



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio de Oscilaciones No Lineales:
El caso del Oscilador Salino

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

SERGIO ANTONIO ALCALÁ CORONA

TUTOR: DR. JORGE HUMBERTO ARCE RINCON



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Alcalá
Corona
Sergio Antonio
5760 4548, 5622 4856
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
097156479

2. Datos del tutor

Dr.
Jorge Humberto
Arce
Rincón

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Clara Eugenia
Garza
Hume

4. Datos del sinodal 2

M. en C.
José Luis
Gutiérrez
Sánchez

5. Datos del sinodal 3

Dra.
Catalina Elizabeth
Stern
Forgach

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Arturo
Olvera
Chávez

7. Datos del trabajo escrito.

Estudio de Oscilaciones No Lineales,
el caso del Oscilador Salino.
100 p
2008

Agradecimientos.

Deus, gratias ago tibi.

Quisiera aprovechar este espacio para agradecer a todas las personas que me ayudaron y que de alguna manera contribuyeron a que este trabajo fuera posible y sobre todo a crecer como persona.

A mis padres:

Guadalupe Corona Ramos, por todo tu apoyo sacrificio y comprensión.

Antonio Alcalá González, porque a pesar del distanciamiento, estuviste ahí en los momentos importantes.

A mi hermano: Gustavo Alcalá, por todo tu apoyo, afecto y paciencia. Y porque aunque no lo creas me enseñaste muchas cosas.

Al Dr. Jorge Humberto Arce Rincón, por aguantar la calamidad que a veces llego a ser y por supuesto por que sin su apoyo y atención nada de esto hubiera sido posible.

A todos y cada uno de los miembros de los sinodales. Dra. Catalina Stern, Dra. Clara Garza, Dr. José Luis Gutiérrez. Dr. Arturo Olvera, Dr. Humberto Arce.

A la Dra. Hortensia González, por presentarme a Humberto, por las atenciones que me dio en mi estancia en laboratorio así como los consejos que ayudaron en este trabajo y sobre todo en mi vida.

A Jaime García y Heriberto Sampson, por ayudarme a aclarar varias dudas experimentales y teóricas respectivamente durante la realización de este proyecto, pero sobre todo por todas aquellas interesantes charlas que llegamos sostener en el laboratorio.

A Patricio Vázquez, Araceli Torres y Alicia Falcón, por la camaradería, el compañerismo y el buen ambiente que siempre tuvimos en el laboratorio.

A mis amigos:

Pedro Corona, Adriana Minor, Armando Cárdenas y Sherezada González, por su amistad, su apoyo y comprensión en los momentos difíciles y por todos los momentos felices que pasamos juntos en esta etapa de nuestras vidas, pero sobre todo por siempre creer en mí.

A Silvia Ivonne, por ser mi amiga y mi pareja durante ya más de tres años y medio. Pero sobre todo por apoyarme, comprenderme y por todo tu amor, (TA00).

A todos los profesores que me dieron la oportunidad de ayudarles a impartir un curso. Romilio Tambutti, Jorge Ortiz Espejél, Ramón Peralta, Mirna Villavicencio, Hortensia González y Humberto Humberto Arce.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por hacerme la persona que hoy soy y formarme más allá de lo académico.

A la Facultad de Ciencias por todo lo que aprendí no solo en aulas sino fuera de ellas, así como a todos los amigos que conocí en ella, a su personal académico en particular a todos los profesores con los que tuve la oportunidad de tomar clases y a su personal administrativo en especial al Director Dr. Ramón Peralta, al Act. Mauricio Aguilar, al Mat. Adrian Girard y a Toño de la biblioteca.

Gracias a Heriberto Sampson por las fotos del Oscilador Salino usadas para este trabajo.

También agradezco el apoyo de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (**DGAPA**) por su apoyo financiero en la realización de este trabajo de tesis a través del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (**PAPIIT**) con el proyecto con clave **INI109307**.

Y gracias a todas aquellas personas que no mencione con el afán de no olvidar o desestimar a nadie, pero que saben que fueron un pilar importante o bien un gran apoyo en mi desarrollo profesional, y que guardan un lugar importante en mi memoria.

Y por último gracias a todas aquellas personas que en algún momento, no creyeron en mí, pues de no haberlo hecho tal vez no hubiera llegado hasta aquí.

*A quien pasó hambre, sueño, llanto y sufrimiento; a
quien sola dio frente a todas las adversidades
incondicionalmente; y quien prácticamente dio su vida
para que yo fuera el hombre que soy.*

*Gracias
Mamá.*

IN MEMORIAM

Crescenciano Alcalá Muñoz.

1920 - 2008.

Índice **Página**

Resumen **1**

I. El Oscilador Salino **2**

I.1 Antecedentes..... 2

I.2 Arreglo Experimental..... 8

I.3 Medición y tratamiento de Datos..... 10

II. La Teoría del Reinicio **14**

II.1 Perturbaciones en el Oscilador de Poincaré..... 19

II.2 La Curva de Transición de Fases..... 22

II.3 Iteraciones en la Curva de Transición de Fases..... 26

II.4 Predicción de Acoplamientos a partir de Iteraciones..... 31

III. Perturbaciones en el Oscilador Salino **36**

III.1 Protocolos de Perturbación: Aisladas y Periódicas..... 37

III.2 Comportamiento experimental ante perturbaciones..... 40

III.3 Construcción experimental de la Curva de Transición de Fases..... 45

| | |
|--|-----------|
| IV. Resultados. | 53 |
| IV.1 Predicción de acoplamientos en el Oscilador Salino a partir de iteraciones... | 53 |
| IV.2 Resultados Experimentales y comparación con las predicciones teóricas..... | 72 |
| V. Conclusiones. | 84 |
| Apéndices. | |
| A. Comparación teórico - experimental. | 88 |
| Referencias. | 99 |

RESUMEN

El Oscilador Salino es un sistema muy simple que consiste en dos recipientes de diferente tamaño interconectados por un pequeño orificio, estos contienen líquidos de diferente densidad: agua salada y agua pura. En dicho sistema se observa que ocurre una oscilación rítmica de agua la cual aparece como un chorro descendente de agua salada desde el recipiente de menor tamaño, seguido de un chorro ascendente de agua pura proveniente del de mayor tamaño, ambos flujos se alternan y el fenómeno se repite durante muchos ciclos.

En el año 2000 M. Okamura y K. Yoshikawa, publicaron un estudio en el cual a partir de diferentes hipótesis concluyeron que la oscilación de los flujos puede ser vista matemáticamente como un oscilador con ciclo limite atractor mediante la llamada ecuación de Rayleigh. En otros estudios se ha reportado que el Oscilador Salino muestra varios comportamientos típicos de oscilador no lineal con un ciclo limite atractor siendo tal vez el fenómeno más interesante el del acoplamiento entre dos o más osciladores. Partiendo del interés que hay de entender cómo es que algunos sistemas físicos, químicos y en especial biológicos llegan a acoplarse entre sí encontramos importante estudiar el Oscilador Salino.

El presente trabajo constituye un estudio de los acoplamientos del Oscilador Salino proponiendo una situación muy simple: el oscilador será perturbado puntual y periódicamente, pero no podrá ejercer ninguna influencia sobre la fuente de perturbación. A diferencia de trabajos que utilizan el mismo enfoque de perturbaciones, estas últimas serán bifásicas. Con el efecto de las perturbaciones puntuales se construirá una Curva de Transición de Fases, la cual se utilizará para predecir los acoplamientos ante perturbaciones periódicas. Hay que señalar que todos los acoplamientos predichos por la teoría fueron encontrados experimentalmente e inclusive se predijo un tipo de biestabilidad entre ritmos 1:1 que no se había reportado anteriormente. Finalmente debo manifestar que este trabajo está inspirado en parte de los resultados por publicarse por el grupo de Biofísica de Sistemas Excitables de la Facultad de Ciencias [1], grupo con el cual tuve la oportunidad de colaborar durante los pasados dos años.

CAPITULO I

El Oscilador Salino.

I.1 Antecedentes

El “Oscilador Salino” u Oscilador de Densidad, es un sistema muy simple, que fue descrito por primera vez en 1970 por Seelye Martin, geofísico de la Universidad de Washington [2], quien descubrió que una oscilación rítmica de agua ocurre cuando una jeringa hipodérmica verticalmente orientada y sin émbolo, es llenada con agua salada y parcialmente sumergida en una tina con agua pura. Esta oscilación aparece como un chorro descendente de agua salada desde la jeringa, seguido de un chorro ascendente de agua pura proveniente de la tina, ambos flujos se alternan y el fenómeno se repite durante decenas de ciclos.

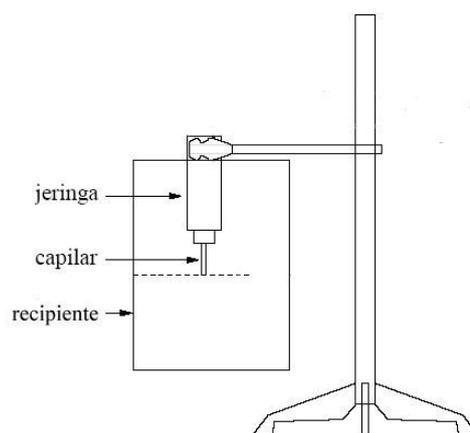


Fig. I.1. Arreglo experimental original del Oscilador Salino.

Los flujos periódicos hacia arriba y hacia abajo pueden ser fácilmente monitoreados a simple vista. La oscilación en general se puede registrar mediante la medida del potencial eléctrico entre el agua salada y el agua pura colocando un electrodo de Ag/AgCl en cada uno de los fluidos para que capture la señal [3,4]. Resulta interesante mencionar que hasta el momento no hay una explicación categórica acerca del origen de este potencial eléctrico, aunque algunos autores han sugerido ideas basadas en el concepto de potencial de chorro [25-27]; este problema no es abordado en este trabajo en el cual sólo se considera que la diferencia de voltaje refleja fielmente la oscilación de los flujos.

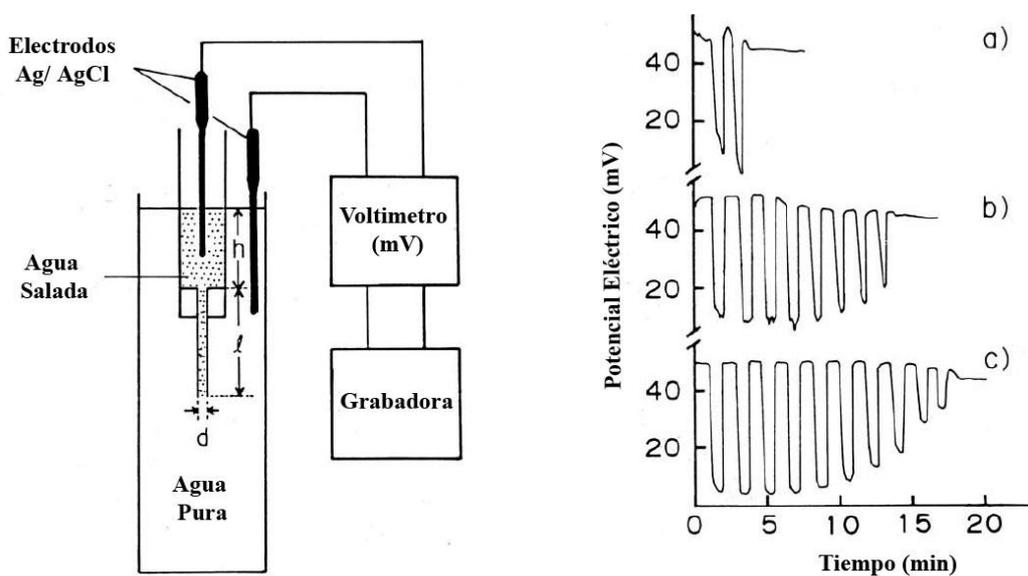


Fig. I.2. IZQUIERDA. Arreglo experimental con los instrumentos de medición, la señal procedente del multímetro es tratada digitalmente. **DERECHA.** Registros de la oscilación para diferentes concentraciones de solución salina a) 1M NaCl b) 2M NaCl c) 5.5M NaCl (saturada). Nótese la variación del periodo respecto de la concentración.

Martin describió el fenómeno, pero en ese momento no reconoció que se trataba de un ejemplo de un sistema dinámico no lineal [5,6], sin embargo, a partir de este hallazgo se han realizado diversas investigaciones teóricas y experimentales por diversos autores [2-14], quienes han tratado al oscilador salino tanto como un problema de dinámica de fluidos como de dinámica no lineal. También se han planteado diferentes arreglos experimentales para su estudio.

El Oscilador Salino ha pasado de ser la curiosidad hidrodinámica encontrada por Martin [7], a un problema ampliamente estudiado por su simpleza experimental y bastante discutido por su riqueza teórica ya que reproduce muchas de las características de osciladores no lineales más complicados.

En el sistema original de Martin el vaso con agua salada estaba conectado con el de agua pura por un estrecho tubo. Posteriormente este sistema se complicó dando paso al control de los diferentes parámetros experimentales involucrados como el diámetro del tubo, la diferencia de densidad, la viscosidad, etc., para la mejor comprensión del fenómeno.

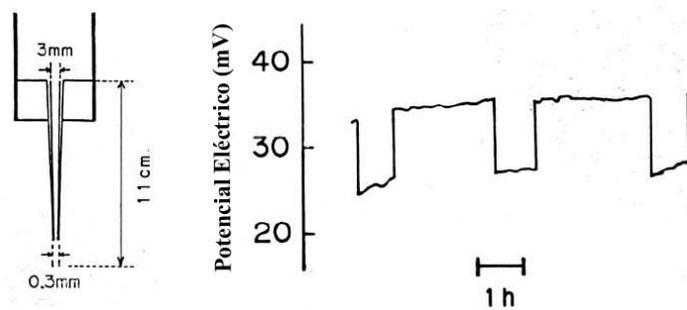


Fig. I.3. El cambio del tubo de la jeringa por un capilar provoca un fuerte incremento en el tamaño del periodo de oscilación [3].

Varios autores han estudiado el comportamiento del oscilador salino con un arreglo experimental en el cual se interconecta los recipientes de diferentes densidades (agua salada y pura) mediante un capilar, bajo este esquema los estudios reportados conciernen a cómo afecta al periodo de oscilación, la variación de ciertos parámetros experimentales como la longitud del capilar, el radio del mismo así como la concentración de la solución salina [4,7,8]. De este tipo de estudios se sabe que el periodo de la oscilación se incrementa cuando se usa un capilar angosto en vez de un tubo cilíndrico y que bajo estas circunstancias el periodo incluso llega a ser de más de una hora [3].

Cuando en el sistema el cilindro es remplazado por un simple agujero en el fondo del recipiente interior (Arreglo propuesto por Alfredson y Lagerstedt en [9], el periodo es más

corto y a su vez también se observa un flujo periódico en el cual se pueden obtener relaciones fenomenológicas entre el periodo de oscilación y ciertos parámetros como la concentración de la solución salina o el tamaño del orificio [3, 5].

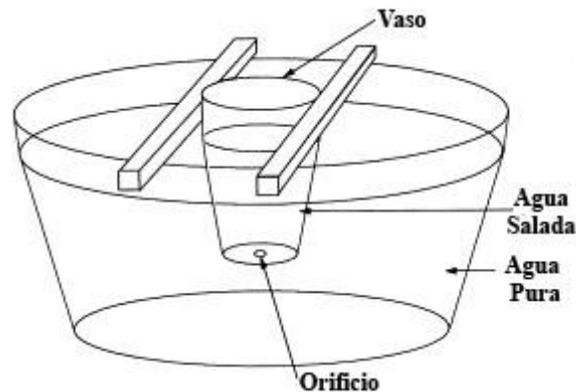


Fig. I.4. Arreglo experimental en el cual el capilar es substituido por un orificio en el fondo de un vaso.

Fue en el año 2000 cuando Mina Okamura junto a Kenichi Yoshikawa, publicaron un estudio en el cual abordaron el flujo en el Oscilador Salino a través de dos ecuaciones para dar una solución numérica al problema [6]. Estas dos ecuaciones son diferenciales no lineales acopladas reducidas tanto de la ecuación de continuidad como de las ecuaciones de Navier-Stokes, que fueron integradas bajo las condiciones correspondientes a un arreglo específico; el resultado es una simulación del flujo entre los vasos que logra reproducir muy bien el comportamiento experimental. En dicho trabajo se simplifica la ecuación para el flujo sobre el eje z , reduciéndose a una ecuación diferencial no lineal, la cual los lleva a considerar que el Oscilador Salino puede ser descrito mediante la llamada ecuación de Rayleigh, y que exhibe la aparición de un ciclo límite en la oscilación. En este mismo artículo se reporta que el Oscilador Salino muestra varios comportamientos típicos de un oscilador no lineal con un ciclo límite atractor.

Además de las bifurcaciones y las características no lineales asociadas, tal vez el fenómeno más interesante que se ha observado estudiando al Oscilador Salino, es el acoplamiento de dos o más osciladores.

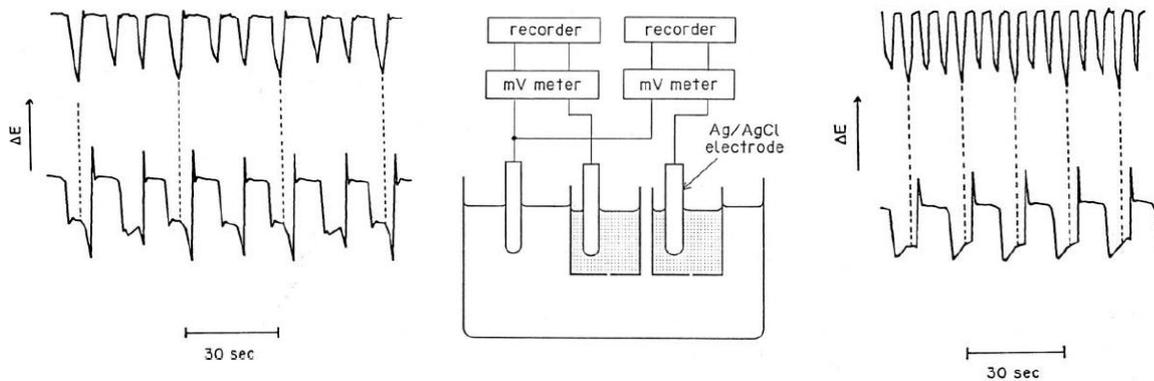


Fig. I.5. Acoplamiento entre dos osciladores salinos. CENTRO. Arreglo experimental. DERECHA. El trazo superior corresponde al oscilador cuyo recipiente interno contiene una solución 5.4 M NaCl y tiene un orificio de 1.4 mm de diámetro, el trazo inferior corresponde al otro oscilador en el cual el recipiente interno contiene una solución 3 M NaCl y su orificio es de 1.1 mm de diámetro. IZQUIERDA. Se intercambiaron los vasos que contenían las diferentes soluciones. Figura tomada de [3].

Como se ve en la figura (I.5) existen acoplamientos entre los periodos de oscilación de dos osciladores salinos con un agujero en el fondo del recipiente interno; se nota como hay un acoplamiento en fase entre las respuestas de cada uno de estos [3]. Se ha reportado una variedad de sincronizaciones tales como los casos del acoplamiento 1:1 fuera de fase o acoplamientos quasi-periódico [10 - 14] tal y como lo reporta Miyakawa et al en [10]. En este trabajo se investigó las propiedades de acoplamiento y de sincronización entre dos osciladores salinos, los cuales fueron acoplados a través de una ventana en que separaba dos secciones de un recipiente externo común, en cada una de estas secciones se colocó un recipiente pequeño con solución salina (figura I.6). Incrementando el área de la ventana varios acoplamientos fueron apareciendo sucesivamente, estos fueron mostrados mediante un diagrama de fase de estados de acoplamiento en función del área de la ventana y el diámetro de los orificios de los vasos pequeños.

También se investigó el efecto de la viscosidad en comportamientos de acoplamiento. Estos hallazgos experimentales fueron reproducidos mediante una simulación numérica usando dos ecuaciones diferenciales no lineales acopladas basadas en publicaciones anteriores de Yoshikawa [10,14].

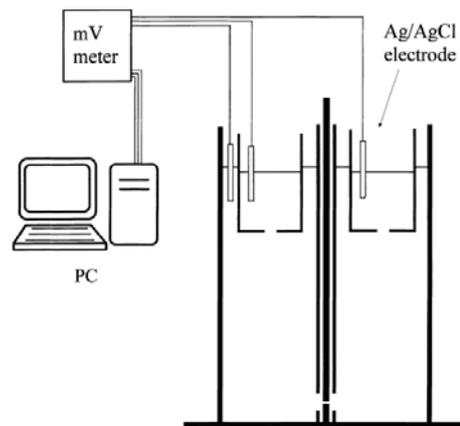


Fig. I.6. Arreglo experimental propuesto por Miyakawa et. al., en el cual dos osciladores salinos son acoplados mediante una pequeña ventana que varía entre 0 y 20 mm de diámetro, ubicada en la parte inferior del recipiente exterior. Figura tomada de [10].

Es probable que el estudio de acoplamientos en el Oscilador Salino pueda ser útil para entender los mecanismos fundamentales de sincronización y autoorganización en sistemas vivientes tales como células cardíacas y neuronales, y ritmos circadianos en organismos multicelulares [15].

Sin embargo el análisis de estos acoplamientos es difícil, ya que cada uno de los osciladores afecta al otro; un arreglo más sencillo se tiene cuando el acoplamiento es unidireccional, esto es, cuando se perturba periódicamente usando un dispositivo que no se ve afectado por la respuesta del oscilador. Este tipo de esquema es el que se propone en este trabajo para analizar y estudiar acoplamientos en el Oscilador Salino, por lo que a continuación se hará una descripción detallada del método experimental utilizado para lograr este objetivo.

I.2 Arreglo experimental

La versión del Oscilador Salino usada para el presente estudio corresponde al propuesto por Alfredson y Lagerstedt en [9] (figura I.4) y generalmente usado por Yosikawa et al [6,10,16]. A continuación se detalla una breve descripción del dispositivo.

El arreglo consiste en dos recipientes de diferente tamaño interconectados por un pequeño orificio, estos contienen líquidos de diferente densidad (ρ_1 , ρ_2). Dentro del recipiente más grande, el cual contiene el líquido de menor densidad ρ_1 (agua pura), se coloca el recipiente más pequeño que contiene el fluido más denso ρ_2 (solución salina de NaCl en agua, disuelto a una concentración de 3 molar).

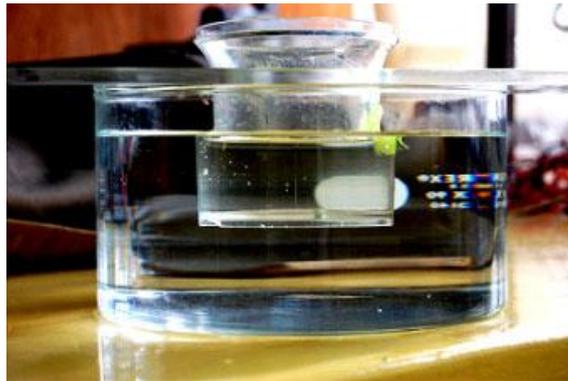


Fig. I.7. Arreglo experimental usado para el presente estudio.

Para este caso el contenedor externo tiene 9.73 centímetros de altura y 22.8 centímetros de diámetro, conteniendo 3.1 litros de agua destilada. Una pieza de acrílico fija el vaso con solución salina en la parte superior del contenedor. Este vaso contiene 90 mililitros de solución 3Molar de Cloruro de Sodio [175g/l], y tiene un agujero en el centro de la base de 0.9 milímetros de diámetro y 2.2 milímetros de altura.

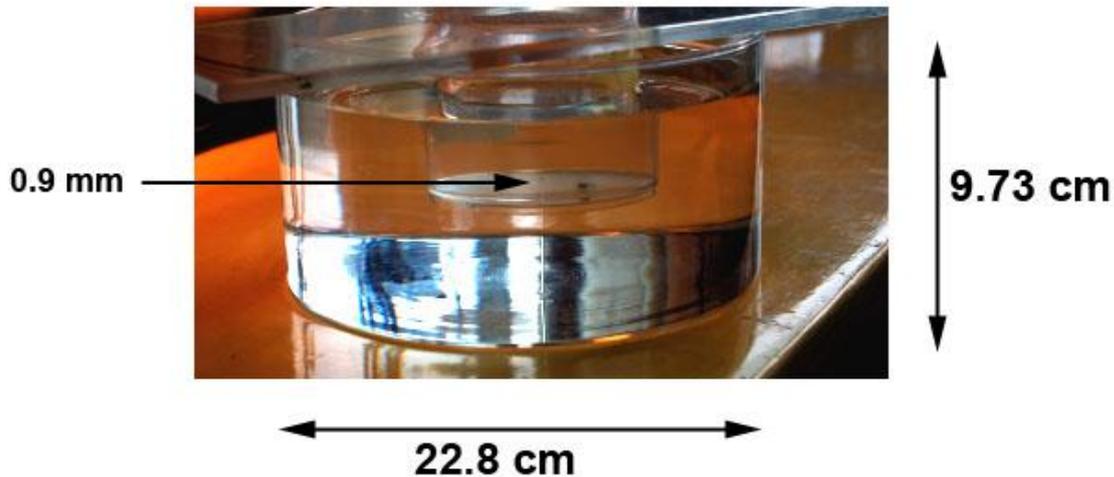


Fig. I.8. Dimensiones del arreglo experimental 9.73 centímetros de altura y 22.8 centímetros de diámetro así mismo el agujero en el centro de la base mide de 0.9 milímetros de diámetro.

El experimento se inicia haciendo coincidir los niveles de los líquidos a la misma altura y liberando un tapón que obstruye un orificio en la parte inferior del recipiente menor, con lo cual un chorro de solución salina fluye en sentido descendente a través del agujero como efecto del gradiente de presión. Después de unos segundos se observa un cambio en el flujo del chorro descendente, disminuyendo drásticamente e inmediatamente después el flujo se invierte cambiando el líquido que fluye, apareciendo un chorro ascendente de agua pura, desde el recipiente exterior hacia el interior, a través del agujero. Unos segundos más tarde nuevamente se revierte el flujo y la solución salina cae hacia el fondo del contenedor externo. De esta forma se establecen oscilaciones entre los líquidos de diferente densidad, primero se tiene un flujo de solución salina descendiendo y después de un tiempo agua pura asciende, en un ciclo con un periodo constante.

Las variaciones en la presión y sentido de circulación están ligadas a la altura del líquido del recipiente interno, ya que cuando disminuye el volumen de este, se está cambiando el peso de dicha columna de líquido y por lo tanto la presión. A su vez, cuando asciende agua pura se vuelve a cambiar el peso de la columna de líquido del recipiente interno [4].

La cantidad de solución salina desalojada, o de agua pura introducida en el recipiente es muy poca, basta con soltar unas gotas en la superficie del recipiente interno para cambiar el sentido de flujo, esto muestra la sensibilidad del sistema a perturbaciones externas.

La oscilación de los flujos se repite cientos de veces durante algunas horas, y se detiene cuando el gradiente de densidades desaparece. Una de las razones para que la oscilación dure tanto, es que el agua salada se acumula en el fondo del contenedor, mientras que el agua destilada “flota” en la superficie de la solución salina del vaso interno, de tal manera que el gradiente de densidades alrededor del agujero pequeño se mantiene constante durante mucho tiempo [9].

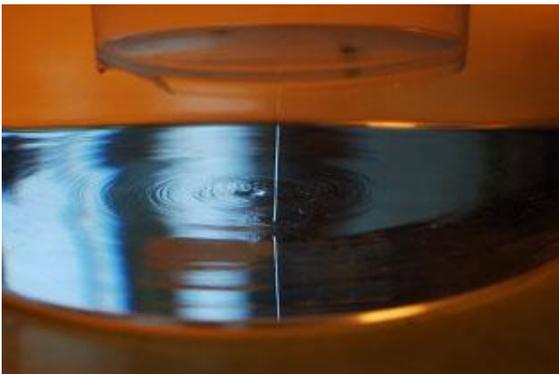
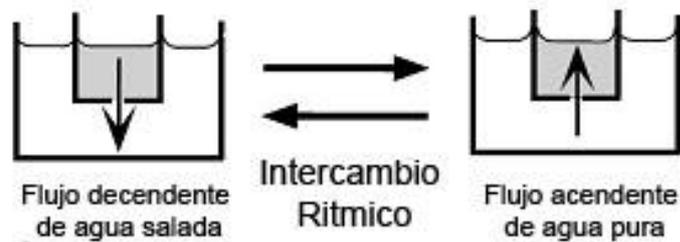


Fig. I.9. El intercambio entre los fluidos ocurre de manera rítmica y con un periodo prácticamente constante.

I.3 Medición y tratamiento de datos

En el presente trabajo se ha medido básicamente la diferencia de potencial que se establece entre los vasos interno y externo del oscilador. Existen referencias que muestran que los cambios de dirección del flujo de agua en el orificio del vaso interno corresponden a

variaciones en el signo de la tasa de crecimiento del voltaje [4], sin embargo hasta el momento no se ha establecido una relación funcional entre ambos grupos de variables, a pesar de que no parece ser algo difícil de obtener experimentalmente [25-27].

Para poder registrar y medir la evolución del sistema, se puede asociar cada sentido del flujo a uno de los estados de equilibrio meta-estables, los cuales son: i) cuando la solución salina fluye hacia abajo; y ii) un segundo estado donde el agua pura asciende. Cada estado del oscilador está asociado con el sentido en que fluye alguno de los dos líquidos.

Estos dos estados se pueden visualizar fácilmente en el experimento gracias a la diferencia en el índice de refracción de líquidos con densidades diferentes, sin embargo, los fluidos presentes en el Oscilador Salino son electrolitos, y por lo tanto se genera un voltaje que puede ser registrado usando un par de electrodos de plata clorada. Así para medir el cambio de cada uno de los estados, se coloca un electrodo de ClAg - Ag en cada una de las soluciones.

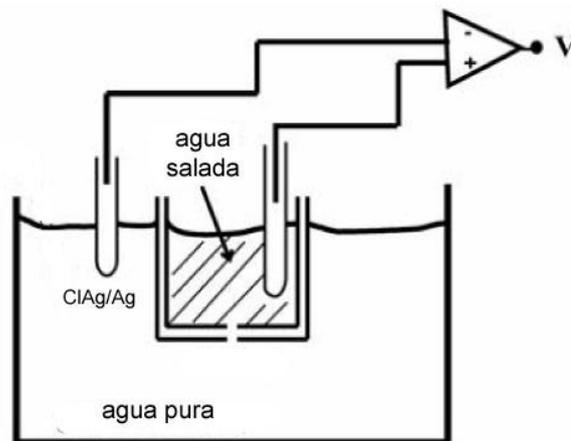


Fig. I.10. La diferencia de potencial eléctrico que oscila a la par de los fluidos es registrada por dos electrodos de cloruro de plata colocados en cada uno de los recipientes conectados a un voltímetro cuya señal es digitalizada posteriormente.

Entonces la diferencia de potencial eléctrico (aproximadamente 3mV), generada por los iones presentes en la solución salina y el agua limpia, y que oscila, conforme cambia el sentido del flujo en el agujero, es captada por los electrodos generando una señal que es amplificada y después registrada mediante un osciloscopio; ésta refleja la oscilación de

ambos líquidos entre los recipientes. A su vez se emplea un sistema digital para adquirir los voltajes generados por el oscilador, lo que permite observar cómo evoluciona temporalmente la inversión en el sentido del flujo del oscilador salino.

Se digitalizan los datos a 47.2 KHz., con 14 bits de resolución (InstruTech VR-10B), y además son grabados en una videocasetera y en un archivo en el disco duro de una PC mediante un software (Bruyton Acquire 5.0.1), realizando un diezmado que deja un intervalo de muestreo de 2.71 ms., para realizar posteriores mediciones sin la necesidad de que el experimento esté montado.

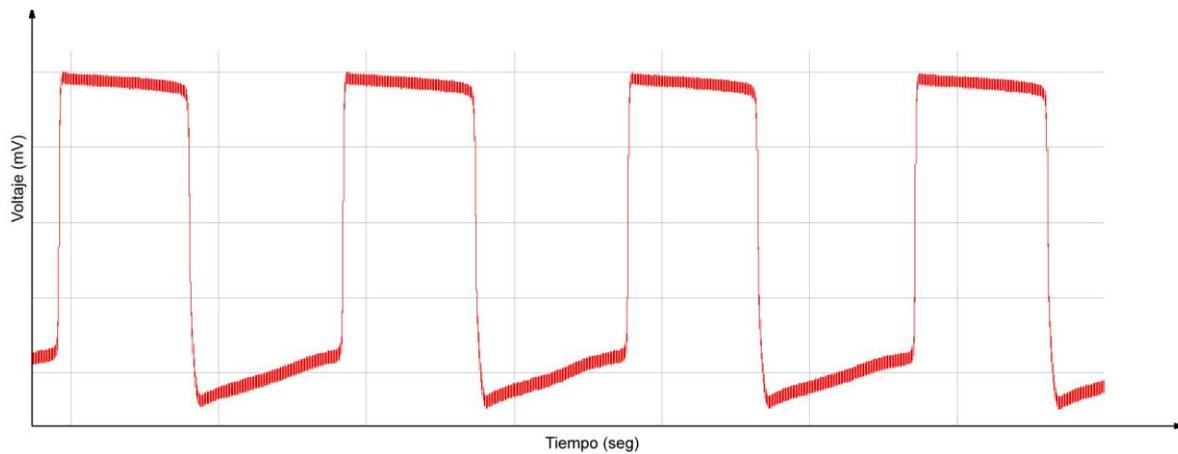


Fig. I.11. Un registro típico de la oscilación tal y como la muestra el software Bruyton Acquire 5.0.1.

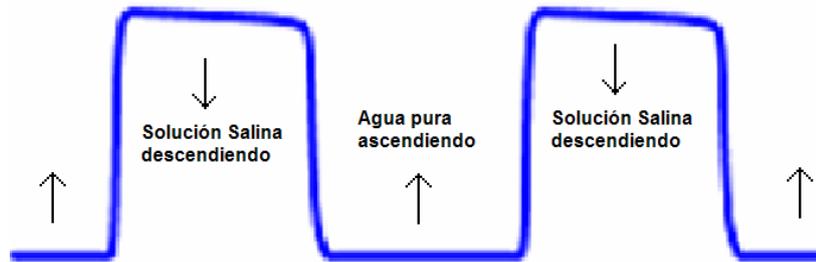


Fig. I.12. Interpretación de la señal registrada respecto del intercambio de flujos. Cuando se registra un voltaje alto la solución salina desciende y cuando el agua pura asciende hay una caída de voltaje.

Bajo las condiciones experimentales del laboratorio, el periodo de oscilación dura de 32 a 38 segundos. Para cada experimento el periodo es muy estable, con pequeñas variaciones en el periodo de oscilación cuyo coeficiente de variación está sobre el 1% en 30 oscilaciones. Debido a la mezcla de los fluidos internos y externo el periodo de incrementa lentamente: 10% en cerca de 10 horas.

CAPITULO II

La Teoría del Reinicio.

El comportamiento de fenómenos oscilatorios ha sido estudiado durante los dos milenios pasados, lo que ha guiado a un entendimiento del comportamiento de relojes y los ritmos asociados a los mismos.

El estudio de ritmos biológicos (que data desde tiempos de Aristóteles [29]) y de muchos fenómenos oscilatorios puede ser modelado a partir un modelo de reloj simple en el cual se puede suponer que una variable avanza con un periodo constante o bien con una frecuencia angular constante (fase). Inclusive se puede particularizar este modelo para introducir el concepto de ciclo límite usando el *Oscilador de Poincaré* el cual se expondrá más adelante y que será útil para modelar el comportamiento del Oscilador Salino.

Este tipo de fenómenos se pueden describir aun mejor si se considera que este reloj puede modular su fase mediante una señal o estímulo externo para poder adelantarla o retrasarla con el propósito de que ambos (estímulo y fase) estén acopladas [29]. Como ejemplo se puede considerar la influencia de la luz solar en ritmos circadianos.

Cuando se tiene un comportamiento de esta naturaleza se dice que se está hablando de un fenómeno de *acoplamiento en fase* (*phase locking*). El acoplamiento en fase es un fenómeno sorprendente que se observa en varios sistemas físicos y biológicos, incluso su estudio se remonta a los tiempos de Aristóteles cuando se trataba de describir por qué el sonido de las cuerdas de un lira parecidas entre ellas por sus dimensiones físicas se escuchaban vibrar a la misma frecuencia [29]. Así mismo este fenómeno es la clave en el diseño de muchos sistemas en ingeniería que controlan los tiempos en computadoras o las vibraciones en vehículos. De la misma manera cuando el Oscilador Salino se acopla con otro oscilador también se establece un fenómeno de este tipo.

El estudio del *phase locking* se aplicó inicialmente al desarrollo de circuitos electrónicos a principios del siglo XX, con el fin de modular señales de radio, una señal debía acoplarse a otra con el fin de que la segunda modulara a la primera. El desarrollo tecnológico de este tipo de circuitos ha traído beneficios tales como la radio FM.

Para describir el acoplamiento en fase se puede partir de considerar dos circuitos oscilantes en los cuales la señal de uno modula (estimula) a la señal del otro consiguiendo un acoplamiento. Estas señales son de la forma $A \text{sen}(\omega t)$, donde t es el tiempo y ω la frecuencia. De acuerdo a esto se puede tomar una señal portadora $A_p \text{sen}(\omega_p t)$ y una señal moduladora de la forma $A_m \text{sen}(\omega_m t)$. De esta manera la frecuencia ω de la señal modulada variará alrededor de la frecuencia de la señal portadora de acuerdo a la siguiente expresión $\omega = \omega_p + \Delta\omega \text{sen}(\omega_m t)$.

Así la señal modulada queda de la siguiente manera: $A_p \text{sen}(\omega_p + m_f \text{sen}(\omega_m t)t)$ en

donde $m_f = \frac{\Delta\omega}{\omega_m}$ se le denomina índice de modulación. Rescribiendo la expresión

tenemos que la señal modulada tiene la forma:

$$A_p \text{sen}(\omega' t + \phi).$$

Donde $\omega' = \omega_p + m_f \text{sen}(\omega_m t)$ y $\phi = \omega_p t$. La anterior es esencialmente la forma de la señal que recibe cualquier radio. Si la transmisión es de frecuencia modulada (FM), entonces ω' es la frecuencia del emisor con el cual un receptor se acopla y ϕ que cambia mucho más lentamente que $\omega' t$ contiene la música que se escucha.

