

# Pendientes reductoras y llenado de Dehn

Araceli Guzmán Tristán

Instituto de Matemáticas, UNAM



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradezco a todos los que me apoyaron en este trabajo. Principalmente a mi asesora Lorena Armas por su paciencia y disponibilidad, además de su amistad; a Mario Eudave, Max Newmann y Alberto Verjovsky quienes siempre resolvieron mis dudas de la mejor forma. Agradezco también al Instituto de Matemáticas y en general a la UNAM por brindarme los espacios y materiales necesarios para la elaboración de este trabajo.

**Para mi familia.**

# Índice general

0.1. Introducción . . . . .	1
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. 3-Variedades. . . . .	5
1.2. Llenado de Dehn . . . . .	9
<b>2. Exterior de un nudo</b>	<b>11</b>
<b>3. Conjetura de los cables</b>	<b>15</b>
<b>4. Presentación delgada</b>	<b>19</b>
<b>5. Gráficas de Intersección</b>	<b>27</b>
5.1. Construcción . . . . .	27
5.2. $q$ -tipos. . . . .	36
<b>6. Ciclos de Scharlemann</b>	<b>39</b>
6.1. Propiedades de los ciclos de Scharlemann . . . . .	39
6.2. Existencia de los ciclos de Scharlemann. . . . .	43
<b>7. Acumulamientos</b>	<b>59</b>

<b>8. Parejas propias</b>	<b>67</b>
8.1. Para pendientes reductoras. . . . .	67
8.2. Para pendientes proyectivas . . . . .	74
<b>9. Pendientes reductoras y proyectivas</b>	<b>81</b>
<b>10. Ejemplos</b>	<b>93</b>
10.1. Primer ejemplo . . . . .	93
10.2. Construyendo otros ejemplos . . . . .	109

## 0.1. Introducción

Decimos que un nudo  $k$  es un *nudo cable* de tipo  $(p, q)$  con  $p$  y  $q$  primos relativos si  $k \subset \partial N(k')$  donde  $k'$  es un nudo contenido en  $S^3$  y  $k$  representa  $p\mu + ql$  en  $H_1(\partial N(k'))$ . En el caso especial que  $k'$  sea el nudo trivial, a  $k$  se le llama *nudo toroidal*.

Llamamos a una 3-variedad  $M$  compacta, conexa y orientable *reducible* si tiene una esfera esencial, es decir, una esfera que no es frontera de una 3-bola.

En 1986, González Acuña y H. Short ([7]) enunciaron la CONJETURA DE LOS CABLES. Esta dice que si un nudo no trivial contenido en  $S^3$  produce una variedad reducible después de hacer cirugía de Dehn, entonces el nudo es cable. Esta conjetura ha sido probada para muchas clases de nudos, por ejemplo para nudos compuestos en 1983 por Gordon ([11]), para nudos satélite en 1989 por Scharlemann ([28]), para nudos alternantes en 1992 por Menasco y Thistlethwaite ([24]), para nudos fuertemente invertibles en 1992 por Eudave ([5]), para nudos simétricos por los trabajos de Luft y Zhang ([22]), Hayashi y Motegi ([16]) y Hayashi y Shimokawa ([17]), para nudos arborescentes en 1996 por Wu ([30]), para nudos de hasta cuatro puentes por Gordon y Luecke (sin publicar) y para nudos de género uno por Boyer y Zhang ([3]), pero sigue abierta en el caso general.

Supongamos que  $M$  tiene frontera un toro  $T$ . Una *pendiente*  $\gamma$  en  $T$  es la

clase de isotopía de una curva cerrada simple en  $T$ , dichas pendientes están parametrizadas por  $\mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ . Una pendiente se llama *pendiente longitudinal* si existe una superficie compacta y orientable  $F$ , propiamente encajada en  $M$  cuya frontera es un lazo que tiene pendiente  $\gamma$ . El *género* de  $\gamma$  está definido como el mínimo género de tales superficies  $F$ . La distancia entre dos pendientes  $\alpha$  y  $\beta$ , denotada por  $\Delta(\alpha, \beta)$  es el mínimo número de intersección geométrica de dichas pendientes.

El resultado principal de este trabajo ([23]) fue motivado por la conjetura de los cables y dice lo siguiente:

**Teorema.**

Sea  $M$  una 3-variedad irreducible con un toro  $T$  como frontera. Supongamos que  $M$  no es un toro sólido. Sea  $\gamma$  una pendiente longitudinal en  $\partial M$  y  $g$  el género de  $\gamma$ .

1. Si existe una pendiente reductora  $r$ , entonces  $\Delta(\gamma, r) \leq 2g - 1$  ó  $q = 2$ , donde  $q$  es el mínimo número de intersección geométrica entre la esfera esencial de  $M(r)$  y el corazón del  $r$ -llenado de Dehn.
2. Si existe una pendiente proyectiva  $\beta$  la cual no es pendiente reductora, entonces  $\Delta(\beta, \gamma) \leq 2g - 1$ .

Del resultado principal se da como corolario una prueba de la conjetura de los cables para nudos de género uno. Se obtiene también como corolario, un resultado que resuelve otra importante conjetura en el caso de los nudos de género uno y dice lo siguiente:



La conjetura  $\mathbf{RP}^3$  (Gordon [10]).

Ninguna cirugía de Dehn en un nudo no trivial en  $S^3$  puede producir  $\mathbf{RP}^3$ .

Aunque esta conjetura ya fue probada para el caso general en el año de 2004 por Ozsváth y Szabó ([21]).

Este trabajo consta de 10 capítulos; en el primero de ellos abordamos las definiciones y resultados preliminares; dentro del capítulo dos y tres encontramos algunas propiedades del llenado de Dehn en el caso del exterior de un nudo; del capítulo cuatro al capítulo ocho demostramos algunos resultados necesarios para la prueba de nuestro teorema principal, el cual se encuentra dentro del capítulo nueve; y finalmente en el capítulo diez damos una familia de ejemplos que realizan la cota del teorema principal.

# Capítulo 1

## Preliminares

En esta parte del trabajo encontraremos los conocimientos necesarios para abordar el estudio de las propiedades a las que nos dedicaremos en cada uno de los siguientes capítulos.

Los resultados que aquí se exponen no incluyen demostración.

Comenzamos con algunas definiciones.

### 1.1. 3-Variedades.

Una *3-variedad* es un espacio métrico separable donde cada punto tiene una vecindad homeomorfa a  $\mathfrak{R}^3$  ó a  $\mathfrak{R}_+^3 := \{x \in \mathfrak{R}^3 | x_n \geq 0\}$ . La *frontera* de la 3-variedad corresponde al conjunto de puntos cuyas vecindades son homeo-

morfos a  $\mathfrak{R}_+^3$ , pero no son homeomorfas a  $\mathfrak{R}^3$ .

Una 3-variedad es *cerrada* si es compacta y tiene frontera vacía.

Una subvariedad  $N$  de una 3-variedad  $M$  se dice que es *propia* si  $N \cap \partial M = \partial N$ .

Una 3-variedad  $M$  es *orientable* si admite una orientación de los 3-simplejos para una triangulación de  $M$ . Como resultado se sabe que una 3-variedad es orientable si no contiene (bandas de Möbius)  $\times I$  o botellas de Klein sólidas.

Sea  $V$  un toro sólido. Un *meridiano* de  $V$  es una curva cerrada simple en el toro frontera  $T$  de  $V$ , la cual no es contraíble en  $T$  pero sí en  $V$ . Una *longitud* de  $V$  es una curva cerrada simple en  $T$  la cual interseca un meridiano en exactamente un punto.

Un *toro sólido fibrado* se obtiene del cilindro  $D^2 \times I$  rotándolo en un ángulo de  $2\pi(p/q)$  (manteniendo fija la tapa  $D^2 \times 0$ ), donde  $p, q$  son coprimos. Las fibras son las líneas  $x \times I$ ,  $x \in D^2$  y luego identificamos las tapas  $D^2 \times 0$  y  $D^2 \times 1$ .

Un *espacio fibrado de Seifert* es una 3-variedad que puede descomponerse en fibras, donde cada fibra es una curva cerrada simple, cada punto pertenece exactamente a una fibra y cada fibra tiene una vecindad fibrada, es decir una vecindad homeomorfa a un toro sólido fibrado.

Una 3-variedad  $M$  se dice que es *irreducible* si cada esfera acota una bola en  $M$ . Si la variedad no es irreducible decimos que es *reducible*.

Una 3-variedad  $M$  se dice que es *prima* si cada vez que expresemos  $M = M_1 \sharp M_2$  implica que  $M_1$  ó  $M_2$  es  $S^3$ .

Como resultado se sabe que si una 3-variedad  $M$  es prima y reducible entonces  $M = S^2 \times S^1$ . Entonces si excluimos  $S^2 \times S^1$  es lo mismo primo que irreducible.

Sea  $M$  una 3-variedad y  $F$  una superficie propiamente encajada en  $M$  ó contenida en la frontera de  $M$ . Decimos que  $F$  es *incompresible* si ninguna de las siguientes condiciones se satisface:

- $F$  es una esfera que acota una bola en  $M$ .
- $F$  es un disco en la frontera de  $M$  ó existe una bola  $X$  en  $M$  tal que  $\partial X \subset F \cup \partial M$ .
- Existe un disco  $D \subset M$  tal que  $D \cap F = \partial D$  y  $\partial D$  no contraíble en  $F$ .

También decimos que  $F$  es *compresible* en  $M$  si no es incompresible.

Una superficie propiamente encajada  $S$  es  $\partial$  - *incompresible* en una 3-variedad  $M$  si no existe un disco  $D$  tal que  $\partial D = A \cup B$  con  $A \subset S$  y  $B \subset \partial M$ , donde  $D \cap S = A$  y  $A$  es un arco esencial en  $S$ , o sea no paralelo

a  $\partial S$ .

Una 3-variedad se dice *de Haken* si es irreducible y contiene una superficie incompresible.

Una superficie  $S \neq S^2$  en una 3-variedad  $M$  es *esencial* en  $M$  si:

**$S$  es incompresible en  $M$**

**$S$  es  $\partial$ -incompresible en  $M$ .**

Una 3-variedad  $M$  que contiene una colección de discos  $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  disjuntos por pares propiamente encajados en  $M$  tal que el resultado de cortar  $M$  a lo largo de  $\bigcup_{i=1}^n D_i$  es una bola, es llamado *cubo con  $n$ -asas*.

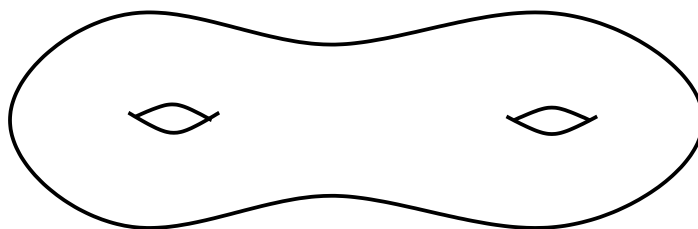


Figura 1.1: Cubo con dos asas.

Sea  $S$  una superficie posiblemente disconexa, un *cuero de compresión* se obtiene de  $S \times I$  al pegar 1-asas en  $S \times \{0\}$ .

Sea  $V$  un toro sólido,  $p, q$  coprimos y  $q \geq 2$ . Un *espacio cable* es el complemento de una vecindad tubular abierta de un  $(p, q)$ -cable del corazón de

$V$ . Una 3-variedad  $M$  se dice que es una *variedad cableada* si contiene una subvariedad homeomorfa a un espacio cable una de cuyas componentes frontera es precisamente  $\partial M$ .

Una herramienta que utilizaremos también es la *Característica de Euler* de una superficie. Ésta se define en cualquier triangulación de la superficie como el número de vértices menos el número de aristas más el número de caras y se prueba que este número no depende de la triangulación que tomemos y además para superficies cerradas es igual a  $2 - 2g$ , donde  $g$  es el género de dicha superficie.

## 1.2. Llenado de Dehn

Sea  $T$  un toro, definimos la curva  $\alpha$  como una *pendiente* en el toro  $T$  si  $\alpha$  es la clase de isotopía de una curva cerrada simple en  $T$ .

Sea  $M$  una 3-variedad compacta, orientable, irreducible y con frontera un toro  $T$ . Sea  $\alpha$  una pendiente en el toro  $T$ . Definimos el  $\alpha$ -llenado de Dehn de  $M$  y lo denotamos por  $M(\alpha)$  como la 3-variedad obtenida al identificar  $T$  y  $\partial V$ , donde  $V$  es un toro sólido y  $\alpha$  se identifica con un meridiano  $\mu$  de  $V$ , es decir, tomamos  $M(\alpha) = M \cup_{\alpha} V$  donde  $\alpha \mapsto \mu$ .

Los *espacios lente* se obtienen al identificar dos toros sólidos a lo largo de sus fronteras.

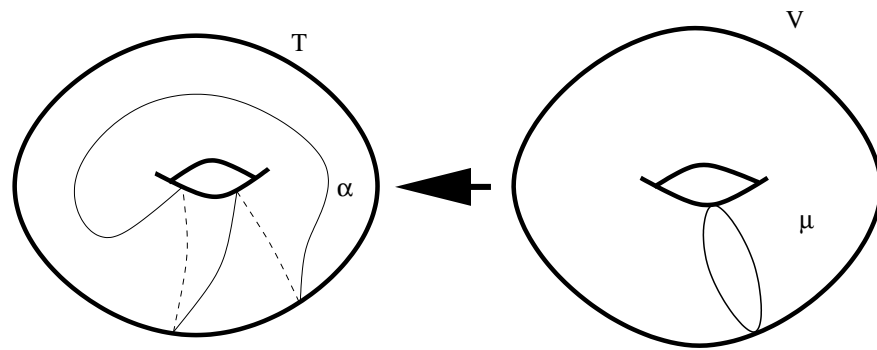


Figura 1.2: Lenado de Dehn

Una pendiente  $\alpha$  en un toro  $T$  se llama *pendiente reductora* si  $M$  es una variedad irreducible y  $M(\alpha)$  es reducible.

Una *pendiente proyectiva* es una pendiente que produce un plano proyectivo en un llenado de Dehn.

Una pendiente  $\alpha$  en un toro  $T$  se llama *pendiente longitudinal* si existe una superficie orientable  $F$  propiamente encajada en  $M$  cuya frontera es un lazo con pendiente  $\alpha$ . El *género de la pendiente  $\alpha$*  en este caso, se define como el género mínimo de tal  $F$ .

## Capítulo 2

# Llenado de Dehn para el exterior de un nudo

En este capítulo veremos algunas propiedades del llenado de Dehn para el caso en el que nuestra 3-variedad es el exterior de un nudo  $k$  y probaremos que si el llenado de Dehn de una pendiente produce una 3-variedad reducible, entonces la pendiente debe ser entera ([12]), es decir, sólo puede dar una vuelta en forma de longitud y  $m$  vueltas en forma de meridiano.

Sea  $k$  un nudo no trivial en  $S^3$  y  $E(k)$  el exterior del nudo, es decir  $E(k) = S^3 \setminus N(k)$  donde  $N(k)$  es una vecindad regular de  $k$ . Entonces el exterior de un nudo es una 3-variedad con frontera un toro. Recordemos que las pendientes del toro pueden ser parametrizadas por  $\mathbf{Q} \cup \infty$ . Para esto tomamos una base  $(\mu, l)$  para  $H_1(\partial N(k))$ , donde  $\mu$  es un meridiano de  $\partial N(k)$ ,



es decir una curva esencial que es frontera de un disco en  $N(k)$  y  $l$  es una longitud preferente, o sea  $l$  es frontera de una superficie de Seifert para  $k$ . Se sigue que  $\mu$  y  $l$  se intersectan en un punto, por lo que forman una base para  $H_1(\partial N(k))$ . Si  $\alpha$  es una curva con pendiente  $p/q$ , es decir  $\alpha = p\mu + ql$  entonces  $E(k)(p/q)$  denota la 3-variedad obtenida por llenado de Dehn de modo que un meridiano del toro sólido se identifica con  $\alpha$ . Consideremos el llenado de Dehn  $E(k)(\frac{a}{b})$ , donde  $a$  y  $b$  son coprimos, tenemos entonces que:

**Teorema 2.1** *Si  $E(k)(\frac{a}{b})$  es reducible, entonces  $|b| = 1$ .*

**Demostración.**

Supongamos que  $E(k)(\frac{a}{b})$  es reducible, entonces  $\frac{a}{b}$  es la pendiente frontera de una superficie plana esencial en el exterior de  $k$ . Por un resultado de Gordon, Luecke, Shalen y Culler ([10]), el hecho de que  $\frac{a}{b}$  sea pendiente frontera implica que si  $k$  es no trivial, entonces:

- $E(k)(\frac{a}{b})$  es una 3-variedad de Haken, ó
- $E(k)(\frac{a}{b})$  es suma conexa de dos espacios lente no triviales, ó
- $E(k)(\frac{a}{b})$  contiene una superficie incompresible siempre que  $|ad-bc| > 1$ .

La primer condición contradice el hecho de que  $E(k)(\frac{a}{b})$  es reducible, mientras que la tercer condición contradice el hecho de que  $E(k)(\frac{1}{0})$  es  $S^3$  salvo cuando  $|b| \leq 1$ . Queda entonces considerar la segunda condición. En tal caso,  $\Pi_1(k(\frac{a}{b})) \cong \mathbf{Z}_p * \mathbf{Z}_q$  ( $p, q > 1$ ), entonces por un resultado de González Acuña y H. Short ([7]), la imagen  $\mu$  en  $\mathbf{Z}_p * \mathbf{Z}_q$  de un meridiano de  $k$  es de la forma  $x^r$  donde  $b|r$ . Como el grupo de  $k$  está generado por un meridiano,

$\mathbf{Z}_p * \mathbf{Z}_q$  está normalmente generado por  $\mu$ . Entonces por un resultado de Baumslag, Morgan y Shalen ([2])  $|r| = 1$  y por tanto,  $|b| = 1$ .

□

Asumiremos también los siguientes resultados:

- (Gabai, 1987 [6])  $E(k)(0)$  es una 3-variedad irreducible.
- (Gordon y Luecke, 1989 [13])  $E(k)(\pm 1)$  es una 3-variedad irreducible.

# Capítulo 3

## La conjetura de los cables

Recordemos la definición de *nudo cable*. Un nudo  $k$  se dice que es un nudo cable de tipo  $(p, q)$  con  $p, q$  primos relativos, si  $K \subset \partial N(k')$  para algún nudo  $k'$  en  $S^3$  tal que  $[k] = p\mu + ql$  en  $H_1(\partial N(k'))$ .

En 1986, González Acuña y H. Short ([7]) enunciaron la CONJETURA DE LOS CABLES. Esta dice que si un nudo no trivial contenido en  $S^3$  produce una variedad reducible después de hacer cirugía de Dehn, entonces el nudo es cable.

En este capítulo veremos el recíproco de esta conjetura, es decir, que al hacer llenado de Dehn en un nudo cable obtenemos variedades reducibles.

Sea  $k$  un  $(p, q)$ -cable de un nudo  $k'$ . Entonces  $k$  se encuentra en  $\partial N(k')$  y es una curva de pendiente  $p/q$  en dicho toro.

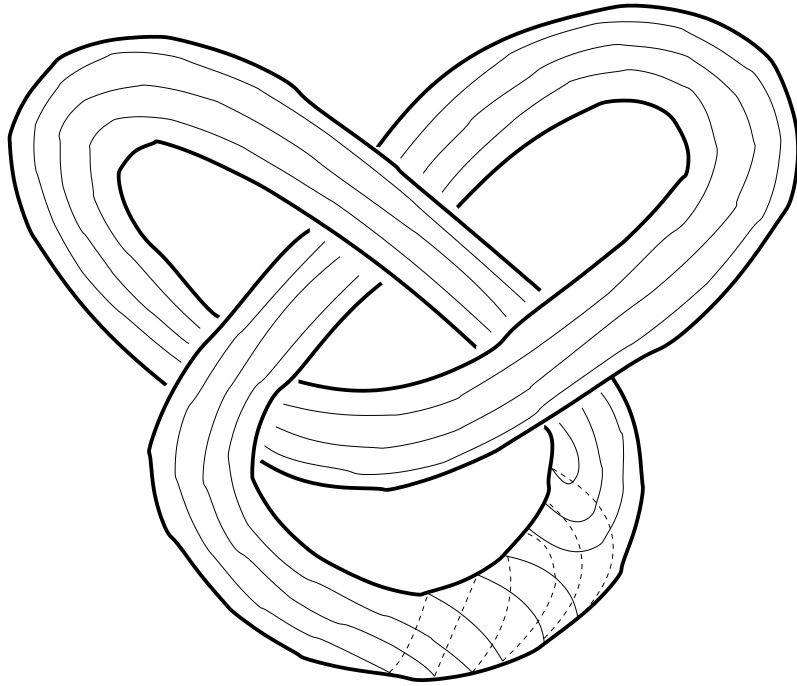


Figura 3.1: Nudo cable.

Sea  $N(k)$  una vecindad regular de  $k$  de modo que  $N(k) \cap \partial N(k')$  consiste de un anillo  $A'$ . Sea  $A = \partial N(k') \setminus A'$ . Luego  $A$  es un anillo propiamente encajado en  $E(k)$ .  $\partial A$  consiste de dos curvas de pendiente  $\gamma$  en  $\partial E(k)$ .

Se puede ver que  $\gamma = pq\mu + l$  en  $\partial E(k)$ . Consideremos la 3-variedad  $E(k)(\gamma)$ :

$E(k)(\gamma) = E(k) \cup_{\gamma} V$ , donde  $V$  es un toro sólido pegado de modo que un meridiano de  $V$  se identifica con una curva de pendiente  $\gamma$  en  $\partial E(k)$ . Como

$\partial A$  consiste de dos curvas, hay dos meridianos de  $V$ , digamos  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , que se identifican con  $\partial A$ . Hay dos discos meridianos  $D_1$  y  $D_2$  en  $V$  de modo que  $\partial D_1 = \mu_1$ ,  $\partial D_2 = \mu_2$ .

$A$  divide a  $E(k)$  en dos partes, una es  $E(k')$  y la otra  $N(k')$ . Sea  $\hat{A} = A \cup D_1 \cup D_2$ ,  $\hat{A}$  es una esfera. Vamos a ver que  $\hat{A}$  es una esfera reductora, con lo cual habremos concluido la prueba.

Tenemos  $E(k)(\gamma) = E(k) \cup V = E(k') \cup N(k') \cup V_1 \cup V_2$ , donde  $V_1$  y  $V_2$  son las componentes de  $V$  al cortar por  $D_1$  y  $D_2$ , luego  $E(k)(\gamma) = (E(k') \cup V_1) \cup_{\hat{A}} (N(k') \cup V_2)$ .

$V_i \cong D_i \times I$ ,  $E(k')$  y  $V_1$  se identifican de modo que  $\partial D_1 \times I$  se identifica con una vecindad de la curva  $\gamma$  y  $N(k')$  y  $V_2$  se identifican de modo que  $\partial D_2 \times I$  se identifica con la vecindad de una curva de pendiente  $p/q$  en  $\partial N(k')$ .

De aquí se sigue que  $E(k)(\gamma) = E(k')(p/q) \sharp L(q, p)$  pues  $E(k') \cup V_1$  es el espacio  $E(k')(p/q)$  pinchado, el cual no es  $S^3$  por Gordon y Luecke ([13]) y es irreducible por el teorema 2.1, ya que  $k'$  no es trivial y  $N(k') \cup V_2$  da un espacio lente sumando que no es trivial pues  $q \geq 2$ .

Por tanto la esfera  $\hat{A}$  es reductora, así  $E(k)(\gamma)$  es una 3-variedad reducible.

□

## Capítulo 4

# Presentación delgada de los nudos.

En este capítulo encontraremos una presentación para los nudos que satisface que si  $P$  es una superficie propiamente encajada en  $S^3 \setminus N(k)$ , incompresible y  $\partial$ -incompresible, cuya frontera no consiste de meridianos, entonces existe una esfera  $Q$  que intersecta transversalmente la superficie  $P$  y cuya frontera consiste de curvas paralelas que intersectan exactamente una vez a cada curva frontera de  $P$ .

Sean  $x, y \in S^3$  y  $z \in S^2$ . Identificamos  $(S^2 \setminus z) \times \mathbf{R}$  con  $\mathbf{R}^3$  de forma canónica. Definimos la función *altura*  $h : S^3 \setminus \{x, y\} = S^2 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  como la proyección en el segundo factor. La *esfera de nivel en la altura*  $\alpha$  denotada por  $Q_\alpha$  es la superficie  $S^2 \times \alpha$ . Sea  $H$  la fibración de  $\mathbf{R}^3$  por planos de nivel.

Un nudo  $k$  está *genéricamente encajado* en  $S^3$  si  $k = f(S^1)$ , donde  $f: S^1 \rightarrow S^3$  es un encaje tal que la función altura  $h \circ f$  es una función de Morse con  $2b$  puntos críticos los cuales ocurren en niveles discretos. Tal  $f$  se llama *presentación genérica*.

