UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

SINGULARIDADES EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CON PARÁMETRO COMPLEJO

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

GENARO DE LA VEGA RIVERA

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO SÁNCHEZ

MÉXICO, D.F. DICIEMBRE, 2008

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres

Fernando de la Vega

Josefina Rivera

A mi hermano

Alfonso de la Vega

Tabla de Contenidos

Resumen

El presente trabajo explica cómo y bajo qué condiciones existe solución de las ecuaciones diferenciales con parámetro complejo.

Se prueba el teorema de existencia y unicidad para puntos regulares.

Se estudia la extensión analítica de la solución considerando ecuaciones diferenciales del tipo $w' = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}$, donde P y Q son polinomios en w y cuyos coeficientes son funciones algebraicas en z.

Se clasifican los puntos singulares de la ecuación en dos casos. El primero caso surge en el dominio, donde la ecuación diferencial tiene singularidades, éstos puntos son llamados puntos singulares fijos ahí la ecuación podría no estar bien definida. El segundo caso surge donde la solución de la ecuación diferencial presenta singularidades, a éstos puntos se les conoce como puntos singulares móviles.

Se explica la manera en que se pueden "evitar" las singularidades por medio de la extensión analítica y de cómo se construye la extensión analítica maximal.

Se termina el trabajo exponiendo ejemplos sobre los tipos de singularidades, entre ellas ecuaciones tipo Riccati y se da una explicación de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con parámetro real vistas en el plano complejo con parámetro complejo.

Introducción

El concepto que engloba la palabra "*solución*" de la ecuación diferencial (ED), se ha desarrollado a lo largo de la historia, desde tiempos de **Newton** (1671) cuando planteó la existencia de ecuaciones fluxionales, seguido por **Jacob Bernoulli** (1696) a quién se le considera haber hecho el primer trabajo sobre ecuaciones diferenciales por su trabajo sobre la isócrona. [1]

Grandes matemáticos invirtieron tiempo y esfuerzo en establecer el concepto de ED y de probar la existencia de las soluciones a las ecuaciones diferenciales, **Cauchy** y **Weierstrass** entre otros ayudaron a establecer las bases sólidas de la teoría de convergencia de series para expresar a las funciones complejas y extender el dominio de las funciones por medio de la continuación analítica.

El teorema que sirve de base para las ecuaciones diferenciales es el Teorema de existencia y unicidad para ED complejas, por ser el más importante existen varias pruebas, entre algunas de ellas están la del *método del punto fijo*, las *aproximaciones sucesivas*, *series mayoradas* (de Cauchy, Lindelöf) *convergencia dominada*, *variación*

[1] La información histórica se basa en el libro [1].

de parámetros entre otras, aquí se enuncia una prueba de existencia por **series mayoradas de Cachy** y la unicidad por medio de una prueba corta dada por **Ivar Bendixion** en 1896.

Una parte del estudio de las ED consiste en describir cuándo existe solución local de la ecuación diferencial en un punto dado y otra parte consiste en saber si se puede extender la solución y qué impedimentos hay para ello.

Los puntos singulares de la solución son los puntos que limitan su construcción global. En este trabajo se estudian algunos ejemplos y se analizan los casos sencillos para la extensión analítica, los pioneros en analizar los puntos singulares fueron **Lazarus Fuchs** (1833-1902) y **Paul Painlevé** (1863-1933).

Existen dos tipos de puntos singulares, los *fijos* y los *movibles*, ambos pueden ser ceros, polos ó ramificaciones, la diferencia radica en que los puntos fijos dependen exclusivamente de la función más no de las condiciones iniciales de la solución mientras que las móviles si.

Por ejemplo para la ecuación diferencial $w' = w^2 - \pi^2 \cot^2 \pi z$ aunque no se conozcan las soluciones se sabe que para $z = n$ con $n \in \mathbb{N} \cup \infty$, el lado derecho de la ecuación diferencial tiende a infinito, y por lo tanto la ecuación diferencial no está bien definida, esos puntos se consideran *puntos singulares fijos.*

Las singularidades que aparecen en las soluciones de la ecuación diferencial son polos que se pueden acomodar en cualquier valor del plano z con una elección adecuada de la condición inicial z_0, w_0, estos puntos reciben el nombre de *puntos singulares movibles*.

En la pate final de este trabajo se analizan algunas variantes de la ecuación diferencial de *Riccati* $(y'(x) + ay^2(x) + bx^m = 0)$.
Ésta ecuación fue enunciada por Daniel Bernoulli, y estudiada por Jacopo Riccati, tiene derivaciones importantes, una de ellas es que está fuertemente relacionada con la ecuación de Bessel y dentro de la variable compleja tiene un papel fundamental en la teoría de Nevanlinna sobre la distribución de los valores de las funciones meromórfas además de que las soluciones tienen aplicaciones prácticas como la descripción de las fórmulas de Frenet, las lineas asintóticas a una superficie reglada entre otras.

Esta ecuación da la pauta para identificar los distintos tipos de puntos críticos que tiene una ecuación diferencial de variable compleja. Las ecuaciones que se analizan en este trabajo están fuertemente ligadas a describir el comportamiento de esta ecuación.

Capítulo 1

Teoría y Fundamentos

1.1. Teorema de existencia y unicidad

Teorema 1.1.1. *Teorema de existencia y unicidad.*[1] *Sea $f(z,w)$ una función analítica respecto de z y w en dos discos C_z y C_w con centro los puntos $z=0$ y $w=0$ y radios a y b respectivamente además f es continua en la cerradura de $C_0 \times C_0$, entonces, la ecuación diferencial $\frac{dw}{dz} = f(z,w)$ tiene solución única $w = w(z)$ dentro del disco $|z| < h$ y satisface la condición inicial $w(0) = 0$. Donde $h = a[1 - exp(-\frac{b}{2aM})]$.*[2]

Demostración 1.1.2. *Como f está acotada por ser holomorfa $\Rightarrow |f(z,w)| \leq M$, recurriendo a la ecuación diferencial, se pueden expresar las nésimas derivadas de w en términos de las derivadas de f, así*

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dz}$$

[1] *En esta demostración se utiliza el método de mayoración dado por Cauchy.*

[2] *Para el caso particular en que la condición inicial $(z_0, w_0) = (z_0, w_0)$, se hace un cambio de coordenadas $\xi = z - z_0$, $\zeta = w - w_0$ y se hace el mismo análisis en el espacio (ξ,ζ).*

$$\frac{d^3w}{dz^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w}\frac{dw}{dz} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{d^2w}{dz^2}\dots$$

y así sucesivamente.

Por otro lado w se puede expresar en términos de su serie de McClaurin

$$w = \left(\frac{dw}{dz}\right)\frac{z}{1} + \left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)\frac{z^2}{2!} + \dots$$

la prueba se reduce a demostrar que la serie converge.

Como $f(z,w)$ es analítica, se puede escribir de la forma

$$f(z,w) = \sum A_{pq}z^pw^q, \text{ con } A_{pq} = \frac{1}{p!q!}\left(\frac{\partial^{p+q}f}{\partial z^p \partial w^q}\right)_0$$

pero

$$\left|\frac{\partial^{p+q}f}{\partial z^p \partial w^q}\right|_0 < \frac{p!q!}{a^pb^q}M$$

por lo tanto

$$|A_{pq}| < \frac{M}{a^pb^q}$$

con esta cota construimos una nueva función

$$F(z,w) = \sum \frac{M}{a^pb^q}z^pw^q$$

pero

$$F(z,w) = \frac{M}{(1-\frac{z}{a})(1-\frac{w}{b})}$$

así se construye una nueva ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dz} = F(z,W) \tag{1.1.1}$$

con $W(0) = 0$ entonces los valores de las derivadas de w están dominados por los valores de las derivadas de W, pero la serie para w converge absoluta y uniformemente dentro del radio de convergencia para la W. Para encontrar el radio de convergencia se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dz} = \frac{M}{(1 - \frac{z}{a})(1 - \frac{W}{b})} \tag{1.1.2}$$

al ser de variables separables se encuentra que la solución es:

$$W(z) = b - [b^2 + 2abM \log(1 - \frac{z}{a})]^{1/2} \tag{1.1.3}$$

se toma la rama principal del logaritmo y $(b^2)^{1/2} = +b$. $\square$

Observación: Por la demostración del teorema de existencia, no existe ninguna otra función holomorfa que satisfaga la ED y su condición inicial pues el desarrollo en serie determina una única función por lo que se cumple la unicidad.