La razón por la que se usa el FM es porque es una señal muy estable en presencia de ruido (raramente se escucha estática en presencia en la señal FM), esto es porque aunque ω' no esté exactamente sincronizada con la estación, el receptor puede decodificar la fase correctamente debido al *acoplamiento en fase*, lo que delata que el fenómeno es altamente robusto y no es sensible a perturbaciones pequeñas.

Sin embargo el estudio de circuitos electrónicos acoplados ha sido más profundo aún, el hecho de que algunos de estos sistemas reproduzcan fielmente las características de otros tipos de osciladores es realmente sorprendente. Así, el fenómeno de acoplamiento en fase no solo ha sido observado en sistemas electrónicos sino que también ocurre en

otro tipo de sistemas, como es el caso de la regulación de ritmos biológicos. En los sistemas excitables por ejemplo, se ha reportado acoplamiento en las células cardiacas, el nodo Atrio Ventricular es capaz de modular la señal en el electrocardiograma, en el cual se puede notar como es que la señal del complejo QRS y las ondas P se acoplan como el llamado *patrón de Wenckebach* atribuido al cardiólogo alemán Wenckebach en 1904 [30].

Así también una neurona puede transmitir información modulando su frecuencia de disparo en fase, tal y como ocurre en los radios FM. En 1980 R. Guttman y sus colaboradores, reportaron el fenómeno al estimular un trozo de membrana de axón de calamar, mediante una diferencia de potencial oscilatoria [29]. De hecho el aplicar estímulos externos para estudiar la respuesta de sistemas excitables (en especial de tejido nervioso y cardiaco) ha sido descrito ampliamente en la literatura, uno de los primeros trabajos fue el de A.L. Hodgkin en 1948, quien aplicó un voltaje constante a través de una membrana nerviosa y observó que cuando el estímulo se incrementaba, el voltaje medido en a través de la membrana comenzaba a oscilar debido a las corrientes iónicas que circulan a través de la misma.

A la par de estos estudios la relación entre el comportamiento de algunos sistemas biológicos con el de los circuitos electrónicos se hacía más estrecha, pues se desarrollaban y diseñaban circuitos electrónicos analógicos con los que se podía contar en experimentos y modelos matemáticos para el estudio de sistemas biológicos como es el caso de las células excitables.

Como ejemplos se pueden encontrar los trabajos como los de L. Lapicque (1907) usando un filtro pasa bajos junto a un circuito de interrupción, o el famoso oscilador de Van der Pol (1926) desarrollado con tubos de vacío y que ha servido de base para la construcción modelos electrónicos de osciladores biológicos, como es el modelo clásico de medio excitable inicialmente introducido para la descripción de membranas nerviosas, propuesto por el investigador Richard FitzHugh, quien trabajaba en los National Institutes of Health, Bethesda, Maryland, USA (1961-62).

Basado en los trabajos previos de Van der Pol y K. F. Bonhoeffer para modelar los latidos del corazón, FitzHugh propuso una simplificación considerable del modelo de

Hodgkin y Huxley de 1952, el cual usaba circuitos de bloqueo de conductancia variable. Su modelo que llamó también con el nombre de Van Der Pol – Bonhoeffer ya que en realidad conserva muchos de los ingredientes básicos del conocido oscilador de relajación de Van der Pol, que consta de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, una lineal y la otra cúbica.

Simultánea e independientemente del trabajo de FitzHugh, el investigador japonés Jinichi Nagumo del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Tokio propuso alrededor de 1960 como análogo neuronal, un circuito electrónico no lineal usando diodos de tunelaje, el cual básicamente se usa para modelar los mismos fenómenos que el modelo de Hodgkin-Huxley, es decir, el control del potencial eléctrico de acción a través de la membrana de la célula. Este control se realiza a través del cambio del flujo de los canales iónicos de la membrana de la célula, dando lugar a cambios del potencial que se utiliza para enviar señales eléctricas entre las células. Este modelo es gobernado por un sistema de dos ecuaciones, también semejantes a las de Van Der Pol. [29]

Teniendo en cuenta lo anterior ingenieros eléctricos y físicos han diseñado circuitos cuyos modelos matemáticos están basados en términos de la variable fase para modelar sistemas excitables. Estos están basados en circuitos osciladores de voltaje controlado VCO (voltaje-controlled oscillator) así como circuitos PPL (phase locking loop), tal es el caso de F. C. Hoppenstead (1980) [29]. El análisis de este tipo de circuitos en los cuales aparece una sincronización 1:1 en la que cada oscilador individual afecta y es afectado por la actividad del otro oscilador, es comparable a la situación en que dos células cardíacas interaccionan.

De esta manera el uso de circuitos analógicos ha sido ampliamente usado desde hace tiempo para interpretar y entender datos de experimentos fisiológicos y para sugerir futuras investigaciones. Sin embargo una situación más simple que merece ser mejor estudiada es el caso de acoplamiento unidireccional en que una fuente externa maneja un solo oscilador periódicamente [28].

Otro acercamiento para describir el *acoplamiento en fase* se basa en usar ecuaciones en diferencias finitas e iterarlas para descubrir acoplamientos en fase como en los denominados *mapeos en el círculo*.

La primera aplicación de los mapeos en el círculo al comportamiento de sistemas excitables se atribuye a Knight en 1972 para neuronas. Así mismo en 1988 basados en el estudio de células cardíacas Glass y Mackey proponen una discusión más detallada de estos mapeos y su relación con el caos al aplicarlos ampliamente a varios problemas biológicos, y posteriormente Strogatz en 1994 y Kaplan en 1995 [30].

El primer reto para un mapeo en el círculo es determinar cuando el comportamiento del sistema oscilante es periódico así mismo entender los posibles comportamientos no periódicos a partir de la variación de un parámetro (de Bifurcación).

De esta manera cuando se localiza alguno de estos comportamientos es posible poder asociar un acoplamiento en fase del oscilador con un estímulo externo el cual proporciona el parámetro de iteración. La clave para entender cómo es que esta técnica predice un acoplamiento en fase se encuentra en el número de rotación. Si este número es racional de la forma n/m se encuentran puntos estables en el mapeo y se asocia un acoplamiento en fase robusto de la forma $m:n$, con m ciclos respuesta por cada n estímulos. Así mismo cuando el mapeo es una función creciente respecto del parámetro de iteración el comportamiento de las iteraciones (órbitas) se vuelve inusual de tal forma que el número de rotación se vuelve una función continua y monótonamente creciente respecto del parámetro de bifurcación conocida como “escalera del diablo” [30].

Basándose en este enfoque en el presente capítulo se discutirá un modelo matemático del mapeo en el círculo usado para modelar el acoplamiento en fase y los posibles acoplamientos del Oscilador Salino con perturbaciones periódicas externas.

El estudio se basará en un modelo matemático simple propuesto en 1982 por Michel Guevara y León Glass, [17-21] y discutido previamente por Winfree (1975, 1980) [15,18,], basado en el oscilador de Poincaré, para modelar las respuestas que daba un conglomerado de células cardíacas a estímulos eléctricos periódicos. Este tipo de células

pueden verse como un oscilador con ciclo límite. Posteriormente se ilustrara diferentes tipos de acoplamiento en fase que pueden resultar de la estimulación periódica.

II.1 Perturbaciones en el Oscilador de Poincaré

El oscilador de Poincaré, describe un vector de magnitud r el cual gira en el plano XY con una rapidez angular constante. La función que describe la tasa de crecimiento en el tiempo de r viene dada por: $\dot{r} = ar(1-r)$ y su posición respecto al eje X es Φ , por lo que la velocidad con la que gira el vector es: $\dot{\Phi} = 2\pi$. Así se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales, como el siguiente, donde la ecuación para r es no lineal y a es un parámetro positivo.

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar(1-r) \\ \dot{\Phi} &= 2\pi\end{aligned}\tag{1}$$

En donde para la coordenada angular se tiene que $-\infty < \Phi < \infty$, y para la radial $0 < a < \infty$.

Así pues, si igualamos la ecuación para r a cero, podremos encontrar los puntos de equilibrio de este sistema.

$$\begin{aligned}\dot{r} = 0 &\Rightarrow ar(1-r) = 0 \\ &\Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 1\end{aligned}$$

Existe un punto de equilibrio en la solución r_1 . La solución r_2 nos dice que hay una solución estable que no es un punto, cuando el vector que está girando y tiene una magnitud unitaria $r = 1$.

Lo anterior, delata la existencia de un ciclo limite en $r = 1$, que es la curva (en este caso una circunferencia) que describe el vector unitario y que es globalmente atractor para todas las condiciones iniciales salvo el punto de equilibrio en el origen. De tal forma

que para valores de $r > 1$ ocurre que la magnitud se va aproximando a 1 conforme t tiende a infinito. Y para valores de $r < 1$, $r(t)$ se aproxima también a 1.

$$r > 1 \Rightarrow \dot{r} < 0 \Rightarrow r(t) \rightarrow 1$$

$$r < 1 \Rightarrow \dot{r} > 0 \Rightarrow r(t) \rightarrow 1$$

Dado que las soluciones se aproximan por ambos lados (valores mayores que uno y menores también) el ciclo límite descrito, es un ciclo limite atractor.

Al tomar un punto fuera del ciclo límite como condición inicial, la respuesta del sistema resulta en una relajación de regreso al ciclo limite estable a una tasa que depende del parámetro a .

Así también se puede tomar un punto sobre la circunferencia y trasladarlo hacia algún lugar sobre el plano fuera del ciclo limite y habrá una respuesta de regreso al ciclo limite, a esto lo podemos llamar una perturbación sobre el sistema.

En general el círculo unitario es globalmente atractor para todas las condiciones iniciales salvo el punto de equilibrio en el origen.

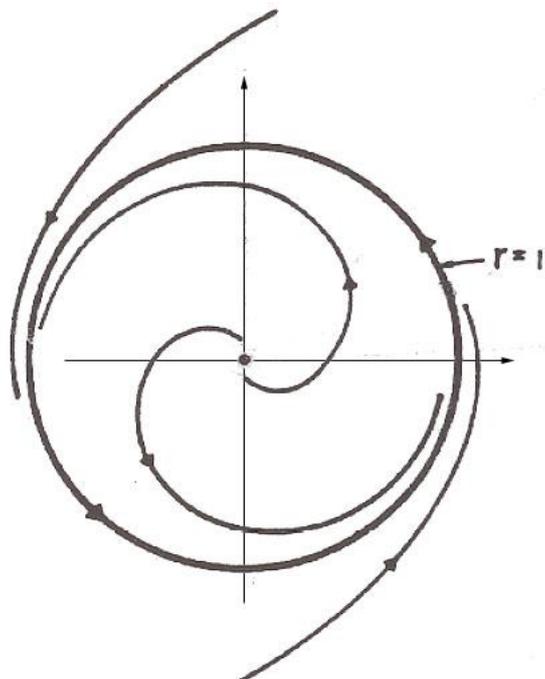


Fig. II.1. El Oscilador de Poincaré.

Nótese que podemos considerar el oscilador no perturbado con período unitario así que podemos normalizar los valores de la coordenada angular Φ , de tal forma que ahora todos los valores de las fases caerán en el intervalo $[0,1]$, lo cual nos ayudará a un mejor estudio del fenómeno.

$$\phi = \frac{\Phi}{2\pi} \pmod{1}. \quad (2)$$

Llamemos a la variable ϕ , la fase de la oscilación.

Así bien, dado el oscilador de Poincaré normalizado, supongamos que éste ha llegado al ciclo límite. Podemos perturbar el sistemas si tomamos el vector de magnitud r que describe la circunferencia y que viaja a una velocidad constante en una fase ϕ de la oscilación y movemos la punta del vector fuera del ciclo limite, por ejemplo hacia la derecha una longitud b , así entonces habrá cambiado el estado de la oscilación dando al vector una longitud mayor a r . Estas perturbaciones fuera del ciclo límite, resultan en una relajación de regreso al ciclo limite estable con velocidad que depende del parámetro a . Consideremos el caso limite cuando $a \rightarrow \infty$.

Si suponemos que el punto regresa instantáneamente a la circunferencia ($r = 1$), entonces éste no regresará a la misma fase en la que lo perturbamos (ϕ), pues la velocidad angular es constante. Entonces cuando el punto regrese a la circunferencia estará ahora en una nueva fase ϕ' de la oscilación, para continuar su recorrido. En lo siguiente se considerará que las perturbaciones consisten en impulsos de magnitud b los cuales son paralelos al eje x (Fig. II.2). Así, el efecto de un solo impulso es reiniciar instantáneamente la fase del oscilador.

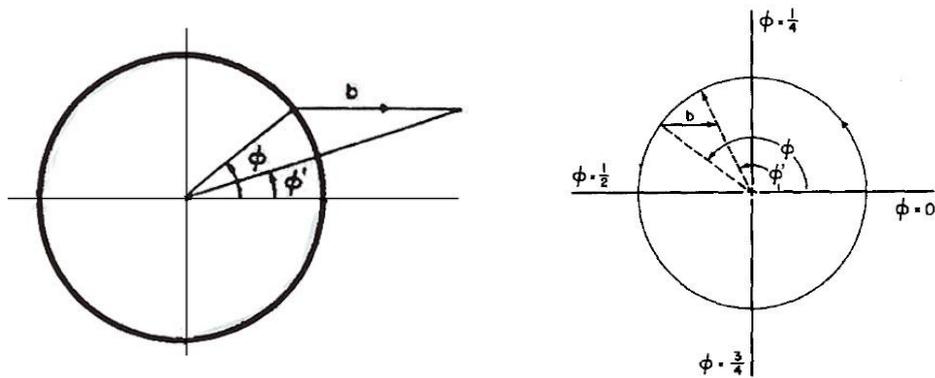


Fig. II.2. Perturbaciones en el Oscilador de Poincaré en dos fases diferentes. A la izquierda $0 < \phi < 1/4$, a la derecha $1/4 < \phi < 1/2$. Nótese que por convención el estímulo de magnitud b es hacia la derecha sobre el eje x .

Resumiendo, si el oscilador se perturba con un estímulo “horizontal” de magnitud b y suponemos que regresa instantáneamente al círculo, éste regresará en una fase diferente de la oscilación, así pues tendremos que para cada perturbación tendremos una “fase nueva” ϕ' la cual será una función de b y de la fase en la que se encontraba anteriormente el oscilador ϕ o “fase vieja”.

$$\phi' = g(\phi, b) \tag{3}$$

donde la función $g(\phi, b)$ es llamada la Curva de Transición de Fases (PTC).

II.2 La Curva de Transición de Fases

La forma en la que se relaciona ϕ con ϕ' y b se puede describir fácilmente usando trigonometría, de tal forma que podemos construir una función $g(\phi, b)$ que nos dará la fase nueva dados la magnitud del estímulo b y la fase anterior.

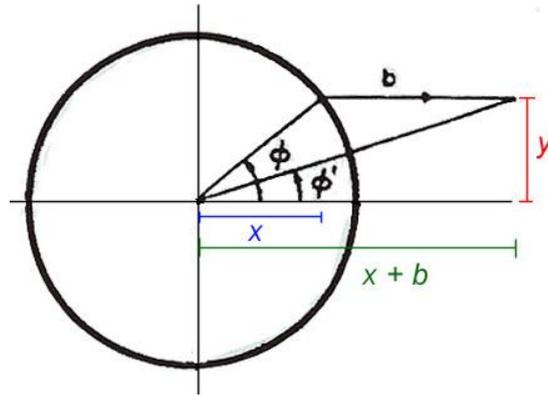


Fig. II.3. Construcción trigonométrica de la función $\phi' = g(\phi, b)$, dada una perturbación de magnitud b .

De la figura (II.3) se puede observar que:

$$\begin{aligned} x &= \cos \phi \\ y &= \text{sen} \phi \end{aligned}$$

De la misma manera tenemos que:

$$\begin{aligned} \tan \phi' &= \left(\frac{y}{x+b} \right) \\ \Rightarrow \tan \phi' &= \left(\frac{\text{sen} \phi}{\cos \phi + b} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Por lo tanto:

$$\therefore g(\phi, b) = \phi' = \arctan\left(\frac{\text{sen} \phi}{\cos \phi + b}\right) \quad (5)$$

Al graficar la función (5), se obtiene una curva que muestra la fase en la que se caería dependiendo de la fase en que se dé el estímulo. Como ya se mencionó, la gráfica está normalizada entre 0 y 1, tanto para el eje de las abscisas (fase vieja) como para el de las ordenadas (fase nueva). Los puntos de la gráfica que caen sobre la recta igualdad, muestran las fases que a pesar de haber una perturbación dejan al sistema intacto. A esta gráfica se le llama Función o Curva de Transición de Fases o bien PTC por sus siglas en inglés (Phase Transition Curve).

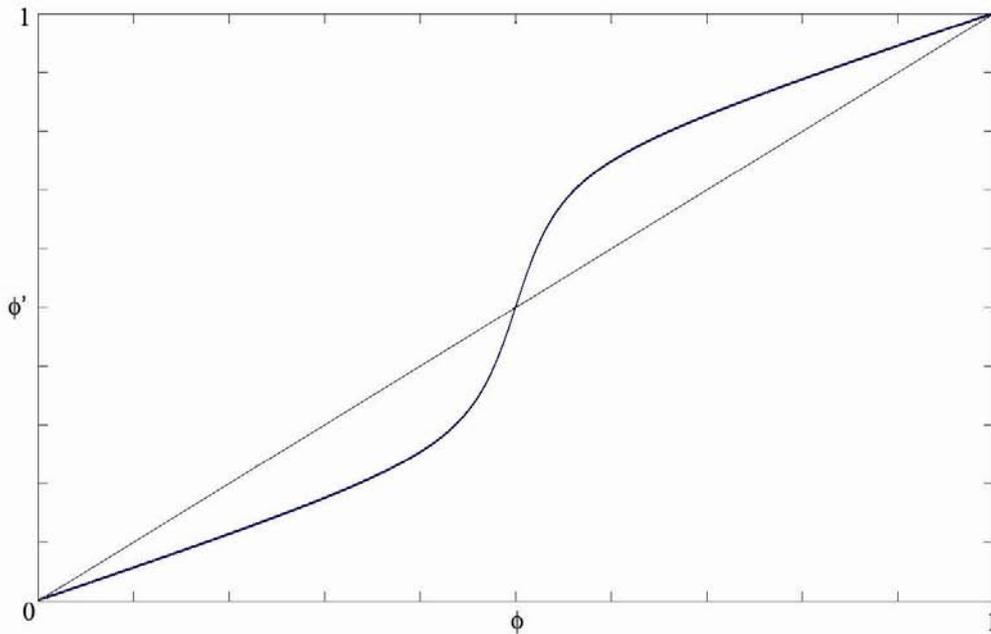


Fig. II.4. Gráfica de la función $g(\phi, b)$ o Curva de Transición de Fases para $b = 0.7$. El eje de las abscisas muestra las fases viejas (ϕ) y el de las ordenadas las fases nuevas (ϕ').

La PTC muestra ciertas características cualitativas. Considérese una perturbación dirigida a lo largo del eje x positivo ($b > 0$). Aplicar la perturbación durante la primera mitad del ciclo ($0 \leq \phi < 0.5$) lleva a un retraso en la fase de la oscilación, mientras que la aplicación de la misma perturbación en la segunda mitad del ciclo ($0.5 \leq \phi < 1$) lleva a un adelanto de fase. También, la pendiente promedio de la PTC es 1 (PTC tipo 1) a bajas amplitudes de perturbación y 0 (PTC tipo 0) a amplitudes altas.

Entonces, una vez construida la función que describe la fase en que se encontraría el sistema después de una perturbación, dada la fase anterior y el propio estímulo, se puede construir la gráfica de dicha función para perturbaciones de diferente intensidad (diferentes valores de b).

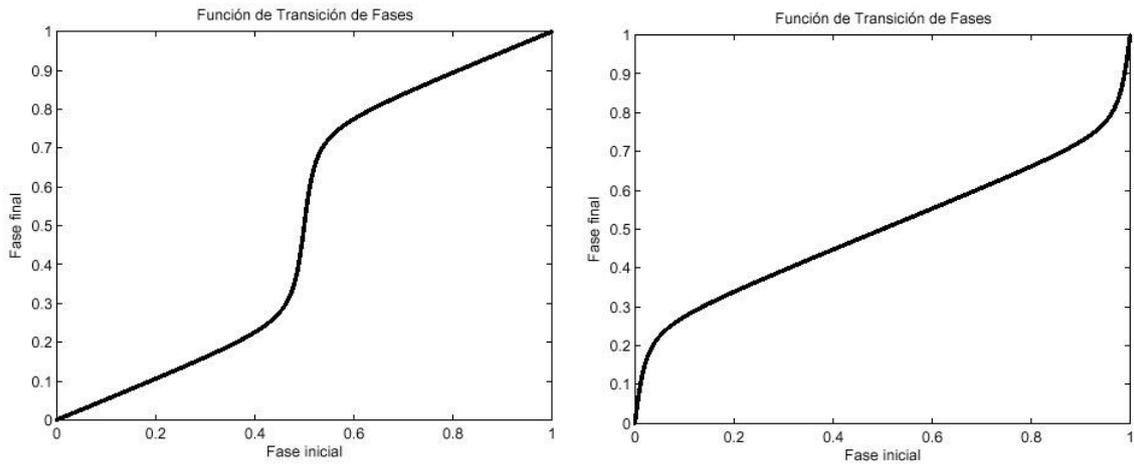


Fig. II.5. Dos Curvas de Transición de Fases tipo 1, para $b = 0.9$ (izquierda) y para $b = - 0.9$ (derecha).

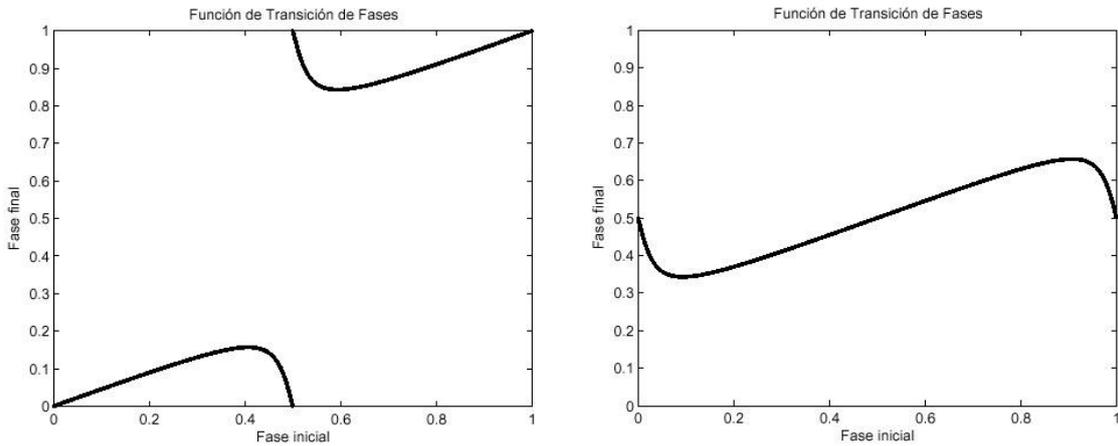


Fig. II.6. Dos Curvas de Transición de Fases tipo 0, para $b = 1.2$ (izquierda) y para $b = - 1.2$ (derecha).

De las figuras II.5 y II.6 y de la ecuación (5) se puede notar que para $|b| < 1$, se tiene que:

$$\forall \phi \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow \phi' < \phi$$

$$\forall \phi \in [\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow \phi' > \phi$$

II.3 Iteraciones en la Curva de Transición de Fases.

Usar la PTC es una forma sencilla de poder encontrar cada fase nueva a partir de una fase vieja, sin embargo, ¿cómo podría ayudar esta curva a predecir acoplamientos con perturbaciones periódicas? Si bien la PTC es un retrato de la respuesta del oscilador a una sola respuesta aislada, esta puede usarse para poder predecir acoplamientos usando la técnica descrita a continuación.

Considérense varias perturbaciones en el círculo, separadas entre sí un tiempo τ , i.e. ocurre una perturbación en el oscilador cada vez que pasa un tiempo τ . De esta manera la primera perturbación ocurrirá en el círculo “reiniciando” la fase y haciéndolo caer en una fase nueva ϕ_1' , en ese momento el oscilador seguirá su dinámica a velocidad constante ($\dot{\phi} = 2\pi$), de tal manera que cuando pase un tiempo τ ocurrirá una segunda perturbación llevando al oscilador a una nueva fase ϕ_2' , momento en el cual nuevamente el oscilador continuará su dinámica hasta que pase un tiempo τ para que ocurra una nueva perturbación “reiniciando” nuevamente el mismo comportamiento de manera cíclica hasta que las perturbaciones cesen y el oscilador vuelva a su dinámica normal.

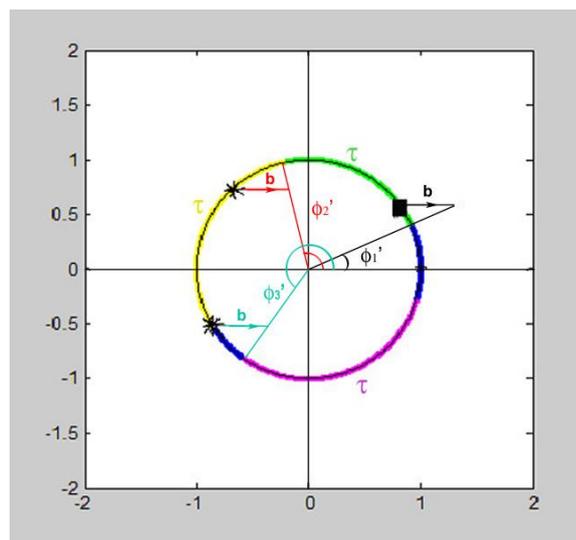


Fig. II.7. Perturbaciones en el círculo, el color azul muestra la dinámica natural de la oscilación. La primera perturbación ocurre en el punto marcado con un cuadrado negro (ϕ_I) por lo que hay un retraso en la oscilación (ϕ_I') pasa un tiempo τ (color verde) antes de la segunda perturbación en

ϕ_2 marcada con * que en este caso regresa la oscilación a ϕ_2' , donde vuelve a pasar un tiempo τ (amarillo) antes de la última perturbación en que en este caso adelanta la fase.

Las continuas perturbaciones pueden llevar al oscilador a dar uno o varios ciclos (vueltas completas) o no, dependiendo del número de perturbaciones y las fases que de éstas deriven.

Sabemos que $\phi' = f(\phi)$, si se perturba en una fase inicial, (ϕ_0) , entonces $\phi_0' = f(\phi_0)$. Ahora si se vuelve a perturbar nuevamente después de un tiempo τ , en una nueva fase (ϕ_1) habría que esperar entre perturbación y perturbación τ , entonces:

$$\phi_1 = \phi_0' + \tau = f(\phi_0) + \tau \quad (6)$$

Con lo que la nueva fase será:

$$\phi_1' = f(\phi_0' + \tau) \quad (7)$$

Así bien para perturbar nuevamente en otra fase habría que esperar nuevamente τ (el tiempo entre perturbaciones), por lo que:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \phi_1' + \tau \\ \Rightarrow \phi_2 &= f(\phi_1) + \tau \end{aligned} \quad (8)$$

En general

$$\phi_i = f(\phi_{i-1}) + \tau \quad (9)$$

La ecuación (9) define un mapeo, es decir, es una ecuación en diferencias finitas. Este tipo de modelos tienen la característica de que el valor que toma la función viene dado en términos del valor anterior que tuvo la misma anteriormente comenzando siempre en un punto inicial. Es decir, que el valor n -ésimo de la función se obtiene iterando los

($n-1$) valores anteriores a la función, que comienzan en un valor inicial. Así entonces se puede definir a partir de la ecuación (9), el mapeo:

$$T : \phi_{i-1} \rightarrow \phi_i \quad (10)$$

Ahora bien, de la figura II.8 se puede notar que es ciertamente complicado encontrar las fases gráficamente, dado que hay que estar recorriendo τ veces sobre la vertical el punto ϕ' y después regresar a la igualdad para encontrar el próximo punto ϕ . Sin embargo si este proceso se realiza para todos los puntos ϕ' , se puede observar que en general se tiene que recorrer toda la PTC τ veces sobre la vertical, para poder encontrar el siguiente punto donde caerá una perturbación.

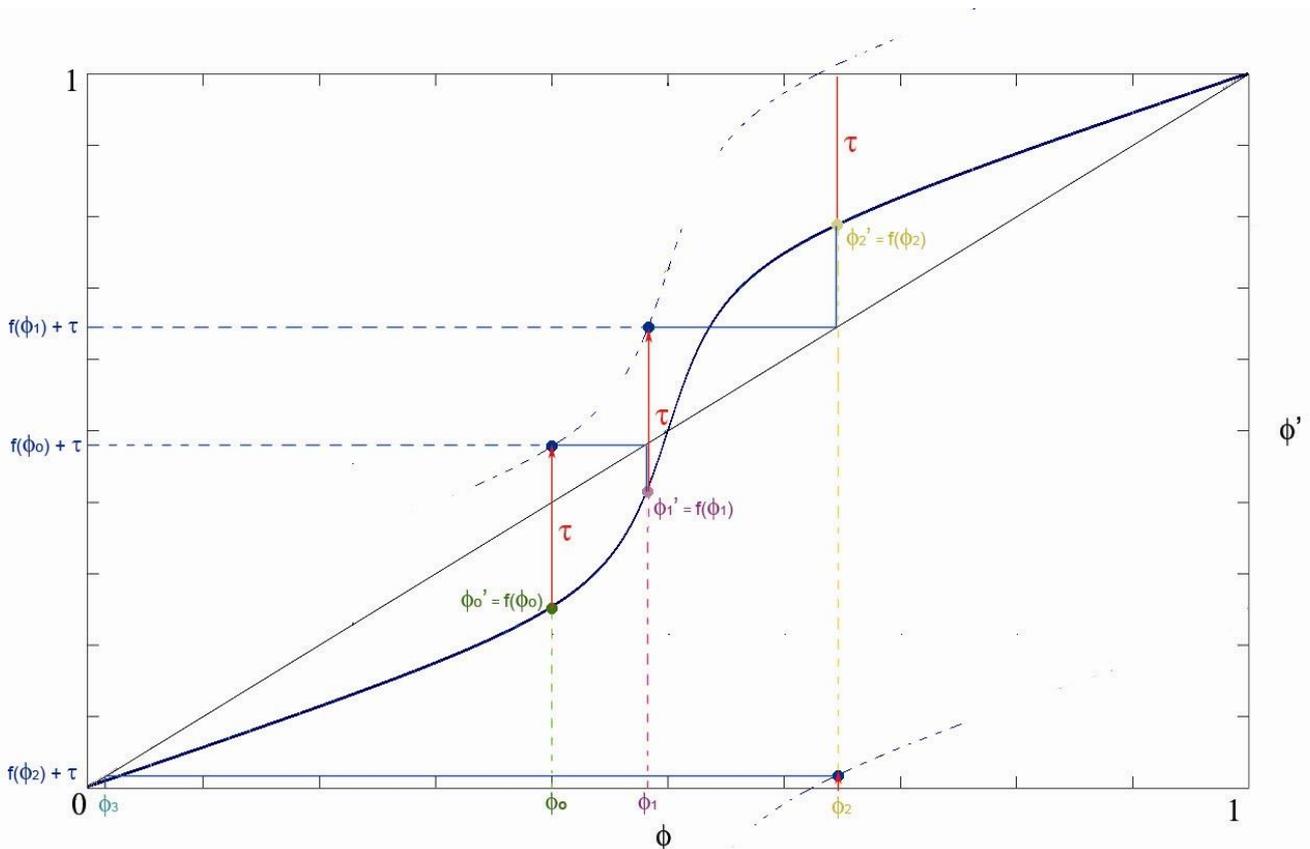


Fig. II.8. Perturbaciones sobre la PTC. Una vez dado el valor ϕ' , se recorre τ sobre la vertical para encontrar el valor de $\phi_i' + \tau$. Después se regresa a la recta igualdad para encontrar ϕ_{i+1} el

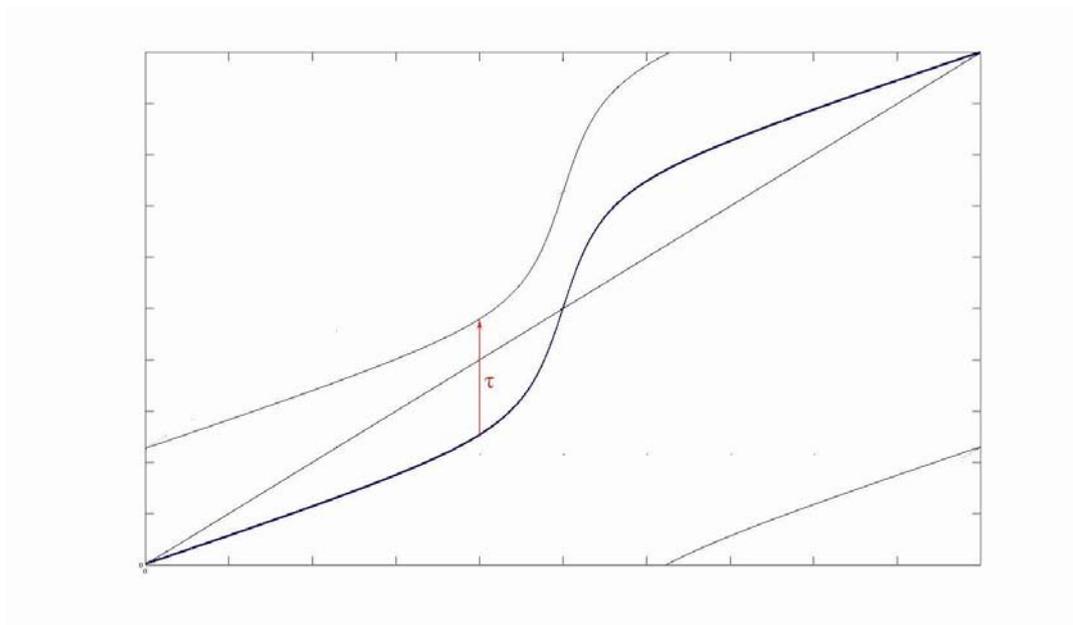
siguiente punto de la iteración pues $\phi_{i+1} = f(\phi_i) + \tau$, momento en el cual se vuelve a regresar a la curva para encontrar ϕ_{i+1}' y así comenzar nuevamente el proceso.

Además dado que la curva está normalizada (mod1), a los puntos de la PTC que al ser recorridos τ veces excedan el valor de uno, se les aplica modulo o bien son recorridos sobre la vertical $(\tau-1)$ veces o bien $(1-\tau)$ hacia abajo.

Por ejemplo, en la figura II.8 el punto $\phi_2' = f(\phi_2) \approx 0.8$. Cuando se realiza el corrimiento para $\tau = 0.23$ se tiene que $[f(\phi_2) + \tau] \approx 1.03$, así que al aplicarle modulo 1, queda que $[f(\phi_2) + \tau](\text{mod}1) \approx 0.03$, que fue equivalente a recorrer el punto $(\tau-1)$ veces, o sea,

$$[f(\phi_2) + (\tau - 1)] = f(\phi_2) + (\tau - 1) \approx 0.8 + (-0.77) \approx 0.03, \text{ o bien } 0.77 \text{ hacia abajo.}$$

Lo anterior para todos los puntos de la curva, por lo que hacer un corrimiento τ veces hacia arriba sobre la vertical, es equivalente a realizar un corrimiento $(1 - \tau)$ hacia abajo.



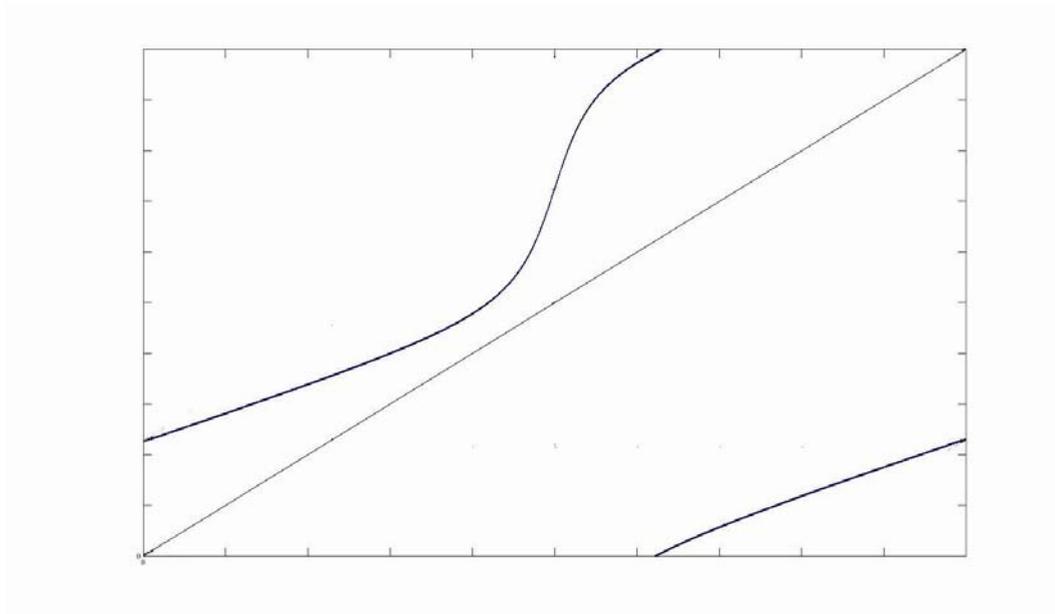


Fig. II.9. ARRIBA. Desplazamiento sobre la vertical de la PTC en su totalidad hacia arriba en una magnitud τ o bien hacia abajo una magnitud $(1-\tau)$. **ABAJO.** Forma final de la PTC una vez desplazada.

