



**Universidad Nacional Autónoma de México**

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA



**Observación de sistemas no lineales mediante métodos de disipatividad y cooperatividad**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA

en el área de Control, campo de  
conocimiento en Ingeniería Eléctrica

**P R E S E N T A**

**JESÚS DAVID AVILÉS VELÁZQUEZ**

Dirigida por:

**Dr. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ**

**México D.F., Octubre 2008**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Índice general

1..	<i>INTRODUCCIÓN</i>	5
2..	<i>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</i>	14
2.1.	Conceptos Básicos	15
2.1.1.	Matrices	16
2.2.	Sistemas positivos y cooperativos	19
2.2.1.	Sistemas positivos	19
2.2.2.	Sistemas Cooperativos	22
2.2.3.	Relaciones de los sistemas positivos y cooperativos	24
2.2.4.	Observadores intervalo	25
2.3.	Método de disipatividad	27
2.4.	Radio de estabilidad de los sistemas lineales	30
2.4.1.	Relación entre el radio de estabilidad y el método disipativo	33
2.5.	Estabilidad entrada-estado	35
3..	<i>OBSERVADOR COOPERATIVO</i>	37
3.1.	Clase de sistemas considerados	39
3.2.	Metodología de diseño del observador cooperativo	42
3.2.1.	Método de disipatividad en el observador	42
3.2.2.	La cooperatividad en el observador	43
3.2.3.	Algoritmos de diseño del observador cooperativo	45
3.3.	Ejemplos	47
3.3.1.	Planta estable	48
3.3.2.	Planta inestable	56
4..	<i>OBSERVADORES INTERVALO</i>	60
4.1.	Estructura del observador intervalo	61
4.2.	Estabilidad del observador intervalo	65
4.3.	Ejemplos	69

**Índice general**

---

4.3.1. Planta estable . . . . .	69
4.3.2. Planta inestable . . . . .	71
5.. <i>CONCLUSIONES</i> . . . . .	74
<i>Apéndice</i>	76
A.. <i>PROPIEDAD DE SIMETRÍA</i> . . . . .	77

## Índice de figuras

1.1. Central nuclear . . . . .	7
2.1. Ubicación de los valores propio de una matriz Metzler. . . . .	18
2.2. Comportamiento de un sistema positivo de segundo orden. . . . .	19
2.3. Comportamiento de un sistema cooperativo de segundo orden . . . . .	22
2.4. Relaciones de los sistemas positivos y cooperativos. . . . .	24
2.5. Estructura del método del disipatividad. . . . .	30
2.6. Estructura del sistema perturbado (2.23). . . . .	31
3.1. Observador cooperativo para un sistema de segundo orden . . . . .	37
3.2. Estimado $x_1^+$ del observador cooperativo . . . . .	53
3.3. Estimado $x_1^+$ del observador cooperativo . . . . .	53
3.4. Estimado $x_1^+$ del observador cooperativo . . . . .	54
3.5. Estimado $x_1^-$ del observador cooperativo . . . . .	55
3.6. Estimado $x_2^-$ del observador cooperativo . . . . .	55
3.7. Estimado $x_3^-$ del observador cooperativo . . . . .	55
3.8. Convergencia de los errores de observación $e_1^+$ y $e_1^-$ . . . . .	58
3.9. Convergencia de los errores de observación $e_2^+$ y $e_2^-$ . . . . .	58
3.10. Convergencia de los errores de observación $e_3^+$ y $e_3^-$ . . . . .	58
3.11. El estado del sistema $\Pi_S$ diverge. . . . .	59
4.1. Comportamiento de los estimados del observador intervalo para $x_1$ . . . . .	70
4.2. Comportamiento de los estimados del observador intervalo para $x_2$ . . . . .	70
4.3. Comportamiento de los estimados del observador intervalo para $x_3$ . . . . .	70
4.4. Errores de observación del observador intervalo para $x_1$ . . . . .	72
4.5. Errores de observación del observador intervalo para $x_2$ . . . . .	72
4.6. Errores de observación del observador intervalo para $x_3$ . . . . .	72
4.7. El estado del sistema $\Psi_S$ diverge. . . . .	73

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas con el que se enfrenta a menudo un ingeniero en control es la falta de conocimiento de algunas variables de estado de los sistemas dinámicos, debido a que no pueden ser medibles porque los dispositivos de sensado no están disponibles, son muy costosos o la información que proporcionan no es confiable. Así que, para conocer todas las variables del estado se diseña un observador o estimador de estados que consta de una copia de la planta y una inyección de salida. Dicho observador es un sistema dinámico que genera una estimación del estado, permitiendo conocer un aproximado del valor real de este estado. En general, el problema de diseño de los observadores lineales está resuelto por el esquema del estimador de Luenberger (Luenberger, 1966) o por el filtro de Kalman (Kalman y Bucy, 1961), pero el problema de diseño de los observadores no lineales no está solucionado. Sin embargo, existen diversas técnicas para estimar al estado como los modos deslizantes (Davila y Fridman, 2004), la alta ganancia (Gauthier *et al.*, 1992; Gauthier y Kupka, 2001), la disipatividad (Moreno, 2004b), entre otros. El objetivo de ambos diseños se enfoca en asegurar la estabilidad de los observadores lineales y no lineales.

En los sistemas físicos existen variables de estado que tienden a alcanzar niveles críticos que ponen en riesgo el adecuado funcionamiento de dichos sistemas. Por tal motivo, en el presente trabajo se estudia el problema para acotar dinámicamente a la trayectoria del estado, tanto por encima como por debajo, con la finalidad de que cuando las variables del estado tiendan a exceder los niveles críticos, las cotas dinámicas rebasen primero a esos límites, previniendo al esquema de control del sistema de estos eventos y por consiguiente, se puedan realizar correcciones para evitar daños en dicho sistema.

---

Esto se puede lograr con observadores que preserven el orden, ya que sus estimados acotan dinámicamente al estado por arriba y por abajo. Debido a esto, dichos observadores son ampliamente utilizados como monitoreo de señales (sensores de software) en cualquier sistema físico, a pesar de tener la desventaja de poseer un comportamiento asintótico restringido.

En este trabajo se plantea una nueva metodología de diseño de los observadores que preservan el orden para una clase de sistemas no lineales sin la presencia de perturbaciones, y cuando estas existen. La metodología de diseño se basa en la conjunción del método de disipatividad (Moreno, 2004b) con la propiedad de cooperatividad (Angeli y Sontag, 2003; Hirsch y Smith, 2004), aplicados ambos a la dinámica del error de estimación. El procedimiento de diseño cuando no hay perturbaciones consiste en tomar la dinámica del error y descomponerla en un subsistema lineal e invariante en el tiempo con una no linealidad variante en el tiempo conectada en retroalimentación. Si la no linealidad es disipativa con respecto a una función de suministro entonces la parte lineal debe ser diseñada para ser disipativa con respecto a esa misma función para garantizar que el lazo cerrado sea exponencialmente estable y por lo tanto, se establece *la convergencia del observador*. Asimismo, si la dinámica del error de observación es un sistema cooperativo entonces, se asegura el ordenamiento de las trayectorias de dicho error y por consecuencia, *los estimados del observador acotan dinámicamente al estado tanto por encima como por debajo*. Los observadores que preservan el orden aunados con la convergencia se definen en este trabajo como ***observadores cooperativos***.

Esta metodología se extiende para manejar sistemas no lineales con perturbaciones (se modela a incertumbres del propio sistema y a variables exógenas). Para asegurar la cooperatividad en las dinámicas de los errores de estimación es necesario utilizar un par de observadores. La estabilidad de estos estimadores se garantiza usando la técnica de estabilidad entrada-estado (Khalil, 2002, (ISS)), ya que en este caso si las entradas están acotadas, los estados también estarán acotados. Estos estimadores son conocidos en la literatura como ***observadores intervalo***.

---

## Motivación

Una de las principales aplicaciones de los observadores que preservan el orden son los sistemas reactivos, por ejemplo los reactores nucleares. El objetivo de estos reactores es generar grandes cantidades de energía calorífica. Por ello son utilizados principalmente para la producción de corriente eléctrica. Con el calor de la reacción se transforma el agua líquida en vapor por recalentamiento de alta presión. Según el tipo de reactor, este vapor puede tener temperaturas de 200 a 300 °C, e incluso hasta de 500 a 700 °C, y alcanzar presiones de 200 bars. El vapor es conducido a turbinas de alto rendimiento que, a su vez, sirven para impulsar grandes generadores que producen finalmente la corriente eléctrica.

Las variables del estado del reactor nuclear, principalmente la temperatura y la presión, se pueden estimar a través del observador cooperativo, produciendo estimados que están por encima de dichas variables. El resultado es que cuando la temperatura y la presión tiendan a alcanzar sus estados críticos, los estimados del observador cooperativo exceden primero a dichos niveles, previniendo al puesto de control de la central nuclear de estos sucesos y por consecuencia, permiten realizar las correcciones necesarias para evitar daños en el reactor.

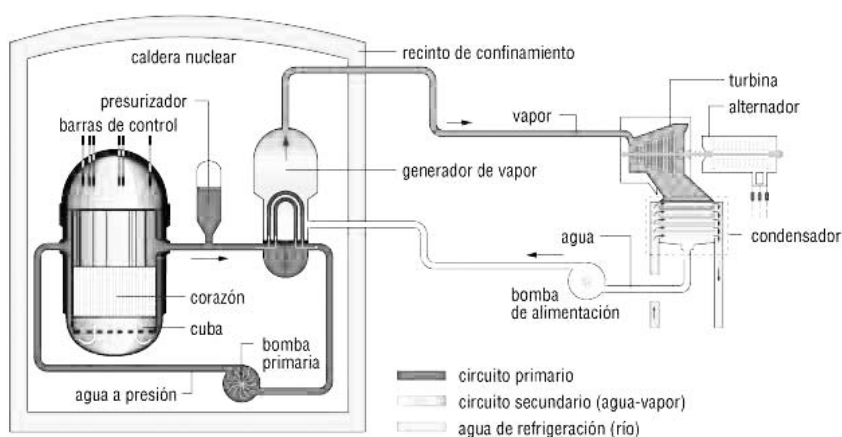


Fig. 1.1: Los observadores cooperativos e intervalo se utilizan en reactores nucleares.



---

## *Estado del arte*

Los observadores que se analizan en esta tesis son ampliamente utilizados en los procesos biológicos, químicos y bioquímicos. En la literatura se pueden encontrar diversos trabajos que relacionan a los observadores intervalo, ya que en los procesos no lineales frecuentemente se tiene la presencia de perturbaciones. Dichos observadores se fundamentan en la teoría de los sistemas cooperativos (Angeli y Sontag, 2003; Hirsch y Smith, 2004). En seguida se muestran algunos trabajos que han sido desarrollados en el área de control de procesos.

Los observadores lineales son deficientes para los procesos no lineales y por consecuencia, se necesitan métodos de diseños de observadores no lineales. En (Cicarrella *et al.*, 1993) el observador Luenberger y en (Ellis *et al.*, 1988; Adebekun y Schork, 1989) el filtro de Kalman se extienden para ser observadores no lineales de procesos químicos pero tienen el inconveniente de que no garantizan la convergencia global y además los resultados que se muestran son desarrollados usando un conocimiento perfecto del modelo del sistema y de sus parámetros. Esto se debe a que en las dinámicas de los procesos es difícil acotar al error de estimación tomando en cuenta la gran incertidumbre de esos parámetros. En (Bastin y Dochain, 1990) se presentan los observadores asintóticos (observadores con dinámicas desconocidas), los cuales proporcionan una solución cuando las condiciones iniciales y las dinámicas son desconocidas. Este diseño se basa en un cambio de variables vía una transformación del vector de estado y tiene la peculiaridad de que la estimación de las variables no medibles converge asintóticamente a sus valores verdaderos, aunque la velocidad de convergencia no se puede ajustar porque no depende la dinámica del sistema. En (Oliveira *et al.*, 2002) se presenta los observadores adaptables con la finalidad de estimar en línea los parámetros dinámicos de los bioreactores y asimismo, tienen la ventaja de que velocidad de convergencia se puede ajustar con una elección adecuada de ganancia. Sin embargo, estos observadores tienden a amplificar el ruido en las correspondientes mediciones de salida.

---

En la literatura existen pocos trabajos relacionados a la robustez con respecto a las perturbaciones desconocidas con aplicación en el área de control de procesos. Los observadores de modos deslizantes (Edwards y Spurgeon, 1994) representan una solución posible. Estos observadores se basan en la teoría de los sistemas de estructura variable pero su diseño involucra condiciones (matching conditions) de las perturbaciones que usualmente son difíciles de verificar. En (Martínez-Guerra *et al.*, 2004) se presenta un diseño de observador de modos deslizantes para reactores químicos con el propósito de estimar en línea la temperatura con ruido de dichos reactores. Este observador contiene incertidumbres no estructuradas dentro de la descripción del modelo y un término de modos deslizantes. Este diseño se basa en la técnica del álgebra diferencial y para alcanzar la robustez del observador se introduce el concepto de observabilidad algebraica para una clase de modelos con incertidumbres. En (Soroush, 1997) se propone un método de diseño de observadores para algunas clases de reactores. La estabilidad global y asintótica de la dinámica del error del observador se logra utilizando el método directo de Lyapunov para sistemas no autónomos pero la desventaja es que este diseño se basa en un conocimiento perfecto de la estructura del modelo.

En (Gouzé *et al.*, 2000) se estudian los observadores intervalo para una clase de sistemas no lineales con incertidumbres (sistema afín conectado en retroalimentación con una inyección de salida), los cuales son aplicados a los sistemas biológicos con la finalidad de estimar las variables no medibles o los parámetros de estos sistemas. El diseño de estos observadores se fundamenta en las propiedades de los sistemas cooperativos y se deben conocer las cotas de las incertidumbres, dando como resultado la obtención de las cotas dinámicas de los estimados de dichas variables. Estos modelos han sido validados experimentalmente en (Alcaraz-Gonzalez *et al.*, 2002). Después en (Rapaport y Dochain, 2005) se estudia el comportamiento de los observadores intervalo que se utilizan en los procesos bioquímicos y químicos con incertidumbres en las dinámicas y entradas, es decir, cuando se conoce la estructura del modelo pero no se conocen exactamente sus parámetros.

---

Estos observadores se basan en los estimadores asintóticos propuestos en (Bastin y Dochain, 1990; Dochain *et al.*, 1992) pero tiene la particularidad de que el error de estimación relacionado con la incertidumbre puede ser muy pequeño si se selecciona adecuadamente ganancia del observador. Finalmente en (Veloso *et al.*, 2007) se utilizan los observadores intervalo en el proceso de fermentación por alimentación por lotes de *E. coli*, con el objetivo de monitorear la concentración de la biomasa, ya que la dinámica del modelo tiene perturbaciones, y algunas variables del estado, como la concentración de substratos, son desconocidas. El resultado es que el intervalo de la estimación de la biomasa es muy estrecho, indicando que es posible predecir exactamente a la concentración de la biomasa bajo la presencia de incertidumbres.

## Objetivos

**Objetivo general:** Proponer y desarrollar una metodología de diseño de los observadores que preservan el orden, utilizando como herramientas la propiedad de cooperatividad y el método de disipatividad.

### **Objetivos particulares:**

1. Asociar el radio de estabilidad de los sistemas lineales con el método de disipatividad.
2. Extender la metodología de diseño para los *observadores intervalo*.
3. Incrementar el radio de estabilidad y mejorar la velocidad de convergencia a través de la inyección de salida de los observadores que se exponen en este trabajo.
4. Validar los resultados teóricos en simulación.

---

## *Contribución de la tesis*

En este trabajo se introduce el concepto de los observadores cooperativos y se plantea una metodología de diseño de estos observadores, la cual es aplicable a una amplia clase de sistemas no lineales. Dicha clase se puede representar como un subsistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) con una no linealidad conectada en retroalimentación (Moreno, 2004*b*). La metodología de diseño se basa en la conjunción del método de disipatividad con la propiedad de cooperatividad, ambos e aplicados a la dinámica del error de estimación. Con esta metodología se proponen dos algoritmos para construir un observador cooperativo, el primero es la forma general para obtenerlo y el segundo es un caso especial dado por la relación que existe entre el radio de estabilidad de los sistemas lineales bajo perturbaciones variantes en el tiempo con el método de disipatividad, resultando un cálculo matemático muy simple en comparación con el primer caso. Además, una aportación trascendente de este trabajo es que cuando se diseña un observador cooperativo con su estimado por encima del estado se asegura la existencia del observador cooperativo con el estimado por debajo del estado, ya que este último está solucionado por el primero, y viceversa. Por lo tanto, el resultado del diseño de un observador cooperativo es que los estimados acotan dinámicamente al estado tanto por encima como por debajo con la peculiaridad de que ambos estimados convergen a dicho estado.

El diseño de este observador se extiende a los observadores intervalo con la finalidad de utilizarlo en sistemas no lineales con perturbaciones, garantizando que los estimados de este observador acotan al estado dinámicamente tanto por arriba como por abajo para cualquier instante del tiempo. Los resultados anteriores se validan con un par de ejemplos. En el primero se considera una planta estable y el segundo a una planta inestable. En el ejemplo de la planta estable se obtienen resultados de incremento del radio de estabilidad y mejoramiento de la velocidad de convergencia; para el caso de la planta inestable se estabiliza a los estimadores. Lo anterior se alcanza a través de la inyección de salida de dichos estimadores.

---

## *ORGANIZACIÓN DE LA TESIS*

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en este capítulo se ha proporcionado una introducción de los observadores que preservan el orden, el estado del arte y los objetivos que se pretenden alcanzar en este proyecto de investigación. En el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos, que posteriormente son utilizados en la metodología de diseño de los observadores cooperativos. El capítulo consta de cuatro secciones en las que se presenta el concepto de orden parcial en el espacio vectorial y matricial, después se introducen los sistemas dinámicos positivos y cooperativos así como las relaciones existentes entre dichos sistemas. Luego se presenta el método de disipatividad con la finalidad de asegurar la estabilidad del observador cooperativo y por último se expone el concepto del radio de estabilidad para sistemas lineales con perturbaciones lineales estáticas y bajo perturbaciones no lineales variantes en el tiempo. Asimismo en esta sección se muestra el vínculo entre el método de disipatividad y el radio de estabilidad.

En el capítulo 3 se muestra la metodología de diseño del observador cooperativo y a través de ella se presentan un par de algoritmos de diseño. El primero es la forma general de construir este observador y el segundo es un caso especial para generarlo, el cual está dado por la relación entre el método de disipatividad y el radio de estabilidad con la ventaja de reducir el cálculo matemático que se presenta en el primer caso. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos en simulación con un par de ejemplos. En el capítulo 4 se extiende la metodología de diseño del observador cooperativo a los observadores intervalo. La razón es que al considerar el observador cooperativo para un sistema con perturbaciones, la cooperatividad en las dinámicas de los errores de observación se pierde. Para recuperarla es necesario construir un par de observadores, los cuales forman un observador intervalo y que se describen en la primera sección.

---

En la segunda sección se analiza la estabilidad de los observadores intervalo a través de las dinámicas de los errores de estimación, las cuales tienen un comportamiento que es descrito mediante el concepto de estabilidad entrada-estados. En la tercera sección se plantea un algoritmo de diseño para esta clase de observadores. Finalmente se muestran los resultados en simulación con un dos ejemplos. Por último, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones de la tesis y se indica el trabajo futuro para complementar los resultados obtenidos.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El propósito de este capítulo es introducir los conceptos de los sistemas dinámicos utilizados para el diseño de los observadores que preservan el orden, así como una estructura especial de los sistemas lineales con perturbaciones, la cual es ligada con la del observador. En la primera sección se define la representación de un orden parcial y se presentan las conceptualizaciones de las matrices positivas, no negativas (positivas o cero) y Metzler (Luenberger, 1979). En particular, la matriz Metzler es una extensión de las dos primeras y su importancia se debe a que caracteriza a los sistemas positivos y cooperativos, los cuales tienen ciertas características en común. Los sistemas positivos son aquellos que siempre preservan la no negatividad en sus variables de entrada, salida y del estado (Luenberger, 1979). Los sistemas cooperativos son aquellos que fundamentan la conservación del orden entre las trayectorias del estado, de la entrada y de la salida (Angeli y Sontag, 2003) y son descritos en la segunda sección. En la tercera sección se expone el método de disipatividad con la finalidad de asegurar la estabilidad del observador cooperativo, dicho método se aplica en la estructura del error de observación (Moreno, 2004*b*). En la sección 4 se presenta el concepto radio de estabilidad de los sistemas con perturbaciones lineales (Hinrichsen y Pritchard, 1986) y no lineales variantes en el tiempo (Son y Hinrichsen, 1996), este último tiene una forma idéntica con la del método disipativo, resultando una relación de donde se obtiene un cálculo sencillo para garantizar la convergencia del observador cooperativo. Cabe señalar que en esta tesis sólo se manejan los conceptos para sistemas dinámicos en tiempo continuo.