Definimos el *ancho*  $\omega(k)$  de  $k$  como:

$$\omega(k) = \min \left\{ \frac{1}{2} \sum |Q_i \cap f(S^1)| \mid f \text{ es una presentación genérica de } k \text{ y } Q_1, Q_2, \dots, Q_{2b-1} \text{ son esferas de nivel, una entre cada nivel crítico} \right\}.$$

Una *presentación delgada* de  $k$  es una presentación que realiza el ancho de  $k$ . El ancho puede calcularse explícitamente como sigue. Sean  $M_1, M_2, \dots, M_b$  y  $m_1, m_2, \dots, m_b$  los máximos y mínimos locales de  $h \circ f$  donde  $f$  es una presentación delgada de  $k$ .

$$\text{Sea } T(k) = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^b \varepsilon(i, j) \text{ donde } \varepsilon(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \leq M_j \\ 0 & \text{si } m_j \geq M_i \end{cases}.$$

**Teorema 4.1**  $\omega(k) = 2T(k) - b^2$

*Demostración.*

Empujemos los mínimos locales para obtener una nueva presentación tal que cada máximo local esté arriba de cada mínimo local. El ancho de cada término de la sucesión resultante se incrementa en 2 cada vez que un mínimo se empuja bajo un máximo. El ancho de la nueva presentación es:

$$\frac{1}{2}(2 + 4 + \dots + 2(b-1) + 2b + 2(b-1) + \dots + 2) = b^2$$

por lo que,  $\omega(k) = b^2 - 2(b^2 - T(k)) = 2T(k) - b^2$ .

□

**Lema 4.2** *Sea  $k$  un nudo en presentación delgada en  $S^3$ . Sea  $P$  una superficie propiamente encajada en  $S^3 \setminus N(k)$  tal que  $\partial P$  no es unión de meridianos. Entonces podemos isotopar  $P$  y encontrar un plano horizontal  $Q$  tal que  $Q$  es transversal a  $P$  y cada arco componente de  $Q \cap P$  es esencial en  $P$ .*

*Si  $P$  es  $\partial$ -incompresible (respectivamente incompresible), entonces cada arco componente (respectivamente componente cerrada) de  $P \cap Q$  es una curva esencial en  $Q \setminus N(k)$ .*

**Demostración.**

Primero isotopamos  $P$  en una vecindad de  $\partial P$  de modo que  $P$  esté definido localmente cerca de  $N(k)$  como sigue. Si  $x \in k$  es un máximo ó un mínimo local de  $k$ , entonces existe una vecindad  $V_x$  de  $x$  tal que cada componente de  $V_x \cap P$  aparece como:

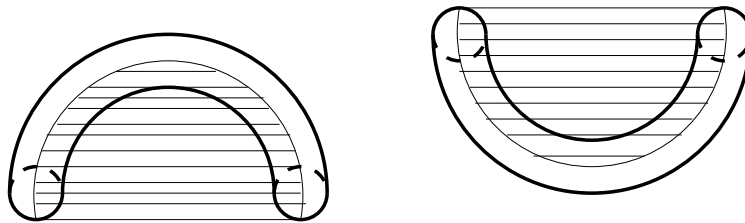
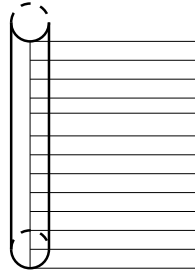


Figura 4.1: máximos y mínimos de  $k$

Si  $y \in K \setminus \cup(V'_x)$ , entonces existe una vecindad  $V_y$  de  $y$  tal que cada componente de  $V_y \cap P$  aparece como:





$x \in P$  es un *punto silla de tangencia* si  $N(x) \cap P$  aparece como un punto crítico de la función altura que no es un máximo ni un mínimo local en  $S^3$ .  $x \in P$  es un *centro de tangencia* si  $N(x)$  aparece como un máximo ó un mínimo local. Supongamos que tales tangencias aparecen en distintos niveles.

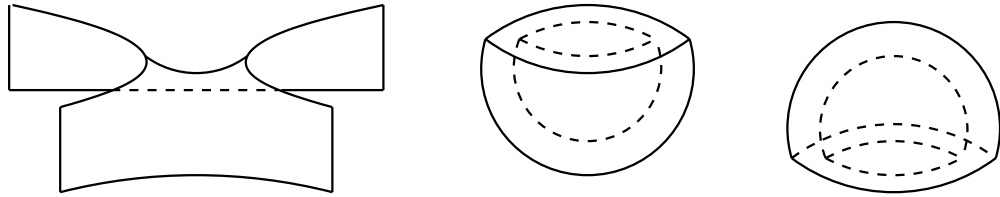


Figura 4.2: punto silla y centros de tangencia.

Ahora isotopamos  $P$  tal que  $P$  sea transversal a la fibración  $H$  excepto en un número finito de centros de tangencia y sillas de tangencia.

Sea  $Q_\alpha$  la esfera de nivel a la altura  $\alpha$ . Sea  $b$  la altura del mínimo local más alto de  $k$  y sea  $s$  la altura del máximo local de menos altura de  $k$  el cual es más alto que  $b$ .

Sea  $Q = Q_\alpha$  tal que  $b < \alpha < s$  y  $P$  es transversal a  $Q$ . Supongamos que  $\lambda$

es una arco componente de  $P \cap Q$ . Si  $\lambda$  es un arco no esencial en  $P$  tal que el correspondiente disco de  $\partial$ -compresión  $D$  no contiene otros arcos esenciales, entonces  $D$  visto en  $S^3$  aparece como la figura (b):

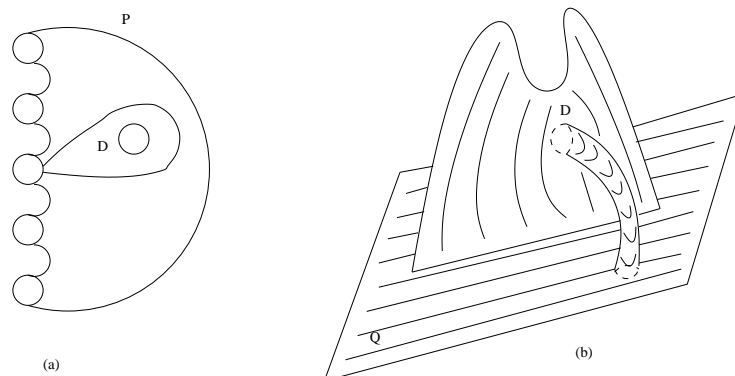


Figura 4.3: disco de compresión

En particular,  $D \cap k$  deja arriba ó abajo a  $Q_\alpha$ . Si tal  $\lambda$  existe con  $Q_\alpha$  abajo (respectivamente arriba) de  $D \cap k$ , entonces llamamos a  $Q_\alpha$  un *plano bajo* (respectivamente *plano alto*) y a  $D$  un *disco alto* (respectivamente *disco bajo*).

Sea  $B = \{\alpha \in [b, s] \mid Q_\alpha \text{ es un plano alto}\}$  y  $S = \{\alpha \in [b, s] \mid Q_\alpha \text{ es un plano bajo}\}$ .

**Afirmación.**  $[b, s] \neq \overline{B} \cup \overline{S}$ .

**Demostración.** Si  $U$  es un subintervalo abierto de  $[b, s]$  tal que  $P$  es transversal a  $Q_\alpha$  para  $\alpha \in U$ , entonces  $U \subset B$  ó  $U \cap B = \emptyset$ . La situación análoga se cumple para  $S$ . Como  $P$  fué puesto en forma estándar cerca de  $N(k)$ ,  $b \in B$

y  $s \in S$ . Por tanto si la afirmación falla es decir, si todo  $a \in [b, s]$  está en  $\overline{B}$  o en  $\overline{S}$ , existe una  $\alpha$  tal que  $Q_\alpha$  es tangente a  $P$ ,  $a \in B$  para  $a \in (\alpha - \varepsilon, \alpha)$  y  $a \in S$  para  $a \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$  para alguna  $\varepsilon$ . Existe una foliación  $C$  de  $P$  inducida por la función altura  $h$  de  $S^3$ . Los niveles de  $C$  pueden verse como curvas de nivel de  $h$  ó como las intersecciones de  $P$  con los planos de nivel. Existe una función  $f_b: (\alpha - \varepsilon, \alpha] \times I \rightarrow P$  tal que si  $a < \alpha$  entonces  $f_b(a \times I)$  es una curva de nivel que es frontera de un disco bajo  $D_a$ . Estos discos bajos satisfacen que  $D_a \subset D_c$  si  $a < c$ . El arco límite  $f_b(a \times I)$  es suave (a), pinchado (b) ó apachurrado (c):

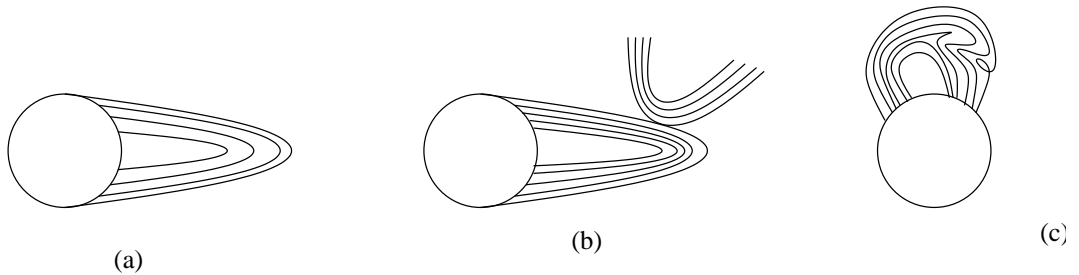


Figura 4.4: arco límite suave (a), pinchado (b) ó apachurrado (c)

El correspondiente disco bajo límite  $D_b$  visto en  $S^3$  es suave (a), pinchado (b) ó apachurrado (c) como en la figura 4.5.

La discusión análoga se cumple para la función  $f_s: [\alpha, \alpha + \varepsilon) \times I \rightarrow P$  la cual tiene la propiedad de que  $f_s(a \times I)$  es la frontera de un disco alto  $D_a$  si  $a > \alpha$  y  $f_s(a \times I) \subset Q_a$ . Sea  $D_s$  el disco alto límite. Notemos que  $D_s$  y  $D_b$  no pueden ser ambos apachurrados. Se sigue que  $k$  es trivial ó uno puede

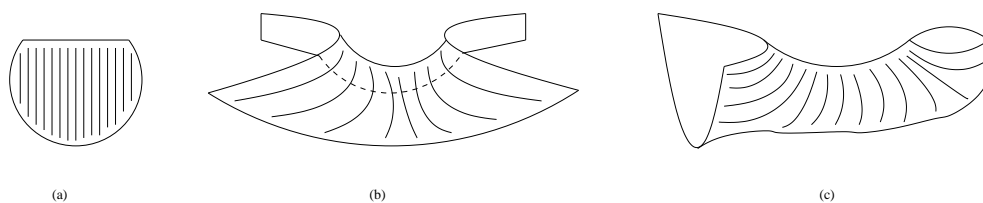


Figura 4.5: disco límite suave (a), pinchado (b) ó apachurrado (c)

encontrar una presentación más delgada de  $k$ . Situaciones en las que ambos  $D_s$  y  $D_b$  son suaves ó pinchados se muestran en la figura:

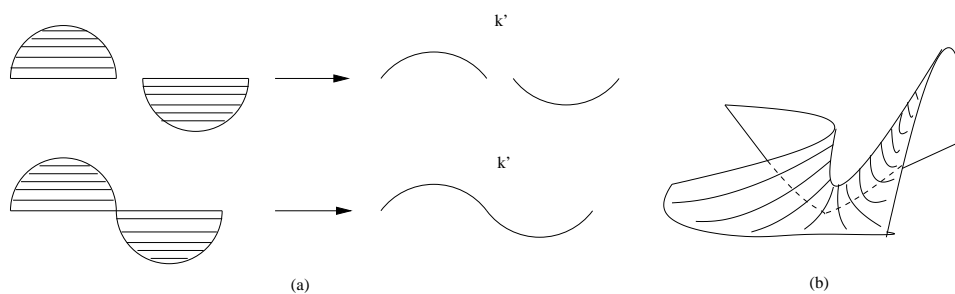


Figura 4.6: ambos discos suaves (a), ambos discos pinchados (b)

Si  $\alpha \in [b, s] \setminus \overline{B} \cup \overline{S}$  tal que  $Q_\alpha$  es transversal a  $P$ , entonces  $Q_\alpha$  es nuestro plano deseado.

Si  $P$  es  $\partial$ -incompresible, entonces cada arco componente de  $P \cap Q_\alpha$  es esencial en  $Q_\alpha \setminus N^\circ(k)$ . Si  $P$  es incompresible, entonces una isotopía de  $P$  elimina los círculos que acotan discos en  $Q_\alpha \setminus N^\circ(k)$ .

□

# Capítulo 5

## Gráficas de Intersección

### 5.1. Construcción

En este capítulo veremos la construcción de las gráficas de intersección, una herramienta muy importante para la prueba de muchas de las propiedades de las 3-variedades.

Sea  $M$  una 3-variedad compacta, orientable, irreducible y con frontera un toro  $T$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos pendientes en  $T$  y  $M(\alpha)$ ,  $M(\beta)$  los respectivos  $\alpha$ -llenado de Dehn y  $\beta$ -llenado de Dehn de  $M$ .

$$M(\alpha) = M \cup_{h_\alpha} V_\alpha \quad \text{y} \quad M(\beta) = M \cup_{h_\beta} V_\beta$$

donde  $h_\alpha: S^1 \times S^1 = \partial V_\alpha \rightarrow \partial T$  y  $h_\beta: S^1 \times S^1 = \partial V_\beta \rightarrow \partial T$  son los homeomorfismos que envían los meridianos a las pendientes  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente

y  $V_\alpha, V_\beta$  son toros sólidos.

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos pendientes en el toro  $T$ , definimos su distancia y la denotamos por  $\Delta(\alpha, \beta)$  como el mínimo número de intersecciones geométricas de la curva  $\alpha$  con la curva  $\beta$ .

Supondremos que:

- Existen superficies  $P, Q$  propiamente encajadas en  $M$  tales que cada componente frontera de  $P$  tiene pendiente  $\alpha$  y cada componente frontera de  $Q$  tiene pendiente  $\beta$ .
- $P$  y  $Q$  se intersectan transversalmente, cada componente de  $\partial P$  intersecta cada componente de  $\partial Q$  en  $\Delta(\alpha, \beta)$  puntos.
- Cada arccomponente de  $P \cap Q$  es esencial en  $P$  y en  $Q$  (esto es, que no puede completarse a la frontera de un disco en  $P$  ó en  $Q$ ).

Tenemos entonces que  $P \cap Q$  consiste de la unión finita disjunta de círculos y arcos propiamente encajados, los puntos extremos de los arcos son los puntos de intersección de  $\partial P$  con  $\partial Q$ .

Definimos dos gráficas  $G_P$  y  $G_Q$  como sigue:

- los vértices gordos son las componentes frontera de  $P$  y  $Q$ , respectivamente.
- las aristas son las arccomponentes de  $P \cap Q$  vistas tanto en  $P$  como en  $Q$ .

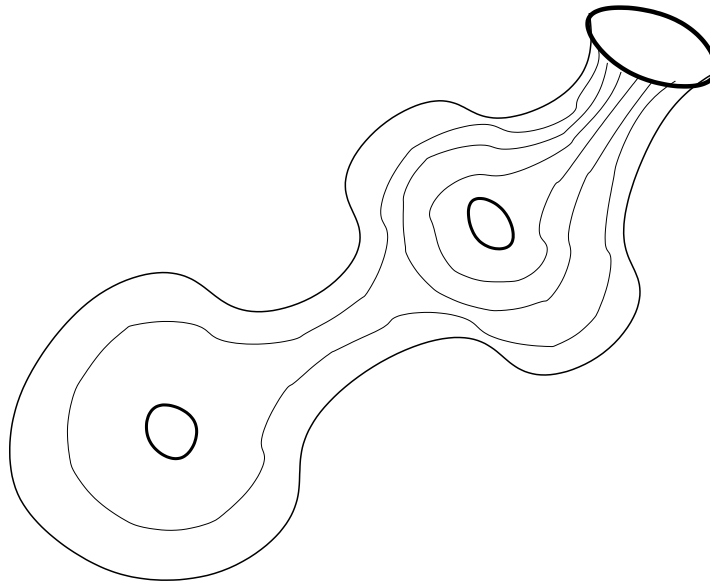


Figura 5.1: Gráfica de intersección en superficie.

Numeramos las componentes de  $\partial P$ ,  $1, 2, \dots, p$  y las de  $\partial Q$ ,  $1, 2, \dots, q$  en el orden en que aparecen en  $\partial M$ , lo cual nos dá una numeración de los vértices de  $G_P$  y  $G_Q$ .

Consideremos un arco componente de  $P \cap Q$ . Sus extremos son puntos de  $\partial P \cap \partial Q$ , digamos de la  $i'$ -ésima componente de  $\partial P$  con la  $j'$ -ésima componente de  $\partial Q$ . Numeramos los extremos de la arista correspondiente de  $G_P$  con  $j$  y  $j'$  en los vértices  $i$  e  $i'$ , respectivamente, y similarmente para  $G_Q$ .

Ahora damos un signo a cada vértice (+ ó -) de acuerdo a la dirección en  $\partial M$  de la orientación de la componente correspondiente de  $\partial P$  inducida por alguna orientación de  $P$  (análogamente para  $G_Q$ ). Note que al re-

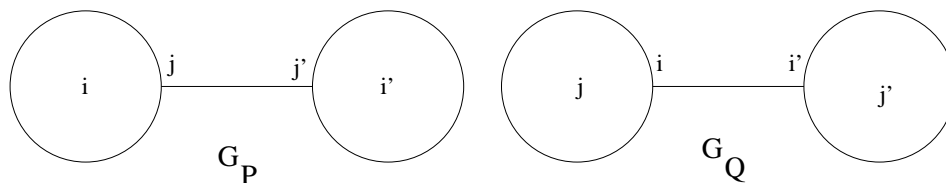


Figura 5.2: numeración de los extremos de una arista

dedor de cada vértice de  $G_P$  los índices de los extremos ocurren en orden  $1, 2, \dots, q, 1, 2, \dots, q, 1, \dots$  repetidas  $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$  veces. El orden será en sentido opuesto a las manecillas del reloj para vértices positivos y al revés para vértices negativos. Similarmente, alrededor de cada vértice de  $G_Q$  vemos los índices  $1, 2, \dots, p, 1, 2, \dots, p, 1, \dots$  repetidos  $\Delta$  veces.

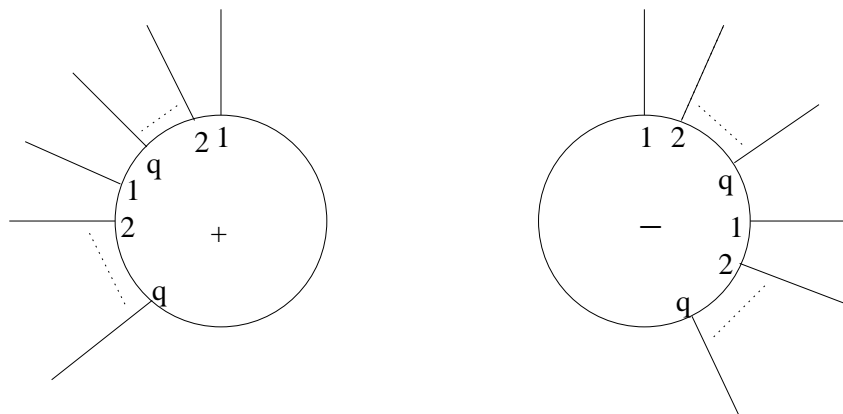


Figura 5.3: Orientación de los vértices.

Decimos que dos vértices son *paralelos* si tienen el mismo signo, de forma contraria, decimos que los vértices son *antiparalelos*. Como las superficies  $P$  y  $Q$  son orientables se satisface la regla de paridad que establece lo siguiente:



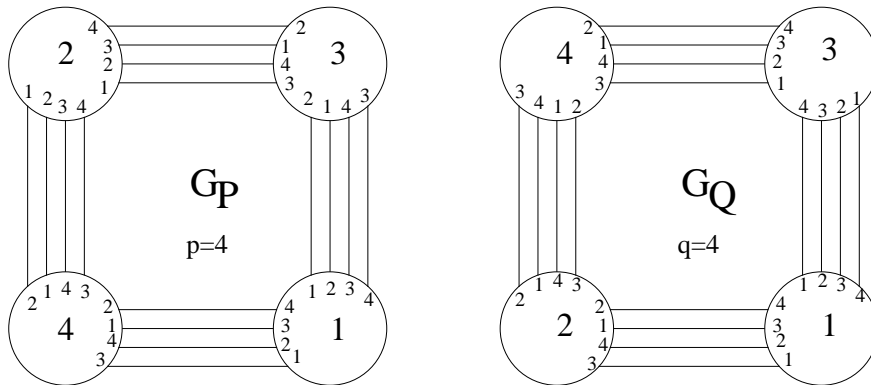


Figura 5.4: ejemplo de gráficas de intersección

*Regla de Paridad:* Una arista une vértices paralelos en  $G_P$  sí y sólo sí, une vértices antiparalelos en  $G_Q$ .

Una cara  $D$  de la gráfica se llama *disco cara* si  $D$  es un disco abierto. Si  $v$  es un vértice gordo en  $\partial D$  y  $c$  es una componente conexa de  $\partial v \setminus \{\text{extremos de las aristas en } \partial D\}$  las cuales intersectan  $\bar{D} \setminus D$ . Entonces la cerradura de  $c$  en  $\partial v$  se llama *esquina* de  $\partial D$ .

Una arista  $e$  se llama *arista doble* de una cara  $P$  si  $e \subset \text{int}(\bar{P})$ , de otra forma se llama *arista simple*.

Una arista que une un índice  $x$  con otro índice arbitrario se llama  *$x$ -arista*.

Un  *$x$ -ciclo* es un ciclo de  $x$ -aristas que unen vértices paralelos y está orientado de modo que la punta de cada arista tiene índice  $x$ .

Un  *$x$ -arista ciclo*  $\sigma$  es un ciclo de  $x$ -aristas no orientadas, que unen vértices paralelos y existe un disco  $E$  tal que  $\sigma = \partial E$ .  $E$  se llama cara del  $x$ -arista

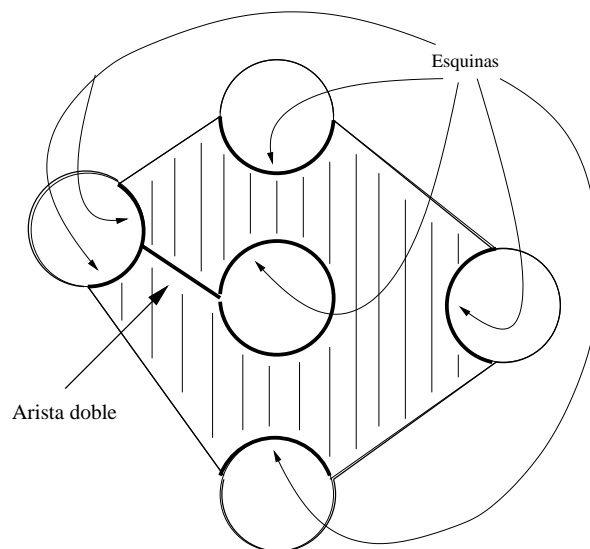
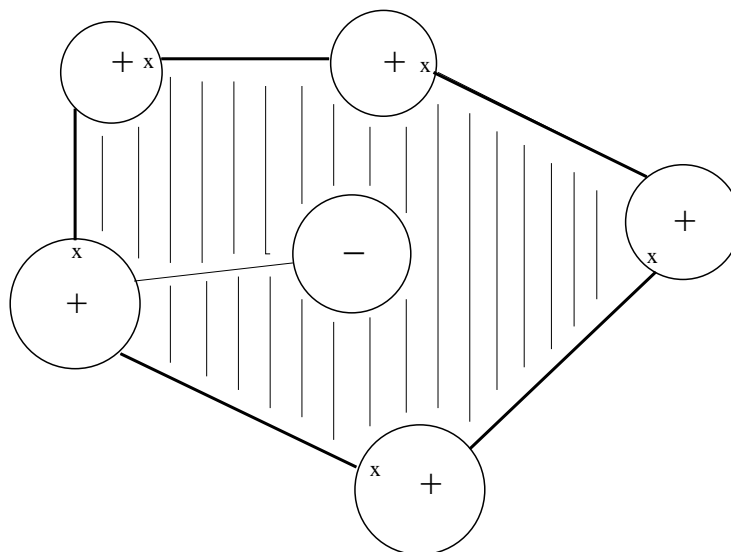


Figura 5.5: Disco-cara.

Figura 5.6:  $x$ -ciclo.

ciclo.

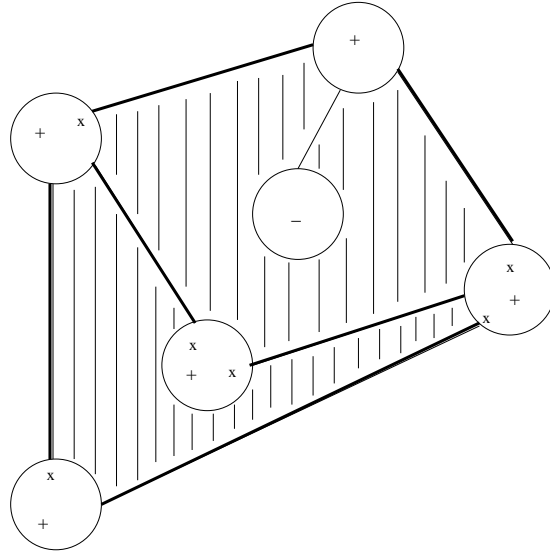


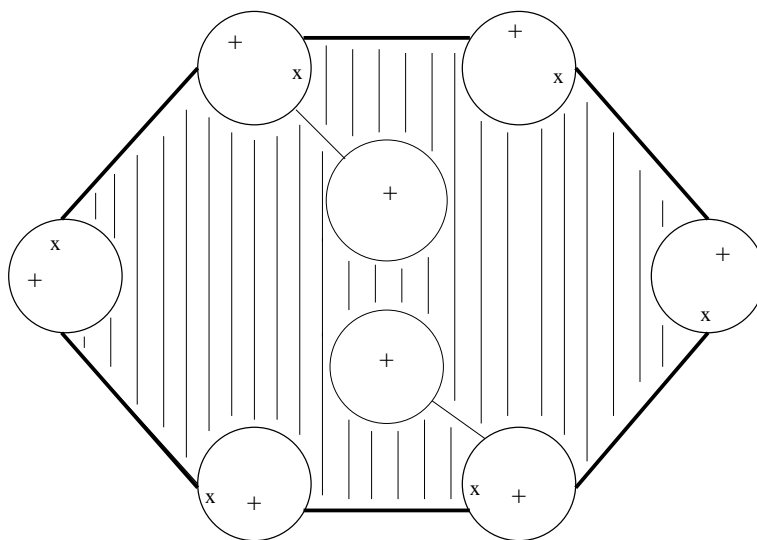
Figura 5.7:  $x$ -arista ciclo.

