

Universidad Nacional Autónoma de México  
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en  
Sistemas

Descriptores de Regiones Binarias en  $\mathbb{Z}^2$  y  $\mathbb{Z}^3$   
Basados en el Concepto de Compacidad

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
Doctor en Ciencias de la Computación

PRESENTA:  
M. en C. Raúl Santiago Montero

DIRECTOR DE TESIS  
Dr. Ernesto Bribiesca Correa

Lugar y Fecha



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Ernesto Bribiesca la supervisión y dirección de este trabajo de tesis doctoral. Además, le agradezco profundamente por la confianza que depositó en mí, por su paciencia, amabilidad y consejos que tuvo a bien brindarme.

De la misma manera, agradezco a los doctores Boris Escalante y Yann Frauel por el tiempo y el profesionalismo en la supervisión de este trabajo.

Agradezco a los doctores. Fernando Arámbula y Humberto Sossa por haber aceptado ser miembros de mi jurado y también les quedo muy agradecido por las aportaciones y observaciones que dieron a este trabajo doctoral.

También quiero dar las gracias a los miembros del Departamento de Computación del IIMAS-UNAM por hacer de mi estancia un espacio cálido, lleno de amabilidad y que me brindo la posibilidad de desarrollar mi trabajo en una forma muy placentera.

Quedo especialmente agradecido por las atenciones y compañía de Angélica Juárez y Maribel Rivera.

Finalmente, agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México y al CONACyT por la oportunidad de realizar este trabajo doctoral.

# Resumen

La compacidad es un concepto que hace referencia a la cercanía entre los elementos que integran una entidad. El término deriva de la palabra latina *compactus* que significa unir o juntar. Compacidad también significa grado de porosidad o densidad. Por lo tanto, la compacidad puede darnos una noción de la configuración que guarda un conjunto de elementos que conforman un objeto o una forma.

El método más común para obtener una medida de compacidad es mediante una comparación entre la silueta o la forma tridimensional del objeto con una silueta o forma de referencia. En el espacio continuo, la forma de referencia es la esfera y en el plano es el círculo. Por lo tanto, una forma se asume como más compacta si la comparación resulta en un mayor grado de similitud entre esta forma y el círculo o la esfera, según sea el caso.

Aunque existen muchas medidas de compacidad, la llamada relación isoperimétrica es la más empleada. La relación isoperimétrica se conforma con las propiedades básicas del perímetro y el área de la forma para generar un valor de compacidad. La relación isoperimétrica tiene varias propiedades deseables:

- La relación usa dos características básicas y simples de la forma para generar un valor numérico de compacidad, el perímetro y el área.
- Si la relación isoperimétrica se aplica a un círculo; entonces, la relación produce un valor igual a uno.
- El valor generado es adimensional.
- Una clase de forma obtiene siempre el mismo valor.
- El valor compacidad es simple de calcular.

Inicialmente la psicología mostró la utilidad e importancia de la compacidad en la descripción numérica de las formas de los objetos. Investigaciones posteriores en otras áreas científicas confirmaron que la inclusión de la compacidad como descriptor de la forma mejora el rendimiento de los métodos de clasificación y reconocimiento. A partir de entonces, las aplicaciones donde se

emplean la compacidad se han diversificado por diferentes ámbitos científicos y tecnológicos.

Áreas como la medicina y la biología incluyen a la compacidad en diversos procesos clínicos y de investigación. En estas áreas, la compacidad brinda valiosa información sobre la presencia de patologías, evolución de tratamientos y medición del grado de rechazo de prótesis, implantes y transplantes. Por otra parte, en campos como la química, física e inteligencia artificial, la utilidad más predominante de la compacidad recae en procesos de clasificación y reconocimiento.

Debido al rápido desarrollo de las tecnologías digitales, los procesos de análisis de la forma emplean actualmente imágenes digitales. Como resultado, las medidas de compacidad, diseñadas para el espacio continuo, presentan serias inconsistencias al ser aplicadas en el espacio digital. La primera inconsistencia radica en la comparación entre la forma y el círculo para evaluar un valor de compacidad; estrictamente, la comparación no puede llevarse a cabo porque el círculo carece de definición en el espacio digital.

Otro problema se presenta con el uso del perímetro de la forma como parámetro para generar un valor de compacidad, tal como la relación isoperimétrica. En el espacio digital, el perímetro de una región digital no tiene definición única. Por lo tanto, por cada definición se produce un valor distinto de compacidad. A lo anterior hay que agregar que las transformaciones de escala, rotación o ruido alteran el número y posición de los elementos que integran una región digital. En consecuencia, el valor del área y del perímetro de las regiones digitales se altera, cambiando el valor de compacidad.

La presente obra presenta los diferentes enfoques y sus propuestas para medir la compacidad de las formas en el espacio digital. El trabajo también ilustra estas medidas de compacidad y puntualiza en las inconveniencias que estas medidas presentan. Posteriormente, el trabajo describe e ilustra dos nuevas relaciones, los factores  $E$  y  $E$  normalizado, como medidas de compacidad. Estas relaciones emplean características geométricas de los pixels o voxels para obtener una mejor evaluación de la compacidad de regiones digitales.

Sin embargo, los factores  $E$  y  $E$  normalizado actúan en condiciones diferentes. Mientras que el factor  $E$  mide los cambios en la morfología de una región digital, el factor  $E$  normalizado mide la compacidad de regiones digitales con cambios de escala y rotación. Las propiedades y limitaciones que presentan cada relación son expuestas a través de una serie de experimentos utilizando varias bases de datos de imágenes.

Este trabajo finaliza con la descripción de las ventajas, contexto y posibles aplicaciones de los factores  $E$  y  $E$  normalizado mediante un conjunto de conclusiones y sugerencias de trabajo futuro.

# Abstract

Compactness is a concept and is related to the closeness between the elements that construct an entity. The term compactness comes from the Latin word compactus and meaning join or concentrated. Also, compactness has the meaning of density or porousness. Hence, compactness can give us a notion of the configuration that a set of elements of an object or shape has.

The most common method to obtain a compactness measure is by a shape comparison between the silhouette or tri-dimensional shape of an object and a reference silhouette or shape. In the continuous space, the reference shape is the sphere and in the plane, it is the circle. Therefore, a shape is more compact if the comparison between this shape and the circle or sphere results with a high degree of similarity.

Even though, there are many compactness measures, the called isoperimetric ratio is the most used. The isoperimetric ratio has some goodness properties:

- This ratio employs two basic and simple properties of a shape in order to yield a numeric value of compactness, its perimeter and area.
- If the isoperimetric ratio assesses a circle; then, these ratio yields a value equal to one.
- The value of the isoperimetric ratio is dimensionless.
- A family of the shapes always gets the same numeric value.
- The calculation of compactness value is simple.

Initially the psychology showed the utility and importance of shape compactness for numeric description of shape objects. Subsequence researches in others scientific fields confirmed that the inclusion of compactness as shape descriptor improves the performing of classification and recognition methods.

Since, the applications where compactness is used as shape descriptor have diversified for several scientific and technological areas. Fields as medicine and biologist take account shape compactness as shape descriptor in many clinical and research processes. In these fields, the shape compactness gives valuable information about the presence of diverse pathologies, the evolution of medical treatment and the evaluation of biocompatibility of artificial organs, implants

o transplants. In the other hand, fields as chemistry, physics and artificial intelligent, the shape compactness utility is in shape classification and recognition processes.

Owing to the rapid development of digital technologies, shape analysis processes actuality employ images in digital formats. As a result, shape compactness measures that were designed for the continuous space have serious inconsistencies to be applied on digital space. The first inconsistency is the comparison between a digital shape and the circle to evaluate a compactness value; strictly, this comparison can not do because the circle does not have definition in digital space.

Another problem arises from the use of shape perimeter as parameter to obtain a compactness value, as in isoperimetric ratio. In the digital space, the shape perimeter does not have a unique definition. Hence, by each definition is produced a compactness value. Moreover, the scaling and rotation transformations or noise modifies in number and position the elements of a digital region that represents shape object. In consequence, shape area and perimeter of a digital regions see alter their values, so the compactness value is also altered.

The present writing shows the different approaches and their proposals to measure shape compactness in digital space. This work also illustrates the digital compactness measures and point out the inconveniences that these measures have. After in this paper, two ratios are proposed, the  $E$  and  $E$  normalized factors, as measures of shape compactness. These ratios use geometric characteristics of pixels and voxels to yield a better compactness measure of digital regions. The  $E$  and  $E$  normalized factors was designed to be used under distinct conditions. While the  $E$  factor measures morphological changes of a digital region the  $E$  normalized factor measures the compactness of digital region with scaling and rotation changes. The properties and limitations that show each ratio are exposed by a series of experiments which uses several image data bases.

This research work ends with a description of advantages, context and likely applications of the  $E$  and  $E$  normalized factors by a set of conclusions and suggestions of future work.

# Glosario

**Área digital:** Número de celdas que componen una región digital

**Área:** Descripción numérica de una superficie.

**Celda:** Polígono regular de área unitaria que representa un pixel.

**Centroide:** El punto cuyas coordenadas son los valores medios de las coordenadas de todos los puntos en un conjunto dentro de una región.

**Circularidad:** Término que hace referencia al grado de similitud entre una forma y el círculo.

**Código de cadena:** Secuencia finita numérica y ordenada que codifica la frontera de una región digital.

**Compacidad:** Concepto relativo a la dispersión o compactación de una forma bidimensional. En el ámbito de las tres dimensiones, el concepto se refiere a la porosidad o densidad del objeto.

**Desigualdad isoperimétrica:** Expresión matemática que determina la región con área máxima dentro de un conjunto de formas con el mismo perímetro.

**Distancia:** La longitud del segmento de línea que une dos puntos.

**Línea:** Elemento geométrico construido por un número infinito de puntos arreglados en una forma particular.

**Modelo de Puntos Reticulares (GPM):** Malla 2 dimensional o 3 dimensional conformado con el producto cartesiano  $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$  o  $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ .

**Modelo Reticular de celdas (GCM):** Conjunto de celdas regulares n-dimensionales cuya unión cubre el n-espacio Euclidiano.

**Perímetro digital:**

**Perímetro digital:** Suma de número de los borde de las celdas que forman la frontera de una región digital.

**Perímetro:** Longitud de una curva cerrada.

**Punto:** Elemento no definido que puede ser especificado en un espacio n-dimensional por sus coordenadas.

**Región digital:** Conjunto de celdas sujetas a una relación de conectividad.

**Región digital:** Entidad con existencia en el espacio digital y compuesta por un número finito de celdas bajo una relación de adyacencia.

**Región:** un conjunto que es la unión de un conjunto abierto con ninguno, alguno o todos sus puntos frontera.

**VCC:** Código de cadena que codifica la frontera de una región digital acorde con el número de celdas que convergen a un vértice.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>14</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	16
1.2. Objetivo . . . . .	16
1.3. Aportación . . . . .	17
1.4. Organización de la presente obra . . . . .	17
<b>2. Estado del arte</b>	<b>18</b>
2.1. Medición de distancias internas . . . . .	23
2.1.1. Medida de circularidad de Haralick . . . . .	24
2.1.2. Factor de forma G . . . . .	26
2.1.3. Medida de compacidad de Wahl . . . . .	28
2.1.4. Medidas de circularidad de Di Ruperto y Dempster . . . . .	29
2.2. Forma de referencia . . . . .	32
2.2.1. Medida digital de compacidad . . . . .	32
2.2.2. Medida de circularidad de Bottema . . . . .	34
2.2.3. Relación de circularidad de Peura e Iivarién . . . . .	34
2.3. Propiedades geométricas de la celda . . . . .	35
2.3.1. Compacidad Discreta usando el perímetro de contacto . . . . .	36
2.3.2. Relaciones área-perímetro de Bogaert . . . . .	39
2.4. Otras propuestas . . . . .	41
2.4.1. La normalización en la medición del perímetro de Sankar y Krishnamurthy . . . . .	42
2.5. Regiones digitales tridimensionales y la medición de la compacidad. . . . .	44
<b>3. Descriptores de regiones digitales basados en la compacidad</b>	<b>47</b>
3.1. Región Digital . . . . .	48
3.1.1. Segmentación . . . . .	50
3.2. Conectividad de subconjuntos de celdas . . . . .	52
3.2.1. Complex cell . . . . .	52
3.2.2. Vecindad, Conectividad y Recorrido . . . . .	53
3.3. Contorno y área envolvente de una región digital . . . . .	53
3.3.1. Área y volumen de una ACC 2- y 3-dimensional . . . . .	54
3.4. Perímetro y área de contacto de una región digital . . . . .	55
3.5. Relaciones área-área y perímetro-perímetro . . . . .	56

3.6.	Factor E . . . . .	58
3.7.	Factor E normalizado . . . . .	59
3.8.	Factor E normalizado y el códigos de cadena VCC . . . . .	62
3.8.1.	VCC . . . . .	63
3.8.2.	El factor E normalizado y el VCC . . . . .	64
3.8.3.	Índices de forma y el factor $E_N$ -VCC . . . . .	65
<b>4.</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>67</b>
4.1.	Factor E y su aplicación en regiones digitales bidimensionales . .	70
4.1.1.	Medición de la compacidad . . . . .	70
4.1.2.	Factor E y los cambios de resolución en regiones digitales	74
4.1.3.	Evaluación de la complejidad . . . . .	78
4.2.	Pruebas del Factor E Normalizado . . . . .	84
4.2.1.	Medición de la compacidad . . . . .	84
4.2.2.	Complejidad de regiones . . . . .	86
4.2.3.	Factor E normalizado y los cambios de resolución en re- giones digitales . . . . .	91
4.3.	Factor E y E normalizado sobre regiones digitales tridimensionales	96
4.3.1.	Medición de la compacidad . . . . .	96
4.3.2.	Factor E y E normalizado y los cambios de resolución en regiones digitales . . . . .	102
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>105</b>
5.1.	Trabajo futuro . . . . .	108

# Índice de figuras

2.1.	Conjunto de formas con diferente grado de compacidad: (a) círculo; (b) cuadrado; (c) Polígono irregular; (d) región. . . . .	21
2.2.	Los tres enfoques para la medición del perímetro de una región digital en el espacio discreto (a); (b)visto como la suma de las distancias entre los centros de las celdas, (c)utilizando los lados frontera de las celdas en la región. Finalmente, sumando el número de celdas en el borde acorde con la conectividad usada,(d) y (e). . . . .	22
2.3.	Dos regiones compuestas con mismo tipo de celdas regulares (píxeles) y sus respectivos valores de compacidad usando la relación clásica: (a) Círculo; (b) cuadrado digitalizado. . . . .	23
2.4.	Dos versiones de un disco digitalizado a diferente resolución y sus respectivos valores de compacidad clásica. . . . .	24
2.5.	Versión digitalizada de un círculo con un valor $G=0.927$ (a). Región discreta cuadrada con un valor $G=0.589$ , (b). Ambas mostradas como mapas de distancias en conectividad cuatro. . . . .	27
2.6.	Ejemplos de dos conjuntos de distancias que se evalúan para obtener el valor de compacidad de la forma en el espacio continuo sugerido por Wall; (a) $50^\circ$ y (b) $119^\circ$ . . . . .	29
2.7.	Región discreta, (a) junto con los mapas de distancias generados bajo el enfoque de Wall; (b) $0^\circ$ , (c) $45^\circ$ , (d) $90^\circ$ y (e) $135^\circ$ . (f) y (g) muestran los mapas de distancias mínimas y máximas respectivamente. . . . .	30
2.8.	Regiones discretas con sus respectivas regiones máximas encontradas mediante erosiones continuas usando un disco de radio uno como elemento de estructura. Aquí se esquematizan 8 posibles direcciones para evaluar el grado de circularidad de estas regiones. (a) con un valor $M = 1/6$ y en (b) $M = 0$ . . . . .	31
2.9.	Enfoque utilizado por Kim para determinar la circularidad de una región convexa plasmado a través de dos pares de regiones. En (a) y (b) se determina el grado de compacidad de una región cuadrada, tanto en el plano continuo como en el digital, al utilizar una comparación con el menor círculo que lo circunscribe. . . . .	33

2.10.	Intersección de dos regiones digitales y sus respectivos discos digitales; regiones y discos con igual número de celdas. Los centros de los discos se encuentran ubicados en las coordenadas calculadas del centro de masa de la región digital; resultado del algoritmo propuesto por Bottema. Mientras en (a) la intersección no es total; en (b) la intersección es cero. . . . .	35
2.11.	Disco junto a una de sus versiones digitalizadas; ambas con área = 44. (a) Perímetro = 89, ( b) Perímetro = 23.52. . . . .	36
2.12.	Regiones digitales ilustradas con las tres configuraciones de celdas regulares posibles: (a), triangulares; (b) cuadradas y (c) hexagonales. Las líneas más oscuras representan sus respectivos perímetros de contacto. . . . .	37
2.13.	Tres representaciones de un disco digital con diferente resolución y con sus respectivos valores de Compacidad Discreta y Compacidad Discreta Normalizada. . . . .	38
2.14.	Región discreta colocada sobre una red (lattice). Éste es un ejemplo que contradice el enfoque propuesto por Sankar y Krishnamurthy al calcular el área de una región digital representada por celdas cuadradas. De acuerdo a los autores el área de esta región deberá tener un valor de 4 y no de 9 que sería lo correcto. Las celdas oscurecidas muestran la frontera de la región y la línea el contorno que debe ser medido como perímetro de la región. . . .	43
2.15.	Representación de un delfín usando elementos volumétricos (voxels) para su configuración. En esta representación digital de un delfín produce los valores de compacidad: relación clásica $C=1758.8797$ ; $C_D=0.9724$ . . . . .	45
3.1.	Escena (a) y (b), su versión digitalizada en 24 x 17 pixels o celdas.	48
3.2.	Los tres tipos de celdas que pueden cubrir el espacio continuo y sus respectivas retículas o redes. . . . .	50
3.3.	Imagen digital representada por los modelos basados en retículas ( <i>grids</i> ). . . . .	51
3.4.	Conjunto de celdas que representan el espacio ocupado por el balón de futbol dentro de la imagen de la Figura 1(b). . . . .	51
3.5.	Tipos concretos de ACC: (a) 2-dimensional y (b) 3-dimensional. . . . .	52
3.6.	Región digital $S$ y su frontera $Fr(S)$ . . . . .	54
3.7.	<i>ACC 2-dimensional</i> y su perímetro de contacto . . . . .	55
3.8.	<i>ACC 3-dimensional</i> y su área de contacto . . . . .	55
3.9.	Ilustración gráfica del la medida de compacidad $C_{DN}$ ; perímetro de contacto de la región en razón del perímetro de la región cuadrada, ambas con igual cardinalidad de células 2-dimensional. . . . .	57
3.10.	Factor E ilustrado en forma gráfica; perímetro de la región entre su perímetro de contacto. . . . .	58
3.11.	Concepto gráfico del factor E normalizado; relación entre dos contornos y usando el cuadrado como región digital de referencia. . . . .	59

3.12. familia de regiones digitales configuradas con el mismo número de células-2. las subfamilias están agrupadas acorde con a su valor de factor $E$ normalizado; la región cuadrada recibe un valor de 1.	61
3.13. Valores del código VCC acorde con el número de vértices que confluyen en una misma posición. . . . .	63
3.14. Clasificación de las regiones digitales de la Figura 3.12 con VCC.	64
3.15. Sub-clasificación, acorde con los índices de forma, de la familia de regiones digitales mostradas en la Figura 3.14 con valor =1.8 en el factor $E$ normalizado (VCC). . . . .	66
4.1. Conjunto de regiones digitales con un número similar de células 2-dimensional, primera parte. . . . .	68
4.2. Conjunto de regiones digitales con un número similar de células 2-dimensional, segunda parte. . . . .	69
4.3. Ilustración de los resultados contenidos en la tabla 4.1, primera parte. . . . .	72
4.4. Ilustración de los resultados contenidos en la tabla 4.1, segunda parte. . . . .	73
4.5. Ilustración de los resultados contenidos en la tabla 4.2, primera parte. . . . .	76
4.6. Ilustración de los resultados contenidos en la tabla 4.2, segunda parte. . . . .	77
4.7. Conjunto de regiones digitales a medir su complejidad con base en el factor $E$ ; parte uno. . . . .	80
4.8. Conjunto de regiones digitales a medir su complejidad con base en el factor $E$ ; parte dos. . . . .	81
4.9. Conjunto de regiones digitales ordenado acorde a los valores del factor $E$ contenidos en la tabla 4.3; primera parte. . . . .	82
4.10. Conjunto de regiones digitales ordenado acorde a los valores del factor $E$ contenidos en la tabla 4.3; segunda parte. . . . .	83
4.11. Conjunto de regiones digitales ordenado acorde a los valores del factor $E$ normalizado contenidos en la tabla 4.4; primera parte. . . . .	87
4.12. Conjunto de regiones digitales ordenado acorde a los valores del factor $E$ normalizado contenidos en la tabla 4.4; segunda parte. . . . .	88
4.13. Conjunto de regiones digitales con formas naturales ordenado con base en los valores del factor $E$ normalizado, primera parte. . . . .	92
4.14. Conjunto de regiones digitales con formas naturales ordenado con base en los valores del factor $E$ normalizado, segunda parte. . . . .	93
4.15. Regiones digitales similares a la región 39 del conjunto de regiones digitales ilustradas en la fig 4.13. . . . .	94
4.16. Representación gráfica de los resultados obtenidos por el factor $E$ normalizado al evaluar la compacidad de tres conjuntos de regiones digitales derivadas de las formas ilustradas en la Figura 4.17. . . . .	95

4.17. Tres siluetas de las que se derivan tres conjuntos de regiones digitales a diferentes resoluciones: a) un círculo, b) un insecto y c) unas tijeras. . . . .	95
4.18. Representación voxelizada de: (a) balón de futbol y (b) esfera; El factor $E$ normalizado determina a la esfera como el objeto más compacto entre los objetos sometidos a prueba. . . . .	97
4.19. Regiones digitales tridimensionales; (a) dragón chino y (b) ave. La región (a) se encuentra entre las más dispersas del conjunto de regiones digitales sometido a prueba. Por el contrario, La región (b) es la tercera más compacta. . . . .	97
4.20. Voxelización de objetos tridimensionales; (a) delfín y (b) dragón alado. . . . .	98
4.21. Formas tridimensionales de dos hombres; (a) forma de un hombre con barba y abdomen crecido (hombre 1); (b) figura de un hombre con cuerpo atlético (hombre 2). . . . .	99
4.22. Dos objetos digitalizados claramente opuestos en su grado de compacidad; el objeto (a), un jet militar, es evidentemente más disperso que el objeto (b), un caballito de mar. El factor $E$ corrobora este hecho. . . . .	100
4.23. Par de modelos tridimensionales opuestos; En (a) se muestra un pulpo con un alto grado de dispersión, mientras (b) un toro, con mayor grado de compacidad. . . . .	101
4.24. Regiones digitales tridimensionales generadas a partir de un mismo modelo de objeto tridimensional y conformadas con diferente número de voxels. . . . .	103

# Índice de Tablas

2.1. Valores de compacidad de las formas contenidas en la Figura 2.1 al utilizar la relación isoperimétrica o clásica y la normalización propuesta por Attneave y Arnold. . . . .	20
4.1. Resultados obtenidos por el factor $E$ sobre el conjunto de regiones de las Figuras 4.1 y 4.2. La ordenación de los resultados corresponde al grado de compacidad obtenido por la región; siendo el más compacto la región cuadrada. . . . .	71
4.2. Valores obtenidos por el factor $E$ al variar significativamente el número de células-2. . . . .	75
4.3. Usando el factor $E$ para medir la complejidad del conjunto de regiones digitales contenidas en las figuras 4.7 y 4.8 tal y como se define en [70, 71]. . . . .	79
4.4. Ordenación de las regiones digitales de la Figura 4.1 y 4.2 con amplias diferencias en el número de células-2 acorde con el factor $E$ normalizado. . . . .	85
4.5. Valores obtenidos del conjunto de regiones digitales mostradas en figuras 4.13 y 4.14(parcialmente) por el factor $E$ normalizado; ordenados de más compacto a más disperso. . . . .	89
4.6. Valores obtenidos del conjunto de regiones digitales mostradas en Figura 4.14; ordenados de más compacto a más disperso. . . . .	90
4.7. Resultados obtenidos al aplicar el factor $E$ normalizado sobre el conjunto de regiones digitales de la figura 4.15. . . . .	94
4.8. Medición de la compacidad de regiones digitales tridimensionales. Valores ordenados de compacto a disperso determinado por el factor $E$ normalizado. . . . .	102
4.9. Midiendo similitud entre regiones digitales tridimensionales; valores de compacidad obtenidos por los factores $E$ y $E$ normalizado del conjunto de regiones tridimensionales de la Figura 4.24. . . .	104

# Capítulo 1

## Introducción

El censar cuantitativamente variaciones morfológicas, en especial de entidades biológicas, se ha convertido en una tarea trascendental en diversas áreas. La correcta evaluación de la forma de entidades biológicas puede determinar si un tratamiento médico o análisis clínico cumple correctamente con los resultados esperados [21, 59]. Los cambios en la morfología de tales entidades pueden determinar o evaluar la presencia de alguna patología [8]. En áreas como la paleontología o la química, la generación de una descripción unívoca de la forma ayuda a la correcta clasificación de los objetos bajo estudio [56, 3]. También es el caso de ámbitos dedicados al estudio de los ecosistemas, donde la evaluación de los cambios en la forma de las regiones de una flora específica es fundamental [23, 6]. Una característica de la forma que se ha mostrado como un integrante fundamental en diversos procesos de reconocimiento, clasificación y evaluación de variaciones morfológica es la compacidad [31].

La compacidad es una propiedad cualitativa e inherente a la forma plana y volumétrica de los objetos. Ésta propiedad hace alusión a la dispersión o compactación que una forma presenta. Frecuentemente, la compacidad es usada para ilustrar la complejidad que muestra un contorno. Además, esta característica intrínseca a la forma se asocia a la porosidad para las formas planas (presencia y frecuencia de huecos) y en el caso de formas volumétricas a su densidad. Es así que la compacidad puede dar cuenta de la morfología y estructura que las formas planas y volumétricas presentan.

Medir cuantitativamente la compacidad ha tenido una larga trayectoria. Bajo el marco de la psicología se realizaron los primeros estudios cuantitativos de la forma de los objetos. En estos estudios se plantea representar la forma de los objetos mediante un conjunto de valores numéricos que estén asociados a diferentes propiedades de la misma. Tal conjunto de rasgos son evaluados y se les asigna un valor numérico. El conjunto de valores resultantes conforma la descripción numérica de la forma del objeto. Desde entonces, la compacidad ha sido parte fundamental en el conjunto de rasgos que pueden describir un objeto. A estos estudios se les denominó: estudios cuantitativos de la forma [1]. Bajo este esquema de representación, la compacidad es asociada a la ancestral y bien



conocida desigualdad isoperimétrica para obtener su representación numérica [1, 84, 22, 4]. La utilización de la desigualdad isoperimétrica como medida de compacidad tiene las siguientes consecuencias deseables:

- El valor de máxima compacidad es para el círculo.
- El valor numérico obtenido carece de dimensión.
- Como consecuencia de ser adimensional el valor de compacidad, la medida es invariante a los cambios de escala, rotación y traslación.

No obstante que el uso de la desigualdad isoperimétrica como medida de compacidad ha sido la más documentada, no es la única. A lo largo del siglo XX se han propuesto más de una veintena de medidas de compacidad para formas dentro del plano Euclidiano [60, 30]. A pesar de el gran número de propuestas, la desigualdad isoperimétrica continua siendo la más citada y utilizada [25, 13, 78].

El amplio uso de tecnologías asistidas por computadora y su extensión a múltiples áreas de la ciencia ha fomentado un extenso uso del análisis de la forma, a tal grado que se ha convertido en una disciplina. La disciplina se nombra análisis de forma. Enmarcada en el área de visión por computadora, el análisis de forma engloba un conjunto de técnicas que llevan a cabo el proceso de representar y analizar la forma mediante un conjunto de parámetros conocidos como descriptores. La materia prima del análisis de forma asistida por computadora es en esencia la imagen digital. Las imágenes digitales utilizadas en esta disciplina tiene en general características singulares: son imágenes digitales en tonos de gris con sólo dos valores de intensidad, blanco y negro; donde el negro representa la silueta del objeto a analizar y el blanco el fondo sobre el cual reside tal silueta. A éstas imágenes digitales se les conoce como imágenes digitales binarias y a la silueta del objeto se le denomina región digital [37, 39, 42].

La medición de la compacidad de la forma de un objeto, cuando su silueta es transformada en una región digital y empleando la relación isoperimétrica, muestra ciertos rasgos patológicos [70]. Se ha encontrado que al usar esta medida de compacidad: No existe una única región que produzca el valor máximo de compacidad. Es sensible a la resolución de la región digital. No hay correlación entre un valor y una familia de regiones digitales semejantes. No hay correlación entre la redondez de la forma y los valores de compacidad [70, 27].

Diseñar una medida de compacidad para regiones binarias digitales que presente las bondades que muestra la desigualdad isoperimétrica para regiones binarias en el espacio continuo es un problema abierto. El problema se ha bifurcado. Una vertiente se ha enfocada en medir la redondez de la región binaria digital. Diversas propuestas se han hecho bajo este esquema. Por ejemplo, se ha propuesto medir la redondez al intersectar una región digital con un disco, ambas regiones con la misma área [7]; obtener un parámetro estadístico de las distancias entre puntos en el borde de la región digital con uno o más puntos ubicados en el interior de la misma región [16]; también se ha propuesto que los parámetros estadísticos sean generados por las distancias entre el borde y un solo punto en la región digital [27]; otras proponen que la redondez sea una

razón entre la región digital y el menor disco que le circunscribe [35] o que la redondez sea establecida entre una región circular en el espacio continuo y la región digital, en este caso ambas regiones deberán contar con áreas idénticas [66]. La otra vertiente se centra en evaluar la dispersión y densidad de las regiones binarias digitales. A partir del modelo reticular de celdas se ha propuesto medir la dispersión de una región digital al compararla la región más compacta en el espacio digital [9, 5] o partiendo de la posición que guarda cada celda, asignarle un valor acorde a su distancia con el borde [14, 80]. Otras propuestas utilizan el modelo de puntos reticulares y medir la región digital como un polígono en el espacio continuo [73] o medir los parámetros área y perímetro de la región digital y aproximar la relación entre estos parámetros con los obtenidos por un modelo en el espacio continuo [50].

Mientras que en la primera rama mencionada, las propuestas se enfocan en regiones planas exclusivamente, en la segunda existen propuestas que atienden tanto regiones en el plano como en el espacio. Además, el uso cada vez más extendido de las imágenes digitales y la importancia que en aplicaciones médicas tiene la correcta evaluación de los cambios morfológicos, hace que sea preciso que la medida de compacidad pueda evaluar correctamente los cambios producidos sobre el contorno.

## 1.1. Planteamiento del problema

La relación isoperimétrica se ha mantenido como la medida de compacidad a lo largo del tiempo. Sin embargo, Rosenfeld fue el primer investigador en plantear las inconveniencias de usar la relación isoperimétrica en procesos de análisis de forma asistidos por computadoras sobre regiones digitales [70]. El primer problema que emergió del estudio realizado por Rosenfeld fue la no correlación de la medida con el círculo como la forma más compacta. El segundo problema que Rosenfeld demuestra es que la medida no asocia su valor mínimo a una forma única. Finalmente, el tercer problema es la variación de la medida frente a los cambios de tamaño en regiones digitales. Por lo tanto, diseñar una expresión que proporcione un valor cuantitativo de la compacidad y que mantuviera las propiedades de la relación isoperimétrica se mantiene como un problema abierto.

## 1.2. Objetivo

El objetivo de la presente tesis de investigación es el de analizar las propiedades básicas de las regiones digitales para diseñar una medida que relacione a la compacidad de las formas u objetos, representados por regiones digitales bidimensionales y tridimensionales, con un valor cuantitativo. Tal medida deberá asociar su valor mínimo a una forma única, ser robusta a los cambios de tamaño y poseer sencillez conceptual y de cálculo a fin de garantizar su bajo costo computacional.

### 1.3. Aportación

En el presente trabajo de investigación se incluyen las siguientes aportaciones:

- El diseño de medidas que asocian la compacidad de regiones digitales con un valor numérico: el factor  $E$ ,  $E$  normalizado y  $E - VCC$  normalizado.
- La implementación del factor  $E$  normalizado en las representaciones bidimensionales y unidimensional de regiones digitales bidimensionales.
- El diseño e implementación, bajo el modelo de código de cadenas VCC, del factor  $E$  normalizado y la propuesta de los parámetros índices de forma.

### 1.4. Organización de la presente obra

El desarrollo de los descriptores de forma basados en el concepto de compacidad para regiones digitales binarias se desglosa en los siguientes apartados:

En el capítulo 2 se hace un recorrido del origen de la relación isoperimétrica, su adopción como medida de compacidad y la problemática que ésta presenta cuando es usada como descriptor de regiones digitales. También, el capítulo 2 hace recuento de las propuestas documentadas, a las que se ha tenido acceso, que abordan el problema de asociación entre la compacidad de regiones digitales y un valor numérico.

El capítulo 3 se establece el marco teórico en el cual se desarrolla el presente trabajo de investigación. Así mismo, el enfoque topológico que da soporte a las propuestas de medidas de compacidad queda establecido. Posteriormente dentro de este capítulo, los descriptores basados en el concepto de compacidad, el factor  $E$  y el factor  $E$  normalizado quedan definidos. Finalmente, el desarrollo y la implementación del factor  $E$  normalizado usando el código de cadenas VCC es descrito. Sumado a lo anterior, los parámetros nombrados índices de forma son presentados como parte final del capítulo.

Las pruebas a las que se someten los descriptores están contenidas dentro del capítulo 4. En este capítulo, tanto el factor  $E$  como el  $E$  normalizado muestran su cualidades y limitaciones al actuar sobre regiones digitales bidimensionales y tridimensionales.

Finalmente, el trabajo de tesis culmina con la exposición de algunas conclusiones y la sugerencia de ideas que pueden conllevar al desarrollo y madurez de la presente investigación.

## Capítulo 2

# Estado del arte

La medición de la compacidad de formas planas o volumétricas, tanto en el plano como en el espacio discreto, ha sido tema de múltiples investigaciones y aportaciones desde hace varias décadas.

Algunas de estas indagaciones enfatizan la debilidad de la medida de compacidad; Pavlidis la cataloga como una medida simple, que no perserva la información, limitada y falla cuando es aplicada sobre aplicaciones no triviales [65]. Por otra parte, Kam apunta a la incapacidad para detectar irregularidades en el contorno y su alta sensibilidad al ruido [34]. En este mismo sentido Zhang señala su limitada capacidad discriminatoria [82]. Sin embargo, existen diferentes investigaciones realizadas encaminadas a superar las limitaciones técnicas y formales en el diseño de una mejor medida de compacidad y a mostrar la utilidad de este sencillo descriptor de la forma [5, 7, 9]. Como se observará a lo largo de este capítulo, la medición de esta característica de las formas en el espacio discreto ha mostrado no ser tan sencilla como en el espacio continuo.