## 2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

---

### 2.1. Conceptos Básicos

A lo largo del presente trabajo se utiliza el símbolo  $\succeq$  para realizar comparaciones entre vectores y matrices. En seguida se presenta su definición.

**Definición 1:** El símbolo  $\succeq$  define un *orden parcial* en el espacio de vectores y matrices, lo cual esta denotado mediante

$$x \succeq y \Leftrightarrow x - y \succeq 0 \text{ cuando } x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$M \succeq N \Leftrightarrow M - N \succeq 0 \text{ cuando } M, N \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Particularmente, representa la *no negatividad* de los vectores y matrices tal que,

$$x \succeq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$M \succeq 0 \Leftrightarrow M_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \triangle$$

Es decir, este operador  $\succeq$  es interpretado como un conjunto de desigualdades aplicadas componente a componente, tal que se cumple  $x \succeq y$  cuando ocurre para todos sus elementos  $x_i \geq y_i$ , y en un caso especial cuando  $x_i \geq 0$ . Cabe mencionar que el símbolo  $\geq$  se emplea para definir las matrices semidefinidas positivas y las comparaciones entre cantidades escalares.

En esta tesis con frecuencia se hace mención al cuadrante no negativo del espacio Euclidiano de los sistemas dinámicos que se utilizan en el diseño del observador estudiado en este trabajo. A continuación se presenta la definición de esta región.

**Definición 2:** La región no negativa de los vectores reales queda definida por

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n\}$$

de manera equivalente,

$$x \in \mathbb{R}_+^n \Leftrightarrow x \succeq 0 \quad \triangle$$



## 2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

---

### 2.1.1. Matrices

En este apartado se estudia el caso particular del orden parcial definido para el espacio de matrices. Específicamente se citan a tres tipos de matrices, las cuales tienen ciertas relaciones entre sí y son usadas en las secciones posteriores.

#### *Matrices positivas*

**Definición 3:** La matriz  $P = [p_{ij}]$  es **positiva** si todos sus elementos son mayores que cero, lo que se describe por,

$$P \succ 0 \quad \text{si } p_{ij} > 0, \quad \forall_{i,j}. \quad \triangle$$

En particular, la definición anterior también se aplica para el caso vectorial. El concepto de una matriz positiva es completamente diferente al de una matriz definida positiva, ya que en la primera se pide que todos sus elementos sean mayores que cero, mientras en la segunda se debe cumplir que los menores principales de la matriz sean positivos.

La *principal característica* de una matriz positiva  $P$  es que posee un valor propio positivo dominante ( $\lambda_0 > 0$ ) en su espectro  $\rho(P)$ . Dicha característica se muestra en el siguiente teorema (Luenberger, 1979)

**Teorema 1 (Frobenius – Perron):** Si  $A \succ 0$ , entonces  $\exists \lambda_0 > 0$  y  $x_0 \succ 0$  tales que,

1.  $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ .
2. Si  $\lambda \neq \lambda_0$  es algún otro valor propio de  $A$ , entonces  $|\lambda| < \lambda_0$ .
3.  $\lambda_0$  es un valor propio de multiplicidad algebraica y geométrica 1.  $\diamond$

Lo anterior asegura la existencia del valor propio  $\lambda_0 > 0$  conocido como *valor propio de Frobenius* y de un correspondiente vector propio  $x_0 \succ 0$ . Nótese que esto significa que para el sistema dinámico  $\dot{x} = Ax$ , las trayectorias del estado convergen de forma asintótica al espacio generado por dicho vector propio.

## 2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

---

### Matrices No Negativas

**Definición 4:** La matriz  $P$  es *no negativa* si todos sus elementos son no negativos, lo cual está descrito por,

$$P \succeq 0 \quad \text{si } p_{ij} \geq 0 \quad \forall_{i,j}.$$

o de manera equivalente,

$$P \in \mathbb{R}_+^{n \times m} \Leftrightarrow P \succeq 0 \quad \triangle$$

A continuación se muestra la extensión del teorema del Frobenius-Perron a esta clase de matrices.

**Teorema 2:** Sea  $P \succeq 0$ . Entonces existe  $\lambda_0 \geq 0$  y  $x_0 \succeq 0$  tales que,

1.  $Px_0 = \lambda_0 x_0$
2. Si  $\lambda \neq \lambda_0$  es algún otro valor propio de  $A$ , entonces  $|\lambda| \leq \lambda_0$ .  $\diamond$

### Matrices Metzler

La mayoría de los resultados que existen en las matrices positivas se amplían a las matrices no negativas, que a su vez se relacionan con las matrices Metzler (Luenberger, 1979).

**Definición 5:** Una matriz  $A$  es *Metzler o cooperativa* si todos los elementos fuera de la diagonal de la matriz  $A$  son no negativos, es decir,  $a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$ .  $\triangle$

Esta matriz tiene la propiedad de poseer un valor propio real  $\mu_0$  y un vector propio  $x \succeq 0$ . Esto se obtiene ya que si la matriz  $A$  es Metzler y existe una constante  $\alpha > 0$  tal que la matriz  $P = \alpha I + A$  es no negativa. Entonces el espectro  $\rho(P)$  tiene un valor propio dominante  $\lambda_0 \geq 0$  dado por el teorema de Perron-Frobenius. Por consiguiente, existe un valor propio real dominante  $\mu_0 = \lambda_0 - \alpha$  (Fig. 2.1) de la matriz  $A$  ( $\dot{x} = Ax = (P - \alpha I)x$ ) con su correspondiente vector propio no negativo  $x_0 \succeq 0$ .

## 2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

---

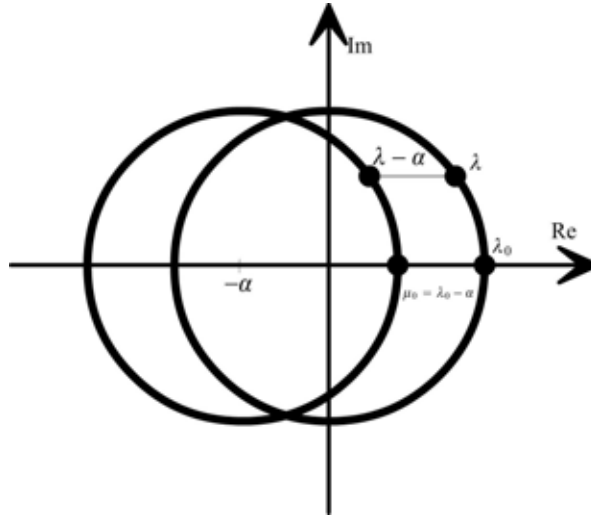


Fig. 2.1: Ubicación de los valores propio de una matriz Metzler.

El siguiente lema (Son y Hinrichsen, 1996) es una herramienta útil para la comparación de los valores propios de una matriz Metzler perturbada.

**Lema 1:** Sean las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$

$$|C| \leq B \quad \Rightarrow \quad \lambda_0(A + C) \leq \mu_0(M(A) + B) \quad (2.1)$$

donde  $M(A) = A_d + |A_o| = A_d + |A - A_d|$  es la matriz Metzler de  $A$  y  $A_d = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ , y  $\mu_0$  es el valor propio de Frobenius de la matriz Metzler y  $\lambda_0$  es el valor propio dominante de la matriz  $A$ . En un caso en particular

$$\lambda_0(A) \leq \mu_0(M(A)) \quad (2.2)$$

Si  $A$  es una matriz Metzler,

$$\mu_0(A) \leq \mu_0(A + B) \quad \diamond \quad (2.3)$$

La importancia de la matriz Metzler es que caracteriza a los sistemas dinámicos que se estudian en este trabajo. Si estos sistemas se describen a través de esta matriz, entonces las trayectorias del estado convergen al cuadrante no negativo ( $\mathbb{R}_+^n$ ).

## 2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

---

### 2.2. Sistemas positivos y cooperativos

En esta sección se estudia el comportamiento dinámico de los sistemas positivos y cooperativos, los cuales tienen ciertas características en común y se utilizan en el capítulo de diseño de los observadores que preservan el orden.

#### 2.2.1. Sistemas positivos

En la actualidad existen diversos sistemas físicos como los biológicos, mecánicos, químicos, fisiológicos, entre otros, cuyas variables de estado de entrada y salida expresan cantidades con información real mediante valores no negativos [ $x(t) \succeq 0$ ,  $u(t) \succeq 0$ , y  $y(t) \succeq 0$ ]. En la literatura, estos sistemas se conocen como *sistemas positivos*.

La característica más importante de estos sistemas es que si la condición inicial del estado [ $x(0)$ ] está en el cuadrante no negativo del espacio Euclidiano ( $\mathbb{R}_+^n$ ) entonces, la trayectoria del estado [ $x(t)$ ] permanece ahí para todo tiempo futuro. Debido a esto, los sistemas positivos tienen un comportamiento dinámico (asintótico) restringido. A continuación se describen a los sistemas dinámicos positivos.

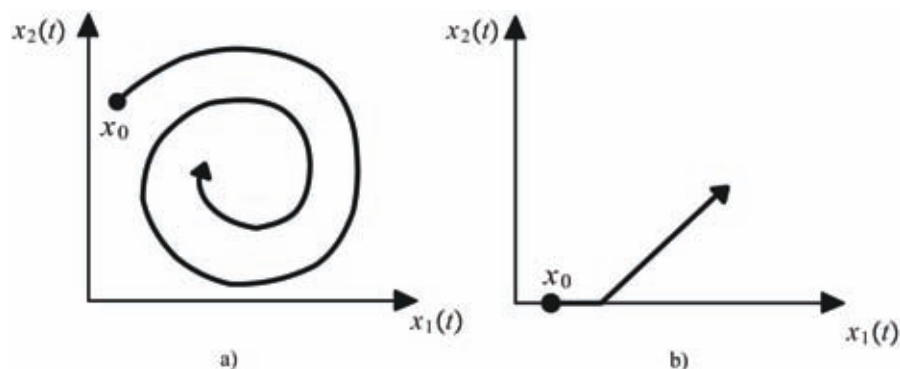


Fig. 2.2: Dos trayectorias a) y b) obtenidas al aplicar una entrada no negativa a un sistema positivo de segundo orden

## 2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

---

### *Sistema No Lineal Positivo*

Considere el sistema no lineal dado por

$$\Sigma_{NL} \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & x(0) = x_0 \\ y = h(t, x, u) \end{cases} \quad (2.4)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el *estado*, el cual representa el comportamiento interno del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida del sistema y  $t \in \mathbb{R}$  es la variable del tiempo.

**Definición 6:** El sistema  $\Sigma_{NL}$  (2.4) es **positivo** si

$$x_0 \succeq 0, \quad u(t) \succeq 0 \Rightarrow x(t) \succeq 0, \quad y(t) \succeq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \triangle$$

De la definición anterior, el sistema  $\Sigma_{NL}$  es positivo si *las trayectorias*  $[x(t, x_0)]$  generadas por el sistema  $\Sigma_{NL}$  (influidas por una entrada no negativa y con condición inicial no negativa) *permanecen en la región no negativa* para todo tiempo futuro. Esto equivale a decir que el sistema  $\Sigma_{NL}$  es **positivo** si y sólo si, el cuadrante  $\mathbb{R}_+^n$  es un **conjunto invariante positivo**. La caracterización de los sistemas no lineales positivos (sin entrada ni salida) está dada por la siguiente proposición.

**Proposición 1:** El sistema  $\Sigma_{NL}$  (2.4) sin entrada es positivo  $\Leftrightarrow$

$$f_i(x_1 \geq 0, \dots, x_i = 0, \dots, x_n \geq 0) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \diamond$$

Lo anterior significa que las trayectorias del estado nunca abandonan la región no negativa  $[x(t) \succeq 0]$  y además, si alguna variable del estado es cero entonces, la dirección de movimiento de la trayectoria siempre es no negativa  $[f_i(x(t)) \succeq 0]$ , permaneciendo siempre en  $\mathbb{R}_+^n$ . En la Figura (2.2) se muestra el comportamiento de un sistema positivo de segundo orden, cuyo cuadrante no negativo es un conjunto invariante, donde toda trayectoria que emana de esta región permanece ahí para todo tiempo futuro.

## 2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

---

### *Sistema Lineal Positivo*

Los sistemas lineales positivos tienen un comportamiento asintótico limitado, el cual está relacionado con el teorema algebraico de Frobenius y Perron (ver pag. 16), ya que asegura la existencia de un valor propio real dominante y de su correspondiente vector propio no negativo, donde las trayectorias del sistema convergen asintóticamente al subespacio generado por tal vector propio.

Sea el sistema lineal dado por

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(0) = x_0 \\ y = C(t)x, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  son matrices variantes en el tiempo, y  $(x, u, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  son los vectores de estado, entrada y salida respectivamente.

**Proposición 2:** El sistema  $\Sigma_L$  (2.5) es **positivo**  $\Leftrightarrow$

1. La matriz  $A$  es *Metzler* [ $a_{ij}(t) \geq 0$ ,  $\forall(i, j)$  tal que  $i \neq j$ ].
2. La matriz  $B$  es no negativa ( $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ ).
3. La matriz  $C$  es no negativa ( $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ ).  $\diamond$

La proposición anterior (Luenberger, 1979) muestra la caracterización de la propiedad de positividad en el sistema  $\Sigma_L$  (2.5). Dicha caracterización se refiere a que si la entrada tiene una influencia no negativa en todas las variables del estado y además, la condición inicial es no negativa del sistema  $\Sigma_L$  (2.5) entonces, se garantiza que las trayectorias del estado nunca abandonan el cuadrante  $\mathbb{R}_+^n$  y asimismo, la salida es no negativa. Esto se debe a que la dirección de movimiento de la trayectoria  $x(t)$  es no negativa [ $\dot{x}_i(t) \succeq 0$ ], provocando que  $x(t)$  siempre tienda a la región no negativa (ver Fig. 2.2), lo cual está dado si los elementos fuera de la diagonal de la matriz  $A$  son mayores o iguales que cero.

## 2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

---

### 2.2.2. Sistemas Cooperativos

Los sistemas cooperativos constituyen una clase importante de los sistemas dinámicos debido a su comportamiento. Estos sistemas son *aquellos que sus trayectorias preservan el orden parcial en el estado, en la entrada y en la salida* (Angeli y Sontag, 2003), cuya caracterización esta dada en la siguiente definición.

**Definición 7:** El sistema no lineal  $\Sigma_{NL}$  (2.4) es *cooperativo* si

$$x_0^1 \succeq x_0^2, \quad u^1(t) \succeq u^2(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.6)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x(t, t_0, x_0^1, u^1(t)) &\succeq x(t, t_0, x_0^2, u^2(t)) \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.7) \\ h \circ x(t, t_0, x_0^1, u^1(t)) &\succeq h \circ x(t, t_0, x_0^2, u^2(t)) \quad \Delta \end{aligned}$$

Por lo tanto, la propiedad de cooperatividad produce un ordenamiento en las trayectorias del estado y de la salida. En la figura (2.3) se muestra el comportamiento de un sistema cooperativo de segundo orden en las trayectorias  $x(t)$ .

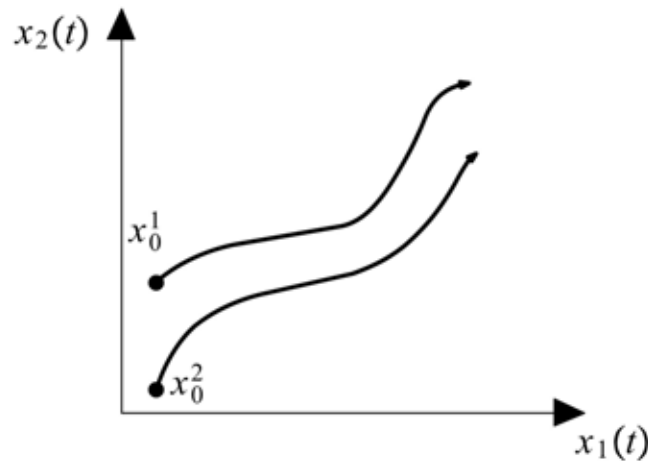


Fig. 2.3: Un sistema cooperativo preserva el orden en las trayectorias del estado

## 2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

---

### *Sistema No Lineal Cooperativo*

En los sistemas cooperativos (Hirsch y Smith, 2004) cada variable del estado tiene una influencia no negativa de las otras variables del estado, y la entrada tiene una influencia no negativa en estas variables, lo cual está relacionado en la caracterización de dichos sistemas. A continuación se describe a los sistemas no lineales cooperativos.

**Proposición 3:** El sistema  $\Sigma_{NL}$  (2.4) es *cooperativo*  $\Leftrightarrow$ ,

1.  $\left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$  es Metzler ( $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0, \forall i \neq j$ ),
2.  $\left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right] \succeq 0$ ,
3.  $\left[ \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right] \succeq 0$   $\diamond$

### *Sistema Lineal Cooperativo*

Particularmente, la caracterización de los sistemas lineales cooperativos está dada por,

**Proposición 4:** El Sistema Lineal  $\Sigma_L$  (2.5) es *cooperativo*  $\Leftrightarrow$ ,

1.  $A$  es una matriz Metzler ( $a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$ ),
2.  $B \succeq 0$ ,
3.  $C \succeq 0$ .  $\diamond$

Comparando la *proposición 2* y *4* se obtiene que para sistemas lineales la cooperatividad y la positividad son equivalentes.



## 2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

---

### 2.2.3. Relaciones de los sistemas positivos y cooperativos

En base a los conceptos de los sistemas positivos y cooperativos que se presentan arriba se obtienen las siguientes relaciones,

1. En el caso no lineal:

El sistema  $\Sigma_{NL}$  (2.4) cooperativo es positivo si  $f(t, 0, 0) \succeq 0$  (Mailleret, 2004). Pero no todo sistema positivo es cooperativo.

2. En el caso lineal:

El sistema  $\Sigma_L$  (2.5) cooperativo es equivalente al sistema  $\Sigma_L$  positivo.

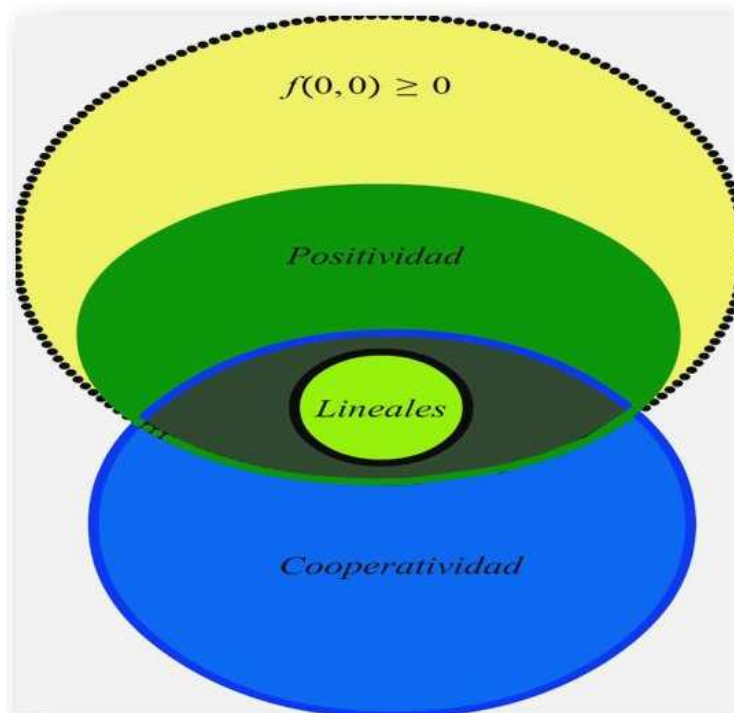


Fig. 2.4: Relaciones de los sistemas positivos y cooperativos.

## 2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

---

En la figura (2.4) se bosquejan los sistemas dinámicos positivos y cooperativos con sus respectivas intersecciones, las cuales muestran las relaciones entre dichos sistemas. La relación en el caso no lineal se refiere a que, un sistema cooperativo es positivo si se garantiza que  $f(t, 0, 0) \succeq 0$ . Sin embargo, no todo sistema positivo es cooperativo, ya que las trayectorias del estado permanecen en el cuadrante no negativo pero no siempre satisfacen el ordenamiento de dichas trayectorias, la cual se basa en la conservación del orden parcial de las trayectorias de estado. La relación en el caso lineal es que los sistemas cooperativos y positivos son equivalentes. Esto se debe a que los sistemas lineales tienen un punto de equilibrio en el origen el cual representa la condición inicial y por lo tanto, prevalece la no negatividad de las trayectorias del estado y de la salida.

