UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Representaciones de grupos trenzados

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO(A) EN CIENCIAS

P R E S E N T A

Marcelino Ramírez Ibáñez

DIRECTOR(A) DE LA TESINA: Dr. Ernesto Vallejo Ruiz

MÉXICO, D.F. Octubre, 2008.

Índice general

Introducción

Este trabajo tiene como propósito el estudio de las representaciones de productos trenzados $G \wr S_n$, con G grupo finito. Está basado en el capítulo 4 de [1]. Tiene como propósito, mostrar como a partir de las representaciones irreducibles de G y de S_n se forman las representaciones irreducibles del producto trenzado $G \wr S_n$, cuando el campo C es de característica cero. El presente trabajo esta dividido en cuatro capítulos.

En el primero, se dan algunas definiciones básicas del grupo simétrico S_n que se necesitarán mas adelante, también se define el producto semidirecto de grupos, pues el producto trenzado de grupos es un caso particular de éste.

En el segundo capítulo se define el producto trenzado y se dan algunas propiedades de él. También se da una representación por permutaciones de $G \wr H$ con $G \leq S_m, H \leq S_n$, de la cual se obtienen bonitos resultados.

El tercer capítulo esta dedicado a las clases de conjugación de $G \wr S_n$, estos productos trenzados son de particular importancia y son llamados los *grupos monomiales completos sobre G*.

En el cuarto capítulo se da la teoría de representaciones de grupos sobre $\mathbb{C}$, así como algunos resultados de la teoría de Clifford que son necesarios para la clasificación de las representaciones irreducibles de $G \wr S_n$.

El quinto y último capítulo esta dedicado a las representaciones de $G \wr S_n$. Se demuestra que el conjunto

$$\mathscr{W} = \{(V(\pi); W) \mid \pi = (\pi_1, \ldots, \pi_r) \in \mathbb{N}_0, \ \sum \pi_i = n \text{ y } W \text{ un } S_\pi\text{-mod irred.}\},$$

es un conjunto de representaciones irreducibles de $G \wr S_n$ no isomorfos dos a dos y cualquier $G \wr S_n$-módulo irreducible es isomorfo a un elemento de $\mathscr{W}$. Donde $(V(\pi); W) = \mathrm{Ind}_{G \wr S_\pi}^{G \wr S_n}(V(\pi)^{\sim} \otimes W)$, con $G \wr S_\pi$ el grupo de inercia de $V(\pi)^{\sim}$ y W un S_π-módulo irreducible.

Capítulo 1

Generalidades

En este capítulo damos las nociones de ciclo, tipos cíclico y damos algunos resultados básicos sobre clases de conjugación de S_n. Finalizamos definiendo el producto semidirecto de dos grupos.

1.1. Grupo simétrico

El grupo simétrico denotado por S_n consta de todas las funciones biyectivas de un conjunto con n elementos en sí mismo y el producto esta dado por la composición de funciones. Dado $\pi \in S_n$ arbitrario, sabemos que π se descompone en el producto de ciclos disjuntos. Sea $c(\pi)$ el número de factores cíclicos disjuntos, incluyendo los 1-ciclos y sean l_ν $(1 \leq \nu \leq c(\pi))$ sus longitudes y elijamos para cada ν un elemento j_ν del ν-ésimo factor cíclico. Entonces

$$\pi = \prod_{\nu=1}^{c(\pi)} (j_\nu \pi(j_\nu) \cdots \pi^{l_\nu - 1}(j_\nu)) \tag{1.1}$$

Esta expresión para π es única si elegimos los j_ν tales que:

i) Para toda $1 \leq \nu \leq c(\pi),\ s \in \mathbb{Z} \qquad (j_\nu \leq \pi^s(j_\nu))$

ii) Para toda $1 \leq \nu \leq c(\pi), \qquad (j_\nu \leq j_{\nu+1})$

Para poder hacer una descripción mas precisa de las clases de conjugación de S_n introduciremos la noción de partición de n. Una sucesión de enteros no negativos

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots),$$

es llamada una partición(propia) de n si y sólo si satisface

$$\begin{aligned} &\text{i)} \qquad \forall\ i \geq 1 \quad (\alpha_i \geq \alpha_{i+1}). \\ &\text{ii)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Las α_i son llamadas partes de α. El que α sea una partición de n es denotada por

$$\alpha \vdash n.$$

Si $\alpha \vdash n$, existe h tal que $\alpha_i = 0$ para toda $i \geq h$, por lo que podemos escribir a α como

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_h).$$

El número $p(n)$ de particiones de n crece rápidamente conforme crece n por ejemplo:

$$p(0) = 1, p(1) = 1, p(4) = 5, p(10) = 42, p(20) = 627,$$

$$p(50) = 204226, p(100) = 190569292.$$

Si π es un elemento de S_n, las longitudes ordenadas $\alpha_i(\pi)$, $1 \leq i \leq c(\pi)$ de los factores cíclicos de π en notación cíclica determinan una única partición de n, la cual llamaremos *partición o partición cíclica* de π, la denotaremos por $\alpha(\pi)$:

$$\alpha(\pi) := (\alpha_1(\pi), \ldots, \alpha_{c(\pi)}(\pi)).$$

La correspondiente n-tupla que consiste de las multiplicidades de las partes de $\alpha(\pi)$, i.e.,

$$a(\pi) := (a_1(\pi), \ldots, a_n(\pi)),$$

es llamado *el tipo cíclico de* π, donde $a_i(\pi)$ es el número de factores de π de longitud i.
Por ejemplo, si $n = 9$ y $\pi = (13)(247)(59) = (13)(247)(59)(6)(8)$, $\alpha(\pi) = (3, 2, 2, 1, 1)$ y $a(\pi) = (2, 2, 1)$.

El siguiente resultado que no es difícil de demostrar, en cualquier libro de Álgebra moderna se puede encontrar, nos dice

Lema 1.1 *Dos elementos $\pi, \sigma \in S_n$ son conjugados si y sólo si tienen la misma partición cíclica.*

Usando la noción de partición cíclica, el tipo cíclico y denotando por $C^S(\pi)$ la clase de conjugación de $\pi \in S_n$, lo anterior se lee

Lema 1.2 $C^S(\pi) = C^S(\sigma) \Leftrightarrow \alpha(\pi) = \alpha(\sigma) \Leftrightarrow a(\pi) = a(\sigma)$.

Como consecuencia del lema anterior tenemos

Teorema 1.3 *El número de clases de conjugación de S_n es igual al número de particiones (cíclicas) de n.*

Como

$$(i_1 \cdots i_r)^{-1} = (i_r \cdots i_1),$$

obtenemos

$$\alpha(\pi) = \alpha(\pi^{-1}),$$

para cada $\pi \in S_n$. Del lema anterior se sigue que cada permutación en S_n es conjugada con su inverso. Los grupos en los que cada elemento es conjugado con su inverso son llamados *ambivalentes*. Hemos probado el siguiente

Lema 1.4 *S_n es ambivalente.*

Concluimos esta sección con una evaluación del orden de $\pi \in S_n$ y su clase de conjugación $C^S(\pi)$. En notación cíclica

$$\pi = \prod_{\nu=1}^{c(\pi)} (j_\nu \cdots \pi^{l_\nu - 1}(j_\nu)).$$

Como ciclos disjuntos conmutan, tenemos que

$$\pi^r = \prod_{\nu} (j_\nu \cdots \pi^{l_\nu - 1}(j_\nu))^r,$$

para cada $r \in \mathbb{N}$. Por lo que el orden de π, es decir, el orden del grupo cíclico generado por π, es el mínimo común múltiplo de las longitudes l_ν de los factores cíclicos de π, lo que es lo mismo

$$| < \pi > | = \text{m.c.m.}\{\alpha_i(\pi) \mid 1 \leq i \leq c(\pi)\}.$$

La clase de conjugación C^α que consisten de los elementos con partición cíclica α y tipo cíclico a es obtenida como sigue. Cada elemento proviene de un sistema de a_i ciclos vacíos de longitud i, $1 \leq i \leq n$, i.e.,

$$\ldots \underbrace{\underbrace{(\cdot \ldots \cdot)}_{|\leftarrow i \rightarrow|} \underbrace{(\cdot \ldots \cdot)}_{|\leftarrow i \rightarrow|} \ldots \underbrace{(\cdot \ldots \cdot)}_{|\leftarrow i \rightarrow|}}_{a_i \ ciclos} \ \ldots$$

insertando los puntos $1, \ldots, n$ en todas las $n!$ maneras posibles. Como las permutaciones cíclicas de puntos no cambian un ciclo, por ejemplo $(536241) = (362415) = \ldots = (153624)$, tenemos i^{a_i} maneras de representar el mismo. Además como ciclos disjuntos conmutan, la permutación de dichos ciclos nos da $a_i!$ maneras. Es así que cada elemento de C^α se obtiene de $\prod_i i^{a_i} a_i!$ veces de estos procesos. Esto prueba

Lema 1.5 *Para cada $\pi \in S_n$*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad |C^S(\pi)| = \frac{n!}{\prod_i i^{a_i} a_i!}, \\ &\text{(ii)} \quad |C_S(\pi)| = \textstyle\prod_i i^{a_i} a_i!. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Con $C_S(\pi)$ el centralizador de π en S_n.

Demostración. (i) es claro. Del álgebra moderna se sabe que si $x \in G$ y G es un grupo, el orden de la clase de conjugación de x en G, $C^G(x)$, es

$$|C^G(x)| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)|,$$

por lo que de (i) se sigue (ii). ■

1.2. Producto semidirecto

Esta sección esta basada en [4]. Sea G un grupo y supongamos que $H \leq G, N \trianglelefteq G$ y que $G = NH$ con $N \cap H = 1$. Llamamos a G el *producto semidirecto(interno) de* N *por* H y lo denotamos por $G := N \rtimes H$. Si además tuviéramos $H \trianglelefteq G$ entonces G sería el producto directo de N y H.

Ejemplo 1.6 *$G = S_3$, $N = A_3$ y $H =< (12) >$, vemos que $G = N \rtimes H$. H no es normal en G, por lo que G no es el producto directo de N y H.*

Observaciones

i) Como $H \cap N = 1$ por el primer teorema de isomorfía $H = H/H \cap N \cong NH/N = G/N$. De donde, si G es finito entonces $|G| = |N||G : N| = |N||H|$.

ii) Cada $g \in G$ tiene una única expresión $g = nh$ con $n \in N$ y $h \in H$.

iii) Dados $x, y \in G$, de la observación anterior $x = n_1h_1$, $y = n_2h_2$ y también $xy = nh$. pero $xy = (n_1h_1)(n_2h_2) = (n_1h_1n_2h_1^{-1})(h_1h_2)$ por lo que $n = n_1h_1n_2h_1^{-1}$, pues N es normal en G, y $h = h_1h_2$.

iv) Sea $h \in H$ fija. Como $N \trianglelefteq G$, la función $\varphi_h : N \to N$ dada por $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$ es un isomorfismo de N. Más aún $\varphi_h \circ \varphi_{h'} = \varphi_{hh'}$ para toda $h' \in H$. Es así que hemos construido un morfismo $\varphi : H \to Aut(N)$, $\varphi(h) = \varphi_h$. El cual llamaremos *homomorfismo de conjugación del producto semidirecto* G.

v) No es difícil ver que $\varphi : H \to Aut(N)$ es trivial si y sólo si G es el producto directo de N y H.

vi) φ no trivial implica G no es abeliano.

