene a todos los $\overline{v_{k-1}}$.

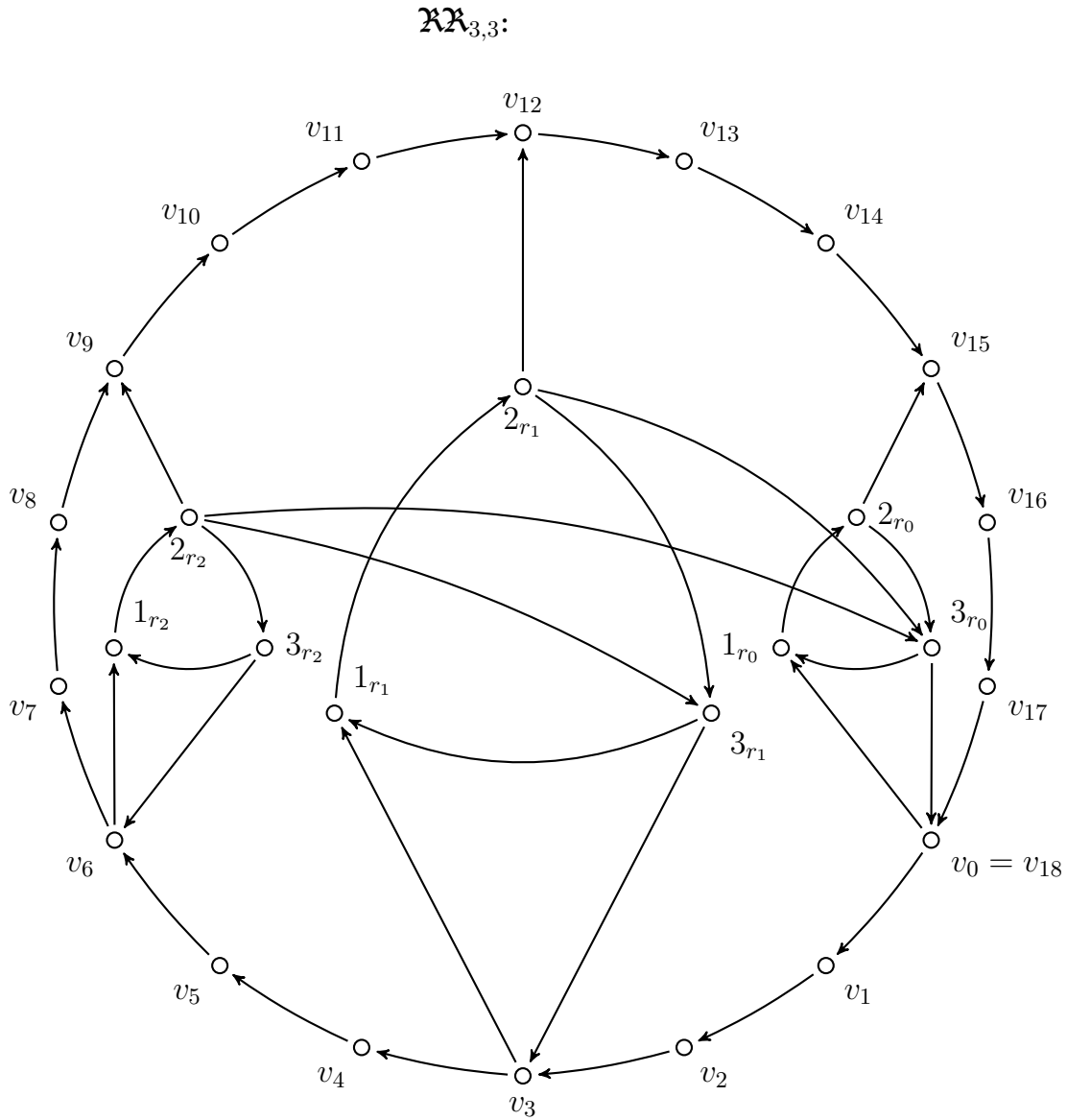
También podemos demostrar que los vértices de $\overline{v_x}$ no $(k - 1)$ -absorben a x_{r_z} para cualquier $z \in \{0, 1 = j - 1\}$.

Podríamos seguir probando resultados similares a los de $\mathfrak{X}_{5,2}$ para demostrar que $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_{5,2}$ tiene exactamente siete 5-núcleos ($7 = k + 2 = 5 + 2$).

En la siguiente página hay un diagrama de la digráfica $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_{k,j}$, $k \geq 3$, $j \geq 2$. Al igual que en $\mathfrak{X}_{k,j}$ siempre que $x > y$, tendremos la flecha $((k - 1)_{r_x}, k_{r_y})$.

Se invita al lector a demostrar que $\mathfrak{X}_{k,j}$ tiene exactamente $(k + j)$ k -núcleos. De hecho, basta con demostrar lemas análogos a los demostrados para $\mathfrak{X}_{k,j}$.





Así tenemos otros ejemplos que poseen exactamente $(k + j)$ k -núcleos con $j \geq 2$. Todavía nos hacen falta más ejemplos con $k + 1, k, \dots$, un k -núcleo, pero en vez de pensar en dar algunos más, veamos cómo se puede dar una infinidad de ejemplos con exactamente n núcleos utilizando los que ya tenemos.

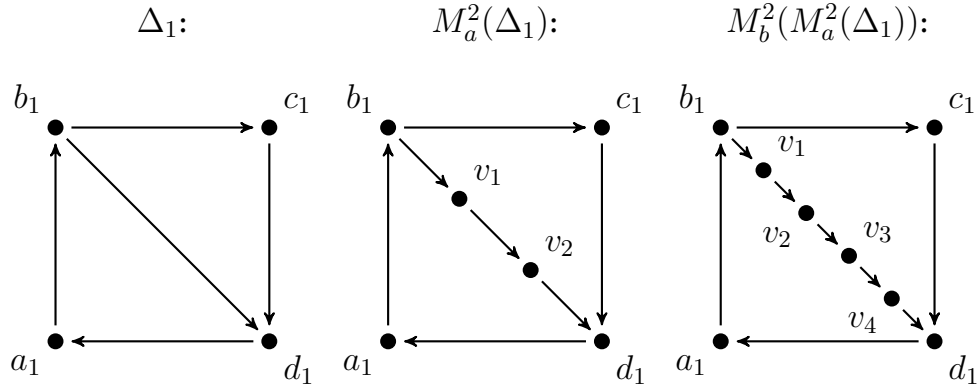
Matúš Harminc hizo lo siguiente para $k = 2$.

Definición 4.3.1. Sea D una digráfica tal que $F(D) \neq \emptyset$ y sea $a = \overrightarrow{a_1 a_2} \in F(D)$. La digráfica $M_a^2(D)$ está definida por $V(M_a^2(D)) = V(D) \cup \{v_1, v_2\}$, $v_1, v_2 \notin V(D)$ y $F(M_a^2(D)) = F(D) - \{a\} \cup \{\overrightarrow{a_1 v_1}, \overrightarrow{v_1 v_2}, \overrightarrow{v_2 a_2}\}$.

Ejemplos:

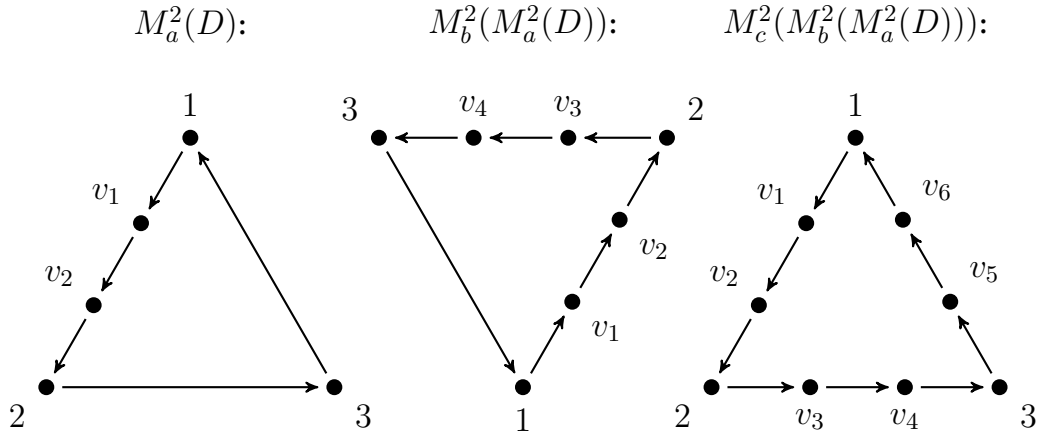
- 1) Sea $D = \Delta_1$ y $a = (b_1, d_1) \in F(\Delta_1)$. Entonces se puede construir $M_a^2(\Delta_1)$.
 Sea $b = (v_2, d_1) \in F(M_a^2(\Delta_1))$.