### 2.2.4. Observadores intervalo

Los observadores intervalo están basados en las propiedades de los sistemas cooperativos (mencionadas arriba) y son sistemas dinámicos auxiliares, los cuales aseguran que sus estimados acotan dinámicamente a las trayectorias del estado. Esta clase de estimadores aceptan incertidumbres en sus dinámicas pero se requiere el conocimiento de las cotas de dichas incertidumbres (Gouzé *et al.*, 2000; Rapaport y Dochain, 2005). Estos observadores son aplicables a una clase de sistemas no lineales con incertidumbres, que a su vez representa a modelos biológicos y procesos químicos. A continuación se enuncia la conceptualización de estos observadores.

**Definición 8:** Un *observador intervalo* es un conjunto de observadores que forman un intervalo entre una cota superior e inferior (dinámicamente), asegurando que el estado se encuentra dentro de dicho intervalo.

Considérese el siguiente sistema no lineal (Moisan, 2007),

$$\Omega_D \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u, d), & x(0) = x_0 \\ y = h(t, x, u) \end{cases} \quad (2.8)$$

## 2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

---

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida,  $d \in \mathbb{R}^n$  es el término de perturbación, el cual representa tanto a incertidumbres del sistema o como a las variables exógenas. Se asume que se conocen las cotas de la perturbación y que satisfacen,

$$d^+(t, y) \succeq d(t, x) \succeq d^-(t, y) \quad (2.9)$$

Considere el siguiente par de observadores

$$\Omega_{OD} \begin{cases} \dot{z}^+ = f^+(t, z^+, d^+, u, y), & z(0)^+ = h^+(x_0) \\ \dot{z}^- = f^-(t, z^-, d^-, u, y), & z(0)^- = h^-(x_0) \end{cases} \quad (2.10)$$

donde  $z^+, z^- \in \mathbb{R}^n$  son los estimados del estado de estos observadores. Sean los errores de observación  $e^+ = z^+ - x$  y  $e^- = x - z^-$ . Entonces las dinámicas de dichos errores son:

$$\dot{e}^+ = g(e^+, c^+), \quad e^+(0) = e_0^+ \quad (2.11)$$

$$\dot{e}^- = g(e^-, c^-), \quad e^-(0) = e_0^- \quad (2.12)$$

donde  $c^+ = d^+(t, y) - d(t, x)$  y  $c^- = d(t, x) - d^-(t, y)$ . Si las dinámicas (2.11) y (2.12) son sistemas cooperativos (proposición 3) entonces, las trayectorias de los errores de observación  $e^+(t)$  y  $e^-(t)$  preservan el orden. Por consiguiente, el conjunto de observadores  $\Omega_{OD}$  (2.10) forman un *observador intervalo* si y solo si se cumple que el estado del sistema esta acotado dinámicamente por los estimados de dicho observador  $\Omega_{OD}$ , es decir,

$$z^+(0) \succeq x(0) \succeq z^-(0) \Rightarrow z^+(t) \succeq x(t) \succeq z^-(t) \quad (2.13)$$

En general, esta clase de observadores garantiza el ordenamiento de las trayectorias del estado (2.13) bajo la suposición de conocer el acotamiento de la perturbación (2.9). Sin embargo, no se exige la estabilidad en los observadores intervalo y como consecuencia de esto, los estimados  $z^+(t)$  y  $z^-(t)$  pueden diverger aunque  $c^+ \rightarrow 0$  y  $c^- \rightarrow 0$ . Debido a esto, en el capítulo 4 se propone una metodología de diseño que asegura tanto la cooperatividad como la estabilidad con respecto a las perturbaciones de los observadores intervalo.

### 2.3. Método de disipatividad

En este trabajo, las propiedades de estabilidad del método de disipatividad se utilizan en el capítulo de diseño del observador cooperativo con la finalidad de asegurar la convergencia de su estimado. Esto se puede realizar al descomponer la estructura de la dinámica del error de observación en subsistemas que poseen las propiedades disipativas, obteniendo una representación dada por la interconexión de un sistema lineal e invariante en el tiempo con una no linealidad estática en retroalimentación (Moreno, 2004b). A continuación se enuncian los conceptos más importantes de este tema.

Este método de diseño ha tenido un importante auge en la teoría de control moderna, ya que al aplicarse a los sistemas físicos sus modelos matemáticos expresan formalmente la ley de conservación de energía, teniendo como significado físico que la cantidad de energía almacenada en el interior de los sistemas es siempre menor ó igual a la cantidad que ha sido suministrada de otros sistemas, lo que equivale a decir que estos *sistemas son capaces de almacenar y consumir energía pero no de generarla*.

**Definición 9:** (Willems, 1972b) El sistema  $\Sigma_{NL}$  (2.4) LTI es **disipativo** si  $\exists$  una *función de almacenamiento de energía (interna)*  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (continua y positiva semidefinida) y una *función de suministro de energía (externa)*  $w : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  tales que se satisface la desigualdad,

$$V(x(t)) \leq V(x_0) + \int_0^t w(u(\tau), y(\tau)) d\tau; \quad \forall (x_0, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad \triangle \quad (2.14)$$

Los sistemas pasivos constituyen el caso especial más importante de los sistemas disipativos (con  $m = p$ ) cuando,

$$\dot{V}(x(t)) \leq w(u(t), y(t)) = y^T u; \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (2.15)$$

Las funciones de almacenamiento de energía comúnmente están dadas por funciones cuadráticas del estado. A continuación se presenta el método disipativo.

### 2.3. MÉTODO DE DISIPATIVIDAD

---

Considérese una función de suministro cuadrática dada por,

$$\begin{aligned} w(y, u) &= \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \\ &= y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  con  $Q$  y  $R$  simétricas

**Definición 10:** El sistema (LTI)  $\Sigma_L$  (2.5) es *de estado estrictamente disipativo (SSD)* con respecto a una función de suministro  $w(y, u)$  (2.16), o en forma corta (Q,S,R)-SSD, si  $\exists$  una matriz  $P = P^T > 0$  y una constante  $\epsilon > 0$  tal que se satisface la desigualdad disipativa:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0 \quad \Delta \quad (2.17)$$

**Definición 11:** Una *no linealidad estática variante en el tiempo*

$$y = f(t, u) \quad (2.18)$$

continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ , tal que  $f(t, 0) = 0$  es *disipativa* con respecto a la función de suministro  $w(y, u)$  (2.16) ó en forma corta (Q,S,R)-D si  $\forall t \geq 0$  y  $u \in \mathbb{R}^m$ ,

$$w(y, u) = w(f(t, u), u) \geq 0 \quad \Delta \quad (2.19)$$

Las condiciones de sector clásicas para no linealidades cuadradas (Khalil, 2002), es decir,  $m = p$ , pueden representarse en la siguiente forma.

1. Si  $f$  está en el sector  $[K_1, K_2]$ , es decir,  $(y - K_1 u)^T (K_2 u - y) \geq 0$  entonces es:

$$(Q, S, R) = \left( -I, \frac{1}{2} (K_1 + K_2), -\frac{1}{2} (K_1^T K_2 + K_2^T K_1) \right) - D$$

### 2.3. MÉTODO DE DISIPATIVIDAD

---

2. Si  $f$  esta en el sector  $[K_1, \infty]$ , es decir,  $(y - K_1 u)^T u \geq 0$  entonces es:

$$\left( 0, \frac{1}{2}I, -\frac{1}{2}(K_1 + K_1^T) \right) - D$$

**Lema 2:** Sea la interconexión de la retroalimentación

$$\Xi_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y = Cx(t) \\ u = -f(t, y) \end{cases} \quad (2.20)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  y  $y \in \mathbb{R}^p$  son los vectores de estado, entrada y salida, respectivamente. Si

- $f(t, y)$  es  $(Q_N, S_N, R_N) - D$ , y
- $\Xi_L$  LTI es  $(-R_N, S_N^T, -Q_N) - SSD$

$\Rightarrow$

El punto de equilibrio  $x = 0$  del *lazo cerrado es global y exponencialmente estable*.  $\diamond$

El lema anterior representa la estructura principal del método disipatividad, y se refiere a que si la no linealidad  $f$  es  $(Q, S, R)$ -D con respecto a una función de suministro cuadrática entonces, la parte lineal tiene que ser diseñada  $(-R, S^T, -Q)$ -SSD con respecto a una función de suministro complementaria, lo cual produce que la interconexión sea global y exponencialmente estable.

La figura (2.5) muestra el lazo cerrado  $\Xi_L$  (2.20). Este esquema se usa en el siguiente capítulo del diseño del observador cooperativo, debido a que la dinámica del error de observación tiene un arreglo idéntico al de la figura (2.5).

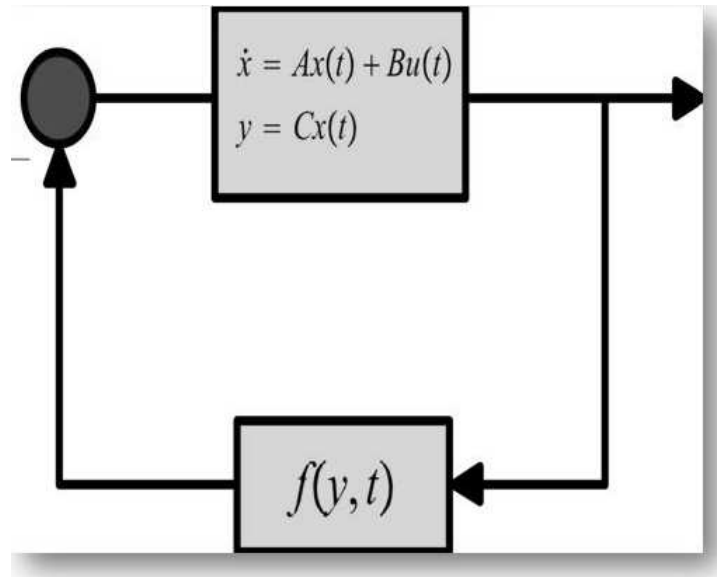


Fig. 2.5: Estructura del método de disipatividad.

#### 2.4. Radio de estabilidad de los sistemas lineales

En esta tesis se relaciona la estructura del radio de estabilidad bajo perturbaciones no lineales variantes en el tiempo con la del método disipatividad ya que poseen la misma estructura. El resultado de esta relación es un cálculo más sencillo para asegurar la convergencia del observador que se analiza en este trabajo, lo cual se utiliza en el capítulo de diseño de dicho observador. En seguida se mencionan las principales conceptualizaciones de este tema.

El radio de estabilidad está dado sólo para los sistemas lineales, y a su vez garantiza que bajo perturbaciones (lineales o no lineales) dichos sistemas permanecen estables.

Considérese el sistema lineal autónomo dado por

$$\dot{x} = Ax \tag{2.21}$$

donde  $x$  es el estado del sistema y la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es Hurwitz.

#### 2.4. RADIO DE ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS LINEALES

Si el sistema (2.21) esta sujeto a *perturbaciones estructuradas*, esto puede ser expresado por

$$A \rightarrow A + B\Delta C \quad (2.22)$$

donde  $(B, C) \in \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{r \times n}$  son matrices que definen la estructura de las perturbaciones y  $\Delta$  es una matriz de perturbaciones desconocida.  $\Delta$  puede tomar tres diferentes clases de matrices: compleja, real y no negativa (es decir,  $\Delta \in \mathbb{C}^{m \times r}$ ,  $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $\Delta \in \mathbb{R}_+^{m \times r}$ ). En particular, este tipo de perturbaciones incluyen perturbaciones no estructuradas ( $D = E = I_n$ ) (Hinrichsen y Pritchard, 1986) como también perturbaciones que sólo afectan a entradas individuales o entradas en ciertos renglones o columnas de la matriz  $A$ . Entonces, el sistema perturbado está dado por la forma

$$\dot{x} = (A + B\Delta C)x, \quad \|\Delta\| < \gamma \quad (2.23)$$

donde  $A$  es Hurwitz,  $\|\Delta\|$  es el tamaño de la perturbación lineal y  $\gamma > 0$  es la cota de dicha perturbación.

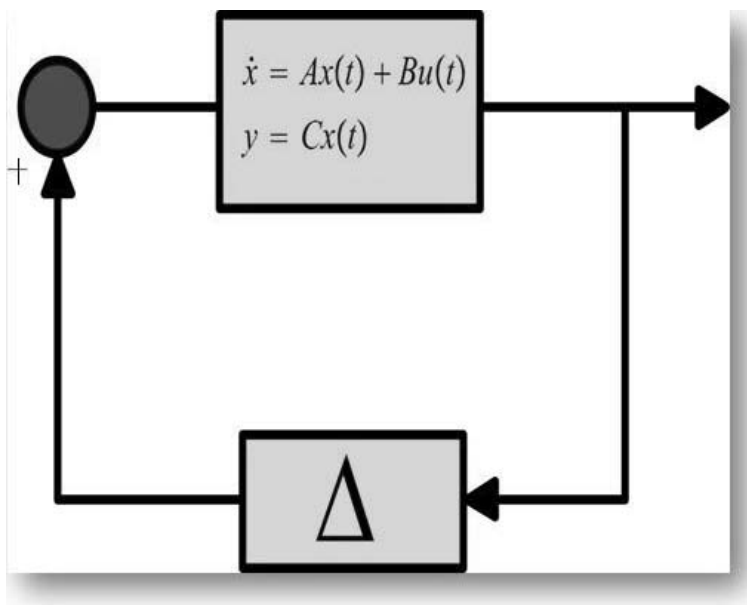


Fig. 2.6: Estructura del sistema perturbado (2.23).



## 2.4. RADIO DE ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS LINEALES

---

La estructura del sistema perturbado (Fig. 2.6) es semejante a la estructura del sistema (2.20) (Fig. 2.5) que fue estudiado por métodos disipativos en la sección anterior, diferenciando que en la primera estructura está dada por una retroalimentación con una no linealidad variante en el tiempo, mientras que en la segunda está dada por una linealidad estática (perturbación). Más adelante en esta sección se estudia el radio de estabilidad del sistema (2.21) bajo perturbaciones no lineales, el cual tiene el mismo modelo que (2.20).

Para la terna  $(A; B, C)$  con  $\Delta \in \mathbb{K}^{m \times p}$  con  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ó  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{R}_+$  se definen 3 radios de estabilidad.

**Definición 12:** El radio de estabilidad para el sistema (2.23) se define como

$$r_{\mathbb{K}} = r_{\mathbb{K}}(A; B, C) = \inf \{ \|\Delta\| \in \mathbb{K}^{m \times p}; \lambda(A + B\Delta C) \cap \overline{\mathbb{C}}_+ \neq \emptyset \} \quad (2.24)$$

donde  $\overline{\mathbb{C}}_+ = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s \geq 0\}$ .  $\triangle$

Lo anterior significa que el **radio de estabilidad** es la cota más pequeña de la perturbación  $\|\Delta\|$  que *desestabiliza al sistema perturbado*. El radio de estabilidad tiene la propiedad,

$$0 \leq r_{\mathbb{C}}(A; B, C) \leq r_{\mathbb{R}}(A; B, C) \leq r_{\mathbb{R}_+}(A; B, C) \quad (2.25)$$

y además, el radio de estabilidad complejo se puede calcular mediante la ecuación

$$r_{\mathbb{C}}(A; B, C) = \frac{1}{\max_{\omega \in \mathbb{R}} \|C(j\omega I - A^{-1})B\|} \quad (2.26)$$

En particular, si el sistema perturbado (2.23) es positivo ( $A$  es Metzler,  $B \succeq 0$ ,  $C \succeq 0$ ) entonces, los tres radios de estabilidad son equivalentes (Son y Hinrichsen, 1996) y su cálculo es más sencillo,

$$r_{\mathbb{C}} = r_{\mathbb{R}} = r_{\mathbb{R}_+} \quad \text{con} \quad r_{\mathbb{C}} = \frac{1}{\|CA^{-1}B\|} \quad (2.27)$$

## 2.4. RADIO DE ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS LINEALES

---

Esto se debe a que los sistemas positivos siempre alcanzan el máximo valor del radio de estabilidad cuando la frecuencia  $\varpi = 0$ .

Nótese que si (2.23) en  $\gamma < r_{\mathbb{C}}$  entonces, el punto de equilibrio  $x = 0$  es exponencialmente estable.

### 2.4.1. Relación entre el radio de estabilidad y el método disipativo

El radio de estabilidad complejo del sistema (2.23) se caracteriza por la ecuación algebraica de Riccati (Hinrichsen y Pritchard, 1986) dada por

$$A^T P_{\gamma} + P_{\gamma} A + \epsilon P_{\gamma} + \gamma C^T C + P_{\gamma} B B^T P_{\gamma} = 0 \quad (2.28)$$

donde  $P$  es la solución de dicha ecuación.

**Proposición 5:** Suponga que  $\rho(A) \in \mathbb{C}_-$ . Si existe una solución de (2.28) con  $P_{\gamma} = P_{\gamma}^T > 0$  y  $\epsilon > 0$  entonces, necesariamente  $r_{\mathbb{C}}^2 > \gamma$ .  $\diamond$

Los conceptos anteriores se refieren a que si la condición  $r_{\mathbb{C}}^2 > \gamma$  se satisface entonces, existe al menos una solución  $[P_{\gamma} = P_{\gamma}^T > 0, \epsilon > 0]$  de la ecuación algebraica de Riccati (2.28). Por consiguiente, existe un conjunto de soluciones que satisfacen la desigualdad:

$$A^T P_{\gamma} + P_{\gamma} A + \epsilon P_{\gamma} + \gamma C^T C + P_{\gamma} B B^T P_{\gamma} \leq 0 \quad (2.29)$$

Mediante el Lema de Schur se puede probar que la desigualdad (2.29) equivale a

$$\begin{bmatrix} P_{\gamma} A + A^T P_{\gamma} + \epsilon P_{\gamma} + \gamma C^T C & P_{\gamma} B \\ B^T P_{\gamma} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.30)$$

Comparando (2.30) con (2.17) se observa que el **radio de estabilidad satisface la desigualdad disipativa** (2.17) con  $(Q, S, R) = (-\gamma I, 0, I)$ .

## 2.4. RADIO DE ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS LINEALES

---

Ahora bien, el concepto del radio de estabilidad se extiende para analizar el comportamiento del sistema lineal (2.21) bajo perturbaciones variantes en el tiempo (Son y Hinrichsen, 1996).

Considérese el sistema perturbado de la forma  $\Xi_L(2.20)$ , donde  $A$  es Hurwitz,  $f(y, t)$  es una perturbación no lineal variante en el tiempo. Se asume que  $f(y, t)$  es globalmente Lipschitz en  $y$  y continua a tramos en  $t$  tal que

$$\|f(y, t)\|^2 \leq \gamma \|y\|^2, \quad y \in \mathbb{R}^p, t \geq 0 \quad (2.31)$$

El tamaño de la perturbación no lineal se mide por

$$\|f\| = \inf \{ \gamma \in \mathbb{R}_+, \forall \sigma \in \mathbb{R}^r : \|f(y, t)\| \leq \gamma \|y\| \}$$

Es decir,  $\gamma$  es la menor cota que limita a la no linealidad. Entonces, el sistema perturbado  $\Xi_L(2.20)$  es **exponencialmente estable** si se satisface que  $r_C^2 > \gamma$ .

Por lo tanto, *el radio de estabilidad del sistema perturbado bajo perturbaciones no lineales variantes en el tiempo es un caso particular del método de disipatividad para las no linealidades  $f$  que sean*

$$(Q_n, S_n, R_n) - \mathbf{D} = (-I, 0, \gamma I) - \mathbf{D} \quad (2.32)$$

con  $r_C^2 > \gamma$ . Además, si el sistema  $\Xi_L(2.30)$  se diseña  $(-\gamma I, 0, I)$ -SSD entonces, se asegura la estabilidad exponencial del lazo cerrado  $\Xi_L(2.20)$ .

En particular, si el sistema  $\Xi_L(2.20)$  es *positivo* (ver pag. 32) entonces, la condición para garantizar la estabilidad está dada por (Son y Hinrichsen, 1996)

$$r_C = \|CA^{-1}B\|^{-1} > \gamma. \quad \forall \gamma > 0$$

Por lo tanto, *la desigualdad disipativa puede sustituirse por el radio de estabilidad*, resultando un cálculo sencillo para garantizar la estabilidad del lazo cerrado  $\Xi_L(2.30)$ .

### 2.5. Estabilidad entrada-estado

Considere el sistema (Khalil, 2002)

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.33)$$

donde  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$ . La entrada  $u(t)$  es una función acotada y continua a tramos en  $t$  para todo  $t \geq 0$ . Suponga que el sistema nominal

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \quad (2.34)$$

tiene un punto de equilibrio global y uniformemente estable en el origen  $x = 0$ . Para el sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.35)$$

donde la matriz  $A$  es Hurwitz y se puede escribir la solución como

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau) d\tau$$

y se usa la cota  $\|e^{(t-t_0)A}\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)}$  para estimar la solución por

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq ke^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t ke^{-\lambda(t-\tau)} \|B\| \|u(\tau)\| d\tau \\ &\leq ke^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\| + \frac{k\|B\|}{\lambda} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\| \end{aligned}$$

Lo anterior significa que el estado con una respuesta de entrada-cero decae exponencialmente a cero mientras, que una respuesta estado-cero está acotado para alguna entrada acotada. Además de que se muestra la propiedad de entrada acotada-estado acotado también se observa que la cota de la respuesta de estado-cero es proporcional a la cota de la entrada .

