



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

FAMILIA DE CONTROLADORES PID ESTABILIZANTES  
PARA UN SISTEMA DE TRES TANQUES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO ELÉCTRICO ELECTRÓNICO**

PRESENTA:

**JAVIER ALEJANDRO MORA HERNÁNDEZ**

DIRECTORA: DRA. CRISTINA VERDE RODARTE

# Agradecimientos

A mis padres, Javier y Deyanira, por su apoyo incondicional y total comprensión a lo largo de mi vida.

A mis hermanos José Alfredo y Edgar, al primero por su ejemplo y ayuda, al segundo por su apoyo y a ambos por estar ahí cuando los necesité.

A la Dra. Cristina Verde, por su invaluable ayuda y consejos para la realización de este trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por enseñarme el amor por el conocimiento.

A todas las demás personas importantes para mí, por su valiosa amistad y apoyo a lo largo de mi formación. Ustedes saben quiénes son.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Fundamento Teórico</b>	<b>8</b>
2.1. Introducción . . . . .	8
2.2. El teorema de Hermite – Biehler . . . . .	8
2.3. Linealización de un modelo no – lineal . . . . .	12
<b>3. El sistema de tres tanques</b>	<b>16</b>
3.1. El sistema de tres tanques . . . . .	16
3.2. Especificaciones técnicas . . . . .	17
3.3. Descripción del modelo dinámico . . . . .	18
3.4. Diagrama de bloques del sistema . . . . .	21
3.5. Linealización del modelo matemático . . . . .	23
<b>4. Generación de la familia de controladores</b>	<b>28</b>
4.1. Controlador proporcional (P) . . . . .	28
4.2. Controlador Proporcional - Integral (PI) . . . . .	41
4.3. Controlador Proporcional - Integral - Derivativo PID . . . . .	55
<b>5. Conclusiones</b>	<b>72</b>

# Familia de controladores PID estabilizantes para un sistema de tres tanques

por

J. Alejandro Mora Hernández

## Resumen

En la gran mayoría de los procesos de la industria se requiere tener un control eficiente sobre aquellas variables que intervienen de manera crítica en ellos, en caso de que se presenten perturbaciones o incertidumbre. Por ello, es importante contar con dispositivos o programas capaces de llevar a cabo dicho control de manera rápida y a bajo costo.

En la actualidad, existen diversas técnicas para el diseño de controladores realimentados, las cuales tienen su fundamento en el hecho de que es necesario conocer el error entre los valores deseados del proceso y los reales, para generar la acción correctiva. Uno de los controladores más usados es el Proporcional - Integral - Derivativo (PID). Es fundamental para cualquier sistema realimentado, el garantizar que éste es estable al interconectar el proceso y el controlador. Existen diversos métodos para garantizar o probar la estabilidad de un sistema, como el criterio de Routh - Hurwitz, el lugar geométrico de las raíces y el criterio de estabilidad de Nyquist. Sin embargo, estos métodos presentan ciertas desventajas, por ser los dos últimos, en esencia, métodos gráficos y porque el primero requiere, para el cálculo de las constantes del controlador, la solución de un conjunto de desigualdades de polinomios, lo cual no es una tarea sencilla cuando se trata de polinomios de orden alto. Además, se requiere probar dichos criterios para cada controlador.

Se requiere por lo tanto, un método que sea capaz de superar estas desventajas. Se presenta en este trabajo una metodología de diseño de controladores PID, basada en la técnica de la firma del polinomio característico del sistema en lazo cerrado desarrollada por Keel y Bhattacharyya, la cual nos permite hallar de manera relativamente sencilla, todos los posibles valores de las constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  del controlador PID, que harán estable al sistema. El objetivo de este trabajo es presentar la aplicación del método a un caso particular, obteniendo como resultado una familia de todos los posibles controladores estabilizantes de tipo PID.

# Capítulo 1

## Introducción

En la actualidad, la gran mayoría de los procesos industriales requieren de un estricto control de calidad, ya sea para ofrecer productos que satisfagan de manera cabal las exigencias de los consumidores, o bien para proporcionar una mayor seguridad a las personas e insumos que intervienen en la realización de dichos procesos.

De aquí la necesidad de crear dispositivos o programas que sean capaces de compensar las incertidumbres y perturbaciones inherentes del sistema de manera eficiente, segura y reduciendo en la medida de lo posible los costos de operación.

Para lograr este objetivo, es preciso conocer lo más ampliamente posible el proceso que se quiere controlar, y determinar cuáles son las variables de interés para llevar a cabo dicho control. Uno de los conceptos más importantes en la teoría de control es el de sistema realimentado, el cual se refiere, básicamente, a que, para poder controlar un proceso o sistema de manera automática, es necesario que el sistema sea capaz de comparar su o sus salidas con un valor de referencia, de modo que pueda actuar en términos de lo que está produciendo, y aquello que se espera de él [7].

Un esquema simplificado de sistema realimentado se muestra en la *Figura 1-1*. En ella podemos observar que la salida  $y(s)$  está siendo registrada por el sensor y filtros en  $H(s)$ . La salida  $v(s)$  de ésta, se compara en el punto suma con el valor de referencia  $r(s)$ , de manera que el error  $e(s) = r(s) - v(s)$ , sea la entrada para el controlador  $C(s)$ . El controlador envía la señal de acción  $a(s)$ , a la planta  $G(s)$ , formando de esta manera un sistema en lazo cerrado.

Tomando en cuenta este esquema, y para nuestro caso particular, lo que nos interesa, es

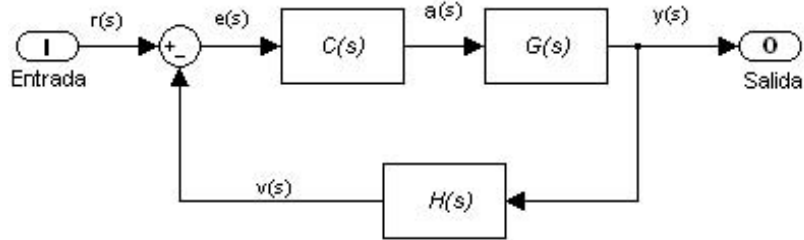


Figura 1-1: Esquema general simplificado de un sistema realimentado.

el diseño del controlador  $C(s)$ . De manera más concreta, el diseño de un controlador de tipo Proporcional - Integral - Derivativo (PID). El diseño del controlador se debe hacer teniendo en cuenta los conceptos fundamentales de la teoría de control, y primordialmente el concepto de estabilidad.

El controlador de tipo PID es, por mucho, el algoritmo de control más común. Muchos de los lazos de realimentación son controlados por este algoritmo o variaciones menores del mismo [2]. En procesos industriales, más del 97% de los controles son de tipo PID [6].

Se ha encontrado empíricamente, que el controlador PID es una estructura útil, el algoritmo en su forma estándar puede ser descrito como:

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (1.1)$$

donde  $u$  es la variable de control, y  $e$  es la señal de error. La variable de control es por lo tanto, una suma de tres términos: el término P (el cual es proporcional al error), el término I (el cual es proporcional a la integral del error), y el término D (el cual es proporcional a la derivada del error). Los parámetros del controlador son: la ganancia proporcional  $K$ , el tiempo integral  $T_i$  y el tiempo derivativo  $T_d$ . En el caso de un control proporcional, la ley de control de la ecuación se reduce a:

$$u(t) = K e(t) \quad (1.2)$$

La acción de control es simplemente proporcional a la señal de error.

La función principal de la acción integral es asegurar que la salida del proceso coincide con

el valor de referencia en estado estacionario. Con la acción integral, un error pequeño y positivo conducirá siempre a una acción de control creciente, y un error negativo dará como resultado una acción de control decreciente, sin importar qué tan pequeño sea el error. Considérese un integrador, cuya relación entrada-salida es:

$$y(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t g(\tau) d\tau + y(0) \quad (1.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K}{T_i} g(t) \quad (1.4)$$

donde  $\frac{K}{T_i}$  es la ganancia del integrador. Supóngase ahora que la salida  $y(t)$  es constante; se deduce de la ecuación 1.4 que:

$$\frac{dy}{dt} = 0 = \frac{K}{T_i} g(t) \forall t > 0 \quad (1.5)$$

La ecuación 1.5 prueba los siguientes hechos acerca del integrador:

1) Si la salida del integrador es constante sobre un segmento de tiempo, entonces la entrada debe ser idéntica a cero sobre ese mismo segmento de tiempo.

2) La salida de un integrador cambia siempre que la entrada no sea cero.

De acuerdo con estas propiedades, si se agrega un integrador a la planta, siendo su entrada  $e(t) = r(t) - y(t)$ , y se asegura que el sistema es asintóticamente estable, es decir, que bajo una referencia constante y perturbaciones de entrada, todas las señales alcanzan un valor estable se observa que la entrada del integrador tiende a cero. Dado que se estableció que la entrada del integrador es la señal de error, se tiene que  $e(t) = r(t) - y(t)$  tiende a cero, y por lo tanto  $y$  sigue a  $r$  mientras  $t \rightarrow \infty$ .

Finalmente, el propósito de la acción derivativa es mejorar la estabilidad en lazo cerrado. El mecanismo de la inestabilidad puede ser descrito de la siguiente manera. Debido a la dinámica del proceso, tomará algún tiempo antes de que un cambio en la variable de control sea perceptible en la salida del proceso. Por lo tanto, el sistema de control se retrasará para corregir el error. La acción de un controlador con términos proporcional y derivativo se puede interpretar como si la señal de control fuese hecha proporcional a una salida predecida del sistema, donde la predicción es hecha por extrapolación lineal mediante la tangente a la curva de error.

Una representación alternativa del algoritmo del controlador PID es:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + sk_d \quad (1.6)$$

Estos parámetros se encuentran relacionados con los de la forma estándar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} k_p &= K \\ k_i &= \frac{K}{T_i} \\ k_d &= KT_d \end{aligned}$$

La representación de la ecuación 1.6 es equivalente a la forma estándar (1.1), pero los valores de los parámetros son diferentes.

En este trabajo se busca obtener, para un caso particular, un conjunto de constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ , a partir de las cuales se forma una familia de todos los posibles controladores de tipo PID que estabilizan al sistema.

En el capítulo dos se presenta la teoría que sustenta el método de diseño empleado. Dado que el interés recae sobre el diseño del controlador, no se profundiza demasiado en la teoría, sino que se presentan los conceptos más importantes pero sin llegar a demostrarlos, tales como el teorema de Hermite – Biehler y una generalización de éste, el concepto de firma del polinomio y un método de linealización de una función no lineal.

En el capítulo tres se hace una descripción detallada del sistema de tres tanques y se obtiene su modelo matemático. Dado que el modelo que se obtiene es no-lineal, se hará también una aproximación a un modelo lineal alrededor de un punto de operación utilizando para ello las herramientas del programa SIMULINK<sup>®</sup>.

El capítulo cuatro presenta el diseño de la familia de controladores, así como la simulación con ellos en el modelo que se obtuvo anteriormente, utilizando para ello paquete MATLAB<sup>®</sup>.

El capítulo cinco presenta, finalmente, las conclusiones a las cuales se llega en este trabajo.



## Capítulo 2

# Fundamento Teórico

### 2.1. Introducción

Como se sabe, el problema de asegurar la estabilidad de un sistema lineal e invariante en el tiempo, se reduce prácticamente a determinar las condiciones bajo las cuales, las raíces del polinomio característico de dicho sistema, se encuentran del lado izquierdo del plano complejo. Cuando un polinomio satisface esta condición, se dice que es Hurwitz [5].

Para determinar la estabilidad de un sistema, se han desarrollado diversas técnicas en las últimas décadas, una de las primeras y también una de las más comúnmente utilizadas es el criterio de Routh – Hurwitz.

Existen varias condiciones equivalentes para asegurar que un polinomio es Hurwitz. Una de ellas es el teorema de Hermite – Biehler. El desarrollo de este trabajo está basado en una versión generalizada de dicho teorema establecida por Bhattacharyya, cuya deducción y demostración se presenta en forma pormenorizada en [5]. Por ello, este trabajo se limita a presentar los resultados obtenidos ahí, y en el capítulo 4 se usarán estos resultados para llevar a cabo el diseño de la familia de controladores PID.

### 2.2. El teorema de Hermite – Biehler

De acuerdo con Bhattacharyya [5], el teorema de Hermite – Biehler provee de las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad en el sentido Hurwitz de un polinomio real dado, y

establece que, para que dicho polinomio sea estable, las raíces del mismo deben cumplir con una cierta propiedad de enlazamiento. Para establecer el teorema, deben hacerse primero algunas consideraciones.

Sea  $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n$  un polinomio de grado  $n$ . Considérese también la descomposición:

$$\delta(s) = \delta_e(s^2) + s\delta_o(s^2) \quad (2.1)$$

Donde  $\delta_e(s^2)$  y  $\delta_o(s^2)$  son las componentes de  $\delta(s)$  formadas por las potencias pares e impares de  $s$  respectivamente. Para cada frecuencia  $\omega \in \mathbb{R}$  se denota:

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega) \quad (2.2)$$

Donde  $p(\omega) = \delta_e(-\omega^2)$ ,  $q(\omega) = \omega\delta_o(-\omega^2)$ . Sean  $\omega_{e1}, \omega_{e2}, \dots$  los ceros reales no negativos de  $\delta_e(s)$ , y sean  $\omega_{o1}, \omega_{o2}, \dots$  los ceros reales no negativos de  $\delta_o(s)$ , ambos ordenados de manera ascendente en cuanto a magnitud.

**Teorema 1 (Teorema de Hermite – Biehler)** *Sea  $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n$  un polinomio real de orden  $n$ . Entonces  $\delta(s)$  es estable en el sentido Hurwitz, si y sólo si, todos los ceros de  $\delta_e(s^2)$  y  $\delta_o(s^2)$  son reales y distintos,  $\delta_n$  y  $\delta_{n-1}$  son del mismo signo, y los ceros reales no negativos satisfacen la siguiente propiedad:*

$$0 < \omega_{e1} < \omega_{o1} < \omega_{e2} < \omega_{o2} < \dots$$

El teorema, establecido de esta manera permite observar, al graficar las componentes par e impar de  $\delta(s)$ , que cuando las raíces no negativas de ambas componentes se suceden de manera alternada, el polinomio es Hurwitz. (Véase *Figura 2-1*)

Sin embargo, cuando esta condición de alternancia no está presente, (*Figura 2-2*) resultaría interesante saber si estas gráficas proporcionan alguna otra información acerca del polinomio, mas allá de si es estable o no. Esta pregunta motiva el planteamiento de una versión más general del teorema para saber qué ocurre cuando el polinomio no es Hurwitz.

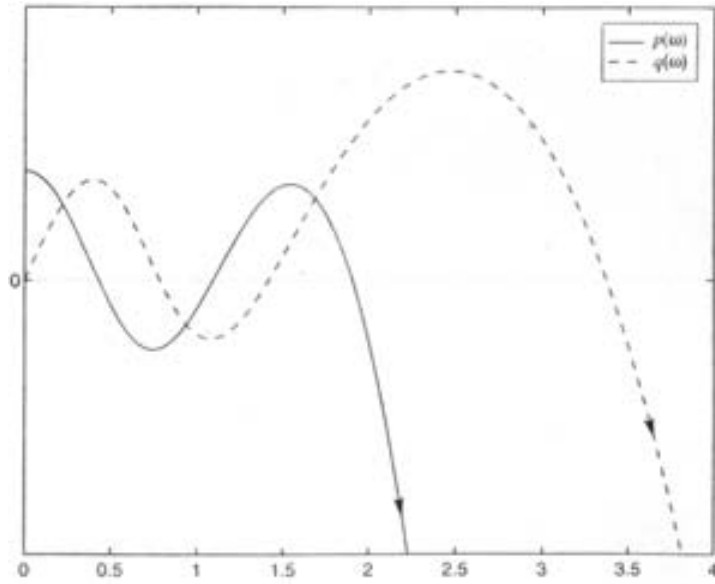


Figura 2-1: Gráficas  $p(\omega)$  y  $q(\omega)$  cuando se cumplen las condiciones del Teorema 1

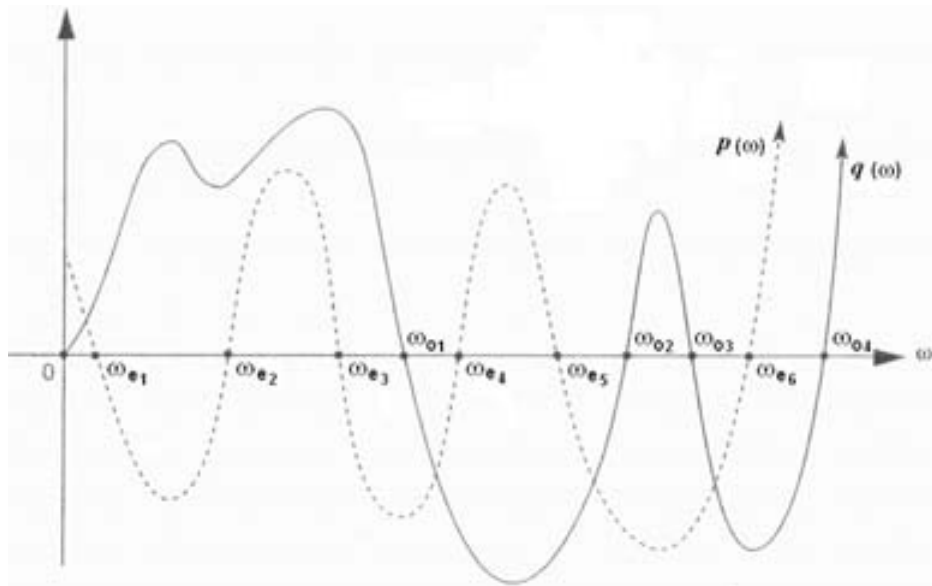


Figura 2-2: Gráficas de  $p(\omega)$  y  $q(\omega)$  cuando no se cumplen las condiciones del Teorema 1

Bhattacharyya presenta en [5] la siguiente versión generalizada del Teorema 1:

**Teorema 2** *Sea  $\delta(s)$  un polinomio real de grado  $n$  como se definió anteriormente. Entonces, para que el polinomio sea estable:*

$$l(\delta) - r(\delta) = \sigma_i(\delta) \quad (2.3)$$

En donde,  $l(\delta)$  representa el número de raíces de  $\delta(s)$  que se encuentran del lado izquierdo del plano complejo,  $r(\delta)$  representa el número de raíces de  $\delta(s)$  que se encuentran del lado derecho del plano complejo, y  $\sigma_i(\delta)$  se conoce como la firma imaginaria de  $\delta(s)$ .

La firma imaginaria de  $\delta(s)$ , se define como:

**Definición 3** *Sea  $\delta(s)$  un polinomio real dado de grado  $n$  como se definió anteriormente, con  $k$  denotando el grado de multiplicidad de una raíz en el origen. Se define también:*

$$p_f(\omega) := \frac{p(\omega)}{(1 + \omega)^{\frac{n}{2}}} \quad q_f(\omega) := \frac{q(\omega)}{(1 + \omega)^{\frac{n}{2}}} \quad (2.4)$$

Sean  $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots \omega_{m-1}$  los ceros reales, finitos, distintos y no negativos de  $q_f(\omega)$  con multiplicidad impar. También se define  $\omega_m = \infty$ . Entonces, la firma imaginaria  $\sigma_i(\delta)$  de  $\delta(s)$  está definida como:

$$\sigma_i(\delta) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{sgn} [p_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn} [p_f(\omega_1)] + 2\text{sgn} [p_f(\omega_2)] + \dots \\ \quad + (-1)^{m-1} 2\text{sgn} [p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn} [p_f(\omega_m)] \end{array} \right\} * (-1)^{m-1} \text{sgn} [q(\infty)] \\ \text{si } n \text{ es par} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{sgn} [p_f^k(\omega_0)] - 2\text{sgn} [p_f(\omega_1)] + 2\text{sgn} [p_f(\omega_2)] + \dots \\ \quad + (-1)^{m-1} 2\text{sgn} [p_f(\omega_{m-1})] \end{array} \right\} * (-1)^{m-1} \text{sgn} [q(\infty)] \\ \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.5)$$

Donde:  $p_f^{(k)}(\omega_0) := \frac{d^k}{d\omega^k} [p_f(\omega)]_{\omega=\omega_0}$  y  $\text{sgn}(x)$  es conocida como la función signo y se define como:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

### 2.3. Linealización de un modelo no – lineal

La importancia de los sistemas lineales radica en que es más sencillo trabajar con ellos puesto que la salida del sistema es proporcional a la entrada y, además, muchas de las técnicas de análisis de sistemas han sido desarrolladas para sistemas lineales. Sin embargo, muchos de los sistemas físicos presentan un comportamiento no lineal, por ello se hace patente la necesidad de desarrollar técnicas que permitan aproximar una función no-lineal a una lineal.