Para construir $M_b^2(M_a^2(\Delta_1))$ se necesita un par de vértices que no pertenezca a $M_a^2(\Delta_1)$. Utilizaremos v_3 y v_4 .



Obsérvese que $\{a_1, c_1\}$, $\{a_1, c_1, v_2\}$ y $\{a_1, c_1, v_2, v_4\}$ son los únicos núcleos de Δ_1 , $M_a^2(\Delta_1)$ y $M_b^2(M_a^2(\Delta_1))$ respectivamente.

- 2) Sea D el ciclo dirigido $(1, 2, 3, 1)$. $a = (1, 2)$, $b = (2, 3)$ y $c = (3, 1)$.



$v_1, v_2 \notin V(D)$; $v_3, v_4 \notin V(M_a^2(D))$; $v_5, v_6 \notin V(M_b^2(M_a^2(D)))$.

Las digráficas D , $M_a^2(D)$, $M_b^2(M_a^2(D))$ y $M_c^2(M_b^2(M_a^2(D)))$ son ciclos de longitud impar y no tienen núcleo.

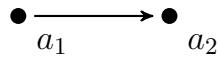
En los ejemplos se aprecia que la digráfica $M_a^2(D)$ se obtiene de D reemplazando la flecha a por una trayectoria dirigida de longitud 3.

En el segundo ejemplo, ninguna de las digráficas obtenidas a partir del ciclo $(1, 2, 3, 1)$ tiene núcleo. Esto no es coincidencia pues $M_a(D)$ tiene tantos núcleos como D .

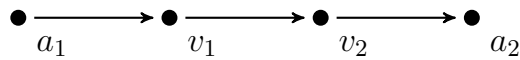
Lema (Harminc) 4.3.1. *Sea D una digráfica tal que $F(D) \neq \emptyset$ y sea $a = (a_1, a_2)$ un elemento de $F(D)$. Entonces el número de núcleos de D es igual al número de núcleos de $M_a^2(D)$.*

Demostración. Sean \mathcal{K} y \mathcal{Q} los conjuntos de todos los núcleos de D y de $M_a^2(D)$, respectivamente.

En D :



En $M_a^2(D)$:



Sea N un núcleo de D y supongamos que $a_2 \in N$.

Sea $N_1 = N \cup \{v_1\}$.

Afirmación. N_1 es independiente en $M_a^2(D)$.

Por definición, en $M_a^2(D)$ no se añade ninguna flecha entre elementos de $V(D)$.

Por lo tanto, N es independiente en $M_a^2(D)$.

De N hacia v_1 no hay ninguna flecha pues la única flecha que llega a v_1 es $\overrightarrow{a_1 v_1}$ y como $a_2 \in N$, se sigue que $a_1 \notin N$.

De v_1 hacia N no hay ninguna flecha pues la única flecha que sale de v_1 es $\overrightarrow{v_1 v_2}$ y como $v_2 \notin V(D)$, se sigue que $v_2 \notin N$.

Por consiguiente N_1 es independiente en $M_a^2(D)$.

Afirmación. N_1 es absorbente en $M_a^2(D)$.

Sea $x \in V(M_a^2(D)) - N_1 = [V(D) \cup \{v_1, v_2\}] - [N \cup \{v_1\}]$.

Entonces $x \in V(D) - N$ o $x = v_2$.

Sabemos que, para todo $x \in V(D) - N$, existe $y \in N \subset N_1$ tal que y absorbe a x pues N es núcleo de D y también sabemos que v_2 es absorbido por $v_1 \in N_1$.

Por lo tanto N_1 es absorbente en $M_a^2(D)$.

Sigamos pensando que N es núcleo de D pero ahora supongamos que $a_2 \notin N$.

Sea $N_2 = N \cup \{v_2\}$.

Afirmación. N_2 es independiente en $M_a^2(D)$.

Basta con probar que no hay flechas de N hacia v_2 ni de v_2 hacia N .

De N hacia v_2 no hay flechas pues la única flecha que llega a v_2 es $\overrightarrow{v_1 v_2}$ y $v_1 \notin N$ pues $v_1 \notin V(D)$.

De v_2 hacia N no hay flechas pues la única flecha que sale de v_2 es $\overrightarrow{v_2 a_2}$ y supusimos que $a_2 \notin N$.

Por lo antes dicho, N_2 es independiente en $M_a^2(D)$.

Afirmación. N_2 es absorbente en $M_a^2(D)$.

Sea $x \in V(M_a^2(D)) - N_2$.

Entonces $x \in V(D) - N$ o $x = v_1$.

Sabemos que v_1 es absorbido por v_2 y como N es núcleo de D , si x pertenece a $V(D) - N$, entonces existe $y \in N \subset N_2$ tal que y absorbe a x .

Por ende N_2 es absorbente en $M_a^2(D)$.

Definimos la función $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{Q}$ como sigue:

$$f(N) = \begin{cases} N \cup \{v_1\} & \text{si } a_2 \in N, \\ N \cup \{v_2\} & \text{si } a_2 \notin N. \end{cases}$$

Veamos que f es biyectiva.

Sean A y B son núcleos de D , con $A \neq B$, entonces podemos suponer que existe $w \in A$ tal que $w \notin B$.

$f(A)$ es la unión de A con $\{v_1\}$ o con $\{v_2\}$, $f(B)$ es la unión de B con $\{v_1\}$ o con $\{v_2\}$ y como $w \neq v_1, v_2$ porque $w \in V(D)$, se sigue que $w \in f(A)$ y $w \notin f(B)$. Por lo tanto $f(A) \neq f(B)$.

Por consiguiente f es inyectiva.

Sea M un núcleo de $M_a^2(D)$. Entonces $a_2 \in M$ o $a_2 \notin M$.

Si $a_2 \in M$, entonces $v_2 \notin M$ y como v_2 es el único que absorbe a v_1 , se sigue que $v_1 \in M$ y que $a_1 \notin M$.

Sea $N = M - \{v_1\}$. Probemos que N es núcleo de D .

N es independiente en $M_a^2(D)$ pues M lo es. $N \subset V(D)$ ya que, por construcción de N , $v_2 \notin N$ y $v_1 \notin N$.

No hay forma de que N no sea independiente en D , pues en $M_a^2(D)$ tenemos todas las flechas de D excepto a , pero a no afecta la independencia de N pues $a_2 \in N$ porque $a_2 \in M$ y $a_1 \notin N$ porque $a_1 \notin M$.

Así, N es independiente en D .

La absorbencia de N en D es fácil de verificar pues M es absorbente en $M_a^2(D)$ y al eliminar a v_1 , el único vértice de $V(D)$ que podría no ser absorbido por N es a_1 pero como ya hemos dicho que $a_2 \in N$, entonces a_1 es absorbido por a_2 en D .

Por lo tanto, N es núcleo de D y además $f(N) = N \cup \{v_1\} = M$.

Ahora supongamos que $a_2 \notin M$, entonces $v_2 \in M$ y $v_1 \notin M$.

Sea $N = M - \{v_2\}$. Probemos que N es núcleo de D .

Que N es independiente en D , se debe a que M lo es en $M_a^2(D)$ y la flecha $\overrightarrow{a_1 a_2}$ no causa conflicto pues $a_2 \notin N$.

N es absorbente en D pues todos los vértices de D que no pertenecen a M , son absorbidos por elementos de M y de no ser por v_2 , M estaría totalmente contenido en $V(D)$.

Luego, N es núcleo de D y $f(N) = N \cup \{a_2\} = M$

Por lo tanto, para cada núcleo M de $M_a^2(D)$, existe un núcleo N , de D , tal que $f(N) = M$.

Por consiguiente f es suprayectiva.

