UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LÍNEAS DE ESPERA EN LOS SERVICIOS Y SU APLICACIÓN EN UNA SUCURSAL DE BANCOMER

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE ACTUARIA

PRESENTA :

VIOLETA ISABEL LUJÁN VÁZQUEZ

TUTOR :

DR. SERGIO FUENTES MAYA

2008

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Luján Vázquez Violeta Isabel 54460777 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 092230291
2. Datos del tutor Dr Sergio Fuentes Maya
3. Datos del sinodal 1 M en C Jesús Agustín Cano Garcés
4. Datos del sinodal 2 Act Francisco Sánchez Villarreal
5. Datos del sinodal 3 Act Amalia Maldonado Rosas
6. Datos del sinodal 4 M en C José Antonio Flores Díaz
7. Datos del trabajo escrito Líneas de espera en los servicios y su aplicación en una sucursal de Bancomer 110 p 2008

**UNA MENTE QUE HA SIDO ESTIRADA POR NUEVAS IDEAS,
NUNCA PODRÁ RECOBRAR SU FORMA ORIGINAL.**

ALBERT EINSTEIN

DEDICATORIAS :

A mi padre por enseñarme que la única forma de alcanzar mis metas es siendo disciplinada y perseverante. Por ese esfuerzo hecho para brindarme la oportunidad de estudiar una carrera profesional.

A mi madre por ser la mejor amiga que he tenido y por compartir todos mis sueños profesionales. Por enseñarme con su amor el camino a seguir.

A mis hermanas, Fabiola y Elena, por todos esos momentos hermosos compartidos durante nuestras vidas.

A mi sobrina, Kimberley, por existir y por recordarme con cada mirada lo hermosa que es la vida. Por esa curiosidad de niña, con la que quiere descubrir el mundo en un día.

A Oscar por ser mi compañero en todos estos años.

A Coral por mostrarme que la amistad no se desgasta con el tiempo.

A Israel por brindarme su amistad.

A mis familiares que tuvieron una palabra de apoyo durante mis estudios.

AGRADECIMIENTOS :

Quiero agradecer a la UNAM por haber sido mi segunda casa y por lo mucho que contribuyo a mi desarrollo profesional. A todos los profesores que compartieron sus conocimientos conmigo durante toda la carrera. A mis sinodales por sus valiosas aportaciones para mejorar y enriquecer el contenido de mi tesis.

Especialmente agradezco al Dr. Sergio Fuentes Maya por ser la persona que me motivo a tomar este camino profesional. Por todas esas enseñanzas valiosas y por creer en mí.

Gracias a todos mis amigos que me ofrecieron su confianza y apoyo en algún momento de la carrera. No quiero poner nombres por la posibilidad de omitir a alguno.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN **1**

CAPÍTULO 1. LA DIRECCIÓN DE OPERACIONES Y LOS SERVICIOS **3**

1.1 Conceptos básicos de la Dirección de Operaciones 3

1.2 Los Servicios en la Dirección de Operaciones 9

1.3 Ubicación de Líneas de Espera en la Dirección de Operaciones 22

CAPÍTULO 2. MODELOS CON PROCESO DE NACIMIENTO Y MUERTE; Y FIFO **26**

2.1 Estructura básica de los modelos de Líneas de Espera 26

2.2 Modelo M/M/1 32

2.3 Modelo M/M/1 con población demandante finita 35

2.4 Modelo M/M/s 38

2.5 Modelo M/M/1/K 40

2.6 Modelo M/M/s/K 43

CAPÍTULO 3. MODELOS SIN PROCESO DE NACIMIENTO Y MUERTE; O CON LIFO **46**

3.1 Modelos con distribuciones de servicio no exponenciales 46

3.1.1 Modelo M/G/1 46

3.1.2 Modelo M/G/k con desalojamiento de las unidades bloqueadas 48

3.1.3 Modelo M/D/1 50

3.1.4 Modelo M/E_k/s 52

3.2 Modelos sin entradas Poisson 52

3.2.1 Modelo GI/M/s 53

3.2.2 Modelo D/M/s 53

3.2.3 Modelo E_k/M/s 53

3.3 Modelos con distribuciones de servicio no exponenciales y sin entradas Poisson 53

3.4 Otros Modelos 54

3.5 Líneas de espera con prioridades de servicio 55

3.5.1 Sin interrupción 56

3.5.2 Con interrupción 57

CAPÍTULO 4. CASO DE APLICACIÓN **61**

4.1 Historia de Bancomer 61
4.2 Planteamiento del problema 62
4.3 Comportamiento del Sistema 64
4.3.1 Tiempo requerido de servicio 65
4.3.2 Manera en que llegan los clientes 78
4.4 Selección de un modelo matemático adecuado 94
4.5 Análisis de resultados 100

CONCLUSIONES **104**

APÉNDICE A: Intervalos de Confianza para la Media de una Distribución Normal cuya Variancia es Conocida 105

APÉNDICE B: Prueba Ji-Cuadrada 107

APÉNDICE C: Distribución Ji-Cuadrada 108

BIBLIOGRAFÍA **109**

INTRODUCCIÓN

Una cuestión de alta relevancia en la época actual, que debe influir enormemente en la Dirección de Operaciones, es el papel fundamental que ocupa el sector servicios en la economía. El aumento del nivel de vida ha producido un cambio en las pautas de consumo en detrimento de la fabricación y a favor de los servicios. Del mismo modo, debido, entre otras causas, al crecimiento de este último sector y al incremento de utilización de las nuevas tecnologías, que llevan a una fabricación cada vez menos intensiva en mano de obra, el mercado de trabajo ha experimentado un claro sesgo hacia los servicios.

Una de las areas más importantes de la Dirección de Operaciones es la de conocer las líneas de espera y aprender a administrarlas. En una economía de servicio como la nuestra hacemos colas todos los días, desde el momento de conducir el automóvil hacia nuestro trabajo hasta para pagar en el supermercado. También existen colas en las fabricas: trabajos que esperan en cola para ser realizados por distintas máquinas, y las propias máquinas que, a su vez, esperan turno para mantenimiento. En resumen, las colas están en todas partes. De hecho, líneas de espera comenzó a principios del siglo pasado con aplicaciones a ingeniería telefónica con su fundador, el danés A.K. Erlang.

La teoría de líneas de espera consiste en la formulación de un modelo en el cual se facilita el encuentro de un apropiado balance entre los costos de servicio y la cantidad de espera, sin embargo con la aplicación de los conceptos de la Dirección de Operaciones, las líneas de espera han alcanzado un nivel muy importante, el cual las empresas deben conocer y aplicar para ser mas competitivas.

Las líneas de espera tienen gran importancia ya que, a medida que pasa el tiempo surgen mayores necesidades de servicio y las empresas no siempre están preparadas para ofrecerlo. La empresa tiene que lograr una ventaja competitiva y para esto requiere tener un sistema de servicio bien diseñado, para lo cual se tiene una herramienta muy poderosa: el "análisis de líneas de espera".

El propósito de la presente tesis es dar un panorama general de la forma en que se pueden aplicar las líneas de espera en los servicios, tomando como base los métodos, herramientas y recomendaciones proporcionados por la Dirección de Operaciones.

Para obtener un servicio tenemos que enfrentarnos a las líneas de espera, comunmente llamadas colas, pero para la mayoría de la gente es molesto tener que permanecer en una línea de espera por periodos muy grandes de tiempo. La formación de líneas de espera es un fenómeno común que ocurre siempre que la demanda actual de un servicio excede la capacidad actual de proporcionarlo.

El costo de espera de los clientes generalmente incluye el costo indirecto de la pérdida de negocios (debido a que la gente va a alguna otra parte, compra menos de lo que era su intención, o no regresa en el futuro) o el costo directo de instalaciones y gentes ociosas; por ejemplo el costo de los choferes y el equipo que esperan para ser cargados o el costo de operación de un avión o un barco que espera para poder aterrizar o atracar. Las pérdidas de negocios no se pueden observar fácilmente.

Los modelos de la teoría de líneas de espera son muy útiles para determinar como debe operar el sistema de colas en el uso más efectivo. Tener demasiada capacidad de servicio para operar el sistema involucra excesivos costos. Pero no tener suficiente servicio da como resultado una excesiva espera y puede tener un fuerte y negativo impacto en la empresa. Es en este punto donde resalta la importancia del presente trabajo, en la persona responsable de la organización de servicio, debe existir una visión básica sobre los sistemas de líneas de espera para detectar el pro- blema, evaluar la mejor alternativa para su solución y por último aplicar la solución; de tal forma que el cliente perciba una mejora en el servicio que recibe.

La presente tesis tiene el siguiente desarrollo:

En el capítulo 1 se tocan temas básicos de la Dirección de Operaciones en los servicios, con el fin de proporcionar un panorama general de la importancia de la Dirección de Operaciones en los servicios.

En el capítulo 2 se presentan modelos matemáticos basados en el proceso de nacimiento y muerte con prioridad de servicio FIFO, esto para tener una base teórica fuerte para la comprensión de la solución óptima.

En el capítulo 3 se presentan modelos matemáticos que no estan basados en el proceso de nacimiento y muerte, o bien con prioridad de servicio LIFO, con el fin de ampliar el campo de estudio de los distintos modelos que se pueden aplicar para la solución de una línea de espera.

Y por último se presenta el capítulo 4, en el cual se aplica la teoría de líneas de espera a un problema real y se busca encontrar recomendaciones para la solución de la problematica presentada.

CAPÍTULO 1. LA DIRECCIÓN DE OPERACIONES Y LOS SERVICIOS

La forma en que administramos nuestros recursos productivos representa un factor crítico en nuestra mejora de productividad y nuestra competividad como nación. La Dirección de Operaciones es el manejo de estos recursos productivos; implica el diseño y el control de los sistemas responsables del uso productivo de la materia prima, los recursos humanos, el equipo y las instalaciones en el desarrollo de un producto o servicio.

El propósito de este capítulo es dar una visión general de la Dirección de Operaciones en los servicios y el lugar que la teoría de líneas de espera ocupa en ella.

1.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA DIRECCIÓN DE OPERACIONES

DEFINICIÓN:

La Dirección de Operaciones (o Administración de la Producción, como se le llama con frecuencia) puede definirse como la administración de los recursos directos necesarios para producir los bienes y servicios que ofrece una organización. En la figura 1.1 se representa un modelo resumido de esta área, en un contexto empresarial general.

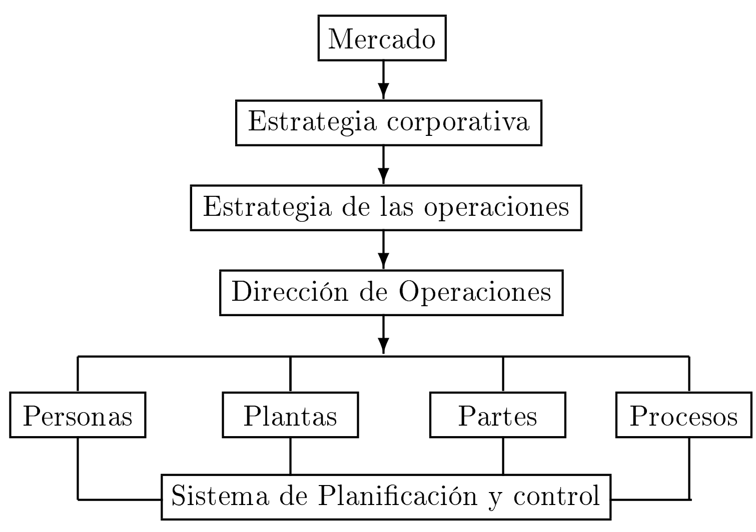


FIGURA 1.1 Modelo resumido del campo.

El mercado (los clientes de los productos o servicios de la empresa) da forma a la estrategia corporativa, que se basa en la misión de la empresa y, en esencia, refleja la forma en que ésta piensa utilizar todos sus recursos y funciones (mercadotecnia, finanzas y operaciones) para lograr la ventaja competitiva. La estrategia de operaciones especifica la manera en que la empresa empleará sus capacidades de producción para apoyar la estrategia corporativa.

La Dirección de Operaciones trata con los recursos directos de producción de la empresa, los cuales pueden considerarse como las "cinco P's" de la Dirección de Operaciones: Personas, Plantas, Partes, Procesos y sistemas de Planeación y control. Las personas son la fuerza de trabajo directa e indirecta; las plantas, las fábricas o áreas de servicio donde se realiza la producción; las partes comprenden los materiales (o, en el caso de servicios, los suministros) que pasan a través del sistema; en los procesos que agrupan el equipo y los pasos necesarios para lograr la producción; y los sistemas de planeación y control son los procedimientos y la información que utiliza la gerencia para manejar el sistema.

La Dirección de Operaciones es el campo de estudio que trata de entender, explicar, predecir y cambiar los efectos organizacionales y estratégicos de los procesos de transformación. La Dirección de Operaciones se ocupa de la efectividad y la eficiencia directivas de los procesos de transformación. La Dirección de Operaciones es la actividad por la cual los recursos, fluyendo dentro de un sistema definido, se combinan de manera controlada para añadir valor de acuerdo con las políticas de los directivos.

La Dirección de Operaciones es un área funcional de las empresas con una línea de responsabilidades claramente directivas, en la cual se involucra la planeación, coordinación, y ejecución de todas las actividades que crean bienes o proporcionan servicios.

Dentro de la función de operaciones, las decisiones directivas pueden ser divididas dentro de tres amplias áreas:

a. Decisiones estratégicas (de largo plazo)
b. Decisiones tácticas (de mediano plazo)
c. Decisiones operativas (de corto plazo)

Las decisiones de Dirección de Operaciones a nivel estratégico impactan en la efectividad de largo plazo en términos de cómo se pueden abordar las necesidades de los clientes, por lo tanto, a fin de que la empresa tenga éxito, estas decisiones deben hacerse tomando en cuenta la estrategia corporativa. Las decisiones que se toman a nivel estratégico se convierten en las condiciones fijas de las restricciones operativas bajo las cuales la empresa debe operar tanto en el medio como en el corto plazo.

En el nivel táctico del proceso de toma de decisiones, se aborda principalmente como programar eficientemente los materiales y la mano de obra dentro de las restricciones que previamente establecieron las decisiones estratégicas. Los asuntos que la Dirección de Operaciones resuelve en este nivel son: el número de trabajadores que se necesitan, el momento en que se necesitan, el número de turnos que se trabajarán, etc. Estas decisiones tácticas, serán las restricciones bajo las cuales se realiza la planeación operativa y se toman las decisiones de control.

Las decisiones directivas con respecto a la planeación operativa y el control son estrechas y de corto plazo en comparación con las anteriores. Los asuntos en este nivel incluyen: en que actividades se trabajará en este día o en esta semana, asignar al personal para realizar las tareas, asignar prioridades a las actividades, etc.

ANTECEDENTES HISTORICOS:

Durante más de dos siglos la Dirección de Operaciones ha sido reconocida como un factor importante en el desarrollo de las empresas. No obstante ha contado con una serie de nombres diferentes a través de la historia: Dirección de la Manufactura, Dirección de la Producción y Dirección de Operaciones. La visión tradicional de la Dirección de la Manufactura tiene su origen en el siglo XVIII cuando Adam Smith reconoció los beneficios de la especialización del trabajo. Recomendó dividir los trabajos en subtareas y reasignar a los trabajadores en tareas especializadas en las cuales llegarían a ser altamente especializados y eficientes. A principios del siglo XX, Federick W. Taylor implementó las teorías de Smith y comenzó una campaña para el empleo de la dirección con bases científicas en los grandes complejos manufactureros de su época.

Dirección de la Producción fue el término más aceptado durante el periodo de 1930 a 1950. Mientras que el trabajo de Federick Taylor se hizo más conocido, los directivos se enfocaron en técnicas que se centraban en la eficiencia económica de la manufactura. Los trabajadores fueron puestos "bajo el microscopio" y se estudió con gran detalle la eliminación de esfuerzos inútiles, concentrándose en alcanzar gran eficiencia. Sin embargo al mismo tiempo los directivos se dieron cuenta que los trabajadores tenían diferentes necesidades, no solamente económicas. Los psicólogos, sociólogos y otros estudiosos de las ciencias sociales comenzaron a estudiar a las personas y al ambiente de trabajo. Además otras ciencias como la economía, las matemáticas y las ciencias de la computación contribuyeron con nuevas herramientas más sofisticadas.

Con la década de 1970 surgen dos cambios importantes en la visión prevaleciente hasta entonces. El más importante de estos cambios, se refleja desde el nombre mismo de esta disciplina que adquirió la denominación con el que se le conoce en la actualidad (Dirección de Operaciones) y al enfoque no solo al sector económico de la manufactura que se le daba sino también al de los servicios. Mientras que el sector de servicios se hizo cada vez más importante, el cambio de "producción" a "operaciones" enfatizó la expansión del campo de la Dirección de Operaciones hacia las organizaciones de servicio.

Debido a la necesidad de tener una organización esbelta para permanecer competitivo en una economía cada vez más globalizada las compañías han impulsado el desarrollo de mayores innovaciones en los procesos por medio de los cuales realizan sus operaciones. Para lograr este objetivo se cuenta con una herramienta: la reingeniería de procesos, la cual tiene su enfoque en buscar cambios revolucionarios en contraste con los cambios graduales de la administración de la calidad total. Este enfoque se consigue buscando un nuevo punto de vista de lo que la organización está tratando de hacer en todos los procesos del negocio, y eliminando todos los pasos que no añadan valor para lograr el resultado deseado.

En la actualidad, la función de las operaciones está experimentando un nuevo papel como un elemento estratégico vital. Como consecuencia, las metas organizacionales están mejor enfocadas que antes para lograr cubrir las necesidades de los clientes.

La tabla 1.1 muestra un resumen histórico de la Dirección de Operaciones.

Fecha	**Contribución**	**Autor**
1776	Trabajo especializado en la manufactura	Adam Smith
1799	Partes intercambiables, contabilidad de costos	Eli Whitney y otros
1832	División y asignación del trabajo por habilidades	Charles Babbage
1900	Administración científica; desarrollo del estudio del trabajo y del tiempo; división de la planeación y la realización del trabajo	Federick W. Taylor
1900	Estudio del movimiento en el trabajo	Frank B. Gilbreth
1901	Técnicas de programación de empleados, máquinas y trabajo en la manufactura	Henry L. Gantt
1915	Tamaño económico del lote para el control de inventarios	F. W. Harris
1927	Relaciones humanas: El estudio Hawthorne	Elton Mayo
1931	Inferencia estadística aplicada a la calidad del producto; gráficas de control de calidad	Walter A. Shewhart
1935	Muestreo estadístico aplicado al control de calidad; planes de muestreo para inspección	H. F. Dodge y H. G. Roming

Fecha	Contribución	Autor
1940	Aplicación de la Investigación de Operaciones en la Segunda Guerra Mundial	P. M. S. Blacket y otros
1946	Computadora Digital	John Mauchly y J. P. Eckert
1947	Programación Lineal	George B. Dantzing, William Orchard-Hays y otros
1950	Programación matemática, procesos no lineales y estocásticos	A. Charnes, W. W. Cooper, H. Raiffa y otros
1951	Computadora digital comercial; disponibilidad de cálculos de gran escala	Sperry Univac
1960	Comportamiento organizacional; estudio de las personas en el trabajo	L. Cummings, L. Porter y otros
1970	Integración de las operaciones en las estrategias y políticas. Aplicaciones de la computadora en la manufactura, programación, y control (MRP)	W. Skinner, J. Orlicky y O. Wright
1980	Aplicaciones de la calidad y productividad de Japón; robótica, diseño y manufactura asistidos por computadora (CAD/CAM)	W. E. Deming y J. Juran
1990	La administración de la calidad total se emplea ampliamente. La reingeniería de procesos se emplea para hacer cambios radicales en los procesos de la organización	International Organization for Standarization y Michael Hammer

El campo de la Dirección de Operaciones en el pasado se enfocaba casi exclusivamente a la dirección industrial, pero en años recientes, el alcance de la Dirección de Operaciones se ha expandido considerablemente. Se aplican conceptos de la producción y técnicas a una amplia gama de actividades y situaciones fuera de la manufactura.

OBJETIVOS:

Los objetivos generales de la Dirección de Operaciones son producir un bien específico, en tiempo y a costo mínimos. Sin embargo, la mayor parte de las organizaciones utilizan otros criterios para fines de evaluación y control. Entre los criterios típicos tenemos:

1. Volumen de la producción.
2. Costo (materiales, fuerza de trabajo, entregas, desperdicios, etc.).

3. Utilización (equipo y fuerza de trabajo).
4. Calidad y confiabilidad del producto.
5. Entrega a tiempo.
6. Inversión (rendimiento sobre activos).
7. Flexibilidad para cambios en el producto.
8. Flexibilidad para cambios en el volumen.

Al aplicar en la práctica estos objetivos, es necesario reconocer que no todos pueden lograrse con el mismo grado de éxito. En muchos casos hay que sacrificar el bajo costo con el fin de obtener la flexibilidad necesaria para crear productos a la medida, o para entregar productos con un plazo de entrega corto. Incluso, en ocasiones hay que sacrificar la calidad, que ha llegado a tener características de necesidad y obligación en muchas empresas, para cumplir con las presiones de los plazos de entrega.

IMPORTANCIA:

El funcionamiento de una empresa requiere tres funciones básicas: finanzas, operaciones y mercadotecnia. Las finanzas tienen que ver con el capital y el equipo necesario para iniciar las actividades de la empresa; las operaciones, con la fabricación del producto; y la mercadotecnia, con su venta y distribución.

La Dirección de Operaciones es un factor decisivo tanto para las empresas de servicios como para las de manufactura. No se puede decir que una empresa de servicios sea exitosa si no cuenta con una Dirección de Operaciones superior a la media.

La Dirección de Operaciones trata acerca de la dirección, por lo que todos los gerentes necesitan poseer el conocimiento y habilidades que ésta comprende. Entre las habilidades se encuentran la productividad, la estrategia, el pronóstico y la calidad; las actividades todas relacionadas con otras áreas de las organizaciones productivas, tales como finanzas, contabilidad, recursos humanos, logística, comercialización, compras, etc., por lo que es esencial para los directivos tener una comprensión por lo menos básica de la Dirección de Operaciones. Finalmente se debe recordar que los directivos también emplean, para reforzar la toma de decisiones directivas, varias herramientas cuantitativas (las cuales son parte de la Dirección de Operaciones), entre ellas: control de inventarios, programación de actividades, teoría de líneas de espera, etc.

1.2 LOS SERVICIOS EN LA DIRECCIÓN DE OPERACIONES

La forma en que conocemos la visión de servicio es paralela a la forma en como observamos la calidad: el cliente es (o debe ser) el punto focal de todas las decisiones y acciones de la organización de servicios. Esta filosofía es capturada adecuadamente en el triángulo de servicios, figura 1.2. Aquí el cliente es el centro de las cosas, la estrategia de servicio, los sistemas y los empleados que le sirven. Desde este punto de vista, la organización existe para servir al cliente, y los sistemas y empleados existen para facilitar el proceso de servicio.

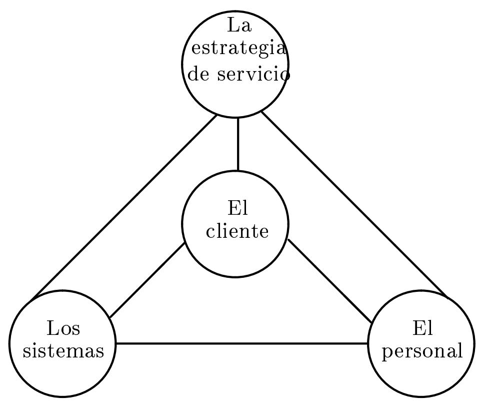


FIGURA 1.2 El triángulo del servicio.

Algunos sugieren que las organizaciones de servicios también existen para servir a la fuerza de trabajo porque ellos generalmente determinan como es percibido el servicio por los clientes. Relativo al último punto, el cliente obtiene la clase de servicio que la gerencia desea; en otras palabras, como la gerencia trata al trabajador es como el trabajador tratará al público. Si la fuerza de trabajo está bien entrenada y bien motivada por la gerencia, ellos harán buenos trabajos para los clientes.

El papel de las operaciones en el triángulo es uno de los principales. La operación es responsable de servicios, de sistemas (procedimientos, equipo e instalaciones), y es responsable del manejo del trabajo del servicio de la fuerza de trabajo, la cual típicamente comprende la mayoría de empleados en organizaciones de servicio grandes.

NATURALEZA DE LOS SERVICIOS:

El estudio de la naturaleza de los servicios da lugar a siete generalizaciones:

1. Todos son expertos en servicios. Todos creemos saber que queremos de una organización de servicios, y por el proceso de vida, tenemos una buena experiencia con el proceso de operación de servicios.

2. Los servicios son idiosincrásicos. Lo que funciona bien a un proveedor puede ser desastroso en otros casos, por ejemplo, consumir alimento en un restaurante en menos de un cuarto de hora, puede ser exactamente lo que se desearía en un establecimiento de comida rápida, pero totalmente inaceptable en un caro restaurante francés.

3. La calidad de trabajo no es calidad de servicio. Un mecánico puede hacer un buen trabajo en su auto, pero puede tomarle una semana para acabar el trabajo.