Comenzaremos estableciendo el significado de compacidad. Compacto es un término proveniente del latín *compactus*, que significa unir o juntar. La real academia de la lengua define compacto como la propiedad de un cuerpo acorde con su grado de porosidad o densidad. Entonces, definir si un objeto es más o menos compacto no se fundamenta en el objeto en sí, sino en la estructura interna que lo conforma. Saber que tan compacto es un objeto, entonces, implica medir la cercanía de los elementos que constituyen al objeto y, por lo tanto, su compacidad.

Por el contrario medir la compacidad de las formas planas ha sido planteada desde un enfoque diferente. Este enfoque se basa en la comparación entre la forma del objeto y la forma más compacta. El encontrar entre todas las formas cuál es la más compacta fue una búsqueda iniciada en la antigua Grecia [4]. Los griegos plantearon el problema desde dos perspectivas equivalentes:

- La primera: considerando todas las formas dentro del dominio de  $\mathbb{R}^2$  con un perímetro fijo, es decir, todas las formas dentro de este conjunto tienen una idéntica magnitud en su perímetro ¿cuál es la que encierra la mayor

área?

- La segunda: si el conjunto de formas dentro del dominio de  $\mathbb{R}^2$  tienen la misma área ¿cuál muestra la menor longitud en su perímetro?

Al involucrar a las dos características básicas de las figuras geométricas, el área y el perímetro, los griegos debieron de utilizar alguna expresión que relacionara a ambas. Afortunadamente, los babilónicos ya habían utilizado una relación, que muy probablemente ya les era conocida a los griegos, la cual relacionaba dichas propiedades [22]. La expresión se utilizaba para el cálculo del área de un círculo; dicha relación está dada por:

$$A = \frac{C^2}{12}. \quad (2.1)$$

Donde,  $C$  es la circunferencia de un círculo y  $A$  su área, respectivamente. Como es evidente, los babilónicos planteaban la existencia de  $\pi$  en el cálculo del área de un círculo. Los griegos parten de esta relación, establecen una mejor aproximación de  $\pi$  y posteriormente plantean lo que hoy se conoce como desigualdad isoperimétrica,

$$4\pi A \leq P^2. \quad (2.2)$$

Así, mediante análisis deductivos y experimentales, los griegos mostraron que la igualdad de 2.2 sólo se cumple si y solamente si, la forma en cuestión es un círculo. El probar analíticamente esta última aseveración planteó lo que hoy se conoce como el problema clásico de isoperimetría.

Blande, en su escrito sobre isoperimetría, menciona que la respuesta analítica, a las dos preguntas hechas por los griegos planteando el problema de isoperimetría, fue dada ya entrado el siglo XX [4]. Steiner y posteriormente Caratheodory realizaron la demostración analítica probando que el círculo era la forma que contestaba ambas preguntas. Posteriormente, Schwarz lo prueba en  $\mathbb{R}^2$  y Schmidt lo demuestra para  $\mathbb{R}^3$ .

Es entonces que la única figura o forma que minimiza el valor de 2.2 es el círculo. Lo anterior nos permite usar a la desigualdad isoperimétrica como medida de compacidad dentro el plano y espacio Euclidiano, teniendo al círculo como parámetro [65, 2, 68, 79, 33, 25, 59, 53, 57, 77, 15, 61].

La relación isoperimétrica muestra un conjunto de ventajas al ser usada como medida de compacidad, entre ellas:

- Su sencillez de cálculo; la cual involucra las dos propiedades básicas y susceptibles de ser medidas, el perímetro y el área.
- Su calidad de producir valores adimensionales.
- El poder asociar la figura más compacta, el círculo, con un único valor, el mínimo para la relación isoperimétrica.

Forma	Área	Perímetro	Compacidad	Normalización
(a)	314.1593	62.8319	12.56	0.00005
(b)	400	80	16	0.21
(c)	200.3528	128.4432	82.34	0.8473
(d)	229.3172	76.5712	25.56	0.5

Tabla 2.1: Valores de compacidad de las formas contenidas en la Figura 2.1 al utilizar la relación isoperimétrica o clásica y la normalización propuesta por Attneave y Arnold.

Aunque, la relación isoperimétrica es frecuentemente usada para medir la compacidad de la forma bidimensional de un objeto no es la única. A lo largo del siglo XX, se ha propuesto un número importante de enfoques para asociar la compacidad de las formas con alguna expresión matemática. En esta búsqueda para la medición cuantitativa de la compacidad podemos vislumbrar tres objetivos principales:

- Que el resultado de dicha expresión sea adimensional.
- Que sea sencilla de calcular.
- Que mantenga al círculo como la forma de referencia.

Por una parte Horn et al., y por otra Niemi et al., han presentado estudios de recopilación sobre las diversas propuestas [30, 60]. En el área de la computación, Levine describe un conjunto de relaciones para medir la compacidad de las formas que pueden ser utilizadas e implementadas para su uso en procesos computacionales. En cada uno de estos estudios podemos encontrar más de una docena de propuestas en la medición de la compacidad. A pesar de esta gama de medidas, la relación isoperimétrica ha prevalecido como la más usada y referenciada.

Attneave y Arnold fueron de los primeros investigadores en utilizar dicha relación para medir cuantitativamente la compacidad de las formas [1]. Ambos hicieron la primera modificación a la relación isoperimétrica para obtener un rango fijo de valores para toda forma estudiada, aplicando una normalización a la relación, la cual acota todo posible valor de la relación a un rango entre 0 y 1. Attneave y Arnold describen la medida como:

$$D = 1 - \frac{2\sqrt{\pi A}}{P}. \quad (2.3)$$

En la tabla 2.1 se reflejan los valores de compacidad calculados al usar la relación isoperimétrica. En esta tabla también quedan plasmados los valores de compacidad obtenidos por la normalización de la medida propuesta por Attneave y Arnold.

La relación isoperimétrica ha recibido diferentes nombres a lo largo del siglo pasado y parte del presente como descriptor de forma. Se hace referencia a

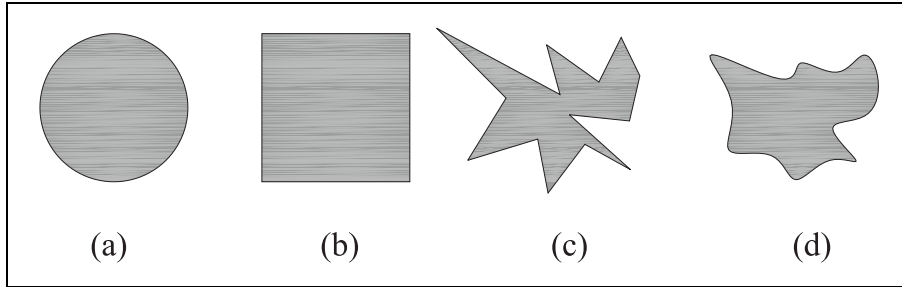


Figura 2.1: Conjunto de formas con diferente grado de compacidad: (a) círculo; (b) cuadrado; (c) Polígono irregular; (d) región.

ella como: medida de circularidad [12, 13, 52, 76], relación de adelgazamiento [18, 67], factor de forma [14, 37], descriptor global de región [36], parámetro de forma [29, 75], no compacidad [73, 70], dispersión [1, 26] o redondez [32].

Con el advenimiento de la era de las computadoras, uno de los primeros usos en que se intentó darles aplicación a las computadoras fue tratar de simular procesos realizados por sistemas del cuerpo humano. Dentro de estos procesos tenemos: la percepción del entorno a través del sistema de visión humana, el proceso de identificación y el reconocimiento de los objetos.

Análogamente a la psicología, la computación ha usado la silueta de los objetos como una manera básica de identificarlos y reconocerlos. Precisamente, el enfoque de describir la silueta mediante un conjunto de rasgos o características ha sido tomado de la psicología, en lo que hoy se conoce como visión por computadora. De esta manera, la compacidad, ya usada como un rasgo o característica de la forma de los objetos en estudios psicológicos sobre percepción y análisis de la forma, pasa de manera directa a integrarse al conjunto básico de rasgos útiles para poder describir e identificar un objeto, usando procesos computacionales [1, 26].

A principios de la década de los años 70's, Rosenfeld hace las primeras observaciones sobre la inconveniencia de utilizar la relación isoperimétrica para medir la compacidad. Fue Rosenfeld quien denomina a la relación isoperimétrica, relación clásica [70].

Los principales inconvenientes de la relación clásica, citados por Rosenfeld, apuntan principalmente al comportamiento de la relación clásica aplicada a regiones discretas, representadas por un conjunto de celdas regulares. A diferencia del espacio Euclidiano, donde el concepto de perímetro está definido de manera única, en el espacio discreto el perímetro se define bajo tres principios diferentes [71]:

1. La suma de las longitudes de los lados de cada celda en la frontera que componen el borde de la región.
2. La suma de las longitudes de los arcos de todos los bordes, representados como curvas ocho conectadas.

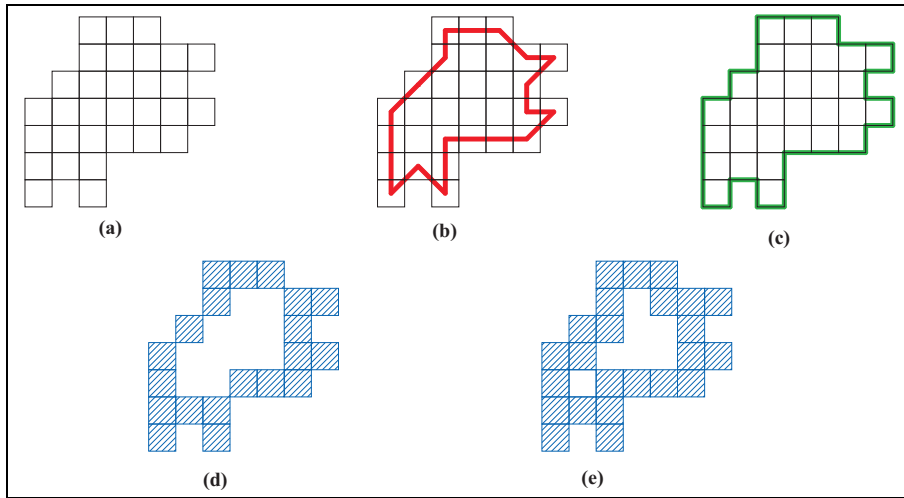


Figura 2.2: Los tres enfoques para la medición del perímetro de una región digital en el espacio discreto (a); (b)visto como la suma de las distancias entre los centros de las celdas, (c)utilizando los lados frontera de las celdas en la región. Finalmente, sumando el número de celdas en el borde acorde con la conectividad usada,(d) y (e).

### 3. La suma de las áreas de los bordes de la región.

Estas tres definiciones del perímetro se ilustran en la Figura 2.2. Como puede observarse, un caso especial es la tercera definición de perímetro citada por Rosenfeld. Esta tercera definición se sujeta, además, a la conectividad empleada que puede ser ocho o cuatro- conexas. Así, dependiendo de la conectividad, el número de pixel en el borde de la región puede variar y, por lo tanto, su perímetro [63].

Un segundo comportamiento patológico de la relación clásica, como lo nombra Rosenfeld, es la pérdida de la asociación entre el círculo y el valor mínimo de esta relación [70]. Rosenfeld demuestra que cuadrados y octágonos digitalizados, producen valores menores en la relación clásica, que los círculos digitalizados, Figura 2.3.

Finalmente, Rosenfeld puntualiza que no existe una familia de formas para las cuales la relación clásica produzca valores semejantes. Una familia de formas debe entenderse como un conjunto de regiones en el espacio discreto que guarda un alto grado de similitud o como un conjunto de regiones las cuales intentan representar un mismo objeto a diferentes resoluciones. Por lo tanto, es de esperar que la relación clásica produzca valores muy similares de compacidad para dicho conjunto, de manera similar a los que se producirían en el espacio continuo. Sin embargo, Rosenfeld muestra que este comportamiento no se presenta cuando la relación clásica se aplica en el espacio discreto. Un ejemplo del comportamiento de la relación clásica se ilustra en la Figura 2.4; en esta figura un círculo es



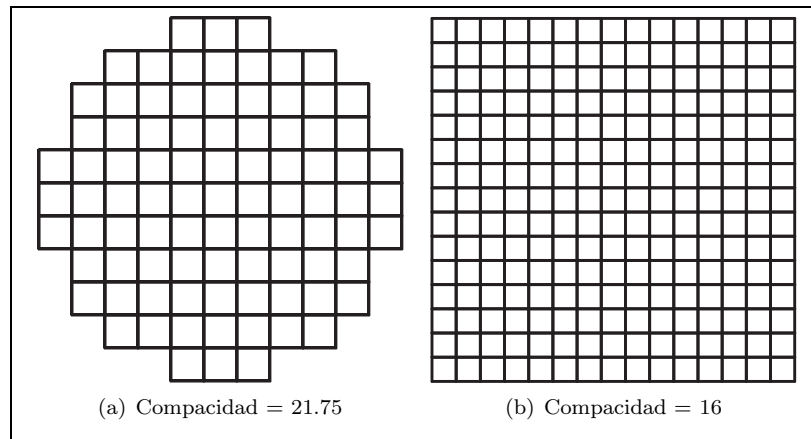


Figura 2.3: Dos regiones compuestas con mismo tipo de celdas regulares (pixeles) y sus respectivos valores de compacidad usando la relación clásica: (a) Círculo; (b) cuadrado digitalizado.

digitalizado a dos resoluciones diferentes y se obtienen dos valores distintos. Queda de manifiesto que la relación clásica es sumamente sensible a la resolución.

Así, con el trabajo de Rosenfeld se inicia la búsqueda de encontrar una mejor medida que pueda ser asociada a la compacidad de las formas. Sin embargo, este trabajo crea una bifurcación en la investigación sobre este tema. Por una parte, investigadores como Haralick buscan una medida de circularidad o medida de similitud entre la región digital y el círculo [27]. Por otra parte, se busca encontrar una medida que de cuenta del grado de dispersión en que encuentran los elementos de una región digital.

A lo largo de la incipiente historia de la ciencia de la computación se han producido diversas propuestas abordando este tema. Tales propuestas se pueden aglutinar en tres enfoques principalmente. El primer enfoque involucra la medición de distancias sobre la región bajo análisis, al cual llamaremos enfoque basado en distancias internas. El segundo agrupa a las propuestas que utilizan una región de referencia. Por último, el tercer enfoque se basa más en el análisis de los elementos que conforman a la región digital que en la región en sí misma. A este último le hemos denominado enfoque basado en las propiedades geométricas de las celdas. Estos enfoques serán descritos en las secciones subsiguientes y se finalizará este capítulo con las propuestas que no puedan ser englobadas en alguno de los enfoques ya mencionados.

## 2.1. Medición de distancias internas

Las medidas descritas en esta sección tienen por característica común medir y evaluar distancias entre puntos internos de la región. Las distancias a evaluar son determinadas por diversos métodos y bajo criterios diferentes. Sin embargo,

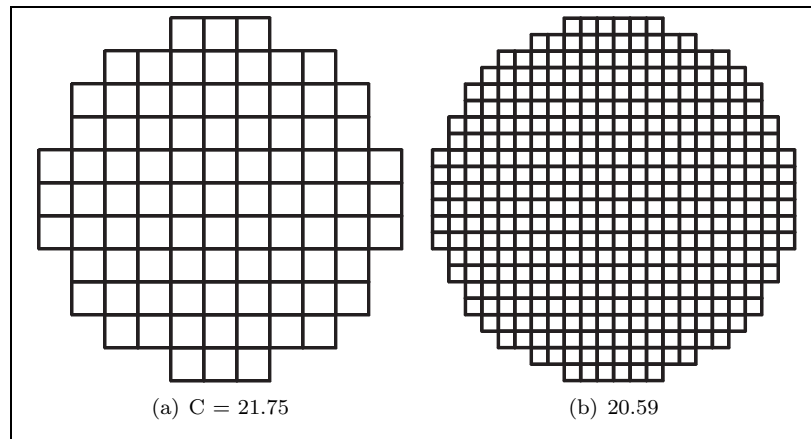


Figura 2.4: Dos versiones de un disco digitalizado a diferente resolución y sus respectivos valores de compacidad clásica.

todas las medidas determinan la morfología de la forma al censar variaciones en las magnitudes de las distancias evaluadas. Las medidas están ordenadas en orden cronológico de publicación y evalúan tanto grados de circularidad como de compacidad.

### 2.1.1. Medida de circularidad de Haralick

El primero en abordar y proponer una solución para encontrar una medida de similitud entre una región digitalizada y el círculo fue Haralick [27], quien separa más claramente del concepto de la compacidad de la semejanza entre una forma con el círculo, que es por antonomasia, en el espacio Euclidiano, la forma de referencia. El diseña una medida con la que se pueda establecer un grado de similitud entre una región digital y el círculo.

En principio, Haralick establece cuatro condiciones con los que debe cumplir una buena medida de circularidad:

- Conforme una región se hace más circular el valor de la medida debe de incrementarse.
- Los valores para regiones digitales deberán seguir a los valores de sus correspondientes regiones en el espacio continuo.
- La medida debe ser independiente a la orientación.
- Debe ser independiente del área de la región (independiente a la resolución).

Siguiendo estos 4 principios, Haralick propone una relación entre el valor de la media y la desviación estándar de las distancias que se calculen entre el

centro de la región y el borde de la misma. La cual recibe el nombre de medida de circularidad  $C$  y se expresa como:

$$C = \frac{\mu_R}{\sigma_R}. \quad (2.4)$$

Donde  $\mu_R$  y  $\sigma_R$  son la media y la desviación estándar de las distancias calculadas respectivamente. El cálculo de ambos parámetros es descrito detalladamente por Shapiro y Stockman [34], donde se indica que el valor de ambas entidades queda determinado esencialmente por las coordenadas donde se ubican las celdas que componen a la región en cuestión. Los valores de  $\mu_R$  y  $\sigma_R$  están determinados por las expresiones 2.5 y 2.6 respectivamente.

$$\mu_R = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \|(r_k, c_k) - (\bar{r}, \bar{c})\|. \quad (2.5)$$

$$\sigma_R = \left( \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} [|(r_k, c_k) - (\bar{r}, \bar{c})| - \mu_R]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Donde  $(r_k, c_k)$  es la coordenada de la k-ésima celda y  $(\bar{r}, \bar{c})$  son las coordenadas del centroide de la región, calculado mediante las expresiones:

$$\bar{r} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} r \quad (2.7)$$

y

$$\bar{c} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} c. \quad (2.8)$$

Como lo hace notar Shapiro y Stockman en su escrito, la posición de este centroide generalmente no podrá ubicarse dentro del espacio discreto y sólo se aplicará para el cálculo de las distancias que también serán calculadas como distancias Euclidianas. Además es posible visualizar que para determinadas regiones discretas, las coordenadas calculadas para el centroide podrían ubicar a éste fuera de la región.

No obstante que Haralick afirma que la relación cumple con sus cuatro principios, la medida presenta discrepancias con algunos de estos principios cuando se aplica a regiones digitalizadas, no siendo estas regiones versiones digitalizadas de polígonos regulares. El segundo principio establece que deberá de existir una correlación entre los valores obtenidos para una región digital y su correspondiente región continua, esto es: un cuadrado no es más redondo que un hexágono en el espacio continuo y este hecho deberá de prevalecer en sus versiones digitalizadas; no obstante, la medida de circularidad  $C$  no cumple con el segundo principio.

Además, el cuarto principio nos dice: la medida no debe ser afectada por variaciones en el número de celdas que la conformen. Sin embargo, si la medida es aplicada sobre versiones digitalizadas de una misma forma pero a diferente resolución, entonces obtendremos valores diferentes para dicha forma. Por ejemplo, la Figura 2.4 contiene dos versiones digitalizadas de un disco y al aplicar la medida de circularidad  $C$  se obtienen valores de 11.26 y de 26.96 para las regiones de las figuras 2.4(a) y (b) respectivamente. Acorde con este enfoque y los valores obtenidos, las regiones deberían ser versiones digitalizadas de formas muy diferentes. Por lo tanto, el número de celdas con que se conforma una región digital si afectan de manera significativa el comportamiento de esta medida de circularidad.

### 2.1.2. Factor de forma G

En 1978, Danielsson publica una nueva propuesta para medir la compacidad de las formas en general y de las regiones discretas especialmente [14]. El autor, a diferencia de Haralick, basa su método no sólo en la media de las distancias entre el centroide y los puntos del borde de la región, sino que además se agregan al cálculo las distancias entre cada uno de los puntos internos y el borde de la región. Este enfoque parte del concepto de momento de inercia de los cuerpos, el cual calcula la distribución de masas de un cuerpo con respecto a un punto. De esta manera, el enfoque propuesto por Danielsson involucra a cada una de las celdas que componen a la región y su distribución dentro de la misma en el espacio discreto.

A diferencia de Haralick, Danielsson no involucra la norma Euclidiana. En lugar de la norma Euclidiana son empleadas las normas 1 o infinito de Minkowski. Al hacer este cambio de métrica es posible simplificar el cómputo de todas las distancias involucradas. Lo anterior debido a que podía ser empleado el algoritmo propuesto por Rosenfeld, conocido como *Transformada de Distancia* [69]. Dicho algoritmo asocia cada celda de la región digitalizada con su distancia hacia la celda más cercana fuera de la región [37]. El resultado de aplicar la *Transformada de Distancia* a una región digitalizada es un mapa de la región, con el valor de la distancia obtenido entre la celda y el borde asignado en la posición de la celda evaluada.

Una vez que es obtenido el mapa de distancias de la región digitalizada, Danielsson procede al cálculo de la distancia promedio de todas las distancias obtenidas. Esta distancia promedio se le denomina  $\bar{d}$  y se calcula como:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \quad (2.9)$$

Donde  $N$  es el número de celdas que componen a la región y  $x_i$  es el valor de la distancia en la  $i$ -ésima celda.

La distancia  $x_i$  es utilizada para calcular la compacidad de la región. La compacidad será ahora determinada por una nueva relación entre el área de la

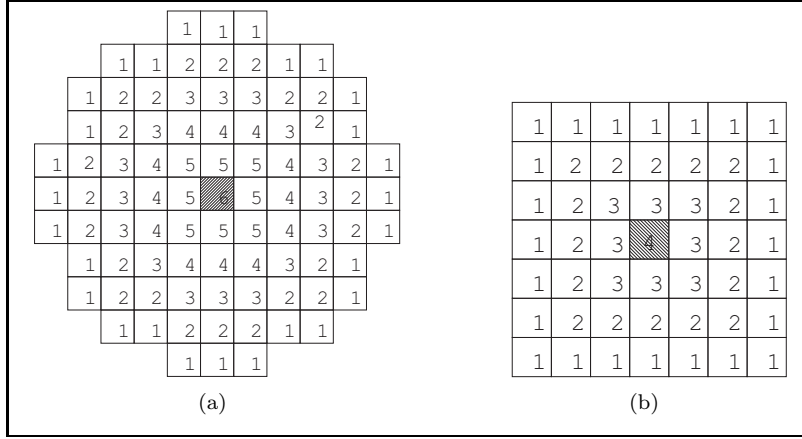


Figura 2.5: Versión digitalizada de un círculo con un valor  $G=0.927$  (a). Región discreta cuadrada con un valor  $G=0.589$ , (b). Ambas mostradas como mapas de distancias en conectividad cuatro.

región y la distancia  $\bar{d}$ . A esta relación Danielsson la denominó factor de forma  $G$ , el cual está dado por:

$$G = \frac{A}{9\pi(\bar{d})^2} = \frac{N}{9\pi \left( \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \right)^2} = \frac{N^3}{9\pi \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}. \quad (2.10)$$

De acuerdo con Danielsson, una medida de compacidad o de la forma deberá ser fácil de calcular y poseer, para una familia o clase de objetos, suficiente poder de discriminación. El autor establece que el factor de forma  $G$  cumple con los dos puntos antes mencionados y además conserva la propiedad de ser adimensional. Sin embargo, el proceso tiene un costo computacional más alto que el empleado para el cálculo de la relación clásica.

De la Figura 2.5 surgen dos observaciones inmediatas. La primera se refiere a la afirmación hecha por Rosenfeld en su trabajo [70]. Recordando que en este trabajo se afirma que versiones digitalizadas de un disco no pueden considerarse como las formas más compactas en el espacio discreto. Como podemos observar, acorde con los valores obtenidos por el factor de forma  $G$  de las regiones digitales de la Figura 2.5, el disco digitalizado obtiene valores superiores al cuadrado. El segundo hecho a notar se refiere al límite de los valores del factor  $G$ .

Danielsson apunta que el factor  $G$  se diseñó para obtener su valor mínimo para el círculo. Donde, el valor mínimo será igual a uno si y sólo si la forma censada es un disco. Aunque lo anterior fue establecido para el espacio Euclidiano y el autor no establece explícitamente en su trabajo si esta última afirmación también se aplica al espacio discreto, las regiones en la Figura 2.5 muestran que el valor mínimo del factor  $G$  en el espacio discreto no puede ser uno. Que-

dará entonces como un hecho observable que el factor  $G$  puede producir valores menores a uno para una región digital y que muestra, de manera similar a la medida clásica, que versiones de un disco no serán las formas más compactas.

### 2.1.3. Medida de compacidad de Wahl

La medición de la compacidad, mediante la evaluación de distancias hasta ahora discutidas, se ha enfocado en encontrar un punto interno que sirva de referencia para evaluar tales distancias [27, 14]. Ahora presentaremos un modelo que excluye el hallar tal punto de referencia. Wahl propone medir las distancias entre dos puntos,  $p(x, y)$  y  $q(x, y)$ , ambos sobre el borde de la región digital opuestos y correlacionados por un segmento de línea [80]. La distancia a evaluar es determinada por la longitud del segmento de línea. La línea cruzará la región con una pendiente  $\phi$ , respecto al eje de las  $x$ , y los puntos donde intercepte al borde serán denominados  $p(x, y)$  y  $q(x, y)$  respectivamente, Figura 2.6. La compacidad de una forma queda sujeta a la estimación de la variación de las distancias en el mayor número posible de ángulos diferentes.

En el caso específico del espacio discreto, el número de ángulos que puede tomar la pendiente del segmento de línea se limita a cuatro,  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $135^\circ$ . Con estos ángulos son calculadas las distancias entre los puntos del borde de la región digital. El conjunto de distancias con un mismo ángulo generan un mapa de distancias. De manera similar a la *Transformada de Distancia*, cada posición de las celdas que constituye la región digital se le asocia un valor, pero en este caso el valor es idéntico acorde a la distancia evaluada entre los puntos  $p$  y  $q$ . En la Figura 2.7 se ilustra el conjunto de mapas de distancias generadas por este modelo al ser evaluado sobre una región digital.

El último paso del procedimiento de la propuesta hecha por Wahl es generar dos nuevos mapas de distancias. Estos mapas reciben el nombre de mapas de máximas y mínimas distancias  $D_{\min}(x, y)$  y  $D_{\max}(x, y)$  respectivamente, Figura 2.7. Finalmente, estos mapas se utilizan para calcular la media de las máximas y mínimas distancias  $\bar{d}_{\min}$  y  $\bar{d}_{\max}$ . Una vez obtenidas estas distancias promedio, la compacidad puede ser calculada a través de las expresiones,

$$f_1 = c_1 \frac{A}{\bar{d}_{\min}^2} \quad (2.11)$$

y

$$f_2 = c_2 \frac{A}{\bar{d}_{\max}^2}. \quad (2.12)$$

Donde  $A$  es el número de celdas que componen a la región,  $c_1$  y  $c_2$  son constantes con valores de 0.6122 y 1.2388 respectivamente.

El cálculo de la compacidad en regiones discretas bajo este método pierde una característica básica para una buena medida de compacidad, la de poseer una baja complejidad de cómputo. Este hecho se vuelve evidente con la evaluación de 6 mapas de distancias y el cálculo de los valores promedios  $\bar{d}_{\min}$  y  $\bar{d}_{\max}$ . Esta

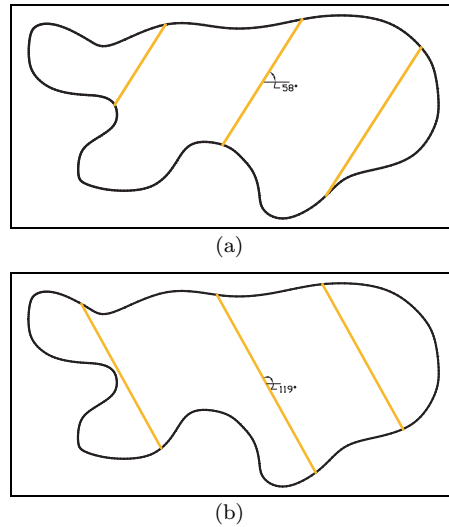


Figura 2.6: Ejemplos de dos conjuntos de distancias que se evalúan para obtener el valor de compacidad de la forma en el espacio continuo sugerido por Walh; (a)  $50^\circ$  y (b)  $119^\circ$ .

metodología en el cálculo de la compacidad podría ser prohibitiva en regiones producidas en alta resolución y por lo tanto impráctica, considerando el poder discriminatorio de la compacidad.

#### 2.1.4. Medidas de circularidad de Di Ruperto y Dempster

Di Ruperto y Dempster proponen un conjunto de medidas de circularidad [16]. Nuevamente, el modelo de medir distancias entre un centroide y la frontera de una región digital es utilizado para este propósito. Sin embargo, el modelo se desarrolla bajo el marco de la morfología matemática. Al utilizar el método de erosión, se busca encontrar el centroide de la región, al cual denomina centro de gravedad. Este centro de gravedad queda determinado por la última erosión que se pudiese aplicar a la región con un elemento de estructura  $B$ ; siendo  $B$  un disco discreto de radio  $n$ .

El conjunto de erosiones, aplicadas a la región digital, generará un mapa de distancias a manera de franjas. Cada franja contendrá el valor de la distancia entre la región y el borde, acorde con el número de erosión aplicada. Así, Di Ruperto y Dempster producen una variación de la ya conocida *Transformada de distancia*, donde las distancias calculadas dependen del elemento de estructura, tanto en su tamaño como en su configuración. Por otra parte, la ubicación del centro de gravedad queda determinada por la región con el valor máximo de distancia obtenido por la última erosión.

Hay que hacer notar que el usar erosiones continuas para determinar la región interior más alejada del borde podría producir, acorde con la morfología de la

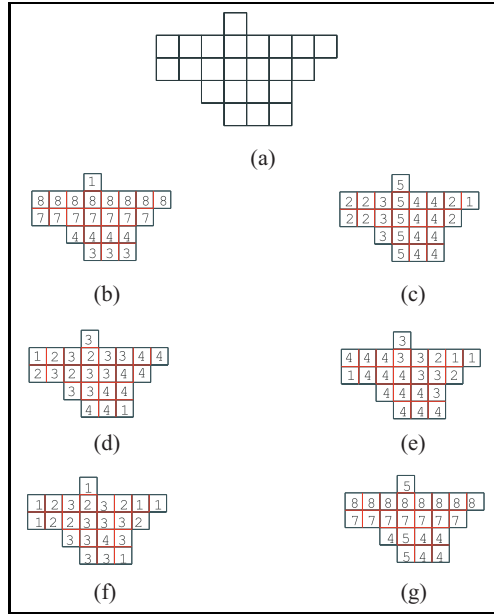


Figura 2.7: Región discreta, (a) junto con los mapas de distancias generados bajo el enfoque de Walk; (b) 0°, (c) 45°, (d) 90° y (e) 135°. (f) y (g) muestran los mapas de distancias mínimas y máximas respectivamente.

región, más de una región con distancia máxima. Ésta es la razón de que en este escrito se hará referencia a esta zona como región o regiones máximas y no como centro de gravedad.

Así, la primera de las medidas propuestas por Di Ruperto y Dempster es denominada *medida de circularidad M*, la cual calculará la deformidad o grado de redondez de la región digital acorde a la variación de las distancias entre la región máxima y el borde en cada una de las regiones máximas encontradas. Acorde con Di Ruperto y Dempster, la circularidad de la región digital será mayor si la variación de las distancias es mínima. En el caso de un círculo, teóricamente, la variación de las distancias será cero. La medida  $M$  está definida como:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^L (\text{var}\{d_{i,j}\})}{\text{máx}\{d_{i,j}\}}. \quad (2.13)$$

Donde  $\text{var}d_{i,j}$  es la varianza de todas las distancias encontradas  $d_{i,j}$  y  $\text{máx}\{d_{i,j}\}$  es la máxima distancia encontrada,  $d_{i,j}$  es la distancia medida desde la región máxima  $i$  al borde en la dirección  $j$  y pueden ser evaluadas hasta en 16 direcciones.

Utilizando este mismo enfoque se utiliza para proponer la siguiente medida de circularidad. El mapa generado por las sucesivas erosiones frecuentemente es



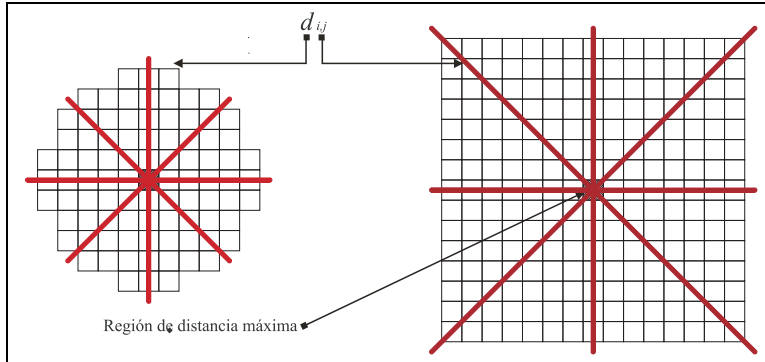


Figura 2.8: Regiones discretas con sus respectivas regiones máximas encontradas mediante erosiones continuas usando un disco de radio uno como elemento de estructura. Aquí se esquematizan 8 posibles direcciones para evaluar el grado de circularidad de estas regiones. (a) con un valor  $M = 1/6$  y en (b)  $M = 0$ .

visualizado como un mapa de relieves, donde cada valor de distancia asociado a las celdas que conforman la región es tomado como la altura de tal relieve. Visto de este modo, la subregión producida por la última erosión producirá la distancia con el valor máximo y por lo tanto, será considerada como la altura máxima sobre una superficie.

La altura máxima encontrada es denominada  $h$ . Esta altura es introducida en una relación junto a la sumatoria de todos los valores de las distancias asignadas a cada celda y tomadas como alturas. A esta relación los investigadores la denominaron medida de circularidad  $V$ . Así, la medida  $V$  para una región con altura  $h$  es:

$$V = \frac{\sum dist_X(p)}{h^3}. \quad (2.14)$$

Donde,  $dist_X(p)$  es el valor de distancia producido por un disco de radio  $n$  en la región y asignado en la celda  $p$ , de la región  $X$ . Di Ruperto y Demster sugieren escalar la expresión por  $1/3\pi$ , si la región es la representación de un círculo, entonces la medida producirá un valor cercano a 1, esto dependiendo de la resolución.

Las dos restantes propuestas de Di Ruperto y Demster utilizando este enfoque se denominan medidas de circularidad  $T$  y  $E$  respectivamente. Las medidas están dadas por las expresiones 2.15 y 2.16.

$$T = \frac{A}{h^2}. \quad (2.15)$$

$$E = \frac{n}{\sqrt{A}}. \quad (2.16)$$

Donde  $A$  es el área de la región y  $h$  nuevamente es la altura máxima producida por la última erosión. Finalmente en el caso de la medida  $E$ ,  $n$  es el tamaño

del disco más grande que pueda ser usado para erosionar la región.

