



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NUCLEOS EN DIGRAFICAS PRETRANSITIVAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMATICO

P R E S E N T A :

ALFREDO ALVAREZ UGALDE



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

TUTORA
HORTENSIA GALEANA SANCHEZ

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno Álvarez Ugalde Alfredo 57948286 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 09710125-9
2. Datos del tutor Dra. Hortensia Galeana Sánchez
3. Datos del sinodal 1 Dra. Rocío Rojas Monroy
4. Datos del sinodal 2 Dra. Berta Zavala Santana
5. Datos del sinodal 3 M. en C. Pietra Adriana Delgado Escalante
6. Datos del sinodal 4 Mat. Laura Pastrana Ramírez
7. Datos del trabajo escrito. Núcleos en digráficas pretransitivas 87 p 2008

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a toda mi familia, a mis padres por todo el esfuerzo que hicieron por darme una buena educación, a mi madre por su constancia y fuerza para sostener a sus hijos, a mi padre por su cariño y su lucha por darnos una vida mejor. A mis hermanas que me han acompañado desde que éramos niños.

A todos los compañeros de Radio Chapingo que me han apoyado y me han mostrado como hacer radio.

Especialmente a Irene Arias por su apoyo y a Concepción Pitalúa por enseñarnos tanto a tantos jóvenes que hemos aprendido a disfrutar más la vida.

A Mónica por todo lo que hemos compartido juntos en el tiempo que nos ha tocado vivir, por la paciencia y sus sonrisas.

A todos los amigos, compañeros que me han enseñado cosas valiosas y que esperamos construir más para vivir en un lugar mejor.

Construir día a día
sueños, colores, sabores.....
sí,
el tuang que nos acompaña,
una, dos, cien veces.

Dedicado a Ana María Álvarez

ÍNDICE.

0.- Introducción.....	I.
1.- Digráficas.....	1.
2.- Digráficas conexas y desconexas.....	8.
3.- Núcleos.....	23.
4.- Digráficas núcleo perfectas.....	34.
5.- Digráficas coloreadas.....	36.
6.- Núcleos en digráficas pretransitivas.....	41.
7.- M-Orientaciones.....	58.
7.1.- Núcleos, M-Orientaciones y orientaciones pretransitivas.....	60.
8.- Referencias.....	A

INTRODUCCIÓN.

Este trabajo versa acerca de Núcleos en digráficas.

Los núcleos en digráficas forman parte de la teoría de gráficas, un área de las matemáticas donde podemos encontrar diversas aplicaciones, lo mismo se usa la teoría de gráficas para obtener caminos óptimos para los trayectos de líneas de autobuses, como en teoría de redes en la ciencia de la computación hasta en las ciencias sociales con el surgimiento del concepto de red social.

En digráficas (gráficas dirigidas) existe un concepto relevante conocido como núcleo, introducido en 1944 por John von Neumann y Oskar Morgenstern como solución a un problema de teoría de juegos. Con este antecedente breve, entro en materia: Núcleos en digráficas.

Si D es una digráfica, un núcleo N de D es un subconjunto del conjunto de vértices de la digráfica D , $V(D)$, tal que no hay flechas entre cualesquiera dos vértices de N y si tomamos un vértice v fuera de N , entonces hay una flecha desde v hacia algún vértice en N . En la actualidad uno de los problemas que se estudian es el de establecer condiciones suficientes para que exista un núcleo en una digráfica, entre los trabajos realizados destacan los hechos por Richardson [8], Duchet y Meyniel [5], así como H. Galeana S. y V. Neumann L. [7].

En este trabajo se presentan algunos resultados sobre la existencia de núcleos en digráficas que contienen digráficas pretransitivas izquierdas o derechas y que no contengan trayectorias infinitas exteriores o interiores.

Se presenta también el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas. A continuación el esquema del trabajo presente:

En la sección inicial se muestran las definiciones básicas relacionadas con teoría de digráficas. La sección dos continúa con las definiciones, pero se introduce el concepto de conexidad y sus diferentes formas: digráfica conexa, digráfica unilateral, digráfica fuerte. De igual modo se presenta el concepto de condensación de una digráfica.

A lo largo de la tercera sección se presenta el concepto de núcleo donde se demuestra que en una digráfica simétrica, un conjunto de vértices es núcleo de D si y sólo si S es un conjunto máximo por contención con la propiedad de independiente. De igual manera aparece la demostración de que en una digráfica transitiva un conjunto S es un núcleo si y sólo si S es un conjunto mínimo con la propiedad de absorbente. En la sección cuatro se muestra que las digráficas simétricas, las transitivas, las que no tienen ciclos y las digráficas que no tienen

ciclos impares son digráficas núcleo perfectas, es decir, existe un núcleo para toda digráfica inducida de D .

Para la sección cinco reservamos mostrar la relación entre núcleos y núcleos por trayectorias monocromáticas haciendo uso de la cerradura de D , $\mathcal{C}(D)$, la cual se define como la digráfica con los mismos vértices de D y las flechas de D , junto con las flechas (u, v) tal que hay una uv -trayectoria monocromática contenida en D .

La relación esta dada por el siguiente resultado: Si D es una digráfica, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas (trayectorias cuyas flechas están coloreadas con un solo color) si y sólo si $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo.

En las secciones seis y siete se muestran los resultados centrales de este trabajo, los cuales fueron descritos por H. Galeana-Sánchez y R. Rojas Monroy en [10] y [11].

En estas secciones finales se abordan las siguientes ideas: si D es una digráfica y existen D_1 y D_2 subdigráficas de D tales que D_1 es una digráfica pretransitiva derecha (para cualquier par de flechas consecutivas (u, v) y (v, w) tenemos que $(u, w) \in F(D)$ o la flecha derecha es simétrica) y D_2 es una digráfica pretransitiva izquierda (para cualquier par de flechas consecutivas (u, v) y (v, w) tenemos que $(u, w) \in F(D)$ o la flecha izquierda es simétrica) y ninguna de las dos contiene alguna trayectoria infinita exterior o interior, entonces D es núcleo-perfecta, esto es: toda subdigráfica inducida posee un núcleo.

El resultado de la sección siete es el siguiente:

Sea G una gráfica, y D una orientación de Meyniel, si existe alguna orientación T de G tal que T es una digráfica pretransitiva izquierda o pretransitiva derecha que no tenga trayectorias infinitas interiores ni exteriores tal que las flechas simétricas de D son las mismas flechas que T tiene como flechas simétricas, entonces D tiene núcleo.

1. Digráficas.

En este capítulo inicial daremos las definiciones básicas para entender el tema con el objetivo de que el lector pueda leerlo aunque no haya tomado un curso de teoría de gráficas. También mostraremos algunos resultados elementales.

Una **gráfica dirigida o digráfica** D es un conjunto no vacío, finito de objetos que llamaremos vértices V junto con un conjunto F (posiblemente vacío) de pares ordenados de elementos distintos de V . V es llamado el **conjunto de vértices** de D , y cada elemento de V es un **vértice**. Cada elemento de F es llamado **flecha (o flecha dirigida)** mientras F mismo es el **conjunto de flechas** de D . En la Figura 1.1 la digráfica D tiene $V(D) = \{u, v, w\}$ y $F(D) = \{(u, v), (u, w), (w, u)\}$. Ya que las flechas son pares ordenados, note que es posible que (u, v) sea una flecha mientras que (v, u) no lo sea.

Daremos también algunas definiciones de gráficas que serán relevantes en este trabajo. Una **gráfica** es una pareja de conjuntos $G = (V, A)$, donde V es el **conjunto de vértices**, y A es el **conjunto de aristas**, este último es un conjunto de pares de la forma (u, v) tal que $u, v \in V$, tal que $u \neq v$.

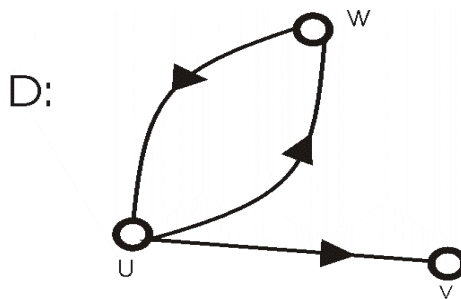


Fig. 1.1 Una digráfica

Para hacer énfasis en la digráfica D , algunas veces escribimos $V(D)$ y $F(D)$ para el conjunto de vértices y el conjunto de flechas de D , en lugar de V y F . Así como con gráficas, el número de elementos en el conjunto $V(D)$ es el **orden** de D mientras la cardinalidad de $F(D)$ es el **tamaño** de D . Para cualquier digráfica D de orden p , el tamaño q de D satisface la desigualdad

$$0 \leq q \leq 2\binom{p}{2} = p^2 - p$$

Esta igualdad se cumple pues siempre es cierto que $0 \leq q$ y dado que $2\binom{p}{2}$ es el número de parejas de vértices multiplicado por 2 obtenemos el número total de flechas que puede haber en una digráfica, y éste es mayor o igual al orden q de una digráfica.

Una (p, q) -digráfica tiene orden p y tamaño q .

Si $a = (u, v)$ es una flecha de una digráfica D , entonces a **une** u **hacia** v . Decimos que a es **incidente desde** u e **incidente hacia** v , mientras u es **incidente hacia** a y v es **incidente desde** a . Más aún si $a = (u, v)$ es una flecha de una digráfica D , decimos que u es **adyacente hacia** v y v es **adyacente desde** u . En la digráfica D de la Figura 1.1, el vértice u es adyacente hacia el vértice v , pero v no es adyacente hacia u . Dos vértices u y v de una digráfica D son **no adyacentes** si u es no adyacente desde v , ni adyacente hacia v en D .

Si $a = (u, v)$ y $b = (v, w)$ son flechas de una digráfica D , entonces la flecha a es **adyacente hacia** la flecha b mientras b es **adyacente desde** a .

El **exgrado**, $exg(v)$, de un vértice en una digráfica D es el número de vértices de D que son adyacentes desde v . El **ingrado**, $ing(v)$, de v es el número de vértices de D adyacentes hacia v . El **grado**, $gr(v)$, de un vértice v en D está definido como sigue:

$$gr(v) = exg(v) + ing(v).$$

En la digráfica D de la Figura 1.1 $exg(u) = 2$, $ing(u) = exg(w) = ing(w) = ing(v) = 1$, mientras que $exg(v) = 0$. Para la misma digráfica, $gr(u) = 3$, $gr(w) = 2$ y $gr(v) = 1$.

1.1 Teorema. Si D es una digráfica de orden p y tamaño q con $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, entonces

$$\sum_{i=1}^p exg(v_i) = \sum_{i=1}^p ing(v_i) = q.$$

Prueba: Cuando los exgrados de los vértices son sumados, cada flecha es contada una vez, pues cada flecha es incidente desde exactamente un vértice. Cuando los ingrados son sumados, una flecha es

contada justo una vez pues cada flecha es incidente a un sólo vértice.†

Una digráfica D_1 es **isomorfa** a una digráfica D_2 (lo denotamos por $D_1 \cong D_2$) si existe una función biyectiva Φ , llamada un **isomorfismo**, de $V(D_1)$ en $V(D_2)$ tal que $(u, v) \in F(D_1)$ si y sólo si $(\Phi(u), \Phi(v)) \in F(D_2)$.

1.2 Proposición. *La relación "isomorfo a" es una relación de equivalencia en el conjunto de digráficas.*

Prueba:

i) Reflexividad. Sea D una digráfica, entonces la función identidad $Id(v)$ de $V(D)$ en $V(D)$ es biyectiva y cumple que $(u, v) \in F(D)$ si y sólo si $(Id(u), Id(v)) = (u, v) \in F(D)$.

ii) Simetría. Sean D_1 y D_2 digráficas tales que $D_1 \cong D_2$, entonces existe Φ función biyectiva de $V(D_1)$ en $V(D_2)$ tal que $(u, v) \in F(D)$ si y sólo si $(\Phi(u), \Phi(v)) \in F(D_2)$. Como Φ es biyectiva, existe la función inversa de Φ , Φ^{-1} que va de $V(D_2)$ en $V(D_1)$ y que es biyectiva por lo que $(u, v) \in F(D_2)$ si y sólo si existen únicos $u_1, v_1 \in V(D_1)$ tal que $\Phi(u_1) = u, \Phi(v_1) = v$ y $(u_1, v_1) \in F(D_1)$, por lo tanto $(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \in F(D_1)$ si y sólo si $(u, v) \in F(D_2)$.

iii) Transitividad. Sean D_1, D_2 y D_3 digráficas tales que $D_1 \cong D_2$ y $D_2 \cong D_3$, entonces existen Φ , función biyectiva, que va de $V(D_1)$ en $V(D_2)$ tal que $(u, v) \in F(D_1)$ si y sólo si $(\Phi(u), \Phi(v)) \in F(D_2)$ y Ψ , función biyectiva, que va de $V(D_2)$ en $V(D_3)$ tal que $(w, x) \in F(D_2)$ si y sólo si $(\Psi(w), \Psi(x)) \in F(D_3)$. Sea $\Theta = \Psi \circ \Phi$. Θ es una función biyectiva, que va de $V(D_1)$ en $V(D_3)$. Entonces, $(u, v) \in F(D_1)$ si y sólo si $(\Phi(u), \Phi(v)) \in F(D_2)$ si y sólo si $(\Psi(\Phi(u)), \Psi(\Phi(v))) = (\Theta(u), \Theta(v)) \in F(D_3)$. Por lo tanto $D_1 \cong D_3$.†

Así, esta relación parte el conjunto de todas las digráficas en clases de equivalencia; dos digráficas no son **isomorfas** si pertenecen a diferentes clases de equivalencia .

Existe sólo una $(1, 0)$ digráfica (salvo isomorfismo); ésta es la digráfica **trivial**. Además, hay sólo una $(2, 0)$, $(2, 1)$ y $(2, 2)$ digráfica (salvo isomorfismo). Hay cuatro $(3, 3)$ digráficas y se muestran en la Figura 1.2 .

Dos digráficas D_1 y D_2 son **idénticas** y lo escribimos $D_1 = D_2$, si $V(D_1) = V(D_2)$ y $F(D_1) = F(D_2)$. Dos digráficas idénticas son isomorfas, sin embargo dos digráficas isomorfas no son necesariamente idénticas. Las digráficas de la Figura 1.3 son isomorfas pero no idénticas.

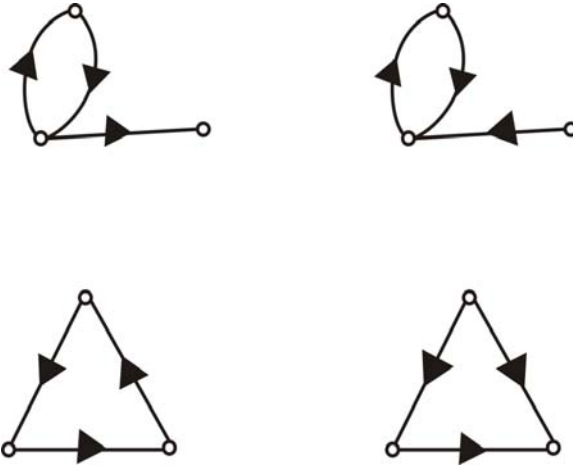


Fig. 1.2 Las cuatro (3,3) digráficas.

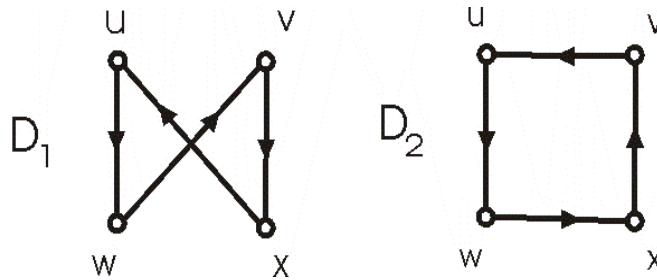


Fig. 1.3 Digráficas isomorfas pero no idénticas.

Una digráfica D_1 es una **subdigráfica** de una digráfica D si $V(D_1) \subseteq V(D)$ y $F(D_1) \subseteq F(D)$. Cualquier digráfica isomorfa a una subdigráfica de D es, también, llamada una **subdigráfica** de D . Escribimos $D_1 \subseteq D$ para indicar que D_1 es una subdigráfica de D . Una subdigráfica D_1 de D es una **subdigráfica generadora** de D si D_1 tiene el mismo orden que D .

Si D es una digráfica no trivial y $u \in V(D)$, entonces $D - u$ es la digráfica con conjunto de vértices $V(D) - \{u\}$ y cuyas flechas son todas

aquellas de D que no son incidentes desde v o hacia v , de la misma forma se define $D - U$ cuando U es un subconjunto de vértices de $V(D)$. Si $a \in F(D)$, entonces $D - a$ es la subdigráfica con conjunto de vértices $V(D)$ y conjunto de flechas $F(D) - \{a\}$, análogamente se define $D - A$ donde A es un subconjunto de F .

Si D es una digráfica tal que $u, v \in V(D)$ y $(u, v) \notin F(D)$, entonces la digráfica $D + a$, donde $a = (u, v)$, tiene conjunto de vértices $V(D)$ y conjunto de flechas $F(D) \cup \{a\}$.

Si U es un subconjunto no vacío del conjunto de vértices de una digráfica D entonces la **subdigráfica inducida por U** de D , la cual se denota por $D[U]$, es la digráfica con conjunto de vértices U y cuyo conjunto de flechas consiste de todas aquellas flechas de D que unen vértices de U . Una subdigráfica D_1 se dice que es **inducida**, y la denotamos por $D_1 \subseteq^* D$, si $D_1 \cong D[U]$ para algún subconjunto U de $V(D)$. Si E es un subconjunto no vacío de $F(D)$, entonces la subdigráfica $D[E]$ **flecha inducida por E** , es aquella digráfica cuyo conjunto de vértices consiste de aquellos vértices de D incidentes hacia, o desde al menos una flecha de E y cuyo conjunto de flechas es E . Así como con gráficas, cualquier subdigráfica inducida de una digráfica D puede ser obtenida quitando un conjunto de vértices y las flechas adyacentes a éstos, o flecha inducida quitando un conjunto de flechas. Ilustramos estas ideas en la Figura 1.4 para la digráfica D , donde

$$V(D) = \{u, v, w, x\}, U = \{u, v, w\} \text{ y } F = \{(u, v), (v, x)\}$$

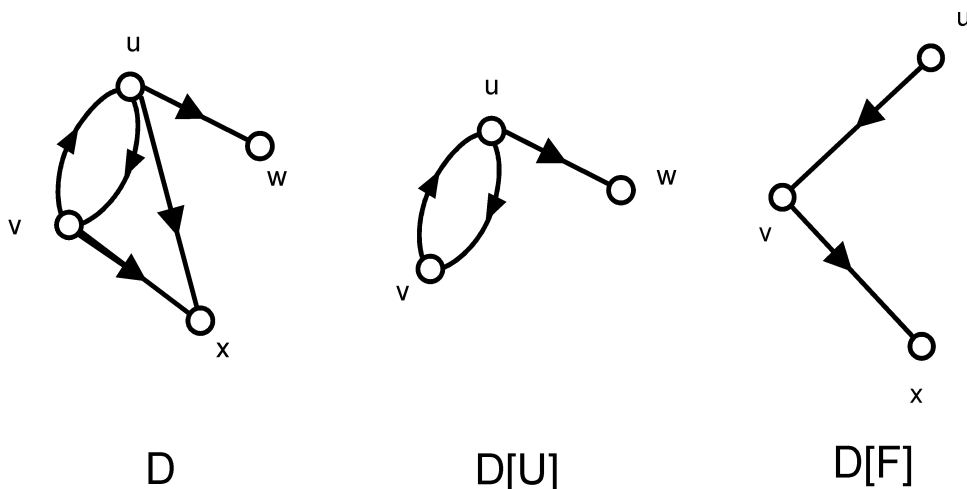


Fig. 1.4 *Subdigráficas inducidas y flecha inducidas.*

Ahora consideramos ciertos tipos de digráficas que aparecerán con regularidad en nuestras discusiones.

Una digráfica D es llamada **simétrica** si siempre que (u, v) es una flecha de D , entonces también lo es (v, u) . Hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de digráficas simétricas y el conjunto de gráficas: a cada digráfica simétrica D le asignamos la gráfica que resulta de reemplazar el par de flechas (u, v) y (v, u) por la arista (u, v) . Una digráfica D es llamada **asimétrica** u **orientada** si siempre que (u, v) es una flecha de D , entonces (v, u) no es una flecha de D . Se dice que una flecha $(u, v) \in F(D)$ es **asimétrica** (resp. **simétrica**) si $(v, u) \notin F(D)$ (resp. $(v, u) \in F(D)$). Entonces, una digráfica orientada D puede ser obtenida de una gráfica G asignando una dirección (u orientando) a cada arista de G , transformando cada arista de G en una flecha y transformando G misma en una digráfica asimétrica; D también es llamada una **orientación** de G . La digráfica D_1 de la Figura 1.5 es simétrica, mientras que D_2 es asimétrica; la digráfica D_3 no tiene ninguna de las dos propiedades.

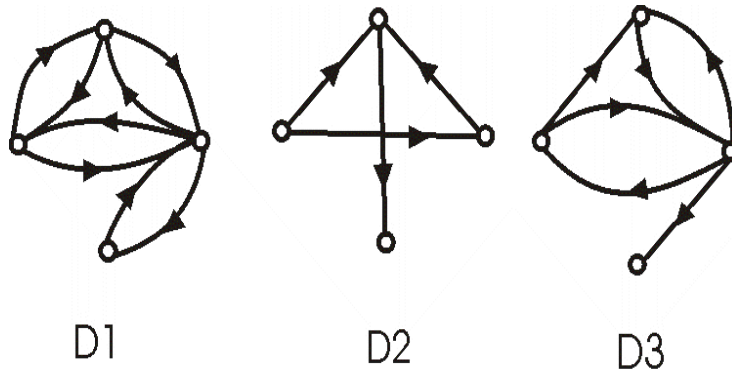


Fig. 1.5 D_1 es una digráfica simétrica, D_2 es asimétrica y D_3 no posee ninguna de las dos propiedades.

Una digráfica D es llamada **completa** si para cualesquiera dos vértices distintos u y v de D , al menos una de las flechas (u, v) o (v, u) está en D . La **digráfica completa simétrica** de orden p tiene ambas flechas: (u, v) y (v, u) para cualesquiera u y v en $V(D)$ y es denotada por K_p . Así, K_p tiene tamaño $p(p - 1)$ y $exg(v) = ing(v) = p - 1$ para cualquier vértice v de D . Las digráficas K_1 , K_2 , K_3 y K_4 se

muestran en la Figura 1.6.

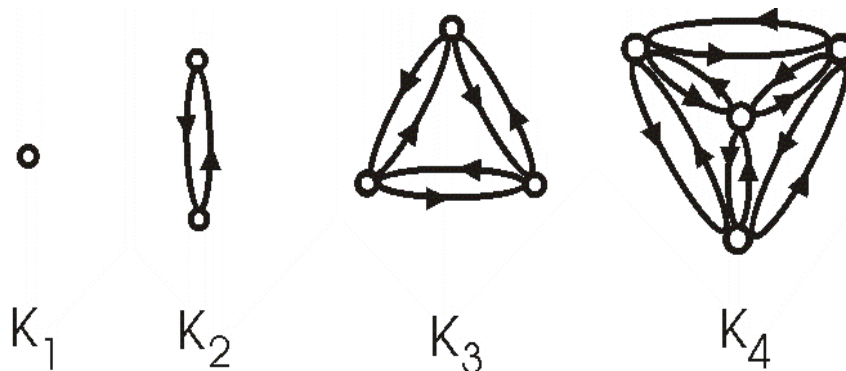


Fig. 1.6 Digráficas simétricas completas.

Una digráfica asimétrica completa es llamada un **torneo**.

Una digráfica D es llamada **regular de grado r** o **r -regular** si $exg(v) = ing(v) = r$ para todo vértice v de D . La digráfica K_p es $(p - 1)$ -regular. Una digráfica 1-regular D_1 y una digráfica 2-regular D_2 se muestran en la Figura 1.7. La digráfica D_2 es un torneo.

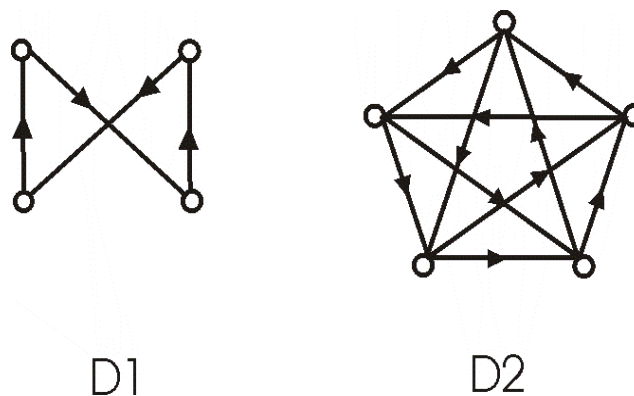


Fig. 1.7 Digráficas regulares.

Por último daremos la definición de digráfica transitiva. Diremos que D es una **digráfica transitiva** si siempre que $(u, v), (v, w) \in F(D)$, entonces $(u, w) \in F(D)$.

2. Digráficas conexas y desconexas.

En esta sección continuamos con definiciones relacionadas con el concepto de conexidad y sus diferentes formas como son unilateralmente conexa o fuertemente conexa, así como el concepto de condensación de una digráfica, una digráfica que representa las propiedades de conexidad de una digráfica dada. Presentamos un resultado, el **Teorema 2.5**, que muestra que la condensación de toda digráfica es acíclica y el **Teorema 2.6** que muestra la relación entre una digráfica D y su condensación D^* en torno a las diferentes formas de conexidad, unilateral, fuerte o desconexidad.

Sean u y v vértices (no necesariamente distintos) de una digráfica D . Entendemos por un uv -**semicamino** de D

$$u = u_0, a_1, u_1, a_2, \dots, u_{n-1}, a_n, u_n = v \quad (\text{ec 2.1})$$

una sucesión finita, alternante de vértices y flechas, empezando con el vértice $u = u_0$ y terminando con el vértice $v = u_n$, tal que $a_i = (u_{i-1}, u_i)$ o $a_i = (u_i, u_{i-1})$ para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$. El número n (el número de ocurrencias de las flechas) se llama la **longitud del semicamino**.

Si $a_i = (u_{i-1}, u_i)$ para cada i , con $i = 1, 2, \dots, n$, en (ec 2.1), entonces la sucesión (ec 2.1) es llamada un uv -**camino**. Si (ec 2.1) es un uv -camino, entonces sólo enlistamos los vértices pues las flechas son distinguibles. Dos uv -caminos $u = u_0, u_1, \dots, u_n = v$ y $u = v_0, v_1, \dots, v_m = v$ son **iguales** si $n = m$ y $u_i = v_i$ para $0 \leq i \leq n$; de otra forma son **diferentes**. En caminos y semicaminos puede haber repetición de vértices y flechas.

Un uv -camino es **cerrado** si $u = v$ o **abierto** si $u \neq v$. Un uv -**paseo** es un uv -camino en el que ninguna flecha se repite, una uv -**trayectoria** es un uv -camino en el que ningún vértice se repite. En la digráfica D de la Figura 2.1 tenemos que $W_1 : v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_4, v_2), v_4, (v_3, v_4), v_3, (v_3, v_2), v_2, (v_2, v_5), v_5$ es un v_1v_5 semicamino que no es un v_1v_5 camino, $W_2 : v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5$ es un v_1v_5 -paseo que no es una v_1v_5 -trayectoria y $W_3 : v_1, v_2, v_5$ es una v_1v_5 -trayectoria.

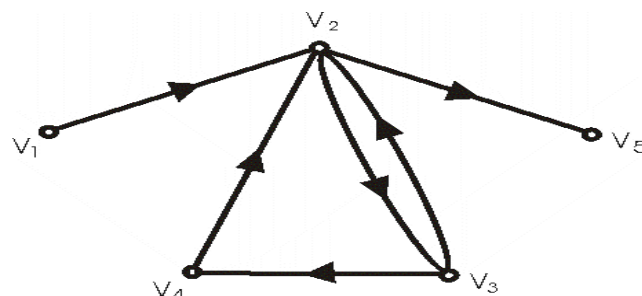


Fig. 2.1 Semicaminos, caminos, paseos y trayectorias.

Si P es una uv -trayectoria, entonces los vértices de P distintos de u y v son los **vértices internos** de P .

Es obvio que cualquier uv -trayectoria es también un uv -camino pero no inversamente.

2.1 Teorema. *Todo uv -camino en una digráfica contiene una uv -trayectoria.*

Prueba: Haremos la prueba por inducción sobre el número de vértices de un uv -camino. Para $n = 1$, sea $C_1 = (u_1)$ un u_1u_1 -camino, es claro que C_1 posee una u_1u_1 -trayectoria. Sea $C_n = (u_1 = u, u_2, u_3, \dots, u_n = v)$ un uv -camino que posee n vértices. $C_{n-1} = (u_1 = u, u_2, u_3, \dots, u_{n-1})$ es un uu_{n-1} -camino que posee $n - 1$ vértices, por hipótesis de inducción éste posee una uu_{n-1} -trayectoria $T = (u = v_1, v_2, \dots, v_m = u_{n-1})$. Entonces la trayectoria T seguida de la flecha (u_{n-1}, u_n) es un uv -camino de longitud n que a lo más repite al vértice $u_n = v$. Supongamos que v_i es el vértice de T que se repite al agregar la flecha a T , entonces $v_i = v$ y por lo tanto $(u = v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i = v)$ es una uv -trayectoria.†

La subdigráfica de una digráfica D inducida por las flechas de un paseo o trayectoria también es llamado paseo o trayectoria de D . Una digráfica de orden n que es una trayectoria se denota por P_n .

Hay una variedad de formas en las que una digráfica puede ser conexa.

Un vértice u se dice que **está conectado con** un vértice v en una digráfica D si existe un uv -semicamino (o, equivalentemente, un vu -semicamino) en D . Se dice que una digráfica D es **débilmente conexa** o simplemente **conexa** si cualesquiera dos de sus vértices están conectados. Una digráfica que no es conexa es **disconexa**.

2.2 Proposición. *La relación "está conectado con" es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices de una digráfica D .*

Prueba: Sea D una digráfica.

i) Reflexividad. Si v es un vértice de D , el camino trivial conecta a v con v .

ii) Simetría. Si $u, v \in V(D)$ son tales que u está conectado con v , entonces existe un uv -semicamino, por lo que v también está conectado con u .

iii) Transitividad. Si $u, v, w \in V(D)$ son tales que u está conectado con v y v está conectado con w , entonces existe un uv -semicamino W_1 en D y un vw -semicamino W_2 en D , por lo que el camino W_1 seguido de el semicamino W_2 forman un uw -semicamino. Por lo tanto la relación descrita es de equivalencia.†

La subdigráfica inducida por una de las clases de equivalencia resultantes es llamada **componente conexa** o **componente** de D .

Se dice que un vértice v es **alcanzable** desde un vértice u en una digráfica D si D contiene un uv -camino, o equivalentemente, una uv -trayectoria (por el **teorema 2.1**). La digráfica D es llamada **unilateralmente conexa** o simplemente **unilateral** si para cualesquiera dos vértices distintos de D , al menos uno de ellos es alcanzable desde el otro.