4. La mayoría de los servicios contienen una mezcla de atributos tangibles e intangibles que constituyen un paquete de servicio. Este paquete requiere diferentes métodos para diseñar y manejar la producción de bienes.

5. Los servicios de alto contacto, son experimentados, mientras que los bienes son consumidos.

6. Un manejo efectivo de servicios requiere un entendimiento de mercadeo y de personal, así como de operaciones.

7. Los servicios muchas veces toman la forma de ciclos de encuentros que implican interacciones cara a cara, por teléfono, electromecánico y/o por correo.

DIFERENCIAS ENTRE MANUFACTURA Y SERVICIOS:

Para comprender cuales son las principales diferencias entre manufactura y servicios comenzaremos por decir que la producción de bienes , es decir, la manufactura resulta en bienes tangibles, tales como automóviles, radios, refrigeradores, cualquier cosa que se puede ver o tocar. Esta producción puede tener lugar en una fábrica, pero puede realizarse en algún otro lugar. El servicio por otro lado , generalmente implica una acción en tiempo real. Una consulta médica, la reparación de un aparato electrodoméstico, o la proyección de una película en un cine. La mayoría de los servicios se encuentran dentro de las siguientes categorías:

- Gobierno (federal, estatal, local)
- Venta al mayoreo o al menudeo (comida, ropa, aparatos, juguetes, etc.)
- Servicios financieros (bancos, aseguradoras, etc.)

- Servicios de salud (doctores, dentistas, hospitales, etc.)
- Servicios personales (lavandería, tintorería, peluquería, jardinería, etc.)
- Servicios a negocios (procesamiento de datos, mensajería, agencias de empleo, etc.)
- Educación (escuelas, universidades, etc.)

La manufactura y los servicios difieren principalmente en que la primera está orientada a los bienes producidos, mientras que los servicios están orientados a las actividades. Las diferencias involucradas son las siguientes:

a. Contacto con el cliente.
b. Uniformidad de los insumos.
c. Contenido de mano de obra.
d. Uniformidad de los bienes o servicios producidos.
e. Medidas de la productividad.
f. Aseguramiento de la calidad.

Estas diferencias se pueden explicar como sigue:

a. Los servicios, por su misma naturaleza, implican un mayor grado de contacto con el cliente que la manufactura. La producción del servicio a menudo ocurre en el mismo lugar en que se consume. Por otro lado, la manufactura permite separar entre la producción y el consumo, por lo que esta actividad puede ocurrir en un lugar diferente de donde se encuentra el cliente. Lo anterior permite tener libertad para la selección de los métodos de trabajo, la asignación de las tareas, la programación de las actividades, y el control de las operaciones. En contraste, las operaciones de servicio, debido al contacto con los clientes, están más limitadas en las opciones de las que disponen. Incluso los clientes pueden ser parte del sistema (como en el caso de las tiendas de autoservicio), por lo que no es posible tener un control estrecho. Además, las operaciones orientadas al producto pueden tener la opción de almacenar su producción, permitiéndoles absorber los cambios de demanda. Sin embargo, las operaciones de servicio no pueden almacenarse, por lo que son más sensibles a los cambios en la demanda, por lo que tanto bancos como supermercados pueden tener tanto clientes en línea de espera, como cajeros desocupados durante periodos de baja demanda.

b. Los insumos de las operaciones de servicio están sujetos a mayor variabilidad que los de las operaciones típicas de manufactura. Cada cliente presenta un problema específico que a menudo debe diagnosticarse antes de poder ser remediado. Las operaciones de manufactura a menudo tienen la capacidad de controlar la variación de sus insumos , por lo que logran baja variabilidad en sus productos.

Como consecuencia, los requerimientos de trabajo para la manufactura son generalmente más uniformes que los de los servicios.

c. Debido a que los servicios son consumidos en el mismo lugar de su producción y al alto grado de variación de sus insumos, los servicios requieren un alto contenido de mano de obra en comparación con la manufactura la cuál, con algunas excepciones, puede hacer un uso más intensivo del capital, o en otras palabras puede ser más mecanizada.

d. Debido a la alta mecanización se generan productos con baja variabilidad, la manufactura tiende a ser más uniforme y eficiente; las actividades de servicio en ocasiones son más lentas y difíciles, y el producto es más variable.

e. Las medidas de productividad son más claras en la manufactura debido al alto grado de uniformidad de la mayoría de los productos manufacturados. En las operaciones de servicio, las variaciones en la demanda y en los requerimientos de un trabajo a otro hacen que las medidas de productividad sean considerablemente más difíciles.

f. El aseguramiento de la calidad representa un mayor grado de complejidad en los servicios cuando la producción y el consumo ocurren al mismo tiempo. La alta variabilidad en los insumos crea una ocasión adicional en la que la calidad del producto puede verse perjudicada, a menos que el aseguramiento de la calidad este controlado activamente. La calidad en el momento de la creación del producto es normalmente más importante para los servicios que para la manufactura, ya que en esta última los errores pueden corregirse antes de que el cliente reciba el producto.

La tabla 1.2 muestra un resumen de las principales diferencias entre la producción de bienes y las operaciones de servicios.

Característica	**Bienes**	**Servicios**
Producto	Tangible	Intangible
Contacto con el cliente	Bajo	Alto
Uniformidad de los insumos	Alta	Baja
Contenido de mano de obra	Bajo	Alto
Uniformidad del producto	Alto	Bajo
Medidas de productividad	Fáciles	Difíciles
Oportunidad de corregir problemas de calidad antes de entregar al cliente	Alta	Baja

CLASIFICACIÓN DE LAS OPERACIONES DE SERVICIO:

Debido a que los aspectos de la administración difieren dependiendo del tipo de operación de servicio que se ejecute, es importante encontrar un modo apropiado de clasificar y segmentar el sector de servicios. Un método para clasificar los servicios tiene en cuenta el lugar donde se llevan a cabo los procesos de transformación. Algunos servicios requieren que la empresa vaya al cliente (plomero), en tanto que en otros el cliente debe ir a la empresa (banco). Algunos servicios se prestan sin que el cliente y la empresa se reúnan (cajero automático). Algunas bases alternativas para la clasificación incluyen:

- Importancia del contacto con el cliente (hospital vs servicio postal)
- Importancia de la adecuación del servicio a las necesidades del cliente (servicio jurídico vs transporte público)
- Hasta qué punto el contacto personal con el cliente permite juzgar la satisfacción individual de las necesidades del cliente (práctica médica vs servicio de sala de cine)
- Importancia de las relaciones entre el cliente y la empresa: discretas vs continuas o formales, basadas en la calidad de miembro vs informales (alquiler de automóviles vs seguros, club de automóviles vs protección policial)
- Importancia de la intensidad del trabajo (empresa jurídica vs sala de cine)
- Beneficiario directo del servicio: personas o elementos (restaurante vs servicio de aseo)
- Materialidad del servicio (corte de cabello vs emisión de noticias)

CLASIFICACIÓN OPERATIVA DE LOS SERVICIO:

Las organizaciones de servicio se clasifican generalmente de acuerdo con el servicio que proporcionan (servicios financieros, servicios de salud, servicios de transporte, etc.). Estas clasificaciones, aunque útiles en la presentación de datos económi- cos agregados no son apropiadas para el estudio en la Dirección de Operaciones dado que nos dicen poco acerca del proceso mismo. En contraste, en la manufactura, existen términos bastante apropiados para clasificar a las actividades productivas (tales como producción intermitente y continua). Aunque es posible describir los servicios en estos mismos términos, necesitamos un elemento adicional de información para reflejar el hecho de que el cliente está involucrado en el sistema de producción. Este elemento, el cuál distingue operacionalmente un sistema de servicio de otro en su función productiva, es el contacto con el cliente en la creación del servicio.

El contacto con el cliente se refiere a la presencia física del cliente en el sistema, y la creación del servicio se refiere al proceso de trabajo involucrado en proveer el servicio mismo. La extensión del contacto se puede definir de manera aproximada como el porcentaje del tiempo que el cliente debe permanecer en el sistema con relación al tiempo total que toma realizar el servicio al cliente. De manera general, mientras más porcentaje de tiempo de contacto exista entre el servicio de sistema y el cliente, es mayor el grado de interacción entre los dos durante el proceso de producción.

Desde esta conceptualización, resulta que los sistemas de servicio con un alto grado de contacto con el cliente son más difíciles de controlar y de racionalizar que aquellos con bajo grado de contacto con los clientes.

Los servicios de alto grado de contacto, como los que prestan médicos, profesores y conductores de taxis, son difíciles de controlar. Esto se debe a que, en esencia, el cliente "siempre" está involucrado en la producción del servicio. En consecuencia, el cliente tiene injerencia directa en el tipo y la calidad del servicio, así como el tiempo necesario para complementar el servicio.

Esto implica dos aspectos: en primer lugar, a menos que se utilice un sistema de citas, la demanda del cliente varía directamente (o incluso cada hora) y es difícil que una empresa pueda determinar cuántos miembros deben conformar el personal. En este caso, es importante la administración efectiva de las líneas de espera.

En segundo lugar, la actitud de los trabajadores afecta el punto de vista del cliente frente al servicio. Cualquier empleado que interactúe con el cliente se convierte de modo automático en parte integrante del producto. Por consiguiente, los atributos interpersonales del empleado influyen de manera directa en la efectividad del servicio en un sistema de alto contacto.

Los servicios de bajo grado de contacto, como los que prestan las compañías de seguros y la oficina de correos, no requieren la presencia del cliente durante el proceso de transformación. El contacto con el cliente se produce en el mostrador de servicios, donde el cliente solicita el servicio. Puesto que el cliente no puede influir directamente en el proceso mediante el cual se le presta el servicio, existe una tendencia a estandarizar los procedimientos. La estandarización permite que el control gerencial de los procesos sea directo y posibilita que los administradores midan la eficiencia. Las empresas con servicio de poco contacto tienden a establecer operaciones sistemáticas y predecibles y pueden considerarse empresas de servicio cercanas a las de manufactura.

En los sistemas de bajo grado de contacto, la demanda de los clientes es relativamente estable, en contraste con lo que sucede en los sistemas de alto contacto; por consiguiente, es mucho más fácil adecuar en los primeros la capacidad a la demanda. En estos sistemas, en todo momento existe libertad creciente para diseñar procedimientos efectivos. En vez de utilizar como parámetro la gran capacidad de relaciones interpersonales y públicas, se evalúa a los empleados con base en atributos analíticos y técnicos.

La tabla 1.3 muestra las implicaciones de esta distinción, con un ejemplo de los servicios prestados por un banco tanto en la sucursal como en las oficinas de procesamiento de documentos y estados de cuenta. En ella observamos que cada decisión de diseño es impactada por la presencia del cliente durante la entrega del servicio. También podemos observar que cuando el trabajo se realiza sin la presencia del cliente (en un centro de proceso de un banco), es realizado en substitutos del cliente: reportes, bases de datos y facturas. Podemos por lo tanto diseñarlo de acuerdo con los mismos principios que se usan en el diseño de una fábrica, para maximizar la cantidad de productos procesados durante la producción diaria. Puede haber una gran diversidad de influencias de los clientes, y por lo tanto, variabilidad del sistema dentro de los sistemas de servicio de alto grado de contacto.

Tabla 1.3 Diferencias principales entre sistemas de Alto y Bajo grado de contacto con el cliente

Elemento de diseño	**Sistema de alto grado de contacto (Sucursal)**	**Sistema de bajo grado de contacto (Centro de procesamiento de estados de cuenta)**
Ubicación de instalaciones	Las operaciones se ubican cerca del cliente	Las operaciones se ubican cerca de los proveedores, transporte y empleados
Arreglo de las instalaciones	Las sucursales deben cubrir las necesidades y expectativas físicas y psicológicas del cliente	Las instalaciones se deben centrar en la eficiencia productiva
Diseño del producto	El ambiente así como el producto físico definen la naturaleza del servicio	El cliente no se encuentra en este ambiente, por lo que el producto puede ser definido por menos atributos
Diseño del proceso	Las etapas del proceso de producción tienen un efecto directo e inmediato en el cliente	El cliente no está involucrado en la mayoría de los procesos productivos
Programación	El cliente se encuentra dentro del programa de producción y se le debé dar un lugar en él	Al cliente le preocupan principalmente las fechas de entrega

Elemento de diseño	Sistema de alto grado de contacto (Sucursal)	Sistema de bajo grado de contacto (Centro de procesamiento de estados de cuenta)
Planeación de la producción	No se pueden almacenar los trabajos, por lo que la estandarización del flujo de la producción resultará en pérdida de transacciones	Tanto el almacenamiento como la estandarización del proceso son posibles
Habilidad de los trabajadores	El trabajo de los empleados constituye la mayor parte del producto de servicio, por lo que deben ser capaces de interactuar bien con el cliente	Los empleados solamente necesitan tener habilidades técnicas
Control de calidad	Los estándares de calidad dependen del criterio de quien recibe el servicio por lo que son variables	Los estándares de calidad generalmente se pueden medir y por lo tanto son fijos
Tiempos de ejecución	El tiempo de servicio depende de las necesidades del cliente, y por lo tanto los tiempos de ejecución son variables	Los trabajos se realizan en substitutos del cliente (estados de cuenta), por lo que los tiempos de eje cución pueden estar bien establecidos
Pago de sueldos	Producción variable requiere de sueldos basados en el tiempo trabajado	Producción fija permite basar el pago de sueldos en la cantidad producida
Planeación de la capacidad	Para evitar perdida de clientes, la capacidad debe establecerse para que se pueda cubrir la demanda pico	La capacidad de almacenar la producción permite que se pueda establecer la capacidad de un nivel promedio de la demanda

CARACTERÍSTICAS DE LOS SERVICIOS:

Los servicios tienen algunas características que los diferencian de la manufactura:

1. Los servicios se elaboran en el momento en que se proporcionan. A diferencia de la producción industrial, la mayoría de los servicios tales como planeación financiera, asesoría tributaria, y cambios de aceite de automóviles. Esta característica evita que se pueda tener la opción de contar con inventarios durante un periodo de poco trabajo en anticipación a la demanda futura. Por otro lado, la capacidad de servicio que no se usa esencialmente se desperdicia. Por consiguiente, es importante poder equilibrar la capacidad y la demanda.

2. La demanda de un servicio puede ser difícil de pronosticar. El volumen de demanda de los servicios es a menudo bastante variable. En algunas situaciones, los usuarios pueden necesitar servicio rápidamente (ej: policía, bomberos, emergencias médicas), mientras en otras, simplemente solicitan servicio rápido

y pueden estar dispuestos a ir a otra parte si sus necesidades no se cumplen. Estos factores ponen una mayor presión en los proveedores de servicio para pronosticar la demanda. Por consiguiente, los proveedores de servicio deben prestar especial atención a los niveles planeados de capacidad. En sistemas de autoservicio, el trabajo (del cliente) se ajusta automáticamente a los cambios en demanda.

3. La disponibilidad de capacidad puede ser difícil de predecir. Los requerimientos de procesamiento de servicios a veces pueden ser bastante variables. Aún más, la variedad de tareas requerida de los servidores puede ser grande. Además en los servicios, los tipos de variedad son más grandes que los que se presentan en la manufactura. Esto hace más difícil establecer medidas de capacidad simples. Por ejemplo: ¿Cuál sería el rendimiento de un pintor que pinta interiores de casa? El número de cuartos por día o el número de metros cuadrados por hora son posibles medidas, pero los cuartos tienen muchos tamaños diferentes, y el nivel de detalle (y, por lo tanto, las herramientas para pintar que pueden usarse) varía mucho, una medida conveniente para propósitos de planeación puede ser bastante difícil de obtener. De manera semejante, los cajeros de banco tienen que manejar una amplia variedad de transacciones y solicitudes de información, lo que hace difícil nuevamente establecer una medida conveniente de su capacidad.

4. La flexibilidad de los trabajadores puede ser una ventaja en los servicios. El elemento humano representa a menudo una parte importante en el servicio en comparación con la manufactura. Los proveedores de servicio pueden a menudo manejar una amplia variedad de requerimientos de servicio. Tanto en la manufactura como en los sistemas de servicio, el empleo de personal de medio tiempo puede ser una opción importante.

DISEÑO DE SERVICIOS:

Aun cuando los servicios, en contraste con los productos, constituyen el sector más importante en la economía, en términos del número de personas empleadas y del producto nacional bruto, es interesante el que no exista un acuerdo preciso entre la delimitación de lo que es un “producto” y un “servicio”. Mientras muchas personas piensan en IBM como un productor de computadoras, por ejemplo, otras afirman que su negocio principal es el dar servicios bajo la forma de asesoría en aplicaciones y ayuda al cliente en la utilización, mantenimiento, mejoramiento y servicio a los sistemas de computadoras. El hecho es que en el mundo competitivo de la actualidad la mayor parte de los ofrecimientos de mercado constituyen algunas de las combinaciones de producto y servicio, tal como se muestra en la figura 1.3. La idea es que toda compra que haga el consumidor entre en algún punto de la escala de dominancia relativa entre sus elementos de producto y servicio. La oferta de una corbata normal es evidentemente de dominancia del producto y, en contraste, un traje hecho a la medida contiene un elemento significativo de servicio, además de un bien físico. Para ser competitivas, las organizaciones deben de reconocer diferencias en los elementos del producto/servicio de sus ofertas de mercado, y desarrollar y hacer funcionar sus tecnologías de proceso congruente.

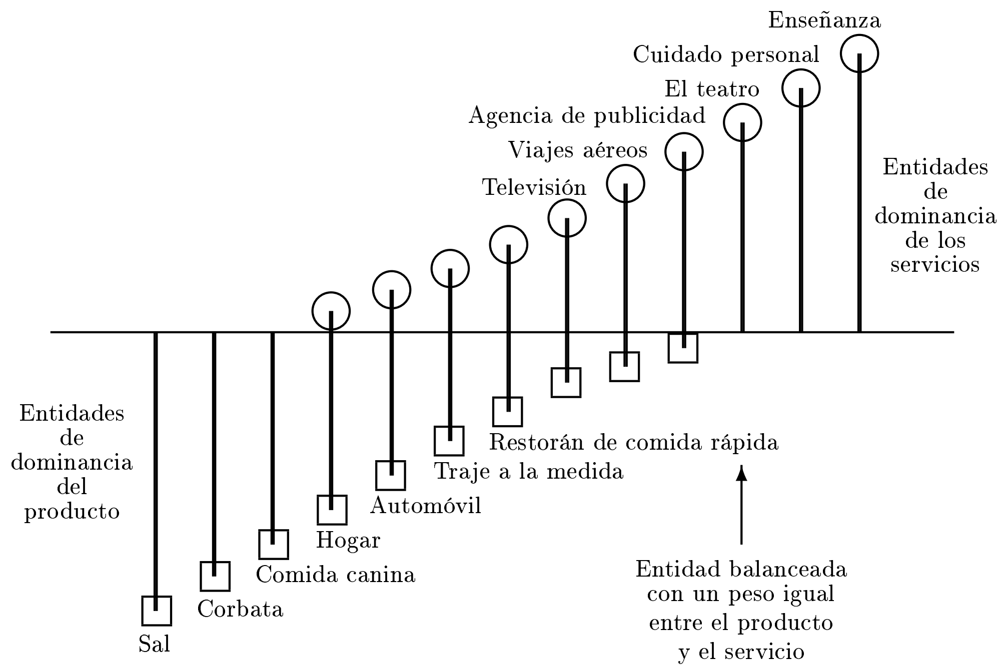


FIGURA 1.3 Escala de servicio contra dominancia del producto.

El diseño de servicio implica las mismas etapas genéricas que el diseño de productos. Se inicia con la identificación de una necesidad del consumidor y con la elaboración de un concepto de servicio que satisfaga la necesidad. Cuando Federal Express considero que hacían falta servicios de embarques rápidos y confiables diseño un concepto de "servicio de entregas" que se caracteriza por la propiedad privada de cierto tipo de servicios y un ciclo completo de proceso de búsqueda y entrega que destaca la importancia de la convivencia y la accesibilidad en todo el país. La identificación del concepto llevó a un diseño detallado de los servicios y las tecnologías específicas (que incluían al equipo, recursos humanos y procedimientos) y en la actualidad prosigue con una mejora y un rediseño de los servicios en el campo.

Aun cuando los pasos genéricos puedan ser iguales, hay algunas grandes diferencias entre elaborar productos y dar servicios. Para aquellos servicios que no contienen un componente físico o tangible, la etapa de diseño detallado evidentemente no implica las partes de ingeniería, pruebas, análisis de componentes y la elaboración de prototipos que se tienen en la fabricación del producto. Más adelante, al proporcionar servicio, el diseño de la tecnología del proceso implica cuestiones diferentes y otras consideraciones distintas a aquéllas en las tecnologías del producto a causa de la presencia del cliente o consumidor en el proceso de conversión, como lo veremos a continuación.

CARACTERÍSTICAS DE UN SISTEMA DE SERVICIO BIEN DISEÑADO:

Siete características de un sistema de servicio bien diseñado:

1. Cada elemento del sistema de servicio es consistente con el enfoque de sistema de la empresa.
2. Es amistoso al usuario. Se puede interaccionar fácilmente con él.
3. Es robusto. Puede manejar efectivamente variaciones en demanda y disponibilidad de recursos.
4. Está estructurado de tal manera que se mantiene fácilmente un desarrollo constante por la gente y los sistemas.
5. Provee nexos efectivos entre las diferentes oficinas. De tal manera que nada se pierde.
6. Maneja la evidencia de calidad de servicio de tal manera que los clientes ven el valor del servicio provisto.
7. Costo efectivo. Existe un mínimo desperdicio de tiempo y recursos en la entrega del servicio.

DIFERENCIAS ENTRE DISEÑO DE SERVICIOS Y DE PRODUCTOS

Una de las diferencias principales es la necesidad de considerar el grado de contacto del cliente en el diseño de servicio. Eso puede ir de no tener ningún contacto a grado de contacto alto. Cuando hay poco o ningún contacto, el diseño del servicio puede ser muy parecido al diseño de productos. Sin embargo, mientras mayor sea el grado de contacto con el cliente, mayor es la diferencia entre el diseño del servicio y del producto, y el diseño de servicio se vuelve más complejo. El elemento de contacto con el cliente significa que el diseño del servicio debe incorporar diseño del proceso; cuando hay contacto con el cliente, el proceso es el servicio. Aunque es deseable considerar la construibilidad del producto cuando estos se diseñan, el producto y el proceso, no obstante, son entidades separadas. El ejemplo siguiente de diseño de servicio ilustra la naturaleza inseparable de la conexión servicio-proceso cuando los clientes son una parte del sistema. Si un fabricante de refrigeradores cambia el procedimiento que usa para ensamblar un refrigerador, el cambio será transparente a la persona que compra el refrigerador. De manera similar, si una compañía de autobuses hace cambios al horario de los autobuses, o a sus rutas, esos cambios no serán transparentes a los pasajeros. Obviamente, este rediseño del servicio no podría hacerse de manera realista sin considerar el proceso de prestación del servicio.

EL SERVICIO A CLIENTES:

Paralelamente al enorme crecimiento del sector servicios en las economías desarrolladas, poco a poco se ha ido difuminando la frontera de separación entre el producto y servicio puros. Como consecuencia, el uso de una estrategia competitiva orientada al cliente ya no puede limitarse a entregarle un producto de calidad, en el momento prometido y con precio adecuado, además debe proporcionársele un adecuado servicio.

Prioridades competitivas de las empresas:

- El servicio puede ser uno de los medios para lograr una ventaja competitiva sostenible vía diferenciación, especialmente cuando ésta se desarrolla a través de la comercialización.
- Un mejor servicio aumenta el valor añadido del producto.
- El servicio es un determinante muy importante para la percepción de la calidad por parte del cliente.
- La creciente demanda de un alto nivel de servicio por parte de los clientes hace que, cada vez con más frecuencia, aquél se convierta en un requisito para competir más que en una ventaja competitiva.

Son muchisimas las "actividades de servicio" que pueden desarrollarse en las "empresas manufactureras", pudiendo agruparse en cinco conjuntos:

- "Las encaminadas a satisfacer las exigencias y necesidades del cliente". Pueden estar relacionadas con el diseño del producto o servicio (ej: abrir el diseño al cliente para determinar sus necesidades, ajustarlo más a éstas, etc.) o con el del proceso (ej: hacerlo más flexible para responder a cambios en el mercado).
- "Las que persiguen informar" (ej: proporcionar toda la información técnica que se requiera sobre el producto, elaborar adecuados manuales de usuario, comunicar todas las opciones y características de la financiación, etc.).
- "Las que pretenden reducir el riesgo del cliente" (ej: la garantía y su funcionamiento, la calidad y ubicación de los servicios de reparaciones, la rapidez y calidad de las mismas, etc.).
- "Las orientadas a facilitar la acción de compra" (ej: modalidades de pago, servicios de crédito, etc.).

- “Las relativas al trato con el cliente” (ej: trato amable de los vendedores, de los empleados de los servicios de reparaciones, etc.).

