UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES ERGÓDICAS DE LAS TRANSFORMACIONES DE MARKOV Y GRUPOS FUCHSIANOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

SOFÍA TREJO ABAD

DIRECTOR DE TESIS: DR. GERMÁN AUBÍN ARROYO CAMACHO

2008

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autonoma de Mexico Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta	1. Datos del alumno Trejo Abad Sofía 56 06 46 19 Universidad Nacional Autonoma de Mexico Facultad de Ciencias Matemáticas 301502991
2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	2. Datos del tutor Dr. Germán Aubín Arroyo Camacho
3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	3. Datos del sinodal 1 Dr. José Antonio Seade Kuri
4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	4. Datos del sinodal 2 Dr. Guillermo Sienra Loera
5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	5. Datos del sinodal 3 Dr. Adolfo Guillot Santiago
6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	6. Datos del sinodal 4 Dr. Antonio Lascurain Orive
7.Datos del trabajo escrito. Título Número de páginas Año	7. Datos del trabajo escrito Propiedades ergódicas de las transformaciones de Markov y grupos fuchsianos 81 p. 2008

A mis padres.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo del estudio de la *dinámica* es describir la evolución a largo plazo de sistemas para los cuales se conoce una regla de evolución infinitesimal. Ejemplos y aplicaciones de este tipo de sistemas aparecen en varias ramas de la ciencia. Los sistemas dinámicos han sido utilizados por la biología para comprender la propagación de enfermedades infecciosas; por la ecología para entender la interacción depredador-presa; por la física para intentar solucionar el problema de los n-cuerpos y por otras ramas del conocimiento como los son la química, la economía y la meteorología.

A grandes rasgos, un sistema dinámico está compuesto por dos elementos. El primero de ellos es el *espacio fase*, los puntos de este espacio representan posibles estados del sistema. El segundo elemento importante cuando hablamos de sistemas dinámicos es el *tiempo*. El tiempo en un sistema dinámico está dado por la acción de un grupo sobre el espacio sobre el cual está definido el sistema. Dependiendo de qué grupo se utilize para definir el sistema dinámico este puede ser continuo, como cuando el grupo es $\mathbb{R}$; o puede ser discreto, como cuando es grupo con el que se trabaja es $\mathbb{Z}$. Cuando el tiempo es discreto la acción del grupo está definida de la siguiente manera: dada una transformación $f : X \to X$ invertible, definimos la acción $\phi : \mathbb{Z} \times X \to X$ como $\phi(n, x) = f^n(x)$. Considerando todos los posibles estados de un punto $x \in X$ obtenemos el conjunto $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ llamado la órbita del punto x. En caso que la transformación f no sea invertible el tiempo está dado por la acción del semigrupo $\mathbb{N}$.

El análisis de un sistema dinámico consiste en describir el comportamiento asintótico de las órbitas, por ejemplo, saber si existen puntos fijos, órbitas finitas e incluso órbitas densas. Una forma de saber cuál es la dinámica de un sistema es compararla con la de otro sistema que ya conocemos, mediante la conjugación. Dadas $g : X \to X$ y $f : X' \to X'$ dos funciones y X, X' un espacios topológicos diremos que los dos sistemas son conjugados si existe un homomorfismo $h : X \to X'$ tal que $g = h^{-1} \circ f \circ h$. La relación de conjugación es una relación de equivalencia donde elementos en la misma clase comparten propiedades cualitativas. Por ejemplo, los puntos fijos de un sistema están en correspondencia biunívoca con los puntos fijos del otro, así como las órbitas periódicas de cada periodo. También, si uno de los sistemas tiene órbitas periódicas densas el segundo también las tendrá, etcétera.

1.0.1. Dinámica simbólica y transformaciones de Markov

Los sistemas dinámicos simbólicos son sistemas donde la dinámica es bien conocida. Dado $N \in \mathbb{N}$ consideremos $\Omega_N = \{0, \dots N-1\}^{\mathbb{N}}$ el espacio de N símbolos. Los sistemas dinámicos simbólicos están definidos sobre subespacios cerrados e invariantes de Ω_N bajo la transformación *shift* o *corrimieto unilateral*. La aplicación del corrimiento unilateral a una sucesión consiste en borrar el primer término de la sucesión y recorrer todos los demás. Por lo tanto, dada una sucesión cualquiera se sabe perfectamente cuál será su imagen bajo el corrimiento; esto quiere decir que cada sucesión contiene su propia evolución.

Cada sistema dinámico simbólico tiene asociada una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $N \times N$ donde se encuentra codificada su dinámica. La forma de construir dicha matriz es la siguiente: dados $1 \leqslant i, j \leqslant N$ la entrada a_{ij} es igual a uno si en el subespacio sobre el cual se trabaja se permiten sucesiones donde i aparece inmediatemente antes que j; y la entrada a_{ij} es igual a cero si en el subespacio no se permiten sucesiones donde i preceda inmediatamente a j. Entonces, la matriz asociada a cada sistema dinámico simbólico nos dice las posibles sucesiones de N símbolos que existen en el subespacio sobre el cuál se está trabajando.

Veamos cómo se puede asociar un sistema dinámico simbólico a un sistema dinámico discreto. Sea $I = [0, 1]$ e $I_1, \dots, I_N$ una partición finita del intervalo I. Consideremos $f : I \to I$ una transformación con la siguiente propiedad:
($\star$) Para cualquier par de índices $1 \leqslant i, j \leqslant N$ tales que $f(I_j) \cap I_k \neq \emptyset$, se tiene que $I_k \subset f(I_j)$.

La propiedad ($\star$) sobre las imágenes de los intervalos nos permite construir una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $N \times N$ de forma similar a como se hace para sistemas dinámicos simbólicos. Dados $1 \leqslant i, j \leqslant N$ la entrada a_{ij} es igual a uno si la imagen del intervalo i contiene al intervalo j; y a_{ij} es igual a cero si la imagen del intervalo i no contiene al intervalo j. Esta matriz nos indica cuales son los posibles itinerarios de los puntos del sistema con base de las regiones en el espacio, o elementos de la partición, y nos da las sucesiones de N símbolos admisibles en el sistema. Finalmente, para saber si el sistema dinámico simbólico correspondiente al subespacio de sucesiones asociado a la transformación f tiene la misma dinámica que el sistema original, es necesario encontrar una conjugación entre f y el corrimiento unilateral. Es importante denotar que para dar la conjugación la transformación f debe cumplir ciertas condiciones de expansión y suavidad, como veremos en la Proposición 6; no es suficiente con que f actúe bien en la partición. La construcción anterior es el espíritu de las transformaciones de Markov, ya que cada una de estas transformaciones tiene asociada una partición finita o numerable que satisface ($\star$). Entonces, a cada transformación de Markov se le puede asociar una matriz, quizás infinita, que codifique su dinámica.

1.0.2. Teoría ergódica

Ahora bien, para analizar un sistema dinámico desde el punto de vista de la Teoría de la Medida debemos utilizar *Teoría Ergódica*. En la Teoría Ergódica se trabaja con espacios de probabilidad, transformaciones medibles y medidas invariantes. Dada una transformación medible f, diremos que una medida μ es invariante bajo f (o f-invariante) si para todo conjunto medible B se tiene que $\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$. Trabajar con transformaciones medibles es de alguna manera análogo a trabajar con funciones continuas en espacios topológicos, y bajo esta analogía las medidas invariantes son el equivalente a los conjuntos invariantes ($f^{-1}(A) = A$).

Una propiedad importante de las medidas f-invariantes es que forman un conjunto convexo dentro del espacio de medidas de probabilidad, a este convexo lo denotaremos por $\mathcal{M}_f$; una demostración de este hecho se pueden encontrar en el libro ([7], p. 134). Ahora veamos algunos ejemplos: la medida de Lebesque en $\mathbb{R}$ es invariante bajo traslaciones. La medida inducida por la métrica hiperbólica en el disco de Poincaré es invariante bajo cualquier transformación de Möbius, ya que las transformaciones de Möbius son isometrías del plano hiperbólico. La medida soportada en un punto fijo p de una transformación f, denotada por δ_p, es invariante bajo f. Recordemos que δ_p está definida de la siguiente manera: dado B un conjunto $\delta_p(B) = 0$ si $p \notin B$ y $\delta_p(B) = 1$ si $p \in B$.

La existencia de medidas invariantes tiene varias consecuencias, una de las más conocidas es el *Teorema de Recurrencia de Poincaré*. Este teorema nos garantiza que si μ un medida de probabilidad es f-invariante, entonces μ-casi todos los puntos son recurrentes. En otras palabras, para todo conjunto de medida positiva los puntos cuyos iterados que regresan a él sólo una cantidad finita de veces es un conjunto de medida cero; así que, los puntos que regresan a él una infinidad de veces tienen medida total. Es importante recalcar que μ-casi todo punto depende de la medida. Por ejemplo, si $\mu = \delta_p$ decir que μ-casi todo punto es recurrente no nos dice nada sobre la dinámica de la transformación, sólo que el punto p regresa infinitas veces a cualquier abierto que lo contenga, que es un resultado trivial ya que p es un punto fijo. Si queremos que una medida corresponda con la manera en que estamos acostumbrados a medir debemos buscar medidas parecidas a la *medida de Lebesgue*, que denotaremos por λ. Recordemos que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es la medida que a cada intervalo $[a, b]$ le asocia su longitud ($\lambda([a, b]) = b - a$); la medida de Lebesque en $\mathbb{R}^2$ es la medida que a un rectángulo le asocia su área (base por altura). Las medidas parecidas a la medida de Lebesgue son denominadas medidas *absolutamente contínuas* respecto a la medida de Lebesgue y están caracterizadas por la siguiente propiedad: Si μ es una medida absolutamente continua respecto a λ, entonces $\mu(A) = 0$ para algún conjunto medible A sólo si $\lambda(A) = 0$. La existencia de medidas invariantes absolutamente contínuas respecto a la medida de Lebesgue nos permite concluir más cosas sobre la dinámica de una transformación. Por ejemplo, el teorema de Recurrencia de Poincaré aplicado a una transformación en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, que tiene un medida invariante absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, implica que la transformación es transitiva, es decir, tiene órbitas densas.

Un tipo particular de medidas invariantes son las denominadas *medidas ergódicas*. Una medida es ergódica respecto a una transformación f si todos los conjuntos invariantes bajo f tienen medida cero o medida uno. Además, las medidas ergódicas bajo una transformación f son los puntos extremales de $\mathcal{M}_f$. Esto quiere decir que las medidas ergódicas son las únicas medidas invariantes que no se pueden expresar como combinación convexa de otras medidas invariantes. Las medidas ergódicas son entonces, medidas indescomponibles y fungen como los átomos para comprender la dinámica de la transformación. Veamos algunos ejemplos: si p es punto fijo de una transformación f, la medida δ_p es ergódica. La medida de Lebesgue es ergódica bajo cualquier rotación de ángulo irracional en el círculo unitario. Una demostración de este hecho se puede encontrar en ([3], p.77).

1.0.3. Acción de grupos fuchsianos

Continuaremos esta introducción con el tema central de la tesis: la dinámica de grupos fuchsianos. Los grupos fuchsianos son subgrupos de *Transformaciónes de Möbius* que actuán en el plano hiperbólico.

Si queremos conocer el comportamiento asintótico de las órbitas bajo al acción de un grupo fuchsiano debemos estudiar su *conjunto límite*, formado por los puntos de acumulación de las órbitas. El conjunto límite de los grupos fuchsianos está contenido en la frontera del plano hiperbólico; y dependiendo su distribución, un grupo fuchsiano puede ser del *primer tipo*, si su conjunto límite es denso en el círculo unitario; o del *segundo tipo* si no.

Para analizar la dinámica de un grupo fuchsiano se utilizan regiones del plano hiperbólico conocidas como dominios fundamentales. Los dominios fundamentales contienen un representante de la órbita de cada punto; así que al aplicar las transformaciones del grupo a estas regiones podremos llenar el plano con la misma figura. Ejemplos de este tipo de regiones y de cómo llenan el plano se pueden apreciar en una serie de cuadros del pintor holandés M.C. Escher titulada *Cíclo límite*. Una vez que se ha llenado o teselado el plano hiperbólico con imágenes de un dominio fundamental podemos entender la acción del grupo fuchsiano en el plano hiperbólico. Cada elemento de la teselación representa una palabra finita compuesta por las distintas transformaciones del grupo; aplicar elementos del grupo puede extender la longitud de las palabras; de hecho, la longitud de las palabras asociadas a elementos de la teselación tiende a infinito cuando las imágenes del dominio fundamental se aproximan a la frontera del plano hiperbólico. Nosotros estudiaremos la acción en el conjunto límite de grupos fuchsianos del primer tipo que son finitamente generados. En este caso, la dinámica inducida por un grupo en el conjunto límite será equivalente a la inducida por una única transformación f, sobre el mismo conjunto. Construiremos la transformación f a partir de un polígono fundamental convexo y las geodésicas que contienen a sus lados. Una vez construida, probaremos la existencia de $K \subset S^1$, no necesariamente propio, tal que $f \mid_K$ es una transformación de Markov. Esto no sólo nos permitirá codificar la dinámica en el conjunto límite, sino encontrar una medida ergódica y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue que es invariante bajo f o bajo su primer retorno al conjunto K. Es el estudio de la acción de un grupo fuchsiano en su conjunto límite donde podremos unir conceptos que, al menos a mi no me parecían relacionados; para este análisis utilizaremos de manera conjunta transformaciones de Markov, dinámica simbólica y Teoría Ergódica.

Este trabajo tiene tres resultados principales, el primero de ellos es la prueba de la existencia de un única medida ergódica, absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue para transformaciones de Markov (Teorema 6), y el capítulo 1 de la tesis está enteramente dedicado a la demostración de este teorema. La primera sección presenta los resultados y definiciones de Teoría Ergódica que se utilizaran en el trabajo. La sección 2 está dedicada a las transformaciones de Markov y sus principales propiedades. Finalmente, en la sección 3 seguiremos la demostración que aparece en ([4], pp.355-360), escrito por Welington de Melo y Sebastian van Strien, para probar el Teorema 6; demostración en la cual se utilizarán conjuntamente los resultados de Teoría Ergódica y transformaciones de Markov. En esta prueba existen dos conceptos importantes: el Teorema de Radon-Nikodyn y la distorsión acotada de las transformaciones de Markov; esto se debe a que construiremos una medida invariante a partir de otras medidas utilizando sus densidades, y una vez hallada la medida invariante probaremos que es ergódica utilizando que las transformaciones de Markov tienen distorsión acotada.

El segundo capítulo seguiremos el artículo [2], de Rufus Bowen y Caroline Series, para construir una transformación en el círculo unitario cuya dinámica sea equivalente a la de un grupo fuchsiano del primer tipo finitamente generado. Para la construcción será necesario conocer las principles características de los grupo fuchsianos así como de los polígonos fundamentales convexos; definiciones y propiedades enunciadas en el primera sección del capítulo 2. La segunda sección está basada en construir una transformación f que tenga una dinámica equivalente a la del grupo fuchsiano en la frontera del plano hiperbólico. Para entender la combinatoria de la transformación f, será de suma importancia comprender ciclos de vértices y transformaciones de apareamiento de lados, ya que la transformación f es construida por pedazos con ayuda de estas dos herramientas. Demostrar la equivalencia orbital entre el grupo y la transformación f no es complicado, sin embargo la prueba está llena de detalles técnicos con los cuales se debe tener sumo cuidado.

La sección tres del capítulo 2 estudia las distintas propiedades que cumplen f y su primer retorno, dependiendo de la forma que tenga el polígono fundamental para el grupo fuchsiano que se está considerando. La necesidad de dividir el análisis en dos casos se debe a que cuando el polígono fundamental no tiene vértices parabólicos la cantidad de elementos de la teselación que pasan por los vértices siempre es finita; sin embargo, cuando el polígono fundamental tiene vértices parabólicos la cantidad de elementos de la teselación que pasan por dichos vértices es infinita; por lo tanto, acotar la distorsión en estas regiones realiza de manera distinta. De hecho, sólo se podrá garantizar en un subconjunto del disco unitario y no en toda la frontera; esto nos llevará a considerar el primer retorno de f sobre determinado subconjunto $K \subset S^1$.

Finalmente, el la sección cuatro está dedicada a demostrar que f y su primer retorno son transformaciones de Markov. Por lo tanto, cumplen el Teorema 6 y tienen una única medida ergódica absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. Esta última sección es sumamente técnica ya que debemos probar que f cumple la definición de transformación de Markov a partir de las propiedades que se demostraron en la sección 3.

Capítulo 2

Transformaciones de Markov

Este capítulo probaremos la existencia de medidas ergódicas y absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue para transformaciones de Markov (Teorema 6); para ello utilizaremos resultados de Teoría de la Medida y Teoría Ergódica, basados principalmente en el el libro de Mañe [7], los cuales serán presentados en la primera sección de este capítulo. Después introduciremos la definición de transformación de Markov así como sus propiedades principales para finalmente demostrar el Teorema 6.

2.1. Teoría ergódica

Comenzaremos este capítulo presentando las definiciones y los teoremas, relacionados con Teoría de la Medida, que serán utilizados posteriormente en el trabajo. Para ello consideremos $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible; es decir un conjunto X y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X.

Si μ y ν son dos medidas en $(X, \mathcal{A})$ diremos μ es *absolutamente continua* respecto ν, denotado por $\mu \ll \nu$, si para todo conjunto medible A tal que $\nu(A) = 0$, se tiene que $\mu(A) = 0$. Si además ocurre que $\nu \ll \mu$ diremos que μ y ν son equivalentes. Agregando una hipótesis más sobre la medida ν es posible dar una mejor caracterización de las medidas absolutamente continuas, esta caracterización es conocida como el Teorema de *Radon-Nikodin* y dice lo siguiente:

Teorema 1. *Sean μ y ν dos medidas sobre $(X, \mathcal{A})$. Si ν es una medida σ-finita entonces $\mu \ll \nu$ sí y sólo sí existe $f : X \to \mathbb{R}$ una función ν-integrable sobre todo conjunto $A \in \mathcal{A}$ con $\nu(A) < \infty$ tal que para todo $A \in \mathcal{A}$:*

$$\mu(A) = \int_A f d\mu.$$

La función f es única, esto quiere decir que cualquier otra función con las mismas propiedades es igual a f, μ casi donde quiera.

La función f es llamada la *densidad* de μ respecto a ν y la denotaremos por $d\mu/d\nu$.

Cuando el espacio X es la recta real, $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra de Borel y λ es *medida de Lebesgue* se tiene lo siguiente:

Teorema 2. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto de medida positiva entonces:*

i) Para λ casi todo punto $x \in A$ se tiene que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon))}{2\varepsilon} = 1 \tag{2.1}$$

ii) Si existe un conjunto medible B tal que $A \subset B \subset \mathbb{R}$ y λ casi todo punto $x \in B$ cumple que:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda(A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon))}{2\varepsilon} > 0$$

entonces A tiene medida de Lebesque total en B.

Los puntos en un conjunto medible A, de medida positiva, que cumplen la ecuación (2.1) de Teorema 2 son llamados *puntos de densidad* de A.

Los Teoremas 1 y 2 son los únicos resultados sobre Teoría de la Medida que utilizaremos en el trabajo. Ahora analizaremos el conjunto de medidas de probabilidad sobre espacios métricos compactos. Para ello consideremos (X, d) un espacio métrico compacto, denotemos por β a la σ-álgebra de Borel generada por la métrica d. Sea $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de todas las probabilidades sobre los borelianos en X y consideremos τ al topología en $\mathcal{M}(X)$ generada por las vecindades:

$$V_{(f,\varepsilon)}(\mu) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}(X) : \left| \int f d\nu - \int f d\mu \right| \leqslant \varepsilon \right\} \tag{2.2}$$

donde $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $f \in C_0(X)$ y $\varepsilon \geqslant 0$. Con esta topología el espacio $\mathcal{M}(X)$ es compacto (Teorema 4). Para demostrarlo utilizaremos $C_0(X)$, el espacio de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ y $(C_0^*(X), \omega^*)$, el espacio dual de $C_0(X)$ dotado con la topología ω^*, o topología débil estrella. Una vez definidos estos espacios podemos enunciar el teorema siguiente:

Teorema 3. *Sea $\rho \in C_0^*(X)$ tal que $\rho(1) = 1$ y $\rho(f) \geqslant 0$ para toda función positiva $f \in C_0$ entonces existe una única medida $\mu_\rho \in \mathcal{M}(X)$ tal que para toda función $f \in C_0$ se cumple que:*

$$\rho(f) = \int f d\mu_\rho.$$

El Teorema anterior es una consecuencia del Lema de Riez (para una demostración vea [9]) y forma parte fundamental de la demostración del siguiente teorema.

Teorema 4. *El conjunto $\mathcal{M}(X)$ es τ-compacto.*

Demostración. Sea W el conjunto formado por todas transformaciones $\rho \in C_0^*(X)$ tales que $\rho(1) = 1$ y $\rho(f) \geqslant 0$, para toda función positiva $f \in C_0(X)$. Consideremos la función

$$\phi : \mathrm{W} \to \mathcal{M}(X)$$

$$\phi(\rho) = \mu_\rho,$$

donde μ_ρ es la medida asignada a ρ por el Teorema 3. Observemos que la función ϕ está bien definida ya que μ_ρ es única. Ahora demostraremos que W es un conjunto cerrado y que ϕ es una función continua y suprayectiva; ya que si esto ocurre $\mathcal{M}(X)$, la imagen directa de W bajo ϕ, seria un conjunto compacto.

Veamos que ϕ es suprayectiva. Para ello elijamos una medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$ arbitraria y consideremos la función $\rho : C_0(X) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\rho(f) = \int f d\mu,$$

para cada función $f \in C_0(X)$. Por definición, $\rho \in C_0^*(X)$ y cumple las siguientes propiedades:

1. $\rho(f) \geqslant 0$ para toda transformación positiva $f \in C_0(X)$;
2. $\rho(1) = \int 1 d\mu = \mu(X) = 1$ ya que $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

Por lo tanto, $\rho \in W$ y ϕ es suprayectiva.

Ahora veamos que W es cerrado. Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión convergente de elementos en W, entonces existe $\rho \in C_0^*(X)$ tal que:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n.$$

Por definición la topología ω^* hace continuas a todas las evaluaciones de elementos en $C_0^*(X)$, esto quiere decir que para cada función $f \in C_0(X)$ tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} |\rho_n(f) - \rho(f)| = 0. \tag{2.3}$$

Sabemos que $\rho_n \in W$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así que la ecuación (2.3) nos dice que $\rho(f) \geqslant 0$ para toda función $f \in C_0(X)$ positiva y que $\rho(1) = 1$. Entonces, $\rho \in W$ y W es un cerrado.

Ahora veamos que $\phi : W \to \mathcal{M}(X)$ es continua. Para ello consideremos una sucesión convergente $\{\rho_n\}$ de elementos en W; como W es cerrado existe $\rho \in W$

tal que $\rho_n \to \rho$. Sean $\mu_n = \phi(\rho_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\phi(\rho) = \mu$ y $f \in C_0(X)$. Por la ecuación (2.3) tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int f d\mu_n - \int f d\mu \right| = \lim_{n\to\infty} |\rho_n(f) - \rho(f)| = 0.$$

Este límite es válido para cualquier función $f \in C_0(X)$, así que $\mu_n \to \mu$. Por definición, esto implica que $\phi(\rho_n) \to \phi(\rho)$. Por lo tanto ϕ es continua.

Sólo falta probar que W es compacto. Para ello, calculemos la norma un operador $\rho \in W$:

$$\| \rho \| = sup \, \{ | \rho(f) | : f \in C_0(X) \text{ y } \| f \|_\infty = 1 \}.$$

Sean $\phi(\rho) = \mu$ y $f \in C_0(X)$ tal que $\| f \|_\infty = 1$, entonces:

$$| \rho(f) | = \left| \int f d\mu \right| \leqslant \int | f | d\mu \leqslant \int 1 d\mu = \rho(1) = 1.$$

Por lo tanto $\| \rho \| \leqslant 1$; esto quiere decir que W está contenido en el conjunto:

$$S = \{ \rho \in C_0^*(X) : \|\rho\| \leqslant 1 \}.$$

El Teorema de Alaoglu ([10], p.66) nos garantiza que S es ω^* compacto; así que W es un cerrado contenido en un compacto, W es compacto. En conclusión, $\mathcal{M}(X)$ es la imagen bajo una función continua de un conjunto compacto. Por lo tanto, $\mathcal{M}(X)$ es compacto.