Ogata [11], presenta una técnica de linealización basada en el desarrollo de la serie de Taylor de la función no lineal, y en la cual sólo se toma en cuenta el término lineal de la serie y se desprecian los términos de orden mayor, considerando que la desviación de las variables alrededor de un punto de operación dado son despreciables.

Para el caso de este trabajo, la linealización del sistema hidráulico se hará a través de MATLAB<sup>®</sup>, sin embargo, es importante conocer también las técnicas que pueden ser utilizadas en caso de no contar con sistema de cómputo que lleve a cabo la linealización.

Para obtener el modelo lineal de un sistema no lineal, se considera que las variables se desvían ligeramente del punto de operación dado. Considérese un sistema no lineal, cuya entrada , y salida están relacionadas mediante la función:

$$y = f(x) \tag{2.7}$$

Supongamos que el sistema funciona alrededor del punto de operación  $(\bar{x}, \bar{y})$ , entonces, la función se puede expandir en serie de Taylor alrededor de este punto de operación como:

$$y = f(x) \\ y = f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})^2 + \dots \tag{2.8}$$

En donde las derivadas  $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots$  están evaluadas en  $\bar{x}$ . Si consideramos que la variación  $(x - \bar{x})$  es pequeña, entonces se pueden despreciar los términos de orden superior de  $(x - \bar{x})$ , por lo que la ecuación (2.7) se puede reescribir como:

$$y = \bar{y} + k(x - \bar{x}) \tag{2.9}$$

dónde:

$$\bar{y} = f(\bar{x}) \quad (2.10)$$

$$k = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \quad (2.11)$$

Por otra parte, Auslander [3] propone lo siguiente para el caso multivariable. Considérese ahora el caso de un sistema dinámico de  $n$  variables de estado  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , con  $r$  número de entradas  $u_1, u_2, \dots, u_r$  cuyo modelo es:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

En forma compacta, este modelo se reduce a:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (2.13)$$

En el caso del sistema de tres tanques, se tienen tres variables de estado, que son los niveles de los tanques, y dos entradas, que son los gastos de las bombas. El sistema puede entonces representarse como:

$$\frac{dh}{dt} = f(h, Q) \quad (2.14)$$

donde:

$$f(h, Q) = \begin{bmatrix} f_1(h, Q) \\ f_2(h, Q) \\ f_3(h, Q) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Para linealizar el sistema, se requiere un punto de equilibrio con respecto al cual se consideran las variaciones. Es decir, tomar un punto dentro del conjunto de valores de los gastos de entrada

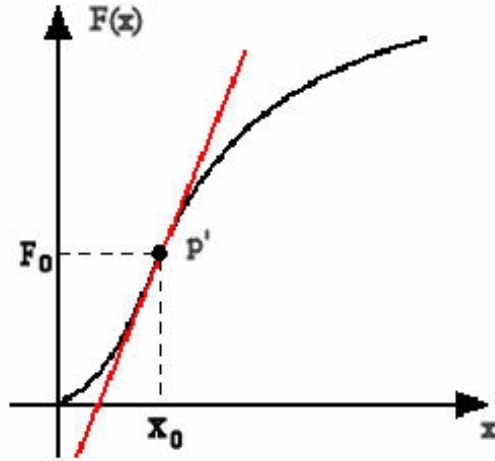


Figura 2-3: Aproximación de una función no-lineal a una función lineal. (Caso dinámico)

y los niveles de los tanques, tales que las derivadas sean cero. En otras palabras, todos los puntos del plano de tres dimensiones tales que:

$$f(h, Q) = 0 \quad (2.18)$$

Considerando un punto de equilibrio arbitrario  $x_0 = (h_1^0, h_2^0, h_3^0, Q_1^0, Q_2^0)$ , la linealización entonces, se reduce a aproximar los términos no-lineales de las ecuaciones de estado por medio de la primera aproximación en serie de Taylor, o lo que es lo mismo, por la tangente en el punto de equilibrio. La *Figura 2-3* presenta una función no-lineal arbitraria que sólo depende de  $x$  para un caso escalar. Se puede observar que al aproximar la función por medio de:

$$F(x)_{lineal} \cong kx \quad (2.19)$$

donde:

$$k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0} \quad (2.20)$$

se está linealizando la función alrededor del punto  $x_0$ .

Entonces, entre más suave sea la función no-lineal en  $(x_0, F_0)$ , más grande será el intervalo  $(\Delta x, \Delta F)$  en donde la aproximación por una recta es adecuada.

Analíticamente, esto implica que al expandir la función  $F(x)$  por medio de series de Taylor de la siguiente forma:

$$F(x) = F_0 + \Delta x \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x_0} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right|_{x_0} + \dots \quad (2.21)$$

se considera que los términos de derivada mayor o igual a 2, son despreciables para  $\Delta x$  pequeños, por lo que:

$$F_{\Delta x} = F_0 + \Delta x \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0} \quad (2.22)$$

Aplicando esta filosofía de linealización para el caso del sistema de tres tanques, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1 \\ \Delta \dot{h}_2 \\ \Delta \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

donde:

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_j} \right|_{x_0}$$

Con el objeto de simplificar la notación, es común eliminar los incrementos  $\Delta$ , sin embargo, debe recordarse a lo largo de este trabajo, que las variables  $h$  y  $Q$  son desviaciones con respecto a los niveles  $h_0$  y  $Q_0$ .

El sistema puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= Ah + BQ \\ h &= Ch + DQ \end{aligned}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## Capítulo 3

# El sistema de tres tanques

### 3.1. El sistema de tres tanques

En esta sección, se presenta una descripción detallada del sistema físico en el que se implementarán los controladores. Se comenzará por desarrollar el modelo matemático del sistema de tanques, y posteriormente se dibujará su diagrama de bloques en SIMULINK<sup>®</sup>. Una vez que se haya obtenido el modelo matemático del sistema, dado que éste resulta ser no-lineal, se procederá a seleccionar un punto de operación, alrededor del cual se obtendrá el modelo lineal que aproxime el comportamiento del sistema.

El sistema hidráulico que servirá de modelo para este trabajo corresponde al sistema de tres tanques de la marca alemana AMIRA, modelo DTS200, con el que cuenta el Laboratorio de Automatización del Instituto de Ingeniería, y cuyo diagrama se muestra en la *Figura 3-1*

El sistema consta de tres tanques formados por tubos de acrílico de sección circular, de la misma altura, y dispuestos de forma vertical. Dos de ellos son alimentados en la parte superior por una bomba cada uno. Los tres tanques se hallan interconectados por tubos también de acrílico, de un diámetro menor, y en medio de éstos se colocaron válvulas de paso manuales, que sirven para interrumpir el flujo entre tanques de manera parcial o total.

Adicionalmente, cada tanque cuenta con una válvula de desfogue manual que sirve para simular fugas de líquido en la columna. Los tres tanques están colocados sobre una cisterna de acrílico, la cual contiene el agua que se vierte por la válvula colocada a la extrema derecha, así como el agua que viene de cada una de las válvulas de simulación de fugas.



Figura 3-1: Sistema de tanques AMIRA DTS200

Cada uno de los tanques cuenta con sensores de presión piezoresistivos en el fondo que se utilizan para calcular la altura de la columna en ellos. Asimismo, el prototipo cuenta con un sistema de protección que corta la alimentación de las bombas cuando el nivel en la columna ha sobrepasado un cierto máximo. El sistema se puede monitorear y controlar por medio de un programa instalado en una computadora, o bien de forma manual, mediante un sistema de control externo proporcionado por el fabricante.

### 3.2. Especificaciones técnicas

De acuerdo con los datos proporcionados por el fabricante [1], las dimensiones, y características de los elementos principales del prototipo son las siguientes:

Sistema de tanques			Tanque cilíndrico		
Dimensión	Valor	Unidades		Valor	Unidad
Longitud	1260	mm	Diámetro exterior	150	mm
Ancho	325	mm	Diámetro interior	140	mm
Altura	830	mm	Altura (incluyendo base y tapa)	670	mm
Peso	34	kg	Nivel máximo de líquido	630	mm

### Válvulas de paso

(Area efectiva)	Valor	Unidad
Tubos de conexión	0.5	cm <sup>2</sup>
Desagüe nominal	0.5	cm <sup>2</sup>
Apertura de fugas	0.8	cm <sup>2</sup>

### Bombas

	Valor	Unidad
Voltaje de operación	12	V
Corriente nominal	1.5	A
Flujo máximo	6	$\frac{l}{mín}$
Presión	1.3	bar
Peso	1.47	kg
Largo	250	mm
Ancho	160	mm
Alto	115	mm

### 3.3. Descripción del modelo dinámico

En la *Figura 3-2* se muestra la nomenclatura que se utilizará a lo largo de este desarrollo.

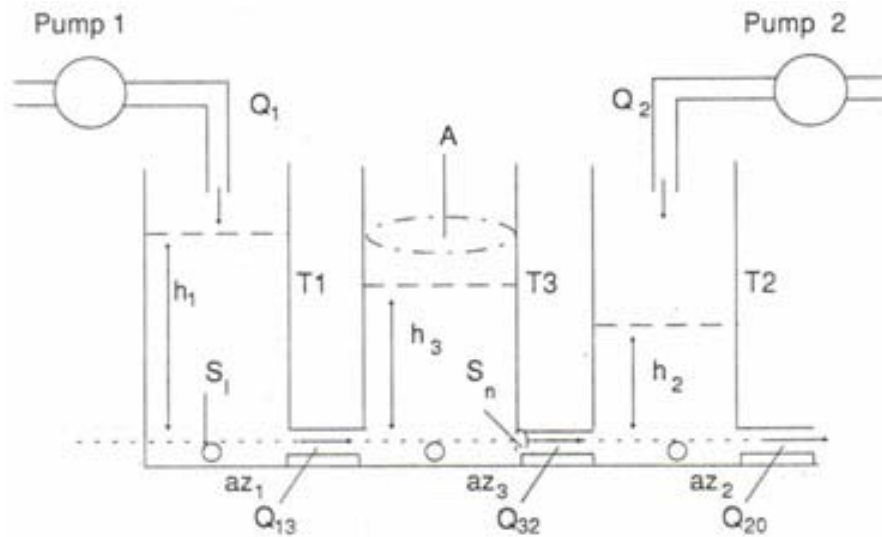


Figura 3-2: Sistema de tres tanques

donde:

$az_i$  = coeficientes de flujo [1]

$h_i$  = nivel de líquido [m]

$Q_{ji}$  = gasto en los tanques [ $\frac{m^3}{s}$ ]

$Q_1, Q_2$  = gasto suministrado por las bombas [ $\frac{m^3}{s}$ ]

$A$  = sección del cilindro [ $m^2$ ]

$S_1$  = sección de apertura de fuga [ $m^2$ ]

$Sn$  = sección del tubo de conexión [ $m^2$ ]

Sea la ecuación de balance para los flujos que ocurren en cualquiera de los tanques:

$$A \frac{dh}{dt} = \text{Suma de todos los flujos} \quad (3.1)$$

Entonces, de acuerdo con la *Figura 3-2*, para cada uno de los flujos se tiene:

$$A \frac{dh_1}{dt} = Q_1 - Q_{13} \quad (3.2)$$

$$A \frac{dh_2}{dt} = Q_{13} - Q_{32} \quad (3.3)$$

$$A \frac{dh_3}{dt} = Q_2 + Q_{32} - Q_{20} \quad (3.4)$$

En las ecuaciones (3.2) y (3.4), los flujos  $Q_1$  y  $Q_2$ , dado que son los flujos provenientes de las bombas, son cantidades conocidas. Los flujos  $Q_{13}$ ,  $Q_{32}$  y  $Q_{20}$  a través de los tubos de conexión, son desconocidos.

Estas cantidades desconocidas se pueden determinar usando la regla generalizada de Torricelli, la cual se puede escribir como:

$$q = az Sn \operatorname{sgn}(\Delta h) (2g |\Delta h|)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

donde:

$q$  = Flujo resultante en el tubo de conexión.

$az$  = Coeficiente de apertura (Valores reales que van de 0 – 1)

$Sn$  = Diámetro del tubo de conexión.

$\operatorname{sgn}(x)$  = Función signo de  $x$ .

$\Delta h$  = Diferencia de alturas entre los tanques conectados por el tubo.

$g$  = Aceleración debida a la gravedad.

Sustituyendo la ecuación (3.5) en las ecuaciones (3.2),(3.3) y (3.4), se tiene:

$$Q_{13} = az_1 Sn \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g|h_1 - h_3|} \quad (3.6)$$

$$Q_{32} = az_2 Sn \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g|h_3 - h_2|} \quad (3.7)$$

$$Q_{20} = az_3 Sn \operatorname{sgn}(h_2) \sqrt{2gh_2} \quad (3.8)$$

Se definen ahora los vectores:

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad A(h) = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} -Q_{13} \\ Q_{32} - Q_{20} \\ Q_{13} - Q_{32} \end{bmatrix} \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Y defínase también la matriz:

$$\bar{B} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones se puede transformar en:

$$\frac{dh}{dt} = A(h) + \bar{B}\bar{Q} \quad (3.9)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Sustituyendo los vectores  $\bar{h}$ ,  $\bar{Q}$ , y la matriz  $\bar{B}$  en (3.9) se obtiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} -Q_{13} \\ Q_{32} - Q_{20} \\ Q_{13} - Q_{32} \end{bmatrix} + \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$y = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Desarrollando la ecuación (3.11):

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \\ \frac{dh_3}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} -az_1 Sn \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g|h_1 - h_3|} + Q_1 \\ az_2 Sn \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g|h_3 - h_2|} - az_3 Sn \operatorname{sgn}(h_2) \sqrt{2g|h_2|} + Q_2 \\ az_1 Sn \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \sqrt{2g|h_1 - h_3|} - az_3 Sn \operatorname{sgn}(h_3 - h_2) \sqrt{2g|h_3 - h_2|} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Antes de sustituir los valores correspondientes en la ecuación anterior, es conveniente hacer la conversión de unidades en las magnitudes que corresponda, para que se manejen las unidades del Sistema Internacional, y también obtener los valores que se hallan implícitos.

$$\begin{aligned} Q_1 &= 6 \left[ \frac{1}{\text{mín}} \right] \times \left[ \frac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ l}} \right] \times \left[ \frac{1 \text{ mín}}{60 \text{ s}} \right] = 10^{-4} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] \\ A &= \pi r^2 = \pi (0.07)^2 [\text{m}^2] = 0.0153 [\text{m}^2] \\ Sn &= 0.5 [\text{cm}^2] \times \left[ \frac{1 \text{ m}^2}{10^4 \text{ cm}^2} \right] = 5 \times 10^{-5} [\text{m}^2] \\ g &= 9.81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \end{aligned}$$

Los valores de  $az_i$  se obtienen de manera experimental mediante una rutina del software del sistema. En trabajos anteriores [10] se han hecho caracterizaciones del mismo sistema, obteniéndose los siguientes valores:

$$az_1 = 0.46$$

$$az_2 = 0.62$$

$$az_3 = 0.45$$

### 3.4. Diagrama de bloques del sistema

En este trabajo se usará SIMULINK<sup>®</sup> para realizar la linealización del modelo matemático del sistema. Por ello, se debe obtener primero una representación en diagrama de bloques del mismo. Esta representación se muestra en la *Figura 3-3* en un diagrama no simplificado.

El modelo compacto del sistema se muestra a continuación (*Figura 3-4*). En él se hace evidente que se trata de un sistema de dos entradas y dos salidas. Más adelante se harán algunas consideraciones acerca de esto.

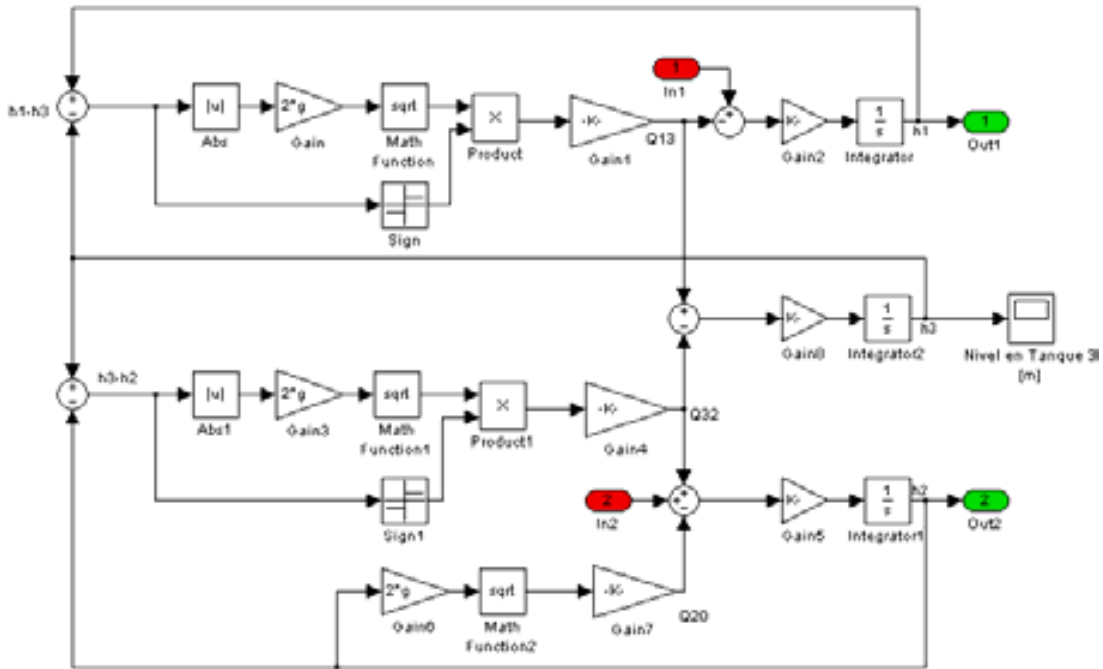


Figura 3-3: Diagrama de bloques del sistema simulado con SIMULINKÓ.

El diagrama simplificado nos ayudará al momento de realizar la linealización alrededor de un punto de operación, pues nos permite identificar claramente en qué puntos tenemos las entradas y las salidas.

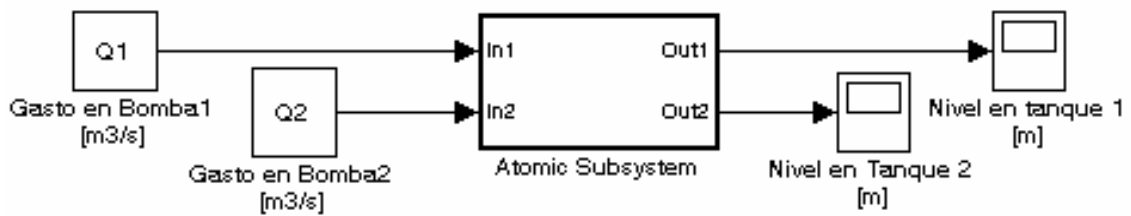


Figura 3-4: Diagrama compacto del sistema de tres tanques.