Capítulo 2

Continuación analítica de las soluciones y determinación de los valores de la solución $F(z)$ por medio de las trayectorias de extensión.

2.1. Continuación analítica

A continuación se considerará la ecuación diferencial

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) \tag{2.1.1}$$

con $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$ un punto regular de $f(z, w)$.

Entonces por el teorema de Cauchy del capítulo 1, se tiene que existe una única solución analítica en una vecindad D de z_0 con $F(z_0) = w_0$ y F es la función solución.

Nos interesa responder la pregunta de ¿cuánto puede extenderse la región donde siga existiendo esa solución?.

Con la "prolongación analítica" se puede extender la región de la solución. Recordemos que dados dos regiones D y G y si f y g son dos funciones definidas en estas regiones respectivamente, se dice que estas funciones son la prolongación analítica inmediata una de la otra si se cumplen dos condiciones:

- los regiones D y G tienen al menos un punto en común;
- existe una región E que está contenido en G y en D en cuyos puntos $f = g$.

Para empezar consideremos la región Ω como un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, y F el germen de una función holomorfa en el punto $z_0 \in \Omega$, sea $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ una curva (continua o diferenciable) tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$.

Definición 2.1.1. *Se dice que F admite una prolongación analítica sobre γ si existe un conjunto de discos $D_0, D_1, \ldots, D_n$ tales que cubren γ y además existen funciones holomorfas $F_k : D_k \to \mathbb{C}$ tal que $F_0 \equiv F$ en la vecindad D_0 de z_0 y $F_k \equiv F_{k-1}$ en $D_k \cap D_{k-1}$ para toda $k = 1, \ldots, n$. El germen de la función definida para F_n se le llama la* ***determinación de F en*** *z_1.*

Con el germen se forman clases de equivalencia de las funciones alrededor del punto z_1.

La equivalencia consiste en agrupar a las funciones holomorfas que coincidan en una vecindad del punto z_1.

La determinación no depende de la cadena de discos. Y al hacer una $\epsilon-perturbacion$ $\widetilde{\gamma}$ de γ con $\widetilde{\gamma}(0) = z_0$ y $\widetilde{\gamma}(1) = z_1$ La nueva trayectoria conduce a la misma determinación $F_{\widetilde{\gamma}} \equiv F_\gamma$ ya que podemos usar los mismos discos si ε es suficientemente pequeña.

Ésto último clasifica a las curvas γ en clases de equivalencia.

Podemos concluir que la determinación no depende ni del representante del germen ni de la curva (salvo homotopías).

También se sabe por el lema de Poincaré-Volterra, que el conjunto de determinaciones de F en z_1 es a lo más numerable.

Esto es porque dada una colección arbitraria de discos $\{D_k\}$ que cubran a una curva γ particular, siempre existe una subcolección numerable de discos $\{D_r\}$ contenida en la colección $\{D_k\}$, construida con centro racional y radio racional y por lo tanto numerable.

Las singularidades dependen de la determinación de F_γ en z_1, por lo que las singularidades quedarán clasificadas en términos de las clases de equivalencia de γ.

Sobre la región Ω se puede levantar una superficie de Riemann (conexa) $\mathcal{S}$ por medio de las parejas $(\gamma(1), F_\gamma)$ donde $\gamma : [0,1] \to \Omega$ está en el conjunto de trayectorias que parten de $\gamma(0) := z_0$ hasta donde F admita la prolongación analítica. Habrá entonces una aplicación holomorfa $\phi : \mathcal{S} \to \Omega \times \mathbb{C}$, $\phi = (\pi, \widetilde{F})$, que satisface lo siguiente

1. $\pi(p_0) = z_0$ y $F \circ \pi \equiv \widetilde{F}$ en una vecindad de p_0 sobre la superfice de Riemann

2. $\pi : \mathcal{S} \to \Omega$ es un difeomorfismo local para todo punto de $\mathcal{S}$.

3. cualquier otra tripleta $(\widetilde{\mathcal{S}}, \widetilde{p_0}, \widetilde{\phi})$ que satisfaga 1 y 2 se puede factorizar por medio de $(\mathcal{S}, p_0, \phi)$ via una función holomorfa $\varphi : \widetilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{S} : \varphi(\widetilde{p_0}) = p_0$ y $\widetilde{\phi} = \phi \circ \varphi$.

La tripleta es única salvo isomorfismos. Y la gráfica $\mathcal{G} := \phi(\mathcal{S})$ es única.

Definición 2.1.2. *Se le llama a la* ***función multiforme definida sobre*** Ω ***por el germen de*** F *la "prolongación analítica maximal" de* F *sobre* Ω *o bien sobre la superficie de Riemann* $\phi : \mathcal{S} \to \Omega \times \mathbb{C}$. *Si en cada* z *de* Ω *hay una única determinación se dice que* F *es uniforme.*

El obstáculo para la prolongación analítica son la singularidades que se pueden presentar, para esto es necesario señalar las siguientes definiciones.

Definición 2.1.3. *La trayectoria* γ *conduce a una singularidad de* F *cuando* F *admite una prolongación analítica para la trayectoria* $\gamma_{[0,1-\epsilon]}$ $\forall\ \epsilon > 0$ *pero no para toda la trayectoria* γ.

Cuando se da otra trayectoria $\widetilde{\gamma}$ *que une a* z_0 *con* z_1 *se dice que* $\widetilde{\gamma}$ *conduce a la misma singularidad si para toda vecindad* D *de* z_1 *las determinaciones de* $F_{\gamma|[0,\tau]}$ *y* $F_{\widetilde{\gamma}|[0,\tau]}$ *definen la misma función multiforme en* D *para* τ *cercano a 1.*

Se denotará por Σ_{F_Ω} al conjunto de singularidades de F en Ω.

Definición 2.1.4. *Se dice que* F *define una* ***función multiforme regular*** *si en* Ω *no hay singularidades, y entonces se puede prolongar a* F *sobre toda trayectoria*

$\gamma : [0,1] \to \Omega$ que parta de $\gamma(0) = z_0$. Este caso sólo se presenta cuando $\pi : S \to \Omega$ es una cubierta. En particular el número de determinaciones de F es el mismo para toda z y si Ω es simplemente conexo entonces la extensión es uniforme.

2.2. Clasificación de los puntos singulares fijos.

Dada la ecuación diferencial

$$w'(z) = f(z,w), \quad w(z_0) = w_0$$

La teoría y los teoremas de las secciones anteriores nos permiten afirmar cuándo existe solución holomorfa para la ecuación y en qué región del dominio se da.

En las siguientes secciones se estudiarán los puntos donde no se puede extender a priori la solución, éstos puntos son conocidos como "singularidades".

Los puntos singulares pueden hacer que la ecuación diferencial carezca de sentido o bien pueden hacer que la solución de la ecuación diferencial presente singularidades.

Considerando el caso de la ecuación diferencial

$$w' = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}, \tag{2.2.1}$$

donde $P(z,w) = \Sigma_{j=1}^{p} A_j(z) w^j$ y $P(z,w) = \Sigma_{k=1}^{q} B_k(z) w^k$ son polinomios en w y cuyos coeficientes son funciones algebraicas en z. Un *punto singular fijo* se puede presentar en la ecuación diferencial si:

1. z es tal que $A_j(z)$ ó $B_k(z)$ son singulares p.a. j ó k. Este conjunto de puntos es finito ya que A y B son algebraicas.

2. z es tal que $Q(z,w) \equiv 0$ y por lo tanto z hace que $B_k = 0$ para toda k, y también es un número finito.