## 2.5. ESTABILIDAD ENTRADA-ESTADO

---

**Definición 13:** El sistema  $\dot{x} = f(t, x, u)$  (2.33) es estable entrada-estado (ISS) si existen una función  $\beta$  de clase  $KL$  y una función  $\vartheta$  de clase  $K$  tal que para cualquier estado inicial  $x(t_0)$  y cualquier entrada acotada  $u(t)$ , la solución  $x(t)$  existe para todo  $t \geq t_0$  y satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \vartheta\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right) \quad \triangle \quad (2.36)$$

La desigualdad (2.36) garantiza que para cualquier entrada acotada  $u(t)$ , el estado  $x(t)$  se va a mantener acotado. Adicionalmente, con la desigualdad (2.36) si  $u(t)$  converge a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  entonces, el estado también converge a cero (Khalil, 2002). Asimismo, si  $u(t) \equiv 0$  la desigualdad (2.36) se reduce a

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$$

La estabilidad entrada-estado equivale a que el origen del sistema nominal (2.34) sea global uniforme y asintoticamente estable. El siguiente lema es consecuencia del teorema converso de Lyapunov para la estabilidad exponencial.

**Lema 3:** Suponga que  $f(t, x, u)$  (2.33) es continuamente diferenciable y globalmente Lipschitz en  $(x, u)$  y continua a tramos en  $t$ . Si el sistema nominal  $f(t, x, 0)$  (2.34) tiene un punto de equilibrio global y exponencialmente estable en el origen  $x = 0$ , entonces el sistema (2.33) es ISS.  $\diamond$

### 3. OBSERVADOR COOPERATIVO

La clase de observadores que se estudia en este capítulo se puede utilizar como monitoreo de señales en cualquier sistema físico. Esto se debe a que el estimado de este observador previene al sistema cuando las variables del estado están a punto de alcanzar niveles críticos. En seguida se introduce el concepto de estos observadores.

**Definición 14:** Un *observador cooperativo* es aquel en que el estimado del estado preserva el orden, es decir,

$$\hat{x}(0) \succeq x(0) \Rightarrow \hat{x}(t) \succeq x(t) \quad \forall t \geq 0,$$

o si  $x(0) \succeq \hat{x}(0) \Rightarrow x(t) \succeq \hat{x}(t) \quad \forall t \geq 0.$

y además es convergente,  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t), t \rightarrow \infty.$   $\triangle$

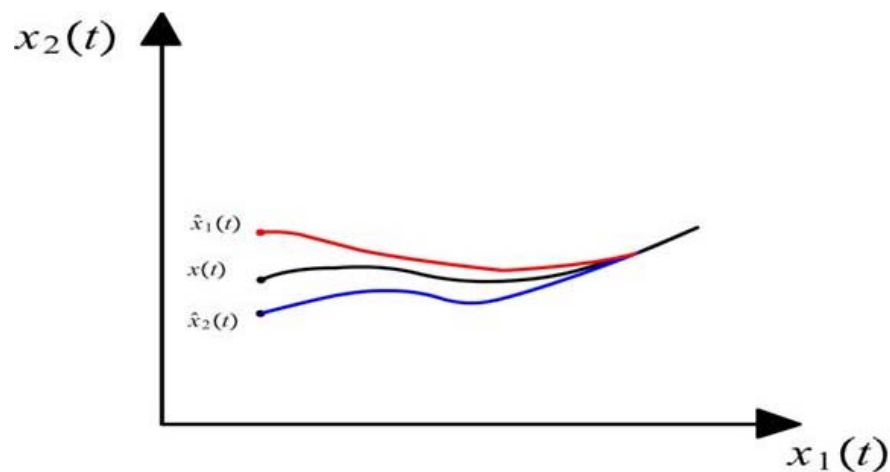


Fig. 3.1: Observador cooperativo para un sistema de segundo orden

---

En este capítulo se plantea una metodología de diseño del observador cooperativo para aquellos sistemas no lineales que tienen una estructura de un subsistema LTI con una no linealidad conectada en retroalimentación, la cual se muestra en (3.1) de la primera sección. La metodología de diseño consiste en proponer un observador con la estructura de Luenberger estudiado en (Moreno, 2004b) para los sistemas mencionados arriba, y en aplicar el método de disipatividad y la propiedad de cooperatividad (ver pag.29 y 22) en la dinámica del error de observación, con la finalidad de que las trayectorias del error sean convergentes a cero y preserven el orden para cualquier instante del tiempo. Por consiguiente, con esta metodología de diseño se obtiene un estimado que está por encima de la trayectoria del estado, si  $\hat{x}(0) \succeq x(0)$  o está por debajo si  $x(0) \succeq \hat{x}(0)$  y además, ambos estimados convergen al estado, lo cual se muestra en la figura (3.1).

Una aportación importante es que al realizar el diseño de un observador cooperativo con el estimado por encima del estado se asegura la existencia del observador cooperativo con el estimado por debajo del estado, y viceversa. Esto se debe a la propiedad de simetría que satisface el estimador, dando como resultado que al hacer un sólo diseño del observador cooperativo el estado está acotado dinámicamente tanto por arriba como por abajo por los estimados de dicho observador. Con esta metodología se presentan dos algoritmos de diseño del observador cooperativo, el primero es la forma general de construirlo y el segundo es un caso particular para obtenerlo, el cual está dado por la relación obtenida entre el radio de estabilidad y el método disipativo (ver pag. 34), donde se sustituye la desigualdad disipativa por una simple ecuación dada por el radio de estabilidad de los sistemas positivos, reduciendo el cálculo matemático que se muestra en el primer caso, lo cual se describe en la segunda sección.

En la sección 3 se ilustra el diseño del observador cooperativo con un par de ejemplos. En el primero se considera una planta estable, y se diseña un observador cooperativo y un observador dado por la copia de la planta (sin inyección de salida).

### 3.1. CLASE DE SISTEMAS CONSIDERADOS

---

Debido a la comparación de estos observadores se obtienen dos resultados importantes. Uno es que el observador sin inyección de salida no preserva el orden en las trayectorias del error de estimación y con el observador cooperativo se alcanza un incremento considerable en el radio de estabilidad a través de la inyección de salida. El otro es que debido a la restricción de la conservación del orden en el observador cooperativo no se puede acelerar su velocidad de convergencia. En el segundo ejemplo se utiliza una planta inestable. Debido a esto no se puede usar el estimador dado por la copia de la planta ya que su estimado diverge del estado. El objetivo en este ejemplo estabilizar al observador cooperativo a través de la inyección de salida.

#### 3.1. Clase de sistemas considerados

En este trabajo se considera la estructura de un sistema no lineal dada por un subsistema LTI con una perturbación no lineal conectada en retroalimentación:

$$\Pi_S \begin{cases} \dot{x} = Ax + Gf(\sigma) + \varphi(t, y, u), & x(0) = x_0 \\ \sigma = Hx \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema,  $y \in \mathbb{R}^q$  es la salida medible,  $\sigma \in \mathbb{R}^r$  es una función lineal del estado (no necesariamente medible),  $u \in \mathbb{R}^p$  es la entrada,  $f(\sigma) \in \mathbb{R}^m$  es una función no lineal localmente Lipschitz en  $\sigma$ , y  $\varphi$  es una función no lineal conocida localmente Lipschitz en  $(u, y)$  y continua a tramos en  $t$ . Además  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de estados,  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de entrada,  $H \in \mathbb{R}^{r \times n}$  es una matriz de pseudosalidas,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  es la matriz de salida.

Note que muchos sistemas no lineales pueden ser representados por  $\Pi_S$  (3.1) ya sea por descomposición ó mediante transformación de estados. Así que la metodología propuesta es aplicable a una clase amplia de sistemas. Particularmente, el sistema  $\Pi_S$  (3.1) puede ser un sistema positivo o cooperativo (ver pag. 24) pero no es un requisito para el diseño de un observador que preserve el orden.



### 3.1. CLASE DE SISTEMAS CONSIDERADOS

---

En cualquier sistema no lineal, en particular para el sistema  $\Pi_S$  (3.1) difícilmente están disponibles todas las variables del estado, por lo que se propone un algoritmo de observación basado en la estructura de Luenberger para conocer todo el estado del sistema no lineal. Un observador no lineal de orden completo (Moreno, 2004b) para el sistema  $\Pi_S$  (3.1) está dado por la forma

$$\Pi_O \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + Gf(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) + \varphi(t, y, u), \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (3.2)$$

donde  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  es el estimado del estado  $x$  del sistema  $\Pi_S$  (3.1). Las matrices de diseño de este observador son la matriz de ganancia de Luenberger  $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$  y la matriz  $N \in \mathbb{R}^{r \times q}$ , las cuales se utilizan para garantizar la estabilidad del observador.

El error de estimación se puede definir por la diferencia del estado estimado menos el estado real  $e^+ \triangleq \hat{x} - x$ , el error de estimación de la salida como  $\tilde{y}^+ \triangleq \hat{y} - y$ , y el error de estimación funcional como  $\tilde{\sigma}^+ \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$ . Por lo tanto, las dinámicas del error de observación están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{e}^+ &= (A + LC)e^+ + G[f(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) - f(\sigma)] \\ \dot{\tilde{y}}^+ &= Ce^+ \\ \dot{\tilde{\sigma}}^+ &= He^+ \end{aligned} \quad (3.3)$$

con  $e^+(0) = e_0^+ = \hat{x}_0 - x_0$ . Como el error de observación también se puede definir por  $e^- \triangleq x - \hat{x}$ , el error de estimación de la salida como  $\tilde{y}^- \triangleq y - \hat{y}$ , y el error de estimación funcional como  $\tilde{\sigma}^- \triangleq \sigma - \hat{\sigma}$ , las dinámicas del error de estimación  $e^-$  están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{e}^- &= (A + LC)e^- + G[f(\sigma) - f(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y))] \\ \dot{\tilde{y}}^- &= Ce^- \\ \dot{\tilde{\sigma}}^- &= He^- \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.1. CLASE DE SISTEMAS CONSIDERADOS

---

con  $e^-(0) = e_0^- = x_0 - \hat{x}_0$ . Note que en la dinámica del error de observación (3.3),  $\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y) = Hx + He^+ + NCe^+ = \sigma + (H + NC)e^+$ . Se define a  $z^+ \triangleq (H + NC)e^+ = \tilde{\sigma}^+ + N\tilde{y}^+$  como una función del error de estimación  $e^+$ , y a una no linealidad dada por

$$\phi^+(z^+, \sigma) \triangleq f(\sigma) - f(\sigma + z^+) \quad (3.5)$$

De igual manera para la dinámica del error de observación (3.4) se tiene que  $\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y) = Hx - He^- - NCe^+ = \sigma - (H + NC)e^-$ . Definiendo a  $z^- \triangleq (H + NC)e^- = \tilde{\sigma}^- + N\tilde{y}^-$  una función del error de estimación  $e^-$ , y a la no linealidad como

$$\phi^-(z^-, \sigma) \triangleq f(\sigma - z^-) - f(\sigma) \quad (3.6)$$

Por consiguiente, las dinámicas del error de estimación (3.3) y (3.4) pueden ser reescritas de la forma

$$\Pi_{E^+} \begin{cases} \dot{e}^+ = A_L e^+ + Gv^+, & e^+(0) = e_0^+ \\ z^+ = H_N e^+ \\ v^+ = -\phi^+(\sigma, z^+) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\Pi_{E^-} \begin{cases} \dot{e}^- = A_L e^- + Gv^-, & e^-(0) = e_0^- \\ z^- = H_N e^- \\ v^- = -\phi^-(\sigma, z^-) \end{cases} \quad (3.8)$$

donde

$$A_L \triangleq A + LC \quad (3.9)$$

$$H_N \triangleq H + NC \quad (3.10)$$

De la comparación entre las no linealidades  $\phi^+(z^+, \sigma)$  (3.5) y  $\phi^-(z^-, \sigma)$  (3.6) se obtiene la siguiente relación,

$$\phi^+(z^+, \sigma) = -\phi^-(z^+, \sigma) \quad (3.11)$$

### 3.2. Metodología de diseño del observador cooperativo

En esta sección se usan la propiedad de cooperatividad y el método de disipatividad, que se presentaron en el segundo capítulo de este trabajo, para el diseño del observador cooperativo. Cabe aclarar que la propiedad cooperativa y el método disipativo no se aplican directamente al observador  $\Pi_O$  (3.2) sino específicamente a la dinámicas del error de estimación  $\Pi_{E^+}$  (3.7) y  $\Pi_{E^-}$  (3.8).

#### 3.2.1. Método de disipatividad en el observador

La teoría de disipatividad se utiliza en el error de observación  $\Pi_{E^+}$  (3.7) y  $\Pi_{E^-}$  (3.8) con la finalidad de asegurar la estabilidad del observador no lineal (3.2). En seguida se presenta el teorema que garantiza la disipatividad en las estructuras de los errores de estimación, el cual es una aplicación del método propuesto en el capítulo 2 (ver pag. 29).

Como  $\Pi_{E^+}$  (3.7) y  $\Pi_{E^-}$  (3.8) son dos representaciones de la misma dinámica de error es fácil ver que estabilizar a  $\Pi_{E^+}$  equivale a estabilizar a  $\Pi_{E^-}$ .

**Teorema 3** (Moreno, 2004b): Suponga que la no linealidad  $\phi^+$  (3.5) es (Q,S,R)-D es decir,

$$w(\phi^+, z^+) = (\phi^+)^T Q^+ \phi^+ + 2(\phi^+)^T S^+ z^+ + (z^+)^T R^+ z^+ \geq 0, \quad \forall \phi^+, z^+ \in \mathbb{R}^r \quad (3.12)$$

Además, si existen las matrices de diseño del observador  $L$  y  $N$  tal que el *subsistema LTI de la dinámica del error* (3.7) es  $(-R, S^T, -Q)$ -SSD entonces, el **observador** (3.2) es **global y exponencialmente estable** para el sistema no lineal (3.1), es decir, existen las constantes  $k > 0$  y  $\varrho > 0$  tales que para toda condición inicial  $e_0^+$  se satisface la siguiente desigualdad ,

$$\|e^+(t)\| \leq k \|e_0^+\| \exp(-\varrho t) \quad (3.13)$$

### 3.2. METODOLOGÍA DE DISEÑO DEL OBSERVADOR COOPERATIVO

---

Esto se cumple si existen las soluciones  $P = P^T > 0$ ,  $\epsilon > 0$   $L$ ,  $N$  tales que se satisface la desigualdad:

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R H_N & PG - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.14)$$

◇

Lo anterior significa que el observador (3.2) es *convergente* si la no linealidad  $\phi^+$  (3.5) es disipativa con respecto a una función de suministro  $w(\phi^+, z^+)$ , y el subsistema LTI del error de observación  $\Pi_{E^+}$  (3.7) debe ser diseñado estrictamente disipativo con respecto a una función de suministro vinculada (dada por la no linealidad  $\phi^+$ ).

#### 3.2.2. La cooperatividad en el observador

Si la propiedad de cooperatividad se aplica en la dinámica del error de observación  $\Pi_{E^+}$  (3.7) ó  $\Pi_{E^-}$  (3.8) entonces, se produce un ordenamiento en las trayectorias de dicho error y como consecuencia, los estimados del observador (3.2) están por encima o por debajo del estado según como se haya definido a los errores de observación. Esto se debe a

$$e^+(0) \succeq 0 \Rightarrow e^+(t) \succeq 0, \quad \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \hat{x}(t) \succeq x(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.15)$$

$$e^-(0) \succeq 0 \Rightarrow e^-(t) \succeq 0, \quad \forall t \geq 0 \Leftrightarrow x(t) \succeq \hat{x}(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.16)$$

Para satisfacer a (3.15), el error de observación  $\Pi_{E^+}$  tiene que ser un **sistema cooperativo** (ver pag. 22), lo cual está dado si la *matriz Jacobiana de dicho error es una matriz Metzler*,

$$\frac{\partial (A_L e^+ - G \phi^+(\sigma, z^+))}{\partial e^+} = A_L - G \left( \frac{\partial \phi^+(\sigma, z^+)}{\partial z^+} H_N \right) = A_L + G \left( \frac{\partial f(\sigma + z^+)}{\partial z^+} \right) H_N$$

### 3.2. METODOLOGÍA DE DISEÑO DEL OBSERVADOR COOPERATIVO

---

Esta última expresión se define como

$$M^+(z^+) \triangleq A_L + G \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) H_N, \quad \forall z \in \mathbb{R}^r. \quad (3.17)$$

Lo anterior, también prevalece para el error de estimación  $\Pi_{E^-}$ ,

$$M^-(z^-) \triangleq A_L + G \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) H_N, \quad \forall z \in \mathbb{R}^r. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, si las dinámicas de los errores de estimación  $\Pi_{E^+}$  (3.7) ó  $\Pi_{E^-}$  (3.8) son cooperativas y además cumplen con el método disipativo que se presentó arriba entonces,  $\Pi_O$  (3.2) es un *observador cooperativo*.

Hasta este momento para asegurar que el estado se encuentre acotado dinámicamente tanto por arriba como por abajo se necesitan construir dos observadores cooperativos y deben ser inicializados adecuadamente. Pero en la siguiente proposición se muestra que sólo es necesario desarrollar un observador cooperativo para acotar dinámicamente al estado.

**Proposición 6:** Sea el sistema  $\Pi_S$  (3.1), el observador  $\Pi_O$  (3.2) y las dinámicas del error  $\Pi_{E^+}$  (3.7) y  $\Pi_{E^-}$  (3.8).

◆  $\Pi_{E^+}$  (3.7) es *estable*  $\Leftrightarrow$   $\Pi_{E^-}$  (3.8) es *estable*. Esto se debe,  
 $\|e^+(t)\| \leq k \exp(-\rho t) \|e_0^+\| \Leftrightarrow \|e^-(t)\| \leq k \exp(-\rho t) \|e_0^-\|.$

◆ Adicionalmente,

$$\phi^+ \text{ es } (Q, S, R)\text{-D} \Leftrightarrow \phi^- \text{ es } (Q, S, R)\text{-D}$$

### 3.2. METODOLOGÍA DE DISEÑO DEL OBSERVADOR COOPERATIVO

---

◆  $\Pi_{E^+}$  es cooperativo  $\Leftrightarrow \Pi_{E^-}$  es cooperativo.

$$\begin{aligned} e^+(0) \triangleq \hat{x}(0) - x(0) \succeq 0 &\Rightarrow e^+(t) \triangleq \hat{x}(t) - x(t) \succeq 0 \\ e^-(0) \triangleq x(0) - \hat{x}(0) \succeq 0 &\Rightarrow e^-(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t) \succeq 0 \end{aligned}$$

∴ **El diseño de**  $\Pi_0$  (3.2) con  $\Pi_{E^+}$  (3.7)  $\Leftrightarrow$  **diseño de**  $\Pi_0$  (3.2) con  $\Pi_{E^-}$  (3.8). ◆

La proposición anterior se refiere que una vez resuelto el diseño de un observador cooperativo por encima del estado no se requiere hacer otro diseño con el estimado por debajo del estado, ya que este último está resuelto por el primero, y viceversa. Esto se debe a la propiedad de simetría que tiene el observador  $\Pi_O$  (3.2) ya que si el observador estable para el error de observación  $\Pi_{E^+}$  entonces, también va a ser estable para  $\Pi_{E^-}$  porque se trata de la misma representación de la dinámica del error pero definida de diferente manera ( $e^- = -e^+$ ). Además, las no linealidades disipativas  $\phi^+(z^+, \sigma)$  (3.5) y  $\phi^-(z^+, \sigma)$  (3.6) tienen las mismas matrices ( $Q, S, R$ ). Por esta razón se propone que las matrices de diseño ( $L, N$ ) de los observadores (3.2) sean iguales y el resultado es que las desigualdades disipativas tanto del observador con el estimado por encima de la trayectoria del estado y del observador con el estimado por debajo (3.14) son equivalentes. Asimismo, los Jacobianos de las dinámicas de los errores de estimación son idénticos, es decir,  $M^+(z^+) = M^-(z^-)$ . La demostración de este hecho se encuentra en el *apéndice A*.

#### 3.2.3. Algoritmos de diseño del observador cooperativo

En este apartado se presentan un par de algoritmos para diseñar un observador cooperativo. El primer algoritmo es el caso general para desarrollar dicho observador, el cual está representado por la conjunción de la propiedad de cooperatividad y del método de disipatividad. El segundo es un caso especial para una clase de sistemas no lineales con la finalidad de reducir el cálculo matemático a través de la sustitución de la desigualdad disipativa (2.17) por una simple ecuación del radio de estabilidad complejo de los sistemas positivos (2.27).