□

El Teorema 4 será utilizado posteriormente en el trabajo para encontrar medidas invariantes, definidas de la siguiente manera:

Definición 1. *Sea X un espacio topológico y $T : X \to X$ una función medible. Diremos que μ una medida de X* es una medida T-invariante *si para todo conjunto medible A se tiene que:*

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$

La existencia de μ una medida T-invariante nos dice que un conjunto A no puede ser la imagen bajo la transformación T de conjuntos más grandes o más pequeños, respecto a μ; esto quiere decir que la transformación T preserva la medida μ. Un ejemplo sencillo de la existencia de este tipo de medidas es el siguiente: sea $X = S^1$ y $T_\alpha : X \to X$ la rotación de ángulo α. Entonces, la medida de Lebesque es T_α- invariante.

Dados un espacio topológico X y una función T no siempre es posible encontrar una medida invariante. A continuación demostraremos que el conjunto de medidas T- invariantes, denotado por $\mathcal{M}_T(X)$, es no vacío si X es un espacio métrico compacto y T es una función continua. Para encontrar medidas T-invariantes utilizaremos la siguiente transformación: dada $T\colon X \to X$ una función continua definimos $T^*\colon \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ como:

$$T^*(\mu(B)) = \mu(T^{-1}(B))$$

para una medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$ y para todo boreliano $B \in \beta$.

Lema 1. *La transformación T^* es continua respecto a la topología definida por (2.2).*

Demostración. Consideremos la topología de $\mathcal{M}(X)$ como la generada por las vecindades definidas en (2.2). Sea $\mu \in \mathcal{M}(X)$ fija y $V_{(f,\varepsilon)}(T^*(\mu))$ una vecindad de $T^*(\mu)$. Por hipótesis T es continua, por lo tanto $f \circ T$ también lo es. Entonces, podemos considerar la vecindad $V_{(f\circ T,\varepsilon)}(\mu)$. Recordemos que si $\nu \in V_{(f\circ T,\varepsilon)}(\mu)$,

$$\left| \int f \circ T d\nu - \int f \circ T d\mu \right| \leqslant \varepsilon.$$

Aplicando el Teorema de Cambio de Variable se tiene que:

$$\left| \int f \ dT^*(\nu) - \int f \ d\ T^*(\mu) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Por lo tanto T^* es continua. □

Una vez probado el lema demostremos la siguiente proposición:

Proposición 1. *Sean X un espacio métrico compacto y $T : X \to X$ una función continua. Entonces, $\mathcal{M}_T(X)$ es no vacío.*

Demostración. X es un espacio métrico compacto así que $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$. Elijamos una medida $\mu_0 \in \mathcal{M}(X)$ y definamos la siguiente sucesión de medidas: para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} T^{*m}(\mu_0).$$

Por definición de T^* tenemos que para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T^*(\mu_{n_j}) = {} & \frac{1}{n_j+1} \sum_{m=0}^{n_j} T^{*m+1}(\mu_0) = \\ = {} & \frac{1}{n_j+1} \sum_{m=0}^{n} T^{*m}(\mu_0) - \frac{1}{n_j+1}\mu_0 + \frac{1}{n_j+1} T^{*n_j+1}(\mu_0) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Observemos que los dos últimos términos de (2.4) tienden a cero cuando j tiende a infinito, debido a que μ_0 es una medida de probabilidad.

Por último, el Teorema 4 nos dice que $\mathcal{M}(X)$ es compacto entonces la sucesión $\{\mu_n\}$ contiene una subsucesión convergente $\{\mu_{n_j}\}$. Sea μ es el limite de $\{\mu_{n_j}\}$, entonces:

$$T^*(\mu) = \lim_{j\to\infty} T^*(\mu_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} T^{*m}(\mu_0) = \lim_{j\to\infty} \mu_{n_j} = \mu.$$

Por lo tanto, μ es una medida T-invariante y $\mathcal{M}_T(X)$ es distinto del vacío. □

Ahora veamos algunas propiedades de las medidas invariantes.

Teorema 5. *Sea μ una medida de probabilidad y $T : X \to X$ una función medible. Si μ es T-invariante entonces:*

i) Para toda función $f \in \mathcal{L}_1(X)$ el limite:

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$$

existe μ-casi todo punto $x \in X$;

ii) $\widetilde{f}(T(x)) = \widetilde{f}(x)$ μ-casi todo punto $x \in X$;

iii) $\displaystyle\int_X \widetilde{f} d\mu = \int_X f d\mu$.

Este teorema es llamado el *Teorema Ergódico de Birkhoff*. Es posible dar una generalización de el teorema anterior considerando funciones en $\mathcal{L}_p(X)$ con $1 \leqslant p < \infty$, como se ve en ([7], p.115). Por otro lado, es posible reescribir el inciso *iii*) del Teorema 5 cuando la medida μ es ergódica.

Definición 2. *Sea X un espacio topológico y $T : X \to X$ una función medible. Diremos que una medida T-invariante μ es* ergódica *si para todo conjunto medible A tal que $T^{-1}(A) = A$ se tiene que $\mu(A) = 1$ o $\mu(X\backslash A) = 0$.*

Una vez definidas las medidas ergódicas, el inciso *iii*) del Teorema 5 se reescribe de la siguiente manera:

Corolario 1. *Sea μ una medida ergódica y $f \in \mathcal{L}_1(X)$ entonces:*

$$\widetilde{f} = \int_X f d\mu.$$

Veamos que otras propiedades cumplen las medidas ergódicas dentro del espacio de las medidas invariantes.

Proposición 2. *Sea $T : X \to X$ una función medible, μ una medida ergódica y $\mu_1 \in \mathcal{M}(X)$ una medida T-invariante. Entonces son equivalentes:*

i) $\mu_1 \neq \mu$.

ii) μ_1 *no es absolutamente continua respecto a* μ.

iii) Existe A un conjunto medible y T-invariante tal que $\mu(A) = 0$ y $\mu_1(A) \neq 0$.

La demostración del resultado anterior se puede encontrar en ([7], p.133). Por último, veamos una caracterización de las medidas ergódicas.

Proposición 3. *Sea T una transformación medible. Entonces, μ es una medida ergódica respecto a T si y sólo si para cualquier par de conjuntos medibles A y B se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mu(T^{-m}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Observemos que si el limite $\mu(T^{-m}(A) \cap B)$ existe cuando m tiende a infinito coincide con $\mu(A)\mu(B)$.

En muchos casos probar la ergodicidad directamente no es sencillo, de hecho en este trabajo la ergodicidad será probada a través de otro tipo de medidas denominadas medidas exactas.

Definición 3. *Sea $T : X \to X$ una transformación medible. Diremos que una medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$ es* exacta *si no existen conjuntos medibles $A, A_1 \ldots$ tales que $0 < \mu(A) < 1$ y $A = T^{-n}(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Ser exacto es mucho más fuerte que ser ergódico de hecho es sencillo demostrar que cualquier medida exacta es también ergódica.

Proposición 4. *Sea μ una medida exacta entonces μ es ergódica.*

Demostración. Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio de medida, $T : X \to X$ una transformación medible y μ una medida exacta. Sea A un conjunto medible tal que $T^{-1}(A) = A$, entonces $T^{-n}(A) = A$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como μ es exacta no existen conjuntos medibles $A, A_1 \ldots$ tales que $0 < \mu(A) < 1$ y $A = T^{-n}(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así que $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$. Lo cual implica que μ es ergódica.

□

2.2. Definición

Esta sección está dedicada a definir el concepto de transformación de Markov y obtener propiedades derivadas de dicha definición. Nosotros trabajaremos con transformaciones del *círculo unitario*, denotado por S^1, al círculo unitario. Sin embargo, es posible trabajar sobre el intervalo unitario en $\mathbb{R}$ y obtener los mismos resultados.

Definición 4. *Una transformación $f : S^1 \to S^1$ es llamada transformación de Markov si existe una familia finita o numerable de intervalos abiertos y ajenos en S^1, digamos I_i con i en un conjunto de índices A, tales que:*

i) El conjunto $S^1 \setminus \bigcup_{i \in A} I_i$ tiene medida de Lebesgue cero.

ii) La transformación $f|_{I_i}$ es un difeomorfismo para toda $i \in A$.

iii) Existen constantes $C > 0$ y $\gamma > 0$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualquier par de puntos x, y contenidos en un intervalo I tal que $f^j(I) \subset I_i$ para alguna $i \in A$ y para toda $j \in \{0, 1, ..., n\}$ se tiene que:

$$\left| \frac{Df^n(x)}{Df^n(y)} - 1 \right| \leqslant C \cdot |f^n(x) - f^n(y)|^\gamma$$

iv) Si $f(I_k) \cap I_j \neq \emptyset$ para algunos $j, k \in A$ entonces $I_j \subset f(I_k)$.

v) Existe $r > 0$ tal que $|f(I_i)| \geqslant r$ para toda $i \in A$.

Un ejemplo de transformaciones de Markov es el siguiente:

$$f : [0,1] \to [0,1],$$

$$f(x) = mx \mod 1,$$

con $m \in \mathbb{N}$ dado. En este caso la familia de intervalos que debemos considerar es

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=0}^{m-1} \left(\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m} \right).$$

Bajo estas hipótesis es posible elegir C y γ de manera arbitraria, ya que si x, y son dos puntos contenidos en un intervalo I tal que $f^j(I)$ esta contenidos es algún intervalo de $\mathcal{P}$ para toda $0 \leqslant j \leqslant n$ tenemos que:

$$\left| \frac{Df^n(x)}{Df^n(y)} - 1 \right| = \left| \frac{m^n}{m^n} - 1 \right| = 0.$$

Regresemos al caso general para obtener propiedades de las transformaciones de Markov. Consideremos $f : S^1 \to S^1$ una transformación de Markov y llamemos I_i a los intervalos asociados a f, donde i pertenece a un conjunto de índices A. Sea Ω el conjunto formado por a la unión de los intervalos I_i para toda $i \in A$ y $\Omega^c = S^1 \setminus \Omega$. Llamemos $\mathcal{P}_1$ a la partición de S^1 inducida por los puntos de Ω^c. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\mathcal{P}_{n+1}$ como la partición inducida por los puntos del conjunto:

$$\mathcal{P}'_{n+1} = \{f^{-n}(p) : p \in \Omega^c\}. \tag{2.5}$$

Observemos que $\mathcal{P}'_n \subset \mathcal{P}'_{n+1}$. Esto se deduce del hecho que f es una transformación de Markov por lo tanto para cualquier par de indices $j,k \in A$ tales que $f(I_k) \cap I_j \neq \emptyset$ se tiene que $I_j \subset f(I_k)$; lo cual implica que la imagen bajo f de los extremos de los intervalos en $\mathcal{P}$ está contenida en Ω^c ($f(\Omega^c) \subset \Omega^c$). Por lo tanto para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^{-n}(\Omega^c) \subset f^{-(n+1)}(\Omega^c)$. Veamos que propiedades cumplen los intervalos de los refinamientos de la partición $\mathcal{P}_1$.

Proposición 5. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ y todo intervalo $I \in \mathcal{P}_{n+1}$ se tiene que:*

i) I es un intervalo maximal con la propiedad que $f^j(I) \subset \Omega$ para toda $0 \leqslant j \leqslant n$;

ii) $|f^{n+1}(I)| \geqslant r$.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ fija e $I \subset \mathcal{P}_n$. Primero demostremos que $f^j(I) \subset \Omega$ para toda $j \in \{1,\ldots,n\}$. Sea $I=(a,b)$ y supongamos que existe un punto $c \in I$ tal que $f^j(c) \in \Omega^c$. Como $f(\Omega^c) \subset \Omega^c$ entonces $f^n(c) \in \Omega^c$, lo cual implica que $c \in \mathcal{P}'_n$. Esto es una contradicción ya que I es un intervalo de $\mathcal{P}'_n$ y a,b son puntos consecutivos en $\mathcal{P}'_n$. Así que $f^j(I) \subset \Omega$ para toda $j \in \{0,\ldots,n\}$.

Veamos que I es maximal. Supongamos que existe $J \in \Omega$ tal que $I \subset J$ y $f^j(J) \subset \Omega$ para toda $j \in \{0,\ldots,n\}$. Como $f|_{I_i}$ es un difeomorfismo para toda $i \in A$ tenemos que $f^n|_J$ es un difeomorfismo y $f^n(J)$ contiene propiamente a $f^n(I)$. Esto quiere decir que $f^n(J) \cap \Omega^c \neq \emptyset$, lo cual contradice la suposición que $f^j(J) \subset \Omega$ para toda $j \in \{0,\ldots,n\}$. Por lo tanto I es maximal.

Ahora demostremos el inciso *ii*). Por definición $f^n(I) = I_k$ para alguna $k \in A$. Como f es una transformación de Markov $|f(I_k)| \geqslant r$, así que $|f^{n+1}(I)| \geqslant r$.

□

La partición $\mathcal{P}$ y sus refinamientos son piezas fundamentales para hallar una medida ergódica y en el caso particular cuando $\mathcal{P}$ es finita estas subparticiones nos ayudarán a construir una transformación que conjugue a f con un subshift.

Proposición 6. *Sea σ el corrimiento unilateral y f una transformación de Markov tal que su partición asociada es finita, es decir $\mathcal{P} = \{I_1,\ldots,I_k\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\ell_n = \sup\{|I| \colon I \in \mathcal{P}_n\}$. Si $\ell_n \to 0$, cuando n tiende a infinito, existen $\Sigma \subset \{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}$ y $h : \Sigma \to S^1$ una transformación continua tal que $f \circ h = h \circ \sigma$.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{I_1,\ldots,I_k\}$ la partición de Markov de f. A cada intervalo $I \in \mathcal{P}_n$ le asociaremos una sucesión w_n de elementos en $\{1,\ldots,k\}$ de la siguiente manera: sabemos que $f^j(I) \subset \Omega$ para toda $j \in \{0,\ldots,n-1\}$; esto quiere decir que $f^j(I) \subset I_{i_j}$ para toda $j \in \{0,\ldots,n-1\}$. Sea $w_n = (i_0,i_1,\ldots,i_{n-1})$. Las sucesiones w_n construidas de esta manera serán llamadas sucesiones admisibles de longitud n y nos permiten expresar a la partición $\mathcal{P}_n$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}_n = \{I_{w_n} : w_n \text{ es una sucesión admisible de longitud } n\}.$$

Por medio de las sucesiones de longitud n podemos formar sucesiones admisibles de longitud infinita. Denotemos por $\Sigma \subset \{1, \ldots, k\}^{\mathbb{N}}$ al conjunto de sucesiones admisibles de longitud infinita.

Ahora definamos una transformación $h : (\Sigma, \tau) \to (S^1, \beta)$, donde τ es la topología producto y β es la topología usual en el círculo unitario S^1 de la siguiente manera: para cada elemento $a = (i_0, i_1, \ldots) \in \Sigma$ consideremos las sucesiones $w_n = (i_0, \ldots, i_{n-1})$ con $n \in \mathbb{N}$. Por construcción sabemos que $I_{w_n} \subset I_{w_{n+1}}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto el conjunto:

$$x_a = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{w_n} \neq \emptyset. \tag{2.6}$$

Como $\ell_n \to 0$ cuando n tiende a infinito, el conjunto x_a contiene un solo elemento. Sea $h(a) = x_a$, entonces:

$$f(h(a)) = f(x_a) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(I_{w_n}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{\sigma(w_n)} = h(\sigma(a)).$$

Observemos que h es sobre, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$S^1 = \bigcup_{I\in\mathcal{P}_n} I.$$

Además h es biyectiva excepto por una cantidad a lo sumo numerable de puntos, estos puntos son las preimágenes de los extremos de los intervalos de la partición $\mathcal{P}$.

Veamos que h es continua. Sea $\varepsilon > 0$ y $a \in \Sigma$. Si $\delta = 1/N$ para un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\ell_N \leqslant \varepsilon$, entonces para toda $b \in \Sigma$ tal que $d(a, b) \leqslant \delta$ tenemos que a y b coinciden el las primeras N-coordenadas; esto quiere decir que a y b están contenidos en un mismo intervalo I_{w_N} de la partición $\mathcal{P}_N$, y por lo tanto $\mid h(a) - h(b) \mid \leqslant \ell_N < \varepsilon$. En conclusión, h es una transformación continua tal que $f \circ h = h \circ \sigma$. $\square$

En la siguiente sección demostraremos una importante propiedad que cumplen las transformaciones de Markov independientemente de la finitud de la partición. Esta propiedad es la existencia de una medida invariante absolutamente continua respecto a la *medida de Lebesgue*, denotada por λ. Recordemos que la medida de Lebesgue asocia a cada conjunto medible en $I \subset \mathbb{R}$ un real positivo $\lambda(I)$ que coincide con la longitud de I cuando I es un intervalo.

2.2.1. Propiedades ergódicas

Esta sección trabajaremos con f una transformación de Markov para encontrar una medida f-invariante, absolutamente continua respecto a medida de Lebesgue que además cumpla las propiedades del siguiente teorema:

Teorema 6. *Sean $f : S^1 \to S^1$ una transformación de Markov y $\{I_i\}_{i\in A}$, A un conjunto de índices, su partición correspondiente. Entonces existe μ una medida de* *probabilidad sobre los borelianos en S^1 que es f-invariante y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. Además, μ cumple las siguientes propiedades:*

i) Su densidad, $S = d\mu/d\lambda$, es uniformemente acotada y Hölder continua. Además, para cada $i \in A$ la densidad es cero en I_i o uniformemente acotada lejos de cero.

Si para cada pareja i, j de elementos distintos en A se tiene que $f^n(I_j) \supset I_i$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces:

ii) La medida μ es única y su densidad S es estrictamente positiva;

iii) La medida μ es exacta.

La construcción de esta medida está dividida en varios pasos. El primero de ellos es construir una sucesión de medidas de la siguiente manera: sea f una transformación de Markov. Para cada natural $n \in \mathbb{N}$ definamos la medida λ_n de un boreliano $A \subset S^1$ como:

$$\lambda_n(A) = |f^{-n}(A)|.$$

A continuación demostraremos que las medidas λ_n son absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue.

Proposición 7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ la medida λ_n es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. Además $S_n = d\lambda_n/d\lambda$ cumple que:*

$$S_n(x) = \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{|Df^n(z)|}$$

para λ-casi todo punto $x \in S^1$.

Demostración. Sea A un boreliano en S^1, entonces:

$$\lambda_n(A) = |f^{-n}(A)| = \left| f^{-n}(A) \cap \bigcup_{I \in \mathcal{P}_n} I \right| + \left| f^{-n}(A) \cap P'_n \right|.$$

Por definición sabemos que $\mathcal{P}'_n$ es un conjunto a lo sumo numerable así que $|\mathcal{P}'_n| = 0$. Por lo tanto:

$$\lambda_n(A) = \sum_{I \epsilon \mathcal{P}_n} |f^{-n}(A) \cap I|. \tag{2.7}$$

Como $f^n|_I$ es un difeomorfismo para cada $I \in \mathcal{P}_n$ el Teorema de Cambio de Variable nos dice que:

$$\begin{aligned}
|f^{-n}(A) \cap I| &= \int_{f^{-n}(A)\cap I} d\lambda \\
&= \int_A |D(f^n|_I)^{-1}(x)| d\lambda(x) \qquad (2.8)\\
&= \int_A \frac{1}{|Df^n(z(x))|} d\lambda(x),
\end{aligned}$$

donde $(f^n|_I)^{-1}$ es la inversa de $f^n|_I$ y $z(x) = f^{-n}(x) \cap I$.

Juntando las ecuaciones (2.7) y (2.8) tenemos:

$$\begin{aligned}
\lambda_n(A) &= \sum_{I \epsilon \mathcal{P}_n} \int_A |D(f^n|_I)^{-1}(x)| d\lambda(x) \\
&= \int_A \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{|Df^n(z)|} d\lambda(x) \\
&= \int_A S_n(x) d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, λ_n es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue y para λ-casi todo punto $x \in S^1$ se tiene que:

$$S_n(x) = \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{|Df^n(z)|}.$$

□

Ahora demostraremos que las densidades S_n están uniformemente acotadas y son Hölder continuas. Recordemos que una transformación $g : S^1 \to S^1$ es Hölder continua si existen constantes $C, \gamma > 0$ tales que para cualquier par de puntos $x, y \in S^1$ se tiene:

$$|g(x) - g(y)| \leqslant C \cdot |x - y|^\gamma.$$

Lema 1. *Existe $K' > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumplen:*

i) $S_n(x) \leqslant K'$ para λ casi todo punto $x \in \Omega$;

ii) λ-casi todos los puntos x, y en un intervalo $I \in \mathcal{P}$ cumplen:

$$|S_n(x) - S_n(y)| \leqslant K' \cdot S_n(x) \cdot |x - y|^\gamma.$$

Demostración. Sea N el conjunto nulo que contiene a todos los puntos de S^1 donde no es válida la igualdad

$$S_n(x) = \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{|Df^n(z)|}.$$

Primero demostraremos el inciso i). Como f es una transformación de Markov, f tiene distorsión acotada (inciso iii), Definición 4). Esto implica que para cualquier par de puntos x, y contenidos en un intervalo $I \in \mathcal{P}_n$ se tiene que:

$$\frac{Df^n(x)}{Df^n(y)} \leqslant 1 + C \cdot |f^n(x) - f^n(y)|^\gamma \leqslant 1 + C.$$

Sea $K = C + 1$. Entonces, para cualquier par de puntos x, y en un intervalo $I \in \mathcal{P}_n$ ocurre que:

$$\frac{|\ Df^n(x)\ |}{|\ Df^n(y)\ |} \leqslant K. \tag{2.9}$$

Por otro lado, el Teorema del Valor Medio nos dice que para cualquier par de puntos $x, y \in I$ existe $w \in I$ tal que:

$$|f^n(x) - f^n(y)| = |\ Df^n(w)\ | \cdot |x - y|.$$

Entonces, para cualquier punto $z \in I$ tenemos:

$$|f^n(x) - f^n(y)| = |\ Df^n(w)\ | \cdot \frac{|\ Df^n(z)\ |}{|\ Df^n(z)\ |} \cdot |x - y| \leqslant K \cdot |\ Df^n(z)\ | \cdot |x - y|.$$

Por lo tanto, para todo intervalo $I \in \mathcal{P}_n$ y para toda $z \in I$ tenemos:

$$|f^n(I)| \leqslant K \cdot |Df^n(z)| \cdot |I|. \tag{2.10}$$

Finalmente, la Proposición 5 nos dice que $|f^n(I)| \geqslant r$ para todo intervalo $I \in \mathcal{P}_n$; este hecho junto con la ecuación (2.10) implican que todo punto $x \in I/N$ cumple:

$$S_n(x) = \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{|Df^n(z)|} \leqslant \sum_I \frac{K \cdot |I|}{|f^n(I)|} \leqslant \sum_I \frac{K \cdot |I|}{r} \leqslant \frac{K}{r},$$

donde las últimas dos series corren sobre los intervalos $I \in \mathcal{P}_n$ tales que $f^{-n}(x) \in I$. Para concluir la demostración del inciso i) basta definir:

$$K' = max\ \{K/r, K\}.$$

Para demostrar el inciso ii) observemos que si $x \in I_0$ con $I_0 \in \mathcal{P}$ entonces cada uno de los intervalos $I \in \mathcal{P}_n$ contiene a lo más un elemento de $f^{-n}(x)$; esto se debe a que la transformación $f^n\ |_I$ es un difeomorfismo para todo $I \in \mathcal{P}_n$. Además, si

$f^{-n}(x) \cap I \neq \emptyset$ para algún $I \in \mathcal{P}_n$ entonces $f^n(I_0) \cap I \neq \emptyset$; esto implica que $f^n(I) = I_0$ y por lo tanto $f^{-n}(y) \cap I \neq \emptyset$ para toda $y \in I_0$. En conclusión, para cualquier par de puntos x, y contenidos en un intervalo $I_0 \in \mathcal{P}$ se tiene que $f^{-n}(x) \cap I \neq \emptyset$ para algún intervalo $I \in \mathcal{P}_n$ si y solo si $f^{-n}(y) \cap I \neq \emptyset$.