3. z es tal que $P(z,w) = Q(z,w) = 0$, lo que produce una indeterminación en la ecuación diferencial

4. para $w = \infty$ se realiza el cambio de variable $\xi = \frac{1}{w}$ y la ecuación 2.2.1, se convierte en $\xi' = \frac{-\xi^2 P(z,\frac{1}{\xi})}{Q(z,\frac{1}{\xi})} = \frac{P_1(z,\xi)}{Q_1(z,\xi)}$, así que para esta nueva ecuación los puntos singulares de los casos 1 y 2 se repiten pero en el caso de que $P_1(z,0) = Q_1(z,0) = 0$, pueden aparecer singularidades adicionales, y también este conjunto de puntos es finito.

Ejemplo 2.2.1. *La ecuación diferencial*

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w}{\sqrt{z-A}}, \quad w(z_0) = w_0$$

tiene solución a $w = Ce^{2\sqrt{z-A}}$, *ésta solución independientemente de la condición inicial que se dé, presenta una singularidad en el punto* A *ya que* $C = w_0 e^{-2\sqrt{z_0-A}}$.

Ejemplo 2.2.2. *Si*

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w}{(z-A)^2}, \quad w(z_0) = w_0$$

la solución es: $w = Ce^{-\frac{1}{(z-A)}}$, *ésta tiene una singularidad en* A *independientemente de la condición inicial con* $C = w_0 e^{\frac{1}{(z_0-A)}}$.

Ejemplo 2.2.3. *Para*

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w + sen(z-A)}{(z-A)},$$

la solución es $w = (z - A)\int_a^z \frac{sen(t-A)}{(t-A)}dt$, *en este ejemplo se presentan dos casos importantes, el primero es que la ecuación tiene una singularidad en* $z = A$, *y además si* $w = 0$ *se genera una indeterminación.*

En ejemplos 2.2.1 y 2.2.2, las condiciones iniciales están asociadas a la constante C y en el ejemplo 2.2.3 la constante a de la integral es quien fija las condiciones iniciales.

2.3. Puntos singulares movibles

Este tipo de singularidades se encuentran cuando al resolver la ecuación diferencial, las condiciones iniciales generan singularidades en la solución de la ecuación. Al modificar las condiciones iniciales, la posición en el dominio de la singularidad, varía.

Ejemplo 2.3.1. *La ecuación*

$$\frac{dw}{dz} + \frac{z}{w} = 0, \; w(z_0) = w_0$$

es de variables separables y su solución está dada por $w = \sqrt{z_0^2 + w_0^2 - z^2}$, *la solución en el punto* $z_s = z_0^2 + w_0^2$ *presenta una singularidad. Al variar* z_0 *y* w_0 *el punto singular* z_s *varía y puede asumir cualquier valor.*

2.4. Análisis de las soluciones en los puntos singulares.

Ya que se tiene la solución de la ecuación diferencial con su correspondiente extensión analítica maximal. Resta estudiar los puntos singulares de la ecuación diferencial.

2.4.1. Caso cuando la función $\frac{dw}{dz} = f(z,w)$ se hace ∞

Si la función $f(z,w)$ se hace infinito para (z_0, w_0), pero si $\frac{1}{f(z,w)}$ es analítica en una vecindad del punto entonces

$$\frac{1}{f(z,w)} = A_0(z) + A_1(z)(w-w_0) + A_2(z)(w-w_0)^2 + \dots$$

y los coeficientes $A_i(z)$ se pueden desarrollar en series de potencias de $(z-z_0)$ y $A_0(z_0) = 0$.

Si todas las $A_i(z_0) = 0$, se puede demostrar que $\frac{1}{f(z,w)} = G(z)g(z,w)$ donde $g(z,w)$ es analítica en una vecindad de (z_0, w_0) y $G(z)$ depende solamente de z y se anula cuando $z = z_0$; si no todos los coeficientes $A_i(z)$ se anulan, $A_i(z_0) = 0$ con $i \leq k$ y $A_k(z_0) \neq 0$.

En ese caso la ecuación diferencial se puede escribir en los siguientes términos

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f(z,w)},$$

y se puede considerar que la variable dependiente es z y la variable independiente es w. Del apunte del párrafo anterior se infiere que

$$\frac{dz}{dw}, \frac{d^2z}{dw^2}, \frac{d^3z}{dw^3}, \dots, \frac{d^kz}{dw^k}$$

son cero en (z_0, w_0) y que $\frac{d^{k+1}z}{dw^{k+1}}$ no lo es $\therefore$ la ecuación tiene una solución de la forma

$$(z-z_0) = (w-w_0)^{k+1}\{c_0 + c_1(w-w_0) + c_2(w-w_0)^2 + \dots\}$$

con $c_0 \neq 0$ por lo que $w - w_0$ se puede expresar en serie de potencias de la función $(z-z_0)^{\frac{1}{k+1}}$,‘[1] lo que origina que existan $k+1$ soluciones de la ecuación diferencial y

[1] Ver [2] pag. 289.

que el punto z_0 sea un punto de ramificación.

Como caso especial si se considera a $f(z,w) = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}$ (donde P y Q son polinomios en w, los coeficientes son funciones algebraicas de z y el grado de Q es n) entonces cuando z_0 es tal que $P(z_0, w) = 0$ y $Q(z_0, w) = 0$ no tienen raíces comunes, existen n valores w_0 para los cuales los puntos iniciales (z_0, w_0) presentan soluciones con ramificación.

Si existe una curva en la que todos los valores z hacen que $P(z,w)$ y $Q(z,w)$ no tengan raíces comunes, todos los puntos de esa curva serán puntos de ramificación, esos puntos de ramificación son singularidades movibles.

2.4.2. Caso cuando la solución $F(z)$ con la condición inicial (z_0, ∞) se hace ∞.

Si el punto es $(z_0, w_0 = \infty)$, con el cambio de variable $w = \xi^{-1}$ se construye la ecuación diferencial

$$\frac{d\xi}{dz} = -\xi^2 f(z, \xi^{-1}) = \Phi(z,\xi) \tag{2.4.1}$$

Si $\Phi(z,\xi)$ es analítica en una vecindad de $(z_0, \xi = 0)$, entonces la solución $F(z)$ se puede escribir como

$$\xi = (z - z_0)^k \{c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots\}$$

con $k > 0$ de esta forma

$$w = \xi^{-1} = (z - z_0)^{-k} \{C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \ldots\}$$

tiene un polo de orden k en z_0.

Por otro lado si $\Phi(z,\xi)$ tiende a ∞ en $(z_0, \xi = 0)$, y el recíproco $\frac{1}{\Phi(z,\xi)}$ es una función analítica haciendo un desarrollo similar al hecho en 2.4.1, se puede concluir que

$$\xi = (z - z_0)^{1/k+1}\{d_0 + d_1(z - z_0) + d_2(z - z_0)^2 + \ldots\}$$

y entonces

$$w = \xi^{-1} = (z - z_0)^{-1/k+1}\{D_0 + D_1(z - z_0) + D_2(z - z_0)^2 + \ldots\}$$

se llega a que z_0 es un polo y además es un punto de ramificación para la solución. Los dos tipos de puntos de esta subsección son llamados regulares y además son fijos.

Ejemplo 2.4.1. *La determinación principal del logaritmo $F(z) = log(z)$ con $z_0 = 1$ y $F(1) = 0$ es la solución de la ecuación $w' = \frac{1}{z} =$. F es una función uniforme sobre $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, una función multiforme regular sobre $\mathbb{C}^*$ y en $\mathbb{C}$ tiene una única singularidad fija en $z = 0$.*

Ejemplo 2.4.2. *La función multiforme $F(z) = z^\alpha := exp(\alpha log(z))$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ es solución de la ecuación diferencial $w' = \alpha\frac{w}{z}$.*

Esta posee exactamente una singularidad sobre el 0, a menos que $\alpha \in \mathbb{N}$, si $\alpha \in \mathbb{I}$, posee una infinidad de determinaciones y cuando $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, entonces F tiene exactamente q determinaciones.

F admite un límite en $z = 0$ sii α es real, cuando $\alpha > 0$, F tiende a ∞ y cuando $\alpha < 0$ F tiende a 0.