### 3.2. METODOLOGÍA DE DISEÑO DEL OBSERVADOR COOPERATIVO

---

**Teorema 4** (Observador Cooperativo): Sea el sistema  $\Pi_S$  (3.1), el observador  $\Pi_0$  (3.2) y las dinámicas de los error de estimación  $\Pi_{E^+}$  (3.7) ó  $\Pi_{E^-}$  (3.8). Suponga que la no linealidad  $\phi^+$  (3.5) ó  $\phi^-$  (3.6) es  $(Q, S, R)$ -D, es decir, satisface a (3.12). Si existen las matrices  $P = P^T > 0$ ,  $L, N$  y una constante  $\epsilon > 0$  tales que se cumpla la desigualdad:

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R H_N & PG - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \leq 0$$

y además la matriz Jacobiana del error de observación  $\Pi_{E^+}$  (3.7) ó  $\Pi_{E^-}$  (3.8) dada por

$$M(z) = A_L + G \frac{\partial f(z)}{\partial z} H_N$$

es Metzler  $\forall z \in \mathbb{R}^r$ . Entonces, el observador  $\Pi_0$  (3.2) es *global y exponencialmente estable*, y además el error de observación (3.7 ó 3.8) es un *sistema cooperativo*, dando como resultado que  $\Pi_0$  (3.2) es un ***observador cooperativo***.  $\diamond$

En el teorema anterior se muestra el algoritmo general para desarrollar un observador cooperativo, basado en la aplicación del método de disipatividad y la propiedad de cooperatividad en la dinámica del error de observación.

En la siguiente proposición se muestra la relación obtenida entre el radio de estabilidad de los sistemas positivos bajo perturbaciones no lineales variantes en el tiempo con el método de disipatividad. Dicha relación garantiza un cálculo sencillo en comparación con la desigualdad matricial que se muestra en el teorema de arriba (ver pag. 34). Lo anterior se cumple para las no linealidades que pertenecen al sector  $\|\phi(\sigma, z)\|^2 \leq \gamma \|z\|^2$ , lo cual es equivalente a que la no linealidad

$$\phi \text{ sea } (-I, 0, \gamma I)\text{-D}$$

y para asegurar la estabilidad del observador cooperativo  $\Pi_0$  (3.2) (sin que sea necesario realizar el cálculo de la desigualdad disipativa), la constante  $\gamma$  debe satisfacer la condición del radio de estabilidad de los sistemas positivos dada por  $\|H_N A_L G\|^{-1} \geq \gamma$ , donde  $\|H_N A_L G\|^{-1}$  es el radio de estabilidad con inyección de salida.

### 3.3. EJEMPLOS

---

**Proposición 7** (Observador Cooperativo usando el radio de estabilidad): Sea el sistema  $\Pi_S$  (3.1), el observador  $\Pi_0$  (3.2) y la dinámica del error  $\Pi_{E^+}$  (3.7 ó  $\Pi_{E^-}$  3.8). Suponga que la no linealidad  $\phi^+$  (3.5 ó  $\phi^+$  3.6) es  $(-I, 0, \gamma I)$ -D, es decir, que satisface

$$\|\phi(z, \sigma)\|^2 \leq \gamma \|z\|^2, \forall z, \sigma \in \mathbb{R}^r \quad (3.19)$$

Suponga que  $G \succeq 0$ . Si existen matrices  $L$  y  $N$  tales que se satisface,

1.  $A_L$  es Metzler y Hurwitz.
2.  $H_N \succeq 0$ .
3.  $\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} \geq \gamma$ , y
4.  $M(z) = A_L + G \frac{\partial f(z)}{\partial z} H_N$  es Metzler  $\forall z \in \mathbb{R}^r$ .

Entonces, el observador  $\Pi_0$  (3.2) es *global y exponencialmente estable*, y además el error de observación  $\Pi_E$  es un sistema cooperativo, dando como resultado que  $\Pi_0$  (3.2) sea un **observador cooperativo**.  $\diamond$

Obsérvese que para obtener simultáneamente un estimado por encima y otro por debajo de la trayectoria del sistema, se requiere construir dos observadores cooperativos e inicializarlos adecuadamente. Pero se tiene la ventaja que con un sólo diseño se pueden desarrollar a los dos observadores cooperativos. Cabe mencionar que con la proposición 7 es más sencillo diseñar un observador cooperativo para el sistema  $\Pi_S$  (4.2) que con el teorema 4. Pero dicha proposición impone en las dinámicas de los errores de estimación  $\Pi_{E^+}$  (3.7 y  $\Pi_{E^-}$  3.8)

### 3.3. Ejemplos

En este trabajo se proponen un par de ejemplos para ilustrar el diseño del observador cooperativo. En el primero se considera una planta estable y se obtienen un par de resultados importantes: se incrementa el radio de estabilidad con la inyección



### 3.3. EJEMPLOS

---

de salida pero no se puede acelerar la velocidad de convergencia de dicho estimador debido a las restricciones que impone la cooperatividad en la dinámica del error.

En el segundo ejemplo se establece una planta inestable y se estabiliza al observador cooperativo a través de la matriz de ganancia. En ambos ejemplos se considera la matriz Jacobiana  $A$  como una matriz Metzler de dimensión 3 dada por la siguiente estructura

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 & \alpha \\ 1 & -b & \delta \\ \beta & 1 & -c \end{bmatrix}, \quad (a, b, c, \beta, \alpha, \delta) \geq 0 \quad (3.20)$$

A diferencia de la matriz de estados en (Jiang, 1992), la forma de esta matriz (3.20) contiene más elementos no negativos fuera de la diagonal.

#### 3.3.1. Planta estable

Considérese el sistema no lineal

$$\Pi_S \begin{cases} \dot{x} = Ax + Gf(\sigma) + \varphi(t, y, u), & x(0) = x_0 \\ \sigma = Hx \\ y = Cx \end{cases}$$

donde las matrices que intervienen en el modelo están dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} a = 1, b = 2, c = 3, \\ \beta = 2, \alpha = 0, \delta = 2 \end{matrix} \quad (3.21)$$

$$G = [1 \ 0 \ 0]^T$$

$$H = [0 \ 0 \ 1]$$

$$C = [1 \ 0 \ 1]$$

La función no lineal es:  $f(\sigma) = \frac{1}{1+\sigma^2}$

### 3.3. EJEMPLOS

---

**Objetivo del ejemplo.** Se desea un observador cooperativo con la finalidad que sus estimados acoten dinámicamente a las trayectorias del estado tanto por arriba como por abajo. Esto se debe realizar con un único diseño del observador cooperativo. Adicionalmente, se pretende comparar este observador con algún otro estimador que no cumple el ordenamiento en las trayectorias del error de estimación.

- 1.- *El diseño del observador cooperativo* se desarrolla utilizando el algoritmo dado por la relación del radio de estabilidad con el método de dispatividad (*proposición 7 ver pag. 47*). Se considera la estructura del observador (3.2):

$$\Pi_O \begin{cases} \hat{x} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + Gf(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) + \varphi(t, y, u), \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

y las dinámicas de los errores de observación:

$$\Pi_{E^+} \begin{cases} \dot{e}^+ = A_L e^+ + Gv^+, & e_0^+ = e_0^+ \succeq 0 \\ z^+ = H_N e^+ \\ v^+ = -\phi^+(\sigma, z^+) \end{cases}$$

$$\Pi_{E^-} \begin{cases} \dot{e}^- = A_L e^- + Gv^-, & e_0^- = e_0^- \succeq 0 \\ z^- = H_N e^- \\ v^- = -\phi^-(\sigma, z^-) \end{cases}$$

Entonces, la no linealidad está dada por :

$$\phi^+(\sigma, z^+) = z^+ \frac{z^+ + 2\sigma}{(\sigma^2 + 1)(z^{+2} + 2z^+\sigma + \sigma^2 + 1)} \quad (3.22)$$

Esta no linealidad es disipativa para  $(Q, S, R) = (-1, 0, 0.6495I)$ , lo cual es equivalente a que  $\phi^+ \in [-0.6495, 0.6495]$ . Las matrices de diseño del observador cooperativo son

$$L = [0.6495, -0.9, -2]^T \text{ y } N = 0$$

Con estas matrices se asegura que  $\Pi_O$  (3.2) es un observador cooperativo a través del cumplimiento de las condiciones de la *proposición 7*:

### 3.3. EJEMPLOS

---

$$a) G = [ 1 \ 0 \ 0 ] \succeq 0$$

$$b) A_L = \begin{bmatrix} -0.3505 & 0 & 0.6495 \\ 0.1 & -2 & 1.1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \text{ es Metzler}$$

$$c) H_N = [ 0 \ 0 \ 1 ] \succeq 0$$

$$d) \|H_N(A_L)^{-1}G\|^{-1} \geq \gamma \Rightarrow 30.545 > 0.6495$$

$$e) M^+ = \begin{bmatrix} -0.3505 & 0 & 0.6495 + \frac{df(z)}{dz} \\ 0.1 & -2 & 1.1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \text{ es Metzler, } \frac{df}{dz} = -\frac{2z}{(1+z^2)^2}$$

2.- Para comparar al observador cooperativo se propone *un observador en lazo abierto (dado por una copia exacta de la planta), es decir, que este observador no tiene inyección de salida ( $L = 0^T$ )*. Además, no es necesario que se cumplan las condiciones de arriba ya que son impuestas sólo para el observador cooperativo. Entonces, las matrices que se utilizan en el observador en lazo abierto son:

$$L = [0, 0, 0]^T \text{ y } N = 0$$

Adicionalmente, se tiene:

$$a) G = [ 1 \ 0 \ 0 ] \succeq 0$$

$$b) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ es Metzler}$$

$$c) H = [ 0 \ 0 \ 1 ] \succeq 0$$

$$d) \|HA^{-1}G\|^{-1} \geq \gamma \Rightarrow 0.8 > 0.6495$$

$$e) M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{\partial f(z)}{\partial z} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

### 3.3. EJEMPLOS

---

Las condiciones anteriores muestran que el observador sin inyección de salida no es observador cooperativo ya que la última condición no se satisface porque la derivada  $\frac{df(z)}{dz}$  puede tomar valores negativos. Además, la dinámica del error  $\Pi_{E^+}$  tiene características semejantes a las de un sistema positivo (*proposición 2*). Por tal motivo es posible comparar los resultados teóricos entre los observadores propuestos para este ejemplo. A continuación se muestra la comparación entre los resultados obtenidos para este par de observadores.

- i. El radio de estabilidad se incrementa si la matriz de ganancia contiene elementos negativos:

$$\begin{array}{ccccccc} \|H_N(A_L)^{-1}G\|^{-1} & \geq & \|HA^{-1}G\|^{-1} & \geq & \gamma & & \\ 30.545 & > & 0.8 & > & 0.6495 & & \end{array}$$

En particular, en este ejemplo el radio de estabilidad con inyección de salida (dado por el observador cooperativo) se incrementa en comparación con el radio de estabilidad sin inyección de salida (el observador en lazo abierto) a través de que la matriz de ganancia contenga elementos negativos siempre y cuando se garantiza que la matriz  $A_L$  sea Metzler.

Si la matriz de ganancia tiene elementos no negativos, por ejemplo:  $L^+ = [0.6495, 0.1, 0.5]$ , entonces el radio de estabilidad con inyección de salida se reduce en comparación con la constante  $\gamma$  y como consecuencia, no se asegura la estabilidad del observador cooperativo, es decir,

$$\begin{array}{ccccccc} \|HA^{-1}G\|^{-1} & \geq & \gamma & \geq & \|H_N(A_{L^+})^{-1}G\|^{-1} & & \\ 0.8 & > & 0.6495 & > & 0.4829 & & \end{array}$$

Lo anterior se debe a que la matriz de ganancia se considera un grado de libertad para el radio de estabilidad con inyección de salida.

### 3.3. EJEMPLOS

---

Por lo tanto, cuando la matriz de ganancia toma valores negativos, el margen entre el  $\|H_N(A_L)^{-1}G\|^{-1}$  y la constante  $\gamma$  es más amplio para asegurar la estabilidad del observador cooperativo que el margen entre el  $\|HA^{-1}G\|^{-1}$  y  $\gamma$  para garantizar la estabilidad del observador sin inyección de salida.

ii. Los valores propios de la parte lineal de los observadores son

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= [-4, -1, -1] \\ \lambda(A_L) &= [-5.3267, -1.6831, -0.3407]\end{aligned}$$

Aunque en este trabajo no se estudiaron a fondo las restricciones que imponen las propiedades de cooperatividad y positividad en los sistemas dinámicos, nótese que el valor propio dominante (-0.3407) del observador cooperativo es más grande que el valor propio dominante (-1) del observador sin inyección de salida, lo que resulta que *la velocidad de convergencia del observador con inyección de salida no es más rápida que la del observador sin inyección*.

Además, si la matriz de ganancia tiene elementos no negativos  $L^+ = [0.6495, 0.1, 0.5]$  entonces, los valores propios están ubicados en:

$$\lambda(A_{L^+}) = [-3.9352 \quad -1.4364 \quad 0.5211]$$

De lo anterior se observa que el observador cooperativo es inestable cuando la matriz de ganancia toma valores no negativos. Esto se debe a que (*ver. pag 18*):

$$\text{Si } A \text{ es una matriz Metzler entonces, } \mu(A) \leq \mu(A_{L^+}), \quad L \succeq 0.$$

Es decir, el valor propio de Frobenius del observador cooperativo mayor o igual que el valor propio de Frobenius del observador en lazo abierto. Por lo tanto, al proponer una matriz de ganancia con elementos no negativos se tienen los inconvenientes de reducir el radio de estabilidad con respecto a la cota  $\gamma$ , y de que el observador cooperativo sea inestable.

### 3.3. EJEMPLOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos en simulación. En las figuras (3.2), (3.3), (3.4) se realiza la comparación de un observador cooperativo y de un observador en lazo abierto [ $L = 0^T$ ]. En dichas figuras se observa el acotamiento superior del estado por parte del estimado  $\hat{x}^+(t)$  del observador cooperativo pero el estimado del observador sin inyección de salida no preserva el orden.

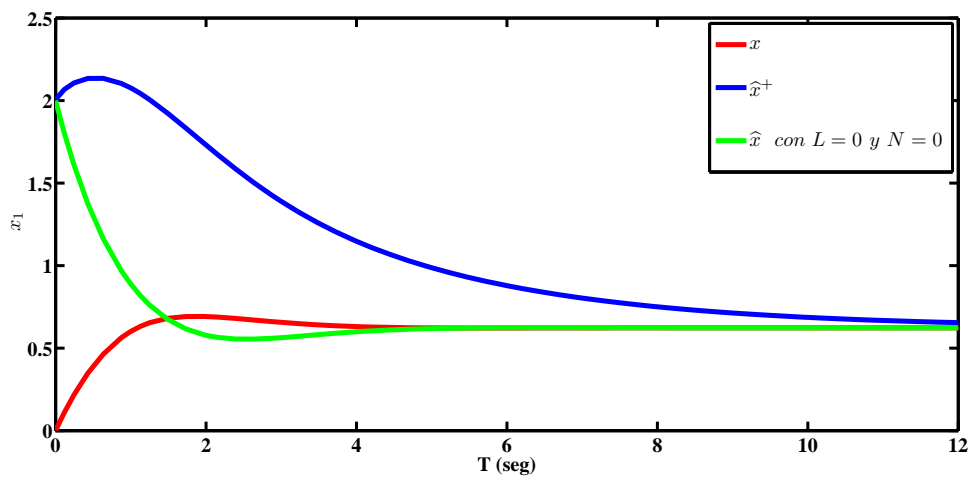


Fig. 3.2: Estimados del observador cooperativo y del observador en lazo abierto de  $x_1$ .

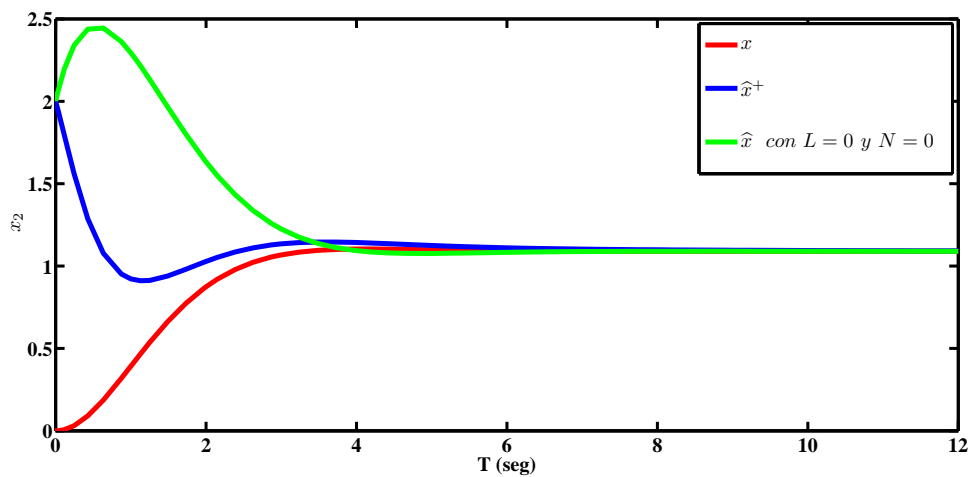


Fig. 3.3: Estimados del observador cooperativo y del observador en lazo abierto de  $x_2$ .

### 3.3. EJEMPLOS

---

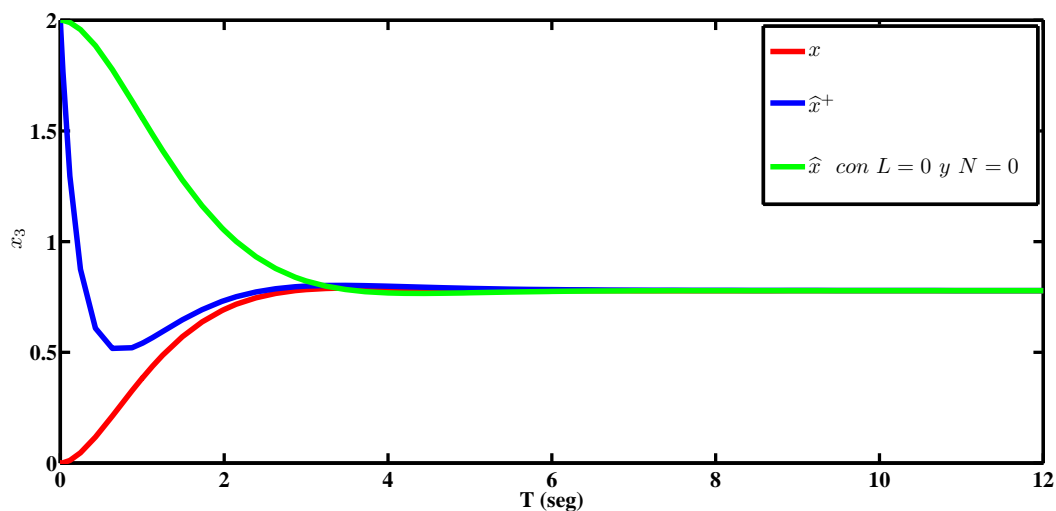


Fig. 3.4: Estimados del observador cooperativo y del observador en lazo abierto de  $x_3$ .

Debido a la propiedad de simetría del observador cooperativo no es necesario hacer otro diseño para que el estado esté acotado dinámicamente por debajo ya que este diseño está resuelto por el diseño del observador cooperativo con el estimado por arriba. Por lo tanto, las matrices de diseño del estimador por encima del estado satisfacen al observador con el estimado por debajo y como consecuencia, la velocidad de convergencia y el radio de estabilidad en ambos estimadores son los mismos.

Cabe aclarar que para mantener el orden los observadores cooperativos con los estimados tanto por encima como por debajo de la trayectoria de estado deben ser inicializados adecuadamente.

En las figuras (3.5), (3.6), (3.7) se muestran los resultados en simulación del observador cooperativo con el estimado por debajo del estado  $[x^-(t)]$ .