Los autores de estas propuestas mencionan que las medidas  $M$  y  $E$  son las medidas que mejor se comportan al medir la circularidad de regiones discretas. Sin embargo, el utilizar discos discretos como elementos de estructura sujeta el método a utilizar resoluciones relativamente altas o a la definición más precisa del elemento de estructura, si las medidas se van a emplear en resoluciones bajas. Si es empleado un disco de tamaño mínimo, o sea de un pixel, entonces pueden producirse valores de circularidad similares o idénticos para regiones enteramente diferentes. Por lo tanto, la elección del elemento de estructura se convierte en parte fundamental para el buen funcionamiento de estas medidas.

El proceso de erosionar una región digital y la búsqueda del adecuado elemento de estructura, elevan el costo computacional de estas medidas de circularidad; si se le compara con el costo computacional que implica la medida clásica de compacidad. Di Ruperto y Demster dejan libre la elección del diámetro del disco que deba usarse en el proceso de erosión. El usuario puede entonces estar tentado a emplear un disco de radio  $n$  igual a uno y usar el algoritmo de Transformada de distancia. Lo anterior podría producir efectos indeseables en la medición de la circularidad.

Ejemplo de efectos producidos al emplear un disco de radio uno pueden observarse al aplicar la medida de circularidad  $M$  en la regiones discretas de la Figura 2.8. Para estas regiones se producen valores de  $1/6$  y  $0$  para la región 2.8(a) y 2.8(b) respectivamente. Lo cual nos indicaría que el cuadrado es más circular que la versión digitalizada de un disco. Por lo tanto, las medidas propuestas por Di Ruperto y Dempster no puedan ser consideradas como buenas medidas de circularidad, de acuerdo con los principios expuestos por Haralick [27].

## 2.2. Forma de referencia

Determinar la compacidad o circularidad a través de parámetros obtenidos al evaluar distancias, ya sea dentro de la región o fuera de ésta, lleva un costo computacional alto. Otra forma de evaluar la compacidad de las formas es mediante una comparación. El círculo es el la figura más compacta en el espacio continuo y por lo tanto, la comparación entre esta figura y cualquier otra proporcionaría un grado de similitud entre las regiones. Este es el enfoque que varias propuestas descritas en esta sección han abordado, la comparación de la forma *versus* el círculo. Nuevamente las medidas son expuestas en orden cronológico de publicación.

### 2.2.1. Medida digital de compacidad

La variedad en la definición del perímetro en regiones digitalizadas es la principal causa de la inestabilidad en la medición de la compacidad de las formas, utilizando la relación clásica. Esta misma variación dificulta asociar el concepto de compacidad con alguna expresión matemática. Evitar la influencia de la

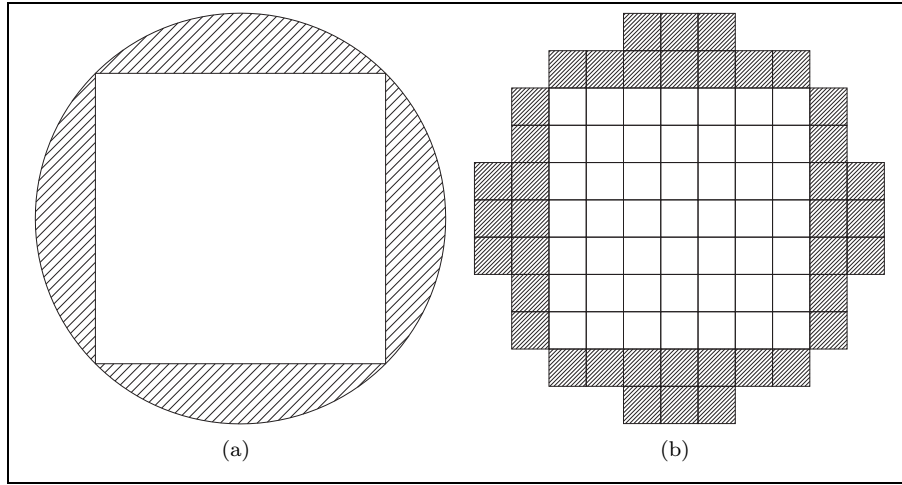


Figura 2.9: Enfoque utilizado por Kim para determinar la circularidad de una región convexa plasmado a través de dos pares de regiones. En (a) y (b) se determina el grado de compacidad de una región cuadrada, tanto en el plano continuo como en el digital, al utilizar una comparación con el menor círculo que lo circunscribe.

evaluación del contorno sobre la medición de la compacidad llevó a Kim a diseñar y presentar en 1984 un nuevo enfoque [35]. Él propone censar la compacidad a través de una comparación de áreas.

La comparación de áreas se realiza mediante una relación entre la silueta del objeto y el círculo más pequeño que lo circunscribe, a esta relación le nombra *medida digital de compacidad*. Así, mientras menos diferencias de áreas se tengan entre las dos figuras más circular y por lo tanto más compacto será el objeto. La similitud estará en función del cociente entre ambas áreas, tal como lo expresa 2.17, donde  $A_p$  es el área del disco digitalizado y  $A_{p^o}$ , el área de la región digital bajo estudio. Consecuentemente, la relación de similitud entre las formas en el espacio continuo se deberá mantener el espacio discreto; afirma el autor.

$$m_p = \frac{A_p}{A_{p^o}}. \quad (2.17)$$

Kim asume que existe un objeto en espacio continuo y del cual se obtendrá una versión digitalizada de este objeto. Sin embargo, el círculo es una de las figuras que presenta ambivalencia en el proceso de digitalización. De un círculo, y dependiendo de la resolución en la digitalización, se pueden obtener diferentes versiones digitalizadas [35, 37]. Por lo tanto, el definir las características y condiciones que debe tener tal representación del círculo es el primer problema a resolver. Así, gran parte del trabajo de Kim se enfoca en dar las condiciones que debe presentar el disco digitalizado para poder ser usado en su propuesta.

La medida digital de compacidad se restringe a figuras cerradas simples.

Adicionalmente, estas formas deberán ser convexas, condición que lleva a Kim a formular nuevamente un conjunto de reglas con las que deberá cumplir dicha figura cerrada simple y convexa. Al igual que en otras propuestas, en aras de obtener una medida de circularidad más precisa se eleva el trabajo de procesamiento computacional. Esto aunado a las restricciones de la región digital a evaluar limita enormemente su uso práctico.

### 2.2.2. Medida de circularidad de Bottema

Bottema retoma el enfoque de comparación de áreas entre la representación discreta de la forma y un círculo discreto con misma área [7]. La comparación que Bottema propone se basa en la intersección de las áreas entre ambas regiones, la cual se define como:

$$d(A, D) = 1 - \frac{|(A \cap D)|}{|A|}. \quad (2.18)$$

Donde  $A$  es el área de un conjunto discreto bajo análisis y  $D$  es el disco discreto con el cual se va a comparar. Ambas regiones discretas deberán tener el mismo número de pixels y el mismo centro de masa. Sin embargo,  $D$  puede no existir para toda región  $A$ .

Como Bottema lo expresa, este enfoque fue sugerido primero por Giger, Doi y MacMahon [24]. Sin embargo, apunta Bottema, ellos no formalizan la definición del disco discreto con el cual la región bajo estudio debe compararse. Adicionalmente, Bottema sugiere una normalización de la expresión a un rango entre 0 y 1; donde 0 será para la forma más dispersa y 1 para la más compacta.

El punto más crítico de esta propuesta es la ubicación del centro de masa. Bajo este enfoque, la intersección entre dos regiones puede no existir y se considerará una región dispersa, Figura 2.10(b). Otro caso a ser observado es el tamaño del disco con el que será interceptada la región. En la Figura 2.10(a), la intersección ente la región digital circular y la región digital a prueba no es total. Por lo tanto, evaluar la compacidad de una región digital bajo este enfoque muestra serios inconvenientes.

### 2.2.3. Relación de circularidad de Peura e Iivarién

Peura e Iivarién aplican un enfoque semejante al de Kim, relacionar la silueta del objeto digitalizada y lo comparan con un círculo [66]. Este círculo que sirve de referencia en la comparación es determinado por el área de la silueta del objeto.

Una vez determinado el área del círculo se procede a calcular su perímetro. Finalmente dentro de esta propuesta, se someten los perímetros calculados de ambas formas a una relación.

Tal relación da cuenta del grado de similitud entre ambas al comparar sus perímetros. Si el valor producido por esta relación tiende a 1, entonces, la forma bajo análisis será más compacta. La medida está determinada por:

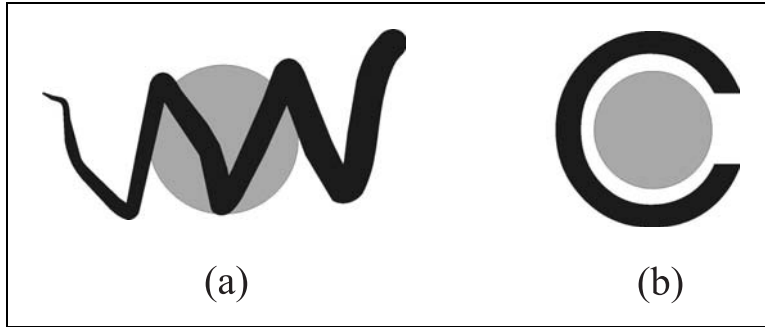


Figura 2.10: Intersección de dos regiones digitales y sus respectivos discos digitales; regiones y discos con igual número de celdas. Los centros de los discos se encuentran ubicados en las coordenadas calculadas del centro de masa de la región digital; resultado del algoritmo propuesto por Bottema. Mientras en (a) la intersección no es total; en (b) la intersección es cero.

$$C = \frac{P_{circulo}}{P_{forma}}. \quad (2.19)$$

En esta propuesta deben ser considerados los siguientes puntos:

- La medida mezcla dos espacios al comparar un círculo, propio del espacio Euclidean, y una región digital producto de un proceso de digitalización.
- La relación mide un grado de similitud entre el círculo y la forma bajo análisis. Los autores denominan a esta relación como medida de compacidad. Sin embargo, Rosenfeld demuestra que el círculo no es la forma más compacta en el espacio discreto. Lo propio deberá ser que a esta relación se le denomine como medida de circularidad. Dado que se intenta conocer la proximidad entre la región digital y el círculo.

Por otra parte, esta medida de compacidad conserva la sencillez, tanto de cálculo como de concepción, y su rango normalizado entre 0 y 1.

En la Figura 2.11 se muestra la silueta de un disco y su representación digitalizada. El área de ambas es de 44 unidades cuadradas y sus perímetros de 89 y 23.52 unidades lineales respectivamente. Con los parámetros antes citados el valor de la compacidad  $C$  sería de 0.26, muy lejos del valor de 1. Es evidente que a bajas resoluciones esta medida tendrá serios inconvenientes en su uso práctico.

### 2.3. Propiedades geométricas de la celda

La alta complejidad computacional de evaluar distancias y el alto grado de ambigüedad en la comparación de una región digital y el círculo son razones

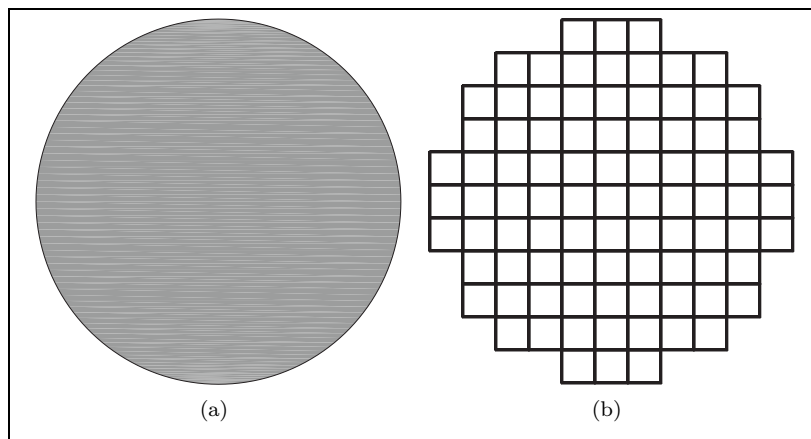


Figura 2.11: Disco junto a una de sus versiones digitalizadas; ambas con área = 44. (a) Perímetro = 89, ( b) Perímetro = 23.52.

más que suficientes para el surgimiento de un nuevo enfoque. A continuación, la atención se centrará en los diseños de medidas de compacidad con base en un punto de vista diferente. Esta vez el objetivo se fija en los componentes internos de una región digital. Es usual visualizar una región digital como un conjunto de celdas regulares. Estas celdas regulares tienen características propias, como lados, ángulo, vértices, área y perímetro. Son estas propiedades de las que parte este enfoque para proponer una manera diferente de medir la compacidad de una región digital.

### 2.3.1. Compacidad Discreta usando el perímetro de contacto

La investigación de una medida de compacidad toma un giro en 1997. En este año, Bribiesca propone usar propiedades inherentes de las celdas que conforman la región digital [9]. Este enfoque cambia el modelo de visualizar la región digital globalmente al verla como un conjunto de entidades que conforman tal región. El trabajo enfatiza este punto que ya era utilizado, por ejemplo al evaluar el área de la región.

Con este enfoque, el perímetro de la región digital, punto de ambigüedad en la generación de una buena medida de compacidad, queda determinado por los lados de las celdas presentes en el borde de la región y que no tienen contacto con ninguna otra celda de la región misma. Lo anterior ubica este enfoque dentro de la primera definición de medición del perímetro señalado por Rosenfeld [70]. En este principio se establece que la longitud del perímetro se define como la suma de las longitudes de los lados de cada celda en la región frontera y que tienen contacto con el fondo. En el caso del área, ésta queda determinada por el número de celdas que compone a la región digital.

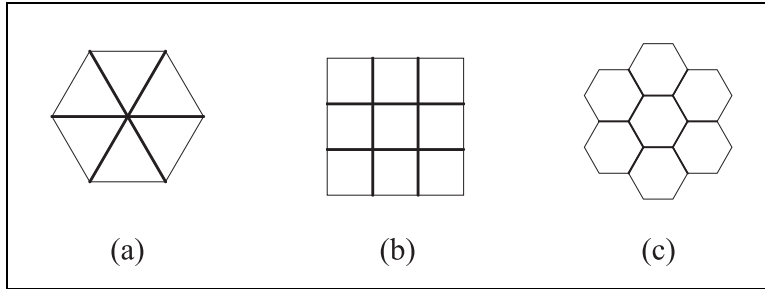


Figura 2.12: Regiones digitales ilustradas con las tres configuraciones de celdas regulares posibles: (a), triangulares; (b) cuadradas y (c) hexagonales. Las líneas más oscuras representan sus respectivos perímetros de contacto.

Una vez definidas las dos propiedades fundamentales de cualquier región digital, área y perímetro, Bribiesca las configura para plantear un nuevo concepto, el perímetro de contacto. El perímetro de contacto lo define como la suma de todos los lados que comparten las celdas de la región digital. Esto es: dos celdas que pertenecen a la región tienen un lado en común. La suma de todas las longitudes, de los lados comunes entre pares de celdas que pertenece a la región, conforma el perímetro de contacto.

La Figura 2.12 ilustra el concepto de perímetro de contacto en algunas regiones discretas. En esta misma figura podemos observar los 3 tipos de celdas regulares que pueden ser empleadas para representar una región en el plano discreto. Esto sin importar que tipo de celda conforme la región, la definición del perímetro de contacto es la misma.

Para una región digital compuesta de  $n$  número de celdas regulares con  $T$  lados y con un contorno de longitud  $P$  tiene un perímetro de contacto

$$P_c = \frac{Tn - P}{2}. \quad (2.20)$$

Este sencillo concepto lleva al planteamiento de un enfoque diferente para medir la compacidad de una región digital. La compacidad de una región digital estará determinada ahora por el perímetro de contacto de la región e indirectamente por su perímetro y área. Bribiesca renombra al perímetro de contacto como medida de Compacidad Discreta.

La Ecuación 2.20 muestra que la compacidad discreta está ligada fuertemente al número de celdas que componen a la región. Por lo tanto, dos regiones similares pero con diferente número de elementos que las integren serán, bajo este enfoque, regiones diferentes. Como consecuencia de lo anterior, Bribiesca propone una modificación a la compacidad discreta para hacer frente a los cambios de escala que pueda sufrir la región. Esta propuesta recibe el nombre de medida de Compacidad Discreta Normalizada,  $C_{DN}$ . El valor de  $C_{DN}$  para un número  $n$  de celdas de cuatro lados está determinado por:

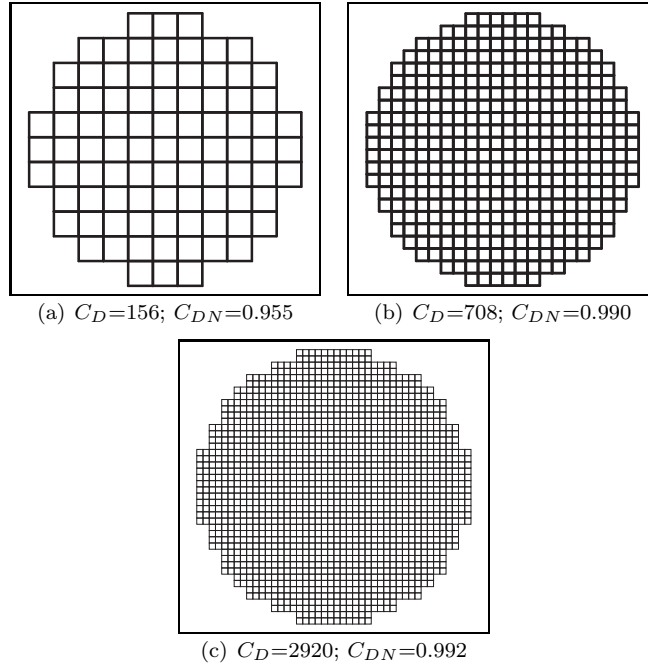


Figura 2.13: Tres representaciones de un disco digital con diferente resolución y con sus respectivos valores de Compacidad Discreta y Compacidad Discreta Normalizada.

$$C_{DN} = \frac{C_D - C_{D_{\min}}}{C_{D_{\max}} - C_{D_{\min}}}. \quad (2.21)$$

Donde  $C_D$  es el perímetro de contacto de la región dado por 2.20,  $C_{D_{\min}}$  es igual a

$$C_{D_{\min}} = n - 1. \quad (2.22)$$

Por otra parte,  $C_{D_{\max}}$  es la compacidad máxima de la región con  $n$  celdas regulares cuadradas y está dada por:

$$C_{D_{\max}} = \frac{4n - 4\sqrt{n}}{2}. \quad (2.23)$$

La  $C_{DN}$  hace uso de un enfoque similar empleado por Peura e Ivarein al comparar la región digital con una región de referencia [66]. Caso contrario a estos investigadores, Bribiesca emplea otra región digital como referencia; una región cuadrada compuesta por igual número de celdas. Un caso especial donde no se cumple la comparación entre estas dos regiones discretas es cuando  $\sqrt{n}$  no tiene valor exacto. En este caso la región de referencia pasa a ser una región dentro del espacio Euclidiano.



La Compacidad Discreta Normalizada produce mediciones homogéneas en familias de regiones similares a diferentes resoluciones. Además, la medida puede ser empleada sobre regiones con huecos. Esta medida de compacidad ha mostrado que el enfoque basado en los componentes de la región tiene un mejor comportamiento que el enfoque global utilizado por otras medidas.

### 2.3.2. Relaciones área-perímetro de Bogaert

Siguiendo la pauta establecida por Bribiesca, en el 2000 aparece publicado el trabajo realizado por Bogaert et al [5]. En este trabajo se profundiza en el análisis del comportamiento del perímetro y su medición sobre regiones discretas compuestas de celdas regulares cuadradas. Para una región digital configurada a partir de un conjunto  $n$  celdas regulares cuadradas, Bribiesca determinó indirectamente los límites mínimos y máximos de los valores de longitud del perímetro de la región. Sin embargo, cuando el número de celdas  $n$  no es el cuadrado de algún número entero  $j$ , entonces, Bribiesca propone usar como límite superior el perímetro de un cuadrado en el espacio continuo.

Dentro del trabajo de Bogaert et al., se profundiza y determina analíticamente los límites mínimos y máximos para toda región digital compuesta con  $n$  número de celdas, y no sólo para el perímetro sino también para el área. Lo anterior se realiza considerando tanto conectividad cuatro como ocho.

Al encontrar los valores límites del perímetro y área, estas propiedades son empleadas para configurar relaciones de similitud entre dos regiones, al igual que lo hizo Bribiesca en el caso del perímetro. Como resultado se proponen cuatro medidas de compacidad basadas en relaciones de similitud. Dos de estas medidas relacionan áreas y las restantes relacionan perímetros. En el caso de relaciones de áreas, medidas como el número de celdas  $n$  que componen una región digital  $a$ . Las medidas de compacidad quedan determinadas por

$$\varphi_1 = \frac{A_{\min}(p)}{A(a)} \quad (2.24)$$

y

$$\varphi_2 = \frac{A(a)}{A_{\max}(p)}. \quad (2.25)$$

Donde  $A_{\min}(p)$  y  $A_{\max}(p)$  son los valores mínimo y máximo que pueden ser obtenidos de regiones compuestas por celdas cuadradas que poseen idéntico perímetro. El valor de  $A_{\max}(p)$  se determina en dos casos; cuando el número de celdas pueden ser configuradas en un cuadrado, o sea  $n = j^2$  tal que  $j \in \mathbb{Z}$

$$A_{\max}(p) = \left(\frac{p}{4}\right)^2; \quad (2.26)$$

y cuando  $n \neq j^2$

$$A_{\text{máx}}(p) = \frac{1}{4} \left( \frac{p^2}{4} - 1 \right). \quad (2.27)$$

Para el caso de  $A_{\text{mín}}(p)$  debe ser considerada la conectividad. Si es empleada conectividad cuatro, entonces

$$A_{\text{mín}}(p) = \frac{p-2}{2}. \quad (2.28)$$

Si es utilizada la conectividad ocho se tienen dos casos que incluyen al perímetro de contacto  $P_C$ ; en el primer caso, si  $P_C = 0$  entonces

$$A_{\text{min}}(p) = p/4; \quad (2.29)$$

y si  $P_C = 1$  entonces

$$A_{\text{mín}}(p) = \text{int} \left( \frac{p}{4} \right) + 1. \quad (2.30)$$

Donde  $\text{int}(x)$  es la función piso  $\lfloor x \rfloor$ .

Ahora, si  $n$  se mantiene fija entonces la compacidad se mide usando ahora las relaciones de perímetros:

$$\varphi_3 = \frac{P(a)}{P_{\text{máx}}(a)} \quad (2.31)$$

y

$$\varphi_4 = \frac{P_{\text{mín}}(a)}{P(a)}. \quad (2.32)$$

Donde  $P(a)$  es el perímetro de la región  $a$  bajo análisis compuesta de  $n$  celdas,  $P_{\text{mín}}(a)$  es el perímetro mínimo y  $P_{\text{máx}}(a)$  es el perímetro máximo para una región  $a$  con igual valor de  $n$ .

El valor de  $P_{\text{máx}}(a)$  se sujeta al tipo de conectividad usada. Si se aplica conectividad cuatro, entonces

$$P_{\text{máx}} = 2(n-1). \quad (2.33)$$

Mientras que si es empleada la conectividad ocho se tiene que:

$$P_{\text{máx}} = 4n. \quad (2.34)$$

El cálculo del valor del perímetro mínimo resulta ser el más complejo de todos los parámetros aquí descritos. Existen tres casos para la estimación de este perímetro. En el primero de estos casos tenemos que si  $n = j^2$ , entonces

$$P_{\text{mín}}(a) = 4\sqrt{n} = 4j; \quad (2.35)$$

si  $j_1^2 < n < j_2^2$ , tal que  $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $j_2 = j_1 + 1$  y  $n \leq j_1^2 + j_1$ , entonces

$$P_{min}(a) = 4j_1 + 2. \quad (2.36)$$

Finalmente, si  $n > j_1^2 + j_1$ , entonces

$$P_{min}(a) = 4j_1 + 4 = 4j_2. \quad (2.37)$$

Estas medidas de compacidad, propuestas por Bogaert et al., dependen del número de celdas  $n$ . Este factor provoca que las medidas no sean invariantes a cambios de resolución. Otro factor a considerar es la determinación de los parámetros de la relación a emplear, éstos incrementan el trabajo de cómputo comparado con el empleado en la relación clásica. Finalmente, los autores apuntan que para una mejor evaluación de la compacidad en regiones discretas es determinante mantener estable la resolución de las regiones y utilizar la combinación de las medidas  $\varphi_2$  y  $\varphi_4$ .

Las medidas propuestas por Bogaert y expuestas en esta sección dejan claro que se alejan de lo que Danielsson nombra buenas medidas de compacidad. Lo anterior se deduce debido a mayor tiempo de cómputo que se emplearía para la determinación del valor de la compacidad con respecto a la expresión clásica. Otro aspecto es la pérdida de sencillez y a su ausencia de robustez a cambios de escala.

Un hecho a destacar es que nuevamente se hace uso de comparaciones entre regiones, al igual que se hace en los trabajos dentro del enfoque de regiones de referencia, pero con un cambio radical en la elección de la región de referencia. Este cambio, ya propuesto implícitamente en el trabajo de Bribiesca, es no utilizar al círculo o versión digitalizada del mismo para usarlo como forma de referencia, sino emplear el cuadrado.

## 2.4. Otras propuestas

A pesar de haber aparecido en los albores en la búsqueda de una solución para el problema de inconsistencia de la medida clásica de compacidad, la propuesta hecha por Sankar y Krishnamurthy busca darle carácter único a la definición de perímetro en el espacio discreto más que proponer una nueva medida. Ésta es la razón por la cual no fue arropada entre alguno de los enfoques anteriores.

Cabe destacar que existe una propuesta más en la medición de la compacidad. Esta propuesta fue hecha en el 2004 por Lee et al [50]. Sin embargo, esta propuesta es una búsqueda exhaustiva en compaginar el valor obtenido por la relación clásica con alguno valor obtenido de entre todas las posibles combinaciones de perímetros y áreas censados en el espacio digital. Por lo tanto, esta propuesta no fue considerada como una medida de compacidad y poder ser integrada en este trabajo.

La propuesta de Sankar y Krishnamurthy se describe y posteriormente se analiza bajo el criterio dado por Rosen. Bajo este criterio se demuestra la inoperancia de la propuesta.

### 2.4.1. La normalización en la medición del perímetro de Sankar y Krishnamurthy

El problema principal de la relación clásica para medir la compacidad es la definición del perímetro, el cual se puede definir desde tres enfoques diferentes. En 1978, Sankar y Krishnamurthy proponen demostrar que la relación clásica puede ser extendida para medir la compacidad en regiones digitalizadas sin los efectos contra intuitivos y patológicos que había puntualizado Rosenfeld [73]. Sankar y Krishnamurthy proponen establecer una norma para la medición de la longitud del contorno de una región digitalizada. La propuesta asume que la región puede ser considerada como un polígono. Donde los puntos centrales de cada pixel sean los vértices y las distancias que los separan sean vistas como los lados de dicho polígono.

Esta propuesta tiene como consecuencia directa la reducción a una sola definición del perímetro, donde el perímetro será la suma de las longitudes de todas las aristas, tal que, para los lados configurados entre vértices se sumara 1 si son horizontales o verticales y  $\sqrt{2}$  si son diagonales. En el caso del área, la representación de la región bajo este enfoque hace uso del teorema de Pick para su medición. El teorema establece que el área de cualquier polígono simple y cuyos vértices caigan sobre los puntos de una red o lattice está dada por

$$A(S) = \frac{1}{2}b + i - 1. \quad (2.38)$$

Donde  $b$  es el número de puntos en el borde del polígono e  $i$  es el número de puntos interiores del mismo.

Determinar el valor del perímetro debería resultar inmediato. Sin embargo, el cálculo de la longitud del perímetro requiere de un algoritmo más complejo que para el área. El primer paso sugerido por los autores es definir una vecindad para cada punto de la región digital, nombrado  $X_j$ . Una vez ubicado el punto  $X_j$ , se determina su aportación al valor de la longitud del perímetro usando el modelo de vecindad

$$\begin{array}{ccc} X_{j,3} & X_{j,2} & X_{j,1} \\ X_{j,4} & X_j & X_{j,0} \\ X_{j,5} & X_{j,6} & X_{j,7} \end{array}$$

y la expresión:

$$\begin{aligned} p(X_j) = & \sum_{\Delta \in \{0,2,4,6\}} [(X_j \wedge X_{j,\Delta}) - (X_{j,\Delta} \wedge X_{j,\Delta-1} \vee X_{j,\Delta-2}) \wedge (X_{j,\Delta+1} \vee X_{j,\Delta+2})] \\ & + \sum_{\Delta \in \{1,3,5,7\}} \sqrt{2} [(X_j \wedge X_{j,\Delta}) - (X_{j,\Delta-1} \wedge X_{j,\Delta} \wedge X_{j,\Delta+1})] \end{aligned} \quad (2.39)$$

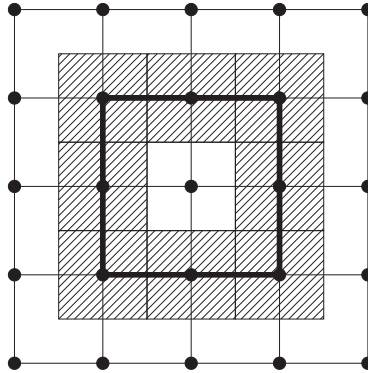


Figura 2.14: Región discreta colocada sobre una red (lattice). Éste es un ejemplo que contradice el enfoque propuesto por Sankar y Krishnamurthy al calcular el área de una región digital representada por celdas cuadradas. De acuerdo a los autores el área de esta región deberá tener un valor de 4 y no de 9 que sería lo correcto. Las celdas obscurecidas muestran la frontera de la región y la línea el contorno que debe ser medido como perímetro de la región.

El siguiente y último paso para determinar la longitud del perímetro es sumar todas las aportaciones calculadas en cada punto de la región. La longitud total del perímetro para una región digital  $S$  es

$$P_p(S) = \frac{1}{2} \sum_j p(X_j). \quad (2.40)$$

Concluido el cálculo de estas dos propiedades básicas se procede a utilizarlas sobre el modelo de la relación clásica para la medición de la compacidad. Sankar y Krishnamurthy describen a esta medida como de no compacidad o complejidad, simbolizada y dada por

$$\Pi(S) = \frac{P_p(S)^2}{A(S)}. \quad (2.41)$$

Sin embargo, dos años más tarde Rosen demuestra como este enfoque presenta inconsistencias en la medición del perímetro y el área para regiones representadas por celdas regulares cuadradas [68]. La primera observación que Rosen enuncia es sobre el perímetro de la región. Bajo el enfoque tomado por Sankar y Krishnamurthy el perímetro es conformado por un conjunto de celdas que están en la frontera de la región. Esto, nos dice Rosen, es configurar el perímetro como una banda de ancho de un pixel que recorre el contorno de la región cuando el perímetro no debería de tener ancho alguno.

El la Figura 2.14 podemos observar una región compuesta por 9 celdas cuadradas que a su vez configuran a un cuadrado. De acuerdo con el enfoque propuesto por Sankar y Krishnamurthy, cada celda se acomoda sobre la red (*lattice*).

Posteriormente, se pueden trazar segmentos de recta para unir los puntos centrales de las celdas en la frontera de la región y formar el polígono a evaluar. En este ejemplo podemos notar que el número de puntos sobre el borde  $b=8$  y de puntos internos  $i=1$ . Al aplicar 2.38, en la región de la Figura 2.14 produce como resultado un valor de 4 para el área; ¡Siendo de 9 el valor correcto!. Lo anterior muestra el tipo de inconsistencias que puede presentar el enfoque para medir la compacidad de regiones discretas. Además del tipo de inconsistencia ya mencionado, la complejidad de la medida se ve incrementada con el cálculo del perímetro.

## 2.5. Regiones digitales tridimensionales y la medición de la compacidad.

Hasta hoy, la literatura sobre medidas de compacidad para regiones discretas tridimensionales es muy reducida. La investigación llevada a cabo en la realización de este trabajo proporcionó sólo dos propuestas en este tema. La relación isoperimétrica, por una parte, se muestra como la principal base para medir la compacidad en objetos tridimensionales [37, 54]. La segunda propuesta, nombrada Compacidad Discreta, fue dada a conocer en el año 2000 por Bribiesca [11]. Ambas medidas son extensiones de las medidas empleadas para formas planas, ya discutidas en las secciones anteriores.

La relación isoperimétrica es empleada ahora sobre regiones discretas tridimensionales. En este tipo de regiones la relación clásica produce su valor mínimo para la esfera que es el objeto que encierra el mayor volumen con la menor área. La relación clásica continúa siendo adimensional. Sin embargo, los efectos indeseables de la relación clásica, presentados en su contraparte para formas bidimensionales, se ven amplificadas al ser aplicada a objetos tridimensionales. Para una región digital tridimensional representada por elementos volumétricos llamados voxels, la compacidad usando la relación clásica se determina mediante:

$$C = \frac{area^3}{volumen^2}. \quad (2.42)$$

La Compacidad Discreta como la segunda propuesta para este tipo de regiones conserva el mismo enfoque que su antecesora en dos dimensiones. Esta medida de compacidad se sustenta en el concepto de contabilizar las superficies de las caras de los voxels comunes entre sí, que en el caso de dos dimensiones se le llamó Perímetro de Contacto y que para las regiones digitales tridimensionales recibe el nombre de Superficie de Contacto. La superficie de contacto se define por:

$$A_c = \frac{6n - A}{2}. \quad (2.43)$$

Donde  $n$  es el número de voxels que componen al objeto tridimensional y  $A$  es su área superficial.

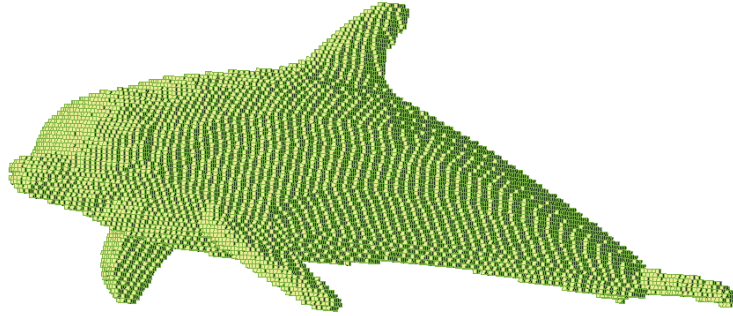


Figura 2.15: Representación de un delfín usando elementos volumétricos (voxels) para su configuración. En esta representación digital de un delfín produce los valores de compacidad: relación clásica  $C = 1758.8797$  ;  $C_D = 0.9724$ .

