



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Conmutadores y grupos puramente
hiperbólicos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
RAYBEL ANDRÉS GARCÍA ANCONA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE



2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

García
Ancona
Raybel Andrés
56 79 38 00
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemático
301709286

2. Datos del tutor

Dr
Antonio
Orive
Lascurain

3. Datos del sinodal 1

Dr
Francisco Javier
González
Acuña

4. Datos del sinodal 2

Dr
Guillermo Javier
Sierra
Loera

5. Datos del sinodal 3

M en C
José Antonio
Gómez
Ortega

6. Datos del sinodal 4

M en C
Francisco de Jesús
Struck
Chávez

Agradecimientos

En agradecimiento al apoyo, enseñanzas y confianza que me han dado a lo largo de estos años y que me ha permitido terminar con éxito mi carrera, con el cariño de siempre a mis padres.

A mis hermanos les agradezco la confianza y compañía que han tenido hacia mí.

Al Dr. Antonio Lascurain Orive, por las clases, ejemplo y enseñanzas que me ha brindado y que a lo largo de todo este proceso ha mostrado mucha paciencia, confianza y me ha motivado en mis errores y logros.

Introducción

La desigualdad de Jørgensen muestra que la existencia de grupos fuchsianos (y kleinianos) está sujeta a ciertas restricciones que dependen de la traza. Este invariante se relaciona directamente con el producto inversivo, la longitud de traslación de los elementos hiperbólicos y muchas otras propiedades algebraicas y geométricas también invariantes bajo conjugación.

La relación con el producto inversivo permite detectar de que tipo son las transformaciones cuando se piensa en el producto (o los conmutadores) de ellas al expresarlas en la forma

$$\sigma_4 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1,$$

donde σ_i son reflexiones en geodésicas.

En esta tesis se discuten otros temas importantes referentes a la rigidez de los grupos fuchsianos. El teorema central probado por Lauritzen, Siegel y Nielsen, independientemente, establece que un grupo no abeliano puramente hiperbólico es discreto. Para probar esto se usa un resultado más general que establece que si $\langle g, h \rangle$ generan un grupo fuchsiano puramente hiperbólico (por ejemplo un grupo de Shottky actuando en el plano hiperbólico), entonces

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, h(z)) \right) \geq 1, \quad (1)$$

(Teorema 4.0.19).

Se muestra detalladamente la prueba de este resultado que es principalmente geométrica aunque usa varias propiedades de la traza. A su vez, se exhibe una prueba algebraica que prueba un resultado más general: un grupo no abeliano sin elementos elípticos es necesariamente discreto (Teorema 4.0.22). Se muestran dos interpretaciones geométricas de este teorema. Una de ellas es original (pag. 57). Se muestra también que la cota en la

IV

expresión 1 es la mejor posible, para esto se usan técnicas de G -paquetes y grupos de Shottky (véase capítulo 5).

La herramienta fundamental para probar el Teorema 4.0.19 es el uso de la geometría de productos y los conmutadores que se desarrollan en el capítulo 2. En este análisis hay un resultado original que generaliza un teorema que aparece en [3] (Teorema 2.0.9), este resultado establece que si g y h son transformaciones hiperbólicas con ejes que se intersecan en un ángulo θ , entonces

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right)\sinh\left(\frac{T_h}{2}\right)\sin\theta$$

es mayor, igual, o menor que uno, de acuerdo a que el conmutador sea hiperbólico, parabólico o elíptico, donde T_g y T_h son las longitudes de traslación y θ es el ángulo de intersección. El análisis de la prueba se basa en establecer una configuración en el disco de Beltrami-Poincaré, donde A_g y $h(A_g)$ toman posiciones simétricas con respecto al eje imaginario y usando trigonometría de polígonos y propiedades centrales de la traza (Teoremas 1.3.4, 1.3.5 y 1.4.4), se logra ver como una “animación” que depende de las posiciones de dos geodésicas (también simétricas) que determinan si el conmutador es hiperbólico, elíptico o parabólico, dependiendo si son ajenas, tangentes o se intersecan (véase Figura 2.7).

La tesis concluye con una interesante gama de aplicaciones del teorema principal que muestra la rigidez de los grupos fuchsianos, ya sea al nivel algebraico (Teoremas 5.0.27 y 5.0.28), o al nivel geométrico en el sentido de cuánto se mueven los puntos en un grupo puramente hiperbólico no abeliano (Teorema 5.0.26), o al nivel topológico en las superficies de Riemann, en este último se muestra que los lazos esenciales en éstas no pueden tener una longitud muy pequeña en aquellas definidas por grupos puramente hiperbólicos.

En esta tesis también se clasifican los grupos fuchsianos elementales y se muestra una interesante relación de las transformaciones primitivas con las regiones canónicas (capítulo 3).

Contenido

1. Preliminares	3
1.1. Fundamentos	3
1.2. Producto inversivo	7
1.3. Trigonometría hiperbólica	10
1.4. Haces y productos	12
2. Geometría de los conmutadores	17
3. Grupos fuchsianos elementales	33
4. Grupos puramente hiperbólicos	43
5. Aplicaciones	63

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Fundamentos

A continuación se presentan algunas definiciones y resultados con los que se estará trabajando. Daremos una breve descripción de la proyección estereográfica, las transformaciones de Möbius complejas, su clasificación, así como algunos resultados de métrica y trigonometría hiperbólica. No probaremos estos resultados, la mayoría de estas demostraciones se pueden consultar en [3] y algunas otras en [7]. Primero encajamos el plano complejo \mathbb{C} , en \mathbb{R}^3 en forma natural asignando a $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, el punto $(x, y, 0)$.

Definición 1 *Los puntos del plano complejo junto con ∞ forman el plano complejo extendido denotado por $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Éste puede ser asociado biyectivamente con la esfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$$

llamada de Riemann. Para esto se proyecta el polo norte de \mathbb{S}^2 a cualquier otro punto (x_1, x_2, x_3) en dicha esfera y se asocia al punto donde la recta interseca al plano complejo obteniéndose la función

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

La función inversa esta dada por:

$$z \longmapsto \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Asociando el polo norte con ∞ se obtiene una biyección de \mathbb{S}^2 en $\widehat{\mathbb{C}}$ llamada proyección estereográfica (cf. [7]). Esta biyección permite establecer la continuidad en funciones definidas en $\widehat{\mathbb{C}}$, para esto se define la métrica cordal.

Definición 2 Se define la métrica cordal en el plano complejo extendido de la siguiente forma:

$$d_{\mathbb{C}}(z, z') = \begin{cases} \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |z'|^2}} & \text{si } z, z' \in \mathbb{C}, \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} & \text{si } z' = \infty. \end{cases}$$

Definición 3 Dados $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, tales que $ad - bc \neq 0$, se define una transformación en $\widehat{\mathbb{C}}$ como sigue:

a) Si $c \neq 0$

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & \text{si } z \neq 0, z \neq \frac{-d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty, \\ \infty & \text{si } z = \frac{-d}{c}. \end{cases}$$

b) Si $c = 0$

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{d} & \text{si } z \neq \infty, \\ \infty & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Estas transformaciones llamadas de Möbius son continuas con la métrica cordal y pueden definirse por matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1.$$

Este grupo de matrices se denota por $SL(2, \mathbb{C})$. El centro de este grupo está conformado por las matrices $\pm Id$. Al cociente de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre su

centro se le conoce como su proyectivización y se denota por $PSL(2, \mathbb{C})$, el cual es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius complejas. Podemos clasificar a las transformaciones de Möbius considerando sus puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definición 4 Una transformación de Möbius T es parabólica, si fija exactamente un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Cualquier transformación parabólica es conjugada a una traslación.

Definición 5 Sea una transformación de Möbius T , que es conjugada a $z \mapsto kz$, $k \neq 0, 1$. Se dice que T , es:

- a) elíptica, si $|k| = 1$,
- b) hiperbólica, si $k \in \mathbb{R}^+$,
- c) loxodrómica, si $|k| \neq 1$ y $k \in \mathbb{R}^+$.

Otra forma de clasificar las transformaciones de Möbius es mediante su traza.

Definición 6 Sea T una transformación de Möbius dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

definimos el cuadrado de la traza como:

$$\chi^2 = \frac{(a + d)^2}{ad - bc}.$$

Teorema 1.1.1 Sea una transformación de Möbius T , $T \neq Id$, χ^2 el cuadrado de su traza. Entonces

- a) T es parabólica $\iff \chi^2 = 4$,
- b) T es elíptica $\iff 0 \leq \chi^2 < 4$,
- c) T es hiperbólica $\iff 4 < \chi^2 < \infty$,
- d) T es loxodrómica $\iff \chi^2 \notin \mathbb{R}^+$.

El subgrupo de las matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ con entradas reales se le denota por $SL(2, \mathbb{R})$. El cociente de $SL(2, \mathbb{R})$ sobre su centro se denota por $PSL(2, \mathbb{R})$. Un modelo del plano hiperbólico es el semiplano complejo superior denotado por $\mathbb{H}^2 = \{z \mid \text{Im } z > 0\}$. Resulta que las transformaciones de Möbius que preservan \mathbb{H}^2 son precisamente aquellas definidas por $PSL(2, \mathbb{R})$ (cf. [7] p. 32).

Otro modelo del plano hiperbólico es el disco unitario

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

llamado de Beltrami-Poincaré. Resulta que las transformaciones de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$ que preservan el disco unitario Δ son de la forma

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}} \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Al subgrupo de transformaciones de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preservan Δ se les denotará por $M(\Delta)$. Para definir las métricas que se utilizarán en estos dos modelos se introduce el concepto de densidad.

Definición 7 Sea A una región en \mathbb{R}^n , una densidad en A es una función continua

$$\nu : A \mapsto \mathbb{R}^+.$$

Dada una densidad en una región A y ξ una curva de clase \mathcal{C}^1 en A se define la ν -longitud de ξ como

$$\lambda_\nu(\xi) = \int_a^b \nu(\xi(t)) |\xi'(t)| dt, \quad \text{donde } \xi : [a, b] \mapsto A.$$

Esta definición se extiende a curvas de clase \mathcal{C}^1 por tramos. La distancia definida anteriormente permite medir la distancia entre puntos.

Definición 8 Sea ν una densidad en una región A y z_1, z_2 puntos en A ; definimos la distancia $\rho_\nu(z_1, z_2)$ como

$$\rho_\nu(z_1, z_2) = \inf \lambda_\nu(\xi),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas ξ de clase \mathcal{C}^1 por tramos que unen z_1 con z_2 .

Se puede probar que esta distancia define una métrica cf. [7]. La métrica hiperbólica en \mathbb{H}^2 está definida por la densidad

$$\nu(z) = \frac{1}{Im(z)}.$$

El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa como un grupo de isometrías en \mathbb{H}^2 con la métrica hiperbólica. A las curvas que minimizan la distancia en \mathbb{H}^2 se les llama geodésicas y son los círculos o rectas que son ortogonales al eje real.

La fórmula general de la distancia hiperbólica en el modelo del semiplano está dada por

$$\cosh \rho(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2 Im z_1 Im z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2,$$

cf. [3] (p. 130) o [7] (p. 53). En el modelo del disco, la métrica está definida por la densidad

$$\tau(w) = \frac{2}{1 - |w|^2},$$

y las geodésicas son los diámetros o los círculos ortogonales a $\partial \Delta$. En cualquier modelo, el segmento de geodésica por z, w se denotará por $[z, w]$. La fórmula de la distancia hiperbólica en el disco unitario está dada por

$$\sinh^2(\rho(z_1, z_2)) = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)},$$

(cf. [3] o [7]).

1.2. Producto inversivo

A la esfera en \mathbb{R}^n con centro en a y radio r la denotamos por $S(a, r)$, y sus puntos se definen por la ecuación

$$|x|^2 - 2(x \cdot a) + |a|^2 - r^2 = 0.$$

Se define $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, análogamente al caso complejo se puede definir la proyección estereográfica en cualquier dimensión. (cf. [3] y con más detalle en [2]).

Un plano en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ está definido de la siguiente forma:

$$P(b, s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -(x \cdot b) + s = 0, b \in \mathbb{R}^n, |b| = 1, s \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

A los planos $P(b, t)$ o a las esferas $S(a, r)$ se les llamará “esferas”.

Definición 9 Se define el grupo general de Möbius, denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, como el grupo que consiste de todas las funciones que son una composición finita de reflexiones en “esferas”.

Se denotará por $M(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ al subgrupo formado por las funciones que son composiciones de un número par de reflexiones; este grupo es precisamente el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$, (cf. [7]).

Definición 10 Se define la reflexión (o inversión) en $S(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ como la función $\varphi : \widehat{\mathbb{R}}^n \mapsto \widehat{\mathbb{R}}^n$ dada por:

$$\varphi(z) = \begin{cases} a + r^2(z - a)^* & \text{si } z \in \mathbb{R}^n, \\ \infty & \text{si } z = a, \\ a & \text{si } z = \infty, \end{cases}$$

$$\text{donde } (z - a)^* = \frac{z - a}{|z - a|^2}.$$

Definición 11 La reflexión (o inversión) en el plano $P(b, t)$ está definida como la función $\psi : \widehat{\mathbb{R}}^n \mapsto \widehat{\mathbb{R}}^n$ dada por:

$$\psi(y) = \begin{cases} y - 2[(y \cdot b) - t]b & \text{si } y \in \mathbb{R}^n, \\ \infty & \text{si } y = \infty. \end{cases}$$

Otro concepto importante que usaremos es el producto inversivo. Nótese que la ecuación de una “esfera” se puede escribir como:

$$a_0|x|^2 - 2(x \cdot a) + a_{n+1} = 0, \quad \text{donde } a \in \mathbb{R}^n \text{ y } a_0, a_{n+1} \in \mathbb{R}.$$

Al vector $a' = (a_0, a, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ se le conoce como vector coeficiente y es fácil checar que satisface la condición:

$$|a|^2 > a_0 a_{n+1}.$$

Definición 12 Sean Σ y Σ' dos esferas. El producto inversivo denotado por (Σ, Σ') se define por

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2a \cdot b - a_0 b_{n+1} - b_0 a_{n+1}|}{2\sqrt{|a|^2 - a_0 a_{n+1}}\sqrt{|b|^2 - b_0 b_{n+1}}}$$

donde (a_0, a, a_{n+1}) y (b_0, b, b_{n+1}) son los vectores coeficientes.

A continuación se presentan algunas expresiones explícitas del producto inversivo, cuyas pruebas, se pueden verificar en [3] y con más detalle en [2] (pp. 26, 27).

1.- Si $\Sigma = S(a, r)$ y $\Sigma' = S(b, t)$, entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|r^2 + t^2 - |a - b|^2|}{2rt}.$$

2.- Si $\Sigma = S(a, r)$ y $\Sigma' = P(b, t)$, entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = |a \cdot b - t|.$$

3.- Si $\Sigma = P(a, t)$ y $\Sigma' = P(b, s)$, entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|a \cdot b|}{|a||b|} = |\cos \theta|,$$

donde θ es el ángulo, determinado por a y b .

Teorema 1.2.1 Sean Σ y Σ' dos “esferas”, el producto inversivo (Σ, Σ') es invariante bajo las transformaciones de Möbius; esto es, si $\varphi \in GM(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = (\varphi(\Sigma), \varphi(\Sigma'))$$

Una prueba de estos resultados aparece en [3] (p. 30) y con mayor detalle en [2] (pp. 37-41). También en el caso del plano hiperbólico, el producto inversivo se puede expresar en términos de la distancia hiperbólica

Teorema 1.2.2 Sean L y L' geodésicas en el plano hiperbólico. Entonces el producto inversivo (L, L') está dado por

$$\cosh \rho(L, L'), 1, \cos \varphi,$$

dependiendo de si L, L' son disjuntas, paralelas o se intersecan en un ángulo φ , donde $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Una prueba de este teorema aparece en [3] pp. 156-158.

1.3. Trigonometría hiperbólica

A continuación se presentan algunos resultados de trigonometría hiperbólica que serán utilizados en este trabajo; las pruebas se pueden consultar en [3] y con más detalle en [9].

Teorema 1.3.1 *Si L_1 y L_2 son geodésicas disjuntas, entonces existe una única geodésica ortogonal a ambas. Además la distancia $\rho(L_1, L_2)$ entre L_1 y L_2 es la distancia medida a lo largo de su ortogonal común.*

El siguiente resultado proporciona una forma hiperbólica del teorema de Pitágoras.

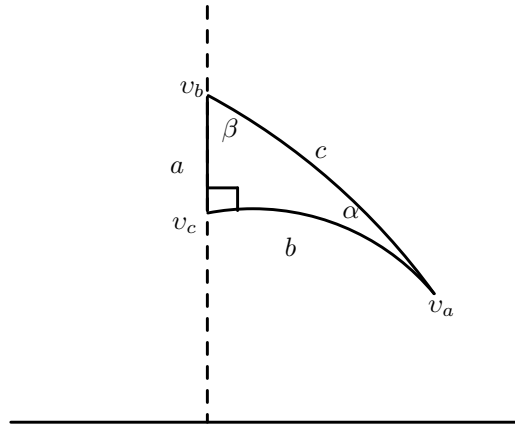


Figura 1.1: Teorema 1.3.2

Teorema 1.3.2 *Para cualquier triángulo con ángulos $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$ se tiene*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b,$$

donde $a, b, y c$ son como en la Figura 1.1.

Ahora, se presentan relaciones entre dos lados y un ángulo.

Teorema 1.3.3 *Para cualquier triángulo con ángulos $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$ se tiene*

$$\sinh b = \sinh c \sin \beta, \tag{1.1}$$

donde b y c son como en la Figura 1.1.

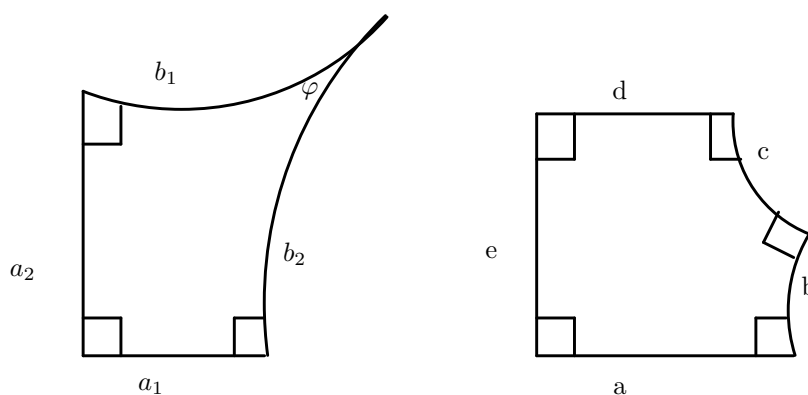


Figura 1.2: Cuadrilátero de Lambert y Pentágono

Existen cuadriláteros hiperbólicos con ángulos $\pi/2, \pi/2, \pi/2, \varphi$ si y solo si $0 \leq \varphi < \pi/2$ (véase figura 1.2); a éstos se les llama de Lambert (cf. [3] pp. 155, 156). El siguiente resultado relaciona los lados del cuadrilátero de Lambert con el ángulo φ .