Nótece que $(n_1h_1)(n_2h_2) = n_1\varphi_{h_1}(n_2) \cdot h_1h_2$ para cualquier $h_1, h_2 \in H$ y $n_1, n_2 \in N$, es decir la operación que tiene G como grupo puede ser expresada en términos de la operación de grupo de N,H y el homomorfismo φ. Esto nos dice que si deseamos encontrar el producto semidirecto externo debemos proceder de la siguiente manera:

Sean N, H grupos arbitrarios y un morfismo dado φ de H en $Aut(N)$. Otorguemos una operación binaria a $N \times H$ por $(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2)$. Esta definición da a $N \times H$ una estructura de grupo. El elemento identidad es $(1, 1)$, el inverso de (n, h) es $(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$. Llamamos a este grupo el *producto semidirecto(externo) de* N *por* H *correspondiente a* φ, y lo denotamos por $G = N \rtimes_\varphi H$. Esta estructura de grupo en el conjunto $N \times H$ en general difiere del producto directo de grupos; en el producto directo $1 \times H$ conmuta con $N \times 1$ y este no es el caso cuando φ no es trivial.

El grupo G tiene como subgrupos a $\mathcal{N} = N \times 1, \mathcal{H} = 1 \times H$ que son isomorfos a N y H respectivamente. Para cada $(x, 1) \in \mathcal{N}$ y $(n, h) \in G$ tenemos:

$$\begin{aligned} (n,h)(x,1)(n,h)^{-1} &= (n\varphi_h(x), h)(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) \\ &= (n\varphi_h(x) \cdot \varphi_h(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1})), 1) \\ &= (n\varphi_h(x)n^{-1}, 1), \end{aligned}$$

lo que nos dice que $\mathcal{N}$ es normal en G. Como $(n, h) = (n\varphi(1), 1)(1, h)) = (n, 1)(1, h)$ para cualquier $(n, h) \in G$, vemos que $G = \mathcal{N}\mathcal{H}$. $\mathcal{N} \cap \mathcal{H}$ consiste solamente del elemento identidad en G, de modo que G es el producto semidirecto interno de $\mathcal{N}$ por $\mathcal{H}$. Además, dados $(n, 1) \in \mathcal{N}$ y $(1, h) \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\begin{aligned} (1,h)(n,1)(1,h)^{-1} &= (1 \cdot \varphi_h(n), h)(\varphi_{h^{-1}}(1), h^{-1}) \\ &= (\varphi_h(n)\varphi_h(\varphi_{h^{-1}}(1)), hh^{-1}) \\ &= (\varphi_h(n), 1), \end{aligned}$$

es decir, el homomorfismo de conjugación de $\mathcal{H}$ en $Aut(\mathcal{N})$ de $G = \mathcal{N} \rtimes \mathcal{H}$ corresponde, después de identificar $\mathcal{N}$ con N y $\mathcal{H}$ con H, con el homomorfismo original $\varphi : H \to Aut(N)$.

Se concluye que dados dos grupos N,H y un homomorfismo $\varphi : H \to Aut(N)$, construimos un nuevo grupo $N \rtimes_\varphi H$, que es el producto semidirecto interno de un subgrupo isomorfo a N por un subgrupo isomorfo a H. Este grupo no será abeliano si φ es no trivial.

Capítulo 2

Producto trenzado

Sea G un grupo. Si $[n]$ denota a un conjunto con n elementos, por ejemplo $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, definamos $G^n = \{f : [n] \to G \mid \text{f es función}\}$. G^n es un grupo con la operación siguiente: dados $f, g \in G^n$ con $f = (f(1), f(2), \dots, f(n))$, $g = (g(1), g(2), \dots, g(n))$ definimos

$$f \cdot g := (f(1)g(1), f(2)g(2), \dots, f(n)g(n)).$$

Note que G^n es el producto directo de G n-veces. Sea $H \leq S_n$ y hagamos actuar H en G^n como sigue: dado $\sigma \in H$ fijo definamos

$$\varphi_\sigma : G^n \to G^n$$

dado por

$$\varphi_\sigma(f) = f_\sigma := f \circ \sigma^{-1}.$$

Observe que φ permuta, según σ, las n entradas de f. No es difícil ver que $\varphi \in Aut(G^n)$, además para cada $\tau \in H$ $\varphi_\sigma \varphi_\tau = \varphi_{\sigma\tau}$. Por tanto podemos formar el producto semidirecto de G^n con H con la operación $(f; \sigma)(g; \tau) = (f g_\sigma; \sigma\tau)$, el cual llamaremos *producto trenzado de G con H* y lo denotaremos por

$$G \wr H := G^n \rtimes_\varphi H.$$

También denotaremos por 1_G, 1_H a la identidad en G^n y H resp., $(1_G; 1_H)$ es la identidad en $G \wr H$. Nótese que $1_G = (e, e, \dots, e)$ con e identidad en G. Como consecuencia tenemos

i) $\mathcal{G} := \{(f; 1_H) \mid f \in G^n\}$, $G^n \cong \mathcal{G} \trianglelefteq G \wr H$.

ii) $\mathcal{H} := \{(1_G; \sigma) \mid \sigma \in H\}$, $H \cong \mathcal{H} \leq G \wr H$.

iii) $G_i = \{(f; 1_H) \mid f(j) = e \text{ si } j \neq i\} \leq G \wr H$ isomorfo a G.

iv) El subgrupo diagonal de $\mathcal{G}$, $diag\,\mathcal{G} = \{(f; 1_H) \mid f \text{ es constante}\}$, es isomorfo a G. Es así que $diag\,\mathcal{G} \cdot \mathcal{H} = \{(f; \sigma) \mid f \text{ es constante}, \ \sigma \in H\} \cong G \times H$.

Lo anterior nos muestra que G, H y $G \times H$ se encajan de manera natural en $G \wr H$. Nótese también que

$$|G \wr H| = |G|^n |H|.$$

Si G es un grupo de permutaciones de grado finito digamos $G \leq S_m$, entonces obtenemos una representación por permutaciones ψ de $G \wr H$ como sigue:

$$\psi : G \wr H \to S_{mn} : (f;\pi) \mapsto \begin{pmatrix} (j-1)m+i \\ (\pi(j)-1)m+f(\pi(j))(i) \end{pmatrix}_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}.$$

Observaciones

1) Esta es una representación fiel de $G \wr H$, i.e., ψ es un monomorfismo de grupos. Sean $(f;\pi), (g;\sigma) \in G \wr H$, se tiene que

$$\psi((f;\pi)\cdot(g;\sigma)) = \psi(fg_\pi;\pi\sigma) = \left(\begin{smallmatrix} (j-1)m+i \\ (\pi\sigma(j)-1)m+fg_\pi(\pi\sigma(j))(i) \end{smallmatrix}\right)_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}.$$

Por otro lado,

$$\psi(f;\pi)\cdot\psi(g;\sigma) = \left(\begin{smallmatrix} (j-1)m+i \\ (\pi(j)-1)m+f(\pi(j))(i) \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} (j-1)m+i \\ (\sigma(j)-1)m+g(\sigma(j))(i) \end{smallmatrix}\right),$$

si $j' := \sigma(j), i' := g(\sigma(j))(i)$ tenemos

$$\psi(f;\pi)\psi(g;\sigma) = \left(\begin{smallmatrix} (j-1)m+i \\ (\pi(j')-1)m+f(\pi(j'))(i') \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} (j-1)m+i \\ (\pi\sigma(j)-1)m+fg_\pi(\pi\sigma(j))(i) \end{smallmatrix}\right),$$

lo que prueba que ψ es un homomorfismo.
Supongamos que $(f;\pi)$ es tal que $\psi(f;\pi) = 1_{S_{mn}}$, la identidad en S_{mn}. Por tanto $\psi(f;\pi)((j-1)m+i) = (j-1)m+i$ para toda $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$, es decir

$$(j-1)m+i = (\pi(j)-1)m+f(\pi(j))(i). \tag{2.1}$$

Si existe j tal que $\pi(j) \neq j$ entonces tenemos dos casos

i) $\pi(j) > j$
Se tiene que $\pi(j) - j \geq 1$, por tanto $(\pi(j)-j)m \geq m$. Despejando i de (2.1) tenemos

$$i = (\pi(j)-j)m + f(\pi(j))(i) \geq m + f(\pi(j))(i),$$

lo cual es una contradicción.

ii) $\pi(j) < j$
Se tiene que $j - \pi(j) \geq 1$, por tanto $(j-\pi(j))m \geq m$. Despejando $f(\pi(j))(i)$ de (2.1) tenemos

$$f(\pi(j))(i) = (j-\pi(j))m + i \geq m + i,$$

lo cual es una contradicción.

Es así que para toda j, $\pi(j) = j$. Se sigue por (2.1) $i = f(j)(i)$, es decir $f = 1_G$, por tanto $(f;\pi) = (1_G; 1_{S_n})$.Se concluye que ψ es mono.