La longitud de un  $x$ -arista ciclo es igual al número de aristas simples más el doble de aristas dobles.

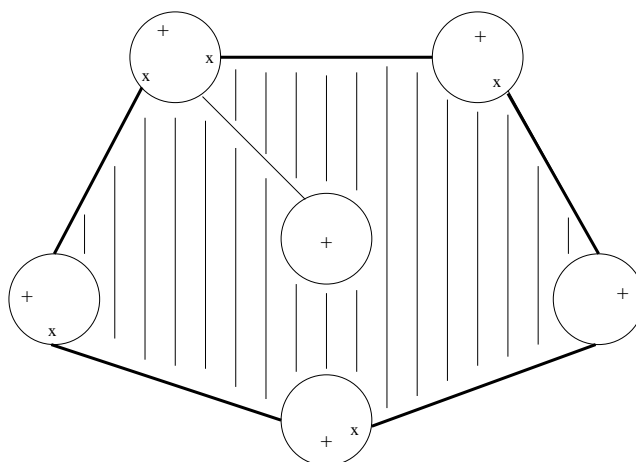
Observemos que la diferencia entre un  $x$ -ciclo y un  $x$ -arista ciclo es que en el primero no puede haber  $x, x$ -esquinas (por la orientación del ciclo) mientras que en el segundo sí como lo muestran los dibujos 5.6 y 5.7.

Un *gran  $x$ -ciclo* es un  $x$ -ciclo que acota un disco tal que todos los vértices en su interior son paralelos a los vértices del  $x$ -ciclo.

Un *gran  $x$ -arista ciclo* es un  $x$ -arista ciclo que acota un disco en el que

Figura 5.8: Gran  $x$ -ciclo.

todos los vértices del interior son paralelos a los vértices del  $x$ -arista ciclo.

Figura 5.9: Gran  $x$ -arista ciclo.

Nuevamente, la diferencia entre un gran  $x$ -ciclo y un gran  $x$ -arista ciclo es que en el primero no puede haber  $x$ ,  $x$ -esquinas y en el segundo sí.

Una  $x$ -cara es un disco cara de  $G_i$  que consiste de vértices positivos y  $x$ -aristas.

Un *Ciclo de Scharlemann* es un gran  $x$ -ciclo tal que todas las esquinas son el mismo intervalo y no tiene vértices en su interior.

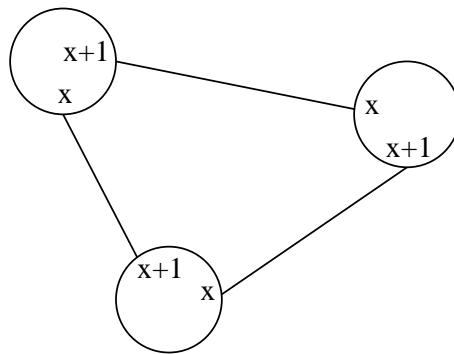


Figura 5.10: Ciclo de Scharlemann.

Un  $x$ -ciclo *estricto* es un  $x$ -ciclo que no es ciclo de Scharlemann.

Un *gran  $x$ -ciclo estricto* es un gran  $x$ -ciclo que no es ciclo de Scharlemann.

## 5.2. $q$ -tipos.

Sea  $q$  un entero positivo. Un  $q$ -tipo es una  $q$ -ada  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q)$  donde  $\varepsilon_i = \pm 1$ ,  $1 \leq i \leq q$ .

Decimos que  $a = (a_1, a_2, \dots, a_q) \in \mathbf{Z}^q$  representa el  $q$ -tipo  $r = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q)$  si y sólo si:

1. para alguna  $\eta = \pm 1$ ,  $\text{sign}(a_i) = \eta \varepsilon_i$  para cada  $i$  tal que  $a_i \neq 0$  y
2.  $\sum_{i=1}^q |a_i| \geq 2$ .

Notemos que  $a$  representa  $\tau$  si y sólo si  $-a$  representa a  $-\tau$  y que existen  $2^{q-1}$   $q$ -tipos salvo signo.

Un conjunto  $A \subset \mathbf{Z}^q$  representa todos los  $q$ -tipos si y sólo si, para cada  $q$ -tipo  $\tau$ , existe  $a \in A$  tal que  $a$  representa  $\tau$ .

Para  $A \subset \mathbf{Z}^q$  sea  $c(A)$  el número de coordenadas  $1 \leq i \leq q$  tal que  $a_i \neq 0$  para alguna  $a \in A$ . Podemos ver  $A \subset \mathbf{Z}^{c(A)} \subset \mathbf{Z}^q$  de forma obvia, además  $A$  representa todos los  $c(A)$ -tipos si y sólo si  $A$  representa todos los  $q$ -tipos. Así podemos usar la frase  $A$  representa todos los tipos sin ambigüedad.

Definimos una gráfica  $\Gamma \subset \hat{P}$  como:

- Los vértices de  $\Gamma$  consisten de los vértices gordos de  $G_P$  junto con los vértices duales, uno en el interior de cada cara  $D$  en  $G_P$ ;

- Las aristas de  $\Gamma$  unen cada vértice dual a los vértices gordos en la frontera de la cara correspondiente  $D$ .

Sea  $\tau$  un  $q$ -tipo. Definimos la gráfica dirigida  $\Gamma(\tau) \subset \hat{P}$  como la gráfica dual a  $\Gamma$  con orientación de acuerdo a la siguiente regla:

Sea  $e$  una arista de  $\Gamma$  con un extremo en un vértice gordo  $v$ , estando en un  $q$ -intervalo  $(i, i + 1)$  en tal vértice. Entonces orientamos  $e$ :

- hacia adentro en  $v$  si  $(\tau |_{(i,i+1)}) * \text{sign}(v) = +$
- hacia afuera en  $v$  si  $(\tau |_{(i,i+1)}) * \text{sign}(v) = -$

Por ejemplo, si  $q = 6$  y  $\tau = + - + - - -$  entonces alrededor de los vértices de  $G_P$  las aristas de  $\Gamma(\tau)$  están orientadas como:

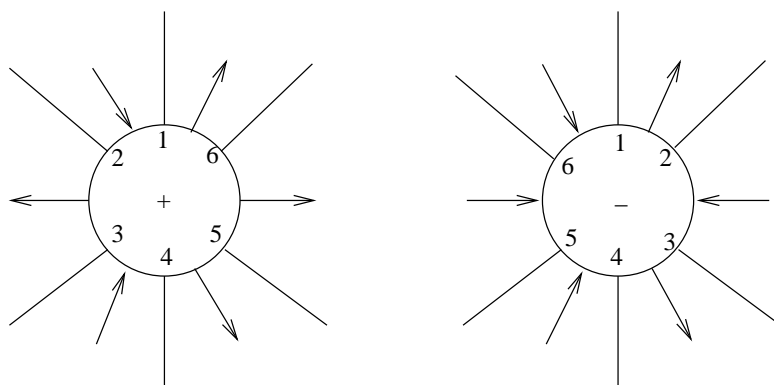


Figura 5.11: Ejemplo de un 6-tipo.

Se tienen entonces las siguientes propiedades:

- Un disco cara  $D$  de  $G_P$  representa  $\tau$  si y solo si el correspondiente vértice dual  $v(D)$  está orientado de tal forma que todas las aristas van hacia adentro ó hacia afuera de él.

- (Parry) Si  $A \subset \mathbf{Z}^q$  representa todos los tipos, existe  $A_0 \subset A$  tal que el cociente  $\mathbf{Z}^q$  por el subgrupo generado por  $A_0$  tiene torsión no trivial.
- ([9]) Si  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  son esferas y  $\Delta \geq 1$  entonces  $G_P$  representa todos los tipos ó  $G_Q$  contiene un ciclo de Scharlemann.



# Capítulo 6

## Ciclos de Scharlemann

### 6.1. Propiedades de los ciclos de Scharlemann

De aquí en adelante trabajaremos con una 3-variedad  $M$  compacta, orientable, irreducible y con un toro incompresible  $T$  como frontera.  $P$  es una superficie incompresible de género  $g$  cuyas fronteras tienen pendiente  $\gamma$  en  $T$ . Suponemos que existe una pendiente  $r$  en  $T$  que produce una esfera esencial  $\hat{Q}$  al hacer el  $r$ -llenado de Dehn en la variedad  $M$ , es decir,  $M(r)$ . Hacemos  $Q = \hat{Q} \cap M$ . Consideramos las gráficas de intersección  $G_P$  y  $G_Q$ .

Llamemos  $p$  el número de componentes de  $\partial P$  y  $q$  el número de componentes de  $\partial Q$ . Supongamos que  $q > 2$  es minimal, es decir que  $Q$  es la esfera esencial con un número mínimo de intersección con el corazón del toro sólido.

**Lema 6.1** *Si  $G_P$  contiene un ciclo de Scharlemann, entonces  $Q$  debe ser separante.*

*Demostración.*

Sea  $\sigma$  un ciclo de Scharlemann en  $G_P$  y supongamos que  $Q$  es no separante. Entonces  $\hat{Q}$  es una esfera no separante en  $M(r)$ . Sea  $D$  una cara de  $G_P$  que  $\sigma$  acota y sean  $x, y$  los índices en los extremos de las aristas de  $\sigma$ . Sea  $A$  el anillo componente de  $\partial M \setminus \partial Q$  entre las componentes consecutivas de  $\partial Q$  correspondientes a  $x$  y  $y$  (sobre las cuales corren las esquinas de  $\sigma$ ). Construimos una nueva superficie  $Q'$  en  $M$  haciendo cirugía en  $Q \cup A$  pegado con  $D$ . Entonces  $\hat{Q}'$  es una esfera no separante en  $M(r)$  que intersecta a  $k_r$  en  $q - 2$  puntos, donde  $K_r$  es el corazón del  $r$ -llenado de Dehn, lo cual es una contradicción.

□

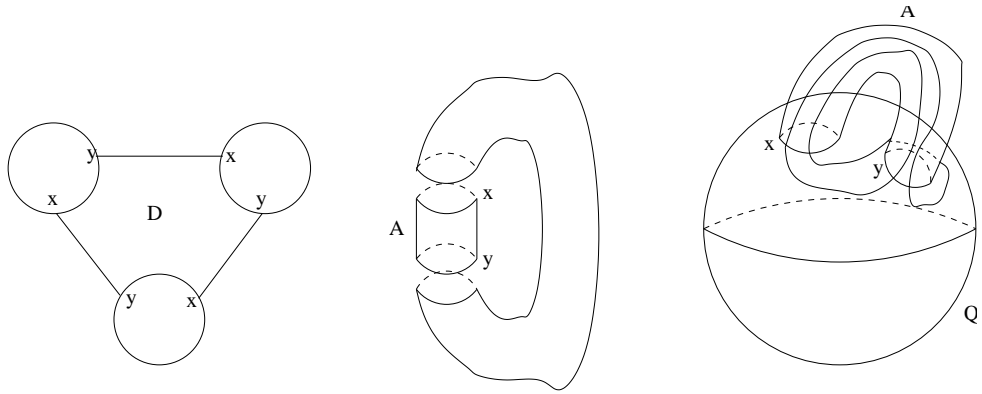


Figura 6.1: Ciclo de Scharlemann.

**Teorema 6.2**  *$G_P$  no puede tener ciclos de Scharlemann de índices distintos.*

**Demostración.**

Supongamos que  $G_P$  contiene dos ciclos de Scharlemann  $\sigma$  y  $\sigma'$  de índices distintos  $\{x, y\}$  y  $\{x', y'\}$ . Por el lema anterior,  $Q$  separa a  $M$ . En particular,  $q$  es par.

Consideremos las aristas de  $\sigma$  y  $\sigma'$  en  $G_Q$  uniendo los vértices  $x, y$  y  $x', y'$ , respectivamente. Existe un disco  $E \subset \hat{Q}$  tal que :

- $\partial E \subset Q$
- el número de vértices de  $G_Q$  en  $E$  es a lo más  $\frac{q}{2}$ .
- el interior de  $E$  contiene las aristas de uno de los dos ciclos de Scharlemann, digamos  $\sigma$  y los vértices correspondientes  $x, y$ .

(si  $\{x, y\} \cap \{x', y'\} \neq \emptyset$ , usemos el hecho de que  $q$  es par).

Sea  $E' \subset \hat{Q}$  el disco que contiene a  $x', y'$  y a las aristas de  $\sigma'$ . Si  $\{x, y\} \cap \{x', y'\} = \emptyset$  entonces podemos suponer que  $E \cap E' = \emptyset$ .

Sean  $D$  y  $D'$  las caras de  $G_P$  acotadas por  $\sigma$  y  $\sigma'$ , respectivamente. Sea  $H$  la bola en  $V_r$  correspondiente a  $x$  y  $y$  y sea  $N$  una vecindad regular de  $E \cup H \cup D$  en  $M(r)$ . Entonces  $N$  es un espacio lente pinchado cuyo grupo fundamental tiene el mismo orden que  $\sigma$  (pensando  $H$  como una 1-asa y una vecindad regular de  $D$  como una 2-asa).

Similarmente, usando el disco  $E'$ , definido antes, y la cara  $D'$ , obtenemos un espacio lente pinchado  $N' \subset M(r)$  tal que, (moviendo  $\partial N$  ligeramente

hacia afuera de  $\hat{Q}$  si  $D$  y  $D'$  están en lados opuestos de  $P$ )  $N \cap N' = \phi$ . Se sigue que la esfera  $\partial N$  es esencial en  $M(r)$ . Como  $|\partial N \cap K_r| \leq 2(\frac{q}{2}) - 2 = q - 2$ , es una contradicción.

□

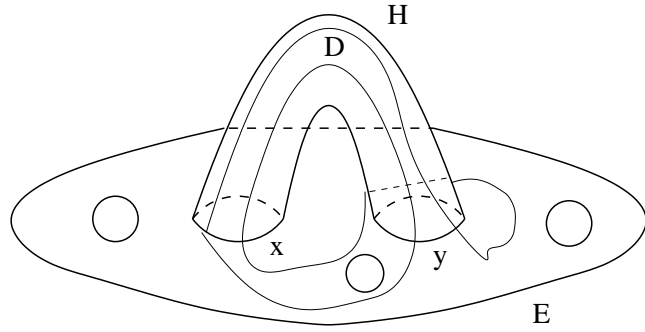


Figura 6.2: obtención del espacio lente pinchado.

**Lema 6.3** *Si, en  $G_P$ ,  $\Sigma_1$  es un  $x_1, x_2$ -ciclo de Scharlemann de orden  $m$  y  $\Sigma_2$  es un  $x_1, x_2$ -ciclo de Scharlemann de orden  $n$ , entonces  $m = n$ .*

**Demostración:**

Sean  $F_1$  y  $F_2$  las caras en  $G_P$  con fronteras  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , respectivamente. Sea  $G \subset G_Q$  la subgráfica consistente de los vértices gordos  $x_1, x_2$  con las aristas de  $G_Q$  que corresponden a las aristas de  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . Sea  $D$  una cara de  $G$ . Sea  $H$  la bola en  $M(r)$  definida por el segmento  $D^2 \times I$  de  $N(K_r)$  que intersecta  $\hat{Q}$  en los vértices gordos  $x_1$  y  $x_2$ ; esto es,  $H$  es la 1-asa pegada a  $\hat{Q}$  en esos vértices. Sea  $Y = N(H \cup (\hat{Q} \setminus \text{int} D))$ . Observemos que  $Y \cong D^2 \times S^1$ , con  $F_1 \cap \partial Y$  y  $F_2 \cap \partial Y$  dos curvas no triviales disjuntas en  $\partial Y \cong S^1 \times S^1$ . Como las curvas pasan sobre  $H$  en una dirección consistente (digamos de  $x_1$  a  $x_2$ ),

son paralelas en  $\partial Y$ . Entonces las curvas deben pasar sobre  $H$  un número igual de veces. Esto implica que  $m = n$ .

□

## 6.2. Existencia de los ciclos de Scharlemann.

En esta sección probaremos que todo gran  $x$ -arista ciclo contiene un ciclo de Scharlemann, la prueba está basada en un artículo de Hayashi y Motegi [15]. Aunque comenzaremos con un caso más sencillo, que es cuando tenemos un gran  $x$ -ciclo, el cual probaremos basándonos en un artículo de Gordon, Luecke, Shallen y Culler ([11]).

Sea  $\Lambda$  una subgráfica de  $G_P$  y  $x$  un vértice de  $G_Q$ , decimos que  $\Lambda$  satisface la condición  $P(x)$  si para cada vértice  $y$  de  $\Lambda$  existe una arista de  $\Lambda$  incidente a  $y$  con índice  $x$ , conectando  $y$  a un vértice paralelo de  $\Lambda$ .

**Lema 6.4** *Supongamos que  $\Lambda$  satisface la condición  $P(x)$ . Entonces cada componente de  $\Lambda$  contiene un  $x$ -ciclo.*

*Demostración.*

Para cada vértice  $y$  de  $\Lambda$ , escogemos una arista  $e(y)$  de  $\Lambda$  incidente a  $y$  con índice  $x$ , conectando  $y$  a un vértice paralelo de  $\Lambda$ .

Sean  $\Lambda_0$  una componente de  $\Lambda$  y  $y_1$  cualquier vértice de  $\Lambda_0$ . Consideremos la arista  $e(y_1)$  conectando  $y_1$  a  $y_2$ , digamos. Como  $y_1$  y  $y_2$  son paralelos, el

índice de  $e(y_1)$  en  $y_2$  no es  $x$  por la regla de paridad. Entonces si  $y_2 \neq y_1$ , la arista  $e(y_2)$  es distinta de  $e(y_1)$ . Continuando de esta forma, obtenemos aristas  $e(y_i)$  conectando los vértices  $y_i$  y  $y_{i+1}$  con índice  $x$  en  $y_i$  hasta que un vértice se repita por primera vez, digamos  $y_m = y_n$ ,  $m < n$ , pero  $y_i \neq y_j$  para  $1 \leq i < j < n$ . Entonces las aristas  $e(y_m), e(y_{m+1}), \dots, e(y_{n-1})$  forman un  $x$ -ciclo en  $\Lambda_0$ .

□

**Teorema 6.5** *Si  $G_P$  contiene un gran  $x$ -ciclo, entonces contiene un ciclo de Scharlemann.*

*Demostración.*

Sea  $\sigma$  un gran  $x$ -ciclo en  $G_P$  y sea  $E$  el disco acotado por  $\sigma$ . Sea  $\varepsilon(\sigma)$  el número de aristas  $a$  en  $G_P$  tales que  $\text{inta} \subset \text{int}E$ . Probaremos el resultado por inducción en  $\varepsilon(\sigma)$ .

Si  $\varepsilon(\sigma) = 0$ , entonces  $\sigma$  es un ciclo de Scharlemann por definición. Entonces suponemos que  $\varepsilon(\sigma) > 0$ . Tenemos dos casos:

1. Cualquier arista en  $G_P \cap E$  incidente a un vértice de  $\sigma$  está en  $\sigma$ .
2. Existe una arista de  $G_P \cap E$  incidente a un vértice de  $\sigma$  pero no está contenida en  $\sigma$ .

En el primer caso, como todos los vértices de  $G_P \cap E$  son paralelos, la gráfica  $\Lambda = G_P \cap E \setminus \sigma$  satisface la condición  $P(x')$  para cualquier vértice  $x'$

de  $G_Q$ , y entonces contiene un  $x'$ -ciclo  $\sigma'$  por el lema 6.2. Claramente  $\sigma'$  es un gran  $x'$ -ciclo en  $G_P$  y  $\varepsilon(\sigma') < \varepsilon(\sigma)$ . Entonces el resultado se sigue por inducción.

En el segundo caso, como todos los vértices de  $\sigma$  son paralelos, existe un índice  $x'$  tal que  $x$  y  $x'$  representan componentes frontera de  $Q$  que son adyacentes en  $T$ , con la propiedad de que para cada vértice  $y$  de  $\sigma$  existe una arista  $G_P \cap E$  incidente a  $y$  con marca  $x'$ . Esto también es cierto para cualquier vértice  $y$  en el  $\text{int}E$ . Entonces  $G_P \cap E$  satisface la condición  $P(x')$ . Aplicando el lema 6.2 obtenemos un  $x'$ -ciclo  $\sigma'$  en  $G_P \cap E$ , sin embargo queremos quitar la posibilidad de que  $\sigma' = \sigma$ . Para esto, notemos que por hipótesis existe una arista de  $G_P \cap E$  incidente a un vértice de  $\sigma$  que no está contenido en  $\sigma$ , entonces existe una arista incidente a un vértice  $y$ , digamos, en  $\sigma$  con índice  $x'$ . Sea  $e$  la arista de  $\sigma$  incidente a  $y$  con marca  $x$ . Entonces la gráfica  $\Lambda = G_P \cap E \setminus \text{int}e$  también satisface la condición  $P(x')$ . Por el lema 6.2 tenemos un  $x'$ -ciclo  $\sigma'$  en  $\Lambda$  el cual es claramente un gran  $x'$ -ciclo en  $G_P$  con  $\varepsilon(\sigma') < \varepsilon(\sigma)$ . Entonces  $G_P$  contiene un ciclo de Scharlemann por inducción.

□

Para la segunda parte, aunque sabemos que se cumple la regla de paridad, supondremos simplemente la siguiente:

*Regla Débil de Paridad:* Cada arista que preserva signos tiene distintos índices en los extremos.

Observemos que la regla de paridad implica la regla débil de paridad. En el transcurso de la siguiente prueba habrá situaciones en las que no se cumple la regla de paridad débil, con esto pueden existir los:

*Ciclos de Scharlemann aplastados* que consisten de una arista que preserva signos y tiene el mismo índice en ambos extremos.

Denotaremos por  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ) a las gráficas  $G_P$  y  $G_Q$  y por  $F(\gamma_i)$  a las superficies  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$ , respectivamente. Supongamos que  $q \geq 2$ .

**Teorema 6.6** *Una cara de un gran  $x$ -arista ciclo  $\sigma$  de  $G_i$  contiene una cara de un ciclo de Scharlemann.*

*Demostración.* Sea  $W$  la cara de  $\sigma$  y  $G_W = (G_i \cap W) \cup \partial W$ . Tomamos la subgráfica  $\Lambda$  de  $G_W$  tal que:

- $\{\text{vértices de } \Lambda\} = \{\text{vértices de } G_W\}$ .
- $\{\text{aristas de } \Lambda\} = \{x\text{-aristas de } G_W\}$ .

Como para cada vértice  $v$  de  $\Lambda$  existe una  $x$ -arista incidente a  $v$  en  $\bar{W}$ , existe un disco cara  $E$  de  $\Lambda$  en  $W$ . La frontera  $\partial E$  es un  $x$ -arista ciclo y ninguna esquina de  $\partial E$  contiene un índice  $x$  en su interior. Sea  $G_E$  la gráfica  $(G_W \cap E) \cup \partial E$ . Notemos que  $E$  no contiene vértices de  $G_W$ . Si  $E$  contiene un lazo de  $G_E$ , entonces  $E$  contiene una cara de un ciclo de Scharlemann trivial. Supongamos que  $E$  no contiene lazos.



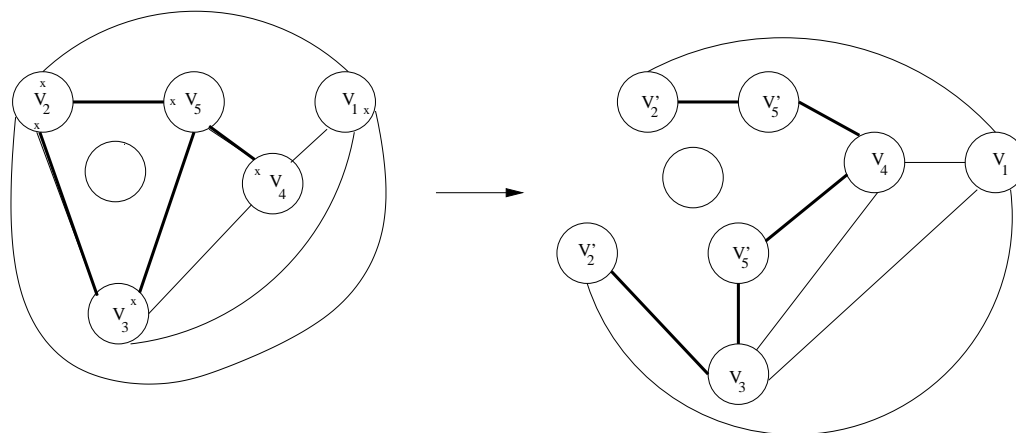


Figura 6.3: corte a lo largo de aristas dobles

Si  $\partial E$  no es un círculo, cuando vemos los vértices gordos como puntos, cortamos la gráfica  $G_E$  a lo largo de aristas dobles de  $\partial E$  y en los vértices en los cuales más de dos aristas de  $\partial E$  son incidentes tal que  $\partial E$  se deforma en un círculo.