Teorema 1.3.4 *Dado un cuadrilátero de Lambert como el descrito en la Figura 1.2, se tiene*

$$\sinh a_1 \sinh a_2 = \cos \varphi. \quad (1.2)$$

El siguiente resultado muestra las relaciones métricas entre ciertos lados de un pentágono hiperbólico con cinco ángulos rectos.

Teorema 1.3.5 *Dado un pentágono hiperbólico con cinco ángulos rectos como en la Figura 1.2, se tiene*

$$\sinh a \sinh b = \cosh d. \quad (1.3)$$

Dado $0 < \theta < \pi/2$ y L_1 y L_2 geodésicas disjuntas. Una geodésica L es una θ -transversal de L_1 y L_2 si y solo si L interseca a ambas en un ángulo θ .

Proposición 1.3.6 *Dadas L_1 y L_2 geodésicas disjuntas y $\theta \in (0, \pi/2)$, entonces existen exactamente cuatro θ -transversales a L_1 y L_2 .*

Una prueba de este hecho se puede consultar en [3] y con más detalle en [8] (pp. 31-33). La descripción de éstas se muestra en la Figura 1.3. En el primer caso, a las θ -transversales se les conoce como *alternantes*, y en el segundo caso se les llama *complementarias*.

Obsérvese que, si t_0 denota la longitud del segmento de una θ -transversal que une L_1 y L_2 , entonces de la ecuación (1.1) se sigue que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(L_1, L_2) = \sinh \left(\frac{1}{2} t_0 \right) \sen \theta. \quad (1.4)$$

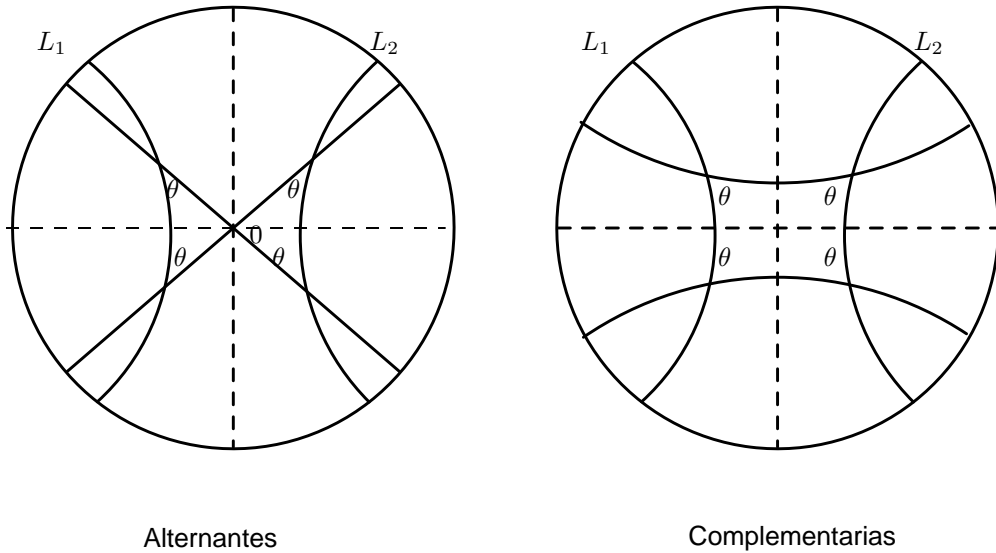


Figura 1.3: θ -transversales

1.4. Haces y productos

Se enuncian algunos hechos sobre haces de geodésicas y productos de transformaciones de Möbius; las pruebas se pueden consultar en [3] y con más detalles en [8] y [4]. En el capítulo 3 se probará que los grupos puramente hiperbólicos no abelianos son fuchsianos. Esta discusión se dará en términos de haces de geodésicas. Dadas dos geodésicas distintas L y L' en el plano hiperbólico, éstas pertenecen a una familia de geodésicas llamada el haz \mathcal{G} determinado por ellas. A cada haz le corresponde una familia \mathcal{C} de curvas (no necesariamente geodésicas) llamada la familia complementaria de \mathcal{G} .

El haz determinado por L y L' se dirá que es

- (a) parabólico si L y L' son paralelas,
- (b) elíptico si L y L' se intersecan,
- (c) hiperbólico si L y L' son ajenas.

Teorema 1.4.1 *Sean g una isometría y σ_j la reflexión sobre la geodésica L_j , $j = 1, 2$. Entonces*

- (a) *g es parabólica si y sólo si es de la forma $\sigma_2\sigma_1$, donde L_1 y L_2 paralelas,*
- (b) *g es elíptica si y sólo si es de la forma $\sigma_2\sigma_1$, donde L_1 interseca a L_2 ,*
- (c) *g es hiperbólica si y sólo si es de la forma $\sigma_2\sigma_1$, donde $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.*

Una prueba de este teorema se puede consultar en [3] (pp. 172-174) y con más detalle en [8] (pp. 57-59, 63, 66). Este resultado se puede afinar más.

Corolario 1.4.2 *Sea g una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ (o en $M(\Delta)$) entonces, $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_i son las reflexiones en las geodésicas L_1 y L_2 . Más aún, dado $w \in \mathbb{H}^2$ (o en Δ) fijo, se puede suponer $w \in L_2$.*

Una prueba de este último resultado aparece en [4] (p. 15). Dada una transformación $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ (o en $M(\Delta)$), definimos el haz de geodésicas asociado a T de la siguiente forma

- 1) si T es parabólica, el haz consiste en las geodésicas que terminan en el punto fijo de T en $\widehat{\mathbb{R}} \setminus \partial\Delta$,
- 2) si T es elíptica, el haz consiste en las geodésicas que pasan por el punto fijo de T en \mathbb{H}^2 o Δ ,
- 3) Si T es hiperbólica, el haz estará compuesto por las geodésicas que son ortogonales al eje, donde el eje es la geodésica que une los puntos fijos de T en \mathbb{H}^2 o Δ .

Para una isometría hiperbólica g , se define la longitud de traslación T de g de la siguiente forma

$$T = \inf \{ \rho(z, g(z)) \},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los puntos $z \in \mathbb{H}^2$. Más aún, la longitud de traslación queda determinada por la traza.

Teorema 1.4.3 *Si g es una isometría hiperbólica con longitud de traslación T , entonces*

$$\cosh \left(\frac{1}{2} T \right) = \frac{|\text{tr}(g)|}{2}.$$

Una prueba aparece en [4]. Se requerirán también resultados sobre productos de isometrías cuyas pruebas se pueden consultar en [4] (pp. 48-52, 58-59).

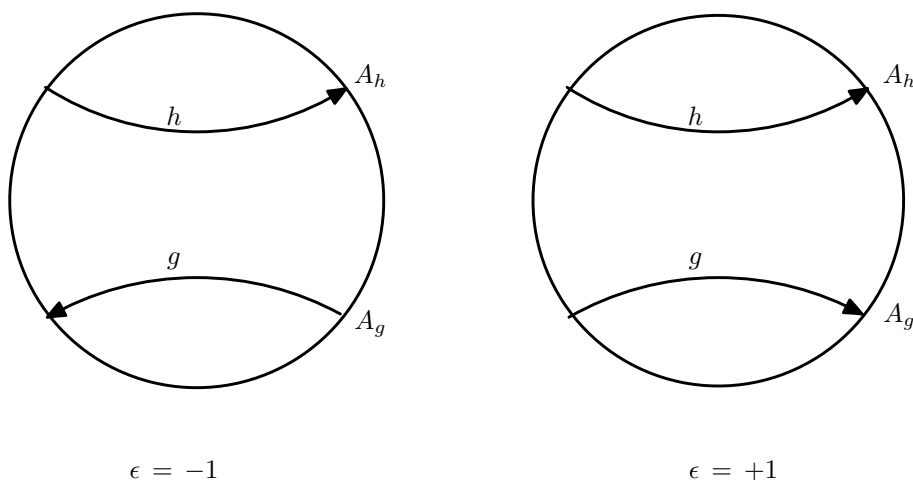


Figura 1.4: Dos casos del Teorema 1.4.4

Teorema 1.4.4 *Sean g y h transformaciones hiperbólicas con longitudes de traslación T_g, T_h y ejes ajenos A_g, A_h . Entonces*

$$\frac{1}{2} |\text{tr}(gh)| = \left| \cosh \rho(A_g, A_h) \sinh \left(\frac{1}{2} T_g \right) \sinh \left(\frac{1}{2} T_h \right) + \epsilon \cosh \left(\frac{1}{2} T_g \right) \cosh \left(\frac{1}{2} T_h \right) \right|,$$

donde $\epsilon = \pm 1$ dependiendo de las direcciones relativas de g y h de acuerdo a la Figura 1.4

Teorema 1.4.5 Sean g y h transformaciones hiperbólicas tales que A_g, A_h se intersecan en un punto v . Supóngase también que el ángulo entre los semi-rayos desde v a los puntos fijos atractores de g y h es θ , donde $0 < \theta < \pi$, entonces el producto gh es hiperbólico, y

$$\frac{1}{2} |tr(gh)| = \cosh\left(\frac{1}{2} T_g\right) \cosh\left(\frac{1}{2} T_h\right) + \sinh\left(\frac{1}{2} T_g\right) \sinh\left(\frac{1}{2} T_h\right) \cos \theta.$$

CAPÍTULO 2

Geometría de los conmutadores

Se trabajará indistintamente en el disco de Beltrami-Poincaré, Δ , o en el semiplano \mathbb{H}^2 . Nótese que la función de Cayley

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

es una isometría conforme de \mathbb{H}^2 en Δ (cf. [7] p. 34).

Definición 13 Sea G un grupo, $a, b \in G$, se define el conmutador de a y b denotado por $[a, b]$ como

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

Discutiremos la geometría de los conmutadores de las isometrías en el plano hiperbólico, nótese que como

$$[g, h] = g(hg^{-1}h^{-1}),$$

el conmutador de dos transformaciones de Möbius g, h se puede pensar como el producto de g y el conjugado de g^{-1} bajo h . Por lo cual, para estudiar los distintos casos, basta analizar los distintos tipos de transformaciones de g , ya que también

$$[h, g] = hgh^{-1}g^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = [g, h]^{-1}.$$

Nótese además que basta trabajar con conjugados de g y h , ya que

$$\begin{aligned} [fgf^{-1}, fhf^{-1}] &= (fgf^{-1})(fhf^{-1})(fgf^{-1})^{-1}(fhf^{-1})^{-1} \\ &= fghg^{-1}h^{-1}f^{-1} \\ &= f[g, h]f^{-1}. \end{aligned}$$

Esto es, el conmutador de los conjugados es el conjugado del conmutador. Observamos también que si g es una rotación de ángulo θ , entonces $hg^{-1}h^{-1}$ es una rotación del mismo ángulo pero en sentido opuesto. Esto se sigue ya que g se puede expresar como producto de dos reflexiones σ_i , $i = 1, 2$, sobre geodésicas L_i . Esto es, como $g = \sigma_2\sigma_1$ se tiene

$$hg^{-1}h^{-1} = h(\sigma_2\sigma_1)^{-1}h^{-1} = h\sigma_1\sigma_2h^{-1} = h\sigma_1h^{-1}h\sigma_2h^{-1}.$$

Ahora, $h\sigma_i h^{-1}$ es la reflexión en $h(L_i)$, $i=1,2$ (cf. [3] p. 31). Además h es conforme y holomorfa en el punto v de intersección de L_1 y L_2 , (se preserva el sentido) esto es, el ángulo entre $h(L_1)$ y $h(L_2)$ es de nuevo θ , por lo que se sigue la observación (véase la Figura 2.1).

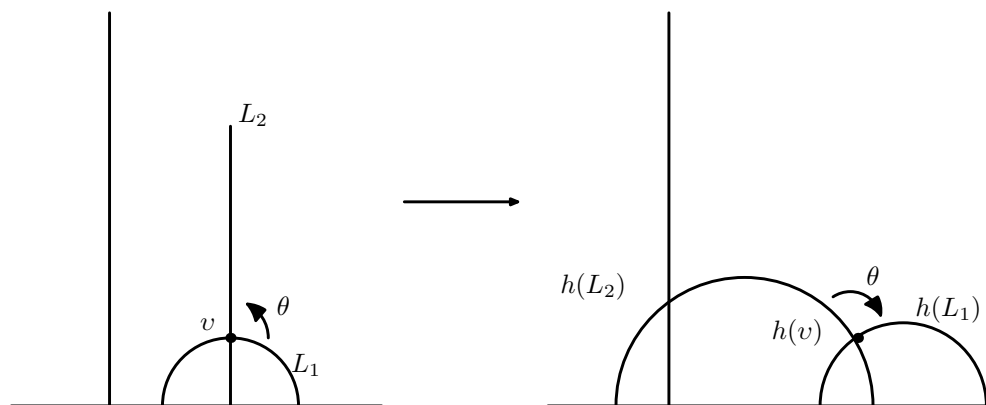


Figura 2.1: $hg^{-1}h^{-1}$ es una rotación en el sentido opuesto a g

De manera análoga al caso elíptico, si g es parabólica, g y $hg^{-1}h^{-1}$ actúan en direcciones opuestas. Esto se tiene ya que como $g = \sigma_1\sigma_2$, se sigue que

$$\begin{aligned} hg^{-1}h^{-1} &= h\sigma_2\sigma_1h^{-1} \\ &= (h\sigma_2h^{-1})(h\sigma_1h^{-1}), \end{aligned}$$

por lo que esta función es la reflexión en $h(L_1)$ seguida de la reflexión en $h(L_2)$. Estos hechos muestran que el dibujo correcto es el que se muestra en la Figura 2.2, ya que al tomar vectores tangentes, al segmento real vv_1 y al segmento de geodésica $[v, v_1]$, el ángulo orientado de $\frac{\pi}{2}$ se debe preservar por la conformalidad en v .

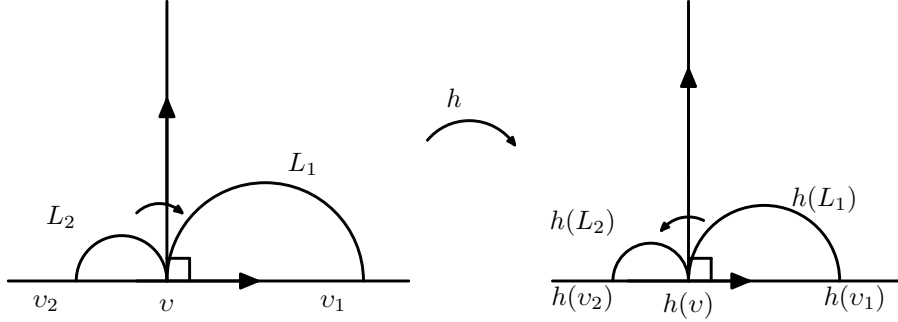


Figura 2.2: Caso parabólico: g y $hg^{-1}h^{-1}$ actúan en direcciones opuestas.

Teorema 2.0.6 Sean $g, h \in PSL(2, \mathbb{R})$ (o en $M(\Delta)$) tales que g es parabólica y g y h no tienen puntos fijos en común. Entonces el conmutador $[g, h]$ es una transformación hiperbólica.

DEMOSTRACIÓN. Una forma de probarlo es con matrices. Sin perder generalidad, se puede tomar $g(z) = z + 1$ y $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, en $PSL(2, \mathbb{R})$. Estas transformaciones están definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde $ad - bc = 1$. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} ABA^{-1}B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d+c & -b-a \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+c)(d+c) - c(b+d) & * \\ * & -(b+a)c + ad \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \text{traza}(ABA^{-1}B^{-1}) &= ad + cd + ca + c^2 - cb - cd + ad - cb - ca \\ &= 2 + c^2 > 2, \end{aligned}$$

y $[g, h]$ es hiperbólica ($c \neq 0$, ya que g y h no tienen puntos fijos en común).

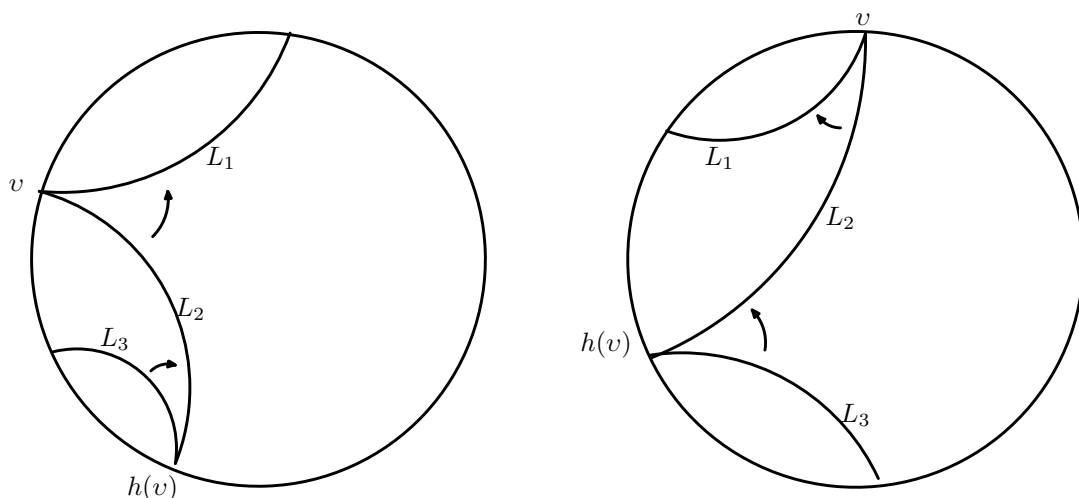


Figura 2.3: Dos casos en la prueba del teorema 2.0.6

Una prueba más ilustrativa (geométrica) es la siguiente: Sea v el punto fijo de g y sea L_2 la geodésica que va de v a $h(v)$. Para una elección adecuada de geodésicas L_1 y L_3 , podemos escribir

$$g = \sigma_1 \sigma_2 \quad \text{y} \quad hg^{-1}h^{-1} = \sigma_2 \sigma_3,$$

donde σ_i es la reflexión en L_i $i = 1, 2, 3$ y L_1 y L_3 terminan en v y $h(v)$ respectivamente. Esto se puede llevar a cabo en virtud del Corolario 1.4.2 (véase la Figura 2.3).