2) Esta representación es en cierto sentido natural, pues $\psi[G_1]$ actúa en $\{1,\ldots,m\} \subset \{1,2,\ldots,mn\}$ de la misma manera como G actúa en $\{1,2,\ldots,m\}$ y la restricción del grupo $\psi[G_1]$ a $\{1,\ldots,m\}$ es G. Más aún, $\psi[G_2]$ actúa en $\{m+1, m+2,\ldots,2m\}$ de la misma manera que G actúa en $[m] = \{1,2,\ldots,m\}$, etc.. También $\psi[\mathcal{H}]$ permuta los subconjuntos $\{1,2,\ldots m\}$, $\{m+1,\ldots,2m\},\ldots,\{(n-1)m,\ldots,nm\}$ de la misma manera que H actúa en $\{1,\ldots,n\}$.
Por ejemplo el elemento

$$(f;\pi) := ((12),(123),1;(23)) \in S_3 \wr S_3,$$

es aplicado bajo ψ en

$$\underbrace{(12)(456)}_{\psi(f;1_H)}\underbrace{(47)(58)(69)}_{\psi(e;\pi)} = (12)(475869) \in S_9.$$

Como una aplicación de esta permutación obtenemos una bonita descripción de los centralizadores de los elementos de S_n. Primero que nada, nótece que si $C_m :=< (1\ 2\cdots m) >\leq S_m$ entonces $\psi[C_m \wr S_n]$ es el centralizador de la permutación

$$\widehat{\tau} = (1\ 2\cdots m)(m+1\cdots 2m)\cdots((n-1)m+1\cdots nm) \in S_{nm}.$$

En efecto, dados $\sigma,\tau \in S_n$ con $\tau = (i_1 i_2 \cdots i_k)$ se sabe que

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_k)).$$

Es así que si $\rho = \psi(\sigma;\pi)$ con $\sigma \in S_m,\ \pi \in S_n$

$$\begin{aligned}\rho\widehat{\tau}\rho^{-1} &= \rho(1\ 2\cdots m)(m+1\cdots 2m)\cdots((n-1)m\cdots nm)\rho^{-1}\\ &= (\rho(1)\rho(2)\cdots\rho(m))\cdots(\rho((n-1)m)\cdots\rho(nm))\\ &= (12\cdots m)\cdots((n-1)m+1\cdots nm).\end{aligned}$$

La última igualdad es cierta por la observación (2). Lo anterior muestra que $\psi[C_m \wr S_n]$ es un subgrupo de $C_S(\widehat{\tau})$, el centralizador de $\widehat{\tau}$. De (1.3) $|C_S(\widehat{\tau})| = m^n n!$, por tanto $\psi[C_m \wr S_n] = C_S(\widehat{\tau})$.

Si lo que queremos ahora es dar una expresión para el centralizador de un elemento arbitrario, necesitamos algo más de notación.

Sean A, B dos conjuntos disjuntos, $P_1 \leq S_A,\ P_2 \leq S_B$. Definimos la suma directa de estos dos grupos $P_1 \oplus P_2$, actuando en $A \cup B$ de la siguiente manera:

$$P_1 \oplus P_2 := \{(\pi_1,\pi_2) \in P_1 \times P_2 \mid \pi_1 \in P_1,\ \pi_2 \in P_2\}$$

con la operación

$$(\pi_1, \pi_2)(w) = \begin{cases} \pi_1(w) & \text{si } w \in A, \\ \pi_2(w) & \text{si } w \in B. \end{cases}$$

Se cumple que $P_1 \oplus P_2 \leq S_{A \cup B}$. Ahora si $\pi \in S_n$ con $a(\pi) = (a_1(\pi), \ldots, a_n(\pi))$, tenemos que $\psi[C_i \wr S_{a_i(\pi)}]$ es el centralizador del producto de los $a_i(\pi)$ ciclos de longitud i,con $a_i(\pi) > 0$ y $1 \leq i \leq n$. De esto se sigue

Proposición 2.1

$$C_{s_n}(\pi) \simeq \bigoplus_{\substack{i \\ a_i(\pi) > 0}} \psi[C_i \wr S_{a_i(\pi)}].$$

Capítulo 3

Clases de Conjugación de $G \wr S_n$

Los productos trenzados de la forma $G \wr S_n$, $n \in \mathbb{N}$, son de particular importancia. Ellos son llamados los grupos monomiales completos sobre G. Este nombre se debe al hecho que $G \wr S_n$ puede ser considerado como un grupo de matrices monomiales que surgen de las $n!$ matrices de permutación de dimensión n reemplazando los 1's de las matrices por los elementos $g \in G$ en todas las posibles maneras. La multiplicación de estas matrices esta definida por la multiplicación en G.

Describiremos las clases de conjugación de estos grupos, asumiendo que G tiene un número numerable $C^1, C^2, \ldots$ de clases de conjugación . Consideremos un elemento $(f;\pi) \in G \wr S_n$ con $f = (f(1), f(2), \ldots, f(n))$ y la descomposición de π en ciclos disjuntos

$$\pi = \prod_{\nu=1}^{c(\pi)} (j_\nu \pi(j_\nu) \cdots \pi^{l_\nu - 1}(j_\nu)),$$

tal que (1.1) es válida. Le asociamos a el ν-ésimo factor cíclico $(j_\nu \pi(j_\nu) \cdots \pi^{l_\nu - 1}(j_\nu))$ el único elemento

$$g_\nu(f;\pi) := f(j_\nu) f(\pi^{-1}(j_\nu)) \cdots f(\pi^{-l_\nu+1}(j_\nu)) = f f_\pi \cdots f_{\pi^{l_\nu - 1}}(j_\nu) \qquad (3.1)$$

que esta en G, lo llamaremos el *ν-ésimo producto cíclico de* $(f;\pi)$.

Tenemos $c(\pi)$ productos cíclicos de π con respecto a f, $a_k(\pi)$ de ellos provienen de los $a_k(\pi)$ factores cíclicos de π de longitud k. Sea $a_{ik}(f;\pi) := \#$ de productos cíclicos asociados a los k-ciclos de π que pertenecen a la clase de conjugación C^i de G. Ponemos todos estos enteros no negativos $a_{ik}(f;\pi)$ en una matriz

$$a(f;\pi) = (a_{ik}(f;\pi)),$$

esta matriz tiene n columnas y tantas filas como clases de conjugación hay en G y sus entradas satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{array}{rl} \text{i)} & a_{ik}(f;\pi) \in \mathbb{N}_0 \\ \text{ii)} & \sum_i a_{ik}(f;\pi) = a_k(\pi) \\ \text{iii)} & \sum_{i,k} k a_{ik}(f;\pi) = n. \end{array}$$

Llamamos a la matriz $a(f;\pi)$ *el tipo de* $(f;\pi)$, pues generaliza el tipo cíclico de los elementos de S_n.

Note que para cada matriz (b_{ik}) del mismo tamaño que las $a(f;\pi)$ cuyos coeficientes satisfacen

$$\begin{array}{rl} \text{i)} & b_{ik} \in \mathbb{N}_0 \\ \text{ii)} & \sum_{i,k} k \cdot b_{i,k} = n \end{array} \tag{3.2}$$

existen elementos en $G \wr S_n$ que son de tipo (b_{ik}). En efecto, dada la matriz (b_{ik}) definamos $a_k = \sum_i b_{ik}$. La n-tupla $a = (a_1, \ldots, a_n)$, nos da el tipo cíclico de alguna partición cíclica α. Por lo que existen elementos en S_n,digamos π, con tipo cíclico a. Resta determinar el elemento $f \in G^n$ tal que $(f;\pi)$ tiene tipo (b_{ik}). Dado que queremos que b_{ik} productos cíclicos asociados a los k-ciclos de π pertenezcan a la clase de conjugación C^i de G, para ν con $l_\nu = k$, podemos tomar $f(j_\nu)$ en la clase C^i que deseemos y el resto de las $f(\pi^{-r}(j_\nu))$ que sean la identidad en G, así $g_\nu(f;\pi)$ estará en la clase C^i. Esto nos dice que podemos elegir la $f \in G^n$ que buscamos.

Nuestro objetivo ahora es mostrar que dos elementos de $G \wr S_n$ son conjugados si y sólo si son del mismo tipo. Primero mostraremos que pedir que j_ν sea el menor en (1.1) no es necesario, es decir

Proposición 3.1 *Para todo ν, s se cumple que $ff_\pi \cdots f_{\pi^{l_\nu - 1}}(j_\nu)$ es conjugado con $f \cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(\pi^s(j_\nu))$, es decir, $ff_\pi \cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(j_\nu) \sim f \cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(\pi^s(j_\nu))$.*

Demostración. Podemos asumir que $0 \le s \le l_\nu - 1$. Sabemos que

$$ff_\pi \cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(\pi^s(j_\nu)) = f(\pi^s(j_\nu)) \cdots f(\pi(j_\nu)) f(j_\nu) \cdots f(\pi^{-l_\nu+s+1}(j_\nu)). \tag{3.3}$$

Como $\pi^{-l_\nu+1}(j_\nu) = \pi(j_\nu)$ y $\pi^{-l_\nu+s+1}(j_\nu) = \pi^{s+1}(j_\nu)$, $f(\pi(j_\nu)) = f(\pi^{-l_\nu+1})$ y $f(\pi^{-l_\nu+s+1}(j_\nu)) = f(\pi^{s+1}(j_\nu))$. Además, en un grupo G cada producto ab de elementos $a, b \in G$ es conjugado con ba, por lo que de (3.3) tenemos

$$\begin{aligned} ff_\pi \cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(\pi^s(j_\nu)) &= \left[f(\pi^s(j_\nu)) \cdots f(\pi^{-l_\nu+1}(j_\nu))\right]\left[f(j_\nu) \cdots f(\pi^{s+1}(j_\nu))\right] \\ &\sim \left[f(j_\nu) \cdots f(\pi^{s+1}(j_\nu))\right]\left[f(\pi^s(j_\nu)) \cdots f(\pi^{-l_\nu+1}(j_\nu))\right] \\ &= ff_\pi \cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(j_\nu). \end{aligned}$$

■

Otra observación útil es la siguiente: el tipo de $(f;\pi)$ es invariante bajo conjugación de elementos de $\mathcal{G} = \{(f';1_H) \mid f' \in G^n\}$ y de $\mathcal{H} = \{(1_G;\sigma) \mid \sigma \in G^n\}$. Por comodidad tomaremos $e := 1_G, 1 = 1_H$. Es así que

Proposición 3.2 $a(f;\pi) = a((e;\sigma)(f;\pi)(e;\sigma)^{-1}) = a((f';1)(f;\pi)(f';1)^{-1})$

Demostración. Como

$$(e;\sigma)(f;\pi)(e;\sigma)^{-1} = (e\cdot f_\sigma;\sigma\pi)(e;\sigma)^{-1} = (f_\sigma;\sigma\pi\sigma^{-1})$$
$$(f';1)(f;\pi)(f';1)^{-1} = (ff';\pi)(f';1)^{-1} = (f'f\cdot f'^{-1}_\pi;\pi)$$

resta ver que los elementos del lado derecho son ambos de tipo $a(f;\pi)$.

1) $\sigma\pi\sigma^{-1}$ contiene al ciclo $(\sigma(j_\nu)\cdots\sigma(\pi^{l_\nu-1}(j_\nu)))$ como factor. El producto cíclico de este factor con respecto a $f_\sigma = f\cdot\sigma^{-1}$ es

$$\begin{aligned} g_\nu(f_\sigma;\sigma\pi\sigma^{-1}) &= f_\sigma(f_\sigma)_{(\sigma\pi\sigma^{-1})}\cdots(f_\sigma)_{(\sigma\pi\sigma^{-1})^{l_\nu-1}}(\sigma(j_\nu)) \\ &= f_\sigma f_{\sigma\pi}\cdots f_{\sigma\pi^{l_\nu-1}}(\sigma(j_\nu)) \\ &= ff_\pi\cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(j_\nu) \end{aligned}$$

se sigue que $a(f;\pi) = a((e;\sigma)(f;\pi)(e;\sigma)^{-1})$.

