UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESTUDIO DE SISTEMAS CON DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

PRESENTA:

ALDO DÉCTOR OLIVER

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER

COMITÉ TUTORAL: DR. JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO
DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO

posgrado en ciencias físicas
unam

MÉXICO, D.F. 2008

Índice general

Capítulo 1
Introducción

Entendemos por sistemas físicos con derivadas superiores en el tiempo como aquellos sistemas que pueden ser descritos por una función Lagrangiana dependiente de derivadas temporales de orden mayor que uno en las coordenadas generalizadas del sistema:

$$L = L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, q^{(N)}\right) \ , \tag{1}$$

donde:

$$q^{(n)} \equiv \frac{d^n q}{d\,t^n} \, .$$

Históricamente, términos con segundas derivadas se agregaban a funciones Lagrangianas usuales para modelar ciertas propiedades tales como rigidez en algunos sistemas. Sin embargo, y a pesar de que el intento más serio e importante por formalizar dichos sistemas dentro de algún marco teórico general fuera realizado por Ostrogradsky [?] hace alrededor de un siglo y medio, dichos sistemas se encontraron en la periferia de la física durante largo tiempo. Durante el siglo XX ésta situación empezó a cambiar y las teorías de orden superior empezaron a tener aplicaciones en ciertos problemas o incluso a surgir por si mismas a través de ciertos sistemas. Así, las teorías con derivadas de orden superior están relacionadas con problemas que surgen en la teoría de gravitación conforme [?] y son inherentes al problema de no-localidad en teoría de cuerdas [?]. Han encontrado además aplicaciones en campos tan diversos como el de la interacción Muón-Nucleón [?] y en teoría de campo no-conmutativa [?] [?]. Las teorías de orden superior fueron incluso consideradas anteriormente con el fin de obtener una teoría de campos finita, antes de la aparición del mecanismo de renormalización. Es una creencia generalizada en ciertos círculos que las teorías usuales con Lagrangianos dependientes a lo más de primeras derivadas son sólo una aproximación a bajas energías de la realidad física, y que deben agregarse términos con derivadas superiores para tener una descripción más completa de ciertos sistemas. En este sentido, el problema de las derivadas superiores ha sido atacado principalmente desde un punto de vista perturbativo [?].

Los sistemas de orden superior tienen un número de características que los distinguen de los sistemas ordinarios y que dificultan la cuantización consistente de los mismos [?]. Una de dichas características es que cuentan con más grados de libertad que las teorías ordinarias. En efecto, partiendo de la acción correspondiente al sistema:

$$S = \int dt \; L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, q^{(N)}\right) \ ,$$

entonces, aplicando el principio de acción de Hamilton: $\delta S = 0$, se mostrará en los siguientes capítulos que se debe considerar a $\left\{q, \dot{q}, \ldots, q^{(N-1)}\right\}$ como un conjunto de coordenadas independientes entre sí. Al realizar la cuantización del sistema, ésta característica entrará en conflicto con la mecánica cuántica, ya que implicará al nivel de relaciones de conmutación que:

$$[q, \dot{q}] = 0 \,,$$

es decir, que posición y velocidad pueden ser medidas simultáneamente con precisión arbitraria. La formulación Hamiltoniana de dichos sistemas, desarrollada por Ostrogradsky hace un siglo y medio, trae consigo una serie de particularidades adicionales que hacen igualmente difícil la cuantización de los sistemas de orden superior. En el marco del mencionado formalismo, la función Hamiltoniana resultante tiene una dependencia lineal en los momentos, de tal forma que la energía del sistema no estará acotada por abajo. Esta propiedad se transmite íntegramente a la teoría cuántica correspondiente. Supongamos entonces que se parte de un sistema cuántico exactamente soluble y se le agrega una perturbación de mayor orden. La teoría cuántica de mayor orden resultante al aplicar el formalismo de Ostrogradsky tendría entonces un espectro no acotado, de lo cual puede interpretarse que la teoría original era incompleta en el sentido de que no mostraba una familia entera de soluciones. Más aun, el intentar acotar el espectro por debajo solo tiene como consecuencia el dar los estados del sistema norma negativa [**?**] [**?**].

El entender la cuantización de sistemas de orden superior es importante dada la gran cantidad de sistemas físicos que cuentan con dichos términos, algunos de los cuales se han mencionado lineas arriba. Como ya hemos dicho, uno de los campos más relevantes es el de teoría de cuerdas, donde se puede tratar con sistemas con derivadas infinitas [**?**]. Otro campo importante es el de gravitación, donde se adiciona a la acción de términos de cuarta derivada:

$$\int (-g)^{1/2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \,, \qquad \int (-g)^{1/2} R^2 \,,$$

y donde R es el tensor de curvatura. Esto produce una teoría renormalizable y asintóticamente libre [**?**]. Sin embargo, como se ha comentado, al realizar la cuantización de dichas teorías de orden superior, se encuentra principalmente el problema de estados de norma negativa, o *fantasmas*, que amenazan la unitariedad de cualquier teoría cuántica. El problema de la cuantización de estos sistemas ha sido estudiado ampliamente, por ejemplo, como teoría de campo escalar [**?**] o como teoría cuántica no-relativista usando el formalismo de constricciones de Dirac [**?**] o a través del nuevo formalismo de la mecánica cuántica PT-simétrica [**?**]. Esto no impide, sin embargo, que aún exista la creencia generalizada de que cualquier teoría cuántica basada en ecuaciones de movimiento de orden mayor a dos es inaceptable y que en consecuencia la gran mayoría de ellas son relegadas sin esperanza a pesar de sus múltiples atractivos.

En el presente trabajo se atacará el problema de la cuantización de sistemas de orden superior a través de un ejemplo específico: el oscilador de Pais-Uhlenbeck [**?**]. Consideramos importante estudiar este problema específico por varias razones. Por una parte, el sistema de Pais-Uhlenbeck puede ser planteado como un sistema de orden común, el cual es exactamente soluble y puede ser cuantizado sin ningún problema, pudiendo ser tratado de hecho como un sistema de dos osciladores armónicos desacoplados. Por otra parte, al tratarlo como un sistema de orden superior mediante el formalismo de Ostrogradsky, la cuantización del sistema equivalente de mayor orden resulta en una teoría cuántica inadmisible, donde existe el problema de un espectro no acotado, o el problema de normas negativas o *fantasmas*. Esta extraña dualidad, de un sistema por un lado cuantizable, y por otro lado un sistema equivalente no-cuantizable, resulta interesante por sí mismo. Surge la pregunta de si la relación de equivalencia existente entre ambos planteamientos del mismo problema puede servir para remediar los problemas inherentes a la teoría de orden superior. Como se verá en los siguientes capítulos, aun en el caso de tener una teoría de orden superior derivada directamente de una de orden común, las teorías cuánticas correspondientes resultan ser totalmente distintas, por lo que la forma correcta de proceder es considerar a ambas teorías como inicialmente independientes entre sí, y a partir de ahí *construir* una relación entre las dos teorías por medio de transformaciones que resultarán ser de carácter no-unitario.

La tesis se ha estructurado de la siguiente forma:

- **Parte I**. Sistemas de orden Superior. En este capítulo se presentan de forma general los conceptos más relevantes de los sistemas de orden superior partiendo de la formulación Lagrangiana, para pasar después a la formulación Hamiltoniana generalizada desarrollada por Ostrogradsky. Se elabora con cierto detalle el caso particular de un sistema cuya función Lagrangiana depende de las aceleraciones, dado que dicho caso será de primordial interés en los capítulos siguientes. El objetivo es hacer ver claramente cuales son las propiedades principales de los sistemas de mayor orden y sus diferencias más notorias con las teorías ordinarias, tanto a nivel clásico como cuántico. Finalmente, se propone un pequeño ejemplo ilustrativo donde se utilizan las herramientas de la teoría descritas anteriormente, y donde se ven de forma precisa las particularidades de dichos sistemas.

- **Parte II**. Mecánica Cuántica PT-Simétrica. En este capítulo se hace una breve reseña del nuevo formalismo de la mecánica cuántica PT-simétrica y del más general formalismo de la mécanica cuántica Pseudo-Hermítica. Se expone la clase de sistemas que el formalismo ataca y se resaltan los pasos principales que hay que seguir para aplicarlo correctamente, según sus lineamientos. Finalmente se expone brevemente la aplicación del mencionado formalismo hecha por C.M. Bender y P.D. Mannheim [**?**] a la cuantización del oscilador de Pais-Uhlenbeck.

- **Parte III**. Principio de Acción de Schwinger. En este capítulo se expone con cierto detalle el principio de acción cuántico desarrollado por J. Schwinger, desde las definiciones más generales hasta llegar al principio de acción estacionaria cuántico. Se desarrollarán herramientas que serán de gran relevancia en los cálculos a realizar en capítulos posteriores. Se finaliza exponiendo algunos ejemplos particulares importantes de aplicaciones del principio de acción, con el objetivo de adquirir familiaridad con la clase de cálculos que se realizan al utilizar dicho principio.

- **Parte IV**. Oscilador Armónico Modificado. En este capítulo se estudia el sistema del oscilador armónico con una modificación compleja muy particular y se le conecta mediante una transformación canónica compleja al oscilador armónico simple. Se procede a realizar la cuantización de ambos sistemas individualmente, pero con una particularidad: cada sistema se cuantiza en espacios de Hilbert distintos, con distintos productos internos y se utiliza la equivalencia de ambas teorías para conectar ambos espacios. El objetivo de este capítulo es introducir el concepto de operador de medida en el producto interno de un espacio de Hilbert, y calcularla específicamente en este caso particular, como un modelo de prueba que sirva para el cálculo análogo a realizar en el mucho más complicado sistema de Pais-Uhlenbeck. Se realza la importancia de las transformaciones canónicas clásicas, y su equivalente cuántico, en la construcción del mencionado operador de medida. Finalmente se calcula el propagador del sistema modificado utilizando el principio de acción cuántico.

- **Parte V**. Oscilador de Pais-Uhlenbeck. En este capítulo final, se estudia el oscilador de Pais-Uhlenbeck, quizás el sistema de orden superior más conocido. Se plantea primero el problema como un sistema de orden ordinario y se procede a resolverlo clásicamente. Se construye la teoría de mayor orden por medio del formalismo de Ostrogradsky. Se construye una transformación canónica que conecte la teoría de orden superior con la teoría ordinaria. Finalmente, se cuantiza el sistema y se utilizan dichas transformaciones para encontrar la medida del producto interno de la teoría de orden superior. Igualmente se utiliza el principio de acción cuántico para calcular el propagador del sistema de orden superior.

Capítulo 2
Sistemas con Derivadas de Orden Superior

1. Introducción

En esta sección se hará una reseña de manera muy general sobre las teorías con derivadas superiores en el tiempo. Se definirán dichos tipos de sistemas, y se mostrarán las extensiones a los formalismos Lagrangianos y Hamiltonianos necesarias para su correcto estudio. Asimismo, se comentarán algunas de sus propiedades particulares que los distinguen de los sistemas usuales. El presente capítulo tiene como fin introducir los conceptos y el formalismo necesarios para entender mejor los sistemas que serán presentados en los capítulos siguientes. En la primera parte presentaremos el formalismo de forma general, sin pretender ser exhaustivos ni minuciosos desde el punto de vista matemático. Después presentaremos con cierto detalle el caso particular de una teoría cuya función Lagrangiana dependa de las aceleraciones, dado que este caso sera de gran importancia en capítulos posteriores. Finalmente presentamos un ejemplo concreto de dichos sistemas, para exponer de forma clara sus propiedades principales, tanto clásica como cuánticamente. Como referencias se recomienda [?], [?], [?].

2. Sistemas con Derivadas de Orden Superior

Consideremos un sistema físico descrito por:

$$L = L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, q^{(N)}\right) , \tag{1}$$

donde:

$$q^{(n)} \equiv \frac{d^n q}{d\,t^n} .$$

Nos referimos a dicho sistema como *sistema de orden superior* o *sistema de mayor orden*. Por simplicidad consideraremos un sistema unidimensional, aunque la generalización a sistemas de mayor dimensión es directa. La acción de dicho sistema está dada por:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, q^{(N)}\right) .$$

Variando la acción y aplicando el principio de Hamilton, obtenemos:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta q \left\{ -\sum_{i=0}^{N} \left(-\frac{d}{dt}\right)^i \frac{\partial L}{\partial q^{(i)}} \right\} + \sum_{i=0}^{N-1} p_i \delta q^{(i)} = 0 \,,$$

donde los p_i que se encuentran en el término de frontera están definidos como:

$$p_i \equiv \sum_{k=i+1}^{N} \left(-\frac{d}{dt} \right)^{k-i-1} \frac{\partial L}{\partial q^{(k)}} \,, \tag{2}$$

y donde denotaremos de forma especial $q^{(0)} = q$ y $p_0 = p$. Asumiendo que las $\delta q^{(i)}$´s están fijas en la frontera, obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a nuestro sistema:

$$\sum_{i=0}^{N} \left(-\frac{d}{dt} \right)^{i} \frac{\partial L}{\delta q^{(i)}} = 0 \,. \tag{3}$$

Siguiendo a Ostrogradsky [**?**], construimos el formalismo Hamiltoniano generalizado correspondiente. Notamos que el fijar el conjunto de $\left\{ \delta q^{(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$ en la frontera de manera independiente entre sí, implica que el conjunto $\left\{ q^{(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$ debe ser considerado como un conjunto de coordenadas independientes entre sí. Los momentos canónicos conjugados correspondientes a dichas coordenadas están definidos por (2), y la función Hamiltoniana se define como:

$$H = \sum_{n=0}^{N-1} p_n \dot{q}^{(n)} - L = \sum_{n=0}^{N-1} p_n q^{(n+1)} - L \,, \tag{4}$$

donde hemos utilizado $\dot{q}^{(n)} = q^{(n+1)}$. En efecto, si realizamos una variación virtual arbitraria de la Hamiltoniana, obtenemos:

$$dH = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ q^{(n+1)} dp_n + p_n dq^{(n+1)} \right\} - \sum_{n=0}^{N} \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} dq^{(n)} \,.$$

Consideremos únicamente los dos últimos términos en $\sum_{n=0}^{N-1} p_n dq^{(n+1)} - \sum_{n=0}^{N} \left(\partial L / \partial q^{(n)} \right) dq^{(n)}$:

$$p_{N-1} dq^{(N)} - \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} dq^{(N)} = \left(p_{N-1} - \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \right) dq^{(N)} = 0 \,,$$

pues, por definición:

$$p_{N-1} = \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \,,$$

de tal forma que la variación de la función Hamiltoniana es:

$$dH = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ q^{(n+1)} dp_n + \left(p_{n-1} - \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} \right) dq^{(n)} \right\} \,, \tag{5}$$

y podemos concluir:

$$H = H \left(q, \dot{q}, \ldots, q^{(N-1)}; p, p_1, \ldots, p_{N-1} \right) \,.$$

Mencionamos que todo el desarrollo anterior solo es posible si el Hessiano de L es distinto de cero; esto es:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^{(N)\,2}} \neq 0\,.$$

En ese caso, a partir de la definición del momento p_{N-1}:

$$p_{N-1} = \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}}\,,$$

será posible despejar a $q^{(N)}$, para tener $q^{(N)} = q^{(N)}\left(q, \ldots, q^{(N-1)}; p, \ldots, p_{N-1}\right)$.

En este punto podemos observar que por la forma (4) en que se define la función Hamiltoniana, ésta resulta ser una función lineal de los momentos p_n, para $n < N-1$. De esta forma, la energía del sistema descrito por esa Hamiltoniana no estará acotada por abajo. Esta es una de las propiedades particulares de los sistemas de orden superior descritos a través del formalismo de Ostrogradsky.

Dado que H es una función de las variables mencionadas, entonces:

$$dH = \sum_{n=0}^{N-1}\left\{\frac{\partial H}{\partial q^{(n)}}dq^{(n)} + \frac{\partial H}{\partial p_n}dp_n\right\}\,.$$

e identificando términos con (5):

$$\dot{q}^{(n)} = \frac{\partial H}{\partial p_n}\,, \qquad p_{n-1} - \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} = \frac{\partial H}{\partial p_n}\,. \tag{6}$$

Ahora, por una parte, usando (2):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} - p_{n-1} &= \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} - \sum_{k=n}^{N}\left(-\frac{d}{dt}\right)^{k-n}\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}} \\
&= \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} - \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} - \sum_{k=n+1}^{N}\left(-\frac{d}{dt}\right)^{k-n}\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}} \\
&= -\sum_{k=n+1}^{N}\left(-\frac{d}{dt}\right)^{k-n}\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}\,,
\end{aligned}$$

pero:

$$\dot{p}_n = \frac{d}{dt}\sum_{k=n+1}^{N}\left(-\frac{d}{dt}\right)^{k-n-1}\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}} = -\sum_{k=n+1}^{N}\left(-\frac{d}{dt}\right)^{k-n}\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}\,,$$

de tal forma que:

$$\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} - p_{n-1} = \dot{p}_n\,,$$

y sustituyendo en (6) obtenemos:

$$\dot{q}^{(n)} = \frac{\partial H}{\partial p_n}\,, \qquad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^{(n)}}\,, \tag{7}$$

que son las ecuaciones de Hamilton para nuestro sistema.

Consideremos ahora una función cualquiera de las coordenadas, los momentos y el tiempo $F\left(q,\ldots,q^{(N)}\,;p,\ldots,p_n\right)$. Entonces su derivada total con respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial q^{(n)}}\dot{q}^{(n)} + \frac{\partial F}{\partial p_n}\dot{p}_n \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial q^{(n)}}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial q^{(n)}} \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}\ ,
\end{aligned}$$

donde definimos el paréntesis de Poisson $\{\,,\}$ como:

$$\{A,\, B\} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\partial A}{\partial q^{(n)}}\frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial B}{\partial q^{(n)}}\frac{\partial A}{\partial p_n} \right)\,.$$

Así, los paréntesis de Poisson fundamentales son:

$$\left\{q^{(m)}, p_n\right\} = \delta_{m,n}\,,$$

y

$$\left\{q^{(m)}, q^{(n)}\right\} = 0 \qquad \{p_m, p_n\} = 0\,.$$

Utilizando los paréntesis de Poisson, las ecuaciones de movimiento para $q^{(n)}$ y p_n se escriben como:

$$\dot{q}^{(n)} = \left\{q^{(n)}, H\right\}\,, \qquad \dot{p}_n = \{p_n, H\}\ ,$$

y en general, la evolución de cualquier variable dinámica estará dada por:

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}\ .$$

Para llevar a cabo la cuantización de un sistema de mayor orden, es necesario considerar a $q^{(i)}$ y p_i como operadores que cumplan con las relaciones de conmutación heredadas de sus paréntesis de Poisson, con la sustitución:

$$\{\ ,\ \}_{\text{Clásico}} \to \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]_{\text{Cuántico}}\,.$$

donde [,] es el conmutador usual entre dos operadores. Así, los conmutadores fundamentales son:

$$\left[q^{(m)}, p_n\right] = i\hbar\delta_{m,n} \, ,$$

y:

$$\left[q^{(m)}, q^{(n)}\right] = 0 \, , \qquad [p_m, p_n] = 0 \, .$$

De las igualdades anteriores podemos ver en particular:

$$[q, \dot{q}] = 0 \, ,$$

es decir, en la teoría cuántica de orden superior, la posición y la velocidad conmutan y pueden por lo tanto medirse simultáneamente con precisión arbitraria.

De igual forma, la función Hamiltoniana obtenida por el formalismo de Ostrogradsky se preserva en forma de un operador Hamiltoniano correspondiente. La ecuación de evolución para funciones dinámicas se convierte en una ecuación de evolución para operadores (ecuación de Heisenberg):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} \, .$$

Igualmente, se mostrara lineas abajo que el espectro de energía de un sistema cuántico descrito por el formalismo de Ostrogradsky no está acotado por abajo, al igual que en el caso de su análogo clásico.

3. Caso Particular: $L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right)$.

Consideremos un sistema físico, por simplicidad unidimensional, descrito por una función Lagrangiana dependiente de la posición, la velocidad y la aceleración. Es decir:

$$L = L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right) \, .$$

La acción del sistema está dada entonces por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right) \, . \tag{8}$$

Ahora, por el principio de Hamilton, la evolución dinámica de las coordenadas del sistema desde un tiempo t_1 hasta un tiempo t_2, ambos arbitrarios, está determinada por el requerimiento de que la acción del sistema sea extrema. Es decir, si consideramos una variación infinitesimal de las coordenadas del sistema, como por ejemplo:

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t) \, ,$$

dejando los valores iniciales y finales fijos, i.e:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \, ,$$

entonces la variación correspondiente de la acción es igual a cero:

$$\delta S = 0\,,$$

donde de manera general definimos la variación δ de cualquier función o funcional como:

$$\delta F(x) = F(x+\delta x) - F(x)\,,$$

y donde x puede ser a su vez una función de cualquier otro parámetro. Aplicaremos dicho principio a (8) e iremos interpretando los resultados. Así:

$$\begin{aligned}
\delta S &= S\left[q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, \ddot{q}+\delta\ddot{q}\right] - S\left[q,\dot{q},\ddot{q}\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\,\Big\{L\left(q(t)+\delta q(t), \dot{q}(t)+\delta\dot{q}(t), \ddot{q}(t)+\delta\ddot{q}(t)\right) - L\left(q(t),\dot{q}(t),\ddot{q}(t)\right)\Big\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\,\Big\{L\left(q(t),\dot{q}(t),\ddot{q}(t)\right) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta\ddot{q}(t) - L\left(q(t),\dot{q}(t),\ddot{q}(t)\right)\Big\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\,\Big\{\frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta\ddot{q}(t)\Big\}\,.
\end{aligned}$$

Ahora, por un lado:

$$\delta\dot{q}(t) = \dot{q}(t+\delta t) - \dot{q}(t) = \dot{q}(t) + \delta t\frac{d\dot{q}(t)}{dt} - \dot{q}(t) = \delta t\,\ddot{q}(t)\,,$$

mientras que:

$$\frac{d}{dt}\delta q(t) = \frac{d}{dt}\big\{q(t+\delta t) - q(t)\big\} = \frac{d}{dt}\big\{q(t) + \delta t\frac{dq(t)}{dt} - q(t)\big\} = \delta t\,\ddot{q}(t)\,,$$

de tal forma que:

$$\delta\frac{d}{dt}q(t) = \frac{d}{dt}\delta q(t)\,.$$

Así, desarrollamos los términos dentro de la integral:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q(t)\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q(t)\,,$$

y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta\ddot{q}(t) &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\frac{d}{dt}\delta\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\delta\dot{q}(t) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\frac{d}{dt}\delta q(t) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta\dot{q}(t)\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\delta q(t)\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\delta q(t)\,.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q}(t) \right\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \dot{q}(t) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q(t) \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q(t) \right\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \right\} \delta q(t) \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \right) \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \dot{q}(t) \right\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \right\} \delta q(t) \\
&\quad + \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \right) \delta q(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta \dot{q}(t) \right\}_{t_1}^{t_2} .
\end{aligned}$$

Para que se cumpla $\delta S = 0$, debemos entonces exigir 2 condiciones. Primero, que la expresión dentro de la integral sea igual a cero para todo valor de t. Esto es:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \,, \tag{9}$$

la cual es la ecuación de Euler-Lagrange para funciones Lagrangianas de segundo orden. La segunda demanda para hacer extrema la acción es fijar los términos de frontera pidiendo:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \,, \qquad \delta \dot{q}(t_1) = \delta \dot{q}(t_2) = 0 \,.$$

Exigir que se cumplan éstas últimas dos condiciones independientemente una de la otra implica que se debe tratar a $q(t)$ y a $\dot{q}(t)$ como coordenadas independientes. Podemos pasar al formalismo Hamiltoniano desarrollado por Ostrogradsky. Definimos los momentos canónicos:

$$\begin{aligned}
p &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) , \\
p_1 &\equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \,,
\end{aligned}$$

de tal forma que la variación de la acción se escribe como:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \ \{\text{Euler-Lagrange}\} + \{p \, \delta q + p_1 \delta \dot{q}\}_{t_1}^{t_2} \ .$$

Definimos la función Hamiltoniana como:

$$H = p_1 \ddot{q} + p \dot{q} - L \,,$$

de tal forma que al realizar una variación arbitraria de H obtenemos:

$$\begin{aligned} dH &= \dddot{q}dp_1 + p_1 d\ddot{q} + \dot{q}dp + pd\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}d\ddot{q} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q}dq + \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)d\dot{q} + \left(p_1 - \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)d\ddot{q} + \dot{q}dp + \ddot{q}dp_1 \,. \end{aligned} \tag{10}$$

Pero, primero, por (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right\} \\ &= \dot{p}\,. \end{aligned}$$

Después, por definición:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dot{p}_1\,,$$

i.e:

$$p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\dot{p}_1\,.$$

Finalmente, por definición:

$$p_1 - \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0\,.$$

Sustituyendo estos tres resultados en dH obtenemos:

$$dH = -\dot{p}dq - \dot{p}_1 d\dot{q} + \dot{q}dp + \ddot{q}dp_1\,, \tag{11}$$

de donde concluimos que $H = H\left(q, \dot{q}\,; p, p_1\right)$. Esto implica que la función Hamiltoniana tiene una dependencia lineal en el momento p, y por lo tanto la energía del sistema no está acotada por abajo. De nuevo recordamos que en el desarrollo anterior hemos supuesto que el Hessiano de L es no-singular; i.e:

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^2} \neq 0\,,$$

de tal forma que se puede despejar a la aceleración en término de la posición, la velocidad y los correspondientes momentos.