La evolución que se viene observando en relación con el objetivo materia de estudio ha hecho aparecer en la literatura el término “Factoría de servicios”, refiriendose a una firma manufacturera que, además de sus productos, elabora una serie de servicios integrados con cada uno de aquéllos. Para que una firma pueda catalogarse como tal debe sufrir profundas transformaciones, entre las que pueden citarse:

- “Redefinir los objetivos”, de forma que, además de centrarse en las características del producto y del proceso, se dé importancia a los elementos que son relevantes para proporcionar un buen servicio al cliente.
- “Pasar a un enfoque de sistema abierto”, incluyendo continuamente en la fábrica la lógica y exigencias del cliente para que aquélla se ajuste al mercado. Ello exige las características que se comentan a continuación.
- “Interconexión bien gestionada entre el sistema productivo y los clientes”, de manera que la información se intercambie de forma rápida y sin costos.
- “Capacidad flexible”, capaz de adaptar las instalaciones y la mano de obra a los cambios del mercado.
- “Personal de producción adaptado al cliente”, con capacidad de entenderse con él, más comunicativos y más sensibles respecto a sus necesidades y con conocimientos técnicos.
- “Adoptar medidas de calidad de servicio”, que, además de los aspectos ya considerados en el objetivo calidad, midan la percepción del cliente sobre los diferentes servicios ofrecidos con el producto.

Se han identificado diez aspectos como los más importantes en la percepción de la calidad del servicio por parte de los clientes:

- “Confianza”, o consistencia del comportamiento y la seguridad.
- “Sensibilidad”, o complacencia y buena disposición del empleado que proporciona el servicio.
- “Competencia”, o disponibilidad de las habilidades y conocimientos para desarrollar el servicio, así como demostración de tal disponibilidad.
- “Acceso”, o proximidad y facilidad del cliente para contactar con la empresa.
- “Cortesía”, o respeto, consideración y trato amistoso del personal de contacto.
- “Comunicación”, o información al cliente en un lenguaje que sea fácilmente comprensible para él.

- "Credibilidad", o formalidad y honestidad.
- "Seguridad", de forma que el consumidor quede libre de riesgos, peligros o dudas.
- "Conocimiento del cliente", apreciándose un esfuerzo por entenderlo.
- "Aspectos tangibles", o evidencias físicas del deseo de servir al cliente, tales como el equipo utilizado para la prestación del servicio, la apariencia del personal, etc.

1.3 UBICACIÓN DE LÍNEAS DE ESPERA EN LA DIRECCIÓN DE OPERACIONES

Los problemas de líneas de espera son comunes en la Dirección de Operaciones. En el contexto de la manufactura, el ambiente de la planta de producción puede pensarse como una compleja red de líneas de espera interrelacionadas. Mientras que los trabajos se terminan en una estación de trabajo, estos formarán una línea de espera en la siguiente estación de trabajo del proceso.

Este tipo de problemas se presentan más frecuentemente en organizaciones de servicio, como ya se ha comentado. Todos nosotros formamos parte de una línea de espera casi todos los días.

Los modelos de líneas de espera son de utilidad tanto en las empresas manufactureras como en las de servicios. El análisis de las colas en términos de la longitud de la línea de espera, tiempo medio de espera, y otros factores nos ayudan a entender los sistemas de servicio (tales como las ventanillas de caja en bancos), las actividades de mantenimiento (que deben reparar maquinaria averiada) y el control de actividades en la planta de fabricación. En realidad, los pacientes que esperan en el consultorio médico y las prensas averiadas esperando ser reparadas por un servicio de mantenimiento tienen numerosos puntos en común desde una perspectiva de Dirección de Operaciones. Ambos utilizan recursos humanos y equipos para restaurar valiosos activos de producción (personas y máquinas) en condiciones operativas.

El "análisis de líneas de espera" incluye el número promedio de clientes que llegan durante un periodo de tiempo, el promedio de tiempo que toma atender a cada cliente, el número de servidores, e información del tamaño de la población consumidora. Los modelos de línea de espera han sido desarrollados para permitir la estimación del tiempo de espera proyectado y la utilización de recursos proyectada.

ANTECEDENTES:

La investigación original sobre la línea de espera o teoría de las colas, fue hecha por el danés A.K. Erlang, ingeniero de teléfonos. Erlang inició su trabajo en 1905 en un intento por determinar el efecto de la demanda del servicio fluctuante (llegadas) en la utilización de equipo telefónico automático. Solamente hasta el final de la Segunda Guerra Mundial la investigación sobre los modelos de línea de espera se ha extendido a otros tipos de problemas. Existe una gran variedad de situaciones problemáticas, aparentemente diversas, que ahora se sabe que pueden ser descritas por el modelo general de la línea de espera. En todos los casos tenemos un insumo que llega a alguna instalación para recibir servicio o procesamiento. El tiempo entre la llegada de insumos individuales al punto de servicio ocurre comúnmente al azar. De manera semejante, el tiempo de servicio o procesamiento por lo general es una variable estocástica.

COSTES EN LAS COLAS:

Los directores de operaciones reconocen el equilibrio que debe existir entre el coste de suministrar un buen servicio y el coste del tiempo de espera de un cliente o de una máquina. Los directivos desean colas que sean lo suficientemente cortas para que los clientes no se desesperen y se vayan sin comprar o aunque compren no vuelvan más. Sin embargo, los directivos están de acuerdo en permitir alguna espera si ésta es equilibrada por importantes ahorros en los costes del servicio.

Los costes de servicio aumentan cuando la empresa intenta mejorar su nivel de servicio. Los directores de algunos centros de servicio pueden variar su capacidad teniendo personal y máquinas desocupadas que, en un momento dado, pueden asignarse a estaciones de servicio específicas para evitar o reducir colas excesivamente largas. En un supermercado, el director puede aumentar el número de cajas en funcionamiento cuando sea necesario. En los mostradores de embarque de los aeropuertos y en las ventanillas de caja de un banco, se solicitan empleados a tiempo parcial para que ayuden cuando sea necesario. Cuando el servicio aumenta (es decir, la velocidad aumenta), disminuye, sin embargo, el coste de tiempo empleado esperando en la cola. El coste de la espera puede reflejar las pérdidas en productividad de los trabajadores como consecuencia de que sus herramientas o máquinas estan esperando a ser reparadas, o puede simplemente ser una estimación del coste que suponen los clientes perdidos por un servicio pobre y largas colas. En algunos sistemas de servicio (por ejemplo, un servicio de ambulancias de emergencia), el coste de largas líneas de espera puede ser intolerablemente alto.

FUNCIÓN:

Una de las varias clasificaciones que existen en la literatura sobre Dirección de Operaciones reconoce los principales temas que aborda este campo:

a) Diseño de sistemas productivos,
b) Operación y control de sistemas, y
c) Calidad y planes de mejora.

El diseño de sistemas productivos incluye cuestiones tales como diseño de productos y servicios (actividad que impacta en gran medida el éxito de la organización), selección de los procesos y diseño de la capacidad, diseño del arreglo de las instalaciones, diseño de los sistemas de trabajo y localización de planta.

La operación y control de los sistemas incluye temas como planeación agregada, administración de inventarios, planeación de requerimientos de material, sistemas justo a tiempo, administración de las cadenas de suministro, programación de actividades y administración de proyectos. Debido a que esta tesis esta enfocada a líneas de espera es conveniente ubicarlas dentro de la Dirección de Operaciones. La figura 1.4 es una de las maneras como pueden ser ubicadas las líneas de espera dentro del campo de la Dirección de Operaciones (autores como William J. Stevenson, colocan a las líneas de espera dentro de la función de operación del sistema, sin embargo, para fines de este trabajo se consideró que es más conveniente ubicarlas dentro del tema de diseño de servicios).

Finalmente el tema de calidad en Dirección de Operaciones abarca asuntos relacionados al control de calidad, administración de la calidad total, solución de problemas y mejoramiento de los procesos.

ALCANCE:

La teoría de colas o líneas de espera tiene que ver principalmente con los procesos caracterizados por llegadas aleatorias (llegadas a intervalos aleatorios); el servicio al cliente también es un proceso aleatorio. Si se supone que hay costos asociados con la espera en la línea de espera y que hay costos para añadir más canales (agregar más instalaciones de servicio), lo que se busca es minimizar la suma de los costos de espera y costos derivados de proveer instalaciones de servicio.

Los modelos de líneas de espera se representan por medio de fórmulas matemáticas y relaciones que pueden ser empleadas para determinar las características operativas (medidas de desempeño) para una línea de espera.

De los cálculos se obtendrá información como el número esperado de personas en la fila, tiempo de espera estimado para las llegadas y el porcentaje esperado de utilización de las instalaciones de servicio. Los directivos que cuenten con esta información están mejor preparados para tomar una decisión que equilibre los niveles de servicio contra el costo para proveer este servicio.

- Dirección de Operaciones
  - Diseño
    - Productos
    - Servicios
      - Líneas de Espera
        - Sistema de líneas de Espera (*)
        - Modelos de líneas de espera
  - Operación
  - Planes de mejora

- (*)
  - Llegada de clientes
    - Tamaño de la población
    - Distribución de llegadas
  - Sistemas de servicio
    - Características de la línea de espera
      - Longitud
      - Número de líneas
      - Disciplina de la línea de espera
    - Velocidad de servicio
    - Estructura de la línea
  - Salida

Figura 1.4 Las líneas de espera en la Dirección de Operaciones

CAPÍTULO 2. MODELOS CON PROCESO DE NACIMIENTO Y MUERTE; Y FIFO

Es imporantante recordar que la teoría de líneas de espera abarca un grupo grande de modelos, en donde cada uno se refiere a un tipo diferente de situación de línea de espera. En primer lugar, no pretende "resolver" problemas de líneas de espera; más bien, describen el sistema de líneas de espera al calcular las características de operación de la línea.

El propósito de este capítulo es dar una visión general de los modelos de líneas de espera más sencillos y familiarizarnos con la notación.

2.1 ESTRUCTURA BÁSICA DE LOS MODELOS DE LÍNEAS DE ESPERA

En un sistema de líneas de espera existen cinco componentes principales que son los siguientes:

- Llegadas: Los clientes llegan al sistema en busca de un servicio, y pueden ser personas, máquinas que requieren reparaciones, llamadas teléfonicas que hay que contestar, pacientes en una sala de espera, etc. Es muy importante la manera en que llegan estos clientes al sistema. Pueden llegar individualmente o por lotes; a intervalos regulares o con un patrón aleatorio; pueden venir de una población infinita o muy grande, o pueden venir de un conjunto finito (las 10 máquinas de un taller que pueden averiarse y requerir reparaciones).

  Definir el proceso de las llegadas en una línea de espera implica determinar la distribución de probabilidad del número de arribos en un determinado lapso. Las llegadas ocurren "de manera aleatoria" en muchos casos de líneas de espera; es decir cada llegada es independiente de otras y no es posible pronosticar el momento en el que va a ocurrir una; sin embargo existe la "distribución de probabilidad de Poisson" que ofrece una buena descripción del patrón de llegadas.

  Utilizando la función de probabilidad de Poisson, se define de la siguiente manera la probabilidad de x llegadas en un lapso específico:

  $$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \text{para x} = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$

  en donde

  x = número de llegadas en el periodo (o intervalo de tiempo)

  λ = número promedio de llegadas por periodo

- Servicios: Hay que dar a cada cliente un servicio, como vender un boleto, atención en una ventanilla de un banco, reparar maquinas, o enviar una grúa para que remolque un automóvil averiado. El tiempo que se requiere para concluir el servicio es el segundo elemento de importancia, y puede ser el mismo para cada cliente o variar considerablemente de forma aleatoria.

  El tiempo de servicio es el que el cliente o unidad deja transcurrir en la instalación una vez que se inicia el servicio. Los tiempos de servicio rara vez son constantes. Con frecuencia, "la distribución de probabilidad exponencial" proporciona una buena aproximación de los tiempos de servicio en los que hay líneas de espera. Si la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio es exponencial, la probabilidad de que el tiempo de servicio sea menor que o igual a un tiempo o duración t está dada por:

  $$\text{P(tiempo de servicio} \leq \text{t)} = 1 \text{ - } e^{-\mu t}$$

  en donde

  μ = número promedio de unidades que pueden ser atendidas por periodo

- Número de estaciones de servicio: Puede existir una sola estación de servicio o canal, o varios. Un cliente puede ser atendido por un solo punto de servicio o varios a la vez, y los puntos de servicio pueden tener tasas de servicio diferentes (algunos cajeros de ventanilla en los bancos son más rápidos que otros).

- Disciplina de la línea de espera: Mientras los clientes esperan el servicio, están en la cola. Puede haber una sola cola o varias por cada servidor. El espacio de la cola puede ser limitado y los clientes que llegan cuando la cola está llena pueden retirarse (lo que se denomina rechazo). Al describir un sistema de líneas de espera, debe definirse la forma en que se acomodan las unidades para darles servicio. En general, para la mayoría de las líneas manejadas de acuerdo con las necesidades de los clientes, las unidades que esperan recibir servicio "se atienden sobre la base del primero que llega". Cuando se atiende a las unidades de esta manera se dice que se sigue una disciplina FIFO (primero que llega, primero que sale). Sin embargo, en algunos casos se requieren diferentes disciplinas para la fila. Por ejemplo, en un hospital si llega un paciente de emergencia se le atendie antes que a un paciente que tiene tiempo esperando, pero que sólo va a consulta; aquí se utiliza una disciplina LIFO (último que llega, primero que sale). El servicio también puede proporcionarse en orden aleatorio.

- Medidas de desempeño: Hay varias formas de evaluar la calidad del servicio en un sistema de procesamiento. Los resultados pueden evaluarse para un periodo corto una vez que el sistema abre, o por los resultados a largo plazo o de equilibrio. Por lo general es importante el tiempo que esperan los clientes y se puede considerar el promedio de tiempo de espera o una medida como el porcentaje de clientes que tienen que esperar más de una cantidad de tiempo preestablecido; por ejemplo, 10 minutos. El número promedio de clientes en la cola, la tasa de utilización del equipo y el costo de operación del sistema son las otras medidas importantes que podrían ser usadas para determinar el número óptimo de servidores y la capacidad del sistema de espera.

Un sistema de procesamiento dado puede tener cualquier combinación de los elementos descritos hasta ahora. Por consiguiente, existe un número muy grande de posibles sistemas, y ningún modelo matemático puede describirlos todos.

Los modelos de líneas de espera constan de fórmulas y relaciones matemáticas que pueden utilizarse para determinar las "características de operación" (medidas de desempeño) de una fila. Algunas de las catacterísticas de operación de interés son las siguientes:

1. La probabilidad de que no haya unidades en el sistema.
2. El número promedio de unidades en la línea de espera.
3. El número promedio de unidades en el sistema (el número promedio de unidades que se encuentran en la línea de espera más el número de unidades a las que se les está atendiendo).
4. El tiempo promedio que una unidad pasa en la línea de espera.
5. El tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema (el tiempo de espera más el tiempo de servicio).
6. La probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar para recibir el servicio.
7. La probabilidad de que haya "n" unidades en el sistema.

Fuente de entrada (población potencial): Una característica de la fuente de entrada es su tamaño. El tamaño es el número total de clientes que pueden requerir servicio en determinado momento, es decir el número total de clientes potenciales distintos. Esta población a partir de la cual surgen las unidades que llegan se llaman población de entrada. Puede suponerse que el tamaño es finito o infinito (de modo que también se dice que la fuente de entrada es limitada o ilimitada). Como los cálculos son mucho más sencillos para el caso infinito, esta suposición se hace a menudo aún cuando el número real sea un número fijo relativamente grande y deberá tomarse como una suposición implicita en cualquier modelo que no establezca otra cosa. El caso finito es más difícil analíticamente, pues el número de clientes en la línea de espera afecta el número potencial de clientes fuera del sistema en cualquier momento; pero debe hacerse esta suposición finita si la tasa a la que la fuente de entrada genera clientes nuevos queda afectada en forma significativa por el número de clientes en el sistema de línea de espera. También se debe especificar el patrón estadístico mediante el cual se generan los clientes a través del tiempo. La suposición más común es que se generan de acuerdo con un proceso de Poisson. Este caso corresponde a aquel cuyas llegadas al sistema ocurren de manera aleatoria pero con cierta tasa media fija y sin importar cuantos clientes están ya ahí (por lo que el tamaño de la fuente es infinito). Una suposición equivalente es que la distribución de probabilidad del tiempo que transcurre entre dos llegadas consecutivas es exponencial. Se hace referencia al tiempo que transcurre entre dos llegadas consecutivas como el tiempo entre llegadas.

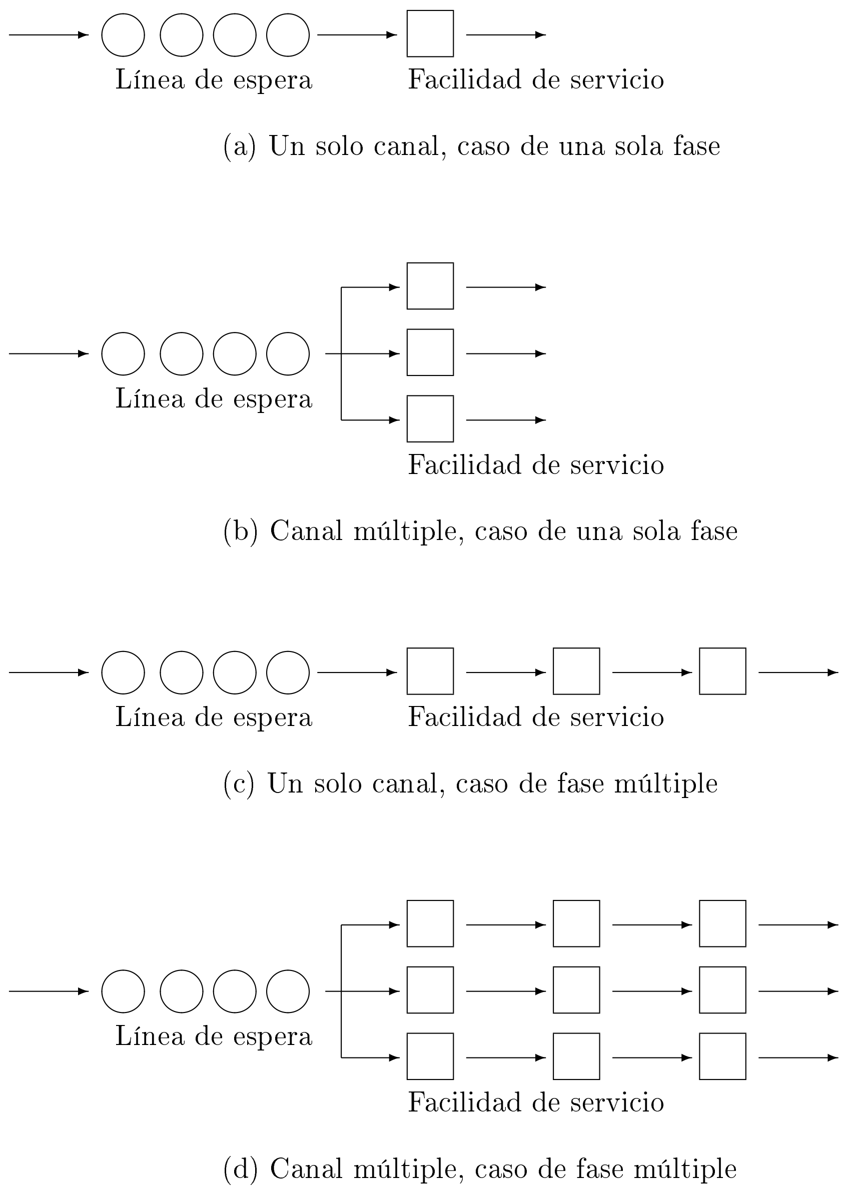
Cualquier otra suposición no usual sobre el comportamiento del sistema debe especifícarse también. Un ejemplo sería cuando se pierde un cliente porque desiste o rehusa entrar al sistema, ya que la línea de espera es demasido larga.

<u>Línea de espera:</u> Una línea de espera se caracteriza por el número máximo permisible de clientes que pueden admitir. Las líneas de espera pueden ser finitas o infinitas, según si este número es finito o infinito. La suposición de una línea de espera infinita es la estándar para la mayor parte de los modelos, incluso en situaciones en las que de hecho existe una cota superior (relativamente grande) sobre el número permisible de clientes, ya que de manejar una cota así puede ser un factor complicado para el análisis. Los sistemas de línea de espera en los que la cota superior es tan pequeña que se llega a ella con cierta frecuencia, necesitan suponer una línea de espera finita.

<u>Mecanismo de servicio:</u> El mecanismo de servicio consiste en una o más instalaciones de servicio, llamados servidores. Si existe más de una instalación de servicio, puede ser que se sirva al cliente a través de una secuencia de ellas (canales de servicio en serie). En una instalación dada, el cliente entra en uno de estos canales y el servidor le presta el servicio completo.

Un modelo de líneas de espera debe especifícar el arreglo de las instalaciones y el número de servidores (canales paralelos) en cada una. Los modelos más elementales suponen una instalación, ya sea con uno o un número finito de servidores.

Existen cuatro estructuras básicas en las situaciones de la línea de espera, las cuales describen las condiciones generales en el lugar del servicio. La situación más simple ocurre cuando las unidades que llegan forman una sola instalación de procesamiento, por ejemplo, una peluquería atendida por un solo peluquero. Esto es lo que se conoce como caso de una sola fase y un solo canal. Si se aumenta el número de estaciones de procesamiento (dos o más peluqueros), pero aún se mantiene una línea de espera, tenemos el caso de un canal múltiple y una sola fase, ya que un cliente puede ser atendido por cualquiera de los peluqueros. Una línea de ensamble sencilla tiene cierto número de medios de servicio que están en serie o tándem y es el caso de un solo canal y fases múltiples, el cual podría ejemplificarse por medio de dos o más líneas paralelas de producción. La figura 2.1 muestra los 4 casos básicos.



(a) Un solo canal, caso de una sola fase

(b) Canal múltiple, caso de una sola fase

(c) Un solo canal, caso de fase múltiple

(d) Canal múltiple, caso de fase múltiple

FIGURA 2.1 Cuatro estructuras básicas de las situaciones de la línea de espera.

Notación: Por convención los modelos de líneas de espera se representan con una notación abreviada como sigue:

Distribución de tiempos de servicio

— / — / — Número de servidores

Distribución de tiempos de llegadas

En donde:

M = Distribución de Markov (Poisson o exponencial)

D = Distribución determinística (tiempos constantes)

E_k = Distribución Erlang (parámetro de forma = k)

G = Distribución general (permite cualquier distribución arbitraria)

La notación que se empleara para líneas de espera es la siguiente:

λ = Número promedio de clientes que llegan en una unidad de tiempo

μ = Número promedio de clientes al cual puede dar servicio la instalación en una unidad de tiempo

$1/\mu$ = Tiempo promedio de servicio

L_q = Número esperado en cola (el número en cola no incluye las unidades que están siendo atendidas)

L = Número esperado de unidades que se atienden y/o esperan en el sistema

P_o = Probabilidad de que haya cero unidades en el sistema

P_n = Probabilidad de tener n unidades en el sistema

W_q = Tiempo probable de espera en la línea de espera de una llegada

W = Tiempo probable de permanencia en el sistema (tanto en la línea de espera como en el servicio)

k = Número de canales

σ = Desviación estándar del tiempo de servicio

P_j = Probabilidad de que exactamente j de los k canales estén ocupados para j = 0,1,2,...,k

Ecuaciones de flujo de Little: Las principales características de operación que interesan son las de L_q, L, W_q y W. John D.C. Little mostró que estas cuatro características están relacionadas mediante algunas relaciones muy generales, que se aplican a diversos modelos de líneas de espera. Dos de las relaciones generales, son las siguientes:

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

La primera ecuación nos muestra que es posible encontrar el número promedio de unidades en el sistema, L, multiplicando la tasa promedio de llegadas, λ, por el tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema, W. Y la segunda ecuación nos muestra que se tiene la misma relación general entre el número promedio de unidades en la línea de espera, L_q, y el tiempo promedio que una unidad pasa en la línea de espera, W_q.

Proceso de nacimiento y muerte: La mayor parte de los modelos elementales de colas suponen que las entradas (llegada de clientes) y las salidas (clientes que se van) del sistema ocurren de acuerdo al "proceso de nacimiento y muerte". Este importante proceso de teoría de probabilidad tiene aplicaciones en varias áreas. Sin embargo, en el contexto de teoría de colas, el término **nacimiento** se refiere a la "llegada" de un nuevo cliente al sistema de colas y el término **muerte** se refiere a la "salida" del cliente servido.

Después de haber definido la notación que se utilizará, podemos pasar al tema de líneas de espera en si.

2.2 MODELO M/M/1

Definición: Es el modelo más sencillo y sus características de operación son: un solo canal, llegadas según Poisson, tiempos de servicio exponenciales y la disciplina de la línea de espera es FIFO.

Fórmulas: Las fórmulas que pueden ser empleadas para determinar las características de operación del modelo M/M/1 son las siguientes:

1. Probabilidad de que no haya unidades en el sistema:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Número promedio de unidades en la línea de espera (largo de la fila):

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

3. Número promedio de unidades en el sistema (largo total):

$$\mathrm{L} = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Tiempo promedio que una unidad pasa en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

5. Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema:

$$\mathrm{W} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar para obtener el servicio:

$$P_W = \frac{\lambda}{\mu}$$

7. Probabilidad de que haya n unidades en el sistema:

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0$$

Estas ecuaciones son aplicables solamente cuando la tasa promedio de servicio, μ, es "mayor" que la tasa promedio de llegadas, λ, en otras palabras, cuando $\lambda/\mu < 1$. Si no existe esta condición, la línea de espera continuaría creciendo sin límite puesto que la instalación de servicio no tiene capacidad suficiente para manejar las unidades que llegan.