2)

$$\begin{aligned} g_\nu(f'ff'^{-1}_\pi;\pi) &= (f'ff'^{-1}_\pi)(f'ff'^{-1}_\pi)_\pi\cdots(f'ff'^{-1}_\pi)_{\pi^{l_\nu-1}}(j_\nu) \\ &= (f'ff'^{-1}_\pi)(f'_\pi f_\pi f'^{-1}_{\pi^2})\cdots(f'_{\pi^{l_\nu-1}}f_{\pi^{l_\nu-1}}f'^{-1}_{\pi^{l_\nu}})(j_\nu) \\ &= f'ff_\pi\cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}f'^{-1}(j_\nu) \\ &= f'(j_\nu)g_\nu(f;\pi)f'^{-1}(j_\nu) \sim g_\nu(f;\pi) \end{aligned}$$

por tanto $a(f;\pi) = a((f';1)(f;\pi)(f';1)^{-1})$.

■

Un lema final antes de probar que el tipo caracteriza las clases de conjugación.

Lema 3.3 *Si $a(f;\pi) = a(h;\sigma)$, entonces existe $\pi' \in S_n$ que satisface $\pi = \pi'\sigma\pi'^{-1}$ con la propiedad que para cada ν, $g_\nu(f;\pi) \sim g_\nu(h_{\pi'};\pi)$.*

Demostración. $a(f;\pi) = a(h;\sigma)$ implica

$$a_k(\pi) = \sum_i a_{ik}(f;\pi) = \sum_i a_{ik}(h;\sigma) = a_k(\sigma)$$

es decir $\pi \sim \sigma$, por lo que existe $\tilde\pi$ satisfaciendo

$$\pi = \tilde\pi\sigma\tilde\pi^{-1}.$$

como

$$(e;\tilde\pi)(h;\sigma)(e;\tilde\pi)^{-1} = (h_{\tilde\pi};\pi)$$

por la proposición anterior

$$a(f;\pi) = a(h;\sigma) = a(h_{\tilde\pi};\pi) \tag{3.4}$$

pero para cada $1 \le \nu \le c(\pi)$

$$g_\nu(f;\pi) = ff_\pi\cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(j_\nu)$$

mientras que

$$g_\nu(h_{\tilde{\pi}};\pi) = h_{\tilde{\pi}} h_{\pi\tilde{\pi}} \cdots h_{\pi^{l_\nu-1}\tilde{\pi}}(j_\nu).$$

Como (3.4) es válida, existe π^* en el centralizador de π tal que para cada ν, $g_\nu(f;\pi) \sim g_\nu(h_{\pi^*\tilde{\pi}};\pi)$, es decir

$$h_{\pi^*\tilde{\pi}} h_{\pi\pi^*\tilde{\pi}} \cdots h_{\pi^{l_\nu-1}\pi^*\tilde{\pi}}(j_\nu) \sim f f_\pi \cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(j_\nu).$$

tomando $\pi' = \pi^*\tilde{\pi}$ se tiene el resultado. ■

Estamos listos para la caracterización de las clases de conjugación.

Teorema 3.4 *Dos elementos $(f;\pi),(h;\sigma)$ de $G \wr S_n$ son conjugados si y sólo si $a(f;\pi) = a(h;\sigma)$.*

Demostración.

i) $(f;\pi) \sim (h;\sigma)$ implica que hay h' y σ' tales que

$$\begin{aligned}(h;\sigma) &= (h';\sigma')(f;\pi)(h';\sigma')^{-1} \\ &= (h;1)(e;\pi')(f;\pi)(e;\pi')^{-1}(h;1)^{-1}\end{aligned}$$

y por la proposición (3.2) $a(h;\sigma) = a(f;\pi)$.

ii) Supongamos $a(h;\sigma) = a(f;\pi)$. Por el lema anterior, existe π' tal que $\pi = \pi'\sigma\pi'^{-1}$ y $g_\nu(f;\pi) \sim g_\nu(h_{\pi'};\pi)$. Como $(h_{\pi'};\pi) = (e:\pi')(h;\sigma)(e;\pi')^{-1}$, es suficiente probar

$$(h_{\pi'};\pi) \sim (f;\pi).$$

Por $g_\nu(f;\pi) \sim g_\nu(h_{\pi'};\pi)$, para cada $1 \leq \nu \leq c(\pi)$ existe $g_{j_\nu} \in G$ tal que

$$f(j_\nu) f(\pi^{-1}(j_\nu)) \cdots f(\pi^{-l_\nu+1}(j_\nu)) = g_{j_\nu}(h_{\pi'} \cdots h_{\pi^{l_\nu-1}\pi'}(j_\nu)) g_{j_\nu}^{-1}. \quad (3.5)$$

Sea g_{j_ν} fijo, despejando $f(j_\nu)$ de la ecuación anterior obtenemos

$$f(j_\nu) = g_{j_\nu} h_{\pi'}(j_\nu) g_{\pi^{-1}(j_\nu)}^{-1} \quad (3.6)$$

con

$$g_{\pi^{-1}(j_\nu)}^{-1} = (h_{\pi\pi'} \cdots h_{\pi^{l_\nu-1}\pi'}(j_\nu)) g_{j_\nu}^{-1} (f_\pi \cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(j_\nu))^{-1}.$$

De las ecuaciones (3.5) y (3.6) se tiene

$$\begin{aligned}f(\pi^{-1}(j_\nu)) \cdots f(\pi^{-l_\nu+1}(j_\nu)) &= f(j_\nu)^{-1} g_{j_\nu}(h_{\pi'} \cdots h_{\pi^{l_\nu-1}\pi'}(j_\nu)) g_{j_\nu}^{-1} \\ &= g_{\pi^{-1}(j_\nu)}(h_{\pi\pi'}(j_\nu) \cdots h_{\pi^{l_\nu-1}\pi'}(j_\nu)) g_{j_\nu}^{-1},\end{aligned}$$

por lo que

$$f(\pi^{-1}(j_\nu)) = g_{\pi^{-1}(j_\nu)} h_{\pi'}(\pi^{-1}(j_\nu)) g_{\pi^{-2}(j_\pi)}^{-1},$$

con

$$g_{\pi^{-2}(j_\pi)}^{-1} = (h_{\pi^2\pi'} \cdots h_{\pi^{l_\nu-1}\pi'}(j_\nu)) g_{j_\nu}^{-1} (f_{\pi^2} \cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(j_\nu))^{-1}.$$

De lo anterior se sigue que para $1 \leq r \leq l_\nu - 1$, existen elementos $g_{\pi^{-r}(j_\nu)}$ determinados de manera única. Haciendo esto para cada factor cíclico de π, podemos definir la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f^* : [n] & \to & G \\ i & \mapsto & g_i \end{array}$$

esta aplicación satisface

$$(f^*; 1)(h_{\pi'}; \pi)(f^*; 1) = (f^* h_{\pi'} f_\pi^{*-1}; \pi) = (f; \pi).$$

En efecto, si $i \in [n]$ existen ν, r tal que $i = \pi^{-r}(j_\nu)$ con $1 \leq \nu \leq c(\pi), 0 \leq r \leq l_\nu - 1$. Se sigue que

$$\begin{aligned} f^* h_{\pi'} f_\pi^{*-1}(i) &= f^*(\pi^{-r}(j_\nu)) h_{\pi'}(\pi^{-r}(j_\nu)) f^{*-1}(\pi^{-r-1}(j_\nu)) \\ &= g_{\pi^{-r}(j_\nu)} h_{\pi'}(\pi^{-r}(j_\nu)) g^{-1}_{\pi^{-r-1}(j_\nu)} \\ &= f(\pi^{-r}(j_\nu)) = f(i). \end{aligned}$$

■

Esta caracterización de clases de conjugación de $G \wr S_n$ por tipos nos da el número de clases de conjugación de $G \wr S_n$. Hay tantas clases de conjugación como tipos, esto es, matrices (b_{ik}) que tienen n columnas y tantos renglones como clases de conjugación en G, cuyos elementos satisfacen las condiciones i), ii) de (3.2). Es así que

Lema 3.5 *Si $s \in \mathbb{N}$ es el número de clases de conjugación de G y $p(m)$ denota el número de particiones de m, entonces el número de clases de conjugación de $G \wr S_n$ es igual a*

$$\sum_{\bar{n}} p(n_1)p(n_2)\cdots p(n_s).$$

La suma corre sobre todos los vectores $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_s)$ en $\mathbb{N}_0^s$, tales que $\sum n_i = n$.

Demostración. A cada tipo (a_{ik}) de $G \wr S_n$, le podemos asociar los enteros

$$n_i = \sum_k k a_{ik},$$

que forman un vector $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_s)$ con las propiedades

$$n_i \in \mathbb{N} \qquad y \qquad \sum_i n_i = n. \tag{3.7}$$

Es claro que para cada $1 \leq j \leq s$, la j-ésima fila de (a_{ik}) es el tipo cíclico de n_j. Por lo que para un vector $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_s)$ que satisfaga (3.7), hay exactamente $p(n_j)$ particiones de n_j que pueden ser la j-ésima fila de un tipo de $G \wr S_n$. Por lo que hay $p(n_1)p(n_2)\cdots p(n_s)$ matrices que son tipos de $G \wr S_n$, asociadas al vector $\bar{n}$. Haciendo esto para cada vector $\bar{n} \in \mathbb{N}_0^s$ que satisfaga (3.7) se tiene el resultado. ■

Capítulo 4

Representaciones de grupos y caracteres

El capítulo anterior mostró algunos resultados de las clases de conjugación del producto trenzado, en este mostraremos su relación con los $G \wr S_n$-módulos irreducibles. Por lo que daremos algunos conceptos básicos de la Teoría de representaciones de Grupos. Asumiremos para el resto del trabajo que el grupo G es finito y el campo $C = \mathbb{C}$ es el campo de números complejos.

Empezaremos con el concepto acción lineal. Dado V un espacio vectorial sobre un campo C. Una *acción lineal* de G en V es una acción $G \times V \to V$ tal que para toda $g \in G$

$$\begin{aligned} \rho_g : V &\to V \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es una transformación lineal. Si hay una acción lineal de G en V, decimos que V es un G-*módulo.*

Pasaremos ahora a definir el concepto de representación de un grupo. Sean V un C espacio vectorial y $GL(V) := \{T : V \to V \mid T \text{ es isomorfismo lineal}\}$, si $\rho : G \to GL(V)$ es un homomorfismo de grupos, decimos que ρ es una *representación lineal* de G con espacio de representación V.