Se dice que una digráfica D es **fuertemente conexa** o sólo **fuerte** si para cualesquiera dos vértices distintos de D , cada vértice es alcanzable desde el otro, también decimos que una digráfica es **fuertemente desconexa** si no es fuertemente conexa. Entonces, toda digráfica fuerte es unilateral y toda digráfica unilateral es conexa. Las digráficas D_1, D_2, D_3 y D_4 de la Figura 2.2 son desconexa, conexa, unilateral y fuerte, respectivamente, y cada una de éstas propiedades de conexidad es máxima en la digráfica correspondiente, es decir D_1 es desconexa y no es conexa, ni unilateral, ni fuerte, la digráfica D_2 es conexa pero no es unilateral ni fuerte, la digráfica D_3 es unilateral pero no fuerte, por

último la digráfica D_4 es fuerte.

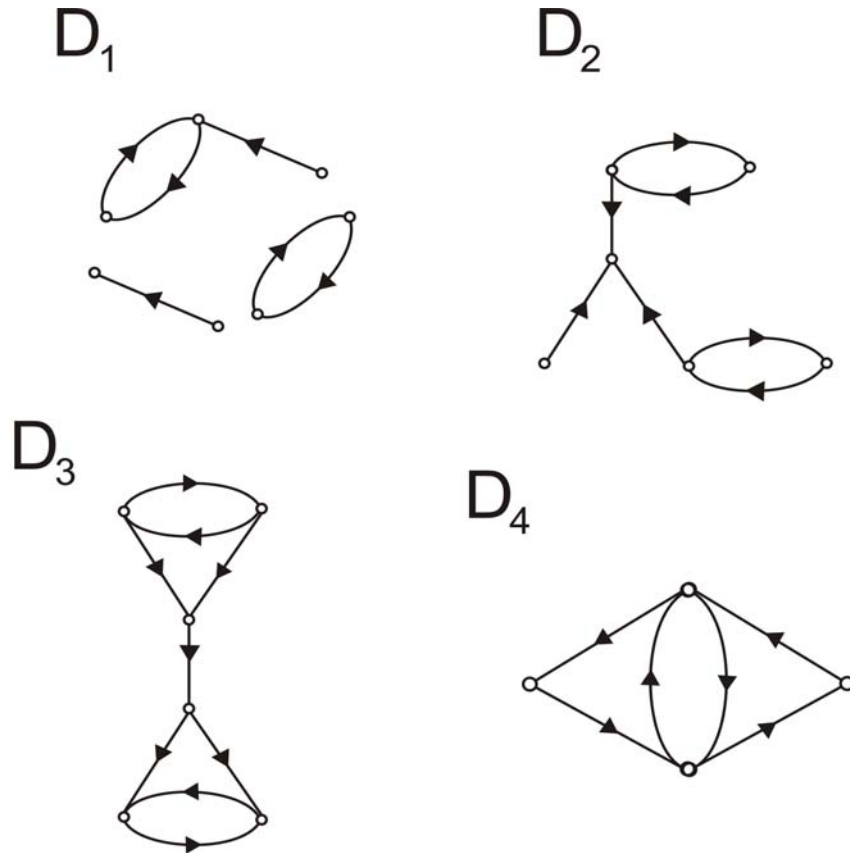


Fig. 2.2 Digráficas desconexa, conexa, unilateral y fuerte.

2.3 Teorema.

- (a) Una digráfica es conexa si y sólo si contiene un semicamino generador.
- (b) Una digráfica es unilateral si y sólo si contiene un camino generador.
- (c) Una digráfica es fuerte si y sólo si contiene un camino generador cerrado.

Prueba: (a) Sea D una digráfica que contiene un semicamino generador W , y sean u y v cualesquiera dos vértices distintos de D . Como W contiene todos los vértices de D , los vértices u y v aparecen en W . La parte de W entre una aparición de u y una aparición de v es un uv -semicamino (o vu -semicamino) de D . Como u y v son arbitrarios,

D es conexa.

Inversamente, sea D una digráfica conexa con $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Así, D contiene un $v_i v_{i+1}$ -semicamino W_i para $i = 1, 2, \dots, p-1$. Dados dos semicaminos consecutivos como W_i, W_{i+1} éstos se intersectan en el vértice v_{i+1} , entonces podemos unir estos semicaminos para obtener un semicamino que vaya desde v_1 , hasta v_2 , continúe hasta v_3 , luego hasta v_4 y así sucesivamente hasta v_p y obtener un $v_1 v_p$ -semicamino que contiene todos los vértices de D , completando la prueba de (a).

(b) Sea D una digráfica que contiene un camino generador $W = (v_1, v_2, \dots, v_p)$, entonces para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(D)$, se tiene que $u, v \in V(W)$ y $u = v_i, v = v_j$ supongamos sin pérdida de generalidad que $i \leq j$, entonces en W hay un camino que va desde v_i hasta v_j , por lo que v es alcanzable desde u y por lo tanto D es unilateral.

Para el regreso, supongamos que D es una digráfica unilateral. Sea W un camino en D que contiene el máximo número de vértices distintos; supongamos que W es un $w_1 w_2$ -camino. Si W no es un camino generador, entonces existe algún vértice v de D que no pertenece a W . Por la propiedad de W de ser máximo no existe un vw_1 -camino V_1 , de existir $V-1$, la unión de V_1 seguido de W nos daría un camino que contiene más vértices que W , por la misma razón tampoco existe un $w_2 v$ -camino en D (Ver Figura 2.3).

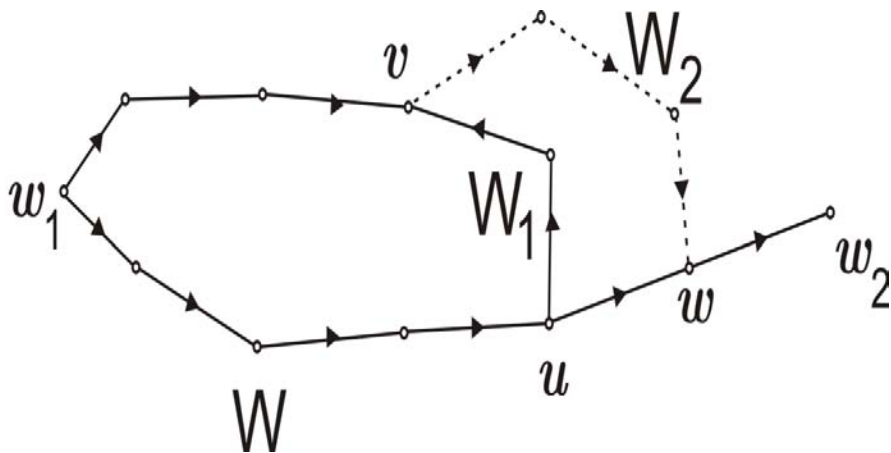


Fig. 2.3 Figura para la prueba de (b).

Como D no contiene un vw_1 -camino y D es unilateral, D contiene un w_1v -camino. W es una sucesión de vértices donde w_1 es el primer vértice de W tal que hay un w_1v -camino, sea u el último vértice de W para el que existe un uv -camino en D , ($u \neq w_2$ pues no hay un w_2v -camino) y sea W_1 un uv -camino. Note que como W es un camino entonces puede repetir vértices, por lo tanto, el vértice u podría aparecer más de una vez en W . Sea w el vértice que sigue la última aparición de u en W , el cual existe pues $u \neq w_2$, entonces no existe un wv -camino en D por la elección de u . Puesto que D es unilateral, existe un vw -camino W_2 en D . Considerando la sucesión de vértices W empezando por w_1 y siguiendo hasta la última aparición de u en W , a continuación por W_1 , siguiendo por W_2 hasta w y finalmente por W hasta w_2 producimos un w_1w_2 -camino con más vértices que W , lo cuál es una contradicción. Por lo que W es un camino generador de D , completando así la prueba de (b).

(c) Sea D una digráfica que contiene un camino generador cerrado, como vimos en la prueba anterior para cualquier par de vértices $u, v \in V(D)$, v es alcanzable desde u , como el camino es cerrado también se cumple que u es alcanzable desde v y por lo tanto D es fuerte. Supongamos que D es una digráfica fuerte. Como D es fuerte, también es unilateral, luego por (b), D contiene un uv -camino generador para u y v vértices de D . Si $u=v$, la prueba está completa. Supongamos entonces que $u \neq v$. Como D es fuerte, D contiene una vu -trayectoria P . Entonces el camino W seguido por la trayectoria P produce un uv -camino generador cerrado, completando la prueba.†

Llamamos **circuito** de D a un paseo cerrado no trivial de una digráfica D . Un circuito $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1, n \geq 2$, cuyos n vértices v_i son distintos es llamado un **ciclo** de D . Si una digráfica D no contiene ciclos, es **acíclica**. En la digráfica D_1 de la Figura 2.4, $C_1 : v_1, v_3, v_4, v_3, v_2, v_1$ es un circuito que no es un ciclo, mientras que $C_2 : v_1, v_3, v_2, v_1$ es un ciclo de D_1 . La digráfica D_2 de la Figura 2.4 es acíclica.

Así como con paseos y trayectorias, la subdigráfica de una digráfica D inducida por las flechas de un circuito o ciclo son también referidas como circuito o ciclo de D . Un ciclo de longitud n es un n -**ciclo**; a un 3-ciclo lo llamamos triángulo. Una digráfica de orden $n(\geq 2)$ que es un ciclo es denotada por C_n .

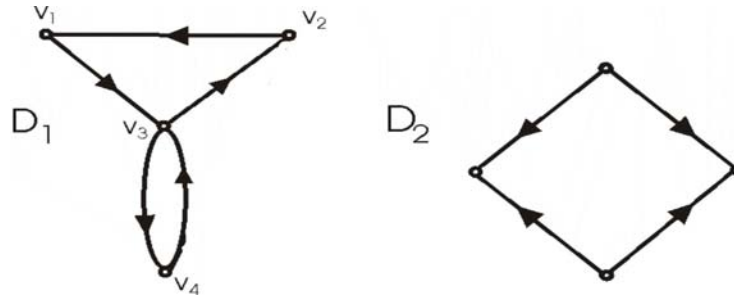


Fig. 2.4 Circuitos, ciclos y digráficas acíclicas

2.4 Proposición. La relación "mutuamente alcanzable" es una relación de equivalencia sobre el conjunto de vértices de cualquier digráfica D .

Prueba: Sea D una digráfica.

- i)* Reflexividad. Si $v \in V(D)$, v es mutuamente alcanzable desde v mediante la trayectoria trivial.
- ii)* Simetría. Si $u, v \in V(D)$ son tales que u y v son mutuamente alcanzables, entonces existe una uv -trayectoria y una vu -trayectoria, por lo que v y u son mutuamente alcanzables.
- iii)* Transitividad. Si $u, v, w \in V(D)$ son tales que u y v son mutuamente alcanzables y v y w son mutuamente alcanzables, entonces existen P_1 una uv -trayectoria y P_2 una vu -trayectoria, también existen P'_1 una vw -trayectoria y P'_2 una wv -trayectoria en D . La trayectoria P_1 seguida de la trayectoria P'_1 forman un uw -camino. Análogamente la trayectoria P_2 seguida de la trayectoria P'_2 forman un wu -camino, por lo que la relación descrita es de equivalencia.†

Esta relación induce una partición del conjunto $V(D)$ en clases de equivalencia V_1, V_2, \dots, V_n ($n \leq 1$). Por lo que dos vértices de D son mutuamente alcanzables si y sólo si los vértices pertenecen a la misma clase de equivalencia V_i . Sea $S_i = D[V_i]$ para $1 \leq i \leq n$. Si u y v son vértices de la misma subdigráfica S_i , entonces existe un uv -camino W_1 en D (pues v es alcanzable desde u) y un vu -camino W_2 en D (pues u es alcanzable desde v). El camino W_1 seguido por el camino W_2 produce un uvu -camino W en D . Claramente cualesquiera dos vértices de W son mutuamente alcanzables en D . Esto implica que todos los vértices de W pertenecen a la misma digráfica S_i . Así, u y v son mutuamente alcanzables en S_i , es decir S_i es una subdigráfica fuerte. De hecho cada S_i es maximal con respecto a la propiedad de ser fuerte. Las

subdigráficas S_1, S_2, \dots, S_n son llamadas las **componentes fuertes** de D .

Hay una similitud entre las componentes fuertes de una digráfica y los bloques de una gráfica, pero hay también una diferencia.

Los bloques de una gráfica parten el conjunto de aristas de la gráfica; sin embargo las componentes fuertes de una digráfica no parten el conjunto de flechas. Una digráfica D y sus componentes fuertes se muestran en la Figura 2.5a y Figura 2.5b

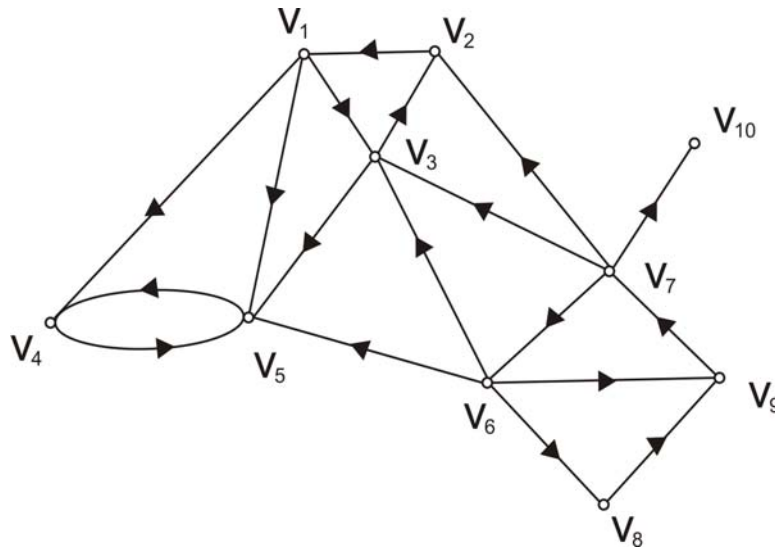


Fig. 2.5a Una digráfica

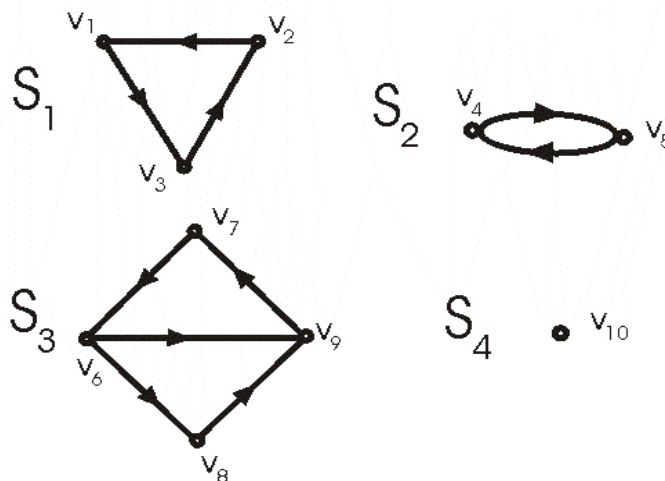


Fig. 2.5b Las componentes fuertes de la digráfica D

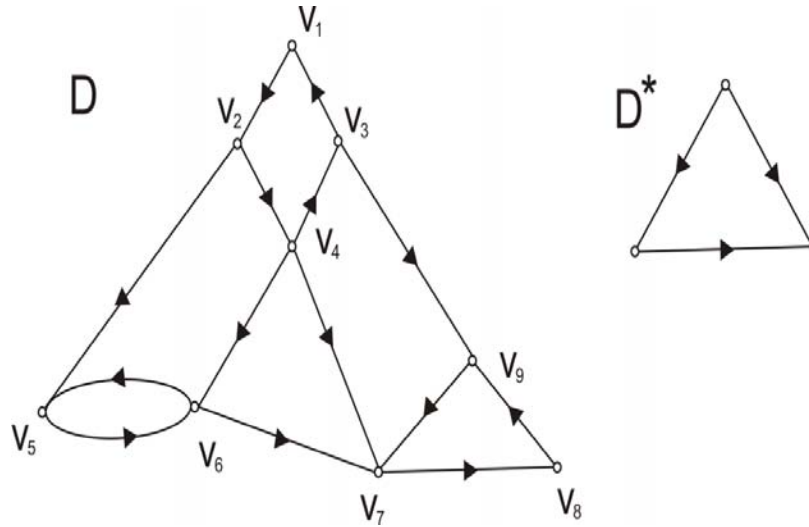


Fig. 2.6 Una digráfica y su condensación.

Con cualquier digráfica D hay asociada otra digráfica, la cual, aunque ordinaria en su estructura pues es una digráfica más simple que D , posee las mismas propiedades básicas de conexidad de D . Sean S_1, S_2, \dots, S_n las componentes fuertes de D . La **condensación** D^* de D es la digráfica cuyos vértices u_1, u_2, \dots, u_n pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con las componentes fuertes de D (u_i corresponde a S_i , $i = 1, 2, \dots, n$) tal que (u_i, u_j) es una flecha de D^* ($i \neq j$) si y sólo si algún vértice de S_i es adyacente a al menos un vértice de S_j . Una digráfica D y su condensación D^* se muestran en la Figura 2.6, donde $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $S_2 = \{v_5, v_6\}$ y $S_3 = \{v_7, v_8, v_9\}$.

2.5 Teorema. La condensación de toda digráfica es acíclica.

Prueba: Supongamos que el teorema es falso. Entonces existe una digráfica D cuya condensación D^* contiene ciclos. Sean S_1, S_2, \dots, S_n ($n \geq 2$) las componentes fuertes de D y sea $V(D^*) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ tal que u_i corresponde a S_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Si $n = 1$, entonces D^* consta de un solo vértice y por lo tanto no posee ciclos. Supongamos que $n > 1$ y que las etiquetas son tales que $u_1, u_2, \dots, u_k, u_1$ es un ciclo en D^* . Por definición de D^* , para $i = 1, 2, \dots, k - 1$, existe un vértice $v'_i \in V(S_i)$ y un vértice $v_{i+1} \in V(S_{i+1})$ tal que $(v'_i, v_{i+1}) \in F(D)$ y también existe una flecha (v'_k, v_1) en D , donde $v'_k \in V(S_k)$ y $v_1 \in V(S_1)$. Note que los vértices v'_i, v_i con $i = 1, 2, \dots, k$, no necesariamente son distintos. Como

S_i es fuerte, $i = 1, 2, \dots, k$, entonces existe una $v_i v'_i$ -trayectoria P_i en S_i para $i = 1, 2, \dots, k$. Entonces

$$P_1, (v'_1, v_2), P_2, (v'_2, v_3), P_3, \dots, P_k, (v'_k, v_1), v_1$$

es un ciclo en D , lo cual implica que cualquier par de vértices v_i y v_j de la digráfica D son mutuamente alcanzables y entonces D es fuerte por lo tanto no tiene más componentes fuertes que D misma, lo cual es falso.†

En una digráfica D , diremos que dos trayectorias T y T' son **trayectorias internamente ajenas** si todo vértice interno de T no pertenece a $V(T')$ y todo vértice interno de T' no pertenece a $V(T)$.

2.6 Teorema. *La condensación D^* de una digráfica D es fuerte o unilateral o conexa o disconexa si y sólo si D es fuerte o unilateral o conexa o disconexa respectivamente.*

Prueba: Si D es una digráfica fuerte entonces para todo $u, v \in V(D)$ u y v son mutuamente alcanzables, por lo que sólo existe una clase de equivalencia en $V(D)$, luego D^* sólo tiene un vértice y por lo tanto es fuerte.

Si D^* es fuerte, entonces para todo $u, v \in V(D^*)$ u y v son mutuamente alcanzables. Por lo tanto existe una uv -trayectoria $T = (u_1 = u, u_2, \dots, u_n = v)$ en D^* y una vu -trayectoria $T' = (v_1 = v, v_2, \dots, v_m = u)$ en D^* . Si las trayectorias son internamente ajenas, entonces D^* contiene un ciclo, a saber la trayectoria T seguida de T' forman un ciclo, por el teorema 2.5 D^* no contiene ciclos, por lo tanto en este caso no existen dos vértices y D^* consta de un sólo vértice, por lo que D es fuerte. Si las trayectorias no son ajenas, entonces existe $w \in V(D^*)$ tal que $w \in V(T) \cap V(T')$. Si u_i es el primer vértice (en la sucesión T seguida de T') que está en $V(T) \cap V(T')$ entonces existe $v_j \in V(T) \cap V(T')$ con $u_i = v_j$ y $W = (u_1 = u, u_2, \dots, u_i = v_j, v_{j+1}, \dots, v_m = u)$ es un camino cerrado que no repite al vértice u_i , observe que la sucesión $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_m)$ al ser parte de la trayectoria T' no repite vértices de T' y ya que u_i es el primer vértice de la sucesión T seguida de T' que está en $V(T) \cap V(T')$, entonces las trayectorias $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_m)$ y $(u_1 = u, u_2, \dots, u_i = v_j)$ son trayectorias internamente ajenas, lo cual nos lleva al caso anterior. Por lo tanto sólo existe una clase de equivalencia en D y entonces D es fuerte.

Sea D una digráfica unilateral, entonces por el **teorema 2.3** D contiene un camino generador $W = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Sean S_1, S_2, \dots, S_m las

componentes fuertes de D , entonces para cada S_i , con $i = 1, \dots, m$ existe un vértice v_i tal que $v_i = u_j$, es decir cada v_i está en el camino W . Reordenemos los vértices v_i en una subsucesión de forma que sea una subsucesión creciente en el orden en el que aparecen los vértices en W . Sea esta sucesión $W' = (u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_m})$, ya que $u_{i_j} \in S_i$, y estas componentes son clases de equivalencia, entonces u_{i_j} sólo pertenece a esta clase de equivalencia y no está en ninguna otra S_j ($j \neq i$) y por la elección de los vértices, todas las S_i están representadas en W' . Por lo tanto $u_{i_j}, u_{i_k} \in V(W')$ si y sólo si u_{i_j} y u_{i_k} pertenecen a componentes fuertes distintas de D . Si S_{i_j} es el vértice en D^* correspondiente a u_{i_j} entonces $(S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_m})$ es un camino generador en D^* y por lo tanto D^* es unilateral.

Si D^* es unilateral, sean $u, v \in V(D)$, si u y v están en la misma componente fuerte de D entonces existe una uv -trayectoria y una vu -trayectoria en D . Si u y v están en distintas componentes fuertes de D y S_u, S_v son los vértices correspondientes a u y v , respectivamente, en D^* , entonces existe un $S_u S_v$ -camino en D^* o un $S_v S_u$ -camino en D^* . Sin pérdida de generalidad supongamos que existe un $S_u S_v$ -camino. Sea $W = (S_{u_1} = S_u, S_{u_2}, \dots, S_{u_n} = S_v)$ tal camino. Sean u_i, u'_i vértices de la componente fuerte S_{u_i} correspondiente en D , tal que $(u_i, u'_{i+1}) \in F(D)$, los cuales existen pues hay una flecha entre S_i y S_{i+1} . Como u_i y u'_i están en la misma componente fuerte de D , existe un $u'_i u_i$ -camino en D , el cual llamaremos C_i . Sea $W' = (u_1, C_1, u'_1, u_2, C_2, u'_2, \dots, u_n)$. Ya que W' es un uv -camino en D concluimos que D es unilateral.

Sea D una digráfica conexa. Sean S_u, S_v vértices de D^* correspondientes a u, v vértices de D . Como D es conexa, existe un uv -semicamino $W = \{u_1 = u, u_2, \dots, u_n = v\}$ en D . Sabemos que $u = u_1 \in V(S_u)$ y que $v = u_n \in V(S_v)$. Los primeros i_1 vértices del camino W , a saber $(u = u_1, u_2, u_3, \dots, u_{i_1}) = W_1$ pertenecen a $S_1 = S_u$, la sucesión de vértices en W continúa desde u_{i_1} hasta u_{i_2} donde $(u_{i_1+1}, u_{i_1+2}, \dots, u_{i_2}) = W_2$ pertenece a la componente S_2 . Observe que los vértices u_{i_1} y u_{i_1+1} están unidos por una flecha en D y entonces los vértices correspondientes S_1 y S_2 también lo están en D^* . Así existen $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$ caminos, los cuales están unidos por flechas en el semicamino W . Es decir el semicamino W_i es la parte de W que está en la componente S_i y entonces entre W_i y W_{i+1} hay una flecha para $i = 1, 2, \dots, n$. al tomar la condensación de D , W_i se convierte en el vértice $S_i \in V(D^*)$ y obtenemos el S_u, S_v camino con el que concluimos que D^* es conexa. El regreso es análogo a la prueba para unilaterales: Supongamos que D^* es conexa, sean $u, v \in V(D)$, si u y v están en la misma componente fuerte de D entonces existe una uv -trayectoria y una vu -trayectoria en

D , por lo tanto u está conectado con v . Si u y v están en distintas componentes fuertes de D y S_u, S_v son los vértices correspondientes a u y v , respectivamente, en D^* , entonces existe un $S_u S_v$ -semicamino en D^* o un $S_v S_u$ -semicamino en D^* . Sin pérdida de generalidad supongamos que existe un $S_u S_v$ -semicamino. Sea $W = (S_{u_1} = S_u, S_{u_2}, \dots, S_{u_n} = S_v)$ tal semicamino. Sean u_i, u'_i vértices de la componente fuerte S_{u_i} correspondiente en D , tal que $(u_i, u'_{i+1}) \in F(D)$, los cuales existen pues hay una flecha entre S_i y S_{i+1} . Como u_i y u'_i están en la misma componente fuerte de D , existe un $u'_i u_i$ -semicamino en D , el cual llamaremos C_i . Sea $W' = (u_1, C_1, u'_1, u_2, C_2, u'_2, \dots, u_n)$. Ya que W' es un uv -semicamino en D concluimos que D es conexa.

Si D es una digráfica disconexa. Sean $u, v \in V(D)$ tales que no existe un uv -semicamino. Si S_u, S_v son los vértices de D^* correspondientes a u, v y existe un $S_u S_v$ -semicamino podemos construir, como en la prueba para unilaterales, un uv -semicamino, por lo que no existe tal $S_u S_v$ -semicamino. Análogamente si D^* es disconexa.†

Por la **gráfica subyacente** de una digráfica D entendemos la gráfica G obtenida a partir de D borrando todas las direcciones de las flechas de D (equivalentemente, reemplazando cada flecha (u, v) por la arista uv) y borrando una arista del par de aristas múltiples si éstas se producen. Un vértice v de D es llamado un **vértice de corte** de una digráfica D si y sólo si $D - v$ es una digráfica con más componentes fuertes que D . En la digráfica D_1 de la Figura 2.4 el vértice V_3 es el único vértice de corte de D . Recordando el teorema de gráficas: "Toda gráfica de orden $p \leq 2$ contiene al menos dos vértices que no son de corte", obtenemos el siguiente teorema en digráficas:

2.7 Teorema. *Toda digráfica de orden $p \geq 2$ contiene al menos dos vértices que no son vértices de corte.*

Prueba: Haremos la prueba por inducción sobre el número de vértices de una digráfica D . Si D es una digráfica de orden 2, entonces tiene dos vértices y ambos no son de corte pues al quitar cualquiera de ellos obtenemos un sólo vértice, es decir no aumenta el número de componentes, por lo tanto ninguno de estos vértices es de corte. Supongamos que en cualquier digráfica de orden $k - 1$ existen al menos dos vértices que no son de corte. Sea D una digráfica de orden k . Sea $x \in V(D)$ cualquier vértice. Sea $D' = D[V(D) - \{x\}]$, entonces D' tiene orden $k - 1$ y por hipótesis de inducción posee al menos dos vértices u y v , que no son de corte. Si u y v no son de corte en D ,

entonces acabamos, de otra forma supongamos sin pérdida de generalidad que u es un vértice de corte en D . Esto implica que existen dos vértices $w, z \in V(D)$ tales están conectados en D , pero no lo están en $D - \{u\}$. Como w y z están conectados en D' , entonces existe una wz -trayectoria ($w = u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i = u, u_{i+1}, \dots, u_n = z$) en D' . En particular u conecta a u_{i-1} con u_{i+1} y estos vértices no están conectados en $D - \{u\}$. Note que como u no es vértice de corte en D' , entonces u_{i-1} y u_{i+1} están conectados en $D' - \{u\}$ y por lo tanto también lo están en $D - \{u\}$, lo cual es una contradicción y por lo tanto u no es un vértice de corte en D . Concluimos que D posee al menos dos vértices que no son de corte.†

2.8 Teorema. *Toda digráfica unilateral D de orden $p \geq 2$ contiene dos vértices distintos u y v tales que $D - u$ y $D - v$ son unilaterales.*

Prueba: Por el **teorema 2.3**, D contiene un camino generador. Sea W un camino generador de D de longitud mínima; supongamos que W es un uv -camino. Observemos que u aparece exactamente una vez en W , de otra forma el camino obtenido de W borrando el primer vértice (y la primera flecha) de W se obtiene un camino generador de longitud menor a W , lo cual es imposible. Razonando de la misma forma, v aparece sólo una vez en W . Como $u \neq v$, entonces $D - v$ y $D - u$ poseen ambas un camino generador, y entonces por el **teorema 2.3** son unilaterales. †

Puesto que cualquier digráfica fuerte D es unilateral, es inmediato el siguiente corolario.

2.9 Corolario. *Toda digráfica fuerte D de orden $p \geq 2$ contiene dos vértices distintos u y v tales que $D - u$ y $D - v$ son unilaterales.*

La conclusión del corolario no puede ser extendida a obtener $D - u$ y $D - v$ fuertes, por ejemplo el ciclo dirigido C_n , $n \geq 3$ no mantiene la propiedad de fuertemente conexas al quitarle un vértice.

Mencionamos antes que a toda digráfica D es posible asociarle una digráfica llamada su condensación D^* . También existen varias digráficas que podemos asociar a una digráfica dada. Ahora mencionamos dos de tales digráficas.

El **Complemento** \overline{D} de una digráfica D es la digráfica que tiene el mismo conjunto de vértices de D y tal que para $u, v \in V(D)$, $u \neq v$,

la flecha (u, v) pertenece a \overline{D} si y sólo si (u, v) no es una flecha de D . Una digráfica D es **autocomplementaria** si $D \cong \overline{D}$.

La **inversa** \overleftarrow{D} de una digráfica D es la digráfica con $V(\overleftarrow{D}) = V(D)$ tal que $(u, v) \in F(\overleftarrow{D})$ si y sólo si $(v, u) \in F(D)$. La digráfica D es **autoinversa** si $\overleftarrow{D} = D$. Obviamente toda digráfica simétrica es autoinversa.

Una digráfica con su complemento e inversa se muestran en la Figura 2.7.