### 3.3. EJEMPLOS

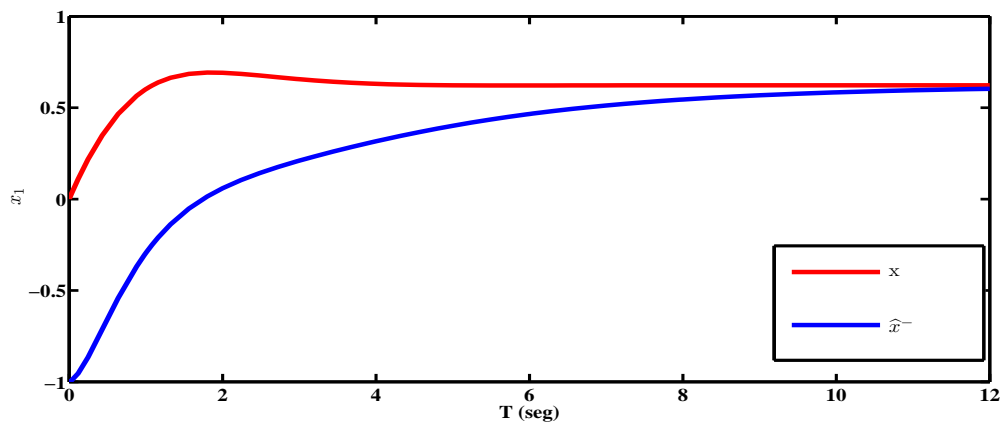


Fig. 3.5: Observador cooperativo con su estimado por debajo del estado. Estado  $x_1$

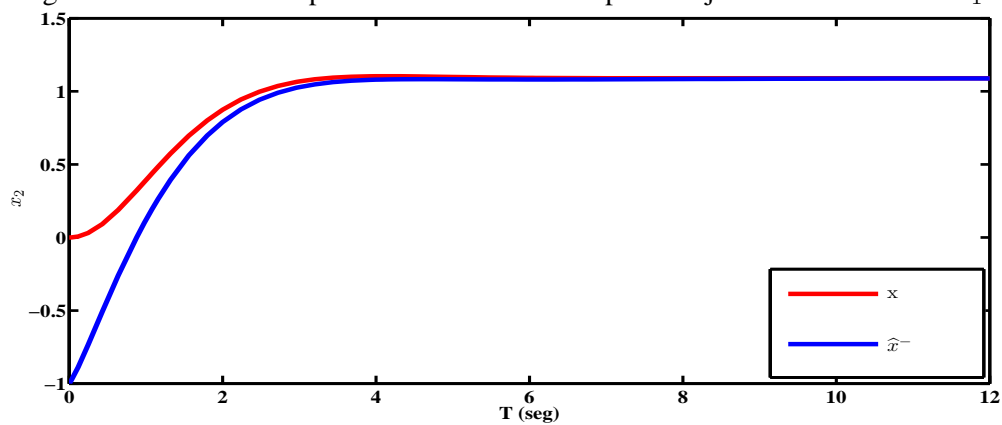


Fig. 3.6: Observador cooperativo con su estimado por debajo del estado. Estado  $x_2$

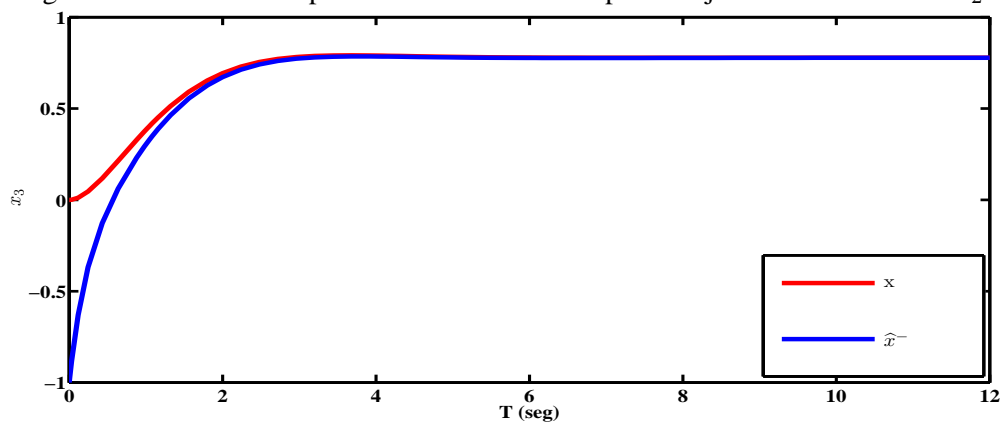


Fig. 3.7: Observador cooperativo con su estimado por debajo del estado. Estado  $x_3$



### 3.3. EJEMPLOS

---

#### 3.3.2. Planta inestable

Considérese el sistema no lineal

$$\Pi_S \begin{cases} \dot{x} = Ax + Gf(\sigma) + \varphi(t, y, u), & x(0) = x_0 \\ \sigma = Hx \\ y = Cx \end{cases}$$

donde las matrices que intervienen en el modelo están dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} a = 1, b = 2, c = 3, \\ \beta = 2, \alpha = 3, \delta = 2 \end{matrix} \quad (3.23)$$

$$G = [ 1 \ 0 \ 0 ]^T$$

$$H = [ 0 \ 0 \ 1 ]$$

$$C = [ 1 \ 0 \ 1 ]$$

La función no lineal es:  $f(\sigma) = \frac{1}{1+\sigma^2}$

Además, sea considerado el observador  $\Pi_O$  (3.2) y las dinámicas de los errores de observación  $\Pi_{E^+}$  (3.7) y  $\Pi_{E^-}$  (3.8).

**Objetivo del ejemplo.** Se pretende estabilizar al observador cooperativo  $\Pi_O$  (3.2) por medio de la inyección de salida. Además, se desea que las trayectorias de la planta estén acotadas tanto por arriba como por abajo por los estimados del observador cooperativo. Esto se debe realizar con un único diseño del observador cooperativo a través de la *proposición 7*.

Cabe mencionar que la planta (3.23) es un sistema inestable, por tal razón no se puede diseñar un observador sin inyección de salida (copia de la planta). Además, el radio de estabilidad de dicha planta proporciona un cierto valor, el cual no describe ningún comportamiento de estabilidad debido a lo anterior.

### 3.3. EJEMPLOS

---

Se toma en cuenta el análisis hecho en el ejemplo de arriba para la no linealidad  $\phi^+(\sigma, z^+)$ . Las matrices de diseño son:

$$L = [-2.3505, -0.9, -2]^T, \quad N = 0$$

Con estas matrices se asegura que  $\Pi_O$  (3.2) es un observador cooperativo bajo las condiciones:

1.  $G = [1 \ 0 \ 0] \succeq 0$

2.  $A_L = \begin{bmatrix} -3.3505 & 0 & 0.6495 \\ 0.1 & -2 & 1.1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$  es Metzler

3.  $H_N = [0 \ 0 \ 1] \succeq 0$

4. El radio de estabilidad:  $\|H_N(A_L)^{-1}G\| \geq \gamma \Rightarrow 297.5450 > 0.6495$

5.  $M^+ = \begin{bmatrix} -3.3505 & 0 & 0.6495 + \frac{df(z)}{dz} \\ 0.1 & -2 & 1.1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$  es Metzler,  $\frac{df}{dz} = -\frac{2z}{(1+z^2)^2}$

Por consiguiente, los valores propios de la planta y con inyección de salida están ubicados en

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= [-4.9428, -2.1113, 1.0541] \\ \lambda(A_L^+) &= [-5.3313, -3.37, -1.6592] \end{aligned}$$

Por lo tanto, con adecuada elección de la matriz de ganancia se puede estabilizar el observador no lineal (3.2) y hacer al sistema perturbado lo suficientemente robusto con respecto a la no linealidad  $\phi^+(z^+, \sigma)$ , lo cual está dado por el radio de estabilidad con inyección de salida.

A continuación se presentan los resultados en simulación. En las figuras (3.11), (3.9) y (3.10) se muestra la convergencia de los errores de estimación  $e^+(t)$  y  $e^-(t)$ . Aunque, el estado de la planta (3.23) diverja.

### 3.3. EJEMPLOS

---

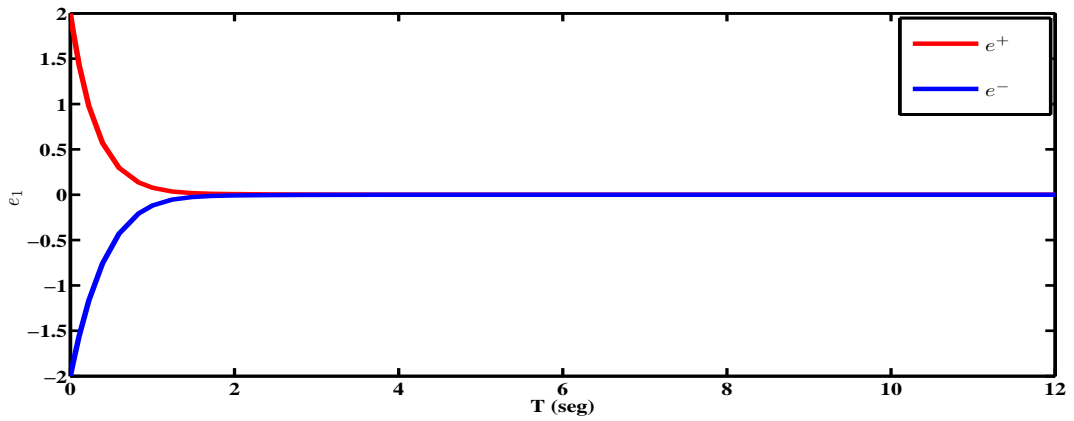


Fig. 3.8: Convergencia de los errores de observación  $e_1^+$  y  $e_1^-$ .

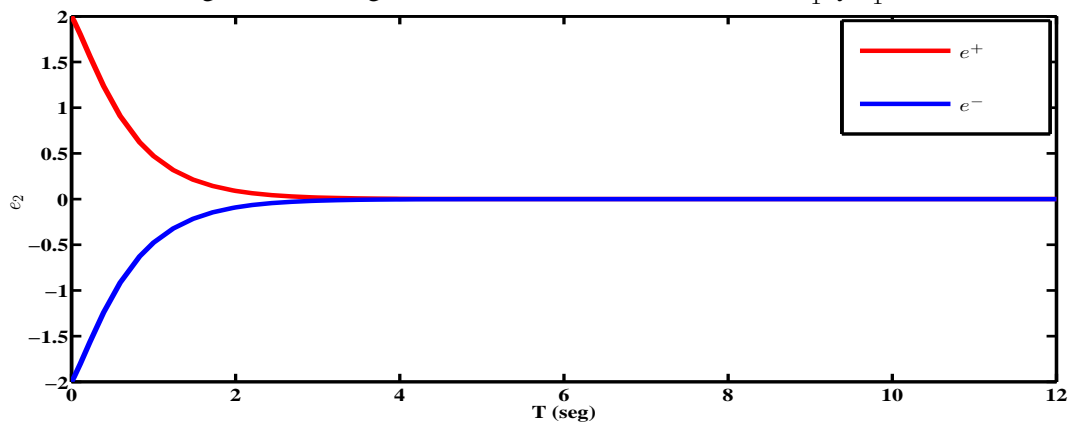


Fig. 3.9: Convergencia de los errores de observación  $e_2^+$  y  $e_2^-$ .

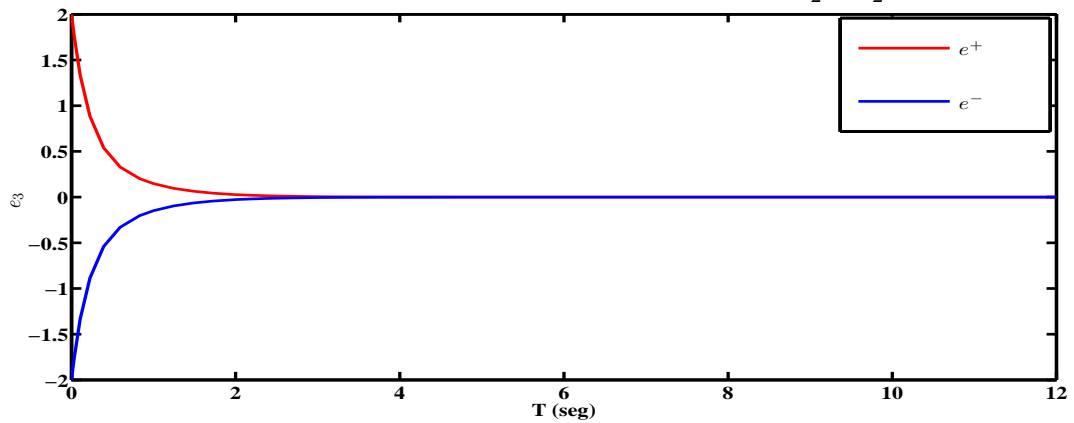


Fig. 3.10: Convergencia de los errores de observación  $e_3^+$  y  $e_3^-$ .

### 3.3. EJEMPLOS

---

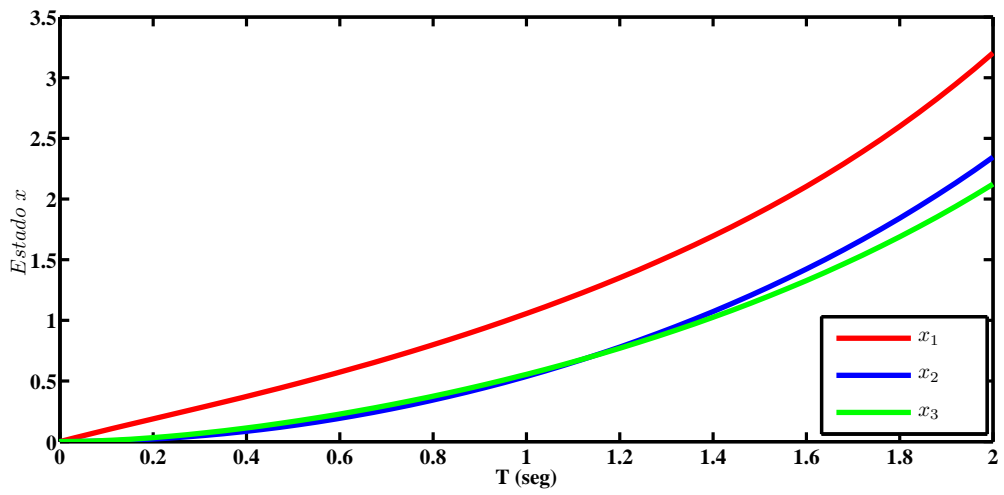


Fig. 3.11: El estado del sistema  $\Pi_S$  diverge.

## 4. OBSERVADORES INTERVALO

Un resultado importante del observador cooperativo  $\Pi_O$  (3.2) descrito en el capítulo anterior es que al realizar un sólo diseño de este observador se asegura que el *estado del sistema*  $\Pi_S$  (3.1) *se encuentra acotado por un par de estimados, uno por encima y otro por debajo, con la peculiaridad de que ambos estimados convergen a dicho estado, es decir,*

$$\begin{aligned} \hat{x}^+(t) \succeq x(t) \succeq \hat{x}^-(t) \\ \hat{x}^+(t) \rightarrow x(t), \quad \hat{x}^-(t) \rightarrow x(t); \quad t \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si se considera perturbaciones aditivas en el sistema  $\Pi_S$ , surgen un par de preguntas para esta clase de observadores:

- P.1 ¿Qué pasa con la cooperatividad de los errores de observación  $\Pi_{E^+}$  y  $\Pi_{E^-}$  ?
- P.2 ¿Se mantendrá la estabilidad en el observador  $\Pi_O$  (3.2)?

En este capítulo la metodología de diseño del observador cooperativo se extiende a una clase de estimadores conocidos como *observadores intervalo* (ver pág. 25). La razón es que al considerar el observador cooperativo  $\Pi_O$  (3.2) para el sistema  $\Pi_S$  (3.1) con perturbaciones, la cooperatividad en las dinámicas de los errores de estimación se pierde y como consecuencia, la propiedad de simetría de este observador también se pierde. Por tal motivo, para recuperar la cooperatividad en los errores de estimación se necesitan construir dos observadores con términos de corrección ante las perturbaciones del sistema, los cuales forman a un observador intervalo. Los términos de corrección son las cotas superior e inferior de las perturbaciones.

#### 4.1. ESTRUCTURA DEL OBSERVADOR INTERVALO

---

Entonces, el estado del sistema con perturbaciones está acotado dinámicamente, tanto por encima como por debajo, por los estimados del observador intervalo. Por otro lado, la estabilidad exponencial de estos observadores no siempre se garantiza pero se maneja el concepto de estabilidad entrada-estados, lo cual se describe en la primera sección.

En la sección 2 se analiza la convergencia de las dinámicas de los errores de estimación a través del concepto de estabilidad entrada-estados. En la sección 3 se presenta el algoritmo de diseño del observador intervalo, el cual es una extensión de la *proposición 7* del observador cooperativo. Finalmente en la sección 4 se ilustra el diseño del observador intervalo con un par de ejemplos. En el primero se considera la planta estable utilizada en el observador cooperativo pero en este caso la dinámica contiene perturbaciones. En el segundo ejemplo se diseña a un observador intervalo para una planta inestable con perturbaciones.

#### 4.1. Estructura del observador intervalo

Considérese el siguiente sistema no lineal:

$$\Psi_S \begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Gf(\sigma) + \pi(t, x) + \varphi(t, y, u), & x(0) = x_0 \\ \sigma = Hx(t) \\ y = Cx(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $y \in \mathbb{R}^q$  es la salida medible,  $\sigma \in \mathbb{R}^r$  es una función lineal del estado (no necesariamente medible),  $u \in \mathbb{R}^p$  es la entrada,  $f(\sigma) \in \mathbb{R}^m$  es una función no lineal localmente Lipschitz en  $\sigma$ ,  $\varphi$  es una función no lineal conocida localmente Lipschitz en  $(u, y)$  y continua a tramos en  $t$ , y  $\pi(t, x) \in \mathbb{R}^n$  es una perturbación que representa las variables exógenas y las incertidumbres del sistema. Adicionalmente se asume que las cotas de la perturbación son conocidas y satisfacen,

$$\pi^+(t, y) \succeq \pi(t, x) \succeq \pi^-(t, y), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x, y \quad (4.3)$$

#### 4.1. ESTRUCTURA DEL OBSERVADOR INTERVALO

---

Para contestar la primera pregunta (P.1) planteada al inicio de esta sección se considera el observador  $\Pi_O$  (3.2) para el sistema con perturbación  $\Psi_S$  (4.2), y se desea verificar la cooperatividad en los errores de estimación. Primeramente, se toma en cuenta el error  $e^+ = \hat{x} - x$ . Por consiguiente, la dinámica de dicho error está dada por,

$$\begin{aligned} \dot{e}^+ &= A_L^+ e^+ + Gv^+ - \pi(t, x) \\ z_e^+ &= H_N^+ e^+ \\ v^+ &= -\phi_e^+(z_e^+, \sigma) \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde  $A_L^+ \triangleq A + L^+C$ ,  $H_N^+ \triangleq H + N^+C$  y la no linealidad se define como  $\phi_e^+(z_e^+, \sigma) \triangleq f(\sigma) - f(\sigma + z_e^+)$ .

Si se considera a  $\pi(t, x)$  como una entrada al sistema (4.4) entonces, la cooperatividad en el error de estimación  $e^+$  se asegura por medio de la *proposición 3* (ver pag. 23), que establece que para que (4.4) sea un sistema cooperativo se debe satisfacer:

1. La matriz  $M^+$  (3.17) sea Metzler.
2. La perturbación sea no negativa  $[-\pi(t, x) \succeq 0]$ .

Analizando la no negatividad de la perturbación se tiene:

- ▶ Si  $\pi(t, x) \preceq 0 \Rightarrow$  la cooperatividad prevalece en  $e^+$ .
- ▶ Si  $\pi(t, x) \succeq 0 \Rightarrow$  la cooperatividad no prevalece en  $e^+$ .

Lo anterior significa que con perturbaciones negativas se conserva la cooperatividad en el error de estimación (4.4) y consiguientemente, el estimado del observador  $\Pi_O$  (3.2) acota por encima al estado del sistema  $\Psi_S$  (4.2). Pero si las perturbaciones son no negativas entonces la cooperatividad en dicho error se pierde. Por tal motivo, se debe agregar un término de corrección  $\pi^+(t, y)$  (cota superior) al observador  $\Pi_O$  con la finalidad de recuperar la cooperatividad en el error de observación  $e^+$  (4.4).