Es necesario observar que las nociones de G-módulo y de representaciones lineales son equivalentes. Si $\rho : G \to GL(V)$ es una representación lineal, V hereda de manera natural una estructura de G-módulo con la acción dada por $g \cdot x := \rho(g)(x)$. Por otro lado, si V es un G-módulo, el morfismo

$$\begin{aligned} \rho_V : G &\to GL(V) \\ g &\mapsto \rho_g \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

Dos G-módulos V, W son *isomorfos* si existe $f : V \to W$ un isomorfismo lineal tal que para toda $g \in G$, $x \in V$ $f(gx) = gf(x)$. Análogamente, si $\rho_1 : G \to GL(V)$ y $\rho_2 : G \to GL(W)$ son representaciones lineales de G, decimos que son *equivalentes* si existe $f : V \to W$ isomorfismo lineal tal que para toda

$g \in G$, $\rho_2(g) = f \circ \rho_1(g) \circ f^{-1}$.

Sea V un G-módulo. Un subconjunto W de V es un *G-submódulo* de V, si W es un subespacio de V y $g \cdot w \in W$ para toda $g \in G$, $w \in W$. Un G-módulo V es *irreducible* si $V \neq 0$ y no tiene submódulos propios no triviales.

Dado un grupo G finito y un campo C, tal que la característica de C no divide a $|G|$, el teorema de Mashke nos asegura que todo G-módulo de dimensión finita es suma directa de G-módulos irreducibles, por lo que sólo estamos interesados en encontrar dichos módulos.

Sean $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal de G, el carácter de V es la función $\chi_V : G \to F$ dada por $\chi(g) = tr(\rho_g)$. Los *caracteres irreducibles* son aquellos asociados a los G-módulos irreducibles.

Note que χ_V es constante en clases de conjugación, en realidad los caracteres forman parte de otra familia de funciones más grande, llamada funciones de clase, la cual definiremos más adelante. Daremos la siguiente la afirmación sin demostrar (ver teorema 14.21 de [3])

Proposición 4.1 *Si V y W son G-módulos, $V \simeq W$ si y sólo si $\chi_V = \chi_W$.*

Sean G, H dos grupos. Si conocemos todos los G-módulos irreducibles y todos los H-módulos irreducibles, podemos conocer todos los $G \times H$-módulos irreducibles. Para ello si V es un G-módulo y W es un H-módulo, el espacio vectorial $V \times W := V \otimes_C W$ es un $G \times H$-módulo con *la acción diagonal* $(g, h)v \otimes w = gv \otimes gw$. No es difícil ver

Proposición 4.2 *Si V un G-módulo y W un H-módulo. Sean χ y ψ sus caracteres asociados, entonces el carácter de $V \times W$ es $\chi \times \psi$ donde*

$$\chi \times \psi(g, h) = \chi(g)\psi(h),$$

para toda $g \in G, h \in H$.

Tenemos (ver teorema 19.18 [3] para la demostración)

Teorema 4.3 *Sean $\chi_1, \dots, \chi_r$ los distintos caracteres irreducibles de G y $\psi_1, \dots, \psi_s$ los distintos caracteres irreducibles de H. Entonces $G \times H$ tiene precisamente rs caracteres irreducibles distintos, los cuales son*

$$\chi_i \times \psi_j \ (1 \leq i \leq r \ 1 \leq j \leq s).$$

Como consecuencia de este teorema, aplicando inducción, tenemos

Teorema 4.4 *Sean $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$ los distintos caracteres irreducibles de G. Entonces, el grupo*

$$G^n = \prod_{j=1}^{n} G = G \times G \times \cdots \times G$$

tiene precisamente r^n caracteres irreducibles distintos, los cuales son

$$\chi^{\times n} = \chi^1 \times \chi^2 \cdots \times \chi^n$$

donde $\chi^j = \chi_i$, con $1 \leq i \leq r$

Otra afirmación que es importante es la siguiente(ver teorema 15.3 [3])

Teorema 4.5 *El número de caracteres irreducibles de G es igual al número de clases de conjugación de G.*

Para el caso en que $G = S_n$, del teorema anterior y el teorema 1.3 se sigue

Corolario 4.6 *El número de S_n-módulos irreducibles es igual al número de particiones de n.*

Una *función de clase* en un grupo G, es una función $\varphi : G \mapsto \mathbb{C}$ que es constante en clases de conjugación. El conjunto de funciones de clase de G forma un espacio vectorial con las operaciones $(\varphi + \vartheta)(g) = \varphi(g) + \vartheta(g)$ y $(\lambda \cdot \varphi)(g) = \lambda\varphi(g)$, para cualesquiera φ, ϑ funciones de clase y $\lambda \in \mathbb{C}$. Los caracteres de G son funciones de clase, más aún el conjunto $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ de todos los caracteres irreducibles de G, forman una base para el espacio vectorial de las funciones de clase de G como lo afirma el siguiente(ver teorema 2.8 de [2])

Teorema 4.7 *Cada función de clase φ de G puede ser expresada de manera única en la forma*

$$\varphi = \sum_{\chi \in Irr(G)} a_\chi \chi,$$

donde $a_\chi \in \mathbb{C}$. Además, φ es un caracter si y sólo si todas las a_χ son enteros no negativos y $\varphi \neq 0$

Sean $H \leq G$ y φ función de clase de H. La *función de clase inducida* de H en G, $\mathrm{Ind}_H^G(\varphi)$, esta dada por

$$\mathrm{Ind}_H^G(\varphi)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^\circ(xgx^{-1}), \tag{4.1}$$

donde φ° esta definida por $\varphi^\circ(h) = \varphi(h)$ si $h \in H$ y $\varphi^\circ(y) = 0$ si $y \notin H$. Observe que Ind_H^G es en realidad una función de clase de G y que $\mathrm{Ind}_H^G(\varphi)(1) = |G : H| \cdot \varphi(1)$.

Ahora procedemos a definir el producto interno de funciones de clase. Sean φ, ϑ funciones de clase de un grupo G. Entonces,

$$< \varphi, \vartheta >= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\vartheta(g)}$$

es el *producto interno* de φ y ϑ. El siguiente teorema es importante y lo usaremos más adelante(ver lema 5.2 [2]).

Teorema 4.8 (Reciprocidad de Frobenius) *sea $H \leq G$ y supongamos que φ es una función de clase en H y ϑ es una función de clase en G. Entonces*

$$< \varphi, Res_H^G(\vartheta) >=< Ind_H^G(\varphi), \vartheta > .$$

Sean $H \leq G$ y $g \in G$, definamos $H^g := g^{-1}Hg$. Si V es un H-módulo, su espacio *subyacente* es un H^g-módulo, denotado por V^g, con la acción inducida por el homomorfismo

$$\begin{aligned} \gamma_g : H^g &\to H \\ x &\mapsto gxg^{-1}, \end{aligned}$$

es decir, si $v \in V^g$ y $x \in H^g$, $x \cdot v = \gamma_g(x) \cdot v = (gxg^{-1}) \cdot v$. Cuando H es normal en G, si ϑ es una función de clase de H y $g \in G$, definimos $\vartheta^g : H \to \mathbb{C}$ por $\vartheta^g(h) = \vartheta(ghg^{-1})$. Decimos que ϑ^g es *conjugada* con ϑ en G. Note que $\chi_{V^g}(x) = \chi_V(gxg^{-1})$.

Cabe señalar que $\mathrm{Ind}_H^G(\chi_V) = \mathrm{Ind}_{H^g}^G(\chi_{V^g})$, i.e., los caracteres inducidos de V y V^g en G son iguales. En efecto, de (4.1)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{H^g}^G(\chi_{V^g})(h) &= \frac{1}{|H^g|}\sum_{x\in G}(\chi_{V^g})^\circ(xhx^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G,\ xhx^{-1}\in g^{-1}Hg}\chi_V(gxhx^{-1}g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G,\ (gx)h(gx)^{-1}\in H}\chi_V((gx)h(gx)^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G,\ yhy^{-1}\in H}\chi_V(yhy^{-1}) \\ &= \mathrm{Ind}_H^G(\chi_V)(h). \end{aligned}$$

Si ahora, $H \trianglelefteq G$ y V es un H-módulo. Entonces V^g es un H-módulo.

Lema 4.9 *Sean $H \lhd G$, $x, y \in G$ y φ, ϑ funciones de clase de H. Entonces,*

a) φ^x es una función de clase.

b) $(\varphi^x)^y = \varphi^{xy}$.

c) $< \varphi^x, \vartheta^y > = < \varphi, \vartheta >$.

d) $< Res_H^G(\chi), \varphi^x > = < Res_H^G(\chi), \varphi >$.

e) φ^x es un carácter, si φ lo es.

Para la demostración del lema anterior ver lema 6.1 [2]. Este lema nos muestra que G permuta a $\mathbf{Irr}(H)$ via $\vartheta \mapsto \vartheta^g$.

Como nuestro objetivo es mostrar como son las representaciones irreducibles del producto trenzado $G \wr S_n$ sobre $\mathbb{C}$, necesitamos algunos resultados de la teoría de Clifford, los cuales damos ahora(ver teorema 6.2 [2]).

Teorema 4.10 (Clifford) *Sean $H \lhd G$ y $\chi \in \mathbf{Irr}(G)$. Sea ϑ una componente irreducible de $Res_H^G(\chi)$ y supongamos que $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_t$ son los distintos conjugados de ϑ en G. Entonces*

$$Res_H^G(\chi) = e\sum_{i=1}^{t} \vartheta_i,$$

donde $e =< Res_H^G(\chi), \vartheta >$.