### 3.5. Linealización del modelo matemático

Como ya se ha mencionado anteriormente, la conveniencia de utilizar modelos lineales para la realización de controladores radica en su simplicidad de diseño.

En este caso, para obtener el modelo lineal, se debe seleccionar primero un punto de funcionamiento como se mencionó en el apartado 2.3. Este punto se puede elegir de manera arbitraria, y para este caso seleccionamos:

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

Para llevar a cabo la linealización del modelo, se utilizará la herramienta “*Control and Estimation Tool Manager*” de SIMULINK<sup>®</sup>. El procedimiento es el siguiente:

1. En la ventana del modelo compacto en SIMULINK<sup>®</sup> se da click derecho en la línea que une el bloque “*Gasto en la bomba Q1 [m<sup>3</sup>]*” con el bloque “*Atomic Subsystem*” y se selecciona: Linearization Points > Input Point. Una marca con flecha hacia abajo debe aparecer.
2. Se repite el paso 1 para el bloque “*Gasto en la bomba Q2 [m<sup>3</sup>]*”
3. Se da click derecho en la línea que une el bloque “*Atomic Subsystem*” con el bloque “*Nivel en Tanque 1 [m]*” y se selecciona: Linearization Points > Output Point. Una marca con flecha hacia arriba debe aparecer.
4. Se repite el paso 3 para el bloque “*Nivel en Tanque 2 [m]*”

Con este proceso se define cuáles serán los puntos de entrada y salida del sistema. Lo siguiente será obtener el modelo lineal; para ello, el procedimiento es el siguiente:

1. En la ventana del modelo no compacto en SIMULINK<sup>®</sup> se da click en el menú: Tools > Control Design > Linear Analysis.



2. En la ventana que aparece (*Control and Estimation Tool Manager*) se selecciona la carpeta “*Operating Points*” en el menú de la izquierda, y luego en la parte derecha se selecciona la pestaña “*Compute Operating Points*” donde aparece una lista de los estados del sistema.
3. En la lista se introducen los valores del punto de operación elegido, y se presiona el botón “*Compute Operating Points*” en la parte de abajo de la ventana para que el programa calcule un punto de operación cercano a las especificaciones que se introdujeron.
4. Una vez generado el punto de operación, se da click en el nodo “*Linearización Task*” del menú de la izquierda y en la parte de la derecha se da click en la pestaña “*Operating Points*” donde se selecciona el punto de operación generado.
5. Se presiona el botón “*Linearize Model*” y se pueden observar los resultados haciendo click en la pestaña “*Linearizations Results*”
6. se selecciona el tipo de despliegue, (función de transferencia, matrices de estados, etc) y se importa al espacio de trabajo si se desea.

Para este caso en particular, el programa calculó la siguiente aproximación al punto de operación seleccionado:

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.21 \\ 0.29 \end{bmatrix}$$

Utilizando este punto de operación se obtiene el siguiente modelo linealizado:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.01347 & 0 & -0.01347 \\ 0 & -0.03451 & -0.0242 \\ -0.01347 & -0.02042 & -0.03389 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 64.94 & 0 \\ 0 & 64.94 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (3.14) \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o su equivalente en función de transferencia:

$$G_{11}(s) = \frac{64.94s^2 + 4.42s + 0.04887}{s^3 + 0.08188s^2 + 0.001493s + 3.876 \times 10^{-6}} \quad (3.15)$$

$$G_{12}(s) = \frac{0.01786}{s^3 + 0.08188s^2 + 0.001493s + 3.876 \times 10^{-6}} \quad (3.16)$$

$$G_{22}(s) = \frac{64.94s^2 + 3.076s + 0.01786}{s^3 + 0.08188s^2 + 0.001493s + 3.876 \times 10^{-6}} \quad (3.17)$$

$$G_{21}(s) = \frac{0.01786}{s^3 + 0.08188s^2 + 0.001493s + 3.876 \times 10^{-6}} \quad (3.18)$$

Donde,  $G_{ij}$  corresponde con el diagrama de la *Figura 3-5* que se muestra a continuación. Para este caso, se puede observar que existen cuatro funciones de transferencia, las cuales representan la contribución de cada entrada a cada una de las salidas.

Por razones de simplificación, se puede considerar que  $G_{12}(s)$  y  $G_{21}(s)$  son lo suficientemente pequeñas como para ser despreciadas, lo cual equivale a decir que las salidas se hallan desacopladas una de otra.

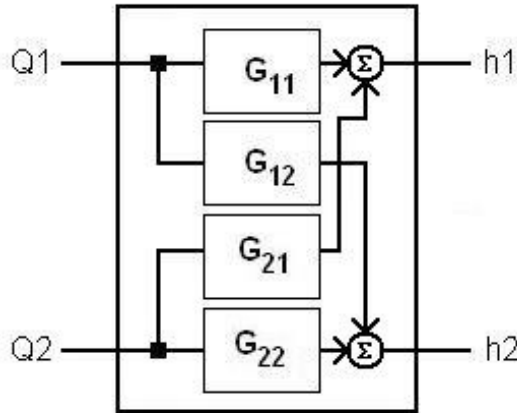


Figura 3-5: Conexión del diagrama de bloques para las distintas funciones de transferencia

En general, se tiene que:

$$\bar{y} = G\bar{u}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Siendo  $\bar{y}$  el vector de salidas,  $G$  la matriz de transferencia del sistema y  $\bar{u}$  el vector de entradas, donde:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= C\bar{e} \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para este caso,  $C$  representa la matriz de transferencia del controlador y  $\bar{e}$  es el error entre el valor de referencia y el valor actual de la salida. El error  $\bar{e}$  esta definido como:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

en donde  $\bar{n}$  son los niveles de referencia en los tanques 1 y 2. Resolviendo en forma compacta para  $\bar{y}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= G\bar{u} \\ \bar{y} &= GC\bar{e} \\ \bar{y} &= GC(\bar{n} - \bar{y}) \\ \bar{y} &= GC\bar{n} - GC\bar{y} \\ \bar{y} + GC\bar{y} &= GC\bar{n} \\ (I + GC)\bar{y} &= GC\bar{n} \end{aligned}$$

Premultiplicando ambos miembros de la ecuación por la matriz inversa  $(I + GC)^{-1}$  se obtiene:

$$\bar{y} = (I + GC)^{-1} GC\bar{n} \quad (3.19)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

donde:

$$T_{11} = c_1 \frac{g_{11} + c_2 g_{11} g_{22} - c_2 g_{12} g_{21}}{c_1 g_{11} + c_2 g_{22} + c_1 c_2 g_{11} g_{22} - c_1 c_2 g_{12} g_{21} + 1} \quad (3.21)$$

$$T_{12} = c_2 \frac{g_{12}}{c_1 g_{11} + c_2 g_{22} + c_1 c_2 g_{11} g_{22} - c_1 c_2 g_{12} g_{21} + 1} \quad (3.22)$$

$$T_{21} = c_1 \frac{g_{21}}{c_1 g_{11} + c_2 g_{22} + c_1 c_2 g_{11} g_{22} - c_1 c_2 g_{12} g_{21} + 1} \quad (3.23)$$

$$T_{22} = c_2 \frac{g_{22} + c_1 g_{11} g_{22} - c_1 g_{12} g_{21}}{c_1 g_{11} + c_2 g_{22} + c_1 c_2 g_{11} g_{22} - c_1 c_2 g_{12} g_{21} + 1} \quad (3.24)$$

Más adelante se observará, para el caso del controlador PID, que las componentes  $T_{12}$  y  $T_{21}$  son lo suficientemente pequeñas como para ser despreciadas, lo cual implica que el error que se comete al considerar que los tanques se hallan desacoplados, no es significativo.

## Capítulo 4

# Generación de la familia de controladores

En este capítulo se muestra la metodología utilizada para el diseño de los controladores PID, la cual utiliza como base las ideas planteadas en el Capítulo 2. Se comenzará por presentar el método de diseño para el caso más simple, cuando el controlador es una ganancia constante  $C(s) = k$ , continuando con el caso del controlador PI, es decir  $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$ , para finalizar con el diseño del controlador PID;  $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + sk_d$ .

### 4.1. Controlador proporcional (P)

El primer caso a analizar será el caso del controlador proporcional. Considérese el sistema mostrado en la *Figura 4-1*; en este caso,  $r$  es la señal de control y  $y$  es la señal de respuesta.

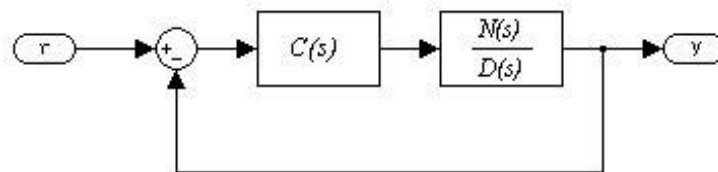


Figura 4-1: Sistema de control realimentado

En donde:

$$C(s) = k$$

por lo tanto, el polinomio característico de lazo cerrado es:

$$\delta(s, k) = D(s) + kN(s) \quad (4.1)$$

el objetivo es determinar aquellos valores de  $k$ , si los hay, que hacen que el sistema en lazo cerrado sea estable, es decir, que sea Hurwitz.

Bhattacharyya [5], proporciona la siguiente deducción: Según se presentó en el Capítulo 2 de este trabajo, el polinomio característico (o cualquier otro polinomio), puede ser descompuesto en partes par e impar, sin embargo, se puede observar que en la ecuación 4.1, tanto la parte par como la impar dependen de  $k$ , lo cual crea dificultades para aplicar el *Teorema 2*. Por ello, el primer paso será construir un polinomio en el que sólo una de las dos partes dependa de  $k$ .

Considérese la ecuación 4.1 con la siguiente descomposición:

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2) \quad (4.2)$$

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2) \quad (4.3)$$

Supóngase que el grado de  $D(s)$  es  $n$ , mientras que el grado de  $N(s)$  es  $m$ , y además  $n \geq m$ . Se define ahora el polinomio auxiliar:

$$N^*(s) := N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2) \quad (4.4)$$

Multiplicando ahora  $\delta(s, k)$  por  $N^*(s)$  y examinando el resultado:

$$\begin{aligned} l(\delta(s, k)N^*(s)) - r(\delta(s, k)N^*(s)) &= l(\delta(s, k)) - r(\delta(s, k)) + l(N^*(s)) - r(N^*(s)) \\ &= l(\delta(s, k)) - r(\delta(s, k)) + l(N(-s)) - r(N(-s)) \\ &= l(\delta(s, k)) - r(\delta(s, k)) - [l(N(s)) - r(N(s))] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ahora bien,  $\delta(s, k)$ , que es de grado  $n$ , será Hurwitz si y solo si  $l(\delta(s, k)) = n$  y  $r(\delta(s, k)) = 0$ ; es decir, que todas las raíces se encuentran del lado izquierdo del plano  $s$ , por lo tanto, aplicando

el Teorema 2,  $\delta(s, k)$  es Hurwitz si y solo si:

$$\sigma_i(\delta(s, k)N^*(s)) = n - [l(N(s)) - r(N(s))] \quad (4.6)$$

Desarrollando el producto  $\delta(s, k)N^*(s)$  y sustituyendo  $s = j\omega$  se obtiene un polinomio de la forma:

$$\delta(j\omega, k)N^*(j\omega) = p(\omega, k) + jq(\omega) \quad (4.7)$$

donde:

$$p(\omega, k) = p_1(\omega) + kp_2(\omega) \quad (4.8)$$

$$p_1(\omega) = [D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)] \quad (4.9)$$

$$p_2(\omega) = [N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)] \quad (4.10)$$

$$q(\omega) = \omega [N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)] \quad (4.11)$$

Se define también:

$$p_f(\omega, k) = \frac{p(\omega, k)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}} \quad (4.12)$$

$$q_f(\omega) = \frac{q(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}} \quad (4.13)$$

Dado que  $n$ ,  $l(N(s))$  y  $r(N(s))$  son fijos y además conocidos, entonces los valores de  $k$  se pueden obtener a partir de la ecuación 4.6.

Para el establecimiento formal del resultado, se incluyen ciertas cadenas de los números reales 0, 1 y  $-1$ . Estas cadenas de números se utilizan esencialmente para capturar las diferentes posibilidades del signo de  $p_f(\omega, k)$  en los ceros de  $q_f(\omega)$ , y es donde se ve involucrada la condición de alternancia de las raíces de las partes par e impar de  $\delta(s, k)$ .

Para establecer formalmente estas cadenas, se presenta la siguiente definición:

**Definición 4** Sean los enteros  $m, n$  y la función  $q_f(\omega)$  como se definió anteriormente. Sean  $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$  los ceros reales, finitos y no negativos de  $q_f(\omega)$  con multiplicidad impar. Se define una secuencia de números  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{l-1}$  como sigue:

(i) Si  $N^*(j\omega_t) = 0$  para algún  $t = 0, 1, 2, \dots, l-1$ , entonces se define

$$i_t = 0;$$

(ii) Si  $N^*(s)$  tiene un cero de multiplicidad  $k_n$  en el origen, entonces se define:

$$i_0 = \operatorname{sgn} \left[ p_{1_f}^{(k_n)}(0) \right]$$

donde:

$$p_{1_f}(\omega) = \frac{p(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}$$

(iii) Para todos los demás  $t = 0, 1, 2, \dots, l$ ,

$$i_t \in \{1, -1\}$$

Con  $i_0, i_1, \dots$  definidos de este modo, se define también el conjunto  $A$  como:

$$A := \begin{cases} \{\{i_0, i_1, \dots, i_l\}\} & \text{si } m+n \text{ es par} \\ \{\{i_0, i_1, \dots, i_{l-1}\}\} & \text{si } m+n \text{ es impar} \end{cases}$$

A continuación se presenta también un conjunto  $A(\gamma)$  de las posibles cadenas de  $A$  que cumplen con una cierta condición llamada "*firma imaginaria*" (Que no es la misma que se definió anteriormente). Para presentar el conjunto  $A(\gamma)$ , se define primero la "*firma imaginaria*"  $\gamma(\Gamma)$ .

**Definición 5** Sean los enteros  $m, n$  y las funciones  $p_f(\omega)$  y  $q_f(\omega)$  como se definieron anteriormente. Sean  $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$  los ceros reales, finitos y no negativos de  $q_f(\omega)$  con multiplicidad impar. Defínase también  $\omega_l = \infty$ . Para cada cadena  $\Gamma = \{i_0, i_1, \dots\}$  en  $A$ ,



$\gamma(\Gamma)$  denota la “firma imaginaria” asociada con la cadena  $\Gamma$ , definida por:

$$\gamma(\Gamma) = \begin{cases} \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l\} (-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty)] \\ \text{para } m + n \text{ par} \\ \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1}\} (-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty)] \\ \text{para } m + n \text{ impar} \end{cases}$$

**Definición 6** El conjunto de cadenas en  $A$  con una “firma imaginaria” determinada,  $\gamma = \psi$  se denota como  $A(\psi)$ . Defínase también el conjunto de cadenas factibles para el problema de ganancia estabilizadora como:

$$F^* = A(n - (l(N(s)) - r(N(s))))$$

Todas estas definiciones se verán ilustradas cuando se apliquen al caso particular del sistema de tres tanques. Finalmente, el resultado principal de este apartado se resume en el siguiente teorema, cuya demostración se puede verificar en [5].

**Teorema 7 (Ganancia estabilizante constante)** *El problema de ganancia estabilizadora de realimentación tiene solución para una planta dada, con función de transferencia  $G(s)$ , si y solo si las siguientes condiciones se mantienen:*

(i)  $F^*$  no está vacío, donde  $F^*$  es como se definió anteriormente, es decir, existe al menos una cadena factible.

(ii) Existe una cadena  $\Gamma = \{i_0, i_1, \dots\} \in F^*$  tal que:

$$\max_{i_t \in \Gamma, i_t > 0} \left[ -\frac{1}{G(j\omega_t)} \right] < \min_{i_t \in \Gamma, i_t < 0} \left[ -\frac{1}{G(j\omega_t)} \right]$$

donde  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$  son como se definió anteriormente. Además, si las condiciones mencionadas se satisfacen para las cadenas factibles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_s \in F^*$ , entonces el conjunto de todas las ganancias estabilizantes está dado por  $K = \cup_{r=1}^s K_r$  donde:

$$K_r = \left( \max_{i_t \in \Gamma, i_t > 0} \left[ -\frac{1}{G(j\omega_t)} \right], \min_{i_t \in \Gamma, i_t < 0} \left[ -\frac{1}{G(j\omega_t)} \right] \right), \quad r = 1, 2, \dots, s$$

Es apropiado anotar que las partes (i) y (ii) de este teorema proveen de una caracterización de todas las plantas que pueden ser estabilizadas por una ganancia constante. También hay que hacer notar que una condición necesaria para que  $F^*$  no sea vacío es que:

para  $m + n$  par:

$$l \geq \frac{|n - [l(N(s)) - r(N(s))]|}{2}$$

y para  $m + n$  impar:

$$l \geq \frac{|n - [l(N(s)) - r(N(s))]| + 1}{2}$$

Una vez presentados los elementos que permiten aplicar el *Teorema 2* para un problema de ganancia estabilizante, lo se utilizarán para el caso particular del sistema de tres tanques. Considérese la ecuación 3.15, en este caso  $m = 2$  y  $n = 3$ .

$$N(s) = 64.92s^2 + 4.442s + 0.04887$$

$$D(s) = s^3 + 0.08188s^2 + 0.001493s + 3.876 \times 10^{-6}$$

$$N_e(s^2) = 64.94s^2 + 0.04887 \quad (4.14)$$

$$N_o(s^2) = 4.442 \quad (4.15)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} N^*(s) &= N_e(s^2) - sN_o(s^2) \\ &= 64.94s^2 - 4.442s + 0.04887 \end{aligned} \quad (4.16)$$

cuyas raíces son:

$$s_1 = 0.0546$$

$$s_2 = 0.0138$$

Haciendo  $\delta(s, k)N^*(s)$  se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta(s, k)N^*(s) &= (0.8752s^4 - 0.0023s^2 + 1.8942 \times 10^{-7}) \\ &+ k(4217.2s^4 - 13.3842s^2 + 0.0023) \\ &+ s(64.94s^4 - 0.2178s^2 + 5.5745 \times 10^{-5})\end{aligned}\quad (4.17)$$

sustituyendo  $s = j\omega$ :

$$\delta(j\omega)N^*(j\omega) = p_1(\omega) + kp_2(\omega) + jq(\omega)$$

donde:

$$p_1(\omega) = 0.8752\omega^4 + 0.0023\omega^2 + 1.8942 \times 10^{-7} \quad (4.18)$$

$$p_2(\omega) = 4217.2\omega^4 + 13.3842\omega^2 + 0.0023 \quad (4.19)$$

$$q(\omega) = \omega(64.94\omega^4 + 0.2178\omega^2 + 5.5745 \times 10^{-5}) \quad (4.20)$$

Se obtienen ahora los ceros de  $q_f(\omega)$  :

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega_{1,2} = \pm 0.5789j$$

$$\omega_{3,4} = \pm 0.016j$$

por lo tanto, sólo existe un cero real  $\omega_0 = 0$ . Según la *Definición 4*, y dado que  $m + n = 5$  es impar, el conjunto  $A$  esta dado por:

$$A = \{i_0, i_1, \dots, i_{l-1}\}$$

en este caso, dado que sólo existe una raíz:

$$l - 1 = 0$$

$$l = 1$$

por lo que el conjunto  $A$  queda definido como:

$$A = \{\{1\}, \{-1\}\}$$

además, se sabe que:

$$n - [l(N(s)) - r(N(s))] = 3 - (2 - 0) = 1$$

$$\gamma(\Gamma) = \{i_0\} (-1)^{l-1} \text{sgn} [q(\infty)]$$

donde:

$$\text{sgn} [q(\infty)] = 1$$

por lo tanto, se debe satisfacer que:

$$i_0(-1)^0(1) = 1$$

$$i_0 = 1$$

$$F^* = \{\{1\}\}$$

Dado que existe una sola cadena, de un solo elemento en el conjunto  $F^*$ , ello no permite aplicar el *Teorema 7* directamente. Considérese entonces lo siguiente: de acuerdo con Bhattacharyya [5], si  $N^*(s)$  y  $\delta(s, k)N^*(s)$  no tienen raíces sobre el eje imaginario, es decir,  $i_j \in \{-1, 1\}$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, l$ . entonces se tiene la posibilidad de que:  $i_j > 0$ . En este caso, el criterio de estabilidad será:

$$p_1(\omega) + kp_2(\omega) > 0 \tag{4.21}$$

donde, de la ecuación 4.10, se sabe que:

$$p_2(\omega) = |N(j\omega)|^2 \tag{4.22}$$

dado que  $N^*(s)$  no tiene ningún cero en el eje  $j\omega$ , entonces  $p_2(\omega_j) > 0$  por lo tanto:

$$k > -\frac{p_1(\omega_j)}{p_2(\omega_j)} \quad (4.23)$$

Es decir, que el rango de valores de  $k$  que estabilizan este sistema esta en el rango:

$$k_{p1} > -7.9312 \times 10^{-5}$$

Procediendo de manera análoga, para la ecuación 3.17, el rango de valores de  $k$  es:

$$k_{p2} > -2.1702 \times 10^{-4}$$

Se probaron valores de  $k_{p1} = \{0.005, 0.9\}$  y  $k_{p2} = \{0.02, 0.75\}$ , El diagrama de la planta con controlador se muestra en la *Figura 4-2*. Los resultados obtenidos para la simulación se muestran en las *Figuras: 4-3 a 4-10*.