Ejemplo 2.4.3. *La función* $F(z) = \alpha_1 log(z-\xi_1) + \alpha_2 log(z-\xi_2) + \alpha_3 log(z-\xi_3)$*, solución de la ecuación diferencial* $\frac{dw}{dz} = \frac{\alpha_1}{(z-\xi_1)} + \frac{\alpha_2}{(z-\xi_2)} + \frac{\alpha_3}{(z-\xi_3)}$*, es regular en* $\mathbb{C}\backslash\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$*. Sobre* $z \neq \xi_i$ *la función tiene dos determinaciones que difieren por una constante que pertenece al grupo aditivo* $G = 2\pi i(\alpha_1\mathbb{Z} + \alpha_2\mathbb{Z} + \alpha_3\mathbb{Z})$*. Sobre* ξ_1 *se presentan dos singularidades que difieren por una constante que pertenece al subgrupo* $H_1 = 2\pi i(\alpha_2\mathbb{Z} + \alpha_3\mathbb{Z})$*.*
Por otro lado, la función inversa de F*,* $z = U(w)$ *solución de la ecuación diferencial* $\frac{dz}{dw} = 1/(\frac{\alpha_1}{(z-\xi_1)} + \frac{\alpha_2}{(z-\xi_2)} + \frac{\alpha_3}{(z-\xi_3)})$*, posee al menos tantas singularidades como valores críticos tiene* F*. La derivada* F *se anula sobre dos puntos* $z_1 \neq z_2$*, distintos de* ξ_i*, esto para cualquier determinación de* F*.*

Ejemplo 2.4.4. *La función multiforme definida por* $F(z) = \sqrt{z^{2\pi i/log(2)} - 1} = \sqrt{exp((2\pi i/log(2))log(z)) - 1}$ *es solución de la ecuación diferencial* $y' = \frac{(2\pi i/log(2))(w^2+1)}{2zw}$*.*
Esta función tiene singularidades en el 0*, debido a la singularidad de* $log(z)$ *y en los puntos* $z_n = 2^n$ *con* $n \in \mathbb{Z}$ *generados por la singularidad de la raiz cuando* $exp((2\pi i/log(2))log(z)) - 1 = 0$*.*
La singularidad en $z = 0$ *es mucho más complicada ya que los valores* $z_n = 2^n$ *con* $n < 0$ *se acumulan en el* 0*.* [2]

Definición 2.4.1. *Una singularidad se llama aislada si existe un disco* D *centrado en* z_1 *tal que la función multiforme* F_{γ_D} *es regular en el disco agujereado* $D^o = D\backslash\{z_1\}$

Las singularidades de los ejemplos 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3 y también las singularidades en los puntos $z_n = 2^n$ del ejemplo 2.4.4 son singularidades aisladas, mientras que la singularidad en el 0 del ejemplo 2.4.4 no lo es, ya que la sucesión de puntos singulares

[2] *Este ejemplo está tomado de [3] pág 8 . Sin embargo la constante* α *de ese artículo no es la correcta.*

$z_n = 2^n$ con $n < 0$ converge a él.

Definición 2.4.2. *Se dice que $w_1 \in \mathbb{C}^*$ es el límite de F en una singularidad si para toda trayectoria γ representante de la singularidad se cumple que* $\lim_{t\to 1} F(\gamma(t)) = w_0$.

Cuando una singularidad es aislada, tiene un número finito de determinaciones y además tiene un límite en z_1 entonces se dice que la singularidad es ***algebroide.***

La singularidad en el 0 de la función $f(z) = z^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{Q}$ es un caso particular de singularidad algebroide.

En el ejemplo 2.4.3, las singularidades de U sobre $\mathbb{C}$ son algebroides y por lo tanto aisladas, sin embargo la proyección sobre su dominio es densa. En el ejemplo 2.4.4 las singularidades son algebroides a excepción del 0 ya que no es aislado.

Definición 2.4.3. *Una función es algebroide si toda singularidad de F sobre Ω es algebroide.*

Se establece una proposición donde se afirma que el número de singularidades de F es a lo más numerable y además, para cada trayectoria γ tal que para alguna $t \in (0,1)$ se produzca una singularidad de F, se puede encontrar una curva $\widetilde{\gamma}$ suficientemente cercana de tal manera que la única singularidad que se estudie es la que posiblemente se alcance en F_γ.

También se establece que si todas las singularidades de F en Ω son aisladas entonces el conjunto de singularidades de F sobre Ω es a lo más numerable.

El hecho de que se pueden evitar las singularidad intermedias hace que la determinación de F_γ dependa de la forma de evitar dichas singularidades.

Capítulo 3

Teorema I de Painlevé: de ecuaciones diferenciales y foliaciones.

3.1. Teorema I de Painlevé: de ecuaciones diferenciales y foliaciones

Teorema 3.1.1 (Teorema I de Painlevé). *Al considerar la ecuación diferencial*

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)} \tag{3.1.1}$$

con $P, Q \in \mathbb{C}[z,w]$ polinomios de las variables $(z,w) \in \mathbb{C}^2$.

Existe un conjunto finito de puntos $\Sigma_E \subset \mathbb{C}$ en el dominio, donde se proyectan todas las singularidades no algebroides de la solución local $w = F(z, z_0, w_0)$ de la ecuación 3.1.1.

Lo anterior nos dice que toda solución sobre $\Omega = \mathbb{C} \backslash \Sigma_E$ es algebroide.

La idea de Painlevé consiste en pensar a la ecuación diferencial anterior como una foliación singular por curvas (soluciones de la ecuación) sobre el espacio fase $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

En una vecindad de un punto regular,(i.e. donde $Q(z_0, w_0) \neq 0$) las gráficas de las soluciones $w = f(z)$ son las curvas de nivel de una submersión $H(z, w)$.

Existe una vecindad V de (z_0, w_0) donde $H : V \to \mathbb{C}$ está bien definida, es regular y satisface que para toda condición inicial $(z_1, w_1) \in V$ la solución local $f(z, z_1, w_1)$, cumple con la ecuación funcional implícita $H(z, f(z, z_1, w_1)) = H(z_1, w_1)$.

Por esa razón, las gráficas de las soluciones locales definen una foliación regular $(\mathcal{F})$ dada por las curvas solución en una vecindad de (z_0, w_0). Dicha foliación está bien definida en el complemento de $Q(z_0, w_0) = 0$.

Si $Q(z_0, w_0) = 0$ pero $Q(z_0, w_0) \neq 0$ entonces se puede considerar a la ecuación

$$\frac{dz}{dw} = \frac{Q(z, w)}{P(z, w)}$$

, y ahora analizar los puntos donde $P(z_0, w_0) \neq 0$.

Por último cuando P y Q son primos relativos el conjunto de puntos tales que $P(z, w) = Q(z, w) = 0$ es un número finito. Cuando se generan puntos de este tipo se dice que $\mathcal{F}$ es una foliación singular con singularidades aisladas sobre $\mathbb{C}^{\nvDash}$.

Para analizar el ∞, se efectúa el cambio de variable $w = 1/W$, por lo que se obtiene la ecuación

$$\frac{dW}{dz} = -W^2 \frac{P(z, 1/W)}{Q(z, 1/W)} = \frac{P_1(z, W)}{Q_1(z, W)} \tag{3.1.2}$$

El desarrollo con la nueva variable W ayuda a esclarecer el comportamiento de las singularidades aisladas en la recta al infinito $L_\infty = \mathbb{C} \times \overline{\mathbb{C}} \backslash \mathbb{C}^2 = \{w = \infty\}$.

Se denota como $\Sigma_{\mathcal{F}}$ al conjunto de singularidades de $\mathcal{F}$, sobre estos puntos la foliación no se puede extender de manera regular y entonces,

$$\Sigma_{\mathcal{F}|\mathbb{C}^2} = \{(z_0, w_0) \in \mathbb{C};\ P(z_0, w_0) = Q(z_0, w_0) = 0\}$$

y

$$\Sigma_{\mathcal{F}|L_\infty} = \{(z_0, \infty) \in \mathbb{C};\ P_1(z_0, 0) = Q_1(z_0, 0) = 0\}.$$

Se introduce la curva discriminante Δ, como el conjunto de puntos de tangencia entre la foliación $\mathcal{F}$ y la fibración vertical:

$$\Delta_{|\mathbb{C}} = \{(z, w); Q(z, w) = 0\}$$

y

$$\Delta|_{L_\infty} = \{(z, \infty); Q_1(z, 0) = 0\}.$$

Esto se traduce en 5 categorías dependiendo de la forma de contacto entre la foliación y la fibración vertical en un punto $(z_0, w_0) \in \mathbb{C} \times \overline{\mathbb{C}}$

1. transversal $(z_0, w_0) \in \Delta$
2. tangencia simple $\mathcal{F}$ interseca Δ transversalmente en (z_0, w_0)
3. tangencia múltiple $\mathcal{F}$ interseca Δ con multiplicidad en (z_0, w_0).
4. singularidad: $(z_0, w_0) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$
5. foliación vertical $Q(z_0, w) \equiv 0$, entonces $\{z = z_0\}$ es una foliación de $\mathcal{F}$.