Sea  $\hat{G}_E$  la gráfica resultante y  $\hat{E}$  el disco obtenido cortando  $E$  como antes.

Es suficiente encontrar un ciclo de Scharlemann en  $\hat{G}_E$  tal que su cara esté en  $\hat{E}$ . Probaremos esto por inducción en la longitud  $l$  del  $x$ -arista ciclo  $\hat{\partial E}$ .

Para estudiar la gráfica  $\hat{G}_E$  nos olvidamos del significado geométrico y consideramos una situación más general la cual es puramente abstracta, en el sentido de que la regla de paridad no se tiene. Más precisamente, consideremos las siguientes gráficas:

Sea  $\Gamma$  una gráfica en  $F(\gamma_i)$  y  $\sigma$  un  $x$ -arista ciclo en  $\Gamma$ . Sea  $E$  un disco cara de  $\sigma$ . Supongamos que  $\Gamma = (\Gamma \cap E) \cup \partial E$  (es decir, el ciclo de más afuera de  $\Gamma$ ). Además  $\Gamma$  satisface lo siguiente:

1.  $\sigma$  es homeomorfo a un círculo cuando vemos los vértices gordos como puntos.
2.  $\Gamma$  no tiene vértices en  $E$ .
3. Cada extremo de cada arista está en correspondencia con un número  $1, 2, \dots$ , ó  $N$  ( $N \geq 2$ ) y alrededor de cada esquina de  $\sigma$  los extremos son indexados por  $i, i+1, \dots, i+k \pmod{N}$  para alguna  $i$  y  $k$  en sentido contrario a las manecillas del reloj, donde los enteros  $i, k$  pueden variar de esquina a esquina.
4.  $E$  no tiene lazos.

Notemos que, por la condición (2) todas las aristas de  $\Gamma$  son aristas que preservan el signo y un  $x$ -arista ciclo (respectivamente un  $x$ -ciclo) es automáticamente un gran  $x$ -arista ciclo (respectivamente un gran  $x$ -ciclo) y así,  $\sigma$  es un gran  $x$ -ciclo.

□

**Lema 6.7** *Si la regla débil de paridad se cumple para las aristas del disco abierto  $E$ , entonces  $\Gamma$  contiene un ciclo de Scharlemann no aplastado cuya cara está contenida en  $E$ .*

**Demostración.** La prueba se realiza por inducción sobre la longitud de  $\sigma$ , considerando el  $x$ -arista ciclo de más adentro. Si es necesario, supondremos que no hay  $x$ -aristas en  $E$ . Comencemos con el siguiente sublema:

**Sublema 1** Supongamos que  $\sigma = \partial E$  es un  $x$ -ciclo. Si la regla débil de paridad se cumple para aristas en  $E$ , entonces  $\Gamma$  contiene un ciclo de Scharlemann no aplastado cuya cara está contenida en  $E$ .

**Demostración.**

Teorema 6.2.

□

Si  $\partial E$  no tiene una esquina tal que ambos extremos tienen índice  $x$  (llamada  $x - x$  esquina), entonces  $\partial E$  es un  $x$ -ciclo. Entonces por el sublema anterior,  $E$  contiene un ciclo de Scharlemann no aplastado. Por lo que en el resto de la prueba supondremos que existe una  $x - x$  esquina.

**Sublema 2.** Supongamos que se cumple la regla débil de paridad para las aristas en  $E$ . Si existe una familia de más de  $\frac{N}{2}$  aristas paralelas en  $\Gamma$ , entonces tenemos que:

1. Existe un ciclo de Scharlemann no aplastado (de longitud 2) en tal familia y su cara está contenida en  $E$ , ó
2.  $N$  es impar y la familia consiste de  $\frac{N+1}{2}$  aristas paralelas incluyendo un ciclo de Scharlemann aplastado el cual es una arista en  $\partial E$ .

**Demostración.** El conjunto de índices en los dos extremos de la familia paralela no son disjuntos. Por tanto, existe un ciclo de Scharlemann aplastado ó un  $x$ -ciclo (para algún índice  $x$ ) en tal familia.

En el caso anterior el ciclo de Scharlemann aplastado es una arista de  $\sigma$  y  $N$  debe ser impar, de otra forma  $E$  contiene un ciclo de Scharlemann aplastado, lo cual es una contradicción. Si existen más de  $\frac{N+1}{2}$  aristas paralelas entonces existe un ciclo de Scharlemann. En el último caso (en el que exista un  $x$ -ciclo) el sublema anterior implica la existencia de un ciclo de Scharlemann no aplastado.

□

**Caso  $l = 2$ :**

Como existe una  $x - x$  esquina, digamos  $Z$ .  $\Gamma$  consiste de  $N + 1$  aristas que preservan el signo. El sublema 1 muestra que  $\Gamma$  contiene un ciclo de Scharlemann no aplastado.

**Supongamos que  $l \geq 3$ .**

Una arista  $e$  se llama *arista diagonal* si  $e$  es incidente a una  $x - x$  esquina  $Z$  y tiene el otro extremo en una esquina  $R$  la cual no es adyacente a  $Z$  en  $\sigma$ . Cuando  $l = 3$  no existen aristas diagonales. Dividamos la prueba en dos casos dependiendo si existe ó no una arista diagonal:

Caso 1: No existen aristas diagonales en  $\Gamma$ .

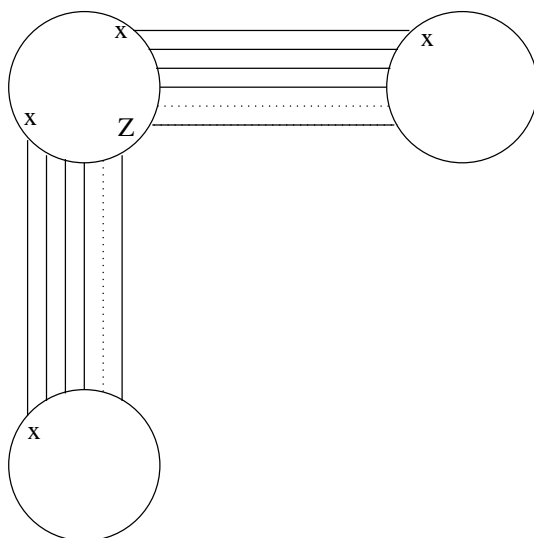


Figura 6.4: sin aristas diagonales

Entonces para cada  $x - x$  esquina  $Z$  podemos encontrar más de  $\frac{N}{2}$  aristas paralelas incidentes a  $Z$  ya que existen  $N + 1$  aristas incidentes a  $Z$ . Si  $N$  es par, tenemos un ciclo de Scharlemann no aplastado por el sublema 2. Si  $N$  es impar, entonces tenemos las siguientes posibilidades según el sublema 2:

- $\Gamma$  contiene un ciclo de Scharlemann no aplastado ó;
- Las dos aristas que tienen índice  $x$  en sus extremos en  $Z$  también tienen índice  $x$  en los otros extremos y las aristas incidentes a  $Z$  están divididas en dos familias de  $\frac{N+1}{2}$  aristas paralelas las cuales conectan  $Z$  con dos esquinas adyacentes a  $Z$  en  $\partial E$ .

Podemos suponer que todas las  $x - x$  esquinas satisfacen la segunda condición, ya que de otra forma podríamos encontrar un ciclo de Scharlemann no aplastado. Bajo este supuesto, mostramos que cada esquina en  $\partial E$  es una

$x - x$  esquina.

Sean  $Z_0, Z_1, \dots, Z_m$  las esquinas en  $\partial E$  apareciendo en este orden. Sea  $e_i$  la arista en  $\partial E$  que conecta  $Z_i$  con  $Z_{i+1}$ , donde  $e_m$  conecta  $Z_m$  con  $Z_0$ . La arista  $e_i$  tiene la “cola” en la esquina  $Z_i$  y la “cabeza” en la esquina  $Z_{i+1}$ . Suponemos que  $Z_0$  es una  $x - x$  esquina y mostremos que la siguiente esquina  $Z_1$  también es  $x - x$  esquina.

El índice de la cabeza de  $e_0$  es  $x$  y el índice de la cola de  $e_m$  también es  $x$  por la segunda condición. Si la cola de  $e_1$  tiene índice  $x$  habremos terminado.

Supongamos por contradicción que la cola de  $e_1$  no tiene índice  $x$ . En general, supongamos que el índice de la cola de  $e_i$  no es  $x$  para alguna  $i$  ( $1 \leq i \leq m - 1$ ). Entonces la cabeza de  $e_i$  tiene índice  $x$ . Si la esquina  $Z_{i+1}$  es una  $x - x$  esquina, entonces por la segunda condición, la cola de  $e_i$  tiene índice  $x$ , lo cual es una contradicción. Por tanto,  $Z_{i+1}$  no es una  $x - x$  esquina. Así, la cola de  $e_{i+1}$  no tiene índice  $x$ . Inductivamente, la suposición de que la cola de  $e_1$  no tiene índice  $x$ , implica que la cola de  $e_i$  no tiene índice  $x$  para  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ . Por tanto, en particular la cabeza de  $e_{m-1}$  tiene índice  $x$  y  $Z_m$  es una  $x - x$  esquina (ya que la cola de  $e_m$  tiene índice  $x$ ). Entonces por la segunda condición la cola de  $e_{m+1}$  tiene índice  $x$ , lo cual es una contradicción. Esto prueba que  $Z_1$  también es una  $x - x$  esquina y por tanto todas las esquinas son  $x - x$  esquinas que satisfacen la segunda condición. Entonces hay  $m$  familias de  $\frac{N+1}{2}$  aristas paralelas formando  $\frac{N+1}{2}$   $m$ -ágonos.

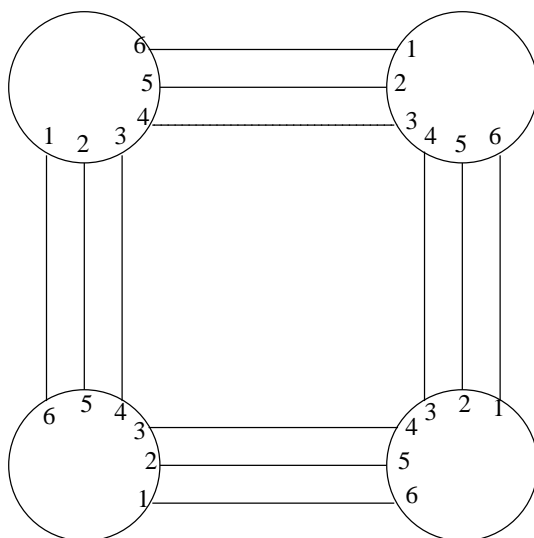


Figura 6.5: el  $m$ -ágono de más adentro es un ciclo de Scharlemann.

Por tanto, el  $m$ -ágono de más adentro es un ciclo de Scharlemann no aplastado.

□

Caso 2: Existe una arista diagonal  $e$  en  $\Gamma$ .

Esto es, existe una arista  $e$  incidente a una  $x-x$  esquina  $Z$  y tiene el otro extremo en una esquina  $R$  que no es adyacente a  $Z$  en el  $x$ -ciclo  $\sigma$ .

Sea  $U$  (respectivamente  $V$ ) el vértice que contiene a la esquina  $Z$  (respectivamente  $R$ ). Sea  $k$  el índice en el extremo de  $e$  en  $Z$ . Construiremos

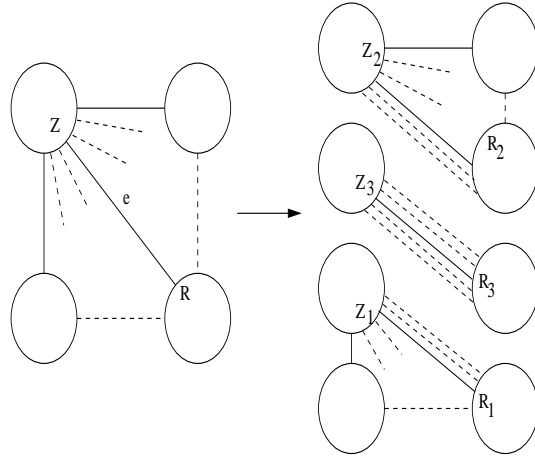


Figura 6.6: con aristas diagonales

tres gráficas. La arista diagonal  $e$  divide el disco  $E$  en dos discos  $E_1$  y  $E_2$ . Entonces  $\bar{E}_1 \cap Z$  contiene los índices  $\{x, x+1, \dots, k\}$  y  $\bar{E}_2 \cap Z$  contiene los índices  $\{k, k+1, \dots, x-1, x\}$ .

Sea  $\Lambda'_i$  la gráfica  $(\Gamma \cap E_i) \cup \partial E_i$  para  $i = 1, 2, \dots$ . Sea  $\Lambda_1$  (respectivamente  $\Lambda_2$ ) la gráfica obtenida de  $\Lambda'_1$  (respectivamente  $\Lambda'_2$ ) añadiendo aristas que sean paralelas a  $e$  e incidentes a  $Z$  con índices  $k+1, \dots, x-1, x$  (respectivamente  $x, x+1, \dots, k-1$ ). Sea  $e_i \subset \Lambda_i$  la arista adicional de más afuera. Sea  $D_i$  el disco acotado por las dos aristas  $e$  y  $e_i$ . Construimos una tercer gráfica  $\Lambda_3$  como  $((\Lambda_1 \cap D_1) \cup \partial D_1) \cup ((\Lambda_2 \cap D_2) \cup \partial D_2)$  y denotamos el disco  $\text{int}(\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2)$  por  $D_3$ . La gráfica  $\Lambda_3$  consiste de dos vértices  $U, V$  y  $N+1$  aristas paralelas conectándolos.

En la gráfica  $\Lambda_i$  sea  $R_i$  la esquina de  $\partial D_i$  en  $\partial V$  la cual contiene el ex-



tremo de  $e$ . Veamos que  $e$  no tiene el índice  $k$  en  $R_i$  ya que la regla débil de paridad se cumple en  $E$ . La gráfica  $\Lambda_i$  está acotada por un  $x$ -arista ciclo  $\sigma_i$  y estas gráficas satisfacen las condiciones (1) a (4). Sin embargo, estas gráficas pueden no satisfacer la regla débil de paridad en  $\Lambda_i \setminus (\sigma_i \cup e)$ . En la gráfica  $\Lambda_3$  podemos observar fácilmente que:

**Sublema 3:**

1. Si la esquina  $R_3$  también es una  $x - x$  esquina, entonces la gráfica  $\Lambda_3$  tiene tres ciclos de Scharlemann (posiblemente aplastados) y sólo uno está en  $D_3$ . Si  $N$  es par, entonces los tres ciclos de Scharlemann son aplastados. Si  $N$  es impar, entonces exactamente uno de ellos (el cual está en  $D_3$ ) es no aplastado.
2. Si la esquina  $R_3$  no es una  $x - x$  esquina, entonces sea  $f$  la arista que tiene índice  $x$  en  $R_3$ . La gráfica  $\Lambda_3$  tiene exactamente un ciclo de Scharlemann (probablemente aplastado) entre las aristas  $f$  y  $e_i$  para  $i = 1, 2$  respectivamente.

Supongamos que  $R_3$  también es una  $x - x$  esquina. Recordemos que la arista diagonal  $e$  no es un ciclo de Scharlemann aplastado. Entonces por el sublema anterior, una de las dos gráficas  $\Lambda_1$  ó  $\Lambda_2$ , digamos  $\Lambda_1$ , contiene exactamente un ciclo de Scharlemann aplastado en el disco  $D_1$ . Entonces, en  $\text{int}(\bar{E}_1 \cup \bar{D}_1)$  la regla débil de paridad se cumple. Entonces por la hipótesis de inducción, existe un ciclo de Scharlemann no aplastado en  $E_1 \cup D_1$ . Como no existe un ciclo de Scharlemann no aplastado en  $\bar{D}_1$ , podemos encontrar un ciclo de Scharlemann no aplastado en  $E_1$ .

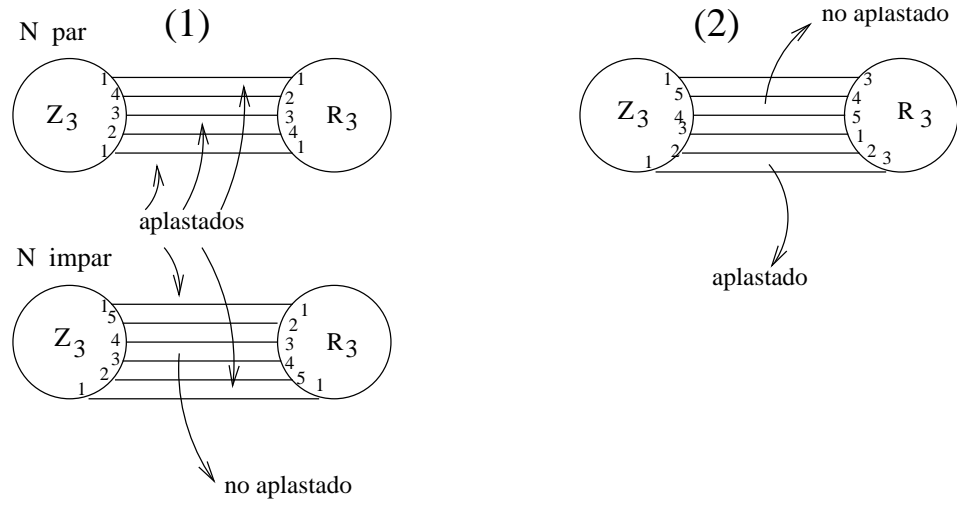


Figura 6.7: Ciclos de Scharlemann en cada caso.

Ahora supongamos que  $R_3$  no es una  $x - x$  esquina. Entonces dividimos la prueba en dos subcasos de acuerdo a la posición de  $f$  y la arista diagonal  $e$  en  $\Lambda_3$ .

Primero supongamos que una de las dos gráficas  $\Lambda_1$  ó  $\Lambda_2$ , digamos  $\Lambda_1$ , está acotada por un  $x$ -arista ciclo  $\sigma_1$  y en el  $\text{int}(\bar{E}_1 \cup \bar{D}_1)$  la regla de paridad se cumple. Entonces existe una cara de un ciclo de Scharlemann no aplastado en  $E_1$ , por hipótesis de inducción. Supongamos que ambas gráficas  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  contienen exactamente un ciclo de Scharlemann (posiblemente aplastado) en  $\bar{D}_1$  y  $\bar{D}_2$ , respectivamente. Entonces al menos una de las dos gráficas  $\Lambda_1$  ó  $\Lambda_2$ , digamos  $\Lambda_1$  tiene la arista  $f$  en  $\bar{D}_1$  ( $f$  puede coincidir con  $e$ ). Sustituyendo la arista  $f$  por la arista  $e_1$  en el  $x$ -arista ciclo  $\sigma_1$ , podemos obtener un nuevo  $x$ -ciclo  $\rho$  tal que la regla de paridad se cumpla en la cara  $H$  de  $\rho$ .

Por hipótesis de inducción, existe una cara de un ciclo de Scharlemann no aplastado. En cualquier caso, como  $H \cap D_1$  no contiene una cara de un ciclo de Scharlemann, el de antes existe en  $E_1$ .

Esto completa la prueba del lema. Por lo que la prueba del teorema está ahora completa.

□

# Capítulo 7

## Acumulamientos

Recordemos las hipótesis con las que trabajaremos:  $M$  es una 3-variedad compacta, orientable, irreducible y con un toro incompresible  $T$  como frontera.  $P$  es una superficie incompresible de género  $g$  cuya frontera tiene pendiente  $\gamma$  en  $T$ . Suponemos que existe una pendiente  $r$  en  $T$  que produce una esfera esencial  $\hat{Q}$  al hacer el  $r$ -llenado de Dehn en la variedad  $M$ , es decir,  $M(r)$ . Hacemos  $P = \hat{P} \cap M$  y  $Q = \hat{Q} \cap M$ . Consideramos las gráficas de intersección  $G_P$  y  $G_Q$ .

En este capítulo probaremos la existencia de un acumulamiento en la gráfica  $G_P$  bajo la hipótesis de que  $q > 2$ , donde  $q$  es el mínimo de las intersecciones geométricas de la esfera esencial  $Q$  con el corazón del  $r$ -llenado de Dehn.

Recordemos que en el capítulo anterior probamos que todos los ciclos de

Scharlemann tienen los mismos índices. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\{1, 2\}$  son los índices de los ciclos de Scharlemann de la gráfica  $G_P$ .

Decimos que un ciclo en  $G_P$  es un *ciclo 2-esquinado* si es la frontera de una cara que contiene sólo  $q$ , 1-esquinas, 2, 3-esquinas y al menos una arista de un 1, 2-ciclo de Scharlemann.

Un *acumulamiento*  $C$  es una subgráfica conexa de  $G_P(G_Q)$  tal que:

1.  $C$  consiste de 12-ciclos de Scharlemann y ciclos 2-esquinados.
2. Cada 12-arista de  $C$  pertenece tanto a un ciclo de Scharlemann como a un ciclo 2-esquinado.
3.  $C$  no tiene vértices de corte.

**Lema 7.1** *Supongamos que  $q \geq 3$ . Una  $x$ -cara  $x \neq 1, 2$  en  $G_P$  contiene un acumulamiento  $C$ .*

**Demostración:** Sea  $\Gamma_D$  la subgráfica de  $G_P$  en una  $x$ -cara  $D$ . Existe la posibilidad de que  $\partial D$  no sea un círculo, sin embargo podemos cortar  $G_P \cap D$  a lo largo de las aristas dobles de  $\partial D$  y en los vértices en los cuales más de dos aristas son incidentes para deformar  $\partial D$  en un círculo.

Así, podemos suponer que  $\partial D$  es un círculo y  $\Gamma_D$  no tiene vértices en el interior de  $D$ . Podemos suponer que los índices aparecen en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la frontera de cada vértice.

Supongamos que  $D$  tiene una arista diagonal  $d$  con una pareja indexada  $\{a, b\}$  los cuales no están en ningún 1, 2-ciclo de Scharlemann, como en la siguiente figura:

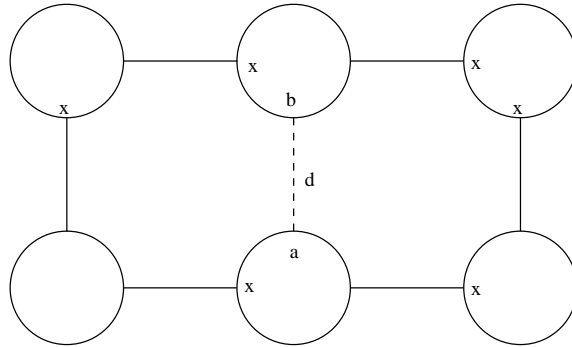


Figura 7.1:  $x$ -cara.

Notemos que  $\{a, b\}$  deben ser distintos de  $x$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $b < a < x$ , es decir, los tres índices aparecen en sentido contrario a las manecillas del reloj. Formalmente construyamos una nueva  $x$ -cara  $D'$  como sigue:

Dejamos todas las aristas y esquinas de  $\Gamma_D$  que están a la derecha de  $d$  y quitamos todas las aristas y esquinas a la izquierda de  $d$ . Insertamos aristas adicionales a la izquierda de  $d$  y paralelas a  $d$  hasta llegar a la primer  $x$  en un extremo de estas aristas como la siguiente figura:

En particular, las aristas añadidas no contienen aristas de ciclos dos esquinados ó ciclos de Scharlemann de la gráfica en la nueva gráfica  $D'$ .

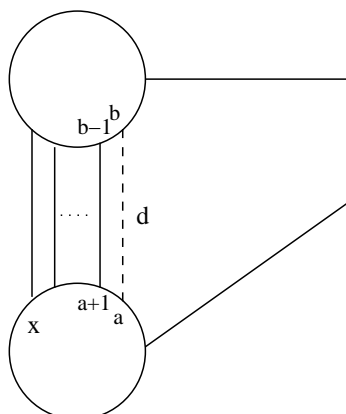


Figura 7.2: Construcción de la gráfica  $D'$ .

Repetimos el mismo proceso para cada arista diagonal que no esté en un 1,2-ciclo de Scharlemann, entonces obtenemos una nueva  $x$ -cara  $E$  y una gráfica  $\Gamma_E$  en  $E$  tal que todas las aristas diagonales son aristas de 1,2-ciclos de Scharlemann y todas las aristas frontera son  $x$ -aristas. Más aún, las aristas añadidas no contienen aristas de ciclos de Scharlemann ni de ciclos 2-esquinados de  $\Gamma_E$ . Observemos que una  $xx$ -arista puede aparecer en la frontera de la gráfica.

Afirmación:  $\Gamma_E$  contiene un 1,2-ciclo de Scharlemann, así entonces  $\Gamma_D$ .

Demostración.

Supongamos que  $\Gamma_E$  no contiene 1,2-ciclos de Scharlemann y por tanto no contiene aristas diagonales.

En  $\Gamma_E$  al menos  $q + 1$  aristas son incidentes a  $v$ . Si  $q$  es par, más de  $\frac{q}{2}$  aristas paralelas son incidentes a  $v$  y si  $q$  es impar, dos familias de  $\frac{q+1}{2}$  aristas paralelas son incidentes a  $v$ . Aplicando el sublema 2 del lema 6.2,  $\Gamma_E$  contiene un ciclo de Scharlemann, lo cual es una contradicción.

□

Esto significa que  $\hat{Q}$  debe ser separante y  $q$  es par. La regla de paridad garantiza que cada arista de  $\Gamma_E$  conecta vértices con un índice par y el otro impar, por lo que no hay  $xx$ -aristas.