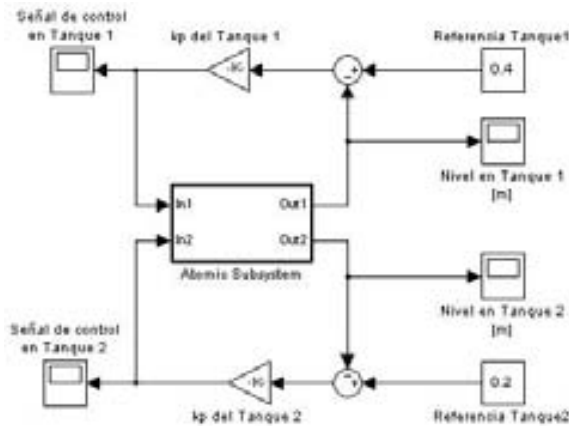


Figura 4-2: Diagrama de bloques de la planta con controlador  $P$

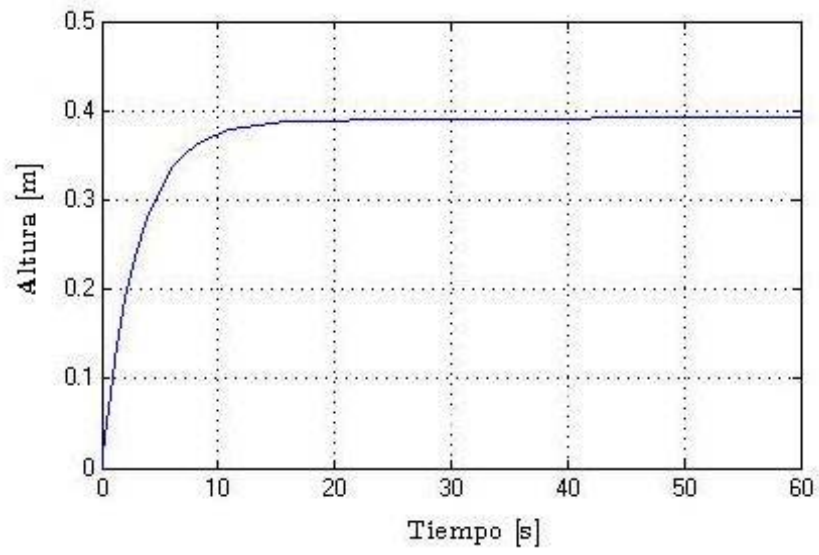


Figura 4-3: Altura de la columna en el *Tanque 1* para  $k_p = 0.005$

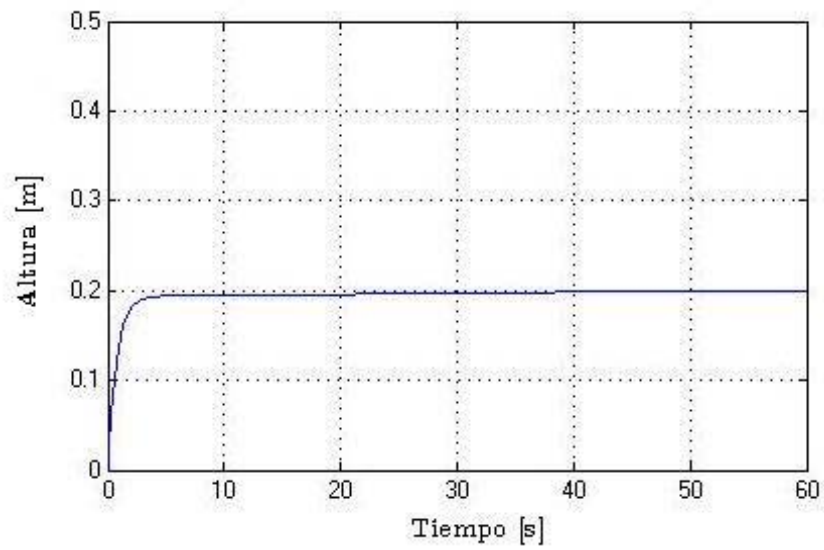


Figura 4-4: Altura de la columna en el *Tanque 2* para  $k_{p2} = 0.02$

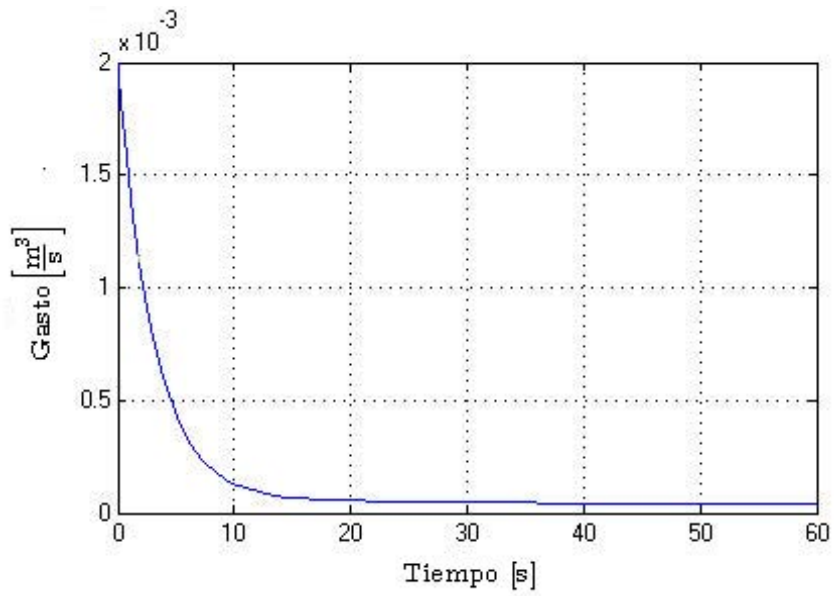


Figura 4-5: Señal de control para la *Bomba*  $Q_1$  cuando  $k_{p1} = 0.005$

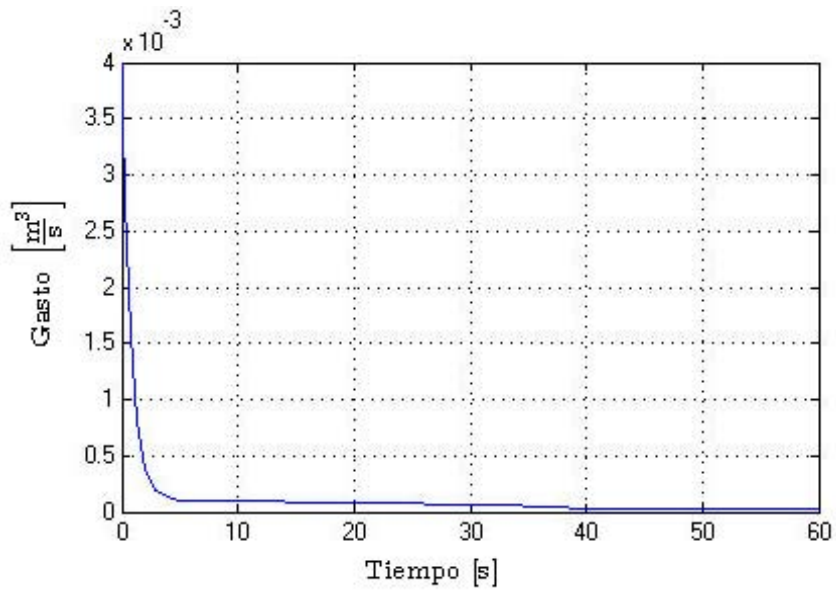


Figura 4-6: Señal de control para la *Bomba*  $Q_2$  cuando  $k_{p2} = 0.02$

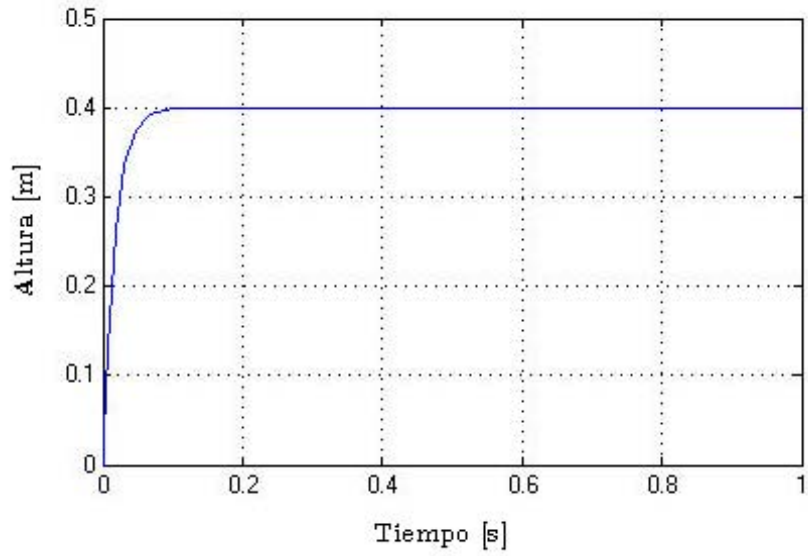


Figura 4-7: Altura de la columna en el *Tanque 1* cuando  $k_{p1} = 0.9$

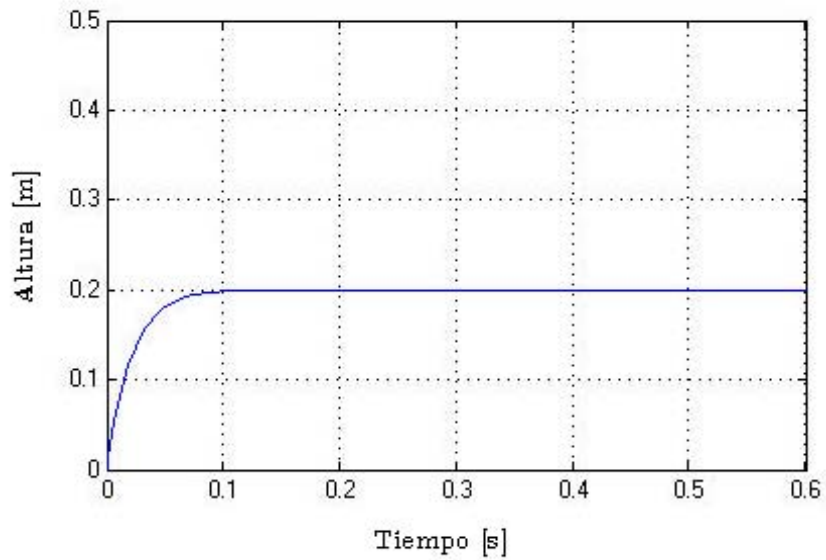


Figura 4-8: Altura de la columna en el *Tanque 2* cuando  $k_{p2} = 0.75$



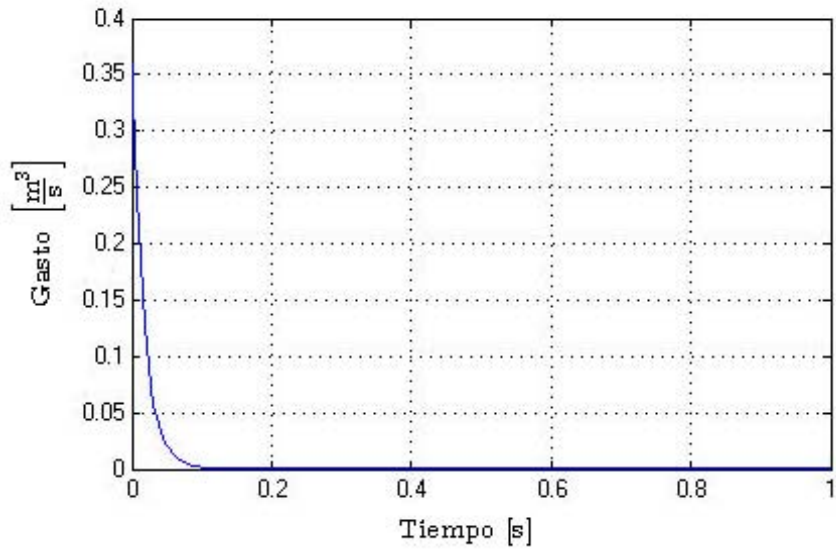


Figura 4-9: Señal de control para la *Bomba Q<sub>1</sub>* cuando  $k_{p1} = 0.9$

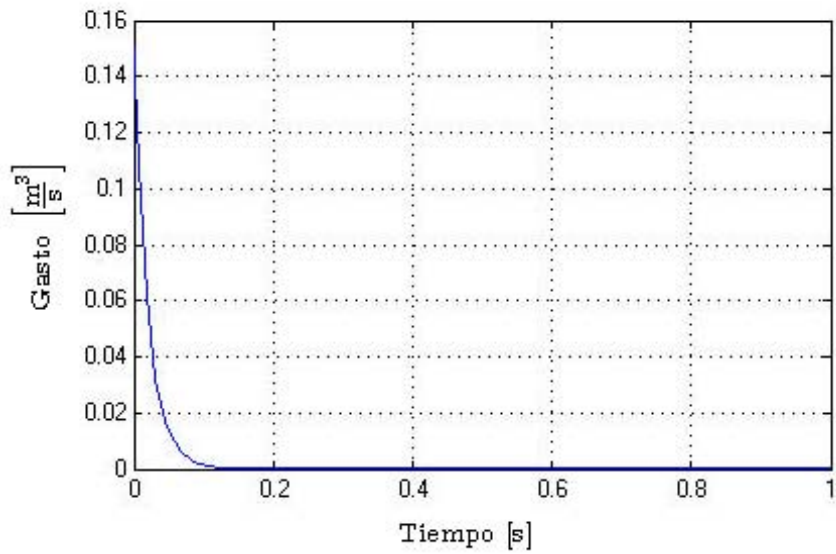


Figura 4-10: Señal de control para la *Bomba Q<sub>2</sub>* cuando  $k_{p2} = 0.75$

## 4.2. Controlador Proporcional - Integral (PI)

El caso de un controlador proporcional-integral se puede resolver como una extensión del caso de un controlador proporcional simple. La técnica consiste en construir primero un polinomio en  $s$  cuyas partes par e impar se vean afectadas de manera independiente por cada una de las constantes  $k_p$  y  $k_i$ ; de este modo, lo que se hará es hallar para una de las constantes ( $k_p$ ) el, o los intervalos de valores que hagan estable al sistema, y después hacer un barrido sobre estos intervalos, resolviendo un problema de ganancia estabilizante para la segunda constante ( $k_i$ ) en cada paso. Como resultado se obtiene una cierta región que contiene las parejas de valores posibles de  $k_p$  y  $k_i$  que hacen estable al sistema.

Considérese nuevamente la *Figura 4-1*. Para este caso:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_i + k_p s}{s} \quad (4.24)$$

por lo que el polinomio característico de lazo cerrado es:

$$\delta(s, k_p, k_i) = sD(s) + (k_i + k_p s)N(s) \quad (4.25)$$

Sea  $n$  el grado de  $\delta(s, k_p, k_i)$ , considérese también la descomposición que se ha hecho anteriormente para  $N(s)$  y  $D(s)$  en partes par e impar, y considérese también el polinomio auxiliar  $N^*(s)$ .

Sea  $m$  el grado de  $N(s)$ . Multiplicando  $\delta(s, k_p, k_i)$  por  $N^*(s)$ , se obtiene:

$$l(\delta(s, k_p, k_i)N^*(s)) - r(\delta(s, k_p, k_i)N^*(s)) = l(\delta(s, k_p, k_i)) - r(\delta(s, k_p, k_i)) - (l(N(s)) - r(N(s))) \quad (4.26)$$

Nuevamente,  $\delta(s, k_p, k_i)$  será Hurwitz si y solo si, todas las raíces del mismo se encuentran del lado izquierdo del plano  $s$ , es decir  $l(\delta(s, k_p, k_i)) = n$  y  $r(\delta(s, k_p, k_i)) = 0$ . Por lo que, de acuerdo con el *Teorema 2*,  $\delta(s, k_p, k_i)$  será Hurwitz si y solo si:

$$\sigma_i(\delta(s, k_p, k_i)N^*(s)) = n - (l(N(s)) - r(N(s))) \quad (4.27)$$

Haciendo  $\delta(s, k_p, k_i)N^*(s)$  y sustituyendo  $s = j\omega$  se obtiene:

$$\delta(j\omega, k_p, k_i)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i) + jq(\omega, k_p) \quad (4.28)$$

donde:

$$p(\omega, k_i) = p_1(\omega) + k_i p_2(\omega) \quad (4.29)$$

$$q(\omega, k_p) = q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) \quad (4.30)$$

$$p_1(\omega) = -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (4.31)$$

$$p_2(\omega) = N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \quad (4.32)$$

$$q_1(\omega) = \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (4.33)$$

$$q_2(\omega) = \omega(N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (4.34)$$

Nótese que los ceros de  $q(\omega, k_p)$  no dependen de  $k_i$ . Por lo tanto, haciendo un barrido sobre todos los valores reales de  $k_p$  y resolviendo un problema de ganancia constante en cada paso, se pueden determinar todas las posibles parejas  $(k_p, k_i)$  que estabilizan una planta dada. De acuerdo con los resultados de la sección anterior, el rango de valores de  $k_p$  se puede reducir bastante, ya que una condición para la existencia de  $k_i$  es que  $q(\omega, k_p)$  tenga, al menos

$$\frac{|n - [l(N(s)) - r(N(s))]|}{2}$$

o bien

$$\frac{|n - [l(N(s)) - r(N(s))]| + 1}{2}$$

ceros reales, distintos y no negativos de multiplicidad impar, dependiendo de si  $m + n$  es par o impar, respectivamente.