Se sigue de la observación previa al teorema que L_1 y L_3 están contenidos en semiplanos distintos determinados por L_2 , y por lo tanto son ajenas (véase la Figura 2.3). \square

Teorema 2.0.7 Sean $g, h \in PSL(2, \mathbb{R})$ (o en $M(\Delta)$) tal que g es elíptica con punto fijo v y ángulo de rotación 2θ , $0 < \theta \leq \pi$, y h no fija v ; entonces $[g, h]$ es una transformación hiperbólica con longitud de traslación T , donde

$$\sinh\left(\frac{T}{4}\right) = \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(v, h(v))\right) \sin \theta. \quad (2.1)$$

DEMOSTRACIÓN. Usamos el modelo del disco. Como g es una transformación elíptica, se puede pensar como $\sigma_1\sigma_2$, donde σ_i es la reflexión sobre la geodésica L_i , $i = 1, 2$, L_2 une a v con $h(v)$ y L_1 pasa por v . Sin pérdida de generalidad, conjugando se puede suponer que L_2 es una geodésica que pasa por el origen. Además L_1 y L_2 se intersecan en un ángulo θ (véase la Figura 2.4).

Por las observaciones hechas anteriormente se tiene que si g es una rotación de ángulo θ , entonces $hg^{-1}h^{-1}$ es una rotación de ángulo θ pero en sentido opuesto; por lo que construimos L_3 de tal forma que interseque a L_2 en $h(v)$ con un ángulo de intersección θ (véase la Figura 2.4).

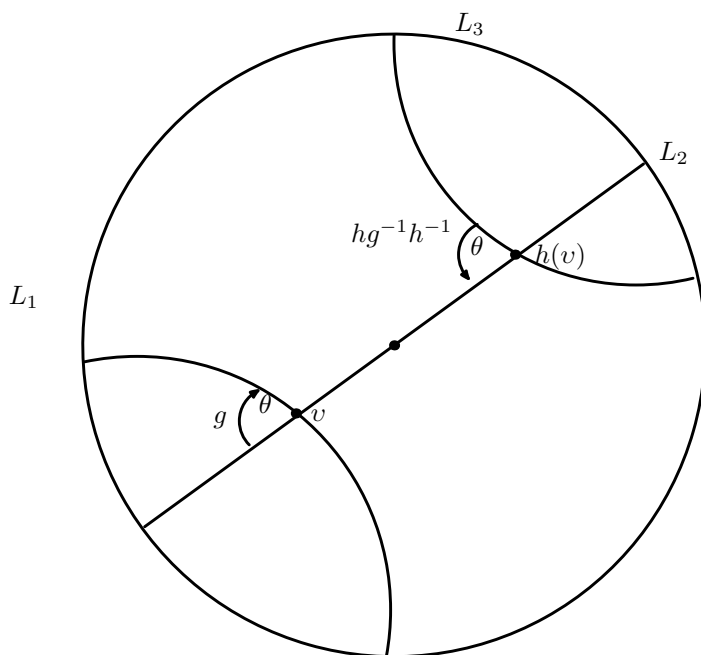


Figura 2.4: Prueba del Teorema 2.0.7

Nótese que

$$hg^{-1}h^{-1} = \sigma_2\sigma_3.$$

Ahora, como L_1 y L_3 intersecan a L_2 con el mismo ángulo θ entonces L_1 y L_3 son disjuntas (esto se puede formalizar trasladando hiperbólicamente la geodésica L_1 a lo largo de L_2 y usando convexidad). Esto implica que

$$[g, h] = (\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2\sigma_3) = \sigma_1\sigma_3.$$

es una transformación hiperbólica. Nótese que $T = 2\rho(L_1, L_3)$ (esto se sigue al conjugar la transformación a una homotecia).

Finalmente, observando que L_2 es una θ -transversal y usando la ecuación (1.4), se tiene que:

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{T}{4}\right) &= \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(L_1, L_3)\right) \\ &= \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(v, h(v))\right) \sin \theta. \end{aligned}$$

□

Ya se abordaron en los teoremas anteriores los casos donde g es parabólica y g elíptica. Ahora se analizará el caso del conmutador $[g, h]$ donde g es hiperbólica. Si h es elíptica o parabólica, podemos considerar $[h, g]$, ya que como se mencionó antes

$$[h, g] = [g, h]^{-1}$$

y aplicando los Teoremas 2.0.6 y 2.0.7 tenemos que $[h, g]$ es hiperbólica, y por tanto $[g, h]$ lo es también. Por lo cual podemos suponer que g y h son ambas hiperbólicas. Debido a que la longitud de traslación es invariante bajo conjugación, se sigue que $hg^{-1}h^{-1}$ tiene longitud de traslación T_g y eje $h(A_g)$. En el siguiente resultado convenimos en que la dirección positiva de una transformación hiperbólica es la que va del repulsor al atractor.

Teorema 2.0.8 *Sean g y h hiperbólicas tales que $h(A_g)$ y A_g se intersecan en un ángulo θ (medida tomando las direcciones positivas de A_g y $h(A_g)$). Entonces $[g, h]$ es una transformación hiperbólica con longitud de traslación T , donde*

$$\cosh\left(\frac{T}{2}\right) = 1 + 2 \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $h' = hg^{-1}h^{-1}$, esta transformación es hiperbólica ya que es la conjugada de g^{-1} . Nótese que se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.4.5, por lo que $[g, h] = g(hg^{-1}h^{-1})$ es hiperbólica y

$$\frac{1}{2} |tr[g, h]| = \cosh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \cos \theta.$$

Ahora usando el Teorema 1.4.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{T}{2}\right) &= \cosh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \cos \theta \\ &= 1 + \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) (1 + \cos \theta) \\ &= 1 + 2 \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

□

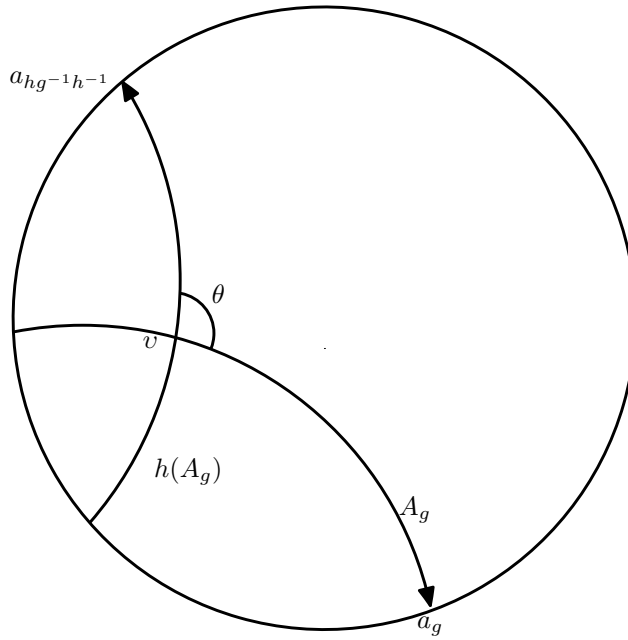


Figura 2.5: Teorema 2.0.8

Es posible considerar muchas situaciones con g y h hiperbólicas, y con esto se puede construir una “animación” sobre el comportamiento de $[g, h]$ de acuerdo a la variación de los parámetros T_g, T_h y el producto inversivo de A_g y A_h .

Si $A_g \cap A_h \neq \emptyset$, entonces $h(A_g) \cap A_g = \emptyset$, ya que A_g interseca a A_h en un ángulo θ y por conformalidad $h(A_g)$ interseca a A_h en el mismo ángulo que lo hace con A_g (véase Figura 2.6).

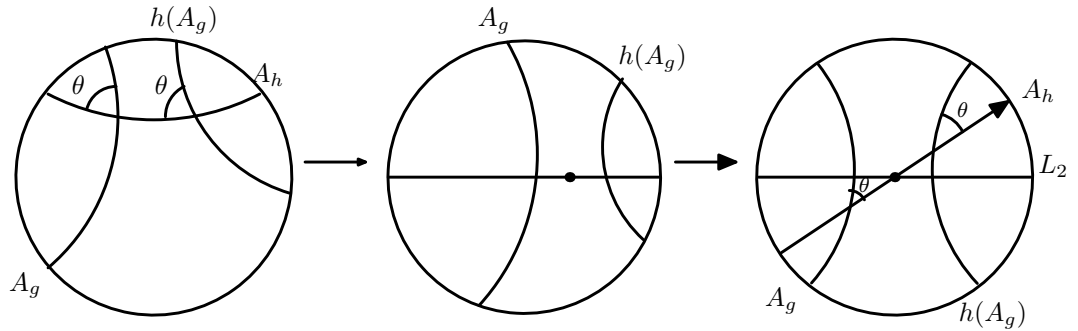


Figura 2.6: Configuración de A_g y $h(A_g)$ simétrica a los ejes real e imaginario

Mediante una isometría en $GM(\Delta)$ se pueden mandar A_g y $h(A_g)$ de tal forma que el punto medio de la geodésica ortogonal a A_g y $h(A_g)$ sea un punto de $L_2 = [-1, 1]$; mediante otra isometría, se puede mover ese punto medio al origen (ver Figura 2.6). Se afirma que A_h interseca a L_2 en el origen. Esto se sigue ya que A_h es una transversal a A_g y $h(A_g)$, la cual por conformalidad debe ser alterna, ya que si fuera complementaria, h transformaría dos curvas que se intersecan en un ángulo θ , en dos que se intersecan en un ángulo $\pi - \theta$ (véase los preliminares y [3]).

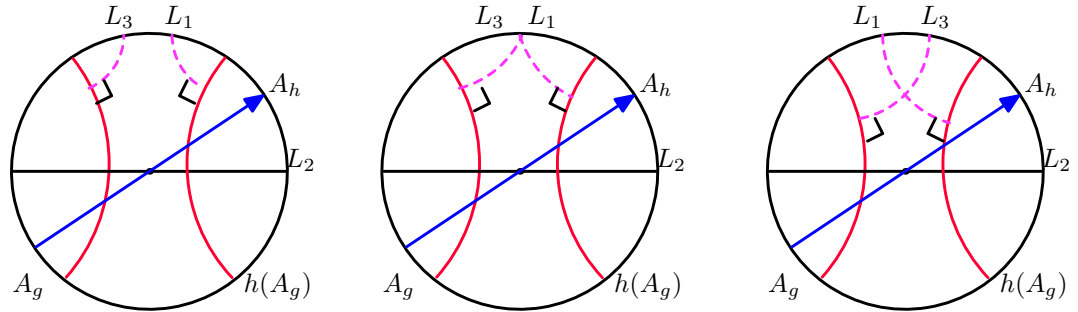


Figura 2.7: Distintos casos de conmutadores donde g, h son hiperbólicos con ejes que se intersecan

En este caso se puede tomar una geodésica L_3 ortogonal a A_g tal que $g = \sigma_3 \sigma_2$, donde σ_i es la reflexión en L_i , $i = 2, 3$. También existe una geodésica L_1 , que es la reflejada de L_3 mediante $z \mapsto -\bar{z}$ (véase la Figura 2.6). De esta forma se obtiene una configuración de A_g y $h(A_g)$ que es simétrica con respecto a los ejes real e imaginario. Ahora, dado que

g se puede escribir como $\sigma_3 \sigma_2$, entonces $hg^{-1}h^{-1} = \sigma_2 \sigma_1$, donde σ_1 es la reflexión en la geodésica L_1 .

Fijando A_g y h las distintas posibilidades para L_3 y L_1 dependen de T_g , esto es, para distintas transformaciones hiperbólicas con el mismo eje A_g y variando su longitud de traslación, se tienen los casos descritos en la Figura 2.7 (hiperbólica, parabólica, elíptica).

El siguiente teorema proporciona una clasificación del conmutador $[g, h]$ de acuerdo al comportamiento de T_g , y generaliza el teorema que aparece en el libro de Alan Beardon [3] p. 186.

Teorema 2.0.9 *Sean g y h transformaciones hiperbólicas con ejes A_g y A_h intersecándose en un ángulo θ , $0 < \theta < \pi$. Entonces $[g, h]$ es hiperbólica, parabólica o elíptica si y solo si la expresión*

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \sin \theta \quad (2.2)$$

es mayor, igual o menor a 1, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos el caso en que $[g, h]$ es una transformación no elíptica. Usamos los primeros dos diagramas de la Figura 2.7.

Se puede aplicar el Teorema 1.4.4 al producto de g y $hg^{-1}h^{-1}$, ya que se satisfacen las hipótesis, tomando $\epsilon = -1$. Usando la igualdad

$$\cosh(2z) = \cosh^2(z) + \sinh^2(z) = 1 + 2\sinh^2(z).$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{1}{2} |tr([g, h])| = \left| \cosh \rho(A_g, h(A_g)) \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) - \cosh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \right| \\ &= \left| \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \left(1 + 2\sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, h(A_g))\right)\right) - \left(1 + \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right)\right) \right| \\ &= \left| 2\sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, h(A_g))\right) \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) - 1 \right|. \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene

$$2\sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, h(A_g))\right) \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) - 1 \geq 1,$$

y en consecuencia

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, h(A_g))\right) \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \geq 1,$$

(véase la Figura 2.8). Ahora usando (1.1) se sigue que

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, h(A_g))\right) = \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \operatorname{sen} \theta.$$

De donde se concluye que

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \operatorname{sen} \theta \geq 1.$$

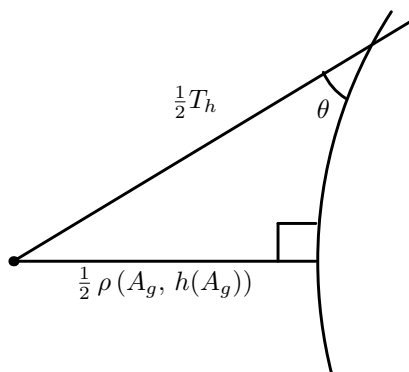


Figura 2.8: Triángulo usado en la prueba del Teorema 2.0.9

Una prueba alternativa de estos hechos es de tipo geométrico. Si $[g, h]$ es hiperbólica se obtiene un pentágono hiperbólico con sus cinco ángulos rectos, como lo muestra la Figura 2.9 (a). Aplicando (1.3) se tiene la siguiente relación

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, h(A_g))\right) \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) = \cosh d_1 > 1,$$

donde d_1 es el lado opuesto al ángulo formado por los lados del pentágono que corresponden a $\frac{1}{2}\rho(A_g, h(A_g))$ y $\frac{T_g}{2}$ (véase la Figura 2.9). El resultado se sigue de nuevo usando (1.1), por lo que se tiene

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \operatorname{sen} \theta > 1.$$

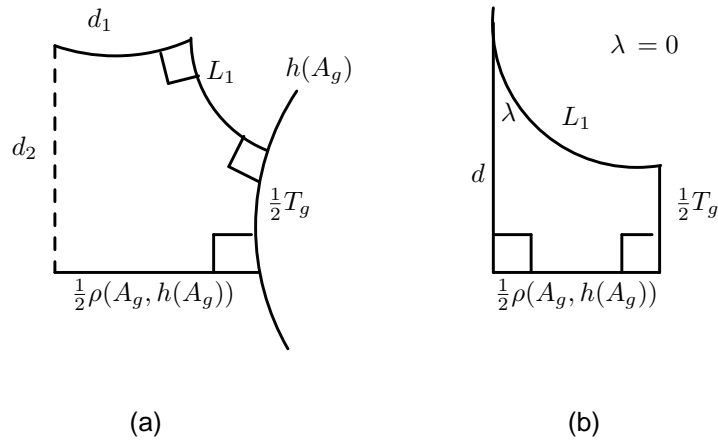


Figura 2.9: Pentágono y cuadrilátero de Lambert para el Teorema 2.0.9

Como se muestra a continuación, la igualdad se alcanza precisamente si $[g, h]$ es parabólica, para probar esto utilizamos (1.2), en donde $\varphi = 0$ (véase la Figura 2.9(b)). Por lo tanto usando nuevamente (1.1) se sigue el resultado

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \sin \theta = 1.$$

Esta segunda prueba brinda más información: si $[g, h]$ es hiperbólica entonces la expresión (2.2) es mayor que uno y si es parabólica entonces se satisface la igualdad.

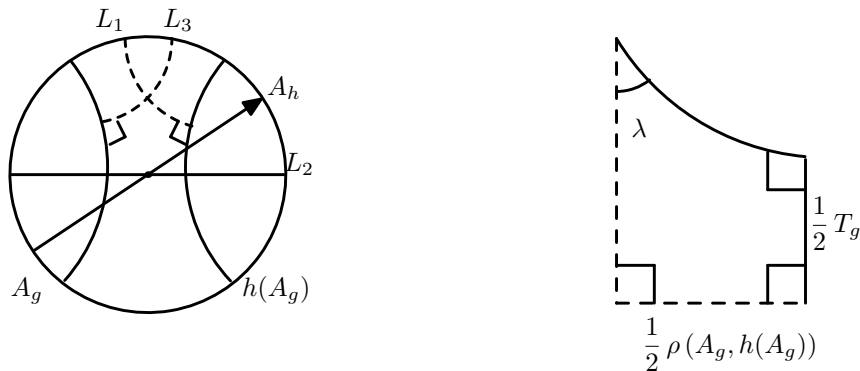


Figura 2.10: Caso elíptico

Ahora supongamos que $[g, h]$ es una transformación elíptica, con lo cual se tiene la situación descrita en el último diagrama de la Figura 2.7. Consideraremos el cuadrilátero de Lambert que se muestra en la Figura 2.10, donde $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$, se obtiene como consecuencia de (1.2) que

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, h(A_g))\right) \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) = \cos \lambda < 1,$$

y se sigue (de nuevo usando (1.1)) que

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \sin \theta < 1.$$

Si (2.2) es menor que 1, por lo que ya se ha probado anteriormente, el conmutador $[g, h]$ no puede ser hiperbólico, ni parabólico, por lo que se concluye que $[g, h]$ es una transformación elíptica. Un argumento similar se aplica a los demás casos, quedando probado el teorema. \square

Corolario 2.0.10 *Sean g_1, \dots, g_n elementos hiperbólicos conjugados en un grupo G que no tiene elementos elípticos. Sea T la longitud de traslación común y supongamos que los ejes A_j de g_j son concurrentes. Entonces*

$$\sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Dos de los ejes A_j y A_i deben cruzarse en un ángulo θ , donde $\theta \leq \frac{\pi}{n}$, ya que si $\theta_k > \frac{\pi}{n}$, para $k = 1, 2, \dots, n$, donde θ_k es el ángulo de intersección entre dos de los ejes A_j entonces se tendría

$$\sum_{k=1}^n \theta_k > \pi$$

y por consecuencia

$$2 \sum_{k=1}^n \theta_k > 2\pi$$

lo cual no puede suceder (véase Figura 2.11).