Una vez más se realiza una normalización para fijar el valor de la medida entre cero y uno. Así como hacer la medida invariante a cambios de resolución. Como su similar en dos dimensiones, la normalización de la medida es mediante una relación de similitud entre dos regiones. Dada una región digital tridimensional  $S$  formada con un número de elementos  $n$  su medida de compacidad estará en función de una comparación entre  $S$  y el cubo que pueda ser formado con igual número de elementos  $n$ . La Compacidad Discreta está dada por:

$$C_D = \frac{A_C - A_{C_{\min}}}{A_{C_{\max}} - A_{C_{\min}}}. \quad (2.44)$$

Donde  $A_{C_{\min}}$  es el valor mínimo de  $A_C$  para la región que pueda ser configurada con igual  $n$  voxels pero que mantengan compartida al menos una de sus superficies. El valor de  $A_{C_{\min}}$  esta dado por la expresión:

$$A_{C_{\min}} = a(n - 1). \quad (2.45)$$

Donde  $A_{C_{\max}}$  es el valor de  $A_C$  obtenido del cubo que se puede formar con igual  $n$  voxels del objeto tridimensional y es calculada por:

$$A_{C_{\max}} = 3(n - (\sqrt[3]{n})^2). \quad (2.46)$$

En la Figura 2.15 se muestra la representación en voxels de un delfín. El objeto se representa usando un conjunto de 180 869 voxels. Notemos que el valor de la compacidad aplicando la relación clásica es grande y crecerá en forma cúbica. Mientras que con la Compacidad Discreta mantiene en el rango entre 0 y 1. Es claro que mantener el valor de la compacidad en un rango fijo nos permite apreciar si la forma es más compacta o dispersa. Contrariamente, la compacidad medida usando la relación clásica no permite visualizar claramente que tan disperso sería el objeto bajo estudio.

Superar las limitaciones y resultados contra intuitivos de la relación isoperimétrica sin la pérdida de sus ventajas no ha sido tarea sencilla. Mantener bajo

el esfuerzo computacional para evaluar la compacidad ha sido el mayor problema a superar. Como se ha descrito en este capítulo, la medición de distancias o algunas en el enfoque de comparación con una forma de referencia elevan el costo computacional. Aquellas que mantienen baja su complejidad computacional muestran inconsistencias respecto al enfoque propuesto. Aún el escaso interés de diseñar medidas de compacidad en tres dimensiones, varias de las medidas ya expuestas pueden ser susceptibles de ser implementadas. Sin embargo, la probabilidad de que estas implementaciones tengan un uso práctico es muy baja. Por ejemplo, llevar el enfoque de distancias sugerido por Danielsson a tres dimensiones no conlleva dificultad alguna, pero que esta implementación sea usada en aplicaciones cotidianas puede llegar a ser prohibitivo, debido al alto costo computacional. Caso especial han sido las medidas de compacidad propuestas por Bribiesca, tanto en dos como en tres dimensiones. Dichas medidas mantienen un relativo bajo proceso de cómputo y conservan su sencillez conceptual.



## Capítulo 3

# Descriptores de regiones digitales basados en la compacidad

Medir la compacidad de siluetas de objetos y sus formas tridimensionales digitalizadas es el principal interés de este trabajo. La digitalización de una imagen genera una estructura matricial de valores enteros conocida como imagen digital. La imagen digital se conceptualiza como un conjunto de celdas adyacentes de área uniforme. A cada celda se le asocia un valor entero. Estas celdas son los elementos básicos de una imagen digital. Cuando las celdas sólo contienen dos posibles valores, 0 y 1, la imagen digital se le denomina imagen digital binaria [71, 78, 25].

En una imagen digital binaria es relativamente sencillo realizar una partición del conjunto de celdas que la componen. Usualmente la partición de interés se le asocia el valor numérico 1. Esta partición compuesta de celdas con valor 1 se les denomina *región digital* [25, 37]. Frecuentemente esta clase de región digital es asociada con la silueta de algún objeto tridimensional. Son este tipo de particiones y sus aspectos espaciales donde radica el punto medular del análisis computacional de la forma [74].

Tal vez la descripción espacial más básica de una región digital sea el grado de compacidad o dispersión que presente. Medir la compacidad de regiones digitales ha sido tema de múltiples investigaciones como se ha narrado en el capítulo 1. En este capítulo se presentan las propuestas que buscan solventar las inconveniencias que se presentan en las propuestas hasta el momento documentadas para la medición de la compacidad sobre regiones digitales. El *factor E* y *E normalizado* son los nombres con los que se les ha nombrado a dos descriptores que asocian su valor numérico con un grado de compacidad de una región digital.

A lo largo del capítulo se presentarán conceptos y definiciones esenciales en el desarrollo del *factor E* y *E normalizado*. Los descriptores aquí expuestos se

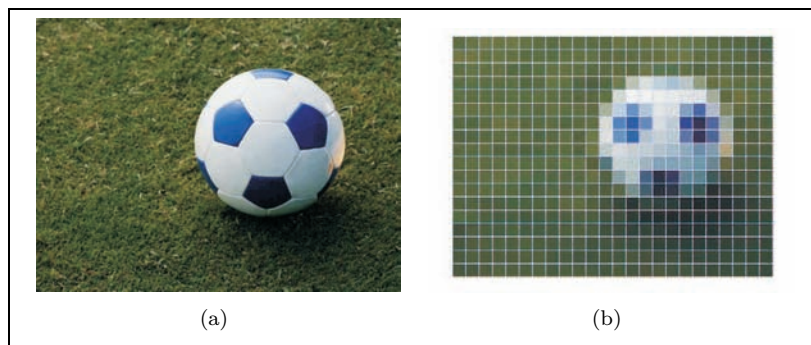


Figura 3.1: Escena (a) y (b), su versión digitalizada en 24 x 17 pixels o celdas.

enmarcan en el ámbito de la topología y geometría digital. Es por esto que se partirá de la definición de región digital y sus propiedades básicas bajo el marco de ambas disciplinas; definiciones que intervienen directamente en el diseño de los descriptores propuestos en esta obra. Al final, se mostrará que el *factor E normalizado* también puede ser aplicado bajo una representación unidimensional de la región digital.

### 3.1. Región Digital

Comenzaremos por establecer el significado de una región digital. En la definición de región digital se ven involucrados los conceptos de imagen digital, segmentación y conectividad. Lo anterior dirige la discusión a iniciar con el significado de imagen digital.

El ser humano basa gran parte de su aprendizaje en la percepción de su entorno mediante el sentido de la visión [25, 78, 52]. A través de este sentido se manipulan diferentes intensidades de luz reflejada. La luz reflejada es procesada y enviada al cerebro que la reconfigura e interpreta. El cerebro humano entonces produce lo que se entiende por una imagen. Esta característica del ser humano, que en su origen tiene la función de pensar su entorno y darle un significado útil, se ha convertido en una herramienta de análisis en el entendimiento de fenómenos físicos, orgánicos e inclusive económicos y sociales de nuestro acontecer; fenómenos que escapan a nuestro entorno inmediato. Por ejemplo, los acaeceres astronómicos tales como estrellas en procesos de formación, el análisis de patologías cardíacas o análisis en dinámicas bursátiles. Todos estos sucesos convertidos en imágenes y que pueden ser interpretadas por los seres humanos para su estudio.

Gran parte de los hechos descritos anteriormente pueden ser integrados en una imagen o en un conjunto de imágenes para su análisis y ser entonces procesados con mayor rapidez y eficacia. Con la llegada de las computadoras, se vislumbra como un hecho factible e inmediato la manipulación de una amplia gama de imágenes [13]. Configurar una imagen en un esquema apropiado para

su manejo en computadores dio pauta para el origen de lo que hoy se nombra imagen digital. La teoría e implementación de las imágenes digitales queda fuera del marco del presente trabajo. Sin embargo, un bosquejo del proceso de la generación de una imagen digital será ilustrado a continuación.

La computadora como ente tecnológico esta diseñada para manipular dígitos. Transformar alguna imagen a un conjunto de dígitos se conoce como proceso de muestro y cuantificación [67]. Esta transformación genera un conjunto de divisiones de la imagen continua y asigna a cada división un valor acorde a un grado de intensidad luminosa [67]. Es una norma que estas divisiones sean conceptualizadas como celdas [57, 37]. Las celdas se visualizan como un conjunto de polígonos regulares capaces de subdividir el plano Euclidiano [57, 37]. Existen sólo tres polígonos regulares que cumplen con esta condición, el triángulo, el cuadrado y el hexágono. La utilización de este tipo de polígonos regulares simplifica el estudio y análisis de una imagen digital [57, 64].

Una vez elegido el tipo de celda y el rango de valores que será usado para cuantificar cada división, el mapeo de una imagen continua en una imagen digital es llevado a cabo, Figura 3.1(a) y (b). No obstante que existen tres tipos de polígonos regulares, la celda cuadrada es la opción más usual en la configuración de una imagen digital. La elección de una celda cuadrada obedece principalmente al tipo de dispositivo tecnológico que se emplea para la captura de una imagen continua. Entonces, la imagen digital es la representación de una imagen continua a través del uso de un conjunto de celdas regulares o polígonos, en el caso bidimensional, y de poliedros, para la representación de imágenes digitales tridimensionales. En la práctica esta clase de representación de una imagen hace uso del proceso de integración del cerebro humano para la interpretación de la escena mostrada en una imagen digital.

Como ya se ha mencionado, las celdas usualmente se interpretan como un conjunto de polígonos. Para el análisis y estudio de las imágenes digitales, el conjunto de celdas son ubicadas sobre una malla o red. Dependiendo del tipo de celda elegido es la configuración de la red, Figura 3.2. En el contexto de este trabajo la celda cuadrada será el tipo elegido. En consecuencia, el tipo de red resultante será también cuadrada.

Cada cruce en la red se asocia con un elemento del producto cartesiano de  $\mathbb{Z}^2$  [57, 37] en el caso bidimensional o de  $\mathbb{Z}^3$  en el caso tridimensional [37]. Con este modelo, el centro de cada celda de la imagen digital yace sobre un cruce de la red, Figura 3.2.

Al interpretar una imagen digital con el modelo de celdas surgen dos propuestas principalmente para su estudio, tanto geométrico como topológico. La primera de ellas se le conoce como modelo de puntos reticulares o *grid point model*, propuesto por Kong y Rosenfeld [41, 39, 40], Figura 3.3(b). El segundo se le nombra modelo reticular de celdas o *grid cell model*; basado en la propuesta de Kovalevsky [42, 43, 44, 45], Figura 3.3(a).

Las inconveniencias de usar la representación de puntos reticulares han sido ampliamente discutidas [68, 42, 45, 64, 17, 49]. Estas inconveniencias van desde el cálculo de parámetros geométricos básicos como son el área y el perímetro de la región digital [68] hasta inconsistencias topológicas [64, 42]; dentro de las

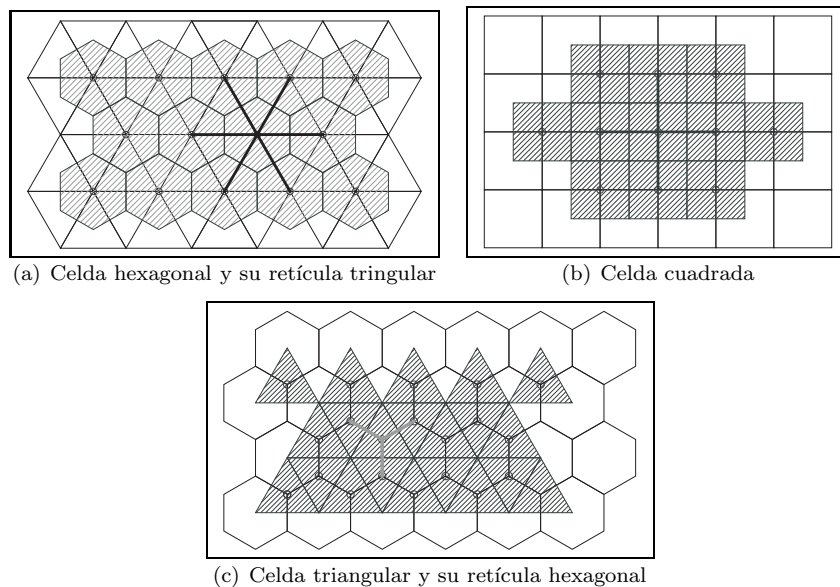


Figura 3.2: Los tres tipos de celdas que pueden cubrir el espacio continuo y sus respectivas retículas o redes.

cuales podemos citar el incumplimiento de teorema de curva de Jordan [42]. No obstante, el uso práctico de esta representación ha permitido desarrollar un sin número de metodologías en el campo del análisis de imágenes digitales [71, 25, 67, 78].

Por el contrario, utilizar el modelo reticular de celdas muestra un fuerte sustento topológico y nos permite definir propiedades geométricas en las imágenes digitales de manera consistente [45, 39, 37]. En consecuencia, este último modelo será sobre el cual se desarrolle las propuestas contenidas en este trabajo. Con fundamento en la teoría topológica desarrollada para este modelo, serán definidos los conceptos fundamentales que intervienen en el diseño y desarrollo de tales propuestas.

### 3.1.1. Segmentación

Al usar el modelo reticular de celdas para la representación de una imagen digital, el principal interés radica en los aspectos espaciales de subconjuntos de celdas dentro de la imagen digital [74]. Generalmente, estos subconjuntos de celdas son agrupadas acorde a propiedades comunes entre si. El proceso de producir particiones de un conjunto de celdas que conforma la imagen digital se le conoce como segmentación [71, 25].

El proceso de segmentación de una imagen busca agrupar subconjuntos de celdas bajo un criterio seleccionado. Los criterios de segmentación o agrupación de las celdas son diversos. Por ejemplo, se pueden agrupar por un valor de

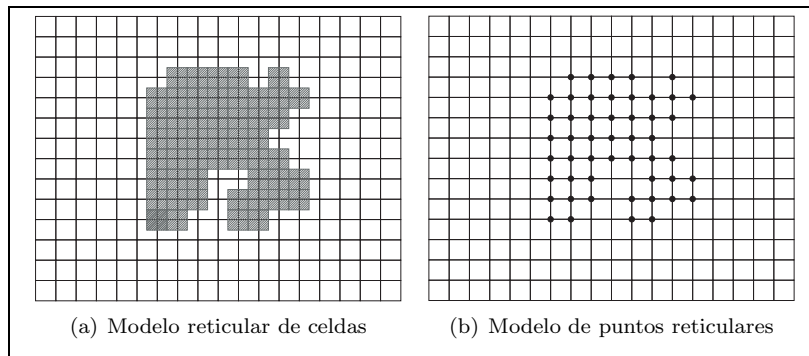


Figura 3.3: Imagen digital representada por los modelos basados en retículas (*grids*).

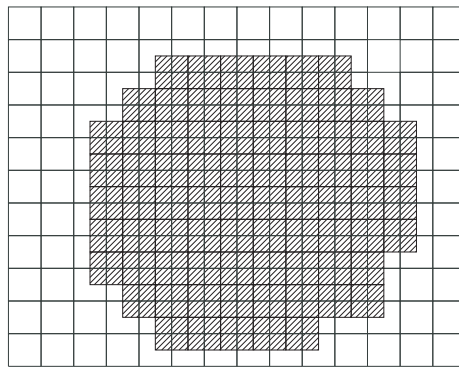


Figura 3.4: Conjunto de celdas que representan el espacio ocupado por el balón de fútbol dentro de la imagen de la Figura 1(b).

intensidad luminosa de alguna celda. Klette llama a este criterio segmentación por regiones distintivas [37]; aunque, usualmentese le conoce con el nombre de segmentación por umbral [71, 25, 67, 2]. Otros criterios de segmentación son: por textura o por características locales; por mencionar algunos.

Diversos métodos de segmentación han sido desarrollados a lo largo de las últimas décadas [28, 62, 83]. No obstante, para los fines perseguidos en el presente trabajo nos bastará con hacer una selección del conjunto total de celdas, aislando una zona de interés.

En la Figura 3.4 se han segmentado una conjunto de celdas de la Figura 3.1(a); extrayendo aquellas que se pueden considerar una versión del balón de fútbol soccer. Para llevar a cabo dicha segmentación, la zona que rodea al balón se ha eliminado. El conjunto de pixels se ha colocado sobre una retícula donde los centros de cada celda corresponden a su posición en el plano discreto. Para censar diversos aspectos espaciales de subconjuntos de celdas es necesario comenzar por definir sus propiedades topológicas, las cuales nos permitirán llevar

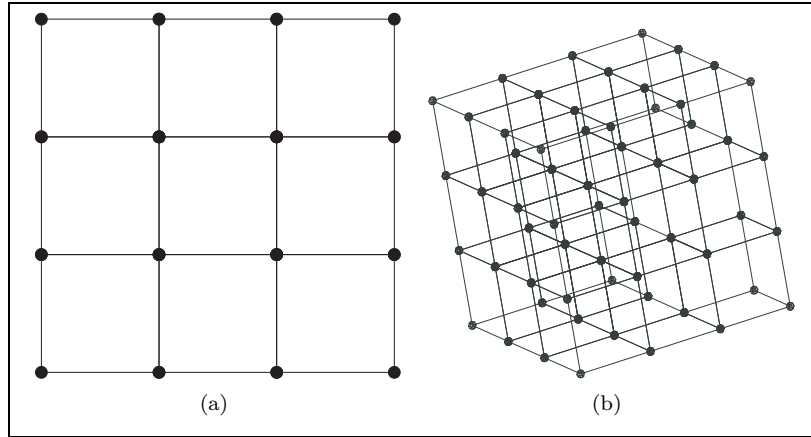


Figura 3.5: Tipos concretos de ACC: (a) 2-dimensional y (b) 3-dimensional.

a cabo dicha tarea.

## 3.2. Conectividad de subconjuntos de celdas

Para que el conjunto de celdas segmentadas, como las mostradas en la Figura 3.4, sean consideradas una región digital sus elementos deberán cumplir con un criterio de conectividad entre sus elementos. La conectividad es un concepto topológico; el cual se utiliza para establecer el criterio que determina cuando un conjunto de celdas puede ser considerada una región digital [70, 25, 42]. A su vez, la conectividad queda regida por el concepto topológico de vecindad. Es aquí donde la topología digital de Kovalevsky muestra su fortaleza. La topología digital bajo el modelo reticular de celdas carece de las inconsistencias del modelo de puntos reticulares. Al modelo reticular de celdas también se le conoce como plano Khalimsky-Kovalevsky [38] y a la topología digital también se le conoce como Topología de Alexandroff [38, 20, 19] o Topología Axiomática Digital [45].

### 3.2.1. Complex cell

**Definición 3.1 (Kovalevsky)** : Una célula compleja abstracta (ACC)  $T = (E, B, dim)$  es un conjunto de elementos abstractos provistos en un relación binaria antisimétrica, irreflexiva y transitiva  $B \subset E \times E$  llamada **bounding relation**, y con una función dimensional  $dim : E \rightarrow I$ , del conjunto  $E$  al conjunto de números enteros no negativos  $I$ , tal que  $dim(a) < dim(b)$  para todo par de elementos  $(a, b) \in B$ .

Enmarcada bajo esta teoría, cada celda, pixel o voxel, es considerado como un caso específico de célula compleja abstracta compuesta de elementos  $k$  – dimensionales; donde  $k = 0, \dots, 2$  para el plano y  $k = 0, \dots, 3$  en el espacio,

llamados células. Una *ACC* es llamada *k – dimensional* si la dimensión de todas sus células es menor o igual a *k*. La Figura 3.5 contiene la representación gráfica de cada una de las células en 2 y 3 dimensiones.

En consecuencia, una imagen digital es una *ACC* específica que a su vez está compuesta de un conjunto de *ACC*, de un tipo específico de células complejas abstractas. En la Figura 3.5 podemos observar casos específicos de células complejas y de espacios finitos representados por conjuntos de *ACC* específicos.

### 3.2.2. Vecindad, Conectividad y Recorrido

Bajo esta topología, un subconjunto *S* de una *ACC* es definido como un conjunto abierto denominado sub-*ACC*. De esta forma, la vecindad de una célula se define como intersección de todos los *sub – ACC* que contengan a una célula compleja *c*, donde el conjunto resultante es también abierto. Kovalevsky nombra a esta vecindad *SON*, (*smallest open neighborhood of c*). La Figura 3.5 ilustra las *SON* resultantes de cada tipo de célula, tanto en dos como en tres dimensiones.

Para saber si dos células complejas están conectadas es preciso definir cuando dos células complejas son incidentes.

**Definición 3.2 (Kovalevsky)** : Sean *a* y *b* dos células de una *ACC C*, entonces estas son llamadas células incidentes si  $a \in SON(b)$  o  $b \in SON(a)$ . Si *a* y *b* son incidentes entonces se dice que son células conectadas.

**Definición 3.3 (Kovalevsky)** : Sea *S* un sub-*ACC* de una *ACC – T*. Una secuencia de células  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  es llamada *path* o recorrido de *a*<sub>1</sub> hasta *a*<sub>n</sub> si cada par de células contiguas en la secuencia es incidente.

Con la definición 3.3 es ahora posible establecer la definición de región digital

**Definición 3.4 (Kovalevsky)** : Un subconjunto de células-*k*  $\in ACC-k$  *T* es conectado si y sólo si, para cualquier dos elementos en *T*,  $(a,b) \in T$  existe un recorrido o *path* entre estas dos células y tal recorrido *l* esta contenido completamente en *T*. Entonces una región digital, *ACC-R*, es un subconjunto de células-*k*,  $R \in T$ , totalmente conectado.

## 3.3. Contorno y área envolvente de una región digital

En espacio continuo la longitud del contorno de una región define el perímetro de la misma. Sin embargo, medir este parámetro de una región digital ha sido tema extenso de discusión [48, 70, 37, 42]. Acotados por la topología axiomática digital de Kovalevsky es posible establecer una unívoca definición. Bajo esta topología, el perímetro queda determinado por la longitud de la frontera de la región digital.

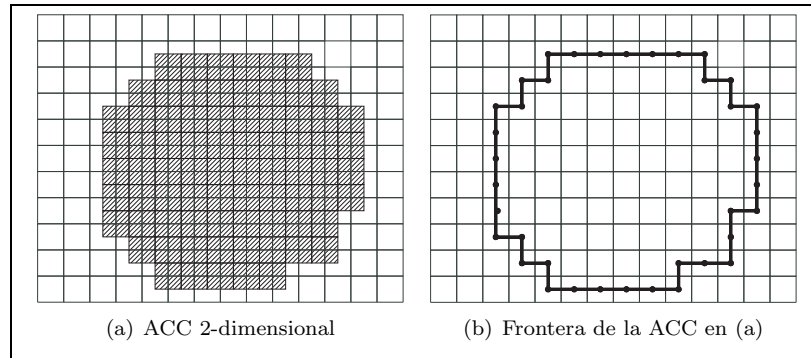


Figura 3.6: Región digital  $S$  y su frontera  $Fr(S)$

**Definición 3.5** : Sea  $S$  una ACC- $R$ , entonces,  $S \subset ACC - k T$ . La frontera de  $S$ ,  $Fr(S)$ , es el conjunto de elementos (células)  $e \in S$ , tal que cada  $SON(e)$  contiene tanto elementos de  $S$  como elementos de su complemento  $T-S$ , Figura 3.6(b).

La definición 3.5 ya nos permite incursionar en los aspectos geométricos de una región digital. Uno de los aspectos geométricos básicos de una región digital es parametrizar su contorno. El contorno ha sido una característica básica en la derivación de descriptores cuantitativos de una región digital [55, 65, 58, 82]. Bajo el marco de la topología digital de Kovalevsky, el contorno de la región esta compuesta por las células que pertenezcan a la frontera de la región digital, definición 3.5. El contorno entonces queda determinado por la suma de las longitudes de las *células-1* en la frontera y a su vez, el valor de la suma determina la longitud total del perímetro de la región digital; dado que los elementos de dimensión cero o *células-0*, representados en la Figura 3.6(b) como pequeños discos, carecen de longitud y no aportan valor alguno al perímetro. En el caso de regiones tridimensionales o ACC 3-dimensionales, de acuerdo a la topología digital, la frontera de la región digital define la superficie o área envolvente [42, 9]. La frontera en una ACC 3-dimensional es censada a través de la sumatoria de las áreas de las células-2.

La implementación para el cálculo computacional de ambos parámetros, perímetro y área envolvente, pueden ser determinados usando los algoritmos ya establecidos y utilizados para una representación matricial de la imagen digital. Al usar la representación matricial se evita una implementación especial para el modelo de Kovalevsky [42, 43, 45].

### 3.3.1. Área y volumen de una ACC 2- y 3-dimensional

Un aspecto geométrico no menos importante que el perímetro y el área envolvente es el área y el volumen de una región digital. Sin embargo, el cálculo de estas propiedades muestra un alto grado de consenso en el área de la geometría



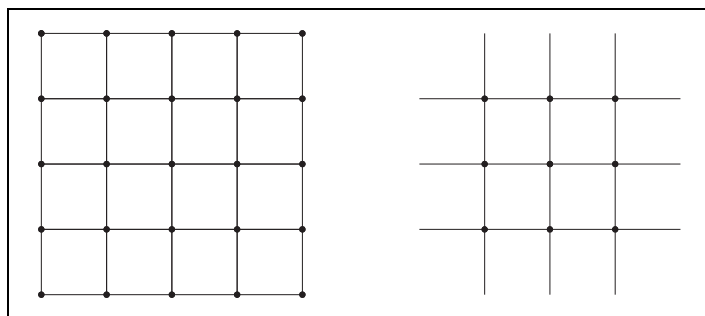


Figura 3.7: *ACC 2-dimensional* y su perímetro de contacto

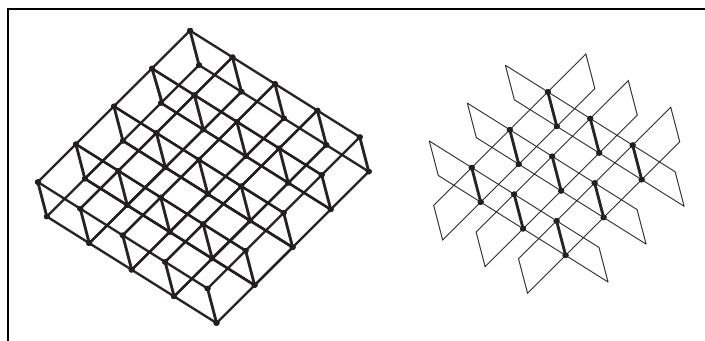


Figura 3.8: *ACC 3-dimensional* y su área de contacto

digital. En la determinación de estas dos características basta con contabilizar el número de células-2 y células-3 que pertenecen a la región digital. Bajo el marco de este trabajo, fundamental resulta la obtención del valor numérico tanto del perímetro y del área envolvente como del área y del volumen de una *ACC k-dimensional*.

### 3.4. Perímetro y área de contacto de una región digital

El perímetro y área de contacto son características que presentan las regiones bajo el marco de la topología y geometría digital. Estos rasgos intrínsecos a una región digital fueron propuestos por Bribiesca [9, 11]. El perímetro o área de contacto de una *ACC* se engloban en la siguiente definición:

**Definición 3.6** *Sea  $S$  una  $ACC-R$   $k$ -dimensional entonces el perímetro de contacto de  $S$  se define como:  $P_C(S) = S - (Fr(S) + S(a_k))$ , donde  $S(a_k)$  el conjunto de todas las células  $k$ -dimensionales*

En la Figura 3.7 ilustra una *ACC 2-dimensional* y en la Figura 3.8 una *ACC 3-dimensional* junto a su perímetro y área de contacto respectivo. El perímetro y área de contacto son las sumas de los recorridos interiores en una región digital  $S$  sin incluir elementos de su frontera  $Fr(S)$ . Bribiesca asocia estas características con la compacidad de una región digital; propiedad que hace referencia al grado de dispersión o compactación que muestran los elementos de la región. La topología digital nos permite censar cuantitativamente el perímetro o área de contacto. En consecuencia, es posible obtener una medida cuantitativa de la compacidad de una región digital.

El valor cuantitativo del perímetro y área de contacto quedan determinados por las ecuaciones:

$$P_C(S) = \frac{4n - P}{2} \quad (3.1)$$

y

$$A_C(S) = \frac{6n - A_E}{2}. \quad (3.2)$$

### 3.5. Relaciones área-área y perímetro-perímetro

Como se ha relatado en el capítulo 2, en la medición de la compacidad han surgido diferentes propuestas. Para los fines del presente escrito y su propuesta sobre la medición cuantitativa de la compacidad en regiones digitales, la relación perímetro-perímetro de Peura e Iivarién y la relación área-área de Bribiesca serán aspectos de atención que aportarán conceptos fundamentales.

El primer aspecto a resaltar sobre las propuestas de Bribiesca, sección 2.3.1 y Peura e Iivarién, sección 2.2.3, es que ambas medidas utilizan una región de referencia para obtener un valor cuantitativo de compacidad. Bribiesca, por su parte, compara la región digital bajo análisis con un cuadrado, mientras que Peura e Iivarién utilizan al círculo como región de referencia.

Al utilizar el círculo como región de referencia, Peura e Iivarién se ven forzados a extraer propiedades geométricas de espacios diferentes; el círculo, forma geométrica bien definida en el espacio Euclidiano, ha mostrado ser todo un reto en su definición para la geometría digital [37, 39]. Debido a que el círculo no puede ser representado de forma única en una imagen digital, Peura e Iivarién utilizan el área obtenida de una región digital  $S$  para calcular el perímetro de un círculo en el plano Euclidiano y que se empleará en su relación perímetro-perímetro para medir la compacidad. En la sección 2.4.1 se mostró la inconveniencia de utilizar este enfoque.

A diferencia de Peura e Iivarién, Bribiesca hace uso de los perímetros de contacto de dos regiones digitales, Figura 3.9. El utilizar el perímetro de contacto hace que la comparación se de en condiciones semejantes, bajo el marco geométrico digital. No obstante que la relación de Bribiesca, la Compacidad

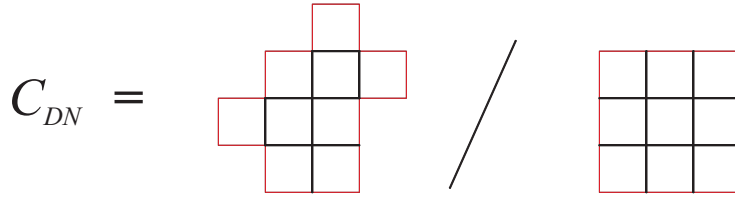


Figura 3.9: Ilustración gráfica del la medida de compacidad  $C_{DN}$ ; perímetro de contacto de la región en razón del perímetro de la región cuadrada, ambas con igual cardinalidad de células 2-dimensional.

Discreta Normalizada, hace uso de valores lineales, la medida puede ser conceptualizada como una relación de áreas o volumen según sea el caso. Lo anterior se fundamenta en que el perímetro de contacto de una región digital es la suma de las *células-(k-1)* de la *ACC-R k-dimensional* que siempre están bordeando a una *célula-k*.

La formulación para el cálculo de la región cuadrada que sirve como región de referencia puede producir una inconsistencia teórica. Esta inconsistencia ocurre debido al uso del radical en 2.23. Si  $n = j^2$ , donde  $j \in \mathbb{Z}$  entonces la región de referencia puede ser representada como una *ACC-2*; de lo contrario, tal región digital solo existiría en el espacio continuo donde el perímetro de contacto carece de significado. Sin embargo, el uso práctico de la  $C_{DN}$  muestra la consistencia de la medida. Bordeando la inconsistencia mencionada, la  $C_{DN}$  se muestra como la medida de compacidad entre todas medidas conocidas que más se apega a las características topológicas y geométricas del espacio digital.

Los aspectos más importantes que las propuestas presentadas en este trabajo toman de los dos enfoques expuestos anteriormente son:

- Peura e Iivarién hacen uso de dos perímetros, los cuales son comparados mediante una relación para obtener un grado de compacidad. Al hacer uso de los perímetros, la medida compara cuantitativamente los contornos de dos distintas regiones. El contorno se ha mostrado como una de las propiedades de las regiones que más información contiene [78, 58, 55, 82]. Por lo tanto, al utilizar contornos, usando los perímetros de regiones digitales, se muestra como el enfoque más adecuado para generar medidas de compacidad basadas en la similitud entre dos formas.
- Por otra parte, el perímetro de contacto propuesto por Bribiesca como una propiedad de las regiones digitales nos proporciona de manera inmediata la percepción de poder medir la configuración en que están dispuestas las *células k-dimensionales* de la región digital. Además, Bribiesca hace uso de una región digital cuadrada y no al círculo como región de referencia dentro del espacio digital. Esto produce una mejor correlación de la medida de compacidad con la topología y geometría digital. Estos aspectos marcan pautas significativas en el diseño de las medidas de compacidad propuestas en la presente obra.

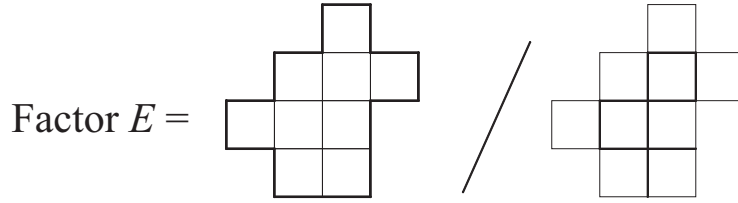


Figura 3.10: Factor  $E$  ilustrado en forma gráfica; perímetro de la región entre su perímetro de contacto.

### 3.6. Factor $E$

El factor  $E$  es la primera propuesta hecha en este trabajo para asociar el grado de compacidad de una región digital con un valor cuantitativo y que cumpla con los siguientes condiciones:

- Que la medida sea adimensional.
- Sea simple de calcular.
- Posea un valor límite y este valor se correlacione con la forma más compacta.
- Tener un grado de discriminación entre una familia o clase de regiones similares.

En el diseño del factor  $E$ , así como en las demás propuestas presentes en este escrito, se han tomado en cuenta cada una de los anteriores aspectos. Para que la medida sea adimensional se propone generar una relación entre propiedades que manejen el mismo tipo de unidades dimensionales.

El contorno de una región por su alto contenido de información es utilizado en el factor  $E$ . El perímetro de una región digital es la forma más básica de obtener una descripción cuantitativa del contorno y su magnitud se expresa en unidades de longitud. El otro descriptor básico de una región digital que maneja las mismas unidades es el perímetro de contacto. El factor  $E$  relaciona ambas propiedades básicas de una región digital.

**Definición 3.7** : Sea  $S$  una ACC-R  $k$ -dimensional entonces el factor  $E$  de  $S$  es la razón entre las cardinalidades de  $P_C(S)$  (perímetro de contacto) y el conjunto de células- $(k-1)$  en la frontera de  $S$ ,  $B(S)$ .

$$\text{factor}E(S) = \frac{|B(S)|}{|P_C(S)|}. \quad (3.3)$$

El valor del perímetro de contacto se determina por 2.20 y el valor del perímetro se determina como la suma de las magnitudes de todas las células- $(k-1)$  de la frontera de  $S$ . Para regiones planas el factor  $E$  queda determinado por:

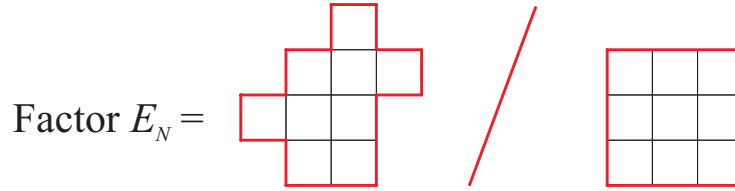


Figura 3.11: Concepto gráfico del factor E normalizado; relación entre dos contornos y usando el cuadrado como región digital de referencia.

$$factorE(S) = \frac{|B(S)|}{|P_C(S)|} = \frac{P}{\frac{4n-P}{2}} = \frac{2P}{4n-P}. \quad (3.4)$$

Donde  $n$  es definido como el número de *células-2* presente en la región digital y  $P$  es el valor cuantitativo de  $Fr(S)$  que representa al perímetro de la región digital.