Cualquier 1, 2-arista de un ciclo de Scharlemann no pertenece a  $\partial\Gamma_E$ . Consideremos la cara  $E_1$  de  $\Gamma_E$  adyacente a la 1, 2-arista que no acota el ciclo de Scharlemann. Es posible que  $E_1$  contenga más de una 1, 2-arista de ciclos de Scharlemann. Sea  $\{a_k, a_k + 1\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  la numeración de las parejas consecutivas de las esquinas entre dos 1, 2-ciclos de Scharlemann cuando corren alrededor de la  $\partial E_1$  en el sentido de las manecillas del reloj. Notemos que  $a_1 = 2$  y  $a_n = q$ .

Supongamos por contradicción que  $\partial E_1$  no es un ciclo 2-esquinado. Como alguna  $a_k$  no es ni  $q$  ni 2, existen índices  $l$  y  $m$  tales que  $a_k = p$  ó  $a_k = 2$  cuando  $1 \leq k < l$  ó  $k = m$  y  $a_k \neq q, 2$  cuando  $l \leq k < m$ .

Consideremos las aristas de la clase de  $\{a_{k-1} + 1, a_k\}$ -aristas para  $l \leq k \leq m$ . Como no hay ciclos de Scharlemann alrededor de estas aristas, uno encuentra que  $x \leq a_k < a_{k-1} + 1 \leq x$  ó  $x \leq a_k \leq a_{k-1} < x$  y



así  $x \leq a_m \leq a_{m-1} \leq \dots \leq a_l \leq a_{l-1} < x$ . Esto es imposible dado que  $a_{l-1}, a_m = q$  ó 2 y todas las  $a'_k$ s son pares por la regla de paridad. Así  $\partial E_1$  es un ciclo 2-esquinado. Sea  $C$  la unión de todos los ciclos de Scharlemann y todos los ciclos 2-esquinados adyacentes a cada 1, 2-arista de ciclos de Scharlemann. Después de cortar a lo largo de los vértices de corte, una componente conexa de  $C$  es entonces el acumulamiento en  $\Gamma_E$  y así en  $\Gamma_D$  lo cual concluye la prueba.

□

Sea  $\tilde{Q}$  la esfera pinchada obtenida de  $\hat{Q}$  quitando los vértices gordos 1 y 2. La familia de todas las 1, 2-aristas de un ciclo de Scharlemann en el acumulamiento  $C$  separa  $\tilde{Q}$  en discos, uno de los cuales contiene los vértices  $q$  y 3 de  $G_Q$  por la existencia de  $q$ , 3-aristas en  $C$ . Las dos 1, 2-aristas acotando tal disco se llaman *buenas aristas* de  $C$ . Así cada ciclo de Scharlemann en  $C$  tiene exactamente dos buenas aristas.

Sea  $\Lambda$  la gráfica dual maximal de  $C$  cuyos vértices son duales a ciclos de Scharlemann y ciclos 2-esquinados conteniendo buenas aristas y aristas duales a buenas aristas de  $C$  como las descritas en la figura 7.3.

Así en  $\Lambda$ , un vértice dual a un ciclo de Scharlemann tiene valencia 2 y un vértice dual a un ciclo 2-esquinado tiene como valencia el número de buenas aristas del ciclo 2-esquinado. Más aún,  $\Lambda$  es un bosque de acuerdo a la construcción de  $C$ . Esto implica que cada 1, 2-arista que no es buena arista de ciclos 2-esquinados relacionados a vértices de  $\Lambda$  contribuye en 1 al número de

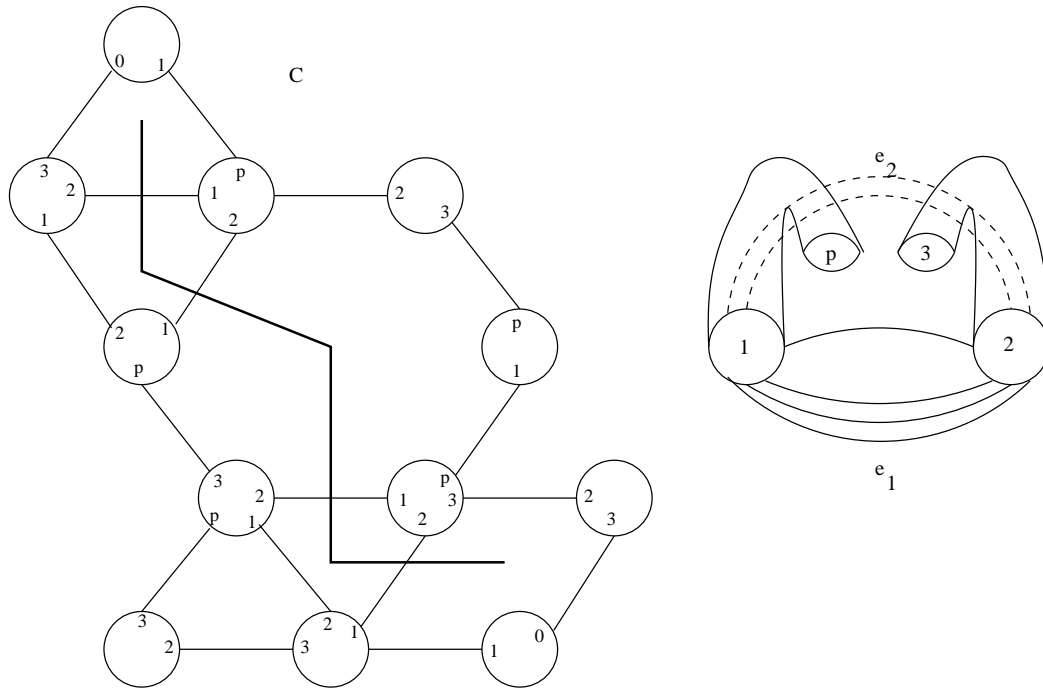


Figura 7.3: Un acumulamiento y una pareja propia.

componentes de  $\Lambda$ . Por lo que existe una componente  $\Lambda_g$  de  $\Lambda$  tal que todas las 1, 2-aristas de sus ciclos 2-esquinados son buenas aristas.

Consideremos la subgráfica  $C_g$  de  $C$  dual a  $\Lambda_g$ . Digamos que  $C_g$  contiene  $n$  ciclos de Scharlemann y así,  $2n$  buenas aristas y  $n + 1$  ciclos 2-esquinados. Un ciclo 2-esquinado dual a un vértice extremo del árbol  $\Lambda_g$  tiene sólo una buena arista. De entre estas aristas, escogemos  $e_1$  de las aristas más cercanas al vértice  $q$  (ó 3) entre ellas; es decir, no hay buenas aristas entre  $e_1$  y el vértice  $q$  en  $\tilde{Q}$ . Sea  $\sigma_g$  y  $\sigma_1$  el ciclo de Scharlemann y ciclo 2-esquinado adyacente a  $e_1$ , respectivamente. Entonces  $\sigma_g$  tiene otra buena arista  $e_2$ , además  $e_1$  y  $e_2$

acotan un disco  $D_g$  conteniendo los vértices  $q$  y  $3$  en  $\tilde{Q}$ . Notemos que todos los ciclos de Scharlemann son paralelos en un toro obtenido de  $\tilde{Q}$  pegando un anillo  $\partial V_{12}$ . Así, exactamente  $n - 1$  de  $2n$  buenas aristas no están contenidas en  $D_g$ . Por tanto, tenemos otro ciclo 2-esquinado  $\sigma_2$  cuyas 1, 2-aristas están en  $D_g$ . Por lo que todas las aristas de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  ( $q$ , 1-aristas, 1, 2-aristas, 2, 3-aristas y  $q$ , 3-aristas) están en  $D_g$ . Más aún si  $\sigma_2$  tiene solo una buena arista, entonces las dos buenas aristas de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  están en diferentes lados de los vértices  $q$  y  $3$  en  $D_g$ . Tales  $\sigma_1, \sigma_2$  son llamadas una *pareja propia*. Por tanto hemos probado:

**Lema 7.2** *Existe una pareja propia de ciclos 2-esquinados en  $C$ .*

□

# Capítulo 8

## Parejas propias

### 8.1. Para pendientes reductoras.

En esta sección probaremos que si el número de intersecciones entre la superficie  $Q$  y el corazón del llenado de Dehn es mayor a 2, entonces la gráfica  $G_P$  no puede contener un acumulamiento.

Recordemos que  $Q$  es una esfera reductora que fué escogida para minimizar  $|Q \cap K_r|$  donde  $K_r$  es el corazón del  $r$ -llenado de Dehn de  $M$ . Por el resultado anterior, existe una pareja propia de caras  $F_1, F_2$  en algún acumulamiento  $C$  dentro de la gráfica  $G_P$ .

Supongamos que  $F_1$  es una cara exterior en el acumulamiento  $C$ . Como  $F_1$  es una cara exterior, es adyacente a un 1, 2-ciclo de Scharlemann  $\Sigma_1$ . Sea  $S_1$

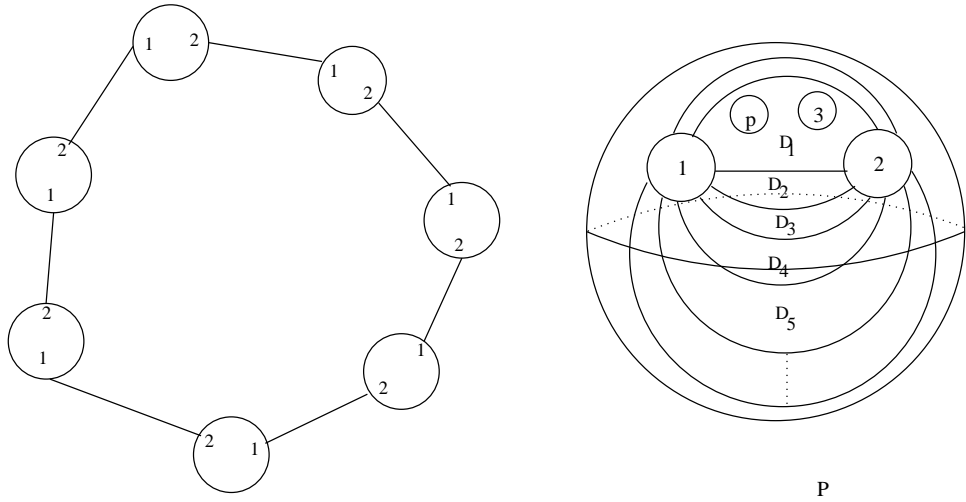


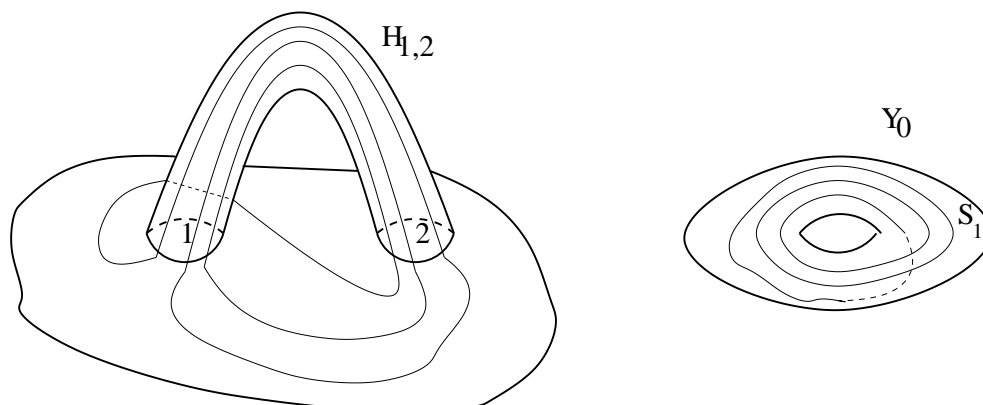
Figura 8.1: Ciclo de Scharlemann en la esfera  $Q$ .

la cara del ciclo de Scharlemann acotada por  $\Sigma_1$ . Consideremos la subgráfica de  $G_Q$  generada por los vértices 1 y 2 a lo largo de las aristas de  $G_Q$  que corresponden a aristas de  $\Sigma_1$ . Esta subgráfica subdivide  $Q$  en  $n$  discos cara  $\{D_i\}_{i=1}^n$ . Como  $F_1$  contiene una  $q$ , 3-arista, los vértices  $q$  y 3 están en un disco cara común. Numeremos los discos de tal forma que  $D_1$  contiene los vértices  $q$  y 3.

**Lema 8.1**  $|D_j \cap K_r| \leq \sum_{i=1}^{j-1} |D_i \cap K_r| + \sum_{i=j+1}^n |D_i \cap K_r|$  para toda  $1 \leq j \leq n$ .

*Demostración.*

Supongamos que  $|D_j \cap K'| > \sum_{i \neq j} |D_i \cap K'|$  para alguna  $1 \leq j \leq n$ . En  $k(r)$  la esfera  $\hat{Q}$  corta  $N(K')$  en  $q$  1-asas  $H_{1,2}, H_{2,3}, \dots, H_{q,1}$  donde cada  $H_{i,j}$  está pegada a  $\hat{Q}$  en los vértices  $i$  y  $j$ . Sea  $Y_0 = N((\hat{Q} \setminus D_1) \cup H_{1,2})$ . Veamos que  $Y_0$  es homeomorfo a un toro sólido.

Figura 8.2:  $H_{1,2}$ 

Más aún, la curva  $S_1 \cap \partial Y_0$  es una  $(l, n)$ -curva no trivial en  $\partial Y_0$  para algún entero  $l$ . Sea  $Y = Y_0 \cup N(S_1)$  que es un espacio lente pinchado con frontera una esfera esencial  $Q' = \partial Y$  (si fuera frontera de una bola, el espacio total sería un espacio lente, que es irreducible, contradiciendo la hipótesis).

Además,  $|Q' \cap K'| = 2 \sum_{i \neq j} |D_i \cap K'| + 2 < \sum_{i=1}^n |D_i \cap K'| + 2 = |\hat{Q} \cap K_r|$ .

Lo cual es una contradicción al hecho de que  $\hat{Q}$  es una esfera esencial minimal.

□

**Teorema 8.2** Sean  $q = |\hat{Q} \cap K'|$  y  $p = |\hat{P} \cap K_r|$ . Si  $q > 2$ , entonces  $G_P$  no contiene un acumulamiento.

Demostración.

Supongamos que existe un acumulamiento  $C$  y sean  $F_1$  y  $F_2$  una pareja propia en el acumulamiento.

Definimos las 1-asas  $H_{i,j}$  como en la prueba del lema anterior (8.1). Sea  $X_Q = N(\hat{Q} \cup H_{p,1} \cup H_{2,3})$ . Notemos que  $X_Q$  es un cubo con asas pinchado de género dos. Las dos componentes frontera de  $X_Q$  están separadas en  $M(r)$  por  $\hat{Q}$ . La componente interna (esfera) es homeomorfa a  $\hat{Q}$  y no es de nuestro interés. La componente externa de  $X_Q$  (superficie de género dos) es la más importante en nuestra prueba.

Sea  $X_D = N(D_1 \cup H_{p,1} \cup H_{2,3})$ . Observemos que  $X_D$  es un cubo con asas de género dos. Además,  $\partial X_D \cap \partial X_Q = S' \cup D'$ , donde  $S'$  es una superficie pinchada de género dos y  $D'$  es homeomorfa a  $D_1 \cup$  (vértices 1 y 2). Como  $S'$  no contiene los vértices  $q$  y 3 y  $D'$  contiene los vértices 1 y 2, tenemos que:

$$|S' \cap K_r| = |D_1 \cap K_r| - 2 \quad (8.1)$$

$$|D' \cap K_r| = |D_1 \cap K_r| + 2 \quad (8.2)$$

Sea  $E$  el conjunto de aristas en  $\partial F_1 \cup \partial F_2$ . Veamos que  $E$  consta de 1, 2-aristas,  $q$ , 3-aristas, 2, 3-aristas y  $q$ , 1-aristas. Por ser pareja propia, todas las aristas de  $E$  están en el disco  $D_1$ .

Sea  $r$  un lazo que parte del vértice  $p$ , recorre la 1-asa  $H_{p,1}$  y regresa a  $p$  vía una trayectoria en  $D_1$ . De la misma forma, sea  $\beta$  un lazo que parte del vértice 2, recorre la asa  $H_{2,3}$  y regresa al vértice 2 vía una trayectoria en  $D_1$ .

Entonces  $[r]$  y  $[\beta]$  forman una base para  $H_1(X_D)$  y para  $H_1(X_Q)$ . Claramente,  $H_1(X_D) \cong H_1(X_Q) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ . Definimos las curvas  $\omega_1 = F_1 \cap \partial X_Q = F_1 \cap \partial X_D$  y  $\omega_2 = F_2 \cap \partial X_Q = F_2 \cap \partial X_D$ , (de hecho,  $\omega_1, \omega_2 \subset S'$ ). Podemos escribir  $[\omega_i] = \mu_i[r] + \eta_i[\beta] \in H_1(X_Q)$  (al igual que en  $H_1(X_D)$ ), donde  $\mu_i$  es el número de  $(p, 1)$ -esquinas y  $\eta_i$  el número de 2, 3-esquinas en  $\partial F_i$ .

Sea  $X'_Q = X_Q \cup N(F_1)$  y  $X'_D = X_D \cup N(F_1)$ . Como  $F_1$  es una cara 2-esquinada, las esquinas de  $F_1$  consisten de  $m_1$   $(p, 1)$ -esquinas seguidas de  $n_1$   $(2, 3)$ -esquinas, donde  $m_1 \geq 1$  ó  $n_1 \geq 1$ . Así que  $[\omega_1] = m_1[r] + n_1[\beta]$  es no trivial en  $H_1(X_Q)$  y  $H_1(X_D)$ . Esto implica que  $\omega_1$  es una curva que no separa  $\partial X_D$ . Entonces  $\partial X'_D$  es homeomorfo a un toro. De la misma forma, la componente externa de  $\partial X'_Q$  es homeomorfa a un toro.

Ahora sea  $X''_D = X'_D \cup N(F_2)$  y  $X''_Q = X'_Q \cup N(F_2)$ . Dado que  $\partial X'_D$  es un toro, entonces  $\partial X''_D$  es una esfera ó la unión disjunta de un toro y una esfera. De la misma forma, la componente externa de  $\partial X''_Q$  es una esfera ó la unión disjunta de un toro y una esfera. Los últimos dos casos ocurren sólo cuando  $\omega_1$  y  $\omega_2$  acotan un anillo en  $\partial X_D$  y  $\partial X_Q$ . Puede verse que  $\partial X''_Q$  tiene una componente toro sí y sólo sí  $\partial X''_D$  tiene una componente toro.

### Caso 1:

Supongamos que  $\partial X''_D$  es una esfera  $Q_D$ . Entonces la componente externa de  $\partial X''_Q$  es una esfera  $Q_Q$ . Si  $X''_D$  no es una bola, entonces  $Q_D$  es una esfera esencial. Aplicando el lema anterior y las ecuaciones 8.1 y 8.2 obtenemos:



$$|Q_D \cap K_r| = |S' \cap K_r| + |D' \cap K_r| = 2|D_1 \cap K_r| \leq \sum_{i=1}^n |D_i \cap K_r| = |\hat{Q} \cap K_r| - 2 < |\hat{Q} \cap K_r| \quad (8.3)$$

Por lo que  $Q_D$  es una esfera que interseca  $K_r$  menos veces que  $\hat{Q}$ . Pero esto contradice la minimalidad de  $\hat{Q}$ . Si  $X_D''$  es una bola, entonces  $X_Q''$  es una bola pinchada, es decir,  $X_Q'' \cong S^2 \times I$ . Así  $Q_Q$  es isotópica a  $\hat{Q}$  en  $M(r)$ , por lo que  $Q_Q$  es una esfera reductora. Aplicando la ecuación 8.1 obtenemos:

$$|Q_Q \cap K_r| = |S' \cap K_r| + \sum_{i=2}^n |D_i \cap K_r| = |\hat{Q} \cap K_r| - 4 < |\hat{Q} \cap K_r| \quad (8.4)$$

Así,  $Q_Q$  es una esfera reductora que interseca  $K_r$  menos veces que  $Q$ , lo cual contradice la minimalidad de  $|Q \cap K_r|$ .

Caso 2:

Supongamos que  $\partial X_D''$  es la unión disjunta  $Q_D \sqcup T_D$  de una esfera y un toro. Entonces las componentes externas de  $\partial X_Q''$  forman la unión disjunta  $Q_Q \sqcup T_Q$  de una esfera y un toro. Recordemos que este caso ocurre cuando  $\omega_1$  y  $\omega_2$  acotan un anillo en  $\partial X_D$  y  $\partial X_Q$ . Esto es posible solo cuando  $F_2$  es una cara exterior 2-esquinada con el mismo número de  $(q, 1)$ -esquinas y  $(2, 3)$ -esquinas que  $F_1$ . Por la elección de  $F_1$  y  $F_2$ , el anillo en  $X_D$  acotado por  $\omega_1$  y  $\omega_2$  contiene el disco  $D'$ . Así  $Q_D$ , la componente esfera de  $\partial X_D$  contiene el disco  $D'$ . Similarmente  $Q_Q$ , la componente esfera externa de  $\partial X_Q$  contiene el empujamiento de  $\cup_{i>1} D_i$ . Más aún, las componentes toro  $T_D$  y  $T_Q$  coinciden en  $M(r)$ .

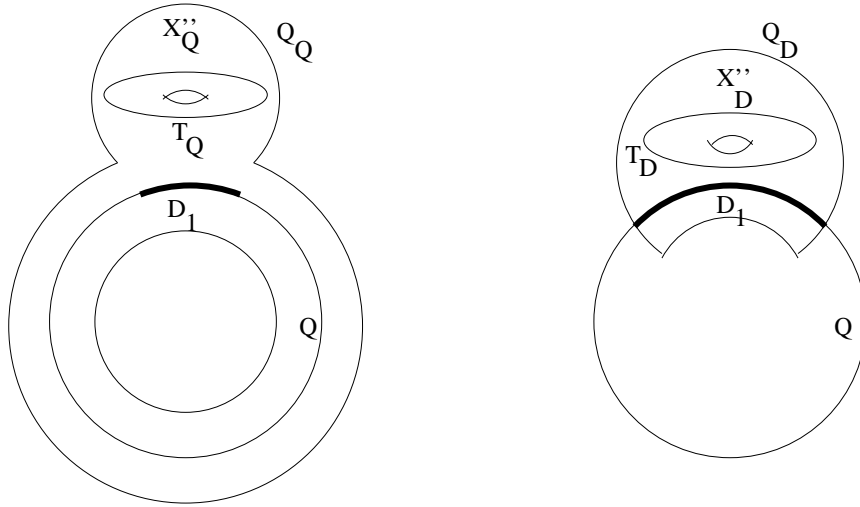


Figura 8.3: Esquema para  $\partial X_P$  y  $\partial X_Q$ .

Sea  $Y$  la componente de  $M(r) \setminus \text{int}(X''_D)$  con frontera  $T_D$  y sea  $\hat{X}''_D = X''_D \cup Y$  y  $\hat{X}''_Q = X''_Q \cup Y$ .

Si  $\hat{X}''_D$  no es una bola, entonces  $Q_D$  debe ser una esfera reductora. Aplicando el lema anterior obtenemos 8.3, lo cual contradice la minimalidad de  $|\hat{Q} \cap K_r|$ . Si  $\hat{X}''_D$  es una bola, entonces  $\hat{X}''_Q \cong S^2 \times I$ . Así  $Q_Q$  es isotópico en  $M(r)$  a  $\hat{Q}$ , entonces  $Q_Q$  es una esfera reductora. Obtenemos 8.4 que contradice la minimalidad de  $|\hat{Q} \cap K_r|$ .

Por tanto,  $G_P$  no contiene un acumulamiento.

□

## 8.2. Para pendientes proyectivas

Sea  $k$  un nudo en  $S^3$  y  $N(k)$  una vecindad tubular de  $k$ . Sea  $X = S^3 \setminus N(k)$  el exterior de  $k$  y  $\gamma$  una pendiente meridiano en  $\partial X$ . Supongamos que existe una pendiente  $\beta$  en  $\partial X$  tal que  $E(k)(\beta)$  contiene un plano proyectivo encajado. Sea  $K_\beta$  el corazón del llenado de Dehn  $E(k)(\beta)$ . Escogemos un plano proyectivo encajado  $\hat{R} \subset E(k)(\beta)$  tal que  $\hat{R}$  intersekte el nudo  $K_\beta$  de manera transversal y minimalmente. Comenzamos dando a  $k$  una presentación delgada.

**Teorema 8.3** *Supongamos que  $\hat{R}$  es un plano proyectivo en  $E(k)(\beta)$  (con  $R = \hat{R} \cap X$ ) tal que  $\hat{R}$  intersekte el nudo  $K_\beta$  transversal y minimalmente. Entonces existe una esfera  $\hat{P}$  en  $S^3$  (con  $P = \hat{P} \cap X$ ) tal que:*

1.  $\partial R \subset \partial X$  (respectivamente  $\partial P \subset \partial X$ ) consiste de copias paralelas a  $\beta$  (respectivamente  $\gamma$ ).
2.  $R$  y  $P$  se intersektan transversalmente.
3. Ningún arco de  $R \cap P$  es frontera paralelo a  $R$  ó a  $P$ .
4. Cada componente de  $\partial R$  intersekte cada componente de  $\partial P$  exactamente una vez.

Demostración.