Ahora, H debe cumplir:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial \ddot{q}}d\ddot{q}\,.$$

Identificando términos con (11) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \, , \\
\ddot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \, , \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \, , \\
\dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} \, ,
\end{aligned}$$

que son las ecuaciones de movimiento del sistema. La derivada total de una función cualquiera de las variables canónicas y el tiempo es:

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\dot{p}_1 \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \, ,
\end{aligned}$$

donde el paréntesis de Poisson $\{\ ,\}$ se define como:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial \dot{q}}\frac{\partial B}{\partial p_1} - \frac{\partial B}{\partial \dot{q}}\frac{\partial A}{\partial p_1} \, .$$

La cuantización de dicho sistema se lleva a cabo como se ha reseñado al final de la sección 2.2: haciendo la sustitución del paréntesis de Poisson por el conmutador usual entre dos operadores, como:

$$\{\ \ ,\ \ \} \to \frac{1}{i\hbar}[\ \ ,\ \ ] \, ,$$

y pidiendo que a $q\,,\dot{q}\,p\;p_1$ se les considere como operadores independientes tales que sus relaciones de conmutación reflejen su estructura canónica clásica; esto es:

$$[q, p] = [\dot{q}, p_1] = i\hbar \, ,$$

y cualquier otra combinación igual a cero.

4. Cuantización de Sistemas de Orden Superior.

En esta sección estudiaremos un sistema de mayor orden siguiendo los lineamientos descritos lineas arriba, como ejemplo para ilustrar algunas propiedades importantes del dichos sistemas [**?**]. Sea la función Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}\left(1 + \epsilon^2\omega^2\right)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 - \frac{1}{2}\epsilon^2\ddot{q}^2 \, , \tag{12}$$

donde ϵ es una constante real. Al suponer que $|\epsilon| << 1$, podemos ver al sistema como un oscilador armónico con una pequeña perturbación de un término de aceleración cuadrático y una pequeña modificación del término de masa. Deseamos hacer ver que, aunque se vea al término de orden superior como una pequeña perturbación, la teoría de orden superior resultante será cualitativamente totalmente distinta de una teoría ordinaria, independientemente del valor de ϵ. La ecuación de Euler-Lagrange (2.9) del sistema es:

$$\epsilon^2 q^{(4)} + \left(1 + \epsilon^2\omega^2\right)\ddot{q} + \omega^2 q = 0\,,$$

con solución general:

$$q(t) = C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} + C_3 e^{\frac{it}{\epsilon}} + C_4 e^{-\frac{it}{\epsilon}}\,.$$

donde vemos que se deben fijar cuatro condiciones iniciales, en lugar de dos como en la mecánica tradicional, independientemente del valor de ϵ. Pasando al formalismo de Ostrogradsky, los momentos canónicos son:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = \left(1 + \epsilon^2\omega^2\right)\dot{q} + \epsilon^2 q^{(3)}\,, \\ p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = -\epsilon^2 \ddot{q}\,. \end{aligned}$$

de tal forma que el Hamiltoniano es:

$$H = p\dot{q} - \frac{1}{2\epsilon^2}p_1^2 - \frac{1}{2}\left(1 + \epsilon^2\omega^2\right)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2\,. \tag{13}$$

Notamos que dicha función Hamiltoniana resulta ser singular en el límite $\epsilon \to 0$, de tal forma que, a la luz del formalismo de Ostrogradsky, no se puede considerar al término de orden superior en (2.12) como una perturbación, sino como parte integral de la teoría. Además, (2.13) es lineal en el momento p, por lo que su energía no está acotada por debajo. Esta es una propiedad que reaparecerá al realizar la cuantización del sistema.

Llevamos ahora al sistema al nivel cuántico, de la manera descrita al final de las secciones 2.2 y 2.3. Los conmutadores fundamentales son:

$$[q, p] = [\dot{q}, p_1] = i\hbar\,,$$

y:

$$[q, \dot{q}] = [p, p_1] = [q, p_1] = [\dot{q}, p] = 0\,.$$

Definimos ahora los operadores $\{q_+, q_-, p_+, p_-\}$ de la forma:

$$\begin{aligned} q_+ &= \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2\omega^2}}\left(\epsilon^2\omega^2\dot{q} - p\right)\,, \\ p_+ &= \frac{\omega}{\sqrt{1-\epsilon^2\omega^2}}\left(q - p_1\right)\,, \\ q_- &= \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2\omega^2}}\left(\dot{q} - p\right)\,, \\ p_- &= \frac{1}{\epsilon}\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2\omega^2}}\left(\epsilon^2\omega^2 q - p_1\right)\,. \end{aligned}$$

Dicha transformación corresponde clásicamente a una transformación canónica, de tal forma que las relaciones de conmutación se preservan como:

$$[q_+, p_+] = [q_-, p_-] = i\hbar\,,$$

y cualquier otra combinación igual a cero. En términos de estos operadores el operador Hamiltoniano del sistema se escribe:

$$H = p_+^2 + \omega^2 q_+^2 - \left(p_-^2 + \frac{1}{\epsilon^2} q_-^2\right)\,,$$

es decir, como la resta de dos osciladores armónicos, uno con frecuencia ω y otro con frecuencia $1/\epsilon$. El espectro del sistema es:

$$E_{m,n} = \hbar\omega\,(2m+1) - \frac{\hbar}{\epsilon}\,(2n+1)\,, \qquad m, n = 0, 1, \ldots, \infty\,.$$

y donde se ve claramente que el espectro de energía no está acotado por debajo. Las eigenfunciones de H, escritas en términos de (q_+, q_-), y por lo tanto en el espacio $(\dot{q}, p)$, son:

$$\psi_{m,n}(\dot{q}, p) = \psi_m(q_+)\psi_n(q_-)\,,$$

donde ψ_m y ψ_n son las eigenfunciones de cada oscilador armónico individual.

Capítulo 3

Sistemas Pseudo-Hermíticos y PT-Simétricos

1. Introducción.

En este capítulo reseñamos de manera general el formalismo de la Mecánica Cuántica PT-Simétrica (PTSQM por sus iniciales en ingles), el cual ha sido desarrollado fuertemente durante los últimos 15 años y ha sido objeto de gran interés y crítica por una pequeña comunidad en la física teórica. Se presentarán las propiedades más importantes del tema y se intentará hacer patente las diferencias fundamentales con la mecánica cuántica convencional. Finalmente, se concluirá el capítulo con una aplicación concreta del formalismo al problema de la cuantización del oscilador de Pais-Uhlenbeck. De ninguna manera se pretende dar una introducción exhaustiva o formal del tema, sino presentar únicamente los aspectos que serán relevantes en capítulos posteriores. Como una referencia más extensa se recomienda [?]

2. Mecánica Cuántica PT-Simétrica.

Consideremos como punto de partida la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\hat{H}\psi = E\psi\,.$$

A lo largo del desarrollo de la física del siglo XX se han encontrado contados ejemplos donde un operador Hamiltoniano H no-Hermítico (es decir: $\hat{H}^\dagger \neq \hat{H}$ en el producto escalar usual) daba lugar a un espectro de energías real. Al investigar detenidamente tales casos, se encontró de manera general la existencia de una familia entera de tales Hamiltonianos no-Hermíticos cuya ecuación de eigenvalores daba lugar a un espectro real; a decir, dichos operadores resultan tener la propiedad de ser PT-simétricos, i.e. cumplen:

$$[H, PT] = 0\,,$$

donde $\hat{P}$ y $\hat{T}$ son los operadores de paridad e inversión temporal, que inducen las transformaciones:

$$\hat{P}f(\vec{x},\vec{p},t) = f(-\vec{x},-\vec{p},t)\,,$$
$$\hat{T}f(\vec{x},\vec{p},t) = f^*(x,-\vec{p},-t)\,,$$

donde $\vec{x}$ y $\vec{p}$ son los vectores de posición y momento respectivamente, t es el tiempo y f es una función compleja cualquiera. El formalismo desarrollado para dar consistencia al este tipo de sistemas es conocido como *Mecánica Cuántica PT-Simétrica*, o *PTSQM* por sus iniciales en ingles.

Consideremos un ejemplo concreto. Uno de los sistemas más estudiado hasta el momento dentro de este formalismo está descrito por el operador Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \hat{p}^2 + \hat{x}^2 (i\hat{x})^\epsilon \,, \qquad \epsilon \in \Re \,, \tag{1}$$

el cual es claramente invariante ante la acción del operador PT. Así, partiendo de la ecuación de Schrödinger estacionaria para dicho sistema, y haciendo la realización usual:

$$\hat{x} \to x \,; \qquad \hat{p} \to -i\frac{d}{dx} \,, \tag{2}$$

entonces, para resolver satisfactoriamente la ecuación diferencial resultante, es necesario imponer condiciones de frontera apropiadas en la coordenada x, es decir, condiciones de frontera en $|x| \to \infty$ donde las eigenfunciones se desvanezcan, para así tener soluciones normalizables y con sentido físico:

$$\lim_{|x| \to \infty} \psi(x) = 0 \,. \tag{3}$$

De manera general, redefinir dichas condiciones de frontera en el infinito implicará redefinir el dominio del problema en regiones complejas de las coordenadas del sistema. En el caso particular de las eigenfunciones del operador (**??**) se encontraron las regiones de convergencia mostradas en la figura (**??**), donde se cumple la condición (**??**). Mencionamos que la redefinición adecuada del dominio del problema induce las trayectorias en el plano complejo por las cuales se definirá posteriormente el producto interno para el sistema.

Así, al resolver la ecuación de Schrödinger correspondiente se obtiene una familia de eigenfunciones y eigenvalores $\{E_n, \psi_n\}$, donde el espectro de energías es real para ciertos valores de ϵ. Cuando las eigenfunciones de $\hat{H}$ son igualmente eigenfunciones del operador PT, entonces se dice que el sistema tiene *simetría PT no-rota*. Se puede demostrar que esto implica que todos los eigenvalores son reales. Efectivamente, sea una ψ una eigenfunción tanto de H como de PT:

$$H\psi = E\psi \,, \qquad (PT)\psi = \lambda\psi \,.$$

Entonces, haciendo actuar el operador PT desde la izquierda a la ecuación de Schrödinger estacionaria tenemos:

$$(PT)H\psi = (PT)E\psi \,.$$

El lado derecho de la ecuación es:

$$(PT)H\psi = H(PT)\psi = H\lambda\psi = \lambda H\psi = \lambda E\psi \,,$$

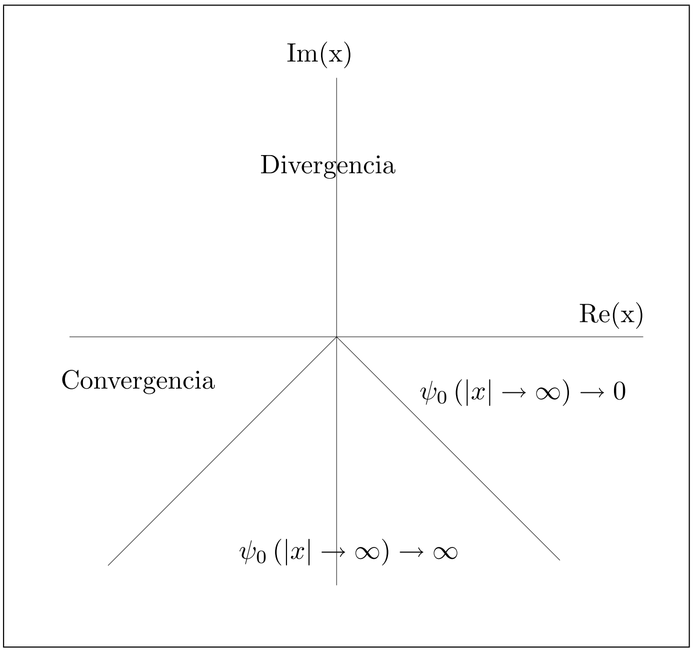

Figura 1: Distintas regiones en el plano x complejo donde la función ψ_0 converge o diverge en $|x| \to \infty$

mientras que el lado izquierdo es:

$$(PT)E\psi = E^*(PT)\psi = E^*\lambda\psi\,,$$

de tal forma que obtenemos:

$$E\lambda\psi = E^*\lambda\psi \quad \Rightarrow \quad E = E^*\,.$$

3. Reglas para la Mecánica Cuántica PT-Simétrica.

Supongamos que el Hamiltoniano $\hat{H}$ tiene simetría PT no-rota. Esto implica que su espectro será real. Pero esto no basta para tener una teoría física consistente. Es necesario asociar a la teoría con un espacio de Hilbert de vectores de estado dotados de un producto interno con normas positivas. El formalismo de la mecánica cuántica PT-simétrica, emulando los lineamientos de la mecánica cuántica convencional, proporciona el siguiente protocolo para tratar con Hamiltonianos PT-simétricos:

- Encontrar las eigenfunciones y eigenvalores del problema, de la forma descrita en la sección anterior. En la práctica, el determinar que la totalidad del espectro sea real se logra usando métodos tanto analíticos como númericos e implica dentro del formalismo que el sistema tiene simetría PT no rota.

- Definir las condiciones de frontera para las eigenfunciones encontradas de tal forma que tengan significado físico. Esto implica una redefinición del dominio del problema, generalmente extendiéndolo a regiones complejas de sus coordenadas.
- Definir un producto interno.

Este último punto es particularmente importante y es donde se encuentran concentrados la mayoría de los esfuerzos por dar consistencia al formalismo. Para dotar al sistema de un producto interno, es necesario introducir un nuevo operador $\hat{C}$, el cuál es una simetría del Hamiltoniano:

$$[C, H] = 0\,,$$

y a través del cual se define un *producto interno CPT*:

$$\langle\psi|\chi\rangle^{\mathrm{CPT}} \equiv \int dx\, \psi^{\mathrm{CPT}}(x)\chi(x)\,,$$

donde:

$$\psi^{\mathrm{CPT}}(x) \equiv \hat{C}\psi^*(-x) = (\mathrm{CPT})\psi(x)\,.$$

Existen varias formas de construir al operador $\hat{C}$. La más usada es representando a $\hat{C}$ como:

$$\hat{C} = e^{Q(\hat{x},\hat{p})}\hat{P}\,,$$

donde Q es una función real de sus variables y por lo tanto un operador Hermítico. El problema entonces se reduce a encontrar la forma de la función Q, y para hacerlo se explotan las propiedades analíticas particulares de $\hat{C}$, a decir:

$$\begin{aligned} [C, PT] &= 0\,,\\ C^2 &= 0\,, \end{aligned}$$

las cuales son propiedades cinéticas del operador, y:

$$[C, H] = 0\,,$$

la cual es una propiedad dinámica. Las dos primeras ecuaciones de operadores nos proporcionan información general sobre el tipo de función que es Q en las variables x y p (par, impar, etc.), mientras que la última ecuación nos proporciona la forma específica. La última ecuación se resuelve perturbativamente por lo general, proponiendo una cierta expansión para Q y resolviendo iterativamente cada término.

Utilizando Q es posible recuperar un Hamiltoniano Hermítico $H_{\mathrm{Herm.}}$ a partir del operador PT-simétrico original H por medio de la relación de semejanza:

$$H_{\mathrm{Herm.}} = e^{-Q/2} H\, e^{Q/2}\,.$$

4. Mecánica Cuántica Pseudo-Hermítica.

El formalismo de la mecánica cuántica PT-simétrica puede ser puesto en un marco matemático mucho más general, el de la *mecánica cuántica pseudo-Hermítica* [?], desarrollado principalmente por A. Mostafazadeh. Imaginemos un cierto sistema cuántico con un operador Hamiltoniano H no Hermítico en el producto interno usual o de Dirac. Entonces la realidad del espectro de dicho Hamiltoniano está asegurada si H es Hermítico con respecto a un producto interno $\langle\ ,\ \rangle_+$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en que H actúa. Este producto interno se puede expresar en términos del producto de Dirac $\langle\ ,\ \rangle$ como:

$$\langle\ ,\ \rangle_+ = \langle\ , \eta\ \rangle\,. \tag{4}$$

donde η es a su vez un operador Hermítico, invertible y positivo definido. La pseudo-Hermiticidad del Hamiltoniano H está dada por:

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1}\,,$$

y en general se dice que un operador $\hat{A}$ es pseudo-Hermítico si:

$$\mathcal{A}^\dagger = \eta \mathcal{A} \eta^{-1}\,. \tag{5}$$

Esta última condición se reduce a la Hermiticidad normal cuando $\eta = 1$, y se reduce a la PT-simetría cuando $\eta = P$.

El espacio de Hilbert equipado con el producto (**??**) es identificado como el espacio de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{fis.}}$. Toda observable $\mathcal{O} \in \mathcal{H}_{\text{fis.}}$ está relacionado con un correspondiente operador Hermítico $o \in \mathcal{H}$ por medio de la transformación de semejanza:

$$o = \rho \mathcal{O} \rho^{-1}\,,$$

donde $\rho = \sqrt{\eta}$. Para el Hamiltoniano H tenemos entonces:

$$h = \rho H \rho^{-1}\,, \tag{6}$$

donde h es el equivalente Hermítico de H. La conexión con la mecánica cuántica PT-simétrica está en (**??**) y (**??**) a través del operador Q, usando $\eta = e^Q$ y $\rho = e^{Q/2}$, de tal forma que:

$$h = e^{-Q/2} H\, e^{Q/2}\,.$$

5. El Oscilador de Pais-Uhlenbeck.

Como aplicación del formalismo PT-simétrico, consideremos el problema de dos osciladores acoplados, conocido en la literatura como el oscilador de Pais-Uhlenbeck[1]. Dicho sistema fue investigado recientemente bajo la luz de $PTSQM$

[1] El sistema será descrito en detalle en el capítulo 6.

por C.M. Bender y P.D. Mannheim en [?]. Se intentará mantener lo más posible su misma notación. Las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -k(z-y)\,, \\ M\ddot{y} &= -K\,y + k(z-y)\,, \end{aligned}$$

con Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}k(z-y)^2 - \frac{1}{2}K\,y^2\,.$$

La Lagrangiana dará lugar a dos ecuaciones de movimiento para q y y acopladas entre sí. Sin embargo, desacoplando dichas ecuaciones, el sistema se puede estudiar a través de una sola ecuación de movimiento para q, digamos:

$$z^{(4)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\ddot{z} + \omega_1^2\omega_2^2 z^2 = 0\,, \tag{7}$$

donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias normales del sistema.

Una función Lagrangiana a partir de la cual se puede llegar a la ecuación (??) es:

$$L = \frac{\gamma}{2}\left[\ddot{z}^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\dot{z}^2 + \omega_1^2\omega_2^2 z^2\right]\,,$$

donde γ es una constante positiva arbitraria. Sin pérdida de generalidad asumiremos que $\omega_1 > \omega_2$.

Por el formalismo de Ostrogradsky tendremos dos coordenadas independientes, dadas por z y $\dot{z}$. Siguiendo a Bender y Mannheim renombramos $\dot{z} \equiv x$. Construimos los momentos canónicos correspondientes:

$$\begin{aligned} p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{z}}\right)\,, \\ p_x &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{z}}\,, \end{aligned} \tag{8}$$

de tal forma que, en nuestro caso:

$$\begin{aligned} p_z &= -\gamma(\omega_1^2 + \omega_2^2)\dot{z} - \gamma z^{(3)}\,, \\ p_x &= \gamma\ddot{z}\,, \end{aligned} \tag{9}$$

y el Hamiltoniano es:

$$H(z, x, p_z, p_x) = \frac{1}{2\gamma}p_x^2 + xp_z + \frac{\gamma}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)x^2 - \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2 z^2\,. \tag{10}$$

La solución a la ecuación de movimiento (??) es:

$$z(t) = a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t} + a_1^* e^{i\omega_1 t} + a_2^* e^{i\omega_2 t}\,,$$

de tal forma que se sigue:

$$\begin{aligned}
x(t) &= -i\omega_1 a_1 e^{-i\omega_1 t} - i\omega_2 a_2 e^{-i\omega_2 t} + C.H. \\
p_z(t) &= i\gamma\omega_1\omega_2^2 a_1 e^{-i\omega_1 t} + i\omega_1^2\omega_2 a_2 e^{-i\omega_2 t} + C.H. \\
p_x(t) &= -\gamma\omega_1^2 a_1 e^{-i\omega_1 t} - \gamma\omega_2^2 a_2 e^{-i\omega_2 t} + C.H.
\end{aligned}$$

donde con las iniciales C.H. queremos decir el conjugado Hermítico.

En este punto procedemos a la cuantización del sistema, por lo que hacemos la sustitución $a_i^* \to a_i^\dagger$. Dado que se debe cumplir para todo tiempo las relaciones de conmutación:

$$[z, p_z] = [x, p_x] = i$$
$$[z, x] = [x, p_z] = [z, p_x] = [p_z, p_x] = 0$$

entonces, esto nos lleva a:

$$\begin{aligned}
\left[a_1, a_1^\dagger\right] &= \frac{1}{2\gamma\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\,, \\
\left[a_2, a_2^\dagger\right] &= \frac{1}{2\gamma\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\,, \\
[a_1, a_2] &= 0\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

Escribiendo el Hamiltoniano en términos de a_i y $a_i^\dagger$ obtenemos:

$$H = 2\gamma(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 a_1^\dagger a_1 - \omega_2^2 a_2^\dagger a_2) + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\,. \tag{12}$$

Dicho Hamiltoniano describe efectivamente dos osciladores, cada uno con eigenvalores estrictamente reales.