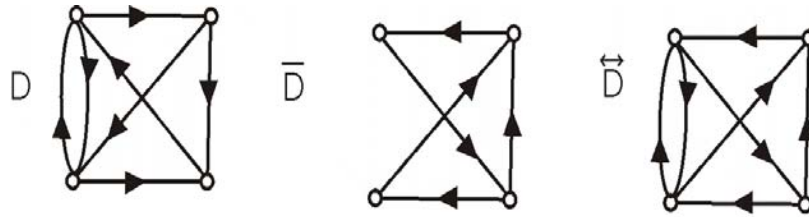


Fig. 2.7 El complemento y la inversa de una digráfica.

Además de la inversa de una digráfica, podemos referirnos también al inverso de un concepto. En específico: en teoría de digráficas hablamos del inverso de un concepto cuando el concepto original es aplicado a la digráfica inversa. Por ejemplo, "adyacente desde" es el inverso de "adyacente hacia", "incidente desde" es el inverso de "incidente hacia", e "ingrado" es el inverso de "exgrado".

Observación: Principio de Dualidad Direccional: *Para cada teorema concerniente a digráficas, existe un teorema correspondiente obtenido reemplazando cada concepto por su concepto inverso.*

Ilustramos esta idea con una propiedad simple de digráficas acíclicas.

2.10 Teorema. *Toda digráfica acíclica contiene al menos un vértice de exgrado cero.*

Prueba: Sea D una digráfica acíclica, y sea P una trayectoria de longitud máxima en D . Supongamos que P es una uv -trayectoria. Si v

es adyacente hacia cualquier vértice de P , se produce un ciclo, contradiciendo el hecho de que D es acíclica. Si v es adyacente hacia cualquier vértice que no está en P , entonces existe una trayectoria cuya longitud excede a la de P , contradiciendo la elección de P . Así, v no es adyacente hacia ningún vértice de D , es decir, $\text{exg } v = 0$.†

Usando el principio de dualidad direccional obtenemos el siguiente resultado.

2.11 Corolario. *Toda digráfica acíclica contiene al menos un vértice de ingrado cero.*

3. NÚCLEOS.

Presentamos el concepto central, núcleo de una digráfica. En esta sección se abordan formas de analizar el núcleo de D y algunos ejemplos prácticos. Un resultado de utilidad, la **Proposición 3.2**: si S es un núcleo, entonces S es un conjunto independiente máximo por contención con la propiedad de independiente y mínimo por contención con la propiedad de independiente. Así como la existencia de un núcleo en digráficas acíclicas y transitivas. Parte del material de esta sección fue extraído de Berge [1].

Sea D una digráfica, para $x \in V(D)$ definimos $\Gamma(x) = \{v \in V(D) \mid v \text{ es adyacente desde } x \text{ en } D\}$.

Para una digráfica D , un conjunto $S \subset V(D)$ es **independiente** si:

$$x \in S \quad \text{entonces} \quad \Gamma(x) \cap S = \emptyset.$$

Y un conjunto $S \subset V(D)$ es **absorbente** si:

$$x \notin S \quad \text{entonces} \quad \Gamma(x) \cap S \neq \emptyset.$$

Es decir un conjunto S es independiente si no hay flechas entre cualesquiera dos vértices de S y S es absorbente si para cualquier vértice $v \in V(D) - S$, se tiene una flecha desde v hacia S . Para una digráfica D , un conjunto $S \subset V(D)$ es un **núcleo** de D si S es independiente y absorbente. No toda digráfica tiene un núcleo, la digráfica de la Figura 3.1 no tiene núcleos, pues si un conjunto de vértices tuviera un par de vértices cualesquiera, entonces no sería independiente y cualquier conjunto con un sólo vértice no es absorbente. Si una digráfica posee un núcleo, éste no es necesariamente único: en la digráfica de la Figura 3.2 los conjuntos $\{a, c\}$ y $\{b, d\}$ son independientes y absorbentes, es decir son núcleos.

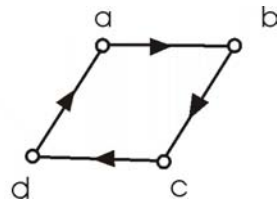
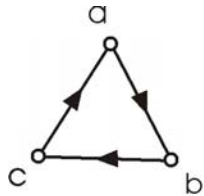


Fig 3.1 Digráfica sin núcleos

Fig 3.2 Digráfica con dos núcleos

A continuación damos algunos ejemplos de aplicaciones de la teoría de núcleos:

3.1 Ejemplo. Supongamos que n jugadores, denotados por $(1), (2), \dots, (n)$, discuten para elegir un punto x de un conjunto X ("de situaciones"). Si el jugador (i) prefiere la situación a a la situación b , escribiremos $a \geq^i b$. Las preferencias individuales podrían no ser compatibles, consecuentemente es necesario introducir el concepto de *preferencia efectiva*. Se dice que la situación a es **efectivamente preferida** a b , lo cual expresaremos por $a \prec b$, si hay un conjunto de jugadores que prefieren a a sobre b y que son capaces de forzar la preferencia del grupo por a . La relación efectivamente preferida no es una relación transitiva.

Consideremos la digráfica D con $V(D) = X$ y para cada $v \in V(D)$, $\Gamma(v)$ el conjunto de situaciones efectivamente preferidas a v será el conjunto de flechas de D . Sea S el núcleo de D (si éste existe). Como S es independiente, ninguna situación de S es efectivamente preferida a otra situación de S . Como S es absorbente, para toda situación $x \notin S$, hay otra situación en S que es preferida efectivamente a x , así que x puede ser descartada.

3.2 Ejemplo. Consideremos una "teoría", es decir, un conjunto de proposiciones a, b, c, \dots , que representaremos como vértices de una digráfica D ; si la proposición b implica la proposición a , entonces en D existe la flecha de a a b , es decir $(a, b) \in F(D)$. D es transitiva, es decir,

$$(a, b) \in F(D), (b, c) \in F(D) \text{ entonces } (a, c) \in F(D)$$

Una **base de axiomas** de la teoría es un conjunto B de proposiciones llamadas axiomas, tal que:

- 1) cada proposición que no está en B es consecuencia lógica de uno de los axiomas,
- 2) ningún axioma es consecuencia lógica de otro axioma.

El problema de encontrar una base de axiomas se reduce a encontrar un núcleo de D : Si S es un núcleo de D entonces es independiente y por lo tanto no hay flechas entre dos vértices de S , es decir no hay dos proposiciones de S tales que una sea consecuencia lógica de la otra. Por otra parte S es absorbente y por lo tanto para cualquier proposición a , que no pertenezca a S hay una flecha $(a, s) \in F(D)$ con $s \in V(S)$, es decir para toda proposición a , que no esté en S hay una proposición $s \in S$, tal que a es consecuencia lógica de S . Mostraremos después que

toda digráfica transitiva tiene un núcleo.

3.1 Proposición. *Sea D una digráfica, una condición suficiente y necesaria para que un conjunto S de $V(D)$ sea un núcleo de D es que su función característica $\Phi_S(x)$ satisfaga:*

$$\Phi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma(x)} \Phi_S(y)$$

Recordemos que la función característica $\Phi_S(x)$ del conjunto S está definida por

$$(1) \quad \Phi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in S \\ 0, & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Si $\Gamma(x) = \emptyset$, definimos

$$\max_{y \in \Gamma(x)} \Phi_S(y) = 0.$$

Prueba:

1. Sea S un núcleo. Como S es independiente, tenemos que si $\Phi_S(x) = 1$, entonces $x \in S$ y por lo tanto para cualquier $y \in \Gamma(x)$ hay una flecha desde x hasta y , pero como S es independiente entonces $y \notin S$ y $\Phi_S(y) = 0$ para cualquier y por lo tanto $\max_{y \in \Gamma(x)} \Phi_S(y) = 0$. En este caso se cumple la fórmula.

Supongamos que $\Phi_S(x) = 0$, entonces $x \notin S$. Ya que S es absorbente, para ese x tenemos que existe un $y \in S$ tal que $(x, y) \in F(D)$, es decir $y \in \Gamma(x)$ y $y \in S$, para este vértice y , $\Phi_S(y) = 1$. Por lo tanto $\max_{y \in \Gamma(x)} \Phi_S(y) = 1$. En este caso también se cumple la fórmula.

Por lo que en cualquier caso $\Phi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma(x)} \Phi_S(y)$.

2. Sea $\Phi_S(x)$ la función característica de un conjunto S , el cual satisface la fórmula, entonces:

Sea $x \in S$, entonces $\Phi_S(x) = 1$. Ya que S cumple la fórmula, entonces $\max_{y \in \Gamma(x)} \Phi_S(y) = 0$, es decir: todo vértice y tal que $(x, y) \in F(S)$ tiene función característica $\Phi_S(y) = 0$, es decir no está en S y entonces $\Gamma(x) \cap S = \emptyset$. Note que esto implica que S es independiente, pues si hubiera una flecha entre dos elementos $u, v \in S$, suponga $(u, v) \in F(D)$, entonces $v \in \Gamma(u) \cap S$, lo cual contradice lo que acabamos de demostrar.

Si $x \notin S$ entonces $\Phi_S(x) = 0$. Ya que se cumple la fórmula en S , entonces $\max_{y \in \Gamma(x)} \Phi_S(y) = 1$, esto quiere decir que de todas las flechas desde x : $(x, y) \in F(D)$, existe un vértice y tal que $\Phi_S(y) = 1$, es decir para $x \notin S$, existe una flecha (x, y) tal que $y \in S$, entonces $\Gamma(x) \cap S \neq \emptyset$. Es decir S es absorbente

Por lo tanto S es un núcleo.†

3.2 Proposición. *Si S es un núcleo, entonces S es un conjunto máximo por contención con la propiedad de independiente y mínimo por contención con la propiedad de absorbente.*

Prueba: Sea S el núcleo de una digráfica D . Si $a \notin S$, el conjunto $S \cup \{a\}$ no puede ser independiente pues $\Gamma(a) \cap S \neq \emptyset$, por lo tanto S es un conjunto máximo por contención con la propiedad de independiente. Si $b \in S$, el conjunto $T = S - \{b\}$ no puede ser absorbente pues $b \notin T$ y $\Gamma(b) \cap T = \emptyset$. Por lo tanto S es un conjunto mínimo por contención con la propiedad de absorbente.†

3.3 Teorema. *Si D es una digráfica simétrica, entonces D tiene un núcleo. Más aún, para una digráfica, un conjunto $S \subset V(D)$ es un núcleo si y sólo si S es un conjunto máximo por contención con la propiedad de independiente.*

Prueba: Primero probaremos la segunda parte.

Por la **Proposición 3.2** si S es un núcleo, entonces S es un conjunto máximo por contención con la propiedad de independiente.

Un conjunto máximo por contención con la propiedad de independiente S de $V(D)$ es absorbente, de otra forma existiría un vértice $v \notin S$ no adyacente hacia S y entonces no habría flechas entre S y v , así S no podría ser un conjunto máximo por contención con la propiedad de independiente, pues $T = S \cup \{v\}$ sería independiente. Por lo que S es un núcleo.

Ahora probaremos que si D es una digráfica simétrica, entonces posee un núcleo: Sea D una digráfica simétrica, vamos a construir un conjunto máximo por contención con la propiedad de independencia. Sea v_0 un vértice de D , si $\{v_0\}$ es máximo por contención con la propiedad de independencia hemos terminado, si no es máximo con esa propiedad entonces existe $v_1 \in V(D)$ tal que no hay flechas entre v_0 y v_1 pues D es simétrica, si $\{v_0, v_1\}$ es máximo por contención con esa propiedad, hemos terminado, de otra forma existe $v_2 \in V(D)$ tal que no hay flechas

entre v_2 y $\{v_0, v_1\}$ pues D es simétrica y entonces $\{v_0, v_1, v_2\}$ es independiente. De esta forma es posible construir un conjunto máximo por contención con la propiedad de independencia y por la primera parte de esta prueba, este conjunto es un núcleo.†

Si denotamos por \mathcal{A} a la familia de todos los conjuntos absorbentes de la digráfica D , entonces podemos definir el **número de absorción** de una digráfica D como $\beta(D) = \min_{A \in \mathcal{A}} \{|A|\}$ (la cardinalidad de A).

3.4 Teorema. *Si D es una digráfica transitiva, entonces cada conjunto mínimo por contención con la propiedad de absorción tiene la misma cardinalidad, $\beta(D)$. Más aún, en una digráfica transitiva, un conjunto $S \subset V(D)$ es un núcleo si y sólo si S es un conjunto mínimo por contención con la propiedad de absorbente.*

Prueba: Sea D una digráfica transitiva. Consideremos las componentes fuertes de D . Si C es una componente tal que ninguna flecha sale de C , C será llamada **componente terminal**. Como la condensación de la digráfica D no contiene ciclos (ver **teorema 2.5**), D posee componentes terminales. Sean C_1, C_2, \dots, C_q las componentes terminales de D .

Primero probaremos que cada una de las componentes es una subdigráfica simétrica completa: Sean $u, v \in V(C_1)$, donde C_1 es cualquier componente fuertemente conexa de D , ya que C_1 es una componente fuertemente conexa, entonces v es alcanzable desde u , por lo tanto hay un uv -camino $C = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = v)$, esto implica que $(u_0 = u, u_1), (u_1, u_2) \in F(C_1)$, ya que D es transitiva, entonces $(u_0 = u, u_2) \in F(C_1)$. Repitiendo este procedimiento es claro que $(u, v) \in F(C_1)$. Ya que C_1 es una componente fuertemente conexa entonces u y v son mutuamente alcanzables y por lo tanto podemos repetir el argumento anterior para ver que $(v, u) \in F(C_1)$, por lo tanto para cada par de vértices u y v en la componente fuertemente conexa tenemos que (u, v) y (v, u) son flechas de esa componente, es decir, la componente es una subdigráfica simétrica completa.

1. Probaremos que todo conjunto mínimo por contención con la propiedad de absorbente tiene la misma cardinalidad. Si A es un conjunto mínimo por contención con la propiedad de absorbente, entonces A contiene al menos un vértice de cada componente terminal. De otra forma $V(A) \cap V(C_i) = \emptyset$ para alguna componente conexa C_i , y cada $v \in C_i$ satisface $v \notin A$, $\Gamma(v) \cap A = \emptyset$ pues C_i es una componente terminal y no salen flechas de ella, lo cual contradice que A sea absorbente.

Por lo tanto A contiene al menos un vértice de cada componente terminal.

Sea $a_i \in A \cap C_i$ para $i = 1, 2, \dots, q$. Consideremos el conjunto

$$A' = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$$

A' también es un conjunto absorbente pues para cada $x \notin A'$, si x está en una componente terminal, digamos C_i , como vimos arriba cada componente es una digráfica simétrica completa, entonces $(x, a_i) \in F(D)$ y por lo tanto $a_i \in \Gamma(x) \cap A'$; si x está en una componente no terminal, digamos C_i , entonces hay una flecha $c_i \in F(D)$ que sale de C_i hacia otra componente C_{i_1} , y ya que C_i es una componente fuerte, entonces hay una trayectoria desde x hasta c_i . Si C_{i_1} no es una componente terminal, entonces existe una flecha $c_{i_1} \in F(D)$ que sale de C_{i_1} y en consecuencia como C_{i_1} es una componente fuerte, también hay una trayectoria desde c_i hasta c_{i_1} . Y la unión de estas dos trayectorias nos da una trayectoria que va desde x hasta c_{i_j} . De esta forma seguimos hasta encontrar una componente terminal C_{i_j} con su trayectoria desde x hasta $c_{i_{j-1}}$. Como C_{i_j} es una componente terminal, entonces existe un $a_{i_j} \in A' \cap C_{i_j}$ y también una trayectoria desde $c_{i_{j-1}}$ hasta a_{i_j} , con lo cual obtenemos una trayectoria desde x hasta a_{i_j} . Por la transitividad de D , tenemos que $(x, a_{i_j}) \in F(D)$.

Por lo tanto A' es absorbente en D . Ya que $A' \subset A$ y A es mínimo por contención con la propiedad de absorbente, entonces $A = A'$. Con esto hemos probado que todo conjunto mínimo con la propiedad de absorbente tiene la misma cardinalidad.

2. Probaremos que un conjunto $S \subset V(D)$ es un núcleo si y sólo si S es un conjunto mínimo por contención con la propiedad de absorbente. Si S es un núcleo, entonces S es un conjunto mínimo con la propiedad de absorbente por la **Proposición 3.2**. Inversamente, si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ es un conjunto mínimo con la propiedad de absorbente, entonces A es independiente pues como vimos en la prueba de 1. cada a_i está en una componente terminal y ninguna flecha sale de una componente terminal, por lo tanto no hay flechas entre estos elementos, de esta forma, A es independiente y por lo tanto A es un núcleo de D .†

3.5 Corolario. *Una digráfica D transitiva tiene un núcleo, y todos sus núcleos tienen la misma cardinalidad.*

Podemos construir un conjunto tomando un elemento de cada componente fuertemente conexa terminal y como vimos en la prueba anterior este conjunto será mínimo con la propiedad de absorbente y por lo tanto un núcleo. En la prueba anterior también se demostró que todo núcleo tiene la misma cardinalidad en una digráfica transitiva.

Consecuentemente, en el ejemplo 3.2, toda base de axiomas tiene la misma cardinalidad.

En el corolario siguiente se induce la relación que existe entre gráficas y digráficas en torno al concepto de núcleo, usando para esto las trayectorias en una gráfica G .

3.6 Corolario. *En una gráfica G , existe un conjunto $B \subset V(G)$ tal que:*

- (1) *ninguna trayectoria une dos vértices de B distintos.*
- (2) *todo vértice $v \notin B$ es el vértice inicial de una trayectoria hacia B .*

Prueba: Sea G una gráfica. Sea D la digráfica obtenida de G tal que $V(D) = V(G)$ y $(u, v) \in F(D)$ si y sólo si existe una uv -trayectoria en G . Note que D es una digráfica transitiva: Si $u, v, w \in V(D)$ y $(u, v), (v, w) \in F(D)$ entonces hay una uv -trayectoria en G y una vw -trayectoria en G , entonces la unión de estas es una uw -trayectoria en G y en consecuencia tenemos que $(u, w) \in F(D)$. Por el corolario 3.5 D posee un núcleo, es decir un conjunto de vértices B tal que:

1. no hay flechas entre cualesquiera dos vértices de B , esto implica que no hay ninguna trayectoria que una dos vértices distintos de B .
2. Todo vértice $v \notin B$ es adyacente hacia algún vértice $w \in B$, por lo que debe haber una trayectoria desde v hasta w en G (por la definición de $F(D)$)[†].

3.7 Teorema. *Una digráfica sin ciclos tiene un núcleo y éste es único.*

Prueba: Dada una digráfica D sin ciclos, consideremos los siguientes conjuntos (ver Figura 3.2)

$$V(0) = \{v \in V(D) \mid \Gamma(v) = \emptyset\}$$

$$V(1) = \{v \in V(D) \mid v \notin V(0), \Gamma(v) \subset V(0)\}$$

$$V(2) = \{v \in V(D) \mid v \notin V(0) \cup V(1), \Gamma(v) \subset V(0) \cup V(1)\}$$

En general sea $V(n) = \{v \in V(D) \mid v \notin \bigcup_{i=1}^n V(i), \Gamma(v) \subset \bigcup_{i=1}^n V(i)\}$.

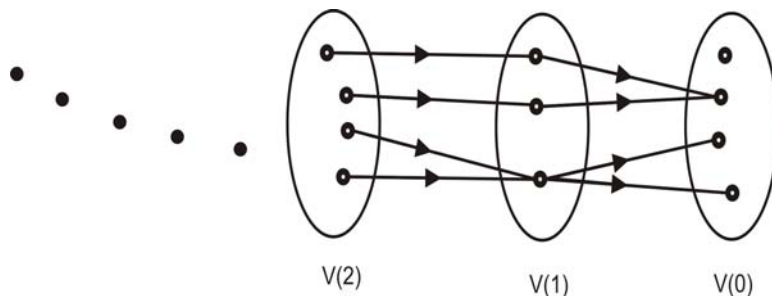


Fig. 3.3 Sucesión de conjuntos $V(0)$, $V(1)$, $V(2)$,

Estos conjuntos son disjuntos dos a dos por construcción de cada $V(i)$. Si $v \in V(k)$ para alguna k , entonces hay una flecha desde v hacia $v_{k-1} \in V(k-1)$, esto se cumple para cada vértice en algún $V(k)$. Por lo tanto si $v \in V(k)$ entonces hay una trayectoria desde v hasta algún vértice $v_0 \in V(0)$. Esta trayectoria es la más larga desde v dado que no hay flechas entre los vértices de cada $V(k)$. Si hubiera una trayectoria de longitud mayor a k , digamos $k+1$, entonces esto implica que hay $k+1$ vértices en k conjuntos desde $V(k-1)$ hasta $V(0)$, un vértice por cada conjunto, lo cual es una contradicción.

Ya que los conjuntos son ajenos dos a dos, para probar que los conjuntos $V(k)$ forman una partición de $V(D)$ sólo hace falta probar que para cada $v \in V(D)$, $v \in V(k)$ para algún k . Sea $v \in V(D)$. Sup $v \notin V(k)$ para todo k número natural. Si $(u, v) \in F(D)$ para algún $u \in V(j)$, entonces $v \in \bigcup_{i=0}^{j-1} V(i)$, contradicción. Si $(v, u) \in F(D)$ para algún $u \in V(j)$, entonces $v \in V(j+1)$, contradicción. Por lo tanto v no es adyacente desde ni hacia ningún $u \in V(k)$. Tampoco es un vértice aislado pues no está en $V(0)$. Por lo tanto v pertenece a una trayectoria T , de vértices que al igual que v no pertenecen a ningún $V(k)$. Observe que T es una digráfica acíclica, la cual, por el **Teorema 2.10** contiene al menos un vértice de exgrado cero, es decir, existe $u \in V(T)$ tal que no hay flechas desde u en T , como tampoco hay flechas desde u hacia $V(D) - V(T)$, entonces u tiene exgrado cero en D , entonces $u \in V(0)$, contradicción. Por lo tanto $v \in V(k)$ para algún $V(k)$ y los conjuntos $V(k)$ forman una partición de $V(D)$.

Vamos a demostrar que D posee un núcleo. Vamos a construir un conjunto S y luego demostraremos que S es núcleo. Según se definió en la **Proposición 3.1**, si $\Gamma(v) = \emptyset$, entonces $\max_{y \in \Gamma(x)} \Phi_S(y) = 0$. Si queremos que S sea un núcleo, entonces la fórmula $\Phi_S(x) = 1 -$

$\max_{y \in \Gamma(x)} \Phi_S(y)$ se debe cumplir, es decir $V(0) \subset S$. Todos los vértices de $V(1)$ son adyacentes hacia $V(0)$, para cumplir la independencia no deben estar en S . Sea $S_1 = \{v \in V(2) \mid \Gamma(v) \subseteq V(1)\}$, $S_2 = \{v \in V(3) \mid \Gamma(v) \subseteq (V(2) - S_1) \cup V(1)\}$, en general, sea $S_n = \{v \in V(n+1) \mid \Gamma(v) \subseteq \cup_{i=1}^{n-1} (V(i) - S_{i-1})\}$, con $S_0 = \emptyset$. Sea $S = (\bigcup S_i) \cup V(0)$. S es independiente por construcción, para demostrar que S es un núcleo falta probar que es absorbente. Sea $v \in V(D) - S$, entonces $v \in V(k)$ para algún entero k pues los conjuntos $V(k)$ forman una partición de $V(D)$. Ya que $v \notin S$, entonces $v \notin S_{k-1}$ y por definición de S_{k-1} hay una flecha desde v hacia $(\bigcup_{i=1}^{k-2} S_i) \cup V(0)$, es decir, hay una flecha desde v hacia S , por lo tanto S es absorbente y S es núcleo de D .†

Veamos dos definiciones relacionadas con nucleos. Dado un vértice $v \in V(D)$ diremos que u es un **sucesor** de v si hay una flecha $(v, u) \in F(D)$. Un **seminúcleo** de una digráfica D se define como un subconjunto, independiente $S \subset V(D)$ tal que cada vértice adyacente desde S tiene al menos un sucesor en S .

Para cada vértice x de una digráfica D , definimos $\Gamma^-(x) = \{v \in V(D) \mid (v, x) \in F(D)\}$.

Demostremos un lema sobre digráficas inducidas que nos será de utilidad en las demostraciones siguientes, después veremos un teorema donde se muestra que una digráfica sin ciclos impares posee un núcleo.

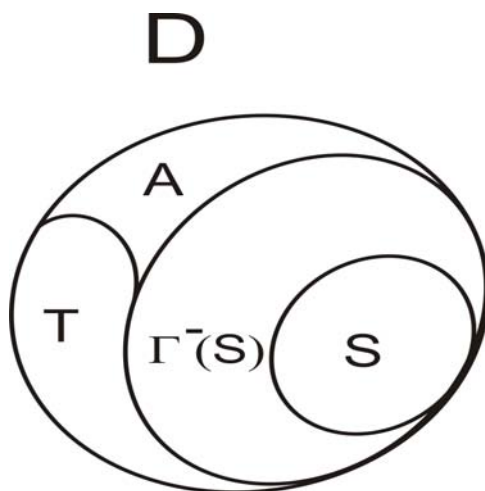


Fig. 3.4 Dibujo para la prueba del **Lema 3.8**

3.8 Lema. Si para cada subconjunto no vacío $A \subset V(D)$, la subdigráfica $D[A]$ tiene un seminúcleo no vacío, entonces D tiene un

núcleo.

Prueba: Sea S un conjunto máximo con la propiedad de ser seminúcleo de D , y sea $A = (V(D) - S) - \Gamma_D^-(S)$, ver Figura 3.4.

Si $A = \emptyset$, entonces S es un núcleo, pues S ya es independiente. Si $A \neq \emptyset$, entonces $D[A]$ tiene un seminúcleo T . No hay flechas desde A hacia S por construcción de A , note también que desde S no hay flechas hacia A pues ya que S es seminúcleo, habría una flecha desde A hacia S , por lo tanto A y S son **conjuntos independientes**, es decir no hay flechas entre ellos. En particular S y T son independientes pues $T \subset A$; así, $S \cup T$ es un conjunto independiente. Cada $v \notin S \cup T$, pertenece a A o bien pertenece a $\Gamma_D^-(S)$. Sea $v \in A$ adyacente desde $S \cup T$. Entonces v tiene un sucesor en $S \cup T$, pues v no es adyacente desde S . Si v es adyacente desde T , entonces v tiene un sucesor en T por ser T seminúcleo de $D[A]$. Si $v \in \Gamma_D^-(S)$ es adyacente desde $S \cup T$, entonces v es adyacente hacia S por definición de $\Gamma_D^-(S)$ y por lo tanto v es adyacente hacia $S \cup T$. Así, $S \cup T$ es un seminúcleo de D , lo cual contradice la maximalidad de S . †

3.9 Teorema. *Si D es una digráfica sin ciclos impares, entonces D tiene al menos un núcleo.*

Prueba: Sea D una subdigráfica sin ciclos impares. Observe que toda subdigráfica inducida de D carece de ciclos impares. Ahora, si una digráfica sin ciclos impares tiene seminúcleo entonces toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío, luego, por el **Lema 3.8**, es suficiente con mostrar que D posee un seminúcleo no vacío. Podemos suponer que D es conexa, de otra forma podemos repetir la prueba en cada componente conexa y obtener el resultado.

Sea V_1 una componente fuertemente conexa de D (definida en la sección 2) con $\Gamma(V_1) \subset V_1$, es decir una componente terminal de D . Si $|V_1| = 1$, entonces $V_1 = \{v\}$ es un seminúcleo ya que según la definición, al no existir flechas en V_1 , todo sucesor de este vértice es adyacente hacia v . Si $|V_1| > 1$, y si $v_0 \in V_1$, sea v un vértice en V_1 distinto de v_0 . Entonces todas las v_0v -trayectorias están contenidas en V_1 por la condición $\Gamma(V_1) \subset V_1$; y tienen la misma paridad, (de otra forma un circuito impar y por lo tanto un ciclo impar podría estar formado con la composición de dos v_0v -trayectorias).

Sea S el conjunto de todos los vértices $v \in V_1$ tales que todas las v_0v -trayectorias son pares. El conjunto S es independiente, pues si u y v están en S son tales que $(u, v) \in F(D)$, y $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n = u)$ es

una v_0u -trayectoria par, entonces $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n = u, v)$ es una v_0v -trayectoria impar, lo que contradice la característica de los elementos de S . Por lo tanto S es independiente.

Vamos a ver que si $z \in V(D)$ es adyacente desde algún $v \in S$, entonces cada sucesor de z pertenece a S . Sea $w \in V(D)$ un sucesor de z . Ya que V_1 es una componente terminal, entonces $z, w \in V(V_1)$. Supongamos que existe T , una v_0w -trayectoria impar en V_1 , como v_0 y w están en la misma componente fuerte, entonces hay una T' , wv_0 -trayectoria en D . Como en D no hay ciclos impares, entonces T' tiene la misma paridad que T , es decir, T' es una wv_0 -trayectoria impar. Entonces la trayectoria $(v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ seguida de T' forman un camino el cual contiene un ciclo de longitud impar, contradicción. Por lo tanto no existe ninguna v_0w -trayectoria de longitud impar en D y entonces cualquier sucesor de z pertenece a S . Así, S es un seminúcleo de D .†

4. DIGRÁFICAS NÚCLEO PERFECTAS

Berge se propuso caracterizar las *digráficas núcleo imperfectas críticas*, digráficas sin núcleo tales que la eliminación de un conjunto de vértices cualquiera produce una digráfica con núcleo; los ciclos impares y las Figuras 3.1 y 3.2 dan ejemplos de digráficas núcleo imperfectas críticas.

Se dice que una digráfica es *núcleo perfecta* si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo. Las condiciones suficientes, conocidas, aseguran la existencia de un núcleo en una digráfica, lo cual implica que una digráfica es núcleo perfecta si las condiciones se cumplen también para las digráficas inducidas de D :

4.1 Teorema. *Una digráfica simétrica es núcleo-perfecta.*

Prueba: Por el **Teorema 3.3** toda digráfica simétrica posee un núcleo. Toda subdigráfica inducida de una digráfica simétrica es simétrica. Aplicando el **teorema 3.3.** a cada subdigráfica inducida de D obtenemos el teorema.†

4.2 Teorema. *Una digráfica transitiva es núcleo-perfecta.*

Prueba: Por el **Corolario 3.5** toda digráfica transitiva posee un núcleo. Toda subdigráfica inducida de una digráfica transitiva es transitiva. Aplicando el mismo **Corolario 3.5** a cada subdigráfica inducida de D se sigue el teorema.†

4.3 Teorema. *Una digráfica sin ciclos es núcleo-perfecta.*

Prueba: Sea D una digráfica sin ciclos. Toda subdigráfica inducida de D es acíclica, aplicando el **Teorema 3.7** a cada digráfica inducida de D obtenemos que toda digráfica inducida de D tiene núcleo.†

4.4 Teorema. *Una digráfica sin ciclos impares es núcleo-perfecta.*

Prueba: Sea D una digráfica sin ciclos impares. Por el **Teorema 3.9** sabemos que toda digráfica sin ciclos impares contiene al menos un núcleo. Puesto que toda subdigráfica inducida de D carece de ciclos

impares, entonces obtenemos el teorema.†

4.5 Teorema. *Si los ciclos impares de una digráfica D -en caso de poseerlos- son simétricos, entonces D es núcleo-perfecta.*

Prueba: Sea D_1 una digráfica como en la hipótesis del teorema. Si D es una digráfica inducida de D_1 , entonces los ciclos impares de D son simétricos. Por el **Lema 3.8** es suficiente con demostrar que D posee un seminúcleo.