Sean x, y dos puntos contenidos en $I_0 \backslash N$. Haciendo $f^{-n}(x) = \{z_1, z_2 \ldots\}$ y $f^{-n}(y) = \{z'_1, z'_2 \ldots\}$ podemos suponer que z_k y z'_k están contenidos en un mismo intervalo de $\mathcal{P}_n$, por tanto:

$$\begin{aligned} |S_n(x) - S_n(y)| &\leqslant \sum_{\substack{z_k \in f^{-n}(x) \\ z'_k \in f^{-n}(y)}} \left| \frac{1}{|Df^n(z_k)|} - \frac{1}{|Df^n(z'_k)|} \right| \\ &\leqslant \sum_{\substack{z_k \in f^{-n}(x) \\ z'_k \in f^{-n}(y)}} \frac{1}{|Df^n(z_k)|} \cdot \left| 1 - \frac{|Df^n(z_k)|}{|Df^n(z'_k)|} \right| \\ &\leqslant \sum_{\substack{z_k \in f^{-n}(x) \\ z'_k \in f^{-n}(y)}} \frac{1}{|Df^n(z_k)|} \cdot K \cdot |f^n(z_k) - f^n(z'_k)|^\gamma . \end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene gracias a que la transformación f tiene distorsión acotada. En conclusión:

$$\begin{aligned} |S_n(x) - S_n(y)| &\leqslant \sum_{z_k \in f^{-n}(x)} \frac{1}{|Df^n(z_k)|} \cdot K \cdot |x - y|^\gamma \\ &\leqslant S_n(x) \cdot K \cdot |x - y|^\gamma \\ &\leqslant S_n(x) \cdot K' \cdot |x - y|^\gamma . \end{aligned}$$

□

Ahora utilizaremos las medidas λ_n para construir una nueva sucesión de medidas. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la medida μ_n de un boreliano $A \subset S^1$ como:

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i .$$

Por medio de esta nueva sucesión de medidas encontraremos una medida f- invariante y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue.

Proposición 8. *Sea $(\mathcal{M}(S^1), \tau)$ el espacio de medidas de probabilidad del círculo unitario con la σ-álgebra de Borel y sea τ la topología generada por las vecindades* *definidas en (2.2). Entonces, existe una sucesión n_k tal que la sucesión $\{\mu_{n_k}\}$ de elementos en $\mathcal{M}(S^1)$ converge a μ, una medida f-invariante cuya densidad $d\mu/d\lambda$ es acotada y Hölder continua casi donde quiera en S^1.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la densidad de λ_n es S_n, por lo tanto:

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_A S_n d\lambda = \int_A \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_n d\lambda$$

El Teorema de Radon-Nikodin (Teorema 1) nos dice que:

$$\tilde{S_n} = \frac{d\mu_n}{d\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_i,$$

para λ-casi todo punto en S^1. Por el Lema 1 sabemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ y λ-casi todos los puntos x, y contenidos en un intervalo $I_0 \in \mathcal{P}$ cumplen:

1. $S_n(x) \leqslant K$;
2. $|S_n(x) - S_n(y)| \leqslant K \cdot S_n(x) \cdot |x-y|^\gamma$.

Estos dos hechos junto con la definición de $\tilde{S_n}$ implican que λ-casi todos los puntos x, y contenidos en un intervalo $I_0 \in \mathcal{P}$ cumplen:

1. $\tilde{S_n}(x) \leqslant K$;
2. $|\tilde{S_n}(x) - \tilde{S_n}(y)| \leqslant K \cdot \tilde{S_n}(x) \cdot |x-y|^\gamma$.

Por lo tanto la familia de funciones $\{\tilde{S_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y Hölder continua casi donde quiera en cada uno de los intervalos de $\mathcal{P}$. Por otro lado, el espacio de medidas de probabilidad sobre los borelianos es débilmente compacto (Teorema 4) por lo tanto existe una subsucesión $\{\mu_{n_j}\}$ de la sucesión $\{\mu_n\}$ que converge a una medida μ. Esto quiere decir que para toda función $g \in C_0(S^1)$:

$$\lim_{j\to\infty}\left|\int g d\mu_{n_j} - \int g d\mu\right| \to 0.$$

En particular si $g = \chi_A$, la función característica de un conjunto medible A, tenemos que:

$$\lim_{j\to\infty}\left|\int \chi_A d\mu_{n_j} - \int \chi_A d\mu\right| \to 0.$$

Como μ_n es absolutamente continua para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces μ también lo es. Sea S a la densidad de μ, entonces el Teorema de Radon-Nikiodin nos permite concluir:

$$\lim_{j\to\infty}\left|\int S - \tilde{S_{n_j}} d\lambda\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\int \tilde{S_{n_j}} d\lambda - \int S d\lambda\right| \to 0.$$

Por definición de la densidad $\tilde{S_n}$ sabemos que $\{\tilde{S_n}\}$ es unas sucesión creciente de funciones positivas por lo tanto $S-\tilde{S_{n_j}}$ es una positiva para toda $j \in \mathbb{N}$. Esto implica que las densidades $\tilde{S_{n_j}}$ convergen a S. Así que S cumple las siguientes propiedades:

1. $S(x) \leqslant K'$;

2. $|S(x) - S(y)| \leqslant K' \cdot S(x) \cdot |x-y|^\gamma$

para λ-casi todos los puntos x, y contenidos en un intervalo $I_0 \in \mathcal{P}$.

Veamos ahora que μ es una medida f-invariante. Para ello consideremos un boreliano $A \subset N$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mu(f^{-1}(A)) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\left|f^{-i}(f^{-1}(A))\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1} \mid f^{-i}(A) \mid - \frac{1}{n_k} \mid A \mid + \frac{1}{n_k} \mid f^{-n_k}(A) \mid \right\} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1} \mid f^{-i}(A) \mid \\
&= \mu(A).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, μ es f-invariante.

$\square$

En la proposición anterior se demuestra que $S(x)$, la densidad de μ, es acotada y Hölder continua. Veamos que otras propiedades pueden cumplir $S(x)$ y μ si suponemos que los intervalos de la partición $\mathcal{P}$ cumplen cierta condición de transitividad.

Proposición 9. *Si para cualquier par de indices $i, j \in A$ se tiene que $I_i \subset f^n(I_j)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ entonces para toda $i \in A$ la densidad de μ restricta a la intervalo I_i es uniformemente positiva μ-casi todo punto en en I_i.*

Demostración. Supongamos que para cada par de indices $i, j \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_i \subset f^n(I_j)$. Si la afirmación no es cierta existe un intervalo $I_i \subset \mathcal{P}$ tal que $S = d\mu/d\lambda$ restricta a I_i no es uniformemente positiva en un conjunto B tal que $\mu(B) > 0$. Sea N el conjunto nulo, respecto a la medida de Lebesgue, que contiene a las puntos de $x \in I_i$ donde $S(x)$ no es acotada ni Hölder continua. Observemos que $\mu(N) = 0$ ya que μ es absolutamente continua respecto a λ, así que $\mu(B \backslash N) > 0$.

La función S no es estrictamante positiva en el conjunto $B \backslash N$ así que:

$$\inf \{S(x) : x \in B \backslash N\} = 0.$$

Esto implica que existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos en $B \backslash N$ tal que $S(y_n) \to 0$. Sea $y \in I_i \backslash N$, entonces la Proposición 8 nos dice que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$|S(y) - S(y_n)| \leqslant K \cdot S(y_n) \cdot |y_n - y|^{\gamma}.$$

Así que $S(y) = 0$. Este argumento es válido para toda $y \in I_i/N$ por lo tanto:

$$\mu(I_i) = \int_{I_i/N} S(x) d\lambda = 0.$$

Demostremos que el que $\mu(I_i) = 0$ implica que $\mu(I_j) = 0$ para toda $j \in A$. Para ello elijamos un intervalo $I_j \in \mathcal{P}$ arbitrario. Por hipótesis sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I_i \subset f^m(I_j)$, así que $f^{-m}(I_i) \cap I_j \neq \emptyset$. Entonces:

$$\mu(f^{-m}(I_i) \cap I_j) \leqslant \mu(I_i \cap f^m(I_j)) \leqslant \mu(I_i) = 0.$$

Sabemos que μ es una medida f-invariante por lo tanto $\mu(f^{-m}(I_i)) > 0$. Además, I_i e I_j son intervalos abiertos por lo que $\lambda(f^{-m}(I_i) \cap I_j) > 0$, así que la única forma en que $\mu(f^{-m}(I_i) \cap I_j) = 0$ es que $S(x)$ se anule en un conjunto $B' \subset I_j$ tal que $\mu(B') > 0$. Aplicando un argumento análogo al utilizado para el intervalo I_i tenemos que $\mu(I_j) = 0$. Haciendo esto para todos los intervalos en $\mathcal{P}$ concluimos que $\mu(S^1) = 0$, lo cual contradice que $\mu \in \mathcal{M}(S^1)$. Por lo tanto la función S es estrictamente positiva μ-casi todo punto en I_i para toda $i \in A$. □

La proposición anterior nos dice que bajo la hipótesis de transitividad las medidas μ y λ son equivalentes. Ahora veamos que la hipótesis de transitividad también implica que la medida μ es exacta.

Proposición 10. *Si para cualquier par de indices $i, j \in A$ se tiene que $I_i \subset f^n(I_j)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces μ es exacta.*

Demostración. Supongamos que para cualquier par de índices $i, j \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_i \subset f^n(I_j)$. Supongamos también que la medida μ no es exacta, entonces existen borelianos $A, A_1, A_2, \ldots$ tales que $0 < \mu(A) < 1$ y $A = f^{-n}(A_n)$ para cada

$n \in \mathbb{N}$. Sea I un intervalo cualquiera de la partición $\mathcal{P}_n$. El Teorema del Valor Medio para integrales nos garantiza la existencia de un punto $w \in f^n(I)$ tal que :

$$| f^{-n}(f^n(I)) | \leqslant | Df^{-n}(w) | \cdot | f^n(I) | \tag{2.11}$$

Como $w \in f^n(I)$ existe $p \in I$ tal que $w = f^n(p)$. Además $p = f^{-n}(w)$ ya que f^n restricta al intervalo I es un difeomorfismo. Entonces la Regla de la Cadena nos dice que:

$$Df^{-n}(w) = \frac{1}{Df(f^{-n}(w))} = \frac{1}{Df(p)}.$$

Sabemos que $I \subset f^{-n}(f^n(I))$ por lo tanto $| I | \leqslant | f^{-n}(f^n(I)) |$. Este hecho junto con la ecuación (2.11) nos permiten concluir lo siguiente:

$$| I | \leqslant \frac{1}{|Df^n(p)|} \cdot |f^n(I)|. \tag{2.12}$$

Aplicando nuevamente el Teorema del Valor Medio para integrales obtenemos un punto $z \in A \cap I$ tal que:

$$|f^n(A \cap I)| \leqslant |Df^n(z)| \cdot |A \cap I|. \tag{2.13}$$

Multiplicando (2.12) y (2.13) obtenemos:

$$\begin{aligned} | I | \cdot | f^n(A \cap I) | &\leqslant \frac{| Df^n(z) |}{| Df^n(p) |} \cdot | f^n(I) | \cdot | A \cap I | \\ &\leqslant K \cdot | f^n(I) | \cdot | A \cap I |, \end{aligned}$$

donde K es el número definido en (2.9).

Si $| A \cap I | > 0$ podemos reacomodar la ecuación anterior de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{|f^n(I)|}{|I|} &\geqslant \frac{1}{K} \cdot \frac{|f^n(A \cap I)|}{|A \cap I|} \frac{|A_n|}{|A_n|} \\ &\geqslant \frac{1}{K} \cdot \frac{|A_n|}{|A \cap I|}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

La última desigualdad se debe a que $f^n(A \cap I) = f^n(f^{-n}(An) \cap I) \subset An$. Por lo tanto, $| f^n(A \cap I) | \leqslant | A_n |$.

Finalmente, la Proposición 5 nos dice que para todo intervalo $I \in \mathcal{P}_n$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $| f^n(I) | \geqslant r$; sustituyendo este valor en la ecuación (2.14) y recordando que $A = f^{-n}(A_n)$ obtenemos:

$$\frac{|f^{-n}(A_n) \cap I|}{|I|} \geqslant \frac{1}{Kr} \cdot |A_n|. \tag{2.15}$$

Observemos que la ecuación anterior es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier intervalo $I \in \mathcal{P}_n$ tal que $\mid A \cap I \mid > 0$.

Sabemos que la densidad de μ es estrictamente positiva en cada $I \in \mathcal{P}$ y que μ es f-invariante entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\int_{A_n} S(x)\ d\lambda = \mu(A_n) = \mu(A) = \int_A S(x)\ d\lambda.$$

De la ecuación anterior se deduce que existe una constante $c > 0$ tal que $|A_n| > c$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ya que si suponemos que existe una sucesión n_k tal que $|A_{n_k}| \to 0$ se tendría que $\mu(A_{n_k}) \to 0$, debido a que $\mu \ll \lambda$, y por tanto $\mu(A) = 0$; lo cual contradice la suposición que $0 < \mu(A) < 1$.

Sustituyendo el valor de $|A_n|$ por la constante c en la ecuación (2.15) tenemos:

$$\frac{\mid A \cap I \mid}{\mid I \mid} \geqslant \frac{c}{Kr}. \tag{2.16}$$

La norma de los intervalos en $\mathcal{P}_n$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ así que la ecuación (2.16) junto con el Teorema implican que el conjunto A tiene medida total en S^1, por lo tanto $|S^1/A| = 0$. Como $\mu \ll \lambda$ entonces $\mu(S^1/A) = 0$ y $\mu(A) = 1$. Esto contradice la suposicion que $0 < \mu(A) < 1$. Entonces, μ es exacta. □

Juntando las proposiciones anteriores es posible demostrar el Teorema 6.

Demostración del Teorema 6. La Proposición 8 nos garantiza la existencia de una medida μ sobre los borelianos de S^1 que es f-invariante y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue cuya densidad $S = d\mu/d\lambda$ es acotada superiormente casi donde quiera en S^1. Además la densidad S cumple:

$$|S(x) - S(y)| \leqslant K \cdot S(x) \cdot |x - y|^\gamma$$

para λ-casi todos los puntos x, y contenidos en un intervalo $I_0 \in \mathcal{P}$. Esto quiere decir que la densidad S es Hölder continua casi donde quiera en S^1 y que S restricta a un intervalo $I_0 \in \mathcal{P}$ es estrictamente positiva o cero casi donde quiera.

Supongamos que para cualquier par de indices $i, j \in A$ se tiene que $I_i \subset f^n(I_j)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces la Proposición 10 nos dice que S es estrictamente positiva en cada intervalo $I \in \mathcal{P}$ y que μ es exacta. Como μ es exacta la Proposición 4 implica que μ es ergódica.

Finalmente, demostremos que μ es única. Supongamos que existe μ' otra medida f-invariante sobre los borelianos en S^1 que cumple el teorema. Como $\mu' \neq \mu$ la Proposición 2 nos dice que existe A un boreliano f-invariante contenido en S^1 tal que: $\mu(A) = 0$ y $\mu'(A) \neq 0$. Como $\mu'(A) \neq 0$ y $\mu' \ll \lambda$ debe ocurrir que $\lambda(A) \neq 0$; esto implica que $\mu(A) \neq 0$ ya que $\mu \ll \lambda$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto μ es única.

□

Capítulo 3

Grupos Fuchsianos

Comenzaremos este capítulo estudiando el plano hiperbólico y el subgrupo de sus isometrias que preserva orientación, conocidas transformaciones de Möbius. Posteriormente trabajaremos con grupos fuchsianos y dominios fundamentales para garantizar la existencia de polígono fundamentales convexos y conocer algunas de sus propiedades. Los resultados obtenidos sobre polígonos fundamentales convexos serán utilizados en el capítulo siguiente para construir transformaciones de Markov que actúen en el círculo unitario. Gran parte de los resultados y construcciones que aparecen en este capítulo están basados el libro de Beardon [1].

3.1. Plano hiperbólico

El plano hiperbólico $\mathcal{H}$ es un subconjunto abierto del plano complejo extendido, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, así que utilizaremos la notación usual para denotar la parte real e imaginaria de un punto $z = x + iy$ en $\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = x$ e $\mathrm{Im}(z) = y$. El modulo de $z \in \mathbb{C}$ será denotado por $|z|$.
El plano hiperbólico tiene varios modelos geométricos, nosotros trabajaremos con el *modelo del disco de Poincaré*: al disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$ provisto con la métrica

$$ds = \frac{2 \mid dz \mid}{1- \mid z \mid^2}$$

se le conoce como el *disco de Poincaré* y a la métrica inducida por ds se le llama *métrica hiperbólica*.

Una geodésica en este modelo está dada por la intersección de Δ con un círculo euclidiano ortogonal a $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ o por uno de sus diámetros.

La topología inducida por la métrica hiperbólica es la misma que la topología euclidiana. Es posible trabajar con la cerradura del plano hiperbólico si se extiende la topología inducida por la métrica hiperbólica; la forma más natural de hacer esta extensión es restringiendo la topología euclidiana a la cerradura de $\mathcal{H}$. La cerradura del plano hiperbólico dotada de esta nueva topología es llamada *plano hiperbólico cerrado*, denotado por $\overline{\mathcal{H}}$.

Como la topología en $\mathcal{H}$ no coincide con la topología en $\overline{\mathcal{H}}$ es importante hacer distinción en cual de las topologías se considera la operación cerradura: Si $D \subset \mathcal{H}$ denotaremos por $\overline{D}$ a su cerradura euclidiana y por $\widetilde{D}$ a su cerradura hiperbólica. Observemos que $\overline{D}$ y $\widetilde{D}$ no son necesariamente el mismo conjunto ya que el primero puede contener puntos de la frontera de plano hiperbólico y el segundo no.

La métrica Riemanniana ds induce una distancia y un área hiperbólicas. Denotaremos la distancia hiperbólica entre dos puntos $z, w \in \mathcal{H}$ como $\rho(z, w)$ y al área hiperbólica de un subconjunto $A \subset \mathcal{H}$ como $\acute{a}rea_h(A)$.

3.1.1. Transformaciones de Möbius

A continuación estudiaremos un subgrupo de isometrías del plano hiperbólico conocido como el grupo de transformaciones de Möbius, el cual denotaremos por $\mathcal{M}(\Delta)$.

Definición 5. *Una transformación $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es una transformación de Möbius si:*

$$T(z) = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}, \tag{3.1}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y cumplen: $\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1$.

Las transformaciones de Möbius son biyecciones conformes, que preservan ángulos, e isometrías del plano hiperbólico. Si $\beta = 0$ son enteras y si $\beta \neq 0$ tienen un polo simple en $z = -\overline{\alpha}/\beta$.

Para encontrar los puntos fijos de una transformación de Möbius hay que resolver la ecuación:

$$z = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}.$$

Esto es equivalente a encontrar las raíces de:

$$\beta z^2 + (\overline{\alpha} - \alpha)z - \overline{\beta} = 0.$$

Si $\beta \neq 0$ entonces la ecuación anterior tiene dos raíces:

$$\frac{\alpha - \overline{\alpha} \pm \sqrt{D}}{2\beta}, \tag{3.2}$$

donde el discriminante es $D = (\alpha + \overline{\alpha})^2 - 4$. Cuando $D = 0$ la ecuación (3.2) tiene una única solución dada por:

$$\frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2\beta}. \tag{3.3}$$

Si $\beta = 0$ debe ocurrir que $\alpha \neq 0$ de lo contrario $a\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta}$ sería igual a cero. Si $\alpha = \overline{\alpha}$, el origen es el único punto fijo. En caso que $\alpha \neq \overline{\alpha}$ existe un segundo punto fijo dado por:

$$\frac{\overline{\beta}}{\overline{\beta} - \alpha}.$$

Una vez hallados los puntos fijos podemos dar una clasificación de de las transformaciones de Möbius de la siguiente manera: *parabólicas*, si tienen un único punto fijo el cual pertenece a S^1; *elípticas*, si tienen dos puntos fijos uno en Δ y otro fuera del plano hiperbólico cerrado; e *hiperbólicas*, si tienen dos puntos fijos en S^1.

Una propiedad importante de las transformaciones de Möbius es que a cada transformación de Möbius T se le puede asociar una matriz $M_T \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ con determinante uno de forma natural:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = M_T$$

Notemos que a cada transformación de Möbius T le corresponden dos representaciones $\pm M_T$. Entonces el grupo de todas las transformaciones de Möbius es isomorfo a su imagen en el grupo de matrices modulo $\pm Id$; por lo tanto, la matriz correspondiente a la composición de dos transformaciones de Möbius es producto de sus matrices y la matriz correspondiente a la inversa de una transformación es la matriz inversa de la transformación. La correspondencia entre matrices y transformaciones en $\mathcal{M}(\Delta)$ nos permite trabajar con las transformaciones de Möbius de dos maneras distintas y utilizaremos una u otra dependiendo de lo que sea más conveniente en cada caso.

Algunas de las propiedades más relevantes de las transformaciones de Möbius están relacionadas con la familia de círculos de $\mathcal{H}$. La familia $\mathcal{C}$ de círculos en $\mathcal{H}$ esta constituida por los círculos euclidianos contenidos propiamente en Δ, las circunferencias euclidianas ortogonales a S^1 y los diámetros del círculo unitario. Las transformaciones de Möbius preservan los elementos de $\mathcal{C}$, es decir envían elementos de $\mathcal{C}$ en elementos de esta misma familia. Más aún, dados dos elementos en $\mathcal{C}$ existe una transformación de Möbius que envía uno al otro, a esta última propiedad de le llama transitividad; así que las transformaciones de Möbius actúan transitivamente en $\mathcal{C}$.

3.1.2. Círculos Isométricos

Algunas transformaciones de Möbius tienen asociado un elemento distinguido en familia $\mathcal{C}$, llamado *círculo isométrico.* A cada $g \in \mathcal{M}(\Delta)$ con $\beta \neq 0$ le asociamos un círculo isométrico definido de la siguiente forma:

$$C(g) = \{z \in \Delta : | \ \beta z + \overline{\alpha}| = 1\}.$$

Notemos que $C(g)$ es efectivamente una circunferencia ya que:

$$C(g) = \left\{ z \in \Delta : \ \left| z + \frac{\overline{\alpha}}{\beta} \right| = \frac{1}{\beta} \right\}.$$

Además, como $|g'(z)| = |\beta z + \overline{\alpha}|^{-2}$ todo punto $z \in C(g)$ cumple que $|g'(z)| = 1$. Más aún, el círculo isométrico de una transformación $T \in \mathcal{M}(\Delta)$ con $\beta \neq 0$ es el único círculo en donde T actúa euclidianamente, esto quiere decir que T restricta a $C(T)$ actúa como isometría euclidiana localmente.

Para las transformaciones en $\mathcal{M}(\Delta)$ donde $\beta = 0$ no existe un único círculo que cumpla la propiedad de ser círculo isométrico; es por ello que en este caso no se habla de el círculo isométrico de la transformación. Las transformaciones en $\mathcal{M}(\Delta)$ con $\beta = 0$ son transformaciones elípticas que tienen al origen como punto fijo.

Los círculos isométricos cumplen dos propiedades importantes:

Proposición 11. *Sea $T \in \mathcal{M}(\Delta)$ con $\beta \neq 0$. Entonces:*

i) $T(C(T)) = C(T^{-1})$;

ii) $z \in \{z \in \Delta : \ |\beta z + \overline{\alpha}| < 1\} \Leftrightarrow |T'(z)| > 1$.

Notemos que el conjunto de puntos donde $|T'(z)| > 1$ coincide con el interior del círculo $C(T)$. Al interior de un conjunto A lo denotaremos por $\mathrm{int}(A)$. Por lo tanto el inciso *ii*) de la proposición anterior se puede reescribir como:

$$z \in \mathrm{int}(C(T)) \Leftrightarrow |T'(z)| > 1.$$

Como consecuencia de la implicación anterior tenemos también que:

$$z \in \mathrm{ext}(C(T)) \Leftrightarrow |T'(z)| < 1,$$

donde $\mathrm{ext}(C(T))$ denota el exterior del conjunto $C(T)$.

3.2. Grupos fuchsianos

Comencemos esta sección recordando la definición de acción. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y X un conjunto. Una acción es una transformación:

$$\Phi : G \times X \to X,$$

con las siguientes propiedades:

i) $\Phi(e, x) = x$ para todo $x \in X$, donde e es el elemento neutro de G.

ii) Si $g, h \in G$ y $x \in X$ entonces $\Phi(g \cdot h, x) = \Phi(g, \Phi(h, x))$.