Procedemos ahora a construir el espacio de Fock del sistema, partiendo de un estado de vacío $|\Omega\rangle$. Se cuenta con 2 opciones:

1. Proponemos que los operadores a_1 y a_2 aniquilen el estado de vacío:

   $$a_1|\Omega\rangle = 0\,, \qquad a_2|\Omega\rangle = 0\,;$$

   entonces esto implica:

   $$H|\Omega\rangle = \frac{1}{2}|\Omega\rangle\,.$$

   Pero entonces el estado excitado $|\psi\rangle$, dado como:

   $$|\psi\rangle = a_2|\omega\rangle\,,$$

   con energía ω_2 sobre el estado base, tiene norma:

   $$\begin{aligned}
   \langle\psi|\psi\rangle &= \langle\Omega|a_2 a_2^\dagger|\Omega\rangle\,, \\
   &= \langle\Omega|\left[a_2, a_2^\dagger\right]|\Omega\rangle\,, \\
   &= \frac{1}{2\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} < 0\,;
   \end{aligned} \tag{13}$$

pues $\omega_1 > \omega_2$. Es decir, el espacio de Fock así formado tiene *normas negativas.*

2. Por otro lado, suponiendo:

$$a_1|\Omega\rangle = a_2^\dagger|\Omega\rangle = 0\,,$$

obtenemos normas positivas, pero el espectro de energía es *no acotado por debajo.*

Tratemos ahora al problema en la representación de coordenadas. La realización usual para los momentos es:

$$p_z = -i\frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad p_x = -i\frac{\partial}{\partial x}\,.$$

En esta representación la ecuación de Schrödinger $H\psi_n = E_n\psi_n$ toma la forma:

$$\left[-\frac{1}{2\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - ix\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\gamma}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)x^2 - \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2 z^2\right]\psi_n(z,x) = E_n\psi_n(z,x)\,. \quad (14)$$

El estado con energía $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ tiene como eigenfunción:

$$\psi_0(z,x) = \exp\left[\frac{\gamma}{2}(\omega_1+\omega_2)\omega_1\omega_2 z^2 + i\gamma\omega_1\omega_2 z\,x - \frac{\gamma}{2}(\omega_1+\omega_2)x^2\right]\,, \qquad (15)$$

mientras que los eigenestados de mayor energía tiene eigenfunciones que son funciones polinomiales multiplicadas por $\psi_0(z,x)$. La eigenfunción (**??**) diverge en $z \to \pm\infty$, de tal forma que no es normalizable en el eje z real. Aun más, dicha divergencia no se encuentra limitada al eje z real, sino que también ocurre en la región mostrada en la figura (**??**), en el plano complejo de z. Sin embargo, fuera de esa región la función ψ_0 se desvanece exponencialmente en $|z| \to \infty$. Debemos entonces restringir el problema de eigenvalores (**??**) a dicha región.

En esta región el sistema tiene entonces un estado base normalizable dado precisamente por ψ_0, y el espectro de energía es real acotado; es decir, tenemos la opción 1 para el espacio de Fock del sistema mencionada lineas arriba. Realizamos entonces una rotación de 90° de la variable z en su plano complejo, para que se encuentre en la región de convergencia, específicamente sobre su eje imaginario. Esto implica a su vez una redefinición del momento conjugado correspondiente. Definimos entonces:

$$y = e^{-i\frac{\pi}{2}}z = -i\,z\,,$$

y:

$$p_y = -i\frac{\partial}{\partial(-iz)} = \frac{\partial}{\partial z} = i\,p_z\,.$$

de tal forma que se preserva $[y, p_y] = i$. El Hamiltoniano entonces toma la forma:

$$H = \frac{1}{2\gamma}p_x^2 - ix\,p_y + \frac{\gamma}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)x^2 + \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2 y^2\,. \qquad (16)$$

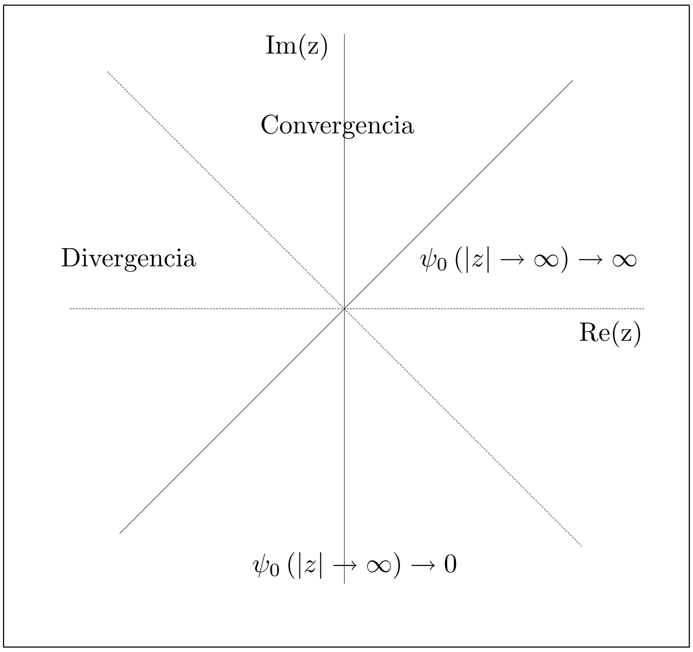

Figura 2: Distintas regiones en el plano z complejo donde la función ψ_0 converge o diverge en $|z| \to \infty$

Notamos en el Hamiltoniano (**??**) la presencia del segundo sumando: ixp_y, el cual es manifiestamente no-Hermítico (en el producto usual), y es el causante del problema de fantasmas en el oscilador de Pais-Uhlenbeck. Sin embargo, observemos como transforman los operadores $\{y, x, p_y, p_x\}$ bajo la acción de los operadores P, T y PT:

	p_z	x	p_y	y
P	$-$	$-$	$+$	$+$
T	$-$	$+$	$+$	$-$
PT	$+$	$-$	$+$	$-$

Siguiendo las instrucciones para PTSQM, se construye el operador C a partir de sus propiedades cinéticas y dinámicas. Se encuentra que la forma para la función Q es:

$$Q = \alpha p_z p_y + \beta x\, y\,,$$

donde α y β están dados por:

$$\beta = \gamma^2 \omega_1^2 \omega_2^2 \alpha\,, \qquad \sinh(\sqrt{\alpha\beta}) = \frac{2\omega_1\omega_2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\,.$$

Hemos ya comentado arriba que realizando una transformación de semejanza sobre el Hamiltoniano PT-simétrico usando el operador $e^{-Q/2}$ obtenemos un operador Hermítico en el producto usual. En el presente caso se obtiene:

$$\tilde{H} = e^{-Q/2} H \, e^{Q/2} = \frac{1}{2\gamma} p_x^2 + \frac{1}{2\gamma\omega_1^2} p_y^2 + \frac{\gamma}{2}\omega_1^2 x^2 + \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2 y^2 \,. \tag{17}$$

el cual tiene un espectro manifiestamente real y positivo. Como dicho Hamiltoniano está relacionado directamente con el oscilador de Pais-Uhlenbeck por una transformación de semejanza, entonces este último tiene igualmente un espectro real positivo.

Consideremos ahora los eigenestados del Hamiltoniano $\tilde{H}$, $|\tilde{\psi}\rangle$. Al tratar con un Hamiltoniano que describe dos osciladores armónicos desacoplados, entonces dichos estados deben tener normas positivas, las cuales puedan fijarse a la unidad:

$$\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = 1 \,,$$

o, de manera equivalente, los eigenestados $|\psi\rangle$ de el Hamiltoniano original H, relacionados a la base $|\tilde{\psi}\rangle$ por:

$$|\psi\rangle = e^{Q/2}|\psi\rangle \,,$$

están normalizados entonces por:

$$\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\psi|e^{Q}|\psi\rangle = 1 \,.$$

Es decir, para el oscilador de Pais-Uhlenbeck, el conjugado del estado $|\psi\rangle$ no es $\langle\psi|$, sino $\langle\psi|e^{-Q}$, de tal forma que el producto natural para el sistema es:

$$\langle\langle\psi|\chi\rangle\rangle \equiv \langle\psi|e^{-Q}|\chi\rangle \,.$$

De esta forma se ha podido ver en un ejemplo concreto la forma de actuar de la Mecánica Cuántica PT-Simétrica. En el capítulo final se describirá una forma de realizar la cuantización del mismo sistema sin el requerimiento un tanto restrictivo de poner al Hamiltoniano en una forma PT-simétrica.

Capítulo 4
Principio de Acción de Schwinger

1. Introducción.

En este capítulo se presentará el principio de acción cuántico, desarrollado por J. Schwinger. Se desarrollará desde primeros principios hasta llegar al principio de acción estacionaria cuántico. Las técnicas desarrolladas en éste capítulo serán de gran utilidad en los capítulos posteriores. Finalmente, se mostrarán algunas aplicaciones del principio de acción a sistemas cuánticos conocidos, con el fin de mostrar explícitamente el tipo de cálculos necesarios para su aplicación. Para más referencias se recomienda [**?**], de donde se basa éste capítulo y cuya notación adoptamos.

2. Transformaciones Unitarias.

Sea X un operador actuando sobre un espacio de estados $|\,\rangle$. Sabemos que se cumple:

$$\begin{aligned} X|1\rangle &= |2\rangle\,, \\ \langle 1|X^{\dagger} &= \langle 2|\,. \end{aligned}$$

Podemos hacer una redefinición de dichos espacio de estados $|\,\rangle$ como:

$$\overline{\langle\,|} = \langle\,|U\,, \qquad \overline{|\,\rangle} = U^{-1}|\,\rangle\,,$$

mientras que para los operadores originales tenemos:

$$\overline{X} = U^{-1}X\,U\,,$$

donde asumimos que U es un operador unitario; es decir: $U^{-1} = U^{\dagger}$. Dichas transformaciones permiten mantener las relaciones entre estados y operadores intactas al pasar de una representación a la otra, al igual que mantiene intacta la estructura del producto interno original. Consideremos ahora una transformación unitaria que difiera solo infinitesimalmente de la unidad. Escribimos:

$$U = 1 + \frac{i}{\hbar}G\,,$$

con G un operador infinitesimal de orden ϵ al que nos referiremos como el *generador* de la transformación. Así:

$$U^{\dagger} = 1 - \frac{i}{\hbar}G^{\dagger}\,,$$

de tal forma que:

$$U^\dagger U = \left(1 - \frac{i}{\hbar} G^\dagger\right)\left(1 + \frac{i}{\hbar} G\right) = 1 + \frac{i}{\hbar}\left(G - G^\dagger\right) ,$$

donde hemos despreciado los términos de orden ϵ^2. Esto implica:

$$G = G^\dagger \, .$$

Utilicemos ahora una notación inspirada en el cambio de coordenadas usual, ilustrado en la figura (1). Entonces:

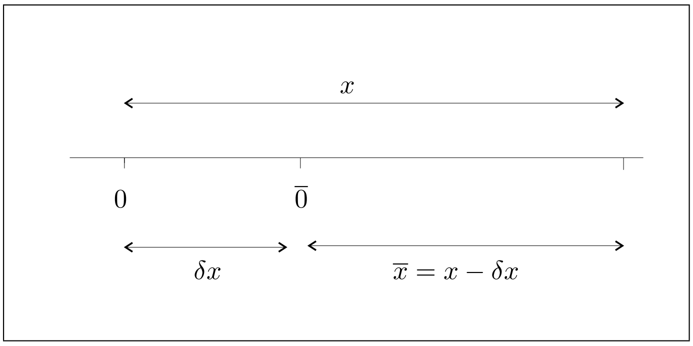

Figura 1:

$$\overline{|\,\rangle} = |\,\rangle - \delta |\,\rangle = U^{-1} |\,\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} G\right) |\,\rangle \, ,$$

y equivalentemente:

$$\overline{\langle\,|} = \langle\,| - \delta \langle\,| = \langle\,| U = \langle\,| \left(1 + \frac{i}{\hbar} G\right) ,$$

mientras que para operadores:

$$\bar{X} = X - \delta X = U^{-1} X \, U = \left(1 - \frac{i}{\hbar} G\right) X \left(1 + i \frac{i}{\hbar} G\right) = X + \frac{i}{\hbar}\left(X \, G - G \, X\right) ,$$

de tal forma que identificamos:

$$\delta |\,\rangle = i \, G |\,\rangle \, , \qquad \delta \langle\,| = -\langle\,| i \, G \, , \tag{1}$$

mientas que para los operadores:

$$\delta X = \frac{1}{i \, \hbar} \left[X, G\right] \, . \tag{2}$$

Algunos generadores relevantes son:

$$\begin{array}{rcl} \text{Generador de Desplazamiento Espacial} & : & G_q = P\delta q\,, \\ \text{Generador de Desplazamiento Temporal} & : & G_t = -H\delta t\,, \\ \text{Generador de Desplazamiento Angular} & : & G_\omega = J\delta\omega\,, \end{array}$$

donde P y J son los operadores de momento lineal y angular respectivamente, y H es el operador Hamiltoniano del sistema.

3. Ecuaciones de Movimiento.

Consideremos ahora desplazamientos infinitesimales en el tiempo:

$$\bar{t} = t - \delta t\,, \tag{3}$$

con la transformación unitaria asociada:

$$U = 1 + \frac{i}{\hbar}G_t = 1 - \frac{i}{\hbar}\delta t\, H\,,$$

donde hemos usado el hecho que $G_t = -H\delta t$ es el generador de desplazamientos en el tiempo. Supongamos que nuestro sistema está descrito por un conjunto de variables $v_\alpha(t)$, con $\alpha = 1 \ldots N$. Entonces, ante el cambio (3), las variables se redefinen siguiendo:

$$v_\alpha(t) = \bar{v}_\alpha(\bar{t})\,. \tag{4}$$

Incrementando los argumentos de ambos lados de (4) por δt obtenemos:

$$\bar{v}_\alpha(\bar{t} + \delta t) = v_\alpha(t + \delta t)\,,$$

pero:

$$\bar{v}_\alpha(\bar{t} + \delta t) = \bar{v}_\alpha(t)\,,$$

de tal forma que:

$$\bar{v}_\alpha(t) = v_\alpha(t + \delta t)\,.$$

Desarrollando el lado izquierdo de la última ecuación y despreciando términos de orden cuadrático o superiores, obtenemos:

$$\bar{v}_\alpha(t) = v_\alpha(t) + \delta t\,\frac{d\,v_\alpha(t)}{d\,t}\,.$$

Sin embargo, nosotros sabemos que:

$$U^{-1}v_\alpha U = \bar{v}_\alpha(t) = v_\alpha(t) - \delta v_\alpha(t)\,,$$

con:

$$\delta v_\alpha(t) = \frac{1}{i\,\hbar}\left[v_\alpha(t), G_t\right] = -\frac{\delta t}{i\,\hbar}\left[v_\alpha(t), H\right]\,,$$

siguiendo a (2), de tal forma que obtenemos finalmente:

$$\frac{d\,v_\alpha(t)}{d\,t} = \frac{1}{i\,\hbar}\,[v_\alpha(t), H]\ . \tag{5}$$

Podemos generalizar el resultado anterior al considerar una función $F(v(t),t)$ de las variables $v_\alpha(t)$ y el tiempo. Entonces, bajo un desplazamiento temporal infinitesimal:

$$U^{-1}F(v(t),t)\,U = F - \delta F = F(U^{-1}v(t)\,U,t) = F(\bar{v}(t),t) = F(v(t+\delta t),t)\,.$$

Así, escribimos:

$$\begin{aligned} F(v(t),t) &= F\left(v(t)+\delta t\frac{d\,v(t)}{d\,t}\,,t\right) = F(v(t),t)+\delta t\sum_\alpha \frac{d\,v_\alpha}{d\,t}\frac{d\,F}{d\,v_\alpha}\,. \\ &= F(v(t),t)+\delta t\left(\frac{d\,F}{d\,t}-\frac{\partial\,F}{\partial\,t}\right)\,, \end{aligned} \tag{6}$$

y recordando que $F(v(t+\delta t),t) = F(v(t),t) - \delta F$ y que:

$$\delta F = -\frac{\delta t}{i\,\hbar}\,[F,H]\ ,$$

obtenemos:

$$\frac{d}{d\,t}\,F(v(t),t) = \frac{1}{i\,\hbar}\,[F,H] - \frac{\partial}{\partial\,t}F\,, \tag{7}$$

conocida como la ecuación de Heisenberg. Dicha ecuación determina la evolución temporal de los operadores.

Consideremos ahora los estados $|\ldots,t\rangle$ determinados completamente por algunos números cuánticos dependientes del tiempo. Sabemos por definición que:

$$\overline{\langle\ldots,t|} = \langle\ldots,t|\left(1+\frac{i}{\hbar}G_t\right) = \langle\ldots,t| - \delta\langle\ldots,t|\,,$$

con:

$$\delta\langle\ldots,t| = -\frac{i}{\hbar}\langle\ldots,t|\,G_t = \frac{i}{\hbar}\langle\ldots,t|\delta t\,H\,.$$

Escojamos ahora para determinar a los estados $\langle\ldots,t|$ a un conjunto completo de operadores dependientes en el tiempo y que conmuten entre si, denotados por $v_\alpha(t)$, tales que al tiempo t puedan asignárseles valores numéricos específicos, denotados colectivamente por v'. Así:

$$\langle v',t|v_\alpha(t) = v'_\alpha\langle v',t|\,.$$

Usando ahora:

$$\overline{\langle v',t|} = \langle v',t|\,U\,, \qquad \bar{v}_\alpha(t) = U^{-1}\,v_\alpha(t)\,U\,,$$

entonces:

$$\begin{aligned}\overline{\langle v',t|}\overline{v}_\alpha(t) &= \langle v',t|U\,U^{-1}v_\alpha(t)U \\ &= v'_\alpha\overline{\langle v',t|}\,, \end{aligned} \tag{8}$$

pero sabemos que $\overline{v}_\alpha(t) = v_\alpha(t+\delta t)$. Entonces:

$$\overline{\langle v',t|}v_\alpha(t+\delta t) = v'_\alpha\overline{\langle v',t|}\,,$$

es decir, $\overline{\langle v',t|}$ es eigenestado de $v_\alpha(t+\delta t)$, con eigenvalor v'_α. Concluimos entonces que:

$$\begin{aligned}\overline{\langle v',t|} &= \langle v',t+\delta t| \\ &= \langle v',t| + \delta t\frac{\partial}{\partial t}\langle v',t| \\ &= \langle v',t| - \delta\langle v',t|\,. \end{aligned}$$

Pero:

$$\delta\langle v',t| = \frac{i}{\hbar}\langle v',t|H\delta t\,.$$

Concluimos entonces que:

$$i\,\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle v',t| = \langle v',t|H\,, \tag{9}$$

conocida como la ecuación de Schrödinger. Dicha ecuación determina la evolución temporal de los estados.

Escojamos ahora como el conjunto de operadores $v_\alpha(t)$ al conjunto de coordenadas $q_\alpha(t)$ del sistema. Sabemos que para dichos estados, el generador de translaciones infinitesimales está dado por:

$$G_q = \sum_\alpha p_\alpha\,\delta q_\alpha$$

de tal forma que:

$$\langle q'|\left(1 + \sum_\alpha \frac{i}{\hbar}p_\alpha\,\delta q''_\alpha\right) = \langle q' + \delta q''|\,.$$

Pero:

$$\langle q' + \delta q''| = \langle q'| + \sum_\alpha \delta q''_\alpha\frac{\partial}{\partial q'_\alpha}\langle q'|\,,$$

así que finalmente obtenemos:

$$\langle q',t|p_\alpha(t) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\langle q_\alpha,t|\,, \tag{10}$$

4. Principio de Acción Cuántico.

Consideremos la cantidad $\langle q', t+dt|q'', t\rangle$, que relaciona distintos estados q a tiempos separados infinitesimalmente. Sin embargo, sabemos que:

$$\langle q', t+dt| = \langle q', t| \left(1 - \frac{i}{\hbar} dt\, H(q(t), p(t), t)\right) .$$

Así, sustituyendo:

$$\langle q', t+dt|q'', t\rangle = \langle q', t| \left(1 - \frac{i}{\hbar} dt\, H(q(t), p(t), t)\right) |q'', t\rangle .$$

Deseamos ahora investigar como la cantidad $\langle q', t+dt|q'', t\rangle$ varía cuando todos los elementos de los que depende son variados infinitesimalmente. Realizamos primero la variación del bra anterior con respecto a sus variables, $\delta_{q',t+dt}$:

$$\begin{aligned}
\delta_{q',t+dt}\langle q', t+dt| &= \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\langle q', t+dt|\delta q_\alpha(t+dt) + \frac{\partial}{\partial (t+dt)}\langle q', t+dt|\delta(t+dt) \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle q', t+dt|\sum_\alpha p_\alpha(t+dt)\delta q_\alpha(t+dt) \\
&\quad -\frac{i}{\hbar}\langle q', t+dt|H(t+dt)\delta(t+dt) \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle q', t+dt|\left(\sum_\alpha p_\alpha(t+dt) q_\alpha(t+dt) - H(t+dt)\delta(t+dt)\right) ,
\end{aligned}$$

donde hemos usado (9) y (10). De manera análoga es posible obtener la variación del ket con respecto a sus variables $\delta_{q'',t}$, teniendo como resultado:

$$\delta_{q'',t}|q'', t\rangle = -\frac{i}{\hbar}\left(\sum_\alpha p_\alpha(t)\delta q_\alpha(t) - H(t)\delta t\right)|q'', t\rangle .$$

Construyendo ahora la variación $\delta' = \delta_{q',t+dt} + \delta_{q'',t}$ y aplicándola a $\langle q', t+dt|q'', t\rangle$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\delta'\langle q', t+dt|q'', t\rangle &= \delta_{q',t+dt}\langle q', t+dt|q'', t\rangle + \langle q', t+dt|\delta_{q'',t}|q'', t\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle q', t|\Bigg(\sum_\alpha p_\alpha(t+dt)\delta q_\alpha(t+dt) - H(t+dt)\delta(t+dt) \\
&\qquad -\sum_\alpha p_\alpha(t)\delta q_\alpha(t) + H(t)\delta t\Bigg)|q'', t\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle q', t+dt|\Bigg(\sum_\alpha \{p_\alpha(t+dt)\delta q_\alpha(t+dt) - p_\alpha(t)\delta q_\alpha(t)\} \\
&\qquad - \{H(t+dt)\delta(t+dt) - H(t)\delta t\}\Bigg)|q'', t\rangle . \qquad (11)
\end{aligned}$$

Usando:

$$
\begin{aligned}
p_\alpha(t+dt) = p_\alpha(t) + dt\frac{dp_\alpha(t)}{dt} = p_\alpha(t) - dt\frac{\partial H}{dq_\alpha}\,,\\
H(t+dt) = H(t) + dt\frac{dH(t)}{dt} = H(t) + dt\frac{\partial H}{dt}\,,
\end{aligned}
$$

y sustituyendo en $(\ldots)$, en (11), y despreciando los todos los cambios de segundo orden, obtenemos :

$$
\begin{aligned}
(\ldots) &= \sum_\alpha \{p_\alpha(t+dt)\delta q_\alpha(t) - p_\alpha(t)\delta q_\alpha(t)\} - \{H(t+dt)\delta(t+dt) - H(t)\delta t\}\\
&= \sum_\alpha \left\{\left(p_\alpha(t) - dt\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha(t+dt) - p_\alpha(t)\delta q_\alpha(t)\right\}\\
&\quad -\left\{\left(H(t) + dt\frac{\partial H}{\partial t}\right)\delta(t+dt) - H(t)\delta t\right\}\\
&= \sum_\alpha p_\alpha(t)\left\{\delta q_\alpha(t+dt) - \delta q_\alpha(t)\right\} - dt\sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha(t+dt)\\
&\quad -\left\{H(t)\left(\delta(t+dt) - \delta t\right) + dt\frac{\partial H}{\partial t}\delta(t+dt)\right\}\,,
\end{aligned}
$$

pero:

$$\delta(t+dt) - \delta t = \delta t + \delta dt - \delta t = \delta dt\,,$$

y:

$$dt\delta(t+dt) = dt\delta t + dt\delta dt \approx dt\delta t;$$

además:

$$dt\,\delta q_\alpha(t+dt) = dt\left(\delta q_\alpha(t) + dt\frac{\partial\delta q_\alpha(t)}{\delta t}\right) \approx dt\,\delta q_\alpha(t)\,.$$