Entonces, f es biyectiva y hay tantos núcleos en D como en $M_a^2(D)$. □

El lema anterior nos permite construir una infinidad de digráficas con exactamente n núcleos. Podemos tomar una flecha $z = (x, y)$ de la digráfica $D_0 = \Delta_n$ para obtener $D_1 = M_z^2(\Delta_n)$ y proceder definiendo $D_m = M_{\overrightarrow{v_i v_j}}^2(D_{m-1})$ donde $\overrightarrow{v_i v_j}$ es la flecha que une a los vértices v_i, v_j tales que no pertenecen a $V(D_{m-2})$, es decir, los vértices que se añadieron para hacer D_{m-1} .

Generalicemos el lema anterior para los k -núcleos.

Definición 4.3.2. Sean D una digráfica con $F(D) \neq \emptyset$, $a = \overrightarrow{a_1 a_2} \in F(D)$ y $k \geq 3$. La digráfica $M_a^k(D)$ está dada por:

- $V(M_a^k(D)) = V(D) \cup \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, $w_1, w_2, \dots, w_k \notin V(D)$.
- $F(M_a^k(D)) = F(D) - \{a\} \cup \{\overrightarrow{a_1 w_1}, \overrightarrow{w_k a_2}\} \cup \{\overrightarrow{w_i, w_{i+1}} \mid 1 \leq i \leq k-1\}$.

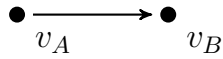
Justo como $M_a^2(D)$ se obtiene de D reemplazando la flecha a por una trayectoria dirigida de longitud 3, $M_a^k(D)$ se obtiene de D sustituyendo a por una trayectoria dirigida de longitud $k+1$.

Lema 4.3.2. Sean D una digráfica tal que $F(D) \neq \emptyset$, $k \geq 2$ y $a = (v_A, v_B)$ un elemento de $F(D)$ con $d_D(v_B, v_A) \geq k - 1$.

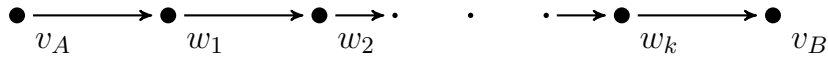
D y $M_a^k(D)$ tienen el mismo número de k -núcleos.

Demostración. Sean \mathcal{K} y \mathcal{Q} los conjuntos de todos los k -núcleos de D y de $M_a^k(D)$ respectivamente.

En D :



En $M_a^k(D)$:



Observemos que $d_D(v_B, v_A) \geq k - 1$ si y sólo si $d_{M_a^k(D)}(v_B, v_A) \geq k - 1$.

Sean J un k -núcleo de D y $N = d_D(v_B, J) + 1$ ³.

Sea $J_N = J \cup \{w_N\}$.

Probaremos que J_N es k -núcleo de $M_a^k(D)$.

Afirmación. J_N es k -independiente en $M_a^k(D)$.

J es k -independiente en $M_a^k(D)$ porque lo es en D y, al eliminar la flecha a y cambiarla por la trayectoria dirigida $(v_A, w_1, w_2, \dots, w_k, v_B)$, las trayectorias dirigidas entre vértices de D incrementaron su longitud o se mantuvieron sin cambios. Por lo tanto si $x, y \in J$ y $x \neq y$, $d_{M_a^k(D)}(x, y) \geq k$.

Ahora hay que ver $d_{M_a^k(D)}(J, w_N)$ y $d_{M_a^k(D)}(w_N, J)$.

Tenemos que w_N, w_{N+1} ⁴, $w_{N+2}, \dots, w_k \notin J \subset V(D)$.

Entonces, $d_{M_a^k(D)}(w_N, J) = d_{M_a^k(D)}(w_N, v_B) + d_{M_a^k(D)}(v_B, J)$.

Sabemos que $d_{M_a^k(D)}(w_N, v_B) = k + 1 - N$ y también que $d_{M_a^k(D)}(v_B, J) = d_D(v_B, J) = N - 1$.

Por consiguiente $d_{M_a^k(D)}(w_N, J) = k$.

Sea $j \in J \subset V(D)$ tal que $d_D(v_B, j) = d_D(v_B, J) = N - 1$.

³Recuérdese que si $X \subset V(D)$ y $x \in V(D)$, entonces $d_D(x, X) = \min_{y \in X} \{d_D(x, y)\}$ y en particular $d_D(x, X) = 0$ siempre que x pertenezca a X .

⁴Cuando $N = k$, definimos $w_{N+1} = v_B$.

Sabemos que $d_D(j', j) \geq k$ para cualquier $j' \in J$, $j' \neq j$. Para ir de j' a w_N (o de j a w_N) en $M_a^k(D)$, necesariamente hay que pasar por v_A y cualquier $j'v_A$ -trayectoria dirigida (o cualquier qv_A -trayectoria dirigida) en $M_a^k(D)$ utiliza sólo flechas de D .

Por lo tanto $d_{M_a^k(D)}(j', w_N) = d_D(j', v_A) + d_{M_a^k(D)}(v_A, w_N)$.

Sabemos que $d_{M_a^k(D)}(v_A, w_N) = N$.

Como $d_D(v_A, j) \leq d_D(v_A, v_B) + d_D(v_B, j) = 1 + N - 1 = N$ y $d_D(j', j) \geq k$, se sigue que $d_D(j', v_A) \geq k - N$ pues toda trayectoria dirigida de j' a j tiene longitud mayor o igual que k , lo cual implica que todo camino dirigido de j' a j tiene longitud mayor o igual que k y si hubiese una trayectoria dirigida de longitud menor que $k - N$ de j' a v_A , tendríamos un camino dirigido de longitud menor que k de j' a j .

Por lo anterior, $\forall j' \in J$, $j' \neq j$, $d_{M_a^k(D)}(j', w_N) \geq k - N + N = k$.

Tenemos que $d_{M_a^k(D)}(j, v_A) = d_D(j, v_A)$ y $d_D(v_B, j) = N - 1$.

Cuando $j \neq v_A$:

Como $d_D(v_B, j) = N - 1$ y, por hipótesis, $d_D(v_B, v_A) \geq k - 1$, se sigue que $d_D(j, v_A) \geq k - N$.

Por ende $d_{M_a^k(D)}(j, v_A) \geq k - N$

Así, $d_{M_a^k(D)}(j, w_N) = d_{M_a^k(D)}(j, v_A) + d_{M_a^k(D)}(v_A, w_N) \geq k - N + N = k$.

Cuando $j = v_A$:

Entonces, de $d_D(v_B, j) = N - 1$ y $d_D(v_B, v_A) \geq k - 1$ podemos concluir que $N \geq k$ y más aún, que $N = k$.

De esta manera, tenemos que $d_{M_a^k(D)}(j, w_N) = d_{M_a^k(D)}(v_A, w_N) = k$.

Por consiguiente $d_{M_a^k(D)}(J, w_N) \geq k$.

Hemos probado que J_N es k -independiente en $M_a^k(D)$.

Afirmación. J_N es $(k - 1)$ -absorbente en $M_a^k(D)$.

J es $(k - 1)$ -absorbente en D , lo cual implica que $\forall x \in V(D) - J$ existe $y \in J$ tal que $d_D(x, y) \leq k - 1$.

Sea $x \in V(D) - J$. Entonces existe una xJ -trayectoria dirigida en D , de longitud menor o igual que $k - 1$.

Si tal trayectoria dirigida no utiliza la flecha a , entonces esa misma trayectoria dirigida es también una trayectoria dirigida de $M_a^k(D)$ y se sigue que x es absorbido por algún $y \in J \subset J_N$.

Si la xJ -trayectoria dirigida antes mencionada forzosamente utiliza la flecha a , entonces $d_D(x, J) = d_D(x, v_A) + d_D(v_A, v_B) + d_D(v_B, J) \leq k - 1$.

Luego, $d_D(x, v_A) + 1 + N - 1 \leq k - 1$ y entonces $d_D(x, v_A) \leq k - 1 - N$.

Como $d_D(x, v_A) = d_{M_a^k(D)}(x, v_A)$, entonces $d_{M_a^k(D)}(x, w_N) \leq k - 1 - N + N = k - 1$ pues $d_{M_a^k(D)}(v_A, w_N) = N$ y se sigue que x es absorbido por $w_N \in J_N$.

Los vértices w_1, w_2, \dots, w_{N-1} ⁵ son absorbidos por w_N pues $N \leq k$.

Nuevamente, sea $j \in J \subset V(D)$ tal que $d_D(v_B, j) = d_D(v_B, J) = N - 1$.