Como  $\hat{R}$  fué escogido para minimizar  $|\hat{R} \cap K_\beta|$ ,  $R$  tiene frontera incompresible en  $X$ . Una esfera  $\hat{P}$  que satisface las primeras tres condiciones la encontramos dando a  $k$  una presentación delgada y aplicando el lema 4,4 de [6] a  $R$ . Ahora, como  $P$  interseca a  $R$  transversalmente, es posible escoger un  $I$ -haz vecindad  $N$  de  $\hat{R}$  en  $E(k)(\beta)$  tal que:

- $K_\beta \cap N$  es una colección de  $I$ -fibras disjuntas.
- Cada componente de  $N(K_\beta) \cap N$  es un sub- $I$ -haz de  $N$ .
- Cada componente de  $P \cap N$  es un sub- $I$ -haz de  $N$ .

Sea  $\hat{Q} = \partial N \subset E(k)(\beta)$  y sea  $Q = \hat{Q} \cap X \subset X$ . Entonces  $P$  interseca transversalmente a  $Q$  y  $\partial Q \subset \partial X$  consiste de copias paralelas a  $\beta$ . Si  $E(k)(\beta)$  es una variedad reducible, entonces  $\hat{Q}$  es una esfera reductora. Así, aplicando el resultado de Gordon y Luecke ([12]) a  $Q$  y  $P$ , obtenemos que  $\Delta(\gamma, \beta) = 1$  y la cuarta condición se cumple. De otra forma, el grupo  $\Pi_1(E(k)(\beta))$  es cíclico y aplicando el teorema de cirugía cíclica ([10]) a  $E(k)(\gamma)$  y  $E(k)(\beta)$  obtenemos  $\Delta(\gamma, \beta) = 1$  y obtenemos la cuarta condición.

□

Sea  $M$  una 3-variedad compacta, orientable, irreducible y con frontera un toro  $T$ . Sea  $\beta$  una pendiente en  $T$  tal que  $M(\beta)$  contiene un plano proyectivo  $R$  y supongamos que existe una superficie  $P$  en  $M$  con pendiente distinta a  $\beta$ ,  $P$  es incompresible, excepto en el caso de  $M = S^3$ , donde  $P$  es una esfera de nivel. Si  $P$  es incompresible entonces la intersección entre  $P$  y  $R$  consiste de arcos y círculos esenciales en ambas superficies. Sea  $N$  un  $I$ -haz vecindad

de  $R$  en  $M(\beta)$  y  $\hat{Q} = \partial N$ .

La esfera  $\hat{Q}$  juega el mismo papel que la esfera reductora en la sección anterior. Las intersecciones de  $P$  y  $Q$  en  $M$  dan origen a una pareja de gráficas  $G_P \subset \hat{P}$  y  $G_Q \subset \hat{Q}$ . En este caso también consideramos una segunda pareja de gráficas  $G_R \subset \hat{R}$  y  $G'_P \subset \hat{P}$  las cuales provienen de las intersecciones de las superficies  $R$  y  $P$  en  $M$ . Notemos que la tercer condición de la proposición anterior en el caso  $M = S^3$  implica que no hay lazos simples en las gráficas  $G_R$  ó  $G'_P$ . Como  $G_Q$  es una doble cubierta de  $G_R$ , no hay lazos simples en  $G_Q$ . La relación entre  $G_P$  y  $G'_P$  es un poco más inusual. Veamos que ambas gráficas están contenidas en  $P$ . Cada cara de  $G_P$  contenida en  $N$  es un sub- $I$ -haz y por tanto un bígono. Más aún, cada arista de  $G'_P$  coincide con el centro de tal bígono. Así, un lazo simple en  $G_P$  implicaría la existencia de un lazo simple en  $G'_P$  lo cual no es posible.

Sean  $p = |P \cap K_\beta|$ ,  $q = |Q \cap K_\beta|$  y los vértices gordos  $1, 2, 3, \dots, p$  en  $G_P$  (respectivamente  $1, 2, 3, \dots, q$  en  $G_Q$ ). Como antes, suponemos que los vértices positivos (respectivamente negativos) tienen índices pares (respectivamente impares) en ambas gráficas. Además numeremos los vértices gordos de  $G_Q$  de tal forma que el arco  $\overline{12}$  de  $K_\beta$  que va del vértice 1 al vértice 2 está en  $N$ . Así, los arcos  $\overline{34}, \overline{56}, \dots, \overline{(q-1)q}$  de  $K_\beta$  también están en  $N$  y los arcos  $\overline{23}, \overline{45}, \dots, \overline{(q-2)(q-1)}$  de  $K_\beta$  están en  $M(\beta) \setminus \text{int}(N)$ . Los vértices gordos de  $G_R$  intersectan los puntos medios de los arcos  $\overline{12}, \overline{34}, \dots, \overline{(q-1)q}$ . Así que sea  $i'$  el índice del vértice gordo de  $G_R$  que intersecta el punto medio del arco  $\overline{i(i+1)}$ . Así los vértices gordos de  $G_R$  tendrán índices  $1', 3', \dots, (q-1)'$ .

**Lema 8.4** *Si  $|\hat{R} \cap K_\beta| > 1$  entonces no puede haber un ciclo de Scharlemann en  $G_P$  que acote una cara contenida en  $M(\beta) \setminus \text{int}(N)$ .*

*Demostración.*

Supongamos que existe un  $x, (x + 1)$ -ciclo de Scharlemann de orden  $n$  en  $G_P$  el cual acota una cara  $F$  contenida en  $M(\beta) \setminus \text{int}N$ . Las  $n$  aristas del ciclo de Scharlemann a lo largo de los vértices  $x$  y  $x + 1$  subdividen  $\hat{Q}$  en  $n$  discos  $\{D_i\}_{i=1}^n$ . Por la descripción de  $G'_P$ , existe un  $(x - 1)'(x + 1)'$ -ciclo de Scharlemann en  $G'_P$  el cual acota una cara  $F'$  conteniendo  $F$ . Como  $|\hat{R} \cap K_\beta| > 1$  sabemos que  $(x - 1)' \neq (x + 1)'$ . Las  $n$  aristas del ciclo de Scharlemann a lo largo de los vértices  $(x - 1)'$  y  $(x + 1)'$  subdividen  $\hat{R}$  en  $n - 1$  discos y una banda de Möbius. Recordemos que  $\hat{Q}$  es una doble cubierta de  $\hat{R}$  vía el  $I$ -haz  $N$ . Sea  $D \in \{D_i\}_{i=1}^n$  el disco que no cubre un disco en  $\hat{R}$ . En  $M(\beta)$ , la esfera  $\hat{Q}$  corta el llenado  $N(K_\beta) \cong D^2 \times S^1$  en  $q$  1-asas  $H_{1,2}, H_{2,3}, \dots, H_{q,1}$  donde  $H_{i,j}$  interseca  $\hat{Q}$  en los vértices gordos  $i$  y  $j$ . Sea  $Y = N(H_{x,x+1} \cup F \cup (Q \setminus \text{int}D))$  y sea  $Q' = \partial Y$ . Observemos que  $Y$  es un espacio lente pinchado y en particular,  $Q'$  es una esfera. Sea  $D' = Q' \cap (M(\beta) \setminus \text{int}N)$ . Usemos la estructura producto de  $N(R)$  para extender  $\partial D'$  a  $\hat{R}$  a lo largo de un anillo  $A \cong \partial D' \times I$ . Veamos que  $A \cap \hat{R}$  acota una banda de Möbius  $B$  en  $\hat{R}$ . Finalmente sea  $R' = B \cup A \cup D'$ . Notemos que  $|R' \cap K_\beta| = |\hat{R} \cap K_\beta| - 2 < |\hat{R} \cap K_\beta|$  lo cual contradice la minimalidad de  $\hat{R}$ .

□

**Lema 8.5** *Si en  $G_P$ ,  $\Sigma_1$  es un  $x_1, x_2$ -ciclo de Scharlemann de orden  $m$  y  $\Sigma_2$  es un  $y_1, y_2$ -ciclo de Scharlemann de orden  $n$ , entonces  $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$  y*

$m = n = 2$ .

**Demostración.**

Sean  $F_1$  y  $F_2$  las caras de los ciclos de Scharlemann  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , respectivamente.  $F_1$  y  $F_2$  están contenidas en  $N$  por el lema anterior. Recordemos que cada cara de  $G_P$  que está en  $N$  es un bígono. Por lo que,  $m = n = 2$ . Ahora consideremos la cara  $F_1$  en  $N$ . En particular veamos que  $F_1 \cap R$  consiste de una sola arista  $e_1$  en  $G_R$  con ambos extremos en el vértice  $x'$ . Más aún,  $e_1 \cup x'$  se retracta a una curva cerrada simple  $\gamma_1$  que es esencial en  $\hat{R}$ . Similarmente,  $F_2 \cap R$  consiste de una sola arista  $e_2$  en  $G_R$  con ambos extremos en el vértice  $y'$ .  $e_2 \cup y'$  se retracta a una curva cerrada simple  $\gamma_2$  la cual es esencial en  $\hat{R}$ . Como las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son esenciales en un plano proyectivo, deben intersectarse. Pero como  $e_1$  y  $e_2$  no se intersectan, entonces  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  deben intersectarse en los vértices  $x'$  y  $y'$ . Entonces  $x' = y'$  y  $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$ .

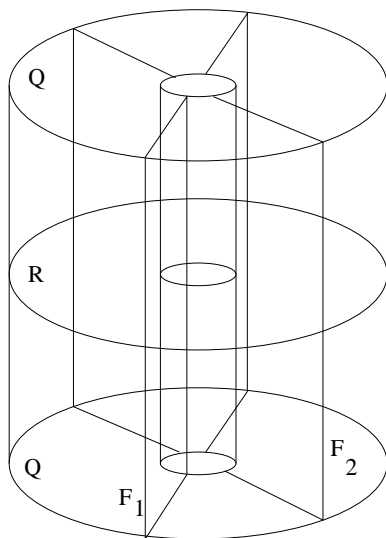
□

Por el lema anterior podemos suponer que todos los ciclos de Scharlemann en  $G_P$  son 1, 2-ciclos. Por tanto, los resultados de las secciones anteriores se siguen.

**Teorema 8.6** *Si  $|\hat{R} \cap K_\beta| > 1$ , entonces  $G_P$  no contiene un acumulamiento.*

**Demostración.**

Supongamos que existe un acumulamiento  $C$  en  $G_P$ , entonces existe una pareja propia de caras  $F_1$  y  $F_2$  en  $G_P$ . Sea  $\Sigma_1$  el 1, 2-ciclo de Scharlemann adyacente a la cara exterior  $F_1$ . Como  $\Sigma_1$  es de orden 2, la gráfica  $G_Q(\Sigma_1)$  ( la gráfica  $G_Q$  restringida al ciclo  $\Sigma_1$ ) divide  $\hat{Q}$  en dos discos  $D_1$  y  $D_2$ .

Figura 8.4: Ciclos de Scharlemann en  $N$ .

Supongamos que  $D_1$  contiene los vértices gordos  $q$  y  $3$ . Sea  $Q_Q$  la esfera que es componente externa de  $\partial(X_Q'')$  (definido como en la sección anterior). Sea  $D_2'$  la porción de disco de  $Q_Q$  la cual es un empujamiento del disco  $D_2$  en  $\hat{Q}$ . Sea ahora  $D = Q_Q \setminus \text{int}(D_2')$  el disco complementario en  $Q_Q$  (figura 8.5).

Utilizamos la estructura producto de  $N(R)$  para extender  $\partial D$  a  $\hat{R}$  a lo largo de un anillo  $A \cong \partial D \times I$ . Veamos que la componente frontera de  $A$  que está en  $\hat{R}$  acota una banda de Möbius  $B$  la cual contiene el vértice  $1'$  (figura 8.6). Así, haciendo  $R' = D \cup A \cup B$  definimos un nuevo plano proyectivo en  $E(k)(\beta)$ . Más aún,  $|A \cap K_\beta| = 0$ ,  $|B \cap K_\beta| = 1$  y  $|D \cap K_\beta| \leq |D_1 \cap K_\beta| - 2$ , lo cual implica que  $|R' \cap K_\beta| = |D \cap K_\beta| + |A \cap K_\beta| + |B \cap K_\beta| \leq |D_1 \cap K_\beta| - 1 < |\hat{R} \cap K_\beta|$ , lo cual contradice la minimalidad de  $|\hat{R} \cap K_\beta|$ .

□



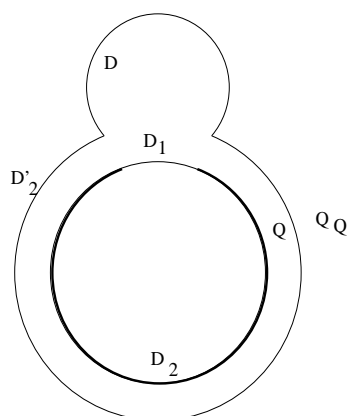


Figura 8.5: Esquema de  $D$  en  $Q_Q$ .

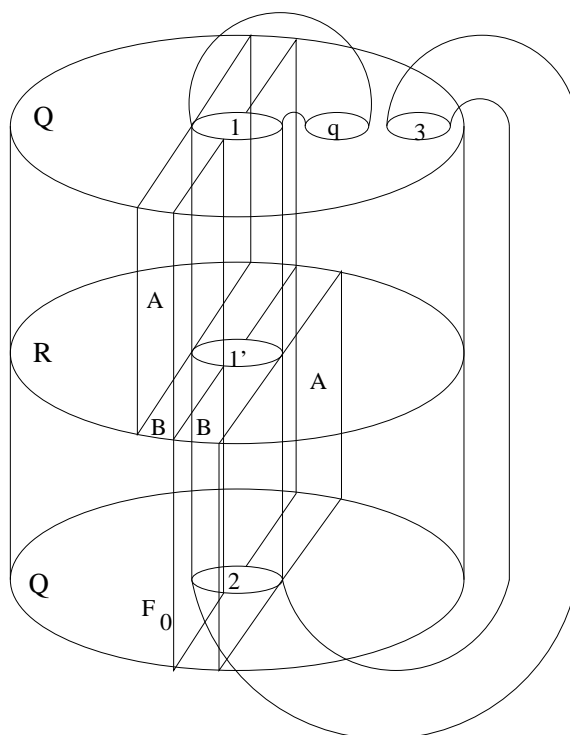


Figura 8.6: El anillo  $A$  y la banda de Möbius  $B$  en  $N(R)$ .

## Capítulo 9

# Pendientes reductoras y proyectivas

En este capítulo se encuentra el resultado principal de este trabajo y en él aplicaremos los resultados obtenidos en cada una de las secciones anteriores. El resultado da una cota para el número de intersecciones entre la pendiente longitudinal  $\gamma$  y la pendiente  $r$  en relación a si la pendiente  $r$  es reductora ó proyectiva.

Trabajaremos con una 3-variedad  $M$  irreducible y cuya frontera es un toro. Supongamos además que  $M$  no es un toro sólido. Recordemos que el género de la pendiente  $\gamma$  se define como el género mínimo de las superficies de las que es frontera. Demostraremos entonces:

**Teorema 9.1** *Sea  $\gamma$  una pendiente longitudinal en  $\partial M$  y  $g$  el género de  $\gamma$ .*

1. *Si existe una pendiente reductora  $r$ , entonces  $\Delta(\gamma, r) \leq 2g - 1$  ó  $q = 2$ , donde  $q$  es el mínimo número de intersección geométrica entre la esfera esencial de  $M(r)$  y el corazón del  $r$ -llenado de Dehn.*
2. *Si existe una pendiente proyectiva  $\beta$  la cual no es pendiente reductora, entonces  $\Delta(\beta, \gamma) \leq 2g - 1$ .*

**Demostración.**

Como  $\gamma$  es una pendiente longitudinal, sea  $P$  una superficie incompresible en  $M$ , propiamente encajada y cuya frontera es una sola curva de pendiente  $\gamma$  en  $T = \partial M$ . Sea  $g$  el género de  $P$ .

Prueba de (1): Supongamos que existe una pendiente reductora  $r$ . Sea  $k_r$  el corazón del  $r$ -llenado de Dehn y sea  $V_r$  el toro sólido pegado a  $M$  bajo el  $r$ -llenado de Dehn.

Sea  $Q$  una esfera esencial minimal en  $M(r)$  entre todas las esferas esenciales, es decir,  $Q$  está perforada un número mínimo de veces por  $k_r$  entre todas las esferas esenciales en  $M(r)$ . Sea  $q$  el número de intersecciones entre  $Q$  y  $k_r$ . Veamos que como  $M$  no contiene esferas esenciales, entonces  $q$  es positivo. Sea  $S = Q \cap M = Q \setminus \text{int}(V_r)$ .

Si  $q = 1$  entonces  $r$  sería frontera de un disco y como  $M$  es irreducible y  $\partial M$  es un toro compresible, esto implicaría que  $M$  es un toro sólido, lo cual no es posible. Por tanto, podemos suponer que  $q \geq 2$ .

Consideremos las gráficas de intersección  $(G_P, G_Q)$ .

Afirmación. Las gráficas  $G_P$  y  $G_Q$  no tienen lazos triviales.

Demostración.

Como  $P$  es incompresible y frontera incompresible, entonces  $G_Q$  no puede tener lazos triviales. Similarmente, como  $\hat{Q}$  es minimal y  $q > 2$ , entonces  $\hat{Q}$  es incompresible y frontera incompresible. Por tanto,  $G_P$  no tiene lazos triviales.

□

Sea  $x$  un índice de  $G_P$ . Veamos que  $G_Q$  sólo tiene un vértice. Como  $Q$  es orientable, cualquier arista no puede tener el mismo índice en ambos extremos (por la regla de paridad). Denotamos por  $\Gamma_x$  la subgráfica de  $G_P$  que consiste del único vértice de  $G_P$  y las aristas con un extremo indexado por  $x$ .

Afirmación. Si  $\Delta(\gamma, r) \geq 2g$  entonces  $\Gamma_x$  contiene un disco cara para todos los índices  $x$  de  $G_P$ .

Demostración.

La característica de Euler para  $\Gamma_x$  nos da  $\chi(P) = 2 - 2g = V - A + C$  donde  $V, A$  son los vértices y las aristas de  $\Gamma_x$ , respectivamente, y  $C = \sum_{\text{cara de } \Gamma_x} \chi(c)$ .

Como  $V = 1$  y  $A = \Delta(\gamma, r)$ , tenemos que  $C = 1 - 2g + \Delta(\gamma, r)$ . Por tanto, si  $\Delta(\gamma, r) \geq 2g$  entonces  $C \geq 1$ , lo cual significa que existe un disco cara.

□

Supongamos ahora por contradicción que  $\Delta(\gamma, r) \geq 2g$  y que  $q \geq 3$ . Sean  $L = \{1, 2, \dots, q\}$  el conjunto de índices de  $G_P$ , entonces para cada  $x \in L$ ,  $\Gamma_x$  contiene un disco cara. Entonces por el teorema 6.2,  $G_P$  contiene un ciclo de Scharlemann. Por el teorema 6.1, todos los ciclos de Scharlemann tienen los mismos índices. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\{1, 2\}$  son tales índices.

Consideremos la gráfica  $\Gamma_3$ . Sea  $D$  un disco cara de  $\Gamma_3$ . Como 3 no es índice de un ciclo de Scharlemann,  $D$  contiene una pareja propia por teorema 7.2, mientras que por el teorema 8.1 no puede existir tal pareja, lo cual nos lleva a la contradicción deseada.

Prueba de (2):

Sea  $\hat{S}$  un plano proyectivo en  $M(\beta)$  perforado un número mínimo de veces  $s$  por el corazón del llenado de Dehn. Si  $s = 1$ , entonces  $S = \hat{S} \cap M$  es una banda de Möbius por lo que tomando la vecindad  $N = N(S \cup T)$  vemos que  $\partial N$  es un toro y  $N$  es un espacio cable por lo que  $M$  sería cableada.

Por tanto  $M = M_1 \cup N$ , donde  $M_1$  es una 3-variedad. Entonces  $M(\beta) = M_1 \cup M_2$ , donde  $M_2$  es la suma conexa de un toro sólido pinchado con  $\mathbf{R}P^3$ , entonces  $\beta$  también es una pendiente reductora ó  $M$  es un toro sólido. Así podemos suponer que  $s \geq 2$ .

Ahora consideremos la esfera  $\hat{Q}$  que es el doble cubriente de  $\hat{S}$  en  $M(\beta)$ . De nuevo,  $q$  es el número de intersecciones entre  $\hat{Q}$  y el corazón del  $\beta$ -llenado

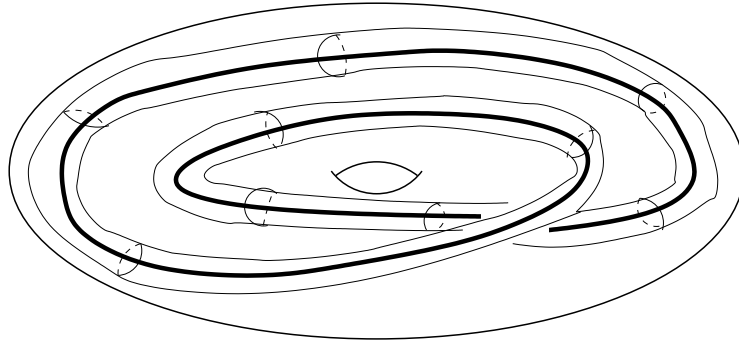


Figura 9.1:

de Dehn. Como  $\hat{Q}$  es la frontera de una vecindad regular delgada de  $\hat{S}$  tenemos que  $q = 2s > 2$ .

Primero consideremos las gráficas que vienen de las superficies  $S_\gamma$  y  $S$ . No pueden tener lazos triviales por la minimalidad de  $S$ . Por tanto las gráficas  $(G_{S_\gamma}, G_Q)$  de  $S_\gamma$  y  $Q$  tampoco pueden tener lazos triviales y repetimos el mismo argumento que en el caso (1) para obtener una contradicción aplicando el teorema 8.2.

□

**Corolario 9.2** *Si  $M$  es hiperbólica y  $\theta$  es una pendiente reductora o proyectiva, entonces  $\Delta(\gamma, \theta) \leq 2g - 1$ .*

**Demostración.**

Supongamos que  $\theta$  es una pendiente reductora. Recordemos que  $q$  es el mínimo de las intersecciones geométricas entre la esfera esencial en  $M(r)$  y el corazón del  $r$ -llenado de Dehn.

Si  $q = 2$  entonces  $M$  contiene un anillo esencial, por lo que  $M$  es Seifert fibrada o toroidal.

□

**Teorema 9.3** *Sea  $k$  un nudo no trivial en  $S^3$  y  $g$  su género.*

1. *Supongamos que existe una pendiente reductora  $r$  en  $\partial E(k)$ . Sea  $q$  el mínimo de las intersecciones geométricas entre las esferas esenciales en  $E(k)(r)$  y el corazón del  $r$ -llenado de Dehn. Si  $k$  no es un nudo cable entonces  $q \geq 6$  y  $|r| \leq 2g - 1$ .*
2. *Supongamos que existe una pendiente proyectiva  $p$  en  $\partial E(k)$  que no es una pendiente reductora, entonces  $|p| \leq 2g - 1$ .*

**Demostración:**

Sea  $P$  una superficie de Seifert de  $k$  incompresible en  $S^3$  y sea  $g$  su género. Entonces  $l = \partial \hat{P}$  donde  $l$  es la longitud preferente  $\frac{0}{1}$  en  $T_K = \partial E(k)$ .

(1): Supongamos que existe una pendiente reductora  $r$  en  $T_K$ . Sea  $K_r$  el corazón de la  $r$ -cirugía de Dehn y  $V_r$  el toro sólido pegado en la  $r$  cirugía de Dehn. Entonces  $E(k)(r)$  es la unión de  $E(k)$  y  $V(r)$  a lo largo de sus fronteras. Sea  $\hat{Q}$  la esfera esencial minimal en  $E(k)(r)$ . Por el teorema 2.1  $r$  debe ser entera, así el número de intersecciones geométricas entre las pendientes  $l$  y  $r$  es  $\Delta(l, r) = |r|$ .

Como  $E(k)$  no contiene una esfera esencial entonces  $q$  es positivo. Recordemos que las esferas esenciales en  $E(k)(r)$  son separantes. Además por [6],  $E(k)(0)$  es irreducible, así que  $r \neq 0$ .

Más aún,  $H_1(E(k)(r)) = \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$  entonces cualquier esfera en  $E(k)(r)$  es separante: Suponiendo que existe una esfera no separante  $S$ , tenemos que existe una curva cerrada  $\alpha$  que toca a  $S$  en un solo punto. Tomando una vecindad  $N(S \cup \alpha)$ , tenemos que  $\partial N(S \cup \alpha)$  es una esfera por lo que  $E(k)(r) = S^2 \times S^1 \# N_1$ , con  $N_1$  una 3-variedad, entonces  $H_1(E(k)(r)) = H_1(S^2 \times S^1) \oplus H_1(N_1) = \mathbf{Z} \oplus H_1(N_1)$ ; es decir  $H_1(E(k)(r))$  sería infinito, lo cual no es posible y por ello cualquier esfera en  $E(k)(r)$  es separante.

Consecuentemente  $q \geq 2$  debe ser un entero par.

Sea  $Q = \hat{Q} \cap E(k) = \hat{Q} \setminus \text{int}V_r$ . Por el teorema 9.1 obtenemos que si  $q \neq 2$  entonces  $|r| \leq 2g - 1$ .

Si  $q = 2$ , entonces  $Q$  es un anillo y  $E(k) = M_1 \cup_Q M_2$  donde  $M_1$  y  $M_2$  son 3-variedades con frontera un toro y pegadas por un anillo.