Considérese ahora el caso particular del sistema de tres tanques, donde:

$$\begin{aligned}
 N(s) &= 64.92s^2 + 4.442s + 0.04887 \\
 N(s) &= (s + 0.0546)(s + 0.0138) \\
 D(s) &= s^3 + 0.08188s^2 + 0.001493s + 3.876 \times 10^{-6} \\
 D(s) &= (s + 0.0568)(s + 0.0220)(s + 0.0031)
 \end{aligned}$$

Para el caso del controlador PI, se observó que el problema podía resolverse de manera más sencilla si se hacía una simplificación de un polo y un cero que estaban sumamente cercanos. Para el controlador proporcional, este hecho no resultó significativo, sin embargo, en este caso resulta conveniente hacer esta simplificación. Una vez realizada, la nueva planta resulta:

$$N(s) = 64.92s + 0.8946 \quad (4.35)$$

$$N(s) = 64.92(s + 0.0138) \quad (4.36)$$

$$D(s) = s^2 + 0.02508s + 6.8247 \times 10^{-5} \quad (4.37)$$

$$D(s) = (s + 0.0220)(s + 0.0031) \quad (4.38)$$

$$N_e(s^2) = 0.8946 \quad (4.39)$$

$$N_o(s^2) = 64.92 \quad (4.40)$$

$$D_e(s^2) = s^2 + 6.8247 \times 10^{-5} \quad (4.41)$$

$$D_o(s^2) = 0.02508 \quad (4.42)$$

Una vez realizadas las operaciones correspondientes, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \delta(s, k_p, k_i)N^*(s) &= s^2(-64.94s^2 + 0.01801) \\
 &\quad + k_i(-4217.2s^2 + 0.8003) \\
 &\quad + s(-0.7345s^2 + 6.1056 \times 10^{-5}) \\
 &\quad + k_p(-4217.2s^4 + 0.8003)
 \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde, sustituyendo  $s = j\omega$  se obtiene:

$$p_1(\omega) = -\omega^2(64.94\omega^2 + 0.01801) \quad (4.44)$$

$$p_2(\omega) = 4217.2036\omega^2 + 0.8003 \quad (4.45)$$

$$q_1(\omega) = 0.7345\omega^3 + 6.1056 \times 10^{-5}\omega \quad (4.46)$$

$$q_2(\omega) = 4217.2036\omega^3 + 0.8003\omega \quad (4.47)$$

Para realizar el siguiente paso, Bhattacharyya [5] hace las siguientes observaciones. Considérese el problema de hallar el lugar de las raíces de  $U(x) + kV(x) = 0$  cuando  $k$  varía desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ .

1) Los puntos de ruptura sobre el eje real, del lugar geométrico de las raíces de  $U(x) + kV(x) = 0$ , corresponden a raíces reales repetidas, y deben, por lo tanto, satisfacer:

$$\frac{d\left(\frac{V(x)}{U(x)}\right)}{dx} = 0 \quad (4.48)$$

2) Sean  $k_1 < k_2 < \dots < k_z$  los valores finitos y distintos de  $k$  que corresponden a los puntos de despegue del eje real  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, z$  del lugar de las raíces de  $U(x) + kV(x) = 0$ . Nótese que para  $k \in (k_i, k_{i+1})$ , la distribución de las raíces de  $U(x) + kV(x) = 0$  permanece constante.

Aprovechando estas observaciones, y la condición de existencia planteada anteriormente para  $k_i$  podemos proceder de la siguiente manera. Considérese:

$$q(\omega, k_p) = \omega[U(\omega) + kV(\omega)] \quad (4.49)$$

$$U(\omega) = 0.7345\omega^2 + 6.1056 \times 10^{-5} \quad (4.50)$$

$$V(\omega) = 4217.2036\omega^2 + 0.8003 \quad (4.51)$$

Entonces, para hallar los puntos de ruptura sobre el eje real, es necesario hallar los ceros de

$$\frac{U(\omega)\frac{dV(\omega)}{d\omega} - V(\omega)\frac{dU(\omega)}{d\omega}}{U^2(\omega)} = 0 \quad (4.52)$$

Haciendo las operaciones correspondientes y resolviendo, se obtiene:

$$\omega_0 = 0$$

Ahora bien, utilizando esta raíz real, su correspondiente  $k$  es:

$$k_0 = -7.9 \times 10^{-5}$$

Lo que significa que el intervalo sobre cual se puede hacer el barrido de  $k_p$  es:

$$k_p > -7.9 \times 10^{-5}$$

El siguiente paso consiste en resolver para distintos valores de  $k_p$ , un problema de ganancia estabilizante para hallar el rango de  $k_i$ . Considérese por ejemplo  $k_p = 0$

$$p_1(\omega) = -\omega^2(64.94\omega^2 + 0.01801) \quad (4.53)$$

$$p_2(\omega) = 4217.2036\omega^2 + 0.8003 \quad (4.54)$$

$$q_1(\omega) = 0.7345\omega^3 + 6.1056 \times 10^{-5}\omega \quad (4.55)$$

De los polinomios correspondientes a  $\delta(j\omega, 0, k_i)$ , se puede observar que se produce la misma situación que en el caso del controlador proporcional simple. Las raíces de  $q(\omega)$  son:

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega_1 = \pm 0.0091j$$

es decir, la única raíz real es  $\omega_0 = 0$ , lo que significa que en el conjunto  $F_{k_i}^*$  habrá nuevamente sólo un término y se tiene que usar la condición:

$$k > -\frac{p_1(\omega_0)}{p_2(\omega_0)}$$

para este caso:

$$k_i > 0$$

Procediendo de manera similar en el barrido de los demás valores de  $k_p$  se obtiene, para la función de transferencia de la ecuación 3.15, la región que se muestra en la *Figura 4-11*. Utilizando el mismo procedimiento, se obtiene, para la función de transferencia de la ecuación 3.17:

$$k_p > -2.1702 \times 10^{-4}$$

$$k_i > 0$$

En cuyo caso, la región que determina los valores  $(k_p, k_i)$  esta dada en la *Figura 4-12*.

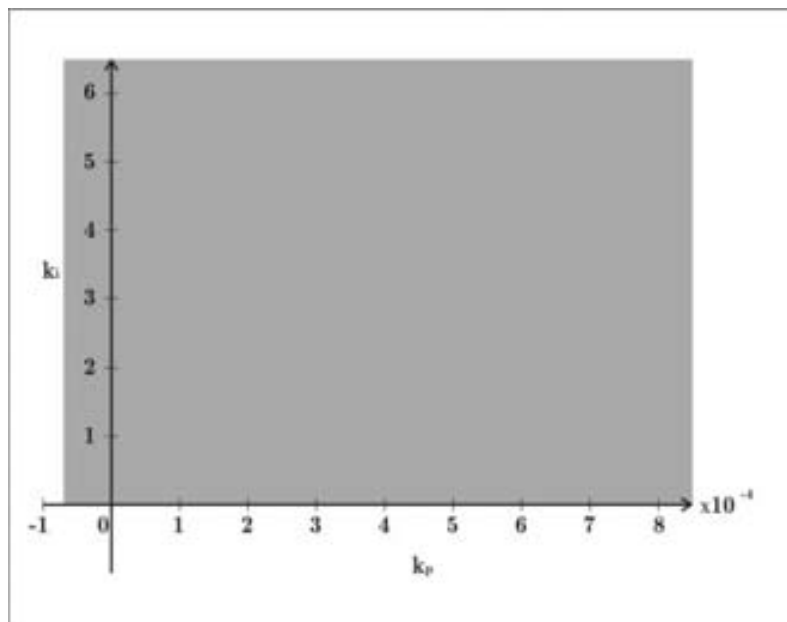


Figura 4-11: Región de valores estabilizantes  $(k_p, k_i)$  para la planta de la ecuación 3.15.

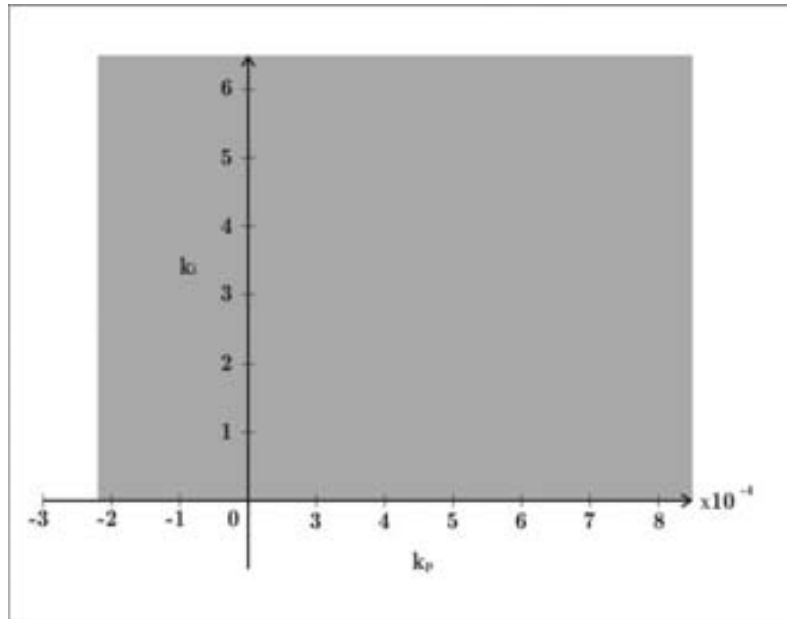


Figura 4-12: Región de valores estabilizantes  $(k_p, k_i)$  para la planta de la ecuación 3.17.

Dado que esta planta es relativamente sencilla, estos resultados se pueden comprobar utilizando el Lugar Geométrico de las Raíces (LGR) de la siguiente manera: Considérese la *Figura 4-1*; para este caso:

$$\begin{aligned}
 C(s) &= k_p + \frac{k_i}{s} \\
 &= \frac{k_p(s + \frac{k_i}{k_p})}{s}
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{k(s + a)}{(s + b)(s + c)} \\
 &= \frac{64.94(s + 0.0137)}{(s + 0.0220)(s + 0.0031)}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Como se puede observar, el controlador  $C(s)$  agrega a la planta un polo en 0 y un cero que depende de la relación  $\frac{k_i}{k_p}$ , de manera que se tienen los siguientes casos para la distribución de las raíces; en primer lugar, supóngase que  $k_p > 0$  y  $k_i > 0$ .



Si  $\left| \frac{k_i}{k_p} \right| > |c|$ , entonces el LGR del sistema es como se muestra en la Figura 4-13, en cuyo caso, el sistema permanece estable.

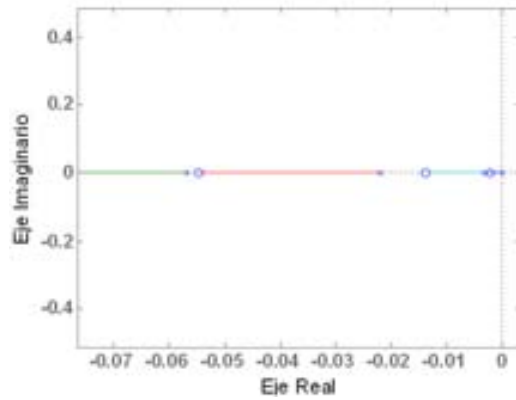


Figura 4-13: LGR cuando  $\left| \frac{k_i}{k_p} \right| > |c|$

Si  $|b| > \left| \frac{k_i}{k_p} \right| > |c|$ , entonces el LGR del sistema es como se muestra en la Figura 4-14; en este caso, el sistema sigue siendo estable.

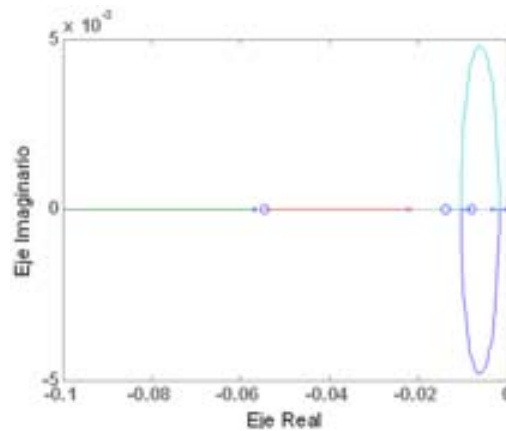


Figura 4-14: LGR cuando  $|b| > \left| \frac{k_i}{k_p} \right| > |c|$

Finalmente, si  $\left| \frac{k_i}{k_p} \right| > |b|$ , entonces el LGR del sistema es como se muestra en la Figura 4-15; de donde se observa que el sistema sigue siendo estable.

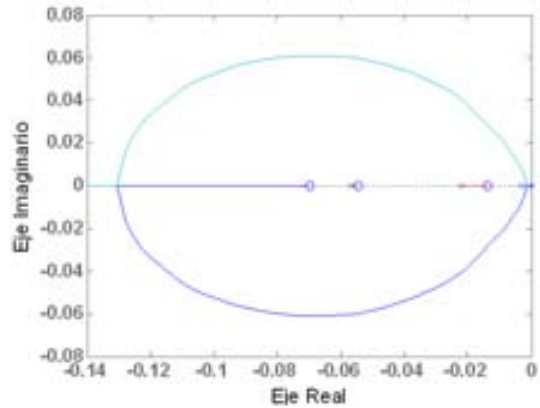


Figura 4-15: LGR cuando  $\left| \frac{k_i}{k_p} \right| > |b|$

De lo anterior se concluye que el sistema será estable para cualquier  $k_p > 0$  siempre que  $k_i > 0$ .

Si,  $k_p < 0$  y  $k_i > 0$ , entonces, el LGR del sistema será como se muestra en la Figura 4-16.

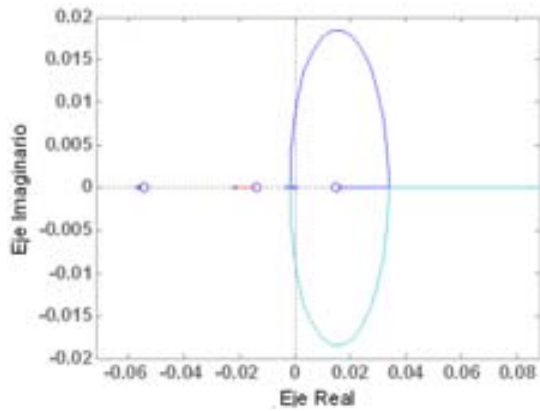


Figura 4-16: LGR para  $k_p < 0$  y  $k_i > 0$ .

Para este caso, se puede apreciar que existe un valor límite para el cual el sistema dejará de ser estable. Para hallar este valor se puede hacer el siguiente análisis; el polinomio característico será:

$$sD(s) + k_p N(s) \left( s + \frac{k_i}{k_p} \right) = 0 \quad (4.58)$$

Donde, al sustituir los valores correspondientes, se obtiene:

$$s^3 + (0.0251 + 64.94k_p)s^2 + (6.8247 \times 10^{-5} + 0.8946k_p + 64.94k_i)s + 0.8946k_i = 0 \quad (4.59)$$

Una condición necesaria para que el polinomio sea estable, es que todos los coeficientes sean positivos, por lo tanto:

$$0.8946k_i > 0 \quad (4.60)$$

$$6.8247 \times 10^{-5} + 0.8946k_p + 64.94k_i > 0 \quad (4.61)$$

$$0.0251 + 64.94k_p > 0 \quad (4.62)$$

De estas condiciones se puede obtener:

$$k_i > 0$$

$$k_p > -3.8651 \times 10^{-4}$$

Para el caso de la desigualdad 4.61, llevando  $k_i$  al límite cuando vale 0,

$$k_p > \frac{-6.8247 \times 10^{-5}}{0.8946}$$

$$k_p > -7.6288 \times 10^{-5}$$

La cual es la segunda condición hallada con el método de la firma del polinomio.

El diagrama a bloques de la planta con el controlador PI se muestra en la Figura 4-17. Los resultados de la simulación para los valores  $(k_{p1}, k_{i1}) = \{(0.05, 0.025), (4 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-4})\}$  y  $(k_{p2}, k_{i2}) = \{(0.06, 0.03), (8 \times 10^{-3}, 4 \times 10^{-3})\}$  se muestran en las Figuras: 4-18 a 4-25.

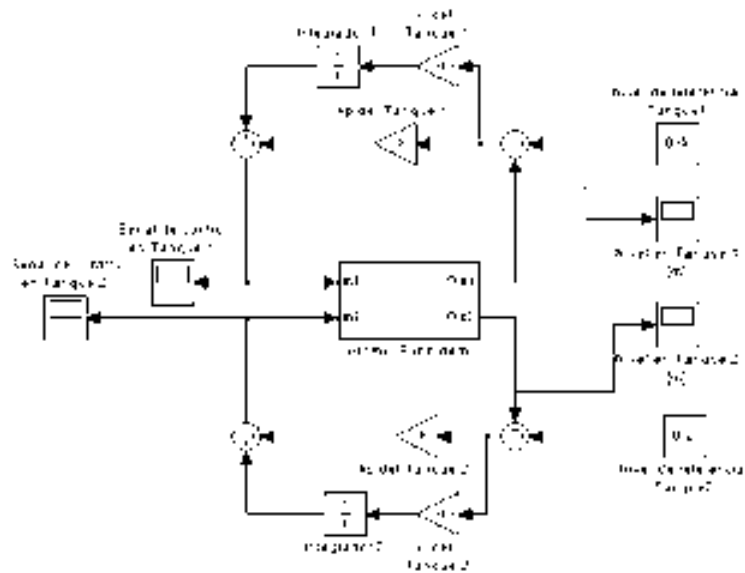


Figura 4-17: Diagrama de bloques de la planta con el controlador  $PI$

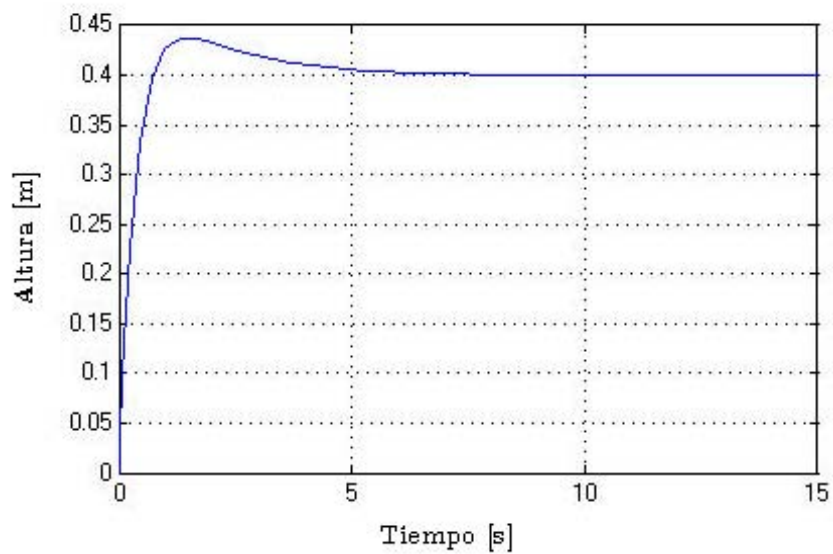


Figura 4-18: Altura de la columna en el *Tanque 1* para  $k_{p1} = 0.05$  y  $k_{i1} = 0.025$ .