Demostración. Calculemos $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(\vartheta))$. Para $h \in H$

$$\mathrm{Ind}(^G_H(\vartheta))(h) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G} \vartheta^\circ(xhx^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G} \vartheta^x(h)$$

ya que $xhx^{-1} \in H$ para toda $x \in G$. Se sigue que

$$|H| \cdot \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}(^G_H(\vartheta))) = \sum_{x\in G} \vartheta^x.$$

Por el lema anterior los ϑ_i son irreducibles. Si $\varphi \in \mathbf{Irr}(H)$ y $\varphi \notin \{\vartheta_i\}$, $< \vartheta_i, \varphi >= 0$; de donde $< \sum_{x\in G} \vartheta^x, \varphi >= 0$. Por tanto $< \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}(^G_H(\vartheta))), \varphi >= 0$, usando reciprocidad de Frobenius, obtenemos $< \mathrm{Ind}_H^G(\vartheta), \mathrm{Ind}_H^G(\varphi) >= 0$. Como ϑ es una componente irreducible de $\mathrm{Res}_H^G(\chi)$, χ es una componente de $\mathrm{Ind}_H^G(\vartheta)$ y el producto interno $< \mathrm{Ind}_H^G(\varphi), \chi >= 0$. Usando reciprocidad de Frobenius nuevamente, $< \varphi, \mathrm{Res}_H^G(\chi) >= 0$. Esto nos dice que las componentes irreducibles de $\mathrm{Res}_H^G(\chi)$ están entre los ϑ_i y se cumple

$$\mathrm{Res}_H^G(\chi) = \sum_{i=1}^{t} < \mathrm{Res}_H^G(\chi), \vartheta_i > \vartheta_i.$$

Por el lema 4.9, $< \mathrm{Res}_H^G(\chi), \vartheta_i >=< \mathrm{Res}_H^G(\chi), \vartheta >$. ■

Sea $H \lhd G$ y sea $\vartheta \in \mathrm{Irr}(H)$. Definimos a

$$T(\vartheta) = \{g \in G \mid \vartheta^g = \vartheta\} \tag{4.2}$$

como el *grupo de inercia* de ϑ en G. $T(\vartheta)$ es el estabilizador de ϑ bajo la acción de G en $\mathrm{Irr}(H)$, en consecuencia es un subgrupo de G y satisface $H \subseteq T(\vartheta)$. También $|G : T(\vartheta)|$ es el tamaño de la orbita de ϑ, por lo que en la fórmula

$$\mathrm{Res}_H^G(\chi) = e\sum_{1=1}^{t} \vartheta_i$$

del teorema 4.10, $t = |G : T(\vartheta)|$. Se cumple que t divide a $|G : H|$.

El teorema siguiente(ver teorema 6.11 [2]) es muy importante en la construcción de las representaciones irreducibles del producto trenzado, como veremos más adelante.

Teorema 4.11 *Sean $H \lhd G$, $\vartheta \in \mathbf{Irr}(H)$ y $T = T(\vartheta)$ el grupo de inercia de ϑ. Definamos*

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \{\psi \in \mathbf{Irr}(T) \ : < Res_H^T(\psi), \vartheta > \neq 0\}, \\ \mathscr{B} &= \{\chi \in \mathbf{Irr}(G) \ : < Res_H^G(\chi), \vartheta > \neq 0\} \end{aligned}$$

entonces

a) Si $\psi \in \mathscr{A}$, entonces $Ind_T^G(\psi)$ es irreducible.

b) La función $\psi \mapsto Ind_T^G(\psi)$ es una biyección de $\mathscr{A}$ sobre $\mathscr{B}$.

c) Si $Ind_T^G(\psi) = \chi$, con $\psi \in \mathscr{A}$. Entonces, ψ es la única componente irreducible de $Res_T^G(\chi)$ que está en $\mathscr{A}$.

d) Si $Ind_T^G(\psi) = \chi$, con $\psi \in \mathscr{A}$. Entonces, $< Res_H^T(\psi), \vartheta > = < Res_H^G(\chi), \vartheta >$.

Demostración. Sean $\psi \in \mathscr{A}$ y χ cualquier componente irreducible de $\mathrm{Ind}_T^G(\psi)$, del teorema de reciprocidad de Frobenius $0 \neq < \psi, \mathrm{Res}_T^G(\chi) >$, por lo que ψ es una componente irreducible de $\mathrm{Res}_T^G(\chi)$. Como $< \mathrm{Res}_H^T(\psi), \vartheta > \neq 0$, $< \mathrm{Res}_H^G(\chi), \vartheta > \neq 0$. Es así que $\chi \in \mathscr{B}$.

Sean $\vartheta = \vartheta_1, \ldots, \vartheta_t$ las distintas conjugaciones de ϑ en G, $t = |G : T|$ y por el teorema 4.10 $\mathrm{Res}_H^G(\chi) = e \sum_{i=1}^t \vartheta_i$ para algún e. Por otro lado como ϑ es invariante en T y $H \lhd T$ por el teorema 4.10 $\mathrm{Res}_H^T(\psi) = f\vartheta$ para algún f. Debido a que ψ es una componente de $\mathrm{Res}_T^G(\chi)$ y $e = < \mathrm{Res}_H^G(\chi), \vartheta >$, $f \leq e$. Por lo que

$$et\vartheta(1) = \chi(1) \leq \mathrm{Ind}_T^G(\psi(1)) = t\psi(1) = ft\vartheta(1) \leq et\vartheta(1).$$

De esta desigualdad se sigue que $\chi(1) = \mathrm{Ind}_T^G(\psi(1))$, por tanto $\chi = \mathrm{Ind}_T^G(\psi)$ y se sigue a). También tenemos $f = e$, es decir

$$< \mathrm{Res}_H^G(\chi), \vartheta > \, = \, < \mathrm{Res}_H^T(\psi), \vartheta >,$$

y d) esta probado.

Para demostrar c), note que si $\psi_1 \in \mathscr{A}$, $\psi_1 \neq \psi$ y ψ_1 es una componente irreducible de $\mathrm{Res}_T^G(\chi)$, entonces

$$\begin{aligned} < \mathrm{Res}_H^G(\chi), \vartheta > &\geq < \mathrm{Res}_H^T(\psi + \psi_1), \vartheta > \\ &= < \mathrm{Res}_H^T(\psi), \vartheta > + < \mathrm{Res}_H^T(\psi_1), \vartheta > \\ &> < \mathrm{Res}_H^T(\psi), \vartheta > \end{aligned}$$

lo que contradice la igualdad anterior, y por tanto se cumple c).

La función dada en b), por el inciso a) está bien definida y por el inciso d) su imagen esta en $\mathscr{B}$. Es inyectiva por c), resta ver que es sobre. Sea $\chi \in \mathscr{B}$, ya que $< \mathrm{Res}_H^G(\chi), \vartheta > \neq 0$ debe existir una componente irreducible ψ de $\mathrm{Res}_T^G(\chi)$ con $< \mathrm{Res}_H^T(\psi), \vartheta > \neq 0$, por lo que $\psi \in \mathscr{A}$ y χ es una componente de $\mathrm{Ind}_T^G(\psi)$, de donde $\chi = \mathrm{Ind}_T^G(\psi)$ ■

Por último tenemos(ver teorema 6.16 y corolario 6.17 [2])

Teorema 4.12 *Sean $N \lhd G$ y $\chi \in Irr(G)$ tal que $Res_N^G(\chi) = \vartheta \in Irr(N)$. Entonces para cada $\beta \in Irr(G/N)$, los caracteres $\beta\chi$ son irreducibles. Los $\beta\chi$ son distintos para distintas β y son todas las componentes irreducibles de $Ind_N^G(\vartheta)$.*

Capítulo 5

Representaciones de $G \wr S_n$ sobre $\mathbb{C}$

Sea D una representación de G sobre $\mathbb{C}$ con espacio de representación V. Primero mostraremos como a partir de D surge de manera natural una representación de $G \wr H$, con $H \leq S_n$. Para esto formamos el producto tensorial de V consigo mismo n-veces

$$V^{\times n} := V \otimes_C V \otimes_C \cdots \otimes_C V,$$

el cual es un espacio vectorial sobre C y no es difícil ver que el grupo aditivo de este espacio esta generado por los tensores $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ con $v_i \in V$, i.e.,

$$V^{\times n} := \big\langle v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mid v_i \in V \big\rangle.$$

Sea $\mathscr{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base de V. En notación la escribiremos

$$V =<< b_1, \ldots, b_m >>_F .$$

Para cada función $\varphi : [n] \to [m]$, es decir $\varphi \in [m]^n$, ponemos

$$b_\varphi := b_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes b_{\varphi(n)},$$

obtenemos de esta manera una base para $V^{\times n}$:

$$V^{\times n} =<< b_\varphi \mid \varphi \in [m]^n >>_C . \tag{5.1}$$

La representación D hace a V un G módulo izquierdo, pues para toda $g \in G,\ v \in V$

$$gv := D(g)v.$$

Esto indica que podemos, a partir de $V^{\times n}$, obtener un $G \wr H$-módulo izquierdo. Para ello se darán dos acciones lineales, una de S_n en $V^{\times n}$ y la otra de G^n en $V^{\times n}$. De estas dos acciones obtendremos una acción lineal de $G \wr H$ en

$V^{\times n}$, el cuál lo denotaremos por $V^{\otimes n}$, para diferenciar la nueva estructura que adquiere como $G \wr S_n$-módulo, aunque $V^{\times n} = V^{\otimes n}$ como espacios vectoriales. Cabe mencionar que por comodidad algunas veces identificaremos a G^n como $\mathcal{G} = \{(f; 1_H) \mid f \in G^n\}$, esperando no cause conflicto.

i) **Acción de S_n en $V^{\times n}$**

Sea $\sigma \in S_n$. Definimos el morfismo

$$\begin{array}{rccl} \overline{m}_\sigma : & V^n & \longrightarrow & V^{\times n} \\ & (v_1, \ldots, v_n) & \longmapsto & v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)} \end{array}$$

Nótese que el morfismo permuta las "entradas", es decir, si $\sigma = (123) \in S_3$ y $v \otimes w \otimes z \in V^{\otimes n}$, $m_\sigma(v \otimes w \otimes z) = z \otimes v \otimes w$.

Mostraremos que este morfismo es lineal en cada coordenada, para ello basta con mostrar que es lineal en una coordenada, digamos la primera. Sean $\sigma \in S_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $(v + w, v_2, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in V^n$. Existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\sigma^{-1}(j) = 1$, por tanto

$$\begin{aligned} \overline{m}_\sigma(v + w, v_2, \ldots, v_n) &= v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v + w \otimes v_{\sigma^{-1}(j+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)} \\ &= v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v \otimes v_{\sigma^{-1}(n)} \\ &\quad + v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes w \otimes v_{\sigma^{-1}(n)} \\ &= \overline{m}_\sigma(v, v_2, \ldots, v_n) + \overline{m}_\sigma(w, v_2, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \overline{m}_\sigma(\lambda w_1, \ldots, w_n) &= w_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \lambda w_1 \otimes w_{\sigma^{-1}(j+1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma^{-1}(n)} \\ &= \lambda(w_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes w_1 \otimes w_{\sigma^{-1}(j+1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma^{-1}(n)}). \end{aligned}$$

De aquí se sigue que existe un único morfismo lineal $m_\sigma : V^{\times n} \to V^{\times n}$ tal que el siguiente diagrama conmuta, con η el morfismo canónico.