Como en la prueba del **Teorema 3.9**, podemos suponer que D es conexa, de otra forma podemos repetir esta prueba en cada componente conexa de D . Sea V_1 como en el **Teorema 3.9**. Si $|V_1| = 1$, entonces V_1 es un seminúcleo. Si $|V_1| > 1$, sea $v_0 \in V_1$ y sea S el conjunto de vértices de V_1 tal que toda v_0v -trayectoria es par con $v \in V_1$ y $v_0 \neq v$. S es independiente pues si $v_1 \in S$ y $(v_1, v_2) \in F(V_1)$, entonces existe una v_0v_2 -trayectoria impar en V_1 , por lo que $v_2 \notin S$.

Si z es un vértice de V_1 adyacente desde $v_1 \in S$, entonces cada sucesor de z pertenece a S :

Si w es sucesor de z y está en alguna v_0v_1 -trayectoria $T_1 = (v_0 = u_0, u_1, \dots, u_i = w, \dots, u_n = v_1)$, entonces si $(u_0 = v_0, u_1, \dots, u_i = w)$ es impar, entonces $(u_i = w, u_{i+1}, \dots, u_n = v_1)$ es una trayectoria impar y (w, \dots, v_1, z, w) es un ciclo impar, por lo tanto simétrico y $(u_0 = v_0, u_1, \dots, u_i = w, z, v_1)$ es una v_0v_1 -trayectoria impar, lo cual contradice la elección de v_1 . Por lo tanto toda v_0w -trayectoria es de longitud par.

Si w no está en alguna v_0v_1 -trayectoria, supongamos que existe una v_0w -trayectoria T_0 de longitud impar, como $v_1, w \in V_1$ y ésta es una componente fuertemente conexa de D , entonces existe una wv_1 -trayectoria T_w . Si T_w es de longitud impar, entonces si denotamos por T_1 la v_0v_1 -trayectoria, la unión de $T_1, (v_1, z), (z, w), T_w$ produce un ciclo de longitud impar y por lo tanto simétrico, lo cual genera una v_0v_1 -trayectoria de longitud impar. Si T_w es de longitud par, entonces $T_0 \cup T_w$ es un ciclo de longitud impar y por lo tanto simétrico y entonces la unión de $T_1, (v_1, z), (z, w), T_0$ es un ciclo de longitud impar y por lo tanto simétrico que genera una v_0v_1 -trayectoria de longitud impar.†

5. Digráficas coloreadas

En esta sección abordamos el concepto digráficas coloreadas. Aunque podemos hablar de digráficas cuyos vértices están coloreados, en este trabajo hablaremos de una digráfica coloreada cuando asignamos un color a cada flecha de una digráfica. También asociado a las digráficas coloreadas surgen las ideas de núcleo por trayectorias monocromáticas y la cerradura de una digráfica. Veremos la relación entre la existencia de un núcleo por trayectorias monocromáticas en una digráfica 2-coloreada y la existencia un núcleo en la cerradura de la digráfica.

La *parte asimétrica de D* (resp. *parte simétrica de D*), la cual denotamos por $\text{Asim}(D)$ (resp. $\text{Sim}(D)$), es la subdigráfica de D flecha inducida por el conjunto de flechas asimétricas (resp. simétricas) de D (ver definición de digráfica flecha inducida en la primera sección) ver Figura 5.1. En esta sección entenderemos por una trayectoria una sucesión finita o infinita (x_1, x_2, \dots) de vértices distintos de D tales que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ para toda i . Cuando $V(D)$ es infinito y la sucesión de una trayectoria es infinita decimos que la sucesión es una *trayectoria infinita exterior*. Sean S_1 y S_2 subconjuntos de $V(D)$, llamaremos a una trayectoria finita (x_1, x_2, \dots, x_n) una S_1S_2 -trayectoria siempre que $x_1 \in S_1$ y $x_2 \in S_2$, en particular cuando la trayectoria consta sólo de dos vértices, es decir es una flecha.

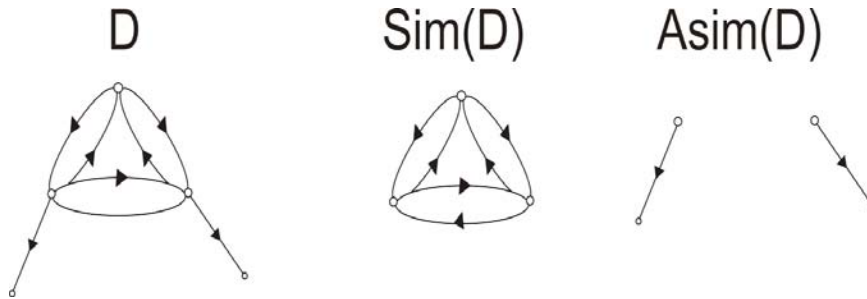


Fig. 5.1 Una digráfica D , su parte simétrica $\text{Sim}(D)$ y su parte asimétrica $\text{Asim}(D)$

Diremos que una digráfica está *coloreada por flechas* con m colores si existe una función suprayectiva de $F(D)$ en $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ (ver Figura 5.2). Se dice que una trayectoria T es *monocromática* si todas las flechas de la trayectoria T tienen el mismo color, es decir, si f es la función que colorea las flechas de una digráfica D entonces $f(a) = i$

para toda flecha a de la trayectoria T .

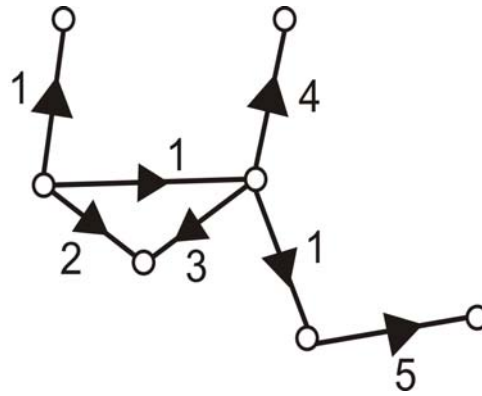


Fig. 5.2 Ejemplo de una digráfica 5-coloreada.

5.1 Teorema(Sands et. al. [9]) *Sea D una digráfica cuyas flechas están coloreadas con dos colores. Si D no contiene alguna trayectoria monocromática infinita exterior, entonces existe un subconjunto S de vértices de D tal que: dos vértices cualesquiera de S no están conectados por una trayectoria monocromática y para todo vértice x que no está en S existe una trayectoria monocromática desde x a un vértice en S .*

Incluiremos algunas definiciones con objeto de comprender mejor el **Teorema 5.1**.

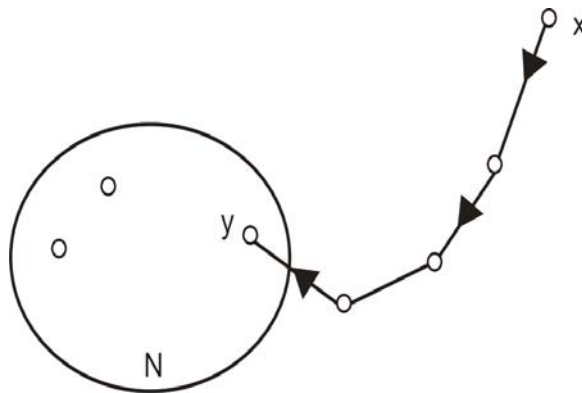


Fig. 5.3 Condición ii) de núcleo por trayectorias monocromáticas.

Si D es una digráfica coloreada por flechas con m colores (m -coloreada), decimos que un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un **núcleo por trayectorias**

monocromáticas si satisface las dos condiciones siguientes:

i) Para todo par de vértices distintos $u, v \in N$ no existe una trayectoria monocromática entre ellos.

ii) Para todo vértice $x \in V(D) - N$ existe un vértice $y \in N$ tal que existe una xy -trayectoria monocromática (ver Figura 5.3).

A continuación vamos a definir el concepto de cerradura de una digráfica, el cual nos sirve para dar la relación entre núcleo por trayectorias monocromáticas y núcleo. Si D es una digráfica m -coloreada, entonces la **cerradura** $\mathcal{C}(D)$ de D es la digráfica m -coloreada definida como sigue:

$$V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$$

$F(\mathcal{C}(D)) = \{(u, v) \text{ con color } i \mid \text{ existe una } uv\text{-trayectoria monocromática de color } i \text{ contenida en } D\}$.

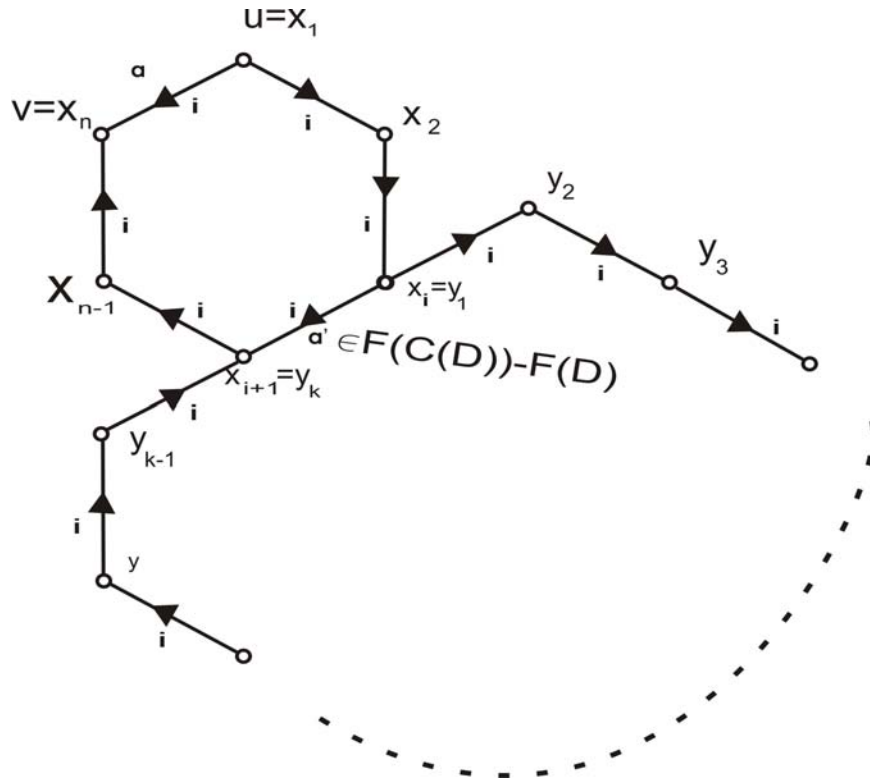


Fig. 5.4 Ilustra la prueba de la Proposición 5.2.

Note que $F(D) \subset F(\mathcal{C}(D))$ pues una flecha (u, v) de color i es una trayectoria monocromática de color i .

5.2 Proposición $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) \cong \mathcal{C}(D)$

Prueba: $V[\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))] = V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$ y $F[\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))] \supset F(\mathcal{C}(D))$ por definición de la cerradura de D . Si $a = (u, v) \in F[\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))] - F(\mathcal{C}(D))$ entonces existe una uv -trayectoria $T = (x_1 = u, x_2, \dots, x_n = v)$ monocromática de color i contenida en $\mathcal{C}(D)$, ver Figura 5.4.

Si $T \subset D$, entonces $a \in F(\mathcal{C}(D))$ lo cual no puede ser. Por lo tanto $T \not\subset D$, por lo que existe $a' = (x_i, x_{i+1}) \in F(\mathcal{C}(D)) - F(D)$ tal que $a' \in F(T)$, por lo que el color de a' es i , lo cual implica que existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática $T' = (y_1 = x_i, y_2, y_3, \dots, y_k = x_{i+1})$ en D de color i . Sea $T_1 = (x_1, x_2, \dots, x_i = y_1, y_2, \dots, y_k = x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n = v)$, entonces T_1 es un uv -camino dirigido en D , de color i del que podemos obtener una uv -trayectoria de color i contenida en D , esto implica que $a \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $F[\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))] = F(\mathcal{C}(D))$ y entonces $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) \cong \mathcal{C}(D)$.[†]

5.3 Proposición. *Sea D una digráfica, D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo.*

Prueba: Supongamos que D tiene un núcleo N por trayectorias monocromáticas. Observemos que una flecha es una trayectoria monocromática. Para todo par de vértices de N no hay ninguna trayectoria monocromática, pues N es un núcleo por trayectorias monocromáticas, así que N es independiente en $\mathcal{C}(D)$. Si $x \in V(\mathcal{C}(D)) - N$ entonces existe una xy -trayectoria monocromática en D con $y \in N$, por lo que $(x, y) \in F(\mathcal{C}(D))$, y entonces N es absorbente en $\mathcal{C}(D)$. Por lo que N es un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

Supongamos que $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo N . Sean $u, v \in N$, como N es independiente en $\mathcal{C}(D)$, $\{(u, v), (v, u)\} \not\subseteq F(D)$, por lo tanto no existe ninguna uv -trayectoria monocromática en D y tampoco ninguna vu -trayectoria monocromática en D . Si $x \in V(D) - N$, como N es absorbente en $\mathcal{C}(D)$, entonces existe $y \in N$ tal que $(x, y) \in F(\mathcal{C}(D))$, es decir, existe una xy -trayectoria monocromática en D . Por lo tanto N es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D .[†]

Con esta terminología el **Teorema 5.1** afirma que si D es una digráfica 2-coloreada, la cual no contiene alguna trayectoria monocromática infinita exterior entonces $\mathcal{C}(D)$ contiene un núcleo.

Observación 5.1. El **Teorema 5.1** es equivalente a la siguiente afirmación. *Sea D una digráfica. D_1 y D_2 subdigráficas transitivas de D tales que $D = D_1 \cup D_2$. Si D no tiene trayectorias infinitas exteriores contenidas en D_i ($i = 1, 2$) entonces D tiene un núcleo.*

En una digráfica transitiva D , para una trayectoria monocromática $T = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ tenemos que $\{(u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_1, u_4), \dots, (u_1, u_n)\} \subset F(D)$. Por lo tanto en una digráfica transitiva D , la cerradura de una digráfica es igual a D misma. Así mismo la cerradura de una digráfica coloreada con un solo color es transitiva. Por lo tanto se cumple la observación 5.1.

6. Núcleos en digráficas pretransitivas.

El resultado central de esta sección es el **Teorema 6.3**, en el cual se dan algunas condiciones suficientes para la existencia de un núcleo en una digráfica relacionadas con la pretransitividad izquierda, derecha y la no existencia de trayectorias infinitas exteriores en una digráfica. Para probarlo usaremos un método relacionado con el usado por Sands et. al. [9].

Primero verémos algunas definiciones. Diremos que una digráfica D es **pretransitiva derecha** si para cualesquiera u, v, w vértices de D tales que $(u, v) \in F(D)$ y $(v, w) \in F(D)$ implica $(u, w) \in F(D)$ ó $(w, v) \in F(D)$. Una digráfica D es **pretransitiva izquierda** si para cualesquiera u, v, w vértices de D tales que $(u, v) \in F(D)$ y $(v, w) \in F(D)$ implica $(u, w) \in F(D)$ ó $(v, u) \in F(D)$.

Recordaremos algunas definiciones que son necesarias para luego enunciar el lema de Zorn.

Una pareja (\mathbf{F}, \leq) consistente de un conjunto y un orden parcial sobre el conjunto es llamada un **conjunto parcialmente ordenado**.

Decimos que un orden es **orden total** si para todo a y b se tiene que $a \leq b$ o $b \leq a$. Cuando el orden es total en un conjunto el conjunto es llamado una **cadena**.

Sea $A \subseteq \mathbf{F}$. Un elemento $b \in \mathbf{F}$ es una **cota superior para A** si $a \leq b$ para todo $a \in A$.

Se dice que un elemento m en \mathbf{F} es **máximo por el orden \leq** si, siempre que $x \in \mathbf{F}$ con $m \leq x$ implica que $x = m$.

Lema de Zorn. *Si \mathbf{F} es un conjunto parcialmente ordenado en el que toda cadena de \mathbf{F} tiene una cota superior en \mathbf{F} , entonces \mathbf{F} tiene un elemento maximal.*

Introduciremos una nueva notación: Dadas dos subdigráficas de D ; D_1 y D_2 (con la posibilidad de que $F(D_1) \cap F(D_2) \neq \emptyset$). Para vértices distintos x, y de D , escribimos $x \xrightarrow{i} y$ cuando la flecha $(x, y) \in F(D_i)$, y $x \xrightarrow{i} S$ denotará que existe una flecha en D_i desde x hacia algún vértice en S , $S \subseteq V(D)$, donde $i = 1, 2$. Cuando no sabemos si la flecha está en D_1 o en D_2 escribimos simplemente $x \rightarrow y$. La negación de $x \xrightarrow{i} y$

(resp. $x \xrightarrow{i} S$) será denotada $x \not\xrightarrow{i} y$ (resp. $x \not\xrightarrow{i} S$) para $i = 1, 2$.

Presentamos dos lemas que usaremos en la prueba del **Teorema 6.3**.

6.1 Lema. *Sea D una digráfica pretransitiva izquierda o pretransitiva derecha. Si (x_1, x_2, \dots, x_n) es una sucesión de vértices tal que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ y $(x_{i+1}, x_i) \notin F(D)$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, entonces la sucesión es una trayectoria y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $(x_i, x_j) \in F(D)$ y $(x_j, x_i) \notin F(D)$, para cada $j \in \{i+1, \dots, n\}$.*

Prueba: Procederemos por inducción sobre n . Si $n = 1$, la trayectoria (x_1) cumple la hipótesis por vacuidad. Si $n = 2$, entonces (x_1, x_2) es una trayectoria pues $(x_1, x_2) \in F(D)$ por lo tanto $x_1 \neq x_2$ el lema se cumple.

Supongamos que el resultado se cumple para toda sucesión (x_1, x_2, \dots, x_n) , la cual satisface las hipótesis del **Lema 6.1**.

Consideremos una sucesión $T = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ y $(x_{i+1}, x_i) \notin F(D)$. Como (x_1, \dots, x_n) y (x_2, \dots, x_{n+1}) cumplen la hipótesis de inducción, sólo necesitamos probar que $x_1 \neq x_{n+1}$, $(x_1, x_{n+1}) \in F(D)$ y $(x_{n+1}, x_1) \notin F(D)$. Ver Figura 6.1.

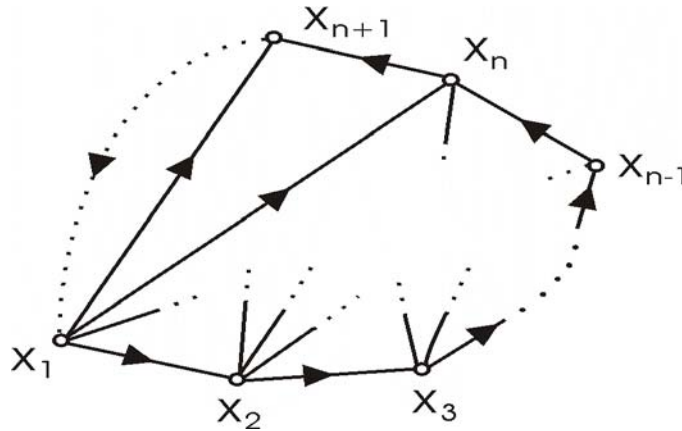


Fig. 6.1 *Digráfica para la prueba del lema 6.1*

Primero, supongamos por contradicción que $x_1 = x_{n+1}$. Se sigue de las hipótesis sobre (x_1, \dots, x_n) que $(x_1, x_n) \in F(D)$, en este caso $(x_{n+1} = x_1, x_n) \in F(D)$, contradiciendo nuestra hipótesis sobre T ; por

lo tanto T es una trayectoria.

Ahora consideremos las flechas de D : (x_1, x_n) y (x_n, x_{n+1}) ; por hipótesis de inducción en T sucede que $(x_n, x_1) \notin F(D)$, por lo que si D es una digráfica pretransitiva izquierda, entonces $(x_1, x_{n+1}) \in F(D)$. Si D es una digráfica pretransitiva derecha, entonces $(x_1, x_{n+1}) \in F(D)$ pues $(x_{n+1}, x_n) \notin F(D)$ por la hipótesis de inducción en $(x_2, x_3, \dots, x_{n+1})$.

Finalmente supongamos que $(x_{n+1}, x_1) \in F(D)$; Cuando D es una digráfica pretransitiva derecha, considerando las flechas (x_{n+1}, x_1) y (x_1, x_n) tenemos que $(x_{n+1}, x_n) \in F(D)$ (lo cual es falso por la hipótesis de inducción en la sucesión $(x_2, x_3, \dots, x_{n+1})$) o $(x_n, x_1) \in F(D)$ (lo cual es falso por la hipótesis de inducción en la sucesión (x_1, x_2, \dots, x_n)). Cuando D es una digráfica pretransitiva izquierda considerando las flechas (x_n, x_{n+1}) y (x_{n+1}, x_1) tenemos que $(x_n, x_1) \in F(D)$ (lo cual es falso por la hipótesis de inducción en la sucesión (x_1, x_2, \dots, x_n)) o $(x_{n+1}, x_n) \in F(D)$, lo cual es falso por la hipótesis de inducción en la sucesión (x_2, \dots, x_{n+1}) . Por lo tanto $(x_{n+1}, x_1) \notin F(D)$.[†]

6.2 Lema. *Sea D una digráfica pretransitiva derecha o pretransitiva izquierda. Si D no contiene alguna trayectoria infinita exterior, para cada $U \neq \emptyset$, con $U \subset V(D)$ existe $x \in U$ tal que: $(x, y) \in F(D)$ para todo $y \in U$ implica que $(y, x) \in F(D)$.*

Prueba: Supongamos por contradicción que para cada $x \in U$, existe $y \in U$ tal que $(x, y) \in F(D)$ y $(y, x) \notin F(D)$. Consideremos algún $x_1 \in U$, entonces existe algún $x_2 \in U$ tal que $(x_1, x_2) \in F(D)$ y $(x_2, x_1) \notin F(D)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$; dada $x_n \in U$, existe $x_{n+1} \in U$ tal que $(x_n, x_{n+1}) \in F(D)$ y $(x_{n+1}, x_n) \notin F(D)$. Del **Lema 6.1** se sigue que $T_{n+1} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ es una trayectoria. Consideremos la sucesión $T = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, x_{n+1}) \in F(T_{n+1}) \subset F(D)$; para $n < m$ tenemos $\{x_n, x_m\} \subset V(T_m)$, y como T_m es una trayectoria, obtenemos $x_n \neq x_m$; Por lo que T es una trayectoria infinita exterior, contradicción. Por lo tanto se cumple el lema.[†]

6.3 Teorema(H. Galeana, R. Rojas [10]). *Sea D una digráfica. Si existen dos subdigráficas de D , digamos D_1 y D_2 (con la posibilidad de que suceda $F(D_1) \cap F(D_2) \neq \emptyset$), donde D_1 es una digráfica pretransitiva derecha, D_2 una digráfica pretransitiva izquierda y D_i no contiene alguna trayectoria infinita exterior para $i \in \{1, 2\}$. Entonces D es una digráfica núcleo-perfecta.*

Prueba: Es suficiente con probar que D posee un núcleo ya que toda subdigráfica inducida de D satisface las hipótesis del **Teorema 6.3**, cuando la subdigráfica inducida no contenga flechas o vértices de D_1 se puede elegir un vértice cualquiera de la digráfica D_2 inducida, ya que un sólo vértice cumple las condiciones de pretransitividad derecha, así mismo cuando la digráfica inducida no contenga flechas o vértices de D_2 .

Para dos conjuntos independientes de vértices de D digamos S y T , escribiremos $S \leq T$ si y sólo si, para cada $s \in S$ existe $t \in T$, tal que $s = t$ o $(s \xrightarrow{1} t \text{ y } t \not\xrightarrow{1} s)$. Observe que $S \subseteq T$ implica $S \leq T$. Si $D_1 = \{v\}$, entonces $S \leq T$ si y sólo si $S \subseteq T$, es decir \leq está bien definido para cualquier subdigráfica inducida de D .

(1) La colección de subconjuntos independientes de $V(D)$ es un conjunto parcialmente ordenado por \leq (es decir, la relación \leq es reflexiva, transitiva y antisimétrica).

i) \leq es reflexiva (es decir $S \leq S$).

Se sigue de que $S \subseteq S$ y de la **observación 7.5**.

ii) \leq es transitiva (es decir, si $S \leq T$ y $T \leq R$ entonces $S \leq R$).

Sean S, T y R subconjuntos independientes de $V(D)$, tales que $S \leq T$ y $T \leq R$. Sea $s \in S$. Como $S \leq T$, entonces existe $t \in T$ tal que $s = t$ o $(s \xrightarrow{1} t \text{ y } t \not\xrightarrow{1} s)$; $T \leq R$ implica que existe $r \in R$ tal que $t = r$ o $(t \xrightarrow{1} r \text{ y } r \not\xrightarrow{1} t)$. Si $s = t$ o $t = r$, entonces $s = r$ o $(s \xrightarrow{1} r \text{ y } r \not\xrightarrow{1} s)$ con $r \in R$. Así que podemos suponer que $s \neq t$ y $t \neq r$, por lo tanto se cumple que $(s \xrightarrow{1} t \text{ y } t \not\xrightarrow{1} s)$ y $(t \xrightarrow{1} r \text{ y } r \not\xrightarrow{1} t)$. Como D_1 es una digráfica pretransitiva derecha, se sigue del **Lema 6.1** aplicado a la sucesión (s, t, r) que $(s \xrightarrow{1} r \text{ y } r \not\xrightarrow{1} s)$.

iii) \leq es antisimétrica (es decir, si $S \leq T$ y $T \leq S$, entonces $S = T$).

Sean S y T dos conjuntos de vértices de D , independientes tales que $S \leq T$ y $T \leq S$. Sea $s \in S$, como $S \leq T$ existe $t \in T$, tal que $s = t$ o $(s \xrightarrow{1} t \text{ y } t \not\xrightarrow{1} s)$. Si $s = t$, entonces $s \in T$. Supongamos que $s \neq t$; puesto que $T \leq S$, entonces para t , existe $s' \in S$, tal que $t = s'$ o $(t \xrightarrow{1} s' \text{ y } s' \not\xrightarrow{1} t)$. Cuando $t = s'$, tenemos que $s \xrightarrow{1} s'$, contradiciendo

la independencia de S . Por lo que $t \neq s'$ y $(t \xrightarrow{1} s'$ y $s' \not\xrightarrow{1} t)$. Aplicando el **Lema 6.1** a la sucesión (s, t, s') , tenemos $s \xrightarrow{1} s'$ contradiciendo la independencia del conjunto S . Por lo tanto concluimos que $t = s$ y por lo tanto $s \in T$ y $S \subseteq T$. Análogamente se prueba que $T \subseteq S$.

Sea \mathbf{F} la familia de todos los subconjuntos S de vértices de D independientes, tales que $S \xrightarrow{2} y$ implica que $y \rightarrow S$ para todos los vértices y de D_2 , ver Figura 6.2. Cuando $D_2 = \{v\}$, por vacuidad está bien definido \mathbf{F} .

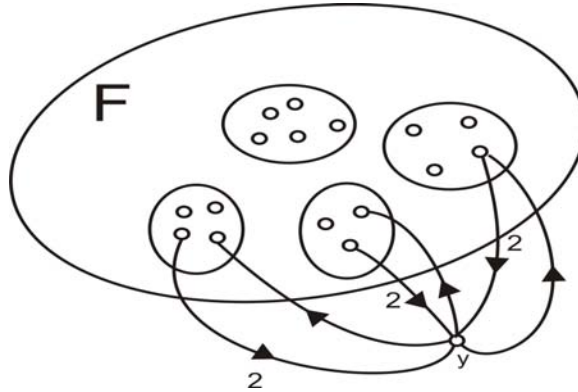


Fig. 6.2 Figura la construcción de \mathbf{F}

(2) (\mathbf{F}, \leq) tiene elementos máximos por el orden \leq que pertenecen a \mathbf{F} (es decir, existe un $S \in \mathbf{F}$ tal que para todo $T \in \mathbf{F}$ con $S \leq T$ tenemos que $S = T$).

Para probarlo usaremos el lema de Zorn que enunciamos al principio de esta sección.

(2.1) Primero probaremos que $\mathbf{F} \neq \emptyset$.

D_2 es una digráfica pretransitiva izquierda, la cual no contiene trayectorias infinitas exteriores, aplicando el **Lema 6.2** a D_2 con conjunto $U = V(D_2)$ (Al considerar una subdigráfica inducida sin flechas en D_2 se siguen cumpliendo las hipótesis del lema), se sigue que existe un vértice $x \in U = V(D_2)$ tal que $x \xrightarrow{2} y$ implica que $(y, x) \in F(D)$, es decir, $y \rightarrow x$ para todos los vértices y de D_2 , por lo tanto $\{x\} \in \mathbf{F}$.

(2.2) Toda cadena en (\mathbf{F}, \leq) está acotada superiormente.

Sea \mathbf{C} una cadena en (\mathbf{F}, \leq) , y definamos $S^\infty = \{s \in \bigcup_{S \in \mathbf{C}} S \mid \text{existe } S \in \mathbf{C} \text{ tal que } s \in T \text{ siempre que } T \in \mathbf{C} \text{ y } S \leq T\}$ (un v3rtice s , elemento de $\bigcup_{S \in \mathbf{C}} S$ pertenece a S^∞ si existe un conjunto $S \in \mathbf{C}$ tal que para todo $T \in \mathbf{C}$ con $S \leq T$ contiene a s). Es decir S^∞ consta de todos los v3rtices de D que pertenecen a todos los miembros de la cadena \mathbf{C} a partir de alg3n momento.

Probaremos que S^∞ es una cota superior de \mathbf{C} .

(2.2.1) $S^\infty \neq \emptyset$, y para cada $S \in \mathbf{C}$, $S \leq S^\infty$.

Sea $S \in \mathbf{C}$ y $t_0 \in S$, probaremos que existe $t \in S^\infty$ tal que $t_0 = t$ o $(t_0 \xrightarrow{1} t \text{ y } t \not\xrightarrow{1} t_0)$. Si $t_0 \in S^\infty$ no tenemos nada que probar, por lo tanto podemos suponer que $t_0 \notin S^\infty$. Para probar que existe $t \in S^\infty$ tal que $(t \xrightarrow{1} t_0 \text{ y } t_0 \not\xrightarrow{1} t)$ procederemos por contradicci3n; Supongamos que si $t \in V(D)$ con $(t_0 \xrightarrow{1} t \text{ y } t_0 \not\xrightarrow{1} t)$ entonces $t \notin S^\infty$ (Si D_1 es una digr3fica sin flechas, no es necesario probarlo).