#### 4.1. ESTRUCTURA DEL OBSERVADOR INTERVALO

---

Debido a esto, se considera la siguiente estructura del observador para el sistema  $\Psi_S$  (4.2):

$$\Psi_{O^+} \begin{cases} \dot{\hat{x}}^+ = A\hat{x}^+ + Gf(\hat{\sigma}^+ + N^+(\hat{y}^+ - y)) + L^+(\hat{y}^+ - y) + \pi^+(t, y) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}^+, \quad \hat{x}^+(0) = \hat{x}_0^+ \\ \hat{y} = C\hat{x}^+ \end{cases} \quad (4.5)$$

donde  $x^+$  es el estimado del estado.  $L^+ \in \mathbb{R}^{n \times q}$  y  $N^+ \in \mathbb{R}^{r \times q}$  son las matrices de diseño de este observador, y  $\pi^+(t, y)$  es una cota superior de la perturbación  $\pi(t, x)$ . Así que, la dinámica del error de estimación  $e^+$  está dada por

$$\Psi_{E^+} \begin{cases} \dot{e}^+ = A_L^+ e^+ + Gv^+ + b^+ & e^+(0) = e_0^+ \succeq 0 \\ z_e^+ = H_N^+ e^+ \\ v^+ = -\phi_e^+(z_e^+, \sigma) \end{cases} \quad (4.6)$$

donde las matrices  $A_L^+$ ,  $H_N^+$  y la no linealidad  $\phi_e^+(z_e^+, \sigma)$  están definidas en (4.4). El error de la incertidumbre se considera como una entrada al sistema (4.6) y está dado por

$$b^+ \triangleq \pi^+(t, y) - \pi(t, x) \quad (4.7)$$

Cuando se añade la cota superior  $[\pi^+(t, y)]$  de la perturbación  $[\pi(t, x)]$  al observador (3.2), se recupera la cooperatividad en la dinámica del error de estimación (4.6). Esto se debe a que la diferencia  $[\pi^+(t) - \pi(t)]$  siempre es no negativa (ver (4.3)).

Ahora bien, se analiza el segundo caso con el observador cooperativo  $\Pi_O$  (3.2) para el sistema  $\Psi_S$  (4.2) y el error de estimación  $e^- = x - \hat{x}$ . Entonces la dinámica de dicho error tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{e}^- &= A_L^- e^- + Gv^- + \pi(t, x) \\ z_e^- &= H_N^- e^- \\ v^- &= -\phi_e^-(z_e^-, \sigma) \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $A_L^- \triangleq A + L^-C$ ,  $H_N^- \triangleq H + N^-C$  y la no linealidad se define como  $\phi_e^-(z_e^-, \sigma) \triangleq f(\sigma - z_e^-) - f(\sigma)$ .



#### 4.1. ESTRUCTURA DEL OBSERVADOR INTERVALO

---

Por consiguiente, la dinámica anterior (4.8) es un sistema cooperativo si se satisface la *proposición 3* (ver pag. 23), es decir, se deben cumplir las condiciones:

1. La matriz  $M^-$  (3.18) es Metzler.
2. La perturbación es no negativa  $[\pi(t, x) \succeq 0]$ .

Analizando la no negatividad de la perturbación se tiene:

- Si  $\pi(t, x) \preceq 0 \Rightarrow$  la cooperatividad no se conserva en  $e^-$
- Si  $\pi(t, x) \succeq 0 \Rightarrow$  la cooperatividad se conserva en  $e^-$

De lo anterior, se observa con perturbaciones negativas la cooperatividad en la dinámica del error  $e^-$  se pierde y para recobrarla se debe agregar una cota inferior  $[\pi^-(t, y)]$  al observador  $\Pi_0$  (3.2). Por esta razón, el observador toma la forma:

$$\Psi_{O^-} \begin{cases} \dot{\hat{x}}^- = A\hat{x}^- + G f(\hat{\sigma}^- + N^-(\hat{y}^- - y)) + L^-(\hat{y}^- - y) + \pi^-(t, y) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{y}^- = C\hat{x}^-, \quad \hat{x}^-(0) = \hat{x}_0^- \\ \hat{\sigma}^- = H\hat{x}^- \end{cases} \quad (4.9)$$

donde  $\hat{x}^-$  es el estimado del estado.  $L^- \in \mathbb{R}^{n \times q}$  y  $N^- \in \mathbb{R}^{r \times q}$  son las matrices de diseño de este observador y  $\pi^-(t, y)$  es una cota inferior de la perturbación  $\pi(t, x)$ . Así que la dinámica del error de estimación  $e^-$  está dada por,

$$\Psi_{E^-} \begin{cases} \dot{e}^- = A_L^- e^- + Gv^- + b^-, \quad e^-(0) = e_0^- \succeq 0 \\ z_e^- = H_N^- e^- \\ v^- = -\phi_e^-(z_e^-, \sigma) \end{cases} \quad (4.10)$$

donde las matrices  $A_L^-$ ,  $H_N^-$  y la no linealidad  $\phi_e^-(z_e^-, \sigma)$  son definidas en (4.8). El error de la incertidumbre se define como,

$$b^- \triangleq \pi(t, x) - \pi^-(t, y) \quad (4.11)$$

## 4.2. ESTABILIDAD DEL OBSERVADOR INTERVALO

---

La cooperatividad en el error de observación (4.10) se recupera al agregar el término de corrección  $[\pi^-(t, y)]$  al observador (4.9). Esto se debe a que la entrada  $b^-$  del sistema dinámico (4.10) es siempre no negativa.

Por lo tanto, la respuesta a la primera pregunta (P.1) que se planteó al inicio de esta sección es que el observador cooperativo  $\Pi_O$  (3.2) no satisface la propiedad de simetría cuando el sistema tiene perturbaciones  $\Psi_S$  (4.2) y por consecuencia, la cooperatividad en los errores de observación  $\Pi_{E^+}$  (3.7 y  $\Pi_{E^-}$  3.8) se pierde. Por esta razón *se requiere la construcción de dos observadores  $\Psi_{O^+}$  (4.5) y  $\Psi_{O^-}$  (4.9) para el sistema  $\Psi_S$  (4.2) con la finalidad de garantizar la cooperatividad en los errores de estimación  $\Psi_{E^+}$  (4.6) y  $\Psi_{E^-}$  (4.10)*. Por consiguiente, cuando existe la presencia de perturbaciones en el sistema  $\Psi_S$  (4.2), los estimados de los observadores  $\Psi_{O^+}$  (4.5) y  $\Psi_{O^-}$  (4.9) acotan dinámicamente al estado tanto por arriba como por abajo, es decir,

$$x_0^+ \succeq x_0 \succeq x_0^- \Rightarrow x^+(t) \succeq x(t) \succeq x^-(t) \quad \forall t \geq t_0$$

Los observadores  $\Psi_{O^+}$  (4.5) y  $\Psi_{O^-}$  (4.9) forman un **observador intervalo** si la condición anterior se satisface.

### 4.2. Estabilidad del observador intervalo

Para responder a la segunda pregunta (P.2) que se establece en esta sección se analiza la convergencia de los errores de estimación  $\Psi_{E^+}$  (4.6) y  $\Psi_{E^-}$  (4.10). El resultado de este análisis es que la estabilidad exponencial de los observadores  $\Psi_{O^+}$ ,  $\Psi_{O^-}$  no siempre se asegura, ya que si las entradas  $b^+$  y  $b^-$  de las dinámicas de los errores de observación  $\Psi_{E^+}$  (4.6) y  $\Psi_{E^-}$  (4.10) convergen a cero entonces, los estados  $(e^+, e^-)$  también convergen a cero. Pero si las entradas no convergen a cero ( $b^+ \not\rightarrow 0$  y  $b^- \not\rightarrow 0$ ) tampoco los estados convergen a cero.

## 4.2. ESTABILIDAD DEL OBSERVADOR INTERVALO

---

Aunque no se conocen cotas para las entradas  $b^+$  y  $b^-$ , se sabe que existen cotas para las perturbaciones (4.3)  $[\pi^+(t, y)$  y  $\pi^-(t, y)]$ . Por tal razón, el comportamiento de los errores de estimación en los sistemas  $\Psi_{E^+}$  (4.6) y  $\Psi_{E^-}$  (4.10) se puede describir mediante el concepto de estabilidad entrada-estado (Khalil, 2002, ISS, ver pág.35). En la siguiente proposición se presenta una extensión del *teorema 4* y de la *proposición 7* con el objetivo de asegurar la estabilidad entrada-estado en la dinámica del error de estimación  $\Psi_{E^+}$  (4.6) (de manera análoga se hace para  $\Psi_{E^-}$  (4.10)).

**Proposición 8:** Sea el sistema  $\Psi_S$  (4.2), el observador  $\Psi_{O^+}$  (4.5), la dinámica del error de observación  $\Psi_{E^+}$  (4.6) y la perturbación  $\pi(t, x)$ . Se asume que las cotas de la perturbación son conocidas y cumplen con la desigualdad:

$$\pi^+(t, y) \succeq \pi(t, x) \succeq \pi^-(t, y), \quad \forall t \geq 0, \forall x, y.$$

Suponga que el sistema  $\Psi_{E^+}$  (4.6) es localmente Lipschitz en  $e^+$ . Además, suponga que la no linealidad  $\phi_e^+(z_e^+, \sigma)$  es  $(Q, S, R)$ -D, es decir, satisface a (3.12). Si existen las matrices  $P^+ = (P^+)^T > 0$ ,  $L^+$ ,  $N^+$  y una constante  $\epsilon > 0$  tales que se cumpla:

$$\begin{bmatrix} P^+ A_L^+ + (A_L^+)^T P^+ + \epsilon P^+ + (H_N^+)^T R H_N^+ & P^+ G - (H_N^+)^T S^T \\ G^T P^+ - S H_N^+ & Q \end{bmatrix} \leq 0$$

y además la matriz Jacobiana del error de observación  $\Psi_{E^+}$  (4.6) dada por

$$M^+ = A_L^+ + G \frac{\partial f(z)}{\partial z} H_N^+$$

es Metzler  $\forall z \in \mathbb{R}^r$ . Entonces, el error de observación  $\Psi_{E^+}$  (4.6) es *ISS con respecto a  $b^+$  tal que se satisface:*

$$\|e^+(t)\| \leq k \|e^+(0)\| \exp(-\varrho t) + \delta \sup(\|b^+\|), \quad k > 0, \varrho > 0 \quad (4.12)$$

y es un sistema cooperativo. Además, si se cumple  $\hat{x}_0^+ \succeq x_0$  entonces, el estimado de  $\Psi_{O^+}$  (4.5) acota dinámicamente por encima al estado del sistema  $\Psi_S$ .  $\diamond$

## 4.2. ESTABILIDAD DEL OBSERVADOR INTERVALO

---

Si lo anterior se satisface para  $\Psi_{E^-}$  (4.10), entonces los observadores  $\Psi_{O^+}$  (4.5) y  $\Psi_{O^-}$  (4.9) forman un observador intervalo para el sistema  $\Psi_S$  porque se cumple:

$$\widehat{x}_0^+ \succeq x_0 \succeq \widehat{x}_0^- \Rightarrow \widehat{x}^+(t) \succeq x(t) \succeq \widehat{x}^-(t)$$

**Prueba.**

$$V^+(e^+) = (e^+)^T P^+ e^+, \quad \dot{V}^+ \text{ para } \Psi_{E^+}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}^+ &\leq -\epsilon V^+ + 2e^+ P^+ b^+ \\ &\leq -(1-\theta)\epsilon V^+ - \theta\epsilon(e^+)^T P^+ e^+ + 2e^+ P^+ b^+; \theta \in (0, 1) \\ &\leq -(1-\theta)\epsilon V^+ - \theta\epsilon\lambda_M^+ \|e^+\|_2^2 + 2\|e^+\|_2 \lambda_M^+ \|b^+\|_2 \\ &\leq -(1-\theta)\epsilon V^+ + \lambda_M^+ \|e^+\|_2 (2\|b^+\|_2 - \theta\epsilon\|e^+\|_2) \end{aligned}$$

$$\text{Si } -\theta\epsilon\|e^+\|_2 + 2\|b^+\|_2 \leq 0 \Leftrightarrow \|b^+\|_2 \leq \frac{\theta\epsilon}{2}\|e^+\|_2$$

$$\text{Entonces } \dot{V}^+ \leq -(1-\theta)\epsilon V^+, \quad \forall \|e^+\|_2 \geq \frac{2}{\theta\epsilon}\|b^+\|_2$$

■

Con el objetivo de extender la metodología propuesta en los observadores cooperativos a los de observadores intervalo, se utiliza la relación obtenida entre el radio de estabilidad y el método de disipatividad para facilitar el desarrollo matemático. En seguida se expone el algoritmo de diseño de estos observadores mediante la relación mencionada.

**Proposición 9:** Sea el sistema  $\Psi_S$  (4.2), los observadores  $\Psi_{O^+}$  (4.5) y  $\Psi_{O^-}$  (4.9), las dinámicas de los errores de observación  $\Psi_{E^+}$  (4.6) y  $\Psi_{E^-}$  (4.10), y  $\pi(t, x)$  es una perturbación del sistema. Además se asume que se conocen las cotas de la perturbación y que satisfacen:

$$\pi^+(t, y) \succeq \pi(t, x) \succeq \pi^-(t, y), \quad \forall t \geq 0, \forall x, y.$$

Suponga que los sistemas  $\Psi_{E^+}$  (4.6) y  $\Psi_{E^-}$  (4.10) es continuamente diferenciable y localmente Lipschitz en  $e^+$  y  $e^-$  respectivamente.

## 4.2. ESTABILIDAD DEL OBSERVADOR INTERVALO

---

Adicionalmente, suponga que las no linealidades  $\phi_e^+$  y  $\phi_e^-$  son  $(-I, 0, \gamma I) - D$ , es decir, que se satisface

$$\|\phi_e(z_e, \sigma)\|^2 \leq \gamma \|z_e\|^2, \forall \sigma, z_e \in \mathbb{R}^r \quad (4.13)$$

Si existen las matrices  $L^+, L^-, N^+, N^-$  tal que se satisface:

- $A_L^+, A_L^-$  son Metzler y Hurwitz.
- $H_N^+ \succeq 0, H_N^- \succeq 0$ ,
- $\|H_N^+(A_L^+)^{-1}G\|^{-1} \succeq \gamma, \|H_N^-(A_L^-)^{-1}G\|^{-1} \succeq \gamma$
- $M_e^+ = A_L^+ + G \frac{\partial f(z_e^+)}{\partial z_e^+} H_N^+$  es Metzler,  $z_e^+ \in \mathbb{R}^r$
- $M_e^- = A_L^- + G \frac{\partial f(z_e^-)}{\partial z_e^-} H_N^-$  es Metzler,  $z_e^- \in \mathbb{R}^r$ .

Entonces, las dinámicas  $\Psi_{E^+}$  (4.6) y  $\Psi_{E^-}$  (4.10) son ISS con respecto a  $b^+$  y  $b^-$  respectivamente y además son sistemas cooperativos. El resultado es que los observadores  $\Psi_{O^+}$  (4.5) y  $\Psi_{O^-}$  (4.9) forman un *observador intervalo* para el sistema  $\Psi_S$  (4.2) si se cumple

$$\widehat{x}_0^+ \succeq x_0 \succeq \widehat{x}_0^- \Rightarrow \widehat{x}^+(t) \succeq x(t) \succeq \widehat{x}^-(t) \quad \diamond$$

Cabe señalar las matrices  $L^+, N^+$  y  $L^-, N^-$  se pueden diseñar por separado para cada observador. Pero el diseño de ambos observadores se puede satisfacer con un par de matrices  $L^+ = L^-$  y  $N^+ = N^-$ .

Asimismo, con la proposición 9 es más sencillo diseñar un observador intervalo para el sistema  $\Psi_S$  (4.2) que con la proposición 8. Pero dicha proposición impone varias restricciones en las dinámicas de los errores de estimación  $\Psi_{E^+}$  (4.6) y  $\Psi_{E^-}$  (4.10).

## 4.3. Ejemplos

### 4.3.1. Planta estable

Considérese el sistema no lineal  $\Psi_S$  (4.2), donde las matrices  $A$ ,  $G$ ,  $C$ ,  $H$  y la no linealidad  $f(\sigma)$  están definidas en el ejemplo de planta estable del observador cooperativo (ver pág.48). Adicionalmente,  $\pi(t, x)$  es la perturbación y sus cotas  $\pi^-(t, y) = 0.8$  y  $\pi^+(t, y) = 1.2$  tales que satisfacen a (4.3). Además considere los observadores  $\Psi_{O^+}$  (4.5) y  $\Psi_{O^-}$  (4.9) y las dinámicas de los errores de observación  $\Psi_{E^+}$  (4.6) y  $\Psi_{E^-}$  (4.10) son ISS (*proposición 8*).

**Objetivo del ejemplo.** Se desea un observador intervalo con la finalidad que los estimados acoten dinámicamente tanto por arriba como por abajo a la trayectoria del estado de  $\Psi_S$ . Esto se debe realizar mediante la *proposición 9*.

Este ejemplo es una extensión del ejemplo expuesto en el observador cooperativo ya que en este caso se maneja al sistema (3.21) con perturbaciones. Por consiguiente, las matrices de diseño para el observador intervalo son las mismas que en los observadores cooperativos:  $L^+ = L^- = [0.6495, -0.9, -2]^T$  y  $N^+ = N^- = 0$ . Adicionalmente, las condiciones para garantizar la existencia de un observador intervalo son equivalentes a las condiciones que aseguran la existencia de un observador cooperativo con el estimado tanto por encima como por debajo de la trayectoria del estado. Cabe mencionar que si se sabe que no hay entrada desconocida [ $\pi(t, x) = 0$ ] en (4.2) y las cotas de dicha entrada son  $\pi^+(t, y) = \pi^-(t, y) = 0$  entonces, los estimados del observador intervalo convergen al estado ya que se trata del caso del observador cooperativo. En las figuras (4.1), (4.2) y (4.3) se presentan los resultados de la simulación del observador intervalo. Se observa que los estimados permanecen como dos cotas dinámicas, una superior y otra inferior, del estado.

### 4.3. EJEMPLOS

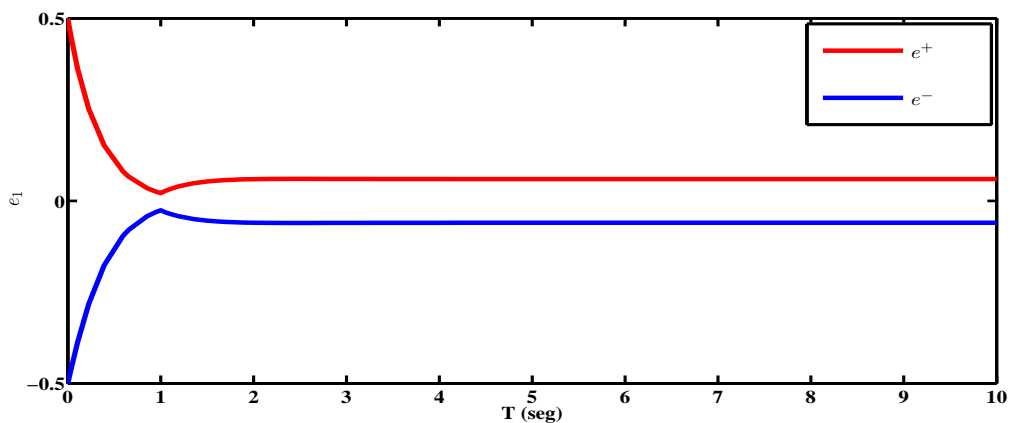


Fig. 4.1: Comportamiento de los estimados del observador intervalo para  $x_1$ .

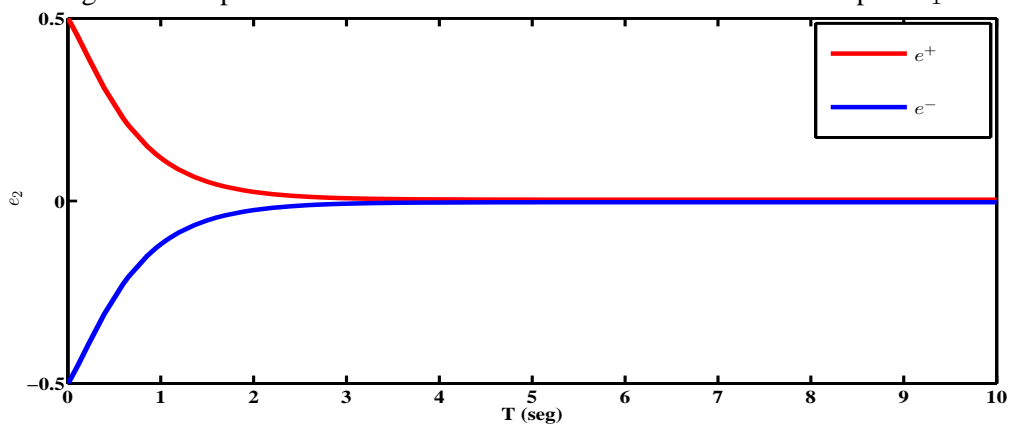


Fig. 4.2: Comportamiento de los estimados del observador intervalo para  $x_2$ .