Ejemplo: Se considerará la situación de un restaurante de comida rápida, en donde se venden hamburguesas, papas fritas, refrescos y leches malteadas, así como también un número limitado de artículos especiales y postres. Aunque los administradores pretenden dar un servicio inmediato a todos los clientes, en ocasiones llegan más de los que el personal puede atender. Por ello, los clientes esperan en la fila o cola para colocar y recibir sus pedidos.

A los administradores les preocupa que el hecho de que los métodos que están utilizando en estos momentos para atender a sus clientes están dando como resultado tiempos de espera excesivos. Han solicitado que se realice un estudio de líneas de espera para que les ayude a determinar la manera más adecuada para mejorar el servicio.

En la operación actual tienen una sola caja de pago, un empleado recibe el pedido, determina su costo total, recibe el dinero del cliente y después surte el pedido. Una vez que ha cubierto el pedido del primer cliente, el empleado recibe el pedido del que sigue en la cola.

Supongase que se han analizado los datos sobre llegadas de clientes y que se ha llegado a la conclusión de que la tasa promedio de arribos es de 45 clientes por hora y siguen una distribución de Poisson. Para un lapso de 1 minuto la tasa promedio de llegadas sería $\lambda = 45/60 = 0.75$ llegadas por minuto.

En este restaurante de comida rápida el servicio comienza cuando el cliente comienza a expresar el pedido ante el empleado y continúa hasta que el cliente recibe lo que solicitó. Los tiempos de servicio rara vez son constantes (el número de artículos y su combinación que se ordenan varían considerablemente de un cliente a otro) "las ordenes pequeñas se pueden manejar en cuestión de segundos, pero pueden necesitarse más de dos minutos para procesar pedidos u órdenes más grandes".

Se ha estudiado el proceso de recepción y surtido de órdenes y se ha encontrado que el único empleado que sirve los alimentos puede procesar un promedio de 60 órdenes de clientes por hora con distribución Exponencial. Con base en un tiempo de un minuto, la tasa media o promedio de servicio sería $\mu = 60/60 = 1$ cliente por minuto.

Respuesta: Tenemos que $\mu > \lambda$ $(1 > 0.75)$ por lo tanto se pueden utilizar las fórmulas del modelo para determinar las características de operación, de tal modo que se tenga información útil para la toma de decisiones.

$$P_0 = 1 - \frac{0.75}{1} = 0.25$$

$$L_q = \frac{0.75^2}{1(1-0.75)} = 2.25 \text{ clientes}$$

$$L = 2.25 + \frac{0.75}{1} = 3 \text{ clientes}$$

$$W_q = \frac{2.25}{0.75} = 3 \text{ minutos}$$

$$W = 3 + \frac{1}{1} = 4 \text{ minutos}$$

$$P_W = \frac{0.75}{1} = 0.75$$

$P_1 = (\frac{0.75}{1})^1(0.25) = 0.1875$

$P_2 = (\frac{0.75}{1})^2(0.25) = 0.1406$

Tabla 2.1 Probabilidad de que haya n clientes en el sistema para el problema de líneas de espera para el restaurante.

Número de clientes	**Probabilidad**
0	0.2500
1	0.1875
2	0.1406
3	0.1055
4	0.0791
5	0.0593
6	0.0445
7 o más	0.1335

Mejoramiento de operación de la línea de espera: Después de revisar las características de operación que se obtienen mediante el modelo de líneas de espera, los administradores del restaurante concluyeron que era deseable realizar mejoramientos al sistema. La mayor parte de las veces los mejoramientos de las operaciones en líneas de espera se concentran en mejorar la tasa de servicio. En términos generales, los mejoramientos en el servicio se hacen con respecto a las siguientes líneas:

1. Aumentar la tasa promedio de servicio, μ, haciendo un cambio creativo en el diseño o utilizando una nueva tecnología.
2. Añadiendo canales paralelos de servicio de manera que sea posible atender a más unidades a la vez.

2.3 MODELO M/M/1 CON POBLACIÓN DEMANDANTE FINITA

Definición: Sus características de operación son un solo canal, llegadas según Poisson, tiempos de servicio exponenciales, la disciplina de la línea de espera es FIFO y el tamaño de la población es N.

Fórmulas: Las fórmulas que se utilizaron para determinar las características de operación son las siguientes:

1. Probabilidad de que no haya unidades en el sistema:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n}$$

2. Número promedio de unidades en la línea de espera:

$$L_q = \text{N - } \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

3. Número promedio de unidades en el sistema:

$$\text{L} = L_q + (1 - P_0)$$

4. Tiempo promedio que cada unidad pasa en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{(N-L)\lambda}$$

5. Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema:

$$\text{W} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilidad de que haya n unidades en el sistema:

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n P_0 \qquad \text{para n = 0,1,...,N}$$

Ejemplo: Una empresa tiene un grupo de 6 máquina idénticas y todas operan un promedio de 20 horas entre paros por descompostura. Así que la tasa promedio de llegadas, o de solicitudes de servicio de reparación, para cada máquina es de λ = 1/20 = 0.05 máquinas por hora. Como las descomposturas ocurren al azar se utiliza la distribución probabilística de Poisson para describir el proceso de llegadas de máquinas averiadas. Un operario del departamento de mantenimiento es quien proporciona el servicio de reparación de un solo canal para las 6 máquinas. Los tiempos de servicio con distribución exponencial tienen un promedio de 2 horas por máquina, o bien una tasa promedio de servicio de $\mu = 1/2 = 0.50$ máquinas por hora.

Respuesta: Como se tiene que $\mu > \lambda$ (0.50 > 0.05), entonces se pueden utilizar las fórmulas del modelo para determinar las características de operación, para que se tenga información útil para la toma de decisiones.

$$P_0 = \frac{1}{[\frac{6!}{(6-0)!}(\frac{0.05}{0.50})^0]+[\frac{6!}{(6-1)!}(\frac{0.05}{0.50})^1]+...+[\frac{6!}{(6-6)!}(\frac{0.05}{0.50})^6]} = 0.4845$$

L_q = 6 - $(\frac{0.05+0.50}{0.05})(1-0.4845)$ = 0.3295 máquina

L = 0.3295 + (1 - 0.4845) = 0.845 máquina

$W_q = \frac{0.3295}{(6-0.845)0.05} = 1.2784$ horas

W = 1.2784 + $\frac{1}{0.50}$ = 3.2784 horas

$P_1 = \frac{6!}{(6-1)!}(\frac{0.05}{0.50})^1(0.4845) = 0.2907$

$P_6 = \frac{6!}{(6-6)!}(\frac{0.05}{0.50})^6(0.4845) = 0.0003$

Tabla 2.2 Probabilidad de que haya n clientes en el sistema para la línea de espera de un canal con población finita para la empresa.

Número de clientes	**Probabilidad**
0	0.4845
1	0.2907
2	0.1454
3	0.0581
4	0.0174
5	0.0035
6	0.0003

Mejoramiento de operación de la línea de espera: Al igual que con los otros modelos de líneas de espera, las características de operación ofrecen a los administradores información con respecto a la operación de la línea de espera. El que estas características de operación indiquen o no que se requiere un mejor servicio de reparación depende del costo del tiempo muerto de las máquinas con desperfectos, en comparación con el costo de asignar una persona adicional para convertir la operación de reparaciones en un sistema de 2 canales, o en uno más veloz de un solo canal.

2.4 MODELO M/M/s

Definición: Este modelo consta de dos o más canales de distribución, s, que se supone que son idénticos en términos de capacidad de servicio. En el sistema de canales múltiples, las unidades que llegan esperan en una sola línea y después pasan al primer canal disponible para ser atendidas. Las llegadas son de tipo Poisson y los tiempos de servicio exponenciales. La tasa promedio de servicio, μ, es la misma para todos los canales. Y la disciplina de la línea de espera es FIFO.

Fórmulas: Las fórmulas que pueden ser empleadas para determinar las características de operación de este modelo son las siguientes:

1. Probabilidad de que no haya unidades en el sistema:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)}$$

2. Número promedio de unidades en la línea de espera:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} P_0$$

3. Número promedio de unidades en el sistema:

$$\mathrm{L} = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Tiempo promedio que cada unidad pasa en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

5. Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema:

$$\mathrm{W} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar:

$$P_W = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right) P_0$$

7. Probabilidad de que haya n unidades en el sistema:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \qquad \text{para n} \leq \text{s}$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{(n-s)}} P_0 \qquad \text{para n} > \text{s}$$

Estas ecuaciones son aplicables solamente cuando la tasa promedio de servicio para el sistema de canales múltiples, sμ, es "mayor" que la tasa promedio de llegadas, λ, en otras palabras, cuando $\lambda/s\mu < 1$. Si no existe esta condición, la línea de espera continuaría creciendo sin límite puesto que la instalación de servicio no tiene capacidad suficiente para manejar las unidades que llegan.

Ejemplo: Se puede ampliar la operación del modelo del restaurante que se vio en el modelo M/M/1 para convertirlo en un sistema de dos canales, instalando una segunda caja registradora y utilizando a otra persona para que tome los pedidos y los surta, y que también se encargue de operar dicho segundo canal de servicio.

Respuesta: Tenemos que s$\mu > \lambda$ ($2 > 0.75$) por lo tanto se pueden utilizar las fórmulas del modelo para determinar las características de operación, de tal modo que se tenga información útil para la toma de decisiones.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{(0.75/1)^n}{n!} + \frac{(0.75/1)^2}{2!}\left(\frac{2*1}{2*1-0.75}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{(0.75/1)^0}{0!} + \frac{(0.75/1)^1}{1!} + \frac{(0.75/1)^2}{2!}\left(\frac{2*1}{2*1-0.75}\right)} = 0.4545$$

$$L_q = \frac{(0.75/1)^2 (0.75)(1)}{(2-1)![2(1)-0.75]^2}(0.4545) = 0.1227 \;\; \text{clientes}$$

$$\text{L} = 0.1227 + \frac{0.75}{1} = 0.8727 \;\; \text{clientes}$$

$$W_q = \frac{0.1227}{0.75} = 0.1636 \;\; \text{minutos}$$

$$\text{W} = 0.16 + \frac{1}{1} = 1.1636 \;\; \text{minutos}$$

$$P_W = \frac{1}{2!} \left(\frac{0.75}{1}\right)^2 \left(\frac{(2)(1)}{(2-0.75)}\right)(0.4545) = 0.2045$$

$$P_1 = \frac{(0.75/1)^1}{1!}(0.4545) = 0.3409$$

$$P_3 = \frac{(0.75/1)^3}{2! 2^{(3-2)}}(0.4545) = 0.0479$$

Tabla 2.3 Probabilidad de que haya n clientes en el sistema para la línea de espera de dos canales para el restaurante.

Número de clientes	**Probabilidad**
0	0.4545
1	0.3409
2	0.1278
3	0.0479
4	0.0180
5 o más	0.0109

Mejoramiento de operación de la línea de espera: Con estos resultados se pueden comparar las características de operación en estado estable con dos canales de servicio, con las catacterísticas de operación del sistema original de un solo canal:

1. El tiempo promedio que se requiere entre el momento en que un cliente entra en la línea de espera y el momento en el que recibe su pedido (el tiempo de espera más el tiempo de servicio) se reduce de W = 4 min a W = 1.1636 min.

2. La longitud promedio de la línea de espera se reduce de L_q = 2.25 clientes a L_q = 0.1227 clientes.

3. Se reduce el tiempo promedio que un cliente espera para ser atendido de W_q = 3 min a W_q = 0.1636 min.

4. Se reduce el porcentaje de los clientes que tienen que esperar para ser atendidos de P_W = 0.75 o 75%, a P_W = 0.2045 o sea 20.45%.

Resulta evidente que el sistema con dos canales mejoraría en gran medida las características de operación de la línea de espera. La decisión final respecto a la política de personal en el restaurante recae en sus administradores. El estudio sobre líneas de espera simplemente ha previsto las características de operación que se pueden considerar según las distintas configuraciones.

2.5 MODELO M/M/1/K

Definición: Es una variación de cola finita del modelo M/M/1. En este tipo de sistema se puede aceptar simultaneamente un máximo de K clientes en las instalaciones de servicio. A los clientes que llegan a las instalaciones cuando éstas se encuentran llenas, se les niega la entrada al sistema y este cliente lo deja para siempre. Desde el punto de vista del proceso de nacimiento y muerte, la tasa media de entrada al sistema se hace cero en estos momentos. Por lo mismo, la única modificación necesaria para introducir una cola finita es cambiar los parámetros λ_n a

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para n=0,1,2,...,K-1} \\ 0 & \text{para n}\geq\text{K} \end{cases}$$

<u>Fórmulas:</u>

1. Probabilidad de que no haya unidades en el sistema:

$$P_0 = \frac{1-(\lambda/\mu)}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}$$

2. Número promedio de unidades en la línea de espera:

$$L_q = \text{L - (1 - } P_0)$$

3. Número promedio de unidades en el sistema:

$$\text{L} = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)}{1-(\lambda/\mu)} - \frac{(K+1)(\lambda/\mu)^{K+1}}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} & \text{para } \lambda \neq \mu \\ \\ \frac{K}{2} & \text{para } \lambda = \mu \end{cases}$$

4. Tiempo promedio que cada unidad pasa en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-P_K)}$$

5. Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema:

$$\text{W} = \frac{L}{\lambda(1-P_K)}$$

6. Probabilidad de que haya n unidades en el sistema:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1-(\lambda/\mu)}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}(\lambda/\mu)^n & \text{para } \lambda \neq \mu \quad \text{y} \quad \text{n=0,1,2,...,K} \\ \\ \frac{1}{(K+1)} & \text{para } \lambda = \mu \quad \text{y} \quad \text{n=0,1,2,...,K} \end{cases}$$

Ejemplo: Una estación de servicio en un camino tiene sólo una bomba para despachar gasolina. Los automóviles llegan a comprar gasolina siguiendo un proceso Poissoniano, con una tasa promedio de 10 por hora. Aparentemente el tiempo necesario para dar servicio a un automóvil se distribuye exponencialmente, con una media de 2 minutos. En la estación caben un máximo de 4 automóviles y las leyes locales de tránsito prohiben que los autos esperen en la vía pública.

Respuesta: Este es un sistema M/M/1/4 con

$$P_0 = \frac{1-(10/30)}{1-(10/30)^{4+1}} = 0.6694$$

$$L_q = (0.4793) - (1 - 0.6694) = 0.1487 \ \text{autos}$$

$$\text{L} = \frac{(10/30)}{1-(10/30)} - \frac{(4+1)(10/30)^{4+1}}{1-(10/30)^{4+1}} = 0.4793 \ \text{autos}$$

$$W_q = \frac{0.1487}{10(1-0.0083)} = 0.015 \ \text{hora}$$

$$\text{W} = \frac{0.4793}{10(1-0.0083)} = 0.0483 \ \text{hora}$$

$$P_4 = \frac{1-(10/30)}{1-(10/30)^{4+1}}(10/30)^4 = 0.0083$$

Tabla 2.4 Probabilidad de que haya n clientes en el sistema para la línea de espera M/M/1/4 para la estación de servicio.

Número de clientes	**Probabilidad**
0	0.6694
1	0.2231
2	0.0744
3	0.0248
4	0.0083

Mejoramiento de operación de la línea de espera: Con estas características de operación los administradores tienen información sobre la línea de espera de la estación de servicio para poder tomar una buena decisión.

2.6 MODELO M/M/s/K

Definición: Es un sistema de capacidad finita con s servidores con tiempos de servicio (los cuales no dependen del estado del sistema) independientes entre si y con la misma distribución exponencial. Ya que la capacidad del sistema debe ser al menos igual al número de servidores, s $\leq$ K. Para este sistema,

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n = 0,1,2,...,K-1 \\ 0 & \text{para } n = K,K+1,... \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{para } n = 0,1,2,...,s \\ s\mu & \text{para } n = s+1,s+2,... \end{cases}$$

Fórmulas:

1. Probabilidad de que no haya unidades en el sistema:

$$P_0 = \begin{cases} [\frac{s^s(\lambda/s\mu)^{s+1}[1-(\lambda/s\mu)^{K-s}]}{s![1-(\lambda/s\mu)]} + \sum_{n=0}^{S} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}]^{-1} & \text{para } \lambda \neq s\mu \\ [\frac{s^s}{s!}(K-s) + \sum_{n=0}^{S} \frac{s^n}{n!}]^{-1} & \text{para } \lambda = s\mu \end{cases}$$

2. Número promedio de unidades en la línea de espera:

$$L_q = \frac{s^s(\lambda/s\mu)^{s+1}}{s![1-(\lambda/s\mu)]^2}[1-(\lambda/s\mu)^{K-s} - (1-(\lambda/s\mu))(K-s)(\lambda/s\mu)^{K-s}]P_0$$

3. Número promedio de unidades en el sistema:

$$L = \sum_{n=0}^{s-1} nP_n + L_q + s[1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n]$$

4. Tiempo promedio que cada unidad pasa en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-P_K)}$$

5. Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilidad de que haya n unidades en el sistema:

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & \text{para n = 0,1,2,...,s} \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} P_0 & \text{para n = s+1,...,K} \\ 0 & \text{para n = K+1,K+2,...} \end{cases}$$

Ejemplo: Un autoservicio de lavado de autos tiene cuatro secciones. En cada una, los clientes pueden lavar y encerar sus autos. Por otro lado, se tiene espacio para un máximo de tres automóviles adicionales cuando las secciones de lavado están ocupadas. Los clientes llegan al servicio siguiendo un proceso Poissoniano, a una tasa promedio de 15 x hora. Si no hay espacio para que esperen en terrenos del servicio de lavado, los clientes que llegan deberán irse. Aparentemente el tiempo necesario para dar servicio a un automóvil se distribuye exponencialmente, con una media de 12 minutos.

Respuesta: Este es un sistema M/M/4/7 con

$$P_0 = [\frac{4^4(15/4*5)^{4+1}[1-(15/4*5)^{7-4}]}{4![1-(15/4*5)]} + \sum_{n=0}^{4} \frac{(15/5)^n}{n!}]^{-1} = 0.045$$

$$L_q = \frac{4^4(0.75)^{4+1}}{4![1-(0.75)]^2}[1-(0.75)^{7-4}-(1-(0.75))(7-4)(0.75)^{7-4}]0.045$$
$$= 0.477 \text{ auto}$$

$$\text{L} = \sum_{n=0}^{3} nP_n + 0.477 + 4[1-\sum_{n=0}^{3} P_n] = 3.2845 \text{ autos}$$

$$W_q = \frac{0.477}{15(1-0.0641)} = 0.034 \text{ hora}$$

$$\text{W} = 0.034 + \frac{1}{5} = 0.234 \text{ hora}$$

$$P_1 = \frac{(15/5)^1}{1!}(0.045) = 0.135$$

$$P_7 = \frac{(15/5)^7}{4!4^{7-4}}(0.045) = 0.0641$$

Tabla 2.5 Probabilidad de que haya n clientes en el sistema para la línea de espera M/M/4/7 para el autoservicio de lavado.

Número de clientes	**Probabilidad**
0	0.045
1	0.135
2	0.2025
3	0.2025
4	0.1519
5	0.1139
6	0.0854
7	0.0641

Mejoramiento de operación de la línea de espera: Con estas características de operación los administradores tienen información sobre la operación de la línea de espera del autoservicio de lavado de autos para poder tomar una buena decisión.

CAPÍTULO 3. MODELOS SIN PROCESO DE NACIMIENTO Y MUERTE; O CON LIFO

Si los modelos están basados en el proceso de nacimiento y muerte tienen muchas propiedades convenientes para la teoría de colas, pero sólo en cierto tipo de sistemas de colas proporcionan un ajuste razonable. En particular, la suposición de tiempos entre llegadas exponenciales implica que las llegadas ocurren aleatoriamente (proceso de entrada Poisson), lo cual es una aproximación razonable en muchas situaciones pero no cuando las llegadas están programadas o reguladas con todo cuidado. Todavía más, las distribuciones de tiempos de servicio reales con frecuencia se desvían bastante de la forma exponencial, sobre todo cuando los requerimientos de servicio de los clientes son muy parecidos.

El propósito de este capítulo es mostrar la importancia que tiene disponer de otros modelos de líneas de espera que utilicen otras distribuciones de probabilidad.

3.1 MODELOS CON DISTRIBUCIONES DE SERVICIO NO EXPONENCIALES

Desafortunadamente, el análisis matemático de los modelos de colas con distribuciones no exponenciales es mucho más difícil que los que se distribuyen exponencialmente. Se han podido obtener algunos resultados útiles para algunos modelos.

3.1.1 MODELO M/G/1

Definición: Este modelo de líneas de espera es de un solo canal en el que las llegadas se describen mediante una distribución probabilistica de Poisson. sin embargo, ahora se considera que la distribución de probabilidad para los tiempos de servicio no es necesariamente exponencial (G denota que se trata de una distribución de probabilidad general o no especificada). Y σ denota la desviación estándar del tiempo de servicio.

Fórmulas: Las fórmulas que se utilizan para describir las características de operación de este modelo son las siguientes:

1. Probabilidad de que no haya unidades en el sistema:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Número promedio de unidades en la línea de espera:

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2+(\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)}$$

3. Número promedio de unidades en el sistema:

$$\mathrm{L} = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Tiempo promedio que cada unidad pasa en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

5. Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema:

$$\mathrm{W} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar:

$$P_W = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ejemplo: Consideremos una tienda de especialidades que se encuentra en un centro comercial. Durante la tarde es atendida por un empleado. Las llegadas de los clientes son aleatorias, y la tasa promedio de llegadas es de 21 clientes por hora, o $\lambda = 21/60 = 0.35$ clientes por minuto. Un estudio del proceso muestra que el tiempo promedio de servicio es de 2 minutos por cliente, con una desviación estándar de $\sigma = 1.2$ minutos. El tiempo promedio de 2 minutos por cliente muestra que el empleado tiene una tasa promedio de servicio de $\mu = 1/2 = 0.5$ clientes por minuto.

Respuesta: Los siguientes cálculos muestran las características de operación de este sistema de líneas de espera.

$$P_0 = 1 \text{ - } \frac{0.35}{0.5} = 0.3$$

$$L_q = \frac{(0.35)^2(1.2)^2+(0.35/0.50)^2}{2(1-0.35/0.50)} = 1.1107 \text{ clientes}$$

$$\mathrm{L} = 1.11 + \frac{0.35}{0.50} = 1.8107 \text{ clientes}$$

$$W_q = \frac{1.11}{0.35} = 3.1734 \text{ minutos}$$

$$\mathrm{W} = 3.17 + \frac{1}{0.50} = 5.1734 \text{ minutos}$$

$P_W = \frac{0.35}{0.50} = 0.7$

Mejoramiento de operación de la línea de espera: El administrador de la tienda puede revisar estas características de operación para determinar si vale la pena programar el trabajo con un segundo empleado.

3.1.2 MODELO M/G/k CON DESALOJAMIENTO DE LAS UNIDADES BLOQUEADAS

Definición: Este modelo consta de canales múltiples, sus llegadas se distribuyen según Poisson, tiempos de servicio arbitrarios y sin línea de espera (no se permiten las esperas).

Fórmulas: Se aborda el problema de elegir el menor número de canales calculando las probabilidades de estado estable de que exactamente j de los k canales estén ocupados. Estas probabilidades se calculan de la siguiente manera:

$$P_j = \frac{(\lambda/\mu)^j/j!}{\sum_{i=0}^{k}(\lambda/\mu)^i/i!}$$

en donde:

$\lambda =$ tasa promedio de llegadas

$\mu =$ tasa promedio de servicio para cada canal

k = número de canales en el sistema

$P_j =$ probabilidad de que exactamente j de los k canales estén ocupados para j = 0,1,2,...,k

Es posible que el cálculo de probabilidad más importante sea P_k, que es la de que todos los k canales estén ocupados. Sobre una base porcentual, P_k señala el porcentaje de llegadas que quedan bloqueadas y a las que no se les permite el acceso al sistema.

Otra característica de operación que interesa para el modelo anterior es el número promedio de unidades que se encuentran en el sistema; obsérvese que éste equivale al número promedio de canales que se están utilizando. Usando L para denotar el número de unidades en el sistema, se tiene que:

$$L = \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_k)$$

Ejemplo: Una compañía utiliza un sistema telefónico de pedidos para sus productos de software para computadoras. Quienes llaman hacen sus pedidos utilizando el número telefónico de uso gratuito de la compañía. Supóngase que las llamadas que llegan a este número de teléfono lo hacen a una tasa promedio de 12 por hora. El tiempo que se requiere para procesar un pedido telefónico varía considerablemente de un pedido a otro. Sin embargo, se puede esperar que cada representante de ventas de la compañía maneje un promedio de 6 llamadas por hora. En estos momentos, su número telefónico tiene tres líneas o canales internos, cada uno de ellos operado por un representante de ventas. Las llamadas que se reciben en este número gratuito se transfieren en forma automática a alguna de las líneas o canales abiertos, si es que los hay.