Sustituyendo en los últimos tres sumandos de $(\ldots)$ obtenemos:

$$(\ldots) = \sum_\alpha p_\alpha(t)\left\{\delta q_\alpha(t) - \delta q_\alpha(t)\right\} - dt\sum_\alpha \delta q_\alpha(t)\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - H\,\delta dt - dt\frac{\partial H}{\partial t}\delta t\,.$$

Ahora, viendo que, por otra parte:

$$
\begin{aligned}
&\delta'\left(\sum_\alpha p_\alpha(t)\left\{q_\alpha(t) - q_\alpha(t)\right\} - dt\,H(t)\right)\\
&= \sum_\alpha \delta p_\alpha(t)\left\{q_\alpha(t+dt) - q_\alpha(t)\right\} + \sum_\alpha p_\alpha(t)\left\{\delta q_\alpha(t+dt) - \delta q_\alpha(t)\right\}\\
&\quad -H\delta dt - dt\frac{\partial H}{\partial t}\delta t - dt\sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha(t) - dt\sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha(t)\,,
\end{aligned}
$$

entonces podemos escribir $(\ldots)$ como:

$$\begin{aligned}(\ldots) &= \delta'\left(\sum_\alpha p_\alpha(t)\left\{q_\alpha(t+dt)-q_\alpha(t)\right\}-dt\,H(t)\right)\\ &\quad -\sum_\alpha \delta p_\alpha(t)\left\{q_\alpha(t+dt)-q_\alpha(t)\right\}+dt\sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha(t)\,.\end{aligned}$$

Pero:

$$q_\alpha(t+dt)-q_\alpha(t)=dt\frac{\partial q_\alpha(t)}{\partial t}=dt\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,,$$

de tal forma que al sustituir en $(\ldots)$ las dos últimas sumatorias se anulan y finalmente obtenemos:

$$(\ldots)=\delta'\left(\sum_\alpha p_\alpha\left\{q_\alpha(t+dt)-q_\alpha(t)\right\}-dt\,H(t)\right)\,. \tag{12}$$

Hasta este punto hemos variado con δ' todo en $\langle q',t+dt|q'',t\rangle$ excepto al Hamiltoniano en sí mismo. Introducimos entonces la variación δ'' que cambie únicamente la forma especifica del Hamiltoniano (variación dinámica). Aplicándola sobre $\langle q',t+dt|q'',t\rangle$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\delta''\langle q',t+dt|q'',t\rangle &= \delta''\langle q',t|\left(1-\frac{i}{\hbar}dt\,H\right)|q'',t\rangle\\ &= -\frac{i}{\hbar}\langle q',t|dt\,\delta''H|q'',t\rangle\,.\end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned}\langle q',t+dt|dt\delta''H|q'',t\rangle &= \langle q',t|\left(1-\frac{i}{\hbar}dt\,H\right)dt\,\delta''H|q'',t\rangle\\ &\approx \langle q',t|dt\,\delta''H|q'',t\rangle\,,\end{aligned}$$

de tal forma que:

$$\delta''\langle q',t+dt|q'',t\rangle=-\frac{i}{\hbar}\langle q',t+dt|\delta''t\,H|q'',t\rangle\,. \tag{13}$$

Definiendo la variación total: $\delta=\delta'+\delta''$ se tiene finalmente:

$$\delta\langle q',t+dt|q'',t\rangle=\frac{i}{\hbar}\langle q',t+dt|\delta W_{t,t+dt}|q'',t\rangle\,, \tag{14}$$

donde:

$$W_{t,t+dt}=dtL(t)\,,\qquad L=\sum_\alpha p_\alpha\frac{dq_\alpha}{dt}-H\,. \tag{15}$$

Notamos que el orden en que p_α y dq_α/dt están dispuestos en (15) no importa después de haber hecho la variación, puesto que δp_α y δq_α son solo números.

Tomando ahora dos intervalos infinitesimales sucesivos $t \to t+dt \to t+2dt$:

$$\langle q', t+2dt|q'', t\rangle = \int \langle q', t+2dt|\overline{q}, t+dt\rangle d\overline{q}\langle \overline{q}, t+dt|q'', t\rangle \,.$$

Luego, la variación total es:

$$\begin{aligned}
\delta\langle q', t+2dt|q'', t\rangle &= \int \frac{i}{\hbar}\langle q', t|\delta W_{t+2dt,t+dt}|\overline{q}, t+dt\rangle d\overline{q}\langle \overline{q}, t+dt|q'', t\rangle \\
&\quad + \int \frac{i}{\hbar}\langle q', t+2dt|\overline{q}, t+dt\rangle d\overline{q}\langle \overline{q}, t+dt|\delta W_{t+dt,t}|q'', t\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle q', t+2dt|\delta W_{t+2dt,t+dt} + \delta W_{t+dt,t}|q'', t\rangle \,.
\end{aligned}$$

Luego, concluimos que en general para cualquier intervalo de tiempo finito $t_2 \to t_1$:

$$\delta\langle q', t|q'', t\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle q', t_1|\delta W_{12}|q'', t_2\rangle \,,$$

con:

$$W_{12} = \int_{t_2}^{t_1} dt\, L(t) \,. \tag{16}$$

A este último resultado se le conoce como *principio cuántico de acción.*

5. Principio de Acción Estacionario.

La cantidad $\langle q', t+dt|q'', t\rangle$ depende solo de los estados iniciales y finales, y del Hamiltoniano que guía la evolución de un estado a otro. Entonces, para un Hamiltoniano dado, la única libertad de cambio posible está en los estados iniciales y finales, para los cuales escribimos:

$$\delta\langle q', t_1| = \frac{i}{\hbar}\langle q', t_1|G_1 \,, \qquad \delta|q'', t_2\rangle = -\frac{i}{\hbar}G_2|q'', t_2\rangle \,,$$

donde sabemos que G_i son operadores Hermíticos construidos de las variables físicas del sistema a los tiempos respectivos. Esto nos da:

$$\delta\langle q', t_1|q'', t_2\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle q', t_1|G_1 - G_2|q'', t_2\rangle \,,$$

de lo que concluimos que:

$$\delta W_{12} = G_1 - G_2 \,. \tag{17}$$

Este es el *principio de acción estacionario.* Nos dice que la variación infinitesimal de W_{12}, que según (16) depende de todas las variables en todo los valores de t entre t_2 y t_1, depende de hecho tan solo de la variación entre los puntos extremos, y es por lo tanto estacionaria con respecto a variaciones en cualquier tiempo intermedio.

Escribamos (16), con la dependencia en t implícita:

$$W_{12} = \int_2^1 \left(\sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha - H\,dt \right) .$$

Vemos ahora que:

$$\begin{aligned} \delta\, dq_\alpha(t) &= \delta\left[q_\alpha(t+dt) - q_\alpha(t)\right] \\ &= \delta q_\alpha(t+dt) - \delta q_\alpha(t) = d\,\delta q_\alpha(t)\,, \end{aligned}$$

de tal forma que:

$$\delta d = d\delta\,.$$

Variando W_{12}:

$$\begin{aligned} \delta W_{12} &= \int_2^1 \left(\sum_\alpha \{\delta p_\alpha d\delta q_\alpha\} - \delta H\,dt - H\,d\delta t \right) \\ &= \int_2^1 \left(\sum_\alpha \{\delta p_\alpha dq_\alpha - dp_\alpha \delta q_\alpha\} - \delta H\,dt + dH\,\delta t \right) \\ &\quad + \int_2^1 d\left(\sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha - H\delta t \right) . \end{aligned} \tag{18}$$

El último término puede integrarse directamente:

$$\int_2^1 d\left(\sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha - H\delta t \right) = \left(\sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha - H\delta t \right)\Bigg|_2^1 .$$

EL principio de acción estacionario requiere que la primera integral en (18) se desvanezca en todo punto intermedio t entre t_1 y t_2. Esto implica de (18):

$$\delta H = \frac{dH}{dt}\delta t + \sum_\alpha \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\delta p_\alpha - \frac{dp_\alpha}{dt}\delta q_\alpha \right) .$$

Pero, por otra parte:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial t}\delta t + \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha \right) ,$$

de tal forma que obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,, \qquad -\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\,, \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}\,,$$

y llegamos finalmente de (18) a:

$$\delta W_{12} = G_1 - G_2 \,,$$

con:

$$G = \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha - H\,\delta t\,, \tag{19}$$

evaluado en cada punto extremo.

Ahora, pudimos haber hecho el desarrollo anterior habiendo escogido como un conjunto de operadores conmutantes entre sí al conjunto de operadores de momento p_α, en lugar de los operadores q_α. Al hacer esa elección, el principio de acción estacionaria se escribe explícitamente como:

$$\delta\langle p', t_1 | p'', t_2\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle p', t_1|\delta\left(\int_2^1 dt\, L_p(t)\right)|p'', t_2\rangle\,,$$

donde:

$$L_p = -\sum_\alpha \frac{dp_\alpha}{dt} q_\alpha - H\,,$$

el cual se distingue de:

$$L_q = \sum_\alpha p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} - H\,.$$

El término con derivada temporal en L_p se obtiene de aquel de L_q por medio de la sustitución:

$$\begin{array}{ccc} q & \rightarrow & p \\ p & \rightarrow & -q\,. \end{array}$$

6. Aplicaciones

6.1. La Partícula Libre.

Como un primer ejemplo, aplicaremos el principio de acción cuántico a la descripción de la partícula libre. El Hamiltoniano de dicho sistema es:

$$H = \frac{p^2}{2M}\,,$$

y se desea calcular la variación de $\langle q', t|q'', 0\rangle$. Así, por el principio de acción estacionaria:

$$\delta\langle q', t|q'', 0\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle q', t|p(t)\delta q' - p\delta q'' - \delta t\frac{p^2}{2M}|q'', 0\rangle\,. \tag{20}$$

Las ecuaciones de Heisenberg del sistema son:

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \frac{p(t)}{M}\,,\\ \dot{p}(t) &= 0\,,\end{aligned}$$

con solución general:

$$\begin{aligned}p(t) &= A\,,\\ q(t) &= \frac{A}{M}t + B\,,\end{aligned}$$

donde A y B son constantes de integración. Fijando las condiciones iniciales $q(t=0)=q$ y $p(t=0)=p$, obtenemos:

$$\begin{aligned}p(t) &= p\,,\\ q(t) &= \frac{p}{M}t + q\,,\end{aligned}$$

y de estas soluciones podemos calcular:

$$[q, q(t)] = \frac{i\hbar t}{M}\,.$$

Ahora, nosotros sabemos que los operadores q y $q(t)$ operan sobre sus eigenvectores como:

$$\langle q', t|q(t) = \langle q', t|q'\,, \qquad q|q'', 0\rangle = q''|q'', 0\rangle\,, \tag{21}$$

de tal forma que, para calcular (20), debemos expresar a los operadores p y $p(t)$ en términos de los operadores q y $q(t)$ para que puedan actuar sobre sus eigenvectores correspondientes. Con esto en mente, fácilmente se obtiene:

$$p = p(t) = \frac{M}{t}\left(q(t) - q\right)\,.$$

Así, sustituyendo en (20):

$$\begin{aligned}\delta\langle q', t|q'', 0\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle q', t|p(t)\delta q' - p\delta q'' - \delta t\frac{p^2}{2M}|q'', 0\rangle\\ &= \langle q', t|p\left(\delta q' - \delta q''\right) - \delta t\frac{p^2}{2M}|q'', 0\rangle\\ &= \frac{i}{\hbar}\langle q', t|\frac{M}{t}\left(q(t) - q\right)\left(\delta q' - \delta q''\right) - \delta t\frac{M}{2t^2}\left(q(t) - q\right)^2|q'', 0\rangle\,.\end{aligned} \tag{22}$$

Al desarrollar el término cuadrático $\left(q(t) - q\right)^2$ pondremos siempre al operador $q(t)$ a la izquierda del operador q, para que cada operador actúe directamente sobre su eigenvector correspondiente, siguiendo a (21). Así:

$$\begin{aligned}\left(q(t) - q\right)^2 &= q^2(t) + q^2 - q(t)q - q\,q(t)\\ &= q^2(t) + q^2 - 2q(t)q - i\hbar\frac{t}{M}\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Sustituyendo este resultado en $\delta\langle q', t|q'', 0\rangle$:

$$\begin{aligned}
\delta\langle q', t|q'', 0\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle q', t|\frac{M}{t}\left(q(t) - q\right)\left(\delta q' - \delta q''\right) \\
&\quad -\delta t\frac{M}{2t^2}\left(q^2(t) + q^2 - 2q(t)q - i\hbar\frac{t}{M}\right)|q'', 0\rangle \\
&= \langle q', t|\frac{M}{t}\left(q' - q''\right)\left(\delta q' - \delta q''\right) \\
&\quad -\delta t\frac{M}{2t^2}\left(q'^2 + q''^2 - 2q'q'' - i\hbar\frac{t}{M}\right)|q'', 0\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle q', t|\frac{M}{t}\left(q' - q''\right)\left(\delta q' - \delta q''\right) - \delta t\frac{M}{2t^2}\left(q' - q''\right)^2 + i\hbar\frac{\delta t}{2t}|q'', 0\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle q', t|\delta\left(\frac{M}{2t^2}\left(q' - q''\right)^2 - i\hbar\,\ln\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right)|q'', 0\rangle \\
&= \langle q', t|\delta\left(\frac{i}{\hbar}\frac{M}{2t}\left(q' - q''\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right)|q'', 0\rangle\,,
\end{aligned}$$

donde hemos usado:

$$\frac{d}{dt}\,\ln\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = -\frac{1}{2t}\,.$$

Como q' y q'' son sólo números, entonces escribimos:

$$\delta\langle q', t|q'', 0\rangle = \langle q', t|q'', 0\rangle\,\delta\left(\frac{i}{\hbar}\frac{M}{2t}\left(q' - q''\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right)\,,$$

ó:

$$\frac{\delta\langle q', t|q'', 0\rangle}{\langle q', t|q'', t\rangle} = \delta\left(\frac{i}{\hbar}\frac{M}{2t}\left(q' - q''\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right)\,.$$

Integrando ésta última ecuación obtenemos:

$$\langle q', t|q'', 0\rangle = \frac{C}{\sqrt{t}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\frac{M}{2t}\left(q' - q''\right)^2}\,, \tag{24}$$

donde C es una constante de integración que se fija usando la condición inicial:

$$\langle q', t|q'', 0\rangle = \delta(q' - q'')\,.$$

En efecto, si calculamos:

$$\begin{aligned}
\int d\left(q' - q''\right)\langle q', t|q'', 0\rangle &= \frac{C}{\sqrt{t}}\int dy\; e^{-\frac{1}{i\hbar}\frac{M}{2t}\,y^2} \\
&= C\sqrt{\frac{2\,i\hbar}{M}}\int dx\; e^{-x^2} = C\sqrt{\frac{2\pi\,i\hbar}{M}}
\end{aligned}$$

vemos que el resultado es independiente de t e igualmente válido para $t = 0$, por lo que dicha integral debe de valer 1. Así:

$$C = \sqrt{\frac{M}{2\pi\,i\hbar}}\,,$$

y el resultado final es:

$$\langle q', t|q'', 0\rangle = \sqrt{\frac{M}{2\pi\, i\hbar\, t}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{M}{2t}\left(q'-q''\right)^2}\,. \tag{25}$$

6.2. El Oscilador Armónico.

Como siguiente ejemplo, consideremos el oscilador armónico simple, descrito por el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2M}p^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 q^2\,.$$

Las ecuaciones de Heisenberg para dicho sistema son:

$$\begin{aligned}\frac{dq(t)}{dt} &= \frac{1}{M}p(t)\,,\\ \frac{dp(t)}{dt} &= -M\omega^2 q(t)\,.\end{aligned}$$

Desacoplando para $q(t)$ encontramos la ecuación:

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2 q(t)\,,$$

de donde se obtienen las soluciones generales:

$$\begin{aligned}q(t) &= A\,\sin(\omega t) + B\,\cos(\omega t)\,,\\ p(t) &= \omega M\,(A\,\cos(\omega t) - B\,\sin(\omega t))\,.\end{aligned}$$

Fijando las condiciones iniciales $q(t=0) = q$ y $p(t=0) = p$ obtenemos:

$$\begin{aligned}q(t) &= q\,\cos(\omega t) + \frac{p}{M\omega}\,\sin(\omega t)\,,\\ p(t) &= p\,\cos(\omega t) - M\omega q\,\sin(\omega t)\,,\end{aligned}$$

de donde podemos calcular:

$$[q, q(t)] = \frac{i\hbar}{M\omega}\sin(\omega t)\,.$$

Deseamos ahora calcular $\delta\langle q', t|q'', 0\rangle$. Por el principio cuántico de acción:

$$\begin{aligned}\delta\langle q', t|q'', 0\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle q', t|p(t)\delta q' - p\delta q'' - \delta t\, H|q'', 0\rangle\\ &= \frac{i}{\hbar}\langle q', t|p(t)\delta q' - p\delta q'' - \delta\left(\frac{1}{2M}p^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 q^2\right)|q'', 0\rangle\end{aligned} \tag{26}$$

Partiendo de la soluciones, expresamos p y $p(t)$ en términos de q y $q(t)$, obteniendo:

$$\begin{aligned}p &= \frac{M\omega}{\sin(\omega t)}\Big(q(t) - q\,\cos(\omega t)\Big)\,,\\ p(t) &= \frac{M\omega}{\sin(\omega t)}\Big(q(t)\,\cos(\omega t) - q\Big)\,,\end{aligned}$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned}
p^2 &= \frac{M^2\omega^2}{\sin^2(\omega t)}\Big(q^2(t)+\cos^2(\omega t)q^2-\cos(\omega t)\left(q(t)q+q\,q(t)\right)\Big)\\
&= \frac{M^2\omega^2}{sin^2(\omega t)}\left(q^2(t)+\cos^2(\omega t)q^2-\cos(\omega t)\left(2q(t)q+\frac{i\hbar}{M\omega}\sin(\omega t)\right)\right)\\
&= \frac{M^2\omega^2}{\sin^2(\omega t)}\Big(q^2(t)+\cos^2(\omega t)q^2-2\cos(\omega t)q(t)q\Big)-i\hbar M\omega\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}\,,
\end{aligned}$$

de tal forma que, al sustituir en el Hamiltoniano H:

$$H=\frac{M\omega^2}{2\sin(\omega t)}\Big(q^2(t)+q^2-2\cos(\omega t)q(t)\,q\Big)-\frac{i\hbar\omega}{2}\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}\,.$$

Así, sustituyendo en (26) y recordando que los operadores y eigenvectores cumplen:

$$\langle q',t|q(t)=\langle q',t|q'\,,\qquad q|q'',0\rangle=q''|q'',0\rangle\,,$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta\langle q',t|q'',0\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle q',t|\frac{M\omega}{\sin(\omega t)}\Big(\cos(\omega t)q'-q''\Big)\delta q'-\frac{M\omega}{\sin(\omega t)}\Big(q'-\cos(\omega t)q''\Big)\delta q''\\
&\quad -\delta t\left(\frac{M}{2\sin(\omega t)}\left(q'^2-2\cos(\omega t)q'q''+q''^2\right)-\frac{i\hbar\omega}{2}\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}\right)|q'',0\rangle\\
&= \frac{i}{\hbar}\langle q',t|\delta\Bigg(\frac{M\omega}{2\sin(\omega t)}\left(\cos(\omega t)\left(q'^2+q''^2\right)-2\,q'q''\right)\\
&\quad -i\hbar\,\ln\sqrt{\frac{\omega}{\sin(\omega t)}}\Bigg)|q'',0\rangle\,,
\end{aligned}$$

de tal forma que obtenemos como resultado:

$$\langle q',t|q'',0\rangle=C\sqrt{\frac{\omega}{\sin(\omega t)}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\frac{M\omega}{2\sin(\omega t)}\left(\left(q'^2+q''^2\right)\cos(\omega t)-2\,q'q''\right)}\,.$$

donde C es una constante de integración. Notamos que en el límite $t\to 0$ obtenemos:

$$\langle q',t\to 0|q'',0\rangle\approx\frac{C}{\sqrt{t}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\frac{M}{2t}\left(q'-q''\right)^2}\,,$$

que es el mismo resultado que se obtuvo para la partícula libre. Así, la constante de integración se fija de igual forma que en aquel caso:

$$C=\sqrt{\frac{M}{2\pi\,i\hbar}}\,,$$

y el resultado final es:

$$\langle q',t|q'',0\rangle=\sqrt{\frac{M\omega}{2\pi\,i\hbar\sin(\omega t)}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\frac{M\omega}{2\sin(\omega t)}\left(\left(q'^2+q''^2\right)\cos(\omega t)-2\,q'q''\right)}\,. \tag{27}$$

6.3. Operadores No-Hermíticos.

Consideremos en lugar de describir al oscilador armónico con los operadores Hermíticos q y p, utilizar algún par de operadores no-Hermíticos. Primero, definamos los operadores de aniquilación y creación a y $a^\dagger$, dados por:

$$a = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left(q + \frac{i}{M\omega} p \right) , \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left(q - \frac{i}{M\omega} p \right) ,$$

que cumplen:

$$\left[a, a^\dagger \right] = 1 ,$$

de tal forma que el Hamiltoniano del oscilador armónico se puede escribir como:

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) .$$

Definamos ahora los operadores y y $y^\dagger$ por medio de:

$$y = \sqrt{\hbar} a , \qquad y^\dagger = \sqrt{\hbar} a^\dagger ,$$

que en consecuencia cumplen con:

$$\left[y, y^\dagger \right] = \hbar ,$$

y en términos de los cuales el Hamiltoniano se escribe:

$$H = \omega \left(y^\dagger y + \frac{\hbar}{2} \right) .$$

Como la relación de conmutación $\left[y, iy^\dagger \right] = i\hbar$ es análoga a la relación $[q, p] = i\hbar$, entonces debe ser posible usar las Lagrangianas:

$$L_y = iy^\dagger \frac{dy}{dt} - H \left(y, y^\dagger, t \right) ,$$

ó:

$$L_{y^\dagger} = -y \frac{d(iy^\dagger)}{dt} - H \left(y, y^\dagger, t \right) ,$$

en analogía a las Lagrangianas:

$$L_q = q \frac{dp}{dt} - H \left(q, p, t \right) ,$$

y:

$$L_p = -p \frac{dq}{dt} - H \left(q, p, t \right) .$$

Igualmente, los generadores infinitesimales son:

$$G_y = iy^\dagger \delta y ,$$

y:

$$G_{y^\dagger} = -y\delta(iy^\dagger) = -iy\delta y^\dagger ,$$

en analogía con:

$$G_q = q\delta p \,, \qquad G_p = -p\delta q \,.$$

Hacemos notar que $G_{y^\dagger} = G_y^\dagger$.