Si  $M_1$  y  $M_2$  son toros sólidos pegados por un anillo esencial entonces  $E(k)$  es fibrado de Seifert y  $k$  un nudo toroidal. En otro caso, tendríamos un toro incompresible y por tanto  $E(k)$  sería toroidal y  $k$  un nudo satélite. Pero estos nudos satisfacen la conjetura de los cables. Por tanto  $k$  es cable. Así que, podemos suponer que  $q \geq 4$ . Por tanto,  $|r| \leq 2g - 1$ .



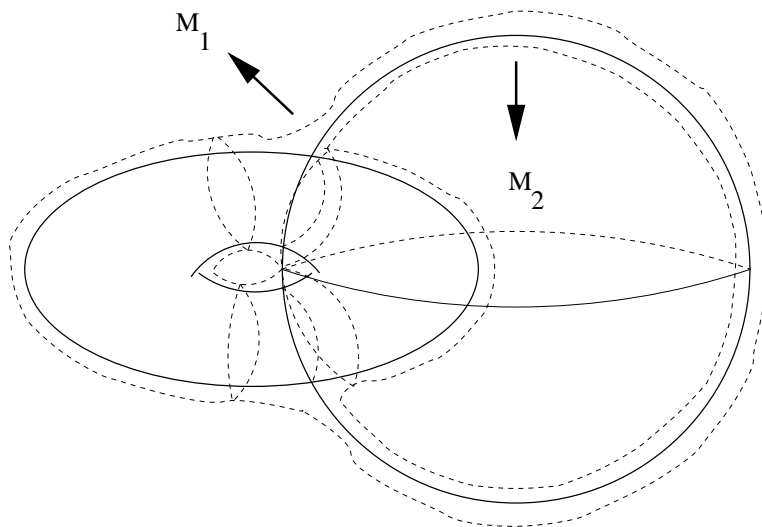


Figura 9.2: Caso  $q = 2$ .

Afirmación:  $q \neq 4$ .

Demostración.

Existe una esfera de nivel  $\hat{S}$  en  $S^3$  correspondiente a una posición delgada de  $k$  en  $S^3$  tal que:

1. Las componentes frontera de  $S = \hat{S} \cap E(k)$  tienen pendiente  $\infty$ .
2.  $S$  y  $Q$  se intersectan transversalmente y cada componente de  $\partial S$  intersecta cada componente de  $\partial Q$  exactamente en un punto.
3. Cada arco componente de  $S \cap Q$  es esencial en  $S$  y  $Q$ .

Consideremos la pareja de gráficas de intersección  $(G_Q, G_S)$  que provienen de la intersección de las superficies  $Q$  y  $S$  de forma usual.

Como ninguna arco componente de  $Q \cap S$  es frontera paralelo a  $S$  ó a  $Q$ , las gráficas  $G_S$  y  $G_Q$  no tienen lazos triviales.

Dado que todos los tipos implican torsión (ver sección 5.2) y  $S^3$  no tiene torsión, entonces  $G_Q$  no representa todos los tipos. Por tanto,  $G_S$  tiene un ciclo de Scharlemann  $\sigma$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\{1, 2\}$  son los índices de un ciclo de Scharlemann en  $G_S$ .

Supongamos ahora que  $q = 4$ . Sean  $\{3, 4\}$  los índices restantes de  $G_S$ . Sean  $V_i$  los vértices numerados por  $i$  en  $G_Q$ , para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Las aristas de  $\sigma$  con vértices  $v_1$  y  $v_2$  dividen  $\hat{Q}$  en discos distintos llamados bígonos.

Subafirmación: Los vértices  $v_3$  y  $v_4$  están en el mismo bígono.

Demostración.

Si  $v_3$  y  $v_4$  no estuvieran en el mismo bígono, llamemos  $B_i$  al bígono que contiene únicamente al vértice  $v_i$  para  $i = 3, 4$ . Como  $G_Q$  no contiene lazos triviales, no existe un lazo incidente a  $v_3$  ó a  $v_4$ . Por tanto, todos los índices de  $v_3$  (y  $v_4$ ) son incidentes a aristas que unen  $v_1$  ó  $v_2$ . Sea  $s$  el número de vértices de  $G_S$ . Por tanto,  $v_1$  y  $v_2$  son incidentes a más de  $4s$  aristas (ya que están también las aristas de  $\sigma$ ) lo cual no es posible.

Sea  $B$  el bígono que contiene a  $v_3$  y  $v_4$ . Sea  $B^* = \hat{S} \setminus \text{int}B$  entonces  $B^*$  contiene las aristas de  $\sigma$  y a  $v_1, v_2$ . Sea  $\tau$  la bola de  $V_r$  acotada por  $v_1$  y  $v_2$  la cual no contiene ni a  $v_3$  ni a  $v_4$ .

Consideremos ahora la vecindad regular  $W$  de  $B^* \cup J$ . Entonces  $W$  es un toro sólido perforado dos veces por  $k_r$ . Sea  $D$  un disco cara de  $G_S$  acotado por  $\sigma$ . Así, la vecindad regular  $N(W \cup D)$  es un espacio lente pinchado. Así que su frontera  $R = \partial N(W \cup D)$  es una esfera esencial, de otra forma  $E(k)(r)$  sería un espacio lente el cual es una 3-variedad irreducible. Consecuentemente  $\hat{Q}$  no es una esfera minimal, lo cual es una contradicción.

(2): Si  $p$  es una pendiente proyectiva y no reductora. Vemos al plano proyectivo como la suma conexas de una banda de Mobius y un disco, tomamos una vecindad de este espacio lo cual resulta ser  $\mathbf{RP}^3$  pinchado, por lo que  $E(k)(p) = \mathbf{RP}^3$ . Entonces  $k$  no es un nudo cable por el artículo [11]. Por tanto,  $|p| \leq 2g - 1$  por el teorema anterior.

□

**Corolario 9.4** *Los nudos de género uno satisfacen la conjetura de los cables y la conjetura  $\mathbf{RP}^3$ .*

*Demostración.*

Sea  $k$  un nudo de género uno, y sea  $r$  una pendiente reductora. Si  $k$  no es un nudo cable, entonces  $|r| = 0$  ó  $1$  por el teorema anterior. Pero  $E(k)(0)$  es irreducible por [6]. También  $E(k)(\pm 1)$  es una esfera homológica irreducible por [13]. Esto prueba la conjetura de los cables para nudos de género uno.

Si  $p$  es una pendiente proyectiva, que no es una pendiente reductora, entonces  $E(k)(p) = \mathbf{RP}^3$ . Como  $k$  no es un nudo toroidal ([25]), obtenemos que  $p$  es entera por el teorema de cirugía ciclica ([10]). Finalmente, el primer

grupo de homología de  $E(k)(p)$  es  $H_1(E(k)(p)) = \mathbf{Z}/p$ . Por lo que  $p = 2 = 2/1$ , el cual no satisface la desigualdad  $2 \leq 2g - 1$ .

□

# Capítulo 10

## Ejemplos

En esta sección, que está basada en el artículo [1], hacemos la construcción de una familia de ejemplos de 3-variedades que realizan la cota del teorema principal para el caso  $g = 2$ . Es decir, encontraremos una 3-variedad hiperbólica, con dos toros frontera incompresibles y una pendiente  $\gamma$  en el toro que acota una superficie de género dos. Sea  $r$  una pendiente reductora en el toro. Veremos que  $\Delta(\gamma, r) = 3$ .

### 10.1. Primer ejemplo

Sea  $S$  una esfera pinchada cuatro veces y  $F$  una superficie de género dos con una componente frontera. Sean  $Q_S$  y  $Q_F$  las gráficas que aparecen en las figuras 10.1 y 10.2.

Sea  $T$  un toro. Formamos el complejo  $X = T \cup S \cup F$  tal que  $T \cap S = \partial S$ ,

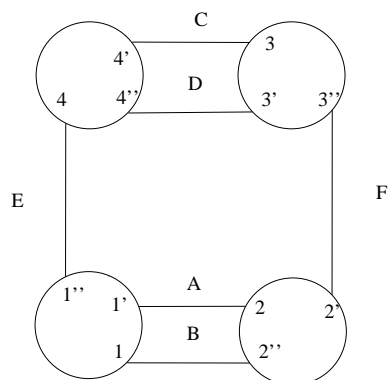


Figura 10.1: Gráfica  $Q_S$ .

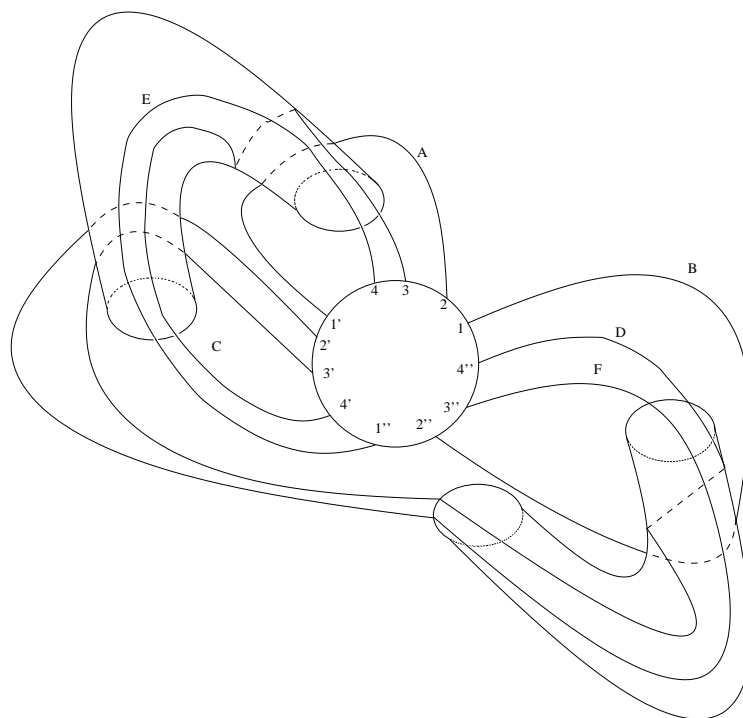


Figura 10.2: Gráfica  $Q_F$ .

$T \cap F = \partial F$  y  $S \cap F$  produce  $Q_S$  en  $S$  y  $Q_F$  en  $F$ . Entonces  $\Delta(\rho, \gamma) = 3$  donde  $\rho$  es una componente de  $\partial S$  y  $\gamma$  es  $\partial F$ . Sea  $N(X)$  una vecindad regular de  $X$ . La esfera pinchada  $S$  divide a  $T$  en cuatro anillos  $T_1, T_2, T_3, T_4$  y también divide a la superficie  $F$  en tres discos, (dos triángulos)  $D_1, D_2$  y (un hexágono)  $D_3$ .

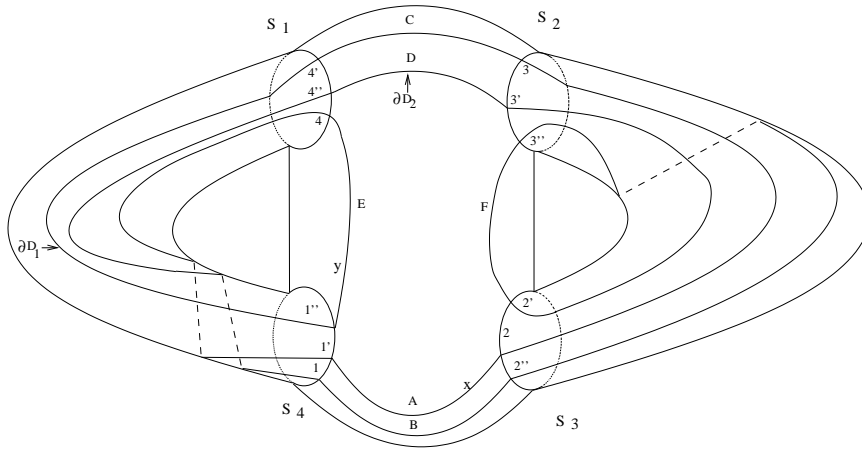


Figura 10.3: División de la superficie  $F$  por los discos  $D_1$  y  $D_2$

Entonces tenemos que  $N(X) = M_1 \cup M'_2$  donde  $M_1 = N(S \cup T_1 \cup T_3 \cup D_3)$  es un cuerpo de compresión y  $M'_2 = N(S \cup T_2 \cup T_4 \cup D_1 \cup D_2)$  es un cubo con asas pinchado. Se sigue entonces que  $\partial N(X) = T \cup T' \cup S'$ , donde  $T'$  es un nuevo toro viviendo en  $M_1$  y  $S'$  es una esfera en  $M'_2$ . Sea  $M = N(X) \cup \text{bola}$  pegada a lo largo de  $S'$ . Entonces  $M = M_1 \cup M_2$ , donde  $M_2 = M'_2 \cup B^3$ .

**Teorema 10.1** *La 3-variedad  $M$  es hiperbólica, las superficies  $S$  y  $F$  son incompresibles en  $M$ ,  $M(\rho)$  es reducible, la curva  $\gamma$  es una pendiente longi-*

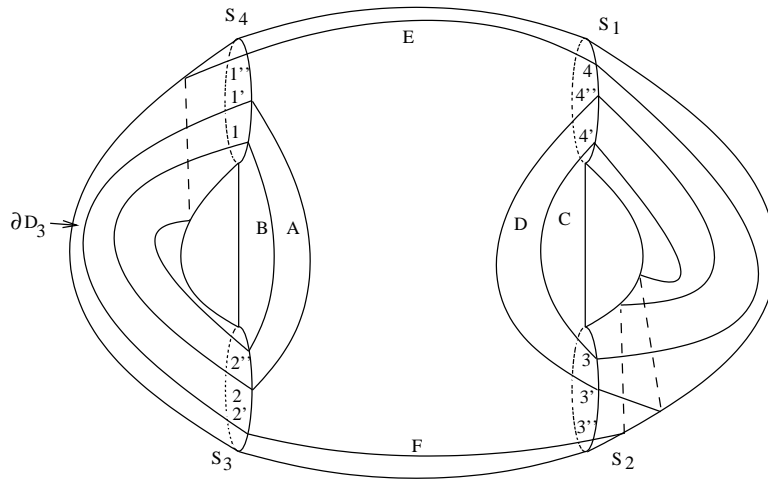


Figura 10.4: División de  $F$  por el disco  $D_3$ .

*tudinal* y  $\Delta(\rho, \gamma) = 3$ .

Este resultado se probará en una serie de lemas. Observe que si probamos la incompresibilidad de  $S$ , entonces obtendremos que  $M$  es irreducible ya que  $M_1$  y  $M_2$  son irreducibles y su unión es a lo largo de una esfera pinchada incompresible.

**Lema 10.2** *La esfera pinchada  $S$  es incompresible en  $M_1$  y  $M_2$ .*

**Demostración.**

Probemos primero que  $S$  es incompresible en  $M_2$ . Supongamos que existe un disco de compresión  $D$ . Analicemos las intersecciones del disco de compresión con los discos  $D_1$  y  $D_2$ . En el disco  $D$  tenemos curvas cerradas y arcos. Las curvas cerradas pueden eliminarse de forma usual, empezando con la de más adentro. Entonces tenemos solamente arcos como los mostrados en la figura 10.5.



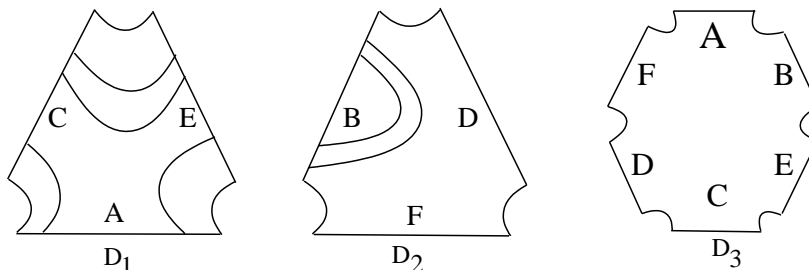


Figura 10.5: tipos de arcos en los discos  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$

Los arcos con extremos en la misma arista, como la que se muestra en la cara  $D_2$  pueden eliminarse cortando el disco  $D$  con el disco dado por el arco de más afuera en  $D_2$ , obteniendo dos discos, donde al menos uno de ellos será un disco de compresión. Por lo que tenemos solo arcos con extremos en diferentes aristas, como se muestra en la cara  $D_1$ . Sea  $\alpha$  un arco de más afuera en  $D$  y  $a$  el arco en  $\partial D$  con  $\partial a = \partial \alpha$ . Sea  $N$  una vecindad regular de  $\partial D_1$  en la esfera pinchada  $S$ . Tome un punto  $x$  y un punto  $y$  del mismo lado de  $N$  como se muestra en la figura 10.3. Observe que el arco  $a$  no puede ir de un punto  $x$  al punto  $y$  (figura 10.3). Si el arco se encuentra en  $D_2$ , el mismo argumento produce una contradicción. Por tanto no existen tales tipos de arcos y no existe un disco de compresión.

Probemos ahora que  $S$  es incompresible en  $M_1$ . Supongamos que existe un disco de compresión  $D$  y analicemos las intersecciones de  $D$  con el disco  $D_3$ . Curvas cerradas son eliminadas como antes. Los arcos en  $D_3$  con extremos en la misma arista también se eliminan como antes. Sea  $\alpha$  el arco de más

afuera en  $D$  tal que sus extremos estan en aristas diferentes de  $D_3$ . Sea  $a$  el arco en  $\partial D$  con  $\partial a = \partial \alpha$ . El arco  $a$  está en  $S$  y une  $A$  con  $D$  ó  $E$  con  $F$  ó  $B$  con  $C$ . Cortemos  $D_3$  con el disco acotado por  $\alpha$ . Obtenemos dos discos de compresión para el cuerpo de compresión  $M_1$ . La frontera de los nuevos discos es no separante en  $\partial M_1$  pero no es paralelo a  $\partial D_3$  lo cual contradice el siguiente lema.

□

**Lema 10.3** *Cualquier curva en el cuerpo de compresión  $M_1$  acotando un disco puede isotoparse a ser disjunta de la curva  $\partial D_3$ . Cualquier curva no separante acotando un disco es paralela a la curva  $\partial D_3$ .*

**Demostración.**

Sea  $C$  la curva mostrada en la siguiente figura, la cual representa la curva  $\partial D_3$  y la cual acota un disco  $D$ .

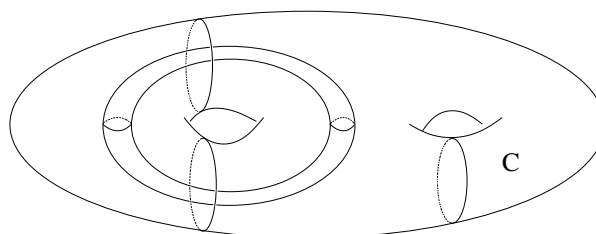


Figura 10.6: curva  $D_3$

Supongamos que existe otra curva  $C'$  que es la frontera de un disco  $D'$ . Analicemos las intersecciones entre los discos  $D$  y  $D'$ . Curvas cerradas simples

pueden eliminarse de forma usual, por lo que supongamos que las intersecciones consisten solo de arcos. Cortemos el cuerpo de compresión por el disco  $D$  para obtener el producto  $T \times I$  con dos copias de  $D$  en su frontera. Tomemos un arco de más afuera  $C''$  en  $D'$ . Entonces el subdisco de  $D'$  determinado por el arco de más afuera  $C''$ , tiene su frontera en  $T \times I$  e intersecciona exactamente en un arco una copia de  $D$ , y como  $\partial(T \times I)$  es incompresible entonces el disco tiene que ser paralelo a la frontera. Entonces  $C''$  y un arco en  $C'$  acotan un disco  $E$  en  $T \times I$ . Por lo que existen dos casos:  $E$  contiene la otra copia de  $D$  ó no. Si no la contiene, podemos isotopar y reducir el número de intersecciones entre  $D$  y  $D'$ . Si contiene la otra copia entonces debería haber un arco de  $C'$  que va por fuera de la otra copia de  $D$  a sí mismo, por lo que es trivial y por tanto con una isotopía podemos eliminar algunos arcos de intersección. Esto muestra que  $C'$  es disjuncto de  $C$ . Supongamos ahora que  $C'$  es no separante en  $\partial M_1$ . Entonces  $C'$  es una curva trivial en  $\partial(T \times I)$  que acota un disco  $E \subset \partial(T \times I)$ . Si  $E$  contiene ambas copias de  $D$  entonces  $C'$  es separante. Si  $E$  contiene solo una copia de  $C$ , esto muestra que  $C'$  es paralela a  $C$ .

□

**Lema 10.4** *La superficie pinchada  $F$  de género dos es incompresible en  $M$ .*

**Demostración.**

Considere una vecindad regular de  $F$ ,  $N(F) \simeq F \times [0, 1]$ . Sea  $F^+ = F \times \{0\}$  y  $F^- = F \times \{1\}$ . Probaremos que  $F^+$  y  $F^-$  son incompresibles en  $\overline{M - N(F)}$ . Sean  $G_1, G_2, G_3, G_4$  las cuatro caras mostradas en la figura 10.7, las cuales corresponden a las caras en las cuales la esfera pinchada  $S$  está dividida.

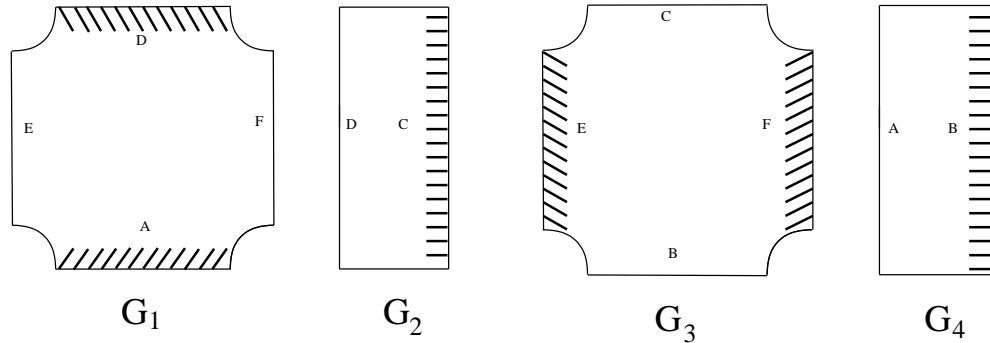


Figura 10.7: caras de la esfera pinchada

Consideremos la cara  $G_1$  y supongamos que la arista  $A$  está en  $F^+$ . Esto determina el lugar de las otras aristas de  $G_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) (parte sombreada de la figura 10.7).

Probemos que  $F^+$  es incompresible. Supongamos que existe un disco de compresión  $D$ . Analicemos  $D \cap \{\cup G_i\}_{i=1}^4$ . Las curvas cerradas simples se eliminan de manera usual. Si existen arcos con extremos en la misma arista de una de las  $G_i$ 's, pueden eliminarse cortando  $D$  con un disco de más afuera contenido en uno de los  $G_i$ 's, el cual cambia  $D$  en dos discos, donde al menos uno de ellos es un disco de compresión. Por lo que tenemos solamente arcos con extremos en distintas aristas. Observe que no existen arcos con extremos en  $C$  y  $B$  de  $G_2$  y  $G_4$ . Tenemos que las aristas  $\{E, F\}$  de  $G_3$  y  $\{A, D\}$  de  $G_1$  están en  $F^+$ , así que los extremos de los arcos de intersección con  $D$  deben estar en  $\{E, F\}$  ó en  $\{A, D\}$ .

Analicemos ahora  $\partial D \cap \{D_1, D_2, D_3\}$  donde las  $D_i$ 's son las caras en las que esta dividida la superficie pinchada  $F$ . Note que cada arco de  $\partial D \cap D_i$  debe unir diferentes lados de  $D_i$ , de otra forma una isotopía podría reducir el número de puntos de intersección entre  $\partial D$  y  $\partial D_i$ . Como ningún arco se interseca con  $C$  y  $B$  tenemos arcos como los mostrados en la siguiente figura.

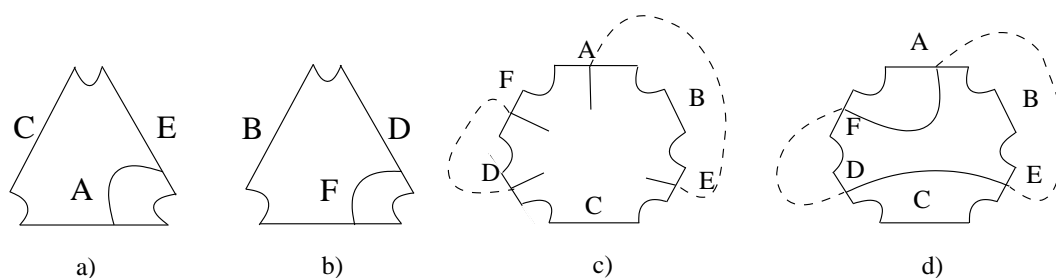


Figura 10.8: arcos de intersección entre  $\partial D$  y las caras de  $F$ .

Por lo que la única posibilidad para  $\partial D \cap D_3$  es la de la opción (d) de la figura anterior. Entonces  $\partial D$  interseca los arcos en el orden  $A, F, D, E$ . Pero existe un arco de intersección que va de  $A$  a  $D$  y otro de  $E$  a  $F$ . Por tanto en el disco de compresión, dos arcos se intersectan en un punto, lo cual es una contradicción. La incompresibilidad de  $F^-$  se prueba de forma similar.