En regiones digitales tridimensionales, el factor  $E$  se determina mediante la relación:

$$factorE(S) = \frac{|B(S)|}{|P_C(S)|} = \frac{A_E}{\frac{6n-A_E}{2}} = \frac{2A_E}{6n-A_E}. \quad (3.5)$$

Nuevamente,  $n$  se define como el número de *células-3* y  $A_E$  es el área envolvente o cardinalidad del conjunto  $B(S)$ .

Para regiones digitales donde exista solamente conectividad mediante *células-0*, el perímetro de contacto carece de significado y por lo tanto, el factor  $E$ .

El factor  $E$  esta acotado por los valores máximos y mínimos del perímetro de contacto [9, 11]. Es entonces que el valor máximo que puede producir el factor  $E$  es para la región más dispersa y su valor mínimo para la región más compacta, el cuadrado.

### 3.7. Factor E normalizado

Aunque el factor  $E$  cumple con los requerimientos de ser una medida adimensional, sencilla, simple de calcular y relacionar un valor límite con la región digital más compacta, depende del número de *células-k* en la determinación del valor. Lo anterior nos da pauta para entender que regiones similares en su conformación global o forma, pero representadas con diferente número de *células-k*, producirán valores diferentes de compacidad al utilizar el factor  $E$ .

Clasificar y reconocer regiones digitales, similares en su forma pero a diferente resolución, continua siendo tema de múltiples investigaciones. Similarmente, crear una medida robusta a los cambios de resolución ha llevado a diferentes propuestas. La medición de la compacidad ha mostrado ser muy sensible a los efectos producidos por los cambios de resolución. Dos tendencias se marcan como representativas en el caso de la medición de la compacidad; la primera

busca normalizar la resolución de la imagen digital. Esta primera opción es muy práctica en ambientes controlados y muy útil en términos experimentales. Sin embargo, en condiciones cotidianas, donde se presentan imágenes digitales a diferentes resoluciones puede ser prohibitivo utilizar este enfoque. El segundo enfoque es hacer una comparación entre la región a prueba y una región de referencia que cumpla con dos condiciones principalmente: que pueda ser generada a partir de los datos existentes en la imagen digital y que no exista ambigüedad en su definición y construcción. Por ejemplo, si decidimos tomar al círculo como región de referencia, que no puede ser definido de manera única, conlleva a una inestabilidad en la medida de compacidad.

Bribiesca mostró que utilizar una región digital de configuración cuadrada como región de comparación daba una mayor estabilidad en la medición de la compacidad en regiones digitales. Dentro de la propuesta de Bribiesca se puede generar una región cuadrada a partir de los datos contenidos en la región digital. Específicamente, la región cuadrada se construye a partir del número de *células-k* de la *ACC* bajo estudio. Con la propuesta de Bribiesca se integran dos puntos básicos en la consecución de una medida de compacidad robusta: la normalización de la resolución y la definición de la región de comparación. A la normalización de la resolución nos referimos a la comparación que se realiza entre regiones usando un número de *células-k* similar. Por otra parte, se establece al cuadrado como región de referencia [9, 11, 5].

A pesar de que la compacidad discreta normalizada  $C_{DN}$  utiliza al cuadrado como región de referencia, el número de elementos de *células-k* conforma el factor más predominante en la determinación del valor de compacidad de la región digital. Como ya se ha mencionado, la  $C_{DN}$  se convierte en una relación indirecta entre las áreas de las regiones. La discriminación que se produce entre familias de formas puede llegar a ser muy sutil y por lo tanto, la  $C_{DN}$  puede ser sensible a cruzamientos en los valores de compacidad entre familias de formas disimilares. Esto es: dos familias de formas a resoluciones semejantes que tengan valores de compacidad diferentes, o sea que una de ellas sea más compacta o más dispersa que la otra, si se realiza una reducción del número de celdas en la familia de formas dispersas conlleva una compactación de la región digital y produzca valores de compacidad cercanos a la familia de formas más compacta. Lo anterior trae como consecuencia que se produzcan falsas aceptaciones en procesos de clasificación, reconocimiento o análisis de forma.

El factor  $E$  normalizado es nombrado así porque se origina a partir de dos propuestas: por una parte, de las contribuciones realizadas en el trabajo de Bribiesca y por otra, en el factor  $E$ , misma que aparece en la sección 3.6 de este capítulo. Al igual que la  $C_{DN}$ , el factor  $E$  normalizado hace uso de la región cuadrada como la región más compacta en el espacio digital [9, 5]; la región cuadrada se produce a partir de los datos existentes en la región digital en análisis [9]. Sin embargo, pasa de ser una relación de áreas a una relación entre los perímetros de los contornos de dos regiones; la región bajo estudio y la región cuadrada generada a partir de los datos contenidos en la región digital en cuestión.

El valor del factor  $E$  normalizado compara dos regiones digitales,  $S$  y  $C$

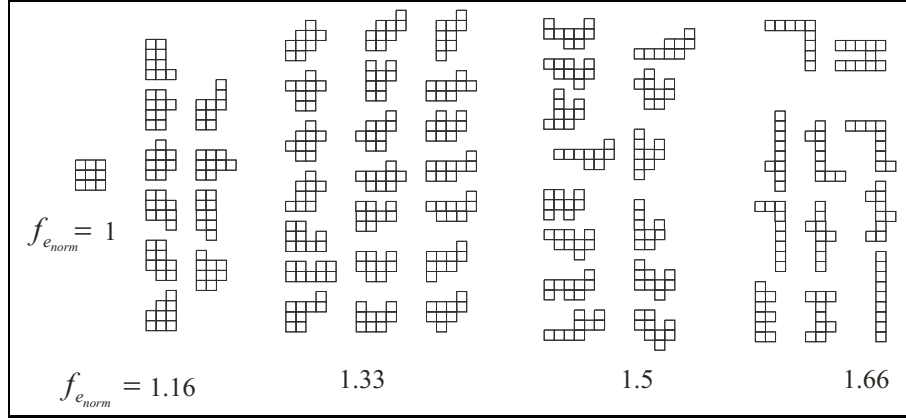


Figura 3.12: familia de regiones digitales configuradas con el mismo número de células-2. las subfamilias están agrupadas acorde con a su valor de factor  $E$  normalizado; la región cuadrada recibe un valor de 1.

mediante la relación entre sus respectivos valores del factor  $E$ . El factor  $E$  normalizado se establece como:

**Definición 3.8** Sea  $S$  una ACC-R  $k$ -dimensional y sea  $C$  una ACC-R  $k$  dimensional generada a partir del número o cardinalidad del conjunto de células- $k$  pertenecientes a  $S$ . El factor  $E$  normalizado es entonces la razón entre el valor del factor  $E$  de  $S$  y el valor del factor  $E$  de  $C$ .

El valor del factor  $E$  normalizado esta dado por:

$$\text{factor}E_N = \frac{\text{factor}E_{\text{shape}}}{\text{factor}E_{\text{square}}}; \quad (3.6)$$

desarrollando 3.6 para regiones digitales en el plano se tiene:

$$\text{factor}E_{\text{shape}} = \frac{P}{P_c} = \frac{P}{\frac{4n-P}{2}} = \frac{2P}{4n-P}. \quad (3.7)$$

Por otra parte,

$$\text{factor}E_{\text{square}} = \frac{P_{\text{square}}}{\frac{4n-P_{\text{square}}}{2}} = \frac{2(4\sqrt{n})}{4n-4\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}; \quad (3.8)$$

entonces,

$$\text{factor}E_N = \frac{\text{factor}E_{\text{shape}}}{\text{factor}E_{\text{square}}} = \frac{2P_{\text{shape}}(n-\sqrt{n})}{2\sqrt{n}(4n-P_{\text{shape}})} = \frac{nP_{\text{shape}}-\sqrt{n}P_{\text{shape}}}{n4\sqrt{n}-P\sqrt{n}}; \quad (3.9)$$

dividiendo entre  $n$  se obtiene:

$$factorE_N = \frac{P_{shape} - \frac{P_{shape}\sqrt{n}}{n}}{4\sqrt{n} - \frac{P_{shape}\sqrt{n}}{n}}. \quad (3.10)$$

Del resultado obtenido al desarrollar las expresiones del factor  $E$  *normalizado* resalta lo siguiente: la comparación entre la región digital  $S$  y la región digital  $C$  mediante una relación entre los valores de sus factores  $E$  respectivos, resulta en una comparación entre los perímetros de los contornos de tales regiones. Concluyendo, el factor  $E$  *normalizado* es una medida de compacidad perímetro-perímetro. Para el caso de regiones digitales tridimensionales el factor  $E$  *normalizado* está dado por:

$$factorE_N = \frac{A_{E_{shape}} - \frac{A_{E_{shape}}A_{E_{cube}}}{6n}}{A_{E_{cube}} - \frac{A_{E_{shape}}A_{E_{cube}}}{6n}}. \quad (3.11)$$

Donde  $A_{E_{shape}}$  y  $A_{E_{cube}}$  son las áreas envolventes de la región tridimensional y del cubo a comparar respectivamente. El valor de las áreas envolventes está determinado por la cardinalidad del conjunto integrado por *células-2* pertenecientes a la frontera de una región digital tridimensional o *ACC-3*.

El factor  $E$  *normalizado* en regiones digitales tridimensionales es entonces una relación entre los valores de las superficies envolventes de ambas. El valor obtenido se correlaciona con el grado de compacidad o dispersión de la región digital.

### 3.8. Factor E normalizado y el códigos de cadena VCC

Los códigos de cadenas son representaciones del borde de una región digital. La representación del borde se realiza mediante una codificación numérica. En esta codificación, diferentes propiedades del borde son asociadas con algún valor numérico específico.

Existen diferentes propuestas para la representación del contorno de una región digital mediante un código numérico [72, 46, 47]. No obstante, el código de cadena más conocido es el propuesto por Freeman en 1961 [2, 25]. Este código utiliza el modelo de puntos reticulares propuesto por Kong y Rosenfeld [41, 40], donde cada centro de la celda que compone a la región digital es unida por segmentos virtuales de líneas.

Al usar el modelo de puntos reticulares, el código generado describe la secuencia del conjunto de celdas o pixels que conforman el borde de la región digital. La descripción se realiza mediante la codificación de la dirección que toma cada arista virtual en el borde. Sin embargo, censar el borde de una región digital mediante el modelo de puntos reticulares presenta inconveniencias como ya se ha discutido en secciones anteriores.



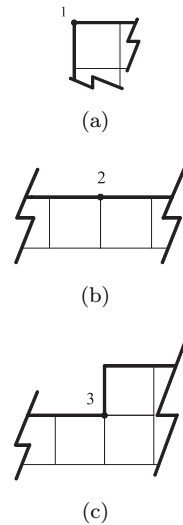


Figura 3.13: Valores del código VCC acorde con el número de vértices que confluyen en una misma posición.

En 1999 se propone otro código de cadenas para representar el contorno de una región digital nombrado *VCC (vertex chain code)* [10]. Esta propuesta describe el contorno de la región utilizando los vértices de las celdas que están en la frontera de la región digital. El código *VCC* se ajusta de manera natural al modelo reticular de celdas [37, 42] y a la topología digital de Kovalevsky [42, 45].

En esta sección presentamos primero la propuesta original del *VCC* y posteriormente mostraremos como se ajusta a la topología digital de Kovalevsky. Una vez establecidos los puntos anteriores se procede a implementar la versión del factor *E* normalizado utilizando el *VCC*. Finalmente, se concluye esta sección con la propuesta de un conjunto de descriptores para regiones digitales extraídos del *VCC* y que junto con el factor *E* normalizado pueden discriminar regiones con grados de compacidad iguales.

### 3.8.1. VCC

En origen, el *VCC* es un código de cadenas para los contornos cerrados en regiones digitales cuatro conectadas bajo el modelo de Rosenfeld. Los vértices que se emplean en la codificación del *VCC* están sobre el contorno de la región y toman su valor acorde al número de celdas en la frontera de la región. Bribiesca establece las siguientes definiciones:

**Definición 3.9** *Un elemento de la cadena  $a_i$  indica el número de celdas que comparte un vértice, las cuales están en contacto con el contorno de la forma en esa posición del elemento.*

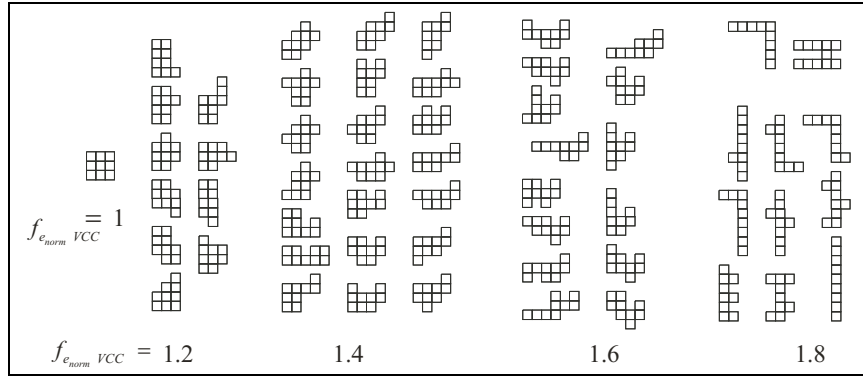


Figura 3.14: Clasificación de las regiones digitales de la Figura 3.12 con VCC.

**Definición 3.10** Una cadena  $A$  es una secuencia de elementos y es representada por:  $A = a_1, a_2, \dots, a_n = \{a_i : 1 \leq i \leq n\}$ .

**Definición 3.11** La longitud  $L$  de una cadena es la suma de las longitudes de sus elementos.  $L$  será expresada como:  $L=nl$ ; donde  $l$  es la longitud del segmento entre cada vertice y  $n$  el número de vértices.

A si mismo,  $L$  será igual al valor cuantitativo del perímetro de la región digital a la cual se le aplica el código VCC.

El VCC tiene de origen las propiedades de ser independiente al punto de inicio, a la rotación y a la transformaciones espejo [10]. Los valores que puede tomar un elemento del VCC son 3 y se ilustran en la Figura 3.13.

### El VCC bajo la topología de Kovalevsky

El VCC se ajusta de manera más natural a la topología propuesta por Kovalevsky que a la propuesta por Kong y Rosenfeld. Bajo el enfoque topológico de Kovalevsky se puede redefinir el código de cadena VCC.

**Definición 3.12** Sea  $S$  una sub-ACC-2 dimensional. Sea el VCC una sucesión de elementos numéricos concatenados, donde cada  $a(i)$  es la representación codificada de las células-0 de  $Fr(S)$ . El valor asignado a cada elemento  $a_i$  del VCC representa el número de células-2  $\in S$  y que pertenecen a la vecindad de de la célula-0 en cuestión.

### 3.8.2. El factor E normalizado y el VCC

El factor  $E$  es un descriptor de regiones digitales que utiliza una relación de contornos para obtener su valor cuantitativo. Esta característica del factor  $E$  nos permite poder implementarlo bajo la representación del VCC, que es un representación de contorno.

Dentro de la Ecuación 3.10 el factor que involucra al número de *células-2 dimensional* de la región digital y que se resta de los contornos de cada región digital sólo tiene influencia en muy bajas resoluciones. Si la región digital involucrara decenas de *células-2 dimensional* entonces podemos prescindir de este factor sin alterar significativamente el valor de 3.10. Al retirar el factor es posible entonces tener una relación de contornos pura entre dos regiones digitales. A su vez, el factor  $E$  puede generar valores de compacidad basándose únicamente en los contornos de la región digital. Al poder relacionar dos contornos se presenta la alternativa de utilizar una representación como el  $VCC$ . El factor  $E$  para una región digital  $S$  configurada como una  $ACC - 2dimensional$  en términos de código de cadena  $VCC$  se establece como:

$$factor E_{N-VCC} = \frac{\sum a_{i_{shape}}}{\sum a_{i_{square}}}. \quad (3.12)$$

Donde  $a_{i_{shape}}$  es el valor numérico generado por los códigos del contorno de la región digital bajo análisis  $S$  y  $a_{i_{square}}$  es el valor numérico del código generado por la región cuadrada que puede ser generada con el mismo número de *células-2* de  $S$ .

### 3.8.3. Índices de forma y el factor $E_N-VCC$

Los índices de forma se establecen a partir del conjunto de valores numéricos del  $VCC$  que se genera al codificar el contorno de una región digital. la cardinalidad del conjunto de elementos  $a_i$  con valor tres se le ha nombrado índice de concavidad,  $C_X$ ; con valor 2, índice de rectinialidad,  $R_C$  y con valor 1, índice de convexidad,  $C_V$ . Los índices de forma funcionan como sub-filtros para las regiones digitales con valores de compacidad iguales producidos por el factor  $E$ . Estos índices tienen la capacidad de generar sub-familias de una familia de formas con valores de compacidad iguales.

El la Figura 3.14 se presenta un ejemplo del funcionamiento de los índices de forma. En esta Figura 3.14 se muestra al conjunto de todas las regiones digitales posibles conformadas con nueve celdas y que anteriormente se ilustraron en la Figura 3.12 En este ejemplo el factor  $E_N-VCC$  separa en el mismo orden el conjunto de regiones digitales que el factor  $E$  normalizado y donde el valor máximo de dispersión o no- compacidad lo poseen las regiones digitales con un valor de factor  $E$  de 1.2.

Una vez separadas las familias con base a los valores producidos por el factor  $E_N-VCC$  es posible hacer una subclasificación utilizando los índices de forma. Se han tomado las regiones digitales con valor de 1.8, que se muestran en la Figura 3.12, para ilustrar un ejemplo de aplicación de los índices de forma. En la Figura 3.15 se han colocado el conjunto de regiones digitales con valor de compacidad de 1.8 junto a sus respectivos valores de índice de forma. Al usar los índices de forma junto al factor  $E_N-VCC$  se produce una discriminación del conjunto de regiones más precisa.

La unión entre el factor  $E$  normalizado y el  $VCC$  no brindan un enfoque distinto para la medición de la compacidad o dispersión de las formas. Una tan-

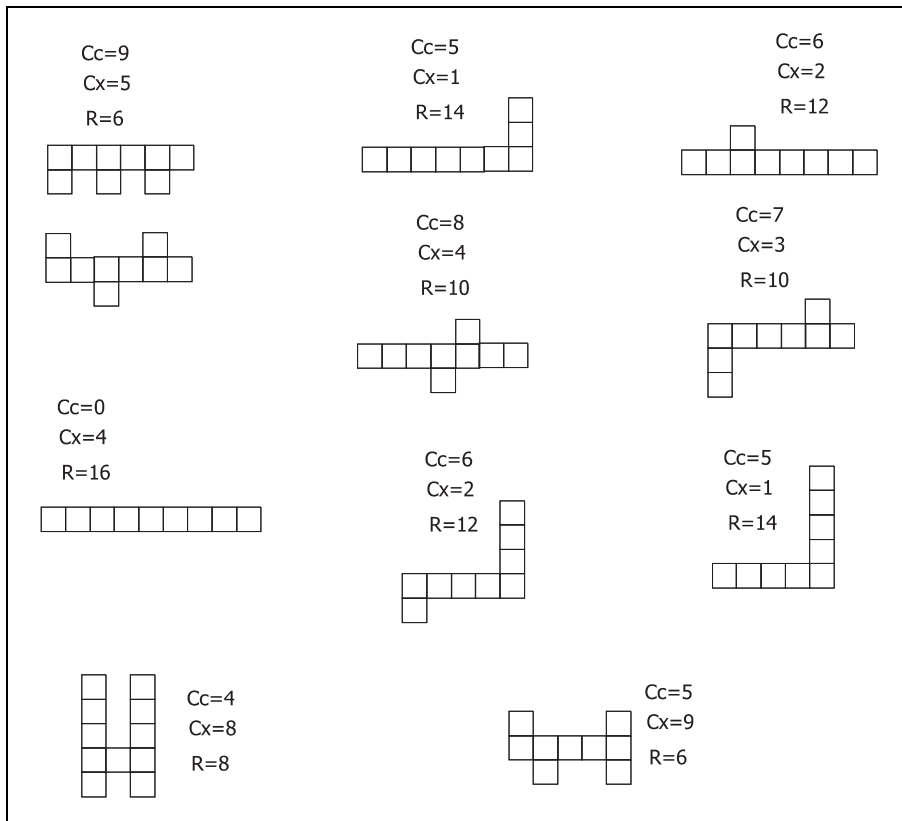


Figura 3.15: Sub-clasificación, acorde con los índices de forma, de la familia de regiones digitales mostradas en la Figura 3.14 con valor  $=1.8$  en el factor  $E$  normalizado (VCC).

gible ventaja radica en que simultaneamente al ir obteniendo la codificación del contorno de la región digital se puede ir generando los valores que determinarán su compacidad. Además, la utilización de este esquema nos brinda la capacidad de generar al mismo tiempo los índices de forma que nos ayudarán a discriminar mejor las regiones digitales bajo estudio.

## Capítulo 4

# Resultados experimentales

En este capítulo se presenta un conjunto de pruebas con el objetivo de mostrar el comportamiento de los descriptores, introducidos en el capítulo 2, el factor  $E$ ,  $E$  normalizado; Sin embargo la implementación bajo el código  $VCC$  del factor  $E$  y su posible aplicación en procesos discriminantes se extiende más allá del alcance de este trabajo y quedará postergada para trabajos futuros.

Los descriptores  $E$  y  $E$  normalizado se prueban frente a una diversidad de agrupaciones integradas por diferentes regiones digitales. Bajo un conjunto de pruebas se mostrará el ámbito específico en que cada descriptor puede ser usado con mayor eficacia. Los descriptores y sus diferentes implementaciones serán aplicados sobre los diferentes conjuntos de regiones binarias digitales. Las regiones digitales muestran características claramente visibles: dispersión o compactación de los elementos que integran la región digital, similitud en la forma y variaciones en el contorno de la región digital; tanto en dos como en tres dimensiones.

A lo largo de este capítulo se tendrán las siguientes consideraciones; la primera: una región digital se considera compacta si presenta la ausencia de huecos y protuberancias o apéndices en su forma. Conforme los huecos, protuberancias o la combinación de ambas aparezcan, la forma de una la región digital será considerada más dispersa; la segunda: regiones digitales con formas similares pero con diferente número de *células 2-dimensional* serán consideradas regiones distintas. Lo mismo ocurrirá sí las regiones digitales se muestran como versiones rotadas de otra región digital.

Es así que en el presente capítulo, la tarea principal es someter diversos conjuntos de regiones digitales con una variedad de configuraciones morfológicas. El primer conjunto sometido a prueba mantiene valores muy cercanos en el número de *células 2-dimensional* en las regiones que lo integran. Posteriormente, los descriptores se probarán nuevamente sobre el primer conjunto pero con algunos elementos en los que se ha cambiado la cardinalidad del conjunto de *células 2-dimensional*. Finalmente un tercer grupo de regiones digitales con diferente complejidad, acorde con el criterio de complejidad propuesto por Rosenfeld [70, 71], son sometidas a prueba bajo ambos descriptores.

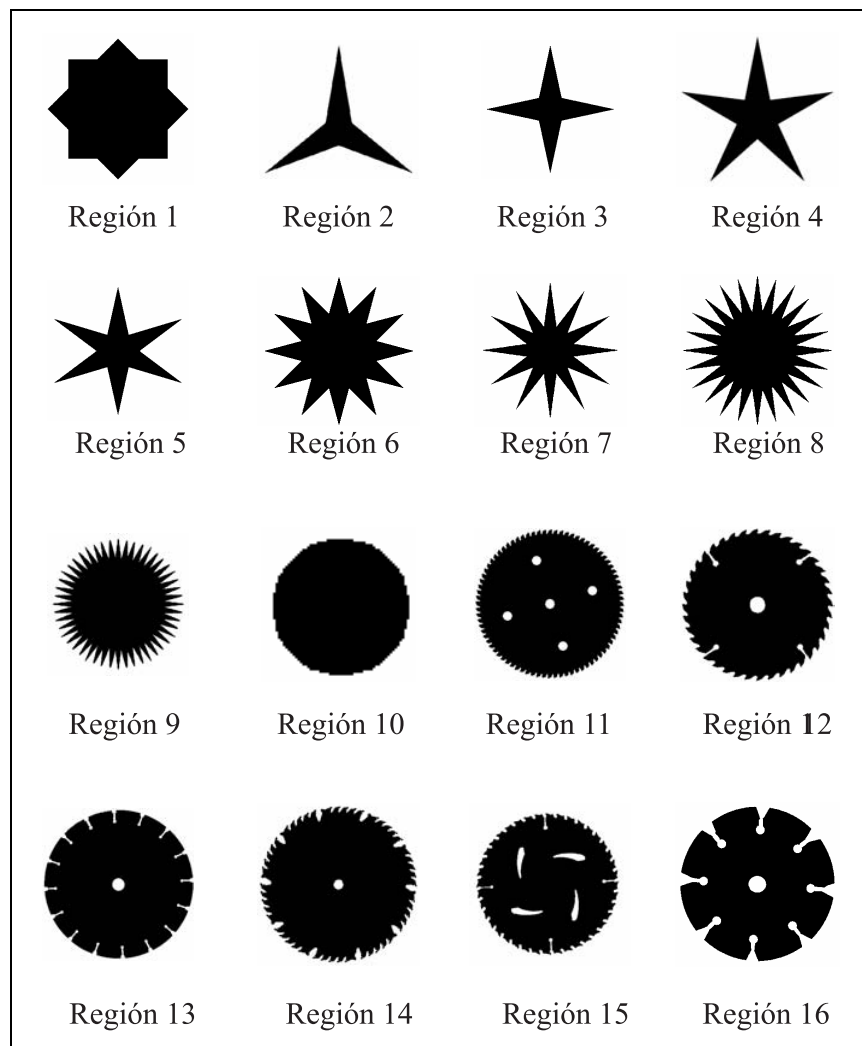


Figura 4.1: Conjunto de regiones digitales con un número similar de células 2-dimensional, primera parte.

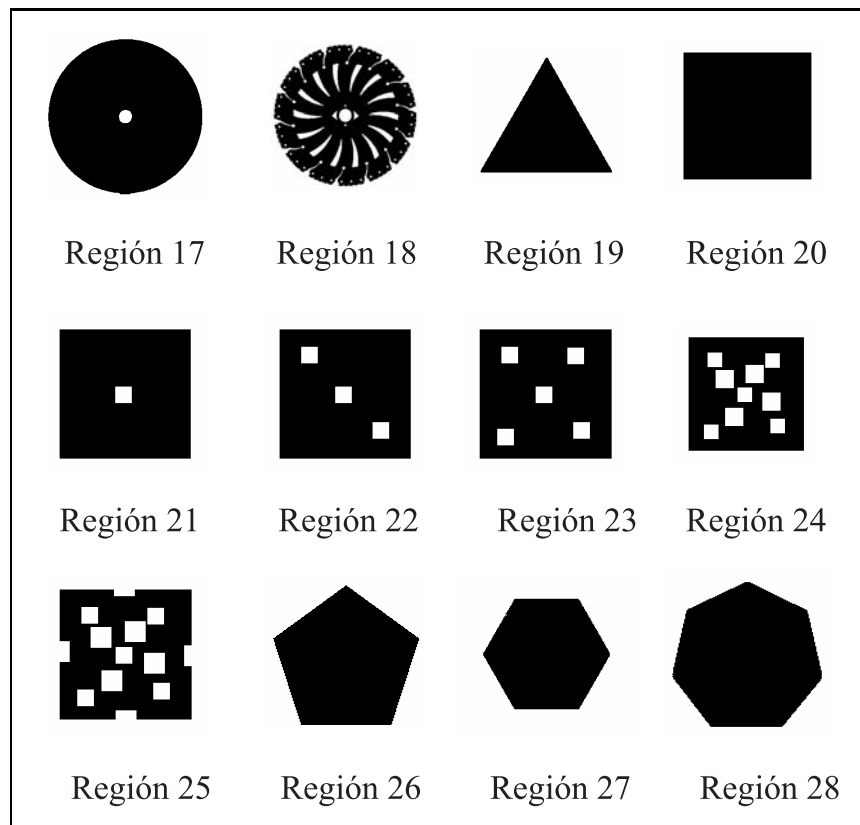


Figura 4.2: Conjunto de regiones digitales con un número similar de células 2-dimensional, segunda parte.

## 4.1. Factor $E$ y su aplicación en regiones digitales bidimensionales

El factor  $E$  no está limitado a regiones simplemente conectadas [37]. Por el contrario, El factor  $E$  puede ser aplicado en regiones digitales con o sin huecos. Las pruebas a las que se someten al factor  $E$  han sido diseñadas para mostrar tres características principalmente: su correlación con la compacidad de regiones, la estrecha relación con el número de componentes de la región digital, especialmente con el conjunto de *células 2-dimensional*, y su sensibilidad al contorno.

### 4.1.1. Medición de la compacidad

En la indagación por mostrar la correlación entre el factor  $E$  con la compacidad o dispersión de regiones digitales se ha diseñado un conjunto de regiones digitales con propiedades particulares. Dentro del conjunto de regiones digitales diseñadas para esta prueba se buscan resaltar rasgos como:

- Número de huecos presentes en la región; formas similares con variación en el número de huecos dentro de ellas.
- Simetría; formas geométricas regulares tales como el cuadrado o el círculo.
- Variación en el contorno de la región digital; regiones digitales con mayor o menor grado de rugosidad en su contorno.
- Alteración del modelo; agregar a las regiones digitales un mayor o menor número de apéndices, huecos y la combinación de ambos.

Mencionado anteriormente, si una región digital incrementa el número de apéndices se considera más dispersa o menos compacta. Lo mismo ocurre con la presencias de los huecos, rugosidad y sinuosidad del contorno los cuales contribuyen a la complejidad de la forma. El conjunto de regiones se ilustra en la figuras 4.1 y 4.2. Los resultados son mostrados en tabla 4.1 y pueden ser observados en las figuras 4.3 y 4.4.

Con los valores del factor  $E$  obtenidos de este primer conjunto de regiones digitales se desprenden las siguientes observaciones: El factor  $E$  penaliza en forma importante la presencia de huecos en la región digital. Las regiones 20, 21, 22, 23, 25, 25, son muestras claras de éste hecho. Conforme el número de huecos se incrementa, el factor  $E$  produce valores mayores, clasificando a la región digital menos compacta. La rugosidad del contorno de la región digital es censada adecuadamente por el factor  $E$ . Por ejemplo, la región digital 17, representación de un disco con un hueco, es censada como la más compacta respecto a las regiones circulares 13, 12, 16 11, 14, 15 y 18; al presentar un contorno más suave. Éstas regiones obtuvieron su valor de factor  $E$  acorde con el grado de rugosidad de su contorno y presencia de huecos. A menor número



Región digital	No. Células-2	Perímetro	Factor E
20	63501	1008	0.00796851
21	62727	1148	0.00919283
10	59753	1100	0.00924712
28	54551	1080	0.00994823
26	52397	1122	0.01076435
1	52249	1196	0.01151107
17	70578	1646	0.01172924
22	60416	1420	0.01182132
27	31129	836	0.01351876
19	40608	1142	0.01416083
23	58105	1692	0.01466662
13	75100	2890	0.01942792
12	71656	2920	0.02058484
16	64664	2796	0.0218557
24	51050	2364	0.02342496
11	73008	3404	0.02358746
14	70263	3630	0.02616952
15	56980	3430	0.03055815
6	35736	2328	0.03311145
3	15746	1176	0.03805333
25	19148	1508	0.04016835
4	20789	1638	0.04018744
5	22158	1850	0.04263557
2	16408	1594	0.04978294
9	51183	5166	0.05177235
8	39358	4516	0.05906511
7	24485	2960	0.06232891
18	54271	7188	0.06849106

Tabla 4.1: Resultados obtenidos por el factor  $E$  sobre el conjunto de regiones de las Figuras 4.1 y 4.2. La ordenación de los resultados corresponde al grado de compacidad obtenido por la región; siendo el más compacto la región cuadrada.

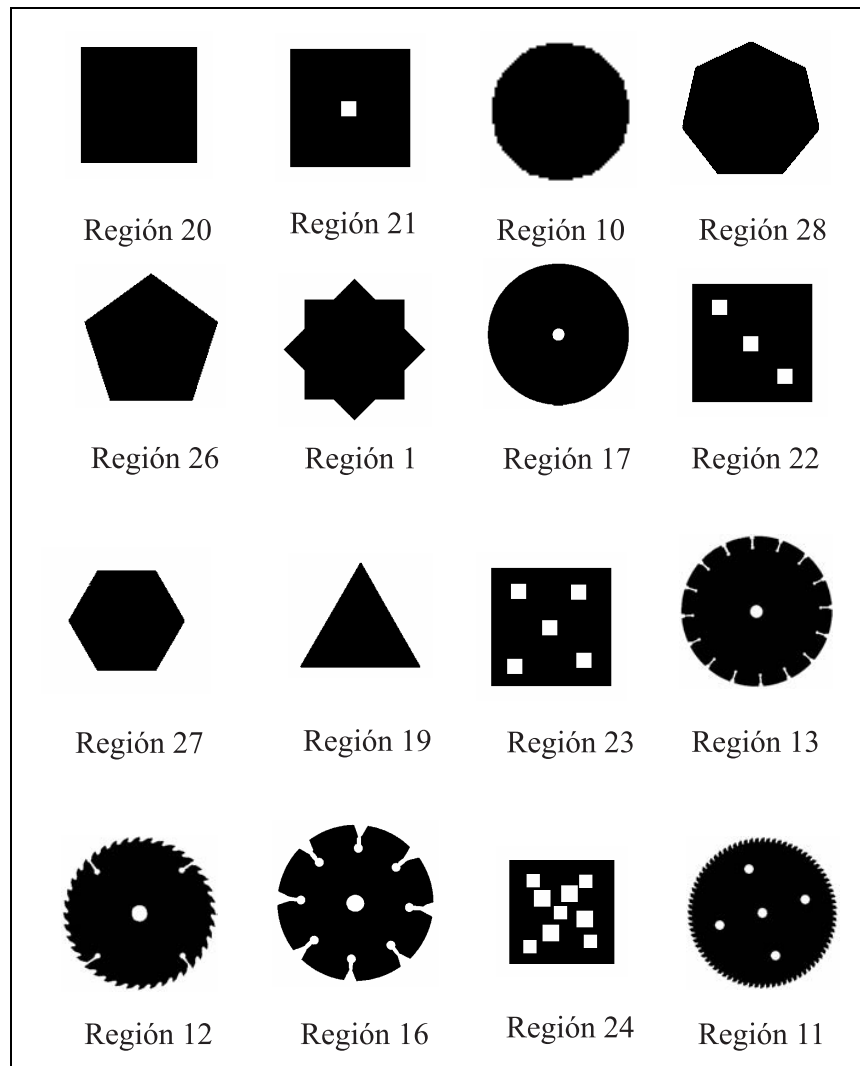


Figura 4.3: Ilustración de los resultados contenidos en la tabla 4.1, primera parte.