Las ecuaciones de Heisenberg para los operadores y y $y^\dagger$ son:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\,[y, H] = -i\omega y \,,$$

y:

$$i\frac{dy^\dagger}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[iy^\dagger, H\right] = -\omega y^\dagger \,,$$

que tienen como solución:

$$y(t) = y\, e^{-i\omega t} \,, \qquad y^\dagger(t) = y^\dagger\, e^{i\omega t} \,,$$

donde hemos fijado las condiciones iniciales $y(t=0) = y$ y $y^\dagger(t=0) = 0$.

Consideremos utilizar ahora, para la descripción de los estados $|\ \rangle$ del sistema, utilizar como conjunto de operadores conmutantes entre sí, no a los operadores q o p como hemos hecho hasta el momento, sino a los operadores y y $y^\dagger$. En ese caso, los vectores de estado se escriben:

$$|y, t\rangle \,,$$

con adjunto:

$$\langle y^\dagger, t| \,,$$

puesto que y es no-Hermítico. De igual forma, los operadores actúan sobre sus eigenvectores como:

$$\langle y'^\dagger, t|y^\dagger(t) = \langle y'^\dagger, t|y'^\dagger \,, \qquad y(t)|y', t\rangle = y'|y', t\rangle \,.$$

y sus variaciones infinitesimales son:

$$\delta|y', t\rangle = -\frac{i}{\hbar}G_y|y'', t\rangle = -\frac{i}{\hbar}\left(iy^\dagger(t)\delta y\right)|y', t\rangle \,,$$

y la correspondiente expresión adjunta:

$$\delta\langle y'^\dagger, t| = \frac{i}{\hbar}\langle y'^\dagger, t|G_y^\dagger = \frac{i}{\hbar}\langle y'^\dagger, t|G_{y^\dagger} = \frac{i}{\hbar}\langle y'^\dagger, t|\left(-iy(t)\delta y'^\dagger\right) \,.$$

Podemos utilizar ahora el principio de acción cuántico para calcular la variación de la cantidad $\langle y'^\dagger, t|y'', t\rangle$. Explícitamente tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\delta\langle y'^\dagger, t|y'', 0\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle y'^\dagger, t|G_{y^\dagger} - G_y|y'', 0\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle y'^\dagger, t| - iy(t)\delta y'^\dagger - iy^\dagger\delta y'' - \delta t\, H(y, y^\dagger)|y'', 0\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle y'^\dagger, t| - iy(t)\delta y'^\dagger - iy^\dagger\delta y'' - \delta t\left\{\omega\left(y^\dagger y + \frac{\hbar}{2}\right)\right\}|y'', 0\rangle \,.
\end{aligned}$$

De las soluciones para $y(t)$ y $y^\dagger(t)$ tenemos $y^\dagger = y^\dagger(t)e^{-i\omega t}$. Sustituyendo esto y la solución $y(t)$ en la variación de $\langle y'^\dagger, t|y'', 0\rangle$:

$$\begin{aligned}
\delta\langle y'^\dagger, t|y'', 0\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle y'^\dagger, t| - iy\, e^{-i\omega t}\delta y'^\dagger - iy^\dagger(t)e^{-i\omega t}\delta y'' \\
&\quad -\delta t\left\{\omega\left(y^\dagger(t)e^{-i\omega t}y + \frac{\hbar}{2}\right)\right\}|y'', 0\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle y'^\dagger, t| - iy'' e^{-\omega t}\delta y'^\dagger - iy'^\dagger e^{-i\omega t}\delta y'' - \delta t\left\{\omega\left(y'^\dagger y'' e^{-i\omega t} + \frac{\hbar}{2}\right)\right\}|y'', 0\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle y'^\dagger, t|\delta\left(-iy'^\dagger e^{-i\omega t}y'' - \frac{\hbar\omega}{2}\,t\right)|y'', 0\rangle\,, \\
&= \langle y'^\dagger, t|y'', 0\rangle\,\delta\left(y'^\dagger e^{-i\omega t}y'' - \frac{i\omega t}{2}\right)\,,
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos hecho operar los operadores sobre sus eigenvectores. El resultado es entonces:

$$\langle y'^\dagger, t|y'', 0\rangle = e^{\left\{y'^\dagger e^{-i\omega t}y'' - \frac{i\omega t}{2}\right\}}\,. \tag{28}$$

Capítulo 5
Oscilador Armónico Modificado

1. Introducción

En esta sección haremos una modificación compleja a la función Lagrangiana del oscilador armónico simple. Esto llevará a la introducción de momentos canónicos complejos a nivel clásico y de operadores de momento no-Hermíticos a nivel cuántico. Estos operadores no-Hermíticos estarán relacionados a operadores Hermíticos por medio de una transformación no-unitaria, la cual inducirá a su vez un cambio en el producto interno del sistema a través de la *función de medida*. Finalmente se utilizará el principio de acción cuántico para calcular el propagador del sistema en términos de los operadores no-Hermíticos. El manejo de operadores no-Hermíticos y la introducción del concepto de medida serán importantes al momento de realizar la cuantización del oscilador de Pais-Uhlenbeck en el capítulo siguiente.

2. Oscilador Armónico Modificado.

Consideremos la siguiente modificación a la función Lagrangiana del Oscilador Armónico Simple Unidimensional, $L_{\mathcal{O}}$:

$$L_M \equiv L_{\mathcal{O}} - i\epsilon \frac{dF\,(\,q)}{d\,t} = \frac{\dot{q}^{\,2}}{2} - \frac{q^{\,2}}{2} - i\epsilon \frac{dF\,(\,q)}{d\,t}\,,$$

donde $F\,(\,q)$ es una función real, continua e integrable de la coordenada q, y ϵ es un parámetro real. Notamos que la diferencia entre ambas funciones Lagrangianas es una derivada total en el tiempo:

$$L_{\mathcal{O}} - L_M = i\epsilon \frac{dF(q)}{dt}\,,$$

de tal forma que ambas Lagrangianas son equivalentes en el sentido de que nos darán las mismas ecuaciones de movimiento. Desarrollando la derivada total de la función F, escribimos:

$$L_M = \frac{\dot{q}^{\,2}}{2} - \frac{q^{\,2}}{2} - i\epsilon\,\dot{q}\,F\,'(\,q)\,, \tag{1}$$

donde, por supuesto, $F\,'(q) = \frac{dF(q)}{dq}$. La ecuación de movimiento de este sistema es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L_M}{\partial q} = \ddot{q} + q = 0\,, \tag{2}$$

con solución general:
$$q(t) = C_1 e^{-it} + C_2 e^{it} \, ,$$
donde C_i son constantes de integración. A partir de la función Lagrangiana L_M, el momento canónico es:

$$p \equiv \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}} = \dot{q} - i\epsilon \, F^{\,\prime}(\, q\,) \, , \tag{3}$$

de tal forma que la función Hamiltoniana correspondiente está dada por:

$$\begin{aligned} H_M\,(q,p) &= p\,\dot{q} - L_M\,(q,p) \\ &= \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} - \frac{1}{2}\,\epsilon^2 F^{\prime\,2}(q) + i\epsilon\, p\, F^{\prime}(q) \, , \end{aligned} \tag{4}$$

con paréntesis de Poisson:
$$\{q, p\} = 1 \, .$$
Notamos que el momento canónico p definido por (**??**) es una cantidad compleja debido al término $i\epsilon F^{\prime}(q)$.

Denotando ahora como P al momento canónico correspondiente al oscilador armónico simple ($\epsilon \to 0$):
$$P = \dot{q} \, ,$$
entonces el momento canónico (**??**) del sistema modificado se escribe como:

$$p = P - i\epsilon F^{\prime}(q) \, , \tag{5}$$

y la función Hamiltoniana H_M en términos de q y P es simplemente:

$$H_M(q,P) = \frac{1}{2}\left(P^2 + q^2\right) \, , \tag{6}$$

es decir, la Hamiltoniana del oscilador armónico no modificado, con el paréntesis de Poisson:
$$\{q, P\} = 1 \, .$$
Cuando expresemos a la función Hamiltoniana H_M en términos de q y P, nos referiremos a ella como $H_{\mathcal{O}}$. Es decir:

$$H_M(q,P) = H_{\mathcal{O}} \, .$$

Hacemos notar que la transformación:

$$q = q \, , \qquad p = P - i\epsilon F^{\prime}(q) \, , \tag{7}$$

que relaciona las Hamiltonianas $H_M(q,p)$ y $H_{\mathcal{O}}(q,P)$ es una transformación canónica con coeficientes complejos.

3. Cuantización.

A continuación cuantizaremos el sistema partiendo de la función Hamiltoniana (??). Por simplicidad, tomaremos unidades donde $\hbar = 1$. El operador Hamiltoniano correspondiente será;

$$H_M(q,p) = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\hat{q}^2}{2} - \frac{1}{2}\epsilon^2 \hat{F}'^{\,2}(q) + \frac{i\epsilon}{2}\left\{\hat{p}\,,\hat{F}'(q)\right\}\,, \tag{8}$$

con:

$$[q,p] = i\,, \tag{9}$$

o, equivalentemente:

$$H_{\mathcal{O}}(q,P) = \frac{1}{2}\left(\hat{P}^2 + \hat{q}^2\right)\,, \tag{10}$$

con:

$$[q,P] = i\,, \tag{11}$$

y donde en (??) para lidiar con cualquier problema relacionado con el ordenamiento entre operadores, hemos escogido realizar la sustitución a nivel cuántico:

$$p\,F'(q) \to \frac{1}{2}\left\{\hat{p}\,,\,\hat{F}'(q)\right\}\,,$$

donde $\{\ ,\ \}$ es el anticonmutador entre dos operadores.

Para resolver la ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$H_M|\psi\rangle = E|\psi\rangle\,,$$

es necesario determinar qué realizaciones como operadores tendrán las variables canónicas q y p. Como deseamos resolver dicha ecuación en la representación de coordenadas:

$$\langle q|\psi\rangle = \psi(q)\,,$$

entonces escogemos:

$$\hat{q} = q\,. \tag{12}$$

Ahora, veamos el Hamiltoniano $H_{\mathcal{O}}(q,P)$ mostrado en (??). Es claro que dicho operador será Hermítico en tanto que q y P lo sean. Así, realizaremos la cuantización del sistema en un espacio de Hilbert con un producto interno donde se cumpla:

$$P^\dagger = P \qquad q^\dagger = q.$$

De esta forma, al fijar a los operadores q y P como operadores Hermíticos, hemos determinado las *condiciones de realidad* de nuestro problema. Notemos que al fijar dichas condiciones de realidad, dotamos a los operadores q y P de la propiedad de Hermiticidad mientras que sacrificamos la Hermiticidad del operador p. En efecto, si P es Hermítico, entonces se sigue de (??):

$$p^\dagger = P^\dagger + i\epsilon F'(q) = P + i\epsilon F'(q)\,.$$

o:

$$p^\dagger = p + 2i\epsilon F'(q)\,. \tag{13}$$

Como realización para el operador p escogemos la realización usual para el operador de momento:

$$p = -i\frac{d}{dq}\,, \tag{14}$$

lo cual determina la realización para el operador P, siguiendo (**??**), como:

$$P = -i\frac{d}{dq} + i\epsilon\, F'(q)\,. \tag{15}$$

Ahora, podemos observar que la realización para p (**??**) es Hermítica en el producto interno usual o *producto de Dirac* $\langle\,,\,\rangle_{\mathrm{Dir}}$:

$$\langle \hat{p}\,\psi, \phi\rangle_{\mathrm{Dir}} = \int dq\;\; (\hat{p}\,\psi(q))^*\,\phi(q) = \int dq\;\psi^*(q)\hat{p}\,\phi(q) = \langle\psi, \hat{p}\,\phi\rangle_{\mathrm{Dir}}\,, \tag{16}$$

mientras que la realización para P (**??**) no lo es. Sin embargo, hemos dicho que deseamos cuantizar el sistema en un producto interno donde P sea Hermítico. Denotaremos dicho producto como producto-μ, $\langle\,,\,\rangle_\mu$ para distinguirlo del producto de Dirac, y lo definimos de manera general como:

$$\langle\phi,\psi\rangle_\mu = \int dq\;\phi^*(q)\mu(q)\psi(q)\,, \tag{17}$$

donde μ, llamada la *medida del producto*, puede ser una función tanto de las coordenadas como de los momentos, pero donde hemos supuesto (como resultará ser en nuestro caso particular) que es sólo función de q. Así, el operador P, siendo Hermítico debe cumplir :

$$\langle\hat{P}\phi,\psi\rangle_\mu = \int dq\,(\hat{P}\phi(q))^*\,\mu(q)\psi(q) = \int dq\,\phi^*(q)\mu(q)\hat{P}\psi(q) = \langle\phi, P\,\psi\rangle_\mu\,. \tag{18}$$

y siguiendo (**??**) el operador p debe cumplir:

$$\langle p\,\phi,\psi\rangle_\mu = \langle\phi,(p + 2i\epsilon F'(q))\,\psi\rangle_\mu\,. \tag{19}$$

A partir de esta última ecuación es posible determinar la medida μ. En efecto, usando la realización (**??**) y la definición del producto-μ (**??**) tenemos:

$$\begin{aligned}\langle p\,\phi,\psi\rangle_\mu = \int dq\;\; (-i\phi'(q))^*\,\mu(q)\psi(q) &= i\int dq\;\phi'^*(q)\mu(q)\psi(q)\\ &= -i\int dq\;\phi^*(q)\frac{d}{dq}\,(\mu(q)\psi(q))\;,\end{aligned}$$

donde para pasar al último renglón hemos integrado por partes y despreciado el término de borde. Suponemos que $\mu(q)$ es de la forma:

$$\mu(q) = e^{g(q)}\,,$$

de tal forma que queda por determinar la función $g(q)$. Sustituyendo:

$$
\begin{aligned}
-i\int dq\, \phi^*(q)\frac{d}{dq}\left(\mu(q)\psi(q)\right) &= -i\int dq\, \phi^*(q)\frac{d}{dq}\left(e^{g(q)}\psi(q)\right) \\
&= -i\int dq\, \phi^*(q)\left(\psi'(q)+g'(q)\psi(q)\right)e^{g(q)} \\
&= \int dq\, \phi^*(q)\left(-i\frac{d}{dq}-i\,g'(q)\right)\psi(q)\,e^{g(q)} \\
&= \int dq\, \phi^*(q)\left(p-i\,g(q)\right)\psi(q)\,e^{g(q)} \\
&= \langle\phi,(p-i\,g'(q))\,\psi\rangle_\mu\,.
\end{aligned}
$$

Recordando que p debe cumplir (**??**) identificamos:

$$g(q) = -2\epsilon F(q)\,,$$

de tal forma que la medida $\mu(q)$ es en este caso:

$$\mu(q) = e^{-2\epsilon F(q)}\,, \tag{20}$$

y el producto interno es:

$$\langle\phi,\psi\rangle_\mu = \int dq\, \phi^*(q)e^{-2\epsilon F(q)}\psi(q)\,. \tag{21}$$

En efecto, se puede demostrar fácilmente que usando esta medida se cumple la condición de Hermiticidad para P (**??**).

Ahora procedemos a resolver la ecuación de Schrödinger en la representación de coordenadas $\psi(q)=\langle q|\psi\rangle$:

$$H_M\psi(q) = E\psi(q)\,. \tag{22}$$

Siguiendo la realización (**??**) la ecuación de eigenvalores (**??**) se traduce en la siguiente ecuación diferencial para $\psi(q)$:

$$-\frac{1}{2}\,\psi''(\,q)+\epsilon\,F'(\,q)\,\psi'(\,q)+\frac{1}{2}\left(q^2-\epsilon^2F'^{\,2}(\,q)+\epsilon\,F''(\,q)\right)\psi(\,q) = E\,\psi(\,q)\,, \tag{23}$$

o, equivalentemente:

$$\psi''(\,q)-2\epsilon\,F'(\,q)\,\psi'(\,q)-\left(q^2-\epsilon^2F'^{\,2}(\,q)+\epsilon\,F''(\,q)-2E\right)\psi(\,q) = 0\,. \tag{24}$$

Dicha ecuación puede ser escrita como:

$$\psi''(\,q)+A(\,q)\psi'(\,q)+B(\,q)\psi(\,q) = 0\,, \tag{25}$$

con:

$$A(\,q) = -2\,\epsilon F'(\,q)\,,\qquad B(q) = -q^2+\epsilon^2F'^{\,2}(q)-\epsilon\,F''(q)+2E\,.$$

De manera general, cuando $A(q)$ es una función continua e integrable en $q \in (-\infty, \infty)$ siempre podremos manipular las ecuaciones del tipo (**??**) para obtener ecuaciones diferenciales equivalentes sin términos en primeras derivadas: en efecto, basta proponer la siguiente forma específica para la función $\tilde{\psi}(q)$:

$$\psi(q) = \exp\left\{-\int_0^q dz \frac{A(z)}{2}\right\}\phi(q)\,,$$

de tal forma que, al sustituir en (**??**) obtenemos la siguiente ecuación diferencial para $\phi(q)$:

$$\phi''(q) + \left\{B(q) - \frac{A^2(q)}{4} - \frac{A'(q)}{2}\right\}\phi(q) = 0\,.$$

Así, en nuestro caso particular proponemos la siguiente forma específica para la función de onda $\psi(q)$:

$$\begin{aligned}\psi(q) = \exp\left\{-\int_0^q dz \frac{A(z)}{2}\right\}\phi(q) &= \exp\left\{\epsilon\int_0^q dz\, F'(z)\right\}\phi(q)\\ &= \exp\left\{\epsilon\, F(q)\right\}\phi(q)\,,\end{aligned}$$

donde hemos supuesto por simplicidad que $F(0) = 0$. Así, al sustituir en (**??**) obtenemos:

$$\phi''(q) + \left\{-q^2 + 2E\right\}\phi(q) = 0\,. \tag{26}$$

o, reacomodando términos:

$$-\frac{1}{2}\phi''(q) + \frac{q^2}{2}\phi(q) = E\phi(q)\,. \tag{27}$$

La ecuación de eigenvalores (**??**) es la correspondiente a un oscilador armónico con masa y frecuencia igual a uno. Sus soluciones regulares en $q \in (-\infty, \infty)$ están dadas por:

$$\phi_n(q) = e^{-\frac{1}{2}q^2} H_n(q)\,,$$

donde $H_n(q)$ es el n-ésimo polinomio de Hermite. De igual forma (**??**) determina el espectro de energía, el cual está dado por:

$$E_n = n + \frac{1}{2}\,, \qquad n = 0\,,1\,,2\ldots\infty \tag{28}$$

De esta forma, la solución a la ecuación de eigenvalores original (**??**) resulta ser:

$$\psi_n(q) = e^{\left(\epsilon F(q) - \frac{1}{2}q^2\right)} H_n(q)\,, \tag{29}$$

con espectro de energía (**??**). Notamos que las soluciones (**??**) no tienen una norma bien definida en el producto de Dirac. En efecto, dicha norma, dada por:

$$\langle\psi_n, \psi_n\rangle_{\mathrm{Dir}} = \int dq\, e^{\left(2\epsilon F(q) - q^2\right)} H_n^2(q)\,,$$

no será convergente para todas las funciones $F(q)$ y los valores del parámetro ϵ. En cambio, utilizando el producto natural del sistema tenemos:

$$\begin{aligned}\langle\psi_m,\psi_n\rangle_\mu = \int dq\;\mu(q)\;\psi_m^*(q)\psi_n(q) &= \int dq\; e^{-2\epsilon F(q)}\; e^{\left(2\epsilon F(q)-q^2\right)} H_m(q)H_n(q)\\ &= \int dq\; e^{-q^2} H_m(q)H_n(q) = n!\,2^n\sqrt{\pi}\,\delta_{m,n}\,,\end{aligned}$$

es decir, las eigenfunciones son ortogonales y normalizables a 1 sin importar la forma particular de $F(q)$ o el valor de ϵ.

4. La Transformación Cuántica a Partir de la Transformación Clásica.

Tomemos las dos funciones Hamiltonianas:

$$\begin{aligned} H_M(q,p) &= \frac{p^2}{2}+\frac{q^2}{2}-\frac{1}{2}\,\epsilon^2 F'^{\,2}(q)+i\epsilon\, p\, F'(q)\,,\\ H_{\mho}(q,P) &= \frac{1}{2}\left(P^2+q^2\right)\,, \end{aligned} \tag{30}$$

relacionadas por la transformación canónica compleja (**??**):

$$q = q\,,\qquad P = p + i\epsilon F'(q)\,,$$

como se ha dicho al final de la sección 5.2. Deseamos ahora construir la transformación cuántica correspondiente partiendo de la transformación canónica clásica. Dicha transformación entre operadores debe tener la forma:

$$q = T_\epsilon q T_\epsilon^{-1}\,,\qquad P = T_\epsilon\, p\, T_\epsilon^{-1} = p + i\epsilon F'(q)\,, \tag{31}$$

donde T_ϵ es el operador que efectúa la transformación canónica. Dado que el operador q es invariante ante la transformación, entonces eso indica que T_ϵ debe depender únicamente de la posición. Para determinar completamente a T_ϵ, notamos que en el límite $\epsilon \to 0$ el operador T_ϵ debe ser igual a la identidad:

$$P = T_0 p T_0^{-1} = p\,.$$

Esto nos lleva a considerar que, cuando el parámetro ϵ es una cantidad infinitesimal $\delta\epsilon$, el operador $T_{\delta\epsilon}$ debe diferir infinitesimalmente de la identidad, tomando la forma:

$$T_{\delta\epsilon} = 1 + \delta\epsilon G(q)\,,$$

donde $G(q)$ es un operador a determinar. El correspondiente inverso lo escribimos como:

$$T_{\delta\epsilon}^{-1} = 1 - \delta\epsilon G(q)\,.$$

En efecto, desechando términos de segundo o mayor orden en $\delta\epsilon$ obtenemos:

$$\begin{aligned} T_{\delta\epsilon} T_{\delta\epsilon}^{-1} &= (1 + \delta\epsilon G(q))\,(1 - \delta\epsilon G(q)) \\ &= 1 + \delta\epsilon G(q) - \delta\epsilon G(q) = 1\,. \end{aligned}$$

Aplicando la transformación infinitesimal a el operador p siguiendo (**??**) obtenemos:

$$\begin{aligned} P = T_{\delta\epsilon} p T_{\delta\epsilon}^{-1} &= (1 + \delta\epsilon G(q))\, p\, (1 - \delta\epsilon G(q)) \\ &= p - \delta\epsilon p\, G(q) + \delta\epsilon G(q)\, p \\ &= p - \delta\epsilon\, [p, G(q)] \\ &= p + i\delta\epsilon\, G'(q)\,, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado:

$$[p, G(q)] = -i\, G'(q)\,.$$

Sin embargo, nosotros sabemos que, ante el cambio infinitesimal $\delta\epsilon$, el operador P es:

$$P = p + i\delta\epsilon\, F'(q)\,,$$

así que, comparando ambas expresiones para P, identificamos:

$$G(q) = F(q)\,,$$

de tal forma que la transformación infinitesimal $T_{\delta\epsilon}$ es:

$$T_{\delta\epsilon} = 1 + \delta\epsilon\, F(q)\,.$$

La transformación T_ϵ correspondiente a un valor finito ϵ puede ser construida aplicando n transformaciones infinitesimales $T_{\delta\epsilon}$ sucesivas, de tal forma que sea posible escribir $\epsilon = n\,\delta\epsilon$, con n suficientemente grande. Así:

$$\begin{aligned} T_\epsilon = (T_{\delta\epsilon})^n &= (1 + \delta\epsilon\, F(q))^n \\ &= \left(1 + \frac{\epsilon}{n} F(q)\right)^n\,. \end{aligned}$$

Tomando el límite $n \to \infty$ y usando:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x\,,$$

obtenemos finalmente:

$$T_\epsilon = e^{\epsilon F(q)}\,, \qquad T_\epsilon^{-1} = e^{-\epsilon F(q)}\,.$$

Así, las transformaciones canónicas (**??**) entre momentos se escriben entonces:

$$P = e^{\epsilon F(q)} p\, e^{-\epsilon F(q)}\,,$$

e inversamente:

$$p = e^{-\epsilon F(q)} P\, e^{\epsilon F(q)}\,.$$

Efectivamente, utilizando el lema de Hadamard:

$$e^{\hat{X}}\hat{Y}e^{-\hat{X}} = \hat{Y} + \left[\hat{X}\,,\hat{Y}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{X}\,,\left[\hat{X},\hat{Y}\right]\right] + \cdots \tag{32}$$

y las relaciones de conmutación (**??**) y (**??**) podemos comprobar que:

$$\begin{aligned} e^{\epsilon F(q)}p\,e^{-\epsilon F(q)} &= p + i\epsilon F'(q) = P\,, \\ e^{-\epsilon F(q)}Pe^{\epsilon F(q)} &= P - i\epsilon F'(q) = p\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Notamos el hecho importante de que el operador T_ϵ es no-unitario, sino de hecho Hermítico:

$$T_\epsilon^\dagger = T_\epsilon\,,$$

debido a que la transformación canónica clásica correspondiente es compleja. En efecto, partiendo de una transformación unitaria cualquiera, digamos:

$$U = e^{i\gamma(q)}\,,$$

donde $\gamma(q)$ es una función real, entonces es imposible obtener una transformación compleja, como se ve de:

$$U\,p\,U^\dagger = e^{i\gamma(q)}p\,e^{-i\gamma(q)} = p - \gamma'(q)\,.$$

Ahora, usando la Hermiticidad de T_ϵ tenemos:

$$\begin{aligned} P^\dagger &= \left(T_\epsilon p\,T_\epsilon^{-1}\right)^\dagger \\ &= \left(T_\epsilon^{-1}\right)^\dagger p^\dagger\,T_\epsilon^\dagger \\ &= T_\epsilon^{-1}p^\dagger T_\epsilon\,. \end{aligned}$$

Pero P es a su vez Hermítica. Tenemos entonces la ecuación:

$$T_\epsilon^{-1}p^\dagger T_\epsilon = T_\epsilon p\,T_\epsilon^{-1}\,.$$

Multiplicando por T_ϵ desde la izquierda, y por T_ϵ^{-1} desde la derecha, y usando $T_{\epsilon_1}T_{\epsilon_2} = T_{\epsilon_1+\epsilon_2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} p^\dagger &= T_\epsilon T_\epsilon p\,T_\epsilon^{-1}T_\epsilon^{-1} \\ &= T_{2\epsilon}p\,T_{2\epsilon}^{-1} \\ &= p + 2i\epsilon F'(q)\,, \end{aligned}$$

que es la ecuación (**??**) obtenida antes. Hacemos notar que el hecho de que los operadores (q,p) y (q,P) estén relacionados por medio de una transformación no-unitaria induce una modificación en el producto interno del sistema dada por la función de medida μ descrita en la sección anterior.