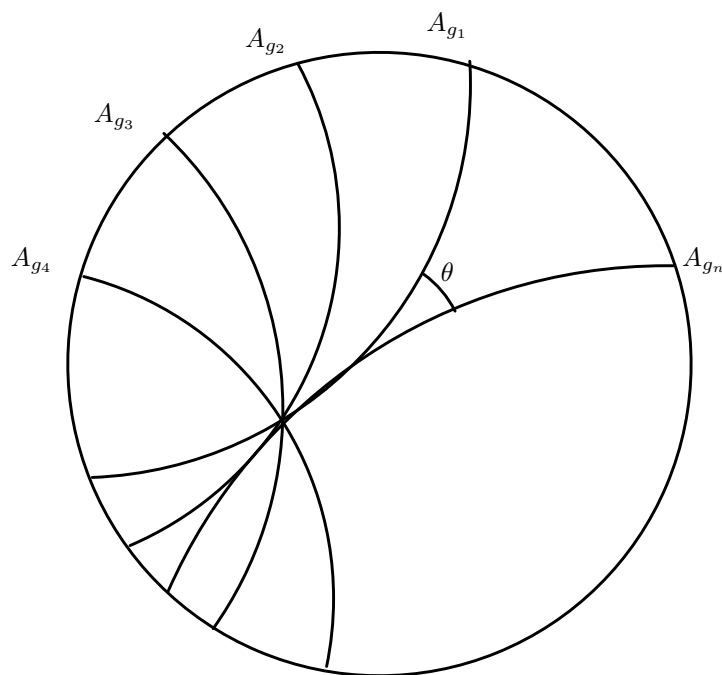


Figura 2.11: Corolario 2.0.10

Se sigue que

$$\text{sen } \theta \leq \text{sen } \frac{\pi}{n}.$$

Como el grupo no contiene elementos elípticos, entonces el conmutador $[g_i, g_j]$ no es elíptico, por lo que se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.0.9. Como consecuencia, se obtiene

$$1 \leq \text{senh}^2 \left(\frac{T}{2} \right) \text{sen } \theta < \text{senh}^2 \left(\frac{T}{2} \right) \text{sen } \frac{\pi}{n}.$$

□

Este resultado implica que la longitud de traslación T debe ser grande, si existen muchos ejes hiperbólicos concurrentes en un grupo fuchsiano G sin elementos elípticos.

A continuación se probará un resultado que proporciona un criterio para saber si dado el eje de una transformación hiperbólica L , interseca a su imagen bajo una transformación h . Para probar la proposición se necesita la siguiente definición.

Definición 14 *Dados cuatro puntos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ se define su razón cruzada como*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4},$$

si alguno de ellos es ∞ , se omiten los términos donde aparece.

Proposición 2.0.11 *Sean L el eje imaginario positivo en \mathbb{H}^2 y h una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ dada por*

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad c, b \neq 0.$$

Entonces el producto inversivo $(L, h(L))$ puede ser expresado en términos de la razón cruzada $[0, \infty, h(0), h(\infty)]$, y viceversa. Más aún, ambos pueden ser expresados en términos de a y d . Además L y $h(L)$ se intersecan si y solo si $ad \in [0, 1)$.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que h no fija 0 ni ∞ , y por lo tanto

$$\begin{aligned} [0, \infty, h(0), h(\infty)] &= \frac{h(0)}{h(0) - h(\infty)} \\ &= \frac{\frac{b}{d}}{\frac{b}{d} - \frac{a}{c}} = \frac{\frac{b}{d}(cd)}{cb - ad} = -bc = 1 - ad. \end{aligned}$$

Por lo que

$$ad = 1 - [0, \infty, h(0), h(\infty)].$$

Por otra parte, el producto inversivo de una recta a un círculo está dado por la distancia del centro del círculo a la recta dividido entre el radio del círculo (cf. [3], pp. 29-30), por lo que, si x_0 es el centro euclidiano del círculo que

contiene a la geodésica $h(L)$ y r su radio, se tiene

$$\begin{aligned}
 (L, h(L)) &= \frac{|x_0|}{r} = \frac{\left| \frac{b}{d} + \frac{a}{c} \right|}{\frac{2}{\left| \frac{b}{d} - \frac{a}{c} \right|}} \\
 &= \frac{|bc + ad|}{|bc - ad|} \\
 &= |ad + bc| = |ad + ad - 1| = |2ad - 1|.
 \end{aligned}$$

Se sigue

$$(L, h(L)) = |1 - 2[0, \infty, h(0), h(\infty)]|.$$

También

$$[0, \infty, h(0), h(\infty)] = \begin{cases} \frac{1 - (L, h(L))}{2} & \text{si } ad > 1/2, \\ \frac{1 + (L, h(L))}{2} & \text{si } ad < 1/2. \end{cases}$$

Es claro también que ad se puede expresar en términos de $(L, h(L))$.

Para el caso en que $L \cap h(L) \neq \emptyset$, se tiene que

$$(L, h(L)) = \cos \varphi,$$

donde φ es el ángulo de intersección entre L y $h(L)$. Por lo tanto se tiene que

$$|2ad - 1| \leq 1$$

$$-1 \leq 2ad - 1 \leq 1$$

$$0 \leq 2ad \leq 2$$

y se sigue que $ad \in [0, 1]$.

Si $ad \in [0, 1]$ entonces $0 \leq ad \leq 1$ y por lo tanto $-1 \leq 2ad - 1 \leq 1$.

Nótese que si $ad = 0, 1$ se tiene que $(L, h(L)) = 1$, es decir, las geodésicas L y $h(L)$ son paralelas (véase preliminares). Sin embargo, el caso $ad = 1$ no acontece ya que, por hipótesis, $b, c \neq 0$. El caso $ad = 0$ si puede suceder, por ejemplo, la transformación definida por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1/a & d \end{pmatrix}$$

□

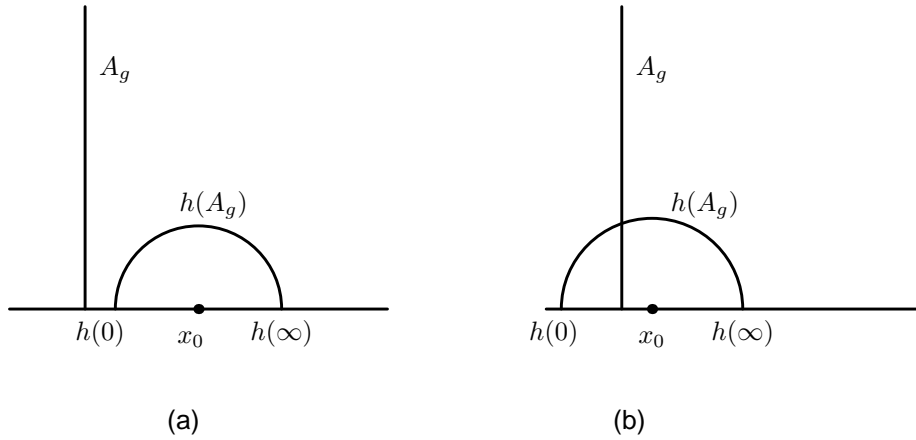


Figura 2.12: Algunas posibilidades en la Proposición 2.0.11

CAPÍTULO 3

Grupos fuchsianos elementales

Se dice que un grupo G es fuchsiano si es un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{C})$ con un disco invariante D . Nótese que si $D = \mathbb{H}^2$, entonces $G < PSL(2, \mathbb{R})$. En este capítulo se hace una descripción de los grupos fuchsianos elementales para lo cual introducimos las siguientes definiciones.

Definición 15 *Se dice que $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un punto límite con respecto a un subgrupo G de $PSL(2, \mathbb{C})$, si existen $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y transformaciones distintas $\bar{T}_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, tales que*

$$\bar{T}_n(z) \longrightarrow w \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Al conjunto de puntos límite se le denotará por $\mathbb{L}(G)$.

Definición 16 *Se dice que $G < PSL(2, \mathbb{C})$ es elemental, si $\mathbb{L}(G)$ tiene a lo más dos puntos.*

Para clasificar los grupos fuchsianos elementales, se tienen tres casos.

Caso 1. G no tiene puntos límite.

Nótese que G resulta ser puramente elíptico. Probaremos que también es cíclico, para probar esto se usará el siguiente teorema, cuya prueba se puede consultar en [3] p. 70, y con más detalle en [10] p. 61.

Teorema 3.0.12 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{R})$. G contiene sólo elementos elípticos y la identidad si y sólo si las extensiones de Poincaré de G tienen un punto fijo.*

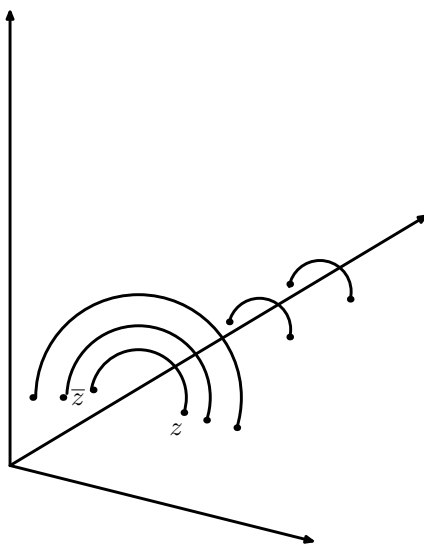


Figura 3.1: Foliación en \mathbb{H}^3 descrita en la Proposición 3.0.13.

Teorema 3.0.13 *Sea G un grupo fuchsiano elemental. Si G es puramente elíptico, entonces G es un grupo cíclico.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.0.12, los elementos de G tienen un punto fijo en común $\eta \in \mathbb{H}^3$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que \mathbb{H}^2 es invariante. Como cada $g \in G$ es elíptica, entonces g tiene puntos fijos conjugados w y \bar{w} .

Ahora, las geodésicas en \mathbb{H}^3 que unen z con \bar{z} , variando z , forman una foliación de \mathbb{H}^3 y como cada punto en \mathbb{H}^3 pertenece a una sola geodésica de este tipo (ver Figura 3.1), entonces existe una única geodésica de este tipo que contiene a η , por lo que se sigue que w, \bar{w} son puntos fijos de g , para toda $g \in G$. Por el Teorema 4.0.17, G es abeliano y como G es discreto, se concluye que G es cíclico (cf. [7] p. 105).

□

OTRA PRUEBA (ALGEBRAICA). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $G < M(\Delta)$ y $\bar{g}, \bar{h} \in \bar{G}$ son tales que

$$g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad h = \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad |u| = e^{i\theta}, \theta \in (0, 2\pi).$$

Usaremos el conmutador de g y h , esto es, $[g, h] \in G$, obsérvese que

$$u^2 + \bar{u}^2 = 2 \cos 2\theta \quad \text{y} \quad 1 - \cos 2\theta = 2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -c & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} au & u\bar{c} \\ \bar{u}c & \bar{a}\bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}\bar{u} & -\bar{u}\bar{c} \\ -uc & au \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |u|^2 |a|^2 - u^2 |c|^2 & * \\ * & -\bar{u}^2 |c|^2 + |u|^2 |a|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}([g, h]) &= 2|u|^2 |a|^2 - |c|^2 (u^2 + \bar{u}^2) = 2(1 + |c|^2) - |c|^2 (2 \cos 2\theta) \\ &= 2 + 2|c|^2 (1 - \cos 2\theta) = 2 + 4|c|^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= 2 + 4|c|^2 (\operatorname{Im}(u))^2. \end{aligned}$$

Como $[g, h] \in G$, entonces $c = 0$ o $\operatorname{Im}(u) = 0$, dado que $|u| = 1$ y $u^2 \neq 1$ por ser $g \neq Id$, se sigue que $c = 0$ y por tanto \bar{h} fija 0 e ∞ , y $|a| = 1$.

□

Caso 2. G tiene un punto límite.

Se puede probar fácilmente que G es cíclico parabólico (cf. [7] pp. 110-111).

Caso 3. G tiene dos puntos límite.

Se probará que el grupo no contiene transformaciones parabólicas, pero sí contiene transformaciones hiperbólicas y posiblemente transformaciones elípticas de orden 2.

Supongamos que existen $f, g \in G$ parabólicas con puntos fijos distintos w_1, w_2 respectivamente. Consideremos las transformaciones de la forma $g^n f g^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, nótese que estas transformaciones tienen puntos fijos de la

forma $g^n(w_1)$, por lo que $\mathbb{L}(G)$ tiene más de dos puntos, lo cual es una contradicción que surge de suponer que G tiene transformaciones parabólicas. Por tanto G contiene solamente transformaciones hiperbólicas y elípticas. Nótese además que como $\mathbb{L}(G)$ tiene dos puntos, se sigue que todas las transformaciones hiperbólicas del grupo fijan los mismos puntos (cf. [7] p. 128). Además si el grupo contiene transformaciones elípticas, éstas deben ser de orden dos, y estas funciones intercambian los puntos fijos de las hiperbólicas. Es fácil ver que si hay transformaciones elípticas, entonces el subgrupo de las transformaciones hiperbólicas es cíclico de índice dos. Si no contiene transformaciones elípticas, entonces el grupo resulta ser cíclico hiperbólico.

Definición 17 Sean $G < PSL(2, \mathbb{R})$ y $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Se define el subgrupo estabilizador de z como

$$G_z = \{\bar{T} \in G \mid \bar{T}(z) = z\}$$

Definición 18 Sea G un grupo fuchsiano. Se dice que un elemento hiperbólico o parabólico $g \in G$ es primitivo si genera el estabilizador de sus puntos fijos. Si g es elíptico, es primitivo cuando genera el estabilizador y tiene un ángulo de rotación de la forma $\frac{2\pi}{n}$.

El siguiente resultado establece una condición necesaria y suficiente para que un elemento de un grupo fuchsiano sea primitivo. Antes enunciamos una definición y un resultado cuya prueba se puede consultar en [7] p.136.

Definición 19 Sea g una isometría conforme distinta de la identidad y que no es elíptica de orden dos. La región canónica Σ_g de g se define como

$$\Sigma_g = \left\{ z \mid \sinh \frac{1}{2} \rho(z, g(z)) < \frac{|tr(g)|}{2} \right\}.$$

Si g es de orden dos con punto fijo v , entonces $\Sigma_g = \{v\}$.

Proposición 3.0.14 El bisector perpendicular al segmento $[z, w]$, donde $z, w \in \mathbb{H}^2$, consiste en todos los puntos en \mathbb{H}^2 que equidistan hiperbólicamente de z y w , es decir,

$$\{s \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(s, z) = \rho(s, w)\}$$

Proposición 3.0.15 Sean $G < PSL(2, \mathbb{R})$ (o $M(\Delta)$), $g \in G$ y G_0 el estabilizador de los puntos fijos de g . Entonces g es primitivo si y sólo si $\Sigma_h \subset \Sigma_g$ para todo $h \in G_0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in G$ tal que g es primitivo. Se demostrará que para todo $h \in G_0$, $\Sigma_h \subset \Sigma_g$. Se tienen tres casos.

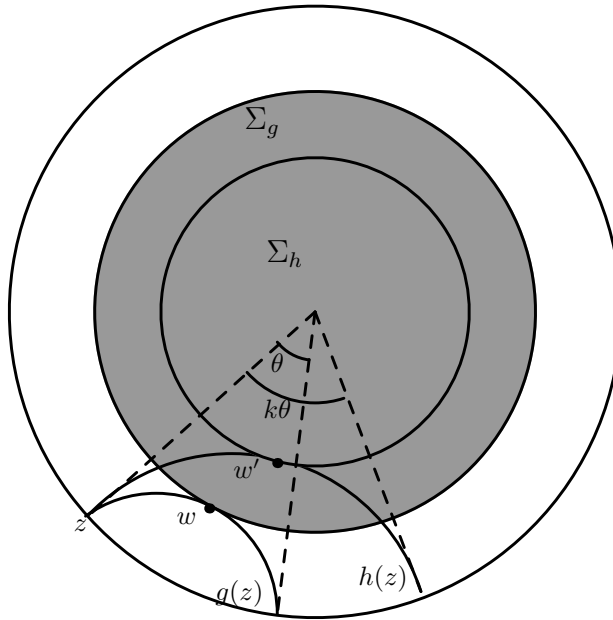


Figura 3.2: Caso G_0 elíptico.

Caso 1. G_0 es elíptico.

Sea g un generador de G_0 . Como g es primitiva y elíptica, se puede suponer que

$$g(z) = e^{i\theta} z \quad \text{donde} \quad \theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Esto implica que si $h \in G_0$, entonces es de la forma

$$h(z) = e^{i\theta k} z \quad \text{donde} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad k\theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

Como $\Sigma_h = \Sigma_{h^{-1}}$ (cf. [3] p. 177), se puede suponer que $\frac{2k\pi}{n}$ es menor a π (si $\frac{2k\pi}{n} > \pi$ se toma $\frac{2\pi(n-k)}{n}$).

Ahora, sea $z \in \Delta$. Observemos que el triángulo formado por los vértices $0, z, g(z)$ tiene el ángulo de rotación de g en el origen. Tomamos el bisector perpendicular euclidiano a z y $g(z)$, éste pasa por 0 . Denotamos por w al punto de intersección de este bisector con la geodésica hiperbólica por z y $g(z)$. Al rotar z , todos los puntos correspondientes w están en un mismo círculo con centro en el origen y radio $\rho(w, 0)$. Se puede verificar que Σ_g es dicho disco (cf. [3] pp. 177-178). De manera análoga, se puede ver que Σ_h es un disco con centro en el origen y radio $\rho(w', 0)$, donde w' pertenece al bisector perpendicular euclidiano a z y $h(z)$. Nótese que $\rho(w, 0) > \rho(w', 0)$, por lo que se sigue que $\Sigma_h \subset \Sigma_g$ (véase la Figura 3.2).