Los vértices $w_k, w_{k-1}, \dots, w_{N+1}$ son $(k - 1)$ -absorbidos por j en $M_a^k(D)$ porque $d_{M_a^k(D)}(w_{N+1}, v_B) = k - N$ y $d_{M_a^k(D)}(v_B, j) = N - 1$.

Por consiguiente J_N es $(k - 1)$ -absorbente en $M_a^k(D)$.

Concluimos que J_N es k -núcleo de $M_a^k(D)$.

Definimos la función $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{Q}$ como sigue:

$$f(J) = J \cup \{w_N\}, N = d_D(v_B, J) + 1.$$

f es inyectiva pues si $J', J'' \in \mathcal{K}$, $J' \neq J''$, existe $u \in J'$ tal que $u \notin J''$ y así, $f(J') \neq f(J'')$.

Veamos que f es suprayectiva.

Supongamos que L es k -núcleo de $M_a^k(D)$.

Sea $N = d_{M_a^k(D)}(v_B, L) + 1$.

Entonces $1 \leq N \leq k$.

Sea $z \in L$ tal que $d_{M_a^k(D)}(v_B, L) = d_{M_a^k(D)}(v_B, z)$.

Si $N < k$, entonces $w_{N+1}, \dots, w_k \notin L$ pues $d_{M_a^k(D)}(w_{N+1}, v_B) = k - N$ y $d_{M_a^k(D)}(v_B, z) = N - 1$ y entonces $d_{M_a^k(D)}(w_{N+1}, z) = d_{M_a^k(D)}(w_{N+1}, v_B) + d_{M_a^k(D)}(v_B, z) = (k - N) + (N - 1) = k - 1$.

Ahora, sin importar el valor de N , w_N debe pertenecer a L pues si no perteneciese a L , la siguiente ecuación sería cierta:

$d_{M_a^k(D)}(w_N, L) = d_{M_a^k(D)}(w_N, v_B) + d_{M_a^k(D)}(v_B, L) = (k + 1 - N) + (N - 1) = k$ y entonces w_N no sería $(k - 1)$ -absorbido por L , contradiciendo que L es k -núcleo de $M_a^k(D)$.

Sea $L_N = L - \{w_N\}$. Demostraremos que L_N es núcleo de D .

⁵Si $N = 1$, definimos $w_{N-1} = v_A$.

Afirmación. L_N es k -independiente en D .

Sean $x, y \in L_N$, $x \neq y$.

Si T es una xy -trayectoria dirigida en D , entonces T utiliza la flecha a o no la utiliza.

Si T no usa la flecha a , entonces T es también una trayectoria dirigida en $M_a^k(D)$. Como L es k -independiente en $M_a^k(D)$ y $x, y \in L$, se sigue que la longitud de T es mayor o igual que k .

Si T usa la flecha a , entonces $T = (x, x_1, x_2, \dots, v_A, v_B, \dots, y)$.

Como $x \in L_N \subset L$ y L es k -independiente en $M_a^k(D)$, tenemos que $d_{M_a^k(D)}(x, w_N) \geq k$ y entonces $d_{M_a^k(D)}(x, v_A) \geq k - N$.

Por lo tanto, la parte de T que va de x a v_A , $(x, x_1, x_2, \dots, v_A)$, debe ser de longitud mayor o igual que $k - N$ en D , pues tal trayectoria es también una trayectoria dirigida de $M_a^k(D)$.

Por lo antes dicho, la parte de T que va de x a v_B , es decir, $(x, x_1, x_2, \dots, v_A, v_B)$ tiene longitud mayor o igual que $k - N + 1$.

Sabemos que el camino dirigido marcado por T que va desde v_B hasta $y \in L_N \subset L$ tiene longitud mayor o igual que $d_{M_a^k(D)}(v_B, L) = N - 1$ pues las trayectorias dirigidas de v_B a y son las mismas en D y en $M_a^k(D)$.

Luego, la longitud de T es mayor o igual que $(k - N + 1) + (N - 1) = k$.

Por consiguiente, sin importar cómo sea la trayectoria dirigida que va de x a y en D , tal trayectoria tiene longitud mayor o igual que k en D .

Así, para cualesquiera $x, y \in L_N$, si $x \neq y$, se tiene que $d_D(x, y) \geq k$.

Por lo antes expuesto, L_N es k -independiente en D .

Afirmación. L_N es $(k - 1)$ -absorbente en D .

Como L es $(k - 1)$ -absorbente en $M_a^k(D)$, para todo $x \in V(M_a^k(D)) - L$, existe $y \in L$ tal que $d_{M_a^k(D)}(x, y) \leq k - 1$, en particular para los vértices x que pertenecen a $V(D)$ y no pertenecen a L .

Sea $x \in V(D) - L_N$, entonces x pertenece a $V(D)$ y no pertenece a L .

Entonces existe $y \in L$ que $(k - 1)$ -absorbe a x , en $M_a^k(D)$, es decir, en $M_a^k(D)$ hay una xy -trayectoria S de longitud menor o igual que $k - 1$.

Si $y \neq w_N$, S no usa la flecha $\overrightarrow{v_A w_1}$, por consiguiente S es también una trayectoria dirigida de D y x es absorbido en D por $y \in L_N$.

Si $y = w_N$, entonces la última flecha de S es justamente $\overrightarrow{w_{N-1} w_N}$ y necesariamente S pasa por v_A , es decir, $S = (x, x_1, x_2, \dots, v_A, w_1, \dots, w_N)$.

Como la longitud de S es menor o igual que $k - 1$ y $d_{M_a^k(D)}(v_A, w_N) = N$, entonces la parte que va desde x hasta v_A tiene longitud menor o igual que $k - 1 - N$ y dicha parte es una trayectoria dirigida en D .

Recordemos que $z \in L$ es tal que $d_{M_a^k(D)}(v_B, z) = d_{M_a^k(D)}(v_B, L)$.

$z \neq w_N$ pues $d_{M_a^k(D)}(v_B, w_N) = d_{M_a^k(D)}(v_B, v_A) + d_{M_a^k(D)}(v_A, w_N) \geq k - 1 + N \geq N$ y sabíamos que $d_{M_a^k(D)}(v_B, z) = N - 1$.

Sea Z la trayectoria dirigida de longitud $N - 1$ que une a v_B con z . Entonces $S' = (x, x_1, x_2, \dots, v_A, v_B)Z$ es un camino dirigido en D de longitud menor o igual que $(k - 1 - N) + 1 + (N - 1) = k - 1$, mismo que contiene una xz -trayectoria dirigida de longitud menor o igual que $k - 1$.

Por lo tanto, x es $(k - 1)$ -absorbido por $z \in L_N$.

Por ende L_N es $(k - 1)$ -absorbente en D .

Por consiguiente $L_N = L - \{w_N\}$ es k -núcleo de D .

Como conclusión, para cualquier k -núcleo L de $M_a^k(D)$, se cumple que $w_N \in L$ con $N = d_{M_a^k(D)}(v_B, L)$ y $L_N = L - \{w_N\}$ es k -núcleo de D .

A lo largo de la demostración se vió que $d_{M_a^k(D)}(v_B, L) \neq d_{M_a^k(D)}(v_B, w_N)$. Por lo tanto, $d_{M_a^k(D)}(v_B, L) = d_{M_a^k(D)}(v_B, L - \{w_N\})$.

Por definición, $f(L - \{w_N\}) = [L - \{w_N\}] \cup \{w_{N_1}\}$, con $N_1 = d_D(v_B, L - \{w_N\})$.

Sabemos que las trayectorias dirigidas que empiezan en v_B y no van a ninguno de los vértices w_1, w_2, \dots, w_k son las mismas en D y en $M_a^k(D)$. Entonces $d_D(v_B, L - \{w_N\}) = d_{M_a^k(D)}(v_B, L - \{w_N\})$, es decir, $N = N_1$.

Por lo tanto $f(L - \{w_N\}) = L$ y así f es suprayectiva.