El conjunto de puntos Σ_E son la proyección sobre $\mathbb{C}$ de los puntos tipo 4 y 5.

$\Sigma_E = \{z_0; Q(z_0, y) \equiv 0$ o $(z_0, w_0) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ para algún $w \in \overline{\mathbb{C}}\}$.

Capítulo 4

Ecuación de Riccati. $\frac{dw}{dz} = A_0(z) + A_1(z)w(z) + A_2(z)w^2(z)$.

4.1. Ecuación de Riccati. $\frac{dw}{dz} = A_0(z) + A_1(z)w(z) + A_2(z)w^2(z)$

La ecuación de Riccati se puede obtener al considerar la ecuación diferencial $\frac{dw}{dz} = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}$ donde P y Q son polinomios y se pide que no existan puntos singulares de ramificación en $\hat{C}$.

Proposición 4.1.1. *Si la ecuación* $\frac{dw}{dz} = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}$ *no tiene puntos singulares de ramificación en* $\hat{C}$ *entonces la ecuación es de Ricatti i.e.* $\frac{P(z,w)}{Q(z,w)} = A_0(z) + A_1(z)w(z) + A_2(z)w^2(z)$.

Demostración 4.1.2. *Una condición necesaria será que no exista ningún punto de ramificación para* w *es que* $Q(z_0, w) \neq 0$, *pero esta ecuación se satisface siempre a* *menos que Q sea independiente de w.*

De esta manera $\frac{P(z,w)}{Q(z,w)}$ se escribe como un polinomio de w

$$f(z,w) = A_0(z) + A_1(z)w + A_2(z)w^2 + \ldots + A_n w^n$$

con coeficientes que dependen de z.

Examinando el ∞, mediante la transformación 2.4.1, se tiene que

$$\Phi(z,\xi) = -\xi^2 f(z,\xi^{-1}) = -A_0(z)\xi^2 - A_1(z)\xi - A_2(z) - A_3(z)\xi^{-1} - \ldots - A_n(z)\xi^{-n+2}$$

pero debe ser un polinomio por lo que $A_3 \equiv A_4 \ldots \equiv A_n \equiv 0$. Por lo tanto la ecuación debe de ser la de Riccati

$$\frac{dw}{dz} = f(z,w) = A_0(z) + A_1(z)w(z) + A_2(z)w^2(z).$$

Proposición 4.1.3. *La ecuación de Riccati es invariante sobre las transformaciones de Möebius actuando sobre la variable dependiente.*

Demostración

Dada $w = \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}$, al sustituirla en

$$w'(z) = A_0(z) + A_1(z)w + A_2(z)w^2$$

se obtiene que

$$-(ad-bc)\zeta'(z) = (d^2A_0+bdA_1+b^2A_2)+[2cdA_0+(ad+bc)A_1+2abA_2]\zeta+(c^2A_0+adA_1+a^2A_2)\zeta^2$$

$$\Longrightarrow \zeta'(z) = -C_0(z) - C_1(z)\zeta - C_2(z)\zeta^2. \quad \square$$

En las siguientes secciones se estudian casos muy particulares de la ecuación de Riccati aplicando la teoría para describir la relación con los sistemas de ecuaciones de primer orden de variable real.

Capítulo 5

Solución de la ecuación lineal de primer orden $w'(z) + A(z)w = 0$.

5.1. Solución de la ecuación lineal de primer orden $w'(z) + A(z)w = 0$.

Las ecuaciones más simples son las ecuaciones lineales de primer orden, éstas se pueden escribir de la forma

$$w' + A(z)w = 0. \tag{5.1.1}$$

Si $A(z)$ tiene singularidades aisladas y $A(z)$ es meromorfa en $\mathbb{D}_{r_0} \Rightarrow A(z)$ se puede desarrollar en su serie de Laurent, por lo que $A(z) = \sum a_k z^k$ en el $\mathbb{D}_r - \{r_0\}$. Si $a_k = 0$ $\forall k < 0$, se dice que la singularidad es removible, si $a_k \neq 0$ p.a. $k < 0$ y $a_l = 0$ $\forall l < k$ se dice que la singularidad es un polo de orden k y si $a_k \neq 0$ para un conjunto infinito de $k < 0$ entonces la singularidad es esencial.

Para la ecuación lineal 5.1.1, la solución se puede escribir en términos de este desarrollo.

$$w = \exp(-\int p(z)dz) = C\exp(-a_{-1}\ln(z) - \sum\left(\frac{a_{k-1}}{k}\right)z^k + \sum\left(\frac{a_{-k-1}}{k}\right)z^{-k}) \tag{5.1.2}$$

5.1.1. La ecuación lineal de primer orden $w'(z) = Aw$, A constante.

Si $A(z) = A$, la solución de

$$w'(z) = Aw \tag{5.1.3}$$

es $w = \exp(-\int Adz)$, la integral da como resultado

$$w(z) = w_0\exp(A(z - z_0)). \tag{5.1.4}$$

La ecuación tiene puntos críticos fijos, son el 0 y el ∞. Para demostrar que el ∞ es un punto crítico, hay que hacer un cambio de variable de la forma

$$w = \frac{1}{\zeta}$$

así

$$w'(z) = -\frac{\zeta'}{\zeta^2}$$

por lo que la ecuación (12) se transforma en

$$\zeta'(z) = -\zeta^2 A\frac{1}{\zeta}$$

al simplificar 5.1.3 se obtiene

$$\zeta'(z) = -A\zeta$$

si ζ tiende a cero $\Rightarrow$

$$\zeta' = 0$$

por lo que ∞ es un punto crítico de la ecuación.

Debido a que el número complejo z se puede escribir en términos de dos variables reales, las ED complejas se pueden asociar a sistemas de ED en el plano bidimensional real. Si $p(z) = A$, se puede asociar al complejo A la matriz

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ésta matriz al mismo tiempo es la matriz jacobiana de la ecuación lineal entendido como el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$.

Si la matriz de un sistema de ecuaciones diferenciales de dos variables reales, satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, éstas se pueden reinterpretar como una ecuación diferencial de una variable compleja y resolverse. La relación geométrica entre las soluciones reales y la solución compleja consiste en que la soluciones reales son iguales a las soluciones complejas tomando solamente la parte real del tiempo $z = t + is$ como parámetro.

Debido a que se tienen que cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann, los puntos críticos silla no se presentan en este tipo de ecuaciones diferenciales, ya que el determinante de la transformación siempre es positivo (para que se conserve la orientación de la transformación compleja).

5.1.2. La clasificación de los puntos críticos de la ecuación $w'(z) = Aw$.

Si bien los puntos críticos de la ecuación $w'(z) = Aw$ no pueden ser puntos silla, si pueden ser fuentes, sumideros, focos y centros. Para caracterizarlos es conveniente analizar el comportamiento de la función exponencial

$$w = w_0 \exp(A(z - z_0)). \tag{5.1.5}$$

Para ésta ecuación, el número w_0 solo rota, expande o contrae a partir del 0 de w a la función $\exp(A(z-z_0))$, por esta razón la función solución se comportará esencialmente como $\exp(A(z - z_0))$. Con un cambio de variable $\xi = z - z_0$, se traslada el punto z_0 al origen y la función se puede expresar como

$$= \exp(A(z - z_0)) = \exp(A\xi),$$

con A, ξ y z complejos.