Una vez que se ha recorrido la PTC τ veces, donde τ es el periodo entre perturbaciones, es más fácil encontrar gráficamente los puntos del mapeo definiendo una condición inicial ϕ_0 . Lo anterior se logra tomando el valor que corresponde a ϕ_0 en la curva ya trasladada ($f(\phi_0)+\tau$), posteriormente se verifica el valor de ese punto en la recta igualdad ($\phi_1 = f(\phi_0)+\tau$) y entonces se vuelve a tomar el valor que le corresponda a este nuevo punto en la curva trasladada ($f(\phi_1)+\tau$), con lo que se obtendrá el nuevo valor de ϕ ($\phi_2 = f(\phi_2)+\tau$). Este cálculo se realiza sucesivamente, de forma gráfica hasta llegar al valor n -ésimo de ϕ ($\phi_n = f(\phi_{n-1})+\tau$). Los puntos dados por la función $\phi_n = f(\phi_{n-1})+\tau$, $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ $n \in Z$, son generalmente llamados las órbitas del mapeo.

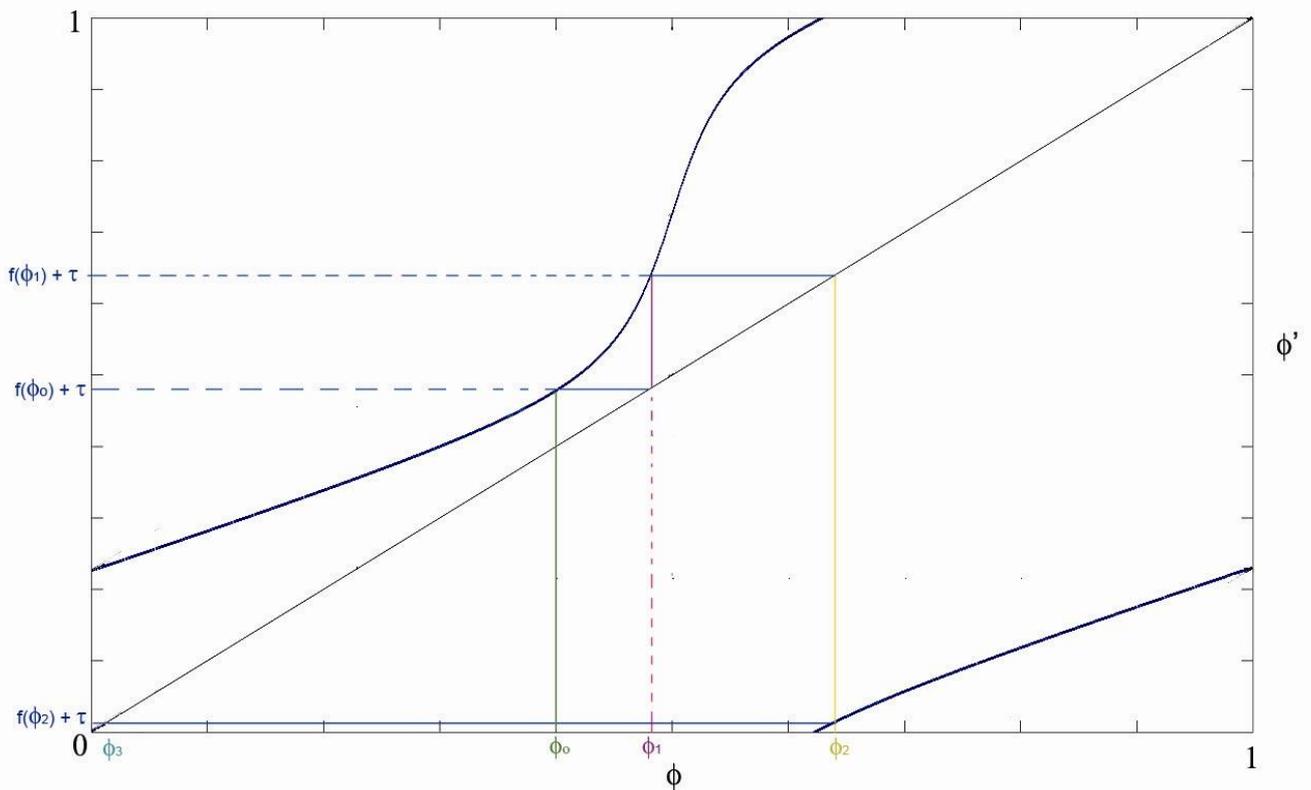


Fig. II.10. Iteración gráfica de la PTC trasladada, equivalente a la forma anterior pero mucho más simple.

La forma de iterar gráficamente expuesta anteriormente y que se detalla en la figura II.10, se denomina de “telaraña” o *cobweb* y es utilizada frecuentemente para iterar varios tipos de mapeos.

II.4 Predicción de Acoplamientos a partir de Iteraciones

A una fase ϕ^* se le llama punto fijo de periodo N si:

$$\begin{aligned} T^N(\phi^*) &= \phi^*, \\ T^i(\phi^*) &\neq \phi^*, \quad 1 \leq i < N \end{aligned} \tag{11}$$

Así también, un punto fijo ϕ^* de periodo N es estable si:

$$\left| \frac{\partial T^N(\phi_i)}{\partial \phi_i} \right|_{\phi_i = \phi^*} < 1. \quad (12)$$

Entonces dado el mapeo de Poincaré como una ecuación en diferencias finitas, se puede iterar tanto analítica como gráficamente, como se muestra en las figura II.11.

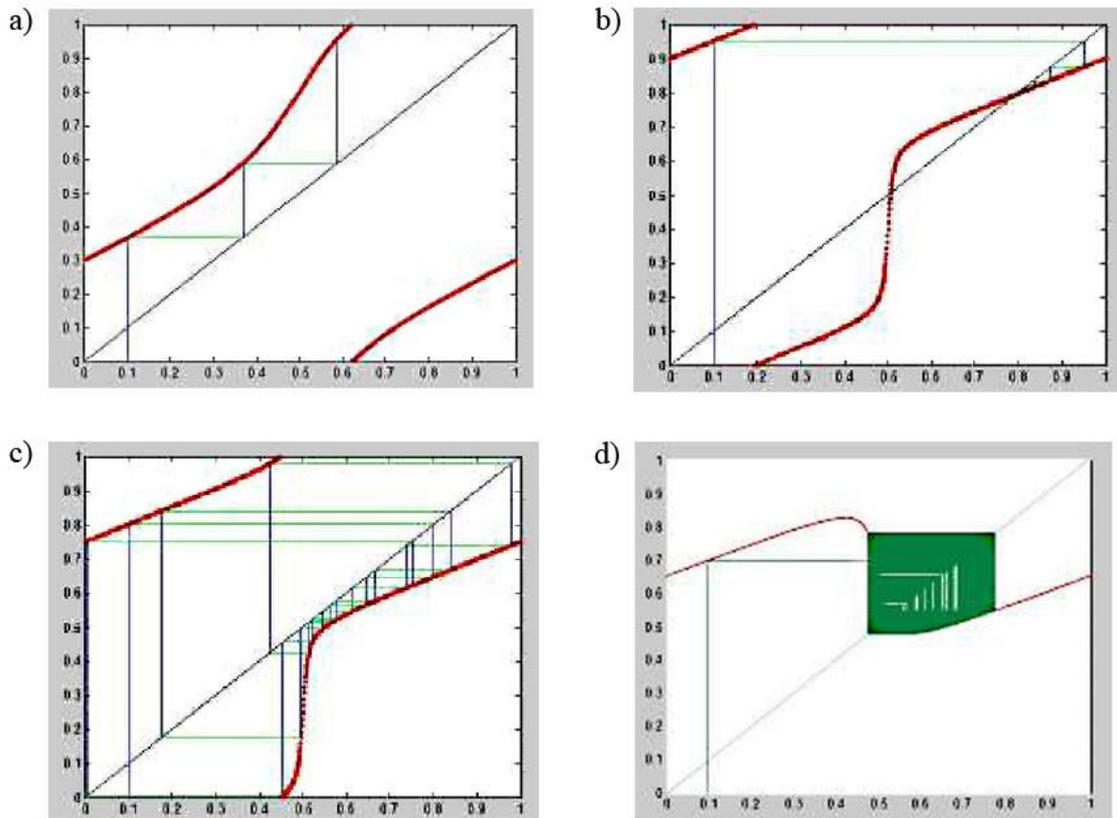


Fig. II.11. Iteraciones gráficas para cuatro diferentes PTCs, para todos los casos $\phi_0 = 0.1$. a) Tres iteraciones cuando $\tau = 0.3$ y $b = 0.5$ b) $\tau = 0.9$ y $b = 0.95$, se encuentra una fase estable alrededor de 0.8. c) $\tau = 0.75$ y $b = 0.95$ no es posible encontrar una fase estable. d) $\tau = 0.65$ y $b = 1.13$, tras 1000 iteraciones es difícil notar si hay una fase a la que converge la iteración.

Ahora bien, como se mencionó anteriormente, las continuas perturbaciones pueden llevar al oscilador a dar o no, uno o varios ciclos (vueltas completas), o en el caso del Oscilador Salino “repuestas”, dependiendo del número de perturbaciones y las fases que de éstas deriven. Para poder medir este número de ciclos, se puede usar un concepto que ha sido muy útil en el estudio de los acoplamientos en fase, el cual es llamado el número de rotación, ρ , el cual está definido como el avance promedio de las fases por

ciclo de un oscilador perturbado periódicamente, en cada perturbación. Así, entonces el número de rotación esta definido como:

$$\rho = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \Delta\phi_i, \quad (13)$$

donde $\Delta\phi_i$ es la magnitud del cambio que hay entre la fase inmediatamente anterior a una perturbación y la fase i -ésima inmediatamente posterior a esta, después del tiempo τ entre dos perturbaciones consecutivas:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_i &= \phi_i' - \phi_i \\ \Delta\phi_i &= [f(\phi_i) + \tau] - \phi_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Así ρ cuenta el número de ciclos o respuestas que da el oscilador en términos de la diferencia de fases que provoque la estimulación periódica en el mismo.

De esta manera los puntos estables del mapeo de Poincaré están asociados con una dinámica de acoplamiento. Si se supone que para algún valor de τ , hay N puntos estables de periodo N , $\phi_0, \phi_n, \dots, \phi_n = \phi_0$ donde así como antes $\phi_{i+1} = T(\phi_i)$. Se define M como:

$$M = \sum_{i=1}^N \Delta\phi_i. \quad (15)$$

Desde $\phi_N = \phi_0$, M debe ser un entero y la sucesión está asociada con un **acoplamiento** $N:M$ con número de rotación ρ , donde N es el número de fases estables (puntos fijos) en los que el oscilador cae cada vez que ocurre una perturbación y M es el número de repuestas (ciclos completos) que el oscilador presenta.

Consecuentemente para patrones de acoplamiento el número de rotación (ρ) es un racional. Nótese que ρ no especifica un único patrón de acoplamiento. Por ejemplo los acoplamientos 1:1 y 2:2 tiene $\rho=1$ y de la misma manera los acoplamientos 2:1 y 2:4 tienen $\rho=1/2$. Nótese también que para valores fijos de ρ y de τ , los acoplamientos podrían no ser únicos y depender de la fase inicial de iteración.

Por último, dado que el mapeo está normalizado (mod1), y como se mencionó antes¹ para valores de $\tau \geq 1$, equivaldría a recorrer la PTC en una magnitud de $\tau(\text{mod}1)$, o bien si $\tau = r.f$ $r \in \mathbb{Z}, f \in [0,1]$ entonces $\tau = 0.f, f \in [0,1]$. Por ejemplo si $\tau = 1.3$ entonces $\tau = 1.3(\text{mod}1) = 0.3$ por lo que es equivalente decir que $\tau = 0.3$.

Así entonces, al momento de iterar el mapeo de Poincaré se encuentra una simetría detallada en la siguiente:

Proposición 1. *Supóngase que hay un ciclo estable de periodo N con puntos fijos $\phi_0, \phi_n, \dots, \phi_{N-1}$ para $\tau = \delta$ ($0 < \delta < 1$) asociado a un acoplamiento $N:M$. Entonces habrá un ciclo estable de periodo N con puntos fijos $\phi_0, \phi_n, \dots, \phi_{N-1}$ para $\tau = \delta + K$ (donde K es cualquier entero positivo) asociado a un acoplamiento $N:M+KN$.*

Demostración: Como

$$\phi_i = f(\phi_{i-1}) + \tau,$$

se tiene que

$$\Delta\phi_i = [f(\phi_i) + \tau] - \phi_i.$$

Así mismo

$$M = \sum_{i=1}^N \Delta\phi_i.$$

Si el tiempo entre perturbaciones es $\tau = \delta$ ($0 < \delta < 1$) y $\tau' = \delta + K$ entonces:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_i &= f(\hat{\phi}_{i-1}) + \tau' \\ &= f(\hat{\phi}_{i-1}) + \tau + K \end{aligned}$$

Por tanto:

¹ Ver Sección II.3, página 29.

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\phi}_i &= [f(\hat{\phi}_i) + K] - \hat{\phi}_i \\ &= \Delta\phi_i + K.\end{aligned}$$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \Delta\hat{\phi}_i &= \sum_{i=1}^N \Delta\phi_i + K. \\ &= M + KN.\end{aligned}$$

\therefore Si $\tau' = \delta + K$

$$\sum_{i=1}^N \Delta\hat{\phi}_i = M + KN.$$

Así entonces, si existe un acoplamiento $N:M$ asociado a un $\tau = 0.S$, $S \in [0,1]$, entonces para valores de $\tau \geq 1$, de la forma $\tau = K.S$ $K \in \mathbb{Z}$, $S \in [0,1]$, existirá un acoplamiento asociado, de la forma $N:M+KN$.

CAPITULO III

Perturbaciones en el Oscilador Salino.

Como ya se mencionó¹, tal vez el hecho más interesante acerca del Oscilador Salino es su acoplamiento a perturbaciones, ya sea que dos osciladores se acoplen o bien usando un enfoque de perturbación más sencillo en el cual el dispositivo que perturba no se vea afectado por la respuesta del Oscilador Salino. En esta sección se propondrá una manera de perturbar al oscilador Salino que permita realizar un análisis más simple del fenómeno.

El periodo natural con el que ocurre la oscilación es constante y se mantiene por bastante tiempo (alrededor de 36 horas). Este periodo se ve afectado si es perturbado con cambios bruscos pero controlados en la presión, sin embargo, el oscilador por sí solo regresa a su periodo natural después de un corto tiempo. Las perturbaciones en el Oscilador Salino a veces afectan significativamente este periodo de oscilación y a veces el cambio no es tan notable, esto depende de en qué momento o “fase” de la oscilación donde ocurre la perturbación, lo cual delata la existencia del ciclo límite dentro de la oscilación, tal y como ocurre en otros sistemas.

El Oscilador Salino se estudiará usando un enfoque de perturbación no usado anteriormente, ya que para perturbarlo será inyectado un volumen de agua e inmediatamente después será retirado. Esto, provocará un incremento súbito en la presión del recipiente inferior, por lo que el gradiente de presiones que controla al sistema se verá afectado brevemente, teniendo por lo tanto una estimulación o perturbación que se considerará puntual, y de una magnitud igual a la del volumen inyectado.

¹ Ver Sección I.1, página 6.

Para esto, se utiliza una bomba que mueve dos jeringas de 60 mililitros colocadas en paralelo (WPI SP210 Infusion/Withdrawal Pump). La razón de flujo se fija en 70 ml por minuto por jeringa, de tal manera que el tiempo para mover los tres mililitros es de aproximadamente 1.3 segundos, tanto al inyectar como al retirar, lo que resulta una fracción pequeña de los cerca de 36 segundos que dura la oscilación.

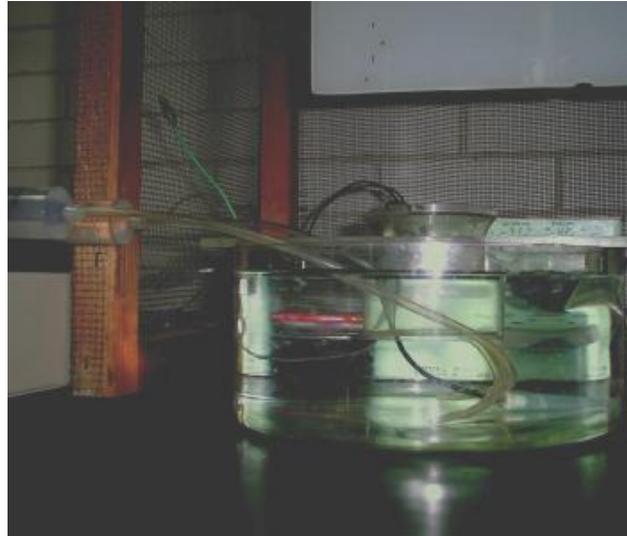


Fig. III.1. Arreglo experimental usado para perturbar al Oscilador Salino.

III.1 Protocolos de Perturbación: Aisladas y Periódicas.

La manera mediante la cual se perturba se divide en dos protocolos diferentes, el primero consiste en perturbar al sistema con trenes de 40 perturbaciones, separadas una de la otra con intervalos de tiempo constantes, con los cuales se espera encontrar si hay acoplamiento entre las respuestas que presenta el oscilador y los estímulos periódicos entregados al mismo.

Dado que en muchas ocasiones la respuesta de un oscilador no lineal a perturbaciones puntuales en diferentes fases (respuesta de fase) puede ser útil para predecir la respuesta a trenes de perturbaciones periódicas [17-21], el segundo protocolo tiene por objetivo construir una *Curva de Transición de Fase* (PTC) mediante perturbaciones aisladas al sistema en momentos aleatorios de la oscilación. El objetivo de esto, es considerar a esta curva un mapeo unidimensional y predecir a partir de éste, cómo es que el Oscilador Salino puede tener acoplamientos con los estímulos periódicos aplicados a su oscilación.

Para llevar a cabo ambos protocolos se usó una computadora para controlar la bomba y liberar los estímulos en series igualmente espaciadas (perturbación periódica), o bien aislados para construir la Curva de Transición de Fases. Como ya se explicó, el volumen fijo inyectado es inmediatamente retirado para prevenir el efecto de acumulación o pérdida constante de los fluidos del contenedor externo, lo cual modificaría continuamente el sistema experimental.

Así la respuesta que el oscilador produce es medida a través de los electrodos y posteriormente analizada por el sistema anteriormente descrito, mismo que permite grabar simultáneamente un pulso TTL que se genera cuando se dispara la perturbación; dado que la bomba manda la señal directamente al osciloscopio cada vez que inserta y retira agua del recipiente, también se puede observar claramente cómo es que la perturbación afecta a la oscilación y medir con cierta exactitud cómo cambia o no, el periodo de la misma.

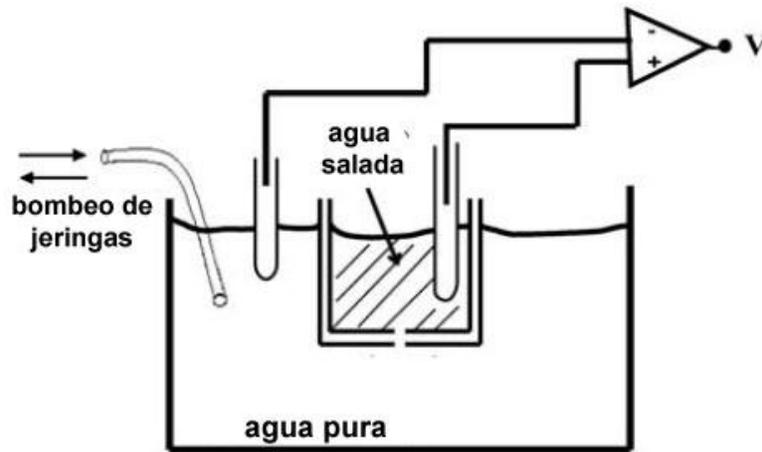


Fig. III.2. Esquema de protocolo de perturbaciones.

El análisis del experimento se efectúa mediante la interpretación gráfica de las series de tiempo de la señal que se registró, y que además contiene los cambios en la diferencia de potencial eléctrico en función del tiempo, las cuales quedaron guardadas en la PC.

Dicho análisis se lleva a cabo mediante un programa de computo (Bruxton Review 5.0.1) de la misma compañía del software con el cual fueron obtenidos y que cuenta con cursores y herramientas de medición precisas para interpretar los archivos generados por el programa que grabó la señal del osciloscopio.

Así bien, midiendo cuidadosamente estas series de tiempo, es posible establecer el periodo de la oscilación y en qué momento de la misma ocurrió una perturbación y cuanto cambió el periodo. Entonces se puede encontrar cómo es que se relaciona el cambio en el período de la oscilación con el momento en el cual ocurrió la perturbación, y cómo es que éste reacciona a trenes de perturbaciones periódicas.

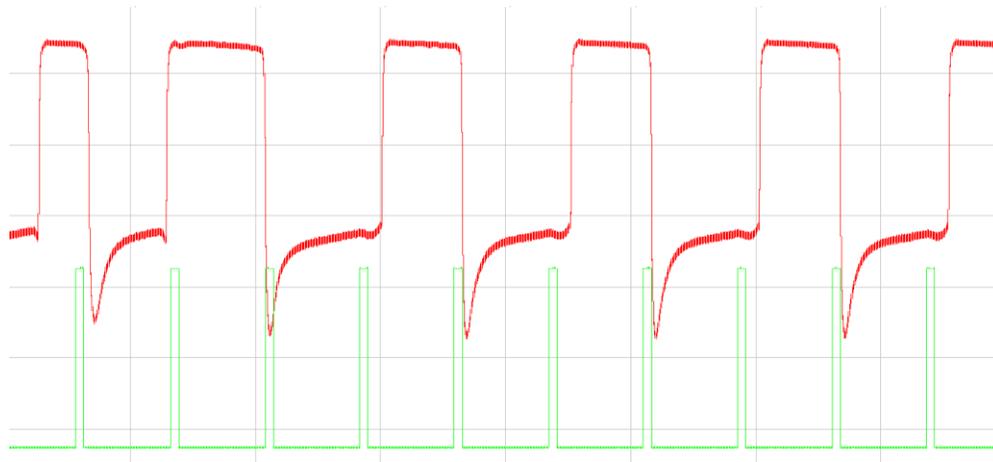


Fig. III.3. Registro del Oscilador Salino ante perturbaciones. En rojo se muestra la variación de voltaje del oscilador y en verde el tren de perturbaciones periódicas.

III.2 Comportamiento experimental ante perturbaciones.

Se observa que la perturbación produce una inversión en el flujo cuando hay caída de la solución salina, debido a que la inyección del volumen de perturbación en el vaso externo contrarresta la diferencia de presiones previa, que favorecía la caída de agua salada.

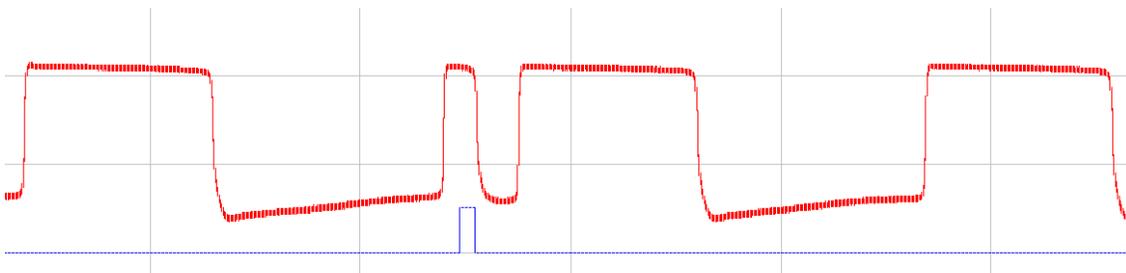
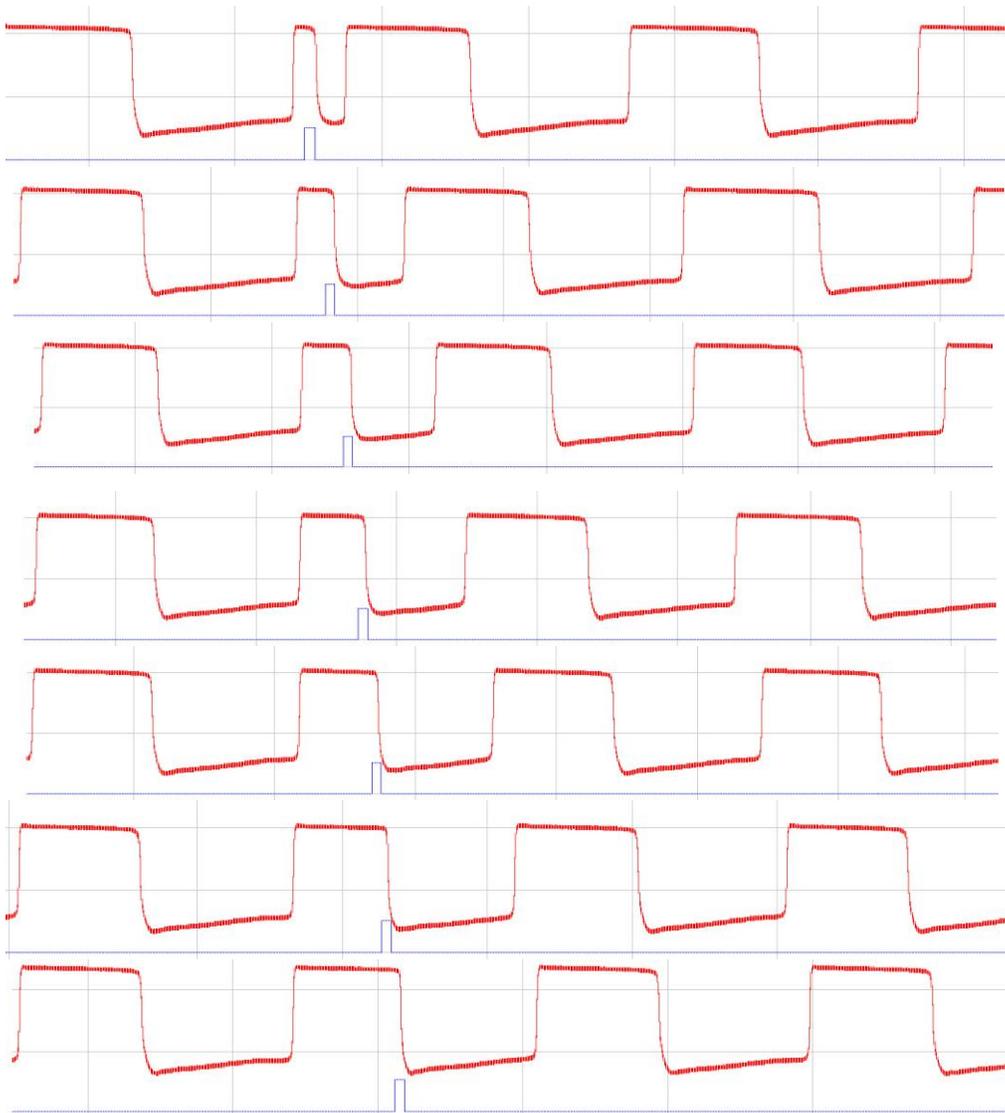


Fig. III.4. Efecto de una perturbación aislada en el Oscilador Salino. Nótese el cambio del periodo cuando la perturbación ocurre.

Un estímulo aislado y breve aplicado sobre el oscilador salino, produce una traslación de la oscilación (reinicio de fase). En la figura III.4 anterior se muestra un ejemplo, en el trazo inferior se marca como un pulso cuadrado la inyección y retiro del volumen de perturbación. Nótese que su efecto es invertir el flujo y producir una nueva oscilación de menor duración.

Veamos ahora cómo es que una perturbación afecta la oscilación en momentos diferentes de la oscilación.



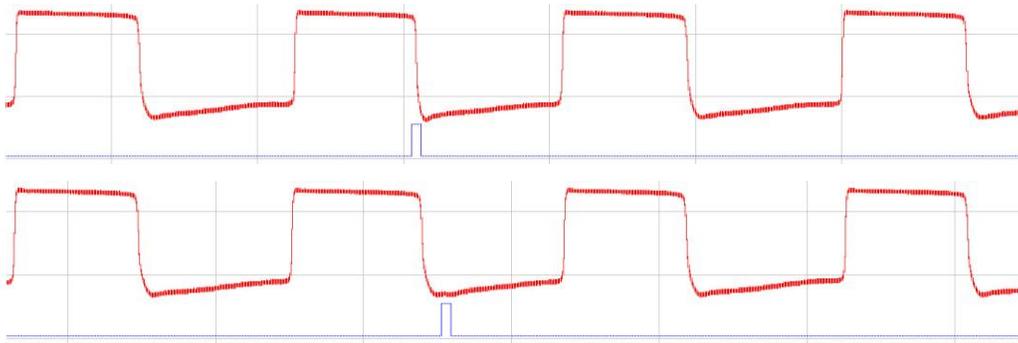
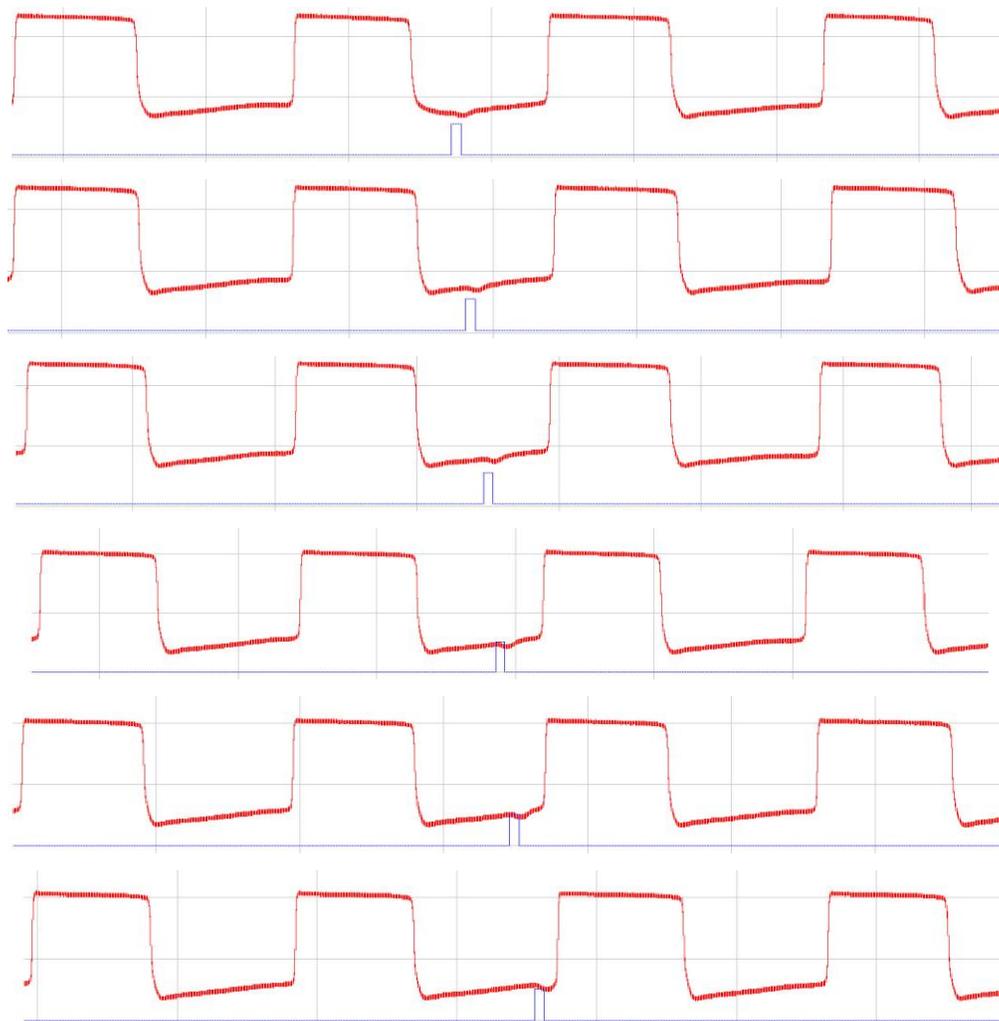


Figura III.5. Aplicación de un pulso aislado en diferentes momentos de la oscilación durante la primera mitad de la misma. La primera figura corresponde a la aplicación a los 2 segundos de haber comenzado la oscilación. Las figuras subsecuentes muestran aplicación e pulsos cada aumentando en dos segundos respecto a la figura anterior.



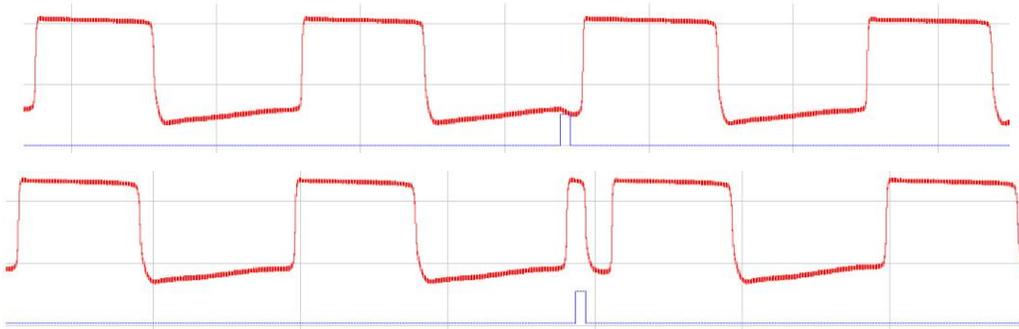


Figura III.6. Aplicación de un pulso aislado en la segunda mitad de la oscilación. La figura final corresponde una perturbación 38 segundos después de comenzada la oscilación. Nótese que en este último caso el tiempo en que se efectuó la perturbación rebasa el periodo de oscilación y por lo tanto es parecida a la primera figura como si estuviera a pocos segundos de haber comenzado una oscilación.

En la serie de figuras (III.5 y III.6) se nota cómo cambia la oscilación cuando se le aplica una perturbación en diferentes momentos de la oscilación. Podemos ver el registro de cada oscilación y tomar como la mitad de la oscilación el momento en el que hay un intercambio en los flujos, o sea el momento que hay una caída e inversión de sentido en el voltaje.

De las figuras III.5 y III.6 se puede notar que cuando la perturbación ocurre en fases anteriores a la mitad, ocurre inmediatamente una inversión en el flujo, dado que en ese momento hay solución salina descendiendo a través del agujero y la perturbación aumenta la presión en el recipiente externo y provoca que agua pura ascienda en ese momento. A su vez esto se ve reflejado en una inversión en el registro del voltaje, sin embargo el rápido regreso del oscilador a su ciclo límite, provoca que nuevamente haya un intercambio entre los flujos con lo que se produce una oscilación de menor periodo (oscilación inducida)², como respuesta a la perturbación, o bien podemos decir que la oscilación “se adelantó” hasta el momento en que naturalmente debía descender solución salina nuevamente por el agujero. Así también se puede notar que conforme la fase en que ocurre la perturbación se aproxima a la mitad de la oscilación natural (fase 1/2), la oscilación inducida o *respuesta* incrementa su periodo, o bien que la traslación de oscilación es menor.

² Una oscilación inducida es una oscilación más corta o más larga que se produjo por un traslado en la fase de la oscilación natural.

Una vez que la perturbación ocurre después de la mitad de la oscilación natural, es decir en el momento que normalmente agua limpia asciende por el agujero, se puede notar que la perturbación casi no afecta a la oscilación y conforme la perturbación ocurre en una fase cercana al final de la oscilación natural, el efecto de esta es alargar ligeramente esta parte de la oscilación o bien trasladarla a un momento anterior, respecto de la oscilación natural.

Con estas observaciones podemos darnos una idea de cómo es que el Oscilador Salino responde a perturbaciones en su ciclo de oscilación. Una forma de generalizar estas observaciones matemáticamente es construir una expresión analítica para la respuesta del Oscilador Salino a un estímulo aislado

Los acoplamientos se observan cuando se estimula usando el protocolo de perturbaciones periódicas. Cuando se aplica un tren de perturbaciones al Oscilador Salino, su periodo comenzará a cambiar dependiendo de en qué fase de la oscilación vayan ocurriendo las mismas, dado que el comportamiento del oscilador es gobernado en gran medida por su ciclo límite, cada uno de estos estímulos o perturbaciones, provocará una respuesta (oscilación inducida) que se puede asociar al momento de intervención de la misma dentro de la oscilación natural. Es decir, el oscilador responde con una o varias respuestas inducidas por cada cierto número de perturbaciones.

En una primera aproximación cualitativa se observa que el sucesivo reinicio de la oscilación dada la existencia de un ciclo límite produce que eventualmente se encuentran fases en las cuales las perturbaciones asintóticamente van cayendo siempre, por lo que la respuesta del oscilador será la misma cada vez que una perturbación caiga en esa fase, es decir, que se llega a un momento en que las perturbaciones periódicas caen siempre en la misma fase, provocando así después de un periodo de tiempo transitorio un *acoplamiento* entre las respuestas inducidas que da el oscilador y la perturbaciones, dicho comportamiento es estable hasta que las perturbaciones cesan. En otras palabras se puede

decir que un acoplamiento N:M ocurre, cuando hay M ciclos o repuestas del oscilador perturbado por cada N estímulos.³

Los acoplamientos se pueden medir al registrar la series de tiempo que representan la respuesta del oscilador, se toma una lapso de tiempo (dos o tres respuestas) y se compara con un lapso de tiempo de igual magnitud anterior o posterior hasta establecer un comportamiento periódico respecto a las respuestas, una vez encontrado, se cuenta cuántas respuestas hay por el número de perturbaciones en ese lapso de tiempo, hasta que se repite el patrón. Definiendo el acoplamiento entre N = número perturbaciones y M = número de respuestas, como N:M.

El primer paso para hacer la predicción de acoplamientos es, como ya se mencionó, la construcción de una expresión analítica para la respuesta del Oscilador Salino a estímulos aislados. Para este objetivo se usa el protocolo de perturbaciones aisladas, con lo cual se obtiene la llamada Curva de Transición de Fase o PTC, cuya construcción experimental se explica a continuación.

III.3 Construcción experimental de la Curva de Transición de Fases.