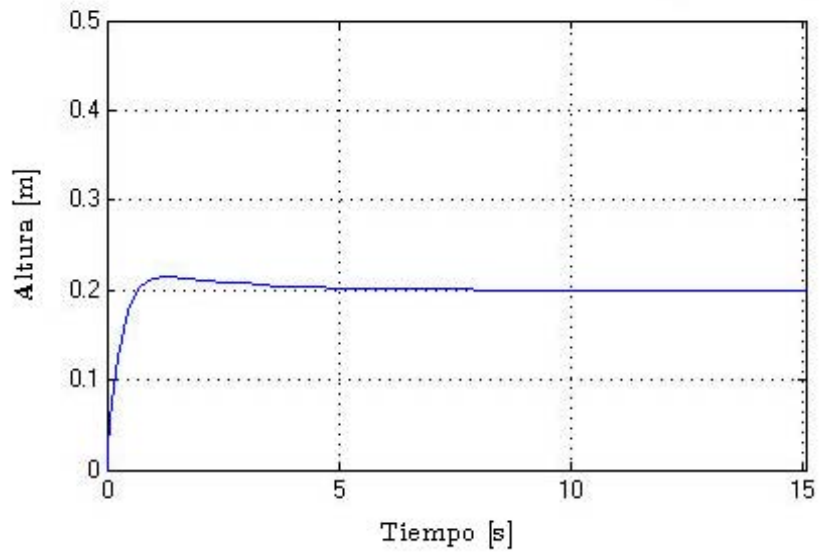


Figura 4-19: Altura de la columna en el *Tanque 2* para  $k_{p2} = 0.06$  y  $k_{i2} = 0.03$

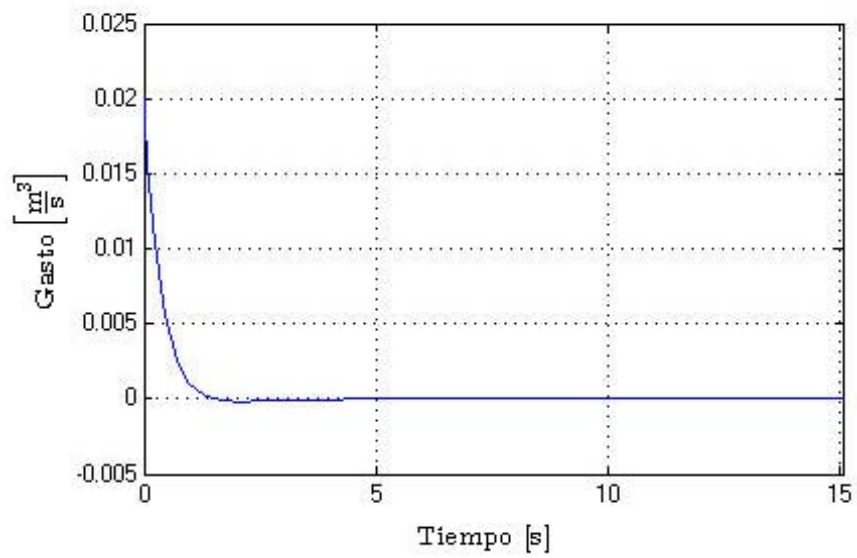


Figura 4-20: Señal de control para la *Bomba  $Q_1$*  cuando  $k_{p1} = 0.05$  y  $k_{i1} = 0.025$

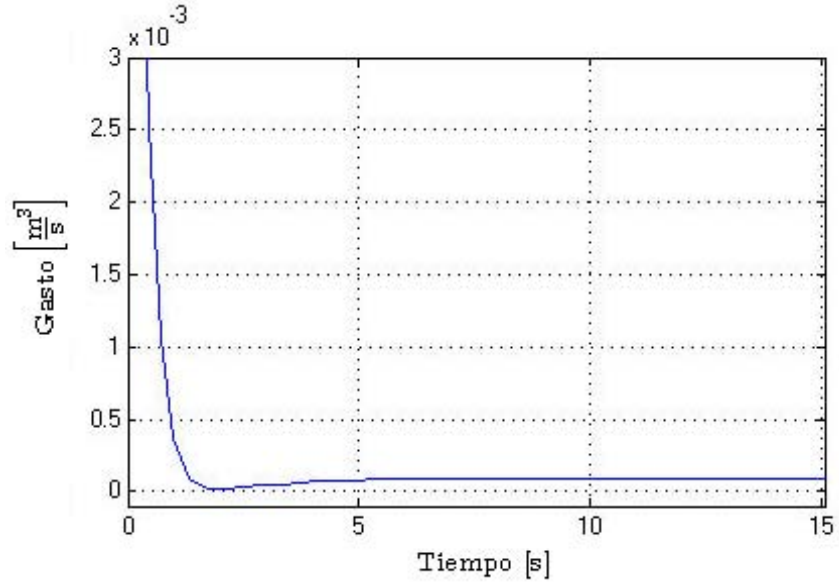


Figura 4-21: Señal de control para la *Bomba*  $Q_2$  cuando  $k_{p2} = 0.06$  y  $k_{i2} = 0.03$

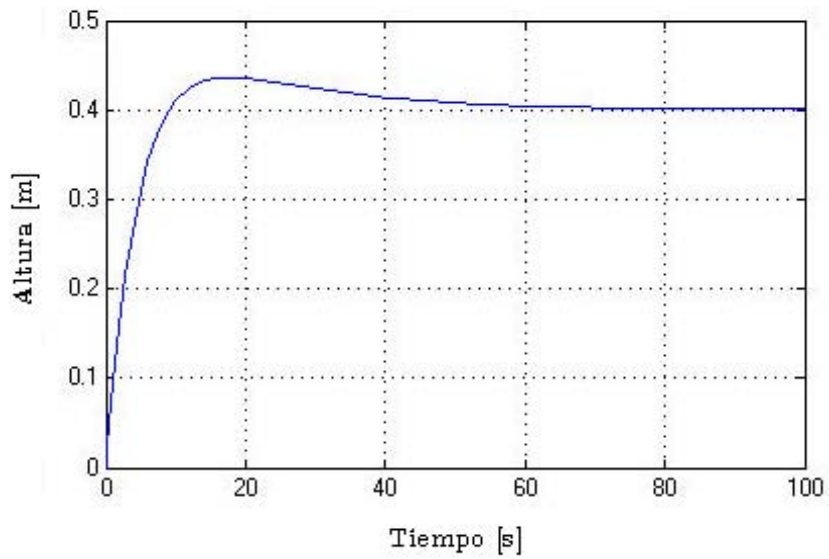


Figura 4-22: Altura de la columna en el *Tanque 1* para  $k_{p1} = 4 \times 10^{-3}$  y  $k_{i2} = 2 \times 10^{-4}$

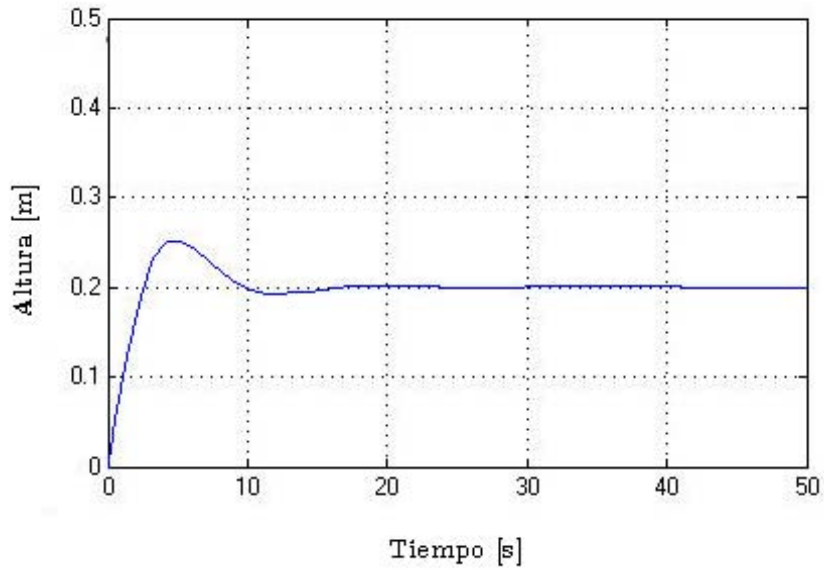


Figura 4-23: Altura de la columna en el *Tanque 2* para  $k_{p2} = 8 \times 10^{-3}$  y  $k_{i2} = 4 \times 10^{-3}$

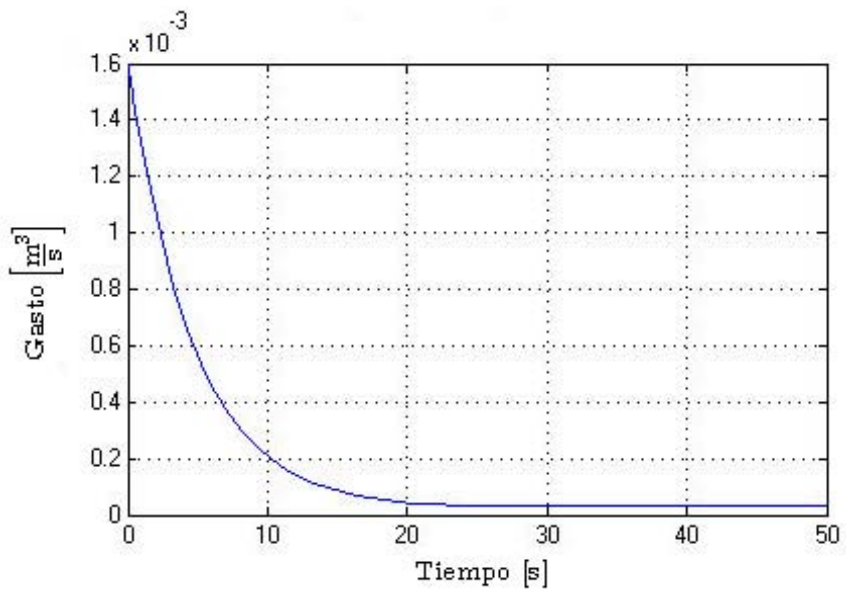


Figura 4-24: Señal de control para la *Bomba Q<sub>1</sub>* cuando  $k_{p1} = 4 \times 10^{-3}$  y  $k_{i2} = 2 \times 10^{-4}$

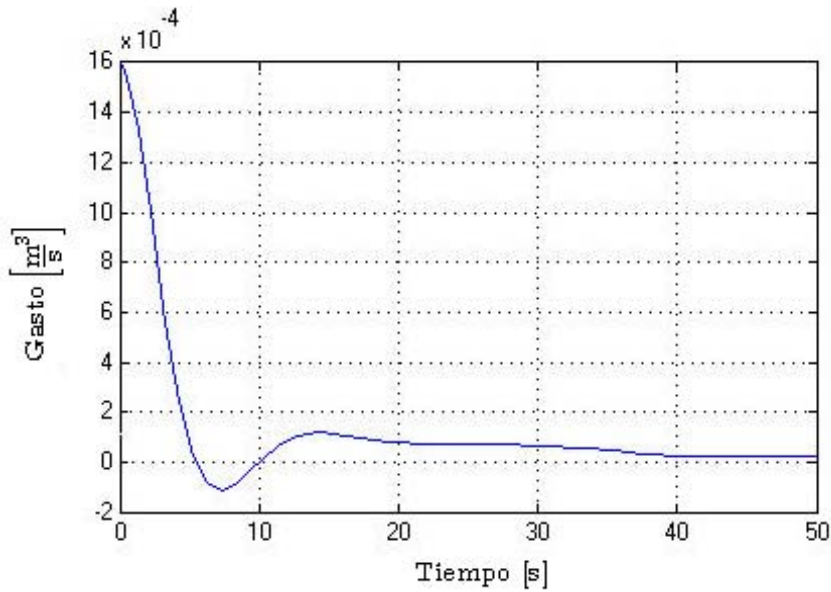


Figura 4-25: Señal de control para la *Bomba Q<sub>2</sub>* cuando  $k_{p2} = 8 \times 10^{-3}$  y  $k_{i2} = 4 \times 10^{-3}$

### 4.3. Controlador Proporcional - Integral - Derivativo PID

Los diseños anteriores han servido como preámbulo para llegar finalmente al diseño del controlador PID. Como se observó, la solución para el controlador proporcional nos conducía a un intervalo o intervalos de valores posibles para  $k_p$ ; al agregar la parte integral ( $k_i$ ), el resultado es una área que contiene las posibles parejas de valores ( $k_p, k_i$ ).

De manera similar a los procedimientos anteriores, para obtener la familia de controladores PID estabilizantes, lo primero que se hará es separar  $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$  en sus partes par e impar, haciendo que sólo una de ellas dependa de  $k_p$ . De esta forma, se puede obtener el intervalo de valores que puede tomar  $k_p$ , y resolver, para cada uno de estos valores, una serie de desigualdades que delimita en cada caso, el conjunto de valores posibles de  $k_i$  y  $k_d$  para esa  $k_p$  en particular. Al final, la solución obtenida será un volumen en donde cada punto contenido dentro de éste, representa una combinación válida de constantes ( $k_p, k_i, k_d$ ) que hacen estable al sistema retroalimentado.

El primer paso para llevar a cabo el diseño, consiste en presentar la extensión del planteamiento hecho anteriormente para que sea aplicable a este tipo de controlador. Considérese nueva-



mente la *Figura (4-1)*; para este caso, el controlador será:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + sk_d = \frac{s^2k_d + sk_p + k_i}{s} \quad (4.63)$$

y el polinomio característico:

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_d s^2)N(s) + k_p sN(s) \quad (4.64)$$

Se procederá ahora a construir un nuevo polinomio cuyas partes par e impar dependan de  $(k_i, k_d)$  y  $k_p$  respectivamente. Considérese también las descomposiciones en partes par e impar, utilizadas anteriormente y el polinomio auxiliar  $N^*(s)$ .

Sean  $n$  y  $m$  los grados de  $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$  y  $N(s)$  respectivamente. Haciendo  $\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)$ , y examinando el resultado se tiene que:

$$l(\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)) - r(\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)) = l(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) - r(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) - (l(N(s)) - r(N(s))) \quad (4.65)$$

Ahora bien, para que  $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$  de grado  $n$  sea Hurwitz, se debe cumplir que:

$$l(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) = n \quad (4.66)$$

$$r(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) = 0 \quad (4.67)$$

por lo tanto,  $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$  será Hurwitz, si y solo si:

$$\sigma_i(\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)) = n - (l(N(s)) - r(N(s))) \quad (4.68)$$

La tarea consiste en determinar aquellos valores  $(k_p, k_i, k_d)$  que hacen que lo anterior se cumpla. Para ello, se considera:

$$\begin{aligned}
\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s) &= [s^2(N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)) \\
&\quad + (k_i + k_d s^2)(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2 N_o(s^2)N_o(s^2))] \\
&\quad + s[D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2 D_o(s^2)N_o(s^2) \\
&\quad + k_p(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2 N_o(s^2)N_o(s^2))]
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Sustituyendo  $s = j\omega$ :

$$\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i, k_d) + jq(\omega, k_p) \tag{4.70}$$

donde:

$$p(\omega, k_i, k_d) = p_1(\omega) + (k_i - k_d \omega^2)p_2(\omega) \tag{4.71}$$

$$q(\omega, k_p) = q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) \tag{4.72}$$

$$p_1(\omega) = -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \tag{4.73}$$

$$p_2(\omega) = N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \tag{4.74}$$

$$q_1(\omega) = \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \tag{4.75}$$

$$q_2(\omega) = \omega(N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \tag{4.76}$$

**Definición 8** Sea  $m$  el grado de  $\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)$ ,  $n$  el grado de  $N(s)$  y  $q(\omega, k_p)$  como se definió anteriormente. Para una  $k_p$  determinada, sean  $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$  los ceros reales, positivos, finitos y distintos de cero de  $q(\omega, k_p)$ . Se define una secuencia de números  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{l-1}$  como sigue:

(i) Si  $N^*(j\omega) = 0$  para algún  $t = 1, 2, \dots, l-1$ , entonces:

$$i_0 = 0;$$

(ii) Si  $N^*(j\omega)$  tiene un cero de multiplicidad  $k_n$  en el origen, entonces se define:

$$i_0 = \text{sgn}[p_{1f}^{(k_n)}(0)]$$

donde:

$$p_{1_f}(\omega) := \frac{p_1(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}};$$

(iii) Para cualquier otra  $t = 0, 1, 2, \dots, l$ ,

$$i_t \in \{-1, 1\}$$

Con  $i_0, i_1 \dots$  definidos de esta manera, se construye el conjunto  $A_{k_p}$  como:

$$A_{k_p} := \begin{cases} \{i_0, i_1, \dots, i_l\} & \text{si } m + n \text{ es par} \\ \{i_0, i_1, \dots, i_{l-1}\} & \text{si } m + n \text{ es impar} \end{cases}$$

A continuación, se presenta también el conjunto  $A_{k_p}(\gamma)$  que es un subconjunto de cadenas que pertenecen a  $A_{k_p}$  y que cumplen con ciertas restricciones llamadas “firma imaginaria”. La definición de esta firma imaginaria es como sigue:

**Definición 9** Sean  $m, n, q(\omega, k_p)$ , como se definieron anteriormente. Para una  $k_p$  determinada, sean  $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$  los ceros reales, positivos, finitos y distintos de  $q(\omega, k_p)$ . También se define  $\omega_l = \infty$ . Para cada cadena  $\Gamma = \{i_0, i_1, \dots\}$  en  $A_{k_p}$ , sea  $\gamma(\Gamma)$  la “firma imaginaria” asociada a la cadena  $\Gamma$  definida como:

$$\gamma(\Gamma) := \begin{cases} \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l\}(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty, k_p)] & \\ \text{para } m + n \text{ par} & \\ \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1}\}(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty, k_p)] & \\ \text{para } m + n \text{ impar} & \end{cases}$$

$A_{k_p}(\gamma)$  se define como sigue:

**Definición 10** El conjunto de cadenas en  $A_{k_p}$  con una firma imaginaria determinada  $\gamma = \psi$  se denota como  $A_{k_p}(\psi)$ . Para una  $k_p$  determinada, se define también el conjunto de cadenas factibles para el problema del controlador PID estabilizante como:

$$F_{k_p}^* = A_{k_p}(n - (l(N(s)) - r(N(s))))$$

Finalmente, tomando en cuenta estas definiciones, se puede establecer el resultado principal de esta sección como:

**Teorema 11 (Familia estabilizante con PID)** *El problema de estabilización PID, con  $k_p$  fija, se puede resolver para una planta dada con función de transferencia  $G(s)$  si y solo si, las siguientes condiciones se mantienen:*

(i)  $F_{k_p}^*$  no es un conjunto vacío.

(ii) Existe al menos una cadena  $\Gamma = \{i_0, i_1, \dots\} \in F_{k_p}^*$ , y valores de  $k_i$  y  $k_d$  tales que  $\forall t = 0, 1, 2, \dots$  para los cuales  $N^*(j\omega_t) \neq 0$

$$p(\omega_t, k_i, k_d) i_t > 0$$

donde  $p(\omega, k_i, k_d)$  es como se definió en 4.71. Además, si existen valores de  $k_i$  y  $k_d$  tales que la segunda condición se satisface para las cadenas posibles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_s \in F_{k_p}^*$ , entonces el conjunto de valores  $(k_i, k_d)$  correspondientes a la  $k_p$  fija, es la unión de los valores  $(k_i, k_d)$  que satisfacen la segunda condición de este teorema para  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_s$ .

La demostración de este teorema se puede encontrar en [5]. Es importante mencionar que el rango de valores sobre el cual se debe hacer el barrido de  $k_p$  se puede reducir utilizando las ideas antes mencionadas acerca del lugar geométrico de las raíces en la Sección 4.2.