5. Caso Particular.

Consideremos ahora el caso concreto donde:

$$F(q) = \frac{q^2}{2} \,. \tag{34}$$

Entonces, con ésta función particular, reescribimos los operadores Hamiltonianos H_M y $H_{\mathcal{O}}$:

$$\begin{aligned} H_M(q,p) &= \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\left(1-\epsilon^2\right)q^2 + \frac{i\epsilon}{2}\{p,q\} \,, \\ H_{\mathcal{O}}(q,P) &= \frac{1}{2}\left(P^2+q^2\right) \,, \end{aligned} \tag{35}$$

donde las transformaciones canónicas entre momentos son:

$$\begin{aligned} p &= e^{-\epsilon q^2/2} P \, e^{\epsilon q^2/2} = p - i\epsilon q \,, \\ P &= e^{\epsilon q^2/2} p \, e^{-\epsilon q^2/2} = p + i\epsilon q \,. \end{aligned} \tag{36}$$

La medida (**??**) del producto interno es en este caso particular:

$$\mu(q) = e^{-\epsilon q^2} \,, \tag{37}$$

mientras que el producto interno (**??**) es:

$$\langle \phi, \psi \rangle_\mu = \int dq \; e^{-\epsilon q^2} \phi(q)\psi(q) \,. \tag{38}$$

Además, las eigenfunciones del Hamiltoniano H_M son:

$$\psi_n(q) = e^{-\frac{1}{2}(1-\epsilon)q^2} H_n(q) \,, \tag{39}$$

Hasta este punto, hemos introducido en nuestro desarrollo a tres operadores, q, P y p, donde por nuestras condiciones de realidad solo los dos primeros son Hermíticos, como se ve de:

$$\begin{aligned} q^\dagger &= q \,, \\ P^\dagger &= P \,, \\ p^\dagger &= p + 2i\epsilon q \,. \end{aligned} \tag{40}$$

Consideremos ahora la familia de eigenvectores de cada uno de los operadores mencionados: $|q'\rangle$, $|P'\rangle$ y $|p'\rangle$ respectivamente, donde q', P' y p' son ciertos valores numéricos con los que estos vectores pueden ser etiquetados. Tenemos entonces, por definición:

$$\begin{aligned} q|q'\rangle &= q'|q'\rangle\,, \\ P|P'\rangle &= P'|P'\rangle\,, \\ p|p'\rangle &= p'|p'\rangle\,, \end{aligned} \tag{41}$$

mientras que las relaciones conjugadas Hermíticas correspondientes son:

$$\begin{aligned} \langle q'|q &= q'\langle q'|\,, \\ \langle P'|P &= P'\langle P'|\,, \\ \langle p'^*|p^\dagger &= p'^*\langle p'^*|\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Notemos que en ésta última relación, dado que el operador p es no-Hermítico, el conjugado Hermítico de su eigenvector $|p'\rangle$ es $\langle p'^*|$, donde p'^* es el complejo conjugado del número p'. Ahora, hagamos una comparación entre los operadores de momento P y p. Sabemos que la Hermiticidad del operador P garantiza que su familia de eigenvectores formen una base tanto ortogonal:

$$P'|P''\rangle = \delta\left(P' - P''\right)\,, \tag{43}$$

como completa, donde las relaciones de completez son:

$$\int dP\ |P\rangle\langle P| = 1\,. \tag{44}$$

Lo mismo no puede ser dicho acerca de la base $|p'\rangle$. En efecto, podemos utilizar el principio de acción cuántico para calcular $\langle p'^*|p''\rangle$, donde ambos vectores están al mismo tiempo. Calculamos primero la variación total de dicha cantidad:

$$\delta\langle p'^*|p''\rangle = i\langle p'^*|G_{p^*} - G_p|p''\rangle\,,$$

donde los generadores son:

$$G_{p^*} = -q\delta p^*\,, \qquad G_p = -q\delta p\,,$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned} \delta\langle p'^*|p''\rangle &= i\langle p'^*| - q\delta p'^* + q\delta p''|p''\rangle \\ &= i\langle p'^*|q\left(\delta p'' - \delta p'^*\right)|p''\rangle\,. \end{aligned}$$

Pero, de (**??**):

$$q = \frac{i}{2\epsilon}\left(p - p^\dagger\right)\,.$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\delta\langle p'^{*}|p''\rangle &= i\langle p'^{*}|\frac{i}{2\epsilon}\left(p-p^{\dagger}\right)\left(\delta p''-\delta p'^{*}\right)|p''\rangle \\
&= i\langle p'^{*}|\frac{i}{2\epsilon}\left(p''-p'^{*}\right)\left(\delta p''-\delta p'^{*}\right)|p''\rangle \\
&= i\langle p'^{*}|\delta\left\{\frac{i}{4\epsilon}\left(p''-p'^{*}\right)^{2}\right\}|p''\rangle \\
&= \langle p'^{*}|p''\rangle\delta\left\{-\frac{1}{4\epsilon}\left(p''-p'^{*}\right)^{2}\right\} ,
\end{aligned}$$

e integrando obtenemos:

$$\langle p'^{*}|p''\rangle = C\, e^{-\frac{1}{4\epsilon}\left(p''-p'^{*}\right)^{2}} , \tag{45}$$

donde C es una constante de integración. Si hacemos tender $p'^{*} \rightarrow p''^{*}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\langle p'^{*} \rightarrow p''^{*}|p''\rangle &= C\ e^{-\frac{1}{4\epsilon}\left(p''-p''^{*}\right)^{2}} \\
&= C\ e^{\frac{1}{\epsilon}\,\mathrm{Im}(p')^{2}} ,
\end{aligned} \tag{46}$$

donde hemos usado: $p' - p'^{*} = 2i\,\mathrm{Im}(p')$. Es claro entonces que no es posible obtener una delta de Dirac como en el caso (**??**), y la razón es que, mientras que en el mencionado caso P' estaba restringido sobre el eje real, en este caso p' puede tomar *cualquier valor complejo*. En efecto, como se ve de (**??**), la medida de la ortogonalidad de la base $|p'\rangle$ es la parte imaginaria del eigenvalor p'. Esta falta de restricciones sobre los eigenvalores y eigenvectores del operador p hacen que la familia $|p'\rangle$ formen una *base sobrecompleta*. Así, un vector cualquiera puede ser expandido en términos de dicha familia de infinitas maneras diferentes. El mismo hecho de que los eigenvectores tomen valores sobre todos los números complejos, hace que la relación de completez análoga a las relaciones (**??**) se deba escribir de manera general como:

$$\int d\mu(p)\ |p\rangle\langle p^{*}| = 1 \tag{47}$$

donde $\mu(p)$ es una función de medida escrita en términos de p, y donde la integral corre sobre todo el plano complejo de p:

$$\int d\mu(p) = \int d\mathrm{Re}(p) d\mathrm{Im}(p)\ \mu(\mathrm{Re}(p), \mathrm{Im}(p)) .$$

Sin embargo, dicha función de medida no es arbitraria: está determinada por la relación canónica que existe entre los operadores p y P. En particular, la relación (**??**) debe de respetar la relación de ortogonalidad para la base $|P\rangle$:

$$\langle P'|P''\rangle = \int d\mu\left(p\right)\ \langle P'|p\rangle\langle p^{*}|P''\rangle = \delta\left(P'-P''\right) . \tag{48}$$

Es claro que si deseáramos describir nuestro sistema en términos de la familia $|p\rangle$, y si deseamos además que dicha descripción sea equivalente a la descripción en términos de la base $|P\rangle$, entonces es necesario determinar la medida $\mu(p)$ para poder construir el producto interno apropiado y poder obtener así valores de expectación como en toda teoría física. Para obtener la medida en este caso particular, calculamos primero la cantidad $\langle P'|p''\rangle$ por medio del principio de acción de Schwinger. Así, empezamos por tomar la variación total de dicha cantidad:

$$\delta\langle P'|p''\rangle = i\langle P'|G_P - G_p|p''\rangle\,,$$

donde:

$$G_P = -q\delta P\,, \qquad G_p = -q\delta p\,.$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\delta\langle P'|p''\rangle &= i\langle P'| - q\delta P' + q\delta p''|p''\rangle \\ &= i\langle P'|q\left(\delta p'' - \delta P'\right)|p''\rangle\,.\end{aligned}$$

Pero nosotros sabemos de (**??**):

$$q = \frac{i}{\epsilon}(p - P)\,.$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned}\delta\langle P'|p''\rangle &= i\langle P'|\frac{i}{\epsilon}(p - P)\left(\delta p'' - \delta P'\right)|p''\rangle \\ &= i\langle P'|\frac{i}{\epsilon}(p'' - P')\left(\delta p'' - \delta P'\right)|p''\rangle \\ &= i\langle P'|\delta\left\{\frac{i}{2\epsilon}(p'' - P')^2\right\}|p''\rangle \\ &= \delta\left\{-\frac{1}{2\epsilon}(p'' - P')^2\right\}\langle P'|p''\rangle\,.\end{aligned}$$

Finalmente, integrando obtenemos:

$$\langle P'|p''\rangle = C\, e^{-\frac{1}{2\epsilon}(p''-P')^2}\,,$$

donde C es una constante de integración a determinar. Recordando que al tomar el límite $\epsilon \to 0$ se tiene $p \to P$, entonces se debe cumplir:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle P'|p''\rangle = \langle P'|P''\rangle = \delta\left(P' - P''\right)\,,$$

lo cual quiere decir:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle P'|p''\rangle \approx \lim_{\epsilon\to 0} C\, e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(P'-P''\right)^2} = \delta\left(P' - P''\right)\,.$$

Recordando que una definición de la función delta es:

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\, a}}e^{-x^2/a}\,,$$

entonces C debe fijarse como:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\,,$$

de tal forma que:

$$\langle P'|p''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\, e^{-\frac{1}{2\epsilon}(p''-P')^2}\,, \tag{49}$$

mientras que su conjugado Hermítico debe ser:

$$\langle p''^{*}|P'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\, e^{-\frac{1}{2\epsilon}(p''^{*}-P')^2}\,, \tag{50}$$

Partamos ahora de la relación de ortogonalidad:

$$\langle P'|P\rangle = \delta\left(P'-P\right)\,.$$

Insertando la relación de completez (??) y usando (??) y (??) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle P'|P\rangle &= \int d\mu(p)\,\langle P'|p\rangle\langle p^{*}|P\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\epsilon}\right)\int d\mu(p)\, e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(p-P'\right)^2} e^{-\frac{1}{2\epsilon}(p^{*}-P)^2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\epsilon}\right)\int d\mu(p)\, e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(p^2+p^{*\,2}-2pP'-2p^{*}P+P^2+P'^2\right)}\,.
\end{aligned}$$

Descomponemos ahora al número p en su parte real e imaginaria. Definiendo por simplicidad $x = \mathrm{R}e(p)$ y $y = \mathrm{I}m(p)$, entonces:

$$\begin{aligned}
p &= x+iy\,, \\
p^{*} &= x-iy\,,
\end{aligned}$$

y:

$$d\mu(p) = dx\,dy\,\mu(x,y)\,.$$

Sustituyendo en la integral obtenemos, en breve:

$$\begin{aligned}
\langle P'|P\rangle &= \left(\frac{1}{2\pi\epsilon}\right)\int d\mu(p)\, e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(p^2+p^{*\,2}-2pP'-2p^{*}P+P^2+P'^2\right)} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\epsilon}\right)\int dx\,dy\,\mu(x,y)\, e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(2x^2-2x\left(P'+P\right)\right)} e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(-2y^2+2iy\left(P-P'\right)\right)} e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(P^2+P'^2\right)}\,.
\end{aligned}$$

Viendo la integral sobre y únicamente, encontramos que hay un término divergente:

$$\int dy\; e^{y^2/\epsilon}\,, \tag{51}$$

de tal forma que, para hacer convergente la integral, se propone la siguiente medida:

$$\mu(p) = C_\mu \, e^{-y^2/\epsilon} \, ,$$

donde C_μ es una constante a determinar. Claramente, dicha proposición para la medida neutraliza el término divergente (**??**), de tal forma que obtenemos:

$$\langle P'|P\rangle \;=\; \left(\frac{C_\mu}{2\pi\epsilon}\right) \int dx\, dy \; e^{-\frac{1}{\epsilon}\left(x^2 - x\left(P'+P\right)\right)} e^{-\frac{i}{\epsilon} y\left(P-P'\right)} e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(P^2+P'^2\right)} \, .$$

La integral sobre y puede ser llevada a cabo, dando una función Delta:

$$\int dy \; e^{-\frac{i}{\epsilon} y\left(P-P'\right)} = (2\pi\epsilon)\; \delta\left(P-P'\right) \, .$$

Sustituyendo en el resto de la integral:

$$\begin{aligned}
\langle P'|P\rangle &= C_\mu \int dx \; e^{-\frac{1}{\epsilon}\left(x^2 - x\left(P'+P\right)\right)} e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(P^2+P'^2\right)} \delta\left(P-P'\right) \\
&= C_\mu \int dx \; e^{-\frac{1}{\epsilon}\left(x^2 - 2xP + P^2\right)} \delta\left(P-P'\right) \\
&= C_\mu \int dx \; e^{-\frac{1}{\epsilon}(x-P)^2} \delta\left(P-P'\right) \\
&= C_\mu \sqrt{\pi\epsilon}\; \delta\left(P-P'\right) \, ,
\end{aligned}$$

de tal forma que debemos fijar:

$$C_\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \, ,$$

y obtenemos finalmente:

$$\mu(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \, e^{-y^2/\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \, e^{-\mathrm{Im}(p)^2/\epsilon} \, ,$$

o, en términos de p y p^*:

$$\mu(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \, e^{(p-p^*)^2/4\epsilon} \, . \tag{52}$$

Teniendo en cuenta la relación entre operadores:

$$\left(p - p^\dagger\right)^2 = -4\epsilon^2 q^2 \, ,$$

que se obtiene a partir de (**??**), podemos ver que la medida (**??**) es en realidad la medida (**??**) escrita en término de p y $p^\dagger$.

6. Principio de Acción de Cuántico y el Propagador.

Planteamos ahora el problema en la representación de Heisenberg, de tal forma que escribimos las relaciones (??) y (??) como:

$$\begin{aligned} q(t)|q',t\rangle &= q'|q',t\rangle\,, \\ P(t)|P',t\rangle &= P'|P',t\rangle\,, \\ p(t)|p',t\rangle &= p'|p',t\rangle\,, \end{aligned} \tag{53}$$

y:

$$\begin{aligned} \langle q',t|q(t) &= q'\langle q',t|\,, \\ \langle P',t|P(t) &= P'\langle P',t|\,, \\ \langle p'^{*},t|p^{\dagger}(t) &= p'^{*}\langle p'^{*},t|\,. \end{aligned} \tag{54}$$

Apliquemos ahora el principio de acción de Schwinger para calcular el propagador $\langle q'',t|q',0\rangle$. Deseamos partir del Hamiltoniano H_M, de tal forma que nuestro cálculo se desarrolle en términos del conjunto no-Hermítico $\{q,p\}$. Así, por el principio de acción cuántico:

$$\delta\langle q'',t|q',0\rangle = i\langle q'',t|p(t)\delta q'' - p\,\delta q' - H_M\delta t|q',0\rangle\,, \tag{55}$$

donde denotaremos por simplicidad $q(t=0)=0$ y $p(t=0)=p$. Para poder aplicar las relaciones (??) y (??) y realizar el cálculo del propagador, debemos entonces expresar a $p(t)$, p y H_M en términos de $q(t)$ y q. Recordando:

$$H_M = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(1-\epsilon^2)q^2 + \frac{i\epsilon}{2}\{p,q\}\,.$$

Entonces, las ecuaciones de Heisenberg para q y p, siguiendo $\dot{\mathcal{O}} = -i\,[\mathcal{O},\mathcal{H}_M]$, son:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= p(t) + i\epsilon q(t)\,, \\ \dot{p}(t) &= -(1-\epsilon^2)q(t) - i\epsilon p(t)\,. \end{aligned} \tag{56}$$

Desacoplando la ecuación para $q(t)$ obtenemos:

$$\ddot{q}(t) = -q(t)\,,$$

con solución general:

$$q(t) = A\,\cos(t) + B\,\sin(t)\,, \tag{57}$$

mientras que para $p(t)$ se obtiene:

$$p(t) = (B - i\epsilon A)\,\cos(t) + (-i\epsilon B - A)\,\sin(t)\,. \tag{58}$$

Fijando las condiciones iniciales $q(t=0) \equiv q$ y finales $q(t)$ resolvemos para A y B, obteniendo:

$$A = q\,, \qquad B = \frac{1}{\sin(t)}\left(q(t) - q\cos(t)\right)\,, \tag{59}$$

de tal forma que $p(t)$ y p se escriben, después de un pequeño cálculo, como:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\sin(t)}\left(-(i\epsilon\,\sin(t) + \cos(t))q + q(t)\right)\,, & (60)\\ p(t) &= \frac{1}{\sin(t)}(-q + (-i\epsilon\,\sin(t) + \cos(t))q(t))\,, & (61)\end{aligned}$$

Ahora, usando (**??**) y (**??**) podemos escribir el Hamiltoniano H_M en términos de q y $q(t)$. Sin embargo, como dicho Hamiltoniano está compuesto por términos cuadráticos, desearemos colocar el operador $q(t)$ siempre a la izquierda del operador q para que cada operador pueda actuar directamente sobre su bra o ket correspondiente. Para hacer esto, necesitamos conocer el conmutador entre ambos operadores: $[q, q(t)]$. Dicho conmutador se obtiene fácilmente usando (**??**) y su relación de conmutación con q:

$$\begin{aligned} [q,p] &= \left[q, \frac{1}{\sin(t)}\left(-(i\epsilon\,\sin(t) + \cos(t))q + q(t)\right)\right]\\ &= \frac{1}{\sin(t)}\,[q, q(t)] = i\,,\end{aligned}$$

es decir:

$$[q, q(t)] = i\,\sin(t)\,, \tag{62}$$

de tal forma que, en breve, H_M se escribe como:

$$H_M = \frac{1}{2\,\sin^2(t)}\left(q^2 + q^2(t) - 2\,\cos(t)q(t)q\right) - \frac{i}{2}\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,. \tag{63}$$

De esta forma, haciendo actuar los operadores sobre los bras y kets correspondientes según (**??**) y (**??**):

$$q|q'', 0\rangle = q''|q'', 0\rangle\,, \qquad \langle q', t|q(t) = \langle q', t|q'\,,$$

obtenemos finalmente:

$$\delta\langle q',t|q'',0\rangle = i\langle q',t|\Bigg\{\left\{\frac{1}{\sin(t)}\,(\cos(t)q'-q'')-i\epsilon q'\right\}\delta q'$$
$$+\left\{\frac{1}{\sin(t)}(\cos(t)q''-q')+i\epsilon q''\right\}\delta q''$$
$$-\left\{\frac{1}{2\,\sin^2(t)}\left(q^2+q^2(t)-2\,\cos(t)q(t)q\right)-\frac{i}{2}\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right\}\delta t\Bigg\}|q'',0\rangle$$
$$= i\langle q'',t|\delta\Bigg\{\frac{1}{2\sin(t)}\left((q'^2+q''^2)\cos(t)-2q'q''\right)-\frac{i\epsilon}{2}(q'^2-q''^2)$$
$$-i\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}\right)\Bigg\}|q'',0\rangle\,, \tag{64}$$

donde se usó:

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}\right)=\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,.$$

Integrando (**??**) obtenemos finalmente:

$$\langle q',t|q'',0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,i\sin(t)}}\exp\left\{\frac{i}{2\,\sin(t)}\left\{(q'^2+q''^2)\cos(t)-2q'q''\right\}\right\}\exp\left\{\frac{\epsilon}{2}(q'^2-q''^2)\right\}\,. \tag{65}$$

Deseamos ahora calcular, usando el mismo procedimiento, la cantidad $\langle p'^*,t|p'',0\rangle$. Usando el principio de acción cuántico calculamos primero:

$$\delta\langle p'^*,t|p'',0\rangle = \langle p'^*,t|\left\{-q(t)\delta p'^*+q\delta p''-H_M\delta t\right\}|p'',0\rangle\,, \tag{66}$$

donde, recordamos:

$$p|p'',0\rangle = p''|p'',0\rangle\,,\qquad \langle p'^*,t|p^\dagger(t)=\langle p'^*,t|p'^*\,. \tag{67}$$