La Curva de Transición de Fases o PTC (Phase Transition Curve) por sus siglas en inglés, es una grafica en la cual se puede observar como es que el periodo o la fase natural del oscilador cambia al haber una perturbación. Los ejes de esta grafica son “*fase vieja*” en el eje de las abscisas, el cual se refiere a las fases originales de la oscilación en donde se dio una perturbación. Por el otro lado en el eje de las ordenadas se coloca la “*fase nueva*”, el cual refiere a la fase a la cual la oscilación fue trasladada después de la perturbación. Para explicar mejor lo anterior partamos de lo siguiente.

³ En un acoplamiento N:M se observan M eventos marcadores asociados con el ciclo perturbado (por ejemplo, la generación de un potencial de acción) ocurriendo a M tiempos diferentes o fases en el ciclo de estímulo. El patrón N:M es una secuencia periódica repetida cada vez. [17]

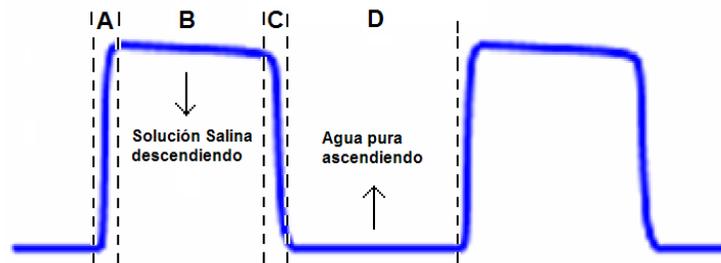


Fig. III.7. Interpretación del registro de cambio de voltaje en la oscilación separada en cuatro momentos.

Del comportamiento experimental ante perturbaciones, discutido anteriormente se observa que si se aplica una perturbación aislada en algún momento de la oscilación, tendremos una traslación de la oscilación y por lo tanto una variación en el periodo, si después de la perturbación no recibe una perturbación extra, el oscilador regresará a su periodo natural.

Así pues podemos tomar diferentes momentos de la oscilación y perturbar el oscilador, dejándolo regresar a su ciclo límite, y así, poder medir cómo es que cambia el periodo dependiendo del momento de la oscilación en que perturbemos.

Al seguir este procedimiento varias veces tendremos en el registro que a cada perturbación aislada le corresponde una cierta respuesta del oscilador. Así bien, del voltaje medido durante un ciclo, podemos separar la oscilación en cuatro momentos de la siguiente manera:

- A.** Comienza a descender solución salina y a su vez termina de ascender agua pura.
- B.** Solución salina descendiendo sobre el recipiente de agua pura.
- C.** Intercambio de chorros, en el cual comienza ascender agua pura y a su vez termina de descender solución salina.
- D.** Agua pura ascendiendo dentro del recipiente interior con solución salina.

La Figura III.7 muestra lo anterior. Nótese que la etapa D dura más que la etapa B.

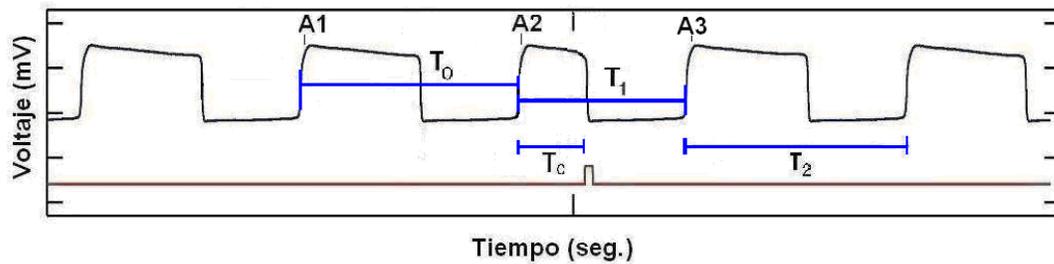


Fig. III.8. Medición del registro de la oscilación para obtener los parámetros que definirán la fase vieja y la fase nueva.

Para medir cómo es la respuesta del oscilador a una perturbación aislada se toma como evento marcador a **A1** y se mide el periodo justo antes de la perturbación (**Periodo Basal**) **T₀**. Ahora bien, se define el tiempo entre el evento marcador previo a la perturbación (**A2**) y el evento marcador posterior a ésta (**A3**) como **T₁** (**Periodo Perturbado**). **T₁** sería igual a **T₀**, si la perturbación no ocurriese, y es justamente la diferencia que haya entre ambos lo que nos dirá a qué fase se trasladó la oscilación. Por esta razón, se mide el tiempo que transcurre antes de la perturbación, con el objetivo de saber en qué fase ocurre el estímulo y posteriormente medir en cuánto cambió el periodo respecto al basal. A este tiempo lo definiremos como **intervalo de acoplamiento T_c**.

Así pues sabremos justamente cuánto tiempo pasa desde que la *oscilación a ser perturbada* inicia (evento **A2**) hasta el momento de la perturbación, o sea en qué fase de la oscilación comenzó la perturbación, a esto lo llamaremos la “*fase vieja*” y la definimos normalizando sobre el periodo basal (**T₀**), por tanto se define la **fase vieja Φ** , como **T_c/T₀**.

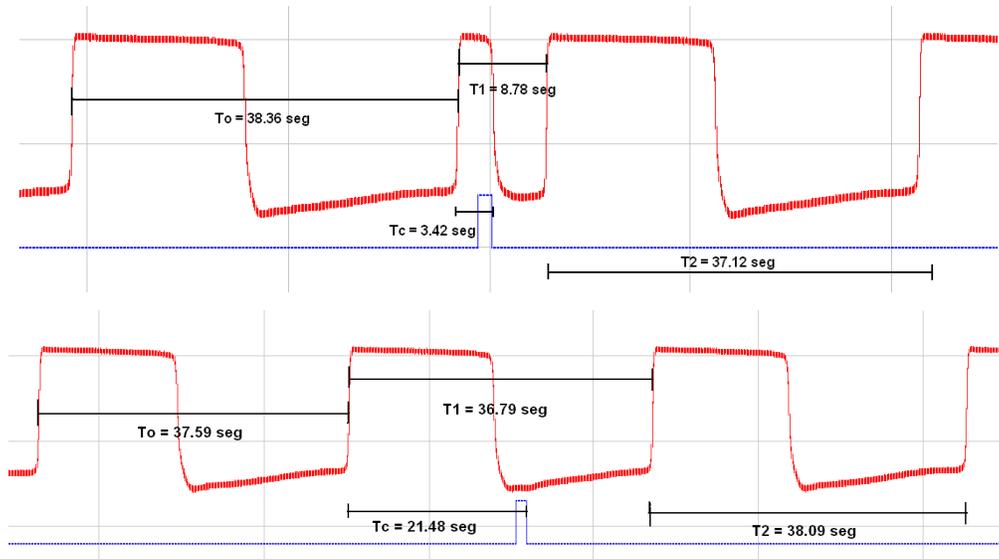


Fig. III.9. Dos momentos de aplicación de una perturbación aislada siguiendo el protocolo detallado en la sección anterior. Arriba: una perturbación aplicada a los 3.42 segundos posteriores al evento marcador. Abajo: una perturbación aplicada a los 21.48 segundos posteriores al evento marcador. Nótese el cambio del periodo respecto al basal en cada uno de los momentos, lo cual indica una traslación a una nueva fase de la oscilación.

Posteriormente, medimos nuevamente el periodo T_2 (Periodo Posterior), pero ahora después de que la perturbación ha sucedido, y que siguiendo el ciclo límite, cambiará hasta llegar a ser T_o después de un cierto tiempo. Por último tomamos la diferencia $(T_1 - T_c)$ y la definimos como *cofase* y así nuevamente normalizando con el periodo basal tomamos, $(T_o - \text{cofase})/T_o$, y definimos la *fase nueva* Φ' .

Finalmente se obtiene un valor único de fase vieja por cada uno de fase nueva al graficar **fase nueva contra fase vieja** (figura III.10). Se obtiene una serie de puntos experimentales que pueden ser ajustados mediante un polinomio, obteniendo finalmente una curva a la cual llamaremos “*Curva de Transición de Fases*”.

DATOS EXPERIMENTALES PARA CONSTRUCCION DE PTC

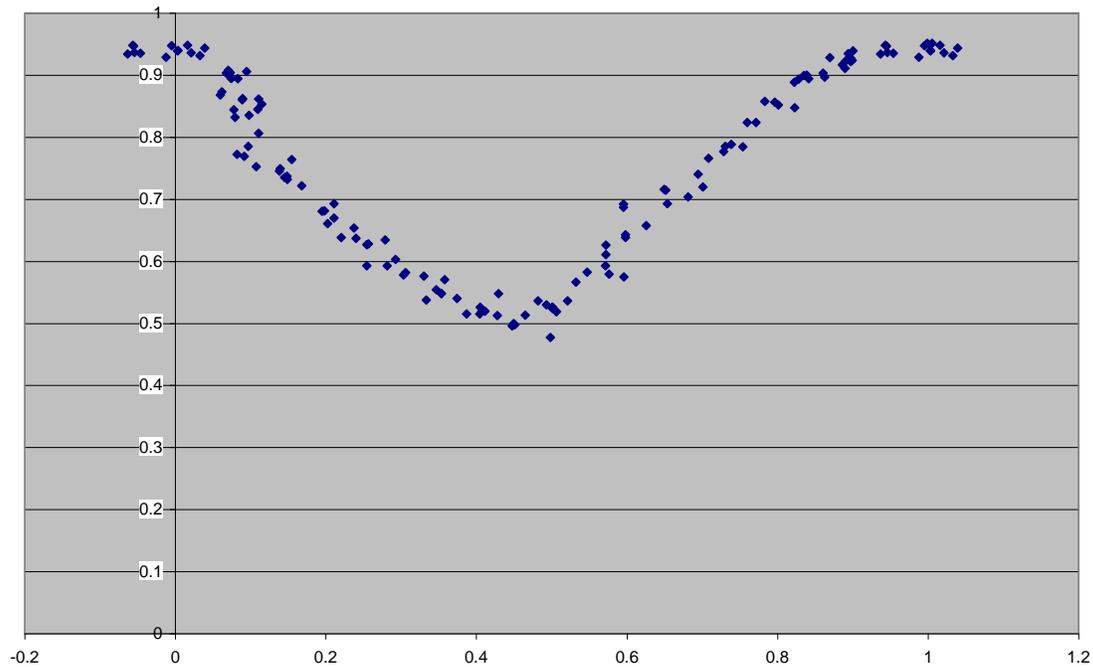


Fig. III.10. Serie de puntos experimentales obtenidos tras realizar varias veces el protocolo de perturbaciones aisladas en el Oscilador Salino. Los datos fueron normalizados con el periodo basal de oscilación, por lo que los valores de dichos puntos se encuentran en el intervalo $[0,1]$.

El obtener esta curva nos dota de una herramienta poderosa para poder realizar predicciones de cómo es que se comporta el oscilador ante perturbaciones periódicas, insertándola en el marco de un modelo matemático anteriormente propuesto por Guevara et al [17-21], para predecir acoplamientos en osciladores con un ciclo atractor y en el cual usando la forma analítica de la PTC, se investiga la respuesta del modelo a estimulaciones periódicas. Este acercamiento de usar la respuesta a un solo estímulo para predecir la respuesta a estímulos repetidos ya se ha usado previamente (Perkel et al., 1964; Moe et al., 1977; Pinsky, 1977; Scott, 1979) [22-24].

AJUSTE POLINOMIAL DE 6° GRADO PARA PTC

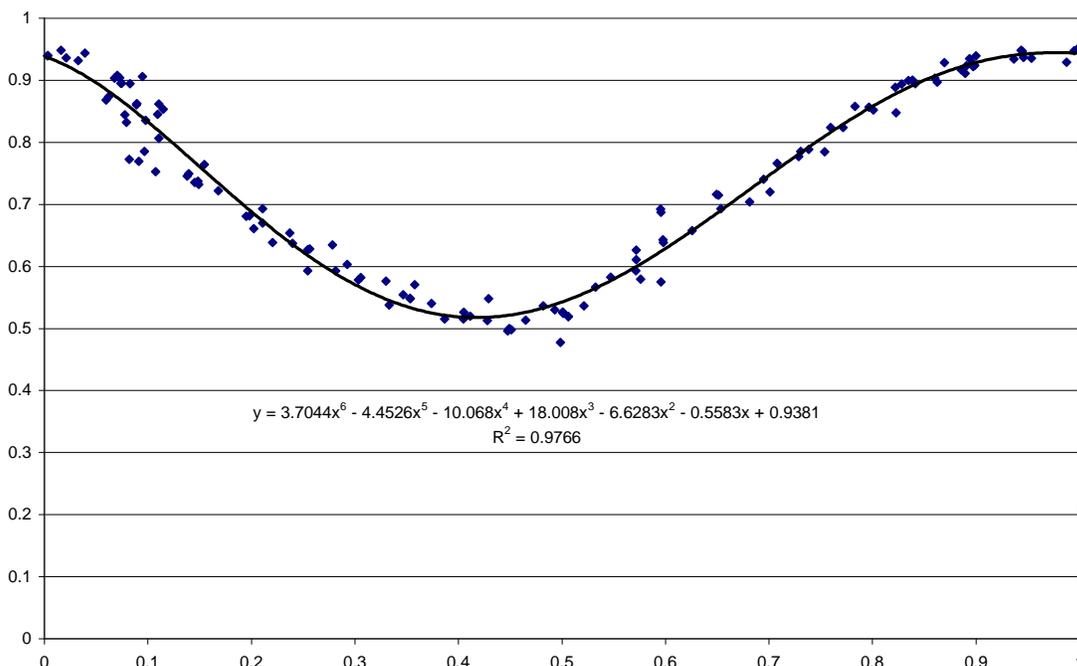


Fig. III.11. Ajuste polinomial de 6° grado para los datos experimentales obtenidos del protocolo de perturbaciones aisladas, $R^2=0.9776$, lo que indica que es un buen ajuste. Por lo que de esta manera la PTC queda determinada por $f(\phi) = 3.7044\phi^6 - 4.4526\phi^5 - 10.068\phi^4 + 18.008\phi^3 - 6.6283\phi^2 - 0.5583\phi + 0.9381$.

La intensidad que se usó para perturbar al oscilador, en este protocolo fue siempre de 3ml, tanto para construir la curva, como para perturbar periódicamente. La bomba inyectó y sustrajo 1.5ml de agua limpia, por cada jeringa. Por lo que el tiempo de inyección era aproximadamente de 1.3 segundos y a su vez cuando se retiraba agua, esto tardaba otros 1.3 segundos aproximadamente, por lo que en promedio cada perturbación duraba 2.6 segundos y evidentemente el regreso del oscilador a su ciclo límite no fue instantáneo como el caso ideal de la teoría del reinicio.

Se realizaron varios experimentos en los cuales se aplicaron 40 perturbaciones aisladas elegidas aleatoriamente en distintas fases de la oscilación. Para saber cómo es que cada

perturbación afectaba el periodo de la oscilación, cuando se aplicaba en cada fase (fase vieja), se siguió el procedimiento descrito en la sección anterior.

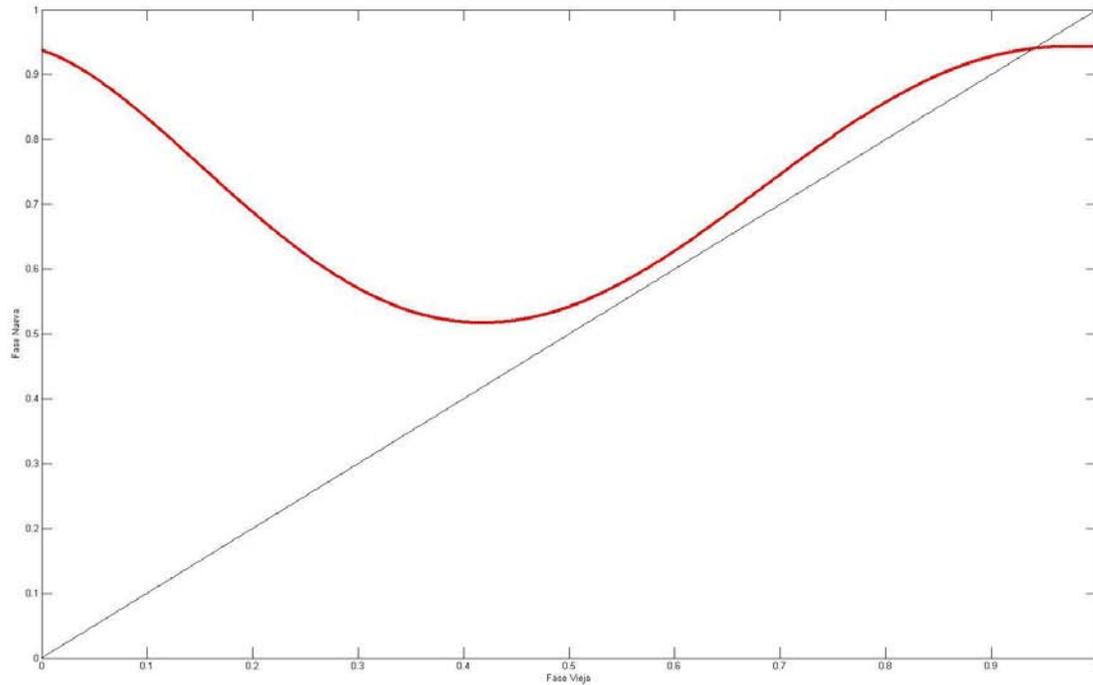


Fig. III.12. Mapeo derivado a partir de la PTC, el cual será iterado tanto grafica como analíticamente mediante un programa realizado en MatLab.

Se midió el intervalo de acoplamiento (momento en el cual ocurre la perturbación desde que inicia la oscilación) y se normalizó con el periodo de oscilación natural que correspondía a cada experimento, medido previamente. A su vez se midió a dónde se trasladó la oscilación (“cofase”), y también se normalizó con el periodo de oscilación natural obteniendo la nueva fase.

Una vez que se obtuvieron los datos correspondientes para obtener la curva de fases nuevas en términos de las fases viejas (PTC), para cada experimento, se repitió el procedimiento cuatro veces, todos los datos fueron integrados en una sola curva, la cual se muestra en la figura III.10. Nótese que seis puntos del principio de la serie de datos fueron repetidos al

final de la curva y que también seis puntos del final fueron repetidos al inicio. Esta maniobra se realizó aprovechando que la PTC debe ser periódica y para mejorar el ajuste polinomial.

Ahora que ya se cuenta con un conjunto amplio de datos experimentales, podemos proceder a realizar el ajuste a un polinomio de 6º grado el cual muestra un coeficiente de correlación de Pearson equivalente a $R^2 = 0.9766$, (muy cercano a 1) con lo que se asegura que los datos obtenidos son bien descritos por el polinomio.

De observar el comportamiento de los datos experimentales, se puede notar que la curva que podría ajustar prefigura una forma sinusoidal, lo que sugeriría un ajuste por funciones trigonométricas o bien por análisis de Fourier. Sin embargo se optó por realizar un ajuste polinomial pues el análisis matemático del comportamiento y consecuencias que se podría obtener de este ajuste al tratarlo mas generalmente, está fuera de los objetivos del presente estudio; pues el problema estaría relacionado con encontrar una función trigonométrica como la propuesta por Guevara y Glass⁴ pero para un oscilador más complicado (un oscilador de Van der Pol o bien uno de Rayleigh). El ajustar teóricamente el comportamiento del Oscilador Salino a un oscilador de este tipo es un trabajo que actualmente está en desarrollo; además de que encontrar y analizar matemáticamente una función analítica para este tipo de oscilador es un problema mucho más general y lo suficientemente rico como para sugerir un todo un estudio.

⁴ Ver sección II.2, página 23.

CAPITULO IV

Resultados.

IV.1 Predicción de acoplamientos en el Oscilador Salino a partir de iteraciones en la PTC.

Una vez que se ha construido la PTC, es posible llevar a cabo predicciones de los acoplamientos que puede presentar el Oscilador Salino. Como se explicó en el capítulo 3, si se considera a la PTC como un mapeo, este mismo se puede iterar para encontrar las fases estables donde se puede converger después de varias iteraciones o bien las fases de las cuales se diverge.

Para poder ejemplificar cómo es que se llevaron a cabo las simulaciones tomemos el siguiente caso, empecemos con elegir una fase inicial en donde se perturbará al oscilador, así como un periodo entre las perturbaciones.

Si nuestra fase inicial es $\phi_0 = 0.6$ y el periodo entre perturbaciones es $\tau = 0.7$ (recordemos que para fines prácticos se ha normalizado con el periodo del oscilador), habrá un corrimiento de 0.7 hacia arriba sobre el eje de las fases nuevas o bien de 0.3 hacia abajo.

Al momento de iterar por el método gráfico o de “telaraña” se encuentra que el oscilador rápidamente se acerca un punto estable alrededor de $\phi^* = 0.29$. Esto implica que el oscilador estará saltando conforme cada iteración, o bien cada vez que se perturbe, entre dos fase cercanas a 0.29 acercándose cada vez más a este punto.

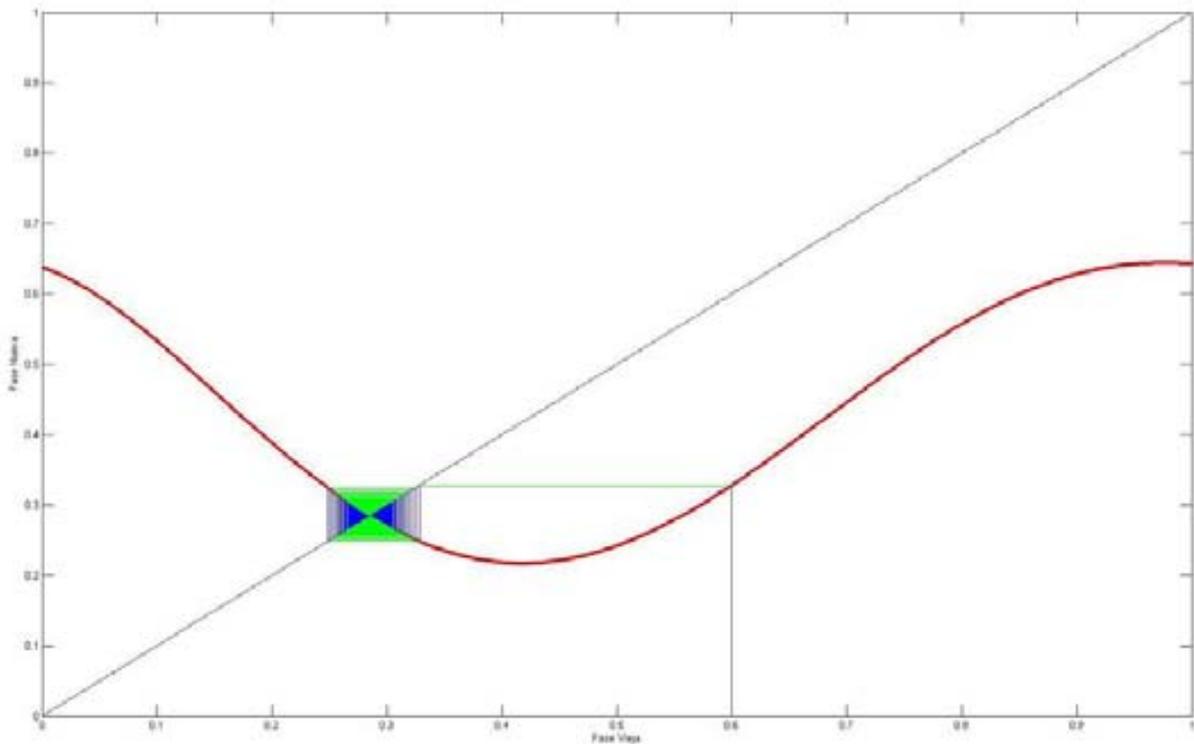


Fig. IV.1. Iteración en el mapeo derivado de la PTC, recorrida 0.7 hacia arriba sobre el eje de las fases nuevas, lo cual corresponde a un periodo de $\tau = 0.7T_0$ entre perturbaciones. La iteración comienza en la fase inicial $\phi_0 = 0.6T_0$, nótese como rápidamente convergerá en la fase $\phi^* = 0.29T_0$.

Así pues, si el periodo del oscilador es aproximadamente 36 segundos, cada vez que haya una perturbación esta ocurrirá en el momento que la oscilación está aproximadamente a los 10.5 segundos de que comenzó produciendo como respuesta una oscilación que llegará hasta el momento que ocurra una nueva perturbación la cual será cuando la oscilación llegue a los 10.5 segundos de haber recomenzado, sin embargo esta respuesta será aún mas cercana a 10.5 que la anterior. Así entonces después del lapso *transitorio*, por cada perturbación se tendrá una respuesta del oscilador, a esto se le denomina un ritmo 1:1, una perturbación -> una respuesta.

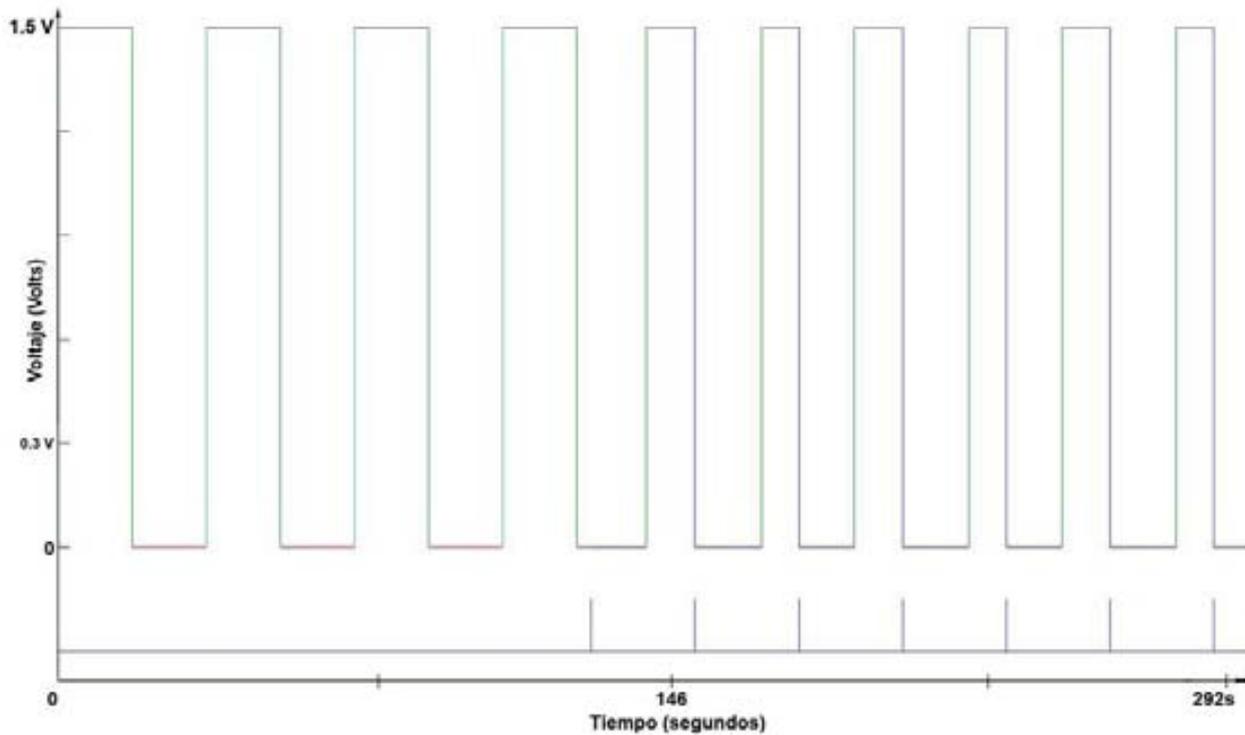


Fig. IV.2. Detalle del lapso transitorio dentro del tren de perturbaciones periódicas, nótese cómo la primera perturbación ocurre exactamente en $0.6T_0$ y después las perturbaciones van cayendo entre dos fases que eventualmente se van acercando a $0.29T_0$.

Cabe señalar por lo discutido anteriormente que el tipo de acoplamiento y su naturaleza dependen, en el oscilador salino, en general del periodo de perturbación τ al que se someta el oscilador, ya que este es el que provocará que los puntos estables o inestables, y por ende el acoplamiento asociado, aparezcan o no, dependiendo del corrimiento de la PTC. Sin embargo en las iteraciones se exploraron muchas condiciones iniciales para comprobar esta propiedad general.

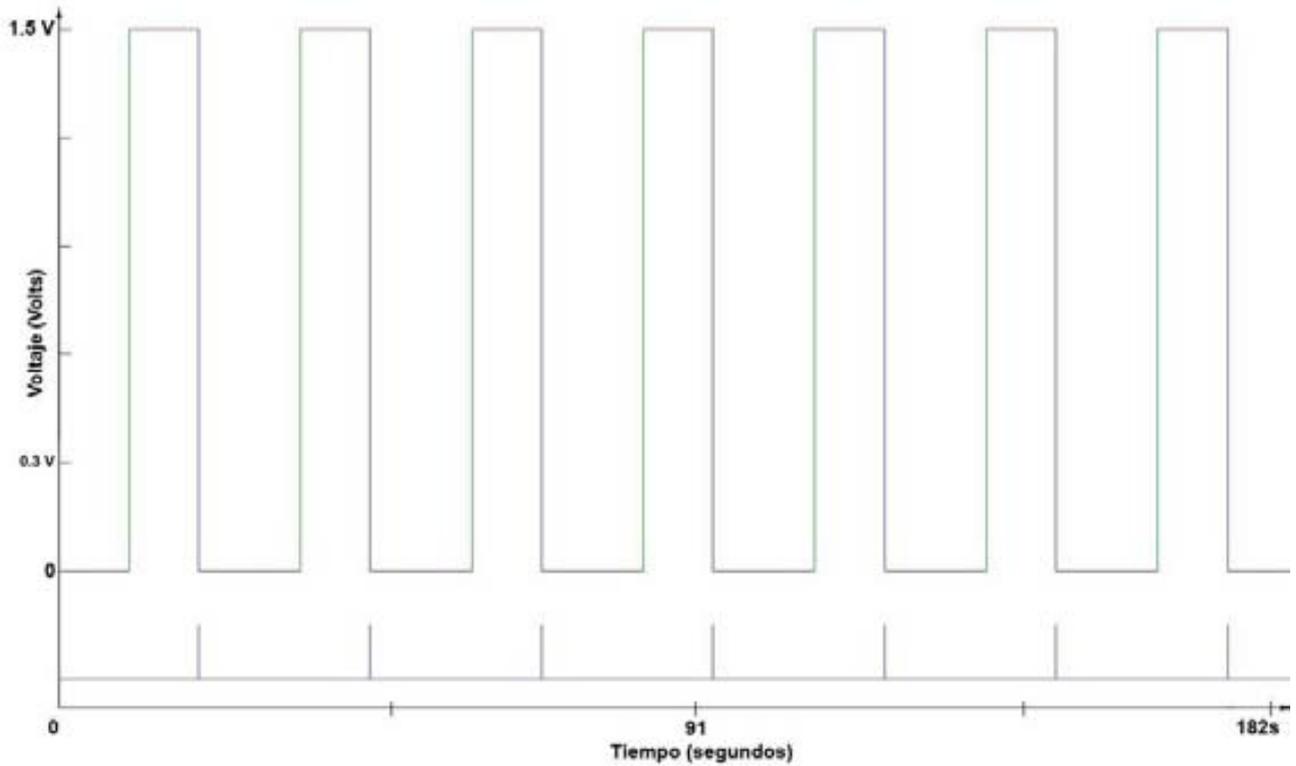


Fig. IV.3. Establecimiento del acoplamiento 1:1, nótese que cada perturbación ocurre en la fase $0.29 T_0$, y seguido de esto ocurre una oscilación como respuesta, que dura hasta la siguiente perturbación que ocurre nuevamente en el momento en que al oscilación llega a $0.29 T_0$.

Como otro ejemplo tomemos el periodo de perturbación $\tau = 0.1$, y cualquier fase de la oscilación; se estaría recorriendo la PTC 0.1 hacia arriba o bien de 0.9 hacia abajo, sobre el eje de las fases nuevas. Cuando se itera por el método gráfico se encuentra que el desplazamiento de la PTC ha provocado que ésta sea discontinua, sin embargo el oscilador nuevamente se acerca rápidamente a un punto estable alrededor de $\phi^* = 0.02$, con lo que se encuentra un comportamiento muy similar al descrito para el ejemplo anterior. Esto implica que se tendrá nuevamente un acoplamiento 1:1. Al realizar la simulación de esta oscilación, efectivamente hay un acoplamiento 1:1, pero en este caso las oscilaciones son mas rápidas, debido a que τ es menor.

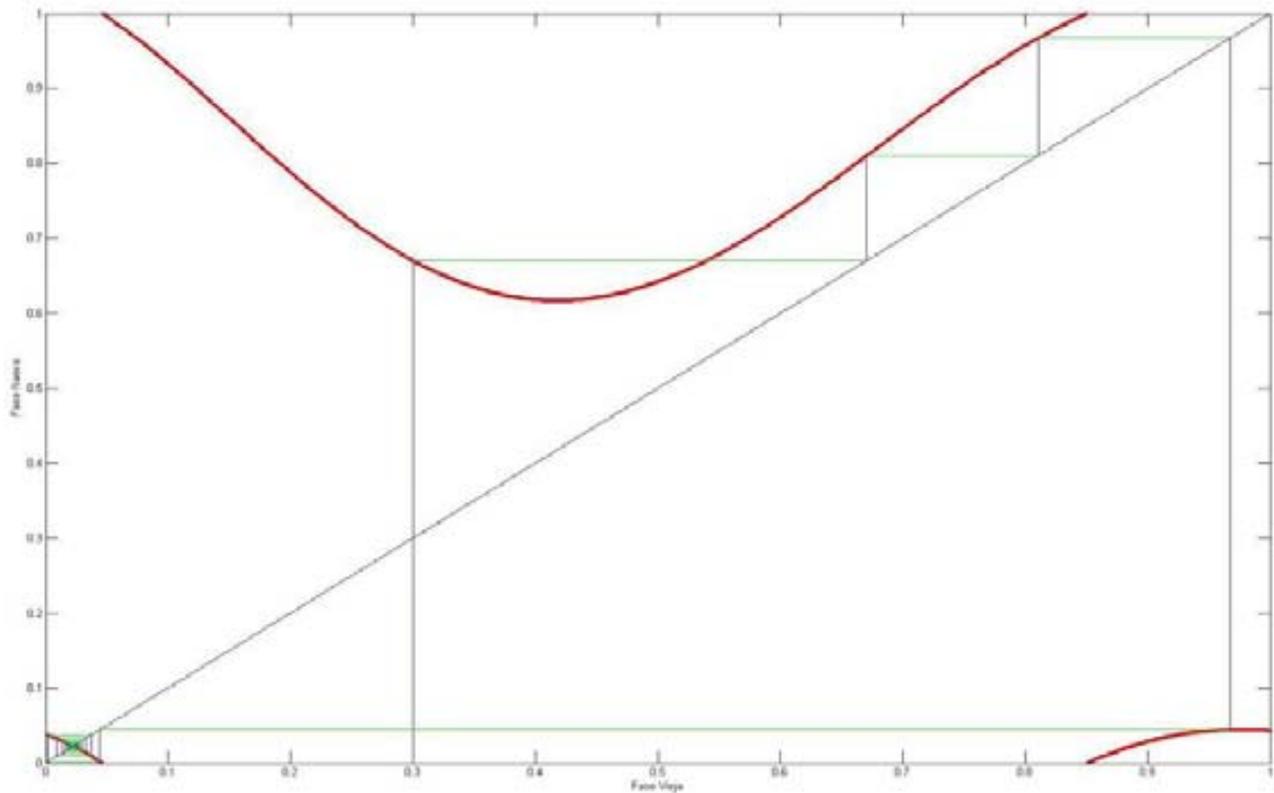


Fig. IV.4. Iteración en el mapeo derivado de la PTC, recorrido 0.1 hacia arriba sobre el eje de las fases nuevas, que al estar normalizado (mod1) lleva los puntos del mapeo mayores a uno hacia abajo. El periodo de perturbación es $\tau = 0.1T_0$ entre perturbaciones. La iteración comienza en la fase inicial $\phi_0 = 0.3T_0$, nótese rápidamente se acerca a $\phi^* = 0.02T_0$.

Así que se definirá a este acoplamiento como **1:1 rápido** y al anterior como un **1:1 lento**. Esta situación también ocurre para otros acoplamientos.

Analicemos ahora los siguientes ejemplos: $\tau = 0.3$ y $\tau = 0.5$. Como ya se mencionó, la fase inicial pocas veces afecta el establecimiento de un ritmo, a menos de que haya biestabilidad lo cual se discutirá más adelante, por lo cual de aquí en adelante se tomará una fase inicial fija ($\phi_0 = 0.15$), para continuar con la discusión.