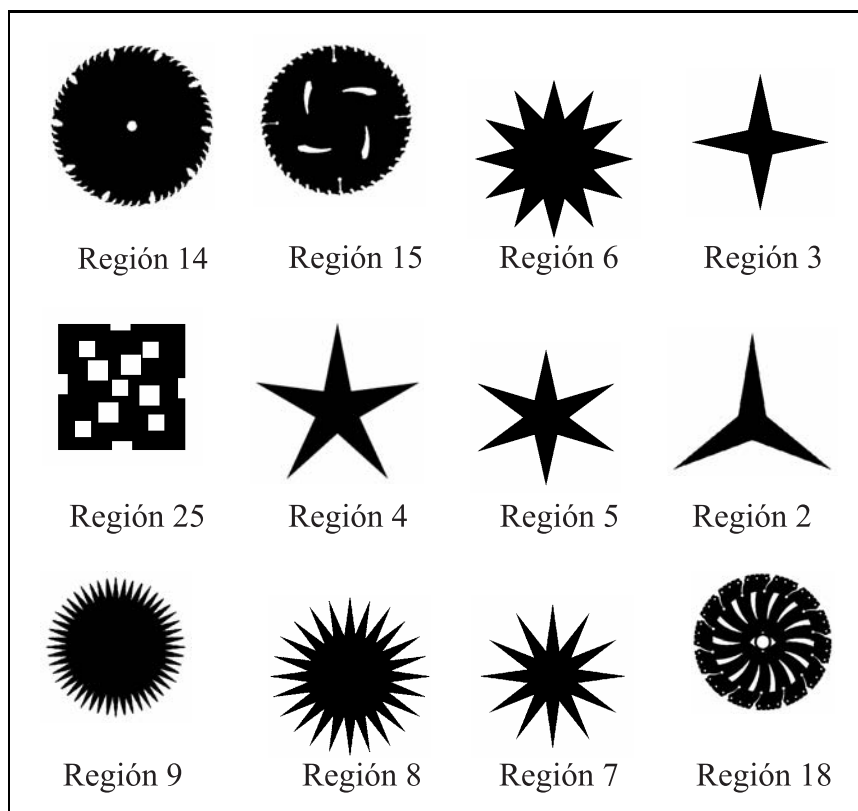


Figura 4.4: Ilustración de los resultados contenidos en la tabla 4.1, segunda parte.

de huecos y menor rugosidad, las regiones digitales fueron valoradas como más compactas.

La presencia de apéndices y la magnitud de éstos en una región digital convierte su forma en una configuración dispersa. Esta situación la evalúa el factor  $E$  adecuadamente. En Figura 4.4 se ilustra como las regiones digitales con presencia de picos fueron consideradas como regiones dispersas.

Sin embargo, la fuerte dependencia del factor  $E$  con el número de componentes que integran la región digital produce sesgos en la lectura de la compacidad. Un ejemplo puede ser observado en la evaluación de la compacidad de la región 27. La región 27 tiene una forma de un hexágono regular y debería ser considerada más compacta que aquellas regiones digitales con la presencia de huecos. No obstante, el factor  $E$  mostró que las regiones 17 y 22 son más compactas que la región 27. Esta prueba hace notar como el número de componentes es relevante en la evaluación de la compacidad de una región digital. Las regiones 17 está compuesta por 70578 y la región 22 con 60416 *células 2-dimensionales*. Mientras la región 27 contiene 31129 elementos, ver tabla 4.1.

#### 4.1.2. Factor E y los cambios de resolución en regiones digitales

En el espacio Euclidiano, una región conserva el máximo grado de similitud con sus versiones escaladas, rotadas, trasladadas y con las regiones que resulten al aplicar la combinación de éstas transformaciones. Este criterio se ha intentado aplicarlo sobre las regiones digitales. Sin embargo, a diferencia de las regiones construidas en el espacio Euclidiano que se componen de un número infinito de elementos, las regiones digitales son configuradas con un número finito y limitado de elementos. Al poseer las regiones digitales estas dos características, la aplicación de transformaciones, como la rotación y escala, modifican la configuración original de la región; lo que ha complicado de manera importante medir la similitud entre regiones.

Al generar regiones digitales, derivadas de un mismo modelo de región en el espacio continuo pero con una diferente resolución espacial, se puede simular el proceso de escalamiento. Por lo tanto, el proceso de escalar las regiones digitales implica agregarle o restarle información [51, 81]. Al variar la información contenida en la región digital generalmente ha dificultado el proceso de medir la similitud, utilizando descriptores cuantitativos, entre regiones digitales [78]. El factor  $E$  al depender fuertemente del *número de celdas 2-dimensionales* no es la excepción.

En la siguiente prueba queda de manifiesto la sensibilidad del factor  $E$  a variaciones importantes en la resolución de las regiones digitales. El mismo conjunto de formas representadas por regiones digitales utilizadas en la sección 4.1.1 e ilustradas en las figuras 4.1 y 4.2 son empleadas un vez más en esta prueba. No obstante en esta ocasión, nueve formas son representadas por regiones digitales compuestas con variaciones importantes en su número de células 2-dimensionales. Tres regiones tienen mayor información (15, 18 y 24) y seis han visto disminuido su número de componentes (1, 3, 9, 10, 20, 27).

Región Digital	No. Células-2	Perímetro	Factor E
21	62727	1148	0.00919283
28	54551	1080	0.00994823
26	52397	1122	0.01076435
17	70578	1646	0.01172924
22	60416	1420	0.01182132
19	40608	1142	0.01416083
24	140875	3964	0.01416888
23	58105	1692	0.01466662
15	144915	5044	0.01755607
10	15672	584	0.01880716
13	75100	2890	0.01942792
12	71656	2920	0.02058484
20	8835	376	0.02150784
16	64664	2796	0.0218557
11	73008	3404	0.02358746
1	10839	544	0.02541344
14	70263	3630	0.02616952
6	35736	2328	0.03311145
25	19148	1508	0.04016835
4	20789	1638	0.04018744
5	22158	1850	0.04263557
27	2898	248	0.04372355
18	127172	11310	0.04547849
2	16408	1594	0.04978294
8	39358	4516	0.05906511
7	24485	2960	0.06232891
3	6251	758	0.06252578
9	4073	1286	0.17139811

Tabla 4.2: Valores obtenidos por el factor E al variar significativamente el número de células-2.

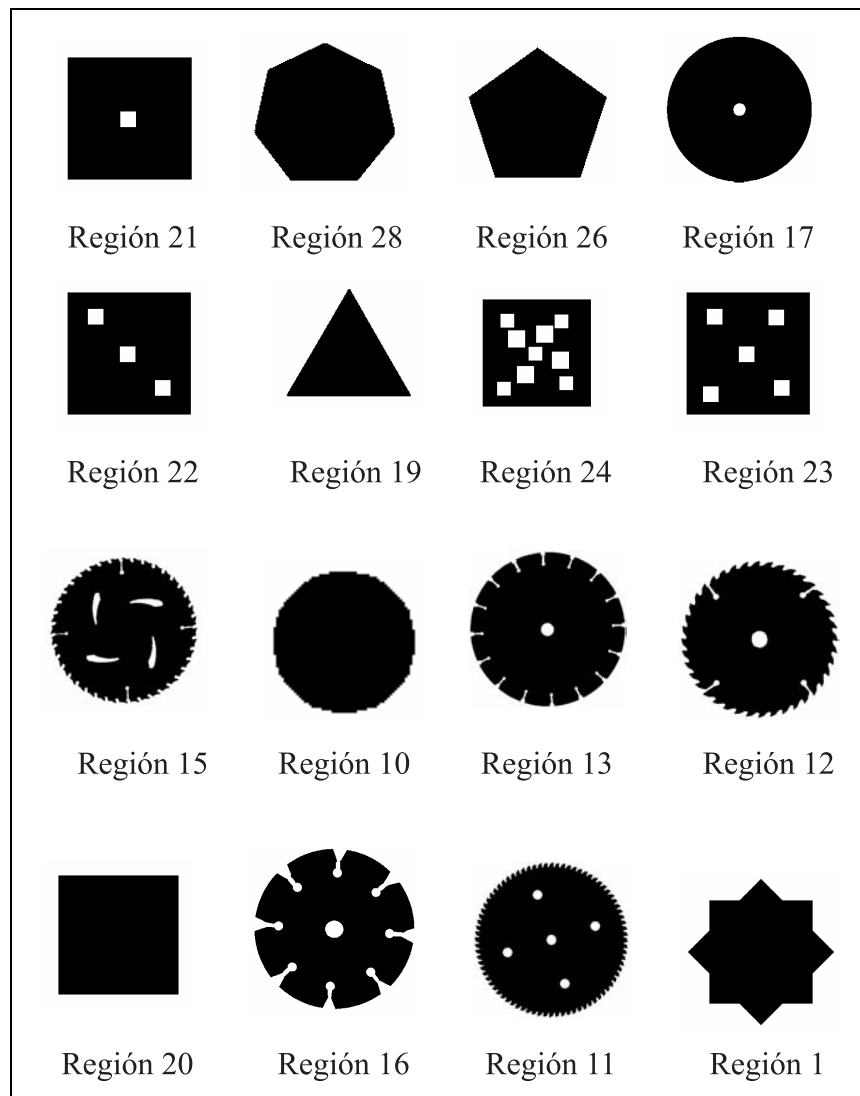


Figura 4.5: Ilustración de los resultados contenidos en la tabla 4.2, primera parte.

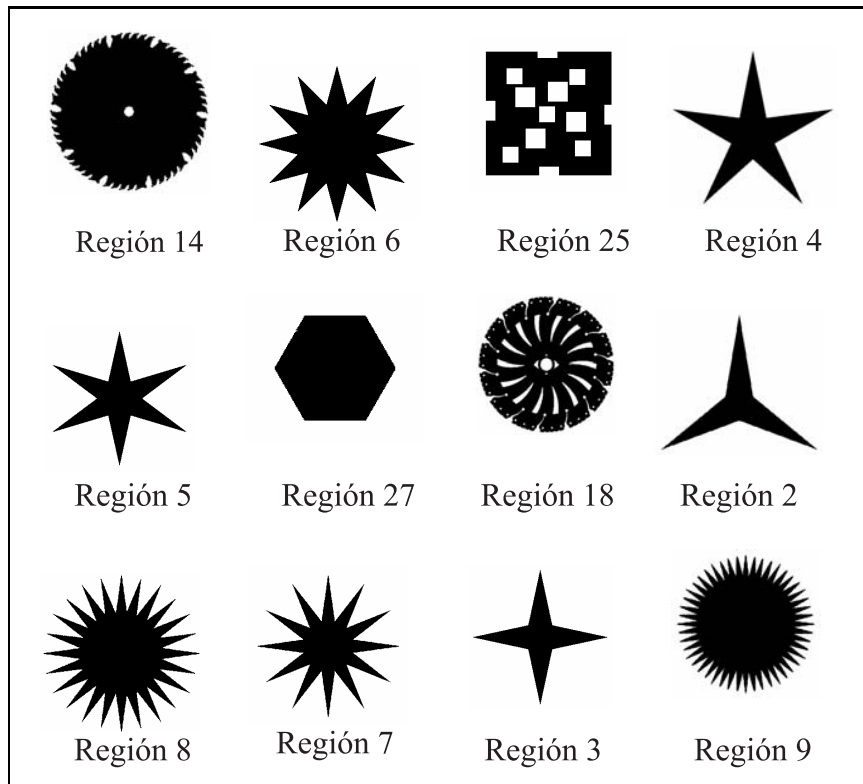


Figura 4.6: Ilustración de los resultados contenidos en la tabla 4.2, segunda parte.

Para este experimento, las regiones digitales que vieron incrementado su número de sus componentes fueron clasificados como regiones más compactas; en la tabla 4.2 este hecho se hace presente al observar los valores obtenidos por el factor  $E$  que son cercanos a cero. Por lo tanto, bajo el marco del factor  $E$ , una región digital es más compacta si el número de *células 2-dimensionales* aumenta. El efecto contrario se produce cuando la resolución de una región digital disminuye. En este mismo experimento, las regiones digitales con disminución de información fueron clasificadas como regiones más dispersas.

La sensibilidad a los cambios en el contorno por parte del factor  $E$  produce variaciones en la evaluación de la compacidad de una región digital cuando es modificada al modificar la resolución de ésta. Es entonces que la utilidad del factor  $E$  no puede ser evidenciada en procesos de clasificación de todo el universo de formas. No obstante, la misma sensibilidad del descriptor puede ser de gran utilidad al medir cambios morfométricos que presente la región digital al modificar el arreglo de las *células 2-dimensionales*. La capacidad de poder evaluar variaciones en el contorno se vuelve de gran utilidad en aplicaciones médicas; donde los cambios morfométricos generalmente dan evidencia de la presencia de alguna patología.

### 4.1.3. Evaluación de la complejidad

La complejidad como la define Rosenfeld [70] esta correlacionada con el grado de suavidad que presente el contorno de una región. Entre más irregularidades (protuberancias, concavidades, etc.) se muestren en el contorno de una región más compleja se vuelve. Con el fin de evaluar el factor  $E$  como descriptor de la complejidad de una región digital, un conjunto de regiones digitales fueron generadas a partir de los contornos de melanomas cancerosos [34], figuras 4.7 y 4.8. Las regiones muestran diferentes grados de complejidad, contenidas en imágenes digitales de 170 x 200 *células 2-dimensionales*. En consecuencia, la resolución de la región digital queda limitada al número de *células 2-dimensionales* contenidas en la imagen digital.

Sujeto al diseño del factor  $E$ , el resultado esperado es que las regiones digitales con mayor suavidad en su contorno sean clasificadas como más compactas. Por el contrario, regiones con salientes y concavidades tenderán a ser clasificadas como más dispersas. Por lo tanto, regiones digitales como la 5 o 29 de las figuras 4.7 y 4.8 deberán clasificarse como compactas y regiones digitales tales como la 21 o 38 se colocarían entre las más dispersas. Un hecho a resaltar es la ubicación de las regiones 19, 21, 28 y 38 en la clasificación del factor  $E$  como las regiones con menor grado de compacidad. Los contornos de los melanomas de los que derivan estas regiones fueron evaluadas dentro del trabajo de Tim Kam Lee por un conjunto de expertos en cáncer de piel como las más propensas a desarrollarse como tumores malignos de piel.

La hipótesis de que las regiones con mayor presencia de irregularidades serían colocadas al final de la clasificación se confirma con los resultados obtenidos en esta prueba y mostrados en la tabla 4.3. Efectivamente las regiones digitales 5 y 29 obtuvieron valores bajos y lo contrario ocurrió con las regiones digitales 21 y



Región Digital	No. Células-2	Perímetro	Factor E
15	18264	666	0.018400332
5	18235	676	0.018709177
29	18310	684	0.018854402
22	18068	690	0.01927859
27	18156	696	0.019352686
12	18291	704	0.01943141
31	18263	704	0.019461492
33	18341	708	0.019489099
40	18440	712	0.019494031
17	18333	716	0.019720172
6	17958	702	0.019738507
37	18231	714	0.019775654
32	18182	718	0.019941675
9	17987	716	0.020103324
1	18558	742	0.020193224
35	18486	740	0.020217474
13	18267	734	0.020294744
8	17834	718	0.020334759
23	18128	734	0.020451949
24	18784	766	0.020599704
36	18273	746	0.020623117
20	18698	768	0.020750027
39	18400	760	0.020867655
16	18004	744	0.020877764
25	18628	772	0.020938432
34	18591	776	0.021090395
26	18338	766	0.021105998
11	18309	770	0.021251345
7	18262	770	0.021306622
2	18440	782	0.021431116
3	18064	768	0.021486124
30	18464	790	0.021624285
18	18434	798	0.021881598
14	18606	812	0.02206162
10	18461	812	0.022236828
4	18514	826	0.02255906
19	18808	872	0.02345347
21	18611	868	0.02359465
28	18477	880	0.024100345
38	19110	1046	0.027747566

Tabla 4.3: Usando el factor E para medir la complejidad del conjunto de regiones digitales contenidas en las figuras 4.7 y 4.8 tal y como se define en [70, 71].

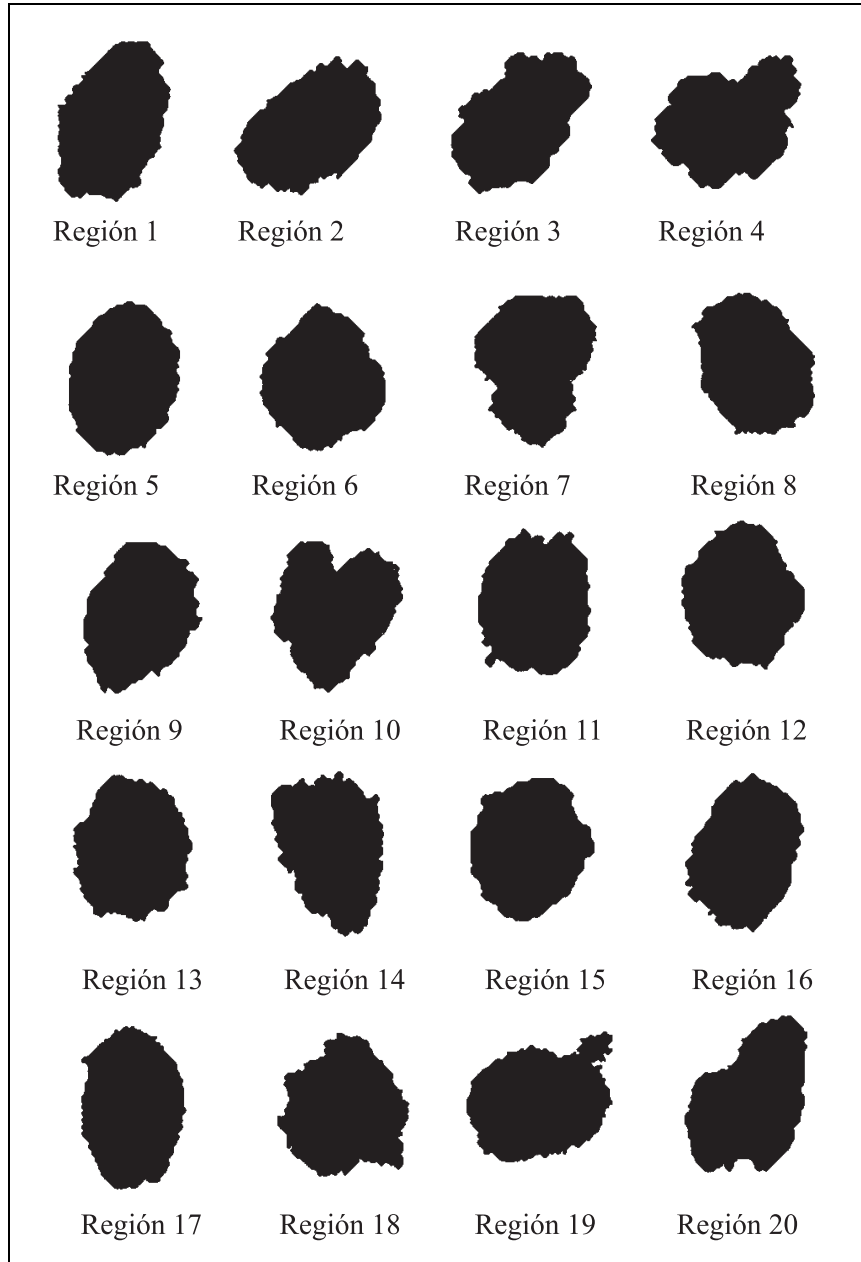


Figura 4.7: Conjunto de regiones digitales a medir su complejidad con base en el factor  $E$ ; parte uno.

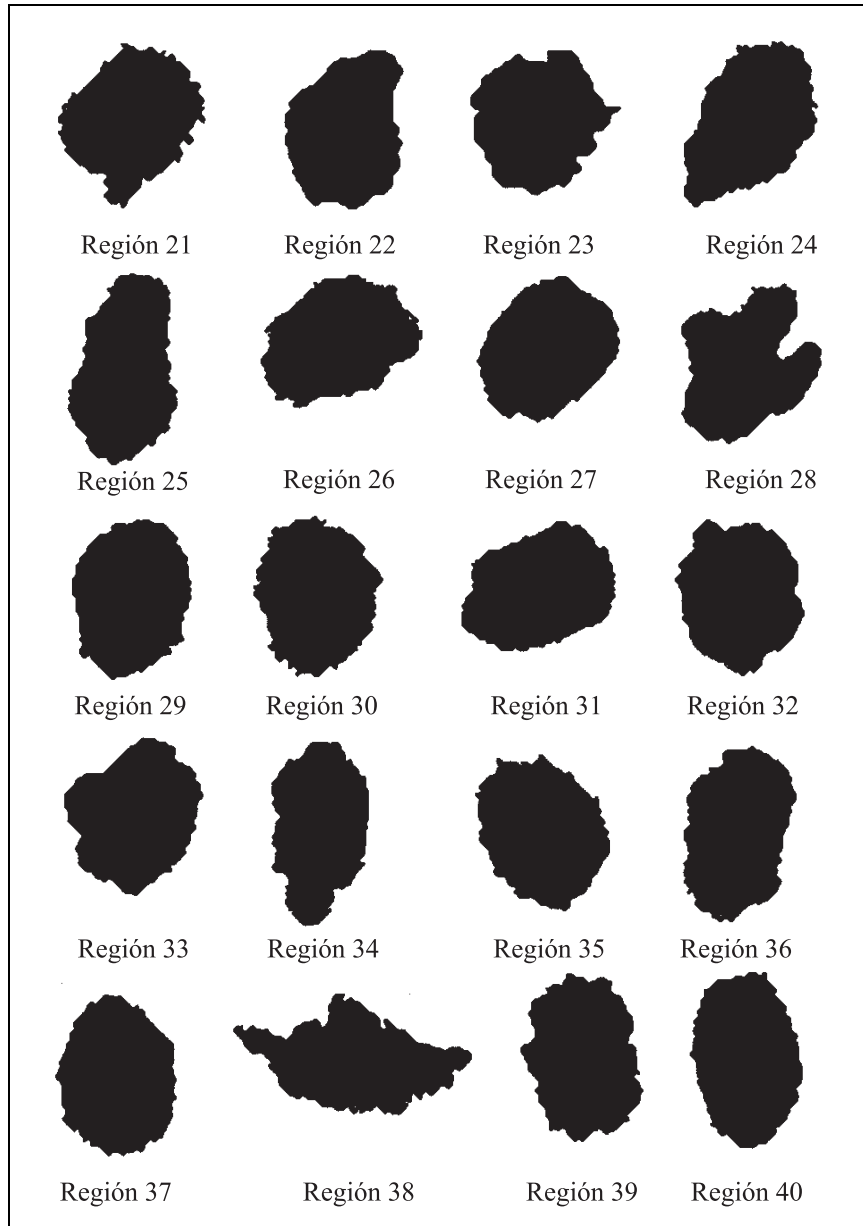


Figura 4.8: Conjunto de regiones digitales a medir su complejidad con base en el factor E; parte dos.

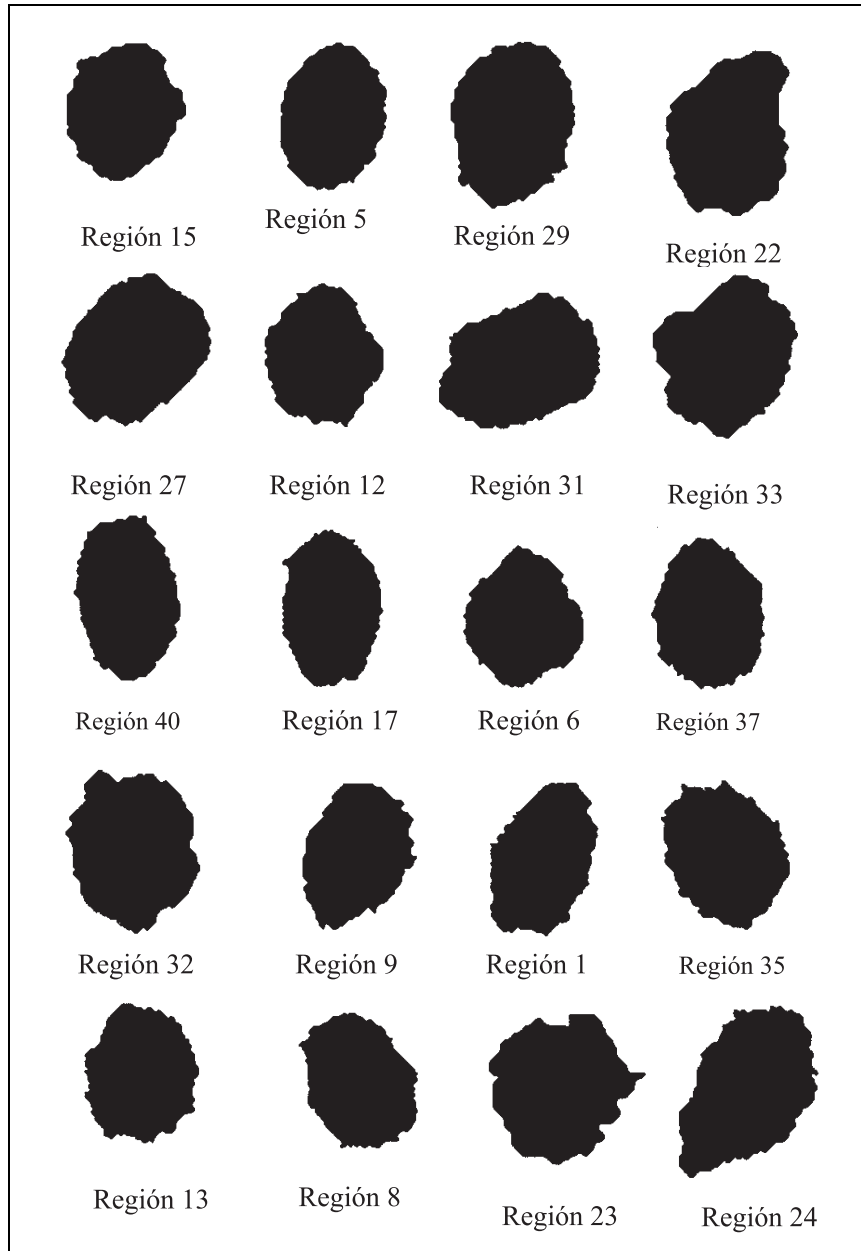


Figura 4.9: Conjunto de regiones digitales ordenado acorde a los valores del factor  $E$  contenidos en la tabla 4.3; primera parte.

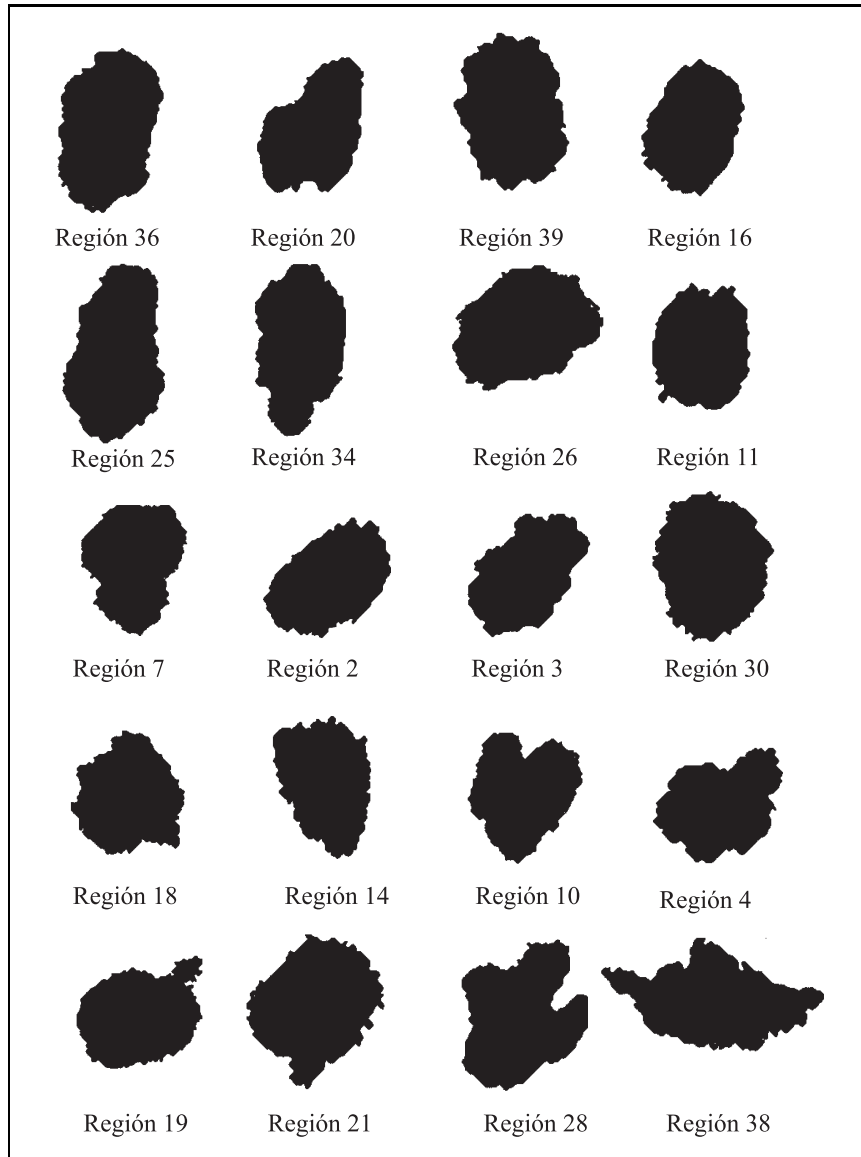


Figura 4.10: Conjunto de regiones digitales ordenado acorde a los valores del factor  $E$  contenidos en la tabla 4.3; segunda parte.

38. Toda región digital presentada en esta prueba posee un contorno irregular. Sin embargo, es posible, para un observador, percatarse que las regiones digitales presentan diferente grado de irregularidad en su contorno.

El factor  $E$  se muestra como una posible medida de la complejidad de una región digital, evaluado mediante la irregularidad del contorno.

## 4.2. Pruebas del Factor E Normalizado

La generación de imágenes digitales a diferente resolución ha servido principalmente para lidiar con la manipulación y almacenamiento de datos en un computador. Esto es: a mayor resolución mayor espacio de almacenamiento y mayor tiempo de procesamiento en el computador. Por el contrario, una mayor resolución en la imagen digital conlleva a una mayor definición de las escenas capturadas y mayor precisión al evaluar las regiones contenidas en la imagen digital. Hoy en día existen diferentes métodos para cambiar la resolución en imágenes digitales, una vez que han sido obtenidas por un proceso de digitalización, siendo los más recurridos los métodos de interpolación [51, 81].

Mientras que en el espacio continuo las regiones se componen por un conjunto infinito de elementos, en el espacio digital las regiones están constituidas por un conjunto de elementos finitos. Por lo tanto, al generar una región digital a partir de otra con una silueta semejante pero que deberá tener un área diferente, los diversos algoritmos propuestos deben agregar o quitar información de la imagen digital original. Por lo tanto, si las regiones digitales son consideradas como conjuntos de elementos finitos, entonces, dos conjuntos con cardinalidad diferente tendrán que ser considerados diferentes. Lo anterior, pese a que desde la percepción global de un observador dos regiones digitales pudiesen parecer semejantes o iguales. En este trabajo se considera que las regiones digitales iguales serán aquellas que en principio tengan la misma disposición y la misma cardinalidad de *células 2-dimensionales*.

A diferencia del factor  $E$ , el factor  $E$  normalizado se fundamenta en la evaluación del contorno de la región digital y de un proceso comparativo con una región de referencia, el cuadrado. La menor dependencia del factor  $E$  normalizado de la resolución de la región digital conlleva a que el descriptor sea menos sensible a los cambios en la información agregada o sustraída. Otra diferencia con respecto al factor  $E$  es su correlación con los criterios de complejidad de una región; siendo el descriptor menos severo con la irregularidad del contorno de la región digital.

### 4.2.1. Medición de la compacidad

El experimento llevado a cabo en la sección 4.1.2 mostró que el factor  $E$  presenta inconvenientes al ser utilizado con formas similares representadas por regiones digitales integradas con un número diferente de componentes. Mientras que el valor del factor  $E$  está fuertemente sujeto al número de *células 2-dimensionales*, el factor  $E$  normalizado ha sido diseñado para medir la com-

Región Digital	No. Células-2	Perímetro	Factor E Norm.
20	8835	376	1.0001144
21	62727	1148	1.1491031
27	2898	248	1.1586742
28	54551	1080	1.1589691
10	15672	584	1.1754476
26	52397	1122	1.2271354
1	10839	544	1.3214986
19	40608	1142	1.4231632
22	60416	1420	1.4481111
11	70578	1646	1.5541248
23	58105	1692	1.7673278
3	6251	758	2.4697682
24	140875	3964	2.6566655
13	75100	2890	2.6616248
12	71656	2920	2.7480755
25	19148	1508	2.7716158
16	64664	2796	2.7756742
4	20789	1638	2.8934959
6	35736	2328	3.1290323
5	22158	1850	3.1550321
11	73008	3404	3.1843064
2	16408	1594	3.1861082
15	144915	5044	3.3356537
14	70263	3630	3.4674611
7	24485	2960	4.8616551
9	4073	1286	5.3990404
8	39358	4516	5.8474457
18	127172	11310	8.0951711

Tabla 4.4: Ordenación de las regiones digitales de la Figura 4.1 y 4.2 con amplias diferencias en el número de células-2 acorde con el factor  $E$  normalizado.

pacidad en regiones digitales con forma semejante sin importar la cardinalidad del conjunto de *células 2-dimensional*. Con el uso del factor  $E$  normalizado se espera que regiones digitales con formas similares produzcan valores semejante; incluyendo a aquellas regiones digitales que se perciban como versiones rotadas o escaladas de otra región digital.

En esta sección se muestra que el factor  $E$  normalizado es menos sensible a la eliminación o agregación de información que se presente al realizar una modificación en la resolución de una región digital.

La prueba reutiliza las modificaciones hechas a las regiones digitales 1, 3, 9, 10, 15, 18, 20, 24 y 27 del conjunto empleado en la sección 4.1.2. Las modificaciones fueron realizadas con el propósito de observar el comportamiento del factor  $E$  y conocer como el descriptor interpretaba los cambios de resolución en

una región digital. Tal y como se mencionó, los cambios en la resolución de una región digital son interpretados por el factor  $E$  como cambios en la morfología de una forma. Si una forma dispersa o con muchos huecos se hacía crecer, entonces, el factor  $E$  la censa como una forma más compacta. El efecto contrario se presentaba si una región digital decrecía en su número de componentes.

La tabla 4.4 muestra los resultados al evaluar el conjunto de regiones digitales utilizados en la sección 4.1.2. Los resultados están ordenados de menor a mayor y donde la región digital más compacta obtiene el valor mínimo. Los resultados de la tabla 4.4 se muestran de manera gráfica en las figuras 4.11 y 4.12.