Cuando las tres líneas están ocupadas, las personas que llaman obtienen una señal de ocupado. En el pasado, la empresa ha supuesto que las personas que llaman y reciben señal de ocupado vuelven a llamar después. Sin embargo, algunas investigaciones recientes sobre los pedidos telefónicos han mostrado que una porción importante de las personas que llaman y a las que se les negó el acceso, no vuelven a llamar después. Como estas llamadas que se eliminan representan ingresos perdidos para la empresa, los administradores han solicitado un análisis del sistema de pedidos por teléfono. Específicamente, los administradores pretenden saber el porcentaje de personas que llaman y reciben las señales de ocupado y que, por tanto, se les bloquea y excluye del sistema. Si la meta de los administradores es ofrecer una capacidad suficiente para manejar 90% de las llamadas, ¿cuántas líneas telefónicas y cuántos representantes de ventas debe emplear la empresa?.

Respuesta: Calculando P_3, la probabilidad de que la totalidad de las tres líneas telefónicas actualmente disponibles estén siendo utilizadas y que, por ello, se excluya a la persona que llama.

$$P_3 = \frac{(12/6)^3/6}{(12/6)^0/1 + (12/6)^1/1 + (12/6)^2/2 + (12/6)^3/6} = \frac{1.3333}{6.3333} = 0.2105$$

Con $P_3 = 0.2105$, se observa que aproximadamente 21% de las llamadas, o un poco más de una de cinco, están siendo bloqueadas. Sólo 79% de las mismas están siendo manejadas en forma inmediata por el sistema telefónico con tres líneas.

Supongase que la empresa amplía cuatro canales (o cuatro líneas). El siguiente cálculo muestra la probabilidad de que se utilicen los cuatro canales y de que queden en bloqueo las personas que llaman.

$$P_4 = \frac{(12/6)^4/24}{(12/6)^0/1 + (12/6)^1/1 + (12/6)^2/2 + (12/6)^3/6 + (12/6)^4/24} = \frac{0.6667}{7} = 0.0952$$

Tabla 3.1 Probabilidad del número de líneas ocupadas para el sistema de cuatro líneas de la empresa.

Número de líneas ocupadas	**Probabilidad**
0	0.1429
1	0.2857
2	0.2857
3	0.1905
4	0.0952

El siguiente cálculo muestra el número promedio de llamadas en el sistema de cuatro canales y, por ello, el número promedio de líneas y de representantes de ventas que estarán ocupados.

$$L = \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_4) = \frac{12}{6}(1 - 0.0952) = 1.8096$$

Mejoramiento de operación de la línea de espera: Con bloqueo solamente del 9.52% de las llamadas, el 90.48% de las personas que llaman logran hablar con los representantes de ventas de la compañía. Por ello, la empresa debe ampliar su operación de procesamiento de pedidos hasta cuatro líneas para satisfacer la meta de los administradores que consiste en ofrecer suficiente capacidad para manejar cuando menos el 90% de las llamadas.

Aunque, en promedio, menos de 2 líneas estarán ocupadas, se requiere el sistema de 4 líneas para ofrecer la capacidad de manejar cuando menos 90% de las llamadas.

3.1.3 MODELO M/D/1

Definición: Cuando el servidor consiste básicamente de la misma tarea rutinaria para todos los clientes, tiende a haber poca variación en el tiempo de servicio requerido. Muchas veces, el modelo proporciona una representación razonable de este tipo de situación porque supone que todos los tiempos de servicio en realidad son iguales a una "constante" fija (la distribución de tiempos de servicio degenerada) y que tiene un proceso de entrada Poisson con tasa media de llegadas fija λ.

Fórmulas: El modelo M/D/1 es un caso especial del modelo M/G/1, en donde $\sigma = 0$.

1. Número promedio de unidades en la línea de espera:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

2. Número promedio de unidades en el sistema:

$$\mathrm{L} = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

3. Tiempo promedio que cada unidad pasa en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

4. Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema:

$$\mathrm{W} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Ejemplo: Una máquina vende chocolate caliente. El tiempo de servicio es 30 segundos por taza y es constante ($\mu = 120$). Los clientes llegan con una tasa promedio de 80 por hora ($\lambda = 80$), y esta tasa tiene una distribución de Poisson.

Respuesta: Los siguientes cálculos muestran las características de operación de este sistema de líneas de espera.

$L_q = \frac{(80)^2}{2(120)(120-80)} = 0.67$ clientes

$\mathrm{L} = 0.67 + \frac{80}{120} = 1.33$ clientes

$W_q = \frac{0.67}{80} = 0.0083$ horas

$\mathrm{W} = 0.0083 + \frac{1}{120} = 0.0166$ horas

Mejoramiento de operación de la línea de espera: Con estas características de operación el dueño de la máquina puede decidir si vale la pena expandir su negocio a dos máquinas.

3.1.4 MODELO M/E_k/s

Definición: El modelo M/D/s supone una variación cero en los tiempos de servicio (σ=0), mientras que la distribución exponencial de tiempos de servicio supone una variación muy grande ($\sigma = 1/\mu$). Entre distribuciones de tiempos de servicio reales, otro tipo de distribución teórica de tiempos de servicio que concuerda con este espacio intermedio es la distribución Erlang (llamada así en honor del fundador de la teoría de líneas de espera).

Fórmulas: Consideremos el modelo M/E_k/1, que es justo el caso especial del modelo M/G/1 en donde los tiempos de servicio tienen una distribución Erlang con parámetros de forma = k.

1. Número promedio de unidades en la línea de espera:

$$L_q = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

2. Número promedio de unidades en el sistema:

$$\mathrm{L} = \lambda\, W$$

3. Tiempo promedio que cada unidad pasa en la línea de espera:

$$W_q = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

4. Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema:

$$\mathrm{W} = W_q + \tfrac{1}{\mu}$$

3.2 MODELOS SIN ENTRADAS POISSON

Si las llegadas se programan o regulan de alguna forma que evite que ocurran aleatoriamente, como ocurre con la función de Poisson, entonces se necesita otro modelo.

Se dispone de tres modelos de este tipo para cuando los tiempos de servicio tengan una distribución exponencial con un parámetro fijo. Estos modelos se obtienen invirtiendo las distribuciones supuestas de tiempos entre llegadas y tiempos de servicio en los modelos anteriores: M/G/s, M/D/s y M/E_k/s.

3.2.1 MODELO GI/M/s

Definición: Este modelo no impone restricciones sobre el tipo de distribución para los tiempos de llegadas. En este caso se dispone de algunos resultados del estado estable (en especial sobre los tiempos de espera) para las dos versiones del modelo de uno y varios servidores.

3.2.2 MODELO D/M/s

Definición: Este modelo supone que todos los tiempos entre llegadas son iguales a una constante fija, que representaría un sistema de colas en el que se programan las llegadas a intervalos regulares.

3.2.3 MODELO E_k/M/s

Definición: En este modelo se supone una distribución Erlang para los tiempos entre llegadas que maneja el espacio intermedio entre llegadas regulares programadas (constante) y completamente aleatorias (exponencial).

3.3 MODELOS CON DISTRIBUCIONES DE SERVICIO NO EXPONENCIALES Y SIN ENTRADAS POISSON

Si ni los tiempos entre llegadas ni el tiempo de servicio para un sistema de colas tienen distribución exponencial y Poisson respectivamente, entonces existen tres modelos de colas adicionales para los que también se tienen resultados tabulados. Uno de estos modelos (E_m/E_k/s) supone una distribución Erlang para ambos tiempos. Los otros dos, (E_k/D/s/ y D/E_k/s) suponen que uno de estos tiempos tienen una distribución Erlang y el otro es igual a una constante fija.

3.4 OTROS MODELOS

Aunque se han estudiado un gran número de modelos de colas con distribuciones no exponenciales, la lista está muy lejos de agotarse. Por ejemplo, otra distribución que se usa a veces ya sea para los tiempos entre llegadas o para los de servicio es la distribución hiperexponencial. La característica esencial de esta distribución es que, si bien sólo permite valores no negativos, su desviación estándar σ es más grande que su media $1/\mu$. Esta característica es opuesta a la distribución Erlang, en donde $\sigma < 1/\mu$ para todos los casos excepto k=1 (distribución exponencial), que tiene $\sigma = 1/\mu$. Para ilustrar una situación representativa en la que puede ocurrir que $\sigma > 1/\mu$, suponga que el servicio en cuestión es la reparación de alguna máquina o vehículo. Si muchas de las reparaciones resultan rutinarias (tiempos de servicio pequeños) pero en ocasiones se requiere una reparación general extensa (tiempos de servicio grandes), entonces la desviación estándar de los tiempos de servicio tiende a ser grande respecto a la media, en cuyo caso se puede usar la distribución hiperexponencial para representarlos. En particular, esta distribución supone que existen probabilidades fijas, p y (1-p), para la clase de reparación que ocurra, que el tiempo requerido para cada clase tiene una distribución exponencial, pero que los parámetros para estas dos distribuciones exponenciales son diferentes. (En general, la distribución hiperexponencial es una composición de este tipo de dos o más distribuciones exponenciales.)

Otro grupo de distribuciones que comienza a ser de uso general consiste en distribuciones tipo fase (algunas de ellas se llaman distribuciones erlangianas ge- neralizadas). Estas distribuciones se obtienen desglosando el tiempo total en cierto número de fases, cada una con distribución exponencial, en donde los parámetros de estas distribuciones exponenciales pueden ser diferentes y las fases pueden ser ya sea en serie o en paralelo (o ambos). Un grupo de fases en paralelo significa que el proceso elige de manera aleatoria una de las fases cada vez, de acuerdo con probabilidades especificadas. De hecho, este enfoque constituye la forma en que se deriva la distribución hiperexponencial, así, esta distribución es un caso especial de las distribuciones tipo fase. Otro caso especial es la distribución Erlang, que tiene la restricción de que todas sus k fases estén en serie y de que tenga el mismo parámetro para sus distribuciones exponenciales. Al quitar estas restricciones se obtiene mayor flexibilidad en las distribuciones tipo fase para ajustarse a la distribución real de los tiempos entre llegadas o de servicio en los sistemas de colas en estudio. Esta flexibilidad es valiosa en especial cuando, al usar la distribución real directamente en el modelo, el manejo analítico resulta casi imposible, mientras que la razón de la media y la desviación estándar para la distribución real no se acerca a las razones disponibles ($\sqrt{k}$ para k=1,2,...) para la distribución Erlang.

Los modelos de colas que usan distribuciones tipo fase todavía se pueden representar por una cadena de Markov de tiempo continuo, ya que están construidos a partir de algunas combinaciones de las distribuciones exponenciales. Esta cadena de Markov por lo general tiene un número infinito de estados, por lo que obtener la distribución de estado estable para los estados del sistema significa resolver un sistema infinito de ecuaciones lineales que tienen una estructura relativamente complicada. La solución de tales sistemas está muy lejos de ser un trabajo rutinario pero algunos avances teóricos recientes permiten, en algunos casos, resolver estos modelos en forma númerica.

3.5 LÍNEAS DE ESPERA CON PRIORIDADES DE SERVICIO

En los modelos con disciplina de prioridades la disciplina de la cola se basa en un "sistema prioritario". El orden en que se seleccionan los clientes para darles el servicio está basado en sus prioridades asignadas.

Muchos sistemas reales se ajustan a este tipo de modelos mucho mejor que a otros disponibles. Los trabajos urgentes se hacen antes que otros trabajos y los clientes importantes tienen preferencia sobre otros. Con frecuencia, el uso de modelos con disciplina de prioridades proporcionan un refinamiento bien aceptado en comparación con los otros modelos.

Los modelos con y sin interrupción suponen que existen N clases de prioridades (la clase 1 tiene la prioridad más alta y la clase N tiene la más baja) y siempre que un servidor quede libre para comenzar el servicio de un nuevo cliente, el cliente seleccionado es el miembro de la clase prioritaria "más alta", representada en la cola, que haya esperado más. En otras palabras, los clientes se seleccionan para comenzar su servicio en el orden de sus clases de prioridad, pero sobre la base de primero en entrar primero en salir dentro de cada clase prioritaria. Se supone un proceso de entradas Poisson y tiempos de servicio exponenciales para cada clase prioritaria. El modelo también hace la suposición, en cierta manera restrictiva, de que el tiempo medio de servicio sea el mismo para todas las clases prioritarias, pero permite que la tasa media de llegadas difiera entre ellas.

Estos sistemas de prioridad se emplean por ejemplo en una red teléfonica militar en la que las llamadas del general tienen prioridad sobre las otras, o en un hospital donde las emergencias se admiten inmediatamente mientras que los otros pacientes tienen que esperar su turno.

3.5.1 SIN INTERRUPCIÓN

En las prioridades sin interrupción no se puede regresar a la cola a un cliente que se encuentra en servicio (interrumpirlo) si entra un cliente de prioridad más alta al sistema de colas. Por lo tanto, una vez que el servidor comienza a servir a un cliente, el servicio debe terminar sin interrupción.

Sea W_k el tiempo esperado de espera en el sistema en estado estable (incluyendo el tiempo de servicio) para un miembro de la clase prioritaria k. Entonces tenemos que:

$$W_k = \frac{1}{A \ . \ B_{k-1} \ . \ B_k} + \frac{1}{\mu} \qquad \text{para k=1,2,...,N}$$

en donde:

$$\text{A} = s!\frac{s\mu-\lambda}{r^s}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{r^j}{j!} + s\mu$$

$$B_0 = 1$$

$$B_k = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{k}\lambda_i}{s\mu} \qquad \text{para k=1,2,...,N}$$

s = número de servidores

μ = tasa media de servicio por servidor ocupado

λ_i = tasa media de llegadas para la clase de prioridad i para i=1,2,...,N

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i$$

$$\text{r} = \frac{\lambda}{\mu}$$

Estos resultados suponen que $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i < s\mu$, de manera que la clase de prioridad k puede alcanzar una condición de estado estable.

La "fórmula de Little" se aplica a las clases individuales de prioridad, por lo que L_k, el número esperado de miembros de la clase de prioridad k en el sistema de colas (incluyendo los que están en servicio), es

$$L_k = \lambda_k W_k, \qquad \text{para k = 1,2,...,N.}$$

Para determinar el tiempo esperado de espera en la cola (sin incluir el tiempo de servicio) para la clase de prioridad k, sencillamente se resta $1/\mu$ de W_k; la longitud esperada de la cola correspondiente se obtiene de nuevo multiplicando por λ_k. Para el caso especial en el que s = 1, la expresión para A se reduce a A = μ^2/λ.

3.5.2 CON INTERRUPCIÓN

En las prioridades con interrupción, el cliente con prioridad más baja que se encuentre en servicio se interrumpe (se manda de regreso a la cola) siempre que entra un cliente con prioridad más alta al sistema de colas. Entonces se libera un servidor para que comience el servicio de la nueva llegada, de inmediato. (Cuando un servidor termina un servicio, se selecciona al siguiente cliente para comenzar otro servicio, de tal forma que un cliente interrumpido regresará a servicio y, después de suficientes intentos, eventualmente terminará.)

Usando la misma notación que para el modelo anterior, el hecho de poder interrumpir cambia el tiempo esperado "total" en el sistema (incluyendo el tiempo total de servicio) a

$$W_k = \frac{1/\mu}{B_{k-1} \cdot B_k} \qquad \text{para k=1,2,...,N,}$$

Para el caso de "un servidor" (s = 1). Cuando s > 1, la W_k se puede calcular mediante un proceso iterativo. La L_k que se acaba de definir sigue satisfaciendo la relación

$$L_k = \lambda_k W_k, \qquad \text{para k = 1,2,...,N.}$$

Ejemplo: En un hospital el administrador observó que los pacientes no se atienden sobre la base de primero en llegar, primero en salir. En su lugar, parece que la enfermera que realiza las admisiones divide a los pacientes en tres grandes categorías: 1) casos "críticos", para los que el tratamiento inmediato es vital para la supervivencia; 2) casos "serios", para los que un tratamiento rápido es importante para prevenir mayor daño, y 3) casos "estables", en los que el tratamiento puede retrasarse sin consecuencias médicas adversas. Entonces, se atiende a los pacientes en este orden de prioridad, en donde los pacientes de la misma categoría por lo general se atienden según la regla de primero en llegar, primero en salir. Un doctor interrumpe el tratamiento de un paciente si llega un caso nuevo de una categoría de prioridad más alta. Aproximadamente el 10% de los pacientes caen en la primera categoría, 30% en la segunda y 60% en la tercera. Como los casos más serios se internan en el Hospital después de recibir el tratamiento de emergencia, el tiempo promedio de tratamiento por un doctor en la sala de emergencia en realidad no difiere mucho entre estas categorías.

El administrador ha decidido emplear el modelo de colas con disciplina de prioridades como una representación razonable de este sistema de colas, en el que las tres categorías de pacientes constituyen las tres clases de prioridad del modelo. Como el tratamiento se interrumpe por la llegada de un caso de prioridad más alta, la versión de prioridades con interrupción es la apropiada. Los pacientes llegan a una tasa promedio de uno cada media hora ($\lambda = 2$) y un doctor requiere un promedio de 20 minutos para atender a un paciente ($\mu = 3$), los porcentajes anteriores conducen a $\lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.6, \lambda_3 = 1.2$. La tabla 3.2 proporciona los tiempos de espera esperados en la cola que resultan (excluyendo los tiempos de servicio) en horas para las respectivas clases de prioridad cuando hay un doctor (s = 1) o dos doctores (s = 2) de guardia.

Estos resultados de prioridades con interrupción para s = 2 se obtuvieron como sigue. Ya que estos tiempos de espera para los clientes de la clase de prioridad 1 no se ven afectados por la presencia de clientes en clases de prioridades más baja, W_1 será la misma que para cualesquiera otros valores de λ_1 y λ_3, incluyendo $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$. Entonces, W_1 debe ser igual a W para el modelo de una clase (modelo M/M/s) correspondiente con s = 2, $\mu = 3$ y $\lambda = \lambda_1 = 0.2$, lo que lleva a:

$$W_1 = W = 0.33370, \qquad \text{para } \lambda = 0.2$$

$$W_1 - \frac{1}{\mu} = 0.33370 - 0.33333 = 0.00037$$

Tabla 3.2 Resultados de estado estable del modelo de disciplina de prioridades para el problema del Hospital.

	Prioridades con interrupción		**Prioridades sin interrupción**	
	s = 1	s = 2	s = 1	s = 2
A	-	-	4.5	36
B_1	0.933	-	0.933	0.967
B_2	0.733	-	0.733	0.867
B_3	0.333	-	0.333	0.667
$W_1 - \frac{1}{\mu}$	0.024	0.00037	0.238	0.029
$W_2 - \frac{1}{\mu}$	0.154	0.00793	0.325	0.033
$W_3 - \frac{1}{\mu}$	1.033	0.06542	0.889	0.048

Ahora considere las dos primeras clases de prioridad. De nuevo note que los clientes de las clases de prioridad más baja (en este caso sólo la clase 3) no afectan en nada a los clientes de estas dos clases y por lo tanto se pueden ignorar en el análisis. Sea $\overline{W}_{1-2}$ el tiempo esperado de espera en el sistema (incluyendo el tiempo de servicio) para una llegada aleatoria en cualquiera de estas dos clases, de manera que la probabilidad de que esta llegada pertenezca a la clase 1 es $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{4}$ y de que pertenezca a la clase 2 es $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{3}{4}$. Entonces,

$$\overline{W}_{1-2} = \tfrac{1}{4}W_1 + \tfrac{3}{4}W_2$$

Lo que es más, como el tiempo de espera esperado es el mismo para cualquier disciplina de la cola, $\overline{W}_{1-2}$ también debe ser igual a W para el modelo M/M/s, con s = 2, $\mu = 3$ y $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0.8$, lo que lleva a

$$\overline{W}_{1-2} = W = 0.33937 \qquad \text{para } \lambda = 0.8$$

Al combinar estos hechos se obtiene

$$W_2 = \tfrac{4}{3}[0.33937 - \tfrac{1}{4}(0.33370)] = 0.34126$$

$$(W_2 - \tfrac{1}{\mu} = 0.00793)$$

Por último, sea $\overline{W}_{1-3}$ el tiempo de espera esperado en el sistema(incluyendo el tiempo de servicio) para una llegada aleatoria de cualquiera de las tres clases de prioridad, de manera que las probabilidades de que pertenezca a la clase de 1, 2 o 3, son 0.1, 0.3 y 06, respectivamente. Entonces,

$$\overline{W}_{1-3} = 0.1W_1 + 0.3W_2 + 0.6W_3$$

Más aún, $\overline{W}_{1-3}$ también debe ser igual a la W del modelo M/M/s, con s = 2, $\mu = 3$ y $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$, de manera que

$$\overline{W}_{1-3} = W = 0.375, \qquad \text{para } \lambda = 2$$

En consecuencia,

$$W_3 = \tfrac{1}{0.6}[0.375 - 0.1(0.33370) - 0.3(0.34126)] = 0.39875$$

$$(W_3 - \tfrac{1}{\mu} = 0.06542)$$

También se podrían usar, de la misma forma, los resultados correspondientes de W_q del modelo M/M/s para derivar directamente las cantidades $W_k - 1/\mu$.

Cuando s = 1, los valores $W_k - 1/\mu$ de la tabla 3.2 para el caso de prioridades con interrupción indican que, si se proporciona un solo doctor, puede ocurrir que algunos casos críticos esperen alrededor de un minuto y medio (0.024 horas) en promedio; los casos serios esperarían más de 9 minutos y los casos estables más de 1 hora. Ahora bien, estos valores representan esperanzas estadísticas, por lo que algunos pacientes tendrán que esperar bastante más que el promedio de su clase de prioridad. Esta espera no sería tolerable para los casos críticos y serios, en los que unos minutos pueden ser vitales. Por el contrario, los resultados con s = 2 en la tabla 3.2 (prioridades con interrupción) indican que si se agregara un segundo doctor, prácticamente se eliminaría la espera para todos los pacientes menos los estables.

El administrador recomendó que se asignaran dos doctores a la sala de emergencia durante las primeras horas de la tarde en el proximo año. El consejo directivo del Hospital adoptó esta recomendación y, al mismo tiempo, aumentó el costo por el uso de la sala de emergencia.

CAPÍTULO 4. CASO DE APLICACIÓN

El propósito de este capítulo es dar una de las posibles soluciones al problema que se presenta en una sucursal de Bancomer, calculando las características de operación de la línea de espera. Al mismo tiempo complementarla con herramientas de Dirección de Operaciones.

4.1 HISTORIA DE BANCOMER

- **1932:** Se funda Bancomer en la Ciudad de México con el nombre de Banco de Comercio.
- **1977:** Consolida las distintas instituciones que forman el Sistema Bancos de Comercio en una sola institución de banca múltiple con el nombre de Bancomer, fusión que le permitió a Bancomer mantener su arraigo con las comunidades locales y beneficiarse de tener una sola estructura operativa.
- **1982:** Al igual que la mayoría de los bancos en México, Bancomer es nacionalizado por el gobierno mexicano.
- **1991:** Un grupo de inversionistas mexicanos, encabezados por Eugenio Garza Lagüera, obtiene el derecho de adquirir la mayoría de las acciones de Bancomer. Se forma así Grupo Financiero Bancomer (GFB) con el fin de adquirir y tener el control de Bancomer y otras instituciones financieras.
- **2000:** Los accionistas de GFB aceptan la oferta de BBVA de fusionar GFB con Grupo Financiero BBV-Probursa (subsidiaria mexicana de BBVA), y capitalizar a Bancomer. Como resultado de este acuerdo, BBVA realiza una contribución de capital de 1,400 millones de dólares en efectivo. La fusión y capitalización se efectúan en julio de 2000 y BBVA adquiere el control operativo de GFB, cuya denominación social cambia a Grupo Financiero BBVA Bancomer. Actualmente, BBVA tiene aproximadamente el 48% del capital social de GFBB.
- GFBB adquiere 100% de las acciones de Banca Promex (banco con fuerte presencia en la región centro-occidente del país).

Al 30 de junio de 2002, Bancomer cuenta con una extensa red de 1,681 sucursales y 3,732 cajeros automáticos en México, realizando una amplia gama de actividades bancarias comerciales y de menudeo. En el extranjero tiene sucursales en Londres y Gran Caymán, agencias en Nueva York y Los Angeles y una oficina de representación en Sao Paulo, Brasil. Adicionalmente, Bancomer tiene una subsidiaria bancaria en las Islas Caymán, Mercury Bank & Trust Limited, y mantiene relaciones con más de 1,000 bancos corresponsales en todo el mundo.

Por más de seis décadas, Bancomer se ha preocupado por ofrecer servicios financieros diferenciados con la más alta calidad. Con base al conocimiento del cliente, Bancomer puede identificar las necesidades y deseos de sus más de nueve millones de clientes de servicios bancarios y más de cinco millones de clientes no bancarios, lo que permite diseñar una oferta de productos y servicios acordes a la medida de sus expectativas, respaldado por la seguridad y solidez de la marca Bancomer.

Su misión es:

- Generar confianza al servir más y mejor a su clientela, con transparencia e integridad ofreciendo siempre productos y servicios financieros de alta calidad.
- Proporcionar a sus colaboradores las mejores condiciones para su desarrollo integral.
- Ser solventes y ofrecer rendimientos atractivos a sus accionistas.
- Apoyar el bienestar social como una resultante de la actividad del negocio.