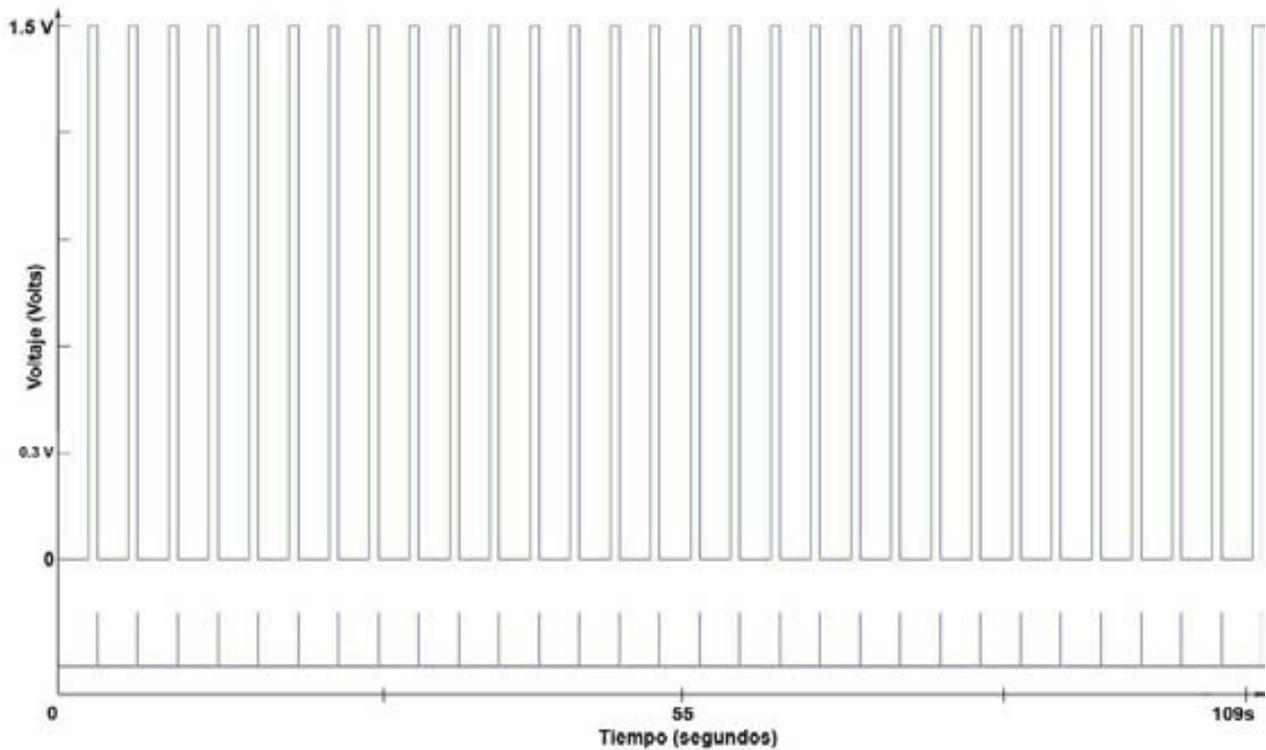


Fig. IV.5. Establecimiento del acoplamiento 1:1 rápido, cada perturbación ocurre en la fase $0.02T_0$, y seguido de esto ocurre una oscilación muy rápida como respuesta.

Al realizar la iteración correspondiente para $\tau = 0.3$ se puede notar que hay un punto repulsor alrededor de $\phi^* = 0.11$, del cual la iteración se separa rápidamente, y después ésta se va acercando hasta encontrar dos fases estables alrededor de $\phi_i^* = 0.24$ y de $\phi_j^* = 0.94$.

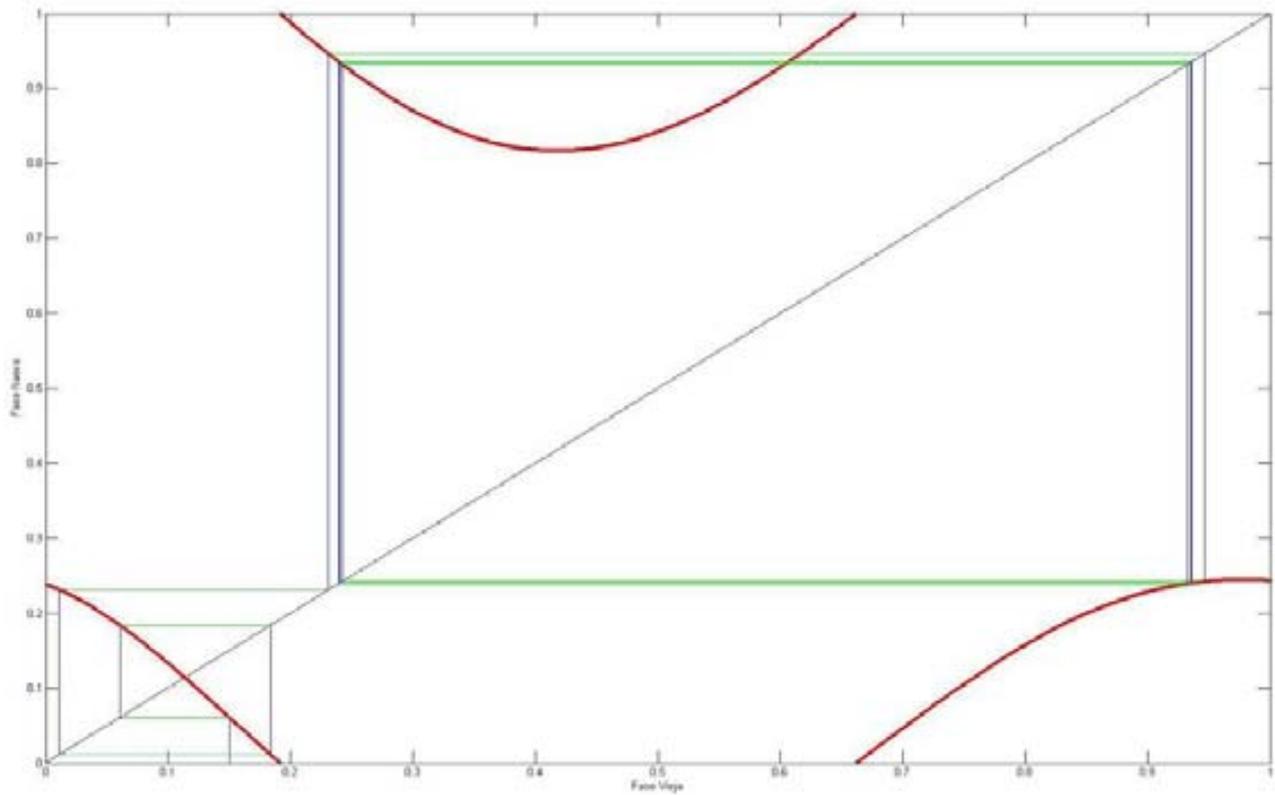


Fig. IV.6. Iteración en el mapeo para $\tau = 0.3$, ésta se estabiliza en las fases $\phi_i^* = 0.24$, así como en $\phi_j^* = 0.94$. Nótese que $\phi_i^* < 0.5$ por lo que cada perturbación que caiga ahí provocará un cambio en el flujo de agua, mientras que para $\phi_j^* > 0.5$, esto no ocurrirá.

Lo anterior trae por consecuencia que en la simulación de la oscilación, después de que ocurre el periodo transitorio (en este caso la separación de la fase repulsora), haya una perturbación cayendo en $\phi_i' = 0.24$, que pertenece a la zona de agua salada cayendo ($\phi < 0.5$).

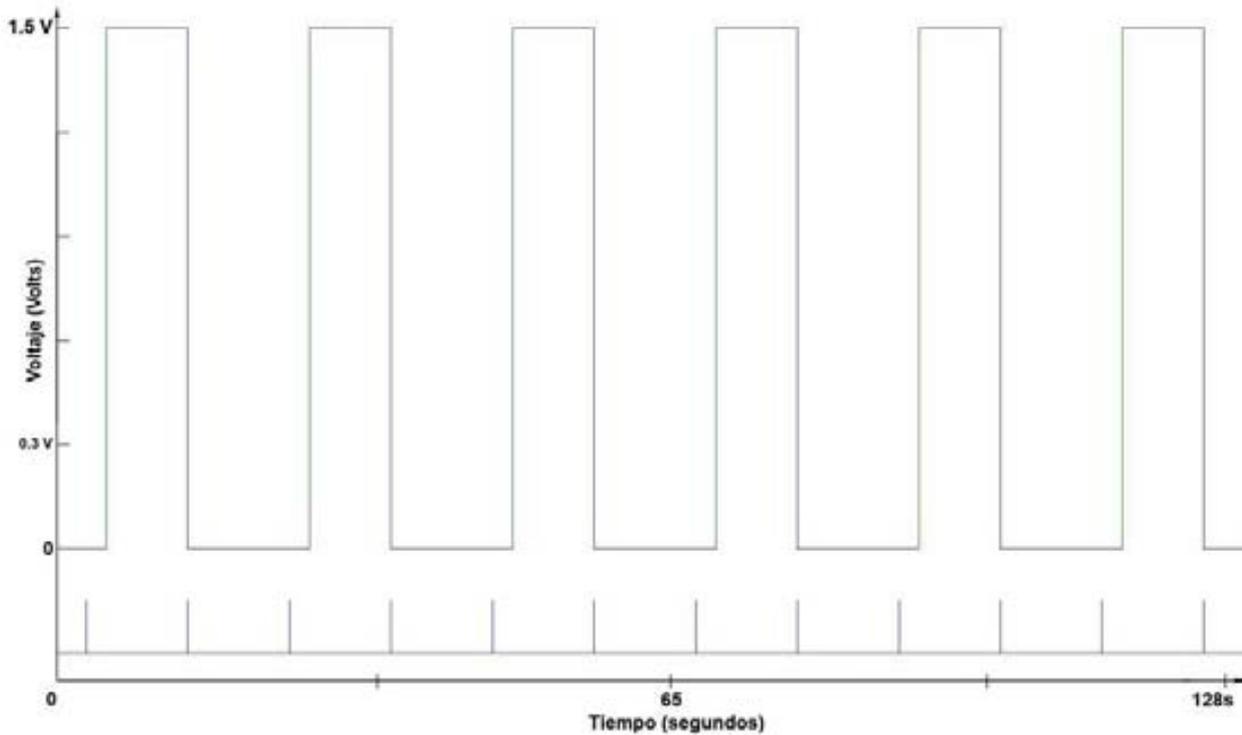


Fig. IV.7. Establecimiento del acoplamiento 2:1, para dos perturbaciones ocurre una sola oscilación. Nótese que una perturbación cae en la fase $\phi_i' = 0.24$ (“agua salada cayendo”), por lo que produce un cambio de flujo en el oscilador, y la perturbación siguiente cae en la fase $\phi_j' = 0.94$ (“agua pura ascendiendo”), por lo que sólo adelanta un poco la oscilación.

Así pues tenemos que una perturbación cae en una fase de la zona de agua salada descendiendo y otra que cae en la zona de agua pura subiendo, en un ciclo que dura justamente 2τ , por lo cual tenemos dos perturbaciones y una sola respuesta (una oscilación completa), por lo que el acoplamiento establecido se define como un ritmo 2:1.

Ahora, al realizar la iteración para $\tau = 0.5$, se encuentra un comportamiento muy similar al anterior, un punto repulsor alrededor de $\phi^* = 0.2$ y el acercamiento a las fases estables $\phi_1' = 0.02$ y $\phi_2' = 0.43$, sin embargo a diferencia del caso anterior, ambas fases caen en la zona de agua salada descendiendo ($\phi < 0.5$), por lo que cada vez que haya una perturbación, esta provocara que se invierta el flujo, en el caso de la primera fase ($\phi_1' = 0.02$) el cambio de flujo es muy rápido pues la perturbación ocurre casi al iniciar la oscilación llevándola a una fase en la zona de agua dulce subiendo, con lo que continuara naturalmente hasta llegar a la bajada de agua salada, completando una

oscilación completa (una respuesta), aunque más rápida. En ese momento ocurre una segunda perturbación ($\phi_2' = 0.43$), nuevamente en la zona de bajada de agua salada, así una vez más se produce un cambio de flujo siguiendo el mismo comportamiento anterior hasta llegar a ($\phi_1' = 0.02$) completando una segunda respuesta y recomenzando el ciclo. Por lo tanto, se tienen dos respuestas por cada dos perturbaciones por lo que a este acoplamiento se le llama entonces ritmo 2:2, lo anterior lo ilustra la figura IV.8.

Hasta el momento todos los acoplamientos que se han discutido corresponden a periodos de perturbación menores al periodo de oscilación natural: $\tau = \frac{T_p}{T_0} \leq T_0$.

Ahora, analizaremos qué sucede cuando hacemos crecer T_p , esto traerá por consecuencia que $\tau > T_0$.

Si perturbamos con un periodo de perturbación $\tau = 1.5$, al hacer la iteración encontraríamos el mismo comportamiento que para $\tau = 0.5$, en lo que se refiere a fases estables y/o inestables, pues nuestra PTC siempre está normalizada a uno y el incremento en τ sólo provoca un corrimiento sobre el eje de las fases nuevas, de hecho encontraríamos el mismo comportamiento de $\tau = 0.5$, para $\tau = K.5$, donde K es cualquier número entero. Sin embargo en lo que acoplamientos se refiere, no ocurre lo mismo, dado que cada vez que ocurre una perturbación además de la fracción de T_0 que hay entre perturbación y perturbación, hay además un periodo de oscilación natural, correspondiente a cada K , en la que ocurrirá una respuesta adicional a las que provoquen los estímulos.

Lo anterior está matemáticamente justificado, pues el número de rotación ρ aumenta en una magnitud cada vez que hay un periodo natural sin perturbaciones del oscilador. Así pues, recordando la **proposición 1** del capítulo II, se tiene como resultado que si existe un acoplamiento asociado a τ de la forma $N : M$, y si $\tau' = \tau + K$, entonces el acoplamiento asociado a τ' será de la forma $N : M + KN$. Por lo que si $\tau \geq 1$, se podría ver como que $\tau' = \tau + 1$, por lo que el acoplamiento asociado en términos del periodo $\tau < 1$ será de la forma $N : M + KN$.

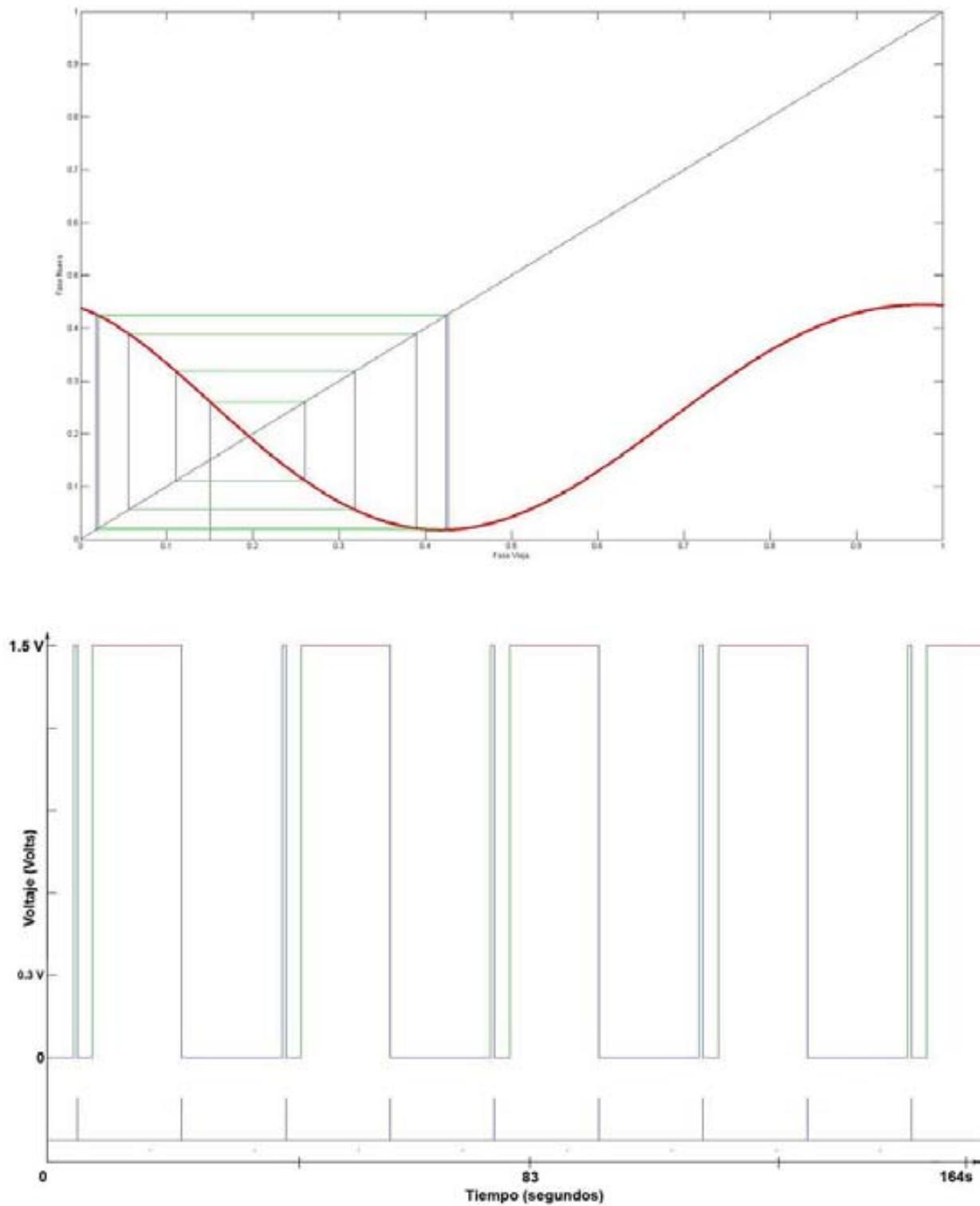


Fig. IV.8. Simulaciones tanto para la iteración como para la oscilación cuando $\tau = 0.5$, nuevamente la iteración (arriba) se estabiliza en dos fases $\phi_1' = 0.02$ y $\phi_2' = 0.43$ ambas en la zona de agua salada cayendo. En la oscilación (abajo) se establece un acoplamiento 2:2, ambas perturbaciones producen un cambio de flujo sin embargo la oscilación inducida por la primera perturbación es mucho más rápida que la segunda, pues cae en una fase mucho mas temprana.

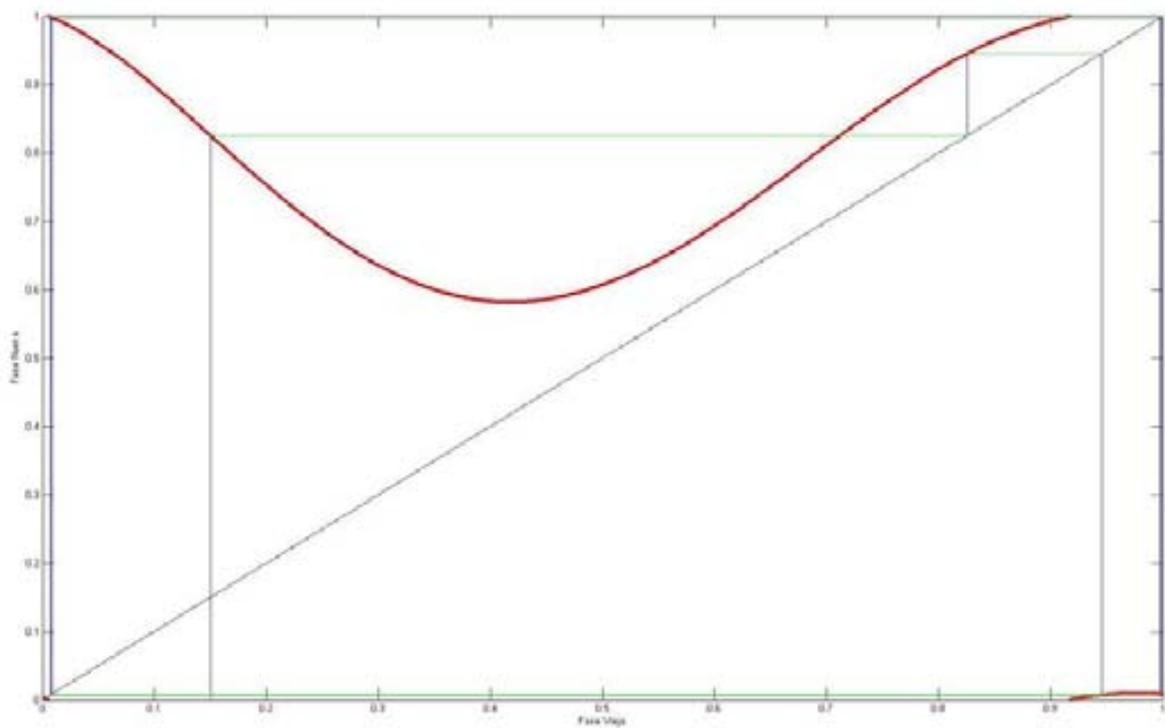
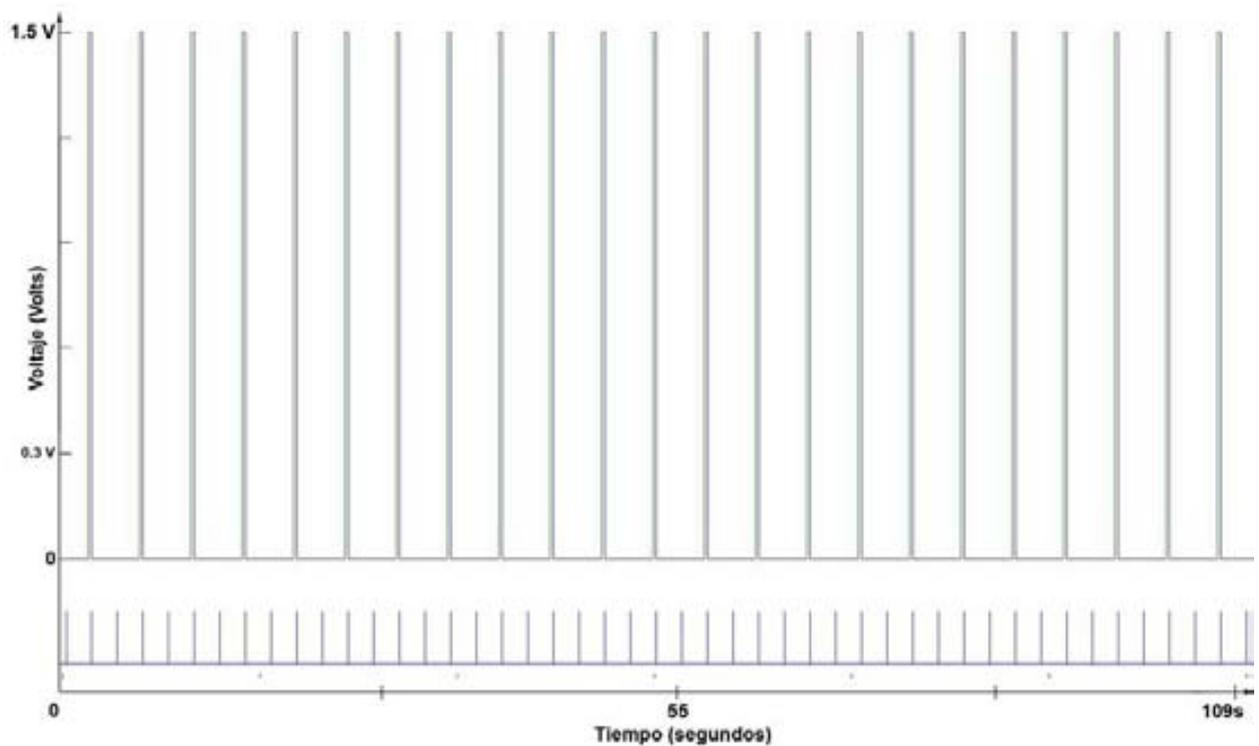


Fig. IV.9. Versión del acoplamiento 2:1 en forma rápida $\tau = 0.065$. Nótese que en la oscilación (arriba) hay dos perturbaciones y una repuesta muy rápida, esto se pueda explicar en la iteración (abajo) pues esta se estabiliza en una órbita de periodo 2 muy temprana al inicio de la oscilación.

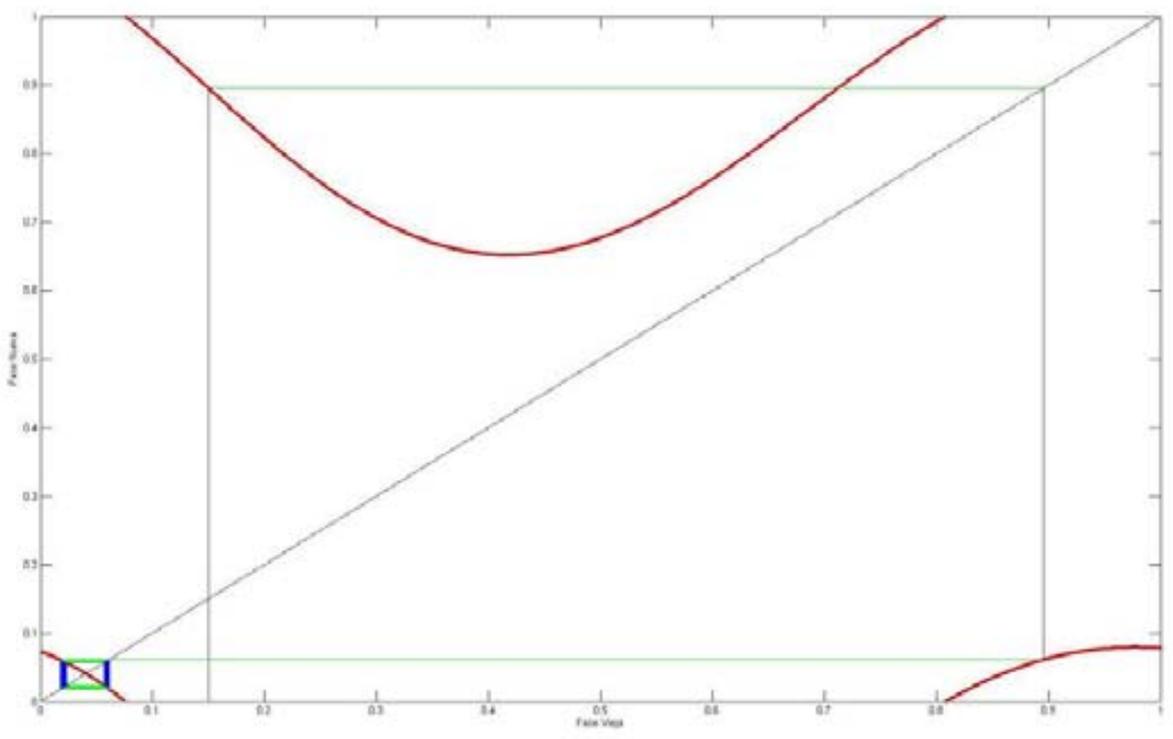
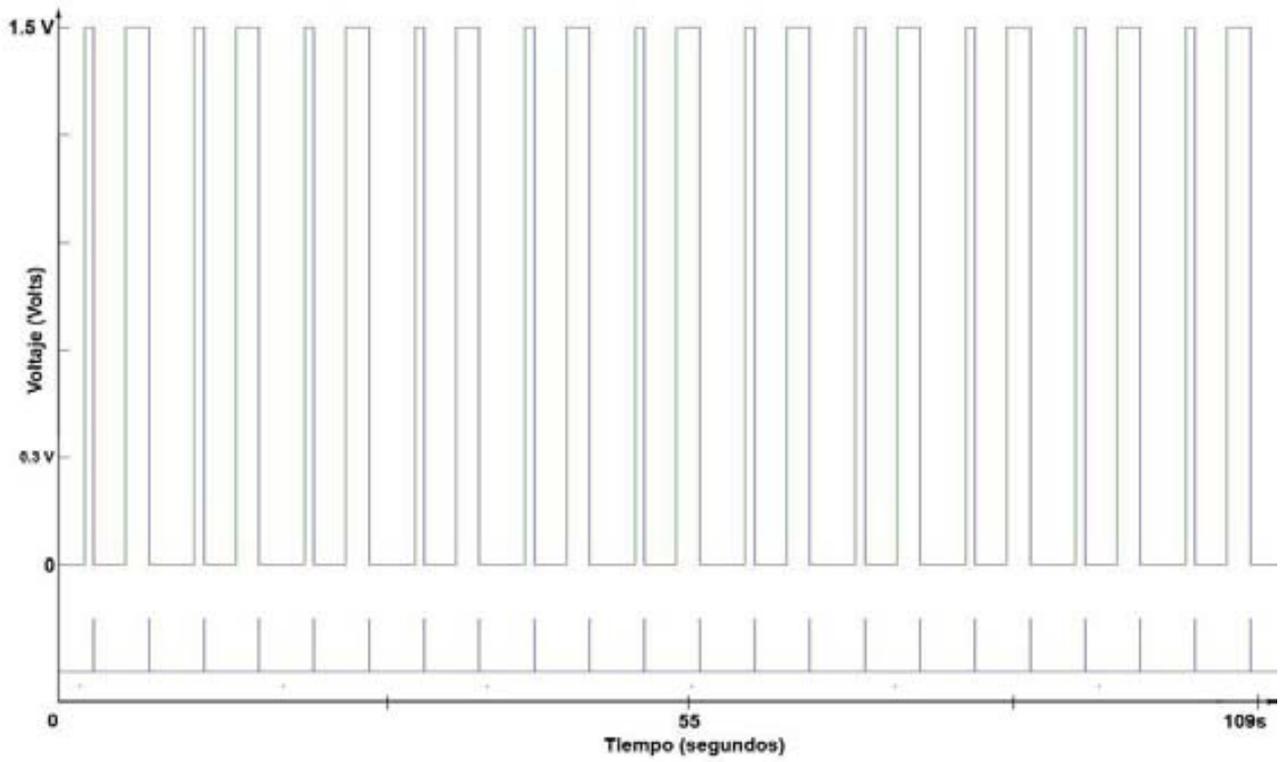


Fig. IV.10. Acoplamiento 2:2 rápido $\tau = 0.135$. La iteración (abajo) se estabiliza en dos fases, la primera muy temprana y la segunda muy cercana al final. Por lo que en la oscilación (arriba) lo anterior se ve reflejado en que la primera perturbación cae en la primera fase provocando un cambio de flujo, y la segunda cae en la fase cercana al final que es cuando ocurre el cambio de flujo natural en el oscilador.

Analicemos ahora el caso de $\tau = 1.1$ y $\tau = 1.5$. Para el primer caso, se tiene que la iteración es la misma que cuando $\tau = 0.1$, discutida anteriormente, en donde se encontró un acoplamiento 1:1, pues había una sola fase estable y cada perturbación caía en ésta provocando una respuesta. Ahora también existe la misma fase estable, pero la siguiente perturbación tarda un periodo natural de oscilación T_0 extra lo cual permite que haya una oscilación natural del oscilador además de la provocada por el estímulo en sí, posteriormente al ocurrir la siguiente perturbación esta vuelve a caer en la misma fase estable y provoca a su vez una respuesta igual a la primera que hubo, reiniciando con esto el ciclo. Por lo tanto por cada estímulo tenemos dos respuestas (una inducida y una natural), siendo esto un rimo 1:2, con lo que se confirma la proposición citada.

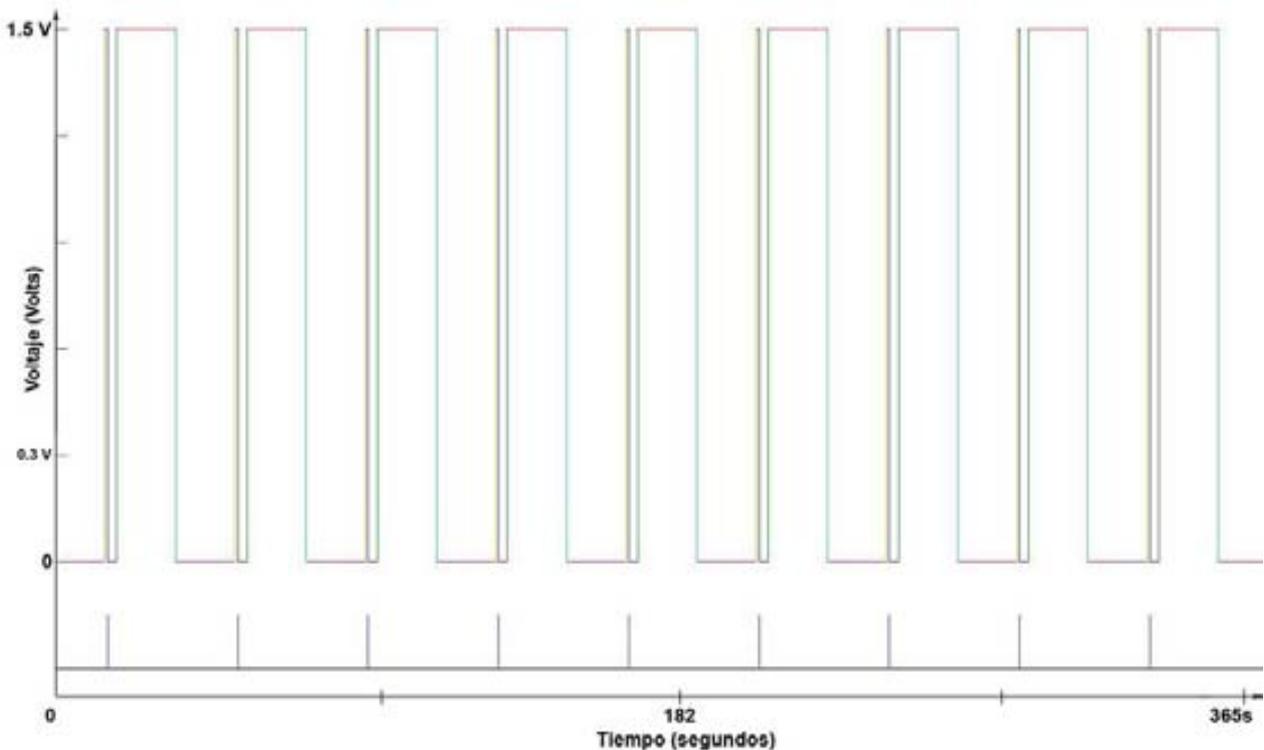


Fig. IV.11. Acoplamiento 1:2 para $\tau = 1.1$. Hay una perturbación por cada dos respuestas, la primera es de la misma naturaleza que la que hay para $\tau = 0.1$, la segunda corresponde a una oscilación natural debido a que pasa un periodo natural de la oscilación. Las iteraciones para este periodo de perturbación corresponden también a la figura IV.4.

En el caso de $\tau = 1.5$, la iteración es idéntica al caso de $\tau = 0.5$, donde hay dos fases estables. Para, el caso de los acoplamientos, en el caso de $\tau = 0.5$, una perturbación caía

en una de las fases estables provocando una respuesta, y la siguiente caía en la otra fase estable también provocando una respuesta. Para el caso de 1.5 se repite este mismo patrón, pero se agrega una oscilación natural a cada perturbación, por lo que primero habrá dos respuestas para el caso de la fase estable $\phi_1^* = 0.02$, la inducida por haber caído en esa fase y la natural, provocada por el tiempo de espera a la siguiente perturbación. Así mismo la para la siguiente perturbación que ahora caerá en la fase $\phi_2^* = 0.43$, esta también tendrá dos respuestas (la inducida y la natural), por lo tanto tendremos cuatro respuestas por cada dos perturbaciones, o sea un ritmo 2:4, o bien 2:2+2.

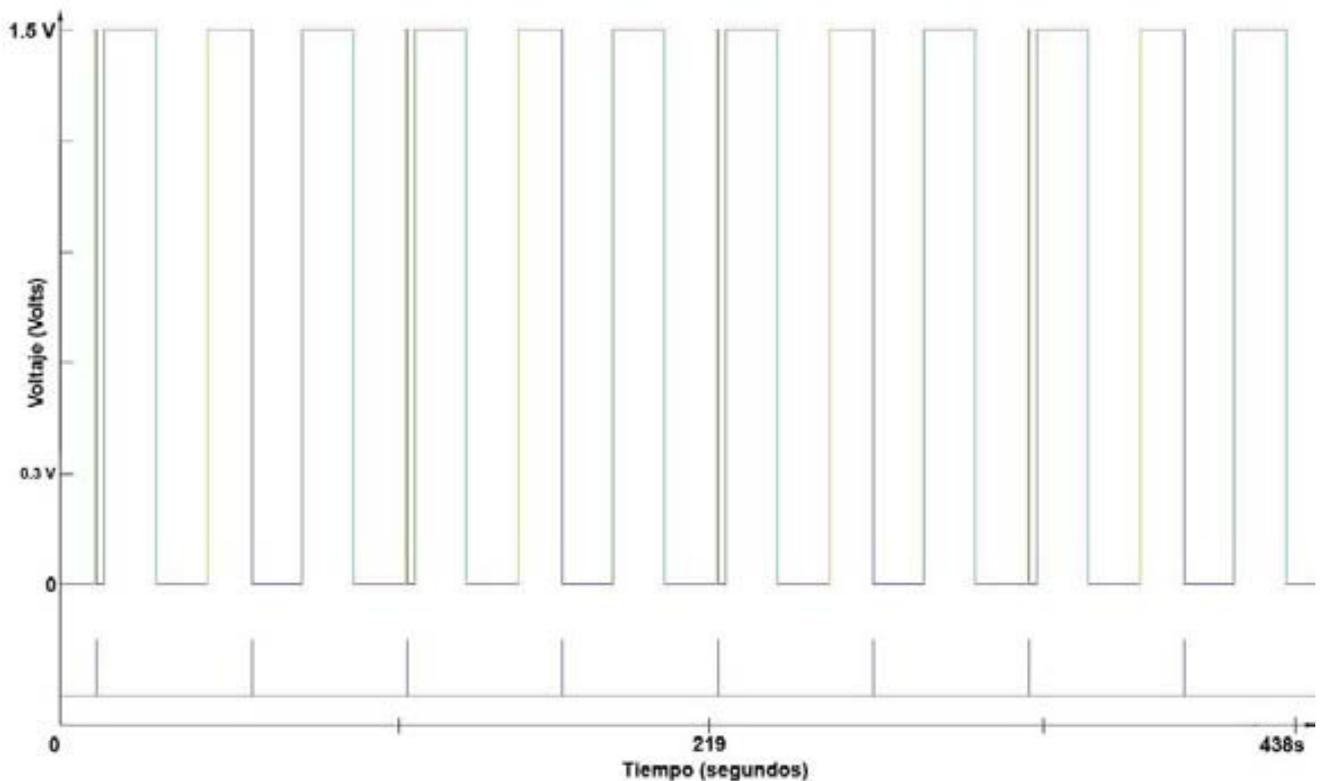


Fig. IV.12. Acoplamiento 2:4 para $\tau = 1.5$. En este caso se tiene dos perturbaciones y cuatro respuestas. Se puede notar que la naturaleza de la primera respuesta corresponde con la primera que hay cuando $\tau = 0.5$, pero en este caso esta seguida de una oscilación natural. Así mismo cuando se alcanza la siguiente iteración, se puede notar que hay una oscilación de la misma naturaleza a la segunda respuesta que hay cuando $\tau = 0.5$, pero también seguida de una oscilación natural.