Hemos demostrado que f es biyectiva y el número de k -núcleos de D es igual al número de k -núcleos de $M_a^k(D)$. □

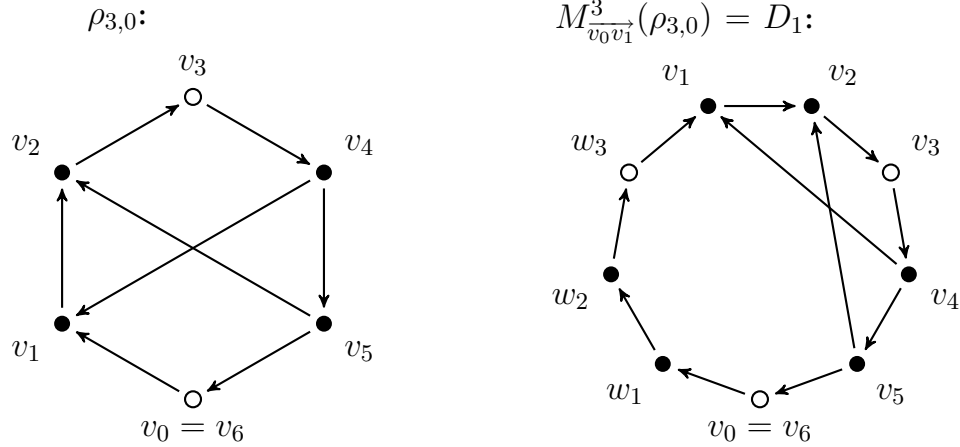
Para conseguir una infinidad de digráficas con exactamente n k -núcleos, sólo hay que observar dos cosas.

La primera es que las digráficas $\rho_{k,0}, \rho_{k,1}, \dots, \rho_{k,k-1}$, $\mathfrak{X}_{k,1}, \mathfrak{X}_{k,2}, \dots, \mathfrak{X}_{k,j}$ tienen la flecha $\overrightarrow{v_0 v_1}$ y en todas ellas, la distancia de v_1 a v_0 es mayor o igual que $k - 1$.

La segunda es que, sin importar que flecha se utilice para construir $D_1 = M_a^k(D)$, la distancia de x_{i+1} a x_i , con x_i, x_{i+1} vértices de la trayectoria por la cual se reemplaza la flecha de D , siempre es mayor o igual que $k - 1$ por lo cual podemos usar la flecha $c = (x_i, x_{i+1})$ para construir $M_c^k(D_1)$.

Ejemplos:

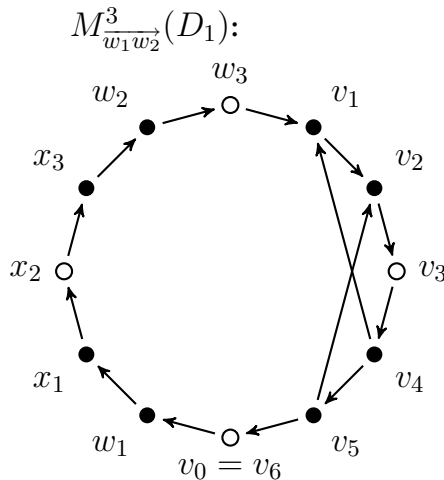
3) Sea $k = 3$. Consideremos $\rho_{3,0}$, definimos $D_1 = M_{v_0v_1}^3(\rho_{3,0})$.



$J = \{v_0, v_3\}$ es el único 3-núcleo de $\rho_{3,0}$. Como $d_{\rho_{3,0}}(v_1, J) = 2$, el 3-núcleo de $M_{v_0v_1}^3(\rho_{3,0})$ es $J \cup \{w_3\}$.

Ahora, cualquier flecha de la trayectoria $\vec{T} = (v_0, w_1, w_2, w_3, v_1)$ cumple que la distancia de su vértice final a su vértice inicial es mayor o igual que $3 - 1$, esto es porque hay que pasar primero por el vértice v_1 y después por v_0 y $d_{\rho_{3,0}}(v_1, v_0) \geq 3 - 1$, misma que se conserva en $M_{v_0v_1}^3(\rho_{3,0})$.

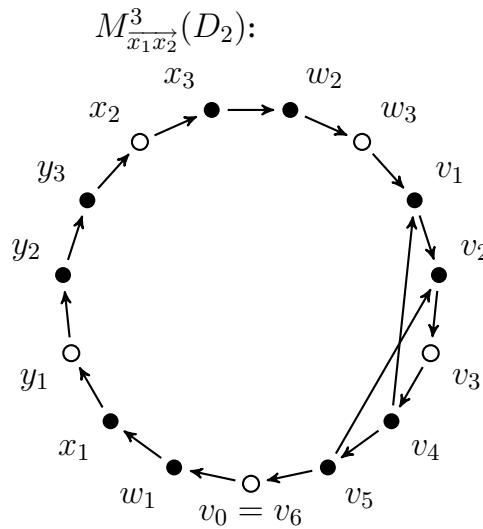
Sea $D_2 = M_{w_1w_2}^3(D_1)$.



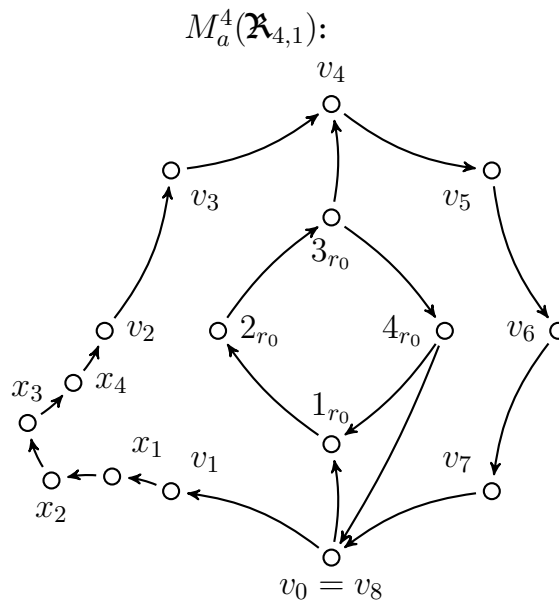
En D_1 , w_2 está a distancia uno del k -núcleo $\{v_0, w_3, v_3\}$, el k -núcleo de D_2 se forma con x_2 , siendo x_1, x_2, x_3 los vértices que se añadieron para formar D_2 .

La distancia de x_2 al k -núcleo de D_2 es cero.

Construyamos $M_{x_1x_2}^3(D_2)$ con los vértices y_1, y_2, y_3 .



4) Sean $D = \mathfrak{K}_{4,1}$ y $a = (v_1, v_2)$.



Sean $J_0 = \{v_0, v_4\}$, $J_1 = \{v_1, v_5, 1_{r_0}\}$, $J_2 = \{v_2, v_6, 2_{r_0}\}$, $J_3 = \{v_3, v_7, 3_{r_0}\}$ y $J_4 = \{v_3, v_7, 4_{r_0}\}$ los cinco 4-núcleos de D .

Llamamos D_1 a $M_a^4(\mathfrak{X}_{4,1})$.

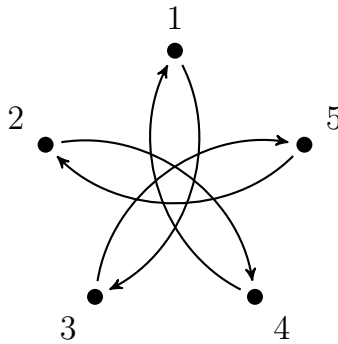
Entonces $d_{D_1}(v_2, J_0) = 2$, $d_{D_1}(v_2, J_1) = 3$, $d_{D_1}(v_2, J_2) = 0$, $d_{D_1}(v_2, J_3) = 1$ y $d_{D_1}(v_2, J_4) = 1$.

Entonces $J_0 \cup \{x_3\}$, $J_1 \cup \{x_4\}$, $J_2 \cup \{x_1\}$, $J_3 \cup \{x_2\}$, $J_4 \cup \{x_2\}$ son los cinco 4-núcleos de D_1 .

En el lema 4.3.2, usamos como hipótesis que la flecha (v_A, v_B) , cumpliera que $d_D(v_B, v_A) \geq k - 1$.

Si una digráfica tiene k -núcleo, no necesariamente contará con una flecha (v_A, v_B) tal que $d_D(v_B, v_A) \geq k - 1$.

Por ejemplo:



Sea $k = 5917$, entonces la digráfica anterior, que es el ciclo $(1, 3, 5, 2, 4, 1)$, tiene k -núcleo (cualquier conjunto que conste de un sólo vértice lo es) y para cualquier flecha $\overrightarrow{v_A v_B}$, la distancia de v_B a v_A es 4 y, ciertamente, 4 es muchísimo menor que $k - 1$.