Bancomer instrumentó una estrategia corporativa orientada a generar atractivos niveles de rentabilidad para sus accionistas. Dicha estrategia se basó en:

- La consolidación de la mayor red de distribución bancaria de México y el liderazgo tecnológico obtenido a partir del proceso de integración.
- El desarrollo de un modelo comercial centrado en el cliente, organizado mediante redes segmentadas de distribución.
- La búsqueda permanente de altos niveles de eficiencia.
- La diversificación de las fuentes de ingresos vía la consolidación de un portafolio de negocios no bancarios de alta rentabilidad y crecimiento.

4.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

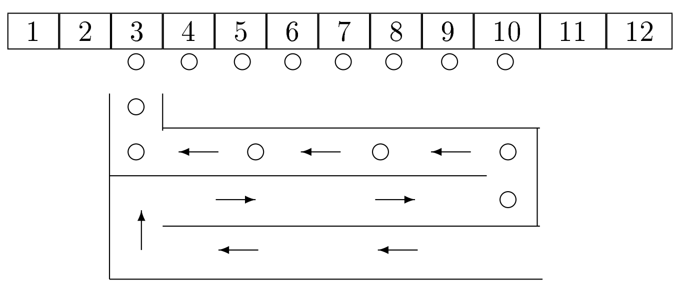
Existe un gran problema en esta sucursal de Bancomer, ya que en determinados momentos los clientes tienen que esperar hasta media hora para ser atendidos, cuando el servicio en algunos casos es de menos de 1 minuto.

El banco tiene un horario de servicio de 8:30 de la mañana (son puntuales al abrir las instalaciones, el gerente de la sucursal es el encargado de hacerlo) a 4:00 de la tarde (cierran la sucursal a esta hora y si hay clientes en fila los cajeros hacen cierre hasta que se atendio al último).

El banco cuenta con 12 cajas, las cuales se encuentran organizadas de la siguiente forma:

- Las cajas 1 y 2 son cajas "especiales" que se encargan de atender:
  - Cheques de caja
  - Compra–Venta de divisas y metales
  - Giros–Ordenes de pago
- De la caja 3 a la 10 son "universales", las cuales se encargan de realizar todo tipo de transacciones. Nuestro interés se basa en este tipo de cajas, ya que es en donde se localiza el problema de exceso de línea de espera.
- Y las cajas 11 y 12 son "empresariales", las cuales se encargan de atender a clientes muy redituables para el banco, por lo que el banco no quiere que estos clientes especiales esperen mucho tiempo para ser atendidos (se les tiene que dar un trato preferencial).

El siguiente esquema nos muestra la ubicación de las cajas y la estructura de la línea de espera:



Como podemos observar se trata de un sistema de líneas de espera del tipo M/M/s; en donde se tienen 8 canales de distribución y son identicos en capacidad de servicio. Los clientes que llegan esperan en una sola línea y después pasan al primer canal disponible para ser atendidos. La disciplina de la línea de espera es FIFO y tenemos que comprobar que se trata de un proceso de llegadas poisson y distribución de atención a clientes exponencial.

Bancomer tiene el riesgo de perder clientes insatisfechos, ya que al realizar el muestreo mucha gente se acerco a preguntar interesada en la actividad que se estaba realizando y todos coincidieron en que en esta sucursal se forman grandes líneas de espera.

Al platicar con los clientes me pude dar cuenta que, en general, estaban satisfechos con la apariencia física y mantenimiento de la sucursal; es limpia y organizada.

Se califico a los cajeros como corteses, de ayuda y exactos. Sin embargo, los clientes se quejaban del largo tiempo de espera en línea, a pesar de que se usa una sola fila para todas las ventanillas, en vez de una fila para cada una, como un esfuerzo para implementar servicio al cliente.

En está sucursal existe espacio físico parta poner más cajas que puedan ofrecer servicio.

Parece ser que la política para la provisión de cajeros de Bancomer es usar el mínimo número de cajeros necesarios, pero están dejando de lado el tiempo que los clientes tienen que pasar en fila para poder ser atendidos.

El incrementar cajeros para todos los periodos de tiempo parece ser arbitra- rio, porque un cambio en un periodo de tiempo puede no ser óptimo para otro. Se considera determinar independientemente el número de cajeros para cada periodo de tiempo. Por lo cual se decidió trabajar con las siguientes divisiones de acuerdo al número de clientes que se atienden en cada una de ellas:

Hora / **Día**	**Tranquila**	**Normal**	**Pesada**
Tranquilo			
Normal			
Pesado			

Quedando de esta forma nueve divisiones. Cabe mencionar que la hora tranquila se considerara de 8:30 a 9:00; la normal de 10:00 a 12:00 y de 15:00 a 16:00; y la pesada de 9:00 a 10:00 y de 12:00 a 15:00 hrs.

4.3 COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA

Las características de operación de este sistema de líneas de espera son como se muestran a continuación.

Las tasas promedio de servicio (μ) por división son:

Hora / **Día**	**Tranquila**	**Normal**	**Pesada**
Tranquilo	18	18	19
Normal	18	19	20
Pesado	18	20	20

Las tasas promedio de llegadas (λ) por división son:

Día \ Hora	**Tranquila**	**Normal**	**Pesada**
Tranquilo	35	60	86
Normal	43	85	98
Pesado	68	99	124

Antes de aplicar las fórmulas de líneas de espera se tiene que probar que las llegadas tienen una distribución Poisson y los servicios Exponencial.

4.3.1 TIEMPO REQUERIDO DE SERVICIO

Lo primero que probaremos es que los **tiempos de servicio se distribuyen exponencialmente**. Para ello tenemos que ver cual es el tamaño de muestra que se debe emplear y esto se realiza utilizando la fórmula $n = 4c^2\sigma^2/L^2$ [1].

Las variancias (σ^2) para cada división son:

Día \ Hora	**Tranquila**	**Normal**	**Pesada**
Tranquilo	0.9	3.19	6.32
Normal	1.3	5.19	6.47
Pesado	1.4	5.34	9.32

El nivel de confianza que se desea es del 95%, por lo cual la c correspondiente es 1.96 y una longitud del intervalo de confianza de 1. Con lo cual se obtienen los siguientes tamaños de muestra para cada división:

Día \ Hora	**Tranquila**	**Normal**	**Pesada**
Tranquilo	$13.82 \approx 14$	$49.02 \approx 50$	$97.12 \approx 98$
Normal	$19.98 \approx 20$	$79.75 \approx 80$	$99.42 \approx 100$
Pesado	$21.51 \approx 22$	$82.06 \approx 83$	$143.21 \approx 144$

Probaremos para cada una de las 9 divisiones que los tiempos de servicio se distribuyen Exponencialmente y lo haremos utilizando la prueba ji-cuadrada con un nivel de confianza de 95% [2].

[1] El procedimiento para llegar a la fórmula se describe en el Apéndice A.
[2] Se describe en el Apéndice B.

1; Día tranquilo en hora tranquila

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio
1	0.53	**8**	1.95
2	1.22	**9**	2.04
3	1.32	**10**	2.08
4	1.35	**11**	2.14
5	1.36	**12**	2.97
6	1.63	**13**	3.20
7	1.77	**14**	4.35

De donde se obtiene $\alpha = 1.99$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.50$. En donde α =[0.53+1.22+...+3.20+4.35]/14.

La raíz de 14 es 3.74 $\approx$ 4 intervalos.

La FO (frecuencia observada) se calcula simplemente sumando el número de veces que el tiempo de servicio cae en determinado intervalo.

La FE (frecuencia esperada) para este caso se calcula con la siguiente fórmula:

$$\text{P(tiempo de servicio} \leq \text{t)} = 1 - e^{-\hat{\alpha}t}$$

en donde $\hat{\alpha}$ = número promedio de unidades que pueden ser atendidas por periodo (se considerará de 1 minuto)

Entonces la FE para el primer intervalo es:

$$[(1 - e^{(-0.50)(1.49)}) - (1 - e^{(-0.50)(0.53)})]*14 = 4.08$$

Las desviaciones C_i se calculan: $(FE_i - FO_i)^2/FE_i$

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.53 - 1.49	5	4.08	0.21
1.49 - 2.44	6	2.53	4.76
2.44 - 3.40	2	1.57	0.12
3.40 - 4.35	1	0.97	0.00

Obtenemos un valor de C = 5.08 (es la suma de las C_i) que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 4-1 = 3 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 7.81 [3]. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que 5.08 < 7.81.

2; Día tranquilo en hora normal

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**
1	0.33	**14**	1.17	**27**	2.15	**40**	3.42
2	0.50	**15**	1.17	**28**	2.35	**41**	3.47
3	0.53	**16**	1.27	**29**	2.35	**42**	3.53
4	0.65	**17**	1.42	**30**	2.37	**43**	3.60
5	0.67	**18**	1.42	**31**	2.50	**44**	4.38
6	0.68	**19**	1.43	**32**	2.50	**45**	4.48
7	0.75	**20**	1.58	**33**	2.58	**46**	4.49
8	0.80	**21**	1.63	**34**	2.63	**47**	5.55
9	0.82	**22**	1.72	**35**	2.73	**48**	5.62
10	0.83	**23**	1.75	**36**	2.75	**49**	6.03
11	0.85	**24**	1.83	**37**	2.77	**50**	6.15
12	0.93	**25**	1.87	**38**	3.13		
13	1.05	**26**	2.05	**39**	3.18		

De donde se obtiene $\alpha = 2.29$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.44$.

La raíz de 50 es $7.07 \approx 8$ intervalos.

[3] Este valor se extrae del Apéndice C.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.33 - 1.06	13	11.79	0.12
1.06 - 1.79	10	8.58	0.24
1.79 - 2.51	9	6.24	1.22
2.51 - 3.24	7	4.54	1.33
3.24 - 3.97	4	3.31	0.15
3.97 - 4.70	3	2.41	0.15
4.70 - 5.42	0	1.75	1.75
5.42 - 6.15	4	1.27	5.84

Obtenemos un valor de C = 10.79 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 8-1 = 7 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 14.07. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $10.79 < 14.07$.

3; Día tranquilo en hora pesada

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**
1	0.43	**15**	0.68	**29**	1.12	**43**	1.43
2	0.45	**16**	0.68	**30**	1.17	**44**	1.52
3	0.48	**17**	0.73	**31**	1.18	**45**	1.53
4	0.52	**18**	0.73	**32**	1.22	**46**	1.57
5	0.52	**19**	0.82	**33**	1.25	**47**	1.57
6	0.53	**20**	0.85	**34**	1.27	**48**	1.58
7	0.53	**21**	0.87	**35**	1.27	**49**	1.65
8	0.55	**22**	0.92	**36**	1.30	**50**	1.73
9	0.58	**23**	0.92	**37**	1.30	**51**	1.75
10	0.60	**24**	0.97	**38**	1.30	**52**	1.75
11	0.62	**25**	1.05	**39**	1.33	**53**	1.83
12	0.65	**26**	1.07	**40**	1.35	**54**	1.92
13	0.67	**27**	1.08	**41**	1.37	**55**	1.95
14	0.68	**28**	1.12	**42**	1.40	**56**	2.00

n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio
57	2.07	**68**	2.90	**79**	3.65	**90**	5.67
58	2.07	**69**	2.92	**80**	3.75	**91**	5.90
59	2.13	**70**	3.03	**81**	3.98	**92**	5.93
60	2.23	**71**	3.07	**82**	4.17	**93**	6.23
61	2.23	**72**	3.10	**83**	4.33	**94**	6.42
62	2.37	**73**	3.17	**84**	4.45	**95**	7.53
63	2.45	**74**	3.17	**85**	5.12	**96**	7.58
64	2.62	**75**	3.25	**86**	5.22	**97**	10.85
65	2.70	**76**	3.27	**87**	5.23	**98**	13.68
66	2.77	**77**	3.45	**88**	5.40		
67	2.82	**78**	3.52	**89**	5.47		

De donde se obtiene $\alpha = 2.49$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.40$.

La raíz de 98 es $9.89 \approx 10$ intervalos.

Intervalo	FO	FE	C_i
0.43 - 1.76	52	34.05	9.47
1.76 - 3.08	19	19.99	0.05
3.08 - 4.41	12	11.73	0.01
4.41 - 5.73	7	6.89	0.00
5.73 - 7.06	4	4.04	0.00
7.06 - 8.38	2	2.37	0.06
8.38 - 9.71	0	1.39	1.39
9.71 - 11.03	1	0.82	0.04
11.03 - 12.36	0	0.48	0.48
12.36 - 13.68	1	0.28	1.83

Obtenemos un valor de C = 13.33 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 10-1 = 9 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 16.92. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $13.33 < 16.92$.

4; Día normal en hora tranquila

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**
1	0.42	**8**	1.27	**15**	3.07
2	0.43	**9**	1.32	**16**	3.50
3	0.52	**10**	1.52	**17**	4.17
4	0.56	**11**	1.97	**18**	4.33
5	0.68	**12**	2.32	**19**	7.20
6	0.98	**13**	2.33	**20**	8.10
7	1.11	**14**	2.52		

De donde se obtiene $\alpha = 2.42$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.41$.

La raíz de 20 es $4.47 \approx 5$ intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.42 - 1.96	10	7.91	0.55
1.96 - 3.49	5	4.19	0.16
3.49 - 5.03	3	2.22	0.28
5.03 - 6.56	0	1.17	1.17
6.56 - 8.10	2	0.62	3.06

Obtenemos un valor de C = 5.22 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 5-1 = 4 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 9.49. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $5.22 < 9.49$.

5; Día normal en hora normal

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio
1	0.50	**21**	1.25	**41**	2.17	**61**	3.28
2	0.55	**22**	1.27	**42**	2.20	**62**	3.40
3	0.55	**23**	1.30	**43**	2.27	**63**	3.47
4	0.57	**24**	1.30	**44**	2.33	**64**	3.62
5	0.60	**25**	1.32	**45**	2.33	**65**	3.77
6	0.65	**26**	1.40	**46**	2.42	**66**	4.10
7	0.72	**27**	1.48	**47**	2.43	**67**	4.15
8	0.75	**28**	1.67	**48**	2.47	**68**	4.37
9	0.77	**29**	1.68	**49**	2.52	**69**	4.72
10	0.83	**30**	1.72	**50**	2.53	**70**	4.75
11	0.88	**31**	1.75	**51**	2.53	**71**	5.58
12	0.90	**32**	1.77	**52**	2.62	**72**	6.27
13	1.02	**33**	1.78	**53**	2.62	**73**	6.68
14	1.05	**34**	1.82	**54**	2.65	**74**	6.97
15	1.08	**35**	1.88	**55**	2.95	**75**	7.28
16	1.15	**36**	1.90	**56**	2.95	**76**	8.12
17	1.17	**37**	1.93	**57**	3.03	**77**	8.48
18	1.18	**38**	1.98	**58**	3.13	**78**	8.52
19	1.18	**39**	2.02	**59**	3.17	**79**	10.87
20	1.22	**40**	2.07	**60**	3.18	**80**	11.28

De donde se obtiene $\alpha = 2.78$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.36$.

La raíz de 80 es $8.94 \approx 9$ intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.50 - 1.70	29	23.37	1.36
1.70 - 2.90	25	15.20	6.32
2.90 - 4.09	11	9.89	0.13
4.09 - 5.29	5	6.43	0.32
5.29 - 6.49	2	4.18	1.14
6.49 - 7.69	3	2.72	0.03
7.69 - 8.88	3	1.77	0.86
8.88 - 10.08	0	1.15	1.15
10.08 - 11.28	2	0.75	2.09

Obtenemos un valor de C = 13.38 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 9-1 = 8 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 15.51. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que 13.38 < 15.51.

6; Día normal en hora pesada

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**
1	0.52	**14**	0.93	**27**	1.18	**40**	1.68
2	0.52	**15**	0.97	**28**	1.18	**41**	1.70
3	0.52	**16**	0.97	**29**	1.22	**42**	1.73
4	0.57	**17**	1.02	**30**	1.25	**43**	1.75
5	0.57	**18**	1.02	**31**	1.35	**44**	1.82
6	0.62	**19**	1.03	**32**	1.40	**45**	1.83
7	0.67	**20**	1.13	**33**	1.45	**46**	1.98
8	0.67	**21**	1.15	**34**	1.48	**47**	2.02
9	0.68	**22**	1.17	**35**	1.55	**48**	2.03
10	0.78	**23**	1.17	**36**	1.55	**49**	2.13
11	0.82	**24**	1.17	**37**	1.60	**50**	2.13
12	0.82	**25**	1.18	**38**	1.63	**51**	2.16
13	0.87	**26**	1.18	**39**	1.67	**52**	2.23

n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio
53	2.30	**65**	3.30	**77**	3.95	**89**	5.38
54	2.38	**66**	3.33	**78**	3.98	**90**	5.63
55	2.42	**67**	3.35	**79**	4.00	**91**	6.12
56	2.42	**68**	3.48	**80**	4.02	**92**	6.33
57	2.45	**69**	3.53	**81**	4.08	**93**	6.65
58	2.48	**70**	3.53	**82**	4.22	**94**	6.87
59	2.48	**71**	3.53	**83**	4.28	**95**	7.22
60	2.62	**72**	3.57	**84**	4.37	**96**	7.52
61	2.68	**73**	3.63	**85**	4.57	**97**	7.58
62	2.78	**74**	3.68	**86**	4.70	**98**	8.22
63	3.12	**75**	3.72	**87**	4.87	**99**	11.30
64	3.13	**76**	3.88	**88**	5.28	**100**	16.85

De donde se obtiene $\alpha = 2.88$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.35$.

La raíz de 100 es 10 = 10 intervalos.

Intervalo	FO	FE	C_i
0.52 - 2.15	50	36.11	5.34
2.15 - 3.79	25	20.49	0.99
3.79 - 5.42	14	11.63	0.48
5.42 - 7.05	5	6.60	0.39
7.05 - 8.69	4	3.74	0.02
8.69 - 10.32	0	2.12	2.12
10.32 - 11.95	1	1.21	0.04
11.95 - 13.58	0	0.68	0.68
13.58 - 15.22	0	0.39	0.39
15.22 - 16.85	1	0.22	2.76

Obtenemos un valor de C = 13.21 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 10-1 = 9 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a

16.92. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $13.21 < 16.92$.

7; Día pesado en hora tranquila

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**
1	0.46	**9**	1.50	**17**	3.10
2	0.55	**10**	1.63	**18**	3.42
3	0.87	**11**	1.77	**19**	3.92
4	0.90	**12**	1.83	**20**	6.17
5	1.08	**13**	1.95	**21**	8.17
6	1.22	**14**	2.04	**22**	13.38
7	1.35	**15**	2.25		
8	1.36	**16**	2.28		

De donde se obtiene $\alpha = 2.78$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.36$.

La raíz de 22 es $4.69 \approx 5$ intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.46 - 3.04	16	11.28	1.97
3.04 - 5.63	3	4.46	0.48
5.63 - 8.21	2	1.76	0.03
8.21 - 10.80	0	0.70	0.70
10.80 - 13.38	1	0.27	1.92

Obtenemos un valor de C = 5.09 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 5-1 = 4 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 9.49. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $5.09 < 9.49$.

8; Día pesado en hora normal

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio
1	0.42	**22**	1.02	**43**	1.78	**64**	3.02
2	0.45	**23**	1.08	**44**	1.78	**65**	3.03
3	0.48	**24**	1.15	**45**	1.87	**66**	3.10
4	0.57	**25**	1.18	**46**	1.92	**67**	3.35
5	0.58	**26**	1.23	**47**	1.97	**68**	3.57
6	0.65	**27**	1.30	**48**	2.05	**69**	3.65
7	0.67	**28**	1.32	**49**	2.10	**70**	3.80
8	0.70	**29**	1.35	**50**	2.23	**71**	3.82
9	0.70	**30**	1.35	**51**	2.27	**72**	4.13
10	0.72	**31**	1.37	**52**	2.27	**73**	4.22
11	0.72	**32**	1.40	**53**	2.30	**74**	4.25
12	0.75	**33**	1.43	**54**	2.38	**75**	4.73
13	0.77	**34**	1.45	**55**	2.43	**76**	6.38
14	0.78	**35**	1.45	**56**	2.45	**77**	6.43
15	0.88	**36**	1.47	**57**	2.57	**78**	6.53
16	0.90	**37**	1.47	**58**	2.68	**79**	7.20
17	0.92	**38**	1.48	**59**	2.77	**80**	8.28
18	0.93	**39**	1.52	**60**	2.78	**81**	9.03
19	0.95	**40**	1.60	**61**	2.82	**82**	10.53
20	0.98	**41**	1.68	**62**	2.83	**83**	13.95
21	0.98	**42**	1.70	**63**	2.98		

De donde se obtiene $\alpha = 2.49$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.40$.

La raíz de 83 es $9.11 \approx 10$ intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.42 - 1.77	42	29.39	5.41
1.77 - 3.13	24	17.07	2.81
3.13 - 4.48	8	9.92	0.37
4.48 - 5.83	1	5.76	3.93
5.83 - 7.19	3	3.35	0.04
7.19 - 8.54	2	1.94	0.00
8.54 - 9.89	1	1.13	0.01
9.89 - 11.24	1	0.66	0.18
11.24 - 12.60	0	0.38	0.38
12.60 - 13.95	1	0.22	2.74

Obtenemos un valor de C = 15.88 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 10-1 = 9 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 16.92. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $15.88 < 16.92$.

9; Día pesado en hora pesada

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**	**n**	**Tiempo de Servicio**
1	0.35	**13**	0.78	**25**	0.95	**37**	1.33
2	0.47	**14**	0.82	**26**	0.98	**38**	1.35
3	0.52	**15**	0.83	**27**	1.03	**39**	1.37
4	0.52	**16**	0.83	**28**	1.03	**40**	1.42
5	0.55	**17**	0.83	**29**	1.05	**41**	1.42
6	0.57	**18**	0.85	**30**	1.05	**42**	1.48
7	0.58	**19**	0.87	**31**	1.10	**43**	1.55
8	0.60	**20**	0.87	**32**	1.12	**44**	1.55
9	0.65	**21**	0.87	**33**	1.13	**45**	1.56
10	0.68	**22**	0.90	**34**	1.15	**46**	1.56
11	0.75	**23**	0.93	**35**	1.17	**47**	1.58
12	0.75	**24**	0.95	**36**	1.25	**48**	1.58

n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio	n	Tiempo de Servicio
49	1.60	**73**	2.22	**97**	2.97	**121**	4.75
50	1.63	**74**	2.22	**98**	2.97	**122**	4.83
51	1.67	**75**	2.25	**99**	3.10	**123**	4.87
52	1.70	**76**	2.25	**100**	3.13	**124**	4.98
53	1.72	**77**	2.27	**101**	3.15	**125**	5.17
54	1.78	**78**	2.30	**102**	3.18	**126**	5.28
55	1.82	**79**	2.32	**103**	3.27	**127**	5.37
56	1.82	**80**	2.35	**104**	3.28	**128**	5.58
57	1.83	**81**	2.37	**105**	3.35	**129**	6.02
58	1.88	**82**	2.50	**106**	3.43	**130**	6.15
59	1.88	**83**	2.52	**107**	3.58	**131**	6.28
60	1.88	**84**	2.55	**108**	3.67	**132**	6.60
61	1.98	**85**	2.55	**109**	3.67	**133**	6.67
62	1.98	**86**	2.55	**110**	3.72	**134**	6.68
63	1.98	**87**	2.58	**111**	3.85	**135**	7.02
64	1.98	**88**	2.58	**112**	3.90	**136**	7.22
65	1.98	**89**	2.60	**113**	4.10	**137**	7.38
66	2.02	**90**	2.65	**114**	4.10	**138**	7.62
67	2.02	**91**	2.75	**115**	4.17	**139**	7.85
68	2.08	**92**	2.83	**116**	4.22	**140**	7.88
69	2.08	**93**	2.88	**117**	4.27	**141**	8.90
70	2.10	**94**	2.93	**118**	4.30	**142**	9.12
71	2.12	**95**	2.95	**119**	4.32	**143**	11.90
72	2.17	**96**	2.95	**120**	4.53	**144**	15.03

De donde se obtiene $\alpha = 2.86$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.35$.

La raíz de 144 es $12 = 12$ intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.35 - 1.57	46	44.32	0.06
1.57 - 2.80	45	28.91	8.96
2.80 - 4.02	21	18.85	0.25
4.02 - 5.24	13	12.29	0.04
5.24 - 6.47	6	8.02	0.51
6.47 - 7.69	7	5.23	0.60
7.69 - 8.91	3	3.41	0.05
8.91 - 10.14	1	2.22	0.67
10.14 - 11.36	0	1.45	1.45
11.36 - 12.58	1	0.95	0.00
12.58 - 13.81	0	0.62	0.62
13.81 - 15.03	1	0.40	0.89

Obtenemos un valor de C = 14.10 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 12-1 = 11 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 19.68. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $14.10 < 19.68$.

4.3.2 MANERA EN QUE LLEGAN LOS CLIENTES

Ahora probaremos que los **tiempos entre llegadas tienen una distribución Exponencial** [4]. Para ello tenemos que ver cual es el tamaño de muestra que se debe emplear.

[4] RELACIÓN ENTRE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON Y LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL. Si los tiempos entre llegadas son exponenciales, la distribución de probabilidad del número de llegadas que se tienen en cualquier intervalo de tiempo t está dada por el siguiente teorema importante:
Teorema: Los tiempos entre llegadas son exponenciales con parámetro λ si y sólo si el número de llegadas que suceden en un intervalo t sigue una distribución de Poisson con parámetro λt.