Ahora se presenta una prueba algebraica. De la Definición 19, se tiene que

$$\Sigma_g = \left\{ z \in \Delta \mid \sinh \frac{1}{2} \rho(z, g(z)) < \frac{|tr(g)|}{2} \right\}.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\frac{|tr(g)|}{2} = \frac{|2 \cos(\theta/2)|}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Ahora, por el Teorema 1.3.3 se tiene que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, g(z)) = \sinh \rho(z, 0) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

(véase la Figura 3.3). Por lo que se sigue que

$$\Sigma_g = \left\{ z \in \Delta \mid \sinh \rho(z, 0) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\},$$

y

$$\Sigma_g = \left\{ z \in \Delta \mid \sinh \rho(z, 0) \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) < 1 \right\}.$$

De forma análoga se tiene que

$$\frac{|tr(h)|}{2} = \frac{|2 \cos(k\theta/2)|}{2} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

por lo que se sigue

$$\Sigma_h = \left\{ z \in \Delta \mid \sinh(\rho(z, 0)) \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) < 1 \right\}.$$

Si existiera un punto $z \in \Sigma_h$ tal que $z \notin \Sigma_g$, entonces se tendría que

$$\sinh \rho(z, 0) \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) < \sinh \rho(z, 0) \tan\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

y

$$\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) < \tan\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

lo cual es una contradicción, ya que

$$0 \leq \frac{\pi}{n} < \frac{k\pi}{n} < \frac{\pi}{2}.$$

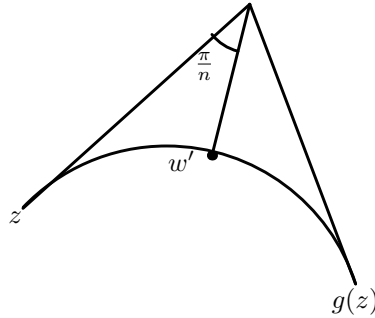


Figura 3.3: Triángulo usado en la demostración del caso elíptico.

Ahora, supongamos que $\Sigma_h \subset \Sigma_g$ para todo $h \in G_0$. Si g no es primitiva, entonces existe una transformación $g' \in G_0$ tal que $\Sigma_{g'} \subset \Sigma_g$, donde g' es primitiva, lo cual contradice la primera parte. Por tanto se sigue el resultado.

Caso 2. G_0 es parabólico.

Sin perder generalidad, se puede suponer que $g(z) = z + 1$, de donde se sigue que $h(z) = z + k$, $|k| \geq 2$. Por lo que usando la fórmula para la distancia hiperbólica en el disco se tiene que

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{\rho(z, g(z))}{2}\right) &= \frac{|z - g(z)|}{2[Im(z)Im(h(z))]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2Im(z)} < 1, \end{aligned}$$

y

$$\Sigma_g = \left\{ z \in \Delta \mid Im(z) > \frac{1}{2} \right\}.$$

Análogamente se tiene que

$$\Sigma_h = \left\{ z \in \Delta \mid Im(z) > \frac{|k|}{2} \right\},$$

de donde se tiene que $\Sigma_h \subset \Sigma_g$. La prueba de la suficiencia es idéntica al caso elíptico.

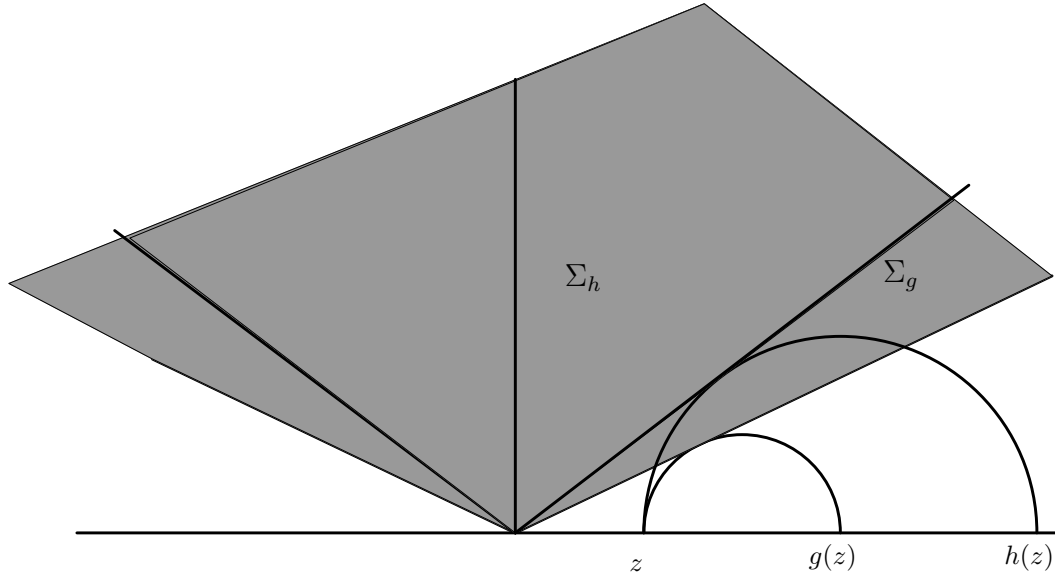


Figura 3.4: Caso G_0 hiperbólico.

Caso 3. G_0 es hiperbólico.

Se puede suponer que $g = kz$ donde g es el generador de G_0 . Σ_g resulta ser

$$\mathbb{H}^2 - \bigcup_z L_z,$$

donde $z \in \mathbb{R}$ y L_z es la geodésica que une z con $g(z)$ (cf. [3] p. 177). Análogamente se tiene que

$$\Sigma_h = \mathbb{H}^2 - \bigcup_z L'_z,$$

donde L'_z es la geodésica que une z con $h(z)$. De esta manera se sigue que $\Sigma_h \subset \Sigma_g$, véase la Figura 3.4.

La prueba de la suficiencia es idéntica a la de los casos elíptico e parabólico.

□

CAPÍTULO 4

Grupos puramente hiperbólicos

En este capítulo se prueba el resultado principal de la tesis. Un grupo puramente hiperbólico no abeliano, es necesariamente discreto. Se presenta una prueba algebraica y una prueba geométrica que es más ilustrativa. Introducimos primero algunas definiciones y resultados preliminares.

Definición 20 *Sea h un elemento hiperbólico de un grupo fuchsiano G y sea A , el eje de h ; se dice que h es simple en G si y sólo si para todo elemento $g \in G$ $g(A) \cap A = \emptyset$ o $g(A) = A$. En caso contrario, se dice que h no es simple.*

Un primer resultado que usaremos, describe las relaciones entre 4 lados de un hexágono hiperbólico con seis ángulos rectos.

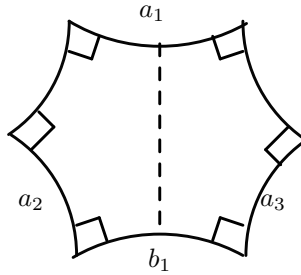


Figura 4.1: Hexágono hiperbólico

Teorema 4.0.16 *Dado un hexágono hiperbólico con seis ángulos rectos como en la Figura 4.1, se tiene*

$$\cosh b_1 \sinh a_2 \sinh a_3 = \cosh a_1 + \cosh a_2 \cosh a_3. \quad (4.1)$$

Una prueba se puede consultar en [3], p. 161, y con más detalle en [2] pp. 77-78. En general las transformaciones de Möbius no conmutan. El siguiente resultado establece bajo que condiciones esto último sucede.

Teorema 4.0.17 *Dos transformaciones $g, h \in PSL(2, \mathbb{R})$ distintas de la identidad, conmutan si y sólo si fijan los mismos puntos.*

Una prueba se puede consultar en [7] p. 88. El siguiente resultado es sorprendente, ya que describe que tanto se mueven los puntos bajo una transformación hiperbólica, lo cual naturalmente se rige por el eje.

Teorema 4.0.18 *Sea g una transformación hiperbólica con eje A_g y longitud de traslación T_g entonces*

$$\sinh\left(\frac{\rho(z, g(z))}{2}\right) = \cosh(\rho(z, A_g)) \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right).$$

Una prueba de este resultado se puede consultar en [3] p. 175, y con más detalle en [8] pp. 79-80. Probaremos ahora el resultado principal.

Teorema 4.0.19 *Sea $G < M(\Delta)$ un grupo puramente hiperbólico no abeliano. Entonces G es discreto. Más aún, si $g, h \in G$ y $\langle g, h \rangle$ no es abeliano, entonces para todo elemento z en Δ (o en \mathbb{H}^2)*

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, g(z))\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, h(z))\right) \geq 1. \quad (4.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad se prueba el resultado en Δ . Primero se probará que si $\langle g, h \rangle$ no es abeliano y es puramente hiperbólico entonces (4.2) se satisface.

Sean A_g y A_h los ejes de g y h . Como $\langle g, h \rangle$ no es abeliano los ejes se intersectan o son ajenos. De esta forma, se cumple necesariamente uno de los tres casos siguientes.

- a) A_g y A_h se intersectan,

- b) g y h no son simples,
- c) A_g y A_h son ajenos y una de las transformaciones es simple. Sin pérdida de generalidad, suponemos que g es simple.

Estos son los únicos casos, ya que si A_g y A_h se intersecan, estamos hablando del caso (a). Si no se intersecan, entonces se tienen dos posibilidades para las transformaciones g y h ; una es que g y h no son simples, que es precisamente el caso (b); la otra es que una de las dos transformaciones es simple, que es el caso (c). También puede darse el caso en que g y h no son simples y los ejes se intersecan, es decir, los casos (a) y (b) no son necesariamente excluyentes.

Las pruebas de los primeros dos casos son más sencillas que la del tercero. En el caso (a), nótese que como el conmutador $[g, h]$ también es hiperbólico, se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.0.9, por lo que se obtiene

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \geq \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \sin\theta > 1,$$

donde T_g y T_h son las longitudes de traslación de g y h .

Ahora, usando el Teorema 4.0.18 se sigue el resultado, ya que

$$\begin{aligned} & \sinh\left(\frac{\rho(z, g(z))}{2}\right) \sinh\left(\frac{\rho(z, h(z))}{2}\right) \\ &= \cosh(\rho(z, A_g)) \cosh(\rho(z, A_h)) \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) > 1. \end{aligned}$$

Para probar el caso (b), como g y h no son simples existen $f_1, f_2 \in G$ tales que $f_1(A_g) \cap A_g \neq \emptyset$ y $f_2(A_h) \cap A_h \neq \emptyset$. Nótese que el eje de $g_1 = f_1 g f_1^{-1}$ es $f_1(A_g)$, además como la longitud de traslación es invariante bajo conjugación, se satisfacen las hipótesis del Corolario 2.0.10 (para $n=2$), y se tiene

$$\sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \geq 1.$$

Por lo que

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \geq 1.$$

De manera análoga se obtiene

$$\sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \geq 1,$$

y por lo tanto, aplicando nuevamente el Teorema 4.0.18 se sigue el resultado.

En el caso (c), como g es simple y $\langle g, h \rangle$ no es abeliano, entonces los ejes A_g y $h(A_g)$ son ajenos. También, como A_g y A_h son ajenos, y h es biyectiva, se concluye que A_h y $h(A_g)$ son disjuntas.

Sea L_0 la perpendicular común entre A_g y A_h ; Construimos una geodésica L tal que $h = \sigma\sigma_0$, donde σ_0 es la reflexión sobre L_0 y σ sobre L . Obsérvese que L y A_g son ajenas, ya que si no fuera así, si $v = L \cap A_g$ entonces $\sigma(v) = v$ y por lo tanto $h^{-1}(v) = \sigma_0\sigma(v) = \sigma_0(v) \in A_g$, esto implica $h^{-1}(A_g) \cap A_g \neq \emptyset$, lo cual no puede suceder ya que g es simple. Como (4.2) es invariante bajo conjugación, se puede suponer que A_h es el eje $[-1, 1]$. Mediante otra isometría, se puede mandar $L \cap A_h$ al origen (véase la Figura 4.2).

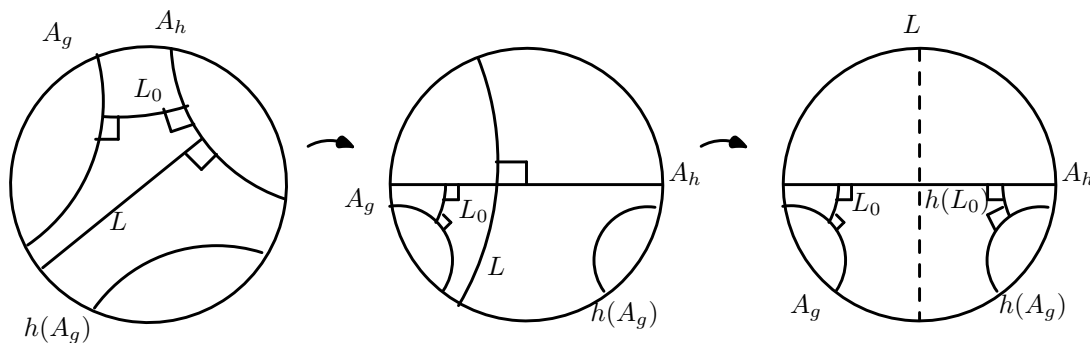


Figura 4.2: Configuración simétrica

Por la conformalidad de h , se sigue que $h(A_g)$ y $h(L_0)$ son ortogonales y $h(L_0)$ también es perpendicular a A_h . Como existe una única geodésica ortogonal a $h(L_0)$ que dista $\rho(A_g, A_h)$ de A_h , el reflejado de A_g con respecto a L es $h(A_g)$. Por lo tanto se obtiene una configuración simétrica (véase la Figura 4.2).

Utilizando el hexágono que se muestra en la Figura 4.3, y el teorema 4.0.16 se obtiene

$$\cosh T_h \sinh^2 \rho(A_g, A_h) = \cosh \rho(A_g, h(A_g)) + \cosh^2 \rho(A_g, A_h).$$

Esto pasa si y sólo si

$$\cosh T_h (\cosh^2 \rho(A_g, A_h) - 1) = \cosh^2 \rho(A_g, A_h) + \cosh \rho(A_g, h(A_g)).$$

Utilizando la identidad $\cosh(2z) = 1 + 2 \operatorname{senh}^2 z$ se tiene

$$\begin{aligned} \cosh^2 \rho(A_g, A_h) (\cosh T_h - 1) &= \cosh \rho(A_g, h(A_g)) + \cosh T_h \\ &= 1 + 2 \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\rho(A_g, h(A_g))}{2} \right) + \cosh T_h. \end{aligned}$$

Por lo que se obtiene

$$\cosh^2 \rho(A_g, A_h) (\cosh T_h - 1) \geq 2 \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\rho(A_g, h(A_g))}{2} \right). \quad (4.3)$$

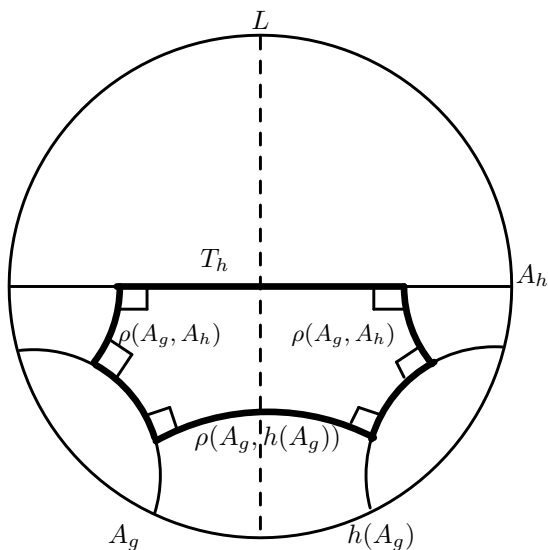


Figura 4.3: Hexágono utilizado en la demostración del teorema 4.0.19

Como la ortogonal común de A_g y $h(A_g)$ es la ortogonal común de L y A_g se tiene entonces

$$2 \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\rho(A_g, h(A_g))}{2} \right) = 2 \operatorname{senh}^2 \rho(A_g, L).$$

Por lo que, usando (4.3) se tiene

$$\cosh^2 \rho(A_g, A_h)(\cosh T_h - 1) \geq 2 \sinh^2 \rho(A_g, L),$$

y por lo tanto

$$\cosh \rho(A_g, A_h) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \geq \sinh \rho(A_g, L). \quad (4.4)$$

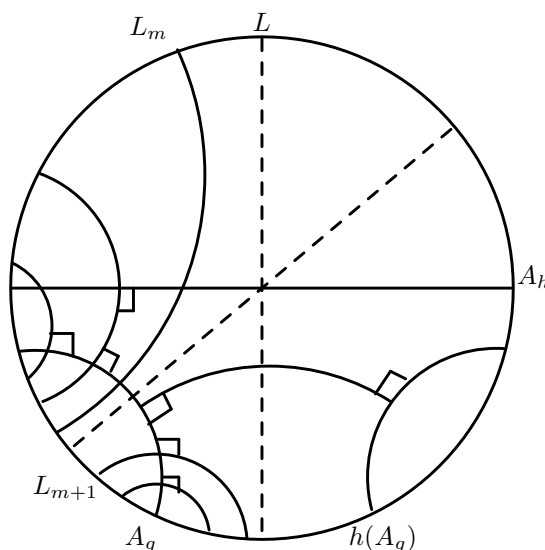


Figura 4.4: Configuración de las geodésicas L_n

Por otro lado, construimos geodésicas L_n ($n \in \mathbb{Z}$) ortogonales a A_g , tales que $g^n = \sigma_n \sigma_0$, donde σ_n denota la reflexión en L_n . Por lo que se tiene que $\rho(L_0, L_n) = nT_g/2$. Nótese que ninguna L_n interseca a L , ya que si $v = L_n \cap L$, se tendría que $\sigma_n \sigma$ es elíptica, ya que fija v , sin embargo esta transformación es $\sigma_n \sigma_0 \sigma_0 \sigma = g^n h^{-1} \in G$. Ahora, existe una geodésica ortogonal a A_g que pasa por el origen. Por consiguiente, existe $m \in \mathbb{Z}$, tal que L_m y L_{m+1} aparecen como en la Figura 4.4. Nótese que $\rho(L_m, L_{m+1}) = T_g/2$.