Sea $T_0 = S$; como $t_0 \notin S^\infty$, tenemos que para todo $T \in \mathbf{C}$ que contenga a t_0 existe un $T' \in \mathbf{C}$, con $T \leq T'$ tal que $t_0 \notin T'$ en particular, para T_0 existe $T_1 \in \mathbf{C}$, con $T_0 \leq T_1$ tal que $t_0 \notin T_1$. Como $T_0 \leq T_1$ y $t_0 \notin T_1$, entonces existe $t_1 \in T_1$ tal que $(t_0 \xrightarrow{1} t_1 \text{ y } t_1 \not\xrightarrow{1} t_0)$. Por hip3tesis, si $t_1 \in V(D)$ con $(t_0 \xrightarrow{1} t_1 \text{ y } t_1 \not\xrightarrow{1} t_0)$ entonces $t_1 \notin S^\infty$. Lo cual implica que $t_1 \notin T_2$ para alg3n $T_2 \in \mathbf{C}$, con $T_1 \leq T_2$ y tambi3n existe $t_2 \in T_2$ tal que $(t_1 \xrightarrow{1} t_2 \text{ y } t_2 \not\xrightarrow{1} t_1)$. Como D_1 es una digr3fica pretransitiva derecha, se sigue del **Lema 6.1** aplicado a la sucesi3n $\tau_2 = (t_0, t_1, t_2)$, que τ_2 es una trayectoria, $t_0 \xrightarrow{1} t_2$ y $t_2 \not\xrightarrow{1} t_0$, y $t_2 \notin S^\infty$. Podemos continuar de esa forma y obtener para cada $n \in \mathbb{N}$: $T_n \in \mathbf{C}$, $t_n \in T_n$, $(t_0 \xrightarrow{1} t_n \text{ y } t_n \not\xrightarrow{1} t_0)$ y $t_n \notin S^\infty$, por lo tanto existe $T_{n+1} \in \mathbf{C}$ tal que $T_n \leq T_{n+1}$ y $t_n \notin T_{n+1}$; por lo que existe $t_{n+1} \in T_{n+1}$ con $t_n \xrightarrow{1} t_{n+1}$ y $t_{n+1} \not\xrightarrow{1} t_n$.

Como D_1 es una digr3fica pretransitiva derecha, y $(t_n \xrightarrow{1} t_{n+1} \text{ y } t_{n+1} \not\xrightarrow{1} t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$; se sigue de el **Lema 6.1** en la sucesi3n $\tau_{n+1} = (t_0, t_1, \dots, t_{n+1})$, que τ_{n+1} es una trayectoria en D_1 y $(t_0 \xrightarrow{1} t_{n+1} \text{ y } t_{n+1} \not\xrightarrow{1} t_0)$. Y las deducciones implican que $t_{n-1} \notin S^\infty$. Ahora consideremos la sucesi3n $\tau = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $t_n \xrightarrow{1} t_{n+1}$, y para cada $n < m$, $\{t_n, t_m\} \subseteq V(\tau_m)$; y como τ_m es una trayectoria tenemos que $t_n \neq t_m$. Por lo tanto τ es una trayectoria exterior infinita contenida en D_1 , contradicci3n. Concluimos que existe $t \in S^\infty$ tal que

$$t_0 = t \text{ o } (t_0 \xrightarrow{1} t \text{ y } t \not\xrightarrow{1} t_0).$$

(2.2.2) S^∞ es un conjunto independiente.

Sean $s_1, s_2 \in S^\infty$, entonces podemos suponer que $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ con $S_1, S_2 \in \mathbf{C}$. Como $S_1, S_2 \in \mathbf{C}$, entonces $S_1 \leq S_2$ o $S_2 \leq S_1$, por lo que podemos suponer que $S_1 \leq S_2$. Como $s_1 \in S^\infty$, entonces $s_1 \in S$ para todo $S \in \mathbf{C}$ tal que $S_1 \leq S$, así, $s_1 \in S_2$ y como S_2 es independiente, no hay flechas entre s_1 y s_2 en D .

(2.2.3) $S^\infty \in \mathbf{F}$, es decir, $S^\infty \xrightarrow{2} y$ implica $y \rightarrow S^\infty$ para todos los vértices $y \in D_2$.

Supongamos $S^\infty \xrightarrow{2} y$ con $y \in V(D_2)$, entonces existe $s \in S^\infty$ con $s \xrightarrow{2} y$. Como $s \in S^\infty$, tenemos que existe $S \in \mathbf{C}$ tal que $s \in T$ para toda $T \in \mathbf{C}$, $S \leq T$.

Como $S \in \mathbf{F}$ (pues $S \in \mathbf{C}$ y \mathbf{C} es una cadena de \mathbf{F}) y $s \xrightarrow{2} y$ tenemos que $y \rightarrow S$, por lo que existe $s' \in S$ con $y \rightarrow s'$. Cuando $s' \in S^\infty$ no hay nada que probar. Cuando $s' \notin S^\infty$ tenemos que analizar dos posibilidades, $y \xrightarrow{1} s'$ o $y \xrightarrow{2} s'$. Primero supongamos $y \xrightarrow{2} s'$:

Como $s \xrightarrow{2} y$, y D_2 es una digráfica pretransitiva izquierda se sigue que $s \xrightarrow{2} s'$ o $y \xrightarrow{2} s$, la independencia de S y el hecho de que $\{s, s'\} \subseteq S$ implica $s \not\xrightarrow{2} s'$, así que $y \xrightarrow{2} s$ y consecuentemente $y \rightarrow S^\infty$, ver Figura 6.3(a).

Ahora supongamos que $y \xrightarrow{1} s'$:

Como $s' \in S$ y como $S \leq S^\infty$ por (2.2.1), y $s' \notin S^\infty$, entonces existe $t \in S^\infty$ tal que $s' \xrightarrow{1} t$ y $t \not\xrightarrow{1} s'$, finalmente el hecho de que D_1 es una digráfica pretransitiva derecha implica que $y \xrightarrow{1} t$, en consecuencia $y \rightarrow S^\infty$, ver Figura 6.3(b).

Por lo tanto, en cualquiera de las dos posibilidades $y \rightarrow S^\infty$, entonces S^∞ es una cota superior de \mathbf{C} y por lo tanto toda cadena de (\mathbf{F}, \leq) está acotada superiormente.

Hemos probado que toda cadena en \mathbf{F} tiene una cota superior, y entonces por el lema de Zorn, (\mathbf{F}, \leq) contiene elementos máximos por el orden \leq que pertenecen a \mathbf{F} . Sea S un elemento de \mathbf{F} máximo por el orden \leq .

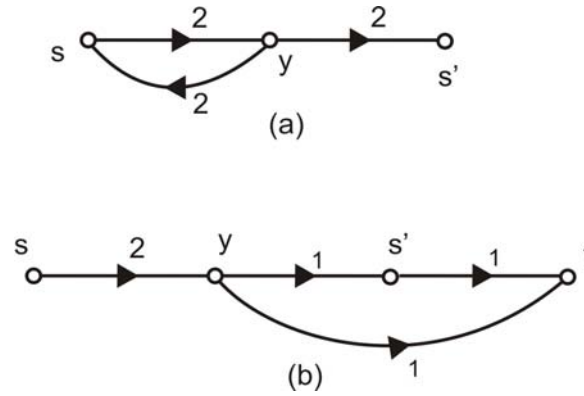


Fig. 6.3 Figura de la prueba de $S^\infty \in \mathbf{F}$

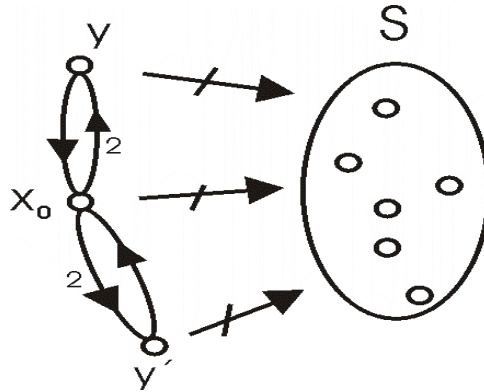


Fig. 6.4 Existe un vértice x_0 en $V(D)$ tal que no hay una flecha de D que entre a S , y si x_0 es adyacente a un vértice y en D_2 , donde y no es adyacente hacia S en D , entonces y es adyacente hacia x_0 .

(3) **Proposición.** S es un núcleo de D .

Prueba: Como $S \in \mathbf{F}$, S es un conjunto de vértices independiente de D , por lo que sólo nos resta probar que S es absorbente en D , (es decir, para cada $x \in V(D) - S$, se cumple que $x \rightarrow S$).

Supongamos por contradicción que existe $x \in V(D) - S$ tal que $x \not\rightarrow S$. Ahora probaremos que existe un vértice $x_0 \in V(D)$ tal que $x_0 \not\rightarrow S$, y x_0 satisface: $x_0 \xrightarrow{2} y$ y $y \not\rightarrow S$ implica que $y \rightarrow x_0$ para todos los vértices $y \in V(D_2)$, ver Figura 6.4 (Nuevamente note que si en D_2 no hay flechas lo que probaremos a continuación se cumple por vacuidad).

Sea $E = \{x \in V(D) \mid x \not\rightarrow S\}$, estamos suponiendo que $E \neq \emptyset$. Sea $U = (V(D_2) - S) \cap E$, es decir, U es el conjunto de vértices en D_2 que no están en S y que no son adyacentes hacia S .

Cuando $U \neq \emptyset$ se sigue del **Lema 6.2** (aplicado en la digráfica D_2 con conjunto U) que existe x_0 con las propiedades requeridas. Cuando $U = \emptyset$ se sigue de nuestra hipótesis que $z \not\rightarrow S$, para algún vértice $z \in V(D_1 - (S \cup V(D_2)))$. Tomamos x_0 como tal vértice (ver Figura 6.5).

Note que la elección de x_0 implica que $x_0 \not\rightarrow S$ y como $S \in \mathbf{F}$ también tenemos que $S \stackrel{2}{\rightarrow} x_0$, por definición de \mathbf{F} .

Sea $T = \{s \in S \mid s \not\rightarrow x_0\}$, como $T \subset S$, entonces T es independiente, $x_0 \not\rightarrow S$ y $S \stackrel{2}{\rightarrow} x_0$ implican que $T \cup \{x_0\}$ es un conjunto independiente de vértices de D .

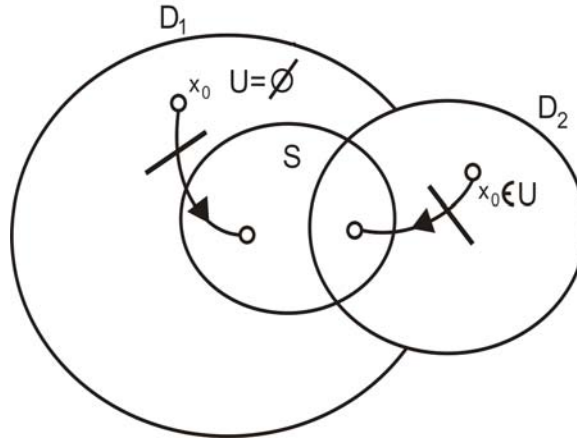


Fig. 6.5 Elección de x_0

(3.1)Proposición. $T \cup \{x_0\} \in \mathbf{F}$

Sea $y \in V(D_2)$ tal que $T \cup \{x_0\} \stackrel{2}{\rightarrow} y$, si $y \rightarrow T$, no hay nada que probar, supongamos entonces que $y \not\rightarrow T$; probaremos que $y \rightarrow x_0$.

Antes de empezar con la prueba haremos la siguiente observación (si D_1 no tiene flechas entonces $T = S$ y $T \cup \{x_0\} \in \mathbf{F}$, además $S \leq T \cup \{x_0\}$).

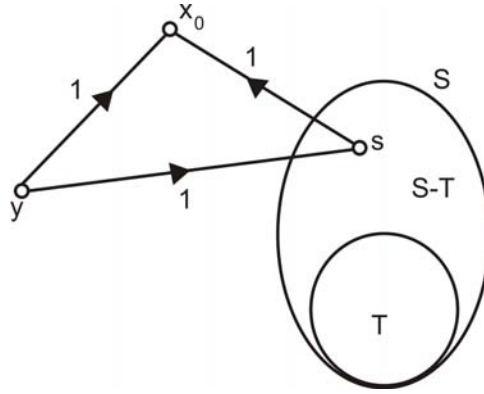


Fig. 6.6 Observación

Observación. Si $y \xrightarrow{1} (S - T)$, entonces $y \xrightarrow{1} x_0$.

Suponga que $y \xrightarrow{1} (S - T)$; como $s \xrightarrow{1} x_0$ para todo $s \in (S - T)$ (así se construyó T), y D_1 es una digráfica pretransitiva derecha, tenemos que $y \xrightarrow{1} x_0$ o $x_0 \xrightarrow{1} (S - T)$. Sabemos que $x_0 \not\rightarrow S$, por lo que se concluye que $y \xrightarrow{1} x_0$, ver Figura 6.6.

Prueba para la proposición (3.1) (considerando dos casos):

Caso a): $T \xrightarrow{2} y$.

Como $T \subset S$ tenemos que $S \xrightarrow{2} y$, el hecho de que $S \in \mathbf{F}$ implica que $y \rightarrow S$. Así que $y \rightarrow (S - T)$ (pues supusimos que $y \not\rightarrow T$).

Cuando $y \xrightarrow{1} (S - T)$ se sigue de la observación que $y \xrightarrow{1} x_0$.

Cuando $y \xrightarrow{2} (S - T)$; como tenemos que $T \xrightarrow{2} y$ y D_2 es una digráfica pretransitiva izquierda, se sigue que $y \xrightarrow{2} T$ o $T \xrightarrow{2} (S - T)$; la última opción es imposible pues $T \subset S$ y S es un conjunto independiente, concluimos que $y \xrightarrow{2} T$, lo cual también es una contradicción pues habíamos supuesto que $y \not\rightarrow T$. Concluimos que en el caso a) $y \xrightarrow{1} x_0$.

Caso b): $x_0 \xrightarrow{2} y$.

Consideremos dos posibles subcasos :

Caso b.1) $y \not\rightarrow S$.

Como $x_0 \xrightarrow{2} y$ tenemos que $y \in V(D_2)$ y la elección de x_0 (inicio de la proposición (3)) implica que $y \rightarrow x_0$ (ver Figura 6.4).

Caso b.2) $y \rightarrow S$.

En este caso tenemos que $y \rightarrow (S - T)$ (pues estamos suponiendo que $y \not\rightarrow T$). Cuando $y \xrightarrow{1} (S - T)$, se sigue de la observación que $y \xrightarrow{1} x_0$ (ver Figura 6.6). Cuando $y \xrightarrow{2} (S - T)$, como $x_0 \xrightarrow{2} y$ y D_2 es una digráfica pretransiva izquierda, tenemos que $x_0 \xrightarrow{2} (S - T)$ o $y \xrightarrow{2} x_0$; ahora, recordando que $x_0 \not\rightarrow S$, obtenemos $y \xrightarrow{2} x_0$. Por lo tanto en cualquier caso se cumple que $y \rightarrow x_0$, y por lo tanto $T \cup \{x_0\} \in \mathbf{F}$.

(4) Proposición. $S \leq T \cup \{x_0\}$.

Para cualquier $s \in S$ tenemos que $s \in T$ o $s \notin T$. Si $s \notin T$, por definición de T , $s \xrightarrow{1} x_0$, por otro lado como $x_0 \not\rightarrow S$ entonces $x_0 \not\rightarrow s$, en particular $x_0 \not\rightarrow s$. Así, para cualquier $s \in S$ tenemos que ($s \in T$) o ($s \xrightarrow{1} x_0$ y $x_0 \not\rightarrow s$), por lo tanto existe $t \in T \cup \{x_0\}$ tal que ($s = t$) o ($s \xrightarrow{1} t$ y $t \not\rightarrow s$). Concluimos que $S \leq T \cup \{x_0\}$. Las últimas dos proposiciones contradicen el hecho de que S es un elemento máximo por el orden \leq que pertenece a \mathbf{F} .

Por lo tanto S es absorbente, y por lo tanto S es un núcleo para D .

Nota 6.1. Si en el **Teorema 6.3** se elimina la hipótesis de que no existen trayectorias infinitas exteriores en D_1 ni en D_2 , el resultado no es válido.

Ejemplo 1. Consideremos la siguiente digráfica $D : V(D) = \{u_n \mid n \in N\}$ y $F(D) = \{(u_n, u_m) \mid n, m \in N \text{ y } n < m\}$, ver Figura 6.7. Sea $D_1 = D$ y $D_2 = D$. D es la unión de D_1 y D_2 . En D tenemos que si $(u_n, u_m) \in F(D)$ y $(u_m, u_l) \in F(D)$, por la definición de D , $n < m$ y $m < l$, esto implica que $n < l$ y en consecuencia $(u_n, u_l) \in F(D)$, por lo tanto D es tanto pretransitiva derecha como pretransitiva izquierda, así D es unión de dos digráficas pretransitivas, una derecha y otra izquierda. La sucesión $(u_n)_{n \in N}$ es una trayectoria infinita exterior. Veamos que D no tiene núcleo; de la definición de D se desprende que es una digráfica completa, es decir cualesquiera dos vértices de D son adyacentes, esto implica que en caso de tener

D núcleo, éste constaría de un sólo elemento, pero es claro que para cualquier $u_n \in V(D)$ ($u_m, u_n \notin F(D)$ si $m > n$), es decir $\{u_n\}$ no es absorbente y por lo tanto D no tiene núcleo.†

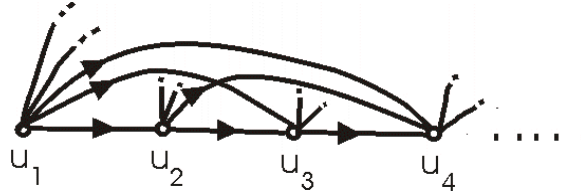


Fig. 6.7 Es necesaria la hipótesis sobre la no existencia de trayectorias infinitas exteriores.

Ejemplo 2. Ahora veamos que existe una familia infinita de digráficas que satisface lo anterior, es decir, que no tiene núcleo y cada una de ellas es unión de una digráfica pretransitiva derecha y una digráfica pretransitiva izquierda, donde alguna de ellas tiene trayectorias infinitas exteriores. Sea H cualquier digráfica pretransitiva derecha (resp. pretransitiva izquierda) tal que $V(H) \cap V(D) = \emptyset$, existe una familia infinita de digráficas pretransitivas derechas (resp. izquierdas) por ejemplo las digráficas simétricas son tanto pretransitivas derechas como izquierdas. Sean D_1 y D_2 las siguientes digráficas; $V(D_1) = V(H) \cup V(D)$, $F(D_1) = F(H) \cup \{(u, v) \mid u \in V(H) \text{ y } v \in V(D)\}$, $D_2 = D$ (ver Figura 6.8).

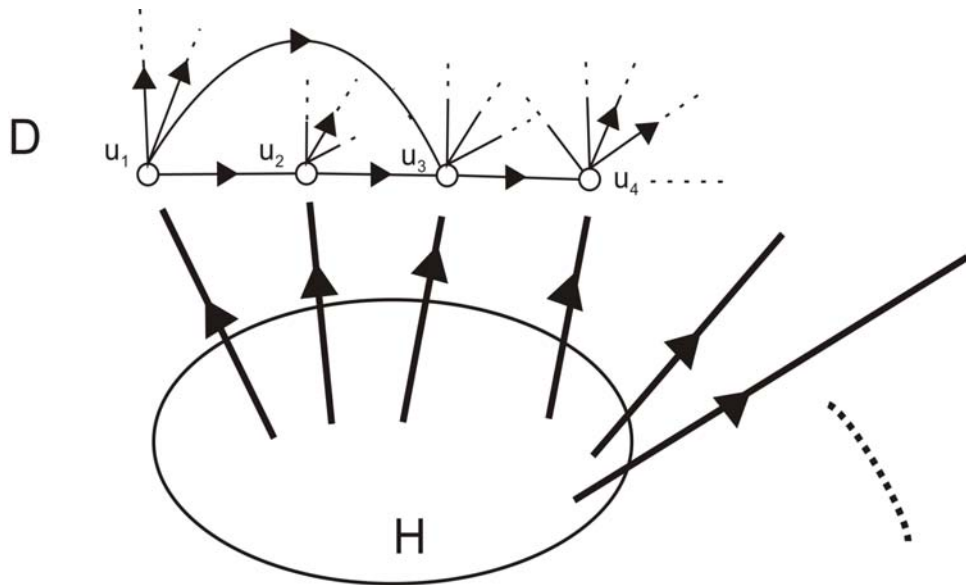


Fig. 6.8 Las flechas gruesas indican que todos los vértices de H son adyacentes hacia el vértice indicado.

Como ya habíamos mencionado D_2 es una digráfica pretransitiva izquierda (también pretransitiva derecha) que tiene trayectorias infinitas exteriores. Veamos ahora que D_1 es una digráfica pretransitiva derecha (resp. izquierda), sean $u, v, w \in V(D_1)$ tales que $(u, v), (v, w) \in F(D_1)$, veamos que $(u, w) \in F(D_1)$ o $(w, v) \in F(D_1)$ (resp. $(u, w) \in F(D_1)$ o $(v, u) \in F(D_1)$). Si $w \in V(H)$, por la definición de D_1 , $u, v \in V(H)$, como H es una digráfica pretransitiva derecha (resp. pretransitiva izquierda) entonces $(u, w) \in F(H)$ o $(w, v) \in F(H)$ (resp. $(u, w) \in F(H)$ o $(v, u) \in F(H)$), esto implica que $(u, w) \in F(D_1)$ o $(w, v) \in F(D_1)$ (resp. $(u, w) \in F(D_1)$ o $(v, u) \in F(D_1)$). Si $w \notin V(H)$ entonces $w \in V(D)$, por la definición de D_1 , $v \in V(H)$ y en consecuencia $u \in V(H)$, considerando nuevamente la definición de D_1 , tenemos que $(u, w) \in F(D_1)$ (análogamente para el caso en que H es pretransitiva izquierda). Concluimos que D_1 es una digráfica pretransitiva derecha (resp. izquierda). Consideremos la digráfica D_0 como la unión de D_1 y D_2 , D_1 es una digráfica pretransitiva derecha (resp. izquierda) y D_2 una digráfica pretransitiva izquierda (que también es derecha) con trayectorias infinitas exteriores. Veamos que D_0 no tiene núcleo. Supongamos que D_0 tiene un núcleo N . N no puede estar contenido propiamente en H , pues $u_i \not\rightarrow H$ y por lo tanto N no sería absorbente (ver Figura 6.8). Entonces N debería tener al menos un vértice u_i y como vimos en la nota anterior, no puede tener más de un vértice u_i pues no sería independiente. Para $j > i$ tenemos que $u_j \not\rightarrow u_i$ y $u_j \not\rightarrow H$. Por lo tanto N no puede ser absorbente e independiente a la vez. Por lo tanto D_0 no posee un núcleo.

Antes de las siguientes notas probaremos dos lemas que nos serán de utilidad. En el **Lema 6.4** probaremos que dada una digráfica D sin núcleo, es posible construir otra digráfica que contenga a D y que tampoco posea un núcleo. En el **Lema 6.5** probaremos que dada una digráfica D pretransitiva derecha (resp. izquierda) podemos construir una digráfica H agregando un vértice z y las flechas desde z hacia D , donde se cumple que H también es pretransitiva derecha (resp. izquierda).

6.4 Lema. Sean D_1 y D_2 digráficas tales que $V(D_1) \cap V(D_2) = \emptyset$, con D_2 una digráfica sin núcleo. Sea D una digráfica tal que $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2)$ y $F(D) = F(D_1) \cup F(D_2) \cup F(A)$, donde $A \subset \{(u, v) \mid u \in V(D_1) \text{ y } v \in V(D_2)\}$. Entonces D no tiene núcleo.

Prueba: Procedemos por contradicción: Supongamos que D tiene un núcleo $N \subset V(D)$. Como N es un conjunto independiente en

D , entonces $N \cap D_2$ es un conjunto independiente en D_2 . Para todo $v \in V(D) - N$, hay una flecha $(v, u) \in F(D)$ con $u \in N$ pues N es absorbente en D , si $v \in V(D_2) - N$, entonces hay una flecha $(v, u) \in F(D)$ con $u \in N$, ya que $v \in V(D_2)$ y en D no hay flechas desde D_2 hacia D_1 , eso implica que $u \in V(D_2)$, y por lo tanto $(v, u) \in F(D_2)$, como v es un vértice cualquiera de D_2 , eso implica que $N \cap V(D_2)$ es un conjunto absorbente en D_2 y por lo tanto un núcleo para D_2 lo cual es una contradicción. Concluyendo la demostración D no tiene núcleo.

6.5 Lema. *Si D es una digráfica pretransitiva derecha (resp. pretransitiva izquierda) entonces la digráfica H definida a partir de D aumentando un nuevo vértice z y todas las flechas desde z hacia los vértices de D , también es pretransitiva derecha (resp. pretransitiva izquierda).*

Prueba: Sean $u_1, u_2, u_3 \in V(H)$ tales que $u_1 \xrightarrow{H} u_2$, $u_2 \xrightarrow{H} u_3$, veamos que $u_1 \xrightarrow{H} u_3$ o $u_3 \xrightarrow{H} u_2$ (resp. $u_1 \xrightarrow{H} u_3$ o $u_2 \xrightarrow{H} u_1$). Si $z \notin \{u_1, u_2, u_3\}$ entonces $\{u_1, u_2, u_3\} \subset V(D)$ y $u_1 \xrightarrow{D} u_2$ así como $u_2 \xrightarrow{D} u_3$, ya que D es una digráfica pretransitiva derecha (resp. digráfica pretransitiva izquierda) entonces $u_1 \xrightarrow{D} u_3$ o $u_3 \xrightarrow{D} u_2$ (resp. $u_1 \xrightarrow{D} u_3$ o $u_2 \xrightarrow{D} u_1$), como $F(D) \subset F(H)$ entonces $u_1 \xrightarrow{H} u_3$ o $u_3 \xrightarrow{H} u_2$ (resp. $u_1 \xrightarrow{H} u_3$ o $u_2 \xrightarrow{H} u_1$). Si $z \in \{u_1, u_2, u_3\}$ entonces, por la definición de H , z tiene ingrado cero en H , es decir, no hay flechas hacia z (ver Figura 6.9).

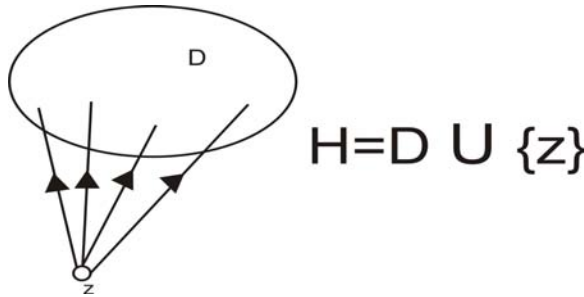


Fig. 6.9 *Construcción de H .*

Por lo tanto $z = u_1$, así $\{u_2, u_3\} \subset V(D)$, considerando nuevamente la definición de H , tenemos que $(z = u_1, u_3) \in F(H)$. Concluimos que H es una digráfica pretransitiva derecha (resp. digráfica pretransitiva izquierda).

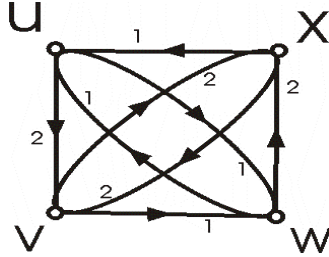


Fig. 6.10 Las flechas marcadas con el número 1 corresponden a la digráfica D_1 , y las flechas marcadas con el número 2 corresponden a la digráfica D_2 .

Nota 6.2 La unión de dos digráficas pretransitivas derechas no necesariamente tiene núcleo. Sean D_1 y D_2 las siguientes digráficas:

$V(D_1) = V(D_2) = \{u, v, w, x\}$, $F(D_1) = \{(x, u), (u, w), (w, u), (v, w)\}$ y $F(D_2) = \{(u, v), (x, v), (v, x), (w, x)\}$. D_1 y D_2 son digráficas pretransitivas derechas, sea D la unión de éstas dos digráficas, Figura 6.10. Como D es una digráfica completa, es decir, cualesquiera dos vértices son adyacentes. Si hubiera núcleo en D , éste constaría de un sólo vértice, el cual debería tener ingrado tres pero en D ningún vértice cumple esto, por lo tanto D no tiene núcleo.

A partir de D podemos construir una familia infinita de digráficas sin núcleo que son unión de dos digráficas pretransitivas derechas sin trayectorias infinitas exteriores.

Sea $D_0 = D$, $D'_0 = D_1$, $D''_0 = D_2$. Ahora para cada entero positivo n y dada D_{n-1} digráfica sin núcleo que es unión de dos digráficas pretransitivas izquierdas D'_{n-1} y D''_{n-1} , consideramos un nuevo vértice z_n y definimos D_n la unión de D'_n y D''_n donde $D'_n = D'_{n-1}$, $V(D''_n) = V(D''_{n-1}) \cup \{z_n\}$ y $F(D''_n) = F(D''_{n-1}) \cup \{(z_n, u) \mid u \in V(D''_{n-1})\}$, ver Figura 6.11. Claramente D'_n es una digráfica pretransitiva derecha y por el **Lema 6.5** D''_n también lo es. Ahora veamos que D_n no tiene núcleo. Aplicando el **Lema 6.4** tomando $D_1 = D_n[\{z_1, z_2, \dots, z_n\}]$, $D_2 = D$ y $A = \{(z_i, v) \mid i \in \{1, \dots, n\}, v \in V(D)\}$ tenemos que D_n es la digráfica obtenida en el **Lema 6.4** y por lo tanto D_n no tiene núcleo. Así $\{D_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ es una familia infinita de digráficas sin núcleo que

son unión de dos digráficas pretransitivas derechas sin trayectorias infinitas exteriores.

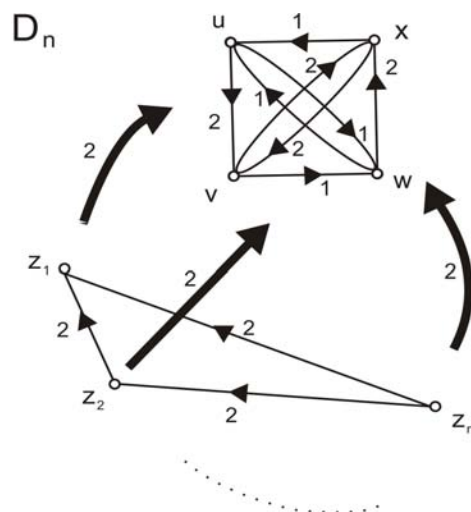


Fig. 6.11 Las flechas marcadas con el número 1 corresponden a la digráfica D_1 , y las flechas marcadas con el número 2 corresponden a la digráfica D_2 . Las flechas gruesas indican que los vértices z_1, z_2, \dots, z_n son adyacentes hacia los vértices u, v, w y x .