El siguiente paso será aplicar estos resultados al caso particular del sistema de tres tanques, para ello considérese la planta reducida usada para el diseño del controlador PI, y cuya función de transferencia 3.15, se reescribe a continuación:

$$N(s) = 64.92s + 0.8946$$

$$D(s) = s^2 + 0.02508s + 6.8247 \times 10^{-5}$$

Sus descomposiciones en parte par e impar son:

$$\begin{aligned}
 N_e(s^2) &= 0.8946 \\
 N_o(s^2) &= 64.92 \\
 D_e(s^2) &= s^2 + 6.8247 \times 10^{-5} \\
 D_o(s^2) &= 0.02508
 \end{aligned}$$

Una vez realizadas las operaciones correspondientes se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s) &= [s^2(-64.94s^2 + 0.01801) \\
 &\quad + (k_i + k_d s^2)(-4217.2s^2 + 0.8003)] \\
 &\quad + s[(-0.7345s^2 + 6.1056 \times 10^{-5}) \\
 &\quad + k_p(-4217.2s^4 + 0.8003)]
 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $s = j\omega$ , se reduce a:

$$\begin{aligned}
 p_1(\omega) &= -\omega^2(64.94\omega^2 + 0.01801) \\
 p_2(\omega) &= 4217.2036\omega^2 + 0.8003 \\
 q_1(\omega) &= 0.7345\omega^3 + 6.1056 \times 10^{-5}\omega \\
 q_2(\omega) &= 4217.2036\omega^3 + 0.8003\omega
 \end{aligned}$$

Ahora se debe determinar el rango de valores sobre el cual se realizará el barrido para  $k_p$ ; sin embargo, se puede observar que los polinomios son exactamente los mismos que para el caso del controlador PI, por lo que se concluye que:

$$\begin{aligned}
 q(\omega, k_p) &= \omega[U(\omega) + kV(\omega)] \\
 U(\omega) &= 0.7345\omega^2 + 6.1056 \times 10^{-5} \\
 V(\omega) &= 4217.2036\omega^2 + 0.8003
 \end{aligned}$$

$$\omega_0 = 0$$

$$k_0 = -7.9 \times 10^{-5}$$

$$k_p > -7.9 \times 10^{-5}$$

Fijando ahora un valor de  $k_p$  dentro del rango establecido se determina su región  $(k_i, k_d)$  correspondiente. Por ejemplo, para  $k_p = 0$ .

$$q(\omega, 0) = 0.7345\omega^3 + 6.1056 \times 10^{-5}\omega$$

cuyas raíces reales, finitas y no negativas son:

$$\omega_0 = 0$$

Para este caso  $m + n = 1 + 3 = 4$  que es par, por lo tanto:

$$A_{k_p} = \{\{i_0, i_1, \dots, i_l\}\}$$

$$A_{k_p} = \{\{ -1 \ -1 \} \{ -1 \ 1 \} \{ 1 \ -1 \} \{ 1 \ 1 \} \} \quad (4.77)$$

Además:

$$n - [l(N(s)) - r(N(s))] = 3 - [1 - 0] = 2 \quad (4.78)$$

$$(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty, 0)] = 1$$

Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$i_0 - i_1 = 2 \quad (4.79)$$

De donde se obtiene:

$$F_0^* = \{ 1 \ -1 \}$$

De tal manera que, de acuerdo con el Teorema 15, la región de los valores posibles de  $(k_i, k_d)$  debe satisfacer:

$$\begin{cases} p_1(\omega_0) + (k_i - k_d \omega_0^2) p_2(\omega_0) > 0 \\ p_1(\omega_1) + (k_i - k_d \omega_1^2) p_2(\omega_1) < 0 \end{cases} \quad (4.80)$$

donde:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 0 \\ \omega_1 &= \infty\end{aligned}$$

Las condiciones antes mencionadas dan como resultado:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_i > 0 \\ k_d > \frac{P_1(\omega_1)}{(\omega_1^2)P_2(\omega_1)} + \frac{k_i}{\omega_1^2} \end{array} \right. \quad (4.81)$$

la segunda condición se puede desarrollar como:

$$\begin{aligned}k_d &> \frac{-\omega^2(64.94\omega^2 + 0.01801)}{\omega^2(4217.2036\omega^2 + 0.8003)} + \frac{k_i}{\omega^2} \\ k_d &> \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-(64.94\omega^2 + 0.01801)}{(4217.2036\omega^2 + 0.8003)} + \frac{k_i}{\omega^2} \right\} \\ k_d &> \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-(64.94\omega^2 + 0.01801)}{(4217.2036\omega^2 + 0.8003)} \right\}\end{aligned}$$

Utilizando la regla de L'Hôpital dos veces se reduce a:

$$\begin{aligned}k_d &> \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-129.88}{8434.4072} \right\} \\ k_d &> -0.0153\end{aligned}$$

Por lo que, en conclusión, para el valor de  $k_p = 0$ , la región de valores posibles de  $k_i$  y  $k_d$  es:  $(k_i, k_d) \in (k_i > 0, k_d > -0.0153)$

Siguiendo un procedimiento similar para distintos valores de  $k_p$ , se obtiene para la función de transferencia de la ecuación 3.15, la región que se muestra en la *Figura 4-27*.

Este resultado se puede comprobar, y mostrar que coincide con los métodos tradicionales haciendo el siguiente análisis:

$$C(s) = \frac{s^2 k_d + s k_p + k_i}{s} \quad (4.82)$$

$$G'_{11}(s) = \frac{64.94(s + 0.0138)}{(s + 0.022)(s + 0.0031)} \quad (4.83)$$

entonces, el polinomio característico del sistema retroalimentado se reduce a:

$$1 + C(s)G(s) = 0$$

donde:

$$\begin{aligned} 1 + C(s)G(s) &= \frac{(s^2k_d + sk_p + k_i)(s + 0.0138)64.94}{(s + 0.022)(s + 0.0031)s} \\ &= (64.94k_d + 1)s^3 + (0.08832k_d + 64.94k_p + 0.0251)s^2 \\ &\quad + (0.8832k_p + 64.94k_i + 6.82 \times 10^{-5})s + (0.8832k_i) \end{aligned}$$

Considerando que, de acuerdo con el criterio de Routh, una condición necesaria para que un polinomio tenga sus raíces en el lado izquierdo del plano complejo  $s$ , es que todos los coeficientes tengan signo positivo se establece que:

Para que el coeficiente de  $s^3$  sea positivo, se requiere:

$$\begin{aligned} k_d &> -\frac{1}{64.94} \\ k_d &> -0.0153 \end{aligned}$$

Para el coeficiente de potencia cero se tiene:

$$k_i > 0$$

Para el coeficiente de  $s$ ; y llevando a  $k_i$  al límite:

$$\begin{aligned} k_p &> -\frac{6.82 \times 10^{-5}}{0.8832} \\ k_p &> -7.721 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Finalmente, para el coeficiente de  $s^2$ ; y llevando a  $k_d$  al límite de su valor:

$$\begin{aligned} k_p &> \frac{-0.0251 + (0.8832)(0.0153)}{64.94} \\ k_p &> -1.7843 \times 10^{-4} \end{aligned}$$



Como este último valor es mayor que el obtenido con el coeficiente de potencia uno, aquel es el que impone la restricción. Por lo tanto, se puede afirmar que los resultados obtenidos con el procedimiento propuesto, coinciden con los que se obtienen de manera tradicional.

Los resultados de la simulación para los puntos  $(k_{p1}, k_{i1}, k_{d1}) = \{(0.01, 0.007, -0.001), (-0.03, 0.5, 0.01)\}$  y  $(k_{p2}, k_{i2}, k_{d2}) = \{(0.018, 0.04, -0.002), (0.15, 0.25, 0.001)\}$  se muestran en las Figuras 4-29 a 4-36

Al proceder de manera análoga para la planta descrita por la función de transferencia de la ecuación 3.17, se obtiene la región mostrada en la Figura 4-28, cuyos límites son:

$$k_p > -2.1702 \times 10^{-4}$$

$$k_i > 0$$

$$k_d > -0.0153$$

El diagrama de bloques para el sistema con el controlador PID se muestra en la Figura 4-26

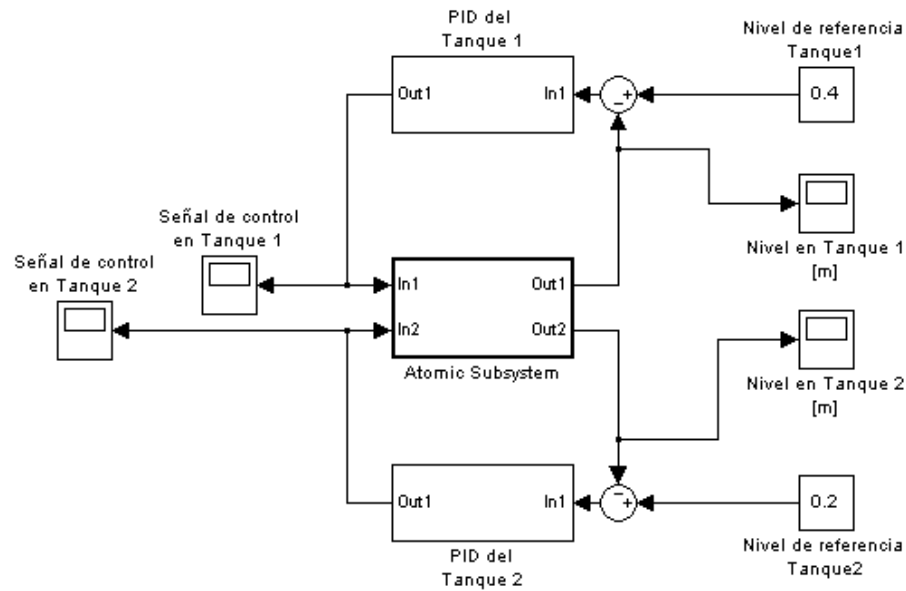


Figura 4-26: Diagrama de bloques de la planta con el controlador PID

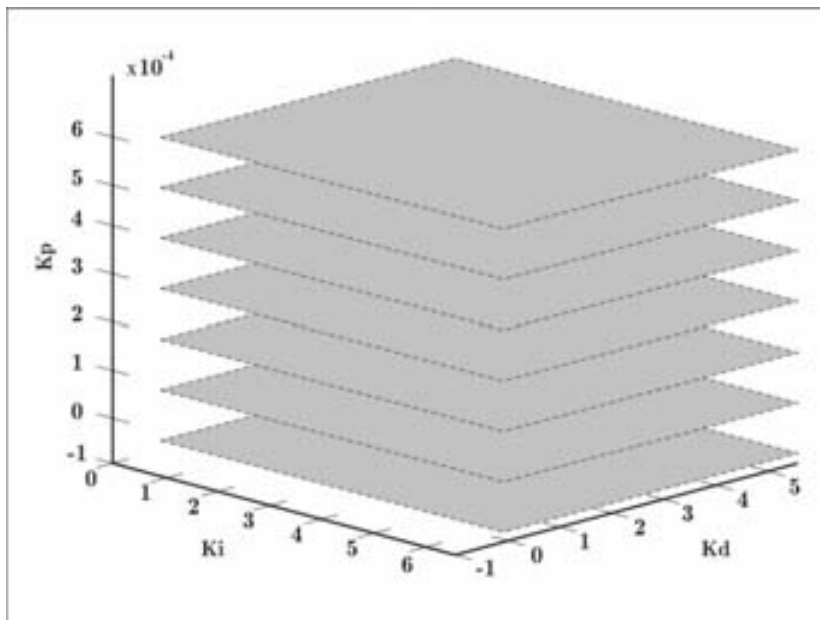


Figura 4-27: Región de valores estabilizantes  $(k_p, k_i, k_d)$  para la función de transferencia de la ecuación 3.15.

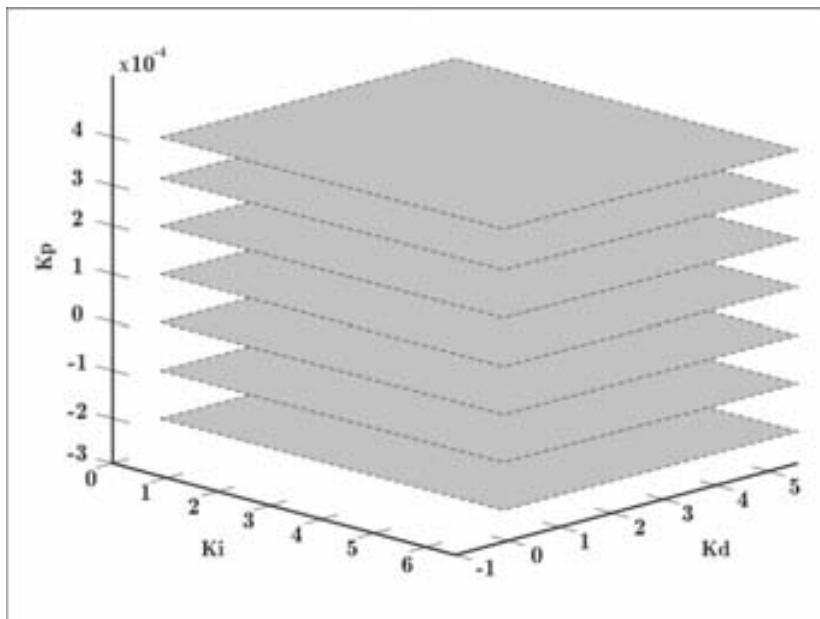


Figura 4-28: Región de valores estabilizantes  $(k_p, k_i, k_d)$  para la función de transferencia de la ecuación 3.17.

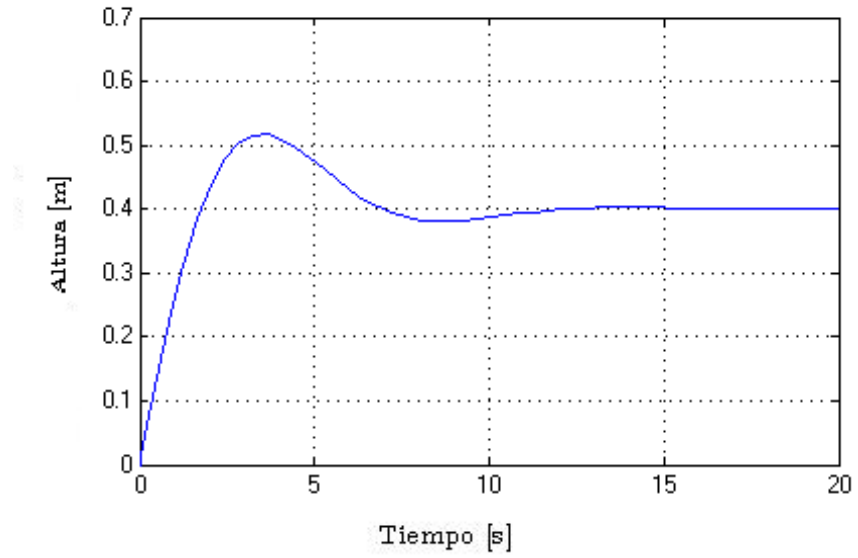


Figura 4-29: Altura de la columna en el *Tanque 1* para  $k_{p1} = 0.01$ ,  $k_{i1} = 0.007$  y  $k_{d1} = -0.001$ .

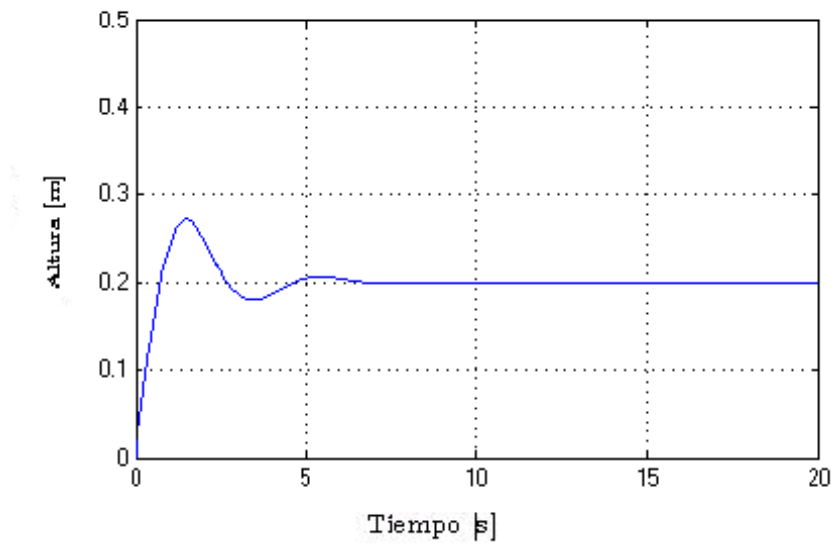


Figura 4-30: Altura de la columna en el *Tanque 2* para  $k_{p2} = 0.018$ ,  $k_{i2} = 0.04$  y  $k_{d2} = -0.002$ .

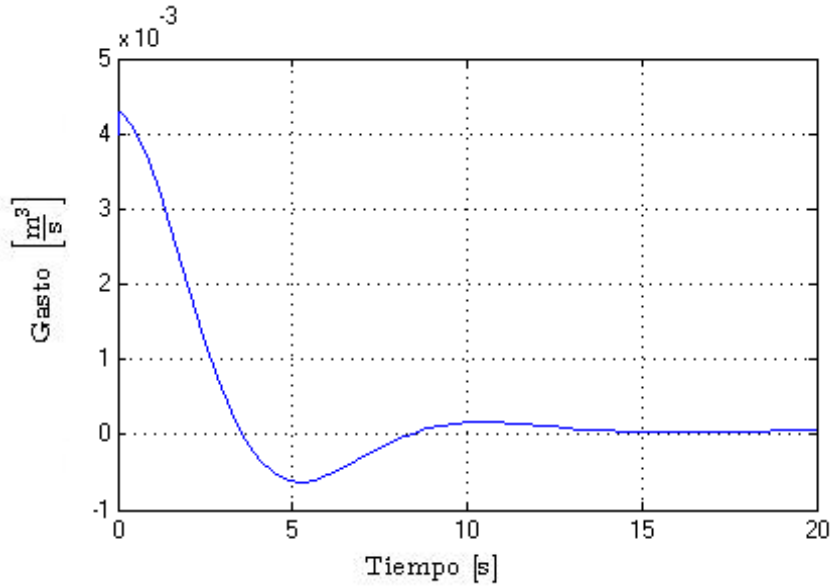


Figura 4-31: Señal de control en la *Bomba Q1* para  $k_{p1} = 0.01$ ,  $k_{i1} = 0.007$  y  $k_{d1} = -0.001$ .

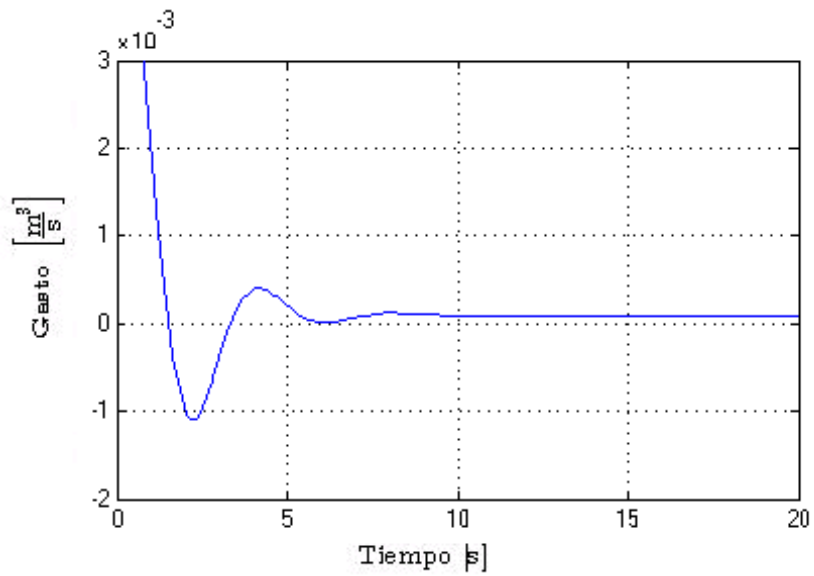


Figura 4-32: Señal de control en la *Bomba Q1* para  $k_{p1} = 0.018$ ,  $k_{i1} = 0.04$  y  $k_{d1} = -0.002$ .