También, si utilizáramos cualquier flecha para reemplazarla por una trayectoria dirigida de longitud $k + 1$, no necesariamente obtendríamos una digráfica con k -núcleo.

Por ejemplo, el mismo ciclo $(1, 3, 5, 2, 4, 1)$ tiene k -núcleo para $k = 6$. Cambiemos la flecha $(1, 3)$ por la trayectoria dirigida $(1, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, 3)$. Entonces tenemos el ciclo dirigido $(1, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, 3, 5, 2, 4, 1)$ de longitud 11 que no tiene 6-núcleo.

4.4. n k -núcleos y m k -soluciones

La digráfica que utilizamos para la demostración del lema 1.5.4, es decir, la *digráfica dual de D* posee propiedades similares a las de D , por ejemplo, los vértices con exgrado n en D son vértices con ingrado n en la digráfica dual.

Otra propiedad, más interesante, es que los conjuntos absorbentes en D son *dominantes* en la digráfica dual.

Definición 4.4.1. Sea D una digráfica. En la digráfica dual de D , \overleftarrow{D} , $V(\overleftarrow{D}) = V(D)$ y $F(\overleftarrow{D}) = \{(b, a) \mid (a, b) \in F(D)\}$.

Definición 4.4.2. Sea D una digráfica. $S \subset V(D)$ es dominante, si para todo $y \in V(D) - S$, existe $x \in S$ tal que $\overrightarrow{xy} \in F(D)$.

Es fácil ver que la digráfica dual de la digráfica dual de D , para cualquier D , es igual a D .

Recordemos que en el caso de los conjuntos absorbentes, si S es absorbente, entonces, para cualquier vértice y que no pertenece a S , existe $x \in S$ tal que $\overrightarrow{yx} \in F(D)$.

Así, los conjuntos absorbentes en D , son dominantes en \overleftarrow{D} y viceversa.

De igual manera los conjuntos independientes en D , lo son también en \overleftarrow{D} y viceversa.

Por lo tanto, los núcleos de D , son independientes y dominantes en \overleftarrow{D} y cualquier conjunto independiente y dominante en \overleftarrow{D} es núcleo de D .

Definición 4.4.3. Sea D una digráfica. $L \subseteq V(D)$ es una solución de D , si L es independiente y dominante.

Con esta definición podemos decir que hay tantos núcleos en D como soluciones en \overleftarrow{D} .

Matúš Harminc también nos muestra una forma de obtener digráficas asimétricas y fuertemente conexas con exactamente n núcleos y m soluciones.

Teorema 4.4.1. Sean n, m números enteros positivos. Existe una digráfica fuertemente conexa y asimétrica con exactamente n núcleos y m soluciones.

Demostración. Consideremos Δ_n y Δ_m , que tienen n y m núcleos respectivamente.

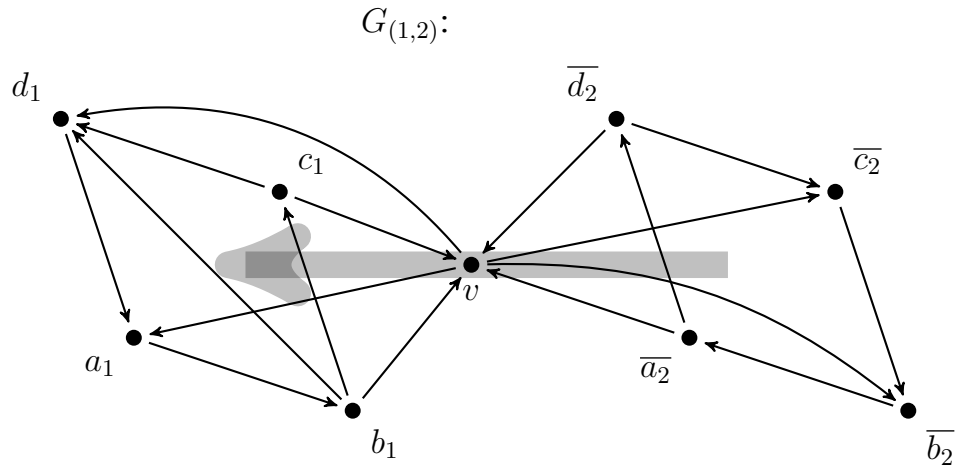
Construyamos la digráfica $G_{(n,m)}$.

$V(G_{(n,m)}) = V(\Delta_n) \cup \{\overline{x} \mid x \in V(\Delta_m)\} \cup \{v\}$, además estos tres conjuntos son ajenos entre sí.

Llamaremos $c(\overleftarrow{\Delta}_m)$ a la digráfica con vértices $\{\overline{x} \mid x \in V(\Delta_m)\}$ y flechas $\{(\overline{x}, \overline{y}) \mid (x, y) \in F(\overleftarrow{\Delta}_m)\}$.

$F(G_{(n,m)}) = F(\Delta_n) \cup F(c(\overleftarrow{\Delta}_m)) \cup \{(z, y) \mid z \in V(c(\overleftarrow{\Delta}_m)), y \in V(\Delta_n)\} \cup \{(v, a_i), (v, d_i), (b_i, v), (c_i, v), (v, \overline{b}_i), (v, \overline{c}_i), (\overline{a}_i, v), (\overline{d}_i, v) \text{ para todo } i\}$.

Ilustremos lo anterior para $n = 1$ y $m = 2$.



Hemos dibujado una flecha gris en lugar de todas las flechas (z, y) tales que $z \in V(c(\overleftarrow{\Delta}_2)), y \in V(\Delta_1)$.

Sencillamente, $c(\overleftarrow{\Delta}_m)$ se obtiene de $\overleftarrow{\Delta}_m$ cambiando el nombre de sus vértices.

Sabemos que si D es fuertemente conexa, hay un camino dirigido cerrado que pasa por todos sus vértices $C = (x_0, x_1, \dots, x_{z-1}, x_0)$. Entonces, $C_1 = (x_0, x_{z-1}, \dots, x_1, x_0)$ es un camino que pasa por todos los vértices de la digráfica dual de D .

Por lo tanto, $c(\overleftarrow{\Delta}_m)$ es fuertemente conexa.

Como Δ_n y $c(\overleftarrow{\Delta}_m)$ son fuertemente conexas y existen flechas de entrada y salida entre v y $V(\Delta_n), V(c(\overleftarrow{\Delta}_m))$, se sigue que $G_{(n,m)}$ es fuertemente conexa.

Para probar que $G_{(n,m)}$ tiene exactamente n núcleos y m soluciones, observemos que $\{v\}$ es independiente máximo pues existen flechas entre v y cualquier otro vértice.

$\{v\}$ no absorbe a los vértices a_i y no domina a los \overline{a}_i . Por lo tanto, cualquier núcleo o solución de $G_{(n,m)}$ no tiene como elemento a v .

Ahora, todo conjunto independiente $I \subset V(G_{(n,m)}), I \neq \{v\}$, debe cumplir que $I \subset V(\Delta_n)$ o $I \subset V(c(\overleftarrow{\Delta_m}))$ pues $\{(z, y) \mid z \in V(c(\overleftarrow{\Delta_m})), y \in V(\Delta_n)\} \subset F(G_{(n,m)})$.

Los subconjuntos de vértices de $c(\overleftarrow{\Delta_m})$, no son absorbentes porque no hay ninguna flecha de $V(\Delta_n)$ hacia $V(c(\overleftarrow{\Delta_m}))$. Análogamente, los subconjuntos de vértices de Δ_n no son dominantes.

Por lo tanto, todo núcleo está contenido en $V(\Delta_n)$ y toda solución está contenida en $V(c(\overleftarrow{\Delta_m}))$.

Los núcleos de Δ_n siguen siendo conjuntos independientes pues las trayectorias dirigidas que se han añadido entre sus vértices, pasan por v y por consiguiente tienen longitud mayor o igual que 2. De manera análoga, las soluciones de $c(\overleftarrow{\Delta_m})$ son independientes.

Además, si N es núcleo de Δ_n , como todo núcleo de ésta contiene al menos un vértice a_i o d_i , N absorbe a v . Es obvio que N absorbe a todos los vértices de $c(\overleftarrow{\Delta_m})$.

Por consiguiente, todo núcleo de Δ_n es núcleo de $G_{(n,m)}$.

Luego, $G_{(n,m)}$ tiene exactamente n núcleos.