$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[r, "\overline{m}_\sigma"] \arrow[d, "\eta"] & V^{\times n} \\ V^{\times n} \arrow[ur, "m_\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Hemos mostrado que para cada $\sigma \in S_n$ existe un único morfismo m_σ en $GL(V^{\times n})$. Además, no es difícil ver que $m_{1_{S_n}} = 1_{End(V^{\times n})}$ y que dados $\sigma, \pi \in S_n$, $m_{\sigma\pi} = m_\sigma m_\pi$. Por tanto tenemos una acción lineal de S_n en $V^{\otimes n}$ dada por $\sigma \cdot v = m_\sigma(v) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$.

i) **Acción de G^n en $V^{\times n}$**

Esta acción esta definida por

$$g \cdot v = g(1)v_1 \otimes \cdots \otimes g(n)v_n,$$

con $g = (g(1), \ldots, g(n)) \in G^n$ y $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$. La prueba de que esta es una acción es similar a la anterior, por lo que no la daremos.

De lo anterior, para cada $(g;\sigma) \in G \wr H$, existen morfismos lineales únicos $m_g, m_\sigma \in GL(V^{\times n})$. Por lo que podemos definir una acción lineal de $G \wr H$ en $V^{\times n}$, dada por $(g;\sigma) \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (m_g \circ m_\sigma)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$. Al espacio vectorial $V^{\times n}$ con la acción anterior lo denotamos por $V^{\otimes n}$, para diferenciar la nueva estructura que adquiere como $G \wr S_n$-módulo, aunque $V^{\times n} = V^{\otimes n}$ como espacios vectoriales. Mostremos que efectivamente la acción anterior es una acción, es decir, que la siguiente aplicación es un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \Gamma : G \wr H &\rightarrow End(V^{\otimes n}) \\ (g;\sigma) &\mapsto m_{(g;\sigma)} \end{aligned}$$

con $m_{(g;\sigma)} = m_g \circ m_\sigma$, la composición de m_g con m_σ.

Debemos probar que

$$m_{(f;\pi)(g;\sigma)} = m_{(f;\pi)} m_{(g;\sigma)}. \tag{5.2}$$

Por un lado tenemos que

$$m_{(g;\sigma)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = g(1)v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes g(n)v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Definamos

$$v_1' \otimes \cdots \otimes v_n' = g(1)v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes g(n)v_{\sigma^{-1}(n)},$$

si nos fijamos en una entrada de $v_1' \otimes \cdots \otimes v_n'$ digamos la l, existen j y k tales que $\pi^{-1}(l) = j$ y $\sigma^{-1}(j) = k$. Por tanto en la coordenada j, $v_j' = g(j)v_{\sigma^{-1}(j)} = g(j)v_k$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} m_{(f;\pi)} m_{(g;\sigma)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= m_{(f;\pi)}(v_1' \otimes \cdots \otimes v_n') \\ &= f(1)v'_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes f(n)v'_{\pi^{-1}(n)}, \end{aligned}$$

y en la entrada l tenemos

$$\begin{aligned} f(l)v'_{\pi^{-1}(l)} &= f(l)v_j' \\ &= f(l)g(j)v_k. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$m_{(f;\pi)(g;\sigma)} = m_{(fg_\pi;\pi\sigma)},$$

y por tanto

$$m_{(fg_\pi;\pi\sigma)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = fg_\pi(1)v_{(\pi\sigma)^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes fg_\pi(n)v_{(\pi\sigma)^{-1}(n)}.$$

En la entrada l tenemos

$$fg_\pi(l)v_{(\pi\sigma)^{-1}(l)} = f(l)g(j)v_k.$$

Por tanto, entrada a entrada se da la igualdad. De esta manera (5.2) es válida.

Lema 5.1 *Sea $D : G \to GL(V)$ una representación de G, para todo $(f;\pi) \in G \wr H$*

$$\chi_{V^{\otimes n}}(f;\pi) = \prod_{\nu=1}^{c(\pi)} \chi_V(g_\nu(f;\pi)).$$

Demostración. Recordemos que si $\pi \in S_n$, la descomposición de π en ciclos disjuntos es

$$\pi = \prod_{\nu=1}^{c(\pi)} (j_\nu \pi(j_\nu) \cdots \pi^{l_\nu - 1}(j_\nu))$$

y de (3.1), $g_\nu(f;\pi) = ff_\pi \cdots f_{\pi^{l_\nu-1}}(j_\nu)$. Por 5.1 la traza de $(f;\pi)$ es

$$\chi_{V^{\otimes n}}(f;\pi) = \sum_{\varphi} [\text{coeficiente de } b_\varphi \text{ en } (f;\pi)b_\varphi].$$

Para $f \in G$ sea $\mathbb{D}(f) := (d_{ik}(f))$ la representación matricial de $D(f)$ con respecto ala base ordenada $\mathscr{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Entonces

$$(d_{ik}(f)) \cdot b_s = \begin{bmatrix} d_{1s}(f) \\ d_{2s}(f) \\ \vdots \\ d_{ms}(f) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m} d_{js}(f) b_j,$$

de donde se sigue

$$\begin{aligned}
(f;\pi)b_\varphi &= f(1)b_{\varphi(\pi^{-1}(1))} \otimes \cdots \otimes f(n)b_{\varphi(\pi^{-1}(n))} \\
&= \sum_{i_1=1}^{m} d_{i_1\varphi(\pi^{-1}(1))}\big(f(1)\big)b_{i_1} \otimes \cdots \otimes \sum_{i_n=1}^{m} d_{i_n\varphi(\pi^{-1}(n))}\big(f(n)\big)b_{i_n} \\
&= \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_n \le m} d_{i_1\varphi(\pi^{-1}(i))}\big(f(1)\big) \cdots d_{i_n\varphi(\pi^{-1}(n))}\big(f(n)\big) b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_n} \\
&= \sum_{\psi \in [m]^n} \left(\prod_j d_{\psi(j)\varphi(\pi^{-1}(j))}\big(f(j)\big) \right) b_\psi.
\end{aligned}$$

El coeficiente de b_φ es

$$\prod_{j=1}^{n} d_{\varphi(j)\varphi(\pi^{-1}(j))}(f(j)),$$

si reordenamos los factores tenemos

$$\prod_{\nu=1}^{c(\pi)} d_{\varphi(j_\nu),\varphi(\pi^{-1}(j_\nu))}(f(j_\nu)) d_{\varphi(\pi^{-1}(j_\nu)),\varphi(\pi^{-2}(j_\nu))}(f(\pi^{-1}(j_\nu))) \cdots \tag{5.3}$$

Del álgebra lineal tenemos que si A, B, C son matrices de $m \times m$ con coeficientes en algún campo C, el producto de las matrices es $D = ABC = (d_{ij})$ con

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

La traza de D es

$$tr(D) = \sum_{t=1}^{m} d_{tt} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{tk} b_{kl} c_{lt}.$$

La secuencia de subíndices de cada factor de d_{tt} es tk, kl, lt.

En general, si hacemos el producto de r matrices de $m \times m$ y después calculamos la traza de ese producto, tendremos una sucesión de subíndices con un comportamiento como el anterior, es decir, de la forma $i_1 i_2, i_2 i_3, \ldots, i_r i_1$, para cada factor de $d_{i_1 i_1}$. Ese mismo comportamiento tiene el producto (5.3). Si tomamos la suma de estos productos sobre todos los $\varphi \in [m]^n$ tenemos

$$\begin{aligned} \chi_{V^{\otimes n}}(f;\pi) &= \prod_{\nu}^{c(\pi)} tr\big(\mathbb{D}(g_\nu(f;\pi))\big) \\ &= \prod_{\nu}^{c(\pi)} \chi_V(g_\nu(f;\pi)) \end{aligned}$$

■

Ilustremos el lema anterior con algunos ejemplos:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \chi_{V^{\otimes n}}(1_G; 1_H) = m^n, \\ \text{(ii)} & \chi_{V^{\otimes n}}(1_G; \pi) = m^{c(\pi)}, \\ \text{(iii)} & \chi_{V^{\otimes n}}(f; 1_H) = \prod_{i=1}^{n} \chi_V(f(i)), \\ \text{(iv)} & \chi_{V^{\otimes n}}(f, \ldots, f; 1_H) = \chi_V(f)^n, \\ \text{(v)} & \chi_{V^{\otimes n}}(f, \ldots, f; (1 \cdots n)) = \chi_V(f^n), \\ \text{(vi)} & \chi_{V^{\otimes n}}(f, \ldots, f; \pi) = \prod_{k=1}^{n} \chi_V(f^k)^{a_k(\pi)}. \end{array} \tag{5.4}$$

Ya vimos como un G-módulo induce de manera natural un $G \wr S_n$-módulo. Más aún si W es un S_n-módulo, usando la proyección $G \wr S_n \to S_n$, W adquiere una estructura de $G \wr S_n$-módulo, con la operación $(g;\pi) \cdot w = \pi \cdot w$. De esta manera, dados V un G-módulo y W un S_n-módulo tenemos que $V^{\otimes n} \otimes W$ es un $G \wr S_n$-módulo con la acción diagonal. A este módulo lo de notaremos por

$$V \wr W := V^{\otimes n} \otimes W. \tag{5.5}$$

Nuestra meta ahora es mostrar que si G es un grupo finito cada $G \wr S_n$-módulo irreducible sobre $\mathbb{C}$ puede ser inducido de un producto adecuado de $G \wr S_n$-módulos.

Aplicaremos los resultados de Clifford vistos en el capítulo anterior al producto trenzado, pues G^n es un subgrupo normal no trivial de $G \wr S_n$. Sean

$D^1, \ldots, D^r$ el conjunto completo de representaciones irreducibles de G sobre $\mathbb{C}$ no equivalentes por pares, con módulos de representación $V^1, \ldots, V^r$ y matrices de representación $\mathbb{D}^1, \ldots, \mathbb{D}^r$ respectivamente.

Sea $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in [r]^n$, definimos $V(\bar{a}) := V_{a_1} \times \cdots \times V_{a_n}$ visto como G^n-módulo. De este modo, por el teorema 4.4 los G^n-módulos irreducibles están parametrizados por $V(\bar{a})$, $\bar{a} \in [r]^n$.

Sea $\pi(\bar{a}) = (\pi(\bar{a}_1), \ldots, \pi(\bar{a}_r))$ dado por $\pi(\bar{a}_i) = \#\{j \in [n] \mid a_j = i\}$, con $i \in [r]$. $\pi(\bar{a})$ es el *tipo* de $V(\bar{a})$.

Por ejemplo, $V_1 \times V_2$ y $V_2 \times V_1$ son G^2-módulos no isomorfos ambos de tipo $(1,1)$. V_1^2 tiene tipo $(2,0)$ y V_2^2 tiene tipo $(0,2)$.