Para saber cómo actúa un grupo de transformaciones de Möbius, G, es necesario considerar para cada $x \in \Delta$ el conjunto $G_x = \{g(x) \mid g \in G\}$, llamado la *$G-$órbita* del punto x. Denotaremos por Λ_x al conjunto de puntos de acumulación de elementos distintos en G_x y por

$$\Lambda(G) = \bigcup_{x \in \Delta} \Lambda_x.$$

Al conjunto $\Lambda(G)$ se le conoce como el *conjunto limite* de G.

Nosotros estudiaremos grupos cuyas orbitas son *localmente finitas*; esto quiere decir que para cualquier compacto $K \subset \Delta$ el conjunto $K \cap G_x$ es finito para toda $x \in \Delta$. Si todas las órbitas de puntos en Δ son localmente finitas diremos que el grupo *actúa discontinuamente* en Δ.

Definición 6. *Diremos que un subgrupo $G \subset \mathcal{M}(\Delta)$ es un* grupo fuchsiano *si G actúa discontinuamente en Δ.*

La acción discontinua de los grupos fuchsianos en Δ implica que el conjunto limite de todo grupo fuchsiano G está contenido en S^1 y que todas las transformaciones elípticas contenidas en G tienen orden finito. La primera de estas propiedades da pie a la clasificación de los grupos fuchsianos: diremos que un grupo fuchsiano G es del *primer tipo* si $\Lambda(G) = S^1$, en caso contrario diremos que G es del *segundo tipo*.

Otra propiedad de grupos fuchsianos que es importante recalcar es que los grupos fuchsianos son a lo sumo numerables ([6], p.100).

3.3. Dominios Fundamentales

Para entender la dinámica de un grupo fuchsiano en $\mathcal{M}(\Delta)$ hallaremos un conjunto que contenga un representante de cada órbita; a estas regiones se les conoce como dominios fundamentales y están definidos de la siguiente manera:

Definición 7. *Un subconjunto D del plano hiperbólico es un* dominio fundamental *de un grupo fuchsiano G si:*

i) D es un dominio del plano complejo;

ii) Existe un conjunto $F \subset \Delta$ que contiene exactamente un punto de cada orbita en Δ tal que $D \subset F \subset \widetilde{D}$;

iii) El área hiperbólica de ∂D es cero.

Consideremos D es un dominio fundamental para un grupo fuchsiano G y $\widetilde{D}$ su cerradura hiperbólica, entonces el inciso ii) implica que para todo $z \in \Delta$ existe $g \in G$ tal que $g(z) \in D$. Además, $G_z = \{z\}$ si y sólo si z está en el interior de D. La propiedad anterior implica que si $f, g \in G$ son dos transformaciones distintas $g(\widetilde{D})$ y $f(\widetilde{D})$ se pueden intersectar únicamente en la frontera; esta intersección tiene medida cero ya que:

$$\begin{aligned} \text{área}_h(\partial g(D) \cap \partial f(D)) &\leqslant \text{área}_h(\partial g(D)) \\ &= \text{área}_h(\partial D) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{g(\widetilde{D}) \mid g \in G\}$ es una teselación del plano hiperbólico.

Definición 8. *Un dominio fundamental D para un grupo G es llamado* localmente finito *si cada subconjunto compacto de Δ intersecta únicamente a un número finito de G-imágenes de $\widetilde{D}$.*

Veamos una rápida implicación de la definición anterior. Para ello consideremos D un dominio fundamental localmente finito para un grupo G, un punto $z \in \Delta$ y N una vecindad compacta de z. Entonces N intersecta únicamente a un número finito de G-imágenes de $\widetilde{D}$, digamos $g_1(\widetilde{D}), \ldots, g_k(\widetilde{D})$. Haciendo N más pequeño si es necesario podemos suponer que todas estas imágenes contienen a z. Si para algún $h \in G$ se tiene que $h(D)$ intersecta a N entonces $h(D)$ intersecta a la unión de los $g_i(\widetilde{D})$, por lo tanto $h = g_i$ para alguna $i \in \{1, ..., k\}$. Resumiendo el razonamiento anterior obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 12. *Sea D es un dominio fundamental localmente finito para un grupo G. Entonces cada $z \in \Delta$ tiene una vecindad compacta N y un número finito de $g_i \in G$ con $i \in \{1, ..., k\}$ tales que:*

i) $z \in g_1(\widetilde{D}) \cap ... \cap g_k(\widetilde{D})$;

ii) $N \subset g_1(\widetilde{D}) \cup ... \cup g_k(\widetilde{D})$;

iii) $h(D) = \emptyset$ a menos que $h = g_i$, $i \in \{1, ..., k\}$.

Esta proposición tan sencilla es útil para caracterizar vecindades del plano hiperbólico y será utilizada en demostraciones posteriores.

Dentro de los dominios fundamentales localmente finitos nosotros utilizaremos polígonos fundamentales convexos, definidos de la siguiente manera:

Definición 9. *Sea G un grupo fuchsiano. Diremos que P es un* polígono fundamental convexo *para G si P es dominio fundamental convexo localmente finito.*

La definición de polígono fundamental convexo no supone ninguna estructura sobre la frontera de P. Sin embargo, es posible definir los lados y vértices de este tipo de regiones, como se verá posteriormente.

Proposición 13. *Sea G un grupo fuchsiano actuando en Δ. Entonces, G tiene al menos un polígono fundamental convexo.*

Para demostrar esta proposición se construye un dominio fundamental, llamado el polígono de Dirichlet, de la siguiente manera:

Sea G un grupo fuchsiano actuando en Δ y z un punto en Δ tal que:

$$\Gamma_z = \{T \in G \ : \ T(z) = z\} = \{Id\}.$$

Esto quiere decir que el subgrupo estabilizador del punto z es trivial. La existencia del punto z se deduce del hecho que el grupo G es a la sumo numerable, ya que es un grupo fuchsiano, y por tanto la cantidad de puntos fijos de G es a lo más numerable. Esto implica que existen una infinidad de puntos en Δ que no son puntos fijos de ninguna de las transformaciones en G distintas de la identidad. Una vez elegido el punto z consideremos para cada $g \in G$ el siguiente conjunto:

$$H_g(z) = \{w \in \Delta : \rho(z, w) < \rho(z, g(w))\}.$$

Definimos el *polígono de Dirichlet* $D(z)$ de G con centro en el punto z como

$$D(z) = \bigcap_{g \in G - \{Id\}} H_g(z).$$

El conjunto $D(z)$ es un polígono fundamental convexo ([1], p.227).

Cuando todas las transformaciones en G tienen un círculo isométrico es posible construir un polígono fundamental convexo, conocido como el *polígono de Ford*, tomando la cerradura hiperbólica del conjunto de puntos en Δ que se encuentran en el exterior de todos los círculos isométricos de elementos en G. Para ver una prueba de este hecho consulte ([5], p.61).

3.3.1. Polígonos fundamentales convexos

La definición de polígono fundamental convexo no supone ninguna estructura sobre la frontera de P, de hecho la frontera de este tipo de regiones puede tener puntos e incluso arcos contenidos en el S^1 o *círculo al infinito*. Aún así será posible definir los lados y vértices de un polígono.

Definición 10. *Sea P un polígono fundamental convexo asociado a un grupo fuchsiano G entonces:*

- *Diremos que un segmento $\ell \subset \overline{\Delta}$ es un* lado *de P si ℓ es un segmento de longitud positiva de la forma:*

$$\ell = \widetilde{P} \cap g(\widetilde{P})$$

  para alguna $g \in G$ distinta de la identidad.

- *Diremos que un punto $v \in \overline{\Delta}$ es un* vértice *de P si:*

$$v = \widetilde{P} \cap g(\widetilde{P}) \cap h(\widetilde{P})$$

  para g, h dos elementos distintos en $G \backslash \{Id\}$.

Observemos que $\widetilde{P} \cap g(\widetilde{P})$ es un convexo que no contiene tres puntos no-colineales; de lo contrario contendría un triángulo no degenerado de área positiva, lo que implicaría que $g(P) \cap P \neq \emptyset$ (ya que la medida de $\partial(P)$ es cero). Por lo tanto $\widetilde{P} \cap g(\widetilde{P})$ es un segmento de geodésica.

Denotaremos al conjunto de lados de P como $S(P)$ y al conjunto formado por los vértices de P como $V(P)$. Por construcción sabemos que los lados y vértices de P están contenidos en la frontera de P, denotada por $\partial(P)$. De hecho ocurre que $\partial(P) = S(P) \cup V(P)$. Además, cada vértice se encuentra en exactamente dos lados y es punto final de ambos y si dos lados se intersectan lo hacen un vértice ([1], p.218).

Por último, el grupo G es numerable y solamente una cantidad finita de imágenes de $\widetilde{P}$ pueden intersectar a un compacto en Δ, por lo tanto $S(P)$ es a lo sumo numerable y únicamente una cantidad finita de lados pueden intersectar a un compacto contenido en Δ.

3.3.2. Apareamiento de lados

A partir de la definición de los lados de P construiremos una función de apareamiento de lados de la forma siguiente: sea G^* el conjunto de elementos $g \in G$ para los cuales $g(\widetilde{P}) \cap \widetilde{P}$ es un lado de P, entonces existe una función:

$$\Phi : G^* \to S(P)$$

$$\Phi(g) = g(\widetilde{P}) \cap \widetilde{P}.$$

Es claro que Φ es suprayectiva. Para ver que además es inyectiva supongamos que $\Phi(g) = \Phi(h)$. Entonces $g(\widetilde{P}) \cap \widetilde{P} = h(\widetilde{P}) \cap \widetilde{P}$. La única forma para que esto ocurra es que $g = h$, ya que si dos lados de P se intersectan lo hacen en un vértice. En conclusión, Φ es una biyección.

La existencia de Φ^{-1} implica que para cada lado s existe una única transformación $g_s \in G^*$ tal que:

$$s = g_s(\widetilde{P}) \cap \widetilde{P}.$$

Definamos ahora la *función de apareamiento de lados*:

$$A : S(P) \to S(P),$$

$$A(s) = (\Phi^{-1}(s))^{-1}(s).$$

Veamos que esta bien definida: sea $s \in S(P)$, entonces $\Phi^{-1}(s) = g_s$ y

$$A(s) = g_s^{-1}(s) = g_s^{-1}(\widetilde{P}) \cap \widetilde{P} = s'.$$

Observemos que s' es efectivamente un lado de P ya que la transformación A es la composición de isometrías.

Además tenemos que:

$$(s')' = (g_{s'})^{-1}(s') = g_s(s') = s.$$

Por lo tanto A induce una partición sobre los lados de P donde las clases de equivalencia son conjuntos de la forma $\{s, s'\}$.

El conjunto G^* contiene las transformaciones de apareamiento de lados así que al aplicar los elementos de G^* al polígono $\widetilde{P}$ se obtienen los elementos de la teselación $\{g(\widetilde{P}) \mid g \in G\}$ adyacentes a P. Así que la imagen de un elemento de la teselación bajo el conjunto G^* está formada por los elementos de la teselación que son adyacentes a él; esto implica que es posible teselar $\mathcal{H}$ utilizando los elementos de G^* y por lo tanto G^* debe generar al grupo G.

Teorema 7. *Sea P un polígono fundamental convexo para un grupo fuchsiano G. Entonces G^* genera a G.*

Demostración. Sabemos que Δ es un conjunto conexo, por lo tanto no existen dos conjuntos cerrados no vacíos y ajenos cuya unión sea Δ.

Consideremos lo siguientes conjuntos:

$$X = \bigcup_{S \in \langle G^* \rangle} S(\widetilde{P}),$$

$$Y = \bigcup_{S \in G \setminus \langle G^* \rangle} S(\widetilde{P}).$$

Como G es un grupo fuchsiano G es no trivial y G^* es distinto del vacío, por lo tanto $X \neq \emptyset$.

Supongamos que $X \cap Y \neq \emptyset$. Entonces, existen $S_1 \in \langle G^* \rangle$ y $S_2 \in G \backslash \langle G^* \rangle$ tales que $S_1(\widetilde{P}) \cap S_2(\widetilde{P}) \neq \emptyset$. El que esta intersección sea no vacía conlleva dos posibilidades: $S_1(\widetilde{P})$ y $S_2(\widetilde{P})$ se intersectan en un lado o se intersectan en un vértice.

Caso 1: Supongamos que $S_2(\widetilde{P})$ y $S_1(\widetilde{P})$ comparten un lado ℓ.

Entonces $S_1^{-1} \circ S_2(\ell)$ es un lado de P. Esto quiere decir que $S_1^{-1} \circ S_2 = g$ para alguna transformación $g \in \Gamma^*$, lo equivale a decir que $S_2 = S_1 \circ g \in \langle G^* \rangle$, que es una contradicción.

Caso 2: Supongamos que S_1 y S_2 comparten un vértice v.

Entonces $S_1^{-1} \circ S_2(\widetilde{P})$ intersecta a P en un vértice u. Como P es localmente finito sólo una cantidad finita de imágenes de P contienen al vértice u. Por lo tanto podemos conectar a P con $S_1^{-1} \circ S_2(\widetilde{P})$ por medio de una cadena finita de elementos en $G(\widetilde{P})$ donde dos elementos consecutivos comparten un lado. Aplicando repetidas veces el Caso 1 obtenemos que $S_2 \in \langle G^* \rangle$, que es una contradicción.

Por lo tanto los conjuntos X, Y son ajenos. Veamos ahora que son cerrados, comencemos con el conjunto X: tomemos una sucesión z_n de elementos en X que converge a un elemento $z_0 \in \Delta$. Como el punto z_0 está en Δ existe una transformación $T \in G$ tal que $z_0 \in T(\widetilde{P})$. Por la Proposición 12 sabemos que existe N una vecindad de z_0 que intersecta a una cantidad finita de imágenes de $\widetilde{P}$ bajo G. Por lo tanto N intersecta a una cantidad finita de elementos en X; así que existe un elemento $S_0(\widetilde{P}) \in X$ que contiene una subsucesión $\{z_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge a z_0. El conjunto $S_0(\widetilde{P})$ es cerrado así que $z_0 \in S_0(\widetilde{P}) \in X$, lo cual implica que X es cerrado.

Análogamente se demuestra que Y es cerrado. En conclusión X, Y son dos cerrados ajenos tales que $\Delta = X \cup Y$. Como Δ es conexo y $X \neq \emptyset$ se tiene que $Y = \emptyset$.

□

De teorema anterior se desprende el siguiente corolario:

Corolario 2. *Sea G un grupo fuchsiano finitamente generado y P un polígono fundamental convexo para G. Entonces, P tiene un número finito de lados.*

3.3.3. Ciclo de vértices

En la sección anterior indujimos una partición de los lados de P utilizando las funciones de apareamiento de lados, ahora utilizaremos esas mismas transformaciones para inducir una partición en el conjunto $V(P)$. Los elementos de esta partición del conjunto $V(P)$ están formados por los denominados ciclos de vértices. El ciclo de vértices asociado a un vértice v está constituido por los elementos de $V(P)$ que son imágenes de v bajo algún elemento de G. Para encontrar estas clases de equivalencia utilizaremos la siguiente construcción:

Sea P un polígono fundamental convexo de un grupo fuchsiano finitamente generado. Por el Corolario 2 sabemos que P tiene un número finito de lados a los que llamaremos $\{s_1, \ldots, s_n\}$. Sea w_1 un vértice de P, nombremos los lados adyacentes a w_1 como ℓ_1 y ℓ_1'. Sabemos que $g_{\ell_1'}(\ell_1')$ es un lado de P y que la imagen del vértice w_1 bajo la transformación $g_{\ell_1'}$ es un elemento de $V(P)$. Sean $w_2 = g_{\ell_1'}(w_1)$ y $\ell_2 = g_{\ell_1'}(\ell_1')$, al otro lado de P adyacente a w_2 lo llamaremos ℓ_2'. Aplicando $g_{\ell_2'}$ obtenemos el vértice $w_3 = g_{\ell_2'}(w_2)$ y el lado $\ell_3 = g_{\ell_2'}(\ell_2')$, al otro lado de P adyacente a w_3 lo llamaremos $\ell_{3'}$. Continuando con esta construcción obtenemos parejas de la forma (w_i, ℓ_i). Como el número de vértices de P es finito debe ocurrir que $w_i = w_j$ con $1 \leqslant j \leqslant i$. Digamos que w_{k+1} el primero de dichos vértices; esto quiere decir que $w_{k+1} = w_i$ para alguna $i \leqslant k$ y que para toda $1 \leqslant j \leqslant k$ distinta de i se tiene que $w_i \neq w_j$.

Si $k+1 = 3$ tenemos que $g_{\ell_2}'(w_2) = w_1$ y $g_{\ell_2}'(\ell_2') = \ell_1$. Supongamos que $k+1 \geqslant 4$. Sabemos que cada lado de P está asociado con otro por medio de un elemento de G^*, lo cual implica que cada vértice de P está asociado con a lo más otros dos vértices por medio de elementos en G^*. Por la construcción anterior tenemos que cada w_i está relacionado con w_{i-1} y w_{i+1} para toda $i \in \{2, \ldots, k-1\}$, por lo tanto w_k no puede estar relacionado con ninguno de los vértices w_i si $2 \leqslant i \leqslant k-2$. Esto implica que w_k está relacionado con w_1, por lo tanto $w_{k+1} = w_1$.

Sabemos que ℓ_i está relacionado con ℓ_{i-1}' para toda $i \in \{2, \ldots, k-1\}$ y que esta asociación es única. Entonces, como ℓ_{k+1} contiene a w_1 el lado ℓ_k' debe estar relacionado con ℓ_1; ya que ℓ_1' está relacionado con ℓ_2 que por hipótesis es distinto de ℓ_k'. Por lo tanto,la pareja (w_{k+1}, ℓ_{k+1}) es igual a (w_1, ℓ_1). Esto implica que mediante la construcción anterior se obtiene una cantidad finita de parejas, estas parejas son (w_i, ℓ_i) con $1 \leqslant i \leqslant k$.

Definición 11. *Al conjunto de vértices* $(w_1, ...w_k)$ *obtenidos de la construcción anterior se le llama* ciclo de vértices *iniciado en el vértice* w_1 *con lado* ℓ_1. *A las transformaciones* $h_i = g_{\ell_i'}$ *con* $1 \leqslant i \leqslant k$ *se les llama* generadores *del ciclo en* w_1.

Es importante denotar que al hablar del ciclo de vértices correspondiente al vértice w_1 nos referimos al conjunto $\{w_1, ...w_k\}$ y cuando nos referimos al ciclo de vértices iniciado en un lado en específico del polígono estamos hablando de un ordenamiento del ciclo de vértices.

Veamos ahora cómo es el ciclo de vertices si comenzamos en (w_1, ℓ_1'). En esta nueva construcción denotaremos a las vértices por u_i y a los lados por l_i, entonces $(w_1, \ell_1) = (u_1, l_1)$. Para obtener (u_2, l_2) aplicamos la transformación g_{ℓ_1} al lado ℓ_1. Sabemos que $g_k(\ell_k') = \ell_1$ por lo tanto $g_{\ell_1} = g_k^{-1}$; esto implica que $u_2 = v_k$ y que $l_2 = \ell_k'$. Para obtener la pareja (u_3, l_3) debemos aplicar la transformación g_{ℓ_k} al lado ℓ_k. Sabemos que $\ell_k = g_{k-1}(\ell_{k-1}')$ por lo tanto $g_{\ell_k} = g_{k-1}^{-1}$; esto implica que $u_3 = w_{k-1}$ y que $l_3 = \ell_{k-1}'$. Continuando de esta manera se obtenemos que el ciclo de vértices que inicia en w_1 con lado ℓ_1' es $(w_1, w_k, ..., w_2)$ y que los generadores son $(h_k^{-1}, ..., h_1^{-1})$.

En conclusión, a cada vértice v se le pueden asociar dos ordenamientos de su ciclo de vértices que dependen del lado adyacente a v que se elija para comenzar. Además, si v' es un vértice en el ciclo de vértices de v los dos ciclos de vértices asociados a v' consisten en reordenamientos del ciclo de vértices de v. Para ver que los vértices que forman el ciclo de vértices de un elemento $v \in V(P)$ coinciden con la clase de equivalencia formada por los $w \in V(P)$ tales que $g(w) = v$ para alguna $g \in G$ haremos una construcción que nos permita obtener todos los elementos de la teselación $G(\widetilde{P})$ que tienen a v como vértice. Una vez hallados estos elementos podemos saber cuáles son los vértices de P que son preimágenes de v bajo algún elemento del grupo. Para esto consideremos el ciclo de vértices iniciado en (w_1, ℓ_1) y sus generadores. Sea:

$$a = h_k \circ \cdots \circ h_1.$$

Entonces w_1 es un punto fijo de a. Como el tipo de transformación que es a depende de la ubicación de su punto fijo debemos considerar dos casos: $w_1 \in \Delta$ o $w_1 \in S^1$. Supongamos primero que $w_1 \in \Delta$, entonces como G es un grupo fuchsiano sabemos que a es una transformación elíptica de orden finito, digamos que el orden de a es ν.

Por construcción sabemos que si $1 \leqslant i \leqslant k$:

$$g_i(\widetilde{P}) \cap \widetilde{P} = \ell_{i+1}.$$

Por lo tanto, si $3 \leqslant m \leqslant k$ tenemos que:

$$[h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_m(\widetilde{P})] \cap [h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_m \circ h_{m-1}(\widetilde{P})] = h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_m(\ell_m).$$

Además tenemos que:

$$h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_m(\ell_m) \ni h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_m(w_m) = w_1.$$

De esta forma obtenemos $k-1$ imágenes de $\widetilde{P}$ que contienen al vértice w_1. La igualdad anterior también nos dice que el vértice w_1 es imagen bajo algún elemento de G del vértice w_m para toda $2 \leqslant m \leqslant k$.

Sea $A_1 = h_k(\widetilde{P})$ y continuemos la numeración de tal forma que A_i sea adyacente a A_{i+1} si $1 \leqslant i \leqslant k-2$. Llamemos A_0 a $\widetilde{P}$ y consideremos el conjunto:

$$A = \bigcup_{i=0}^{p-1} A_i.$$

Al aplicar la transformación a a los elementos en A tenemos que $a(A_i)$ es adyacente a $a(A_{i+1})$ si $1 \leqslant i \leqslant k-2$ y además:

$$\begin{aligned} a(A_0) \cap A_{k-1} = & \; [h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_1(\widetilde{P})] \cap [h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_2(\widetilde{P})] \\ = & \; h_k \circ h_{k-1} \circ \ldots \circ h_2(\ell_2). \end{aligned}$$

Al aplicar la transformación a^2 tenemos que $a^2(A_i)$ es adyacente a $a^2(A_{i+1})$ si $1 \leqslant i \leqslant k-2$, y que $a^2(A_0)$ es adyacente a $a(A_{k-1})$. Continuando de esta forma obtenemos que $a^n(A_i)$ es adyacente a $a^n(A_{i+1})$ si $1 \leqslant i \leqslant k-2$ y que $a^n(A_0)$ es adyacente a $a^{n-1}(A_{k-1})$ siempre y cuando $2 \leqslant n \leqslant \nu - 2$.
Al llegar a la transformación $a^{\nu-1}$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a^{\nu-1}(A_{k-1}) \cap \widetilde{P} = & \; a^{\nu-1} \circ (h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_2(\widetilde{P})) \cap \widetilde{P} \\ = & \; a^{\nu} \circ (h_1^{-1}(\widetilde{P})) \cap \widetilde{P} \\ = & \; \ell_1'. \end{aligned}$$

Esto implica que al aplicar iterados de a a los conjuntos A_i obtenemos todos los elementos de la teselación $G(\widetilde{P})$ que tienen a w_1 como vértice; así que los elementos del ciclo de vértices de w_1 son los únicos elementos de $V(P)$ cuya imagen bajo algún elemento de G coincide con w_1. Por lo tanto el ciclo de vértices de w_1 coincide con la clase de equivalencia formada por todas las preimágenes del vértice w_1 bajo elementos de G. Además el razonamiento anterior nos indica que número de elementos de la teselación que pasan por w_1 es νk.

Veamos ahora qué ocurre cuando el vértice $w_1 \in S^1$, para ello utilizaremos la siguiente proposición.

Proposición 14. *Sea G un grupo fuchsiano finitamente generado y P un polígono fundamental convexo para G. Si v es un vértice de P tal que $v \in S^1$ entonces v es punto fijo de una transformación parabólica en G.*

Demostración. Sea v un vértice de P tal que $v \in S^1$. Componiendo los generadores del ciclo de vértices en v obtenemos una transformación g_0 que fija a v. Como $v \in S^1$ entonces g_0 no puede ser elíptica. Supongamos que g_0 es hiperbólica; así que g_0 tiene otro punto fijo en S^1 distinto de v, llamémosle v'. Sea A a la geodésica que une a v con v', esta geodésica es denominada *eje* de g_0.