Mediante una isometría, se manda A_g a la geodésica $[-1, 1]$, por lo que la configuración es como la que se muestra en la Figura 4.5. Sean M la ortogonal común a L y A_g , $d_1 = \rho(L_m, M)$ y $d_2 = \rho(L_{m+1}, M)$. Si $d_1 \leq d_2$, como $d_1 + d_2 = T_g/2$, se tiene que

$$d_1 \leq \frac{T_g}{4}.$$

Aplicando ahora el Teorema 1.3.5 al pentágono mostrado en la Figura 4.5 se obtiene

$$\sinh\left(\frac{T_g}{4}\right) \sinh \rho(A_g, L) \geq \sinh d_1 \sinh \rho(A_g, L) = \cosh \rho(L_m, L) \geq 1.$$

Por lo cual, usando la identidad $\sinh(2z) = 2 \sinh z \cosh z$, se sigue que

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \sinh \rho(A_g, L) = 2 \sinh\left(\frac{T_g}{4}\right) \cosh\left(\frac{T_g}{4}\right) \sinh \rho(A_g, L) \geq 2.$$

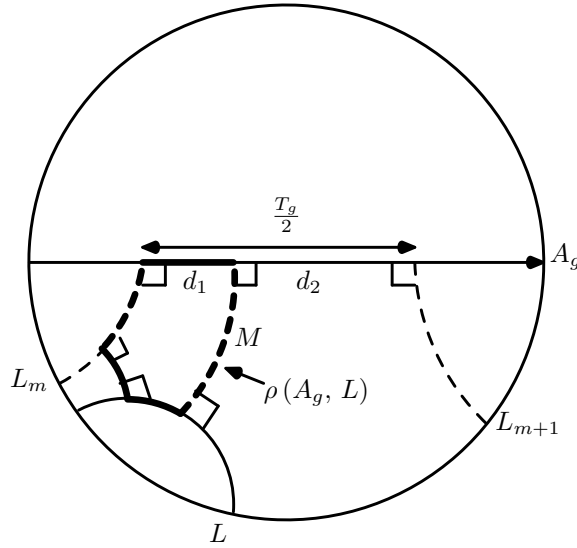


Figura 4.5: Pentágono utilizado en la prueba del Teorema 4.0.19

Aplicando ahora (4.4) obtenemos la siguiente desigualdad que muestra que $\rho(A_g, A_h)$, T_h y T_g no pueden ser simultáneamente muy pequeños

$$\cosh \rho(A_g, A_h) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \geq 2. \quad (4.5)$$

Por otra parte, nótese que

$$2 \cosh \rho_1 \cosh \rho_2 \geq \cosh(\rho_1 + \rho_2). \quad (4.6)$$

Esto último se cumple ya que

$$2 \left(\frac{e^{\rho_1} + e^{-\rho_1}}{2} \right) \left(\frac{e^{\rho_2} + e^{-\rho_2}}{2} \right) \geq \frac{e^{\rho_1 + \rho_2} + e^{-\rho_1 - \rho_2}}{2},$$

si y sólo si

$$e^{\rho_1 + \rho_2} + e^{\rho_1 - \rho_2} + e^{\rho_2 - \rho_1} + e^{-\rho_1 - \rho_2} \geq e^{\rho_1 + \rho_2} + e^{-\rho_1 - \rho_2}.$$

Finalmente, como $\rho(z, A_h) + \rho(z, A_g) \geq \rho(A_g, A_h)$, se sigue de (4.6) que

$$2 \cosh \rho(z, A_g) \cosh \rho(z, A_h) \geq \cosh (\rho(z, A_g) + \rho(z, A_h)) \geq \cosh \rho(A_g, A_h),$$

y por lo tanto, usando (4.5) se tiene

$$\begin{aligned} & 2 \cosh \rho(z, A_g) \cosh \rho(z, A_h) \sinh \left(\frac{T_g}{2} \right) \sinh \left(\frac{T_h}{2} \right) \\ & \geq \sinh \left(\frac{T_g}{2} \right) \sinh \left(\frac{T_h}{2} \right) \cosh \rho(A_g, A_h) \geq 2. \end{aligned}$$

Por consiguiente, aplicando el Teorema 4.0.18, hemos probado (4.2).

Falta probar que G es discreto. Supongamos que no lo es, es decir, existen transformaciones $g_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, distintos tales que $g_n \rightarrow I$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto implica que, cuando $n \rightarrow \infty$, $\rho(0, g_n(0)) \rightarrow 0$.

Salvo un número finito de transformaciones g_n (por la continuidad del seno hiperbólico) para algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$, se sigue que

$$\sinh \left(\frac{\rho(0, g_n(0))}{2} \right) < 1.$$

Por consiguiente, usando (4.2) se sigue que si $n, m > N$, entonces $\langle g_m, g_n \rangle$ es abeliano. Nótese que, en virtud del Teorema 4.0.17, las transformaciones g_n y g_m , $n, m > N$, fijan los mismos puntos, digamos α y β . Finalmente, para cualquier transformación $h \in G$, donde $h \neq I$, existe $n > N$, tal que

$$\sinh \left(\frac{\rho(0, h(0))}{2} \right) \sinh \left(\frac{\rho(0, g_n(0))}{2} \right) < 1.$$

Por lo que $\langle g_n, h \rangle$ es abeliano. Como h fija α y β y esto sucede para cualquier transformación $h \in G$ se concluye que G es abeliano, lo cual es

una contradicción que surge a partir de la suposición de que G no es discreto, por lo que se sigue el resultado. \square

A continuación se presenta una segunda prueba (algebraica) de la primera afirmación del Teorema 4.0.19. Para realizar dicha prueba, primero se demostrará un lema. A las transformaciones del grupo G se les denotará por \bar{T} , y a su representación matricial por T .

Lema 4.0.20 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{R})$ tal que G contiene homotecias y no es abeliano. Supóngase también que existen transformaciones $\bar{g}_n \in G$ de tal manera que $g_n \rightarrow I$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces \bar{g}_n es una homotecia.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{h} \in G$ tal que

$$h = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}, \quad \text{donde } t \neq 1, t > 0.$$

Escribimos

$$g_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad a_n d_n - b_n c_n = 1,$$

El conmutador de h y g_n está dado por

$$\begin{aligned} [h, g_n] &= h g_n h^{-1} g_n^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t a_n & t b_n \\ c_n/t & d_n/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n/t & -b_n/t \\ -t c_n & t a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n d_n - b_n c_n t^2 & a_n b_n t^2 - a_n b_n \\ \frac{c_n d_n}{t^2} - c_n d_n & a_n d_n - \frac{c_n b_n}{t^2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
 \text{traza}([h, g_n]) &= 2a_n d_n - b_n c_n \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) \\
 &= 2b_n c_n + 2 - b_n c_n \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 - 2b_n c_n \\
 &= 2 - b_n c_n \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 \longrightarrow 2 \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Ahora, como G es puramente hiperbólico, t es constante y $b_n c_n \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, necesariamente $b_n c_n \leq 0$ si n es suficientemente grande (ya que de otra manera el grupo tendría transformaciones elípticas).

Ahora, escribimos

$$f_n = [h, g_n] = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}.$$

Nótese que $A_n D_n - B_n C_n = 1$. Los mismos cálculos hechos para $[h, g_n]$ muestran que $[h, f_n]$ está dada por una matriz análoga a (4.7), reemplazando letras minúsculas por mayúsculas. Más aún, el mismo razonamiento implica

$$\begin{aligned}
 \text{traza}([h, f_n]) &= 2 - B_n C_n \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 \\
 &= 2 - \left(\frac{c_n d_n}{t^2} - d_n c_n \right) (t^2 a_n b_n - a_n b_n) \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 \\
 &= 2 - (c_n d_n) (a_n b_n) \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) (t^2 - 1) \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 \\
 &= 2 - (a_n d_n) (b_n c_n) \left(2 - \frac{1}{t^2} - t^2 \right) \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 \\
 &= 2 + (1 + b_n c_n) (b_n c_n) \left(t - \frac{1}{t} \right)^4.
 \end{aligned}$$

Si n es suficientemente grande, $g_n \longrightarrow I$, y se sigue que $1 + b_n c_n > 0$. Nótese que $b_n c_n \geq 0$, ya que si $b_n c_n \leq 0$ se tendría que $\text{traza}([h, f_n]) < 2$ lo cual sería una contradicción, por lo que se concluye que $b_n c_n = 0$ para n suficientemente grande. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, \bar{g}_n fija 0 e ∞ . \square

Nótese que si $\bar{g}_n \in G$, entonces para toda $\varphi \in SL(2, \mathbb{R})$, $g_n \rightarrow I$ si y sólo si $\varphi g_n \varphi^{-1} \rightarrow I$. A continuación se presenta la prueba del Teorema 4.0.19.

DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA DE LA PRIMERA AFIRMACIÓN DEL TEOREMA 4.0.19. Sin perder generalidad, probamos el resultado para subgrupos de $PSL(2, \mathbb{R})$. Sean $\bar{g}_n \in G$ tal que $g_n \rightarrow I$. Se demostrará que $g_n = I$ si n es suficientemente grande. Sea $\bar{h}_1 \in G$ con puntos fijos α_1, β_1 y $\bar{\varphi} \in PSL(2, \mathbb{R})$, tal que $\bar{\varphi} \bar{h}_1 \bar{\varphi}^{-1}$ fija 0 e ∞ . Por la observación anterior y el Lema 4.0.20, se sigue que $\bar{\varphi} \bar{g}_n \bar{\varphi}^{-1}$ fija 0 e ∞ , si $n > N$, esto es \bar{g}_n fija α_1 y β_1 .

Ahora, sea $\bar{h}_2 \in G$ tal que fija α_2, β_2 (distintos dos a dos de α_1 y β_1 , lo cual se puede suponer ya que G no es abeliano). Por el argumento anterior aplicado ahora a \bar{h}_2 se sigue que \bar{g}_n fija α_2 y β_2 , si n es suficientemente grande. Por lo cual $g_n = I$, si n es suficientemente grande. \square

A continuación, se presenta una interpretación geométrica del Teorema 4.0.19 en el contexto del semiplano superior \mathbb{H}^2 y la prueba algebraica de la primera afirmación. Primero enunciamos un resultado que es consecuencia del Teorema 1.4.4 cuya prueba se puede consultar en [3] p. 183, y con más detalle en [4] pp. 53-54.

Teorema 4.0.21 *Sean g, h isometrías hiperbólicas con ejes A_g, A_h disjuntos y con la misma longitud de traslación T , supongamos también que los productos gh y gh^{-1} no son elípticos, entonces*

$$\sinh\left(\frac{\rho(A_g, A_h)}{2}\right) \sinh\left(\frac{T}{2}\right) \geq 1.$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA PRUEBA ALGEBRAICA DE LA PRIMERA PARTE DEL TEOREMA 4.0.19.

Conjugando se puede suponer que $\bar{h} \in G$ donde

$$h = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix},$$

por lo que el eje A_h es el eje imaginario positivo.

Dado que $\bar{g}_n = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$, entonces $\bar{g}_n(A_h)$ es la geodésica con puntos finales $\bar{g}_n(0) = b_n/d_n$ y $\bar{g}_n(\infty) = a_n/c_n$. Además, $\bar{g}_n(A_h)$ es el eje de $\bar{g}_n \bar{h} \bar{g}_n^{-1}$.

Ahora, el producto inversivo de A_h y $\bar{g}_n(A_h)$ está dado por

$$(A_h, \bar{g}_n(A_h)) = \frac{\left| \frac{b_n}{d_n} + \frac{a_n}{c_n} \right|}{\frac{\left| \frac{b_n}{d_n} - \frac{a_n}{c_n} \right|}{2}} = \frac{|b_n c_n + a_n d_n|}{|b_n c_n - a_n d_n|} = |a_n d_n + b_n c_n|.$$

De donde se obtiene

$$(A_h, \bar{g}_n(A_h)) = |2b_n c_n + 1|. \quad (4.8)$$

Se afirma que A_h y $\bar{g}_n(A_h)$ no pueden estar cercanos y ser disjuntos a la vez. Como G es puramente hiperbólico, $[h, g_n]$ y $[h^{-1}, g_n]$ no son elípticos, y dado que \bar{h} y $\bar{g}_n \bar{h}^{-1} \bar{g}_n^{-1}$ tienen la misma longitud de traslación, se satisfacen las hipótesis del Teorema 4.0.21, por lo que se tiene que

$$\sinh\left(\frac{\rho(A_h, \bar{g}_n(A_h))}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \geq 1,$$

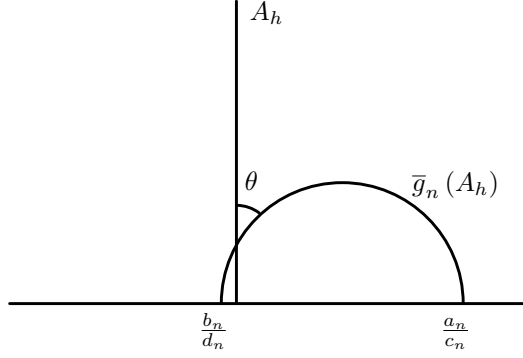
sin embargo, si $\rho(A_h, \bar{g}_n(A_h)) \rightarrow 0$, como T_h es constante, la desigualdad no se cumple. De esta forma se sigue la afirmación. Nótese que ésta es la condición $b_n c_n \leq 0$, ya que en (4.8) si $b_n c_n$ es pequeño y positivo, entonces $(A_h, \bar{g}_n(A_h))$ es mayor y cercano a uno, lo que quiere decir que A_h y $\bar{g}_n(A_h)$ son disjuntos y cercanos (véase Teorema 1.2.2), lo cual no puede suceder.

Ahora, como $(A_h, \bar{g}_n(A_h)) = |2b_n c_n + 1|$, $b_n c_n \leq 0$ y $b_n c_n \rightarrow 0$, se sigue que, para n suficientemente grande, $(A_h, \bar{g}_n(A_h)) \leq 1$. Por lo tanto, como G no contiene elementos parabólicos, (cf. [3] pp. 156-158) se sigue que A_h y $\bar{g}_n(A_h)$ se intersecan (véase la Figura 4.6).

Por el Teorema 1.2.2, $(A_h, \bar{g}_n(A_h)) = \cos \theta$, donde θ es el ángulo de intersección de A_h y $\bar{g}_n(A_h)$. Si $(A_h, \bar{g}_n(A_h))$ se aproxima a uno, entonces θ es muy cercano a cero (o a π tomando el ángulo obtuso complementario).

Obsérvese que se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.4.5, de donde se obtiene

$$\frac{1}{2} |tr([h, g_n])| = \cosh^2\left(\frac{T_h}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{T_h}{2}\right) |\cos \theta_n|. \quad (4.9)$$

Figura 4.6: Geodésicas A_h y $\bar{g}_n(A_h)$

El signo negativo en (4.9) acontece eligiendo el ángulo obtuso cercano a π ; esto se logra, si es necesario, intercambiando \bar{h} por \bar{h}^{-1} , y aplicando el Teorema 1.4.5 a $\bar{h}^{-1}(\bar{g}_n \bar{h}^{-1} \bar{g}_n^{-1})$. Por lo que se tienen dos casos.

CASO 1.- Un primer caso sucede cuando el ángulo de intersección entre los ejes A_h y $g_n(A_h)$ con orientación hacia los atractores de \bar{h} y de $\bar{g}_n \bar{h}^{-1} \bar{g}_n^{-1}$ es obtuso, para lo cual consideramos el conmutador $[h, g_n]$ (véase la Figura 4.7). De (4.9) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |tr([h, g_n])| &= 1 + \sinh^2 \left(\frac{T_h}{2} \right) - \sinh^2 \left(\frac{T_h}{2} \right) |\cos \theta_n| \\ &= 1 + \sinh^2 \left(\frac{T_h}{2} \right) (1 - |\cos \theta_n|) > 1, \end{aligned}$$

lo cual se aproxima a 1, para n suficientemente grande. Por lo que se tiene que $tr([h, g_n])$ se aproxima a 2 para n suficientemente grande. Ahora, usando el Teorema 1.4.3, se sigue que $\cosh(T_{[h, g_n]}/2)$ se aproxima a 1, para n grande, y por lo tanto $T_{[h, g_n]}$ se aproxima a 0 si n es suficientemente grande.

Ahora, sea $f_n = [h, g_n]$. Aplicando un argumento similar al expuesto en la afirmación anterior a los conmutadores $[h, f_n]$ y $[h^{-1}, f_n]$, se tiene que A_h y $f_n(A_h)$ no pueden ser ajenos y cercanos a la vez.

Por otro lado, se puede suponer que $\bar{h} = \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2$, donde $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ son transformaciones elípticas de orden dos con puntos fijos α_1, α_2 respectivamente; y $\bar{g}_n \bar{h}^{-1} \bar{g}_n^{-1} = \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3$ donde $\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3$ son transformaciones elípticas de orden dos con puntos fijos α_2, α_3 respectivamente (cf. [4], pp. 57-58). Por lo que

se sigue

$$\bar{f}_n = (\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2)(\bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_3) = \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_3,$$

de donde se concluye que $A_{f_n} \cap A_h \neq \emptyset$ (véase la Figura 4.7).

Como el eje A_h interseca a A_{f_n} , por la conformalidad y biyectividad de las transformaciones f_n , se sigue que $f_n(A_h)$ interseca a A_{f_n} , con el mismo ángulo con que lo hace A_h , por lo que se tiene que $f_n(A_h)$ y A_h son disjuntas. También, como T_{f_n} se aproxima a cero para n grande, entonces $\rho(\alpha_1, \alpha_3)$ es pequeña, por lo que $\rho(A_h, f_n(A_h))$ también lo es. De esta forma A_h y $f_n(A_h)$ son disjuntas y cercanas a la vez lo cual no puede suceder, por lo tanto A_h y $g_n(A_h)$ comparten puntos fijos. Nótese que ésta es la condición $b_n c_n = 0$.