Si $V(\bar{a})$ es un G^n-módulo irreducible, por (4.2) su grupo de inercia es

$$T(V(\bar{a})) = \{(g;\sigma) \in G \wr S_n \mid V(\bar{a})^{(g;\sigma)} \cong V(\bar{a}) \text{ como } G^n\text{-módulo}\}. \tag{5.6}$$

Note que $G^n \leq T(V(\bar{a}))$. Como $(g;\sigma) = (g;1_{S_n})(1;\sigma)$, $V(\bar{a})^{(g;\sigma)} = V^{(1;\sigma)}$. Así, solo es necesario identificar los $\sigma \in S_n$ tales que

$$V(\bar{a})^{(1;\sigma)} \cong V(\bar{a}).$$

Sea $S(\bar{a}) = \{\sigma \in S_n \mid V(\bar{a})^{(1;\sigma)} \cong V(\bar{a})\}$. Si $\pi(\bar{a})$ es el tipo de $V(\bar{a})$, entonces $S(\bar{a})$ es un subgrupo de Young de S_n conjugado a $S_{\pi(\bar{a})}$. Donde, si $\pi = (\pi_1, \pi_2 \ldots, \pi_r)$ es una partición de n, su *subgrupo de Young* $Y(\pi)$ es el subgrupo de S_n cuyos elementos mandan cada uno de los factores π_i en si mismo. Así,

$$\sigma \in S(\bar{a}) \Leftrightarrow \forall (i \in [n]) V_{a_i} = V_{a_{\sigma(i)}}.$$

En efecto, dado $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$

$$\begin{aligned}
\chi_{V(\bar{a})^{(1;\sigma)}}((g_1, \ldots, g_n)) &= \chi_{V(\bar{a})}((1;\sigma)(g_1, \ldots, g_n)(1;\sigma^{-1})) \\
&= \chi_{V(\bar{a})}((g_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(n)})) \\
&= \prod_{i=1}^{r} \chi_{V_{a_i}}(g_{\sigma^{-1}}(i)) \\
&= \prod_{j=1}^{r} \chi_{V_{a_{\sigma(j)}}}(g_j) \\
&= \chi_{V(\bar{a}\sigma)}((g_1, \ldots, g_n)),
\end{aligned}$$

con $\bar{a}\sigma = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$.

Por la proposición 4.1, $V(\bar{a})^{(1;\sigma)} \cong V_{a_{\sigma(1)}} \times \cdots \times V_{a_{\sigma(n)}} = V(\bar{a}\sigma)$. Se sigue

$$\begin{aligned}
T(\bar{a}) &= G^n \rtimes S(\bar{a}) \\
&\cong G^n \wr S_{\pi(\bar{a})} \\
&\cong G \wr S_{\pi(\bar{a})_1} \times \cdots \times G \wr S_{\pi(\bar{a})_r}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Por ejemplo, $V_1 \times V_2 \times V_2$, $V_2 \times V_1 \times V_2$, $V_2 \times V_2 \times V_1$ son G^3-módulos conjugados con tipo $(1,2)$ y sus grupos de inercia, son todos conjugados a $G \wr S_1 \times G \wr S_2$.

Por simplicidad de notación trabajaremos para cada tipo $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_r)$ con

$$V(\pi) =: V_1^{\times \pi_1} \times \cdots \times V_r^{\times \pi_r},$$

cualquier otra $V(\bar{a})$ con tipo $\pi(\bar{a}) = \pi$ se obtiene de $V(\pi)$ permutando factores y los grupos de inercia son conjugados en $G \wr S_n$. $V(\pi)$ es un G^n-módulo y podemos extender la acción a su grupo de inercia, $G \wr S_{\pi_1} \times \cdots \times G \wr S_{\pi_r} = G \wr S_\pi$ como se hizo anteriormente. Al módulo obtenido lo denotaremos por

$$V(\pi)^{\sim} = V_1^{\otimes \pi_1} \times \cdots \times V_r^{\otimes \pi_r}.$$

Sea W un S_π-módulo irreducible. Como $S_\pi = S_{\pi_1} \times \cdots \times S_{\pi_r}$, $W = W_1 \times \cdots \times W_r$ con W_i un S_{π_i}-módulo irreducible. Formaremos

$$V(\pi)^{\sim} \otimes W = (V_1^{\otimes \pi_1} \otimes W_1) \times \cdots \times V_1^{\otimes \pi_r} \otimes W_r,$$

el cual es un $G \wr S_\pi$-módulo. Esto nos dice, que sólo basta con mostrar que cada factor $V_i^{\otimes \pi_i} \otimes W_i$ es irreducible, que es equivalente a mostrar que, si V es un G-módulo irreducible y W es un S_π-módulo irreducible, $V^{\otimes n} \otimes W$ es irreducible.

En el caso de $V^{\times n}$, su grupo de inercia es $T(V^{\times n}) = G \wr S_n$ y se extiende a $V^{\otimes n}$, luego $V^{\times n}$ es invariante y por tanto $\mathrm{Res}_{G^n}^{G \wr S_n}(V^{\otimes n}) = V^{\times n}$. Dado que $G^n \lhd G \wr S_n$ y $G \wr S_n / G^n \cong S_n$, por el teorema 4.12

i) $V^{\otimes n} \otimes W$ es $G \wr S_n$- irreducible.

ii) Si W_1, W_2 son S_n-módulos irreducibles no isomorfos, $V^{\otimes n} \otimes W_1 \ncong V^{\otimes n} \otimes W_2$ como $G \wr S_n$-módulos irreducibles.

iii) Toda componente irreducible de $\mathrm{Ind}_{G^n}^{G \wr S_n}(V^{\times n})$ es de la forma $V^{\otimes n} \otimes W$ para algún S_n-módulo irreducible W.

Se concluye

Proposición 5.2 *$V(\pi)^{\sim} \otimes W$ es $G \wr S_\pi$-módulo irreducible, con W un S_π-módulo irreducible.*

Tenemos la siguiente

Proposición 5.3 *$\mathrm{Ind}_{G \wr S_\pi}^{G \wr S_n}(V(\pi)^{\sim} \otimes W)$ es irreducible.*

Demostración. Si $H = G^n, \vartheta = V(\pi)^{\sim}$, por (5.7) $T(\vartheta) = G^n \wr S_\pi$. Por la proposición anterior $V(\pi)^{\sim} \otimes W \in \mathrm{Irr}(T)$ y aplicando el teorema 4.11 inciso a) se tiene el resultado. ∎

Definimos $(V(\pi); W) := \mathrm{Ind}_{G \wr S_\pi}^{G \wr S_n}(V(\pi)^{\sim} \otimes W)$. Estamos listos para decir cuales son las representaciones irreducibles de $G \wr S_n$(ver teorema 4.3.34 y teorema 4.4.3 [1])

Teorema 5.4 *El conjunto*

$$\mathscr{W} = \{(V(\pi); W) \mid \pi = (\pi_1, \ldots, \pi_r) \in \mathbb{N}_0, \ \sum \pi_i = n \text{ y } W \text{ un } S_\pi\text{-mod irred.}\},$$

es un conjunto de representaciones irreducibles de $G \wr S_n$ no isomorfos dos a dos y cualquier $G \wr S_n$-módulo irreducible es isomorfo a un elemento de $\mathscr{W}$.

Demostración. Es necesario hacer la siguientes observaciones

1) Sea $d_W = dim_C W$, entonces $\mathrm{Res}^{G\wr S_\pi}_{G^n}(V(\pi)^\sim \otimes W) = d_W \cdot V(\pi)$.

2) $\mathrm{Res}^{G\wr S_n}_{G\wr S_\pi}((V(\pi); W) = (V(\pi)^\sim \otimes W) \oplus$ otros módulos.

3) De (1), (2) y el teorema 4.10, $\mathrm{Res}^{G\wr S_n}_{G^n}(V(\pi); W) = d_w \cdot V(\pi) \oplus$ conjugados a $V(\pi)$.

Sean $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_r), \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r) \in \mathbb{N}_0$, con $\sum \pi_i = n = \sum \rho_i$. Si $\pi \neq \rho$, $V(\pi) \ncong V(\rho)$ como G^n-módulos, además ningún conjugado de $V(\pi)$ es isomorfo a ningún conjugado de $V(\rho)$ como G^n-módulos. Se sigue del inciso (3) anterior, que si W es un S_π-módulo irreducible y U es un S_ρ-módulo irreducible, $(V(\pi); W) \ncong (V(\rho); U)$ como $G \wr S_n$-módulos.

Si ahora W y U son S_π-módulos irreducibles no isomorfos, se sigue de ii) página 27 que $V(\pi)^\sim \otimes W \ncong V(\pi)^\sim \otimes U$ como S_π-módulos. Luego, de los incisos (1), (2) y la parte (b) del teorema 4.11, $(V(\pi); W) \ncong (V(\pi); U)$ como $G \wr S_n$-módulos.

Se ha mostrado que los elementos de $\mathscr{W}$ son no isomorfos dos a dos. Resta ver que cualquier $G \wr S_n$-módulo irreducible es isomorfo a un elemento de $\mathscr{W}$. Para ello veremos que $\# \mathscr{W} = \# G \wr S_n$-módulos irreducibles.

Del teorema 4.5, $\# G \wr S_n$-módulos irreducibles es igual a $\#$ de clases de conjugación de $G \wr S_n$, el cuál por el lema 3.5 es

$$\sum_{\pi \in \mathbb{N}_0^r,\ \sum \pi_i = n} p(\pi_1) \cdots p(\pi_r),$$

donde $p(k)$ es el número de particiones de k. Por otro lado, del teorema 4.6

$$\# S_n\text{-módulos irreducibles} = \# \text{ particiones de } n,$$

por tanto el $\# S_\pi$-mod. irreducibles es igual a

$$(\# S_{\pi_1}\text{-mod irred.}) \times \cdots \times (\# S_{\pi_r}\text{-mod irred.}) = p(\pi_1) \cdots p(\pi_r).$$

Es así que

$$\# \mathscr{W} = \sum_{\pi \in \mathbb{N}_0^r,\ \sum \pi_i = n} p(\pi_1) \cdots p(\pi_r).$$

Se concluye que cualquier $G \wr S_n$-módulo irreducible es isomorfo a un elemento de $\mathscr{W}$. ■

Bibliografía

[1] G. D. James, A. Kerber, The Representation Theory of the Symmetric Group, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 16, Addison Wesley, 1981.

[2] Isaacs, I. Martin, Character theory of finite groups, Dover, 1976.

[3] Gordon James, Martin Liebeck, Representations and Characters of Groups, Cambridge University Press, June 2001.

[4] J. L. Alperin, Rowen B. Bell., Groups and representations, Springer-Verlag, 1995.

[5] Joseph J. Rotman, An introduction to the Theory of Groups, Springer, 1995.