□

**Lema 10.5** *Sea  $\rho$  la pendiente en  $T$  determinada por la  $\partial S$ . Entonces  $M(\rho) \simeq L(3, 1) \# Q$  donde  $Q$  es un espacio fibrado de Seifert sobre un disco  $D^2$  con dos fibras excepcionales de multiplicidad 3.*

**Demostración.**

Note que en  $M(\rho)$  la esfera pinchada  $S$  se completa a una esfera  $\tilde{S}$ . La esfera  $\tilde{S}$  separa  $M(\rho)$  en dos partes, digamos  $M(\rho) = M'_1 \sharp M'_2$  donde  $M'_1$  esta dada por un diagrama de Heegaard como en la figura 10.4, es decir el diagrama de Heegaard obtenido considerando que la superficie de género dos mostrada en la figura acota un cubo con asas en  $\mathbf{R}^3$ . No es difícil ver que este es un diagrama de Heegaard de un espacio fibrado de Seifert sobre un disco  $D^2$  con dos fibras excepcionales de multiplicidad 3. Similarmente,  $M'_2$  está dado por un diagrama de Heegaard como en la figura 10.3, lo cual determina el espacio lente  $L(3, 1)$ .

□

**Lema 10.6** *No existen toros esenciales en  $M$ .*

*Demostración.*

Supongamos que  $P$  es un toro esencial en  $M$ . El toro  $P$  no puede estar contenido en  $M_2$  porque es un cubo con asas. Si  $P$  está contenido en  $M_1$ , entonces es paralelo a  $T'$ . Supongamos entonces que el toro  $P$  intersecta la esfera pinchada  $S$  y que su intersección es minimal.

Analícemos las intersecciones del toro  $P$  con la esfera pinchada  $S$ . Las curvas de intersección triviales pueden eliminarse porque  $P$  y  $S$  son incompresibles. La intersección  $P \cap S$  consiste de curvas paralelas en el toro  $P$  las cuales lo dividen en anillos. Sea  $R$  uno de tales anillos que están en  $M_2$ . La frontera del anillo  $\partial R$  está en la esfera pinchada  $S$ , por lo que tenemos los siguientes casos:

1. Cada componente de  $\partial R$  es paralela a una componente de  $\partial S$ ;

2. Exactamente una componente de  $\partial R$  es paralela a una componente de  $\partial S$ ; ó
3. Ninguna componente de  $\partial R$  es paralela a una componente de  $\partial S$ .

Caso 1.

Supongamos que ambas componentes frontera de  $R$ , digamos  $\partial_1 R$  y  $\partial_2 R$  son paralelas a  $\partial S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ . Contando las intersecciones de  $\partial R$  con los discos  $D_1$  y  $D_2$ , vemos que las componentes de  $\partial R$  podrían ser paralelas a  $S_1$  y  $S_4$  ó a  $S_3$  y  $S_2$ . Aquí hay dos posibilidades, que ambas curvas sean paralelas a  $S_1(S_4)$  ó una paralela a  $S_1$  y otra paralela a  $S_4$  (similarmente para la otra pareja). En el primer caso existe un anillo  $U$  en  $S$  conectando ambas componentes frontera,  $\partial_1 R \cap D_2 \subset \text{arista } D$  y  $\partial_2 R \cap D_2 \subset \text{arista } D$ , así que tenemos un arco trivial  $\alpha$  en el disco  $D_2$ . Ahora usando el disco determinado por  $\alpha$ , podemos empujar el anillo  $R$  a  $U$  y de esta forma eliminar estas intersecciones. En el segundo caso, tenemos que  $\partial_1 R \cap D_2 \subset \text{arista } D$  y  $\partial_2 R \cap D_2 \subset \text{arista } B$ , por tanto existe un arco  $\beta$  en  $D_2$  con extremos en las aristas  $B$  y  $D$ , los cuales acotan un disco en  $D_2$  que va a lo largo de un tubo, es decir, a lo largo del anillo  $T_3$ . Usando este disco vemos que el anillo  $R$  es paralelo al tubo.

Caso 2.

Supongamos ahora que tenemos exactamente una componente de  $\partial R$  paralela a una componente de  $\partial S$ . Sean  $E_1$  y  $E_2$  los discos acotados por  $\partial R$  en  $\tilde{S}$ . Entonces  $R \cup E_1 \cup E_2$  es una esfera  $\Sigma \subset M(\rho)$  intersectando  $k_\rho$  en tres puntos, donde  $k_\rho$  es el corazón del toro sólido del llenado de Dehn. Como  $\Sigma$

es una esfera no separante, llegamos a una contradicción por el lema anterior.

Llegamos entonces a que  $R$  corre paralelo a uno de los anillos  $T_2$  ó  $T_4$ , ó que ambas componentes de  $\partial R$  no son paralelas a componentes de  $\partial S$ .

Supongamos ahora que  $R'$  es un anillo en el cual  $P$  está dividido y que vive en  $M_1$ . Como antes,  $\partial R'$  esta en  $S$  y tenemos varios casos:

1. Cada componente de  $\partial R'$  es paralela a una componente de  $\partial S$ ;
2. Exactamente una componente de  $\partial R'$  es paralela a una componente de  $\partial S$ ; ó
3. Ninguna componente de  $\partial R'$  es paralela a una componente de  $\partial S$ .

#### Caso 1

Supongamos que ambas componentes frontera de  $R'$ , digamos  $\partial_1 R'$  y  $\partial_2 R'$  son paralelas a componentes de  $\partial S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ . Analicemos las intersecciones entre  $R'$  y  $D_3$ . Note que si  $\beta$  es un arco de intersección entre  $R'$  y  $D_3$ , entonces  $\beta$  no puede ser trivial en  $R'$ , porque el arco en  $\partial R'$  al cual  $\beta$  es paralelo, conecta diferentes lados de  $\partial D_3$ . Así, todos los arcos de intersección son esenciales en  $R'$ . Supongamos primero que ambas componentes de  $\partial R'$  son paralelas a una misma curva, digamos  $S_1$ . Tomemos un arco de intersección de más afuera en  $D_3$ . Si los extremos de  $\alpha$  estan en la misma arista de la  $\partial D_3$ , note que existe un anillo  $U'$  en  $S$  conectando ambas componentes frontera de  $\partial R'$  y usando el disco determinado por  $\alpha$  podemos empujar el anillo  $R'$  a  $U'$  y de esta forma eliminamos estas intersecciones. Si los extremos



de  $\alpha$  están en diferentes aristas de  $\partial D_3$ , entonces sus extremos están en las aristas  $D$  y  $C$  ó en las aristas  $C$  y  $E$ . Existe un disco  $D' \subset D_3$  cuyo interior es disjunto de  $R'$  tal que  $\partial D' = \alpha \cup a$ , donde  $a$  es un arco en  $\partial D_3$  el cual pasa una vez a través del anillo  $T_1$ . Cortemos  $R'$  con el disco  $D'$  para obtener un disco  $R''$ . No es difícil ver que  $\partial R''$  es isotópica a una curva no trivial en  $S$ . Esto contradice la incompresibilidad de  $S$ .

### Caso 2

Supongamos ahora que  $\partial_1 R'$  es paralela a  $S_1$  y  $\partial_2 R'$  es paralela a  $S_2$ . Entonces  $\partial_1 R'$  interseca las aristas  $E, D, C$  de  $D_3$  y  $\partial_2 R'$  interseca las aristas  $D, C, F$ . Se sigue que existe un arco de más afuera  $\alpha$  en  $D_3$  con sus extremos en  $D$  ó  $C$ , ó un extremo en  $C$  y uno en  $D$ . Sea  $D' \subset D_3$  el disco determinado por  $\alpha$ , tal que  $\partial D' = \alpha \cup a$ , donde  $a \subset \partial D_3$ . Si ambos extremos de  $\alpha$  están en  $C$  (o en  $D$ ), entonces cortando  $R'$  con el disco  $D'$ , obtenemos un disco  $R''$  cuya frontera es una curva no trivial en  $S$ . Si los extremos de  $\alpha$  están en  $C$  y  $D$ , entonces el arco  $a$  pasa una vez a través del anillo  $T_1$ . Para los casos restantes podemos seguir un argumento similar para llegar a que si ambas componentes de  $\partial R'$  son paralelas a  $\partial S$ , entonces  $R'$  corre paralela al anillo  $T_1$  ó  $T_3$ .

Si exactamente una componente  $\partial_1 R'$  es paralela a una componente de  $\partial S$ , entonces por el mismo argumento que en  $M_2$  llegamos a una contradicción.

### Caso 3

El último caso es que ninguna componente frontera de  $\partial R'$  sea paralela a  $\partial S$ . En este caso, existe un anillo  $U'$  contenido en la esfera pinchada  $S$  tal que  $\partial U' = \partial R'$ . Así,  $R' \cup U' = T_0$  es un toro contenido en  $M_1$ . Como  $M_1$  es atoroidal entonces: (a)  $T_0 = \partial(V) \subset M_1$  donde  $V$  es un toro sólido ó (b)  $T_0$  es paralelo a  $T'$ . Pero  $T'$  es incompresible en  $M(\rho)$  y  $T_0$  es compresible en  $M(\rho)$  entonces el caso (b) es imposible. Supongamos que  $T_0 = \partial(V) \subset M_1$ . Sea  $N(D)$  una vecindad regular de un disco  $D$  con frontera un corazón  $\beta$  de  $U'$ , tal que  $\beta$  es una  $(p, q)$ -curva en  $\partial V$ . Más aún,  $V \cup N(D) \subset Q$ . Si  $q > 1$ ,  $V \cup N(D)$  es un espacio lente pinchado y llegamos a una contradicción porque  $Q$  es irreducible. Así  $q = 1$  y entonces  $R'$  es paralelo a  $U'$ . Esto no es posible porque supusimos que la intersección era minimal.

Esto muestra que la intersección de  $P$  con  $M_1$  consiste de un anillo que corre paralelo a  $T_1$  y  $T_3$ . Esto, combinado con lo que se mostró para la intersección de  $P$  con  $M_2$  implica que  $P$  es paralelo al toro  $T$ , por lo que no es esencial.

□

**Lema 10.7** *No hay anillos esenciales en  $M$ .*

*Demostración.*

Si  $M$  tuviera anillos esenciales, como  $M$  es irreducible y atoroidal, se sigue que  $M$  es un fibrado de Seifert. Pero si  $M$  es un fibrado de Seifert atoroidal, como tiene dos componentes frontera, debe ser un fibrado de Seifert sobre un anillo con a lo más una fibra excepcional ó sobre una banda de Möbius sin fibras excepcionales. De cualquier forma, no es difícil ver que  $M(\rho)$  no puede

ser descrita como en el Lema 10.5.

Esto completa la prueba del Teorema 10.1.

□

Considere las variedades obtenidas por llenado de Dehn  $M$  a lo largo del toro  $T'$  y denotemos por  $E(M)$  el conjunto de pendientes excepcionales en  $T'$ , es decir, las pendientes  $r'$  en  $T'$  tales que la variedad  $M(r')$  no es hiperbólica. Como cualquiera de estas variedades  $M(r')$  tiene un toro componente frontera, si no es hiperbólica, entonces contendrá un disco esencial, una esfera esencial, un toro esencial ó un anillo esencial. Se sigue que para cualesquiera  $r', s'$  en  $E(M)$ ,  $\Delta(r', s') \leq 5$ . Note que en particular  $M$  no puede ser una de las variedades con dos llenados de Dehn toroidales a distancias 6, 7 ó 8 descritas en [8], porque  $M$  tiene dos toros componentes frontera. De aquí se sigue que el conjunto  $E(M)$  consiste de a lo más ocho pendientes.

**Corolario 10.8** *Sea  $r'$  una pendiente en  $T'$ ,  $r' \notin E(M)$ . Entonces  $M(r')$  es una variedad hiperbólica con solo una componente frontera toro  $T$ , el cual tiene pendientes  $\rho, \gamma$  en  $T$ , tal que  $M(r')(\rho)$  es reducible y contiene una esfera esencial que intersecta el corazón del toro sólido en cuatro puntos,  $\gamma$  es una pendiente longitudinal que acota una superficie incompresible de género dos y  $\Delta(\rho, \gamma) = 3$ .*

**Demostración.**

La variedad  $M(r')$  es hiperbólica porque  $r' \notin E(M)$ . Sean  $\rho$  y  $\gamma$  las pendientes en  $T$  dadas en el teorema 10.1. Entonces por el lema 10.5 se sigue que

$M(r')(\rho) \cong L(3, 1) \sharp Q(r')$ , donde  $Q(r')$  es  $L(3, 1) \sharp L(3, 1)$  ó un espacio fibrado de Seifert sobre  $S^2$  con fibras excepcionales  $(3, 3)$  ó  $(3, 3, n)$ . Como en el teorema 10.1, existe una esfera esencial en  $M(r')(\rho)$  intersectando el corazón del toro sólido del llenado de Dehn en cuatro puntos, ya que si lo intersectara en dos puntos, el complemento de la esfera sería un anillo esencial, lo cual no es posible. Además si existiera una esfera intersectando en uno o tres puntos al corazón del llenado de Dehn, sería una esfera separante, lo cual implicaría que la variedad tuviera un sumando  $S^2 \times S^1$ , lo cual vimos que no es posible al dar la descomposición prima de la variedad.

Como en el teorema 10.1, existe una superficie de género dos  $F$  cuya frontera tiene pendiente  $\gamma$  y  $\Delta(\rho, \gamma) = 3$ . La superficie  $F$  debe ser incompresible en  $M(r')$ , ya que de otra forma, comprimiendola obtenemos una superficie de género uno con la misma frontera, pero por el capítulo anterior, deberíamos tener que  $\Delta(\rho, \gamma) \leq 1$ , lo cual es una contradicción.

Probemos ahora que la variedad  $M$  no puede encajarse en  $S^3$ . Sea  $\rho$  la pendiente en  $T$  como en el lema 10.5 y sea  $\rho'$  cualquier pendiente en  $T'$ . Hagamos el llenado de Dehn a lo largo de ambas pendientes, así que  $M(\rho')(\rho) = M(\rho)(\rho') = L(3, 1) \sharp Q(3, 3)(\rho')$  donde  $Q(3, 3)(\rho')$  es  $L(3, 1) \sharp L(3, 1)$  ó un fibrado de Seifert sobre  $S^2$  con fibras excepcionales  $(3, 3)$  ó  $(3, 3, n)$ . Así, si  $M(\rho')$  es el exterior de un nudo en una esfera homológica, entonces  $H_1(M(\rho')) \cong \mathbf{Z}$ , y es generada por una curva simple cerrada en  $T$  que intersecta  $F$  en un punto. Como  $\Delta(\rho, \gamma) = 3$ , se sigue que  $H_1(M(\rho')(\rho)) = \mathbf{Z}_3$ . Pero  $H_1(M(\rho')(\rho)) = H_1(L(3, 1)) \oplus H_1(Q(\rho'))$ , entonces  $H_1(Q(\rho')) = 0$ , es decir  $Q(\rho')$  debe ser una

esfera homológica, lo cual no es posible.

□

## 10.2. Construyendo otros ejemplos

En esta sección, presentamos otros posibles dos ejemplos que realizan la misma cota que  $M$  del teorema 10.1. Considere las gráficas en una esfera  $S^2$  con 6 ponchaduras y una superficie pinchada  $F_1$  de género dos, como se muestra en las figuras 10.9 y 10.10.

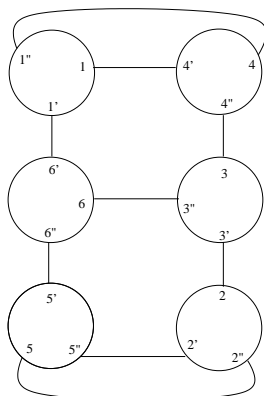


Figura 10.9: Gráfica en la esfera pinchada.

Como antes, de estas superficies obtenemos una variedad  $M_1$ , y en este caso su frontera consiste de un solo toro  $T_1$ . Por una prueba similar a los lemas 10.2 y 10.4, puede probarse que las superficies  $S_1$  y  $F_1$  son incompresi-

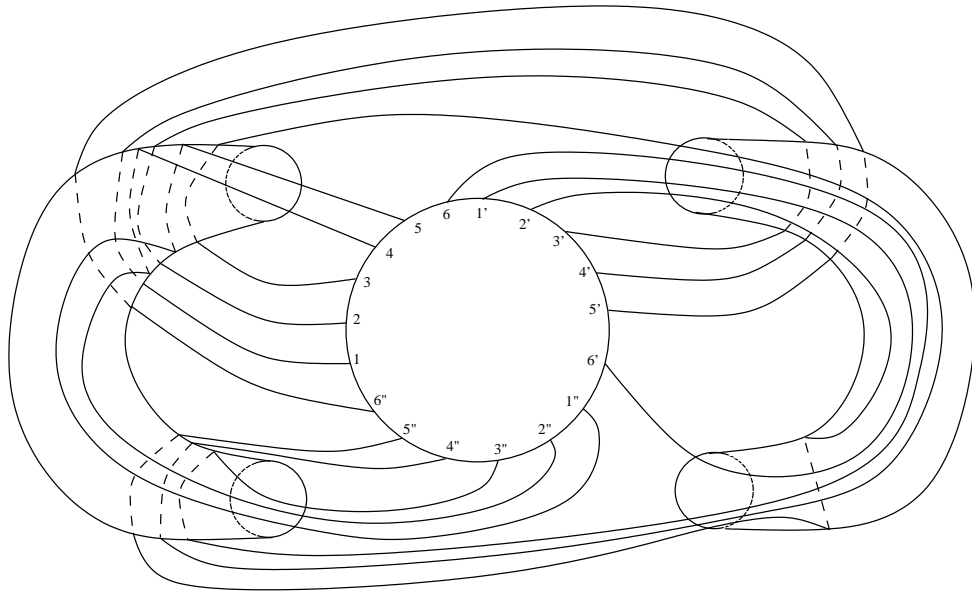


Figura 10.10: Gráfica en la superficie  $F_1$

bles en  $M_1$ . Por llenado de Dehn a lo largo de la pendiente  $\rho$  dada por  $\partial S_1$ , no es difícil ver que  $M_1(\rho) = L(3, 1) \sharp L(3, 1)$ . Note también que  $\Delta(\rho, \gamma) = 3$  donde  $\gamma$  es la pendiente dada por  $\partial F_1$ . Considere ahora las gráficas en una esfera  $S^2$  con 12 ponchaduras y una superficie pinchada de género dos  $F_2$  como se muestra en las figuras 10.11 y 10.12.

Como antes, de estas superficies obtenemos una variedad  $M_2$  y en este caso su frontera consiste también de un solo toro  $T_2$ . Por una prueba similar a los lemas 10.2 y 10.4 puede probarse que las superficies  $S_2$  y  $F_2$  son incompresibles en  $M_2$ . Por llenado de Dehn a lo largo de la pendiente  $\rho$  dada por  $\partial S_2$ , tenemos que  $M_2(\rho) = L(2, 1) \sharp L(3, 1)$ . Note también que  $\Delta(\rho, \gamma) = 3$ , donde

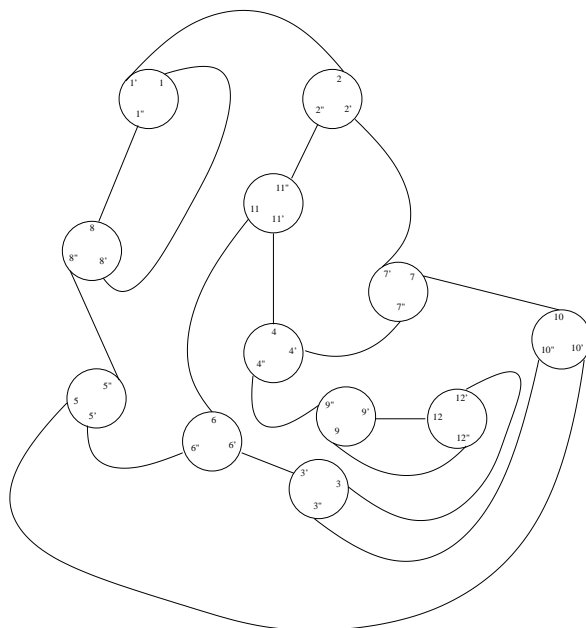


Figura 10.11: Gráfica en la esfera de 12 ponchaduras.

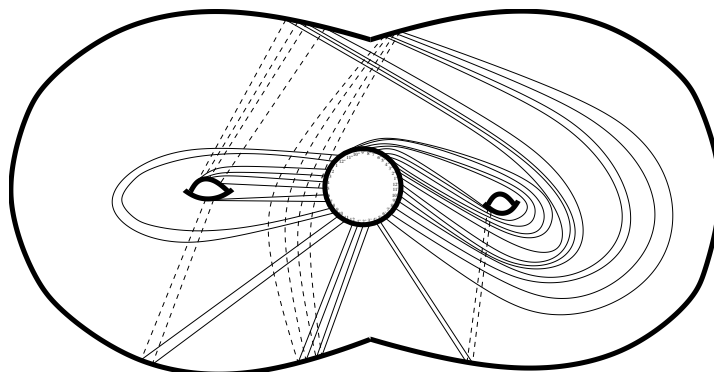


Figura 10.12: Gráfica en la superficie de género dos.

$\gamma$  es la pendiente dada por  $\partial F_2$ . Presumiblemente las variedades  $M_1$  y  $M_2$  también son hiperbólicas. Note que estas variedades no pueden encajarse en

$S^3$  y de hecho, no pueden encajarse en una esfera homológica. Esto es porque si  $M_i$  es el exterior de un nudo en una esfera homológica, entonces tendremos que  $H_1(M_i(\rho)) = \mathbf{Z}_3$ , lo cual no es posible porque  $H_1(M_1(\rho)) = \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$  y  $H_1(M_2(\rho)) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_3$ .



# Bibliografía

- [1] L. Armas, *An example of a hyperbolic 3-manifold realizing a bound on Dehn fillings*, J. Knot Theory and its Ram., **15** (3) (2006), pp. 299-311.
- [2] G. Baumslag, J. Morgan y P. B. Shalen, *Generalized triangle groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **102** (1987), pp. 25-31.
- [3] S. Boyer y X. Zhang, *On Culler - Shalen seminorms and Dehn filling*, Ann. Math. (2) **148** (1998) no. 3, pp. 737-801.
- [4] M. Eudave-Muñoz y Y.-Q. Wo, *Nonhyperbolic Dehn fillings on hyperbolic 3-manifolds*, Pacific J. Math. **190** (1999), pp. 261-275.
- [5] M. Eudave-Muñoz, *Band sum of links wich yield composite likds: The cabling conjecture for strongly invertible knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **330** (1992) no. 2, pp. 463-501.
- [6] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, III, J. Diff. Geom. **26** (1987), pp. 479-536.
- [7] F. González Acuña y H. Short, *Knot surgery and primeness*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99** (1986), pp. 89-102.

- [8] C. McA. Gordon, *Boundary slopes of punctured tori in 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), pp. 1713-1790.
- [9] C. McA. Gordon, *Combinatorial methods in Dehn surgery*. Lectures and Knots **96** (World Scientific, 1992), pp. 263-290.
- [10] C. McA. Gordon, J. Luecke, P.B. Shalen y M. Culler, *Dehn surgery on knots*, Ann. Math. **125** (1987), pp. 237-300.
- [11] C. McA. Gordon, *Dehn surgery and satellite knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), pp. 687-708.
- [12] C. McA. Gordon, J. Luecke, *Only integral Dehn surgeries can yield reducible manifolds*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **102** (1987), pp. 94-101.
- [13] C. McA. Gordon, J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), pp. 385-409.
- [14] C. McA. Gordon, J. Luecke, *Reducible manifolds and Dehn surgery*, Topology **35** (1996), pp. 94-101.
- [15] C. Hayashi y K. Motegi, *Only single twist on unknots can produce composite knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), pp. 4465-4479.
- [16] C. Hayashi y K. Motegi, *Dehn surgery on knots in solid tori creating essential annuli*. Trans. Am. Math. Soc. **349**, No. 12, (1997), pp. 4897-4930.
- [17] C. Hayashi y K. Shimokawa, *Symmetric knots satisfy the cabling conjecture*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **123**, No. 3, (1998), pp. 501-529.

- [18] J. A. Hoffman, *There are no strict great  $x$ -cycles after reducing or a  $P^2$  surgery on a knot*, J. Knot Theory and Its Ram. **7** (5) (1998), pp. 549-569.
- [19] J. A. Hoffman y D. Matignon, *Examples of birreducible Dehn fillings*, Pac. J. Math. **209**, No. 1, (2003), pp. 67-83.
- [20] L. H. Kauffman, *On knots*, Ann. Math. Studies. (115) Princeton University Press.
- [21] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth y Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 2, pp. 457-546.
- [22] E. Luft, y X. Zhang, *Symmetric knots and the cabling conjecture*, Math. Ann. **298** (1994) no. 3, pp. 489-496.
- [23] D. Matignon y N. Sayari, *Longitudinal slope and Dehn fillings*, Hiroshima Math. J. **33** (2003), pp. 127-136.
- [24] W.W. Menasco y M. B. Thistlethwaite, *Surfaces with boundary in alternating knot exteriors*, J. Reine Angew Math. **426** (1992), pp. 47-65.
- [25] L. Moser, *Elementary surgery along a torus knot*, Pacific J. Math. **38** (1971), pp. 737-745.
- [26] S. Oh, S. Lee y M. Teragaito, *Reducing Dehn fillings and small surfaces*, Proc. Lond. Math. Soc., III, Ser. 92, No. 1, (2006), pp. 203-223.
- [27] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Math. Lect. Ser. **7**, Berkeley, California, 1976.

- [28] M. Scharlemann, *Producing reducible 3-manifolds by surgery on a knot*, *Topology* **29** (1990), pp. 481-500.
- [29] M. Teragaito, *Dehn surgery and projective plane*, *Kobe J. Math.* **13** (1996), pp. 203-207.
- [30] Y.-Q. Wu, *Dehn surgery on arborescent knots*, *J. Differential Geom.* **43** (1996), pp. 171-197.