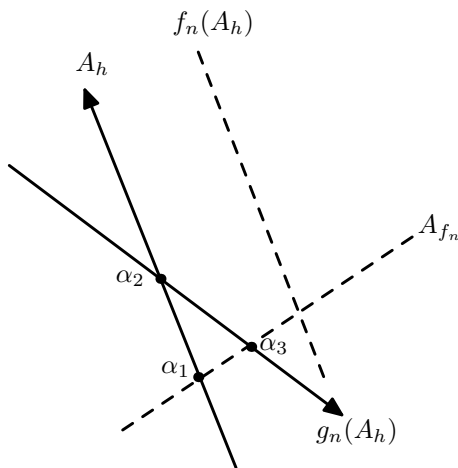


Figura 4.7: $A_{f_n} \cap A_h \neq \emptyset$

CASO 2.- Si sucede que el ángulo de intersección entre los ejes A_h y $g_n(A_h)$ orientados hacia los atractores es agudo. Se considera $\bar{h}^{-1}(\bar{g}_n \bar{h}^{-1} \bar{g}_n^{-1})$. De esta forma se tiene la situación descrita en la Figura 4.8. Aplicando nuevamente el Teorema 1.4.5 al producto $k_n = \bar{h}^{-1} \bar{g}_n \bar{h}^{-1} \bar{g}_n^{-1}$ se obtiene

$$\frac{1}{2} |tr(k_n)| = \cosh^2 \left(\frac{T_h}{2} \right) - \sinh^2 \left(\frac{T_h}{2} \right) |\cos \theta_n|, \quad (4.10)$$

donde θ_n es el ángulo de intersección de $A_{h^{-1}}$ y $g_n(A_{h^{-1}})$. De (4.10) se concluye que

$$\frac{1}{2} |tr(k_n)| = 1 + \sinh^2 \left(\frac{T_h}{2} \right) (1 - |\cos \theta_n|) > 1,$$

lo cual se aproxima a 1 para n grande, por lo que se tiene que $tr(k_n)$ se aproxima a 2 para n suficientemente grande, por lo que se sigue que $\cosh(T_{k_n}/2)$ se aproxima a 1 para n grande, y por lo tanto, T_{k_n} se aproxima a cero si n es suficientemente grande. Considerando los conmutadores $[h, k_n]$ y $[h^{-1}, k_n]$, por un razonamiento análogo al aplicado al conmutador f_n , se sigue que $A_{h^{-1}}$ y $k_n(A_{h^{-1}})$ no pueden ser ajenos y cercanos a la vez.

En forma análoga al caso del conmutador $[h, g_n]$, se tiene que $\bar{k}_n = \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_3$, de donde se obtiene que $A_{k_n} \cap A_{h^{-1}} \neq \emptyset$. Nuevamente, por la biyectividad y conformalidad de las transformaciones k_n , se sigue que $k_n(A_{h^{-1}})$ y $A_{h^{-1}}$ son disjuntas. Como T_{k_n} se aproxima a cero cuando n es grande, entonces $\rho(v_1, v_3)$ es pequeña, por lo que $\rho(A_{h^{-1}}, k_n(A_{h^{-1}}))$ también lo es, y por lo tanto $A_{h^{-1}}$ y $g_n(A_h)$ comparten puntos fijos, ya que de no ser así, $A_{h^{-1}}$ y $k_n(A_{h^{-1}})$ serían cercanos y disjuntos a la vez. Obsérvese que ésta es la condición $b_n c_n = 0$.

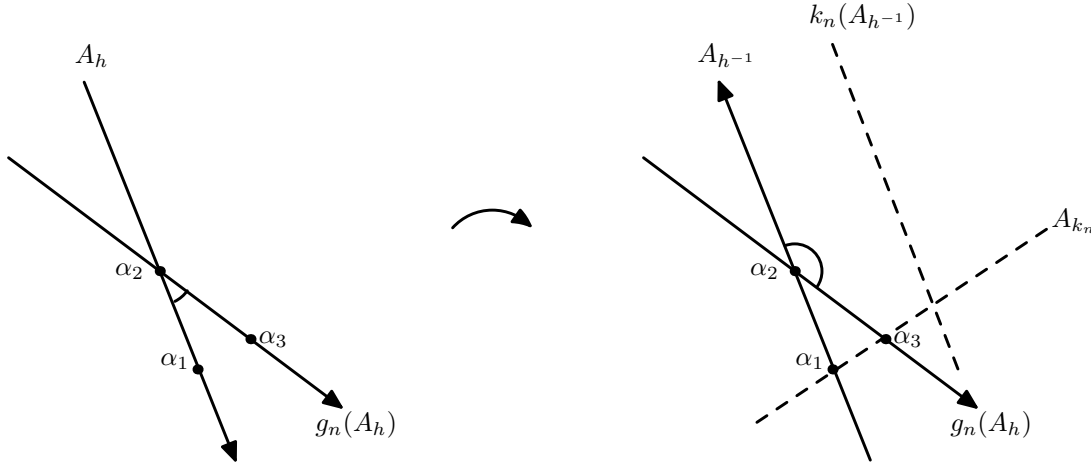


Figura 4.8: Caso 2 de la interpretación geométrica

UNA SEGUNDA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA PRUEBA ALGEBRAICA DE LA PRIMERA PARTE DEL TEOREMA 4.0.19.

Para esta segunda interpretación geométrica consideramos $G < PSL(2, \mathbb{R})$ tal que no contiene transformaciones elípticas. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que A_h es el eje imaginario. Recordamos que si $b_n c_n \rightarrow 0$ y $b_n c_n \neq 0$, entonces existe una sucesión de ejes $g_n(A_h)$ de elementos conjugados a h distintos tales que convergen a A_h . De la expresión (4.8) se

obtiene que

$$(g_n(A_h), A_h) = |2b_n c_n + 1| \longrightarrow 1,$$

para n suficientemente grande, de donde se sigue que los ejes $g_n(A_h)$ se aproximan tangencialmente al eje A_h . Nótese que $g_n(A_h)$ es el eje de la transformación $\bar{g}_n \bar{h} \bar{g}_n^{-1}$. Ahora, consideremos la región

$$K = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid 1 < |z| < k, \pi/4 < \arg(z) < 3\pi/4, k > 1\},$$

y sean z y w los puntos en $g_n(A_h)$ tales que $|z| = 1$ y $|w| = k$ (véase la Figura 4.9). Nótese que si n es suficientemente grande en efecto, dichos puntos existen.

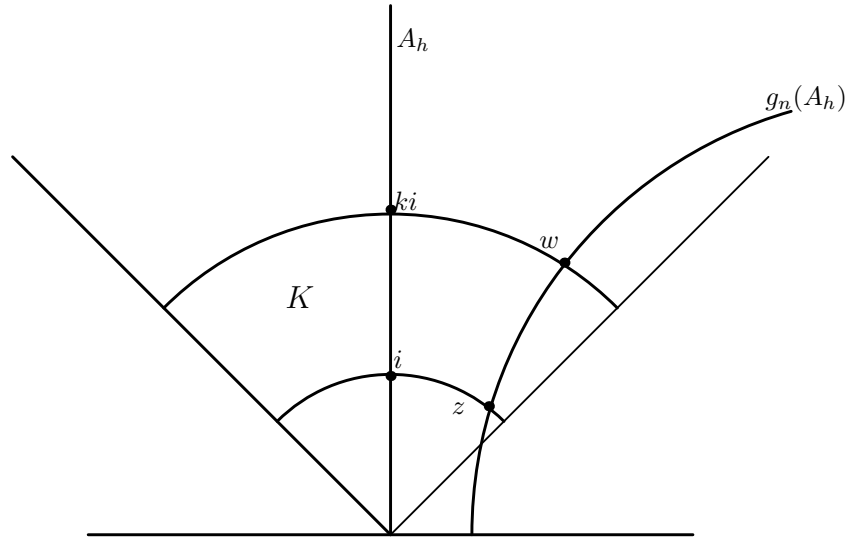


Figura 4.9: Segunda interpretación de la prueba algebraica del Teorema 4.0.19

Obsérvese que $\rho(z, w) > \log k$, ya que la distancia entre

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = k\}$$

y

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = 1\}$$

se alcanza en la ortogonal común. Por esta razón, y como la longitud de traslación de $\bar{g}_n \bar{h} \bar{g}_n^{-1}$ es la misma que la de \bar{h} para toda $n \in \mathbb{N}$, para una potencia adecuada de \bar{h} , $k_n \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$1 < |\bar{g}_n \bar{h}^{k_n} \bar{g}_n^{-1}(i)| < k.$$

Ahora, si $n \neq m$, y

$$\bar{g}_n \bar{h}^{k_n}(i) = \bar{g}_m \bar{h}^{k_n}(i),$$

entonces

$$\bar{h}^{-k_n} \bar{g}_n^{-1} \bar{g}_m \bar{h}^{k_n}(i) = i.$$

Sin embargo, como G es puramente hiperbólico, se sigue que necesariamente $\bar{h}^{-k_n} \bar{g}_n^{-1} \bar{g}_m \bar{h}^{k_n}$ es la identidad, en este caso $\bar{g}_n^{-1} \bar{g}_m = \bar{h}^\tau$, donde $\tau \in \mathbb{Z}$, lo cual es una contradicción ya que $g_n(A_h) \neq g_m(A_h)$. Por lo tanto, existen elementos distintos tales que $\bar{g}_n \bar{h}^{k_n}(i) \in K$, lo cual viola la condición de que G es discreto (cf. [7] p. 102).

Ahora, nótese que en la demostración algebraica del Teorema 4.0.19 se demuestra que G es discreto a partir de suponer únicamente que no contiene elementos elípticos, lo cual establece el siguiente resultado.

Teorema 4.0.22 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{R})$ no abeliano. Si G no contiene elementos elípticos, entonces es discreto.*

A continuación se presenta un resultado que caracteriza a las matrices que definen a las transformaciones de los subgrupos de $PSL(2, \mathbb{R})$ que contienen a la traslación $z \rightarrow z + 1$ y no contienen elementos elípticos.

Proposición 4.0.23 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{R})$ sin elementos elípticos. Si la transformación $\bar{g}(z) = z + 1$ pertenece a G , entonces para toda $\bar{h} \in G$ tal que*

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad ad - bc = 1,$$

se satisface que $c = 0$ o $|c| \geq 4$.

DEMOSTRACIÓN. Una matriz que define a la transformación \bar{g} es

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $\bar{g}^n \in G$, $n \in \mathbb{Z}$, y

$$g^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $c > 0$. Ahora, existen $n, n + 1 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$nc < a + d < (n + 1)c. \quad (4.11)$$

Además, nótese que como

$$g^{-n}(-h) = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + nc & * \\ * & -d \end{pmatrix},$$

y

$$g^{-(n+1)}(-h) = \begin{pmatrix} -a + (n+1)c & * \\ * & -d \end{pmatrix},$$

se sigue que

$$\operatorname{tr}(g^{-n}(-h)) = nc - (a + d) \quad \text{y} \quad \operatorname{tr}(g^{-(n+1)}(-h)) = (n + 1)c - (a + d).$$

Por lo que, a nivel de transformaciones se tiene que

$$\operatorname{tr}(\bar{g}^{-n}(-\bar{h})) = \pm(nc - (a + d)) \quad \text{y} \quad \operatorname{tr}(\bar{g}^{-(n+1)}(-\bar{h})) = \pm((n + 1)c - (a + d)).$$

Además

$$c = (n + 1)c - (a + d) - nc + (a + d).$$

Ahora, por la expresión (4.11) se tiene que

$$(n + 1)c - (a + d) \geq 2 \quad \text{y} \quad a + d - nc \geq 2,$$

por lo que se concluye que $c \geq 4$, por lo que se sigue el resultado. \square

Finalmente se presenta un resultado que proporciona una condición necesaria y suficiente para que un elemento que es conjugado a una homotecia y que pertenece a un grupo fuchsiano sea simple.

Proposición 4.0.24 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{R})$ fuchsiano. Si $g \in G$ es tal que $g(z) = kz$, donde $k > 1$, entonces g es simple si y sólo si para toda $h \in G$ tal que*

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{donde} \quad ad - bc = 1,$$

se tiene que $abcd \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Probamos primero la necesidad. Supóngase que g es simple, es decir, que para toda $h \in G$ se tiene que $h(L) \cap L = \emptyset$, o $h(L) = L$, donde L es el eje de g . Si $h(L) = L$, entonces por el Teorema 1.2.2 $(L, h(L)) = 1$, por lo que usando la prueba de la Proposición 2.0.11 se tiene que

$$(L, h(L)) = |2ad - 1| = 1 \Leftrightarrow |ad - 1/2| = 1/2,$$

y se sigue que

$$(ad - 1/2)^2 = 1/4 \Leftrightarrow (ad)^2 - ad = ad(1 - ad) = abcd = 0.$$

Ahora, si $L \cap h(L) = \emptyset$ se tiene que, aplicando nuevamente el Teorema 1.2.2, $(h(L), L) > 1$, además por la prueba de la Proposición 2.0.11 se tiene que

$$(h(L), L) = |2ad - 1| > 1 \Leftrightarrow |ad - 1/2| > 1/2,$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} |ad - 1/2| > 1/2 &\Leftrightarrow (ad - 1/2)^2 > 1/4 \\ \Leftrightarrow (ad)^2 - ad + 1/4 > 1/4 &\Leftrightarrow ad(ad - 1) > 0 \\ &\Leftrightarrow abcd > 0. \end{aligned}$$

Para probar la suficiencia, notemos que si $abcd > 0$, entonces el argumento de la necesidad muestra que $L \cap h(L) = \emptyset$. Finalmente, sea

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{donde} \quad ad - bc = 1.$$

Si $abcd = 0$, entonces se tienen dos casos.

Caso 1. $c = 0$.

Se afirma que $c = 0$ si y sólo si $b = 0$. Esto se sigue ya que no puede haber dos transformaciones hiperbólicas con un sólo punto fijo en común, y en este caso $ad = 1$ por lo que h es una homotecia.

Caso 2. $c \neq 0$.

Nótese que b también es distinto de 0. Se afirma que a y d son simultáneamente cero, ya que de lo contrario, si suponemos que $a = 0$ y $d \neq 0$, entonces se tendría que $h(\infty) = 0$ y $h(0) \in \mathbb{R}$, lo cual contradice el hecho de que dos transformaciones hiperbólicas no pueden compartir un sólo punto fijo en un grupo discreto, al considerar la transformación $\bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1}$ (cf. [7] p. 108).

De manera análoga, si $a \neq 0$ y $d = 0$, se tendría que $h(\infty) \in \mathbb{R}$ y $h(0) = \infty$, lo cual es también una contradicción. Finalmente, si a y d son cero entonces h es de la forma

$$h(z) = \frac{b}{cz},$$

y $h(L) = L$, por lo que se concluye que g es simple y se sigue el resultado. \square

CAPÍTULO 5

Aplicaciones

En este capítulo se derivan algunas aplicaciones del resultado principal de la tesis, esto es, la desigualdad (4.2) definida en el Teorema 4.0.19. Se presenta un ejemplo que muestra que la cota inferior de esta desigualdad es la mejor posible. Primero introducimos unas definiciones y un resultado que usaremos.

Definición 21 Sea $G < M(\Delta)$ discreto y no elemental. Se dice que un subdominio D de $\widehat{\mathbb{C}}$ es un G -paquete si $g(D)$ o $g(D) \cap D = \emptyset$ para cualquier $g \in G$.

Esta definición también se aplica al semiplano superior \mathbb{H}^2 .

Definición 22 Sea G un grupo actuando en un espacio métrico X y Y un subespacio invariante bajo G de X , se dice que G actúa discontinuamente en Y , si dado cualquier compacto $M \subset Y$, se tiene que

$$g(M) \cap M \neq \emptyset$$

solamente para un número finito de transformaciones en G .

Definición 23 Sea $G < PSL(2, \mathbb{R})$, se dice que una región R es un dominio fundamental en \mathbb{H}^2 para G , si se cumple que

- 1.- ∂R tiene medida cero,
- 2.- cualesquiera dos puntos $w_1, w_2 \in R$ no son G -equivalentes,
- 3.- dado $z \in \mathbb{H}^2$, existe $w \in \widetilde{R}$ y $\overline{T} \in G$, tal que $\overline{T}(w) = z$, donde \widetilde{R} denota la cerradura de R en \mathbb{H}^2 .

Teorema 5.0.25 Sean $G_i < M(\Delta)$, $i = 1, 2$, donde $G = \langle G_1, G_2 \rangle$, y D_i un G_i -paquete. Si $D_1 \cup D_2 = \Delta$, y $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, entonces G es el producto libre de G_1 y G_2 , $D = D_1 \cap D_2$ es un G -paquete y G actúa discontinuamente en $\bigcup_{g \in G} g(D)$.

Este resultado se prueba para un caso más general en la esfera de Riemann en [3] p. 103, sin embargo se puede adaptar fácilmente a Δ (o \mathbb{H}^2), como se muestra en [6]. Además, nótese que como G actúa discontinuamente en un subconjunto abierto de Δ , entonces G es discreto (cf. [3] p. 95).

Construimos cuatro geodésicas simétricas y disjuntas L_j en Δ como se muestra en la Figura 5.1. Sea g una transformación hiperbólica que fija 1 y -1 y que manda L_1 en L_2 . Por otro lado, sea h una transformación hiperbólica que fija i y $-i$ tal que manda L_3 en L_4 . Se toma entonces $G = \langle g, h \rangle$. Nótese que este grupo G (llamado de Shottky) no es abeliano.

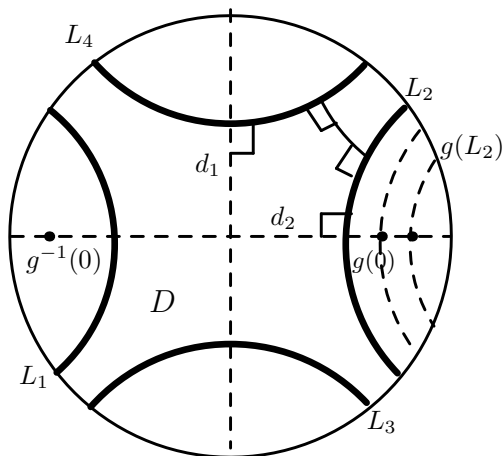


Figura 5.1: Región fundamental para el grupo $\langle g, h \rangle$.

Ahora, sea $D_1 = \Delta - (\overline{\text{int}(L_1) \cup \text{int}(L_2)})$ y $D_2 = \Delta - (\overline{\text{int}(L_3) \cup \text{int}(L_4)})$. Obsérvese que $D_1 \cup D_2 = \Delta$ y $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$; además, es fácil verificar que D_j es un G_j -paquete para $j = 1, 2$, donde $G_1 = \langle g \rangle$ y $G_2 = \langle h \rangle$, por lo que se satisfacen las hipótesis del Teorema 5.0.25, y se sigue que $D = D_1 \cap D_2$ es un G -paquete. Se probará que D es una región fundamental.