Las soluciones de $G_{(n,m)}$ están determinadas por las de $c(\overleftarrow{\Delta_m})$ y éstas, a su vez, por los m núcleos de Δ_m .

Por lo anterior, de forma similar a los núcleos, $G_{(n,m)}$ tiene exactamente m soluciones.

□

Generalicemos la idea de las soluciones para $l \geq 1$.

Definición 4.4.4. Sean D una digráfica, $k \geq 2$ y $l \geq 1$. $L \subseteq V(D)$ es l -dominante si para todo $x \in V(D) - L$ existe $y \in L$ tal que $d_D(y, x) \leq l$.

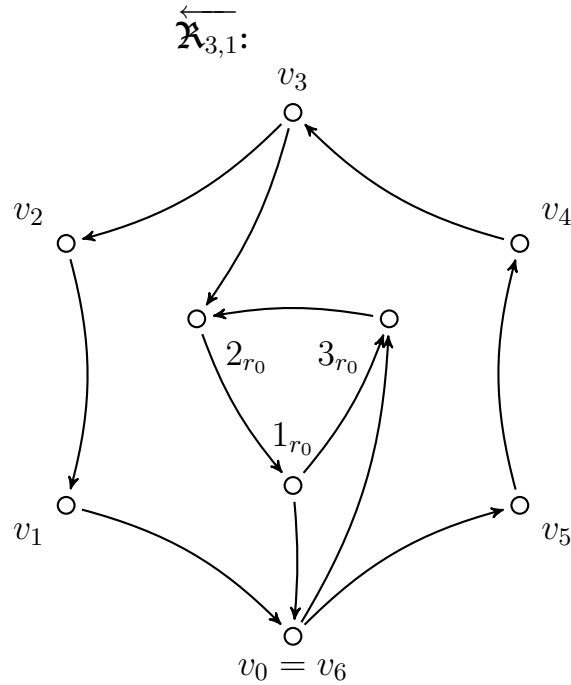
El subconjunto L es una k -solución de D , si L es k -independiente y $(k-1)$ -dominante.

Si existe en D , una trayectoria dirigida $(x, x_1, \dots, x_{z-1}, y)$ de longitud menor o igual que l , en \overleftarrow{D} tenemos la trayectoria dirigida $(y, x_{z-1}, \dots, x_1, x)$ y también tiene longitud menor o igual que l , es decir, si y l -absorbe a x en D , y l -domina a x en \overleftarrow{D} .

Por lo tanto, así como con los conjuntos absorbentes, si L es l -absorbente en D , es l -dominante en \overleftarrow{D} y viceversa.

Los conjuntos k -independientes de D , también lo son en \overleftarrow{D} y viceversa.

Por todo lo anterior, D tiene tantos k -núcleos como k -soluciones tiene \overleftarrow{D} . Veamos un ejemplo.



Los k -núcleos de $\overleftarrow{\mathfrak{X}}_{3,1}$, $\{v_0, v_3\}$, $\{v_1, v_4, 1_{r_0}\}$, $\{v_2, v_5, 2_{r_0}\}$, $\{v_2, v_5, 3_{r_0}\}$, son k -soluciones de $\overleftarrow{\mathfrak{X}}_{3,1}$.

Construyamos, de nuestra propia invención, una digráfica fuertemente conexas y asimétrica con exactamente n k -núcleos y m k -soluciones usando las digráficas que ya tenemos.

Definición 4.4.5. Sea $k \geq 3$. $\mathfrak{C}^k = \{\rho_{k,0}, \dots, \rho_{k,k-1}, \mathfrak{X}_{k,1}, \mathfrak{X}_{k,2}, \dots\}$.

Ahora construyamos $E_{(n,m)}^k$ con exactamente n y m k -núcleos y soluciones.

Tomamos $D_n, D_m \in \mathfrak{C}^k$, tales que poseen n y m k -núcleos respectivamente.

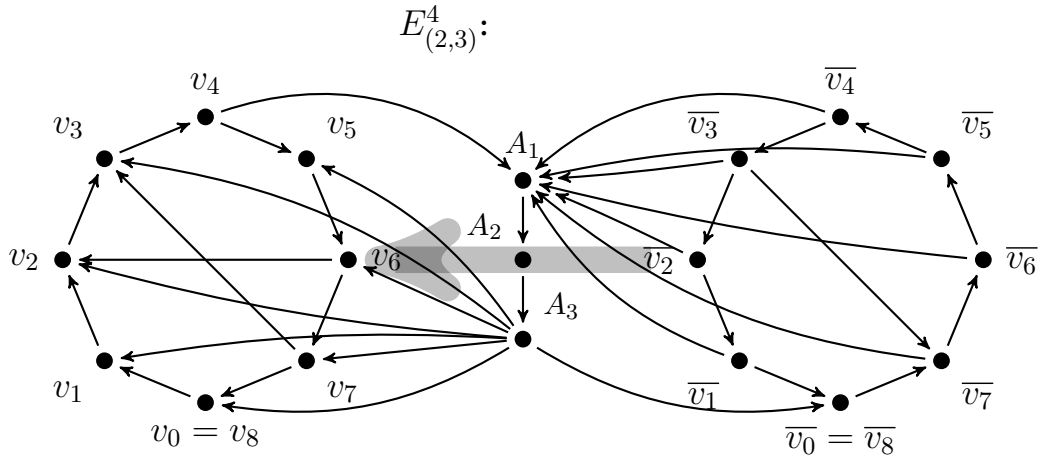
Podemos construir la misma digráfica $c(\overleftarrow{D}_m)$ usada en la demostración anterior, es decir, la digráfica dual de D_m pero con vértices \bar{x} en lugar de x .

$V(E_{(n,m)}^k) = V(D_n) \cup V(c(\overleftarrow{D}_m)) \cup \{A_1, A_2, \dots, A_{k-1}\}$, siendo todos estos conjuntos ajenos dos a dos.

$F(E_{(n,m)}^k) = F(D_n) \cup F(c(\overleftarrow{D}_m)) \cup \{(z, y) \mid z \in V(c(\overleftarrow{D}_m)), y \in V(D_n)\} \cup \{(z, A_1) \mid z \in V(c(\overleftarrow{D}_m)), z \neq \bar{v}_0\} \cup \{(A_{k-1}, y) \mid y \in V(D_n), y \neq v_k\} \cup \{(v_k, A_1)\} \cup \{(A_{k-1}, \bar{v}_0)\} \cup \{(A_j, A_{j+1}) \mid 1 \leq j \leq k-2\}$.

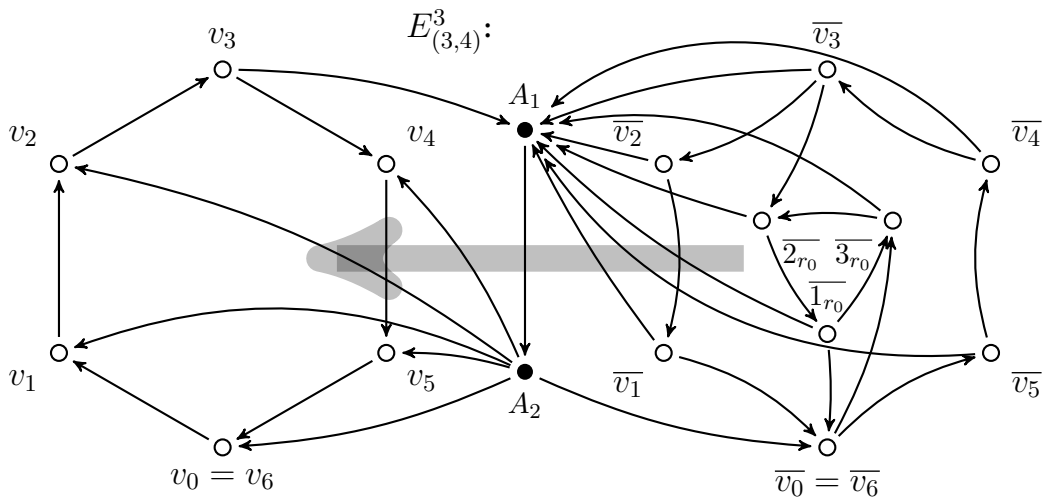
Aunque $E_{(n,m)}^k$ tiene muchas flechas ninguna es simétrica.