La función exponencial mapea bandas del plano ξ de ancho $2\pi i$ y longitud infinita (paralelas al eje real) a todo el plano. A transforma el plano z al plano ξ mediante un giro dado por su argumento y una expansión (o contracción) dada por su norma, así las bandas dejan de ser paralelas al eje real y se hacen paralelas al complejo A en el plano ξ, por esta razón las soluciones estarán cualitativamente caracterizadas para valores de A en el disco unitario $A = e^{i\varphi}$, con $\varphi \in [0, 2\pi)$.

La caracterización es la siguiente: cuando $\varphi = 0$, las soluciones son fuentes (estrellas), al variar φ se deforman en focos inestables que giran en dirección positiva hasta que $\varphi = \pi/2$ y para ese valor los focos se vuelven centros. Para valores mayores a $\pi/2$, los centros se convierten en focos estables que siguen girando en dirección positiva, hasta que $\varphi = \pi$, para ese valor los focos se transforman en sumideros (estrellas). Si φ aumenta, surgen focos inestables pero recorridos en dirección negativa y se van deformando hasta que $\varphi = 3\pi/2$ y para este valor se colapsan en centros pero recorridos en sentido negativo, si $\varphi > 3\pi/2$ las soluciones son focos inestables que están recorridos en sentido negativo, que se acoplan de forma continua a la fuente (estrella) cuando $\varphi = 2\pi$.

Para el punto al infinito, es el mismo análisis pero desfazado π, es decir, cuando el 0 tiene un foco estable, en el infinito es inestable. De esta manera se pueden clasificar los puntos críticos.

5.1.3. Solución de la ecuación $w'(z) = (w - w_1)(w - w_2)$.

La ecuación

$$w'(z) = (w - w_1)(w - w_2) \tag{5.1.6}$$

es una forma particular de la ecuación de Riccati

$$w'(z) = A_0(z) + A_1(z)w + A_2(z)w^2, \tag{5.1.7}$$

ésta ecuación tiene una sola superficie de Riemann, pues no tiene puntos singulares movibles que generen ramas, esto es porque ∞ *no* es un punto crítico, al hacer el cambio de variable $w = \frac{1}{\zeta}$, y simplificar la ecuación 5.1.6, se obtiene

$$\zeta' = -(1 - w_1\zeta)(1 - w_2\zeta) \tag{5.1.8}$$

y cuando ζ tiende a 0, ζ' tiende a -1.

La solución de la ecuación 5.1.8 se puede simplificar usando transformaciones de Möebius.

Para resolver la ED

$$w'(z) = (w - w_1)(w - w_2) \tag{5.1.9}$$

con $w_1 \neq w_2$ se propone el cambio de variable $w(\zeta) = \frac{w_2\zeta - w_1}{\zeta - 1}$ en particular, la transformación envía el 0 del plano ζ a w_1 del plano w y el ∞ del plano ζ a w_2 del plano w y la ecuación se transforma en $\zeta'(z) = (w_1 - w_2)\zeta$.
Esta ecuación es la ecuación lineal que se resolvió en la sección 5.1.2, cuyas soluciones fueron $\zeta = \zeta_0 e^{A(z-z_0)}$ en este caso A es la constante $(w_1 - w_2)$. Por lo tanto se puede afirmar que salvo transformaciones de Möebius, la ecuación de Riccati $w'(z) = (w - w_1)(w - w_2)$ es equivalente a la ecuación lineal $w'(z) = Aw$.

Esto no es una contradicción porque el número de puntos críticos es el mismo y como se verá en las soluciones numéricas, éstas soluciones son equivalentes usando transformaciones de Möebius que trasladen el punto crítico w_2 al infinito.

Para poder argumentar qué tipo de puntos críticos se obtienen, se repite el análisis efectuado en la sección 5.1.2.

5.1.4. Solución de la ecuación $w'(z) = (w - w_0)^2$ cuando $w_1 = w_2$.

Si $w_1 = w_2$, con el cambio de variable $\zeta = w - w_1$ la ED se convierte en $\zeta'(z) = \zeta^2$, y 0 es una raiz doble y por esa razón no tiene transformación de Möebius asociada para expresarla como $\zeta'(z) = (w_1 - w_2)\zeta$, sin embargo, la solución general de la ED es $\zeta(z) = \frac{-1}{z - z_0}$.

Ésta es una transformación de Möebius, que envía ∞ a 0 y z_0 a ∞. Para esta ecuación el ∞ tampoco es un punto crítico pues al hacer un análisis con el cambio de variable $w = \frac{1}{\xi}$ se obtiene que la derivada en $\infty = -1$.

5.1.5. Casos particulares de la ecuación $w' = (w - w_1)(w - w_2)$.

Ecuación $w' = w^2 + 1 = (w - i)(w + i)$.

Para $w' = w^2 + 1 = (w - i)(w + i)$, los dos puntos críticos son i y $-i$, la diferencia de los dos puntos críticos es $2i$, por lo que son centros, i está recorrido en sentido positivo mientras que $-i$ está recorrido en sentido negativo, la solución es $w(z) = \frac{w_2 \zeta_0 e^{2i(z-z_0)} - w_1}{\zeta_0 e^{2i(z-z_0)} - 1}$ y se obtuvo al aplicarle a $\zeta_0 e^{2i(z-z_0)}$ (que es solución de $\zeta' = (w_1 - w_2)\zeta$) la transformación de Möebius $w(\zeta) = \frac{w_2 \zeta - w_1}{\zeta - 1}$.

Ecuación $w' = w^2 - 1 = (w - 1)(w + 1)$.

Para $w' = w^2 - 1 = (w - 1)(w + 1)$, los dos puntos críticos son 1 y -1, su diferencia es 2 por lo que 1 es una fuente y el -1 es un sumidero, la solución se escribe como $w(z) = \frac{w_2 \zeta_0 e^{2(z-z_0)} - w_1}{\zeta_0 e^{2(z-z_0)} - 1}$.

Si restringiésemos estas ecuaciones al campo de los reales, obtendríamos 3 familias de soluciones pero vistas en el campo complejo forman parte de una misma familia, formada por la solución $\zeta(z) = \zeta_0 e^{A(z-z_0)}$ compuesta con la transformación de Möebius $w(\zeta) = \frac{w_2\zeta - w_1}{\zeta - 1}$ o en el caso de raiz doble, es simplemente la transformación de Möebius $w(z) = \frac{-1}{z-z_0}$.

5.1.6. La ecuación $w' = w^3 + aw = w(w - i\sqrt{a})(w + i\sqrt{a})$.

Si se hace el cambio de variable $w = \frac{1}{\zeta}$ y se desarrolla, la ecuación resultante queda $-\frac{\zeta'}{\zeta^2} = \frac{1}{\zeta^3} + \frac{a}{\zeta}, \Longrightarrow \zeta' = \frac{1}{\zeta} + a\zeta$, que corresponde a la ecuación de Joukowski, tiene 4 puntos críticos, el 0, $\pm i\sqrt{a}$ e ∞. Con el cambio de variable se aprecia que 0 e ∞ tienen el mismo tipo de singularidad, mientras que $\pm i\sqrt{a}$ tienen entre sí la misma singularidad. Ambos comportamientos entre los dos conjuntos de puntos críticos se alternan para conseguir que el flujo sea holomorfo.

La solución para la ED se puede escribir como $w(z) = w_0\sqrt{\frac{\exp(2a(z-z_0))}{1-\exp(2a(z-z_0))}}$, ésta ecuación tiene singularidades movibles que corresponden a los 1´s de la ecuación $\exp(2a(z-z_0))$ y puntos de ramificación que corresponden a los puntos donde $\frac{\exp(2a(z-z_0))}{1-\exp(2a(z-z_0))} = \Re e < 0$, todo esto se debe a que la ecuación de Joukowski tiene una superfice de Riemann de doble manto y las ramificaciones se alcanzan en el disco con centro en 0 y que incluye a a.

5.1.7. La ecuación $w' = a\exp(w)$.

La ecuación tiene una singularidad esencial en el ∞ ya que la función exponencial la tiene. Las soluciones a ésta ecuación son: $w(z) = \ln(\frac{1}{-a(z-z_0)})$ con $a \equiv$ cte y tienen puntos singulares logarítmicos movibles

Capítulo 6

Solución numérica de las ecuaciones del capítulo.