Así también para estos dos casos tendremos los casos rápidos y lentos descritos anteriormente y en general, los patrones en los acoplamientos encontrados, repiten el esquema que hay entre 0 y 1. Pero ahora para cada perturbación hay que agregar las oscilaciones naturales que haya por cada perturbación, bajo el esquema mencionado y justificado por la *proposición 1* del capítulo II para periodos de perturbación mayores a uno.

Resumiendo, para periodos de perturbaciones mayores a 1 ($\tau \geq 1$), se repetirá el mismo esquema de fases estables que cuando $\tau < 1$, sin embargo los acoplamientos asociados cambiarán dependiendo de en que magnitud aumente el periodo de perturbación ($\tau' = \tau + K$), por lo que el acoplamiento $N : M$ asociado al periodo τ cambiara a $N : M + KN$. Para el presente trabajo solo se realizó el estudio correspondiente a $K=0, K=1$.

En general los resultados de las simulaciones e iteraciones así como los de los ejemplos anteriores se pueden resumir mostrando un diagrama de bifurcaciones en el cual se pueda observar cuantas fases estables existen para cada periodo de perturbación.

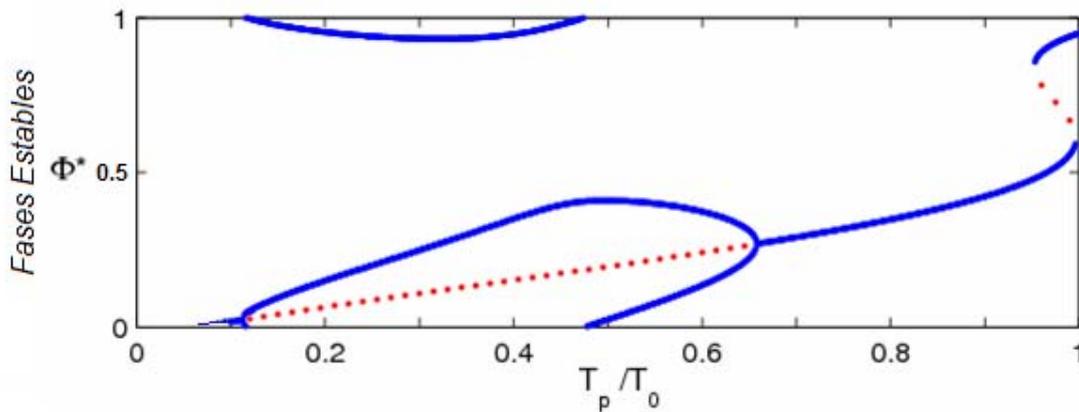


Fig. IV.13. Diagrama de Bifurcaciones para perturbaciones en el Oscilador Salino, este muestra las fases estables (ϕ^*) en el eje de las ordenadas con respecto al periodo de perturbación ($\tau = T_p/T_0$) en el eje de las abscisas, nótese que los valores también están normalizados a 1.

En la figura se observa las fases estables que el sistema alcanza al iterar la PTC, cuando se aumenta el periodo de perturbación (normalizado con el periodo de oscilación natural

$\tau = \frac{T_p}{T_0}$). Se observa que si $0 \leq \tau \leq 0.135$ se encuentra una única fase estable, como ya se había observado, y así bien al tener una única fase estable menor a 0.5 tendremos un regreso en la oscilación (cambio de flujo) produciendo el ritmo 1:1 rápido, que ya habíamos notado.

Cuando $0.135 \leq \tau \leq 0.145$ se visitan alternativamente dos fases con $\Phi < 0.5$, por lo que en cada una de las dos perturbaciones habrá un cambio de flujo, produciendo un ritmo 2:2 rápido.

Así también si $0.1475 \leq \tau \leq 0.48$ se salta entre dos fases una $\Phi_1 < 0.5$ y la otra $\Phi_2 > 0.5$ por lo que para una perturbación habrá un cambio de flujo y para la otra sólo habrá una traslación de la oscilación pero sin cambio de flujo, por lo que se tendrá un ritmo 2:1.

Si $0.485 \leq \tau \leq 0.675$ nuevamente existen dos fases $\Phi < 0.5$, por lo que para cada dos perturbaciones habrá un cambio de flujo para cada una, nuevamente se tendrá un ritmo 2:2 sin embargo esta vez ambas fases son mayores a las encontradas anteriormente, por lo que las respuestas (cambios de flujo) duran mas tiempo produciendo el ritmo 2:2 lento.

Por último cuando $0.7 \leq \tau \leq 1$ nuevamente hay una única fase estable, sin embargo cuando $0.7 \leq \tau \leq 0.943$ esta se encuentra por debajo de 0.5 ($\Phi_1 < 0.47$), con lo que se encuentra un ritmo 1:1, pero esta vez lento.

Sin embargo cuando $0.94 \leq \tau \leq 0.97$ existe una fase adicional ($0.47 \leq \Phi^* \leq 0.9$), pero como se puede notar esta fase no es una bifurcación sino mas bien, es una fase que coexiste al mismo tiempo con la otra. Lo anterior quiere decir que para un mismo rango de periodo de perturbación ($0.94 \leq \tau \leq 0.97$) existen dos fases estables, **una biestabilidad**, así entonces, en este caso sí dependerá de qué condiciones iniciales existan para que la oscilación se estabilice en una fase o en la otra. Por tanto se puede observar que para el rango $0.94 \leq \tau \leq 0.97$ se pueden tomar fases iniciales que finalmente se estabilicen cerca de $\Phi^* = 0.47$ y así mismo para fases iniciales diferentes

se pueden estabilizar cerca de $\Phi^* = 0.9$. Un ejemplo concreto de esto lo encontramos para $\tau = 0.96$, en este caso si tomamos como condición inicial a valores $\phi_0 \leq 0.67$, encontraremos que la fase estable se encuentra alrededor de $\Phi^* = 0.5$, y así mismo para valores iniciales $\phi_0 > 0.67$ la fase nueva se estabiliza en alrededor de $\Phi^* = 0.9$.

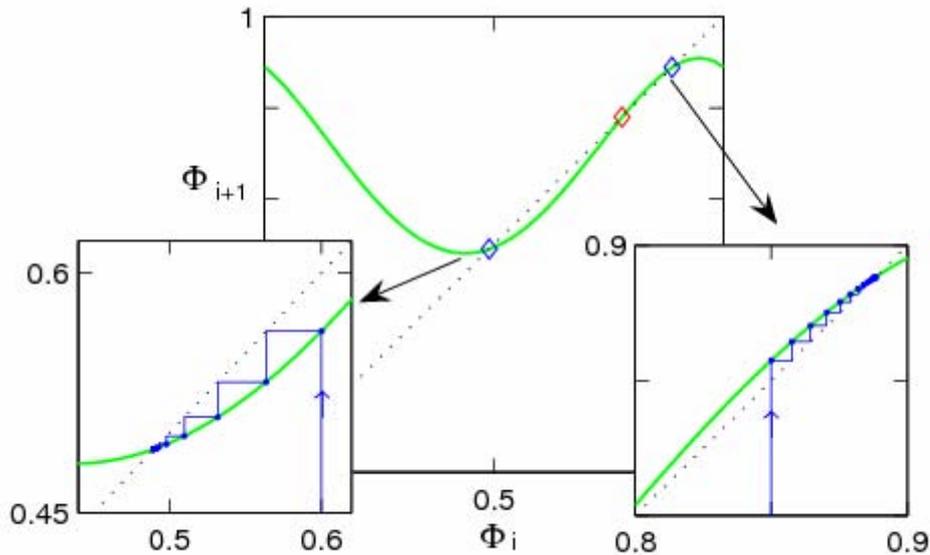


Fig. IV.14. Biestabilidad correspondiente a $\tau = 0.96$, nótese como hay 3 puntos del mapeo que cruzan con la recta igualdad, lo que indica que existen 3 puntos fijos. Los puntos de los extremos $\phi_1^* = 0.5$ y $\phi_3^* = 0.87$, son atractores mientras que el de en medio $\phi_2^* = 0.67$ es repulsor, por lo que el punto en el que el sistema llega a estabilizarse depende de las condiciones iniciales ($\phi_0 < \phi_3^*$ o bien $\phi_0 > \phi_3^*$).

Sea cual sea la fase en que se estabilice, en ambos casos se tiene una sola fase estable y por lo tanto una sola respuesta por cada perturbación, por lo que el ritmo 1:1 se conserva, y así mismo las fases estables son mayores que las encontradas para el primer ritmo 1:1, por lo que sin pérdida de generalidad se puede concluir que para $0.7 \leq \tau \leq 1$ se tiene un ritmo 1:1 lento. La figura IV.15 ilustra lo anterior.

Este diagrama se repite exactamente para los periodos de perturbación mayores a uno, puesto que como ya se mencionó, dada la *proposición 1* del capítulo 3 y así también la normalización del mapeo, un periodo de perturbación $\tau = 1.3$ corresponde a un $\tau = 0.3$ y en general un $\tau = K.S$ $K \in \mathbb{Z}, S \in [0,1]$ corresponde a un $\tau = 0.S, S \in [0,1]$. Por lo que para $\tau \geq 1$ se tiene que:

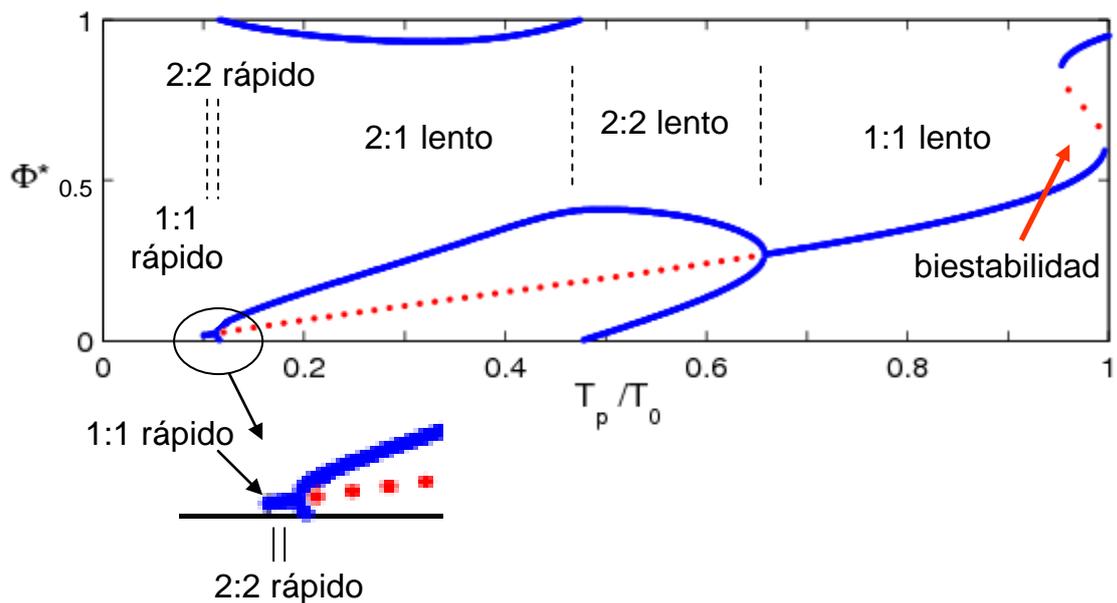


Fig. IV.15. Detalle del diagrama de bifurcaciones, se muestran las zonas en donde se encuentran los acoplamientos nótese la zona de biestabilidad cuando τ es cercano a 0.9. Además de la pequeña zona de 2:2 rápido cuando τ es cercano a 0.1.

Para $1 \leq \tau \leq 1.135$ se encuentra el ritmo 1:2 rápido.

Si $1.135 \leq \tau \leq 1.145$ el ritmo 2:4 rápido.

Cuando $1.1475 \leq \tau \leq 1.48$, 2:3.

De $1.485 \leq \tau \leq 1.675$, 2:4 lento.

Y por último de $1.7 \leq \tau \leq 2$, 1:2 lento.

Con lo que se tiene un diagrama de bifurcación idéntico al anterior (figura IV.6).

Dada la discusión anterior se puede variar el periodo de perturbación τ y entonces generar una simulación de la oscilación que se presenta a partir de cada iteración. Así bien, al iterar diferentes periodos de perturbación se encuentran los diferentes acoplamientos. De esta manera se realizaron las simulaciones correspondientes para diferentes valores de t iniciando en $\tau = 0.065$ y aumentando el valor de éste poco a

poco. En un principio se aumentó el valor de τ entre 0.01 y 0.015 y a partir del valor de $\tau = 0.145$ se fue incrementando en una magnitud de 0.05 hasta llegar al valor de 0.95.

Al realizar la simulaciones tanto de iteraciones como de oscilaciones se puede notar que en cuanto a las figuras de las iteraciones, éstas muestran cómo es que el mapeo es recorrido poco a poco, y las telarañas que se derivan de esto son muy parecidas entre si conforme va cambiando τ , sin embargo las figuras de las simulaciones resultantes para las oscilaciones sí van cambiando cualitativamente cada vez que se cambia τ . De esta manera es posible ver la evolución del sistema conforme el periodo de perturbación va cambiando, así como la manera en que aparecen y desaparecen gradualmente los acoplamientos justo cuando el valor de τ llega al punto crítico de cambio detallado en el diagrama de bifurcaciones.

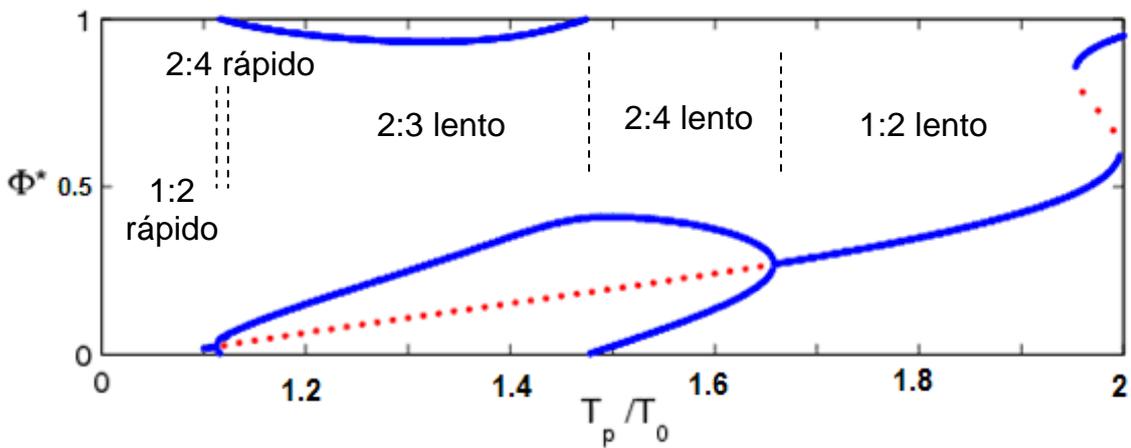


Fig. IV.16. Diagrama de bifurcaciones, para $\tau \geq 1$. Es idéntico al de figura 4.21, sin embargo los acoplamientos cambian según dicta la *proposición 1* del capítulo 3.

Para fines prácticos la secuencia completa de las figuras correspondientes a las oscilaciones (teóricas y experimentales) se han dispuesto en dos animaciones adjuntas, con el fin de que el lector pueda verificar de una manera fácil y dinámica como es que el sistema cambia teóricamente y experimentalmente al variar el periodo entre perturbaciones.

| <i>Periodo entre Perturbaciones. En términos de T_0.</i> | <i>Acoplamiento (perts : respts)</i> | |
|---|--------------------------------------|----------------|
| 0.0575 a 0.07 | 2:1 | rápidos |
| 0.075 a 0.1325 | 1:1 | |
| 0.135 a 0.145 | 2:2 | |
| 0.1475 a 0.48 | 2:1 | lentos |
| 0.485 a 0.675 | 2:2 | |
| 0.7 a 1.055 | 1:1 | |
| 1.0575 a 1.07 | 2:3 | rápidos |
| 1.0725 a 1.1325 | 1:2 | |
| 1.135 a 1.145 | 2:4 | |
| 1.1475 a 1.48 | 2:3 | lentos |
| 1.485 a 1.675 | 2:4 | |
| 1.7 a 2 | 1:2 | |

TABLA. I. Acoplamientos encontrados teóricamente al variar el periodo de perturbación τ .

IV.2 Resultados Experimentales y comparación con las predicciones teóricas.

A continuación se mostrarán los resultados obtenidos, al perturbar al Oscilador Salino, siguiendo el protocolo de perturbaciones periódicas descrito en el capítulo III, el cual consistió en aplicar trenes de 40 perturbaciones periódicas aproximadamente, esperando un tiempo T_p entre ellas. Para poder analizar los resultados obtenidos, se normalizará a T_p nuevamente en términos de T_0 que dura en promedio unos 36.5 segundos. Para comodidad del lector la comparación completa entre experimentos y predicciones teóricas se encuentra en el *Apéndice A*.

Los experimentos se realizaron variando el periodo de perturbación, iniciando en $T_p=0.15T_0$ y aumentando el valor de éste en cada experimento, en una magnitud de

$\Delta T_p = 0.05$ para valores periodos cortos y de $\Delta T_p = 0.1$ para valores largos, hasta llegar a $T_p = 2T_0$.

Al realizar los experimentos las figuras de las oscilaciones van cambiando cada vez que se cambia T_p . De esta manera es posible ver la evolución del comportamiento del sistema conforme va cambiando el periodo de perturbación, así como la manera en que aparecen y desaparecen gradualmente los acoplamientos para valores críticos de T_p . Hay acoplamientos bien establecidos para el caso de $T_p = 0.15T_0$, el cual corresponde a un *1:1 rápido*, y asimismo para $T_p = 0.2T_0$, en donde hay un *2:2 rápido*. Lo anterior se puede notar en las Figuras IV.17 y IV.18.

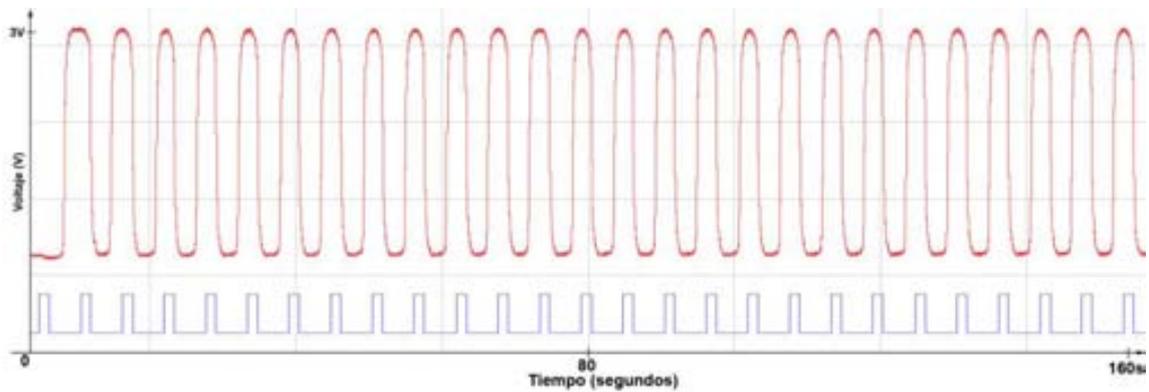


Fig. IV.17. Resultado experimental correspondiente a perturbar al Oscilador Salino con un periodo $T_p = 0.15T_0$. Se alcanza un acoplamiento *1:1 rápido*.

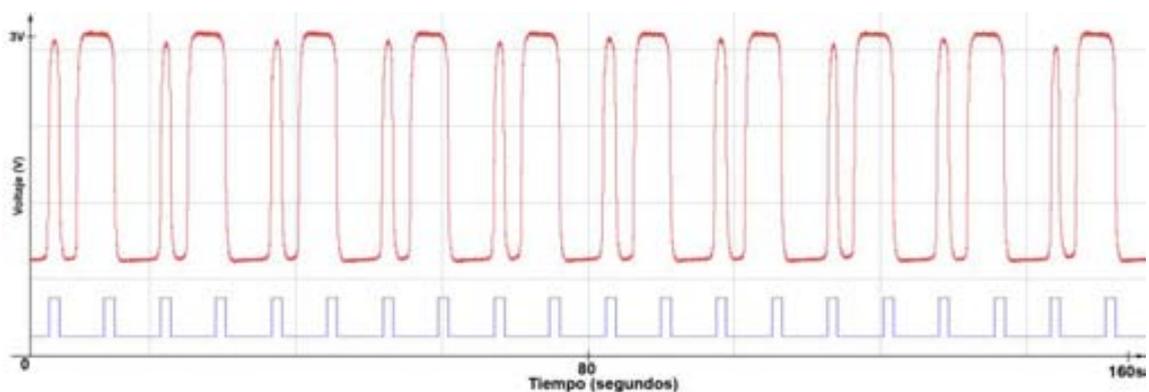


Fig. IV.18. Acoplamiento experimental *2:2 rápido* correspondiente a $T_p = 0.2T_0$.

Ahora bien, cuando $0.25 T_0 \leq T_p \leq 0.45T_0$, se puede notar que el oscilador presenta un acoplamiento $2:1$, el cual gradualmente comienza a desaparecer conforme T_p va aumentando hasta que da paso al siguiente acoplamiento, el cual finalmente queda bien establecido cuando $T_p = 0.45T_0$.

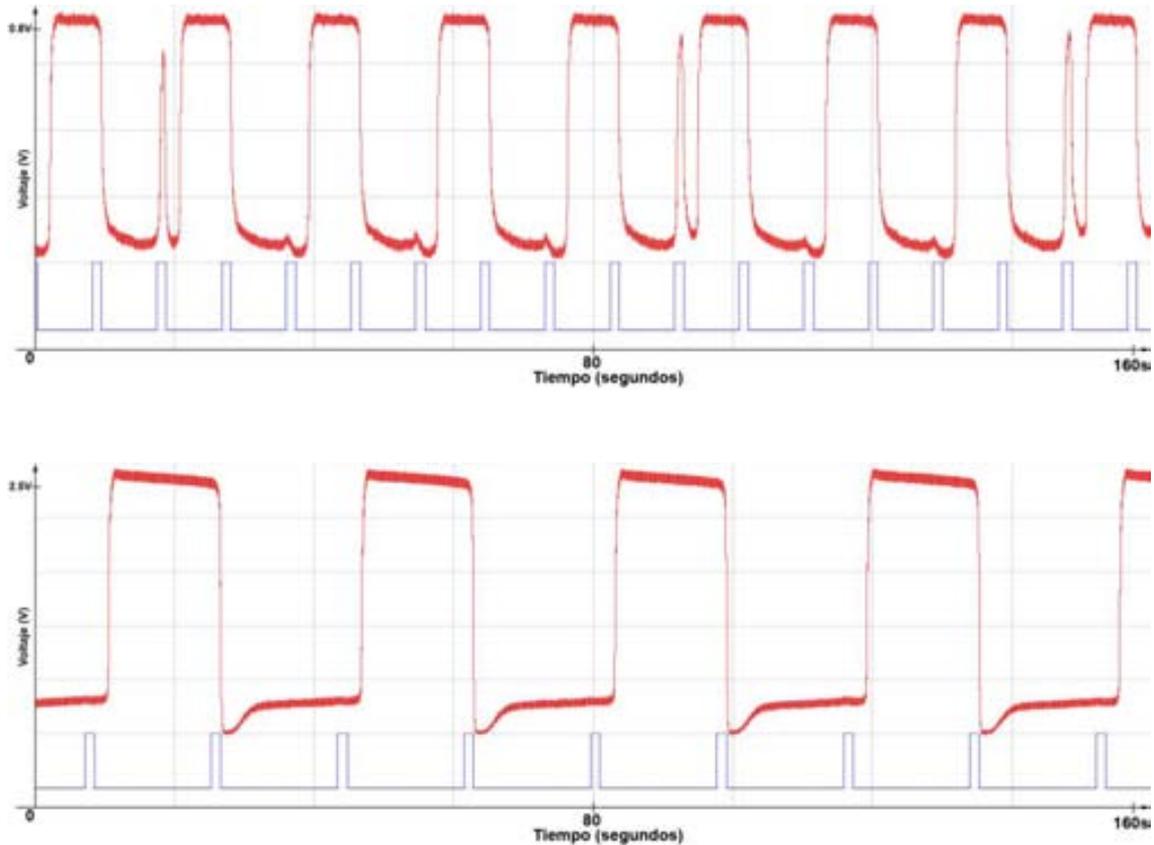


Fig. IV.19. Acoplamiento experimental $2:1$ lento. Arriba: $T_p = 0.25T_0$, apenas comienza a darse el acoplamiento y aún mantiene rasgos del anterior. Abajo $T_p = 0.45T_0$, el acoplamiento ya se encuentra bien establecido. Nótese la diferencia en la duración de las oscilaciones provocada por el cambio en T_p .

Asimismo, cuando $0.5 T_0 \leq T_p \leq 0.6T_0$, el oscilador presenta un acoplamiento $2:2$ lento, el cual observándolo cuidadosamente es aún muy parecido al $2:1$ anterior con la salvedad de que aparece una oscilación rápida adicional cuando $T_p = 0.5T_0$ (el cual aún es cercano al T_p anterior), ambas oscilaciones van creciendo en duración conforme el periodo entre perturbaciones va aumentando, hasta que poco a poco pareciera haber una respuesta por cada perturbación ($T_p = 0.6T_0$), por lo que se puede decir que esta apareciendo un nuevo acoplamiento.

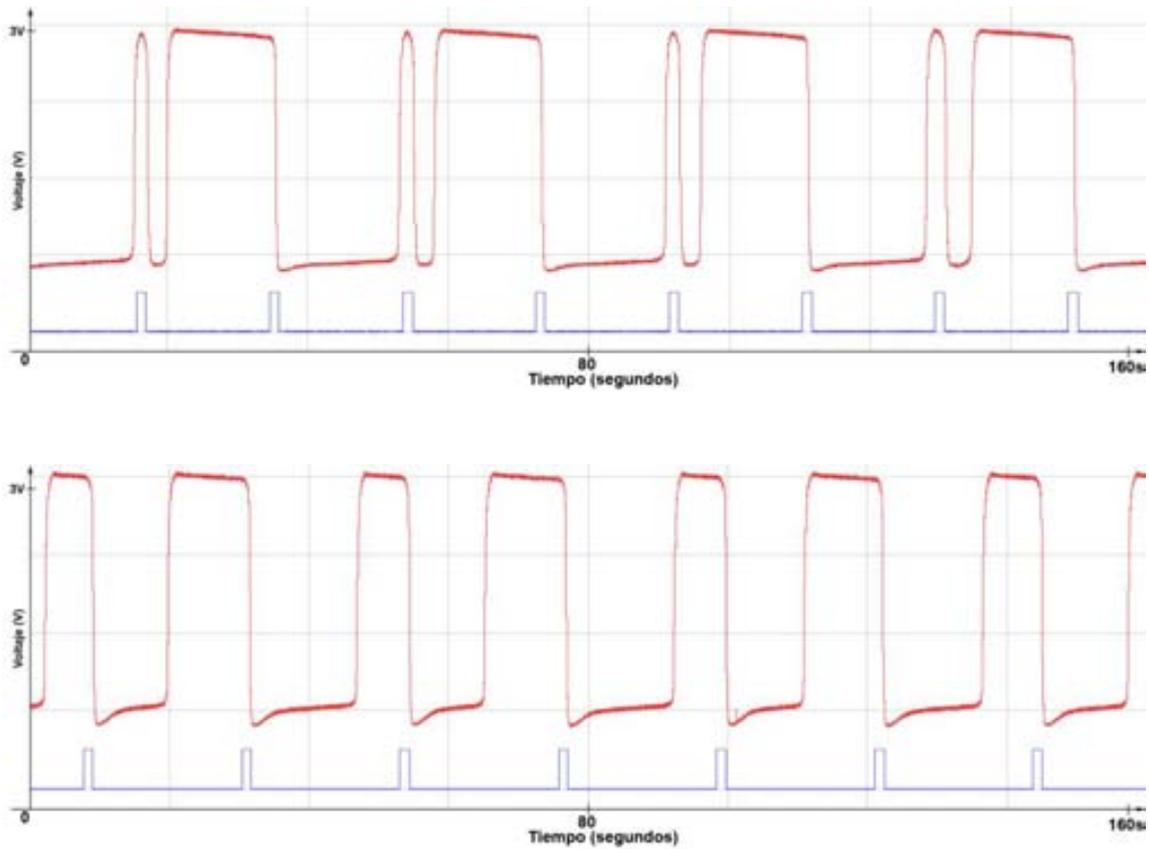


Fig. IV.20. Acoplamiento experimental 2:2 *lento*. Arriba: $T_p = 0.5T_0$, aparece una oscilación rápida (izquierda) respecto del acoplamiento anterior. Abajo $T_p = 0.6T_0$ la oscilación rápida gradualmente va aumentando su duración dando paso a un nuevo acoplamiento.

Cuando $0.65T_0 \leq T_p \leq 1.1T_0$ que es una zona amplia de variación de T_p , se presenta un acoplamiento *1:1 lento* el cual ya se esperaba dado el comportamiento del acoplamiento anterior, y el cual se mantiene muy estable durante toda la zona de variación de T_p .

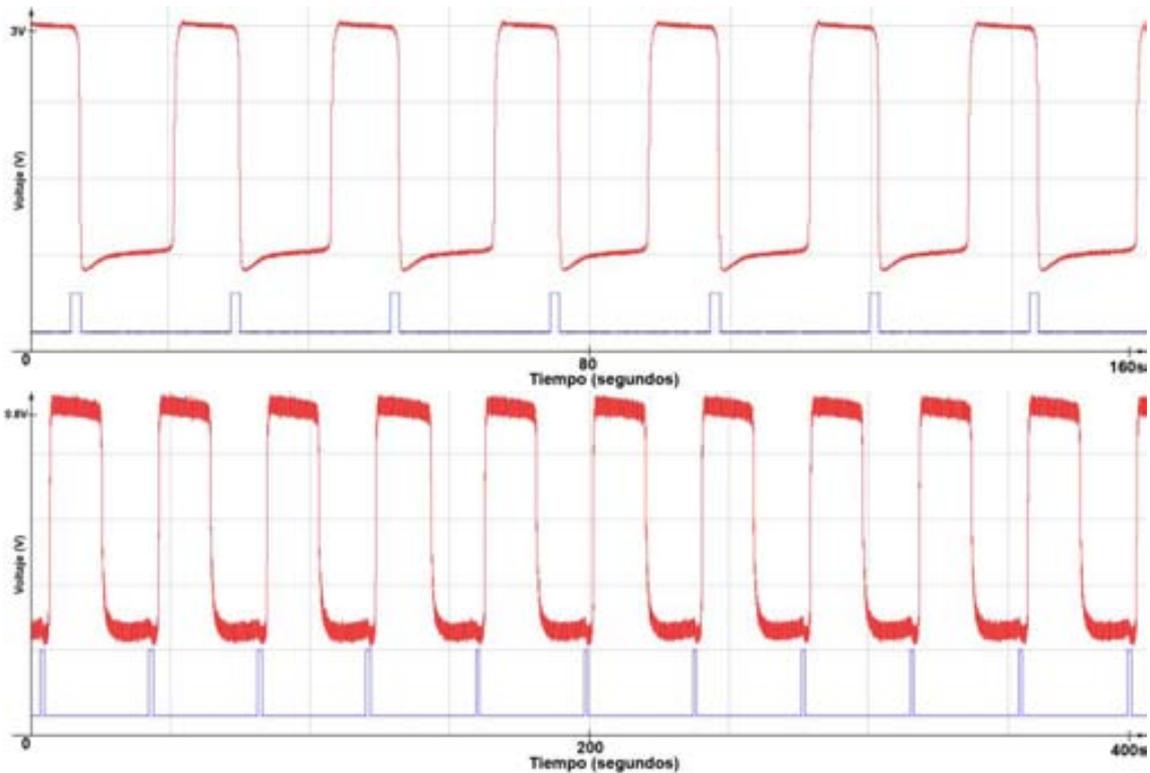


Fig. IV.21. Acoplamiento experimental 1:1 lento. Arriba: $T_p = 0.65T_0$, las oscilaciones del acoplamiento anterior igualan su duración apareciendo el nuevo acoplamiento. Abajo $T_p = 1.1T_0$, las respuestas han aumentado su duración pero el acoplamiento sigue presentándose muy estable. **NOTESE EL CAMBIO DE ESCALA REFLEJADO EN LA SEPARACION ENTRE PERTURBACIONES.**

Ahora bien, si $T_p = 0.94T_0$ y se comienza a perturbar en condiciones iniciales tales que ($\phi_0 \leq 0.56$), el sistema se estabilizará produciendo una respuesta por cada perturbación, la cual caerá en $\phi^* = 0.56$, pero a su vez si se comienza a perturbar en condiciones iniciales tales que ($0.56 < \phi_0 \leq 0.8$), entonces el oscilador se estabilizará de igual manera provocando el mismo acoplamiento (1:1 lento), pero esta vez cada perturbación caerá en una fase diferente ($\phi^* = 0.8$). De esta manera se encuentra una biestabilidad experimental, dentro de esta zona de variación de T_p puesto que para dos condiciones iniciales diferentes el sistema acaba teniendo un comportamiento distinto¹.

¹ Nótese que este resultado ya se había predicho teóricamente en la discusión anterior.

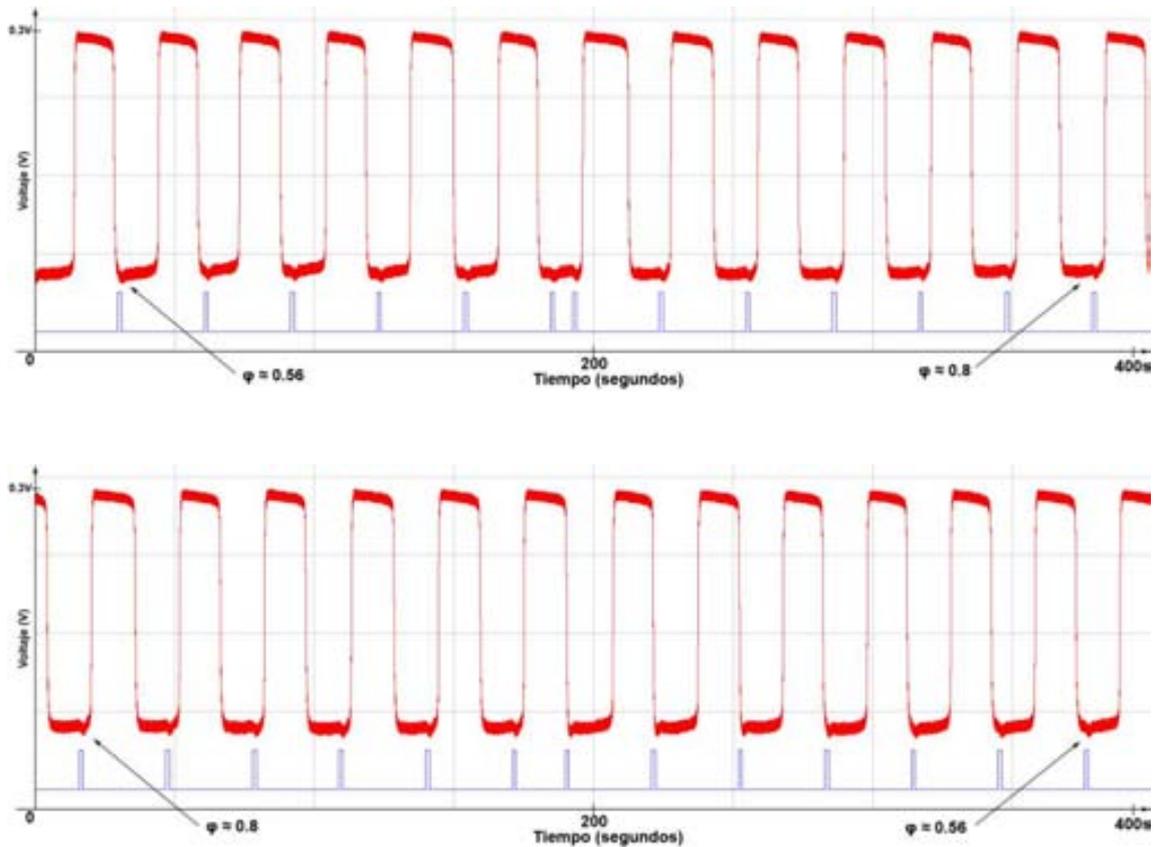


Fig. IV.22. Biestabilidad 1:1. $T_p = 0.94T_0$, Arriba: el acoplamiento se encuentra bien establecido y las perturbaciones caen en la fase $\phi^* = 0.56$, tras una perturbación extra el sistema vuelve a estabilizarse en el mismo acoplamiento pero ahora las fases caen en $\phi^* = 0.8$. Abajo: el mismo fenómeno pero de manera inversa.

De esta manera se ha pasado a la zona la que $T_p > T_0$. Así bien cuando se observa que el acoplamiento 1:1 lento deja de ser estable al presentar de una manera irregular (aunque ciertamente periódica), algunas oscilaciones rápidas adicionales a la que se producía por cada perturbación. Incluso podría decirse que existe un cierto acoplamiento 2:3 inestable para $T_p = 1.125T_0$, que parecería más una zona de transición entre el acoplamiento 1:1 lento y el siguiente. De esta manera, variando el periodo entre perturbaciones, cuando éste llega al valor de $T_p = 1.15T_0$, estas oscilaciones adicionales llegan a ser totalmente periódicas produciendo un acoplamiento 1:2 rápido.

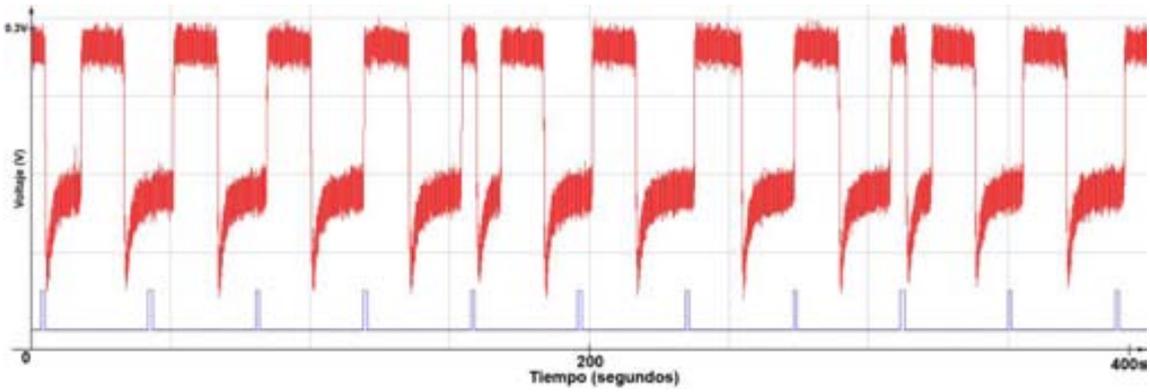


Fig. IV.23. Acoplamiento experimental 2:3 *irregular*. $T_p = 1.125T_0$, Nótese como pareciera haber un comportamiento periódico aunque el acoplamiento anterior (1:1 *lento*) sigue siendo predominante.