Como consecuencia del diseño del factor  $E$  normalizado es de esperar que aglutine a las regiones digitales con formas geométricas dentro de las regiones más compactas o con un menor grado de complejidad. De igual manera, el factor  $E$  normalizado dará preponderancia a las regiones que se aproximen a una región cuadrada.

Estas dos hipótesis se reafirman en los resultados obtenidos dentro de esta prueba. En la Figura 4.11 se muestra como las regiones digitales sólidas son las más compactas. Las regiones 21, 22, 23, 24, 25 son preponderas por el factor  $E$  normalizado sobre las demás regiones digitales. Ponderar las regiones cuadradas es un comportamiento esperado por el descriptor debido a su diseño, donde la forma de referencia utilizada es el cuadrado.

#### 4.2.2. Complejidad de regiones

Las regiones digitales pueden o no representar escenas de nuestro espacio. Sin embargo, en este trabajo es de interés analizar la complejidad que presentan las formas naturales, especialmente las siluetas generadas por diversos animales. Dentro de esta sección se muestra el comportamiento del factor  $E$  normalizado sobre un conjunto de formas naturales representadas por regiones digitales binarias. Entre el conjunto de regiones se encuentran dos formas de polígonos regulares (cuadrada y circular) que funcionan como referencia en la visualización de la ordenación de las formas presentadas. Similarmente, se incluyen un reducido grupo de regiones digitales que representan letras manuscritas.

El factor  $E$  y  $E$  normalizado fueron diseñados para describir cuantitativamente la compacidad de regiones digitales. La compacidad es un rasgo que puede describir la complejidad de una región [31]. Si ambos conceptos están fuertemente relacionados, compacidad y complejidad de la forma; entonces el factor  $E$  normalizado puede dar razón de la complejidad de una región. Ésta hipótesis es el motivo de la prueba descrita en esta sección.

Las formas naturales, como la de los animales, son mejor identificados bajo una posición específica conocida como perfil. Generalmente, las formas de los objetos tridimensionales son representadas en esta modalidad por la mayor información contenida. En el conjunto de regiones mostradas en las figuras 4.13 y 4.14 son ilustradas en su mayoría utilizando el perfil del objeto.

Los resultados mostrados, tanto en las tablas 4.5 como en la 4.6 e ilustrados en las figuras 4.13 y 4.14, nos muestran que los animales marinos presenta la menor complejidad en sus formas. Utilizando a la compacidad como criterio de



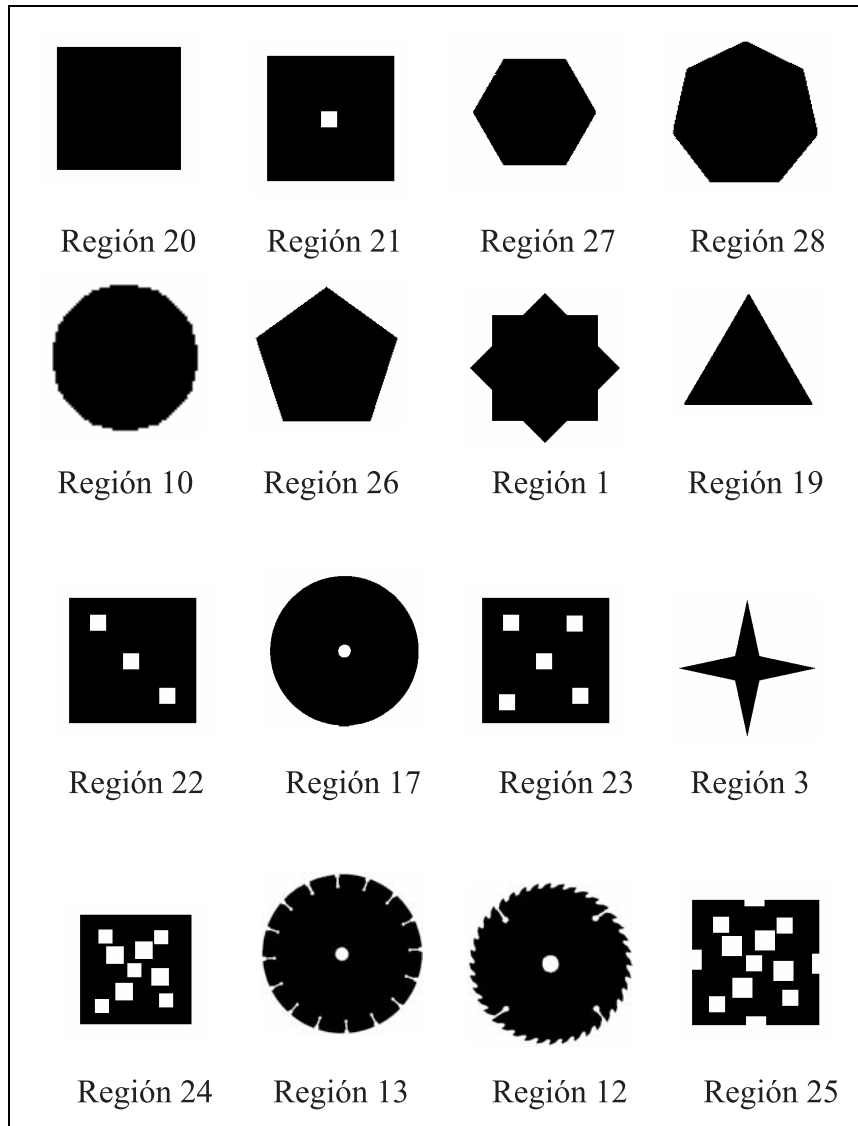


Figura 4.11: Conjunto de regiones digitales ordenado acorde a los valores del factor  $E$  normalizado contenidos en la tabla 4.4; primera parte.

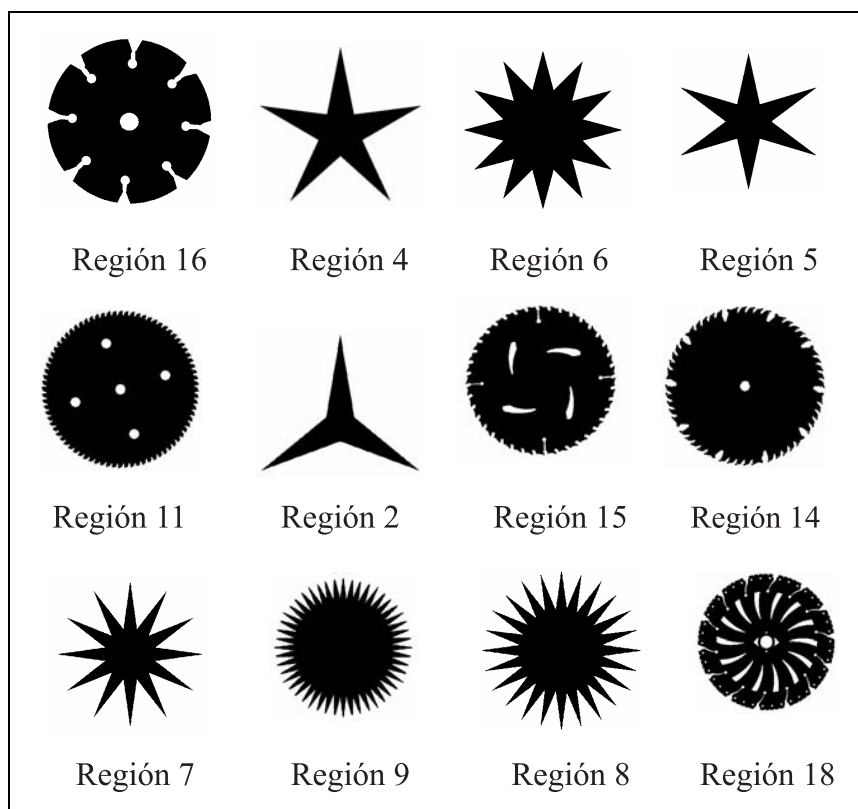


Figura 4.12: Conjunto de regiones digitales ordenado acorde a los valores del factor E normalizado contenidos en la tabla 4.4; segunda parte.

Región Digital	No. Células-2	Perímetro	Factor E Norm
24	2500	200	1
22	2494	224	1.1255127
12	50381	1608	1.8017167
50	87832	2248	1.9061762
63	78007	2142	1.9285092
59	56344	1884	1.9978702
45	149364	3092	2.0080489
41	91505	2458	2.0417865
55	58971	2028	2.0986248
62	68919	2212	2.1192698
44	76317	2352	2.1430099
25	46065	1838	2.1561654
61	77730	2454	2.2116279
5	100560	2800	2.222111
58	91646	2680	2.2241031
47	95290	2794	2.2743904
30	13045	1042	2.322891
60	49894	2068	2.334913
54	35853	1754	2.3401855
65	90221	2826	2.3677728
23	124358	3460	2.4655648
52	90472	2964	2.4774047
39	103242	3308	2.5920715
8	56484	2448	2.5960052
40	61909	2568	2.5987236
57	125426	3690	2.6229383
14	116307	3570	2.636952
53	52167	2408	2.6618055
13	58471	2586	2.6944721
15	13403	1228	2.6958613
32	12657	1198	2.7144649
27	89835	3256	2.734029

Tabla 4.5: Valores obtenidos del conjunto de regiones digitales mostradas en figuras 4.13 y 4.14(parcialmente) por el factor  $E$  normalizado; ordenados de más compacto a más disperso.

Región Digital	No. Células-2	Perímetro	Factor E Norm
42	143286	4140	2.7502794
56	74027	2990	2.7745823
43	64408	2808	2.7879007
48	111250	3746	2.826984
31	6821	930	2.8936784
18	81475	3292	2.9082354
16	4064	732	2.9706261
46	148613	4556	2.9735072
26	7972	1090	3.1498799
10	77295	3494	3.1775482
28	5601	924	3.1832402
51	113519	4334	3.2379097
20	48688	2880	3.3022015
6	50287	3074	3.4763573
49	98282	4410	3.5509804
33	8104	1240	3.5796767
7	88670	4306	3.6500482
2	9857	1456	3.7960603
19	86341	4506	3.8733373
4	69729	4092	3.9308357
17	56325	3836	4.1051006
21	113942	5566	4.1664453
34	83747	5002	4.3807252
3	50381	4148	4.7075227
29	77100	5300	4.843616
9	134134	7082	4.8956321
36	14500	2568	5.5592438
1	35502	4260	5.8140953
37	14120	2888	6.3588595
38	75456	6996	6.5017705
35	19208	4030	7.6390758
11	38790	6178	8.127747
64	28936	5492	8.4682364

Tabla 4.6: Valores obtenidos del conjunto de regiones digitales mostradas en Figura 4.14; ordenados de más compacto a más disperso.

complejidad, los mamíferos ocupan un lugar intermedio; dejando al final a las formas de los insectos. Caso especial han resultado las formas de las aves. Las formas de las aves, que se utilizaron en esta prueba, presentan una diversidad de variaciones en el número de protuberancias o apéndices alojando a las formas en un amplio espectro de complejidad dentro de este proceso de ordenación.

Finalmente, queda en evidencia, mediante los resultados obtenidos, la utilidad del factor  $E$  normalizado para correlacionarse con la complejidad de una forma.

### 4.2.3. Factor $E$ normalizado y los cambios de resolución en regiones digitales

Como se ha mencionado, los cambios en la información contenida en una región digital afectan de manera importante a los descriptores en general [78]. El factor  $E$  normalizado se ha diseñado para hacer frente a la agregación o eliminación de información en las regiones digitales binarias.

Con el objetivo de mostrar el comportamiento del factor  $E$  normalizado sobre regiones digitales a diferente resolución, derivadas de un mismo modelo de forma, se diseñó un conjunto de regiones digitales especialmente para este fin. Un observador apreciaría tales regiones digitales como variaciones de una misma forma. Ya puntualizado anteriormente, las regiones con diferente disposición en su *células 2-dimensional*, el mayor o menor número de éstas células o la combinación de ambas situaciones, son consideradas dentro de este trabajo como regiones digitales diferentes.

La prueba pretende aportar el conocimiento sobre una correlación entre el factor  $E$  normalizado y el grado de similitud entre dos regiones digitales. La similitud entre dos regiones digitales quedará determinada por la cercanía en los valores producidos por el factor  $E$  normalizado. El conjunto de regiones digitales de prueba se muestra en la Figura 4.15. Todas las regiones en el conjunto pueden ser interpretadas como la representación de una misma forma; en este caso la figura de un león. Los resultados de esta prueba son registrados en la tabla 4.7.

Los resultados nos muestran que el factor  $E$  normalizado ubicaría todas las regiones digitales de la Figura 4.15 en la cercanía de la región digital 39 del conjunto utilizado en la sección 4.2.2. El mismo experimento se realizó para otras tres clases de regiones digitales: aquellas que representan a un círculo, a un insecto y a unas tijeras, Figura 4.17. Los resultados se plasman en la gráfica de la Figura 4.16.

Los resultados nos muestran que el factor  $E$  normalizado produce valores similares para formas similares. Al contrario de lo que sucede con otras medidas de compacidad, con excepción de la compacidad discreta normalizada, el factor  $E$  se muestra como un descriptor robusto a los cambios de resolución de las regiones digitales.

La estabilidad en la cuantificación de la compacidad es primordial para éste descriptor tan básico. La generación de una medida de compacidad estable y robusta frente a los cambios de resolución ha sido el principal obstáculo en las propuestas hechas con anterioridad. Con estos resultados queda de manifiesto

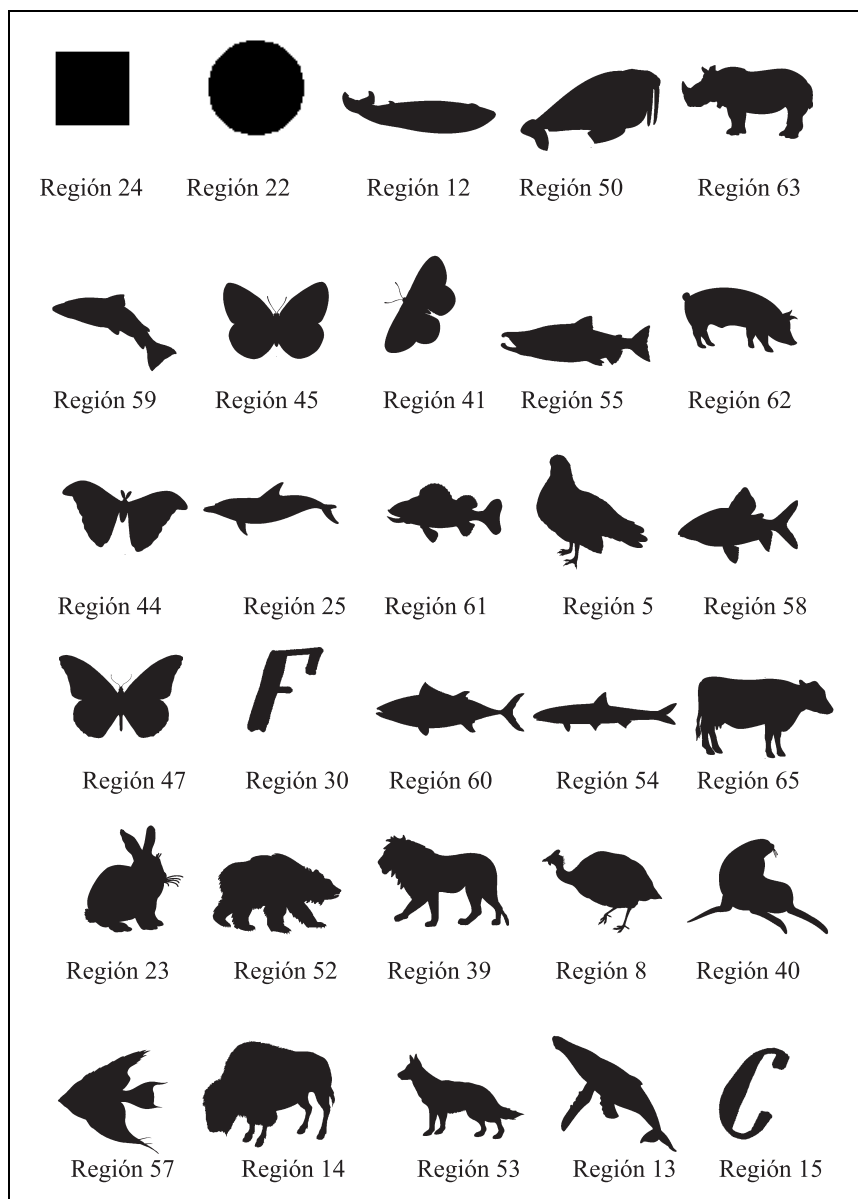


Figura 4.13: Conjunto de regiones digitales con formas naturales ordenado con base en los valores del factor  $E$  normalizado, primera parte.

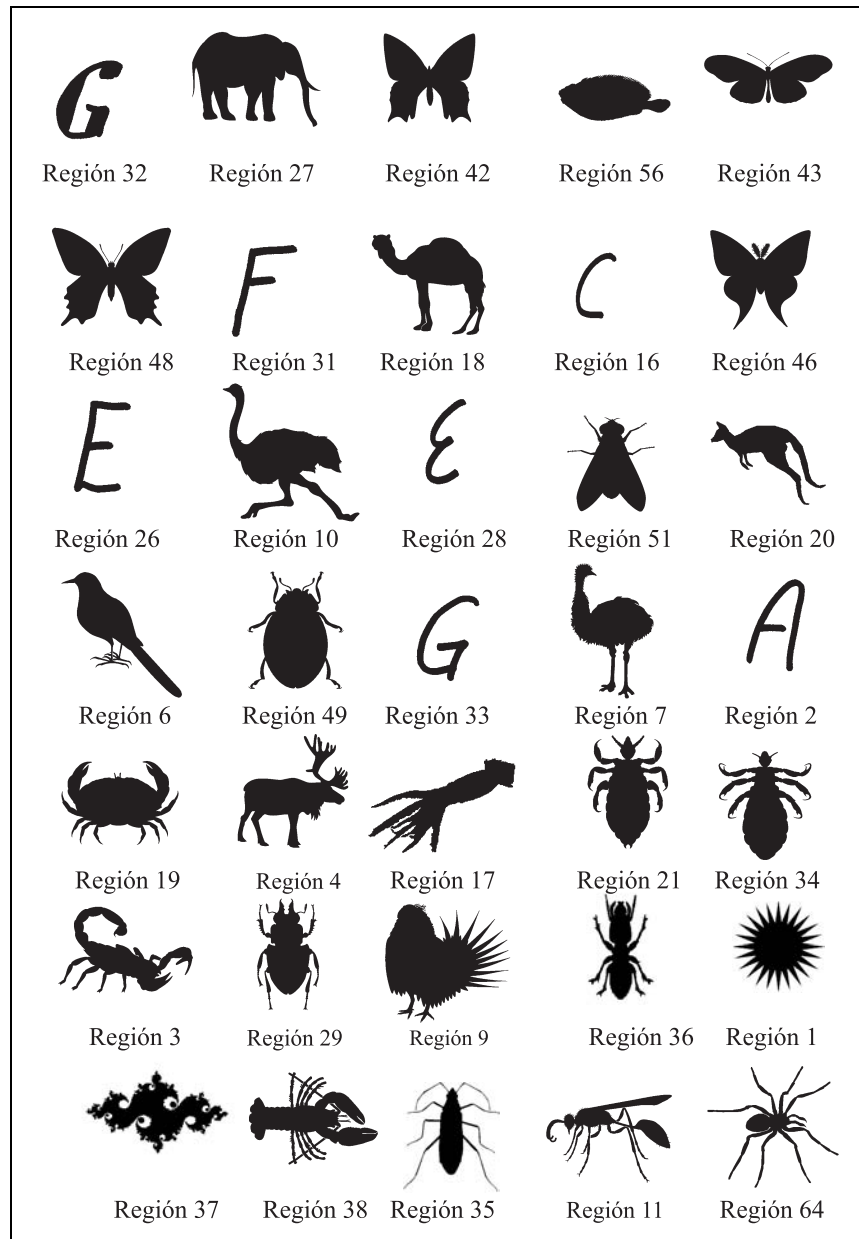


Figura 4.14: Conjunto de regiones digitales con formas naturales ordenado con base en los valores del factor  $E$  normalizado, segunda parte.

Región digital	No. Células-2	Perímetro	Factor E Norm
1	2981	544	2.5813708
2	6017	798	2.6405673
3	8694	964	2.6514847
4	11864	1110	2.586631
5	15397	1284	2.6402229
6	19481	1440	2.6170179
7	27901	1696	2.5769917
8	51906	2304	2.5472823
9	92100	3084	2.5579279
10	103242	3308	2.5920715
11	103242	3308	2.5920715
12	103242	3308	2.5920715

Tabla 4.7: Resultados obtenidos al aplicar el factor  $E$  normalizado sobre el conjunto de regiones digitales de la figura 4.15.

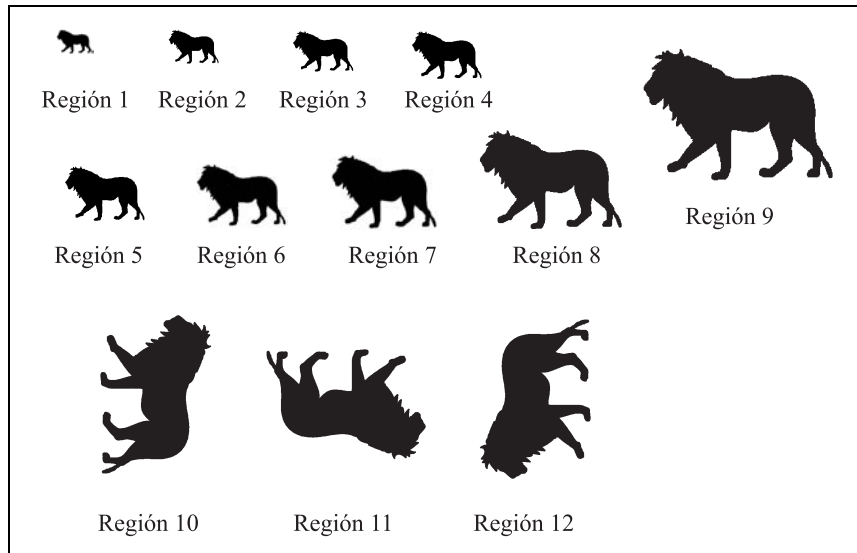


Figura 4.15: Regiones digitales similares a la región 39 del conjunto de regiones digitales ilustradas en la fig 4.13.



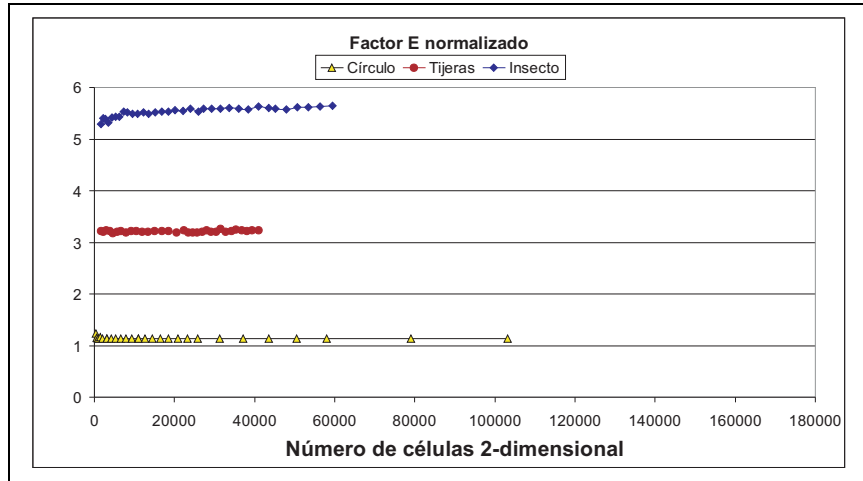


Figura 4.16: Representación gráfica de los resultados obtenidos por el factor  $E$  normalizado al evaluar la compacidad de tres conjuntos de regiones digitales derivadas de las formas ilustradas en la Figura 4.17.

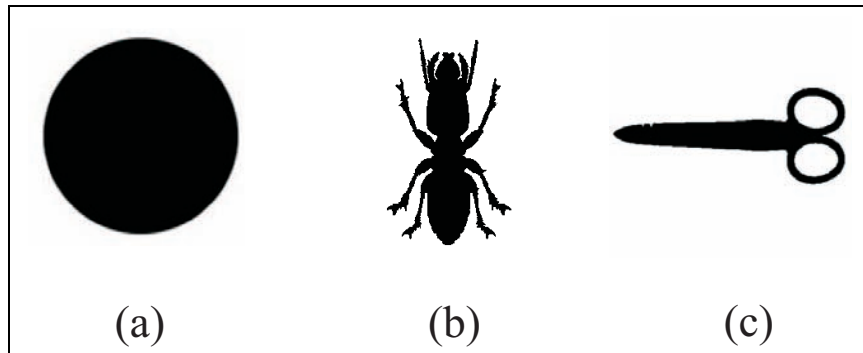


Figura 4.17: Tres siluetas de las que se derivan tres conjuntos de regiones digitales a diferentes resoluciones: a) un círculo, b) un insecto y c) unas tijeras.

que es posible utilizar el factor  $E$  normalizado para obtener valores cuantitativos estables y representativos para una forma en particular. Finalmente, a pesar de las limitaciones de usar una propiedad tan básica como la compacidad en la identificación y descripción de una forma, el factor  $E$  normalizado da la estabilidad requerida para un descriptor básico como la compacidad y ponerla al nivel del el área o el perímetro.

### 4.3. Factor $E$ y $E$ normalizado sobre regiones digitales tridimensionales

En esta sección el factor  $E$  y  $E$  normalizado son probados sobre regiones digitales binarias tridimensionales. Dos objetivos se buscan esencialmente: medir la compacidad y medir la similitud entre regiones digitales tridimensionales. En busca de llevar a cabo ambos objetivos se diseñaron dos conjuntos de regiones tridimensionales. El primer conjunto de regiones digitales contiene una mezcla de objetos y animales representados por *células 3-dimENSIONAL*. El segundo conjunto de objetos contiene regiones digitales obtenidas a partir de un mismo objeto pero configuradas con diferente número de *células 3-dimENSIONAL*.

#### 4.3.1. Medición de la compacidad

Un conjunto de doce regiones digitales tridimensionales binarias se utilizan en esta primera prueba. Las regiones digitales contenidas de la Figura 4.18 a la Figura 4.23 se muestran como representaciones voxelizadas de un conjunto de objetos tridimensionales. Las regiones están configuradas con cardinalidades diferentes en sus conjuntos de *células 3-dimENSIONAL*. La tabla 4.8 contiene los valores ordenados en forma ascendente, donde el objeto más compacto tiene el menor valor. Este ordenamiento está hecho con base en el factor  $E$  normalizado.

Los descriptores propuesto en este trabajo, factor  $E$  y  $E$  normalizado, determinan que del conjunto de regiones digitales es la esfera, Figura 4.18 el objeto más compacto y el dragón alado el más disperso, Figura 4.20 b. También, ambos descriptores concuerdan en clasificar a las figuras humanas de manera similar; el hombre con barba y abdomen prominente se clasifica como más disperso, Figura 4.21 a, que el hombre sin barba y con una configuración más atlética, Figura 4.21 b. Sin embargo y acorde con los resultados obtenidos bajo el factor  $E$ , la representación del hombre con barba es valorada aún más dispersa que el ave, Figura 4.19 (b).

Al igual que lo ocurrido con las regiones bidimensionales, el factor  $E$  penaliza más la aparición de apéndices. En cambio, el factor  $E$  normalizado tiene a agrupar regiones similares; tal es el caso de las figuras humana donde los valores obtenidos por ambas son más cercanos entre si. Es entonces que podemos deducir que los comportamientos para ambos descriptores de regiones digitales tridimensionales mantienen el comportamiento que presentaron con las regiones digitales bidimensionales.

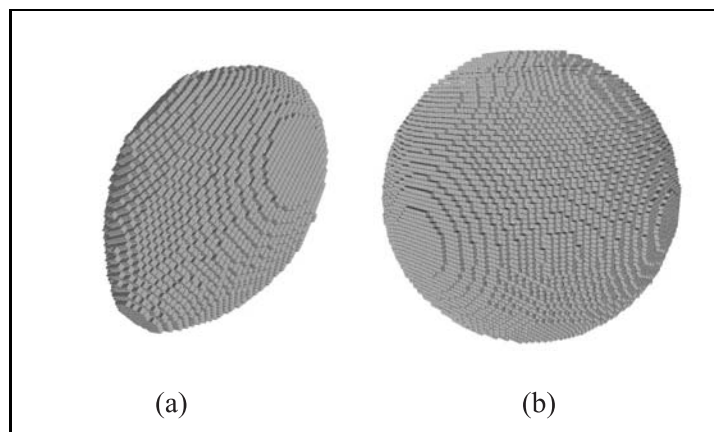


Figura 4.18: Representación voxelizada de: (a) balón de fútbol y (b) esfera; El factor  $E$  normalizado determina a la esfera como el objeto más compacto entre los objetos sometidos a prueba.

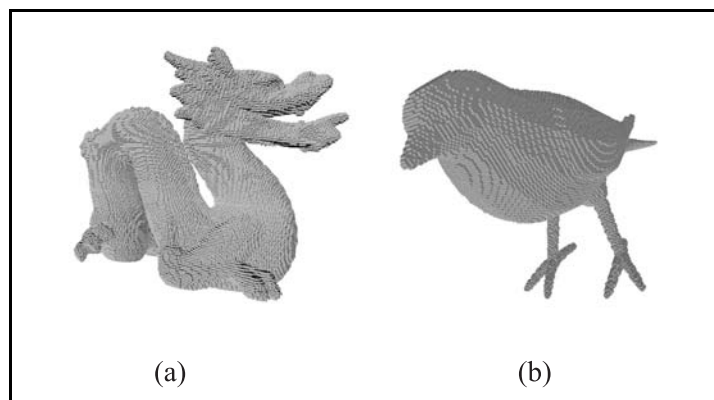


Figura 4.19: Regiones digitales tridimensionales; (a) dragón chino y (b) ave. La región (a) se encuentra entre las más dispersas del conjunto de regiones digitales sometido a prueba. Por el contrario, La región (b) es la tercera más compacta.

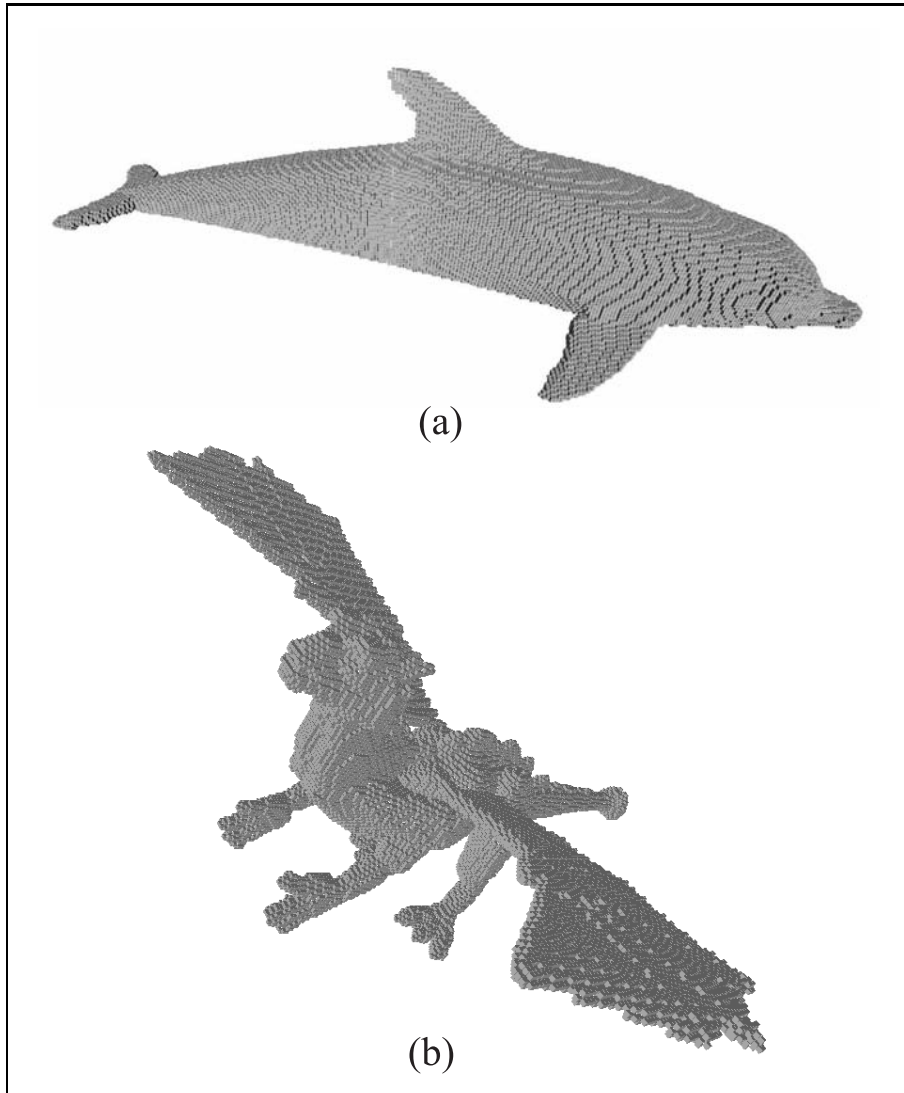


Figura 4.20: Voxelización de objetos tridimensionales; (a) delfín y (b) dragón alado.

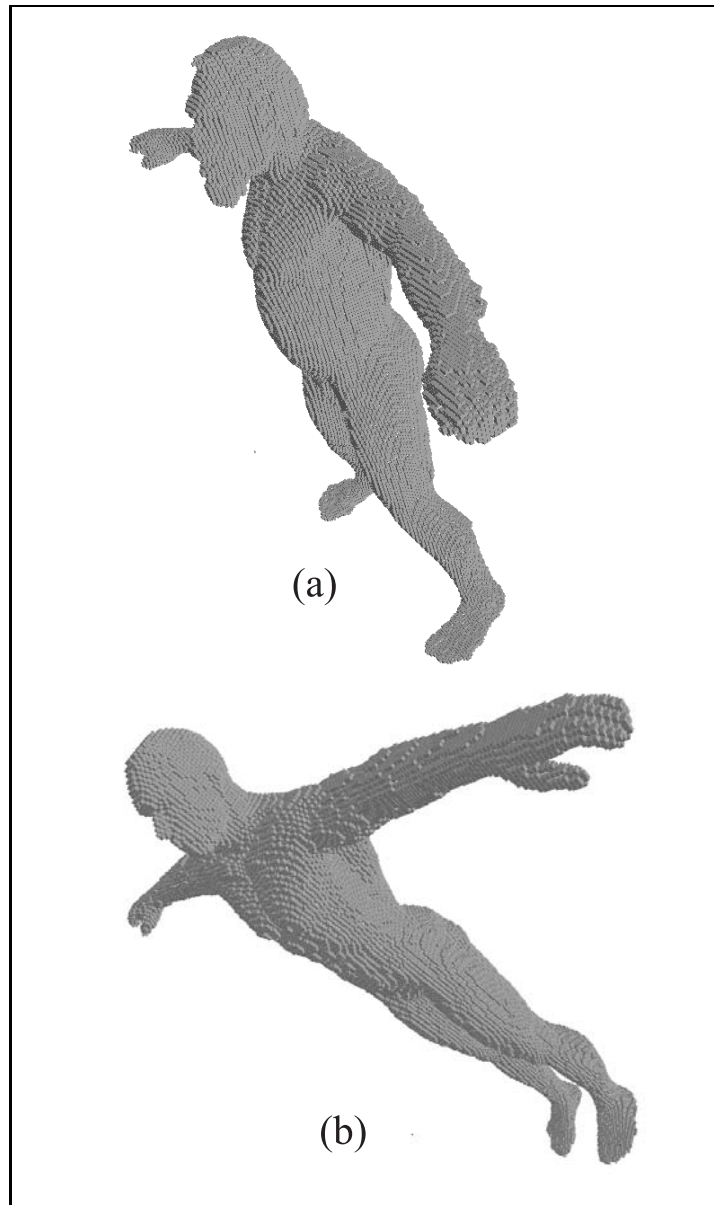


Figura 4.21: Formas tridimensionales de dos hombres; (a) forma de un hombre con barba y abdomen crecido (hombre 1); (b) figura de un hombre con cuerpo atlético (hombre 2).