Las variancias (σ^2) para cada división son:

Día \ Hora	Tranquila	Normal	Pesada
Tranquilo	0.0138	0.0614	0.0672
Normal	0.0106	0.0919	0.1199
Pesado	0.0136	0.0937	0.1113

El nivel de confianza que se desea es del 95%, por lo cual la c correspondiente es 1.96 y una longitud del intervalo de confianza de 0.1. Con lo cual se obtienen los siguientes tamaños de muestra para cada división [5]:

Día \ Hora	Tranquila	Normal	Pesada
Tranquilo	$21.27 \approx 22$	$94.42 \approx 95$	$103.34 \approx 104$
Normal	$16.27 \approx 17$	$141.16 \approx 142$	$184.22 \approx 185$
Pesado	$20.92 \approx 21$	$143.95 \approx 144$	$171.03 \approx 172$

Probaremos para cada una de las 9 divisiones que los tiempos entre llegadas tienen una distribución Exponencial y lo haremos utilizando la prueba ji-cuadrada con un nivel de confianza de 95%.

1; Día tranquilo en hora tranquila

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas
1	0.86	**9**	1.96	**17**	2.98
2	1.34	**10**	1.97	**18**	3.26
3	1.37	**11**	2.10	**19**	3.50
4	1.38	**12**	2.12	**20**	3.65
5	1.39	**13**	2.32	**21**	3.82
6	1.44	**14**	2.50	**22**	4.50
7	1.46	**15**	2.55		
8	1.68	**16**	2.95		

[5] El procedimiento se describe en el Apéndice A.

De donde se obtiene $\alpha = 2.32$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.43$.

La raíz de 22 es $4.69 \approx 5$ intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.860 - 1.588	7	4.09	2.07
1.588 - 2.316	5	2.99	1.36
2.316 - 3.044	5	2.18	3.63
3.044 - 3.772	3	1.60	1.23
3.772 - 4.500	2	1.17	0.60

Obtenemos un valor de C = 8.89 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 5-1 = 4 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 9.49. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $8.89 < 9.49$.

2; Día tranquilo en hora normal

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**
1	0.30	**15**	0.43	**29**	0.69	**43**	0.83
2	0.31	**16**	0.46	**30**	0.71	**44**	0.84
3	0.32	**17**	0.47	**31**	0.71	**45**	0.87
4	0.32	**18**	0.49	**32**	0.71	**46**	0.91
5	0.33	**19**	0.50	**33**	0.73	**47**	0.91
6	0.34	**20**	0.51	**34**	0.73	**48**	0.93
7	0.35	**21**	0.53	**35**	0.74	**49**	0.96
8	0.35	**22**	0.54	**36**	0.76	**50**	0.97
9	0.38	**23**	0.54	**37**	0.76	**51**	1.01
10	0.40	**24**	0.55	**38**	0.78	**52**	1.05
11	0.40	**25**	0.55	**39**	0.79	**53**	1.07
12	0.41	**26**	0.56	**40**	0.79	**54**	1.09
13	0.42	**27**	0.63	**41**	0.81	**55**	1.11
14	0.42	**28**	0.66	**42**	0.82	**56**	1.11

n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas
57	1.14	**67**	1.41	**77**	1.72	**87**	2.08
58	1.15	**68**	1.41	**78**	1.72	**88**	2.10
59	1.16	**69**	1.46	**79**	1.74	**89**	2.29
60	1.23	**70**	1.47	**80**	1.78	**90**	2.30
61	1.29	**71**	1.57	**81**	1.86	**91**	2.33
62	1.31	**72**	1.59	**82**	1.92	**92**	2.43
63	1.32	**73**	1.63	**83**	1.94	**93**	2.44
64	1.32	**74**	1.65	**84**	1.96	**94**	2.45
65	1.37	**75**	1.68	**85**	1.98	**95**	2.67
66	1.39	**76**	1.70	**86**	2.00		

De donde se obtiene $\alpha = 1.10$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.91$.

La raíz de 95 es $9.75 \approx 10$ intervalos.

Intervalo	FO	FE	C_i
0.300 - 0.537	21	14.01	3.49
0.537 - 0.774	16	11.30	1.96
0.774 - 1.011	14	9.11	2.63
1.011 - 1.248	9	7.34	0.37
1.248 - 1.485	10	5.92	2.81
1.485 - 1.722	8	4.78	2.18
1.722 - 1.959	5	3.85	0.34
1.959 - 2.196	5	3.11	1.16
2.196 - 2.433	4	2.50	0.89
2.433 - 2.670	3	2.02	0.48

Obtenemos un valor de C = 16.30 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 10-1 = 9 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 16.92. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $16.30 < 16.92$.

3; Día tranquilo en hora pesada

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**
1	0.16	**27**	0.39	**53**	0.61	**79**	0.78
2	0.23	**28**	0.39	**54**	0.61	**80**	0.81
3	0.24	**29**	0.39	**55**	0.61	**81**	0.90
4	0.25	**30**	0.39	**56**	0.61	**82**	0.90
5	0.25	**31**	0.40	**57**	0.62	**83**	0.90
6	0.26	**32**	0.40	**58**	0.62	**84**	0.90
7	0.26	**33**	0.40	**59**	0.63	**85**	0.90
8	0.26	**34**	0.40	**60**	0.64	**86**	0.91
9	0.26	**35**	0.40	**61**	0.64	**87**	0.93
10	0.27	**36**	0.49	**62**	0.65	**88**	1.02
11	0.27	**37**	0.50	**63**	0.65	**89**	1.02
12	0.27	**38**	0.50	**64**	0.65	**90**	1.02
13	0.27	**39**	0.51	**65**	0.65	**91**	1.02
14	0.27	**40**	0.51	**66**	0.66	**92**	1.03
15	0.28	**41**	0.51	**67**	0.67	**93**	1.04
16	0.28	**42**	0.51	**68**	0.68	**94**	1.14
17	0.28	**43**	0.51	**69**	0.68	**95**	1.14
18	0.28	**44**	0.51	**70**	0.69	**96**	1.14
19	0.28	**45**	0.52	**71**	0.70	**97**	1.15
20	0.28	**46**	0.52	**72**	0.72	**98**	1.16
21	0.30	**47**	0.52	**73**	0.77	**99**	1.26
22	0.33	**48**	0.52	**74**	0.77	**100**	1.26
23	0.36	**49**	0.52	**75**	0.77	**101**	1.27
24	0.38	**50**	0.52	**76**	0.78	**102**	1.27
25	0.39	**51**	0.60	**77**	0.78	**103**	1.38
26	0.39	**52**	0.61	**78**	0.78	**104**	1.50

De donde se obtiene $\alpha = 0.63$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 1.60$.

La raíz de 104 es $10.20 \approx 11$ intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.160 - 0.282	20	14.23	2.34
0.282 - 0.404	15	11.72	0.92
0.404 - 0.525	15	9.65	2.97
0.525 - 0.647	11	7.94	1.18
0.647 - 0.769	11	6.54	3.04
0.769 - 0.891	8	5.38	1.27
0.891 - 1.013	7	4.43	1.49
1.013 - 1.135	6	3.65	1.51
1.135 - 1.256	5	3.01	1.32
1.256 - 1.378	4	2.47	0.94
1.378 - 1.500	2	2.04	0.00

Obtenemos un valor de C = 16.97 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 11-1 = 10 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 18.31. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $16.97 < 18.31$.

4; Día normal en hora tranquila

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**
1	0.69	**7**	1.36	**13**	2.12
2	1.11	**8**	1.37	**14**	2.20
3	1.12	**9**	1.47	**15**	2.50
4	1.15	**10**	1.75	**16**	2.78
5	1.17	**11**	1.76	**17**	3.10
6	1.35	**12**	1.79		

De donde se obtiene $\alpha = 1.69$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.59$.

La raíz de 17 es $4.12 \approx 5$ intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.690 - 1.172	5	2.80	1.72
1.172 - 1.654	4	2.11	1.70
1.654 - 2.136	4	1.59	3.68
2.136 - 2.618	2	1.19	0.55
2.618 - 3.100	2	0.90	1.35

Obtenemos un valor de C = 9.00 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 5-1 = 4 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 9.49. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $9.00 < 9.49$.

5; Día normal en hora normal

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**
1	0.12	**14**	0.27	**27**	0.30	**40**	0.43
2	0.15	**15**	0.27	**28**	0.35	**41**	0.43
3	0.17	**16**	0.27	**29**	0.36	**42**	0.43
4	0.23	**17**	0.27	**30**	0.38	**43**	0.43
5	0.24	**18**	0.27	**31**	0.38	**44**	0.43
6	0.25	**19**	0.27	**32**	0.38	**45**	0.43
7	0.26	**20**	0.28	**33**	0.38	**46**	0.43
8	0.26	**21**	0.28	**34**	0.40	**47**	0.44
9	0.26	**22**	0.28	**35**	0.41	**48**	0.44
10	0.26	**23**	0.28	**36**	0.42	**49**	0.44
11	0.26	**24**	0.28	**37**	0.42	**50**	0.44
12	0.26	**25**	0.28	**38**	0.42	**51**	0.44
13	0.27	**26**	0.28	**39**	0.42	**52**	0.44

n	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**
53	0.44	**76**	0.61	**99**	0.81	**122**	1.12
54	0.45	**77**	0.61	**100**	0.81	**123**	1.17
55	0.48	**78**	0.62	**101**	0.82	**124**	1.17
56	0.49	**79**	0.63	**102**	0.83	**125**	1.18
57	0.50	**80**	0.64	**103**	0.88	**126**	1.19
58	0.51	**81**	0.65	**104**	0.88	**127**	1.22
59	0.52	**82**	0.66	**105**	0.91	**128**	1.24
60	0.52	**83**	0.67	**106**	0.91	**129**	1.27
61	0.55	**84**	0.67	**107**	0.93	**130**	1.31
62	0.55	**85**	0.68	**108**	0.95	**131**	1.31
63	0.56	**86**	0.70	**109**	0.95	**132**	1.35
64	0.56	**87**	0.70	**110**	0.95	**133**	1.44
65	0.56	**88**	0.70	**111**	0.96	**134**	1.45
66	0.57	**89**	0.71	**112**	0.96	**135**	1.45
67	0.57	**90**	0.71	**113**	0.99	**136**	1.50
68	0.57	**91**	0.72	**114**	1.01	**137**	1.62
69	0.57	**92**	0.72	**115**	1.01	**138**	1.65
70	0.58	**93**	0.73	**116**	1.06	**139**	1.68
71	0.59	**94**	0.73	**117**	1.06	**140**	1.78
72	0.60	**95**	0.76	**118**	1.06	**141**	1.82
73	0.60	**96**	0.77	**119**	1.09	**142**	2.09
74	0.61	**97**	0.78	**120**	1.09		
75	0.61	**98**	0.80	**121**	1.11		

De donde se obtiene $\alpha = 0.69$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 1.45$.

La raíz de 142 es $11.92 \approx 12$ intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.120 - 0.284	26	25.31	0.02
0.284 - 0.448	27	19.94	2.50
0.448 - 0.612	24	15.71	4.38
0.612 - 0.777	19	12.38	3.55
0.777 - 0.941	11	9.75	0.16
0.941 - 1.105	13	7.68	3.68
1.105 - 1.269	8	6.05	0.63
1.269 - 1.433	4	4.77	0.12
1.433 - 1.597	4	3.76	0.02
1.597 - 1.762	3	2.96	0.00
1.762 - 1.926	2	2.33	0.05
1.926 - 2.090	1	1.84	0.38

Obtenemos un valor de C = 15.48 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 12-1 = 11 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 19.68. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $15.48 < 19.68$.

6; Día normal en hora pesada

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**
1	0.02	**10**	0.09	**19**	0.11	**28**	0.14
2	0.03	**11**	0.09	**20**	0.12	**29**	0.14
3	0.04	**12**	0.10	**21**	0.12	**30**	0.14
4	0.05	**13**	0.10	**22**	0.12	**31**	0.15
5	0.06	**14**	0.10	**23**	0.12	**32**	0.15
6	0.08	**15**	0.10	**24**	0.12	**33**	0.16
7	0.08	**16**	0.11	**25**	0.12	**34**	0.16
8	0.09	**17**	0.11	**26**	0.12	**35**	0.17
9	0.09	**18**	0.11	**27**	0.13	**36**	0.17

n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas
37	0.18	**66**	0.34	**95**	0.48	**124**	0.67
38	0.18	**67**	0.35	**96**	0.49	**125**	0.67
39	0.19	**68**	0.35	**97**	0.49	**126**	0.69
40	0.19	**69**	0.35	**98**	0.49	**127**	0.69
41	0.19	**70**	0.35	**99**	0.49	**128**	0.69
42	0.21	**71**	0.36	**100**	0.51	**129**	0.70
43	0.22	**72**	0.36	**101**	0.51	**130**	0.70
44	0.22	**73**	0.36	**102**	0.51	**131**	0.71
45	0.23	**74**	0.37	**103**	0.52	**132**	0.73
46	0.23	**75**	0.37	**104**	0.52	**133**	0.75
47	0.23	**76**	0.37	**105**	0.52	**134**	0.76
48	0.24	**77**	0.39	**106**	0.52	**135**	0.79
49	0.24	**78**	0.39	**107**	0.53	**136**	0.79
50	0.25	**79**	0.39	**108**	0.54	**137**	0.82
51	0.25	**80**	0.39	**109**	0.55	**138**	0.82
52	0.27	**81**	0.40	**110**	0.55	**139**	0.83
53	0.29	**82**	0.40	**111**	0.55	**140**	0.84
54	0.30	**83**	0.40	**112**	0.56	**141**	0.85
55	0.30	**84**	0.41	**113**	0.57	**142**	0.86
56	0.30	**85**	0.42	**114**	0.58	**143**	0.88
57	0.31	**86**	0.43	**115**	0.60	**144**	0.88
58	0.32	**87**	0.43	**116**	0.63	**145**	0.89
59	0.33	**88**	0.44	**117**	0.64	**146**	0.89
60	0.33	**89**	0.44	**118**	0.65	**147**	0.90
61	0.33	**90**	0.45	**119**	0.65	**148**	0.90
62	0.33	**91**	0.46	**120**	0.65	**149**	0.91
63	0.33	**92**	0.47	**121**	0.65	**150**	0.91
64	0.34	**93**	0.47	**122**	0.67	**151**	0.94
65	0.34	**94**	0.47	**123**	0.67	**152**	0.95

n	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**
153	0.96	**162**	1.05	**171**	1.18	**180**	1.37
154	0.99	**163**	1.09	**172**	1.20	**181**	1.41
155	1.00	**164**	1.09	**173**	1.21	**182**	1.41
156	1.01	**165**	1.11	**174**	1.23	**183**	1.53
157	1.02	**166**	1.12	**175**	1.26	**184**	1.55
158	1.02	**167**	1.12	**176**	1.28	**185**	1.55
159	1.03	**168**	1.14	**177**	1.28		
160	1.04	**169**	1.15	**178**	1.32		
161	1.04	**170**	1.15	**179**	1.35		

De donde se obtiene $\alpha = 0.55$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 1.81$.

La raíz de 185 es $13.60 \approx 14$ intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.020 - 0.129	26	32.05	1.14
0.129 - 0.239	21	26.29	1.07
0.239 - 0.348	19	21.57	0.31
0.348 - 0.457	24	17.70	2.25
0.457 - 0.566	22	14.52	3.86
0.566 - 0.676	13	11.91	0.10
0.676 - 0.785	9	9.77	0.06
0.785 - 0.894	12	8.01	1.98
0.894 - 1.004	9	6.57	0.90
1.004 - 1.113	10	5.39	3.94
1.113 - 1.222	8	4.42	2.89
1.222 - 1.331	5	3.63	0.52
1.331 - 1.441	4	2.98	0.35
1.441 - 1.550	3	2.44	0.13

Obtenemos un valor de C = 19.48 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 14-1 = 13 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 22.36. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $19.48 < 22.36$.

7; Día pesado en hora tranquila

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas
1	0.53	**8**	1.12	**15**	1.69
2	0.73	**9**	1.14	**16**	1.72
3	0.77	**10**	1.32	**17**	1.79
4	0.91	**11**	1.33	**18**	1.85
5	0.93	**12**	1.34	**19**	2.03
6	0.93	**13**	1.38	**20**	2.22
7	0.94	**14**	1.40	**21**	2.62

De donde se obtiene $\alpha = 1.37$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 0.73$.

La raíz de 21 es $4.58 \approx 5$ intervalos.

Intervalo	FO	FE	C_i
0.530 - 0.948	7	3.76	2.80
0.948 - 1.366	5	2.77	1.81
1.366 - 1.784	4	2.04	1.89
1.784 - 2.202	3	1.50	1.50
2.202 - 2.620	2	1.10	0.73

Obtenemos un valor de C = 8.73 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 5-1 = 4 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 9.49. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $8.73 < 9.49$.

8; Día pesado en hora normal

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas
1	0.01	**27**	0.14	**53**	0.28	**79**	0.49
2	0.01	**28**	0.14	**54**	0.29	**80**	0.50
3	0.02	**29**	0.14	**55**	0.29	**81**	0.50
4	0.03	**30**	0.15	**56**	0.29	**82**	0.51
5	0.04	**31**	0.15	**57**	0.30	**83**	0.52
6	0.04	**32**	0.16	**58**	0.31	**84**	0.52
7	0.05	**33**	0.17	**59**	0.32	**85**	0.52
8	0.05	**34**	0.17	**60**	0.33	**86**	0.53
9	0.06	**35**	0.18	**61**	0.33	**87**	0.55
10	0.07	**36**	0.18	**62**	0.33	**88**	0.55
11	0.08	**37**	0.19	**63**	0.33	**89**	0.56
12	0.08	**38**	0.19	**64**	0.33	**90**	0.56
13	0.08	**39**	0.20	**65**	0.35	**91**	0.57
14	0.09	**40**	0.21	**66**	0.37	**92**	0.58
15	0.09	**41**	0.22	**67**	0.38	**93**	0.58
16	0.10	**42**	0.24	**68**	0.39	**94**	0.58
17	0.10	**43**	0.25	**69**	0.40	**95**	0.59
18	0.11	**44**	0.26	**70**	0.42	**96**	0.59
19	0.12	**45**	0.26	**71**	0.43	**97**	0.60
20	0.12	**46**	0.26	**72**	0.44	**98**	0.62
21	0.13	**47**	0.26	**73**	0.45	**99**	0.62
22	0.13	**48**	0.27	**74**	0.45	**100**	0.62
23	0.13	**49**	0.27	**75**	0.46	**101**	0.62
24	0.13	**50**	0.28	**76**	0.47	**102**	0.63
25	0.14	**51**	0.28	**77**	0.47	**103**	0.63
26	0.14	**52**	0.28	**78**	0.48	**104**	0.64

n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas	n	Tiempo entre Llegadas
105	0.64	**115**	0.73	**125**	0.86	**135**	1.05
106	0.67	**116**	0.74	**126**	0.86	**136**	1.08
107	0.69	**117**	0.78	**127**	0.88	**137**	1.14
108	0.70	**118**	0.79	**128**	0.91	**138**	1.18
109	0.71	**119**	0.81	**129**	0.94	**139**	1.19
110	0.71	**120**	0.82	**130**	0.95	**140**	1.26
111	0.72	**121**	0.82	**131**	0.97	**141**	1.34
112	0.72	**122**	0.83	**132**	0.97	**142**	1.38
113	0.72	**123**	0.85	**133**	1.02	**143**	1.39
114	0.73	**124**	0.85	**134**	1.03	**144**	1.59

De donde se obtiene $\alpha = 0.48$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 2.08$.

La raíz de 144 es 12 = 12 intervalos.

Intervalo	**FO**	**FE**	C_i
0.010 - 0.142	29	33.83	0.69
0.142 - 0.273	20	25.71	1.27
0.273 - 0.405	20	19.55	0.01
0.405 - 0.537	17	14.86	0.31
0.537 - 0.668	19	11.29	5.26
0.668 - 0.800	13	8.58	2.27
0.800 - 0.932	10	6.53	1.85
0.932 - 1.063	7	4.96	0.84
1.063 - 1.195	4	3.77	0.01
1.195 - 1.327	1	2.87	1.21
1.327 - 1.458	3	2.18	0.31
1.458 - 1.590	1	1.66	0.26

Obtenemos un valor de C = 14.29 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 12-1 = 11 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 19.68. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que 14.29 < 19.68.

9; Día pesado en hora pesada

Los datos que se obtuvieron del muestreo son los siguientes:

n	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**
1	0.05	**24**	0.14	**47**	0.24	**70**	0.33
2	0.05	**25**	0.14	**48**	0.25	**71**	0.34
3	0.06	**26**	0.15	**49**	0.25	**72**	0.34
4	0.07	**27**	0.15	**50**	0.25	**73**	0.34
5	0.08	**28**	0.15	**51**	0.25	**74**	0.34
6	0.08	**29**	0.16	**52**	0.26	**75**	0.35
7	0.08	**30**	0.17	**53**	0.26	**76**	0.36
8	0.09	**31**	0.17	**54**	0.26	**77**	0.36
9	0.09	**32**	0.18	**55**	0.26	**78**	0.37
10	0.10	**33**	0.19	**56**	0.26	**79**	0.38
11	0.10	**34**	0.20	**57**	0.27	**80**	0.38
12	0.10	**35**	0.20	**58**	0.27	**81**	0.38
13	0.11	**36**	0.20	**59**	0.27	**82**	0.39
14	0.11	**37**	0.20	**60**	0.28	**83**	0.40
15	0.11	**38**	0.20	**61**	0.29	**84**	0.40
16	0.12	**39**	0.21	**62**	0.29	**85**	0.40
17	0.12	**40**	0.21	**63**	0.30	**86**	0.40
18	0.12	**41**	0.23	**64**	0.31	**87**	0.41
19	0.13	**42**	0.24	**65**	0.31	**88**	0.41
20	0.13	**43**	0.24	**66**	0.31	**89**	0.41
21	0.13	**44**	0.24	**67**	0.31	**90**	0.42
22	0.14	**45**	0.24	**68**	0.32	**91**	0.42
23	0.14	**46**	0.24	**69**	0.32	**92**	0.43

n	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**	**n**	**Tiempo entre Llegadas**
93	0.44	**113**	0.57	**133**	0.72	**153**	0.95
94	0.44	**114**	0.57	**134**	0.72	**154**	0.99
95	0.45	**115**	0.58	**135**	0.74	**155**	0.99
96	0.45	**116**	0.58	**136**	0.75	**156**	1.00
97	0.45	**117**	0.58	**137**	0.75	**157**	1.01
98	0.46	**118**	0.59	**138**	0.77	**158**	1.01
99	0.46	**119**	0.60	**139**	0.78	**159**	1.08
100	0.46	**120**	0.61	**140**	0.79	**160**	1.09
101	0.47	**121**	0.61	**141**	0.82	**161**	1.09
102	0.47	**122**	0.63	**142**	0.83	**162**	1.12
103	0.48	**123**	0.63	**143**	0.86	**163**	1.15
104	0.48	**124**	0.64	**144**	0.87	**164**	1.23
105	0.50	**125**	0.66	**145**	0.87	**165**	1.25
106	0.51	**126**	0.67	**146**	0.88	**166**	1.29
107	0.52	**127**	0.67	**147**	0.89	**167**	1.29
108	0.54	**128**	0.69	**148**	0.91	**168**	1.43
109	0.55	**129**	0.70	**149**	0.93	**169**	1.46
110	0.55	**130**	0.71	**150**	0.93	**170**	1.46
111	0.56	**131**	0.71	**151**	0.94	**171**	1.47
112	0.56	**132**	0.72	**152**	0.95	**172**	1.48

De donde se obtiene $\alpha = 0.49$, entonces $\hat{\alpha} = 1/\alpha = 2.02$.

La raíz de 172 es $13.11 \approx 14$ intervalos.

Intervalo	FO	FE	C_i
0.050 - 0.152	28	29.03	0.04
0.152 - 0.254	23	23.61	0.02
0.254 - 0.356	24	19.20	1.20
0.356 - 0.459	22	15.61	2.61
0.459 - 0.561	15	12.70	0.42
0.561 - 0.663	13	10.33	0.69
0.663 - 0.765	12	8.40	1.54
0.765 - 0.867	6	6.83	0.10
0.867 - 0.969	10	5.55	3.56
0.969 - 1.071	5	4.52	0.05
1.071 - 1.174	5	3.67	0.48
1.174 - 1.276	2	2.99	0.33
1.276 - 1.378	2	2.43	0.08
1.378 - 1.480	5	1.98	4.63

Obtenemos un valor de C = 15.74 que se compara con el valor de tablas de χ^2 con 14-1 = 13 grados de libertad y una probabilidad de rechazo de 5% que es igual a 22.36. La comparación indica que la muestra tomada sigue una distribución Exponencial, ya que $15.74 < 22.36$.

4.4 SELECCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO ADECUADO

Una vez que probamos que las llegadas y los servicios tienen una distribución Exponencial se procede a aplicar las fórmulas de líneas de espera para cada división. Recordemos las tasas promedio de servicio (μ) y las de llegadas (λ) por división.