Toda trayectoria dirigida de $V(D_n)$ hacia $V(c(\overleftarrow{D}_m))$ tiene longitud k , pues debe ser igual a $(v_k, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, \bar{v}_0)$.



$E_{(n,m)}^k$ es fuertemente conexa pues: D_n y $c(\overleftarrow{D}_m)$ son fuertemente conexas, hay una trayectoria dirigida de $V(D_n)$ hacia $V(c(\overleftarrow{D}_m))$ y $\{(z, y) \mid z \in V(c(\overleftarrow{D}_m)), y \in V(D_n)\} \subset F(E_{(n,m)}^k)$.

Veamos que $E_{(n,m)}^k$ tiene exactamente n y m k -soluciones.



En adelante, escribiremos $d(x, y)$ en lugar de $d_{E_{(n,m)}^k}(x, y)$.

Para $z = 1, 2, \dots, k - 1$, $\{A_z\}$ es k -independiente máximo porque:

- $(A_1, A_2, \dots, A_{k-1})$ tiene longitud $k - 2$.
- $\forall x \in V(D_n) - \{v_k\}, d(A_z, x) \leq k - 1$ y $d(v_k, A_z) \leq k - 1$.
- $\forall \bar{x} \in V(c(\overleftarrow{D}_m)) - \{\bar{v}_0\}, d(A_z, \bar{v}_0) \leq k - 1$ y $d(\bar{x}, A_z) \leq k - 1$.

A_z no $(k-1)$ -absorbe a v_{k+1} pues, para cualquier n , $d_{D_n}(v_{k+1}, v_k) \geq k$ y toda $v_{k+1}A_z$ -trayectoria dirigida pasa por v_k .

También, A_z no $(k-1)$ -domina a \bar{v}_1 porque $d_{D_m}(v_1, v_0) \geq k$, lo cual implica que $d_{c(\overleftarrow{D_m})}(\bar{v}_0, \bar{v}_1) \geq k$, y toda $A_z\bar{v}_1$ -trayectoria dirigida pasa por \bar{v}_0 .

Por lo tanto los k -núcleos y soluciones de $E^k(n, m)$ no pueden contener a los vértices A_z .

Las trayectorias dirigidas que añadimos entre los vértices de D_n son de longitud k , pues contienen a la trayectoria dirigida $(A_1, A_2 \dots A_{k-1})$. Análogamente, las nuevas trayectorias dirigidas entre vértices de $c(\overleftarrow{D_m})$ son de longitud k .

Por lo tanto, los k -núcleos de $V(D_n)$ y las k -soluciones de $c(\overleftarrow{D_m})$ siguen siendo k -independientes en $E^k_{(n,m)}$.

Todo k -núcleo de $E^k_{(n,m)}$ debe estar totalmente contenido en $V(D_n)$ o en $V(c(\overleftarrow{D_m}))$ debido a la k -independencia. Lo mismo sucede con las k -soluciones.

Como las trayectorias dirigidas entre $V(D_n)$ y $V(c(\overleftarrow{D_m}))$ tienen longitud k :

Si $I \subset V(c(\overleftarrow{D_m}))$, I no absorbe a ningún vértice de D_n .

Si $J \subset V(D_n)$, J no domina a ningún vértice de $c(\overleftarrow{D_m})$.

Por consiguiente, los k -núcleos están totalmente contenidos en $V(D_n)$ y las k -soluciones en $V(c(\overleftarrow{D_m}))$.

Afirmamos que los k -núcleos de D_n son $(k-1)$ -absorbentes en $E^k_{(n,m)}$.

Si J es un k -núcleo de D_n , a J pertenece algún vértice $x \in \{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$, como $d(A_z, x) \leq k-1$ y tenemos todas las flechas de vértices de $c(\overleftarrow{D_m})$ hacia vértices de D_n , J es $(k-1)$ -absorbente.

Es obvio que J absorbe a los vértices de D_n que no pertenecen a J .

Por lo tanto, todo k -núcleo de D_n es k -núcleo de $E^k_{(n,m)}$.

De manera similar, usando que a las soluciones $c(\overleftarrow{D_m})$ pertenece alguno de los vértices de $\{\bar{v}_k, \bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_{2k-1}\}$ podemos concluir que toda k -solución de $c(\overleftarrow{D_m})$ es k -solución de $E^k_{(n,m)}$.

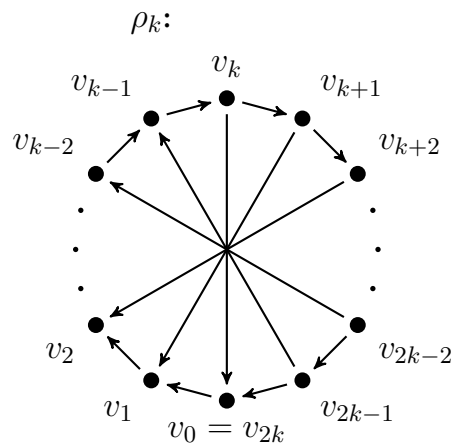
Por ende, $E^k_{(n,m)}$ tiene exactamente n k -núcleos y m k -soluciones.

Para finalizar, es posible construir digráficas fuertemente conexas con ningún núcleo o ninguna solución.

Matúš Harminc utiliza la digráfica $\Delta_0 = (a_0, b_0, c_0, a_0)$ que es un ciclo dirigido de longitud tres.

Aunque la digráfica $G_{(n,m)}$ tiene flechas con extremos d_i o \bar{d}_i , no afectará nada a la demostración del teorema 4.4.1 si no las tenemos cuando $n = 0$ o $m = 0$ pues Δ_0 no tiene núcleos.

Para $k \geq 3$ y los k -núcleos podemos utilizar ρ_k , la digráfica que se obtiene de $\rho_{k,0}$ añadiendo la flecha $\overrightarrow{v_k v_0}$ y se seguirá valiendo la argumentación que hicimos.



Bibliografía

- [1] Claude Berge, *The theory of graphs*, Dover Publications, 2001.
- [2] J. Adrian Bondy y U. S. Rama Murty, *Graph theory with applications*, North-Holland, 1982, 25--36.
- [3] Oleg V. Borodin, Alexandr V. Kostochka y Douglas R. Woodall, *On kernel-perfect orientations of line graphs*, Discrete Mathematics **191** (1998), 45--49.
- [4] Hortensia Galeana Sánchez, *A counterexample to a conjecture of Meyniel on Kernel-perfect graphs*, Discrete Mathematics **41** (1982), 105--107.
- [5] Hortensia Galeana Sánchez, *Núcleos y seminúcleos en digráficas*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1980.
- [6] Hortensia Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara, *On kernels and semi-kernels of digraphs*, Discrete Mathematics **48** (1984), no. 31, 67--76.
- [7] Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez, *k-kernels and some operations in digraphs*, Discuss. Math. (en revisión).
- [8] Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez, *k-kernels in orientations of the line graph*, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences **2** (2007), no. 31, 1511--1525.
- [9] Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez, *(k, l)-núcleos en orientaciones de la gráfica de trayectorias*.
- [10] Hortensia Galeana Sánchez y Hugo Alberto Rincón Mejía, *A sufficient condition for the existence of k-kernels in digraphs*, Discusiones Mathematicae, Graph Theory **18** (1998), no. 2, 197--204.
- [11] Matúš Harminc, *Kernel and solution numbers of digraphs*, Acta Univ. M. Belii, Math. (1998), no. 6, 15--20.

- [12] Magdalena Kucharska y Maria Kwaśnik, *On (k, l) -kernels of special superdigraphs of P_m and C_m* , *Discussiones Mathematicae, Graph Theory* (2001), no. 21, 95--109.
- [13] Maria Kwaśnik, *The generalization of Richardson's theorem*, *Discussiones Mathematicae* **4** (1981), 11--14.
- [14] Lu Qin, Shan Er-Fang y Zhao Min, *(k, l) -kernels in line digraphs*, *Journal of Shanghai University (English Edition)* **10** (2006), no. 6, 484--486.
- [15] John Von Neumann y Oskar Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [16] M. Richardson, *On weakly ordered systems*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), no. 2, 113-116.
- [17] Adolfo Sánchez Flores, *A counter example to a generalization of Richardson's theorem*, *Discrete Mathematics* **65** (1987), no. 3, 319--320.
- [18] Jerzy Topp, *Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphs*, *Rostock Math. Kolloq.* (1982), no. 21, 73--81.