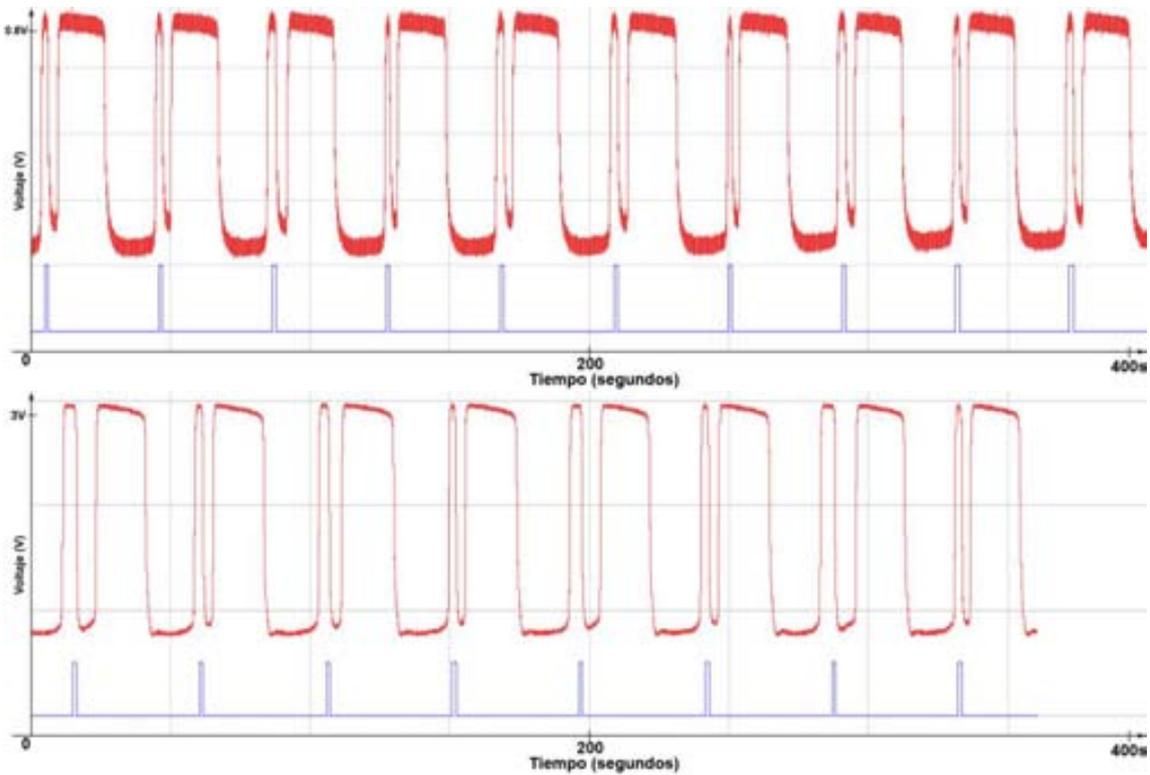


Fig. IV.24. Acoplamiento experimental 1:2 *rapido*. Arriba: $T_p = 1.15T_0$, hay una oscilación rápida y una lenta por cada perturbación. Abajo $T_p = 1.2T_0$, las respuestas cortas (oscilaciones rápidas) comienzan a variar su tamaño entre sí, dando paso a un nuevo acoplamiento.

Cuando el periodo entre perturbaciones alcanza el valor $T_p = 1.25T_0$ se puede notar tomando en cuenta el ritmo detectado anteriormente (una oscilación corta y una larga

por cada perturbación), que las oscilaciones cortas cambian de tal manera que una se vuelve mucho más corta y la otra más larga, respecto de las anteriores. Este comportamiento se presenta de una forma bastante estable, estableciendo por consecuencia nuevo un acoplamiento 2:4 *rápido*.

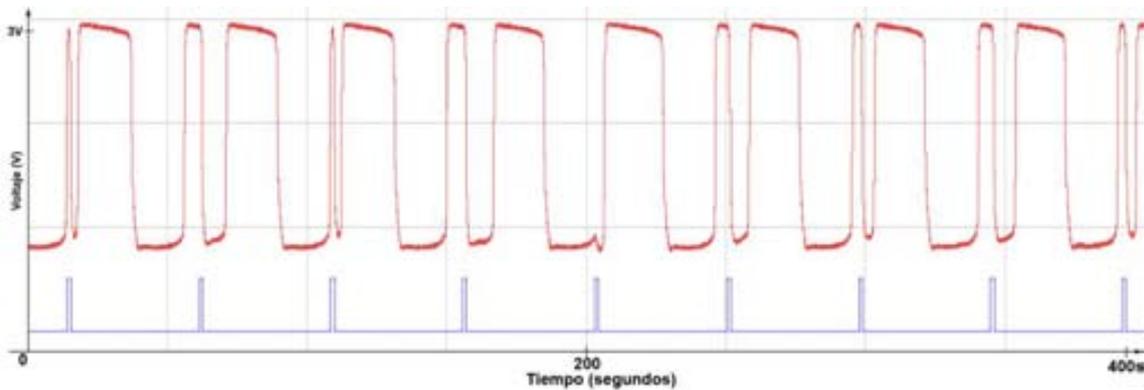


Fig. IV.25. Establecimiento del acoplamiento experimental 2:4 *rápido*. $T_p = 1.25T_0$.

Si posteriormente se aumenta aún más el periodo entre perturbaciones en el rango $1.3T_0 \leq T_p \leq 1.4T_0$, ocurre un nuevo comportamiento estable, en el cual la oscilación corta que había aumentado de duración, lo aumenta aún más, a diferencia de la otra que prácticamente se colapsa con la oscilación larga que estaba a su lado, apareciendo así el acoplamiento 2:3 *lento* para $T_p = 1.3T_0$. Sin embargo al aumentar T_p , se nota que de una manera irregular aparecen algunas oscilaciones extras en el acoplamiento dejando de ser estable, por lo que se puede decir que para $T_p = 1.4T_0$ se está en una zona de transición hacia un nuevo acoplamiento.

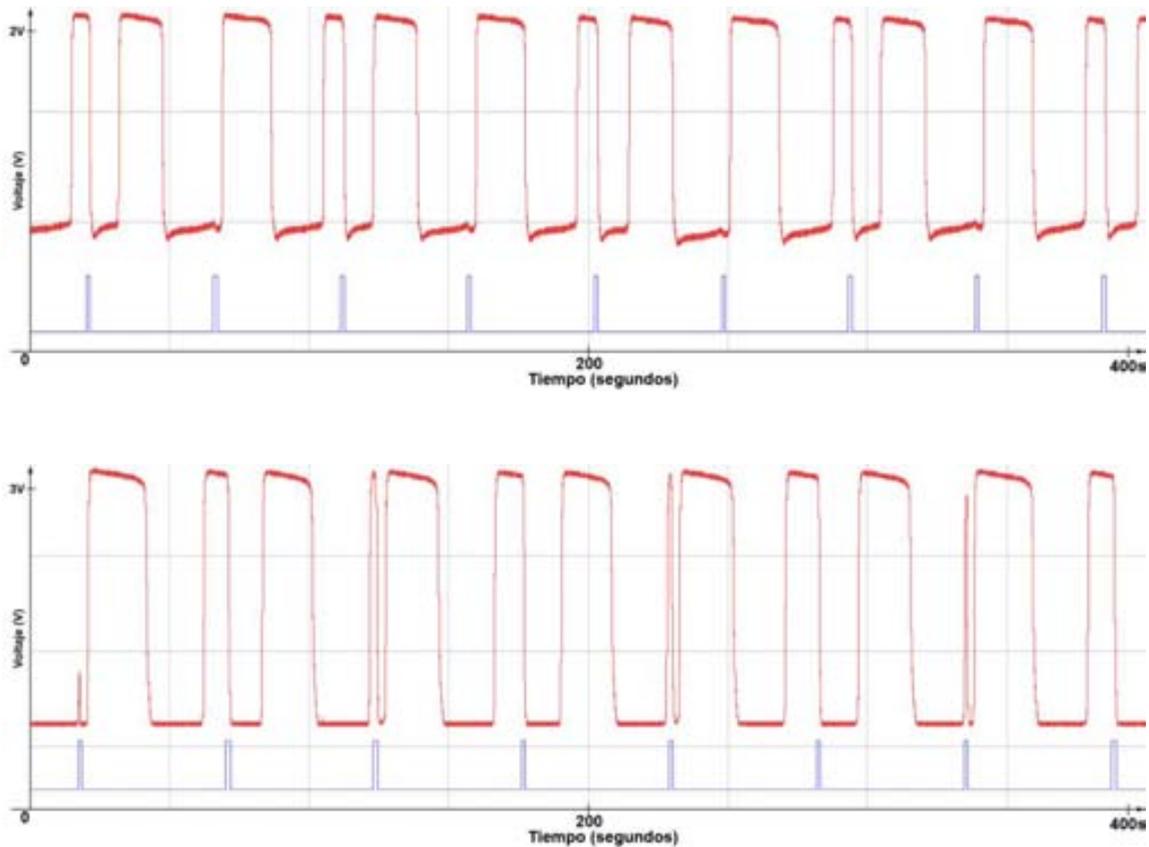


Fig. IV.26. Arriba: Acoplamiento experimental 2:3 *lento* bien establecido $T_p = 1.3T_0$. Abajo: $T_p = 1.4T_0$ se muestra la transición del mismo acoplamiento hacia el siguiente.

Cuando el periodo entre perturbaciones corresponde a $1.45T_0 \leq T_p \leq 1.7T_0$ nuevamente se encuentra un acoplamiento estable en una zona amplia de variación de T_p , el cual es muy parecido al 2:4 *rápido* encontrado anteriormente, sin embargo es de naturaleza distinta, para $T_p = 1.45T_0$ se estabiliza en algo muy parecido a la zona de transición reportada para el acoplamiento inmediatamente anterior, sin embargo conforme T_p va aumentando se presenta una oscilación muy corta seguida tres oscilaciones largas ($T_p = 1.5T_0$) por lo que existe un nuevo acoplamiento 2:4 *lento*. Este comportamiento continúa evolucionado de manera que la primera oscilación corta va ampliando su periodo conforme T_p aumenta ($T_p = 1.6T_0$), por lo que se cae en una nueva zona de transición hacia otro acoplamiento.

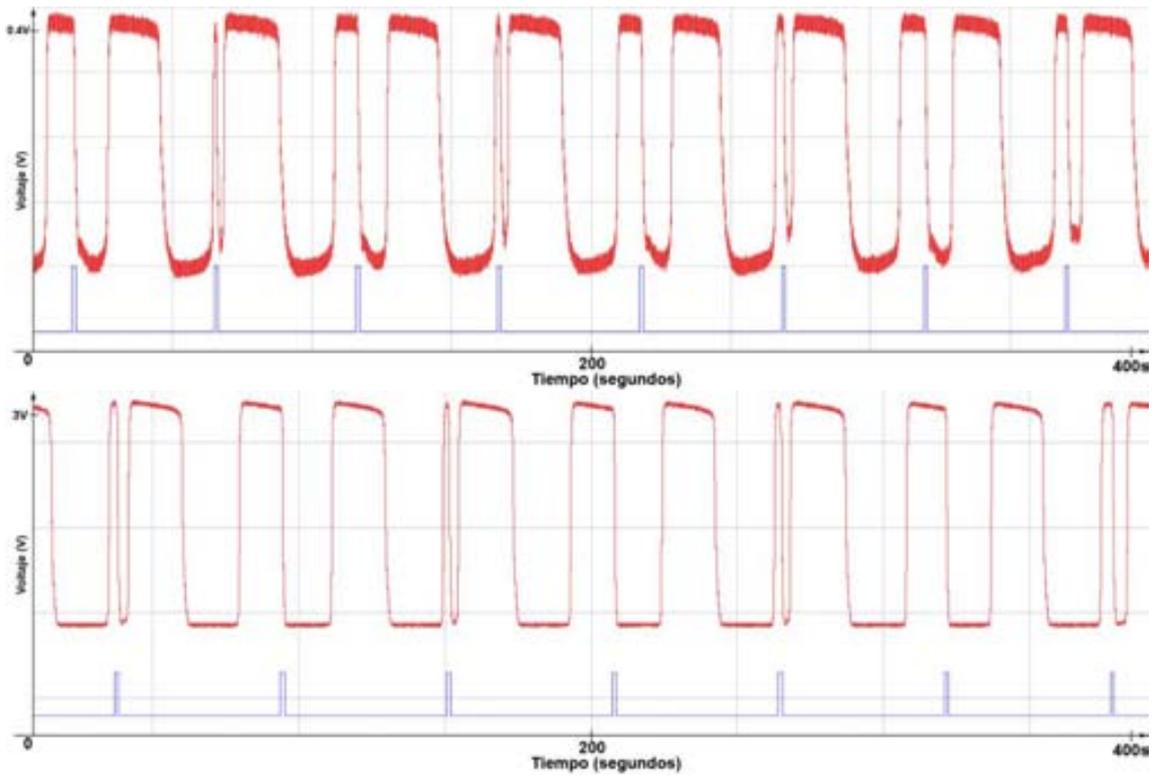


Fig. IV.27. Arriba: $T_p = 1.45T_0$, transición del acoplamiento anterior (2:3 *lento*) hacia uno nuevo. Arriba: acoplamiento experimental 2:4 *lento* bien establecido.

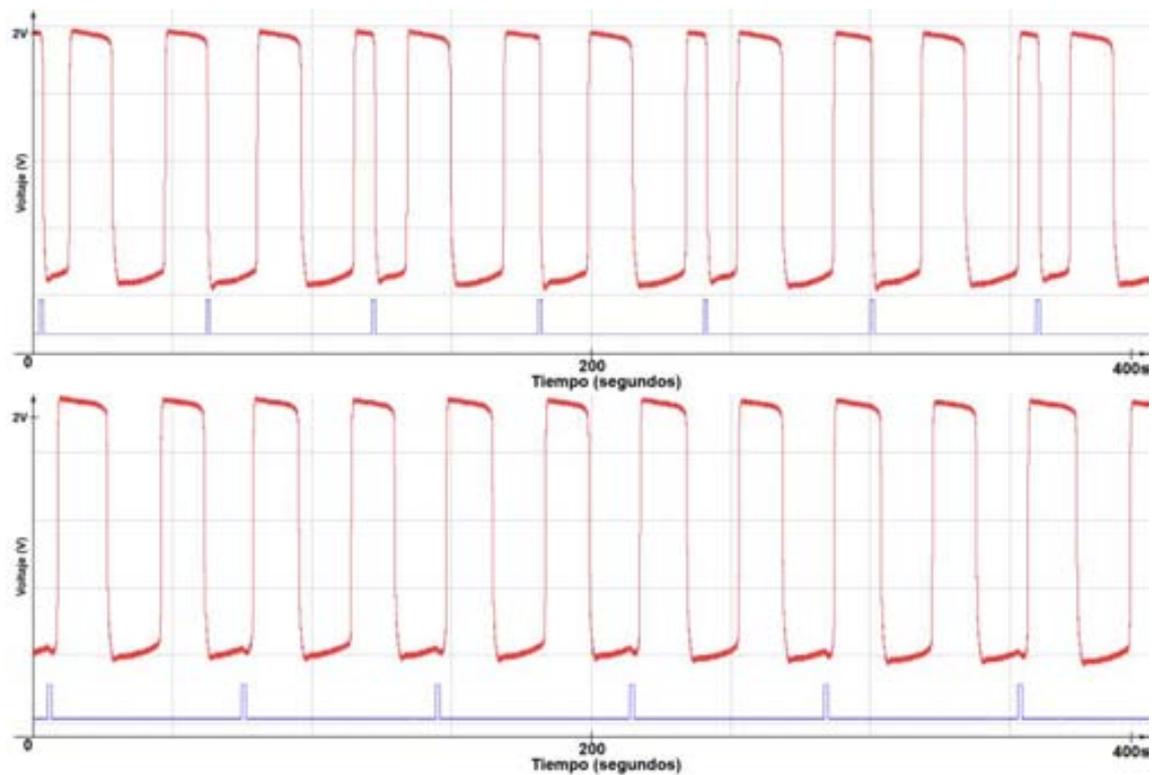


Fig. IV.28. Dos momentos del acoplamiento 1:2 *lento* Arriba: $T_p = 1.85T_0$, aún conserva rasgos del acoplamiento anterior. Abajo: $T_p = 1.6T_0$ establecimiento claro del acoplamiento.

De esta manera cuando $1.75T_0 \leq T_p \leq 2T_0$, hay otra zona amplia de variación de T_p en la cual el sistema abandona gradualmente la zona de transición descrita anteriormente ($T_p = 1.85T_0$) para finalmente estabilizarse en un acoplamiento *1:2 lento* ($T_p = 2T_0$), en el cual hay dos oscilaciones largas por cada perturbación.

Así pues, tal y como se vio en el caso teórico, se muestra una secuencia de acoplamientos que aparecen al variar el periodo de perturbación T_p , el resumen de esta secuencia se puede ver en la tabla II.

| <i>Periodo entre Perturbaciones. En términos de T_0.</i> | <i>Acoplamiento (perts : respts)</i> | |
|---|--------------------------------------|----------------|
| 0.15 | 1:1 | rápidos |
| 0.2 | 2:2 | |
| 0.25 a 0.45 | 2:1 | lentos |
| 0.5 a 0.6 | 2:2 | |
| 0.65 a 1.1 | 1:1 | |
| 1.125 | 2:3 (irregular) | rápidos |
| 1.15 | 1:2 | |
| 1.25 | 2:4 | |
| 1.3 a 1.4 | 2:3 | lentos |
| 1.45 a 1.7 | 2:4 | |
| 1.75 a 2 | 1:2 | |

TABLA II Acoplamientos experimentales encontrados al variar el periodo entre perturbaciones T_p .

Esta secuencia es comparable totalmente con la encontrada teóricamente, y se puede apreciar claramente en el *Apéndice A*. Sin embargo, como ya se ha mencionado, se puede ver que las fronteras entre las zonas de acoplamientos experimentales son franjas en donde no se estabiliza un acoplamiento, sino más bien hay zonas de transición entre valores bien determinados de T_p .

| <i>Periodo entre Perturbaciones. En términos de T_0.</i> | | <i>Acoplamiento (perts : respts)</i> | |
|---|------------------------------|--------------------------------------|---------|
| <i>TEORICO</i> | <i>EXPERIMENTAL</i> | | |
| 0.0575 a 0.07 | Fuera del rango experimental | 2:1 | rápidos |
| 0.075 a 0.1325 | 0.15 | 1:1 | |
| 0.135 a 0.145 | 0.2 | 2:2 | |
| 0.1475 a 0.48 | 0.25 a 0.45 | 2:1 | lentos |
| 0.485 a 0.675 | 0.5 a 0.6 | 2:2 | |
| 0.7 a 1.055 | 0.65 a 1.1 | 1:1 | |
| 1.0575 a 1.07 | 1.125 | 2:3 (irregular) | rápidos |
| 1.0725 a 1.1325 | 1.15 | 1:2 | |
| 1.135 a 1.145 | 1.25 | 2:4 | |
| 1.1475 a 1.48 | 1.3 a 1.4 | 2:3 | lentos |
| 1.485 a 1.675 | 1.45 a 1.7 | 2:4 | |
| 1.7 a 2 | 1.75 a 2 | 1:2 | |

TABLA. III. Comparación entre las secuencias de acoplamientos teóricos y experimentales resultantes de variar el periodo de perturbación.

De la comparación en la tabla III se puede notar que no existe experimentalmente un acoplamiento $2:1$ rápido pues la velocidad a la que habría que dar las perturbaciones para lograr un periodo de perturbación ($T_p < 0.15T_0$), rebasa la capacidad que tiene la bomba de meter y sacar agua, por lo que fue imposible realizar un experimento que predijera el resultado teórico. De la misma manera el acoplamiento $2:3$ rápido es demasiado irregular y poco visto en los experimentos por lo que podría no ser un acoplamiento bien establecido experimentalmente.

CAPITULO V

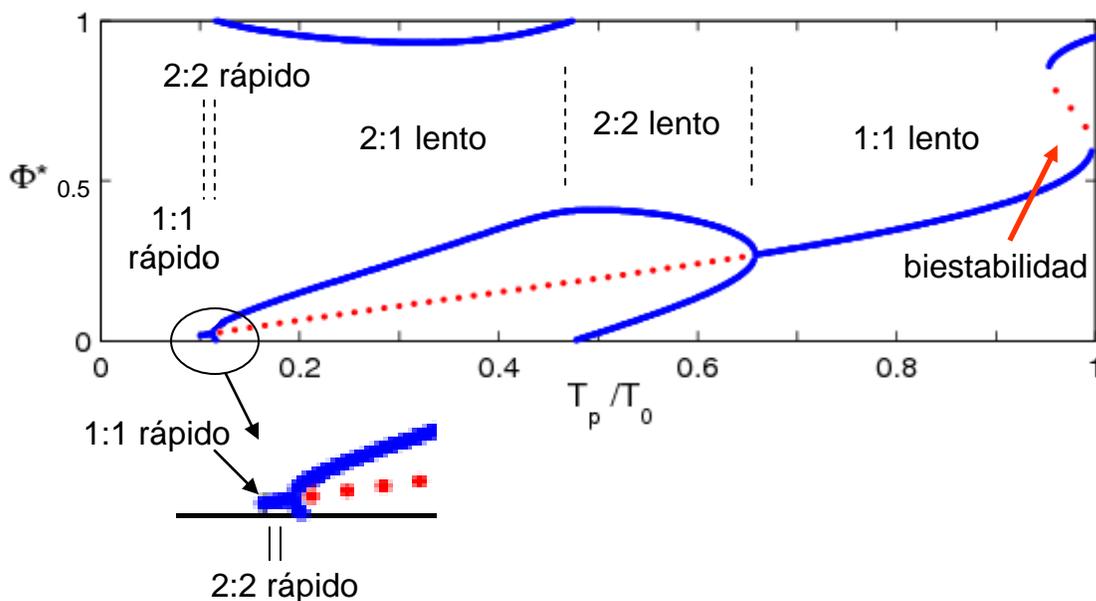
Conclusiones.

El Oscilador Salino, descubierto por Seelye Martin en 1970 [2] ha pasado de ser una simple curiosidad hidrodinámica, a un problema ampliamente estudiado pues ha demostrado ser un sistema que muestra varias características de un oscilador no lineal con ciclo límite atractor robusto, tales como un periodo constante de oscilación, regreso de la oscilación a su periodo natural tras perturbaciones y aún más interesante, acoplamientos con otro(s) oscilador(es) salino(s).

El Oscilador Salino podría considerarse en una primera instancia como un problema de Dinámica de Fluidos, sin embargo el tratar de predecir acoplamientos con esta herramienta conlleva una cierta complicación matemática. Sin embargo dado que se ha mostrado que cumple con las características de un oscilador con ciclo limite atractor, tratarlo desde el punto de vista de la dinámica no lineal parece ser un camino mucho más eficiente y directo. En este trabajo nos propusimos estudiar los acoplamientos cuando el oscilador no puede afectar al sistema que lo perturba, siguiendo fuertemente el trabajo por publicarse en Phys. Rev. E por Hortensia González y coautores [1].

Es relativamente sencillo observar experimentalmente, que al igual que algunos otros sistemas, el Oscilador cambia su periodo al recibir una estimulación aislada en alguna fase. Dicho cambio depende justamente de en qué fase de la oscilación se produzca la perturbación como puede verse en las figuras III.5 y III.6 del capítulo III. Frente a la complicación de construir analíticamente una función de cambio de fases, fue posible aproximar una Curva de Transición de Fases experimental (PTC), a partir de un protocolo experimental de perturbaciones aisladas.

De esta manera usando las ideas planteadas en la *Teoría del Reinicio* [17-21] fue posible iterar gráfica y analíticamente la PTC, teniendo como resultado la predicción de acoplamientos del Oscilador Salino a trenes de perturbaciones periódicas. El análisis cuidadoso de la PTC para periodos de perturbación cercanos pero menores a uno permite descubrir un rango de periodos para los cuales existen varios puntos fijos y por ende biestabilidad. Con toda esta información fue posible construir un diagrama de bifurcaciones (figura IV.15 del capítulo IV), en el cual se muestran ritmos estables entre el oscilador y las perturbaciones.



Detalle del diagrama de bifurcaciones, se muestran las zonas en donde se encuentran los acoplamientos nótese la zona de biestabilidad cuando τ es cercano a 0.9. Además de la pequeña zona de 2:2 rápido cuando τ es cercano a 0.1.

Todas estas predicciones fueron investigadas experimentalmente, encontrándose compatibilidad en todas estas. Cabe señalar que la biestabilidad 1:1 no había sido reportada experimentalmente con anterioridad en la literatura. Dicha compatibilidad puede observarse detalladamente en el capítulo IV y esta resumida en la tabla III del capítulo IV, que

reproducimos en este capítulo, además la secuencia de figuras del Apéndice A también lo muestra gráficamente.

| <i>Periodo entre Perturbaciones. En términos de T_0.</i> | | <i>Acoplamiento (perts : respts)</i> | |
|---|------------------------------|--------------------------------------|---------|
| <i>TEORICO</i> | <i>EXPERIMENTAL</i> | | |
| 0.0575 a 0.07 | Fuera del rango experimental | 2:1 | rápidos |
| 0.075 a 0.1325 | 0.15 | 1:1 | |
| 0.135 a 0.145 | 0.2 | 2:2 | |
| 0.1475 a 0.48 | 0.25 a 0.45 | 2:1 | lentos |
| 0.485 a 0.675 | 0.5 a 0.6 | 2:2 | |
| 0.7 a 1.055 | 0.65 a 1.1 | 1:1 | |
| 1.0575 a 1.07 | 1.125 | 2:3 (irregular) | rápidos |
| 1.0725 a 1.1325 | 1.15 | 1:2 | |
| 1.135 a 1.145 | 1.25 | 2:4 | |
| 1.1475 a 1.48 | 1.3 a 1.4 | 2:3 | lentos |
| 1.485 a 1.675 | 1.45 a 1.7 | 2:4 | |
| 1.7 a 2 | 1.75 a 2 | 1:2 | |

Comparación entre las secuencias de acoplamientos teóricos y experimentales resultantes de variar el periodo de perturbación.

Aun así es de señalarse que las predicciones no son totalmente exactas con los hallazgos experimentales (como muestra la tabla), pues rangos de periodos de perturbación no coinciden completamente para los casos teórico y experimental. Sin embargo la secuencia de aparición de acoplamientos al momento de variar τ para el caso teórico o T_p para el caso experimental es prácticamente idéntica. Existen un par de ritmos que no se ajustan tan bien. El primero es un ritmo 2:3 (en verde) que existe en la secuencia teórica, pero en la secuencia experimental aparece de una forma irregular. Así mismo el primer ritmo encontrado teóricamente (en amarillo) es imposible de comprobar experimentalmente pues la bomba con la que se perturba el Oscilador Salino no es tan rápida como para alcanzar un periodo de perturbación tan corto.

También puede notarse que la secuencia experimental presenta zonas transitorias entre acoplamientos en donde no está establecido uno claramente para ciertos valor de T_p , a diferencia de la secuencia teórica donde siempre hay un acoplamiento claro para cada valor del periodo entre perturbaciones τ .

Las incompatibilidades entre las predicciones teóricas y los hechos experimentales tienen cierto sentido si se considera que en el caso de la Teoría del Reinicio el regreso al ciclo limite en el oscilador es instantáneo, a diferencia del caso experimental en donde el regreso del Oscilador Salino a su periodo de oscilación no lo es.

Por último se puede decir de manera general que la *Teoría del Reinicio* predice muy bien los acoplamientos a perturbaciones periódicas del Oscilador Salino, puesto que este cumple con las condiciones oscilador con ciclo limite atractor así como con las hipótesis en las que la misma teoría fue construida.

Apéndice A

Comparación teórico-experimental.

A continuación se muestra una serie de figuras donde se comparan las simulaciones de las oscilaciones obtenidas a partir de la iteración de la PTC, con las oscilaciones reales presentadas por el Oscilador Salino después de varios experimentos.

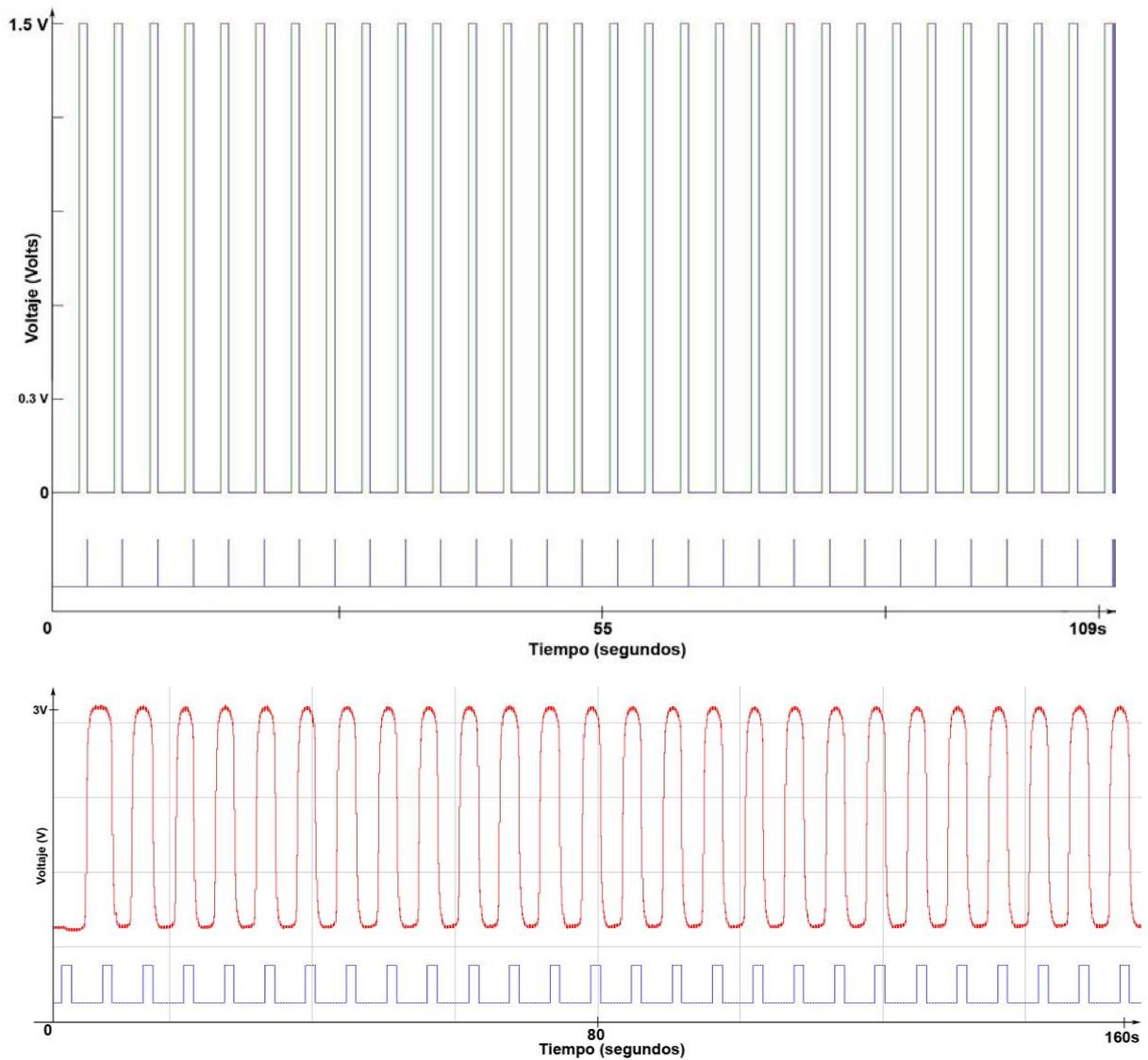


Fig. A.1. Acoplamiento 1:1 rápido. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 0.1$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 0.15T_0$.

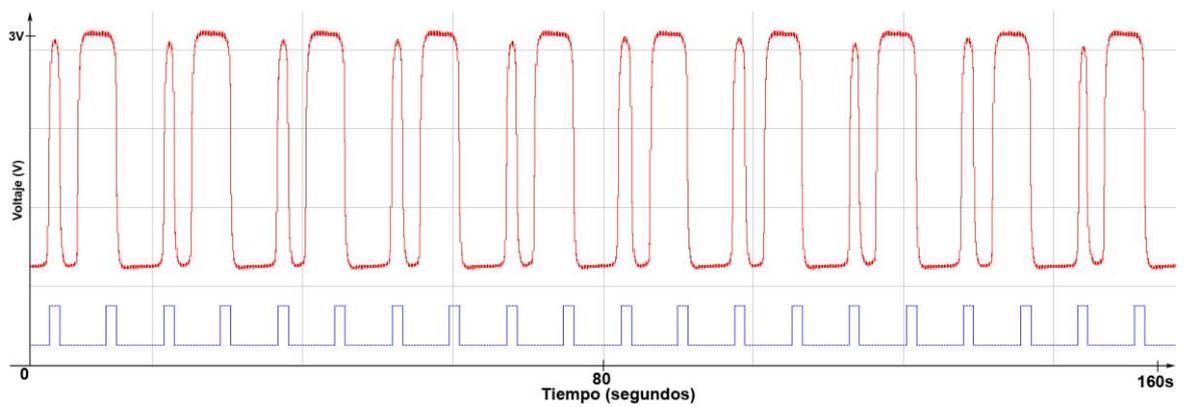
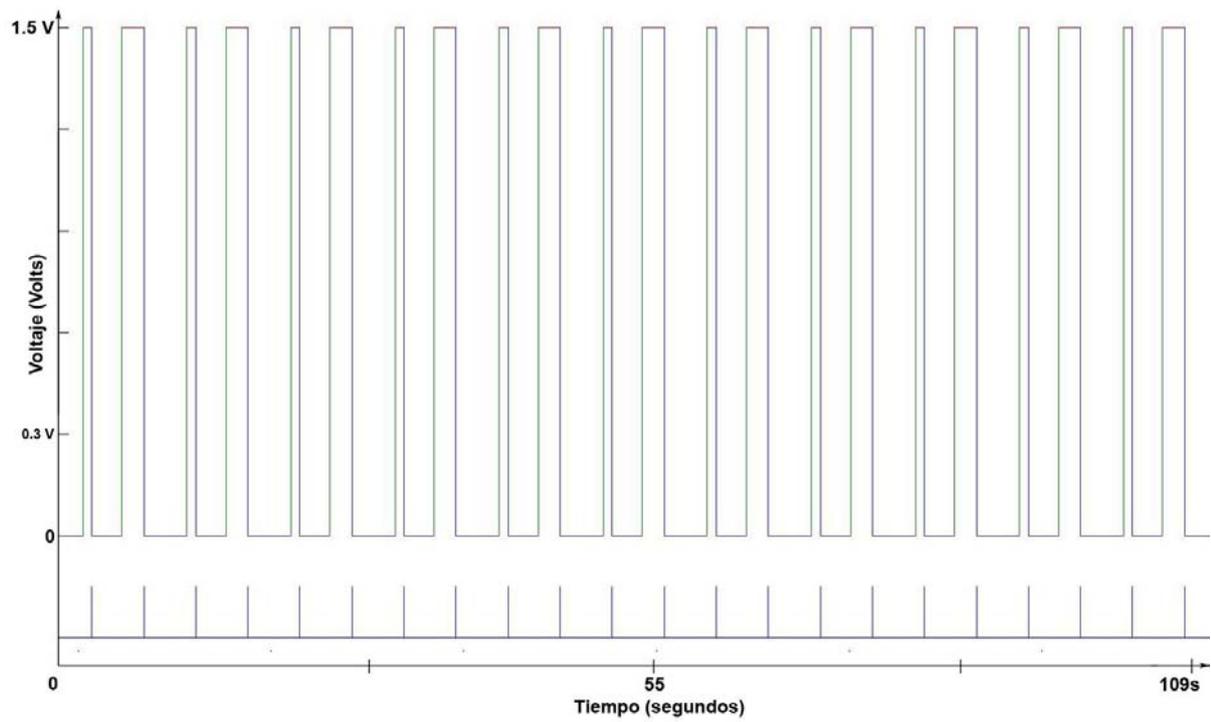


Fig. A.2. Acoplamiento 2:2 rápido. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 0.135$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 0.2T_0$.