Día \ Hora	Tranquila	Normal	Pesada
Tranquilo	$\mu = 18$ $\lambda = 35$	$\mu = 18$ $\lambda = 60$	$\mu = 19$ $\lambda = 86$
Normal	$\mu = 18$ $\lambda = 43$	$\mu = 19$ $\lambda = 85$	$\mu = 20$ $\lambda = 98$
Pesado	$\mu = 18$ $\lambda = 68$	$\mu = 20$ $\lambda = 99$	$\mu = 20$ $\lambda = 124$

Aplicando las fórmulas por división y para varios canales de distribución (recordemos que la máxima capacidad son 8) tenemos:

1. **Probabilidad de que no haya unidades en el sistema:**

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^K}{K!}\left(\frac{K\mu}{K\mu-\lambda}\right)}$$

	Canales de distribución				
Día - Hora	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Tranquilo - Tranquila	**0.1385**	**0.1421**	**0.1428**	**0.1430**	**0.1431**
Tranquilo - Normal	**0.0213**	**0.0317**	**0.0345**	**0.0354**	**0.0356**
Tranquilo - Pesada	*	**0.0046**	**0.0088**	**0.0102**	**0.0106**
Normal - Tranquila	**0.0841**	**0.0899**	**0.0913**	**0.0916**	**0.0917**
Normal - Normal	*	**0.0052**	**0.0094**	**0.0108**	**0.0112**
Normal - Pesada	*	**0.0008**	**0.0052**	**0.0067**	**0.0072**
Pesado - Tranquila	**0.0057**	**0.0179**	**0.0214**	**0.0224**	**0.0227**
Pesado - Normal	*	**0.0004**	**0.0048**	**0.0063**	**0.0068**
Pesado - Pesada	*	*	*	**0.0011**	**0.0017**

* No aplica, ya que $\lambda/s\mu \geq 1$

2. **Número promedio de unidades en la línea de espera:**

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^K \lambda\mu}{(K-1)!(K\mu-\lambda)^2} P_0$$

	Canales de distribución				
Día - Hora	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Tranquilo - Tranquila	**0.1518**	**0.0343**	**0.0076**	**0.0016**	**0.0003**
Tranquilo - Normal	**3.2886**	**0.6533**	**0.1853**	**0.0557**	**0.0165**
Tranquilo - Pesada	*	**7.3988**	**1.3197**	**0.4066**	**0.1391**
Normal - Tranquila	**0.4204**	**0.1022**	**0.0259**	**0.0063**	**0.0015**
Normal - Normal	*	**6.3816**	**1.2126**	**0.3759**	**0.1282**
Normal - Pesada	*	**46.5655**	**2.4593**	**0.7017**	**0.2418**
Pesado - Tranquila	**14.9541**	**1.4578**	**0.3968**	**0.1245**	**0.0397**
Pesado - Normal	*	**96.5276**	**2.6855**	**0.7541**	**0.2597**
Pesado - Pesada	*	*	*	**5.2981**	**1.3968**

3. **Número promedio de unidades en el sistema:**

$$\mathrm{L} = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

	Canales de distribución				
Día - Hora	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Tranquilo - Tranquila	**2.0963**	**1.9787**	**1.9520**	**1.9460**	**1.9447**
Tranquilo - Normal	**6.6219**	**3.9867**	**3.5186**	**3.3890**	**3.3498**
Tranquilo - Pesada	*	**11.9251**	**5.8460**	**4.9329**	**4.6654**
Normal - Tranquila	**2.8093**	**2.4911**	**2.4148**	**2.3952**	**2.3903**
Normal - Normal	*	**10.8552**	**5.6863**	**4.8496**	**4.6019**
Normal - Pesada	*	**51.4655**	**7.3592**	**5.6017**	**5.1418**
Pesado - Tranquila	**18.7319**	**5.2356**	**4.1746**	**3.9023**	**3.8174**
Pesado - Normal	*	**101.4776**	**7.6355**	**5.7041**	**5.2097**
Pesado - Pesada	*	*	*	**11.4981**	**7.5968**

4. **Tiempo promedio que cada unidad pasa en la línea de espera (en minutos):**

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

	Canales de distribución				
Día - Hora	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Tranquilo - Tranquila	**0.2603**	**0.0588**	**0.0130**	**0.0027**	**0.0005**
Tranquilo - Normal	**3.2886**	**0.6533**	**0.1853**	**0.0557**	**0.0165**
Tranquilo - Pesada	*	**5.1620**	**0.9207**	**0.2837**	**0.0970**
Normal - Tranquila	**0.5866**	**0.1426**	**0.0362**	**0.0089**	**0.0020**
Normal - Normal	*	**4.5046**	**0.8560**	**0.2654**	**0.0905**
Normal - Pesada	*	**28.5095**	**1.5057**	**0.4296**	**0.1481**
Pesado - Tranquila	**13.1948**	**1.2863**	**0.3501**	**0.1099**	**0.0350**
Pesado - Normal	*	**58.5016**	**1.6276**	**0.4570**	**0.1574**
Pesado - Pesada	*	*	*	**2.5636**	**0.6759**

5. **Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema (en minutos):**

$$\mathrm{W} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

	Canales de distribución				
Día - Hora	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Tranquilo - Tranquila	**3.5937**	**3.3921**	**3.3464**	**3.3361**	**3.3339**
Tranquilo - Normal	**6.6219**	**3.9867**	**3.5186**	**3.3890**	**3.3498**
Tranquilo - Pesada	*	**8.3199**	**4.0786**	**3.4416**	**3.2549**
Normal - Tranquila	**3.9199**	**3.4759**	**3.3695**	**3.3422**	**3.3354**
Normal - Normal	*	**7.6625**	**4.0139**	**3.4233**	**3.2484**
Normal - Pesada	*	**31.5095**	**4.5057**	**3.4296**	**3.1481**
Pesado - Tranquila	**16.5281**	**4.6196**	**3.6835**	**3.4432**	**3.3683**
Pesado - Normal	*	**61.5016**	**4.6276**	**3.4570**	**3.1574**
Pesado - Pesada	*	*	*	**5.5636**	**3.6759**

6. Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar:

$$P_W = \frac{1}{K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K \left(\frac{K\mu}{K\mu-\lambda}\right) P_0$$

	Canales de distribución				
Día - Hora	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Tranquilo - Tranquila	**0.1605**	**0.0539**	**0.0159**	**0.0041**	**0.0010**
Tranquilo - Normal	**0.6577**	**0.3267**	**0.1482**	**0.0613**	**0.0231**
Tranquilo - Pesada	*	**0.7743**	**0.4297**	**0.2222**	**0.1067**
Normal - Tranquila	**0.2835**	**0.1117**	**0.0392**	**0.0123**	**0.0034**
Normal - Normal	*	**0.7508**	**0.4137**	**0.2123**	**0.1011**
Normal - Pesada	*	**0.9503**	**0.5521**	**0.3007**	**0.1530**
Pesado - Tranquila	**0.8796**	**0.4716**	**0.2334**	**0.1062**	**0.0443**
Pesado - Normal	*	**0.9750**	**0.5697**	**0.3123**	**0.1600**
Pesado - Pesada	*	*	*	**0.6836**	**0.4055**

7. Probabilidad de que haya n unidades en el sistema:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \qquad \text{para n} \leq \text{k}$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{K!K^{(n-K)}} P_0 \qquad \text{para n} > \text{k}$$

Por cuestiones de espacio sólo haremos el cálculo para P_1 y P_9.

P_1	**Canales de distribución**				
Día - Hora	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Tranquilo - Tranquila	**0.2693**	**0.2764**	**0.2778**	**0.2781**	**0.2782**
Tranquilo - Normal	**0.0710**	**0.1058**	**0.1152**	**0.1179**	**0.1186**
Tranquilo - Pesada	*	**0.0210**	**0.0399**	**0.0460**	**0.0480**
Normal - Tranquila	**0.2010**	**0.2150**	**0.2182**	**0.2189**	**0.2190**
Normal - Normal	*	**0.0237**	**0.0423**	**0.0482**	**0.0501**
Normal - Pesada	*	**0.0040**	**0.0258**	**0.0328**	**0.0352**
Pesado - Tranquila	**0.0217**	**0.0679**	**0.0809**	**0.0848**	**0.0859**
Pesado - Normal	*	**0.0019**	**0.0241**	**0.0313**	**0.0338**
Pesado - Pesada	*	*	*	**0.0069**	**0.0104**

P_9	**Canales de distribución**				
Día - Hora	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Tranquilo - Tranquila	**0.0022**	**0.0007**	**0.0004**	**0.0002**	**0.0002**
Tranquilo - Normal	**0.0440**	**0.0215**	**0.0113**	**0.0073**	**0.0056**
Tranquilo - Pesada	*	**0.0493**	**0.0453**	**0.0328**	**0.0262**
Normal - Tranquila	**0.0087**	**0.0030**	**0.0015**	**0.0009**	**0.0007**
Normal - Normal	*	**0.0506**	**0.0436**	**0.0313**	**0.0249**
Normal - Pesada	*	**0.0175**	**0.0551**	**0.0442**	**0.0363**
Pesado - Tranquila	**0.0367**	**0.0376**	**0.0216**	**0.0142**	**0.0110**
Pesado - Normal	*	**0.0094**	**0.0560**	**0.0457**	**0.0377**
Pesado - Pesada	*	*	*	**0.0613**	**0.0707**

4.5 ANÁLISIS DE RESULTADOS

En las siguientes tablas se propone el número de cajeros que se recomienda, tomando en cuenta que los clientes no tengan que esperar un gran lapso de tiempo para ser atendidos y al mismo tiempo el banco no hace un gasto innecesario en contratar cajeros que sólo serán utilizados en algunos momentos del día.

Día - Hora	Número de cajeros	Medidas de Desempeño			
		P_0	L_q	**L**	W_q
Tranquilo - Tranquila	**4**	**0.1385**	**0.1518**	**2.0963**	**0.2603**
Tranquilo - Normal	**4**	**0.0213**	**3.2886**	**6.6219**	**3.2886**
Tranquilo - Pesada	**5**	**0.0046**	**7.3988**	**11.9251**	**5.1620**
Normal - Tranquila	**4**	**0.0841**	**0.4204**	**2.8093**	**0.5866**
Normal - Normal	**5**	**0.0052**	**6.3816**	**10.8552**	**4.5046**
Normal - Pesada	**6**	**0.0052**	**2.4593**	**7.3592**	**1.5057**
Pesado - Tranquila	**5**	**0.0179**	**1.4578**	**5.2356**	**1.2863**
Pesado - Normal	**6**	**0.0048**	**2.6855**	**7.6355**	**1.6276**
Pesado - Pesada	**7**	**0.0011**	**5.2981**	**11.4981**	**2.5636**

Día - Hora	Medidas de Desempeño			
	W	P_w	P_1	P_9
Tranquilo - Tranquila	**3.5937**	**0.1605**	**0.2693**	**0.0022**
Tranquilo - Normal	**6.6219**	**0.6577**	**0.0710**	**0.0440**
Tranquilo - Pesada	**8.3199**	**0.7743**	**0.210**	**0.0493**
Normal - Tranquila	**3.9199**	**0.2835**	**0.2010**	**0.0087**
Normal - Normal	**7.6625**	**0.7508**	**0.0237**	**0.0506**
Normal - Pesada	**4.5057**	**0.5521**	**0.0258**	**0.0551**
Pesado - Tranquila	**4.6196**	**0.4716**	**0.0679**	**0.0376**
Pesado - Normal	**4.6276**	**0.5697**	**0.0241**	**0.0560**
Pesado - Pesada	**5.5636**	**0.6836**	**0.0069**	**0.0613**

Con estas recomendaciones el máximo tiempo que esperaría un cliente es en un día tranquilo y hora pesada con 5.162 minutos, pero no es un tiempo alto de espera por realizar una operación en un banco.

Se recomienda que se contrate personal de medio tiempo (o con pago por horas) para los horarios difíciles, con el fin de que no se tenga que trabajar con exceso de personal todo el día. Por ejemplo en un día pesado se puede empezar trabajando con 6 cajeros (si se trabaja con 5 únicamente sería media hora de 8:30 a 9:00 y a las 9:00 se tendría que aumentar a 6, por lo tanto es recomendable abrir con 6 cajeros el banco), en el lapso de 10 a.m. a 2 p.m. se les puede dar su horario de comida (dos cajeros saldrían a comer de 10 a.m. a 11 a.m., dos de 11 a.m. a 12 a.m., uno de 12 a.m. a 1 p.m. y uno de 1 p.m. a 2 p.m), ya que es un horario intermedio y de esta forma rendirían mejor en el trabajo que desempeñan. Se contratarían dos cajeros extras, uno de ellos con pago por horas de 9 a.m. a 3 p.m. y el otro de medio turno con un horario de 10 a.m. a 2 p.m. De esta forma se cumple con el número de cajeros que se requieren para cumplir con las recomendaciones dadas.

A continuación se presentan 3 tablas, en las cuales se resume el número de cajeros que se tienen que contratar para cada tipo de hora y día para satisfacer las recomendaciones hechas:

DÍA TRANQUILO

Número de cajeros / Hora	**De tiempo completo**	**Por horas**	**De medio tiempo**	**En hora de comida**	**Disponibles**
8:30 - 9:00	**5**	**0**	**0**	**0**	**5**
9:00 - 10:00	**5**	**0**	**0**	**0**	**5**
10:00 - 11:00	**5**	**1**	**0**	**2**	**4**
11:00 - 12:00	**5**	**1**	**0**	**2**	**4**
12:00 - 13:00	**5**	**1**	**0**	**1**	**5**
13:00 - 14:00	**5**	**0**	**0**	**0**	**5**
14:00 - 15:00	**5**	**0**	**0**	**0**	**5**
15:00 - 16:00	**5**	**0**	**0**	**0**	**5**

DÍA NORMAL

Número de cajeros / Hora	De tiempo completo	Por horas	De medio tiempo	En hora de comida	Disponibles
8:30 - 9:00	5	0	0	0	5
9:00 - 10:00	5	0	1	0	6
10:00 - 11:00	5	1	1	2	5
11:00 - 12:00	5	1	1	2	5
12:00 - 13:00	5	1	1	1	6
13:00 - 14:00	5	1	0	0	6
14:00 - 15:00	5	1	0	0	6
15:00 - 16:00	5	0	0	0	5

DÍA PESADO

Número de cajeros / Hora	De tiempo completo	Por horas	De medio tiempo	En hora de comida	Disponibles
8:30 - 9:00	6	0	0	0	6
9:00 - 10:00	6	1	0	0	7
10:00 - 11:00	6	1	1	2	6
11:00 - 12:00	6	1	1	2	6
12:00 - 13:00	6	1	1	1	7
13:00 - 14:00	6	1	1	1	7
14:00 - 15:00	6	1	0	0	7
15:00 - 16:00	6	0	0	0	6

Existen consideraciones importantes que no son cuantitativas y que pueden ayudar a mejorar significativamente el funcionamiento del sistema (ahorro de tiempo), como son:

- Poner a una persona que revise las ordenes llenadas por los clientes para confirmar que lo están haciendo correctamente, de lo contrario auxiliarlos.
- Si no es posible poner a una persona que realice dicha actividad por cuestiones de gastos, se pueden poner ejemplos de como se deben llenar las ordenes o en la T.V. que existe se pueden pasar videos.
- Informar a los clientes los horarios en los que se espera que haya mayor afluencia de gente por si les es posible asistir en otro horario lo hagan.
- Que los cajeros cuenten con ordenes llenas correctamente y si algún cliente tiene duda se les puede proporcionar como ejemplo.

CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró que el manejo de líneas de espera es una herramienta efectiva para mejorar el desempeño de una organización de servicio, pero se tiene que poner atención especial en identificar problemas y oportunidades de mejora en los sistemas de espera, ya que la difícultad puede radicar en el mal funcionamiento del sistema.

Antes de aplicar cualquiera de los métodos presentados en este trabajo debemos poner especial atención a las distribuciones que siguen los tiempos de llegadas y de servicio, ya que puede ser que se utilice un método que no sea el conveniente para la solución de dicho problema.

Con los métodos presentados en este trabajo se pretende dar una amplia gama de opciones, con las cuales podamos resolver un problema de líneas de espera cuando este se presente.

No debemos olvidar que las líneas de espera nos proporcionan información sobre el funcionamiento del sistema y que se pueden dar varias opciones de solución que dependen de la persona que esta análizando (evaluando) el problema, porque para una persona puede ser que sea óptimo esperar 10 minutos mientras para otra puede ser que el óptimo sean 2 minutos.

A pesar de que existe espacio físico para poner más cajas (es la solución más sencilla), se demostro con el análisis que se hizo de líneas de espera que no existe dicha necesidad.

Con el caso analizado se pudo observar una aplicación de líneas de espera y su importancia radica en el hecho de que es un caso real, de una organización de servicios (Banco) y que por medio de este trabajo se propusieron soluciones que le permitirán mejorar su sistema de líneas de espera.

APÉNDICE A

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL CUYA VARIANCIA ES CONOCIDA

Sea $x_1, ..., x_n$ una muestra dada extraída de una población distribuida normalmente y cuya variancia σ^2 es conocida (a partir de las experiencias anteriores). Suponemos que la media μ es desconocida y que deseamos determinar un intervalo de confianza para μ.

Los pasos necesarios para determinar un intervalo de confianza bajo las suposiciones anteriores se muestra en la tabla A.1. Se puede observar que c en la expresión (1) es una función creciente del nivel de confianza γ. Por lo tanto, mientras más cercano a 1 se escoja γ debemos esperar intervalos de confianza más grandes. De igual manera, el tamaño n de la muestra aparece en el denominador de k. Esto implica que, en general, las muestras más grandes darán intervalos de confianza más cortos, es decir, información más precisa.

Tabla A.1 Determinación de un intervalo de confianza para la media μ de una distribución normal con variancia conocida σ^2

1er paso. Elegir un intervalo de confianza γ (95%, 99%, o uno semejante)

2do paso. Determinar la c correspondiente

γ	0.90	0.95	0.99	0.999
c	1.645	1.960	2.576	3.291

3er paso. Calcular la media $\bar{x}$ de la muestra $x_1, ..., x_n$

4to paso. Calcular

(1) $$k = c\sigma/\sqrt{n}$$

El intervalo de confianza para la media μ de la población es

CONF$\{\bar{x}$ - k $\leq \mu \leq \bar{x}$ + k$\}$

En relación con problemas prácticos, a veces surge la pregunta de qué tan grande se debe escoger el tamaño de la muestra con el fin de obtener una cierta precisión que se desea. Cuando n es demasiado grande se puede tener un gasto inútil de tiempo y dinero, mientras que cuando n es demasiado pequeño podríamos no tener esta precisión; por lo tanto, la pregunta es importante. La manera de proceder es la siguiente:

El intervalo de confianza en la tabla A.1 tiene la longitud

$$L = 2k = 2c\sigma/\sqrt{n}$$

Resolviendo para n, obtenemos

$$n = (2c\sigma/L)^2 = 4c^2\sigma^2/L^2$$

Este método para obtener intervalos de confianza para la media de la distribución normal es un método aproximado para el caso de una distribución cualquiera. La exactitud aumenta con el crecimiento del tamaño n de la muestra.

APÉNDICE B

PRUEBA PARA FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN "PRUEBA JI-CUADRADA"

La idea básica de la prueba ji-cuadrada es muy sencilla. Primero subdividimos el eje x en intervalos. Luego calculamos las probabilidades que corresponden a estos intervalos bajo la hipótesis de que cierta función F(x) es la función de distribución de la población que se considera. Por último, comparamos estas probabilidades con las frecuencias de clases relativas de una muestra dada. Si la discrepancia es demasiado grande, rechazamos la hipótesis. Los detalles técnicos de la prueba se muestran en la tabla B.1. Algunos de los pasos necesitan más explicaciones, según lo siguiente.

Los intervalos I_1 e I_k del primer paso son infinitos. En el caso de una distribución discreta, los puntos frontera de los intervalos no deben coincidir con los puntos en que F(x) tiene saltos.

Los números e_j del segundo paso deben ser mayores o iguales que 5. Si esta condición se viola para algún intervalo, debemos tomar un intervalo más grande (en la forma más sencilla, uniendo el intervalo con uno de sus vecinos). Si la muestra es tan pequeña que esto se hace imposible, debemos continuar con la prueba, pero usando el resultado con mayor cuidado.

Tabla B.1 Prueba ji-cuadrada para la hipótesis de que F(x) es la función de distribución de una población de la que se toma la muestra $x_1, ..., x_n$

1er paso. Subdividimos el eje x en K intervalos $I_1, I_2, ..., I_k$ de tal manera que cada intervalo contiene al menos 5 valores de la muestra dada $x_1, ..., x_n$. Determinamos el número b_j de los valores en la muestra en el intervalo I_j (j = 1,...,k). Si un valor de la muestra se localiza en un punto frontera común de dos intervalos, sumamos 0.5 a cada uno de los dos b_j correspondientes.

2do paso. Usando F(x), se calcula la probabilidad p_j de que la variable aleatoria X que se considera tome cualquier valor en el intervalo I_j (j = 1, 2,...,k). Se calcula

$$e_j = np_j$$

(Este es el número de valores de la muestra teóricamente esperados en I_j si la hipótesis es cierta.)

3er paso. Se calcula la desviación

$$\chi_o^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j}$$

4to paso. Escogemos un nivel de significancia α (5% , 1% o alguno semejante).

5to paso. Se determina la solución c de la ecuación $P(\chi^2 \leq c) = 1 - \alpha$ mediante la tabla de la distribución ji-cuadrada con k-1 grados de libertad. Si $\chi_o^2 \leq c$, no se rechaza la hipótesis. Si $\chi_o^2 > c$, se rechaza la hipótesis.

APÉNDICE C

DISTRIBUCIÓN JI-CUADRADA

	Número de grados de libertad									
F(x)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0.001	0.00	0.00	0.02	0.09	0.21	0.38	0.60	0.86	1.15	1.48
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19
0.999	10.83	13.82	16.27	18.47	20.52	22.46	24.32	26.13	27.88	29.59

	Número de grados de libertad									
F(x)	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0.001	1.83	2.21	2.62	3.04	3.48	3.94	4.42	4.90	5.41	5.92
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.01	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.05	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.1	5.58	6.30	7.04	7.79	8.55	9.31	10.09	10.86	11.65	12.44
0.25	7.58	8.44	9.30	10.17	11.04	11.91	12.79	13.68	14.56	15.45
0.5	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34	15.34	16.34	17.34	18.34	19.34
0.75	13.70	14.85	15.98	17.12	18.25	19.37	20.49	21.60	22.72	23.83
0.9	17.28	18.55	19.81	21.06	22.31	23.54	24.77	25.99	27.20	28.41
0.95	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.47	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.99	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.17	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00
0.999	31.26	32.91	34.53	36.12	37.70	39.25	40.79	42.31	43.82	45.32

BIBLIOGRAFÍA

- Richard B. Chase; Nicholas J. Aquilano; F. Robert Jacobs. "Operations Management for competitive Advantage". McGraw-Hill. Año.
- Richard B. Chase; Nicholas J. Aquilano; F. Robert Jacobs. "Production and Operations Management: a life cycle approach". Irwin. EUA. 1992.
- Frederick S. Hillier; Mark S. Hillier; Gerald J. Lieberman. "Introduction to Management Science". McGraw-Hill. Año.
- James A. Fitzsimmons; Mona J. Fitzsimmons. "Service Management Operations, Strategy, and Information Technology". McGraw-Hill. Año.
- Charles P. Bonini; Warren H. Hausman; Harold Bierman, Jr. "Quantitative Analysis for Management". McGraw-Hill. Año.
- David R. Anderson; Dennis J. Sweeney; Thomas A. Williams. "Introducción a los Modelos Cuantitativos para Administración". Grupo Editorial Iberoaméricana. México D.F. 1993.
- José A. Domínguez. "Dirección de Operaciones (Aspectos Estratégicos en la Producción y los Servicios)". McGraw-Hill. Madrid. 1995.
- Frederick S. Hillier; Gerald J. Lieberman. "Introducción a la Investigación de Operaciones". McGraw-Hill. 1997.
- Richard Bronson. "Investigación de Operaciones". McGraw-Hill. México D.F. 1993.
- Juan Prawda Witenberg. "Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones". Editorial Limusa. México. 1999.
- Charles E. Bonini; Warren H. Hausman; Harold Bierman, Jr. "Análisis Cuantitativo para los Negocios". McGraw-Hill. México. 2000.
- Jay L. Devore. "Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias". International Thomson Editores. México. 1998.
- Erwin Kreyszig. "Introducción a la Estadística Matemática Principios y Métodos". Editorial Limusa-Wiley. México. 1975.
- William Mendenhall; Dennis D. Wackerly; Richard L. Scheaffer. "Estadística Matemática con Aplicaciones". Grupo Editorial Iberoaméricana. México. 1994.
- Jay Heizer; Barry Render. "Dirección de la Producción - Decisiones Tácticas". Pearson Educación. Madrid. 2001.

- Jay Heizer; Barry Render. “Dirección de la Producción - Decisiones Estratégicas”. Prentice Hall. Madrid. 1997.
- Mark M. Davis; Nicholas J. Aquilano; Richard B. Chase. “Fundamentos de Dirección de Operaciones”. McGraw-Hill. Madrid. 2001.
- Página de internet de Bancomer: http://www.bancomer.com.mx/