Tomemos $[z, v) \subset P$ un segmento de longitud positiva y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $[z, v)$ tales que $z_n \to v$. Entonces existe una sucesión $a_n \in A$ tal que $\rho(a_n, z_n) \to 0$.

Como A es una geodésica que une dos puntos fijos de g_0, A es g_0-invariante y $g_0(a_n) \in A$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $K' = [a_1, g_0(a_1)]$ o $K' = [g_0(a_1), a_1]$, dependiendo del orden en el que aparezcan dichos puntos. Para cada punto a_n existe $g_n \in G$ (g_n es un iterado de g_0)

tal que $g_n(a_n) \in K'$. Notemos que el hecho de que $a_n \to v$ implica la existencia de infinidad de g_n's distintas.

Sea $K \subset \Delta$ un compacto que contenga a K'.

Sabemos que $\rho(z_n, a_n) \to 0$ y que cada una de las transformaciones g_n es una isometría, entonces $\rho(g_n(z_n), g_n(z_n)) \to 0$; lo cual implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$ entonces $h_n(z_n) \in K$. Esto es una contradicción, ya que K solo puede intersectar un número finito de imágenes de P. Por lo tanto, g_0 es parabólica.

$\square$

De la proposición anterior se concluye que si w_1 es un vértice de P contenido en S^1 entonces la transformación a es parabólica. Así que el orden de a no es finito. Aplicando iterados de la transformación a a elementos en A obtenemos una infinidad de elementos de la teselación que contienen a w_1; de hecho mediante este proceso se obtienen todos los elementos de la teselación contienen a w_1. Además, en este caso el ciclo de vértices de w_1 también coincide con la clase de equivalencia formada por todas la preimágenes de w_1 bajo transformaciones en G.

Capítulo 4

Transformaciones de Markov asociadas a grupos fuchsianos

En este capítulo trabajaremos con distintas propiedades de los grupos fuchsianos y sus polígonos fundamentales para construir una transformación $f : S^1 \to S^1$ que sea *orbitalmente equivalente* con Γ, un grupo fuchsiano del primer tipo finitamente generado. Esto quiere decir que excepto por una cantidad finita de parejas x, y en S^1 se tiene que: $x = g(y)$ para alguna $g \in \Gamma$ sí y sólo sí existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $f^p(x) = f^q(y)$. Esta relación entre la transformación f y el grupo Γ nos permitirá concluir que ambos grupos tienen el mismo comportamiento asintótico. Para demostrar la equivalencia entre las dos dinámicas utilizaremos un polígono fundamental convexo para el grupo Γ que tenga como lados a los círculos isométricos de los generadores del grupo Γ; este polígono nos permitirá inducir una partición en el círculo unitario, por medio de la cual definiremos la transformación f.

Además, demostraremos que si el polígono fundamental utilizado para construir la transformación f no tiene vértices parabólicos la partición que induce sobre el círculo unitario es finita y f es una transformación de Markov. En caso que el polígono asociado a Γ tenga vértices parabólicos encontraremos un conjunto $K \subset S^1$ tal que el primer retorno de f a K es también una transformación de Markov.

4.1. Polígono fundamental

En esta sección construiremos una transformación $f : S^1 \to S^1$ a partir de Γ un grupo fuchsiano del primer tipo finitamente generado. La construcción de la transformación f se basa en las propiedades de un polígono fundamental convexo para el grupo Γ por lo tanto iniciaremos la sección analizando este tipo de regiones.

Sea Γ un grupo fuchsiano finitamente generado del primer tipo. Como Γ es un grupo fuchsiano podemos utilizar como región fundamental un polígono fundamental convexo P. El Corolario 2 nos dice que P tiene un número finito de lados, digamos $\{s_i\}_{i=1}^n$. Más aun, como Γ es un grupo fuchsiano del primer tipo $\Lambda(\Gamma) = S^1$, esto implica que ningún lado de P está contenido en S^1; ya que los lados de un polígono fundamental no están contenidos en $\Lambda(\Gamma)$. Entonces tiene sentido considerar las geodésicas que contienen a los lados de P, llamemos $C(s_i)$ a la geodésica que contiene al lado s_i. Queremos que cada una de las geodésicas $C(s_i)$ coincida con el círculo isométrico de la transformación g_i, para lograrlo debemos garantizar que todos los elementos en Γ^* cumplan que $\beta \neq 0$ en la ecuación (3.1). Sabemos que $\beta = 0$ únicamente para transformaciones elípticas que tienen al origen como punto fijo así que para evitar que $\beta = 0$ para alguna transformación en Γ basta componer al grupo con g_0, donde g_0 es una transformación parabólica en $\mathcal{M}(\Delta)$ que envía el origen a un punto z_0 tal que $g(z_0) \neq z_0$ para toda $g \in \Gamma$. Como la dinámica del Γ es la misma que la del grupo $\Gamma' = \{g \circ g_0 \mid g \in \Gamma\}$ podemos suponer que el origen no es punto fijo de ningún elemento en Γ y por lo tanto todos elementos en Γ tienen círculo isométrico.

Sea N la red en Δ formada por todas las imágenes bajo Γ de lados de P, supongamos que N cumple las siguientes dos propiedades:

i) $C(s_i)$ es el círculo isométrico de g_{s_i} para toda $1 \leqslant i \leqslant n$.

ii) $C(s_i)$ esta totalmente contenido en N para toda $1 \leqslant i \leqslant n$.

Entonces cada geodésica $C(s_i)$ contiene un lado del polígono P y es el círculo isométrico de una transformación de apareamiento de lados. Observemos que el polígono P no es un triángulo, ya que si P tiene tres lados una de las transformaciones de apareamiento de lados debe invertir la orientación, y esto no puede ocurrir en un grupo fuchsiano.

Veamos que relación existe entre parejas de geodésicas de la forma $C(s_i)$.

Lema 2. *Si el polígono P no es un triángulo y s y s' son dos lados no consecutivos de P, entonces $C(s)$ y $C(s')$ no se intersectan.*

Demostración. Supongamos que las geodésicas $C(s)$ y $C(s')$ se intersectan en un punto Q. Sean $s = s_0, s_1, \ldots, s_k = s'$ los lados de P más cercanos al punto Q comprendidos entre s y s'. Llamemos A y B a los vertices de s y s' más cercanos al punto Q y sea γ a la geodésica que une A con B.

Veamos que ocurre si el conjunto $\{s_1, \ldots s_{k-1}\}$ tiene un único elemento. En este caso los lados s y s' están separados por un solo lado s_1 contenido en la geodésica γ. Sea $\rho(\widetilde{P})$ la copia de $\widetilde{P}$ adyacente a $\widetilde{P}$ en s_1. Denotemos por t y t' a los lados de $\rho(\widetilde{P})$ adyacentes a s_1 en los vértices A y B, respectivamente. Si t se encuentra en el exterior del triángulo AQB el polígono $\rho(\widetilde{P})$ está contenido entre $C(s)$ y $C(t)$; lo cual implica que s_1 no es un lado de $\rho(\widetilde{P})$. Entonces t está contenido en el triángulo AQB; es posible que t coincida con un segmento de AQ. Por un razonamiento análogo sabemos que t' esta contenido en el triángulo AQB y que puede coincidir que un segmento de QB. Es importante observar que la única posibilidad no válida es que $t = AQ$ y $t' = QB$, ya que esto implicaría que P es un triángulo y estamos excluyendo esta posibilidad.

Ahora probaremos que $C(t) \cap C(t') \neq \emptyset$, para ello consideraremos la geodésica $C(t)$. Sabemos que los extremos de $C(t)$ pertenecen a S^1 por lo cual $C(t)$ intersecta la frontera del triángulo AQB en dos puntos, $\{t_1, t_2\}$. Uno de estos puntos debe ser el vértice A, sin perdida de generalidad supongamos que $t_1 = A$. El punto t_2 puede pertenecer al segmento AQ o al segmento QB. Consideremos ahora la geodésica $C(t')$, por un argumento análogo al utilizado para $C(t)$ sabemos que $C(t')$ intersecta la frontera del triángulo AQB en dos puntos, llamémoslos $\{t'_1, t'_2\}$. Uno de estos dos puntos conincide con B, supongamos que es t'_1. El punto t'_2 se puede estar en el segmento AQ o en el segmento QB. Dependiendo de la ubicación de t_2 y t'_2 tenemos las siguientes posibilidades:

i) Supongamos que $t_2 \in AQ$ y $t'_2 \in AQ$.
Entonces $C(t) = C(s)$ y $C(t) \cap C(t') = t'_2$.

ii) Supongamos que $t_2 \in AQ$ y $t'_2 \in QB$.
Entonces $C(t) = C(s)$ y $C(t') = C(s')$. Por lo tanto $C(t) \cap C(t') = Q$.

iii) Supongamos que $t_2 \in QB$ y $t'_2 \in AQ$.
Entonces $C(t) \cap C(t') = p$ con $p \in \operatorname{int}(AQB)$.

iv) Supongamos que $t_2 \in QB$ y $t'_2 \in QB$.
Entonces, $C(t') = C(s')$ y $C(t) \cap C(t') = t_2$.

En conclusión, $C(t) \cap C(t') = Q'$ para algún $Q' \in AQB$. El punto Q' nos permite construir el triángulo $AQ'B$ que está totalmente contenido en el triángulo AQB. Repitiendo el argumento anterior para el triángulo $AQ'B$, en vez del AQB, obtenemos $\phi(\widetilde{P})$ una copia de $\widetilde{P}$ adyacente a $\rho(\widetilde{P})$ totalmente contenida en el triángulo $AQ'B$ que tiene dos lados no consecutivos cuyas geodésicas se intersectan en el triángulo $AQ'B$. Continuando de esta manera obtenemos una cantidad infinita de copias disjuntas de $\widetilde{P}$ contenidas en el triángulo AQB. Cada una de estas copias tiene área igual al área de $\widetilde{P}$ lo cual implica que el área del AQB es infinita; esto es una contradicción ya que $\widetilde{P}$ está totalmente contenido en Δ y por lo tanto tiene área finita. En conclusión, $C(s) \cap C(s') = \emptyset$.

Ahora analicemos el caso general. Supongamos que $C(s)$ y $C(s')$ se intersectan en un punto Q. Nombremos los lados de P más cercanos a Q, entre s y s', como $s = s_0, s_1, \ldots, s_k = s'$. Sean A y B los vértices de s y s' más cercanos a Q ,respectivamente, y sea γ la geodésica que une A con B. Sabemos que P es convexo por lo tanto $s_1, \ldots, s_{k-1}$ se encuentran dentro del triángulo AQB. Por otro lado, los extremos de $C(s_2)$ pertenecen a S^1 lo cual implica que $C(s_2)$ intersecta la frontera del triángulo AQB en dos puntos. Si $C(s_2)$ intersecta dos veces a γ entonces $C(s_2) \subset \gamma$ y $C(s_1) \subset \gamma$ de donde concluimos que $s_1 = s_2$. Por lo tanto $C(s_2) \cap \gamma$ contiene a lo más un punto y $[C(s_2) \cap (C(s) \cup C(s'))] \neq \emptyset$. Para que suceda lo anterior hay dos posibilidades:

i) Supongamos que $C(s_2)$ intersecta a $C(s)$.

Entonces s y s_2 son dos lados no consecutivos de P separados únicamente por el lado s_1 tales que $C(s)$ y $C(s_2)$ se intersectan. Bajo estas hipótesis podemos realizar la construcción anterior para llegar a una contradicción.

ii) Supongamos que $C(s_2)$ intersecta a $C(s')$.

Aplicando un razonamiento análogo al utilizado para la geodésica $C(s_2)$ podemos encontrar dos lados no consecutivos de P separados por un sólo lado tales las geodésicas que los contienen se intersecten. La existencia de estos lados se debe a que el número de lados entre s y s' es finito. Una vez encontrado este par de lados podemos llevar a cabo la primera construcción de esta proposición y encontrar una cantidad infinita de triángulos con la misma área contenidos en uno de área finita, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, si s y s' son dos lados no consecutivos de P las geodésicas $C(s)$ y $C(s')$ no se intersectan. $\square$

Esta relación entre parejas de elementos $C(s_i)$ nos permite inducir una partición de S^1 como veremos a continuación.

4.2. Construcción de la Transformación asociada

Sean $s_1 \ldots s_n$ los lados de P, numerados alrededor del círculo en sentido opuesto a la manecillas del reloj, y sean $g_i = g_{s_i}$ los elementos correspondientes en Γ. Nombremos los extremos de $C(s_i)$ como P_i y Q_i (con $Q_{n+1} = Q_1$) de tal forma que P_i esté antes de Q_i en sentido opuesto a las manecillas del reloj; por el Lema 2 estos puntos deben ocurrir en el orden P_1, Q_1, P_2, Q_2, $\ldots P_n, Q_n$. Los puntos $\{P_i\}_{i=1}^n$ junto con el conjunto $\{Q_i\}_{i=1}^n$ forman una partición de S^1. Es por medio de esta partición que definiremos la transformación:

$$f : S^1 \to S^1$$

$$f(x) = g_i(x),$$

si $x \in S^1$ se encuentra en el arco $[P_i, P_{i+1})$. El *arco* que une a los puntos p y q es el segmento de S^1 que se obtiene al ir del punto p al punto q en sentido opuesto a las manecillas del reloj, este arco será denotado como $\widehat{pq}$. Para distinguir si los arcos son abiertos o cerrados escribiremos $[p, q]$ y (p, q) respectivamente.

4.3. Partición asociada

Para obtener la partición de Markov asociada a la transformación f construiremos un refinamiento de la partición inducida por los puntos P_i y los puntos Q_i de la manera siguiente: sea v_i el vértice de P en la intersección de s_{i-1} y s_i, llamemos $N(v_i)$ a los arcos en N que pasan por v_i. Supusimos que N cumple la propiedad $ii)$ por lo tanto los arcos en $N(v_i)$ son geodésicas completas. Sea $W(v_i)$ el conjunto de puntos donde los arcos en $N(v_i)$ intersectan a S^1; cada una de estas geodésicas intersecta a S^1 en dos puntos por lo tanto la cardinalidad de $W(v_i)$ es par, digamos que es igual a $2k_i$, donde k_i es el número de elementos en $N(v_i)$. La Proposición 14 nos dice que $k_i = \infty$ si y sólo si v_i es punto fijo de una transformación parabólica. Sin importar que $2k_i$ sea finito o no los puntos en $W(v_i)$ inducen una partición de S^1. Cuando $2k_i$ es finito la partición tiene $2k_i$ intervalos y podemos ver al círculo S^1 como la unión de $2k_i$ intervalos disjuntos:

$$R_1(v_i), \dots, R_{k_i-1}(v_i), R_{k_i}(v_i), L_{k_i}(v_i), \dots, L_{k_i}(v_i),$$

donde $L_{k_i}(v_i) = [P_i, Q_i)$, este intervalo se utilizará como referencia para ubicar al resto de los elementos de la partición en el círculo y lo llamaremos intervalo central. El intervalo central es semi abierto así que el resto de los intervalos de la partición deben ser de la forma $[a, b)$ ya que esta es la única forma de construir una partición con elementos disjuntos una vez fijado el intervalo central. Los intervalos $L_j(v_i)$ están numerados de forma decreciente a partir del intervalo central en sentido anithorario, con esta numeración se tiene que P_{i+1} es extremo del intervalo $L_1(v_i)$, llamando T_i al otro extremo tenemos que $L_1(v_i) = [T_i, P_{i+1})$.

Los intervalos $R_s(v_i)$ están numerados de forma decreciente a partir del intervalo central en sentido horario. En este caso el punto P_{i-1} es extremo del intervalo $R_2(v_i)$, llamando S_i al otro de sus extremos tenemos que $R_2(v_i) = [P_{i-1}, S_i)$. Finalmente, el intervalo $R_1(v_i)$ coincide con $[Q_{i+1}, P_{i-1})$.

En caso que $2k_i$ sea infinito se comienza la numeración a partir de los intervalos $R_1(v_i)$ y $L_1(v_i)$.

Considerando todas las particiones $W(v_i)$ asociadas vértices de P obtenemos el conjunto:

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} W(v_i) \tag{4.1}$$

Por construcción tenemos que W es un refinamiento de la partición inducida por lo puntos $\{P_i, Q_i\}$ y que la cantidad de puntos en W es a lo sumo numerable, de hecho W es finito si y sólo si P no tiene vértices parabólicos.

Una observación importante: los puntos T_i preceden, en el sentido antihorario, a los puntos S_{i+1} para toda $1 \leqslant i \leqslant n$. Esto debido a que el segmento que une a v_i con T_i y el que une a v_{i+1} con S_{i+1} son arcos contenidos en lados no consecutivos de P, y por lo tanto por el Lema 2 no se pueden intersectar.

Para que el conjunto de puntos en W induzca una partición de Markov debemos probar que es f-invariante.

Proposición 15. *W es un conjunto f-invarinte, esto quiere decir que $f(W) \subset W$.*

Demostración. Sea $A \in W$. Entonces $A \in [P_j, P_{j+1})$ para alguna $i \in \{1 \ldots n\}$, esto implica que A pertenece al conjunto $W(v_j) \cup W(v_{j+1})$. Veamos que ocurre si $A \in W(v_j)$. Sea γ el segmento de geodésica que une a v_j con A, entonces $\gamma \subset N(v_j)$. Por definición $f(A) = g_j$, así que $f(\gamma)$ es el segmento que une a $g_j(v_j)$ con $g_j(A)$. Como $g_j(v_j)$ es un vértice de P se tiene que $g_j(\gamma) \in W(g_j(v_j))$.

La demostración del caso $A \in W(v_{j+1})$ es análoga al caso anterior, así que $f(W) \subset W$.

□

4.4. Equivalencia Orbital

Una vez construida la transformación f y la partición W demostraremos que el grupo Γ y la transformación f son orbitalmente equivalentes. Para ello utilizaremos el Teorema 8 y la siguiente proposición.

Proposición 16. *Supongamos que para todas las pareja $x, y \in S^1$ tales que $x = g(y)$ para alguna $g \in \Gamma^*$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $f^p(x) = f^q(y)$. Entonces la transformación f y el grupo Γ son orbitalmente equivalentes.*

Demostración. Por definición de f es claro que si $f^p(x) = f^q(y)$ con $x, y \in S^1$ entonces $x = g(y)$ para alguna $g \in \Gamma$. Para probar la segunda implicación supongamos que para toda pareja de puntos $x, y \in S^1$ tal que $x = g(y)$ para alguna $g \in \Gamma^*$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $f^p(x) = f^q(y)$, llamaremos a esta hipótesis $(*)$.

El Teorema 7 nos dice que Γ^* genera al grupo Γ, por lo tanto todo elemento de Γ se puede expresar como la composición de una cantidad finita de elementos de Γ^*. Demostraremos por inducción sobre la cantidad de elementos requeridos para expresar a $g \in \Gamma$ que si $x = g(y)$ con $x, y \in S^1$ para alguna $g \in \Gamma$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $f^p(x) = f^q(y)$.

Primero demostremos la base de la inducción: $n = 2$. Sean $x, y \in S^1$ tales que $x = h_2 \circ h_1(y)$ con $h_1, h_2 \in \Gamma^*$, entonces:

$$h_1^{-1}(x) = h_2(y).$$

Aplicando la hipótesis $(*)$ al punto x y al punto $h_1^{-1}(x)$ obtenemos $p, q \in \mathbb{N}$ tales que:

$$f^p(h_1^{-1}(x)) = f^q(y).$$

Dependiendo de cuál de los números p o q sea mayor existen dos casos:
Caso 1: Supongamos que $q - p \geqslant 0$. Haciendo $k = q - p$ tenemos que:

$$f^k(h_1^{-1}(x)) = y,$$

lo cual implica que $f^k(x) = h_1(y)$. Aplicando la hipótesis $(*)$ al punto $f^k(x)$ y al punto y obtenemos $p', q' \in \mathbb{N}$ tales que:

$$f^{p'}(f^k(x)) = f^{q'}(y).$$

Caso 2: Supongamos que $p - q \geqslant 0$. Haciendo $k' = p - q$ tenemos que:

$$h_1^{-1}(x) = f^{k'}(y),$$

lo cual implica que $x = h_1(f^{k'}(y))$. Aplicando la hipótesis $(*)$ al punto x y al punto $f^{k'}(y)$ obtenemos $p', q' \in \mathbb{N}$ tales que:

$$f^{k'}(x) = f^{q'}(f^N(y)).$$

Con estos dos casos terminamos la demostración de la base de inducción.

Ahora supongamos que para cualquier pareja de puntos $x, y \in S^1$ tales que $x = h_n \circ \cdots \circ h_1(y)$ con $h_i \in \Gamma^*$ para toda $i \in \{1, \ldots n\}$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $f^p(x) = f^q(y)$; demostremos la misma afirmación para $n + 1$. Sean $x, y \in S^1$ tales que $x = h_{n+1} \circ \cdots \circ h_1(y)$ con $h_i \in \Gamma^*$ para toda $i \in \{1, \ldots n + 1\}$, entonces

$$h_{n+1}^{-1}(x) = h_n \circ \cdots \circ h_1(y).$$

Aplicando la hipótesis de inducción al punto $h_{n+1}^{-1}(x)$ y al punto y tenemos que existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que

$$f^p(h_{n+1}^{-1}(x)) = f^q(y).$$

Esto nos lleva a un caso análogo al de la base de inducción sólo hay que sustituir a la transformación h_1 por la transformación h_{n+1}. $\square$

Esta proposición nos indica que es suficiente demostrar que la equivalencia es válida para elementos en Γ^* para poder concluir que es válida para todos los elementos en Γ. Demostremos la equivalencia:

Teorema 8. *Sea C es el conjunto formado por los puntos $x = Q_i$, $y = Q_i$ y $g = g_{i-1}$. Si $x, y \in S^1 \backslash C$ es una pareja tal que $x = g(y)$ para alguna $g \in \Gamma^*$ existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $f^p(x) = f^q(y)$.*

Demostración. Sea $x, y \in S^1 \backslash C$ una pareja tal que $x = g(y)$ para alguna $g \in \Gamma^*$ entonces:

$$\mid Dg(y) \mid \geqslant 1 \quad \text{o} \quad \mid Dg^{-1}(x) \mid = \frac{1}{\mid Dg(y) \mid} \geqslant 1,$$

ya que el punto y se encuentra en el interior del círculo isométrico de la transformación g o el punto x se encuentra en el interior del círculo isométrico de la transformación g^{-1}. Por hipótesis la transformación $g \in \Gamma^*$ así que $g^{-1} \in \Gamma^*$, sea $g_j = g^{-1}$.

Dependiendo de la ubicación de los punto x, y existen dos posibilidades, la primera de ellas es que x se encuentre en el intervalo:

$$[P_j, Q_{j+1}] = [P_j, P_{j+1}) \cup [P_{j+1}, Q_{j+1}],$$

la segunda es que el punto y se encuentre en el intervalo:

$$[P_i, Q_{i+1}] = [P_i, P_{i+1}) \cup [P_{i+1}, Q_{i+1}].$$

Si $x \in [P_j, P_{j+1})$ tenemos que $f(x) = g_j(x) = y$. Por lo tanto haciendo $p = 1$ y $q = 0$ tenemos que $f^p(x) = f^q(y)$, con lo cual terminamos la demostración. Si $y \in [P_i, P_{i+1})$ tenemos que $f(x) = g_i(x) = y$. Por lo tanto haciendo $p = 1$ y $q = 0$ tenemos que $f^p(x) = f^q(y)$, así que en este caso también hemos terminado.

Veamos que ocurre cuando $x \in [P_{j+1}, Q_{j+1}]$ o $y \in [P_{i+1}, Q_{i+1}]$. Analizaremos que ocurre cuando $x \in [P_i, Q_i]$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$; la demostración cuando $y \in [P_{i+1}, Q_{i+1}]$ es análoga a esta sólo hay que invertir el papel de x con el de y. Queremos demostrar que existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que:

$$f^p(x) = f^q(y) = f^q(g_{i-1}(x)).$$

A las parejas de la forma $(x, g_{i-1}(x))$ con $x \in [P_i, Q_i]$ las llamaremos *badly matched pair* en el vértice v_i, concepto que abreviaremos como *B.M.P.* en el vértice v_i. Un *B.M.P.* está constituido por dos puntos (x, x') en S^1 tales que $x = g(x')$ para alguna transformación $g \in \Gamma^*$ tal que $g(x') \neq f(x')$. Es en este sentido que podríamos decir que la pareja (x, x') está mal emparejada; sin embargo a falta de un mejor término diremos que la pareja (x, x') es un badly matched pair. Notemos que al omitir las parejas $(Q_i, g_{i-i}(Q_i))$ los *B.M.P.* sólo pueden ocurrir en vértices v_i contenidos en Δ.