De nuevo, para calcular (**??**) es entonces necesario expresar a q, $q(t)$ y H_M en términos de p y $p^\dagger(t)$. Recordando la última de las relaciones (**??**), válida para todo tiempo:

$$p^\dagger = p+2i\epsilon q\,,$$

entonces, a partir de (**??**) y (**??**) obtenemos la solución general para $p^\dagger$:

$$p^\dagger(t)=(B+i\epsilon A)\cos(t)+(i\epsilon B-A)\sin(t)\,. \tag{68}$$

fijando las condiciones iniciales y finales $p(t=0)=p$ y $p^\dagger(t)$ resolvemos para A y B, obteniendo:

$$A=\frac{1}{((\epsilon^2+1)\sin(t)-2i\epsilon\cos(t))}\left((\cos(t)+i\epsilon\sin(t))\,p-p^\dagger(t)\right)\,, \tag{69}$$

$$B = \frac{1}{((\epsilon^2+1)\sin(t) - 2i\epsilon\cos(t))} \big((\sin(t) - i\epsilon\cos(t))\, p - i\epsilon p^\dagger(t)\big)\ . \qquad (70)$$

de tal forma que q y $q(t)$ se escriben, después de un pequeño cálculo, como:

$$q = \frac{1}{((\epsilon^2+1)\ \sin(t) - 2i\epsilon\ \cos(t))} \big((\cos(t) + i\epsilon\ \sin(t))p - p^\dagger(t)\big)\ , \qquad (71)$$

$$q(t) = \frac{1}{((\epsilon^2+1)\ \sin(t) - 2i\epsilon\ \cos(t))} \big(p - (\cos(t) + i\epsilon\ \sin(t))\, p^\dagger(t)\big)\ . \qquad (72)$$

De nuevo, para calcular H_M en términos de p y $p^\dagger(t)$ y colocar siempre $p^\dagger$ a la izquierda de p para que cada operador pueda actuar directamente sobre su bra o ket correspondiente, es necesario calcular el conmutador entre ambos operadores: $\big[p, p^\dagger(t)\big]$. Esto se consigue fácilmente a partir de la relación de conmutación entre q y p y utilizando (**??**):

$$[p, q] = -\frac{1}{((\epsilon^2+1)\sin(t) - 2i\epsilon\cos(t))} \big[p, p^\dagger(t)\big] = -i\,,$$

es decir:

$$\big[p, p^\dagger(t)\big] = i\,\big(\big(\epsilon^2+1\big)\sin(t) - 2i\epsilon\cos(t)\big)\ . \qquad (73)$$

Con estos resultados, podemos llegar a la expresión deseada para H_M:

$$\begin{aligned} H_M &= \frac{1}{2\,((\epsilon^2+1)\ \sin(t) - 2i\epsilon\ \cos(t))^2} \Big\{(1-\epsilon^2)(p^2 + p^{\dagger\,2}(t)) \\ &\quad -2\,\big((\epsilon^2+1)\ \cos(t) + 2i\epsilon\ \sin(t)\big)\, p^\dagger(t) p\Big\} - \frac{i}{2}\frac{\big((\epsilon^2+1)\ \cos(t) + 2i\epsilon\ \sin(t)\big)}{((\epsilon^2+1)\ \sin(t) - 2i\epsilon\ \cos(t))}\,, \end{aligned} \qquad (74)$$

de tal forma que, haciendo actuar los operadores p y $p^\dagger(t)$ según (**??**), (**??**) se escribe explícitamente como:

$$\begin{aligned} &\delta\langle p'^*, t|p'', 0\rangle = i\langle p'^*, t|\Bigg\{\frac{1}{((\epsilon^2+1)\sin(t) - 2i\epsilon\ \cos(t))}\Big\{((\cos(t) + i\epsilon\sin(t))p'^* - p'')\,\delta p'^* \\ &+ ((\cos(t) + i\epsilon\ \sin(t))p'' - p'^*)\,\delta p''\Big\} \\ &-\Bigg(\frac{1}{2\,((\epsilon^2+1)\ \sin(t) - 2i\epsilon\ \cos(t))^2}\Big\{(1-\epsilon^2)(p''^2 + p'^{*\,2}) - 2((\epsilon^2+1)\ \cos(t) \\ &\quad +2i\epsilon\ \sin(t))p'^* p''\Big\} - \frac{i}{2}\frac{\big((\epsilon^2+1)\ \cos(t) + 2i\epsilon\ \sin(t)\big)}{((\epsilon^2+1)\sin(t) + 2i\epsilon\ \cos(t))}\Bigg)\delta t\Bigg\}|p'', 0\rangle \\ &= \langle p'^*, t|\delta\Bigg\{\frac{1}{2\,((\epsilon^2+1)\ \sin(t) - 2i\epsilon\ \cos(t))}\Big\{(\cos(t) + i\epsilon\ \sin(t))\,(p'^{*\,2} + p''^2) \\ &\quad -2p''p'^*\Big\} - i\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(\epsilon^2+1)\sin(t) - 2i\epsilon\ \cos(t)}}\right)\Bigg\}|p'', 0\rangle\,, \end{aligned}$$

e integrando obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned}\langle p'^{*}, t | p'', 0\rangle &= \frac{C}{\sqrt{(\epsilon^2+1)\,\sin(t) - 2i\epsilon\,\cos(t)}} \\ &\quad \exp\left\{\frac{i}{2}\frac{\big((\cos(t)+i\epsilon\,\sin(t))(p'^{*\,2}+p''^{2}) - 2p''p'^{*}\big)}{((\epsilon^2+1)\,\sin(t) - 2i\epsilon\,\cos(t))}\right\},\end{aligned} \tag{75}$$

donde C es una constante de normalización. En el límite $t \to 0$ tenemos:

$$\langle p'^{*}, t \to 0 | p'', 0\rangle = C\sqrt{-\frac{1}{2i\epsilon}}\,\exp\left\{-\frac{1}{4\epsilon}(p''-p'^{*})^2\right\}.$$

Ahora, recordamos que en el límite $\epsilon \to 0$ se debe cumplir que las cantidades complejas p se vuelven reales:

$$\lim_{\epsilon\to 0} p^{*} = p\,,$$

dado que, por (**??**), en ese límite p es igual a P, una cantidad que siempre es real. Así, en el límite doble $t \to 0$ y $\epsilon \to 0$ se debe cumplir:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle p'^{*}, t \to 0 | p'', 0\rangle = \delta\left(p' - p''\right)\,,$$

es decir:

$$\lim_{\epsilon\to 0} C\sqrt{-\frac{1}{2i\epsilon}}\,\exp\left\{-\frac{1}{4\epsilon}(p''-p')^2\right\} = \delta\left(p'-p''\right)\,.$$

Así, recordando que una definición de la función delta es:

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\,e^{-x^2/a}\,,$$

fijamos la constante de integración C como:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\,,$$

y el propagador se escribe finalmente como:

$$\begin{aligned}\langle p'^{*}, t | p'', 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\frac{1}{\sqrt{(\epsilon^2+1)\,\sin(t) - 2i\epsilon\,\cos(t)}} \\ &\quad \exp\left\{\frac{i}{2}\frac{\big((\cos(t)+i\epsilon\,\sin(t))(p'^{*\,2}+p''^{2}) - 2p''p'^{*}\big)}{((\epsilon^2+1)\,\sin(t) - 2i\epsilon\,\cos(t))}\right\}.\end{aligned} \tag{76}$$

Finalmente, hay una forma de relacionar el propagador $\langle p'^{*}, t_2 | p'', t_1\rangle$ con el propagador usual $\langle P', t_2 | P, t_1\rangle$. En efecto, basta aplicar la relación de completez para la base $|P, t\rangle$:

$$\int dP |P, t\rangle\langle P, t| = I\,,$$

y los elementos de (**??**):

$$\langle P'|p''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\, e^{-\frac{1}{2\epsilon}(p''-P')^2}\,.$$

Así:

$$\begin{aligned}
\langle p'^*, t_2|p'', t_1\rangle &= \int dP\, dP'\, \langle p'^*, t_2|P', t_2\rangle\langle P', t_2|P, t_1\rangle\langle P, t_1|p'', t_1\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon}\int dP\, dP'\, e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left\{\left(p'^*-P'\right)^2+\left(p''-P\right)^2\right\}}\langle P', t_2|P, t_1\rangle\,,
\end{aligned} \tag{77}$$

de tal forma que la dinámica descrita en términos de la base usual $|P, t\rangle$ es equivalente a la dinámica descrita en términos de la base $|p, t\rangle$, relacionada a operadores no-Hermíticos.

Como un breve sumario de esta sección, podemos decir que hemos introducido el uso de operadores no-Hermíticos al estudio del oscilador armónico simple. Estos operadores no-Hermíticos pueden ser relacionados a operadores Hermíticos usuales por medio de una transformación canónica compleja a nivel clásico, o de una transformación no-unitaria a nivel cuántico. Dicha transformación unitaria modifica las relaciones de completez de la base de eigenfunciones de los operadores no-Hermíticos y el producto interno del sistema. De manera particular, dicha modificación al producto interno permite que las eigenfunciones del sistema tengan normas bien definidas. Finalmente, usando el principio de acción de Schwinger se puede describir la dinámica del sistema en términos de la base de eigenfunciones no-Hermíticas y se demostró que dicha descripción es equivalente a la descripción usual en términos de eigenfunciones comunes.

Capítulo 6
Cuantización del Oscilador de Pais-Uhlenbeck

1. Introducción

En este capítulo analizaremos uno de los sistemas con derivadas superiores más conocidos y estudiados: el oscilador de Pais-Uhlenbeck. Primero plantearemos el problema desde una perspectiva clásica, destacando sus propiedades principales y soluciones, para después enfrentarnos con la cuantización del sistema. Como se ha comentado antes, la cuantización de sistemas de orden superior es problemática por la aparición de estados con norma negativa, conocidos como *fantasmas*. Más en detalle, aplicaremos el procedimiento de Ostrogradsky al sistema mencionado definiendo nuevas variables como es usual, y de forma paralela resolveremos el sistema en término de coordenadas normales de vibración. Por medio de una transformación canónica compleja relacionaremos las coordenadas de Ostrogradsky con las coordenadas normales. Se procederá en seguida a la cuantización del sistema siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo anterior. Se fijarán las condiciones de realidad del sistema, dotando de Hermiticidad a un conjunto de operadores (las coordenadas normales) mientras se sacrifica aquella del otro conjunto de operadores (coordenadas de Ostrogradsky). Finalmente se buscará la función de medida del producto interno, la cual solucionará problemas relacionados con la aparición de estados fantasmas en el sistema de orden superior.

2. El Sistema de Dos Osciladores Acoplados.

Consideremos a nivel clásico el problema de dos masas m y M, y dos resortes con constantes k y K, dispuestos como se indica en la figura (1) y sujetas a un potencial gravitacional constante. Siguiendo la misma figura, hacemos las siguientes definiciones:

- *Masa superior*: Masa M; distancia y desde el techo hasta la masa.
- *Masa inferior*: Masa m; distancia x desde el techo hasta la masa.
- *Resorte superior*: Constante elástica K; longitud en reposo L.
- *Resorte inferior*: Constante elástica k; longitud en reposo l.

La función Lagrangiana para dicho sistema es:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + M\,m\,y + m\,g\,x - \frac{1}{2}K\,(y-L)^2 - \frac{1}{2}k\,(x-y-l)^2\ , \quad (1)$$

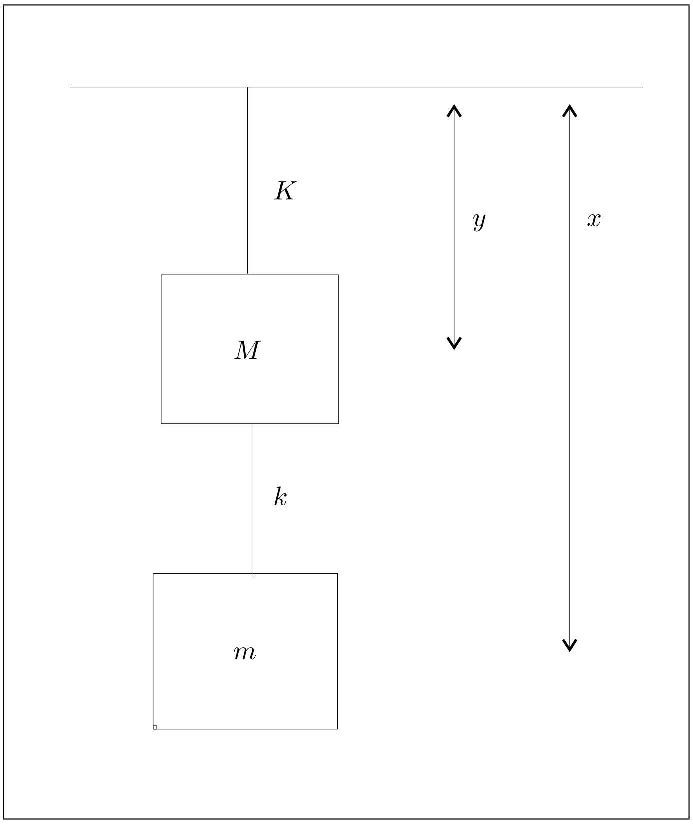

Figura 1: Oscilador de Pais-Uhlenbeck.

lo que resulta en las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} M\,\ddot{y} &= M\,g - K\,(y-L) + k\,(x-y-l)\ , \\ m\,\ddot{x} &= m\,g - k\,(x-y-l)\ . \end{aligned}$$

La configuración de equilibrio se da en:

$$\begin{aligned} y_0 &= L + \frac{(M+m)\,,g}{K}\,, \\ x_0 &= l + L + \frac{m\,g}{k} + \frac{(M+m)\ g}{K}\ . \end{aligned}$$

Siguiendo la manera habitual de describir el movimiento de los resortes desde la configuración de equilibrio, definimos las nuevas coordenadas X y Y a partir de:

$$y = y_0 + Y\,, \qquad x = x_0 + X\,,$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned} y &= L + \frac{(M+m)\,g}{K} + Y \\ x &= l + L + \frac{m\,g}{k} + \frac{(M+m)\,g}{K} + X\,. \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento obtenemos:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{X} &= -k(X-Y)\,, \\ M\,\ddot{Y} &= -K\,Y + k\,(X-Y)\ . \end{aligned}$$

A partir de la segunda de las dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$X = \frac{M}{k}\,\dot{Y} + \frac{(K+k)}{k}\,Y\,,$$

de tal forma que sustituyendo en la primera obtenemos:

$$mM\,Y^{(4)} + [\,m\,(K+k) + k\,M\,]\;\ddot{Y} + k\,K\,Y = 0\,, \tag{2}$$

la cual podemos escribir como:

$$aY^{(4)} + b\ddot{Y} + cY = 0\,, \tag{3}$$

donde:

$$a = mM\,, \qquad b = mK + k\,(M+m)\ , \qquad c = kK\,, \tag{4}$$

con la propiedad de que:

$$b^2 - 4ac = (\,mK + k\,(m-M))^2 + 2m^2Kk + 2k^2Mm + k^2m^2 > 0\,.$$

Análogamente, podemos llegar a la misma ecuación para X:

$$MmX^{(4)} + (mK + k\,(m+M))\,\ddot{X} - kKX = 0\,, \tag{5}$$

o, en términos de a, b y c:

$$aX^{(4)} + b\ddot{X} + cX = 0\,. \tag{6}$$

En las variables X y Y, la Lagrangiana resultante es:

$$L = \frac{1}{2}\,M\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}\,m\dot{X}^2 - \frac{1}{2}\,k\,(\,X-Y)^2 - \frac{1}{2}\,KY^2 + C\,, \tag{7}$$

donde C es una constante de integración definida por:

$$C \equiv MgL + mg\,(l+L) + \frac{g^2}{2k}\,m^2 + \frac{g^2}{2K}\left(3M^2 + 2Mm - m^2\right)\ .$$

Desde este punto en adelante fijaremos $C = 0$, por simplicidad. Definiendo ahora los momentos:

$$P_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m\dot{X}\,, \qquad P_Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = M\dot{Y}\,, \tag{8}$$

la función Hamiltoniana correspondiente es:

$$H = \frac{1}{2m} P_X^2 + \frac{1}{2M} P_Y^2 + \frac{1}{2}\, k\,(\,X - Y)^2 + \frac{1}{2}\, KY^2\,. \tag{9}$$

3. Solución General

El sistema puede ser resuelto exactamente. Proponemos como solución para Y(t):

$$Y(t) = e^{i\omega t}\,.$$

Sustituyendo en (2) obtenemos la ecuación:

$$mM\omega^4 - (mK + (m+M)k)\,\omega^2 + kK = 0\,, \tag{10}$$

o, abreviadamente:

$$a\omega^4 - b\omega^2 + c = 0\,, \tag{11}$$

con solución:

$$\left(\omega^2\right)_\pm = \frac{1}{2a}\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\,.$$

Definimos las frecuencias normales:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2a}\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\,, \qquad \omega_2^2 = \frac{1}{2a}\left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\,,$$

o, explícitamente:

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \frac{(kM + mK + mk) + \sqrt{(kM + mK + mk)^2 - 4kKmM}}{2mM}\,, \\
\omega_2^2 &= \frac{(kM + mK + mk) - \sqrt{(kM + mK + mk)^2 - 4kKmM}}{2mM}\,,
\end{aligned}$$

donde $\omega_2^2 > 0$. La solución general al sistema está entonces dada por:

$$Y(t) = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t} + C_3 e^{i\omega_2 t} + C_4 e^{-i\omega_2 t}\,, \tag{12}$$

con cuatro constantes de integración C_i correspondientes a las condiciones iniciales:

$$Y(0),\ \dot{Y}(0),\ X(0),\ \dot{X}(0)\,.$$

Igualmente, de:

$$X = \frac{1}{k}\left((k+K)Y + M\ddot{Y}\right) \,,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{k}\left((k+K) - M\omega_1^2\right)\left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\right) \\ &+\frac{1}{k}\left((k+K) - M\omega_2^2\right)\left(C_3 e^{i\omega_2 t} + C_4 e^{-i\omega_2 t}\right) \,. \end{aligned} \tag{13}$$

Como información útil, mencionamos que las frecuencias normales satisfacen:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^2 &= \frac{b}{a} = \frac{m\,(K+k) + kM}{mM} \,, \\ \omega_1^2\omega_2^2 &= \frac{c}{a} = \frac{kK}{mM} \,. \end{aligned} \tag{14}$$

4. Diagonalización del Sistema

Partimos de la formulación estándar:

$$L = \frac{1}{2}M\,\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{X}^2 - \frac{1}{2}k\,(X-Y)^2 - \frac{1}{2}KY^2$$

o, escribiendo en forma matricial:

$$L = \frac{1}{2}\dot{Z}\mathbf{T}\dot{Z} - \frac{1}{2}Z\mathbf{V}Z \,,$$

con:

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},\; \mathbf{T} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix},\; \mathbf{V} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k+K \end{bmatrix} .$$

Asimismo, en forma matricial las ecuaciones de movimiento se escriben:

$$\mathbf{T}\ddot{Z} + \mathbf{V}Z = 0 \,. \tag{15}$$

Ahora, observamos que a partir de las soluciones para $X(t)$ y $Y(t)$, (13) y (12), el vector Z se puede escribir como:

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} \frac{1}{k}\left(k+K-M\omega_1^2\right) \\ 1 \end{bmatrix}\left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\right) \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{k}\left(k+K-M\omega_2^2\right) \\ 1 \end{bmatrix}\left(C_3 e^{i\omega_2 t} + C_4 e^{-i\omega_2 t}\right) \,, \end{aligned} \tag{16}$$

o, definiendo los vectores A_1 y A_2 como:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{k}\left(k+K-M\omega_1^2\right) \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{k}\left(k+K-M\omega_2^2\right) \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

entonces:

$$Z = A_1\left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\right) + A_2\left(C_3 e^{i\omega_2 t} + C_4 e^{-i\omega_2 t}\right)$$

Enfoquémonos en los vectores A_1 y A_2. Se puede demostrar por sustitución que dichos vectores cumplen:

$$\left(\mathbf{V}\omega_i^2 - \mathbf{T}\right) A_i = 0\,.$$

Claramente dicha relación no se alterará si multiplicamos cada vector por un factor cualquiera. Definimos entonces los vectores U_1 y U_2 como:

$$U_1 = \alpha_1\left(k - \omega_1^2 m\right) A_1\,, \qquad U_2 = \alpha_2\left(k - \omega_2^2 m\right) A_2\,, \tag{18}$$

que se escriben explícitamente después de un pequeño cálculo como:

$$U_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} k \\ \left(k - \omega_1^2 m\right) \end{bmatrix}\,, \qquad U_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} k \\ \left(k - \omega_2^2 m\right) \end{bmatrix}\,, \tag{19}$$

y donde α_1 y α_2 son constantes de normalización que se fijan de:

$$U_i^T \mathbf{T} U_j = \delta_{ij}$$

$$\alpha_i^2 \begin{bmatrix} k\,, & \left(k - \omega_i^2 m\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \left(k - \omega_i^2 m\right) \end{bmatrix} = 1$$

que nos lleva a:

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{k^2 m + \left(k - \omega_i^2 m\right)^2 M}}\,,$$

de tal forma que:

$$U_i = \begin{bmatrix} \frac{k}{\sqrt{k^2 m + \left(k - \omega_i^2 m\right)^2 M}} \\ \frac{\left(k - \omega_i^2 m\right)}{\sqrt{k^2 m + \left(k - \omega_i^2 m\right)^2 M}} \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} \frac{k}{\sqrt{k^2 m + \left(k - \omega_1^2 m\right)^2 M}} \\ \frac{\left(k - \omega_1^2 m\right)}{\sqrt{k^2 m + \left(k - \omega_1^2 m\right)^2 M}} \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \frac{k}{\sqrt{k^2 m + \left(k - \omega_2^2 m\right)^2 M}} \\ \frac{\left(k - \omega_2^2 m\right)}{\sqrt{k^2 m + \left(k - \omega_2^2 m\right)^2 M}} \end{bmatrix}.$$

En particular, usando (14) es posible expresar a cada α_i individual como:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{mM\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\left(m\omega_1^2 - k\right)}}\,, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{mM\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\left(k - m\omega_2^2\right)}}\,. \end{aligned}$$

Verifiquemos ahora la ortogonalidad:

$$\begin{aligned} U_1^T \mathbf{T} U_2 &= \alpha_1\alpha_2 \begin{bmatrix} k & \left(k - \omega_1^2 m\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \left(k - \omega_2^2 m\right) \end{bmatrix} \\ &= \alpha_1\alpha_2 \left(k^2 m + \left(k - \omega_1^2 m\right) M \left(k - \omega_2^2 m\right)\right) \\ &= \alpha_1\alpha_2 \left(k^2 m + k^2 M - Mkm\left(\omega_2^2 + \omega_1^2\right) + Mm^2\omega_1^2\omega_2^2\right) \end{aligned}$$

que debe ser cero en virtud de (14). Sustituyendo obtenemos finalmente:

$$U_1^T \mathbf{T} U_2 = \alpha_1\alpha_2 \left(k^2 m + k^2 M - k\,(m\,(K+k) + kM) + mkK\right) = 0\,.$$

A partir de los eigenvectores U_i construimos la matriz cuadrada:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{Mm\,(\omega_1^2 - \omega_2^2)}} \left[\begin{array}{cc} \frac{k}{\sqrt{\omega_1^2 m - k}} & \frac{k}{\sqrt{k - m\omega_2^2}} \\ -\sqrt{\omega_1^2 m - k} & \sqrt{k - m\omega_2^2} \end{array} \right]$$

donde, por construcción:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} = I\,,$$

y también que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} = V_D = \left[\begin{array}{cc} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{array} \right].$$

5. Coordenadas Normales y Cuantización.

Ahora definimos las coordenadas normales del sistema. Empezando por:

$$L = \frac{1}{2}\dot{Z}^T \mathbf{T} \dot{Z} - \frac{1}{2} Z^T \mathbf{V} Z$$

definimos las coordenadas normales ξ como:

$$Z = \mathbf{A}\xi, \quad \xi = \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right]$$

de tal manera que:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\xi}^T \left(\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A}\right)\,\dot{\xi} - \frac{1}{2}\xi^T \left(\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A}\right)\xi$$

De resultados previos tenemos que:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\xi}^T \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \dot{\xi} - \frac{1}{2}\xi^T \left[\begin{array}{cc} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{array} \right] \xi\,,$$

es decir:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\omega_1 \xi_1^2 + \omega_2^2 \xi_2^2\right)\,.$$

Definimos los momentos canónicos conjugados a las coordenadas ξ_i:

$$P_{\xi_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} = \dot{\xi}_1\,, \qquad P_{\xi_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} = \dot{\xi}_2\,,$$

con paréntesis de Poisson:

$$\left\{\xi_i, P_{\xi_j}\right\} = \delta_{i,j}\,,$$

y:

$$\{\xi_i, \xi_j\} = \left\{P_{\xi_i}, P_{\xi_j}\right\} = 0\,,$$

heredados de las relaciones de conmutación entre $\{X, Y, P_X, P_Y\}$ y las relaciones (14). La función Hamiltoniana del sistema, que denotaremos H_N, es:

$$H_N = \frac{1}{2}\left(P_{\xi_1}^2 + P_{\xi_2}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\omega_1^2\xi_1^2 + \omega_2^2\xi_2^2\right)\,. \tag{20}$$

La cuantización del sistema usando coordenadas normales es directa. Los paréntesis de Poisson se vuelven en las relaciones de conmutación entre operadores:

$$\left[\xi_i, P_{\xi_j}\right] = i\delta_{i,j}\,. \tag{21}$$

El espectro de energía es el de dos osciladores armónicos de frecuencia ω_1 y ω_2, de tal forma que:

$$E_{m,n} = \omega_1\left(m + \frac{1}{2}\right) + \omega_2\left(n + \frac{1}{2}\right)\,, \qquad m, n = 0, 1, \ldots \tag{22}$$

mientras que las eigenfunciones del operador Hamiltoniano H son:

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}(\xi_1, \xi_2) &= \psi_{m,\omega_1}(\xi_1)\,\psi_{n,\omega_2}(\xi_2) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\left(\omega_1\xi_1^2 + \omega_2\xi_2^2\right)} H_m\left(\sqrt{\omega_1}\xi_1\right) H_n\left(\sqrt{\omega_2}\xi_2\right)\,, \end{aligned} \tag{23}$$

donde $\psi_{k,\omega_i}(\xi_i)$ es la k-ésima eigenfunción correspondiente a un oscilador armónico de frecuencia ω_i escrito en coordenadas ξ_i y $H_k(\xi)$ es el k-ésimo polinomio de Hermite.