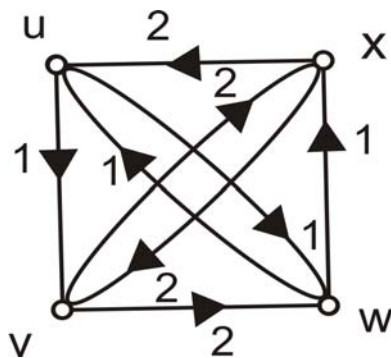


Fig. 6.12 Las flechas marcadas con el número 1 corresponden a la digráfica D_1 , y las flechas marcadas con el número 2 corresponden a la digráfica D_2 .

Nota 6.3 La unión de dos digráficas pretransitivas izquierdas no necesariamente tiene núcleo. Sean D_1 y D_2 las siguientes digráficas:

$V(D_1) = V(D_2) = \{u, v, w, x\}$, $F(D_1) = \{(u, v), (u, w), (w, u), (w, x)\}$ y $F(D_2) = \{(x, u), (x, v), (v, x), (v, w)\}$, ver Figura 6.12. Es fácil ver que D_1 y D_2 son digráficas pretransitivas izquierdas, la unión de ellas es la digráfica de la **Nota 6.2** que como ya vimos no tiene núcleo.

A partir de D podemos construir una familia infinita de digráficas sin núcleo que son unión de dos digráficas pretransitivas izquierdas sin trayectorias infinitas exteriores. Sea $D_0 = D$, $D'_0 = D_1$, $D''_0 = D_2$. Ahora para cada entero positivo n y dada D_{n-1} digráfica sin núcleo que es unión de dos digráficas pretransitivas izquierdas D'_{n-1} y D''_{n-1} , donde $D'_n = D'_{n-1}$, $V(D''_n) = V(D''_{n-1}) \cup \{z_n\}$ y $F(D''_n) = F(D''_{n-1}) \cup \{(z_n, u) \mid u \in V(D''_{n-1})\}$, ver Figura 6.13. Claramente D'_n es una digráfica pretransitiva izquierda y por el **Lema 6.5** D''_n también lo es. Notemos que $\{D_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ es la misma familia infinita de digráficas sin núcleo obtenidas en la **Nota 6.2** que también son unión de dos digráficas pretransitivas izquierdas.

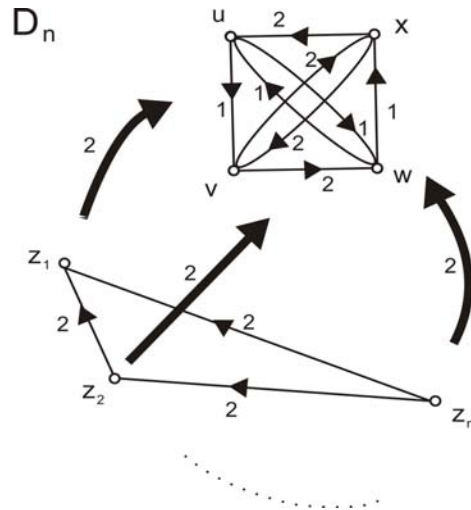


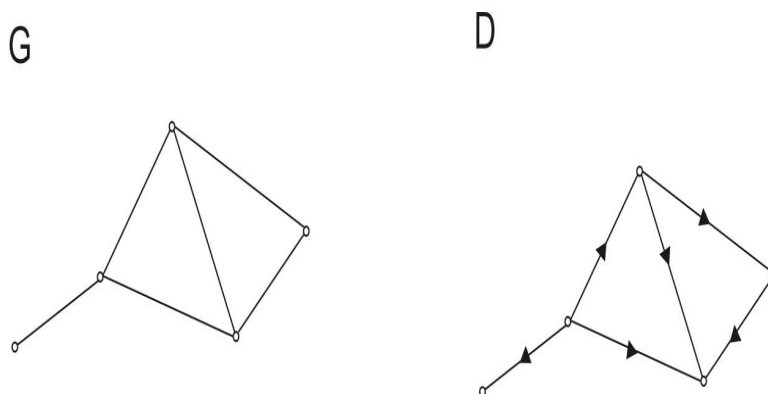
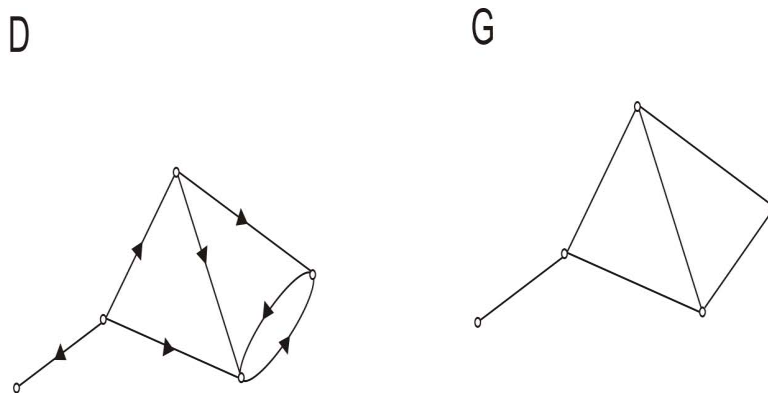
Fig. 6.13 Las flechas marcadas con el número 1 corresponden a la digráfica D_1 , y las flechas marcadas con el número 2 corresponden a la digráfica D_2 . Las flechas gruesas indican que los vértices z_1, z_2, \dots, z_n son adyacentes hacia los vértices u, v, w y x .

Problema. Es posible encontrar una condición única más débil que cada una de las condiciones de pretransitividad (izquierda y derecha) y asegure la nucleo-perfección de una digráfica? Esta pregunta no siempre tiene solución a pesar de las débiles proposiciones de pretransitividad obtenidas por Jacob (tesis de doctorado del tercer ciclo).

7. M-Orientaciones

En esta última sección hablamos de las posibilidades de encontrar un núcleo partiendo de una gráfica G . Dada una gráfica G es posible encontrar digráficas relacionadas con G orientando cada arista de G convirtiéndolas en flechas, entonces se buscan las condiciones que deben cumplir estas orientaciones para poseer un núcleo. En el teorema central de esta sección se dan condiciones suficientes para que dada una gráfica G , una orientación de Meyniel de G tenga núcleo. Empezaremos esta sección con algunas definiciones.

Sea D una digráfica, la **gráfica subyacente** G de D es la gráfica que se obtiene al reemplazar cada flecha de D por la correspondiente arista (no dirigida). En caso de una flecha simétrica: $(u, v), (v, u) \in F(D)$, sólo se considera una arista $(u, v) = (v, u)$, ver Figura 7.1.



Sea G una gráfica, una **orientación** D de G es una digráfica tal que su gráfica subyacente es G , en este caso se permiten las flechas simétricas, ver Figura 7.2 (la digráfica D de la Figura 7.1 también es una orientación de G).

Una gráfica G se dice que es de **comparabilidad** si existe una orientación asimétrica D de G que sea una digráfica transitiva.

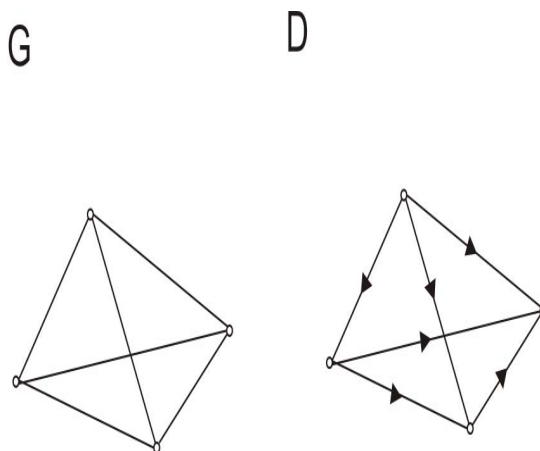


Fig. 7.3 La gráfica G es de comparabilidad pues D es una orientación asimétrica de G y además D es transitiva.

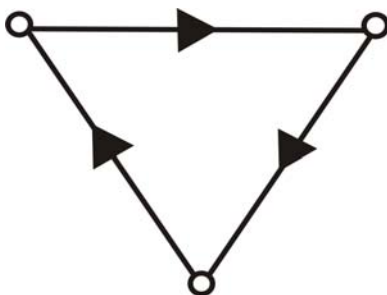


Fig. 7.4 Figura de un triángulo dirigido.

Sea G una gráfica, una orientación D de G se dice que es una **orientación de Meyniel** o una **M -orientación** si todo triángulo dirigido (ver Figura 7.4) de D tiene al menos dos flechas simétricas.

Dada una gráfica G definimos el **número cromático** de G , $\chi(G)$, como el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de G de tal forma que si 2 vértices son adyacentes entonces tengan asignado diferente color, por otro lado se define el **número de clan**

de G , $\omega(G)$, como el máximo entero r tal que G tiene una subgráfica con r vértices que es una gráfica completa. Una gráfica G es **perfecta** si para cualquier subgráfica inducida H de G se tiene $\chi(H) = \omega(H)$. El problema de conocer la estructura de las gráficas perfectas ha motivado el desarrollo de trabajos importantes, entre ellos puede consultarse [2]. Berge demostró que las gráficas de comparabilidad son gráficas perfectas [2], estas gráficas son de las llamadas **gráficas perfectas clásicas**, en [6] se presenta una recopilación de resultados importantes acerca de éstas gráficas.

Usando la técnica de Sands, Sauer y Woodrow en [9], C. Champetier demuestra en [4] el siguiente resultado:

Teorema 7.1 *Toda M-orientación de una gráfica de comparabilidad tiene núcleo.*

Decimos que una digráfica D es una **orientación por pozos** de una gráfica G si toda subdigráfica completa de D tiene núcleo. Una gráfica G es **núcleo soluble** si cualquier orientación por pozos de G tiene núcleo. En 1996 E. Boros y V. Gurvich [3] demuestran el **Teorema 7.2** que habían establecido como una conjetura Berge y Duchet en 1983.

Teorema 7.2 *Toda gráfica perfecta es núcleo soluble.*

El **Teorema 7.1** es un caso particular del **Teorema 7.2** ya que (como se probó en [2]) se puede probar que una M-orientación de una gráfica es una orientación por pozos y se sabe que toda gráfica de comparabilidad es perfecta.

7.1. Núcleos, M-orientaciones y Orientaciones Pretransitivas.

En esta sección demostramos un resultado similar al **Teorema 7.1** para gráficas infinitas enunciado en el **Teorema 7.3**. Este teorema para el caso finito, **Teorema 7.4**, es una generalización del **Teorema 7.1** pero además abarca gráficas que no son perfectas.

Sea D una digráfica, decimos que una sucesión de vértices $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, es una **trayectoria infinita interior** de D si para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$ y para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $i \neq j$ se tiene que $u_i \neq u_j$.

Otra forma de denotar la inversa (definida en la última parte de la sección 2) de una digráfica es D^{-1} , la Figura 2.7 muestra el ejemplo de una digráfica y su inversa.

7.1. Observación. D es una digráfica pretransitiva derecha si y sólo si D^{-1} es pretransitiva izquierda.

Prueba: Sea D una digráfica pretransitiva derecha, u, v y w vértices de D^{-1} tales que $(u, v), (v, w) \in F(D^{-1})$, entonces $(v, u), (w, v) \in F(D)$. Ya que D es pretransitiva derecha, entonces $(w, u) \in F(D)$ o $(u, v) \in F(D)$. Por la definición de D^{-1} , esto implica que $(u, w) \in F(D^{-1})$ o $(v, u) \in F(D^{-1})$, por lo tanto D^{-1} es pretransitiva izquierda (ver Figura 7.5).†

7.2 Observación. Sea D una digráfica, entonces $Sim(D) = Sim(D^{-1})$. $Sim(D)$ es la digráfica de D flecha inducida por las flechas simétricas de D , por lo tanto contiene únicamente las flechas simétricas de D . D^{-1} tiene las mismas flechas simétricas de D por lo tanto $Sim(D^{-1}) = Sim(D)$. †

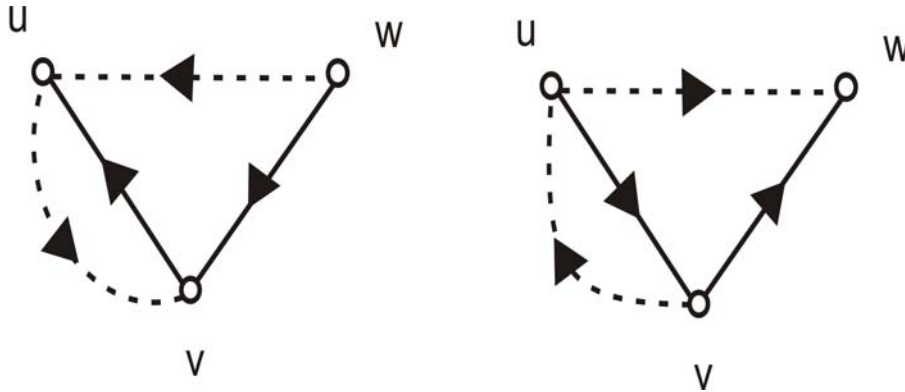


Fig. 7.5 D es una digráfica pretransitiva derecha si y sólo si D^{-1} es pretransitiva izquierda.

Teorema 7.3 (H. Galeana, R. Rojas [11]). Sea G una gráfica (posiblemente infinita) y sea D una M -orientación de G . Si existe alguna orientación T de G que sea una digráfica pretransitiva izquierda o derecha que no tenga trayectorias infinitas exteriores ni interiores y tal que $Sim(T) = Sim(D)$, entonces D tiene núcleo.

Demostración. Sea T una orientación pretransitiva izquierda o derecha de G tal que no tiene trayectorias infinitas exteriores ni interiores y $\text{Sim}(T) = \text{Sim}(D)$. Podemos suponer que T es una digráfica pretransitiva izquierda, entonces T^{-1} es una orientación de G que es una digráfica pretransitiva derecha, notemos que tanto T como T^{-1} no tienen trayectorias infinitas exteriores y ya que $\text{Sim}(T) = \text{Sim}(D)$, entonces también se cumple que $\text{Sim}(D) = \text{Sim}(T^{-1})$ (**Observación 7.2**).

Denotamos por $x \rightarrow y$ si $(x, y) \in F(D)$. Supongamos que $x \rightarrow y$, si $(x, y) \in F(T)$ escribimos $x \xrightarrow{\text{rojo}} y$ y si $(x, y) \in F(T^{-1})$ escribimos $x \xrightarrow{\text{azul}} y$.

Notemos que si $x \rightarrow y$, entonces $x \xrightarrow{\text{rojo}} y$ o $x \xrightarrow{\text{azul}} y$, por otro lado si (x, y) es una flecha simétrica de D entonces $x \xrightarrow{\text{rojo}} y$, $x \xrightarrow{\text{azul}} y$, $y \xrightarrow{\text{rojo}} x$, $y \xrightarrow{\text{azul}} x$, finalmente si (x, y) es una flecha de T y no lo es de D : $x \xrightarrow{T} y$ (resp. $x \xrightarrow{T^{-1}} y$) y $x \not\xrightarrow{\text{rojo}} y$ (resp. $x \not\xrightarrow{\text{azul}} y$) entonces (y, x) es una flecha de D pues (x, y) no lo es, y (y, x) es una flecha de T^{-1} pues (x, y) es una flecha de T : $y \xrightarrow{\text{azul}} x$ (resp. $y \xrightarrow{\text{rojo}} x$).

Sea \mathbf{U} la familia de subconjuntos de vértices S de G independientes, tales que $S \xrightarrow{\text{rojo}} x$ implica $x \rightarrow S$. Definimos en \mathbf{U} la siguiente relación \leq :

$S \leq R$ si y sólo si para cada $s \in S$ existe $r \in R$ tal que

$$s = r \text{ o } (s \xrightarrow{T^{-1}} r \text{ y } r \not\xrightarrow{T^{-1}} s).$$

Observemos que si S y R son conjuntos independientes con $S \subseteq R$, entonces $S \leq R$.

1. Veamos que \leq es un orden parcial en \mathbf{U} .

1.1 \leq es reflexiva. Como $S \subseteq S$, de la observación anterior se sigue $S \leq S$ para cualquier $S \in \mathbf{U}$. Por lo tanto \leq es reflexiva.

1.2 \leq es transitiva. Si S, Q y R son conjuntos en \mathbf{U} tales que $S \leq Q$ y $Q \leq R$ entonces $S \leq R$.

Sea $s \in S$ entonces existe $q \in Q$ tal que

$$s = q \text{ o } (s \xrightarrow{T^{-1}} q \text{ y } q \not\xrightarrow{T^{-1}} s) \dots \dots \dots \text{(I)}$$

Entonces existe $r \in R$ tal que

$$q = r \text{ o } (q \xrightarrow{T^{-1}} r \text{ y } r \not\xrightarrow{T^{-1}} q) \dots \dots \dots \text{(II)}$$

Si $s = q$ o $q = r$, por (II) o (I) respectivamente, tenemos $s = r$ ó $(s \xrightarrow{T^{-1}} r \text{ y } r \not\xrightarrow{T^{-1}} s)$, con $r \in R$. De otro modo, tenemos $(s \xrightarrow{T^{-1}} q \text{ y } q \not\xrightarrow{T^{-1}} s)$ y $(q \xrightarrow{T^{-1}} r \text{ y } r \not\xrightarrow{T^{-1}} q)$, como T^{-1} es una digráfica pretransitiva derecha, por el **Lema 6.1** aplicado a la sucesión (s, q, r) se tiene que $s \xrightarrow{T^{-1}} r \text{ y } r \not\xrightarrow{T^{-1}} s$. Por lo tanto $S \leq R$. En consecuencia \leq es transitiva.

1.3 \leq es antisimétrica. Sean S y R conjuntos en \mathbf{U} tales que $S \leq R$ y $R \leq S$, veamos que $S = R$. Sea $s \in S$, veamos que $s \in R$. Como $S \leq R$ entonces existe $r \in R$ tal que satisface (I). Supongamos que $s \neq r$ entonces $s \xrightarrow{T^{-1}} r \text{ y } r \not\xrightarrow{T^{-1}} s$. Como $R \leq S$, para r , existe $s' \in S$, tal que $r = s'$ ó $(r \xrightarrow{T^{-1}} s' \text{ y } s' \not\xrightarrow{T^{-1}} r)$, este resultado nos dice que si $r = s'$ entonces $s \xrightarrow{T^{-1}} s'$ pero esto es una contradicción, pues $s, s' \in S$ y S es un subconjunto independiente de G , entonces $r \neq s'$ y por lo tanto $r \xrightarrow{T^{-1}} s' \text{ y } s' \not\xrightarrow{T^{-1}} r$, como T^{-1} es una digráfica pretransitiva derecha, por el **Lema 6.1** aplicado a la sucesión (s, r, s') tenemos que $s \xrightarrow{T^{-1}} s' \text{ y } s' \not\xrightarrow{T^{-1}} s$, lo cual contradice que S sea un conjunto independiente. Por lo tanto $r = s$, es decir, $S \subset R$ análogamente tenemos la otra contención.

Por 1.1, 1.2 y 1.3 \leq es un orden parcial.

2. Veamos que (\mathbf{U}, \leq) tiene elementos máximos con el orden \leq que pertenecen a \mathbf{U} .

2.1 $\mathbf{U} \neq \emptyset$. Como T es pretransitiva izquierda y no tiene trayectorias infinitas exteriores, por el **Lema 6.2** (tomando $D = T$ y $U = V(T)$) existe un vértice y tal que $y \xrightarrow{T} x$ implica que $x \xrightarrow{T} y$, en este caso (x, y) es una flecha simétrica de T , por lo anterior $(x, y) \in \text{Sim}(T)$ y como $\text{Sim}(T) \subset \text{Sim}(D)$ entonces (x, y) también es una flecha simétrica de

D . Así existe un vértice y tal que $y \xrightarrow{\text{rojo}} x$ implica que $x \rightarrow y$, entonces $\{y\} \in \mathbf{U}$. Por lo tanto $\mathbf{U} \neq \emptyset$.

2.2 Toda cadena en (\mathbf{U}, \leq) está acotada superiormente. Sea C una cadena en (\mathbf{U}, \leq) . Sea $S^\infty = \{s \in \bigcup_{S \in C} S \mid \text{existe } S \in C \text{ tal que } s \in R \text{ para todo } R \in C, S \leq R\}$, veamos que S^∞ es cota superior de C .

2.2.1. S^∞ es un conjunto independiente. Sean $s_1, s_2 \in S^\infty$ veamos que en D no existen flechas entre s_1 y s_2 . Como s_1 y $s_2 \in S^\infty$ entonces existen S_1 y S_2 en C tales que $s_i \in R$, para todo $R \in C$ tal que $S_i \leq R$, $i \in \{1, 2\}$. Sea $S = \max\{S_1, S_2\}$, entonces $s_1, s_2 \in S$ y como S es un conjunto independiente, entonces en D no existen flechas entre s_1 y s_2 . Por lo tanto S^∞ es un conjunto independiente.

2.2.2 $S^\infty \neq \emptyset$ y para cada $S \in C$, $S \leq S^\infty$. Sea $S \in C$ y sea $t_0 \in S$ veamos que existe $t \in S^\infty$ tal que $t_0 = t$ ó $(t_0 \xrightarrow{T^{-1}} t \text{ y } t \not\rightarrow t_0)$. Si $t_0 \in S^\infty$, entonces tomamos $t = t_0$. Supongamos que $t_0 \notin S^\infty$, procederemos por contradicción. Usaremos la construcción de S^∞ , la definición de \leq y el hecho de que T^{-1} es una digráfica pretransitiva derecha para aplicar el **Lema 6.1** y construir una trayectoria infinita exterior en T^{-1} . Supongamos que si para $t \in V(D)$ se tiene $(t_0 \xrightarrow{T^{-1}} t \text{ y } t \not\rightarrow t_0)$ entonces $t \notin S^\infty$. Sea $R_0 = S$, como $t_0 \notin S^\infty$ esto implica que $t_0 \notin R_1$ para algún $R_1 \in C$, $R_0 \leq R_1$, de esto último tenemos que existe $t_1 \in R_1$ tal que $t_0 \xrightarrow{T^{-1}} t_1$ y $t_1 \not\rightarrow t_0$, por nuestra suposición $t_1 \notin S^\infty$. Entonces $t_1 \notin R_2$ para algún $R_2 \in C$, $R_1 \leq R_2$, esto implica que existe $t_2 \in R_2$ tal que $t_1 \xrightarrow{T^{-1}} t_2$ y $t_2 \not\rightarrow t_1$, como T^{-1} es una digráfica pretransitiva derecha, aplicando el **Lema 6.1** a la sucesión $\tau_2 = (t_0, t_1, t_2)$ tenemos que τ_2 es una trayectoria y $t_0 \xrightarrow{T^{-1}} t_2$ y $t_2 \not\rightarrow t_0$, por nuestra suposición $t_2 \notin S^\infty$.

Así, para cada $n \in N$, dados t_n y R_n , tales que $R_n \in C$, $t_n \in R_n$, $t_{n-1} \xrightarrow{T^{-1}} t_n$ y no está su flecha de regreso: $t_n \not\rightarrow t_{n-1}$, por el **Lema 6.1** $t_0 \xrightarrow{T^{-1}} t_n$, $t_n \not\rightarrow t_0$ y $t_n \notin S^\infty$, entonces tenemos que $t_n \notin R_{n+1}$ para algún $R_{n+1} \in C$, $R_n \leq R_{n+1}$, de esto último tenemos que existe $t_{n+1} \in R_{n+1}$ tal que $t_n \xrightarrow{T^{-1}} t_{n+1}$ y $t_{n+1} \not\rightarrow t_n$, ver Figura 7.6.

Como T^{-1} es una digráfica pretransitiva derecha y $(t_n \xrightarrow{T^{-1}} t_{n+1}$ y $t_{n+1} \not\rightarrow t_n)$ para todo $n \in N$, por el **Lema 6.1**, $\tau_{n+1} = (t_0, t_1, t_{n+1})$

es una trayectoria en T^{-1} y $(t_0 \xrightarrow{T^{-1}} t_{n+1} \text{ y } t_{n+1} \not\xrightarrow{T^{-1}} t_0)$, por nuestra suposición $t_{n+1} \notin S^\infty$. Consideremos la sucesión $\tau = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $t_n \xrightarrow{T^{-1}} t_{n+1}$. Por otro lado sean $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, supongamos sin pérdida de generalidad que $n < m$, entonces $t_n \neq t_m$, por lo tanto τ es una trayectoria infinita exterior en T^{-1} , lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe $t \in S^\infty$ tal que $(t_0 \xrightarrow{T^{-1}} t \text{ y } t \not\xrightarrow{T^{-1}} t_0)$. Con esto hemos demostrado que $S^\infty \neq \emptyset$ y que $S \leq S^\infty$.

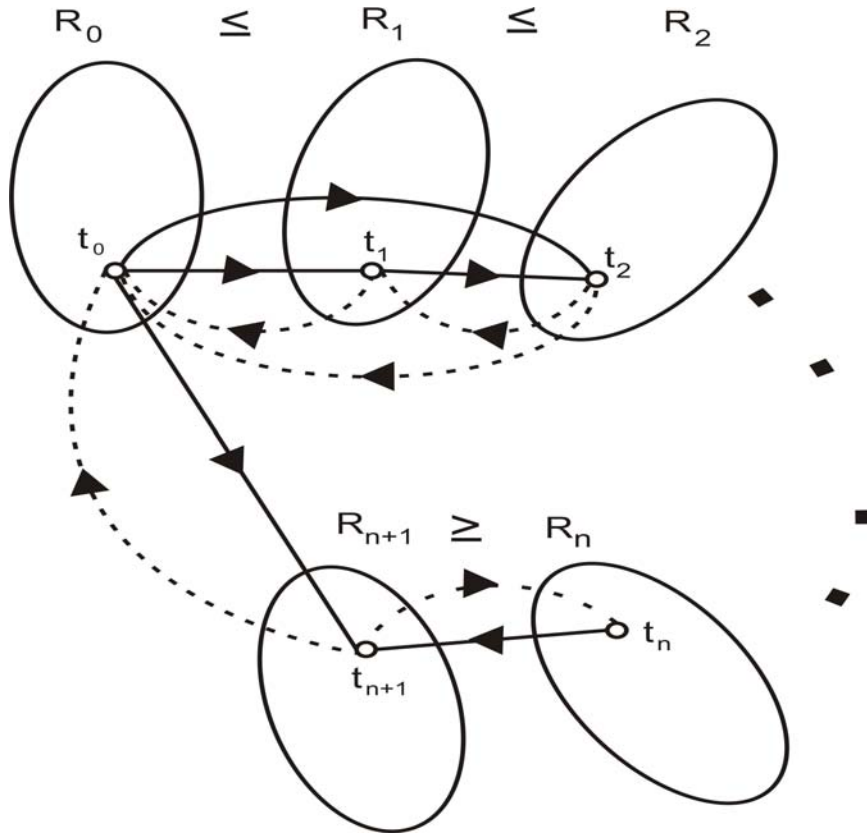


Fig. 7.6 Las flechas definidas pertenecen a $F(T^{-1})$, las flechas punteadas no pertenecen a $F(T^{-1})$.

2.2.3 $S^\infty \in \mathbf{U}$. Supongamos que $S^\infty \xrightarrow{\text{rojo}} y$, veamos que $y \rightarrow S^\infty$. Procederemos por contradicción, supongamos que $y \not\rightarrow S^\infty$. Sea $s \in S^\infty$ tal que $s \xrightarrow{\text{rojo}} y$, ahora sea $S_1 \in \mathbf{C}$ tal que $s \in R$ para todo $R \in \mathbf{C}$, $S_1 \leq R$.

Primero probaremos la siguiente herramienta, que nos ayudará para construir la contradicción:

2.2.3.1 Si $y \xrightarrow{\text{azul}} s'$ para algún $s' \in R$ con $R \in \mathbf{C}$, $S_1 \leq R$, entonces existe $t \in S^\infty$ tal que cumple dos cosas:

(i) $t \xrightarrow{\text{rojo}} s'$:

(ii) Si $R' \in \mathbf{C}$ es tal que $R \leq R'$ y $t \in R'$, entonces para algún $s'' \in R'$ tenemos $s' \xrightarrow{\text{azul}} s''$, $s'' \not\xrightarrow{T^{-1}} s'$ y $y \xrightarrow{\text{azul}} s''$

Prueba de (i):

Como $y \not\xrightarrow{T^{-1}} S^\infty$ entonces $s' \notin S^\infty$, por **2.2.2** $R \leq S^\infty$ y para $s' \in R$ existe $t \in S^\infty$ tal que $s' \xrightarrow{T^{-1}} t$ y $t \not\xrightarrow{T^{-1}} s'$. Veremos que t cumple con (i). Como $y \xrightarrow{\text{azul}} s'$ por hipótesis de **2.2.3.1**, entonces $y \xrightarrow{T^{-1}} s'$, recordando que T^{-1} es una digráfica pretransitiva derecha y que $t \not\xrightarrow{T^{-1}} s'$ tenemos que $y \xrightarrow{T^{-1}} t$. Como $y \not\xrightarrow{T^{-1}} S^\infty$, es decir, en D no hay flechas de y hacia S^∞ y $y \xrightarrow{T^{-1}} t$ entonces la flecha (y, t) está en las flechas de T^{-1} pero no en las flechas de D por lo que $y \not\xrightarrow{\text{azul}} t$ lo cual implica que la flecha (t, y) está en D y también en T , por lo tanto $t \xrightarrow{\text{rojo}} y$ (ver la Figura 7.7).

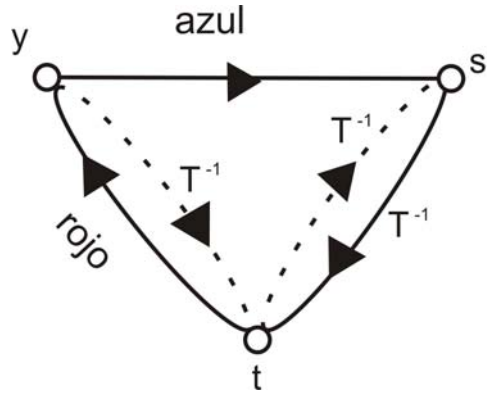


Fig. 7.7 Triángulo dirigido en D

Si $s' \rightarrow t$, es decir, $(s', t) \in F(D)$, entonces (y, s', t, y) es un triángulo dirigido en D pues (y, s') está en azul y (t, y) está en rojo (ver Figura 7.7), por otro lado (s', t) no es flecha simétrica de T^{-1} pues $(t, s') \notin$

$F(T^{-1})$ y por lo tanto no lo es de D , ya que T, D y T^{-1} tienen la misma parte simétrica (**observación 7.2**). Además $y \not\stackrel{azul}{\rightarrow} t$, es decir, (t, y) tampoco es flecha simétrica de D , así este triángulo a lo más tiene una flecha simétrica pero esto contradice la hipótesis de que todo triángulo dirigido de D tiene al menos dos flechas simétricas, por lo tanto $s' \not\rightarrow t$ (este resultado lo usaremos para probar **(ii)**), así $s' \not\stackrel{azul}{\rightarrow} t$ y en consecuencia $t \rightarrow s'$ y $t \xrightarrow{T} s'$, por lo tanto $t \xrightarrow{rojo} s'$.