Nótese que la frontera de D tiene medida cero. Obsérvese que L_2 es el biselector perpendicular entre 0 y $g(0)$ (véase la Figura 5.1). Ahora, supongamos que existe $f \in G$ tal que $f(z_1) = z_2$, donde $z_1, z_2 \in D$. Si esto

sucede, como $z_1 \in D$ y $z_2 \in f(D)$, entonces $f(D) \cap D \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción ya que D es un G -paquete, por lo tanto se sigue que cualesquiera dos puntos de D no son G -equivalentes. Para ver que cualquier punto en Δ es equivalente a alguno de D , basta ver que como G actúa discontinuamente en $\bigcup_{g \in G} g(D)$, los puntos más cercanos al origen en la órbita de $w \in D$ caen en \tilde{D} . Sea w_i uno de los puntos más cercanos al origen en la órbita de w . Si $w_i \in \tilde{D}$ se tiene el resultado. De otra manera

$$w_i \in \bigcup_{i=1}^4 \text{int}(L_i).$$

Si $w_i \in \text{int}(L_2)$ se tendría que $g^{-1}(w_i)$ está más cercano al origen que w_i , lo cual no puede suceder. De la misma manera w_i no puede estar en el interior de algún otro círculo (véase la Figura 5.1), por lo que D es una región fundamental.

Usando este hecho se sigue que G no tiene puntos fijos parabólicos en \overline{D} (cerradura euclidiana), cf. [3] p. 216, también por ser D una región fundamental cualquier punto en D no puede ser un punto fijo elíptico, ya que la acción del grupo en los círculos L_1, L_2, L_3 y L_4 muestra que no hay puntos fijos en ∂D . De hecho, L_1, L_2, L_3 y L_4 son los círculos isométricos de g, g^{-1}, h y h^{-1} respectivamente). Por consiguiente G es puramente hiperbólico y de esta forma se satisfacen las hipótesis del Teorema 4.0.19.

Ahora, el origen pertenece a los ejes de g y h , por lo que se sigue del Teorema 1.3.5 que

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{\rho(0, g(0))}{2}\right) \sinh\left(\frac{\rho(0, h(0))}{2}\right) &= \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \\ &= \sinh(d_1) \sinh(d_2) \\ &= \cosh \rho(L_2 L_4), \end{aligned}$$

donde $d_1 = \frac{T_h}{2}$ y $d_2 = \frac{T_g}{2}$.

Como la construcción anteriormente descrita puede ser hecha con $\rho(L_2, L_4)$ arbitrariamente pequeño, se sigue que la cota inferior en el Teorema 4.0.19 es la mejor posible.

El siguiente resultado proporciona una cota inferior para el máximo de las distancias $\rho(z, g(z))$ y $\rho(z, h(z))$ en un grupo hiperbólico no abeliano.

Teorema 5.0.26 *Si $\langle g, h \rangle$ es puramente hiperbólico y no abeliano, entonces para todo $z \in \Delta$ se tiene que*

$$\max \{ \rho(z, g(z)), \rho(z, h(z)) \} \geq 2 \sinh^{-1}(1) > 1.76$$

y $2 \sinh^{-1}(1)$ es la mejor cota posible.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $z \in \Delta$ tal que

$$\max \{ \rho(z, g(z)), \rho(z, h(z)) \} < 2 \sinh^{-1}(1),$$

esto implica

$$\max \left\{ \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right), \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, h(z)) \right) \right\} < 1.$$

de donde se tiene

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, h(z)) \right) < 1,$$

lo cual es una contradicción a lo establecido por el Teorema 4.0.19.

Ahora, si $w = \sinh(x)$ se tiene que

$$w = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff 2w = e^x - e^{-x} \iff e^{2x} - 2w e^x - 1 = 0,$$

nótese que esta expresión es una ecuación cuadrática cuyas soluciones están dadas por

$$e^x = w \pm \sqrt{w^2 + 1},$$

por lo que se sigue que

$$\sinh^{-1}(x) = \begin{cases} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \log(\sqrt{x^2 + 1} - x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

De esta forma se obtiene que

$$\sinh^{-1}(1) = \log(1 + \sqrt{2}),$$

que es aproximadamente 0.8814... por lo que se tiene que $2 \sinh^{-1}(1)$ es aproximadamente 1.7627... que es mayor que 1.76.

Ahora, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\max \{ \rho(z, g(z)), \rho(z, h(z)) \} \geq \alpha > 2 \sinh^{-1}(1),$$

entonces se tendría que

$$\max \left\{ \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right), \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, h(z)) \right) \right\} \geq \sinh \left(\frac{\alpha}{2} \right) > 1 \quad (5.1)$$

Sin embargo, del ejemplo referente a la Figura 5.1 se sigue que

$$\sinh \left(\frac{\rho(0, g(0))}{2} \right) \sinh \left(\frac{\rho(0, h(0))}{2} \right) = \cosh \rho(L_2 L_4),$$

que es arbitrariamente cercano a 1 ya que L_2 y L_4 se pueden tomar arbitrariamente cercanos, lo cual contradice lo establecido por la expresión (5.1). Por lo tanto, $2 \sinh^{-1}(1)$ es la mejor cota posible, con lo que queda probado el resultado. □

El siguiente teorema establece una desigualdad que resulta ser una versión euclidiana del Teorema 4.0.19.

Teorema 5.0.27 *Si $\langle g, h \rangle$ es un subgrupo de $M(\Delta)$ puramente hiperbólico y no abeliano, entonces*

$$|g(0)|^2 + |h(0)|^2 \geq 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que $g_1 = \langle g, h \rangle$ preserva Δ , se sigue de la fórmula para la distancia hiperbólica en el disco unitario que

$$\sinh^2 \left(\frac{1}{2} \rho(0, g(0)) \right) = \frac{|g(0)|^2}{1 - |g(0)|^2},$$

por lo que, de la expresión (4.2) se tiene que

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(0, g(0))\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(0, h(0))\right) = \frac{|g(0)|^2}{1-|g(0)|^2} \frac{|h(0)|^2}{1-|h(0)|^2} \geq 1,$$

esto implica que

$$|g(0)|^2 |h(0)|^2 \geq (1-|g(0)|^2)(1-|h(0)|^2) = 1-(|g(0)|^2+|h(0)|^2)+|g(0)|^2 |h(0)|^2,$$

por lo que se sigue el resultado. \square

El siguiente resultado proporciona una desigualdad que establece que dos matrices que definen en un grupo puramente hiperbólico no abeliano a dos transformaciones, no pueden ser ambas cercanas a la identidad.

Teorema 5.0.28 *Sea $\langle g, h \rangle$ puramente hiperbólico, no abeliano tal que preserva Δ . Si A y B son matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ tal que representan a g y h respectivamente, entonces*

$$\|A - I\| \|B - I\| \geq 2,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \bar{c}_1 \\ c_1 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & \bar{c}_2 \\ c_2 & \bar{a}_2 \end{pmatrix}, \quad |a_i|^2 - |c_i|^2 = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que

$$\|A - I\|^2 = |a_1 - 1|^2 + |\bar{a}_1 - 1|^2 + 2|c_1|^2 \geq 2|c_1|^2,$$

además, nótese que

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho(0, g(0))\right) &= \frac{|g(0)|^2}{1-|g(0)|^2} = \frac{\left|\frac{\bar{c}_1}{\bar{a}_1}\right|}{1-\left|\frac{\bar{c}_1}{\bar{a}_1}\right|} \\ &= \frac{|\bar{c}_1|^2}{|\bar{a}_1|^2 - |\bar{c}_1|^2} = |\bar{c}_1|^2, \end{aligned}$$

por lo que se tiene que

$$\|A - I\|^2 \geq 2 \operatorname{senh}^2 \left(\frac{1}{2} \rho(0, g(0)) \right).$$

En forma análoga se obtiene que $\|B - I\|^2 \geq 2 \operatorname{senh}^2 \left(\frac{1}{2} \rho(0, h(0)) \right)$, de donde se concluye que

$$\|A - I\|^2 \|B - I\|^2 \geq 4 \operatorname{senh}^2 \left(\frac{1}{2} \rho(0, g(0)) \right) \operatorname{senh}^2 \left(\frac{1}{2} \rho(0, h(0)) \right) \geq 4.$$

□

A continuación vamos a aplicar los resultados expuestos en el capítulo anterior al contexto de superficies de Riemann. Primero enunciaremos la siguiente definición.

Definición 24 *Sea D un dominio G -invariante en $\widehat{\mathbb{C}}$, donde G actúa discontinuamente. Un subconjunto D_0 de D es estable con respecto a G si para toda $g \in G$ se satisface que*

$$g(D_0) = D_0 \quad \text{o} \quad g(D_0) \cap D_0 = \emptyset.$$

Nótese que g es simple si y sólo si el eje A de g es G -estable. Antes de iniciar la siguiente discusión se enuncia un teorema cuya prueba se puede consultar en [3] pp. 123-124, y una definición.

Teorema 5.0.29 *Sean $G < PSL(2, \mathbb{C})$ tal que actúa discontinuamente en un dominio D , y $D_0 \subset D$ tal que D_0 es estable con estabilizador G_0 . Si D_0 es abierto en D o D_0/G_0 es compacto, entonces D_0/G_0 (con la topología cociente) y $\pi(D_0)$ (como subespacio topológico de D/G) son homeomorfos.*

Definición 25 *Sean $G < PSL(2, \mathbb{R})$, $w_0 \in \mathbb{H}^2$ tal que w_0 no es un punto fijo de una transformación en G no trivial, y M_i , $i \in \mathbb{N}$, los semiplanos que contienen a w_0 que quedan determinados por el bisector perpendicular γ_i del segmento $[w_0, w_i]$, donde $w_i = T_i(w_0)$. Se define el polígono de Dirichlet para G con centro en w_0 como*

$$D = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i.$$

Se dice que una superficie de Riemann es del tipo hiperbólico si es de la forma Δ/G , donde G actúa en Δ .

Teorema 5.0.30 Sean G un grupo fuchsiano puramente hiperbólico y no abeliano tal que actúa en Δ , $h \in G$ simple, entonces la proyección $\pi(A)$ es una curva cerrada en Δ/G , donde A es el eje de h .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que G actúa en Δ . Sean $h \in G$ y A el eje de h . Como G es discreto y las transformaciones que preservan a A son hiperbólicas, se sigue que el estabilizador de A es cíclico. Sea $g \in G$ tal que $\langle g \rangle$ es el estabilizador de A . Si unimos z a $h(z)$ en Δ y proyectamos a Δ/G , se obtiene una curva cerrada, esto es, en el cociente z se identifica con $h(z)$ (véase la Figura 5.2), y por tanto, como $A/\langle g \rangle$ es compacto, aplicando el Teorema 5.0.29 se tiene que $\pi(A)$ es una curva simple cerrada. \square

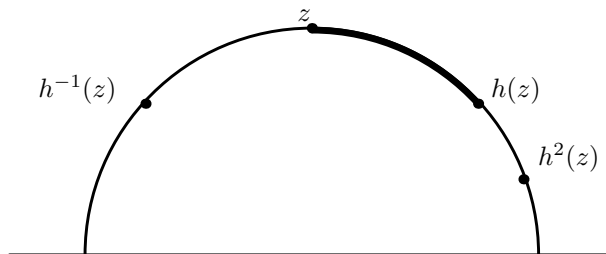


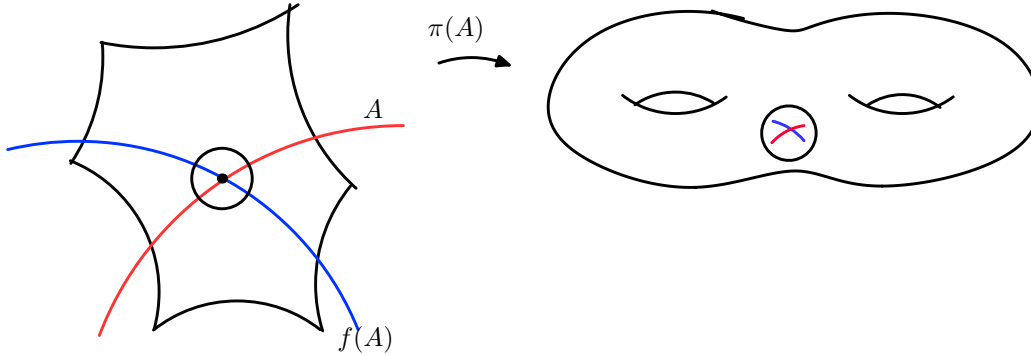
Figura 5.2: z se identifica con $h(z)$.

En el contexto del Teorema 5.0.30, si h no es simple entonces existe $f \in G$ tal que $f(A) \cap A \neq \emptyset$. Sea w el punto de intersección de A y $f(A)$. Nótese que π es una función continua. Consideremos D el polígono de Dirichlet con centro en w , y U una vecindad de w tal que $U \subset D$. Como no hay transformaciones elípticas, se sigue que w no es un punto fijo. La superficie de Riemann Δ/G se define como el espacio cociente Δ/G , de hecho es homeomorfo a \tilde{D}/G (cf. [3]). Por lo cual, si denotamos

$$\pi_1 : \tilde{D} \longrightarrow \tilde{D}/G,$$

se tiene que $\pi_1|_U$ es un homeomorfismo y por lo tanto A se proyecta en una curva que se autointerseca (véase la Figura 5.3).

A manera de conclusión de esta tesis se presenta una aplicación que muestra que la longitud hiperbólica de dos curvas esenciales en ciertas superficies están acotadas inferiormente.

Figura 5.3: Proyección de A en Δ/G .

Teorema 5.0.31 *Sea R una superficie de Riemann definida por Δ/G , donde G es un grupo fuchsiano puramente hiperbólico y no abeliano. Además, sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dos curvas esenciales cerradas en R que pasan por $\alpha \in R$ y tales que no son homotópicas a clases de homotopía de la forma τ^n y τ^m respectivamente, donde τ es una curva esencial cerrada en R que pasa por α , entonces*

$$\sinh\left(\frac{l_1}{2}\right) \sinh\left(\frac{l_2}{2}\right) \geq 1,$$

donde l_i son las longitudes de \mathcal{L}_i , $i = 1, 2$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el levantamiento de \mathcal{L}_1 , esta curva inicia en un punto z_0 y termina en un punto distinto de z_0 , ya que de otra manera como Δ es simplemente conexo, la homotopía en Δ se proyecta a una homotopía en R y \mathcal{L}_1 no sería esencial. Por tanto, existe $h \in G$ tal que $h(z_0) \neq z_0$ y $h(z_0)$ es el punto final del levantamiento. De manera análoga, para el levantamiento de \mathcal{L}_2 existe una transformación $g \in G$ tal que $g(z_0)$ es el punto final de dicho levantamiento.

Si $\langle g, h \rangle$ es abeliano, entonces existe f una transformación hiperbólica tal que $\langle g, h \rangle = \langle f \rangle$, por lo que se tiene que $g = f^n$ y $h = f^m$. Ahora, nótese que $f(z_0) \neq z_0$, ya que G es puramente hiperbólico. Se afirma que la proyección en R de $[z_0, f(z_0)]$, que denotamos por τ , es una curva esencial, ya que de lo contrario, se sigue de la unicidad del teorema de levantamiento de homotopías (cf. [5] p. 22) que el levantamiento sería una curva cerrada (nulhomotópica). Sin embargo el levantamiento es el segmento de geodésica $[z_0, f(z_0)]$, por lo tanto se sigue la afirmación. Ahora, nótese

que el levantamiento de \mathcal{L}_1 es homotópico (relativamente a sus extremos) al levantamiento de τ^n (ya que Δ es simplemente conexo) y es claro entonces al proyectar a R que \mathcal{L}_1 es homotópico a τ^n (véase la Figura 5.4). De manera análoga se obtiene que \mathcal{L}_2 es homotópico a τ^m , lo cual contradice las hipótesis del Teorema 5.0.31. Por lo tanto $\langle g, h \rangle$ no es abeliano.

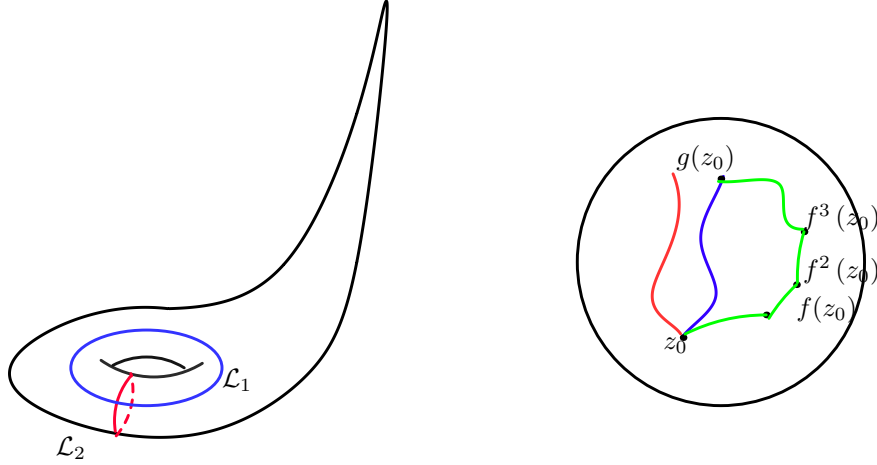


Figura 5.4: Levantamiento de las curvas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2

Por otro lado, las longitudes de las curvas en R es tomar la longitud de sus levantamientos, esto se mide extendiendo una geodésica entre los puntos extremos z_0, z_1 donde $z_1 = g(z_0)$. Obsérvese que si las curvas no son geodésicas, entonces miden más que la geodésica que une z_0 con $g(z_0)$, por lo que, aplicando el Teorema 4.0.19, se tiene

$$\sinh\left(\frac{l_1}{2}\right) \sinh\left(\frac{l_2}{2}\right) \geq \sinh\left(\frac{\rho(z_0, g(z_0))}{2}\right) \sinh\left(\frac{\rho(z_0, h(z_0))}{2}\right) \geq 1.$$

□

Bibliografía

- [1] AHLFORS, L. V., *Complex Analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, 1966.
- [2] ÁVILA BAEZ, V., *Producto Inversivo y Polígonos Hiperbólicos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [3] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [4] BUSTOS CASTRO, H., *Regiones Canónicas y Geometría de Productos de Transformaciones de Möbius*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2007.
- [5] GREENBERG, M. J., *Algebraic Topology: a First Course*, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [6] HERNÁNDEZ CASTRO, A., *Regiones Fundamentales Localmente Finitas*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, en proceso.
- [7] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [8] MARTÍNEZ VEGA, R., *Haces para Elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ y la Función Desplazamiento*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, 2006.
- [9] MOZO CRUZ, A., *Trigonometría de Triángulos Hiperbólicos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2001.
- [10] TRUJILLO MARTÍNEZ, E., *Grupos elípticos actuando en \mathbb{H}^3* , Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2001.