Para hallar enteros p y q tales que $f^p(x) = f^q(g_{i-1}(x))$ debemos analizar la dinámica de la transformación f en los intervalos de la partición inducida por los puntos en W.

Sabemos que $L_r(v_i) \subset [P_i, P_{i+1})$ si $2 \leqslant r \leqslant k_i$ por lo tanto:

$$f\mid_{L_r(v_i)} = g_i.$$

Como $R_s(v_i) \subset [P_{i-1}, P_i)$ si $2 \leqslant s \leqslant k_{i-1}$ entonces:

$$f\mid_{R_s(v_i)} = g_{i-1}.$$

Estas dos afirmaciones nos permitirán describir la acción de f en el círculo unitario. Como f es una transformación conforme y W es un conjunto f-invariante es suficiente ver cuál es la imagen bajo f de los intervalos $L_{k_i}(v_i)$ y $R_{k_i}(v_i)$ para saber cual es la imagen del resto de los intervalos. Primero veamos a donde envía f a la geodésica $C(s_i)$ que une los puntos P_i y Q_{i+1} y contiene al vértice v_i. Sabemos que $g_i(v_i)$ es un vértice de P, digamos v_j, y que $g_i(s_i)$ es un lado de P. Existen dos lados de P que contienen al vértice v_j entonces hay dos opciones sobre cuales son las imágenes de los puntos P_i y Q_{i+1}:

i) Si $g_i(P_i) = P_j$ entonces $g_i(Q_{i+1}) = Q_{j+1}$.

ii) Si $g_i(P_i) = Q_j$ entonces $g_i(Q_{i+1}) = P_{j-1}$.

Para ver cuál de estas dos posibilidades es la correcta observemos lo siguiente: la imagen del polígono $\widetilde{P}$ bajo la transformación g_i es adyacente a $\widetilde{P}$ únicamente en el lado $g_i(s_i)$, lo cual implica que $g_i(s_{i-1})$ no es un lado de P; entonces $g_i(Q_i)$ y $g_i(P_{i-1})$ no son de la forma P_k o Q_k para ninguna $k \in \{1, \ldots, n\}$. Por otro lado, g_i es una transformación de Möbius y $g_i(v_i) = v_j$ entonces si $g_i(P_i) = P_j$ debe ocurrir que $g_i(Q_i) = Q_j$, lo cual no es posible. Así que $g_i(P_i) = Q_j$ y $g_i(s_i) = s_{j-1}$. Como $g_i(Q_i)$ es distinto de P_j haciendo $L_{k_i-1}(v_j) = [Q_j, w)$ tenemos que $g_i(Q_i) = w$. En conclusión:

$$f(L_{k_i}(v_i)) = L_{k_i-1}(g_i(v_i)).$$

Sabemos que la transformación f es conforme, por tanto mantiene el orden de los puntos en $W(v_i)$, lo que nos lleva a concluir que si $2 \leqslant r \leqslant k_i$:

$$f(L_r(v_i)) = L_{r-1}(g_i(v_i)). \tag{4.2}$$

Por un razonamiento análogo concluimos que si $2 \leqslant s \leqslant k_i$:

$$f(R_s(v_i)) = R_{s-1}(g_{i-1}(v_i)). \tag{4.3}$$

Ahora que sabemos como actúa la transformación en cada uno de los intervalos de S^1 podemos analizar el comportamiento de los puntos de un $B.M.P.$ bajo iteraciones de f. Para ello consideremos $(x, g_{i-1}(x))$ un $B.M.P.$ en el vértice v_i y demostremos que la aplicación de iterados de f a los puntos x y $g_{i-1}(x)$ coincide con la aplicación de elementos de los ciclos de vértices asociados al vértice v_i. Consideremos el ciclo de vértices que comienza en $w_1 = v_i$ con lado s_i, sean $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ los elementos del ciclo y sean $(h_1, h_2, \ldots, h_p)$ los generadores correspondientes. Observemos que $h_1 = g_{i-1}$ y $h_p = g_i^{-1}$. Sea:

$$a = h_p \circ h_{p-1} \circ \cdots \circ h_1.$$

Como $v_i \in \Delta$ la transformación a es de orden finito, sea ν el orden de a.

Consideremos el ciclo de vértices que inicia en el vértice w_1 con lado s_{i-1}. Sabemos que los elementos de este ciclo son $(w_1, w_p, \ldots, w_2)$ y que los generadores correspondientes son $(h_p^{-1}, h_{p-1}^{-1}, \ldots, h_1^{-1})$. Ahora que conocemos ambos ciclos podemos iterar la transformación f. Recordemos que $x \in [P_i, Q_i]$ así que:

$$f(x) = g_i(x) = h_p^{-1}(x).$$

La ecuación (4.2) nos indica que $g_i(x) \in L_{k-1}(w_p)$, así que por definición de la transformación f tenemos que:

$$f^2(x) = h_{p-1}^{-1} \circ h_p^{-1}(x).$$

Para obtener el resto de los iterados de $f(x)$ notemos que si $n \in \{1, ...p-1\}$ entonces:

$$f^n(w_1) = w_{p-(n-1)},$$

y que $f^p(w_1) = w_1$. Así que los iterados de del punto w_1 bajo f coinciden con los elementos su ciclo de vértices. Además, gracias a la ecuación (4.2) sabemos que si $k - n \geqslant 2$:

$$f^n(L_k(w_1)) = L_{k-n}(f^n(w_1)).$$

Estas dos observaciones nos permiten concluir que si $n \in \{2, \ldots, p\}$:

$$f^n(x) = h_{p-(n-1)}^{-1} \circ ... \circ h_{p-1}^{-1} \circ h_p^{-1}(x).$$

Cuando n es mayor que p se aplica la formula anterior para obtener $z = f^p(x)$, después se aplica nuevamente la fórmula para el punto z. Este proceso se repite tantas veces como sea necesario hasta llegar al n-ésimo iterado. Observemos que esta manera de expresar a f sólo es posible hasta el iterado $k-1$ debido a que $f^{k-1}(x) \in L_1(f^{k-1}(w_1))$ y en este caso no es posible aplicar la ecuación (4.2).

Veamos como son los iterados del punto $h_1(x)$. Como f es conforme la ecuación (4.3) implica que $h_1(L_k(w_1)) = R_k(w_2)$. Un procedimiento análogo al utilizado para iterar el punto x pero utilizando el punto $h_1(x)$ y la ecuación (4.3) nos permite concluir que si $n \in \{2, \ldots, p-1\}$:

$$f^n(h_1(x)) = h_p \circ \cdots \circ h_2(h_1(x)).$$

Cuando n es mayor que $p-1$ se aplica la formula anterior para obtener $z = f^{p-1}(x)$, después se aplica h_1 al punto z para obtener el iterado $f^p(h_1(x))$. Si es necesario se aplica nuevamente la formula a $h_1(z)$, este proceso se repite tantas veces como sea necesario hasta llegar al n-ésimo iterado. Observemos que esta representación de los iterados de $h_1(x)$ es válida hasta el iterado $k-1$ ya que $f^{k-1}(h_1(x)) = R_2(f^{k-1}(w_1))$ y en este intervalo ya no es posible aplicar al ecuación (4.3).

En conclusión los iterados de x y $h_1(x)$ bajo f están dados por los generadores de los ciclos de vértices en w_1 y esta representación es válida hasta el iterado $k-1$. Analizando qué es lo que ocurre con el iterado $k-1$ de f podremos encontrar los enteros p y q tales que $f^p(x) = f^q(h_1(x))$. El análisis será dividido en dos casos dependiendo de la paridad de ν. Antes comenzar recordemos la relación existente entre $k = k_i$ y ν :

$$k = 2\nu p,$$

donde k_i es el número de elementos en $N(v_i)$, p es la cantidad de elementos en el ciclo de vértices de v_i y ν es el orden de la transformación a.

Caso 1: Supongamos que ν es par.
En este caso tenemos que:

$$k - 1 = \frac{p\nu}{2} - 1 = p\left(\frac{\nu}{2} - 1\right) + (p-1).$$

Por lo tanto:

$$f^{k-1}(x) = h_2^{-1} \circ ... \circ h_p^{-1} \circ (h_1^{-1} \circ ... \circ h_p^{-1})^{\frac{\nu}{2}-1}(x).$$

Para simplificar la igualdad anterior despejemos el valor de h_1 de a, entonces:

$$h_1 = h_2^{-1} \circ \cdots \circ h_{p-1} \circ a.$$

Sustituyendo esta expresión de h_1 en $f^{k-1}(x)$ obtenemos:

$$f^{k-1}(x) = h_1 \circ a^{-\frac{\nu}{2}}(x). \tag{4.4}$$

Para saber en qué intervalo de la partición se encuentra el punto $f^{k-1}(x)$ observemos que:

$$h_1 \circ a^{-\frac{\nu}{2}}(v_i) = h_1 \circ a^{-\frac{\nu}{2}}(w_1) = h_1(w_1) = w_2,$$

ya que $a(v_i) = v_i$ y por lo tanto $a^{-1}(v_i) = v_i$. Este hecho junto con la ecuación (4.2) implican que $f^{k-1}(x) \in L_1(w_2)$. Sabemos que w_2 es un vértice del polígono, digamos que $w_2 = v_c$ entonces, $f^{k-1}(x) \in [T_c, Q_{c+1})$ donde:

$$[T_c, Q_{c+1}) = [T_c, P_{c+1}) \cup [P_{c+1}, Q_{c+1}).$$

Por definición de la transformación f sabemos que $f|_{[T_c,P_{c+1})}$ es distinta de $f|_{[P_{c+1},Q_{c+1})}$, así que para continuar iterando la transformación f debemos considerar dos sub casos.

Caso 1.1 : Supongamos que $f^{k-1}(x) \in [T_c, P_{c+1})$.

Como el orden de a es igual a ν tenemos que $a^{\frac{\nu}{2}} \circ a^{\frac{\nu}{2}} = \mathrm{Id}$, lo cual implica que $a^{\frac{\nu}{2}} = a^{-\frac{\nu}{2}}$. Entonces:

$$f^k(x) = h_1^{-1} \circ (h_1 \circ a^{-\frac{\nu}{2}}(x)) = a^{-\frac{\nu}{2}}(x) = a^{\frac{\nu}{2}}(x).$$

Por otro lado tenemos que:

$$f^{k-1}(h_1(x)) = h_p \circ \cdots \circ h_2 \circ (h_1 \circ \cdots \circ h_p)^{\frac{\nu}{2}-1}(h_1(x)) = a^{\frac{\nu}{2}}(x).$$

Por lo tanto:

$$f^k(x) = f^{k-1}(h_1(x)).$$

Haciendo $p = k$ y $q = k-1$ tenemos que:

$$f^p(x) = f^q(h_1(x)) = f^q(y),$$

con lo cual terminamos la demostración.

Caso 1.2 : Supongamos que $f^{k-1}(x) \in [P_{c+1}, Q_{c+1})$.

Sea $z = f^{k-1}(x)$ entonces:

$$g_c(z) = h^{-1}(z) = a^{-\frac{\nu}{2}}(x) = f^{k-1}(h_1(x)).$$

Esto implica que $(z, f^{k-1}(h_1(x)))$ es un $B.M.P.$ en el vértice v_{c+1}. Por lo tanto este caso nos lleva a uno similar al original donde $(x, g_{i-1}(x))$ era un $B.M.P.$ en el vértice v_i. Continuaremos este análisis después de ver que ocurre cuando ν es impar, ya que bajo estas hipótesis se presenta algo similar y analizaremos estos dos sub-casos de manera conjunta.

Caso 2: Supongamos que ν es impar.

Entonces tenemos:

$$k - 1 = \frac{p(\nu-1)}{2} + \frac{p}{2} - 1.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f^{k-1}(x) = &\quad h^{-1}_{\frac{p}{2}+2} \circ \cdots \circ h_p^{-1} \circ (h_1^{-1} \circ \cdots \circ h_p^{-1})^{\frac{\nu-1}{2}}(x) \\ = &\quad h^{-1}_{\frac{p}{2}+2} \circ \cdots \circ h_p^{-1} \circ a^{-(\frac{\nu-1}{2})}(x). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Sabemos que $a(w_1) = w_1$, este hecho junto con la ecuación (4.2) implican que $f^{k-1}(x) \in L_1(w_{\frac{p}{2}+1})$. Sabemos que $w_{\frac{p}{2}+1}$ es un vértice del polígono, digamos que

$w_{\frac{p}{2}+1} = v_b$. Entonces, al igual que en el caso cuando ν es par, podemos sub-dividir este intervalo en dos más pequeños:

$$[T_b, Q_{b+1}) = [T_b, P_{b+1}) \cup [P_{b+1}, Q_{b+1}),$$

lo cual no lleva a considerar dos nuevos sub-casos.

Caso 2.2: Supongamos que $f^{k-1}(x) \in [T_b, P_{b+1})$.

Por definición de la transformación f tenemos que:

$$\begin{aligned} f^k(x) = & \quad h^{-1}_{\frac{p}{2}+1}(f^{k-1}(x)) = \\ = & \quad h^{-1}_{\frac{p}{2}+1} \circ h^{-1}_{\frac{p}{2}+2} \circ \cdots \circ h^{-1}_p \circ a^{-(\frac{\nu-1}{2})}(x). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Para simplificar esta expresión observemos lo siguiente:

$$a^{v-1} = h_1^{-1} \circ \cdots \circ h_p^{-1},$$

lo cual implica que:

$$h_1^{-1} \circ \cdots \circ h_p^{-1} \circ a^{-(\frac{\nu-1}{2})} = a^{(\frac{\nu-1}{2})}.$$

Por lo tanto:

$$h^{-1}_{\frac{p}{2}+1} \circ h^{-1}_{\frac{p}{2}+2} \circ \cdots \circ h^{-1}_p \circ a^{-(\frac{\nu-1}{2})}(x) = h_{\frac{p}{2}} \circ \cdots \circ h_1 \circ a^{(\frac{\nu-1}{2})}(x).$$

Sustituyendo esta última igualdad en (4.6) obtenemos que:

$$f^k(x) = h_{\frac{p}{2}} \circ \cdots \circ h_1 \circ a^{(\frac{\nu-1}{2})}(x).$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f^{k-1}(h_1(x)) = & \quad h_{\frac{p}{2}} \circ \cdots \circ h_2 \circ (h_1 \circ h_p \circ \cdots \circ h_2)^{\frac{\nu-1}{2}}(h_1(x)) \\ = & \quad h_{\frac{p}{2}} \circ \cdots \circ h_1 \circ a^{(\frac{\nu-1}{2})}(x). \end{aligned}$$

Haciendo $p = k$ y $q = k - 1$ tenemos que $f^p(x) = f^q(h_1(x))$, con lo cual terminamos la demostración.

Caso 2.2: Supongamos que $f^{k-1}(x) \in [P_{b+1}, Q_{b+1})$.

Sea $z = f^{k-1}(x)$ entonces:

$$g_b(z) = h^{-1}_{\frac{p}{2}+1}(z) = f^{k-1}(h_1(x)).$$

Esto implica que $(z, f^{k-1}(h_1(x)))$ es un B.M.P. en el vértice v_{b+1}.

Una vez analizados todos los casos podemos concluir lo siguiente: en los Casos 1.1 y 2.1 haciendo $p = k$ y $q = k - 1$ tenemos que $f^p(x) = f^q(h_1(x))$, así que en estos puntos f y Γ son orbitalmente equivalentes. En los Casos 1.2 y 2.2 tenemos que $(f^{k-1}(x), f^{k-1}(h_1(x)))$ es un *B.M.P.* en un vértice de P, por lo tanto podemos aplicar el argumento anterior a la pareja $(f^{k-1}(x), f^{k-1}(h_1(x)))$ en vez de a la pareja $(x, h_1(x))$; observemos que este argumento nos puede llevar nuevamente a un *B.M.P.*. Para demostrar la existencia de números p y q tales que $f^p(x) = f^q(h_1(x))$, en los Casos 1.2 y 2.2, debemos garantizar que aplicando el argumento anterior una cantidad finita de veces llegamos a el Caso 1.1 o al Caso 2.1; para ello hagamos la siguiente generalización: sea $F_i = f^{k_i - 1}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces la construcción anterior nos dice que $F_i \mid_{[P_i, Q_i]} = \gamma_i$ para alguna $\gamma_i \in \Gamma$ y para toda $1 \leqslant i \leqslant n$. Además, como γ_i es la composición de transformaciones con derivada mayor o igual que uno tenemos que $|F_i'(z)| > 1$ si $z \in (P_i, Q_i)$. Sea

$$\mu = \min\{ \ |F_i'(z)| \ : z \in (P_i, Q_i) \text{ con } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Este mínimo existe ya que hay una cantidad finita de vértices y por lo tanto también hay una cantidad finita de F_i's, además $\mu > 1$.

Sean (x, x') un *B.M.P.* en el vértice v_{i_1}. El argumento anterior nos dice que hay dos posibilidades:

I) $F_{i_1}(x) \in [T_{i_2 - 1}, P_{i_2})$ para alguna $i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ o

II) $F_{i_1}(x) \in [P_{i_2}, Q_{i_2}]$.

En el Caso I haciendo $p = k_{i_1}$ y $q = k_{i_1} - 1$ tenemos que $f^p(x) = f^q(x')$. Mientras que en el Caso II los puntos $(f^p(x), f^q(x'))$ son un *B.M.P.* en el vértice v_{i_2}.

Demostraremos que existe $d \in \mathbb{N}$ tal que:

$$F_{i_d} \circ \cdots \circ F_{i_1}(x) \in [T_{i_d - 1}, P_{i_d}),$$

para alguna $i_d \in \{1, \ldots, n\}$. La existencia del natural d implica que haciendo $p = k_{i_d} + \ldots + k_{i_1}$ y $q = k_{i_d} + \ldots + k_{i_1} - d$ tenemos que $f^p(x) = f^q(x')$. Para demostrar la existencia de d supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$F_{i_n}(x) \in [P_{i_n + 1}, Q_{i_n + 1}].$$

Por construcción sabemos que $F_{i_1}(Q_{i_1}) = Q_{i_2}$ lo cual implica que $F_{i_s}(Q_{i_1}) = Q_{i_{s+1}}$ para toda $s \in \mathbb{N}$. Así que para todo $s \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$F_{i_s} \circ \cdots \circ F_{i_1} \mid_{[x, Q_i]} = \gamma_{i_s} \circ \cdots \circ \gamma_{i_1}.$$

Fijando s la Regla de la Cadena nos dice que:

$$| \ F_{i_s} \circ \cdots \circ F_{i_1}(z) \ | \geqslant \mu^s.$$

para todo punto $z \in F_{i_s} \circ \cdots \circ F_{i_1} |_{[x,Q_i]}$. Como este argumento se aplica a cualquier natural s debe existir $d' \in \mathbb{N}$ tal que $F_{i'_d} \circ \cdots \circ F_{i_1}([x, Q_i])$ es mayor que el intervalo $[P_{i_{d'+1}}, Q_{i_{d'+1}}]$ lo cual implica que:

$$F_{i'_d} \circ \cdots \circ F_{i_1}(x) \in [T_{i_{d'}} P_{i_{d'+1}}).$$

Esto contradice la hipótesis que $F_{i_n}(x) \in [P_{i_n+1}, Q_{i_n+1}]$ para todo natural $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto existe $d \in \mathbb{N}$ tal que

$$F_{i_d} \circ \cdots \circ F_{i_1}(x) \in [T_{i_{d'}} P_{i_{d'+1}}).$$

En conclusión, para cualquier pareja de puntos $x, y \in S^1 \backslash C$ tales que $x = g(y)$ para alguna $g \in \Gamma^*$ existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $f^p(x) = f^q(y)$. Por lo tanto la transformación f y el grupo Γ son orbitalmente equivalentes excepto por una cantidad finita de puntos. $\square$

4.5. La transformación f y su primer retorno

A continuación demostraremos condiciones suficientes para garantizar que f, o que el primer retorno de f a un subconjunto $K \subset S^1$, son transformaciones de Markov. Para ello dividiremos el análisis en dos casos dependiendo de como sea P, el polígono fundamental de Γ. Antes de comenzar llamemos $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ a los intervalos de la partición de S^1 inducida por el conjunto W.

4.5.1. Ausencia de vértices parabólicos

En esta sección demostraremos la partición de Markov asociada a la transformación f es finita si el polígono fundamental asociado al grupo Γ no tiene vértices parabólicos. Además, demostraremos las propiedades suficientes para que la transformación f sea una transformación de Markov. La demostración de que las propiedades que cumple f implican que es una transformación de Markov se hará en la última sección del trabajo.

Supongamos que P, el polígono fundamental para el grupo Γ, no tiene vértices parabólicos. Entonces, la partición $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una cantidad finita de intervalos; así que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$S^1 = \bigcup_{i=1}^{m} I_i.$$

A continuación demostraremos que $f(W)$ es un un conjunto finito y que los intervalos I_i son transitivos.

Lema 3. *Si el polígono P no tiene vértices parabólicos la transformación f satisface las siguientes propiedades:*

i) Si $\operatorname{int}(I_i) = (a_i, b_i)$ *para toda* $1 \leqslant i \leqslant m$ *entonces:*

$$\left\{ \lim_{h\to 0^+} f(a_i+h), \lim_{h\to 0^-} f(b_i-h) \right\}_{1\leqslant i\leqslant m}$$

es finito.

ii) Para cualquier par de indices $i, j \in \{1, \dots, m\}$ *distintos se tiene que:*

$$I_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(I_i);$$

Demostración. Como P no tiene vértices parabólicos W es un finito, esto junto con el hecho que $f(W) \subset W$ implican i).

Para demostrar ii) consideremos dos familias de intervalos: $A_i = [T_i, P_{i+1})$ y $B_i = [Q_i, S_{i+1})$ para toda $1 \leqslant i \leqslant n$, donde n es el número de vértices del polígono P, y probemos que la unión de las imágenes de cada uno de ellos cubre a S^1. Por definición de f se tenemos que:

$$f|_{A_i} = g_i = f|_{B_i}.$$

A continuación veremos cuál es la imagen bajo la transformación f de los intervalos A_i y qué propiedades cumplen estas imágenes. Para ello elijamos un intervalo A_i para alguna $1 \leqslant i \leqslant n$. Sabemos que $g_i(v_i)$ es un vértice de P, digamos v_j. Como $T_i \in L_2(v_i)$ la ecuación (4.2) implica que $g_i(T_i) \in L_1(v_j)$, entonces $g_i(T_i) = Q_{j+1}$.

Ahora veamos quién es $g_i(P_{i+1})$. El punto Q_{i+1} es adyacente a P_{i+1} por lo tanto saber cuál es la imagen bajo g_i de Q_{i+1} nos permitirá saber cuál es la imagen de P_{i+1} bajo f. Recordemos que Q_{i+1} está en la misma geodésica que P_i y que $g_i(P_i) = Q_j$, por lo tanto $g_i(Q_{i+1}) = P_{j-1}$. Además, sabemos que $g_i(s_{i+1})$ no es un lado de P, por lo tanto $g_i(P_{i+1})$ es distinto de Q_{j-1}. Entonces, como $R_{k_{j-1}} = (P_{j-1}, w_{j-1}]$, para algún $w_{j-1} \in W$, tenemos que $g_i(P_{i+1}) = w_{j-1}$. En conclusión:

$$g_i(A_i) = [Q_{j+1}, w_{j-1}).$$

Observemos que $g_i(A_i)$ no contiene al intervalo $[Q_{j-1}, S_j)$ ni al intervalo $[Q_j, S_{j+1})$, lo cual es equivalente a decir que $f(A_i)$ no contiene al intervalo B_{j-1} ni al intervalo B_j. De donde concluimos que la imagen bajo f de un intervalo A_i no cubre dos intervalos consecutivos de la forma B_i. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ sean B_{i_1}, B_{i_2} dicho par de intervalos.