Prueba de **(ii)**:

Si $R' \in \mathbf{C}$ es tal que $R \leq R'$ y $t \in R'$, entonces para algún $s'' \in R'$ tenemos $s' \xrightarrow{azul} s''$, $s'' \xrightarrow{T^{-1}} s'$ y $y \xrightarrow{azul} s''$:

Veremos que como en **(i)** el mismo vértice t cumple con **(ii)**. Sea $R' \in \mathbf{C}$ tal que $R \leq R'$. Como $t \xrightarrow{rojo} s'$ entonces $R' \xrightarrow{rojo} s'$, como $R' \in \mathbf{U}$ entonces $s' \rightarrow R'$, es decir, $s' \rightarrow s''$ para algún $s'' \in R'$ (ver Figura 7.8).

Si $s' \xrightarrow{rojo} s''$ entonces tenemos que $s' \xrightarrow{T} s''$ y como $t \xrightarrow{T} s'$, aplicando que T es una digráfica pretransitiva izquierda tenemos $t \xrightarrow{T} s''$ ó $s' \xrightarrow{T} t$, como $t, s'' \in R'$ y R' es un conjunto independiente entonces $t \not\stackrel{T}{\rightarrow} s''$ por lo tanto $s' \xrightarrow{T} t$, como $t \xrightarrow{rojo} s'$ entonces (t, s') es una flecha simétrica de T y por lo tanto también lo es de D , pero esto es una contradicción pues en **(i)** teníamos $s' \not\rightarrow t$, por lo tanto la contradicción está en suponer $s' \xrightarrow{rojo} s''$ y entonces tenemos que $s' \not\stackrel{rojo}{\rightarrow} s''$, esto nos dice que $s' \not\stackrel{T}{\rightarrow} s''$ y en consecuencia $s' \xrightarrow{azul} s''$ que es lo primero que queríamos probar.

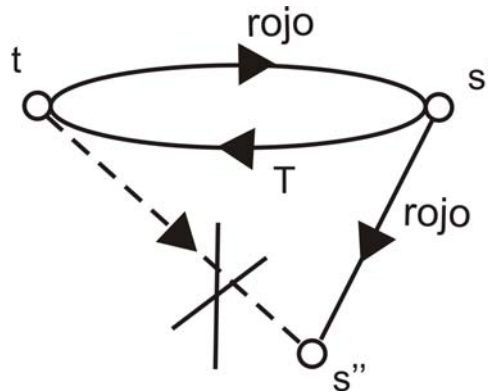


Fig. 7.8 Si $s' \xrightarrow{rojo} s''$ obtenemos una contradicción, por lo tanto $s' \xrightarrow{azul} s''$

Ahora supongamos por contradicción que $s'' \xrightarrow{T^{-1}} s'$, entonces (s', s'') es una flecha simétrica de T^{-1} pues $s' \xrightarrow{azul} s''$ (afirmación anterior) y por lo tanto también es una flecha simétrica de D . Lo cual implica que $s' \xrightarrow{rojo} s''$, pero esto es una contradicción pues ya teníamos $s' \not\xrightarrow{rojo} s''$, por lo tanto $s'' \xrightarrow{T^{-1}} s'$ que es la segunda afirmación de (ii).

Por último; $y \xrightarrow{azul} s'$ que es hipótesis de **2.2.3.1** y $s' \xrightarrow{azul} s''$, que es la primera afirmación que probamos de (ii) implican $y \xrightarrow{T^{-1}} s'$ y $s' \xrightarrow{T^{-1}} s''$. Como sabemos que T^{-1} es una digráfica pretransitiva derecha y que $s'' \not\xrightarrow{T^{-1}} s'$ (segunda afirmación de (ii)) tenemos $y \xrightarrow{T^{-1}} s''$, (ver Figura 7.9). Aquí tenemos dos posibilidades $y \rightarrow s''$ ó $s'' \rightarrow y$. Si $s'' \rightarrow y$ entonces (y, s', s'', y) es un triángulo dirigido de D , por hipótesis este triángulo tiene al menos dos flechas simétricas, como $s'' \not\xrightarrow{T^{-1}} s'$ (segunda afirmación de (ii)), entonces (s'', s') no es flecha simétrica de T^{-1} y por lo tanto tampoco es flecha simétrica de D , en consecuencia (y, s') y (s'', y) son flechas simétricas de D . Así en cualquier caso tenemos $y \rightarrow s''$ y como $y \xrightarrow{T^{-1}} s''$ (lo probamos un par de renglones arriba), entonces $y \xrightarrow{azul} s''$, con esto concluimos la prueba de **2.2.3.1(ii)**.

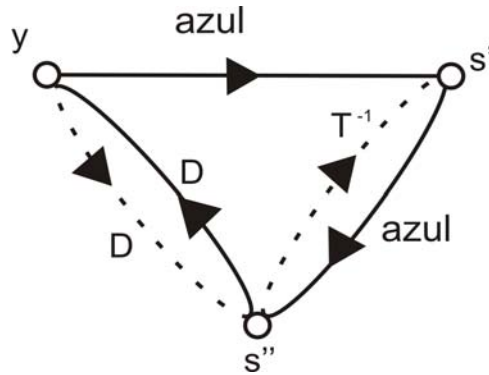


Fig. 7.9 $y \xrightarrow{azul} s''$

Mostraremos que $y \xrightarrow{azul} s_1$ para algún $s_1 \in S_1$ y así usar los resultados que ya probamos. Regresando a la hipótesis de que $S^\infty \xrightarrow{rojo} y$ tenemos que $s \xrightarrow{rojo} y$ y $s \in S_1$, pues $s \in R$ para todo $R \in \mathbf{C}$ con $S_1 \leq R$ y como \leq es reflexiva, entonces $S_1 \leq S_1$, $S_1 \xrightarrow{rojo} y$ y ya que $S_1 \in \mathbf{C}$, entonces $S_1 \in \mathbf{U}$, esto implica que $y \rightarrow S_1$. Sea $s_1 \in S_1$ tal que $y \rightarrow s_1$, de lo

que se deduce que $y \xrightarrow{\text{rojo}} s_1$ ó $y \xrightarrow{\text{azul}} s_1$.

Veremos que suponer que $y \xrightarrow{\text{rojo}} s_1$ nos lleva a una contradicción: Supongamos que $y \xrightarrow{\text{rojo}} s_1$, según la hipótesis de **2.2.3** $s \xrightarrow{\text{rojo}} y$ por lo que: $y \xrightarrow{T} s_1$ y $s \xrightarrow{T} y$, como T es una digráfica pretransitiva izquierda, entonces $s \xrightarrow{T} s_1$ ó $y \xrightarrow{T} s$, ya que S_1 es un conjunto de vértices de G independiente, y $s, s_1 \in S_1$ entonces $s \not\xrightarrow{T} s_1$, por lo tanto $y \xrightarrow{T} s$ (ver Figura 7.10).

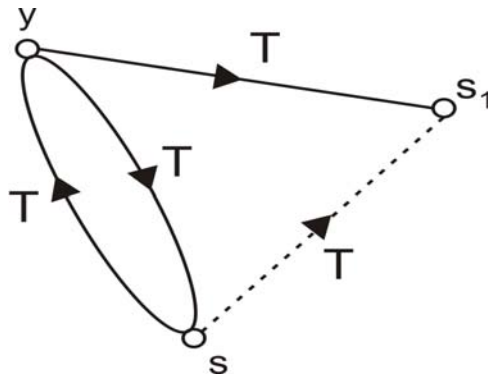


Fig. 7.10 $y \xrightarrow{T} s$

Así (y, s) es una flecha simétrica de T , como vimos $\text{Sim}(T) = \text{Sim}(D)$, por lo tanto (y, s) es una flecha simétrica de D y por lo tanto $y \rightarrow s$ y como $s \in S^\infty$ tenemos que $y \rightarrow S^\infty$, para probar por contradicción **2.2.3** habíamos supuesto $y \not\xrightarrow{\text{azul}} S^\infty$, por lo tanto $y \xrightarrow{\text{azul}} s_1$.

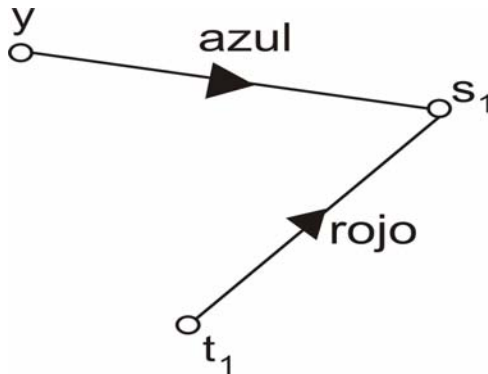


Fig. 7.11 $t_1 \xrightarrow{\text{rojo}} s_1$

Por **2.2.3.1** con $s' = s_1$ y $R = S_1$ obtenemos:

2.2.3.2: Como $y \xrightarrow{\text{azul}} s_1$, entonces para $s_1 \in S_1$, donde $S_1 \in \mathbf{C}$, $S_1 \leq S_1$ tenemos que existe $t_1 \in S^\infty$ tal que

(i) $t_1 \xrightarrow{\text{rojo}} s_1$, (ver Figura 7.11).

Ahora, como $t_1 \in S^\infty$, por definición de S^∞ , existe $S_2 \in \mathbf{C}$ tal que $t_1 \in R$ para todo $R \in \mathbf{C}$ tal que $S_2 \leq R$ y por lo tanto:

2.2.3.2.1 $S_1 \leq S_2$, pues si $S_2 < S_1$ entonces $t_1 \in S_1$. Pero $s_1 \in S_1$, según **2.2.3.2(i)** lo cual implica que hay una flecha de t_1 hacia s_1 en S_1 , lo cual es una contradicción pues S_1 es un conjunto independiente de vértices de G .

Por **2.2.3.2.1** y por **2.2.3.1 (ii)** tomando $R' = S_2$ y $t = t_1$ obtenemos:

(ii): Como $S_2 \in \mathbf{C}$ es tal que $S_1 \leq S_2$ y $t_1 \in S_2$ entonces para algún $s_2 \in S_2$ tenemos que $s_1 \xrightarrow{\text{azul}} s_2$, $s_2 \not\xrightarrow{T^{-1}} s_1$ y $y \xrightarrow{\text{azul}} s_2$, (ver Figura 7.12).

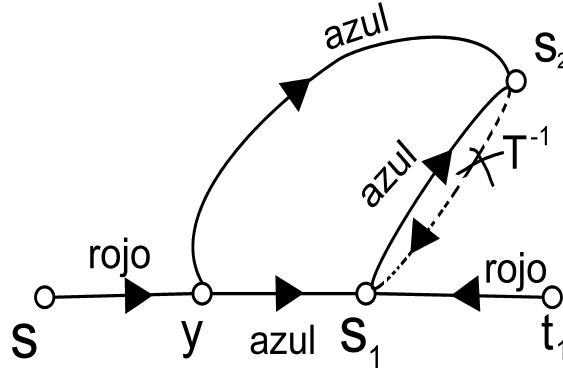


Fig. 7.12 $s_1 \xrightarrow{\text{azul}} s_2$, $s_2 \not\xrightarrow{T^{-1}} s_1$ y $y \xrightarrow{\text{azul}} s_2$

De la última afirmación: $y \xrightarrow{\text{azul}} s_2$. Aplicando nuevamente **2.2.3.1**, tomando $s' = s_2$ y $R = S_2$ obtenemos:

2.2.3.3 Ya que $y \xrightarrow{\text{azul}} s_2$, para $s_2 \in S_2$ con $S_2 \in \mathbf{C}$ y $S_1 \leq S_2$ existe $t_2 \in S^\infty$ tal que

(i) $t_2 \xrightarrow{\text{rojo}} s_2$ (ver Figura 7.13)

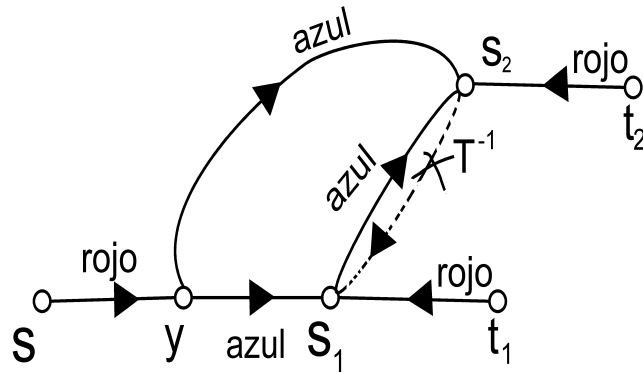


Fig. 7.13 $s_1 \xrightarrow{\text{azul}} s_2, s_2 \not\xrightarrow{T^{-1}} s_1, y \xrightarrow{\text{azul}} s_2$ y $t_2 \xrightarrow{\text{rojo}} s_2$

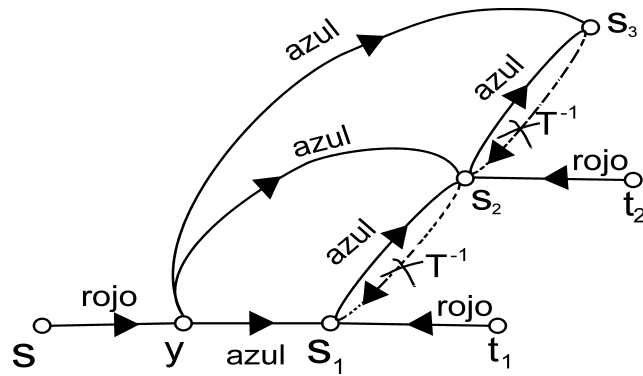


Fig. 7.14 $s_2 \xrightarrow{\text{azul}} s_3, s_3 \not\xrightarrow{T^{-1}} s_2$ y $y \xrightarrow{\text{azul}} s_3$

Como $t_2 \in S^\infty$, entonces existe $S_3 \in \mathbf{C}$ tal que $t_2 \in R$ para todo $R \in \mathbf{C}$ tal que $S_3 \leq R$ y por lo tanto:

2.2.3.3.1 $S_2 \leq S_3$, pues si $S_3 < S_2$, entonces $t_2 \in S_2$ pero $s_2 \in S_2$, lo cual implica que hay una flecha desde t_2 hacia s_2 , en S_2 , y esto es una contradicción pues S_2 es un conjunto independiente de vértices de G . Además $S_1 \leq S_3$, pues \leq es transitiva y $S_1 \leq S_2$ y $S_2 \leq S_3$.

Por **2.2.3.3.1** y por **2.2.3.1(ii)** tomando $R' = S_3$ y $t = t_2$, tenemos:

2.2.3.3(ii) Como $S_3 \in \mathbf{C}$ es tal que $S_1 \leq S_3$ y $t_2 \in S_3$, entonces para algún $s_3 \in S_3$ tenemos que $s_2 \xrightarrow{\text{azul}} s_3, s_3 \not\xrightarrow{T^{-1}} s_2$ y $y \xrightarrow{\text{azul}} s_3$, ver Figura 7.14.

Así, si suponemos que para $n \in N$ se tienen $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset S^\infty$, $\{S_1, S_2, \dots, S_{n+1}\} \subset \mathbf{C}$ con $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_{n+1}$, $\{s_1, s_2, \dots, s_{n+1}\} \subset V(D)$, $s_i \in S_i$ tales que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tenemos:

2.2.3.4(i) $t_i \xrightarrow{\text{rojo}} s_i$.

(ii) $\{t_i, s_{i+1}\} \subset S_{i+1}$, $s_i \xrightarrow{\text{azul}} s_{i+1}$, $s_{i+1} \not\xrightarrow{T^{-1}} s_i$ y $y \xrightarrow{\text{azul}} s_{i+1}$, entonces por **2.2.3.1** tomando $s' = s_{n+1}yR = S_{n+1}$ obtenemos:

2.2.3.5 Como $y \xrightarrow{\text{azul}} s_{n+1}$, entonces para $s_{n+1} \in S_{n+1}$ con $S_{n+1} \in \mathbf{C}$ y $S_1 \leq S_{n+1}$, existe $t_{n+1} \in S^\infty$ tal que

2.2.3.5(i) $t_{n+1} \xrightarrow{\text{rojo}} s_{n+1}$

Como $t_{n+1} \in S^\infty$, entonces existe $S_{n+2} \in \mathbf{C}$ tal que $t_{n+1} \in R$ para todo $R \in \mathbf{C}$ tal que $S_{n+2} \leq R$ y por lo tanto:

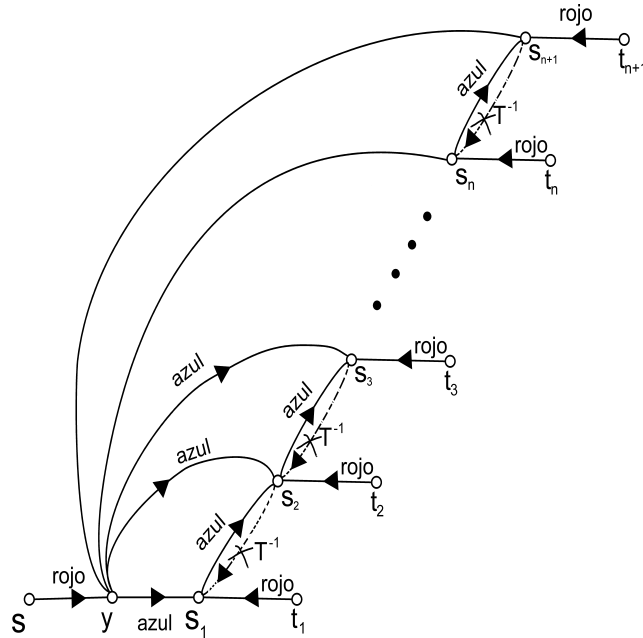


Fig. 7.15 $s_{n+1} \xrightarrow{\text{azul}} s_{n+2}$, $s_{n+2} \not\xrightarrow{T^{-1}} s_{n+1}$ y $y \xrightarrow{\text{azul}} s_{n+2}$

Análogamente a **2.2.3.3 (i)**, tenemos que $S_{n+1} \leq S_{n+2}$ y por lo tanto también $S_1 \leq S_{n+2}$, entonces por **2.2.3.1(ii)** tomando $s' = s_{n+1}$, $R = S_{n+1}$, $R' = S_{n+2}$ y $t = t_{n+1}$ tenemos:

2.2.3.5(ii) Como $S_{n+2} \in \mathbf{C}$ y es tal que $S_1 \leq S_{n+2}$ y $t_{n+1} \in S_{n+2}$, entonces para algún $s_{n+2} \in S_{n+2}$ tenemos que $s_{n+1} \xrightarrow{\text{azul}} s_{n+2}$, $s_{n+2} \not\xrightarrow{T^{-1}} s_{n+1}$ y $y \xrightarrow{\text{azul}} s_{n+2}$, ver Figura 7.15.

Así, hemos probado por inducción que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de vértices de D tal que $s_{n+1} \xrightarrow{T^{-1}} s_{n+2}$ y $s_{n+2} \not\xrightarrow{T^{-1}} s_{n+1}$, como T^{-1} es una digráfica pretransitiva derecha, entonces por el **Lema 6.1**, para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión (s_1, s_2, \dots, s_k) es una trayectoria dirigida en T^{-1} , esto implica que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una trayectoria infinita exterior en T^{-1} , lo cual es una contradicción a la hipótesis del teorema. Por lo tanto $y \rightarrow S^\infty$ y en consecuencia $S^\infty \in \mathbf{U}$.

Por **2.2.1-2.2.3**, S^∞ es una cota superior de \mathbf{C} y por lo tanto toda cadena de (\mathbf{U}, \leq) está acotada superiormente.

Por **2.1** y **2.2**, aplicando el **Lema de Zorn**, (\mathbf{U}, \leq) tiene elementos máximos por contención que pertenecen a la cadena.

Sea S un elemento máximo por contención con la propiedad de pertenecer a (\mathbf{U}, \leq) .

3. S es un núcleo de D .

3.1 S es un conjunto independiente de vértices de G . Como $S \in \mathbf{U}$, se sigue que S es un conjunto independiente de vértices de G .

3.2 S es absorbente. Procederemos por contradicción construyendo un conjunto que contradice la maximalidad de S . Supongamos $x \not\rightarrow S$ para algún vértice $x \notin S$.

Sea $W = \{x \in V(D) - S \mid x \not\rightarrow S\}$, por nuestra suposición $W \neq \emptyset$, sea x_0 uno de los vértices que existe al aplicar el **Lema 6.2** a la digráfica T , la cual supusimos que era digráfica pretransitiva izquierda, y sin trayectorias infinitas exteriores, aplicado al conjunto W .

Notemos que según el **Lema 6.2**:

Observación 7.3 x_0 satisface: para todo $y \in V(D) - S$ tal que $x_0 \xrightarrow{T} y$ y $y \not\rightarrow S$ implica $y \xrightarrow{T} x_0$.

Sea $P = \{s \in S \mid s \xrightarrow{\text{azul}} x_0\}$. Sobre $P \cup \{x_0\}$ tenemos lo siguiente:

3.2.1 $P \cup \{x_0\}$ es un conjunto independiente de vértices de G .
 P es un conjunto independiente de G . Como $P \subset S$ y S es un conjunto independiente de vértices de G , solo falta ver que entre P y x_0 no hay flechas en D .

Como $x_0 \not\rightarrow S$, y $P \subset S$ entonces $x_0 \not\rightarrow P$. Por la definición de P , $P \xrightarrow{\text{azul}} x_0$. Supongamos que $P \xrightarrow{\text{rojo}} x_0$, como $P \subset S$ entonces $S \xrightarrow{\text{rojo}} x_0$, como $S \in \mathbf{U}$, entonces $x_0 \rightarrow S$, lo cual es una contradicción pues $x_0 \in W$. Por lo tanto $P \not\xrightarrow{\text{rojo}} x_0$. Y por lo tanto entre P y x_0 no hay flechas en D .

Concluimos que $P \cup \{x_0\}$ es un conjunto independiente de vértices de G .

3.2.2 $P \cup \{x_0\} \in \mathbf{U}$.

Supongamos que $P \cup \{x_0\} \xrightarrow{\text{rojo}} y$, veremos que $y \rightarrow P \cup \{x_0\}$.

Supongamos que $y \not\rightarrow P$ y probaremos que $y \rightarrow \{x_0\}$. Procederemos considerando los siguientes dos casos: **a)** $P \xrightarrow{\text{rojo}} y$ o **b)** $\{x_0\} \xrightarrow{\text{rojo}} y$.

Caso a) Supongamos que $P \xrightarrow{\text{rojo}} y$. Como $P \subseteq S$, entonces $S \xrightarrow{\text{rojo}} y$, por hipótesis de **3.1** habíamos elegido a $S \in \mathbf{U}$ y entonces $y \rightarrow S$. Como $y \not\rightarrow P$, entonces $y \rightarrow S \setminus P$, de aquí tenemos dos posibilidades $y \xrightarrow{\text{rojo}} S \setminus P$ ó $y \xrightarrow{\text{azul}} S \setminus P$.

a.1) Si $y \xrightarrow{\text{rojo}} (S \setminus P)$, como $P \xrightarrow{\text{rojo}} y$, pues estamos en el caso a), sea $p \in P$ tal que $p \xrightarrow{\text{rojo}} y$ y aplicando que T es una digráfica pretransitiva izquierda, tenemos que $y \xrightarrow{T} p$ ó $p \xrightarrow{T} (S \setminus P)$. Como S es un conjunto independiente de vértices de G y $p \in P \subset S$, entonces $p \in S$, por lo que $p \xrightarrow{T} (S \setminus P)$ (ver Figura 7.16), así $y \xrightarrow{T} p$ y esto implica que (p, y) es una flecha simétrica de T y como vimos en la **Observación 7.2** que $\text{Sim}(T) = \text{Sim}(D)$, también lo es de D , así, $y \rightarrow p$ y por lo tanto $y \rightarrow P$, pero esto es una contradicción, pues al principio de **3.2.2** habíamos supuesto que $y \not\rightarrow P$, la cual se sigue de suponer que $y \xrightarrow{\text{rojo}} S \setminus P$, luego $y \not\xrightarrow{\text{rojo}} (S \setminus P)$.

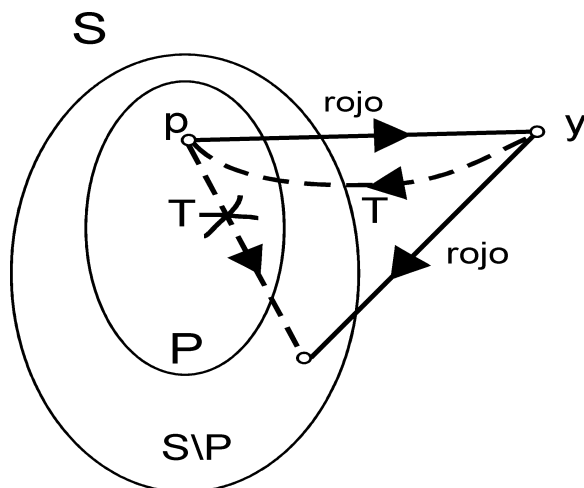


Fig. 7.16 Si $y \xrightarrow{\text{rojo}} (S \setminus P)$, obtenemos una contradicción

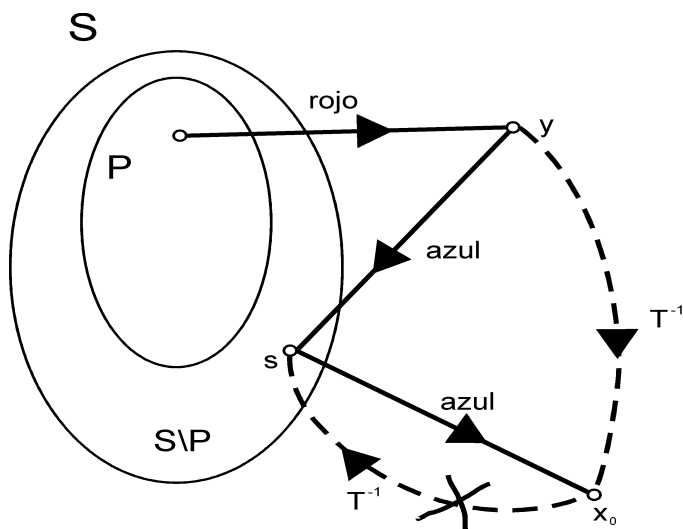


Fig. 7.17. Como $y \xrightarrow{\text{azul}} (S \setminus P)$, se deduce que $y \xrightarrow{T^{-1}} \{x_0\}$

a.2) Si $y \xrightarrow{\text{azul}} (S \setminus P)$, sea $s \in S \setminus P$ tal que $y \xrightarrow{\text{azul}} s$, ya que $s \notin P$, por la definición de P tenemos que $s \xrightarrow{\text{azul}} \{x_0\}$, como T^{-1} es una digráfica pretransitiva derecha, entonces $\{x_0\} \xrightarrow{T^{-1}} s$ ó $y \xrightarrow{T^{-1}} \{x_0\}$, ver Figura 7.17.

Si $x_0 \xrightarrow{T^{-1}} s$, entonces (x_0, s) es una flecha simétrica de T^{-1} , pero como vimos en la **Observación 7.2** también es flecha simétrica de D , entonces $x_0 \rightarrow s$, lo cual es una contradicción, pues $s \in S$ y $x_0 \notin S$,

por lo tanto $y \xrightarrow{T^{-1}} \{x_0\}$ (ver figura 7.17).

Ya que $(y, x_0) \in F(T^{-1})$ implica que (y, x_0) es una arista de la gráfica G y por lo tanto se deduce que $y \rightarrow \{x_0\}$ ó $\{x_0\} \rightarrow y$.

Si $y \rightarrow x_0$, hemos probado lo que queríamos.

De **a.2)** tenemos $y \xrightarrow{\text{azul}} s$ y por definición de P sabíamos que $s \xrightarrow{\text{azul}} x_0$. Si $x_0 \rightarrow y$, entonces (x_0, y, s, x_0) es un triángulo dirigido en D (ver Figura 7.18), por hipótesis del **Teorema 7.3** este triángulo debe tener al menos dos flechas simétricas en D . Como $x_0 \not\rightarrow s$, entonces (s, x_0) no es una flecha simétrica de D , y por lo tanto (s, y) y (y, x_0) son flechas simétricas de D y por lo tanto $y \rightarrow \{x_0\}$.

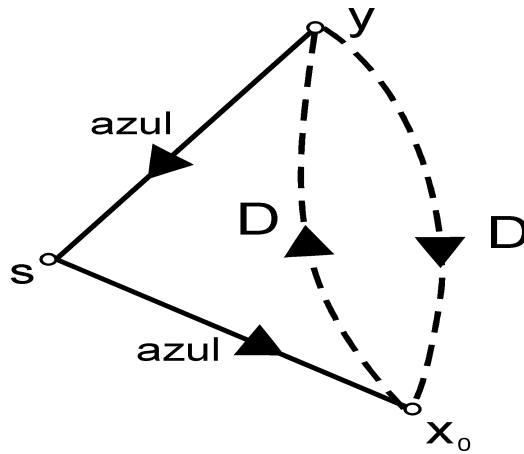


Fig. 7.18 $y \rightarrow x_0$ ó $x_0 \rightarrow y$

Caso b) Supongamos que $x_0 \xrightarrow{\text{rojo}} y$. Para y tenemos dos posibilidades; $y \not\rightarrow s$ ó $y \rightarrow s$, analicemos cada una de ellas.

b.1) Supongamos que $y \not\rightarrow s$, por elección de $\{x_0\}$, de la **observación 7.3** tenemos que $y \xrightarrow{T} \{x_0\}$, entonces (x_0, y) es una flecha simétrica de T , ver Figura 7.19, y por lo tanto lo es de D por la **observación 7.2**, así $y \rightarrow \{x_0\}$.

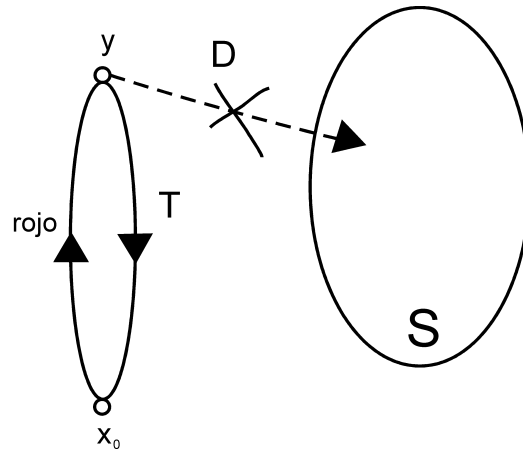


Fig. 7.19 (x_0, y) es una flecha simétrica de T

b.2) Supongamos que $y \rightarrow S$, como $y \notin P$, entonces $y \rightarrow S \setminus P$, sea $s \in S \setminus P$ tal que $y \rightarrow s$, por la definición de P tenemos que $s \xrightarrow{\text{azul}} \{x_0\}$ así (ver Figura 7.20) tenemos un triángulo dirigido (x_0, y, s, x_0) en D , análogamente al caso **a.2)** (x_0, y) es una flecha simétrica de D y por lo tanto $y \rightarrow \{x_0\}$.