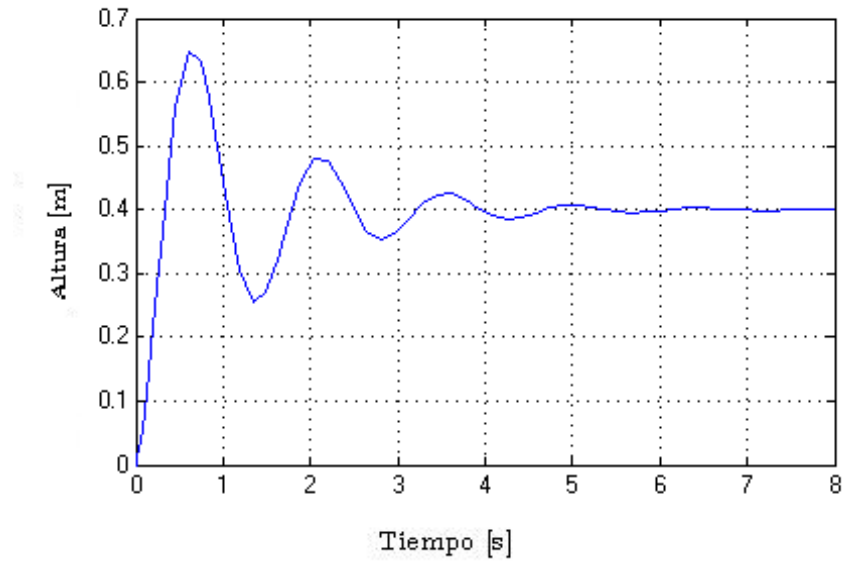


Figura 4-33: Altura de la columna en el *Tanque 1* para  $k_{p1} = -0.03$ ,  $k_{i1} = 0.5$  y  $k_{d1} = 0.01$ .

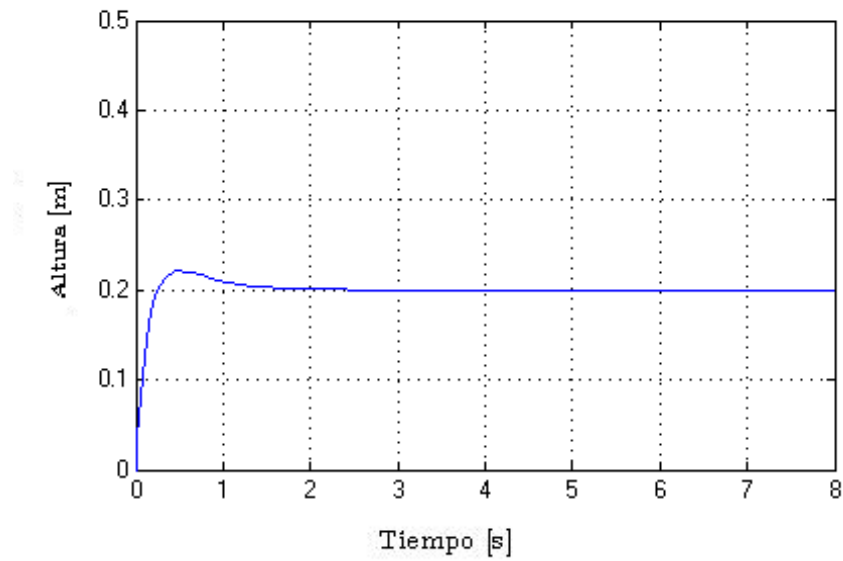


Figura 4-34: Altura de la columna en el *Tanque 2* para  $k_{p2} = 0.15$ ,  $k_{i2} = 0.25$  y  $k_{d2} = 0.001$ .

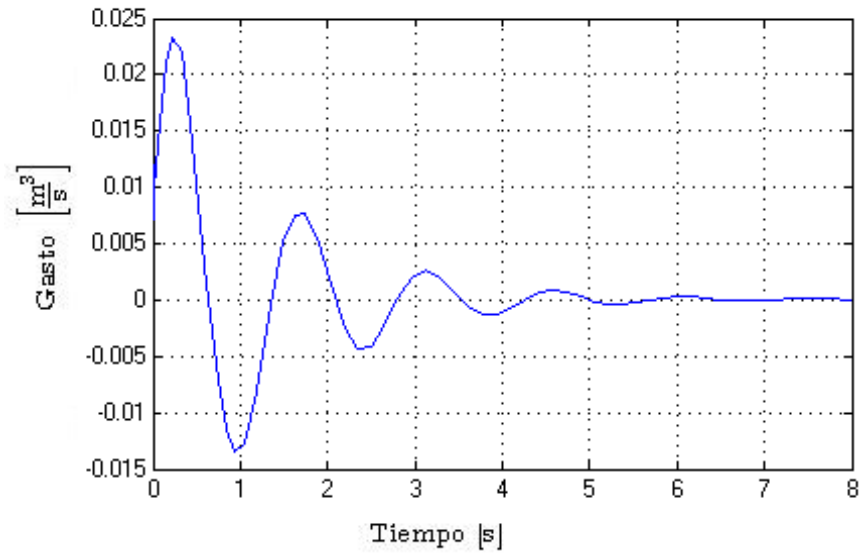


Figura 4-35: Señal de control en la *Bomba Q1* para  $k_{p1} = -0.03$ ,  $k_{i1} = 0.5$  y  $k_{d1} = 0.01$ .

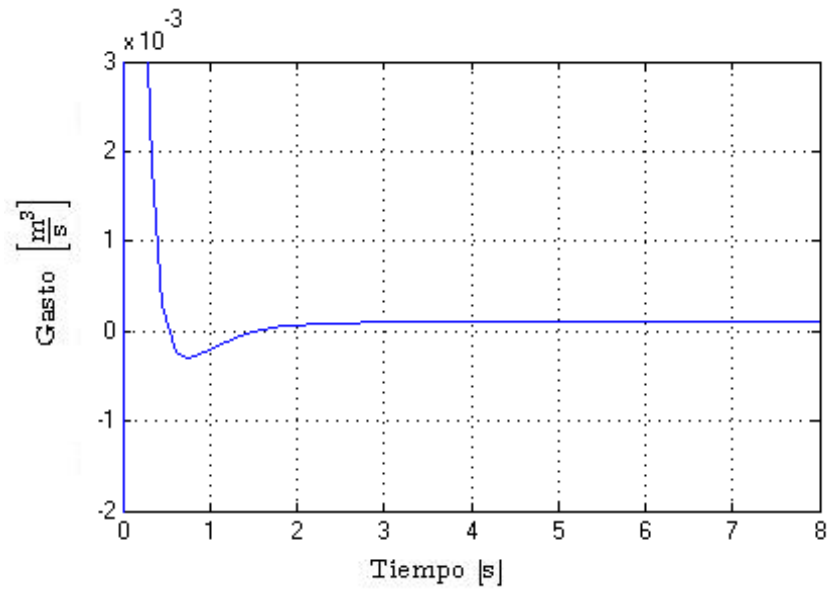


Figura 4-36: Señal de control en la *Bomba Q2* para  $k_{p2} = 0.15$ ,  $k_{i2} = 0.25$  y  $k_{d2} = 0.001$ .

Finalmente, utilizando las ecuaciones 3.21, 3.22, 3.23 y 3.24 para los controladores seleccionados, se observa que la respuesta en frecuencia utilizando la pareja de valores  $(k_{p1}, k_{i1}, k_{d1}) = (0.01, 0.007, -0.001)$  y  $(k_{p2}, k_{i2}, k_{d2}) = (0.018, 0.04, -0.002)$  es como se muestra en la *Figura 4-37*, donde se puede comparar la respuesta en frecuencia de los términos de acoplamiento  $T_{12}$  y  $T_{21}$ , contra la respuesta en frecuencia de los términos de la diagonal principal  $T_{11}$  y  $T_{22}$ . De esta comparación se observa que la magnitud de  $T_{12}$  y  $T_{21}$  es sumamente pequeña, por lo que puede ser considerada despreciable sin cometer un error significativo en el resultado final. Este resultado se ve reflejado en el desacoplamiento de los tanques, según se muestra en las *Figuras 4-38* y *4-39*, donde, al cambiar el nivel en el *Tanque 1*, no se ve afectado el nivel en el *Tanque 2*

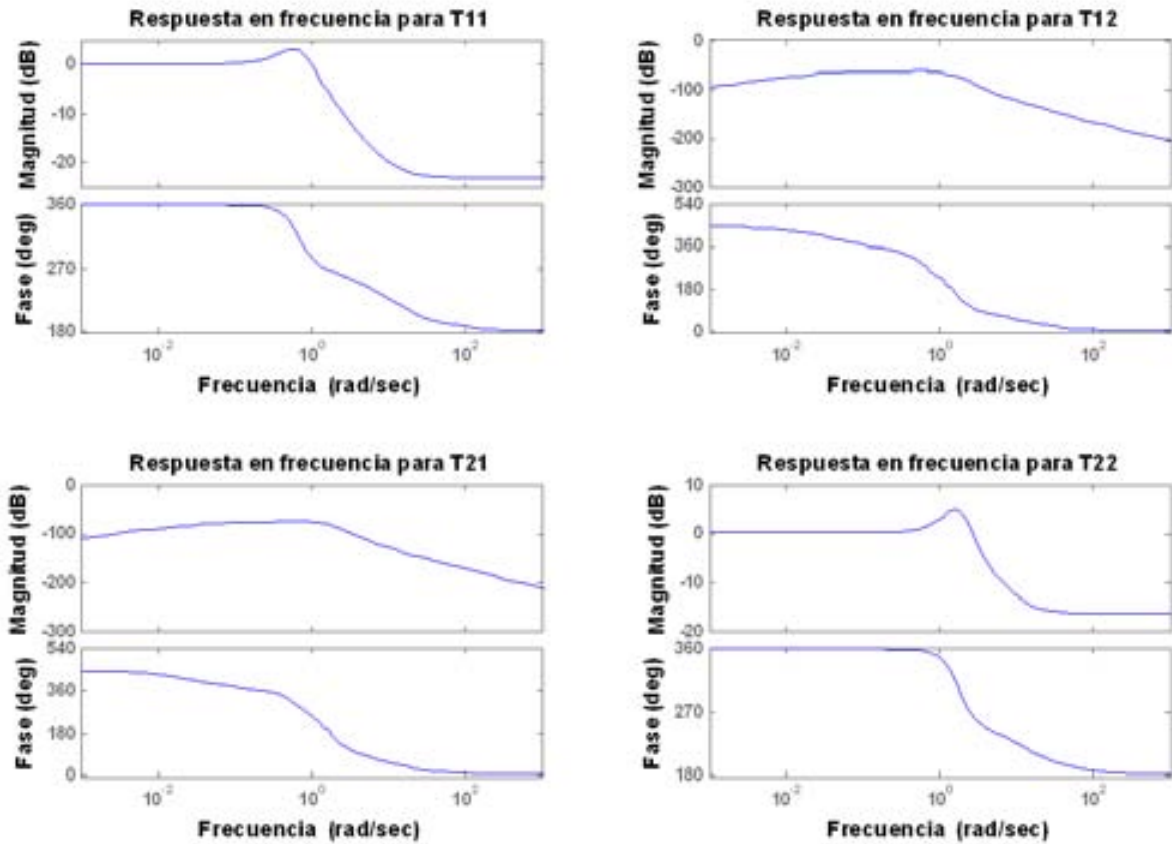


Figura 4-37: Respuesta en frecuencia de los elementos de la matriz de transferencia de la planta con controlador.

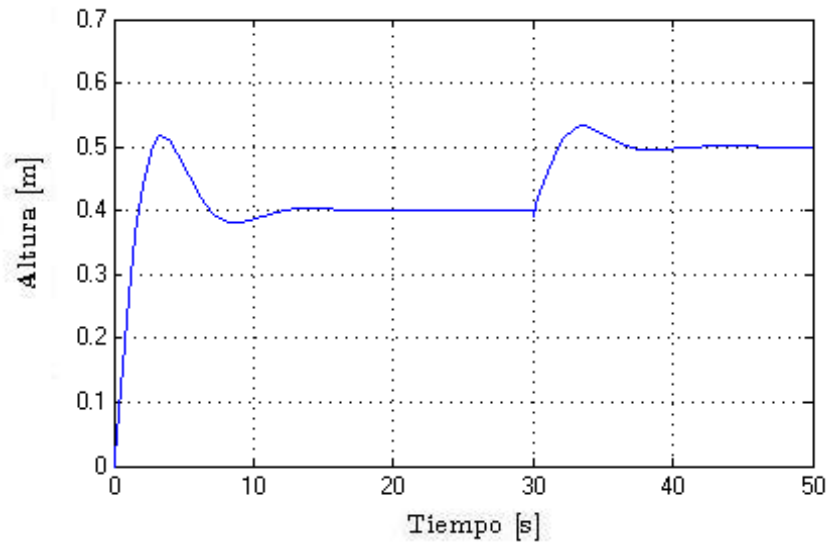


Figura 4-38: Altura de la columna en el *Tanque 1* para un cambio de nivel de 0.4 a 0.5 [m]

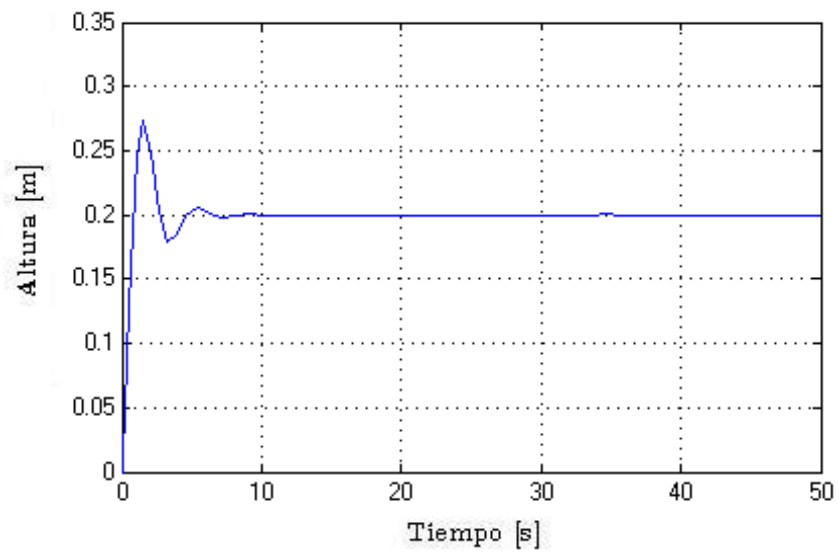


Figura 4-39: Altura de la columna en el *Tanque 2* para un cambio de nivel en el *Tanque 1*.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Tomando en cuenta el objetivo principal de este trabajo, el cual es obtener una familia de controladores de tipo PID que estabilicen al sistema de tres tanques; se puede concluir que:

1. La aplicación de la técnica de diseño, basada en la generalización del Teorema de Hermite-Biehler y la firma del polinomio característico del sistema retroalimentado, desarrollada por Keel y Bhattacharyya, nos proporciona un método alternativo a los métodos de diseño estudiados en cursos tradicionales de control, tal como el Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz. La principal ventaja de la técnica basada en la firma del polinomio característico consiste en que permite hallar los valores de las constantes  $(k_p, k_i, k_d)$  de forma separada, y resolviendo un conjunto de desigualdades lineales.

2. Al diseñar los controladores, se confirmó que los resultados obtenidos con esta técnica, pueden ser verificados, dado el grado del polinomio característico de este caso en particular, con técnicas como el Lugar Geométrico de las Raíces, o el Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz. Cabe mencionar que la verdadera efectividad de esta técnica se puede apreciar mejor cuando se trabaja con plantas de orden superior, en donde la aplicación de métodos como el Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz, conducen a la solución de desigualdades bastante complejas.

3. El hecho de diseñar paso a paso el controlador permitió observar con claridad que el controlador Proporcional y el Proporcional-Integral, se pueden obtener como casos particulares del controlador PID. Tal y como se observó en la Sección 4.3, la región que contiene los valores posibles  $(k_p, k_i, k_d)$  es un volumen. Los valores posibles del controlador Proporcional-Integral se pueden obtener como la proyección de este volumen sobre el plano que forman los ejes  $k_p$  y  $k_i$ ,

lo cual sería equivalente a anular la salida de la acción derivativa en el diagrama a bloques. De igual forma, el controlador Proporcional se puede obtener como una proyección del volumen sobre el eje  $k_p$ . Sin embargo, se debe mencionar que dicha condición se cumple para este caso en particular, ya que no necesariamente sucede con cualquier planta.

4. Una de las desventajas de la técnica basada en la firma del polinomio característico, es que no toma en cuenta las restricciones del sistema físico. Es decir, el método permite obtener de forma teórica todos los valores  $(k_p, k_i, k_d)$  que hacen estable al sistema; sin embargo, en la práctica, no todos ellos pueden ser utilizados para estabilizar a la planta. Consideremos por ejemplo la señal de control en las *Figuras* 4-35 y 4-36. La señal de control correspondiente muestra valores que exceden por mucho la capacidad del sistema físico. En otras palabras, el método provee de una región de puntos válidos, pero no completamente utilizables debido a la naturaleza no-lineal de la planta. Sin embargo, el disponer de toda la familia de controladores estabilizantes permite buscar, a partir de ésta, los parámetros que brindan el mayor desempeño vía un criterio adicional, como puede ser el máximo de las acciones, sobrepaso, tiempo de respuesta, etc. Este hecho plantea un problema interesante acerca de como reducir la región de puntos, a aquellos que satisfacen las restricciones físicas del sistema; sin embargo, este problema queda fuera del alcance de este trabajo.

5. Finalmente, se observa también que el error que se comete al despreciar las componentes que representan el acoplamiento de los tanques en la matriz de transferencia del sistema, es mínimo y no afecta de manera significativa los resultados obtenidos. Se puede entonces interpretar que los tanques se encuentran desacoplados entre sí, y que pueden ser controlados de manera independiente, despreciando las interacciones entre ellos.

# Bibliografía

- [1] AMIRA, *Laboratory Setup Three-Tanks-System*, Germany, 1994.
- [2] K. Astrom and T. Haggund, *PID Controllers - Theory, Design and Tuning*, 2nd ed. Instrument Society of America, 1995.
- [3] D. Auslander, Y. Takahashi, *et al.*, *Introducción a Sistemas de Control*, 1st ed. McGraw - Hill, 1976.
- [4] S. Bagby, *Creating Documents with Scientific Workplace and Scientific Word*, 1st ed. MacKichan Software Inc., 1991.
- [5] S. P. Bhattacharyya *et al.*, *Advances in Industrial Control. Structures and Synthesis of PID Controller*, 1st ed. Springer - Verlag, 2007.
- [6] C. Cheng, *Autotuning of PID Controllers. A Relay Feedback Approach*, 2nd ed. Springer - Verlag, 2006.
- [7] G. Franklin, D. Powell, *et al.*, *Control de sistemas dinámicos con retroalimentación*, 1st ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [8] L. Keel and S. Bhattacharyya, "Controller synthesis free of analytical models: Three term controllers," *IEEE Transactions in Automatic Control*.
- [9] L. Lamport, *TEX: A Document Preparation System*, 1st ed. Addison - Wesley, 1986.
- [10] S. Márquez, "Diseño de controlador digital para un sistema hidráulico," Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 1994, tesis de Licenciatura.
- [11] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 3rd ed. Prentice - Hall, 1997.

- [12] O. Patashnik, “Bibtexing,” 1988.
- [13] R. Resnick and D. Halliday, *Física Parte 1*, 1st ed. CECSA, 1985.
- [14] C. Verde, R. Carrera, and S. Bhattacharyya, “Diseño asistido por computadora de controladores pid estabilizantes,” *Research in Computing Science. Special Issue: Advances in Automatic Control & Engineering*, vol. 36, pp. 137–146.