Observemos también que los intervalos que no son cubiertos por A_i dependen de la imagen bajo f del vértice v_i, ya que si $f(v_i) = v_j$ los intervalos que no están contenidos en $f(A_i)$ son B_j y B_{j-1}. Este hecho, implica que para cualquier par de índices distintos $i, j \in \{1, \dots, m\}$ el conjunto $\{B_{i_1}, B_{i_2}\}$ y el conjunto $\{B_{j_1}, B_{j_2}\}$ son distintos, por lo tanto $f(A_i)^c \cap f(A_j)^c$ contiene a lo más un intervalo de la forma B_i.

Finalmente, $f(A_i)$ cubre todo S^1 menos la parte contenida bajo los círculos isométricos de tres lados consecutivos, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, sin embargo P tiene al menos cuatro lados así que $f(A_i)$ cubre al menos la parte de S^1 que se encuentra bajo $C(s_{j+2})$. Por otra parte, todo lado s_k del polígono P es imagen bajo f de algún otro lado de P, y todo lado $s_k = s_{\ell+2}$ para alguna $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, para toda $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = S^1. \tag{4.7}$$

Estas son todas las propiedades de los intervalos A_i que necesitaremos para demostrar el inciso ii) de la proposición. Ahora veamos cuál es la imagen bajo la función f de los intervalos B_i y las propiedades que podemos deducir de dichas imágenes. Para ello, elijamos un intervalo B_i para alguna $1 \leqslant i \leqslant n$. Por la ecuación (4.2) sabemos que:

$$g_i([P_i, Q_i)) = L_{k_j-1}(v_j) = [Q_j, w_j),$$

para alguna $1 \leqslant j \leqslant n$, lo cual implica que $g_i(Q_i) = w_j$. Por otro lado, sabemos que $R_2(v_{i+1}) = [P_i, S_{i+1})$, así que por la ecuación (4.3) tenemos que:

$$g_i(R_2(v_{i+1})) = R_1(v_{j-1}) = [Q_j, P_{j-2}),$$

lo cual implica que $g_i(S_{i+1}) = P_{j-2}$. En conclusión:

$$g_i(B_i) = [w_j, P_{j-2}).$$

Observemos que $g_i(B_i)$ no contiene al intervalo $[T_{j-2}, P_{j-1})$ ni al intervalo $[T_{j-1}, P_j)$, lo cual equivale a decir que $f(B_j)$ no contiene a A_{j-2} ni al intervalo A_{j-1}. Entonces $f(B_i)$ no cubre dos intervalos consecutivos de la forma A_i, llamémosles A_{i_1}, A_{i_2}. Esto implica que para cualquier par de índices distintos $i, k \in \{1, \dots, m\}$ el conjunto $\{A_{i_1}, A_{i_2}\}$ y el conjunto $\{A_{k_1}, A_{k_2}\}$ son distintos; por lo tanto $f(B_i)^c \cap f(B_k)^c$ contiene a lo más un intervalo de la forma A_i. Finalmente, por un razonamiento análogo al aplicado para los intervalos A_i tenemos que para toda $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = S^1.$$

Las propiedades de los intervalos $\{A_i\}$ y $\{B_i\}$ nos permitirán demostrar la transitividad de los intervalos I_i, debido a que para todo intervalo $I \in \{I_i\}$ existe un natural p tal que $f^p(I)$ contiene un intervalo de la forma A_j o un intervalo de la forma B_j para alguna $j \in \{1, \dots, m\}$. Para demostrar esta afirmación elijamos un intervalo $I \in \{I_i\}$ arbitrario y analicemos de que tipo puede ser el intervalo I y como se encuentra el natural p en cada caso:

i) Supongamos que el intervalo I es igual a $\overline{L_r(v_i)}$ con $1 \leqslant i, r \leqslant n$.

Entonces la ecuación (4.2) implica que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(I) = L_1(f^p(v_i))$. Haciendo $v_j = f^p(v_i)$ tenemos que $[T_j, P_{j+1}) \subset f^p(I)$.

ii) Supongamos que el intervalo I es igual a $\overline{R_s(v_i)}$ con $1 \leqslant i \leqslant n$ y $2 \leqslant s \leqslant n$.

Entonces la ecuación (4.3) implica que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(I) = R_2(f^p(v_i))$. Haciendo $v_j = f^p(v_i)$ tenemos que $[v_{j-1}, S_j) \subset f^p(I)$.

iii) Supongamos que el intervalo I es igual $[T_i, S_{i+1}]$.

Sea $f(v_i) = v_j$, entonces las ecuaciones (4.2) y (4.3) implican que $f(T_i) = Q_{j+1}$ y $f(S_{i+1}) = P_{j-1}$, por lo tanto $[Q_{j+1}, S_{j+2}) \subset f^p(I)$.

En conclusión, para todo intervalo $I \in \{I_i\}$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(I) \supset A_j$ para alguna j, o se tiene que $f^p(I) \supset B_k$ para alguna k. Si $f^p(I)$ contiene a un intervalo A_j todos los iterados posteriores de I contendrán a los iterados de A_j. En otras palabras, para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n(A_j) \subset f^{p+n}(I_i)$. Veamos que este hecho implica que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(I) = S^1. \tag{4.8}$$

Sabemos que $f(A_j)$ no contiene a los intervalos $\{B_{j_1}, B_{j_2}\}$. Sin embargo, como el polígono P tiene por lo menos cuatro lados existen B'_{j_1} y B'_{j_2} que sí están contenidos en $f(A_j)$. Además, $f(B'_{j_1})^c \cap f(B'_{j_2})^c$ contiene a lo más un intervalo A_i. Si la intersección $f(B'_{j_1})^c \cap f(B'_{j_2})^c$ es vacía entonces $f^2(A_i) = S^1$ y por lo tanto $f^{p+2}(I) = S^1$, lo cual demuestra la igualdad (4.8).

Ahora bien, si la intersección $f(B'_{j_1})^c \cap f(B'_{j_2})^c$ es no vacía contiene un intervalo de la forma A_{j_0} para algún $1 \leqslant j_0 \leqslant n$. Por lo tanto, $(f^2(A_j))^c$ contiene a lo más un intervalos de la familia $\{A_i\}$, en cuyo caso este intervalo sería A_{j_0}. Veamos que ocurre cuando $f^2(A_j)$ cubre a todos los intervalos $\{A_i\}$. En este caso $f^3(A_j) = S^1$ y por lo tanto $f^{p+3}(I_i) = S^1$, lo cual demuestra la igualdad (4.8). Supongamos ahora que $f^2(A_j)$ no cubre al intervalo A_{j_0}. Entonces, si $1 \leqslant k \leqslant n$ es tal que $k \neq j, j_0$ tenemos que $A_k \subset f^2(A_j)$. Además, sabemos que $f(A_k)$ no contiene a los intervalos $\{B_{k_1}, B_{k_2}\}$ y que los conjuntos $\{B_{k_1}, B_{k_2}\}$ y $\{B_{j_1}, B_{j_2}\}$ son distintos, por lo tanto $f(B_{k_1})^c \cap f(B_{k_2})^c$ no contiene al intervalo A_0; lo cual implica que:

$$f^2(A_k) \cup f^2(A_j) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Sabemos que $f^2(A_k)$ y $f^2(A_j)$ están contenidos en algún iterado del intervalo I y que A_k y A_j cumplen la ecuación (4.7), por lo tanto el intervalo I cumple la ecuación (4.8).

Un razonamiento análogo al anterior nos dice que si $f^p(I) \supset B_k$ para alguna $k \in \{1, \dots, n\}$ entonces I cumple la ecuación (4.8). En conclusión, para cualquier par de indices $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distintos tenemos que:

$$I_j \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(I_i).$$

□

Recordemos que la transformación f está definida por medio de transformaciones de Möbius por lo tanto tiene sentido preguntarnos qué propiedades cumplen su primer a segunda derivada.

Lema 4. *Cuando el polígono P no tiene vértices parabólicos la transformación f satisface las siguientes propiedades:*

i) Existe $\lambda > 1$ tal que $\inf\{ |D(f^2)(x)| : x \in S^1\} \geqslant \lambda$*;*

ii) $\sup \left\{ \dfrac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|^2} : x \in S^1 \right\} < \infty.$

Demostración. Antes de comenzar la demostración recordemos que el polígono P tiene $n \in \mathbb{N}$ lados y que el círculo $C(s_i)$ es el círculo isométrico de la transformación g_i para cada $1 \leqslant i \leqslant n$. Por lo tanto, $\mid Df(x) \mid \geqslant 1$ para todo punto $x \in S^1$.

Para demostrar el inciso i) consideremos el siguiente conjunto:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} [P_i, Q_i).$$

Acotemos primero $|D(f^2)(x)|$ para los puntos en el conjunto $S^1 \backslash A$. Sea $x \in S^1 \backslash A$, entonces $x \in [Q_i, P_{i+1})$ para alguna $1 \leqslant i \leqslant n$; y por tanto, $|Dg_i(x)| > 1$. Además, como f se extiende a una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $[Q_i, P_{i+1}]$ tenemos que:

$$\inf\{ |Df(x)| : x \in [Q_i, P_{i+1})\} > 1.$$

Aplicando este argumento para toda $1 \leqslant i \leqslant n$ tenemos que:

$$\lambda = \inf\{ |Df(x)| : x \in S^1 \backslash A\} > 1.$$

Finalmente, si $x \in S^1 \backslash A$ tenemos que:

$$\mid D^2 f(x) \mid = \mid Df(f(x)) \mid \cdot \mid Df(x) \mid \geqslant 1 \cdot \lambda.$$

Ahora veamos que ocurre con los puntos en el conjunto A. Sea $x \in A$, entonces existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que $x \in [P_i, Q_i)$. La ecuación (4.2) nos dice que

$$f([P_i, Q_i)) = L_{k_i - 1}(g_i(v_i)).$$

Así que $f(x) \in S^1 \backslash A$. Por lo tanto:

$$| D^2 f(x) |=| Df(f(x)) | \cdot | Df(x) | \geqslant \lambda \cdot 1.$$

Para demostrar el inciso $ii)$ basta recordar que la transformación f se extiende a una función de clase $\mathcal{C}^2$ en la cerradura de cada uno de los intervalos I_i. Entonces, como sólo hay n intervalos de la forma I_i existe $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\sup \left\{ \, |D^2 f(x)| : x \in S^1 \right\} < M.$$

Esto junto con el hecho que $|Df(x)| \geqslant 1$ para toda $x \in S^1$, nos permite concluir que:

$$\sup \left\{ \, \frac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|^2} : x \in S^1 \right\} < \infty.$$

$\square$

Estas cuatro propiedades nos permitirán concluir que f es una transformación de Markov, pero antes veamos que ocurre cuando el polígono P tiene vértices en el círculo unitario.

4.5.2. Caso general

En este caso la partición $\{I_i\}$ es infinita, por lo tanto no podremos obtener las mismas condiciones de distorsión que se tienen cuando el polígono P no tiene vértices parabólicos. En este capítulo trabajaremos con un subconjunto de S^1 donde podamos garantizar que el primer retorno de f es una transformación de Markov.

Recordemos nuevamente que el polígono P tiene n lados. Sean $v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}$ todos los vértices parabólicos de P y consideremos el siguiente conjunto:

$$K = S^1 - \left[\bigcup_{j=1}^{r} \left[\left(\bigcup_{s=2}^{\infty} L_s(v_{i_j}) \right) \cup \left(\bigcup_{t=3}^{\infty} R_t(v_{i_j}) \right) \right] \cup \bigcup_{j=1}^{r} \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(v_{i_j}) \right].$$

El conjunto K está formado por la unión de los intervalos $\{L_i(v_j), R_i(v_j)\}$ cuando v_j es un vértice elíptico y por la unión de los intervalos $L_1(v_j)$, $R_2(v_j)$ cuando v_j es un vértice parabólico. A estos intervalos debemos quitarles los puntos que son preimágenes, bajo algún iterado de f, de los vértices parabólicos. De esta forma, podremos garantizar que el *primer retorno* de f a K, dado por:

$$F : K \to K$$

$$F(x) = f^{m(x)}(x)$$

donde $m(x) = \inf\{m \geqslant 0 : f^m(x) \in K\}$, tiene distorsión acotada y es una transformación de Markov.

Observemos que la existencia de $m(x)$ para todo punto $x \in K$ es consecuencia directa de las ecuaciones (4.2) y (4.3).

A continuación demostraremos condiciones necesarias para garantizar que F es una transformación de Markov. Para estas demostraciones recurriremos a la representación matricial de las transformaciones de Möbius. Recordemos que la matriz asociada a la composición de dos transformaciones de Möbius es el producto de las matrices asociadas a las transformaciones.

Lema 2. *Si $T \in \mathcal{M}(\Delta)$ es una transformación parabólica de la forma:*

$$T(z) = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}},$$

con punto fijo $z_0 \in S^1$. Entonces, existe g una transformación de Möbius tal que $g(z_0) = 0$, $g(S^1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, además:

$$g \circ T \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = S,$$

donde $y = \operatorname{Im}(\alpha)$.

Demostración. Sea $T \in \mathcal{M}(\Delta)$ una transformación parabólica, por (3.1) sabemos que

$$T(z) = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cumplen que: $\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1$. Como T es parabólica $\beta \neq 0$ y la ecuación (3.3) nos dice que el punto fijo de T esta dado por:

$$z_0 = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2\beta}. \tag{4.9}$$

La unicidad de z_0 como solución de la ecuación (3.2) nos dice que su discriminante D es igual a cero, lo cual implica que $\alpha + \overline{\alpha} = \pm 2$.

Supongamos que $z_0 = i$ y denotemos $\alpha = x + iy$. Entonces la ecuación (4.9) implica que $\beta = y$ y por tanto $y \neq 0$.

Sea g la transformación de Möbius representada por la matriz:

$$g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que efectivamente g es una transformación de Möbius ya su matriz asociada tiene determinante uno.

La representación racional de g es la siguiente:

$$g(z) = \frac{2(z-i)}{-iz+1}.$$

En esta segunda representación es fácil ver que $g(i) = 0$, $g(1) = 2$, $g(-1) = -2$ y $g(-i) = \infty$, por lo tanto $g(S^1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Por último, no es difícil comprobar que:

$$S = g \circ T \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}.$$

En caso que $z_0 \neq i$ elijamos $G \in \mathcal{M}(\Delta)$ una transformación parabólica tal que: $G(z_0) = i$. Una vez elegida la transformación G podemos aplicar el razonamiento anterior a la transformación

$$T' = G \circ T \circ G^{-1},$$

ya que T' es una transformación parabólica con i como punto fijo; esto nos permite concluir que:

$$S = g \circ G \circ T \circ G^{-1} \circ g^{-1}.$$

Finalmente, considerando la transformación $\widetilde{g} = G \circ g$ tenemos que $\widetilde{g}(z_0) = i$ y $\widetilde{g}(S^1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

$\square$

El lema anterior nos permite conjugar transformaciones parabólicas con la transformación

$$S(x) = \frac{x}{yx+1},$$

que es una transformación sencilla de iterar y cumple que $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ahora demostremos una importante propiedad de la transformación S.

Lema 5. *Dado $N \in \mathbb{N}$ mayor que uno, sea $J = [-\frac{1}{Ny}, 0)$. Para cada punto $x \in J$ definamos:*

$$m(x) = \sup \{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : S^k(x) \in J \text{ para toda } 0 \leqslant k \leqslant m\}.$$

Entonces:

$$\sup_{x \in J} \left\{ \frac{|D^2 S^{m(x)}(x)|}{|DS^{m(x)}(x)|^2} \right\} < \infty.$$

Demostración. La primera parte de esta demostración consiste en probar la existencia de $m(x)$ para todo punto $x \in J$. Para ello debemos calcular la derivada de la función S, dada por:

$$DS(x) = \frac{1}{(yx+1)^2}.$$

Observemos que la derivada de la transformación S no está definida en el punto $-1/y$, sin embargo como este punto no se encuentra en el intervalo J la restricción de S a J es creciente.

Para encontrar $m(x)$ para cualquier punto en el intervalo J debemos calcular los iterados de la transformación S. Sea $m \in \mathbb{N}$ entonces:

$$S^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ my & 1 \end{pmatrix}.$$

Lo que es equivalente a decir que:

$$S^m(x) = \frac{x}{myx+1}$$

Una vez calculada S^m podemos encontrar el valor de $m(x)$ para todos los puntos en J. Sea $x \in J$ entonces existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$x \in \left[\frac{-1}{(N+m)y}, \frac{-1}{(N+m+1)y} \right].$$

Sea $J_m = [-((N+m)y)^{-1}, -((N+m+1)y)^{-1})$ para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si $m = 0$ entonces $x \in J_0$. Sabemos que S es creciente en J por lo tanto evaluando la función en los extremos de este intervalo podemos acotar el valor de $S(x)$. Veamos cuales son estos valores:

$$S\left(\frac{-1}{Ny}\right) = -\frac{1}{(N-1)y} \quad \text{y} \quad S\left(\frac{-1}{(N+1)y}\right) = \frac{-1}{Ny},$$

por lo tanto $m(x) = 0$.

Si $m \in \mathbb{N}$ entonces $x \in J_m$. Calculemos S^m en los extremos de este intervalo:

$$S^m\left(\frac{-1}{(N+m)y}\right) = \frac{-1}{Ny} \quad \text{y} \quad S^m\left(\frac{-1}{(N+m+1)y}\right) = \frac{-1}{(N+1)y}.$$

De estas dos evaluaciones no es posible concluir cuál es el valor de $m(x)$, sin embargo como:

$$S\left(\frac{-1}{(N+1)y}\right) = \frac{-1}{Ny},$$

podemos concluir que $m(x) = m$.

Una vez hallado el valor de $m(x)$ podemos acotar el cociente del inciso ii). Para ello debemos calcular $DS^m(x)$ y $D^2S^m(x)$:

$$DS^m(x) = \frac{1}{(myx+1)^2} \text{ y } D^2S^m(x) = \frac{-2my}{(myx+1)^3}.$$

Observemos que tanto DS^m como D^2S^m están bien definidas en el intervalo J_m, por lo tanto podemos calcular:

$$h(x) = \frac{|D^2S^m(x)|}{|DS^m(x)|^2} = |2my(myx+1)|.$$

Es claro que el valor de $h(x)$ de encuentra entre los valores de los extremos del intervalo J_m, los cuales son:

$$h\left(\frac{-1}{(N+m)y}\right) = \left|\frac{2myN}{N+m}\right| \quad \text{y}$$

$$h\left(\frac{-1}{(N+m+1)y}\right) = \left|\frac{2my(N+1)}{N+m+1}\right|.$$

Entonces, para todo punto $z \in J_m$ tenemos que:

$$h(z) \leqslant \left|\frac{2my(N+1)}{N+m}\right|.$$

Finalmente como:

$$\lim_{m\to\infty} \left|\frac{2my(N+1)}{N+m}\right| = 2y,$$

podemos concluir que:

$$\sup_{x\in J} \left\{ \frac{|S^{m(x)''}(x)|}{|S^{m(x)'}(x)|^2} \right\} < \infty.$$

$\square$

El lema anterior será una pieza fundamental para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 17. *La transformación F cumple que:*

$$\mathop{sup}_{x\in K} \left\{ \frac{|D^2F(x)|}{|DF(x)|^2} \right\} < \infty.$$

Demostración. Para esta demostración debemos analizar varios casos dependiendo de donde se encuentre originalmente cada punto y donde están sus iterados. Comencemos eligiendo un punto $x_0 \in K$. Si $f(x_0) \in K$ entonces $F(x_0) = f(x_0)$ y aplicando el mismo razonamiento que en el Lema 4 concluimos que existe $\lambda_1 > 0$ tal que:

$$\frac{|D^2F(x_0)|}{|DF(x_0)|^2} < \lambda_1.$$

Además, para todos los puntos $y \in S^1$ tales que $f(y) \in K$ tenemos que:

$$\frac{|D^2F(y)|}{|DF(y)|^2} < \lambda_1.$$

Supongamos ahora que $y_0 = f(x_0) \in L_j(v_i)$ para algún vértice parabólico v_i y algún natural j distinto de uno, entonces $F(x_0) \neq y_0$. Por lo en tanto, para obtener $F(x_0)$ debemos continuar iterando $f(x_0)$ hasta llegar a un punto en K. Recordemos que para encontrar los iterados del punto y_0 debemos considerar el ciclo de vértices asociado al vértice v_i y sus generadores. Sea $w_1 = v_i$ y consideremos $(w_1, \dots, w_t)$ el ciclo de vértices asociado a w_1 con lado s_{i-1} y sus generadores $(h_1, \dots h_t)$. Observemos que $T = h_1 \circ \cdots \circ h_t$ es una transformación parabólica con w_1 como punto fijo. El hecho que T sea una transformación parabólica implica que la cantidad de elementos de la forma $L_j(v_i)$ es infinita; sin embargo, podremos dividir el análisis en dos casos. Para ello construiremos un intervalo I contenido en la unión de los intervalos $L_j(v_i)$ de la siguiente manera: aplicando el Lema 2 a la transformación T obtenemos la transformación $g : S^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que envía w_1 al origen y cumple que:

$$g \circ T \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix},$$

donde y es un valor que depende de la transformación T.

Sea $N \in \mathbb{N}$ un natural mayor que uno tal que el punto $y_N = g^{-1}(-1/Ny)$ esté contenido en el conjunto:

$$\bigcup_{j=2}^{\infty} L_j(w_1)$$

y tal que $g^{-1}(\infty)$ no esté contenido en el intervalo (w_1, y_N). Sea $I = [w_1, y_N]$, entonces existe una cantidad finita de intervalos de la forma $L_i(w_1)$ que no intersectan al intervalo I, digamos que hay M de ellos; esto quiere decir que $L_M(w_1), \dots, L_1(w_1)$ no intersectan al intervalo I. Una vez construido el intervalo I existen dos posibilidades $y_0 \in L_j(v_i)$ para alguna $2 \leqslant j \leqslant M$ o $y_0 \in L_j(v_i)$ para alguna $j > M$. Veamos que ocurre en el primer caso. Supongamos que $y_0 \in L_j(w_1)$ con $2 \leqslant j \leqslant M$. La ecuación (4.2) nos indica que $f^{j-1}(y_0) \in L_1(w_i)$ para algún w_i en el ciclo de vértices de w_1, por lo tanto:

$$F(x_0) = f^{j-1}(y_0).$$

Recordemos que queremos calcular:

$$\frac{|D^2F(x_0)|}{|DF(x_0)|^2}. \tag{4.10}$$

Por definición de la transformación F sabemos que $F(x) = f^{m(x)}(x)$ para todo punto $x \in K$. Así que, la derivada de F es mayor o igual que en todo punto $x \in K$. Esto quiere decir que para acotar la ecuación (4.10) es suficiente acotar:

$$D\log[DF(x_0)] = \frac{|D^2F(x_0)|}{|DF(x_0)|}.$$

Para calcular $D\log[DF(x_0)]$ calcularemos $D\log[Df^{j-1}(y_0)]$. Aplicando el Teorema del Residuo tenemos que $j-1=(n_0)t+m$, donde m es el residuo que se obtiene de dividir $j-1$ entre t. De modo que:

$$f^{j-1}(y_0) = h_m \circ \cdots \circ h_1 \circ T^{n_0}(y_0).$$

Observemos que el valor de n_0 esta acotado superiormente por la parte entera M/t y que la misma cota funcionaría si el punto y_0 estuviera en cualquiera de los intervalos $L_i(w_1)$ si $2 \leqslant i \leqslant M$. Esta nueva expresión de $f^{j-1}(y_0)$ implica que:

$$\begin{aligned} D\log[DF(x_0)] &= D\log[Df^{j-1}(y_0)] \\ &= D\log[D(h_m \circ \cdots \circ h_1 \circ T^{n_0})(y_0)] \\ &= D\log[Dh_m(h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1 \circ T^{n_0}(y_0))] + \ldots + \\ &\quad + D\log[Dh_1(T^{n_0}(y_0))] + \; D\log[(T^{n_0})(y_0)) + \\ &\quad + D\log[Df(x_0)]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ahora veamos que esta expresión está acotada. Por construcción sabemos que $T^{n_0}(y_0) \in L_{m+1}(w_1)$, por lo tanto una aplicación directa de la ecuación (4.2) nos indica que si $1 \leqslant j \leqslant m$

$$h_j \circ \cdots \circ h_1 \circ T^{n_0}(y_0) \in L_{m+1-j}(w_{j+1}).$$

Sabemos que la función $D\log(Dh_j)$ esta acotada en todos los intervalos $L_i(w_j)$ si $1 \leqslant i \leqslant t$. Lo cual implica que los primeros m sumandos de la ecuación (4.11) están acotados. Ahora veamos cómo acotar los dos últimos sumandos. Por construcción $T^{n_0} = f^{n_0}$ en el intervalo $L_j(w_1)$ así que Tn_0 restricta al a la cerradura del intervalo $L_j(w_1)$ se extiende a una función de clase $\mathcal{C}^2$ cuya derivada mayor o igual que uno, lo cual implica que $D\log[DT^{n_0}(y_0)]$ está acotada. Por definición de la función f tenemos también que $D\log[Df]$ está acotada en todos lo subintervalos de K. En conclusión, $D\log[DF(x_0)]$ está acotada. Observemos que esta cota depende únicamente del vértice v_i y del intervalo $L_j(v_i)$ al que pertenece el punto y_0. Entonces, es posible dar una cota uniforme de $D\log(DF)(z)$ para cualquier punto $z \in L_j(v_i)$ con $2 \leqslant j \leqslant M$ tal que $z = f(x)$ para algún punto $x \in K$.