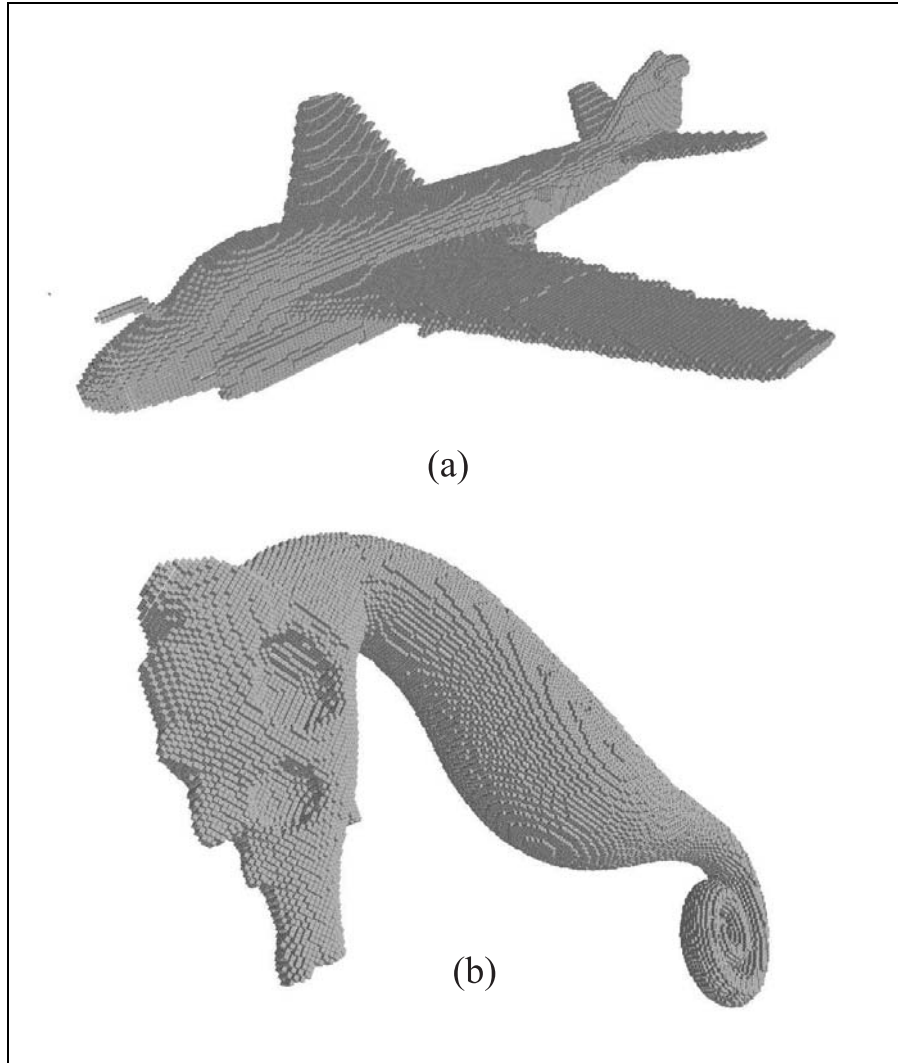


Figura 4.22: Dos objetos digitalizados claramente opuestos en su grado de compacidad; el objeto (a), un jet militar, es evidentemente más disperso que el objeto (b), un caballito de mar. El factor  $E$  corrobora este hecho.

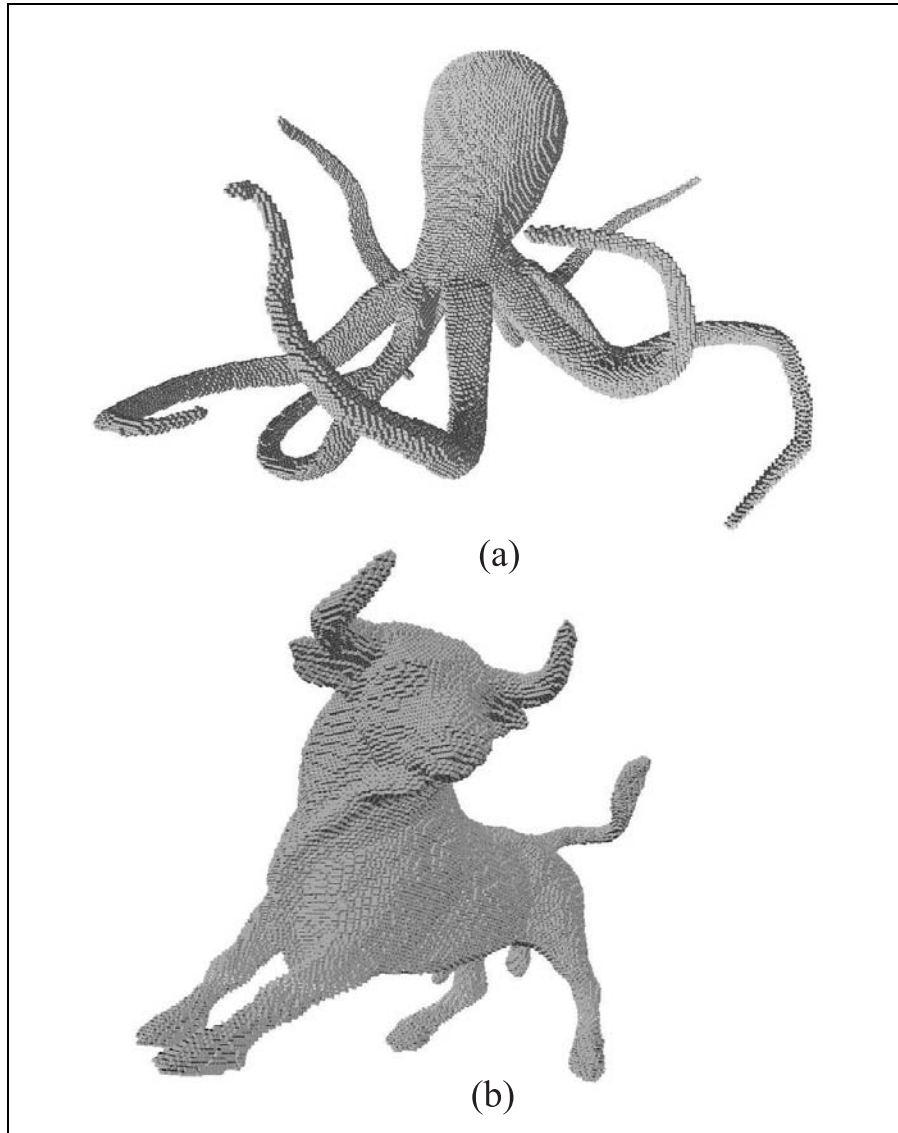


Figura 4.23: Par de modelos tridimensionales opuestos; En (a) se muestra un pulpo con un alto grado de dispersión, mientras (b) un toro, con mayor grado de compacidad.

Región digital	Área env.	Volumen	Fact. E	E norm.
esfera	30872	276569	0.037913668	1.2171702
balón	12168	63353	0.066139421	1.2862182
ave	18646	71759	0.09053478	1.8372311
delfin	38574	180861	0.073713539	2.0491517
toro	64670	357664	0.062143434	2.1763936
caballo de mar	48704	208638	0.080962561	2.3624425
hombre 2	53508	205836	0.090575773	2.6308597
hombre 1	65984	274828	0.083366604	2.6706624
dragon chino	86476	375119	0.079913577	2.8441978
jet	50138	149520	0.11839213	3.0852023
pulpo	78312	209910	0.1326032	3.877271
dragon alado	58194	114025	0.18593639	4.4187112

Tabla 4.8: Medición de la compacidad de regiones digitales tridimensionales. Valores ordenados de compacto a disperso determinado por el factor  $E$  normalizado.

#### 4.3.2. Factor $E$ y $E$ normalizado y los cambios de resolución en regiones digitales

Al igual que las regiones digitales bidimensionales, se diseñó un conjunto de regiones digitales tridimensionales a partir de una forma base pero con diferente cardinalidad en su conjunto de *células 3-dimensional*. A partir de la forma de una llave mecánica se construyeron cinco versiones digitales, ilustradas en la Figura 4.24. El experimento consiste en observar la diferencia entre los valores del factor  $E$  y  $E$  normalizado obtenidos de cada región. La tabla 4.9 es donde yacen los resultados de esta prueba.

En esta prueba emergen tanto la propiedad del factor  $E$  de censar los cambios en la morfología de la región como la robustez del factor  $E$  normalizado a los cambios en la resolución. Mientras que, el factor  $E$  normalizado produce valores cercanos para casi todo el conjunto, a excepción de la región (a), el factor  $E$  determina diferentes grado de compacidad. El factor  $E$  determina que la región (a) es la más compacta y la región (e) la más dispersa.



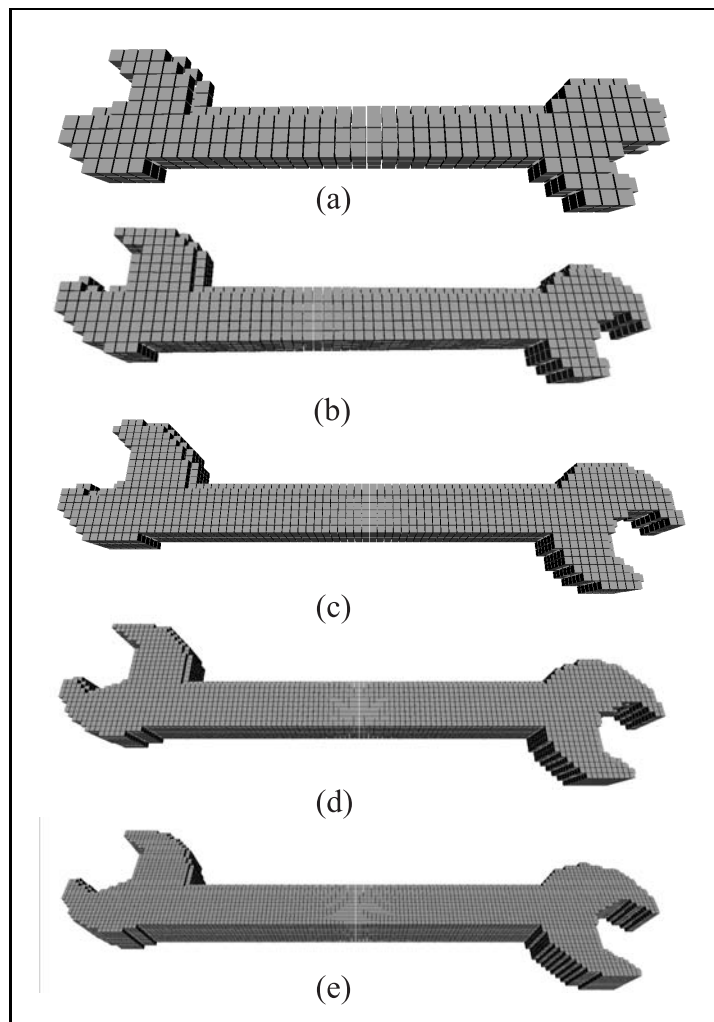


Figura 4.24: Regiones digitales tridimensionales generadas a partir de un mismo modelo de objeto tridimensional y conformadas con diferente número de voxels.

<b>Región</b>	<b>Area env.</b>	<b>Volumen</b>	<b>Compacidad</b>	<b>Fact. E</b>	<b>E norm.</b>
llave (a)	738	520	1486.49	0.6196	2.182
llave (b)	1730	2017	1272.70	0.3335	1.941
llave (c)	2778	3972	1358.87	0.2638	1.958
llave (d)	6138	12867	1396.77	0.1727	1.938
llave (e)	9334	23949	1417.84	0.1389	1.934

Tabla 4.9: Midiendo similitud entre regiones digitales tridimensionales; valores de compacidad obtenidos por los factores E y E normalizado del conjunto de regiones tridimensionales de la Figura 4.24.

## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

En el espacio continuo pensar cuantitativamente la similitud entre una forma u objeto y en círculo o la esfera es equivalente a evaluar el grado de compacidad de la forma u objeto. La convergencia de estos dos aspectos a medir se fundamenta en el hecho de que el círculo es la forma más compacta en el plano y la esfera en el espacio. Tal hecho se concluye por las demostraciones analíticas realizadas en el siglo XX.

Sin embargo, el grado de similitud entre una forma y el círculo o de un objeto y la esfera, y su equivalencia con el concepto de compacidad quedan separados en el espacio digital. La esfera y el círculo son entidades geométricas configuradas con un número infinito de elementos adimensionales conocidos como puntos y arreglados de una manera particular. Los puntos, tanto en el círculo como en la esfera, son equidistantes a un punto conocido como centro. Los objetos o formas son concebidas como un conjunto de puntos o celdas dispuestas sobre una rejilla. La disposición de las celdas o puntos hace imposible que, tanto el círculo como la esfera, puedan ser configuradas dentro del espacio digital. Por lo tanto, las entidades geométricas conocidas como círculo y esfera carecen de significado. Como consecuencia, el significado de similitud entre una región digital y el círculo o la esfera desaparece y aunado a esto, el concepto de circularidad.

El enfoque más recurrente para medir la compacidad es comparando la silueta del objeto con una figura de referencia. Este mismo modelo se ha empleado en la implementación de medidas de compacidad de regiones digitales. Recordando que la premisa al generar una medida de compacidad es mantener su sencillez de cálculo. Los enfoques basados en la comparación de formas se han generado tratando de que esta premisa se mantenga. Los descriptores elementales, el área y el perímetro de la región, se han empleado para realizar la comparación entre formas. Es así que las comparaciones se realizan generando relaciones entre áreas, perímetros o entre parámetros obtenidos a partir de éstos.

A lo largo de la investigación llevada a cabo y plasmada en el presente

trabajo, se ha demostrado las inconveniencias que conllevan el empleo de las medidas de compacidad diseñadas a partir del enfoque basado en la comparación de formas, sección 2. La excepción ha sido la medida de Compacidad Discreta Normalizada [9]. Las propuestas de comparación tiene el desacierto de usar como forma de referencia al círculo; entidad que carece de significado y por lo tanto, de definición precisa en el espacio digital. Caso contrario es la Compacidad Discreta Normalizada. La medida propuesta por Bribiesca emplea una forma de referencia bien definida en el espacio digital, el cuadrado.

Cambiar el paradigma de comparación entre una región digital y el círculo por el cuadrado genera una mejora sustancial la medición de la compacidad en regiones digital. Sin embargo, el modelo de comparación de la Compacidad Discreta Normalizada emplea las áreas de las regiones. En la propuesta hecha para el presente trabajo de investigación se propone un modelo de comparación utilizando los perímetros de la región para la generación de una medida de compacidad, nombrado factor  $E$  normalizado. De la misma manera que la Compacidad Discreta Normalizada, el cuadrado de referencia que se utiliza en el factor  $E$  normalizado se ajusta conforme aumenta o disminuye el número de *células 2-dimensionales* de la región bajo estudio. Al adecuar las magnitudes del cuadrado se logra una mejor estabilidad y robustez frente a los cambios en el número de *células 2-dimensionales* de una región digital; la variación en la cardinalidad del conjunto de *células 2-dimensionales* se puede interpretar como un cambio de escala de la forma bajo análisis.

El factor  $E$  normalizado agrega a los beneficios ya establecidos por la Compacidad Discreta Normalizada la utilización del perímetro como parámetro de comparación entre las regiones digitales. Al emplear el perímetro de la región los cambios que sufra la configuración de la región se manifiestan con más claridad en la valoración de la compacidad de la forma. La utilidad de diseñar una medida con las características del factor  $E$  normalizado es apreciada en procesos de reconocimiento y clasificación. No obstante, al configurar una medida que soporte cambios en la información de la región sin alterar el valor de compacidad limita evaluar los cambios sutiles que sufra la región digital es su contorno.

Aplicaciones prácticas, principal en áreas médico-biológicas, requieren que sean evaluadas las alteraciones que sufra una región digital en la forma. La compacidad se ha visto como una propiedad adecuada para vislumbrar tales alteraciones. Es entonces que una medida como el factor  $E$  normalizado queda limitada para este tipo de aplicaciones. Una medida que evalúe los cambios morfológicos en una región digital, contrario al factor  $E$  normalizado, deberá ser sensible a la alteración que una región digital sufra, sobre todo en su contorno. Es aquí donde el factor  $E$  se manifiesta como un descriptor adecuado para evaluar los cambios morfológicos que sufra una región digital. El factor  $E$  evalúa los cambios en la región mediante la relación entre dos descriptores, el perímetro y el perímetro de contacto, para producir un valor que de cuenta de los cambios en la compacidad de una región digital.

Ante los hechos descritos es necesario resaltar los siguientes aspectos:

La compacidad es una propiedad recomendable en los procesos de clasificación y reconocimiento. Estudios anteriores a éste, han mostrado como los procesos

de clasificación se ven fortalecidos al mejorar su eficacia cuando la compacidad es incluida dentro del conjunto de descriptores [31, 52]. En el presente trabajo se da cuenta de que la compacidad cuenta con poder suficiente para discriminar entre formas naturales y artificiales; en éstas últimas se muestra la capacidad para evaluar tanto el contorno como el interior de la región. Los experimentos realizados alientan a incluir a la compacidad dentro del conjunto de descriptores en procesos de clasificación y reconocimiento de formas. Es dentro de este marco que el factor  $E$  normalizado adquiere su utilidad práctica.

En procesos de análisis, evaluación de procedimientos y detección de cambios morfológicos dentro del área médico-biológicos. La compacidad no solo se muestra como coadyuvante a estos procesos, sino necesaria. La determinación, juicio y medición de los procesos médicos son censados con relativa frecuencia a través de medición de la forma de las entidades biológicas y sus cambios. Es entonces que el diseño de medidas como el factor  $E$  muestran su utilidad.

También se ha arriba a establecer que el enfoque comparativo entre una forma y una forma de referencia es un método adecuado para medir compacidad. Si el análisis comparativo se realiza en el ámbito del espacio continuo; entonces, es correcto utilizar círculo o esfera como forma de referencia. No obstante, si el proceso utiliza entidades pertenecientes al espacio digital; entonces lo correcto es utilizar al cuadrado como forma de referencia, si la celda que configura la región es un cuadrado.

Además, el concepto de circularidad en su sentido formal carece de significado en el espacio digital, dado que el círculo no tiene definición en este espacio. Los experimentos llevados a cabo y descritos en la presente obra confirman que la medidas propuestas para llevar a cabo la medición de la similitud entre el círculo y una región digital son altamente sensibles a los huecos, ruido y variación en la cardinalidad del conjunto de *células 2-dimENSIONAL*.

Un aspecto a tomar en cuenta es que las regiones digitales deben ser conformadas por conjuntos de *células 2-dimENSIONAL* relativamente grandes. La información que puede proporcionar una región digital con cardinalidad baja en este conjunto es insuficiente para determinar el origen en el espacio continuo que la genero. La poca información que contenga una región digital con bajo número de *células 2-dimENSIONAL* puede ser alterada con relativa facilidad.

Finalmente, el producto de la investigación llevada a cabo se manifiesta en los siguientes puntos:

- Correlacionar la disposición de los elementos de una región digital con un valor de compacidad; usando los factores  $E$  y  $E$  normalizado.
- Evaluar los cambios morfológicos de una región digital.
- Establecer la similitud entre regiones digitales usando la compacidad como parámetro y los factores  $E$  y  $E$  normalizado.
- Estabilidad de una medida de compacidad frente a los cambios de resolución en las regiones digitales; factor  $E$  normalizado.

- Efectividad y bajo costo computacional; presente en ambas medidas de compacidad propuestas en la presente obra.
- Mayor poder discriminatorio entre regiones digitales con valores de compacidad semejante.

## 5.1. Trabajo futuro

Al ser una relación de contornos, el factor  $E$  normalizado es susceptible de ser implementado bajo representaciones unidimensionales de las regiones digitales. Es así que dentro de este trabajo se plasma la idea de implementar el factor  $E$  normalizado usando códigos de cadena. El código  $VCC$  se propone como la mejor opción para implementar este descriptor debido a su propiedad de describir condiciones topológicas del contorno de la región digital.

En el anhelo de aumentar el poder discriminatorio del factor  $E$  normalizado se proponen tres propiedades extraídas de la representación unidimensional nombradas *índices de forma*. Al usar el  $VCC$ , El factor  $E$  normalizado puede ser calculado directamente por la sumatoria de los elementos del código y filtrar del universo de formas a sólo aquellas con determinado valor de compacidad. El subconjunto de regiones digitales obtenido, al aplicar el factor  $E$  normalizado, puede ser discriminado y separarse en subclases utilizando los *índices de forma*. La hipótesis expresada en estos párrafos queda fuera del alcance de la presente obra y quedará como una tarea pendiente.

Dentro de las tareas que quedan pendientes de este trabajo de investigación podemos citar además las siguientes:

- Mostrar la utilidad de los índices de forma en procesos prácticos de clasificación y reconocimiento.
- Conocer el poder discriminatorio del factor  $E$  y  $E$  normalizado en procesos completos de análisis de forma.
- Investigar el alcance del factor  $E$  como descriptor de la complejidad de una región digital en aplicaciones de análisis clínico sobre entidades biológicas, donde los cambios morfológicos estén asociados a una patología determinada.
- Profundizar en la utilidad del factor  $E$  normalizado como rasgo distintivo en procesos de clasificación y reconocimiento.
- Comparar ambos descriptores, así como su combinación, frente a herramientas de cómputo más complejas.
- Finalmente, conocer las condiciones necesarias y suficientes del uso óptimo de ambos descriptores de regiones digitales binarias.

# Bibliografía

- [1] F. Attneave and M. D. Arnoult. The quantitative study of shape and pattern perception. *Psychological Bulletin*, 53(6):452–471, 1956.
- [2] D. H. Ballard and C. M. Brown. *Computer Vision*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1982.
- [3] B. Bernard-Michel, M.Ñ. Pons, and H. Vivier. Quantification, by image analysis, of effect of operational conditions on size and shape of precipitated barium sulphate. *Chemical Engineering Journal*, 87:135–147, 2002.
- [4] Catherine Blandle. *Isoperimetric inequalities and applications*. Pitman, Boston, 1980.
- [5] J. Bogaert, R. Rousseau, P. Van Hecke, and I. Impens. Alternative area-perimeter ratios for measurement of 2d shape compactness of habitats. *Applied Mathematics and Computation*, 111(1):71–85, 2000.
- [6] J. Bogaert, L. Zhou, C. J. Tucker, R. B. Myneni, and R. Ceulemans. Evidence for a persistent and extensive greening trend in eurasia inferred from satellite vegetation index data. *Journal of Geophysical Research*, 107(D11):4–1, 4–13, 2002.
- [7] M. J. Bottema. Circularity of objects in images. In *International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing, ICASSP 2000*, pages 2247–2250, Istanbul,, 2000. IEEE.
- [8] U. D. Braumann, J. P. Kuska, J. Einkenkel, L. C. Horn, M. Loffler, and M. Hockel. Three-dimensional reconstruction and quantification of cervical carcinoma invasion fronts from histological serial sections. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 24(10):1286–1307, 2005.
- [9] E. Bribiesca. Measuring 2-d shape compactness using the contact perimeter. *Computer and Mathematics with Applications*, 33(11):1–9, 1997.
- [10] E. Bribiesca. A new chain code. *Pattern Recognition*, 32:235–251, 1999.
- [11] E. Bribiesca. A measure of compactness for 3d shapes. *Computer and Mathematics with Applications*, 40:1275–1284, 2000.

- [12] K. R. Castleman. *Digital Image Processing*. Prentice Hall, USA, 1995.
- [13] L. F. Costa and R. M. Cesar. *Shape Analysis and Classification: Theory and Practice*. CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 2000.
- [14] P. E. Danielsson. A new shape factor. *Computer Graphics and Image Processing*, 7(2):292–299, 1978.
- [15] E. R. Davies. *Machine Vision, Theory, algorithms, practicalities*. Academic Press, London, England, 1991.
- [16] C. Di Ruperto and A. Dempster. Circularity measures based on mathematical morphology. *Electronics Letters*, 36(20):1691–1693, 2000.
- [17] Eladio Domínguez and Angel R. Francés. An axiomatic approach to digital topology. In *Digital and Image Geometry: Advanced Lectures*, pages 35–74. 2001.
- [18] R. O. Duda and P. E. Hart. *Pattern Classification and Scene Analysis*. Wiley-Interscience, New York, USA, 1973.
- [19] U. Eckhardt and L. J. Latecki. Topologies for the digital spaces  $z_2$  and  $z_3$ . *Computer Vision and Image Understanding*, 90:295–312, 2003.
- [20] U. Eckhardt and Longin Latecki. Digital topology. In *Current Topics in Pattern Recognition Research, Research Trends*. Council of Scientific Information, Trivadrurum, India, 1994.
- [21] R. Edler, D. Wertheim, and D. Greenhill. Outcome measurement in the correction of mandibular asymmetry. *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, 125(4):435–443, 2004.
- [22] R. L. Faber. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry*. Marcel Dekker, New York, USA, 1983.
- [23] Robert C. Frohn. *Remote Sensing for Landscape Ecology*. Lewis Publishers, USA, 1998.
- [24] M. L. Giger, K. Doi, and H. MacMahon. Image feature analysis and computer-aided diagnosis in digital radiography. 3. automated detection of nodules in peripheral lung fields. *Medical Physics*, 15(2):158–166, 1988.
- [25] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Digital Image Processing*. Prentice Hall, Upper Saddle, New Jersey, USA, 2001.
- [26] S. B. Gray. Local properties of binary images in two dimensions. *IEEE Trans. on Computer*, C-20:551–561, 1971.
- [27] R. M. Haralick. A measure for circularity of digital figures. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-4(4):334–336, 1974.



- [28] R. M. Haralick and L. G. Shapiro. Image segmentation techniques, survey. *Computer Vision and Image Understanding*, 29:100–132, 1985.
- [29] R. M. Haralick and L. G. Shapiro. *Computer and Robot Vision*, volume 1. Addison Wesley Publishing Company, Great Britain, 1992.
- [30] D. L. Horn, C. R. Hampton, and A. J. Vandenberg. Practical application of district compactness. *Political Geography*, 12(2):103–120, 1993.
- [31] S. Ishikawa. Geometrical indices characterizing psychological goodness of random shapes. In *Proceedings of the 4th International Joint Conference on Pattern Recognition*, volume 1, pages 414–416, Kyoto, Japan, 1978.
- [32] A. K. Jain. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, USA, 1989.
- [33] B. Jähne. *Digital Image Processing, Concepts, Algorithms and Scientific Applications*. Springer-Verlag, Germany, 1991.
- [34] Tim Kam Lee. *Measuring Border Irregularity and Shape of Cutaneous Melanocytic Lesions*. PhD thesis, Simon Fraser University, 2001.
- [35] C. E. Kim and T. A. Anderson. Digital disks and a digital compactness measure. In *Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 117–124, New York, N. Y., USA, 1984.
- [36] P. W. Kitchin. Processing of binary images. In A. Pugh, editor, *Robot Vision*, pages 21–42. Springer, Germany, 1983.
- [37] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital Geometry, Geometric methods for digital pictures analysis*. Morgan Kaufmann, USA, 2004.
- [38] Reinhard Klette. Topologies on the planar orthogonal grid. In *16th International Conference on Pattern Recognition*, volume 2, page 20354, 2002.
- [39] T. Yung Kong, Ralph Kopperman, and Paul R. Meyer. A topological approach to digital topology. *The American Mathematical Monthly*, 98(10):901–917, 1991.
- [40] T. Yung Kong, A. W. Roscoe, and A. Rosenfeld. Concepts of digital topology. *Topology and its Applications*, 46:219–262, 1992.
- [41] T. Yung Kong and A. Rosenfeld. Digital topology: Introduction and survey. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 48:357–393, 1989.
- [42] Vladimir Kovalevsky. Finite topology as applied to image analysis. *Computer Vision and Image Understanding*, 46:141–161, 1989.
- [43] Vladimir Kovalevsky. Digital geometry based on the topology of abstract cell complexes. In *Third International Colloquium Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 259–284, University of Strasbourg, 1993.

- [44] Vladimir Kovalevsky. Algorithms in digital geometry based on cellular topology. In R. Klette and J. Zunic, editors, *10th International Workshop on Combinatorial Image Analysis*, volume 3322, pages 366–393, Auckland, New Zealand, 2004. Springer.
- [45] Vladimir Kovalevsky. Axiomatic digital topology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 26:41–58, 2006.
- [46] Yong Kui Liu, Wei Wei, Peng Jie Wang, and Borut Zalik. Compressed vertex chain codes. *Pattern Recognition*, 40:2908–2913, 2007.
- [47] Yong Kui Liu and Borut Zalik. An efficient chain code with huffman coding. *Pattern Recognition*, 38(4):553–557, 2005.
- [48] Zenon Kulpa. Area and perimeter measurement of blobs in discrete binary pictures. *Computer Graphics and Image Processing*, 6:434–451, 1977.
- [49] Longin Latecki. Topological connectedness and 8-connectedness in digital pictures. *CVGIP: Image Understanding*, 57(2):261–262, 1993.
- [50] S. C. Lee, Y. Wang, and E. T. Lee. Compactness measure of digital shapes. In *IEEE Region 5 Conference, Annual Technical and Leadership Workshop*, pages 103–105, 2004.
- [51] T. M. Lehmann, C. Gonner, and K. Spitzer. Survey: interpolation methods in medical image processing. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 18(11):1049–1075, 1999.
- [52] M. D. Levine. *Vision in Man and Machine*. McGraw-Hill, USA, 1985.
- [53] J. Lira. *Introducción al Tratamiento Digital de Imágenes*. UNAM-IPN-FCE, México, 2002.
- [54] G. Lohmann. *Volumetric Image Analysis*. John Wiley and Sons, 1998.
- [55] S. Loncaric. A survey of shape analysis techniques. *Pattern Recognition*, 31(8):983–1001, 1998.
- [56] N. MacLeod. Geometric morphometrics and geological shape-classification systems. *Earth-Science Reviews*, 59:27–47, 2002.
- [57] S. Marchand-Maillet and Y. M. Sharaiha. *Binary Digital Image Processing, a discrete approach*. Academic Press, Great Britain, 2000.
- [58] S Marshall. Review of shape coding techniques. *Image Vision Comput*, 7(4):281–294, 1989.
- [59] V. Metzler, T. Lehmann, H. Bienert, K. Mottaghy, and K. Spitzer. A novel method for quantifying shape deformation applied to biocompatibility testing. *ASAIO Journal*, 45(4):264–271, 1999.

- [60] R. G. Niemi, B. Grofman, C. Carlucci, and T. Hofeller. Measuring compactness and the role of a compactness standard in a test for partisan and racial gerrymandering. *Journal of Politics*, 22(4):1155–1181, 1990.
- [61] M. Nixon and A. Aguado. *Feature Extraction and Image Processing*. Newnes, Great Britain, 2002.
- [62] Nikhil R. Pal and Sankar K. Pal. A review on image segmentation techniques. *Pattern Recognition*, 26(9):1277–1294, 1993.
- [63] J. R. Parker. *Practical Computer Vision Using C*. John Wiley and Sons, USA, 1994.
- [64] T. Pavlidis. *Structural Pattern REcognition*, volume —. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1977.
- [65] T. Pavlidis. Algorithms for shape analysis of contours and waveforms. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-2(4):301–312, 1980.
- [66] M. Peura and J. Iivarinen. Efficiency of simple shape descriptors. In C. Arcelli, P. Cordella, and G Sanniti di Baja, editors, *Advances in Visual Form Analysis*, pages 443–451. World Scientific, Singapore, 1997.
- [67] W. K. Pratt. *Digital Image Processing*. John Wiley, New York, USA, 2001.
- [68] D. Rosen. On the areas and boundaries of quantized objects. *Computer Graphics and Image Processing*, 13:94–98, 1980.
- [69] A. Rosenfeld. Secuencial operation in digital picture processing. *Journal ACM*, 13(4):471–494, 1966.
- [70] A. Rosenfeld. Compact figures in digital pictures. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 4:221–223, 1974.
- [71] A. Rosenfeld and A. C. Kak. *Digital Picture Processing*. Academic Press, New York, USA, 1976.
- [72] Hermilo Sanchez-Cruz, E. Bribiesca, and Ramón M. Rodríguez-Dagnino. Efficiency of chain codes to represent binary objects. *Pattern Recognition*, 40:1660–1674, 2007.
- [73] P. V. Sankar and E. V. Krishnamurthy. On the compactness of subsets of digital pictures. *Computer Graphics and Image Processing*, 8:136–143, 1978.
- [74] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume 1. Academic Press Limited, San Diego, USA, 1982.
- [75] R. J. Shalkoff. *Digital Image Processing and Computer Vision*. John Wiley and Sons, USA, 1989.

- [76] L. G. Shapiro and G. C. Stockman. *Computer Vision*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2001.
- [77] E. W. Snyder and H. Qi. *Machine Vision*. Cambridge University Press, United Kingdom, 2004.
- [78] M. Sonka, V. Hlavac, and R. Boyle. *Image Processing: Analysis and Machine Vision*. Brooks Cole, Mexico City, Mexico, 1998.
- [79] F. Van der Heijden. *Image based measurement systems, object recognition and parameter estimation*. John Wiley, Chichester, 1994.
- [80] F. M. Wahl. A new distance mapping and its use for shape measurement on binary patterns. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 23:218–226, 1983.
- [81] B. Wünsche and E. Tempero. A comparison and evaluation of interpolation methods for visualising discrete 2d survey data, 2004.
- [82] D. Zhang and G. Lu. Review of shape representation and description techniques. *Pattern Recognition*, 37:1–19, 2004.
- [83] Y. J. Zhang. A survey on evaluation methods for image segmentation. *Pattern Recognition*, 29(8):1335–1346, 1996.
- [84] L. Zusne. Moments of area and of the perimeter of visual forms as predictors of discrimination performance. *Journal of Experimental Psychology*, 69(3):213–220, 1965.