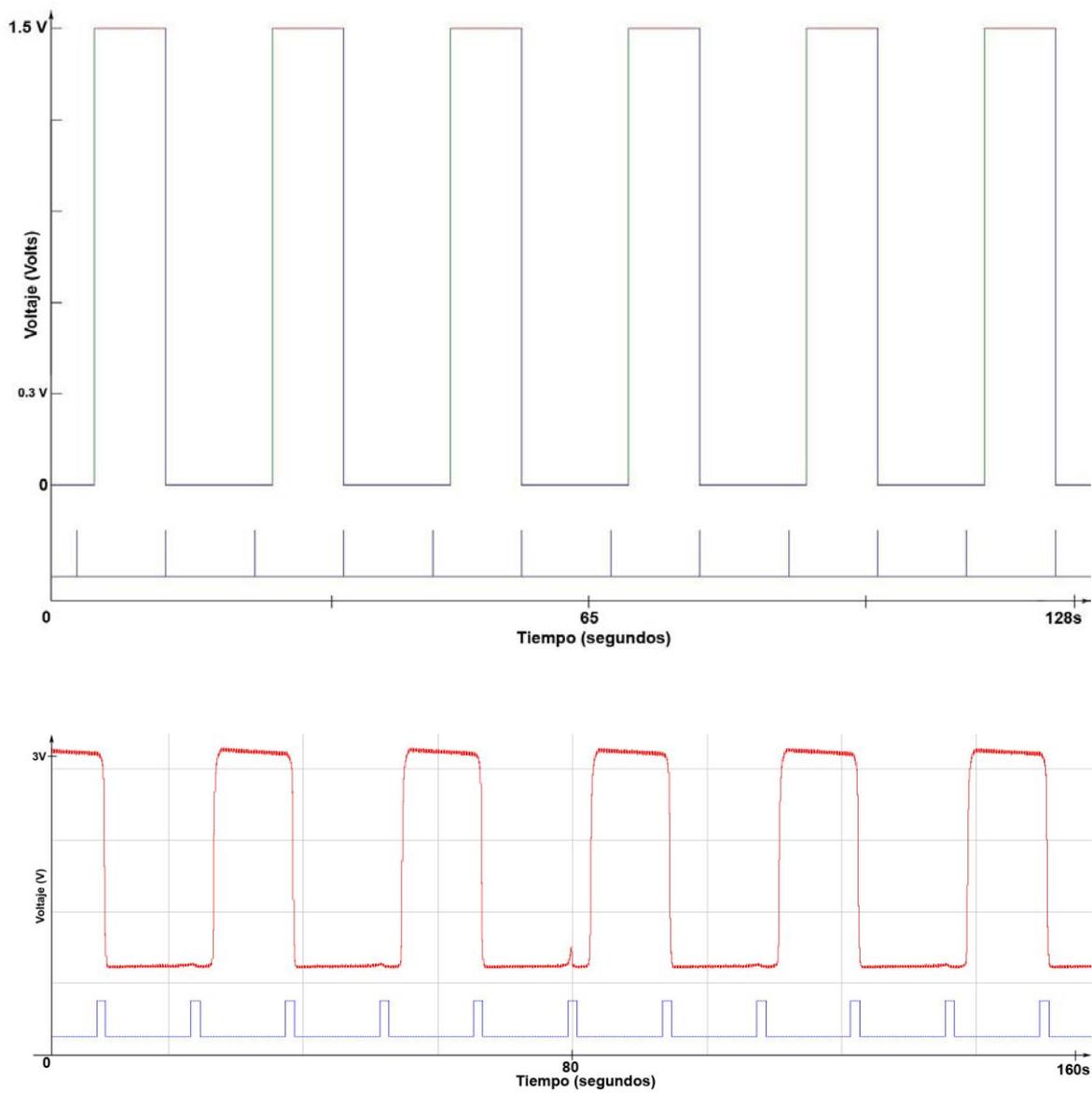


Fig. A.3. Acoplamiento 2:1 lento. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 0.3$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 0.375T_0$.

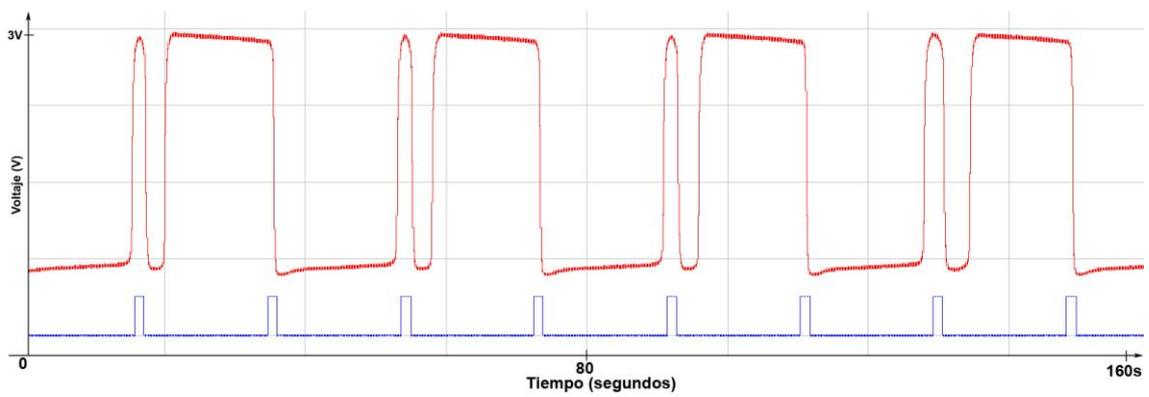
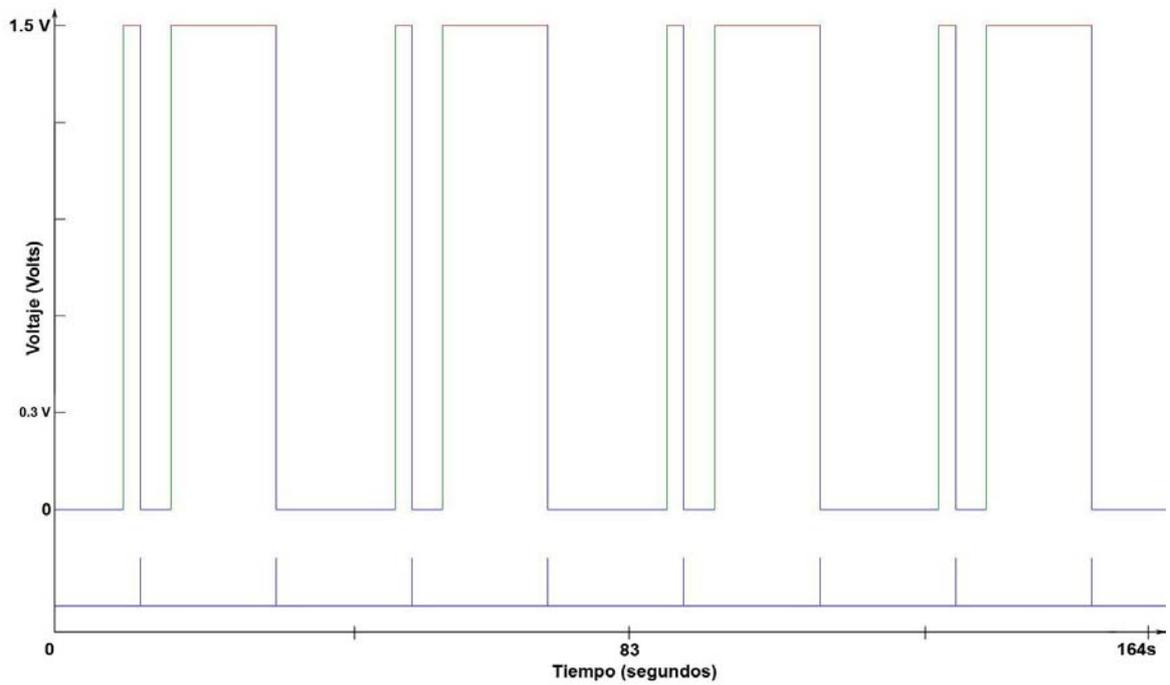


Fig. A.4. Acoplamiento 2:2 lento. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 0.55$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 0.5T_0$.

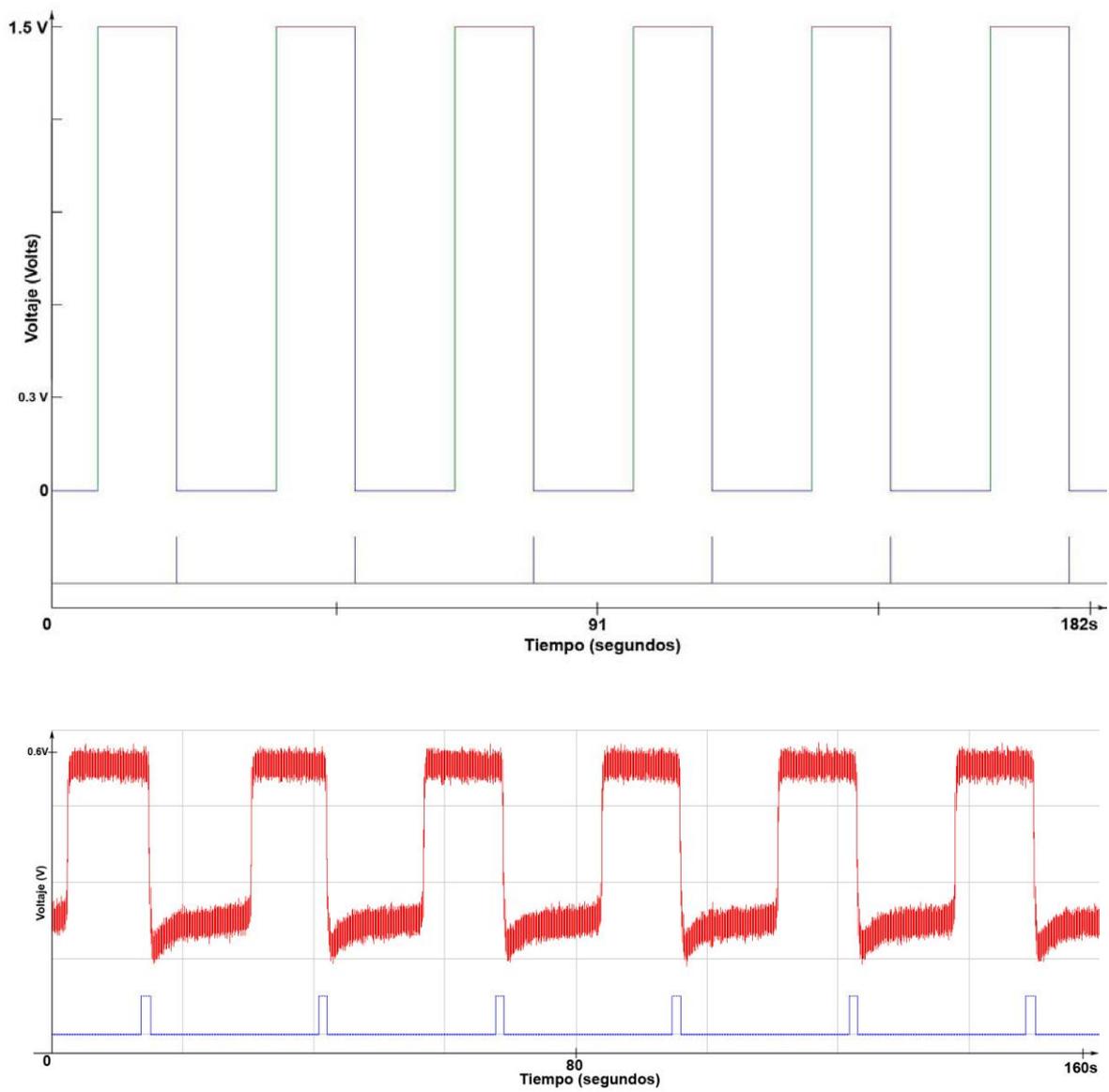


Fig. A.5. Acoplamiento 1:1 lento. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 0.85$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 0.8T_0$.

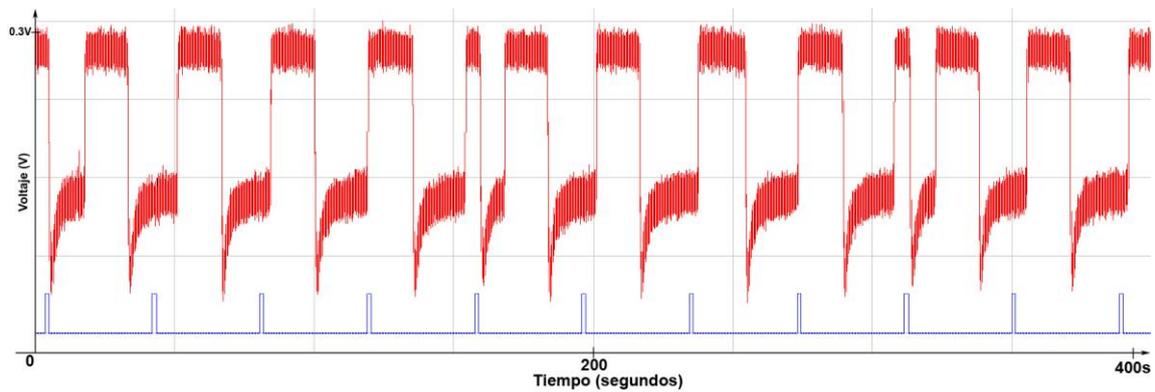
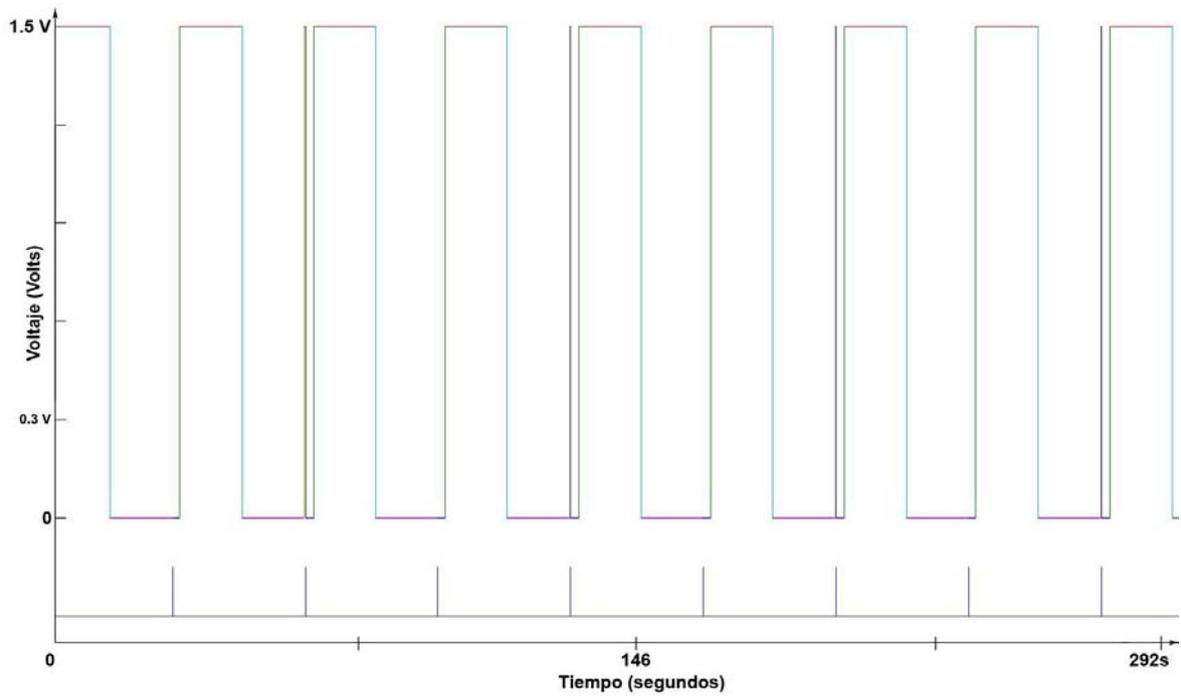


Fig. A.6. Acoplamiento 2:3 rápido. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 1.065$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 1.25T_0$.

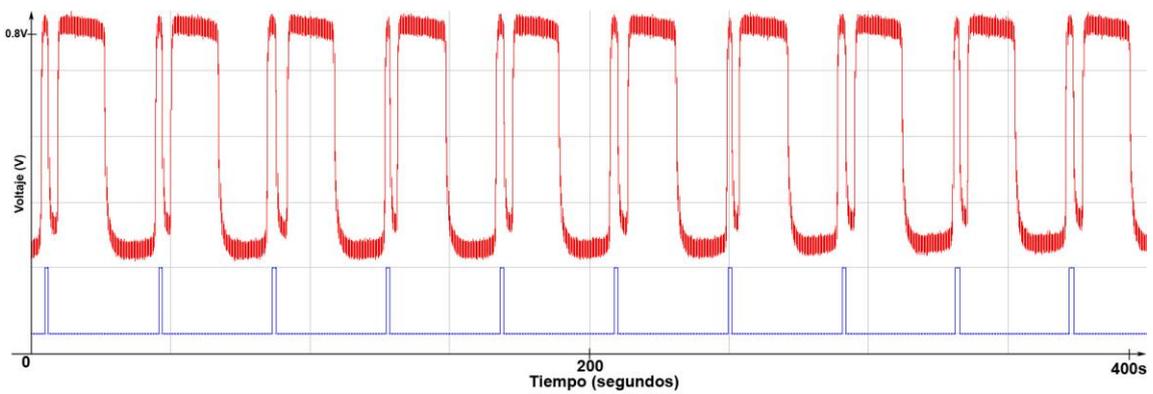
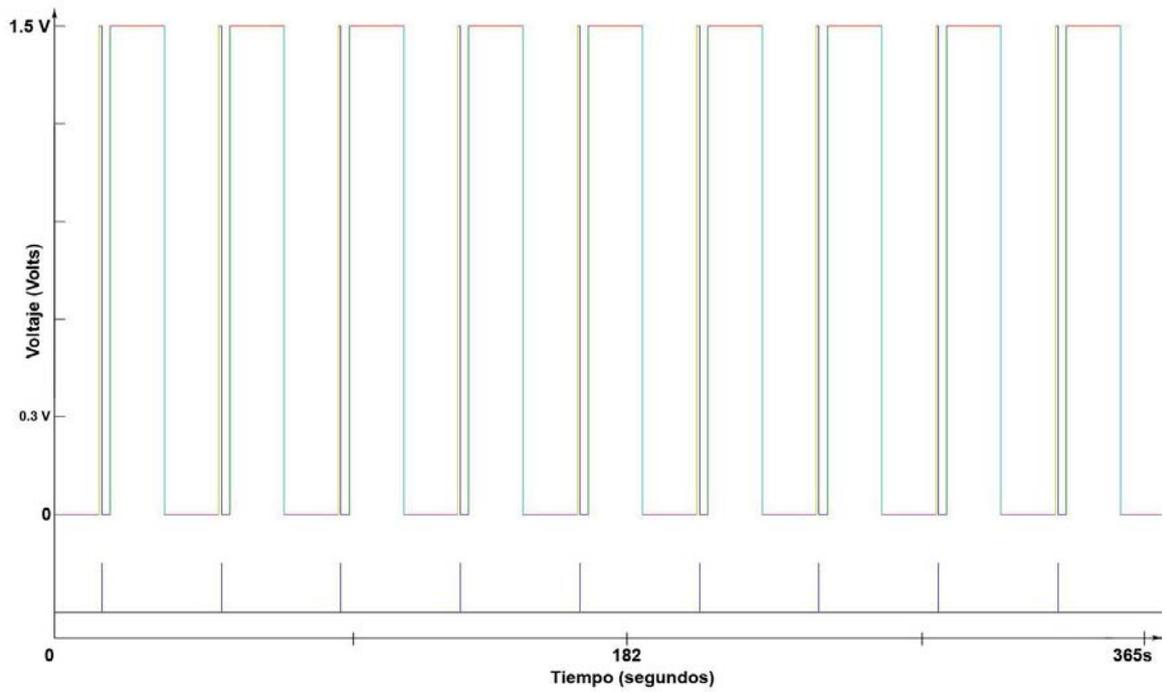


Fig. A.7. Acoplamiento 1:2 rápido. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 1.1$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 1.15T_0$.

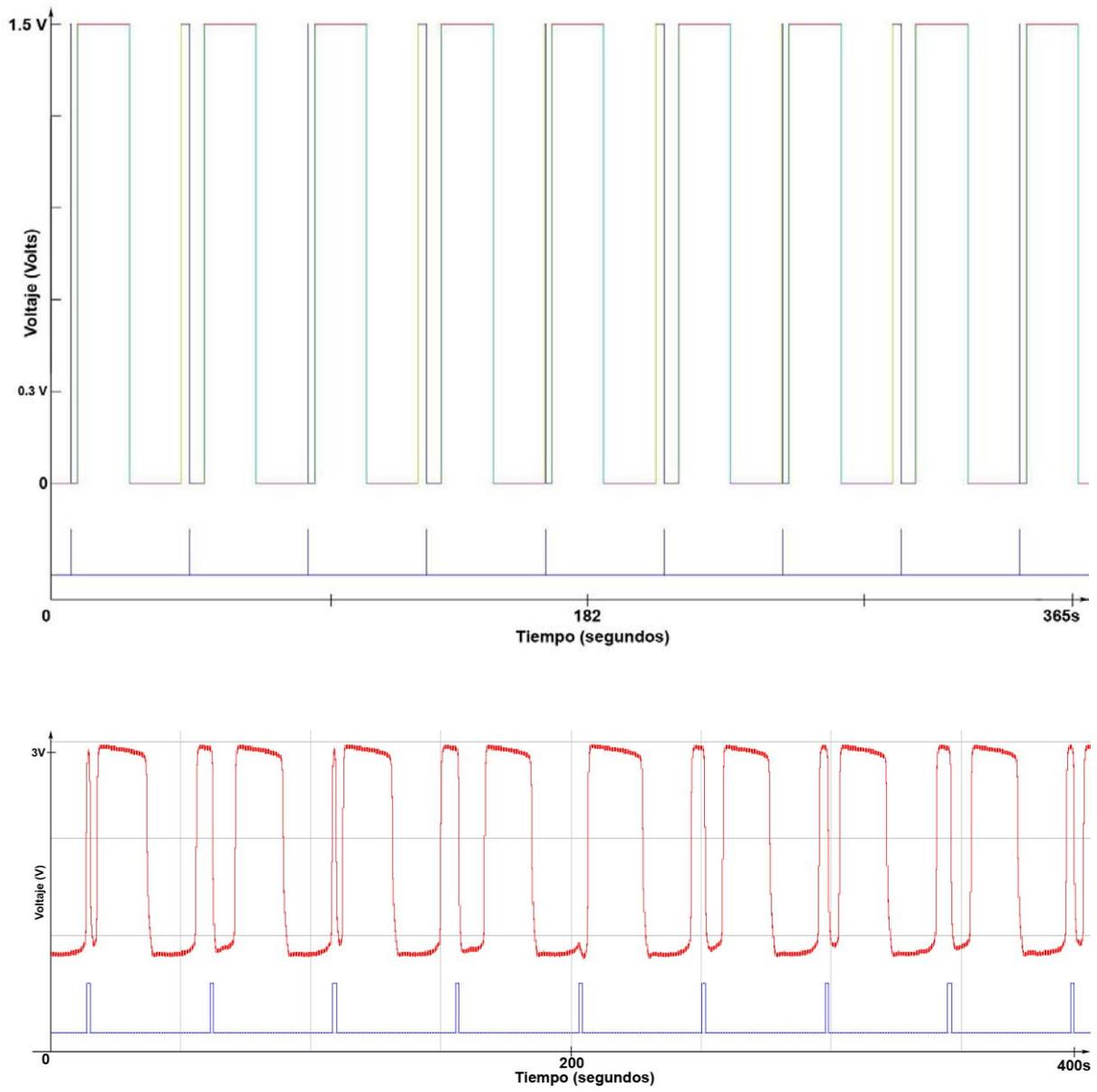


Fig. A.8. Acoplamiento 2:4 rápido. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 1.145$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 1.25T_0$.

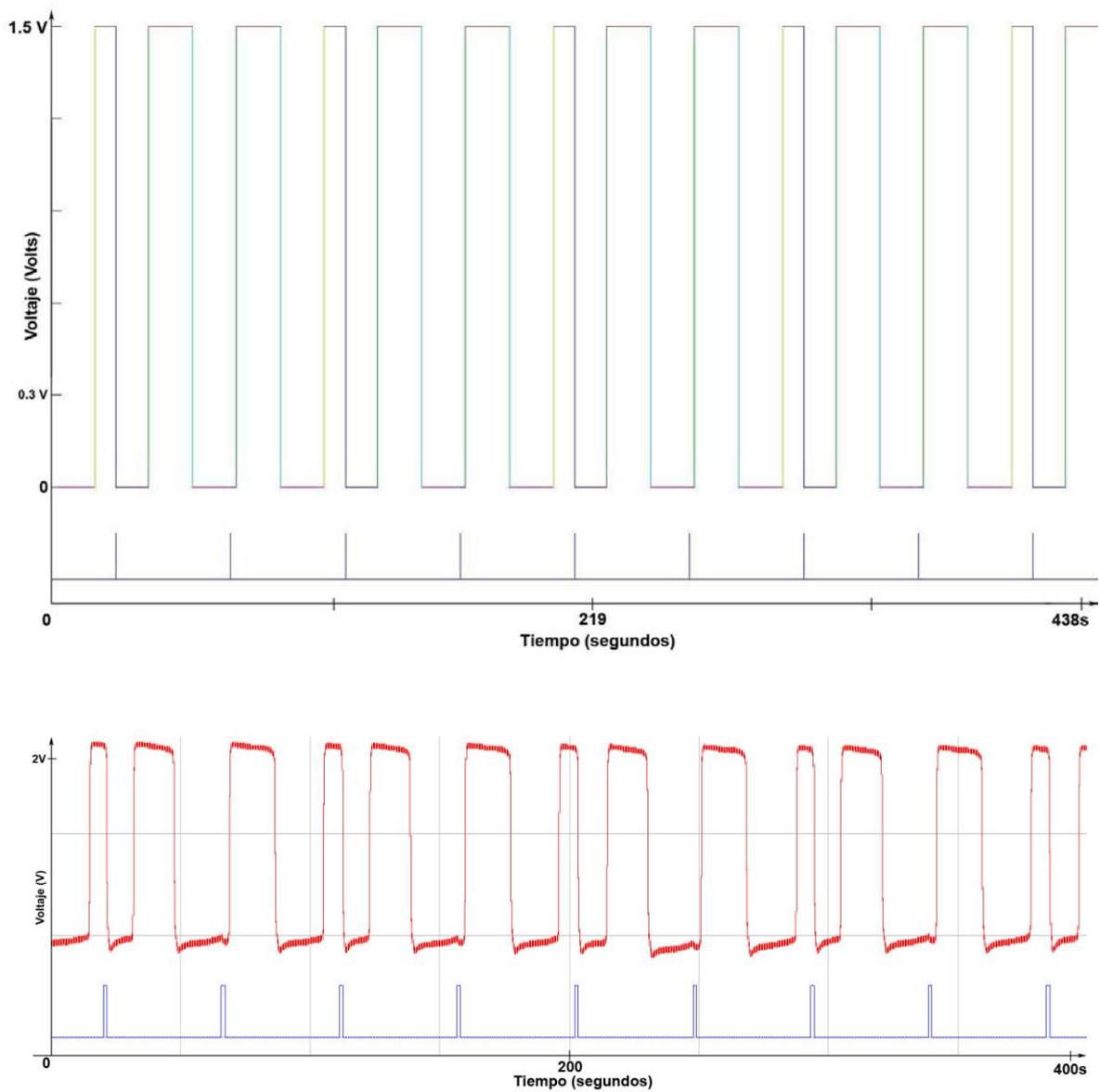


Fig. A.9. Acoplamiento 2:3 lento. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 1.3$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 1.3T_0$.

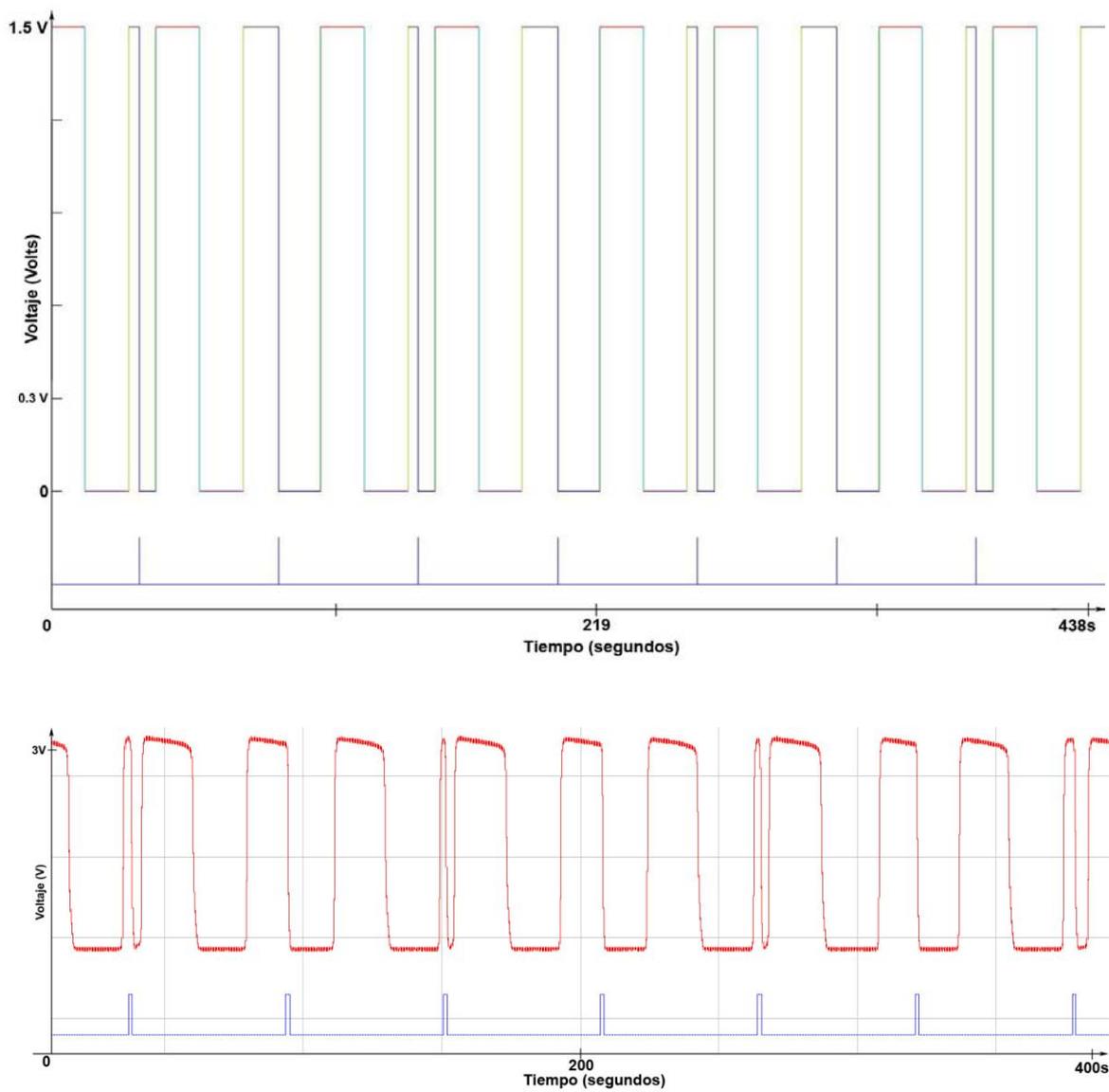


Fig. A.10. Acoplamiento 2:4 lento. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 1.6$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 1.5T_0$.

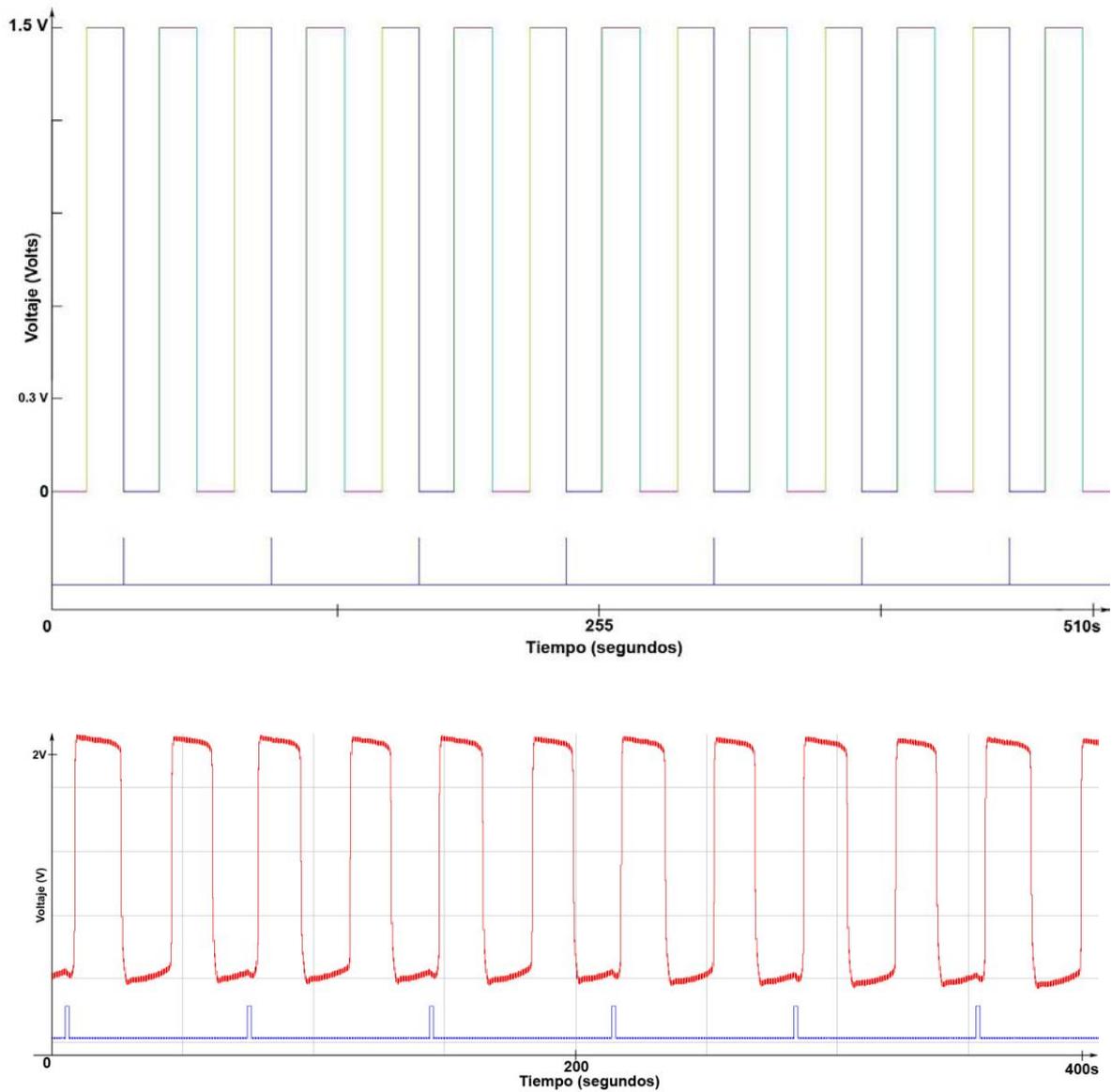


Fig. A.11. Acoplamiento 1:2 lento. Arriba: Simulación correspondiente a $\tau = 1.95$. Abajo: oscilación experimental para $T_p = 2T_0$.

REFERENCIAS.

- [1] Gonzalez H., Arce H., Guevara M. R. *Physics Rev. E*, Aceptado Folio: ER10528.
- [2] Martin S. *Geophys. Fluid Dynamics* 1970. **1**, 143-160
- [3] Yoshikawa K., Nakata S., Yamanaka M., Waki T. *J. Chem Educ.* 1989, **66**, 205-207.
- [4] Rincon N. E., Fajardo F. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 2006, **28**, 67-76.
- [5] Aoki Kenji. *Physica D* 2000, **147**, 187-203.
- [6] Okamura M. Yoshikawa K. *Physical Review E* 2000, **61**, 2445-2452.
- [7] Noyes Richard M. *J. Chem Educ.* 1989, **66**, 207-209.
- [8] Steinbock O., Lange A., Rehberg I. *Physical Review Letters* 1998, **81**, 798 - 801.
- [9] Alfredsson P.-H., Lagerstedt T. *Phys. Fluids* 1981, **24**, 10-14.
- [10] Miyakawa K., Yamada K. *Physica D* 1999, **127**, 177-186.
- [11] Miyakawa K., Yamada K. *Physica D* 2001, **151**, 217.
- [12] Yoshikawa K., Fukunaga K., Kawakami H., Waki T. *J. Chem Phys. Lett.* 1990, **174**, 203.
- [13] Yoshikawa K., Oyama M., Shoji M., Nakata S. *Am. J. Phys.* 1991, **59**, 137.
- [14] Nakata S., Miyata T., Ojima N., Yoshikawa K. *Physica D* 115 1998, 313.
- [15] Winfree A. T., *The Geometry of Biological Time (Springer-Verlag, New York, 1980).*
- [16] Walker J. *Sci. Am.* 1977. **237 (4)**, 142-150
- [17] Guevara Michel R., Glass Leon, *Journal of Mathematical Biology* 1982, **14**, 1-23.
- [18] Winfree, A. T. *Resetting biological clocks. Physics Today* 1975, **28**, 34-39.
- [20] Glass L. Makey M. C., *From Cloks to Chaos: The Rhythms of Life. (Princeton University Press, 1988).*
- [21] Glass Leon, *Resetting and Entraining Biological Rhythms*, Beuter et al, *Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine, (Springer 2003).*
- [22] Perkel, D. H., Schulman, J. H., Bullock, T. H., Moore, G. P., Segundo, J. P. *Pacemaker neurons: Effects of regularly spaced synaptic input. Science* 1964, **145**, 61-63.

- [23] Moe, G. K., Jalife, J., Mueller W. J., Moe, B. *A mathematical model of parasystole and its application to clinical arrhythmias. Circulation 1977, 56, 968-979.*
- [24] Pinsker, H. M. *Aplysia bursting neurons as endogenous oscillators. II. Synchronization and entrainment by pulsed inhibitory synaptic input. J. Neurophysiol 1977, 40, 544-556.*
- [25] Das A. K., Srivastava R. C., Sharwan Kumar. *J. Chem. Soc. Faraday Trans 1993, 89, 905-908.*
- [26] Upadhyay S., Das A. K., Agarwala V., Srivastava R. C., *Langmuir 1992, 8, 2567.*
- [27] Rastogi R.P., Srivastava R. C., Sharwan Kumar. *J. Colloid and Interface Science 2005, 283, 139.*
- [28] B. van der Pol, J. van der Mark, *Nature 1927,120, 363.*
- [29] Hoppenstead F. C. Peskin C. S., *Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sicienses. (Springer-Verlag New York, 2002) ,193- 200.*
- [30] Keener J., Sneyd J., *Mathematical Physiology. (Springer-Verlag New York, 1998), 401- 414.*