6.1. Solución numérica de las ecuaciones del capítulo

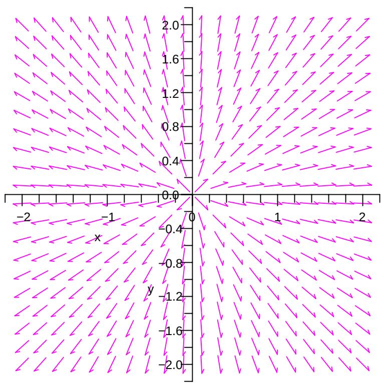
5.1

El análisis numérico se hizo tomando en cuenta que las ecuaciones diferenciales de una variable compleja se pueden escribir en términos de un sistema de ecuaciones de dos variables reales, así, se puede pasar de la ecuación $w'(z) = f(z, w)$ al sistema de ecuaciones $u'(x, y) = h(x, y)$ y $v'(x, y) = g(x, y)$, donde $w = u + iv$ y $z = x + iy$, además para que w sea una función compleja se deben de satisfacer en todo punto las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Para graficar los campos se utilizó Maple.

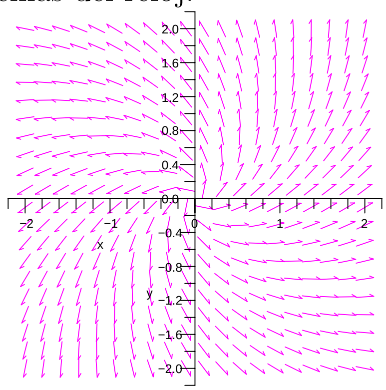
6.1.1. Solución de la ecuación $w' = Aw$ con condiciones iniciales $w(z_0) = w_0$.

Debido a que el número complejo A tiene una representación matricial de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, por lo que la ecuación se resuelve fácilmente como un sistema de dos ecuaciones lineales $u(x, y)$, $v(x, y)$. El único punto crítico es el cero, y se encuentra que las soluciones se pueden escribir de la forma $w(z) = w_0 e^{A(z-z_0)}$, y cumple con las condiciones iniciales $w(z_0) = w_0$.

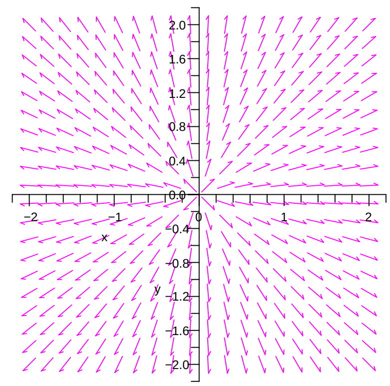
A continuación se grafican las soluciones para valores de A sobre el disco unitario recorrido en contra de las manecillas del reloj.



$A = 1$



$A = \frac{1}{\sqrt{2}} 1 + i$



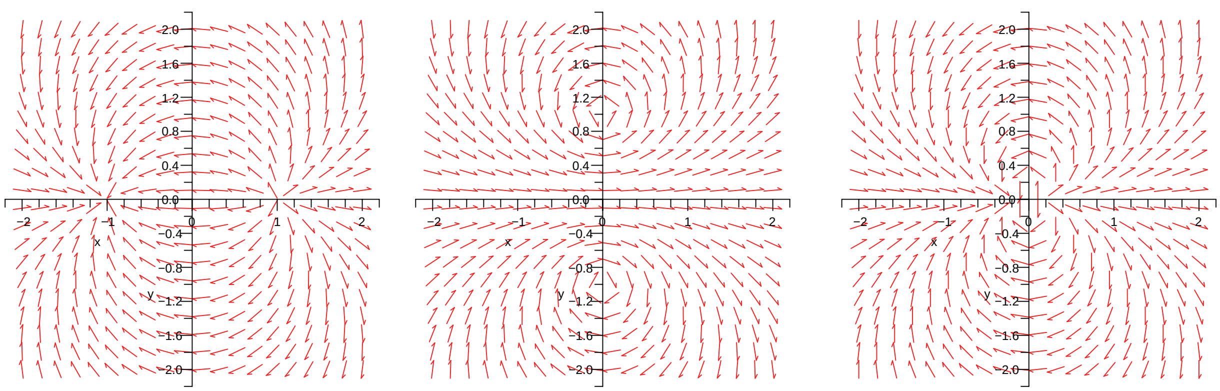
Animación (*pulsa aquí*)

6.1.2. Solución de las ecuaciones $w' = w^2$, $w' = w^2 - 1$ y $w' = w^2 + 1$.

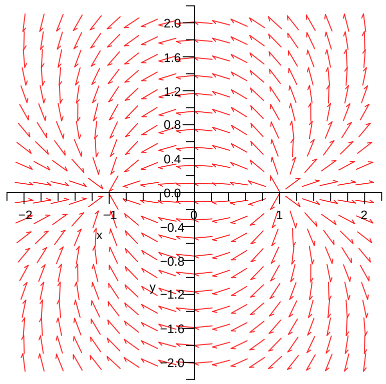
Para la ecuación $w' = w^2$, se grafican las isoclinas nulas y se encuentra que, el único punto crítico es el 0. La solución de ésta ecuación diferencial es $w(z) = \frac{-1}{z-c}$. Cabe resaltar que ésta es una solución, que a diferencia de su par real, tenía como solución a dos funciones reales, una para valores reales positivos y otra para valores negativos, en este caso se aprecia que el origen es un punto que tiene un singularidad y la solución se puede extender de la parte real positiva a la parte real negativa sin romper la continuidad pues es *univaluada*.

Para la ecuación $w' = w^2 - 1$ se grafican las isoclinas nulas y se encuentra que tiene dos puntos críticos 1 y -1, las soluciones de esta ecuación diferencial son $w(z) = \tanh(z + c)$.

Para la ecuación $w' = w^2 + 1$ se grafican las isoclinas nulas y se encuentra que tiene dos puntos críticos i y -i, las soluciones de esta ecuación diferencial son $w(z) = \tan(z + c)$, éstas soluciones corresponden a una familia de funciones y las singularidades que se observan son singularidades móviles.



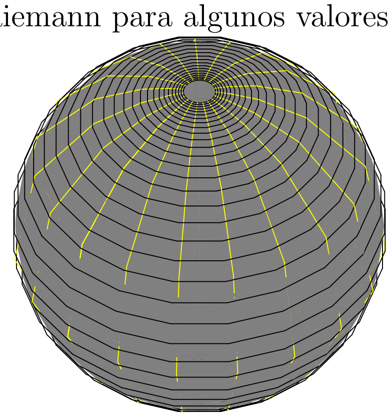
$w' = w^2 - 1$ $\qquad$ $w' = w^2 + 1$ $\qquad$ $w' = w^2$



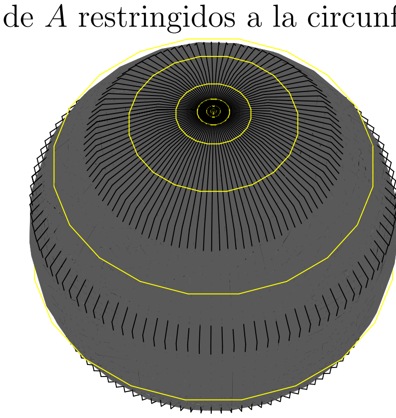
Animación (*pulsa aquí*)

Una misma familia de funciones $w' = (w - w_1)(w - w_2)$**,** $\zeta' = A\zeta$**, y** $w' = w^2 + az + b$.

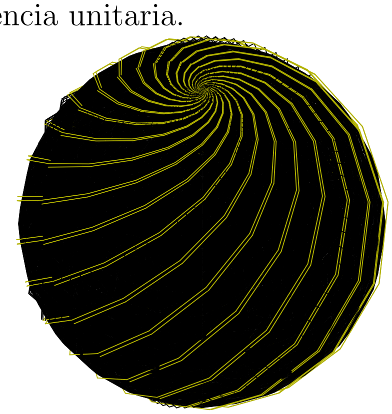
Tomando en cuenta la teoría para estudiar el comportamiento de las soluciones, se estudiaron numéricamente las ecuaciones $\zeta' = \alpha\zeta$ y $w' = w^2$, sobre la esfera de Riemann para algunos valores de A restringidos a la circunferencia unitaria.