Para cada vértice v_{i_j} del polígono P es posible encontrar un natural M_j, de manera análoga a cómo se encontró M para el vértice w_1. Por lo tanto existe $\lambda_2 > 0$ tal que $\mid D\log(DF)(z) \mid < \lambda_2$ para cualquier punto $z \in L_k(v_{i_j})$ con $2 \leqslant k \leqslant M_j$ tal que $z = f(x)$ para algún punto $x \in K$.

Ahora veamos que ocurre cuando $y_0 \in I$. Para ello consideremos:

$$n(x) = \sup\{n \in \mathbb{N} : T^k(x) \in I \text{ para toda } 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

La ecuación (4.2) nos dice que existe un iterado del punto $T^{n(y_0)}(y_0)$ que pertenece al intervalo $L_1(w_i)$ para algún vértice w_i en el ciclo de vértices de w_1, por lo tanto existe $r \in N$ tal que $f^r(T^{n(y_0)}(y_0)) \in L_j(w_p)$ para alguna $j \leqslant M_p$. Así que podemos aplicar el caso anterior al punto $z_0 = f^r(T^{n(y_0)}(y_0))$. La ecuación (4.2) nos permite encontrar un natural k tal que $f^k(z_0) \in L_1(w_i)$ para algún w_i en el ciclo de vértices de w_1, además

$$f^k(z_0) = h_m \circ \cdots \circ h_1 \circ T^{no}(z_0),$$

para alguna $m < t$ y n_0 menor que la parte entera de M_p/t. Así que en este caso tenemos que $F(x_0) = f^k(z_0)$, lo cual implica que:

$$\begin{aligned} D\log[DF(x_0)] = &\ D\log[Df^k(z_0)] \\ = &\ D\log[D(h_m \circ \cdots \circ h_1 \circ T^{n_0})(z_0)] \\ = &\ D\log[Dh_m(h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1 \circ T^{n_0}(z_0))] + \ldots + \\ &+ D\log[Dh_1(T^{n_0}(z_0))] + D\log[DT^{n_0}(z_0)] + D\log[D(z_0)]. \end{aligned}$$

Haciendo $\lambda_3 = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ tenemos que λ_3 acota todos los sumandos de la ecuación anterior excepto $D\log[D(z_0)]$. Recordemos que:

$$\begin{aligned} D\log[D(z_0)] = &\ D\log[D(h_r \circ \cdots \circ h_1 \circ T^{n(y_0)})(y_0)] \\ = &\ D\log[Dh_r(h_{r-1} \circ \cdots \circ h_1 \circ T^{n(y_0)}(y_0))] + \ldots + \\ &+ D\log[Dh_1(T^{n(y_0)}(y_0))] + \ D\log[DT^{n(y_0)}(y_0)] + D\log[Df(y_0)]. \end{aligned}$$

Para acotar los sumandos en esta expresión se utiliza nuevamente λ_3. Sin embargo, de lo realizado anteriormente no es posible acotar $D\log[DT^{n(y_0)}(y_0)]$. Para encontrar esta cota debemos acotar directamente:

$$\frac{D\log[DT^{n(y_0)}(y_0)]}{DF(x_0)},$$

en vez de sólo acotar $D\log[DT^{n(y_0)}]$. Esta cota se encuentra por medio el Lema 2. Sabemos que $g(w_1) = 0$ y por hipótesis tenemos que $g(y_N) = -1/Ny$, así que calcular $n(x)$ en el intervalo I es equivalente a calcular $m(g(x))$ en el intervalo $J = [-1/Ny, 0)$, el donde $m(x)$ es el definido en el Lema 5. Además, sabemos que $S = g \circ T \circ g^{-1}$ así que para todo punto $x \in I$ se tiene que:

$$T^{n(x)}(x) = (g^{-1} \circ S^{m(g(x))} \circ g)(x).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{D\log[DT^{n(y_0)}(y_0)]}{\mid DF(x_0)\mid} &= \frac{D\log[D(g^{-1}\circ S^{m(g(y_0))}\circ g)(y_0)]}{\mid DF(x_0)\mid} \\
&= \frac{D\log[Dg^{-1}((S^{m(g(y_0))}\circ g)(y_0))]}{\mid DF(x_0)\mid} + \frac{D\log[DS^{m(g(y_0))}(g(y_0))]}{\mid DF(x_0)\mid} + \\
&\quad + \frac{D\log[Dg(y_0)]}{\mid DF(x_0)\mid} + \frac{D\log[Df(x_0)]}{\mid DF(x_0)\mid}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

El Lema 5 nos dice que:

$$\frac{\mid D^2S^{m(g(x))}(g(x))\mid}{\mid DS^{m(g(x))}(g(x))\mid^2}$$

está uniformemente acotado para todo punto $g(x)\in J$. Además tenemos que:

$$DF(x_0) = \mid C\mid\cdot\mid DS^{m(g(y_0))}(g(y_0))\mid,$$

donde C se obtiene al juntar los demás factores que se obtienen de derivar F por la regla de la cadena, por lo tanto:

$$\frac{D\log[DS^{m(g(y_0)}(g(y_0))]}{\mid DF(x_0)\mid}$$

está acotado. Además sabemos que $g^{-1}(\infty)$ no esta contenido en I por lo tanto $D\log[Dg(x)]$ y $D\log[D(g^{-1})(x)]$ están uniformemente acotados para todo $x\in J$.

Cuando $y_0\in R_s(v_i)$ con $s\neq 2$ el análisis es análogo al anterior. En conclusión:

$$\sup_{x\in K}\left\{\frac{|D^2F(x)|}{|DF(x)|^2}\right\}<\infty.$$

$\square$

Lema 6. *Existe $\lambda>1$ tal que:*

$$inf\ \{\ |D(F^2)(x)| : x\in K\}\geqslant\lambda.$$

Demostración. Consideramos el conjunto $W'=W\cap K$, donde W es el conjunto definido en (4.1). Por definición W' contiene únicamente una cantidad finita de puntos. Por otro lado sabemos que $C(s_i)$ es el círculo isométrico de una transformación en Γ entonces $|\,Df(x)\,|$ esta acotada lejos de 1 en todos los intervlos de W' excepto en los de la forma $[P_i,Q_i)$ donde el vértice v_i no es parabólico.
Sea $x\in K$. Supongamos que x pertenece al complemento del conjunto $\bigcup_{i=1}^{n}[P_i,Q_i)$.

Entonces, $|Df(x)|> 1$ y por lo tanto $|DF(x)|> 1$.
Si el punto x pertenece a uno de los intervalos $[P_i, Q_i)$ para un vértice no parabólico entonces $|Df^2(x)|> 1$ y por lo tanto se tiene que $|DF^2(x)|> 1$.

Eligiendo λ de manera análoga a como se hizo en el Lema 4 tenemos que:

$$\inf\{\ |DF^2(x)| : x \in K\} \geqslant \lambda > 1.$$

□

Ahora probaremos las últimas propiedades necesarias para demostrar que F es una transformación de Markov.

Proposición 18. *Existe $\mathcal{P} = \{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una partición a lo sumo numerable del conjunto K,*

respecto a la cual F cumple las siguientes propiedades:

i) La transformación F es estrictamente creciente en cada $\ell_k \in \mathcal{P}$ y se extiende a una función $\mathcal{C}^2$ en $\overline{\ell_k}$.

ii) Si $F(\ell_k) \cap \ell_j \neq \emptyset$ entonces $\ell_j \subset F(\ell_k)$.

iii) Para todas j, k se tiene que $\ell_k \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} F^i(\ell_j)$.

iv) Si int$(\ell_k) = (a_k, b_k)$ entonces el conjunto:

$$\left\{ \lim_{h\to 0^+} F(a_k + h), \lim_{h\to 0^-} F(b_k - h) \right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

es finito.

Demostración. Consideremos $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ los intervalos inducidos por la partición W (definida en la ecuación (4.1)). Las ecuaciones (4.2) y (4.3) implican que los únicos intervalos en K que pueden ser mapeados fuera de K bajo f son los intervalos de la forma

$$J_i = [T_i, S_{i+1}).$$

Cada uno de los intervalos J_i está dividido en una cantidad a lo sumo numerable de subintervalos $\{J_{i,r}\}_{r=1}^{\infty}$ definidos de la forma siguiente:

$$J_{i,r} = f^{-1}(I_r) \cap J_i.$$

Utilizando algunos de los intervalos I_i y lo intervalos $J_{i,r}$ definamos $\mathcal{P}'$, una partición de S^1, de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}' = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i - \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i \right) \cup \bigcup_{i,r\in\mathbb{N}} J_{i,r}.$$

La partición $\mathcal{P}'$ induce de manera natural una partición $\mathcal{P} = \{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en el conjunto K, sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap K$. Una vez hecha esta intersección tenemos que cada intervalo de $\mathcal{P}$ difiere de su intervalo correspondiente en $\mathcal{P}'$ por un conjunto de puntos a lo sumo numerable constituido por las preimágenes de vértices parabólicos del polígono P. Este hecho motiva la siguiente definición: diremos que $A \doteq B$ si el conjunto A y el conjunto B difieren por una cantidad finita de puntos.

Por definición es claro que en cada uno de los intervalos ℓ_k la transformación F coincide con algún elemento de Γ y que satisface las propiedades $i)$ y $ii)$ de la proposición.

Para demostrar $iii)$ analizaremos que tipo de intervalos conforman a la partición $\mathcal{P}$. Sea $\ell_k \in \mathcal{P}$ entonces:

Caso 1: Supongamos que $\ell_k \subset K - \bigcup_{i=1}^{n} J_i$. Entonces, $\ell_k \doteq L_r(v_j)$ para algún vértice no parabólico v_j y $r \geqslant q$ o $\ell_k \doteq R_s(v_j)$ para algún vértice no parabólico v_j y $s \geqslant 3$. En cualquiera de los dos casos las ecuaciones (4.2) y (4.3) nos indican que $f(\ell_k) \subset K$ y por lo tanto $F(\ell_k) = f(\ell_k)$.

Supongamos que $\ell_k \doteq L_r(v_j)$. Entonces, $F^{r-1}(\ell_k) = f^{r-1}(\ell_k) \doteq L_1(w)$, donde w es un vértice no parabólico. Cuando $\ell_k \doteq R_s(v_j)$ existe w es un vértice no parabólico tal que $F^{s-2}(\ell_k) = f^{s-2}(\ell_k) \doteq R_2(w)$.

Caso 2: Supongamos que $\ell_k \doteq J_{i,r}$ y $f(\ell_k) \subset K$. Por definición de F tenemos que $F(\ell_k) = f(\ell_k)$, y un razonamiento análogo al del caso anterior nos indica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F^m(\ell_k) = f^m(\ell_k) \doteq L_1(w)$ o $F^m(\ell_k) = f^m(\ell_k) \doteq R_2(w)$ para algún vértice w.

Caso 3: Supongamos que $\ell_k \doteq J_{i,r}$ y $f_\Gamma(\ell_k) \cap K = \emptyset$. Entonces, $f(\ell_k) \doteq L_r(v_j)$ donde v_j es un vértice parabólico y $r \geqslant 2$ o $f(\ell_k) \doteq R_s(v_j)$ con v_j vértice parabólico y $r \geqslant 3$. Por definición de F y las ecuaciones (4.2) y (4.3) tenemos que $F(\ell_k) \doteq L_1(w)$ ó $F(\ell_k) \doteq R_2(w)$ para algún vértice parabólico w.

Una vez analizados los tres casos aplocamos un razonamiento análogo al utilizado para demostrar el inciso $ii)$ del Lema 3 para demostrar el inciso $iii)$ de la proposición. Observemos que las familias $\{A_i\}$ y $\{B_i\}$, definidas en la prueba del Lema 3, están contenidos en K.

Finalmente, el inciso $iv)$ se deduce del hecho que W' tiene una cantidad finita de puntos y que $F(W') \subset W'$.

□

4.6. Medida ergódica

Finalmente demostraremos que las propiedades que cumplen f y F, respectivamente, implican que tanto f como F son transformaciones de Markov. Primero analizaremos la transformación f para demostrar el siguiente teorema:

Teorema 9. *Sea f es un mapeo $f : S^1 \to S^1$ y $\mathcal{P}$ una partición finta o numerable de S^1, digamos que $\mathcal{P} = \bigcup_{i\in A} I_i$, para un conjunto de indices A, tal que:*

i) La transformación f es estrictamente monótona en I_i para toda $i \in A$ y se extiende a una función $\mathcal{C}^2$ en $\overline{I_i}$.

i) Si $f(I_j) \cap I_k \neq \emptyset$ para un par de índices $j, k \in A$ entonces $I_k \subset f(I_j)$.

ii) Para cualquier pareja $i, j \in A$ se tiene que $I_j \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(I_i)$.

iii) Si $int(I_i) = (a_i, b_i)$ para cada $i \in A$ entonces:

$$\left\{ \lim_{h\to 0^+} f(a_i + h), \lim_{h\to 0^-} f(b_i - h) \right\}_{i\in A}$$

es finito.

iv) El $\inf_{x\in S^1} \{ |(Df^2(x)|\} \geqslant \lambda > 1$;

v) $\sup_{x\in S^1} \left\{ \dfrac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|^2} \right\} < \infty$.

Entonces existe una única medida ergódica absolutamente continua respecto a la medida de Lebegue.

Para demostrar este teorema probaremos que f es una transformación de Markov (Definición 4) y por lo tanto la aplicación directa del Teorema 6 implica la existencia de una única medida μ que es no sólo f-invariante sino ergódica y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. Para demostrar que f es una transformación de Markov probaremos primero un lema y una proposición.

Lema 7. *Sea f una transformación que cumple las hipótesis del Teorema 9 entonces:*

i) Existe $C > 0$ tal que para cualquier par de puntos $x, y \in I_i$ con $i \in A$ se tiene que:

$$\left| \frac{Df(x)}{Df(y)} - 1 \right| \leqslant C \mid f(x) - f(y) \mid .$$

ii) Existen $\alpha > 0$ y $\beta > 1$ tales que para todo punto $x \in S^1$ se tiene que:

$$\mid Df^n(x) \mid \geqslant \alpha\beta^n.$$

Demostración. Primero demostraremos el inciso i). El Lema 4 que nos garantiza la existencia de un número $M_1 > 0$ tal que:

$$\sup_{x\in S^1} \frac{\mid D^2 f(x) \mid}{\mid Df(x) \mid^2} < M_1.$$

Por un argumento expuesto en el libro ([8], Lectura 16) sabemos que existe $M_2 > 0$ tal que para todo intervalo $I \in \mathcal{P}$ y todo punto par de puntos $x, y \in I$ se tiene que:

$$\frac{1}{M_2} \leqslant \frac{\mid Df(x) \mid}{\mid Df(y) \mid} \leqslant M_2.$$

Sean $x, y \in I$ un intervalo de de la partición $\mathcal{P}$. Entonces, existen puntos $z, w \in I$ tales que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{Df(x)}{Df(y)} - 1\right| &= \frac{\mid Df(x) - Df(y) \mid}{\mid Df(y) \mid} \\
&= \frac{\mid D^2 f(z) \mid \cdot \mid x - y \mid}{\mid Df(y) \mid} \\
&= \frac{\mid D^2 f(z) \mid \cdot \mid f(x) - f(y) \mid}{\mid Df(w) \mid \cdot \mid Df(y) \mid} \\
&\leqslant \frac{\mid D^2 f(z) \mid}{\mid Df(z) \mid} \cdot \frac{\mid Df(z) \mid}{\mid Df(w) \mid} \cdot \frac{\mid Df(z) \mid}{\mid Df(y) \mid} \cdot \mid f(x) - f(y) \mid \\
&\leqslant \frac{\mid D^2 f(z) \mid}{\mid Df(z) \mid} \cdot M_2 \cdot M_2 \cdot \mid f(x) - f(y) \mid \\
&\leqslant M_1 \cdot M_2^2 \mid f(x) - f(y) \mid \leqslant M \mid f(x) - f(y) \mid,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $M = M_1 \cdot M_2^2$.

Para demostrar el inciso ii) utilizaremos nuevamente el Lema 4 que nos garantiza la existencia de un número λ tal que:

$$\inf_{x\in S^1} \mid Df^2(x) \mid \geqslant \lambda > 1.$$

Sea $\alpha = 1/\sqrt{\lambda}$ y $\beta = \sqrt{\lambda}$, entonces para todo punto $x \in S^1$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\mid Df^n(x) \mid = \prod_{m=0}^{n-1} \mid Df(f^m(x)) \mid \geqslant \lambda^{n-1} > \sqrt{\lambda}^{\,n-1} = \alpha\beta^n.$$

$\square$

Ahora utilizaremos el lema anterior para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 19. *Sea* $f : S^1 \to S^1$ *una transformación que cumple las hipótesis del Teorema 9. Sea* $I \subset S^1$ *un intervalo tal que* $f^j(I) \subset I_{i_j}$ *con* $I_{i_j} \in \mathcal{P}$ *para toda* $0 \leqslant j \leqslant n$*. Entonces, existe una constante* $C > 0$ *tal que para cualquier pareja* $x, y \in I$ *se tiene que:*

$$\left| \frac{Df^n(x)}{Df^n(y)} - 1 \right| \leqslant C \mid f^n(x) - f^n(y) \mid .$$

Demostración. Sea $I \subset S^1$ un intervalo tal que $f^j(I) \subset I_{i_j}$ con $I_{i_j} \in \mathcal{P}$, para toda $0 \leqslant j \leqslant n$ y sean $x, y \in I$.

Sean $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $m < k \leqslant n$. Entonces, el Teorema del Valor Intermedio, junto el inciso *ii*) del Lema 7 implican que:

$$\begin{aligned} \mid f^k(x) - f^k(y) \mid \quad &= \mid f^{k-(m+1)}(f^{m+1}(x)) - f^{k-(m+1)}(f^{m+1}(y)) \mid \\ &\geqslant \mid Df^{k-(m+1)}(z) \mid \cdot \mid f^{m+1}(x) - f^{m+1}(y) \mid \\ &\geqslant \alpha\beta^{k-m-1} \mid f^{m+1}(x) - f^{m+1}(y) \mid , \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde z es un punto contenido en $f^{m+1}(I)$.

La Regla de la Cadena junto con el inciso *i*) del Lema 7 y la ecuación (4.14) implican:

$$\begin{aligned} \frac{\mid Df^n(x) \mid}{\mid Df^n(y) \mid} \quad &= \prod_{m=0}^{n-1} \frac{\mid Df(f^m(x)) \mid}{\mid Df(f^m(y)) \mid} \\ &\leqslant \prod_{m=0}^{n-1} \big(1 + M \mid f^{m+1}(x) - (f^{m+1}(y)) \mid\big) \\ &\leqslant \prod_{m=0}^{n-1} \left(1 + M \left[\frac{\mid f^n(x) - f^n(y) \mid}{\alpha} \beta^{m+1-n}\right]\right) \\ &\leqslant \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 + M \left[\frac{\mid f^n(x) - f^n(y) \mid}{\alpha} \beta^{-m}\right]\right) . \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para ver que el producto converge, definamos P_m para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ como:

$$P_m = M \left[\frac{\mid f^n(x) - f^n(y) \mid}{\alpha} \beta^{-m}\right] > 0.$$

Un criterio de convergencia para productos infinitos nos dice que:

$$1+\sum_{m=0}^{\infty} P_m \leqslant \prod_{m=0}^{\infty}(1+P_m) \leqslant \exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} P_m\right).$$

Como $\beta > 1$ la serie de P_m con $m \in \mathbb{N}$ converge lo cual implica que existe $M' > 1$ tal que:

$$\prod_{m=0}^{\infty}\left(1+M\left[\frac{\mid f^n(x)-f^n(y)\mid}{\alpha}\beta^{-m}\right]\right) \leqslant M'. \tag{4.16}$$

Es posible expresar el producto de la ecuación (4.16) como una serie donde todos los sumandos, excepto uno, tienen a $\mid f^n(x)-f^n(y)\mid$ como factor común por lo tanto existen coeficientes $a_m > 0$ con $m \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\prod_{m=0}^{\infty}\left(1+M\left[\frac{\mid f^n(x)-f^n(y)\mid}{\alpha}\beta^{-m}\right]\right) = 1+\sum_{m=0}^{\infty} a_m\cdot \mid f^n(x)-f^n(y)\mid < M'. \tag{4.17}$$

Así que existe $C > 0$ tal que:

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} a_m = C.$$

Una aplicación directa del la ecuación (4.15) junto con la ecuación (4.17) implican que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{Df^n(x)}{Df^n(y)}-1\right| &\leqslant \left|\frac{\mid Df^n(x)\mid}{\mid Df^n(y)\mid}-1\right| \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} a_m\cdot \mid f^n(x)-f^n(y)\mid \\
&\leqslant C\cdot \mid f^n(x)-f^n(y)\mid .
\end{aligned}$$

□

Teorema 10. *Sea $f : S^1 \to S^1$ una transformación que cumple las propiedades del Teorema 9 entonces f es una transformación de Markov.*

Demostración. La Propiedad i) de la Definición 4 de deduce del hecho que la partición $\mathcal{P}$ está consituida por una cantidad a lo sumo numerable de intervalos, por lo tanto $\mid S^1\backslash\mathcal{P}\mid = 0$.

La hipótesis ii) del Teorema 9 nos dice que f se extiende a una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $\overline{I_i}$ para toda $i \in A$ por lo tanto la transformación $f|_{I_i}$ es de clase C^1 para toda $i \in A$. Esto implica la transformación f cumple la Propiedad ii) de la Definición 4.

La Proposición 19 implica que f cumple la Propiedad iii) de la Definición 4. La Propiedad iv) de la Definición 4 coincide con la hipótesis iii) del Teorema 9.

Finalmente, para demostrar que f cumple la propiedad $v)$ de la Definición 4 consideremos:

$$B = \left\{ \lim_{h\to 0^+} f(a_i + h), \lim_{h\to 0^-} f(b_i - h) \right\}_{i\in A}.$$

El conjunto B induce una partición finita de S^1. Haciendo

$$r = \min\{|\, J\,| : J \text{ pertenece a la partición inducida por el conjunto B}\}$$

se tiene que $|\ f(I_i)\ | \geqslant r$ para toda $i \in A$.

Por lo tanto de f es una transformación de Markov.

□

Una vez probado el teorema anterior podemos demostrar el Teorema 9.

Demostración Teorema 9. Por lo demostrado en el teorema anterior sabemos que f es una transformación de Markov, por lo tanto el Teorema 6 nos dice que existe una medida μ que es f-invariente y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. Además, como los intervalos de la partición asociada de f cumplen la hipótesis de transitividad del Teorema 6 μ es ergódica. □

Para demostrar que existe una medida ergódica absolutamente continua respecto a la medida de Lebesque para la transformación F se hace un procedimiento análogo al que acabamos de hacer para la transformación f ya que F restricta al conjunto K cumple las condiciones necesarias para garantizar que F es una transformación de Markov.

Bibliografía

[1] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[2] Rufus Bowen and Caroline Series. Markov maps associated with Fuchsian groups. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50):153–170, 1979.

[3] Michael Brin and Garrett Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[4] Welington de Melo and Sebastian van Strien. *One-dimensional dynamics*, volume 25 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.

[6] Antonio Lascurain. *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. Las prensas de Ciencias. Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, México, Distrito Federal, 2005.

[7] Ricardo Mañé. *Introdução à teoria ergódica*, volume 14 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1983.

[8] J. Moser, E. Phillips, and S. Varadhan. *Ergodic Theory: A Seminar*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1975.

[9] M. E. Munroe. *Introduction to measure and integration*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge, Mass., 1953.

[10] Walter Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.