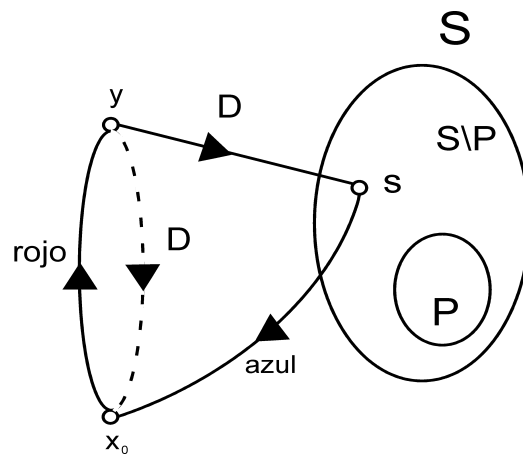


Fig. 7.20

Entonces, $P \cup \{x_0\} \xrightarrow{\text{rojo}} y$ implica que $y \rightarrow P \cup \{x_0\}$. Por lo tanto $P \cup \{x_0\} \in \mathbf{U}$.

Por último veamos que $S \leq P \cup \{x_0\}$ para obtener la contradicción buscada. Para cualquier $s \in S$ probaremos que existe $t \in P \cup \{x_0\}$ tal que $s = t$ ó $(s \xrightarrow{T^{-1}} t \text{ y } t \not\xrightarrow{T^{-1}} s)$. Si $s \in P$, ya está probado, si $s \notin P$, por definición de P , tenemos que $s \xrightarrow{\text{azul}} \{x_0\}$, por otro lado, como $x_0 \not\rightarrow S$, ya que $s \xrightarrow{\text{azul}} \{x_0\}$ tenemos que $s \xrightarrow{T^{-1}} \{x_0\}$. Si $x_0 \xrightarrow{T^{-1}} s$ entonces $(x_0, s) \in \text{Sim}(T^{-1}) = \text{Sim}(D)$. Esto implica que $x_0 \rightarrow s \in S$, contradicción. Por lo tanto $x_0 \not\xrightarrow{T^{-1}} s$. Así, para cualquier $s \in S$ tenemos que $s \in P$ ó $(s \xrightarrow{T^{-1}} \{x_0\} \text{ y } x_0 \not\xrightarrow{T^{-1}} s)$, por lo tanto existe $t \in P \cup \{x_0\}$ tal que $s = t$ ó $(s \xrightarrow{T^{-1}} t \text{ y } t \not\xrightarrow{T^{-1}} s)$. Por lo tanto $S \leq P \cup \{x_0\}$.

Como $x_0 \notin S$, entonces $S < P \cup \{x_0\}$ pero esto contradice que S sea un elemento maximal de (\mathbf{U}, \leq) .

La contradicción viene de suponer que existe $x \in V(D) \setminus S$ tal que $x \not\rightarrow S$ (i.e. S no es absorbente). Por lo tanto S es absorbente. Por lo tanto S es un núcleo de D . †

Por **3.1** y **3.2** S es un núcleo de la digráfica D .

Observemos que la hipótesis $\text{Sim}(T) = \text{Sim}(D)$ del teorema anterior sólo se usa en la demostración en la parte donde se prueba que toda cadena de (\mathbf{U}, \leq) está acotada superiormente, en el resto de la demostración sólo se usa la contención $\text{Sim}(T) \subseteq \text{Sim}(D)$, esto implica que para el caso de gráficas finitas basta pedir dicha contención. Para gráficas finitas queda de la siguiente manera.

Teorema 7.4 *Sea G una gráfica finita y sea D una M -orientación de G . Si existe alguna orientación T de G que sea una digráfica pre-transitiva izquierda o derecha tal que $\text{Sim}(T) \subseteq \text{Sim}(D)$, entonces D tiene núcleo.*

A continuación hacemos notar que las hipótesis del **Teorema 7.3** son necesarias.

Nota 7.1 *Si en el **Teorema 7.3** se elimina la hipótesis de que la digráfica T no tenga trayectorias infinitas exteriores ni interiores entonces no necesariamente D tiene núcleo. Sea G la gráfica con vértices $\{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ y con aristas $\{(u_n, u_m) \mid n, m \in \mathbf{N}, n \neq m\}$, Figura 7.21. Sea D la orientación de G tal que $F(D) = \{(u_n, u_m) \mid n, m \in \mathbf{N}, n < m\}$, la digráfica D es la misma a la que se refiere la **Nota 6.2** y*

mostrada en la Figura 6.7. D es una digráfica transitiva, asimétrica y no tiene triángulos dirigidos, así D es una M -orientación de G . Otra consecuencia de que D es transitiva es que D es tanto pretransitiva derecha como pretransitiva izquierda, por lo tanto consideremos $T = D$. La sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una trayectoria infinita exterior en T . Como ya vimos en la **Nota 6.2** D no tiene núcleo.

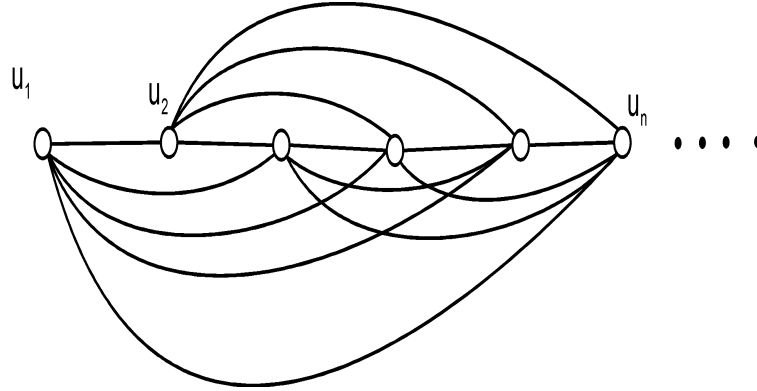


Fig. 7.21

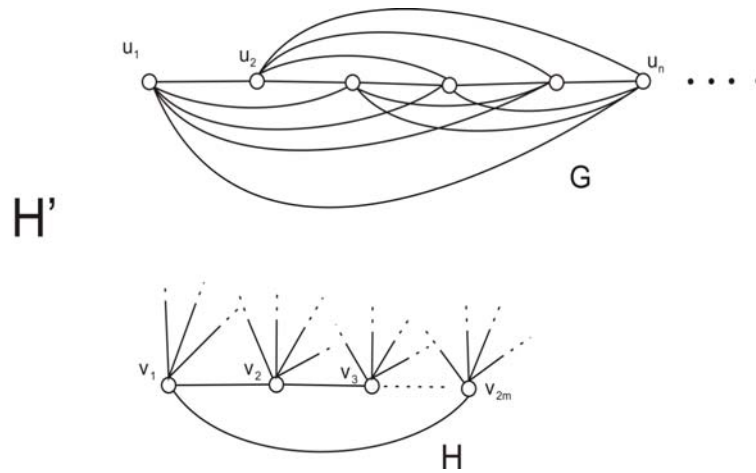


Fig. 7.22

Ahora veremos que existe una familia infinita de gráficas que satisfacen lo anterior, es decir, que tienen alguna M -orientación que no tiene núcleo y tienen una orientación pretransitiva derecha o izquierda con la misma parte simétrica que posee trayectorias infinitas exteriores o interiores. Sea H cualquier ciclo de longitud par $(v_1, v_2, \dots, v_{2m}, v_1)$ tal que $V(H) \cap V(G) = \emptyset$. Sea H' la siguiente gráfica: $V(H') = V(H) \cup V(G)$, $A(H') = A(H) \cup A(G) \cup \{(u, v) \mid v \in V(H) \text{ y } u \in V(G)\}$,

ver Figura 7.22.

Sea D' la siguiente orientación de H' (ver Figura 7.23):

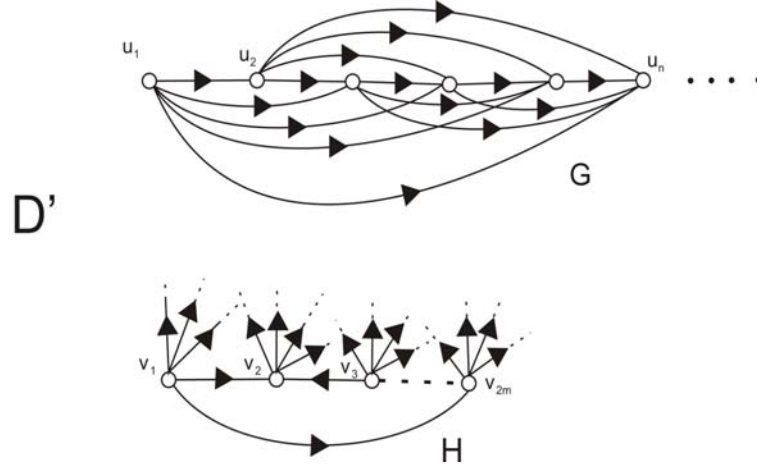


Fig. 7.23

$V(D') = V(D)$, $F(D') = \{(v_i, v_{i+1}) \mid v_i, v_{i+1} \in V(H), i \in \{1, 2, \dots, 2m\}, i \equiv 1(\text{mod } 2)\} \cup \{(v_{i+1}, v_i) \mid v_i, v_{i+1} \in V(H), i \in \{1, 2, \dots, 2m\}, i \equiv 0(\text{mod } 2)\} \cup F(D) \cup \{(u, v) \mid v \in V(H) \text{ y } u \in V(G)\}$; la suma es tomada módulo $2m$. Vamos a demostrar que D' es una digráfica transitiva, sean $u, v, w \in V(D')$ tales que $(u, v), (v, w) \in F(D')$, veamos que $(u, w) \in F(D')$.

7.4 Observación. En la digráfica D' , si $u, v, w \in V(H)$, entonces $(u, v) \notin F(D')$ ó $(v, w) \notin F(D')$. Sean $u, v, w \in V(H)$, $u = u_i$, si $(u, v) \in F(D')$, entonces $i \equiv 1(\text{mod } 2)$ por la definición de $F(D')$, lo cual implica que $v = v_j$ con $j \equiv 0(\text{mod } 2)$, por lo tanto no hay flechas en D' que salgan desde v y entonces $(v, w) \notin F(D')$.

Si $w \in V(H)$, por la definición de D' tenemos que $u, v \in V(H)$ y por la **Observación 7.4** obtenemos una contradicción al suponer que $(u, v), (v, w) \in F(D')$, por lo tanto $w \notin V(H)$. Entonces $w \in V(G)$. Si $u \in V(H)$, por la definición de D' , $(u, w) \in F(D')$, si $u \notin V(H)$, entonces $u \in V(G)$ y por la definición de D' , $v \in V(G)$, es decir, $\{u, v, w\} \subset V(D)$ y como D es una digráfica transitiva entonces $(u, w) \in F(D)$, por lo tanto $(u, w) \in F(D')$. Concluimos que D' es una digráfica transitiva, además D' es asimétrica, entonces no tiene

triángulos dirigidos y por lo tanto es una M-orientación de H' .

Otra consecuencia de que D' sea una digráfica transitiva es que la convierte en una digráfica pretransitiva izquierda y pretransitiva derecha. Consideremos $T' = D'$, entonces $Sim(T') = Sim(D')$. En T' la sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una trayectoria infinita exterior.

Veamos que D' no tiene núcleo. Si $v_i \in V(H)$ estuviera en un núcleo N de D' , entonces para que fuera absorbente todos los vértices de G tendrían que pertenecer al núcleo puesto que no hay flechas de $V(G)$ hacia $V(H)$, lo cual no puede ser puesto que hay flechas entre los vértices de G y ya no sería independiente, por lo tanto dicho núcleo, en caso de existir, no puede contener vértices de H . Si $u_i \in V(G)$ es elemento de un núcleo N entonces para que N sea absorbente $(u_{i+1}, u_i) \in F(D')$, lo cual es una contradicción por la construcción de las flechas de D' , ó $u_{i+1} \in N$ lo cual implicaría que N no es independiente. Por lo tanto D' no tiene núcleo.

Nota 7.2. Si en el **Teorema 7.1** se elimina la hipótesis de que la digráfica D sea una M-orientación entonces no necesariamente D tiene núcleo. Sea G la gráfica completa con 4 vértices. Si $V(G) = \{u, v, w, x\}$, sea D la orientación de G tal que $F(D) = \{(u, v), (v, w), (w, x), (x, u), (u, w), (w, u), (v, x), (x, v)\}$, ver Figura 7.24, esta figura es la misma digráfica de la Figura 6.10 y como vimos en la **Nota 6.2** no tiene núcleo. En D todo triángulo dirigido tiene una sola flecha simétrica, es decir D no es una M-orientación de G . Sea T la siguiente orientación de G : $F(T) = \{(u, v), (w, v), (w, x), (u, x), (u, w), (w, u), (v, x), (x, v)\}$, ver Figura 7.25. No es difícil ver que T es una digráfica tanto pretransitiva derecha como izquierda y $Sim(T) = Sim(D)$.

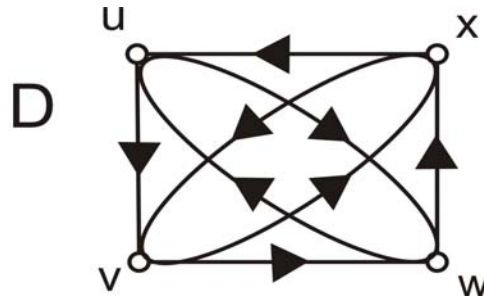


Fig. 7.24 Digráfica sin núcleo.

Ahora veamos que a partir de G podemos construir una familia infinita de gráficas donde cada una de ellas tiene alguna orientación que

no tiene núcleo y no es una M -orientación, además cada gráfica de la familia tiene alguna orientación pretransitiva derecha que no tiene trayectorias infinitas exteriores ni interiores, ambas orientaciones con la misma parte simétrica. Sean $G_0 = G, D_0 = D$ y $T_0 = T$, para cada entero positivo n y dadas $G_{n-1}, D_{n-1}, T_{n-1}$ que satisfacen lo anterior, consideramos un nuevo vértice z_n y definimos G_n, D_n, T_n como sigue, ver Figuras 7.26, 7.27 y 7.28:

$$V(G_n) = V(G_{n-1}) \cup \{z_n\} \text{ y } A(G_n) = A(G_{n-1}) \cup \{(z_n, u) \mid u \in V(G_{n-1})\},$$

$$V(D_n) = V(D_{n-1}) \cup \{z_n\} \text{ y } F(D_n) = F(D_{n-1}) \cup \{(z_n, u) \mid u \in V(D_{n-1})\} \text{ y}$$

$$V(T_n) = V(T_{n-1}) \cup \{z_n\} \text{ y } F(T_n) = F(T_{n-1}) \cup \{(z_n, u) \mid u \in V(T_{n-1})\}.$$

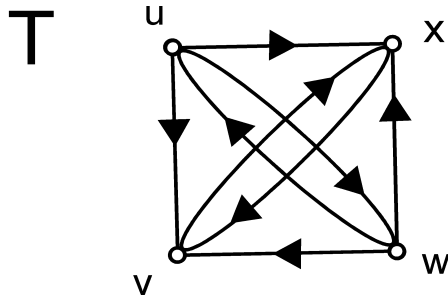


Fig. 7.25 La orientación T de G .

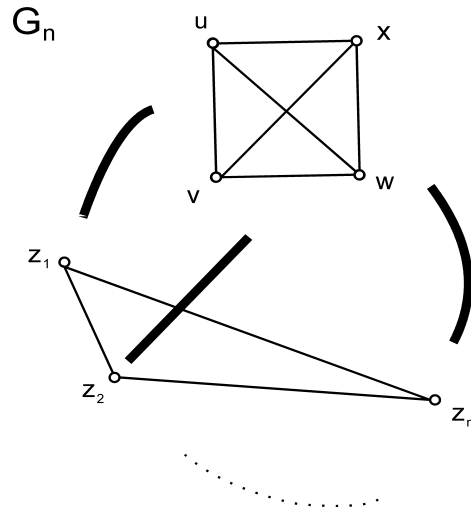


Fig. 7.26 Las aristas gruesas indican que los vértices z_1, z_2, \dots, z_n son adyacentes hacia los vértices u, v, w y x .

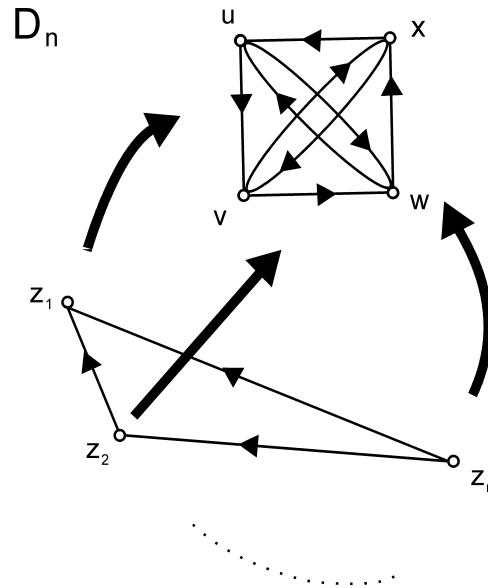


Fig. 7.27 Digráfica D_n Las aristas gruesas indican que los vértices z_1, z_2, \dots, z_n son adyacentes hacia los vértices u, v, w y x .

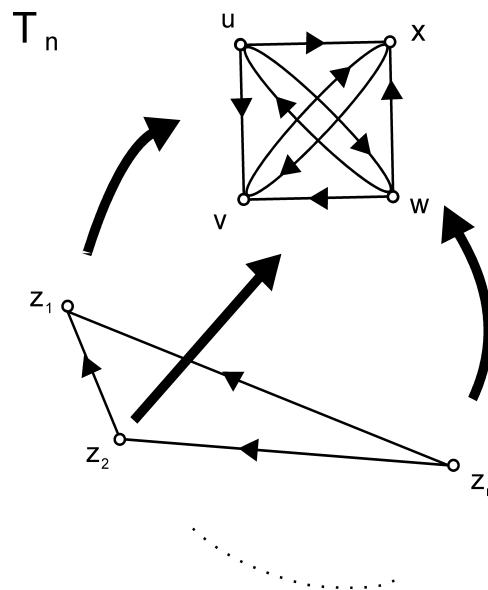


Fig. 7.28 Digráfica T_n Las aristas gruesas indican que los vértices z_1, z_2, \dots, z_n son adyacentes hacia los vértices u, v, w y x .

Es claro que D_n y T_n son orientaciones de G_n . Como D es subdigráfica de D_n y D tiene triángulos dirigidos con solo una flecha

simétrica entonces D_n no es una M-orientación de G . Por el **Lema 6.5** T_n es una digráfica pretransitiva derecha y como es finita no tiene trayectorias infinitas exteriores ni interiores. Como las flechas que se agregan a D_{n-1} (resp. T_{n-1}) para obtener D_n (resp. T_n) son asimétricas, entonces $\text{Sim}(D_n) = \text{Sim}(D_{n-1})$ y $\text{Sim}(T_n) = \text{Sim}(T_{n-1})$, y como $\text{Sim}(D_{n-1}) = \text{Sim}(T_{n-1})$ entonces $\text{Sim}(D_n) = \text{Sim}(T_n)$. Por último veamos que D_n no tiene núcleo. Aplicando el **Lema 6.4** tomando $D_1 = D_n[\{z_1, z_2, \dots, z_n\}]$, $D_2 = D$ y $A = \{(z_i, v) \mid i \in \{1, \dots, n\}, v \in V(D)\}$ tenemos $D = D_n$ y por lo tanto D_n no tiene núcleo. Así $\{G_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ es una familia infinita de gráficas donde cada una de ellas tiene alguna orientación D_n que no tiene núcleo, D_n no es una M-orientación y D_n tiene alguna orientación T_n pretransitiva derecha que no tiene trayectorias infinitas exteriores ni interiores.

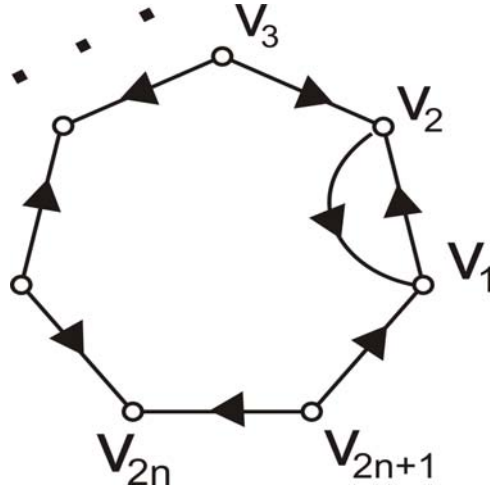


Fig. 7.29 Orientación T para la gráfica de la **nota 7.3**.

Nota 7.3 Para el caso finito, si se elimina la hipótesis $\text{Sim}(T) \subset \text{Sim}(D)$ el resultado puede fallar. Sea G cualquier ciclo de longitud impar mayor o igual que 5. Sea D el ciclo dirigido correspondiente, D no tiene triángulos dirigidos, por lo tanto D es una M-orientación de G pero no tiene núcleo. Si $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}\}$ sea T la siguiente orientación de G :

$$A(T) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \cup \{(v_{2i+1}, v_{2i}), (v_{2i+1}, v_{2i+2}) \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}$$
 la suma es tomada mod $2n + 1\}$, ver Figura 7.29. No es difícil ver que T es una digráfica pretransitiva derecha y $\text{Sim}(T) \not\subset \text{Sim}(D)$.

Por último veremos que el **Teorema 7.4** generaliza el **Teorema 7.1** probado por C. Champetier[4], pero además el **Teorema 7.4** abarca gráficas que no son gráficas de comparabilidad, es decir, gráficas que no están consideradas en el **Teorema 7.1**, más aún abarca gráficas que no son perfectas.

Nota 7.4 Sea G una gráfica de comparabilidad y D cualquier M-orientación de G . Si T es una orientación transitiva de G entonces T es una orientación pretransitiva derecha de G y también izquierda, como G es finita, T también lo es, entonces no tienen trayectorias infinitas exteriores ni interiores. Ya que T es una digráfica asimétrica, entonces $Sim(T) \subset Sim(D)$. Por todo lo anterior y aplicando el **Teorema 7.4** D tiene núcleo. Por lo tanto el **Teorema 7.4** generaliza al **Teorema 7.1**.

Nota 7.5 Consideremos la gráfica $G_n, n \leq 2$, mostrada en la Figura 7.30, G_n no es una gráfica de comparabilidad, Gallai [11], más aún no es perfecta pues para C_{2n+1} el ciclo de longitud $2n + 1$ se tiene $\chi(C_{2n+1}) = 3$ y $\omega(C_{2n+1}) = 2$. Sea D_n la orientación de G_n tal que: $F(D_n) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i \in \{1, 2, \dots, 2n + 1\}\}$ la suma es tomada mod $2n + 1\} \cup \{(u_i, u_{i+1}) \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ la suma es tomada mod $2n + 1\} \cup \{(u_{2n}, u_{2n-1}), (v_2, v_1), (u_{2n}, v_1), (v_1, u_{2n})\}$, ver Figura 7.31. El único triángulo dirigido de D_n es (v_1, v_2, v_{2n}, v_1) que tiene 2 flechas simétricas, por lo tanto D_n es una M-orientación de G_n . Sea T_n la orientación de G_n tal que:

$F(T_n) = \{(u_{2n}, v_1)\} \cup \{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \cup \{(v_{2i+1}, v_{2i}), (v_{2i+1}, v_{2i+2}) \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{(u_{2n-1}, u_{2n}), (u_{2n}, u_{2n-1})\} \cup \{(u_{2i}, u_{2i-1}), (u_{2i}, u_{2i+1}) \mid i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}\} \cup \{(u_{2n+1}, u_{2n}), (u_{2n+1}, u_1)\}$, la suma es tomada mod $2n + 1$, ver Figura 7.32. T_n es una orientación pretransitiva derecha de G_n pues los pares de flechas adyacentes en donde se verifica que T es pretransitiva derecha son:

para $(u_{2n}, v_1), (v_1, v_2)$, tenemos $(v_2, v_1) \in F(D)$

para $(u_{2n}, v_2), (v_2, v_1)$, tenemos $(v_1, v_2) \in F(D)$

para $(u_{2n-2}, v_2), (v_2, u_{2n})$, tenemos $(u_{2n}, v_2) \in F(D)$

para $(u_{2n-2}, v_2), (v_2, v_1)$, tenemos $(v_1, v_2) \in F(D)$

para $(v_{2n+1}, v_1), (v_1, v_2)$, tenemos $(v_2, v_1) \in F(D)$

para $(u_{2n+1}, u_{2n}), (u_{2n}, v_2)$, tenemos $(v_2, u_{2n}) \in F(D)$

para $(u_{2n+1}, u_{2n}), (u_{2n}, v_1)$, tenemos $(v_1, u_{2n}) \in F(D)$

para $(v_3, v_2), (v_2, v_1)$, tenemos $(v_1, v_2) \in F(D)$

para $(v_3, v_2), (v_2, u_{2n})$, tenemos $(u_{2n}, v_2) \in F(D)$

para $(v_1, v_2), (v_2, u_{2n})$, tenemos $(u_{2n}, v_2) \in F(D)$

para $(v_2, u_{2n}), (u_{2n}, v_1)$, tenemos $(v_2, v_1) \in F(D)$

y es inmediato que $Sim(T_n) = Sim(D_n)$ pues las únicas dos flechas simétricas de T_n , así como de D_n son (v_1, v_2) y (v_2, u_{2n}) . Por lo tanto G_n es una gráfica que no es perfecta y a la cual puede aplicarse el **Teorema 7.4**.

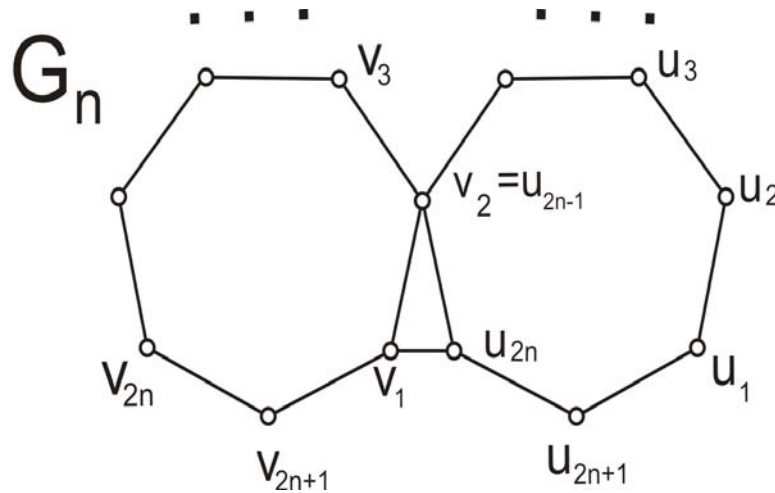


Fig. 7.30. G_n es una gráfica que no es perfecta y a la cual puede aplicarse el **Teorema 7.4**

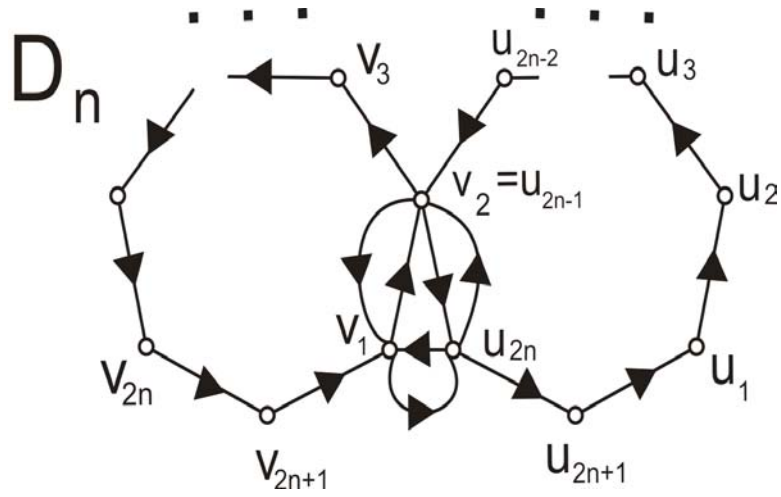


Fig. 7.31. Una M -orientación de G_n

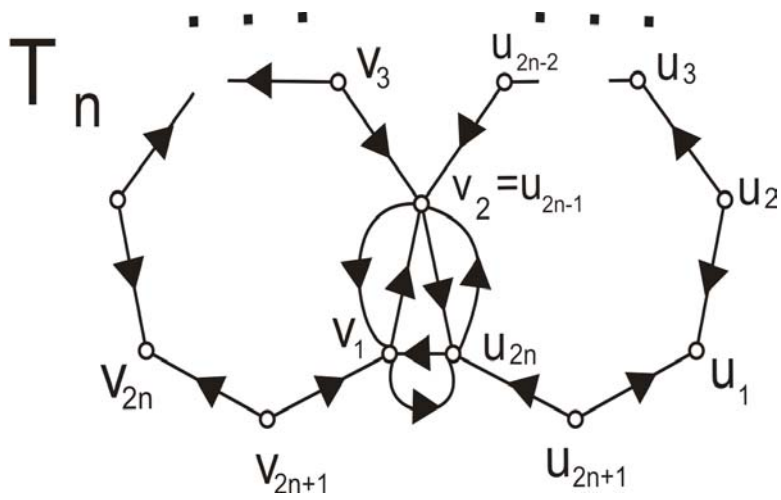


Fig. 7.32. T_n una orientación de G_n que es pretransitiva derecha.

Referencias

- [1] C. Berge, Graphs North Holland, Amsterdam, New York, (1985).
- [2] C. Berge y V. Chvátal, editores, Topics on perfect graphs, Ann. Discrete Math. (21), North Holland-Amsterdam, (1984).
- [3] E. Boros y V. Gurvich, Perfect graphs are kernel solvable, Discrete Math. 159 (1996), 35-55.
- [4] C. Champetier, Kernels in some orientations of comparability graphs, J. Combin. Theory Ser. B 47 (1989) 111-113.
- [5] P. Duchet, Graphes noyau-parfaits, Ann. Discrete Math. 9 (1980), 93-101.
- [6] P. Duchet, Classical Perfect Graphs, An introduction with emphasis on triangulated and interval graphs, Ann. Discrete Math. 21 (1984), 67-96.
- [7] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann Lara, On kernels and semikernels of digraphs, Discrete Math. 48 (1984), 67-76.
- [8] M. Richardson, Extensions theorems for solutions of irreflexive relations, Ann. Math. 58 (2) (1953), 537.
- [9] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, On monocromatic paths in edge-coloured digraphs, J. Combin. Theory Ser. B 33 (1982) 271-275.
- [10] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy, Kernels in pretransitive digraphs, Discrete Mathematics, 275 (2004) 129-136
- [11] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy, Kernels in orientations of pretransitive orientable graphs, Graph Theory Trends in Mathematics, Birkhäuser Verlag Basel \ Switzerland (2006) 197-208.
- [12] T. Gallai, Transitive orienterbare graphen, Acta Math. Sci. Hung. 18 (1967). 25-66