$a = 1$



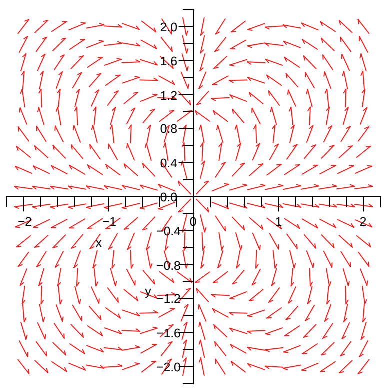
$a = i$



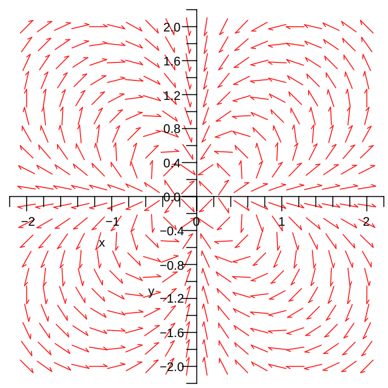
$a = \frac{1}{\sqrt{2}}1 + i$

6.1.3. Solución de las ecuaciones $w' = w^3 + aw$.

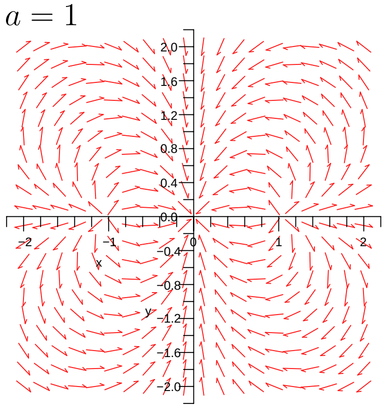
Para resolver numéricamente estas ecuaciones se transformó a un sistema de dos ecuaciones de primer orden no lineales, el parámetro a se varió de dos formas distintas, una para obtener la singularidad de orden 3 y otra para observar como se comportan el par de singularidades distintas de 0 e ∞, (se muestran animaciones).



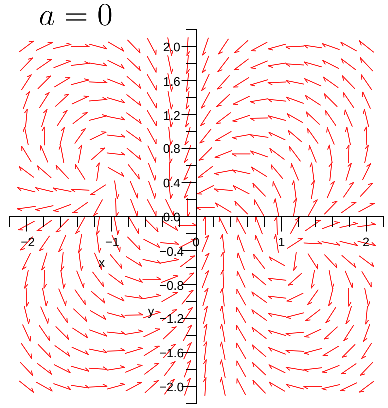
$a = 1$



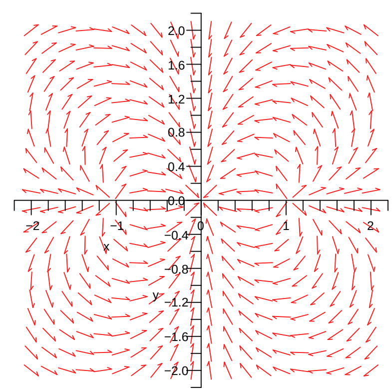
$a = 0$



$a = -1$



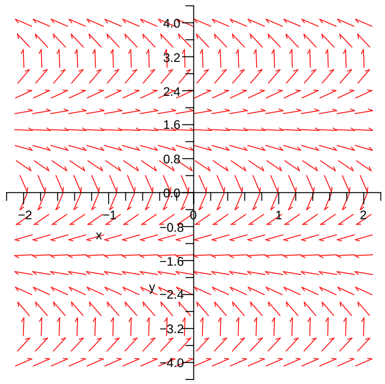
$a = 1 - i$



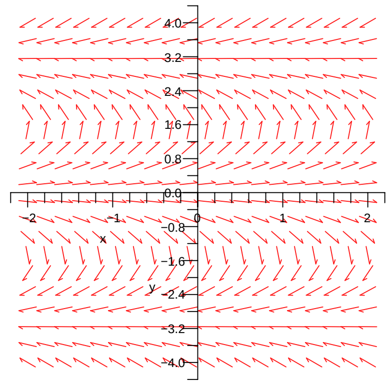
Animación (*pulsa aquí*)

6.1.4. Solución de la ecuación $w' = a \exp(w)$.

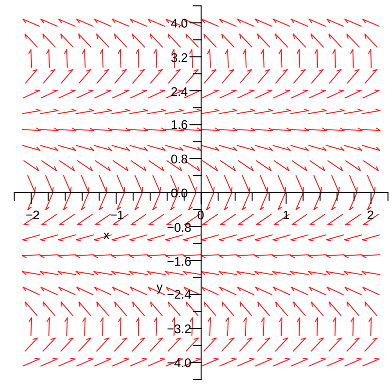
Tomando en cuenta los resultados analíticos, se encontraron las soluciones en términos de un par de ecuaciones no lineales y además se graficaron las curvas solución sobre la esfera de Riemann, ésto permitió observar que las bandas que se obtuvieron en el plano, al momento de variar el parámetro a, se van recorriendo en dirección $-i$.



$a = 1$



$a = \frac{1}{\sqrt{2}}1 + i$



Animación (*pulsa aquí*)

Capítulo 7

Conclusiones.

Se clasifican los tipos de singularidades de las ecuaciones diferenciales $w' = \frac{P}{Q}$, con P, Q polinomios en w con coeficientes funciones algebraicas en dos tipos:

1. Las de la ecuación diferencial llamadas singularidades fijas y
2. las de las soluciones de la ecuación diferencial llamadas singularidades móviles.

Se demuestra que si la ecuación diferencial no posee soluciones meromorfas en $\hat{C}$ entonces la ecuación es de Riccati. También se demuestra que la ecuación de Riccati es invariante bajo transformaciones de Möebius de la variable dependiente.

Se afirma que las ED $w' = Aw$ ($A \equiv cte$) y $w' = (w - w_1)(w - w_2)$ son equivalentes bajo transformaciones de Möebius. Los resultados teóricos están en concordancia con los resultados numéricos obtenidos, además solo existen dos puntos críticos.

Con ayuda de los cálculos numéricos, se detectó que la ecuación diferencial $w' = w^3 + aw$ ($a \neq 0$, $a \equiv cte$) debe de presentar 4 puntos críticos. Los puntos críticos 0 e

∞ tienen el mismo tipo de singularidad (fuentes), y los puntos $\pm\sqrt{a}$ tienen otro tipo de singularidad (sumideros). Esto es debido a que el flujo debe ser holomorfo.

La singularidad que se presenta en la ED $w' = a\exp(w)$ se interpreta como una singularidad esencial en el infinito, la solución $w(z) = \ln(\frac{1}{-a(z-z_0)})$ con $a \equiv$ cte, tiene ramas logarítmicas que, *cubren* en bandas toda la esfera. Visto desde el ∞ la superficie de Riemann asociada tiene una infinidad de hojas en el infinito.

Bibliografía

[1] Einar Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, John Wley & Sons, Inc. 1979*

[2] Edward L. Ince, *Ordinary Differential Equations, Dover Publishing 1944.*

[3] Frank Loray, *Sur le Théorèmes I e II de Painlevé, Contemporary Mathematics 389 (2005) p. 165-190. Volume en l'honneur d'Alberto Verjovsky.*

[4] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 60. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004.*

[5] Ivan Pan, Marcos Sebastiani *Sur les équations différentielles algébriques admettant des solutions avec une singularité essentielle. Annales de l'institut Fourier, 51 no. 6 (2001), p. 1621-1633*

[6] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis, 3a ed. McGraw-Hill Science/Engineering/Math 1979*

[7] Garrett Birkhoff, Gian-Carlo Rota, *Ordinary Differential Equations, 2d ed. Waltham, Mass. : Blaisdell, 1969.*

[8] Coddington Earl, *Theory of Ordinary Differential Equations, Krieger Publishing Company, 1984*

[9] Hale, Koąk, *Dynamics and Bifurcations, Springer Verlag, 1991.*