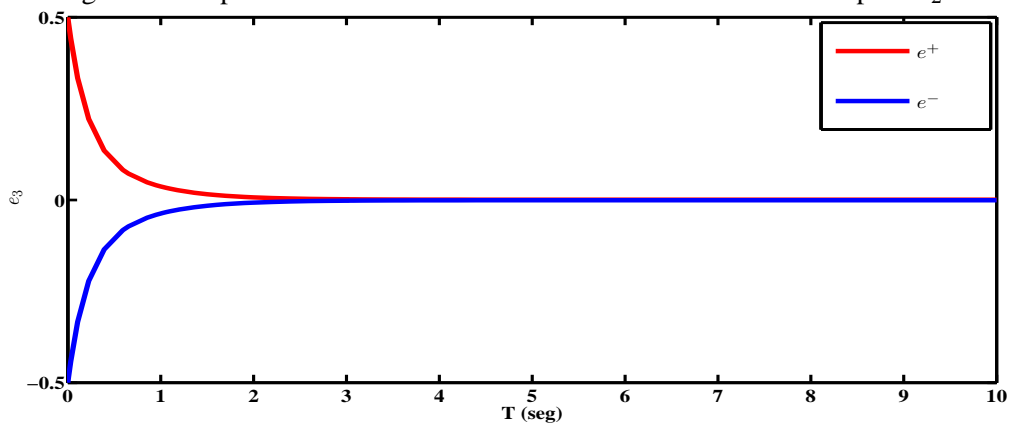


Fig. 4.3: Comportamiento de los estimados del observador intervalo para  $x_3$ .

### 4.3. EJEMPLOS

---

#### 4.3.2. Planta inestable

Considérese el sistema no lineal  $\Psi_S$  (4.2), donde las matrices  $A$ ,  $G$ ,  $C$ ,  $H$  y la no linealidad  $f(\sigma)$  están definidas en el ejemplo de planta inestable del observador cooperativo (ver pág.56). Adicionalmente,  $\pi(t, x)$  es la perturbación y sus cotas  $\pi^-(t, y) = 0.8$  y  $\pi^+(t, y) = 1.2$  tales que satisfacen a (4.3).

**Objetivo del ejemplo.** Se desea un observador intervalo con la finalidad que los estimados acoten dinámicamente tanto por arriba como por abajo a la trayectoria del estado de  $\Psi_S$ . Esto se debe realizar mediante la *proposición 9*. Además se pretende estabilizar al observador intervalo por medio de la inyección de salida de los observadores  $\Psi_{O+}$  (4.5) y  $\Psi_{O-}$  (4.9).

Este ejemplo es una extensión del ejemplo expuesto en el observador cooperativo ya que en este caso se maneja al sistema (3.23) con perturbaciones. Por consiguiente, se tiene el mismo comportamiento con las no linealidades  $\phi_e^+$  y  $\phi_e^-$ , el mismo radio de estabilidad con inyección de salida y la misma velocidad de convergencia de los observadores cooperativos. Esto se debe a que las matrices de diseño para el observador intervalo son iguales que en el observador cooperativos:  $L = [-2.3505, -0.9, -2]^T$  y  $N = 0$ .

En las figuras (4.5), (4.6) y (4.7) se presentan los resultados en simulación, en las cuales se muestra el comportamiento de los errores de observación. En dichas figuras se observa que cuando existen perturbaciones en el sistema (4.2) las trayectorias de los errores de observación  $e^+(t)$  y  $e^-(t)$  permanecen acotadas, dependiendo del comportamiento de  $b^+$  y  $b^-$ .



### 4.3. EJEMPLOS

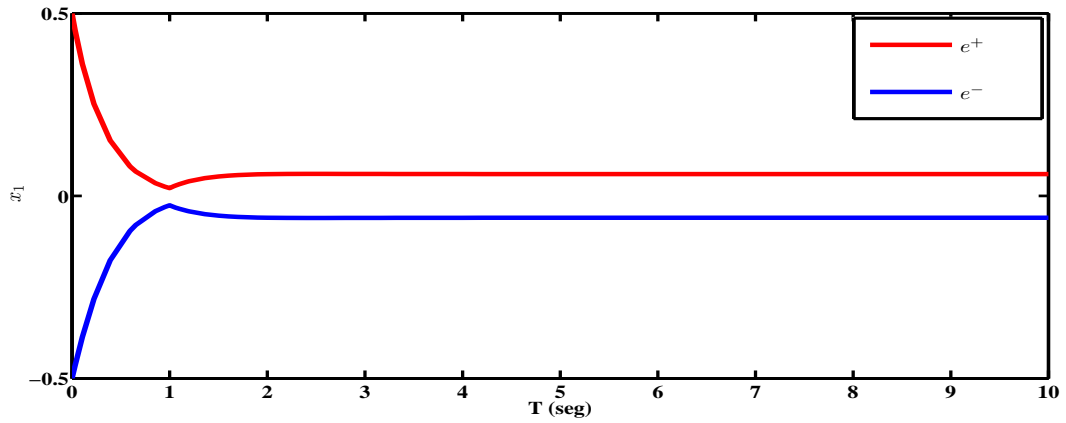


Fig. 4.4: Convergencia de los errores de observación del observador intervalo para  $x_1$ .

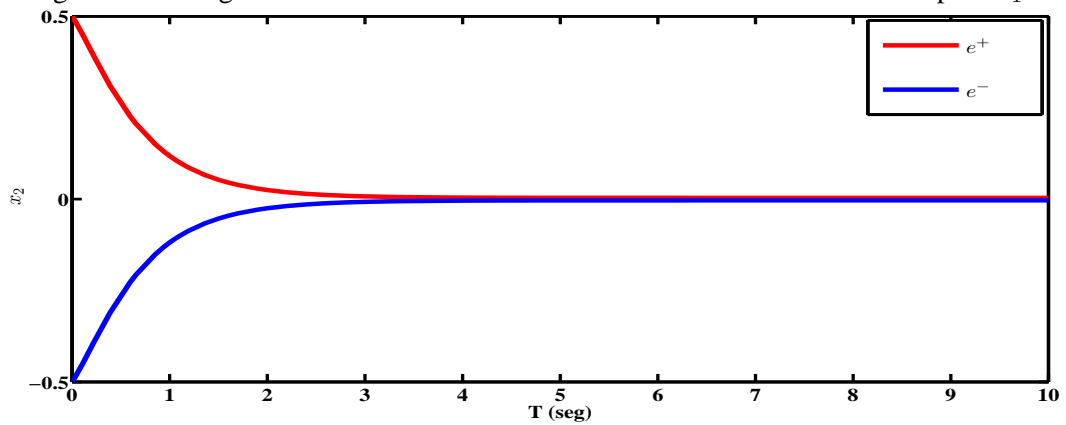


Fig. 4.5: Convergencia de los errores de observación del observador intervalo para  $x_3$ .

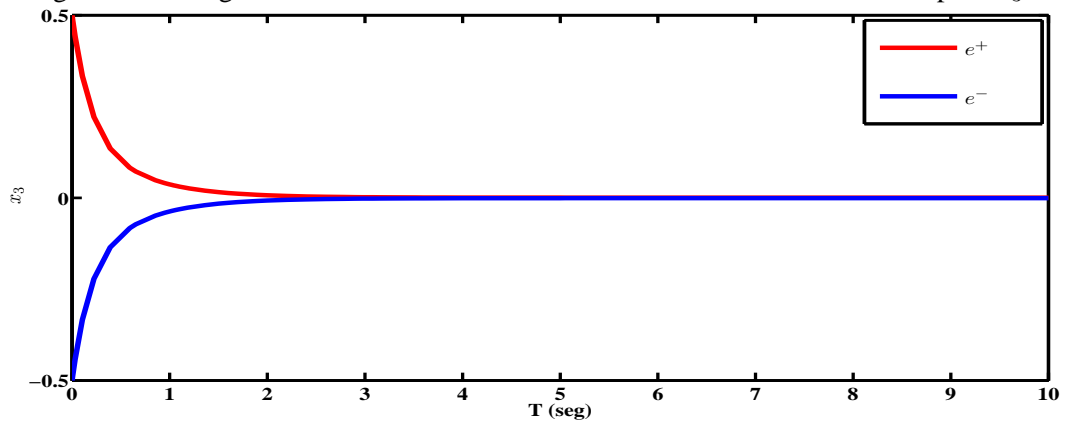


Fig. 4.6: Convergencia de los errores de observación del observador intervalo para  $x_3$ .

### 4.3. EJEMPLOS

---

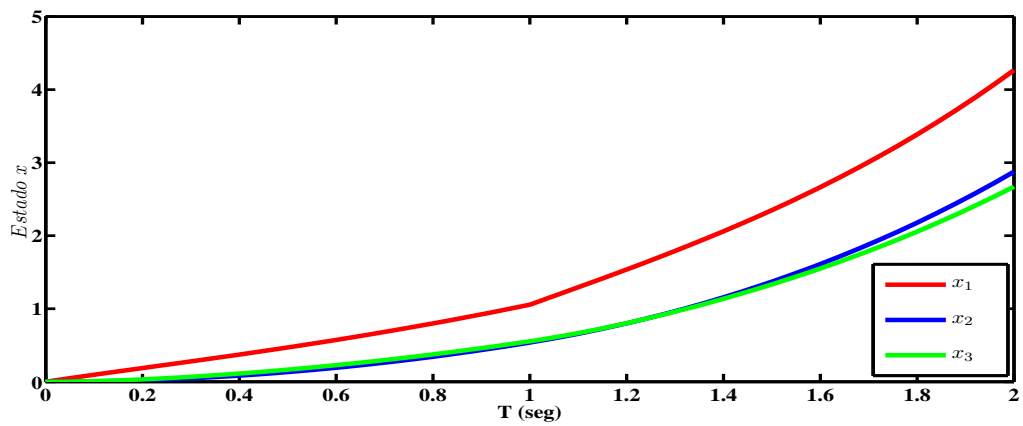


Fig. 4.7: El estado del sistema  $\Psi_S$  diverge.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se introduce el concepto de observador cooperativo y se presenta una nueva metodología de diseño de estos observadores para una clase de sistemas no lineales, producto de la conjunción del método de disipatividad y de la propiedad de cooperatividad. El tipo de sistemas a los que la metodología propuesta es aplicable son aquellos cuyo modelo puede ser representado por un subsistema LTI con una no linealidad en retroalimentación. La metodología de diseño del observador cooperativo asegura que los estimados están por encima o por debajo de la trayectoria del estado y son convergentes a dicha trayectoria.

Un resultado importante es que si existe un observador cooperativo con el estimado por encima del estado entonces, se asegura la existencia de un observador cooperativo con el estimado por debajo del estado y viceversa. Esto se debe a la propiedad de simetría que tiene este observador. Con la metodología de diseño del observador cooperativo se proponen dos algoritmos. El primero es la forma general de construir el observador cooperativo basado en el método disipativo y cooperativo. El segundo es un caso especial para diseñar este observador, el cual está dado por la relación entre el radio de estabilidad y el método de disipatividad, donde se sustituye la desigualdad disipativa por una simple ecuación determinada por radio de estabilidad de los sistemas positivos. El segundo caso se utiliza en los ejemplos que se proponen en este trabajo con el objetivo de reducir el cálculo matemático que se indica en el primer caso. Además, en esta tesis se realiza una extensión del diseño a los observador intervalo con el propósito de analizar sistemas no lineales con perturbaciones, obteniendo como resultado que los estimados de dicho observador acoten dinámicamente tanto por arriba como por abajo la trayectoria del estado.

---

Los esquemas propuestos son probados en simulación con un par de ejemplos tanto para los observadores cooperativos como para los observadores intervalo. En el primero se considera una planta estable y en el segundo una planta inestable. En el caso de la planta estable se obtienen dos resultados: se incrementa el radio de estabilidad por medio de la inyección de salida de dichos observadores. Pero no se puede acelerar la velocidad de convergencia debido a las restricción de la propiedad de cooperatividad en los sistemas dinámicos. En el caso de la planta inestable se estabilizan a los observadores a través de la matrices de ganancia.

Cabe señalar que la propiedad de monotonicidad es la generalización de la propiedad de cooperatividad. Por consiguiente, como trabajo de investigación futuro se puede estudiar el comportamiento de los observadores monótonos, como generalización de los observadores cooperativos introducidos en este trabajo. En cuanto al alcance de los resultados, se pretende generalizar el incremento del radio de estabilidad y el mejoramiento de la velocidad de convergencia del observador a través de la matriz de ganancia. También queda por estudiar como aplicar el esquema de control con los observadores estudiados en este trabajo y validar experimentalmente los resultados teóricos en los sistemas reactivos. Como se puede apreciar son varios los puntos que aún quedan por explorar referentes a los resultados aquí obtenidos.

## Apéndice

## A. PROPIEDAD DE SIMETRÍA

La demostración de la *proposición 6* se enuncia en seguida:

Sea el sistema  $\Pi_S$  (3.1), el observador  $\Pi_0$  (3.2), las dinámicas del error  $\Pi_E$  (3.7) y (3.8) y las no linealidades  $\phi^+$  (3.5) y  $\phi^-$  (3.6) están dadas por

$$\begin{aligned}\phi^+(z, \sigma) &\triangleq f(\sigma) - f(\sigma - z) \\ \phi^-(z, \sigma) &\triangleq f(\sigma) - f(\sigma + z)\end{aligned}$$

y la relación que existe entre estas no linealidades es (3.11),

$$\phi^+(z, \sigma) = -\phi^-(-z, \sigma)$$

**El diseño de  $\Pi_0$  con  $\Pi_{E^+} \Leftrightarrow$  diseño de  $\Pi_0$  con  $\Pi_{E^-}$  si y sólo si,**

◆  $\Pi_{E^+}$  es estable  $\Leftrightarrow \Pi_{E^-}$  sea estable.

Esto se debe a que si existen las constantes  $k$  y  $\varrho$  tales que para cualquier condición  $e^+(0)$  se satisface:

$$\|e^+(t)\| \leq k^+ \|e^+(0)\| \exp(-\varrho^+ t),$$

Se sabe que  $e^+ = \hat{x} - x \Rightarrow e^- = -e^+ = x - \hat{x}$

$$\|e^+(t)\| \leq k \|e^+(0)\| \exp(-\varrho t) \Rightarrow \|e^-(t)\| \leq k \|e^-(0)\| \exp(-\varrho t)$$

de la misma manera  $e^+ = -e^-$ , por lo que se tiene:

$$\|e^-(t)\| \leq k \|e^-(0)\| \exp(-\varrho t) \Rightarrow \|e^+(t)\| \leq k \|e^+(0)\| \exp(-\varrho t)$$

---

◆ Adicionalmente,  $\phi^+$  es  $(Q, S, R)$ -D  $\Leftrightarrow \phi^-$  también es  $(Q, S, R)$ -D.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ z \end{bmatrix} &= \phi^{+T} Q \phi^+ + 2\phi^{+T} S z + z^T R z \\ &= (-\phi^-)^T Q (-\phi^-) + 2(-\phi^-)^T S (-z) + (-z)^T R (-z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi^- \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^- \\ z \end{bmatrix} &= \phi^{-T} Q \phi^- + 2\phi^{-T} S z + z^T R z \\ &= (-\phi^+)^T Q (-\phi^+) + 2(-\phi^+)^T S (-z) + (-z)^T R (-z) \end{aligned}$$

Por consiguiente, para garantizar que se cumplan las desigualdades de arriba sólo se requiere que existan las matrices  $P = P^T > 0$ ,  $L$ ,  $N$  y la constante  $\epsilon > 0$  tales que se satisfacen:

$$\begin{bmatrix} e^+ \\ \phi^+ \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P A_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R H_N & P G - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N^+ & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^+ \\ \phi^+ \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -e^- \\ -\phi^- \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P A_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^{-T} R H_N & P G - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^+ \\ -\phi^- \end{bmatrix} \leq 0$$

de forma análoga se tiene

$$\begin{bmatrix} e^- \\ \phi^- \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P A_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R H_N & P G - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N^+ & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^- \\ \phi^- \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -e^+ \\ -\phi^+ \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P A_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^{-T} R H_N & P G - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^+ \\ -\phi^+ \end{bmatrix} \leq 0$$

---

◆  $\Pi_{E^+}$  es cooperativo  $\Leftrightarrow \Pi_{E^-}$  es cooperativo.

Es decir, los Jacobianos de los errores de observación deben ser Metzler:

$$M^+(z) = A_L - G \frac{\partial \phi^+}{\partial z} H_N = A_L + G \frac{\partial f(z)}{\partial z} H_N$$
$$M^-(z) = A_L - G \frac{\partial \phi^-}{\partial(z)} H_N = A_L + G \frac{\partial f(z)}{\partial(z)} H_N$$
$$\therefore M^+ \Leftrightarrow M^-$$



## Bibliografía

- Adebekun, D. K.** y **F. J. Schork.** 1989. Continuous solution polymerization reactor control 2: estimation and nonlinear reference control during methyl methacrylate polymerization. *Ind. Engng Chem.* 28(5). 1846.
- Alcaraz-Gonzalez, V., J. Harmand, A. Rapaport, J. Steyer, V. Gonzalez-Alvarez** y **C. Pelayo-Ortiz.** 2002. Software sensors for highly uncertain wwtps: a new approach based on interval observers.. *Water Res.* 36. 2515.
- Angeli, D.** y **D. Sontag.** 2003. Monotone control systems. *IEEE Transactions Automatic Control Letters* 48(10). 1684–1698.
- Bastin, G.** y **D. Dochain.** 1990. On-line estimation and adaptive control of bioreactors. *Elsevier, Amsterdam.*
- Cicarrella, G., A. Dalla Mora** y **A. Germani.** 1993. A luenberger like observer for nonlinear systems.. *Int. J. Control* 57. 537.
- Davila, J.** y **L. Fridman.** 2004. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. 8th. International Workshop on Variable Structure Systems.
- Dochain, D., M. Perrier** y **B. Ydstie.** 1992. Asymptotic observers for stirred tank reactors.. *Chem. Eng Sci.* (47). 4167.
- Edwards, C.** y **S. Spurgeon.** 1994. On the development of discontinuous observers. *Int. J. Control* 59(5). 1211–1229.

## Bibliografía

---

- Ellis, M. F., T. W. Taylor, V. Gonzalez y K. F. Jensen.** 1988. Estimation of the molecular weight distribution in batch polymerization.. *A.I.Ch.E.J.* 34(5). 1341.
- Gauthier, J., H. Hammouri y S. Othman.** 1992. A simple observer for nonlinear systems. applications to bioreactors. *IEEE. Trans. Automatic Control.* 37. 875–880.
- Gauthier, J. y I. Kupka.** 2001. Deterministic observation theory and applications.. *Cambridge University Press. Cambridge, UK.*
- Gouzé, J. L., A. Rapaport y M. Z. Hadj-Sadok.** 2000. Interval observers for uncertain biological systems. *International Journal of Control* 133(1-2). 45–56.
- Hinrichsen, D. y A. Pritchard.** 1986. Stability radius for structured perturbations and the algebraic riccati equation. *Systems and Control Letters* 8. 105–113.
- Hirsch, M. y H. Smith.** 2004. *Monotone Dynamical Systems.* Preprint.
- Jiang, J. F.** 1992. A liapunov function for three-dimensional feedback systems.. *American Mathematical Society.*
- Kalman, R. y R. Bucy.** 1961. New results in linear filtering and prediction theory. 83. 95–108.
- Khalil, H.** 2002. *Nonlinear Systems.* third ed. Prentice-Hall. Upsaddle River, New Jersey.
- Luenberger, D.** 1966. Lyapunov functions and stability in control theory. *IEEE Trans. Automat. Control* 16. 596–602.
- Luenberger, D.** 1979. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications.* J. Wiley. New York.

## Bibliografía

---

- Mailleret, L.** 2004. Stabilisation globale de systèmes dynamiques positifs mal connues. applications en biologie. *PhD thesis. Université de Nice Sophia Antipolis. France.*
- Martínez-Guerra, R., R. Aguilar y A. Poznyak.** 2004. A new robust sliding-mode observer design for monitoring in chemical reactors. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 126. 473–478.
- Moisan, M.** 2007. *Synthèse d'Observateurs par Intervalles pour des Systèmes Biologiques Mal Connus.* Université de Nice Sophia Antipolis. décembre 2007.
- Moreno, J. A.** 2004b. Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control SSSC2004.*
- Oliveira, R., E. Ferreira y A. Feyeo.** 2002. Stability dynamics of convergence and tuning of observer-based kinetic estimators. *J. Proc. Control* 12. 311–323.
- Rapaport, A. y D. Dochain.** 2005. Interval observers for biochemical processes with uncertain kinetics and inputs.. *Mathematical Biosciences* (192). 235–253.
- Son, N. y D. Hinrichsen.** 1996. Stability radius for structured perturbations and the algebraic riccati equation. *Systems and Control Letters* 17. 649–659.
- Soroush, M.** 1997. Nonlinear state-observer design with application to reactors.. *Chem. Eng. Sci.* 52. 387.
- Veloso, A., I. Rocha y E. Ferreira.** 2007. Estimation of biomass concentration using interval observers in an e. coli fed-batch fermentation.. *10th International IFAC Symposium on Computer Applications in Biotechnology. Cancún, México.*
- Willems, J.** 1972b. Dissipative dynamical systems, part II: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis. IEEE Trans. Automat. Contr.*