Para finalizar esta sección, consideraremos el caso particular $k = K = 1$, $m = M = 1$. Dicho caso será desarrollado más adelante, por lo que es conveniente escribir explícitamente en este punto las relaciones entre coordenadas $\{X, Y, P_X, P_Y\}$ y $\{\xi_1, \xi_2, P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\}$. En este caso tenemos:

$$a = 1\,, \qquad b = 3\,, \qquad c = 1\,,$$

y:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)\,, \qquad \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)\,.$$

La matriz de transformación $\mathbf{A}$ es:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2 - 1}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_2^2}} \\ -\sqrt{\omega_1^2 - 1} & \sqrt{1 - \omega_2^2} \end{bmatrix}\,,$$

de tal forma que:

$$X = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\,\xi_1+\frac{1}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\,\xi_2\right)\,, \tag{24}$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(-\sqrt{\omega_1^2-1}\,\xi_1+\sqrt{1-\omega_2^2}\,\xi_2\right)\,, \tag{25}$$

e inversamente:

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\sqrt{1-\omega_2^2}\,X-\frac{1}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\,Y\right)\,, \tag{26}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\sqrt{\omega_1^2-1}\,X+\frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\,Y\right)\,. \tag{27}$$

A partir de estas ecuaciones se pueden obtener las relaciones entre momentos tomando solo derivadas temporales y recordando que en este caso particular $P_X = \dot{X}$ y $P_Y = \dot{Y}$. Así:

$$P_X = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\,P_{\xi_1}+\frac{1}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\,P_{\xi_2}\right)\,, \tag{28}$$

$$P_Y = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(-\sqrt{\omega_1^2-1}\,P_{\xi_1}+\sqrt{1-\omega_2^2}\,P_{\xi_2}\right)\,, \tag{29}$$

y:

$$P_{\xi_1} = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\sqrt{1-\omega_2^2}\,P_X-\frac{1}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\,P_Y\right)\,, \tag{30}$$

$$P_{\xi_2} = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\sqrt{\omega_1^2-1}\,P_X+\frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\,P_Y\right)\,. \tag{31}$$

6. El Hamiltoniano de Mayor Orden.

Partamos ahora de la ecuación de movimiento desacoplada para la coordenada X, (6):

$$aX^{(4)} + b\ddot{X} + cX = 0\,,$$

Dicha ecuación de movimiento puede obtenerse de la función Lagrangiana de mayor orden:

$$L = -\frac{1}{2}a\,\ddot{X}^2 + \frac{1}{2}b\,\dot{X}^2 - \frac{1}{2}c\,X^2\,, \tag{32}$$

o, puesta de forma más explícita:

$$L = \frac{Mm}{2}\left(-\,\ddot{X}^2 + \left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)\,\dot{X}^2 - \omega_1^2\omega_2^2\,X^2\right)\,. \tag{33}$$

al utilizar la ecuación de Euler-Lagrange generalizada a Lagrangianas de segundo orden:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{X}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) + \frac{\partial L}{\partial X} = 0\,.$$

Usando la formulación Hamiltoniana de Ostrogradsky, las variables independientes serán X y $\dot{X}$, y los momentos canónicos conjugados correspondientes se definen como:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{X}} = b\dot{X} - \frac{d}{dt}\left(-a\ddot{X}\right) = b\dot{X} + a\,\dddot{X}\,, \\
p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{X}} = -a\ddot{X}\,,
\end{aligned}
$$

de donde podemos despejar la aceleración $\ddot{X}$:

$$\ddot{X} = -\frac{1}{a}p_1\,.$$

Definimos las función Hamiltoniana como:

$$
\begin{aligned}
H &= p\dot{X} + p_1\ddot{X} - L \\
&= p\dot{X} + p_1\ddot{X} + \frac{1}{2}a\,\ddot{X}^2 - \frac{1}{2}b\,\dot{X}^2 + \frac{1}{2}c\,X^2
\end{aligned}
$$

Eliminando $\ddot{X}$:

$$
\begin{aligned}
H &= p\dot{X} + p_1\left(-\frac{1}{a}p_1\right) + \frac{1}{2}a\,\left(-\frac{1}{a}p_1\right)^2 - \frac{1}{2}b\,\dot{X}^2 + \frac{1}{2}c\,X^2 \\
&= p\dot{X} - \frac{1}{2a}p_1^2 - \frac{1}{2}b\,\dot{X}^2 + \frac{1}{2}c\,X^2
\end{aligned}
$$

Introducimos ahora la notación:

$$X = x\,,\ \ p_1 = \Pi_z,\ \ p_0 = \Pi_x,\ \ \dot{X} = z,\ ,$$

en términos de la cual la Hamiltoniana se escribe como:

$$H_M = -\frac{1}{2a}\Pi_z^2 - \frac{1}{2}bz^2 + \frac{1}{2}c\,x^2 + \Pi_x z\,, \tag{34}$$

o de manera explícita:

$$H_M = -\frac{1}{2Mm}\Pi_z^2 - \frac{Mm}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)z^2 + \frac{Mm}{2}\omega_1^2\omega_2^2\,x^2 + \Pi_x z\,. \tag{35}$$

Así, las variables canónicas son ahora:

$$\{x,\ z,\ \Pi_x, \Pi_z\}$$

con paréntesis de Poisson estándar.

Obtengamos ahora las ecuaciones de movimiento a partir de nuestra Hamiltoniana. Las ecuaciones de Hamilton en este caso son:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \Pi_x} = z, \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial \Pi_z} = -\frac{1}{a}\Pi_z\,, \\
\dot{\Pi}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -cx, \qquad \dot{\Pi}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = bz - \Pi_x\,,
\end{aligned}
$$

es decir:

$$\dot{x} = z, \quad \dot{z} = -\frac{1}{a}\Pi_z, \quad \dot{\Pi}_x = -cx, \quad \dot{\Pi}_z = bz - \Pi_x \,.$$

De la ecuación para z tenemos:

$$\Pi_z = -a\,\dot{z} \Rightarrow \dot{\Pi}_z = -a\ddot{z}\,.$$

Sustituyendo en la ecuación para Π_z:

$$\dot{\Pi}_z = -a\ddot{z} = bz - \Pi_x \Rightarrow -az^{(3)} = b\dot{z} - \dot{\Pi}_x = b\dot{z} + cx\,,$$

donde hemos sustituido la ecuación para $\dot{\Pi}_x$. Así tenemos:

$$az^{(3)} + b\dot{z} + cx = 0\,.$$

o, sustituyendo la ecuación para x: $z = \dot{x}$:

$$ax^{(4)} + b\ddot{x} + cx = 0\,,$$

que es el resultado esperado.

7. Relación Entre Ambas Formulaciones.

En este punto contamos con dos distintos planteamientos del mismo problema: uno en términos de coordenadas normales $\{\xi_1, \xi_2, P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\}$, y otro en términos de coordenadas de Ostrogradsky $\{x, z, \Pi_x, \Pi_z\}$. Más aun, sabemos que ambos planteamientos deben ser equivalentes. De este punto en adelante buscaremos explícitamente cuál es esa relación entre ambos conjuntos de coordenadas. Como punto de partida, estudiaremos primero la relación entre H_M:

$$H_M = -\frac{1}{2a}\Pi_z^2 - \frac{1}{2}bz^2 + \frac{1}{2}c\,x^2 + \Pi_x z\,,$$

$$a = Mm, \quad b = (M+m)k + mK, \quad c = Kk\,, \tag{36}$$

y la función Hamiltoniana estándar del sistema (9) escrita en término de las variables provisionales $\{x, y, p_x, p_y\}$:

$$H = \frac{p_y^2}{2M} + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}Ky^2 + \frac{1}{2}k\,(x-y)^2\,,$$

es decir, buscaremos la relación entre el conjunto $\{x, z, \Pi_x, \Pi_z\}$ y el conjunto $\{x, y, p_x, p_y\}$. Supondremos que la coordenada x retiene su significado.

7.1. Primera Transformación.

Buscamos alguna motivación en las ecuaciones de movimiento. De la Hamiltoniana H_M tenemos:

$$\dot{x} = z, \quad \dot{z} = -\frac{1}{a}\Pi_z, \;\; \dot{\Pi}_x = -cx, \;\; \dot{\Pi}_z = bz - \Pi_x \, ,$$

mientras que de la Hamiltoniana estándar tenemos:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \;\; \dot{y} = \frac{p_y}{M}, \;\; \dot{p}_x = -k\,(x-y)\,, \;\; \dot{p}_y = -\,(K+k)\,y - kx\,.$$

Dado que x preserva su significado, entonces $\dot{x} = \dot{x}$ en ambas formulaciones y podemos identificar

$$z = \frac{p_x}{m}\,.$$

Tomando derivadas:

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} = -\frac{k}{m}\,(x-y) = \dot{z} = -\frac{1}{a}\Pi_z\,,$$

de donde identificamos:

$$\Pi_z = \frac{ak}{m}\,(x-y)\;.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
\Pi_x &= bz - \dot{\Pi}_z \\
\Pi_x &= bz - \frac{ak}{m}\,(\dot{x}-\dot{y}) \\
\Pi_x &= b\frac{p_x}{m} - \frac{ak}{m}\left(\frac{p_x}{m} - \frac{p_y}{M}\right) \\
\Pi_x &= b\frac{p_x}{m} - \frac{ak}{m}\frac{p_x}{m} + \frac{ak}{m}\frac{p_y}{M} \\
\Pi_x &= (Mk + mk + mK - Mk)\,\frac{p_x}{m} + kp_y \\
\Pi_x &= (k+K)\,p_x + kp_y\,.
\end{aligned}$$

Esto lleva a las transformaciones:

$$x = x, \; z = \frac{p_x}{m}, \; \Pi_x = (k+K)\,p_x + kp_y, \;\; \Pi_z = \frac{ak}{m}\,(x-y)\,.$$

Sustituyendo en H_M obtenemos:

$$H_M = -\frac{1}{2}\frac{Mk^2}{m}\,(x-y)^2 + \frac{1}{2}kK\,x^2 + \left[\frac{(k+K)}{m} - \frac{1}{2}\frac{b}{m^2}\right]p_x^2 + \frac{k}{m}p_y p_x\,.$$

Pero, viendo que:

$$\begin{aligned}
\frac{(k+K)}{m} - \frac{b}{2m^2} &= \frac{2m\,(k+K) - Mk - m\,(k+K)}{2m^2} \\
&= \frac{m\,(k+K) - MK}{2m^2}\,,
\end{aligned}$$

escribimos H_M como:

$$H_M(x,y,\ p_x,\ p_y) = -\frac{1}{2}\frac{M}{m}k^2\,(x-y)^2+\frac{1}{2}kK\ x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{m\,(k+K)-kM}{m^2}\right)p_x^2+\frac{k}{m}p_yp_x\,.$$

Tomemos ahora la acción Hamiltoniana:

$$S=\int dt\,(\Pi_x\dot{x}+\Pi_z\dot{z}-H_M(x,z,\Pi_x,\Pi_z))\ ,$$

que nos lleva a las ecuaciones correctas, como se verificó anteriormente. Si se integra por partes el segundo sumando con derivada temporal ésta acción es:

$$S=\int dt\,\Big(\Pi_x\dot{x}-\dot{\Pi}_z z-H_M(x,z,\Pi_x,\Pi_z)\Big)\ .$$

Sustituimos:

$$\Pi_x=(k+K)\,p_x-k\,p_y\,,\qquad \dot{\Pi}_z=\frac{ak}{m}\,(\dot{x}-\dot{y})\ ,$$

de tal forma que obtenemos, arreglando términos:

$$S=\int dt\left(\left((k+K)\ -k\frac{M}{m}\right)\dot{x}p_x+\frac{M}{m}k\dot{y}p_x+kp_y\dot{x}-H_M(x,y,p_x,p_y)\right)$$

A continuación eliminamos los momentos en favor de las velocidades con el propósito de tener una formulación en términos de $x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}$, la cual esperamos relacionar con la Lagrangiana original del sistema. Para hacerlo, debemos exigir que la acción sea extrema: $\delta S=0$. Así:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int dt\left\{\left((k+K)-\frac{kM}{m}\right)(\delta\dot{x}p_x+\dot{x}\delta p_x)+\frac{kM}{m}(\delta\dot{y}p_x+\dot{y}\delta p_x)+k\,(\delta\dot{x}p_y+\dot{x}\delta p_y)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{\partial H_M}{\partial x}\delta x-\frac{\partial H_M}{\partial y}\delta y-\frac{\partial H_M}{\partial p_x}\delta p_x-\frac{\partial H_M}{\partial p_y}\delta p_y\right\}\\ &= \int dt\left\{\left(\left((k+K)-\frac{kM}{m}\right)\dot{x}+\frac{kM}{m}\dot{y}-\frac{\partial H_M}{\partial p_x}\right)\delta p_x+\left(k\dot{x}-\frac{\partial H_M}{\partial p_y}\right)\delta p_y\right.\\ &\qquad\left.+\,(\cdots)\,\delta x+(\cdots)\,\delta y+(\text{Otros Términos})\right\}=0\,.\end{aligned}$$

de tal forma que, en particular, tenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\left((k+K)-\frac{kM}{m}\right)\dot{x}+\frac{kM}{m}\dot{y}-\frac{\partial H_M}{\partial p_x} &= 0\,,\\ k\dot{x}-\frac{\partial H_M}{\partial p_y} &= 0\,.\end{aligned}$$

Así, tenemos de la primera de éstas ecuaciones:

$$\left((k+K)-\frac{Mk}{m}\right)\dot{x}+\frac{Mk}{m}\dot{y}-\left(\frac{m\,(k+K)-kM}{m^2}\right)p_x-\frac{k}{m}p_y=0\,,$$

o, arreglando términos:

$$-p_x + m\dot{x} + \frac{mk}{(m\,(k+K) - kM)}\,(M\dot{y} - p_y) = 0\,. \tag{37}$$

Igualmente, de la otra ecuación obtenemos:

$$k\dot{x} - \frac{k}{m}p_x = 0\,,$$

es decir:

$$p_x = m\dot{x}\,. \tag{38}$$

Sustituyendo en la (37), obtenemos:

$$p_y = M\dot{y}\,. \tag{39}$$

Sustituyendo estos resultados en los términos de la acción con derivadas temporales tenemos:

$$\left((k+K) - \frac{kM}{m}\right)\dot{x}p_x + \frac{kM}{m}\dot{y}p_x + k\dot{x}p_y = ((k+K)\,m\ - kM)\,\dot{x}^2 + 2Mk\dot{y}\dot{x}\,,$$

mientras que sustituyéndolos en la Hamiltoniana:

$$H_M(x,y,\dot{x},\dot{y}) \;\; = \;\; -\frac{1}{2}\frac{M}{m}k^2\,(x-y)^2 + \frac{1}{2}kK\;x^2 + \frac{1}{2}\,(m\,(k+K) - kM)\,\dot{x}^2 + kM\dot{y}\dot{x}\,.$$

Así, obtenemos la acción final:

$$S = \int dt\left\{\frac{1}{2}\,((k+K)\,m\ - kM)\,\dot{x}^2 + Mk\dot{y}\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{M}{m}k^2\,(x-y)^2 - \frac{1}{2}kK\;x^2\right\} \tag{40}$$

Las ecuaciones de movimiento en este caso serán las ecuaciones de Euler-Lagrange tradicionales, donde la Lagrangiana es el integrando de la acción. Así, la ecuación para x es:

$$((k+K)\,m\ - kM)\,\ddot{x} + kM\;\ddot{y} - \frac{M}{m}k^2\,(x-y) + kK\;x = 0\,,$$

y la ecuación para y es:

$$Mk\,\ddot{x} + \frac{Mk^2}{m}\,(x-y) = 0\,.$$

o, despejando y y derivando dos veces con respecto al tiempo:

$$\ddot{y} = \frac{m}{k}x^{(4)} + \ddot{x}\,.$$

Sustituyendo en la ecuación para x y usando las relaciones (36), recuperamos:

$$a\,x^{(4)} + b\ddot{x} + \ cx = 0\,.$$

De esta forma tomamos a (40) como una acción adecuada.

7.2. Caso Particular M=m, K=k, y Segunda Transformación.

Para simplificar los cálculos, consideremos el caso particular:

$$m = M\,, \quad k = K\,,$$

en cuyo caso:

$$a = m^2\,, \qquad b = 3mk\,, \qquad c = k^2\,,$$

y donde:

$$p_x = m\,\dot{x}\,, \quad p_y = m\,\dot{y}\,.$$

En este caso debemos recuperar la Lagrangiana de nuestro sistema original:

$$L = \frac{1}{2}m\,\left(\dot{Y}^2 + \dot{X}^2\right) - \frac{1}{2}kX^2 + kXY - kY^2\,,$$

de la acción obtenida:

$$S = \int dt \left\{ \frac{km}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{y}\dot{x}\right) + \frac{1}{2}k^2\left(y^2 - 2xy\right)\right\}\,. \tag{41}$$

Introduzcamos las siguientes transformaciones lineales:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\alpha X + \beta Y\right), \qquad \dot{x} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\alpha\,\dot{X} + \beta\,\dot{Y}\right)\,, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\mu X + \nu Y\right), \qquad \dot{y} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\mu\,\dot{X} + \nu\,\dot{Y}\right)\,, \end{aligned}$$

en términos de las cuales (41) se reduce a:

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int dt \left\{ m\left(\left(\frac{\alpha^2}{2} + \mu\alpha\right)\,\dot{X}^2 + \left(\alpha\beta + \nu\alpha + \mu\beta\right)\,\dot{X}\,\dot{Y} + \left(\frac{\beta^2}{2} + \nu\beta\right)\,\dot{Y}^2\right)\right. \\ & \left. + \, k\left(\left(\frac{1}{2}\mu^2 - \alpha\mu\right)X^2 + \left(\mu\nu - \alpha\nu - \beta\mu\right)XY + \left(\frac{1}{2}\nu^2 - \beta\nu\right)Y^2\right)\right\}, \end{aligned}$$

Comparando con la forma requerida de la Lagrangiana:

$$L = m\,\left(\frac{1}{2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\dot{Y}^2\right) - k\frac{1}{2}X^2 + kXY - kY^2\,,$$

obtenemos las ecuaciones:

$$\left(\frac{\alpha^2}{2} + \mu\alpha\right) = \frac{1}{2}\,, \tag{42}$$

$$\left(\frac{\beta^2}{2} + \nu\beta\right) = \frac{1}{2}\,, \tag{43}$$

$$\left(\alpha\beta + \nu\alpha + \mu\beta\right) = 0\,, \tag{44}$$

$$\left(\frac{1}{2}\mu^2 - \mu\alpha\right) = -\frac{1}{2}\,, \tag{45}$$

$$\left(\mu\nu - \nu\alpha - \mu\beta\right) = 1\,, \tag{46}$$

$$\left(\frac{1}{2}\nu^2 - \nu\beta\right) = -1\,, \tag{47}$$

que no tienen soluciones para coeficientes reales, como puede verse de:

$$\begin{aligned}(42)+(45) &\;:\; \alpha^2+\mu^2=0\,,\\ (43)+(47) &\;:\; \beta^2+\nu^2=-1\,.\end{aligned}$$

Admitamos entonces soluciones complejas. De (42)+(45):

$$\alpha = i\mu,$$

Sustituyendo de regreso en (42)

$$\mu^2\,(2i-1)=1 \Rightarrow \;\; \mu=\frac{1}{\sqrt{2i-1}}\,, \qquad \alpha=\frac{i}{\sqrt{2i-1}}\,.$$

Igualmente, de (44):

$$(\alpha\beta+\alpha\nu+\beta\mu)=(i\mu\beta+i\mu\nu+\beta\mu)=0 \Rightarrow \beta=\frac{-i\nu}{(i+1)}\,.$$

Sustituyendo en (43)+(47):

$$\beta^2+\nu^2=\frac{-1}{2i}\nu^2+\nu^2=-1\;\Rightarrow \nu=\frac{(i-1)}{\sqrt{2i-1}}\,, \qquad \beta=\frac{1}{\sqrt{2i-1}}\,.$$

El resultado final es:

$$\alpha=\frac{i}{\sqrt{2i-1}},\;\; \beta=\mu=\frac{1}{\sqrt{2i-1}},\;\; \nu=\frac{(i-1)}{\sqrt{2i-1}}\,, \tag{48}$$

donde hemos verificado que satisfacen las ecuaciones (42)-(47).

7.3. Juntando las Dos Transformaciones.

Recapitulando, a partir de:

$$H_M=-\frac{1}{2a}\Pi_z^2-\frac{1}{2}bz^2+\frac{1}{2}c\,x^2+\Pi_x z\,,$$

$$a=m^2\,, \qquad b=3mk\,, \qquad c=k^2\,,$$

la primera transformación:

$$x=x, \qquad z=\frac{p_x}{m}, \qquad \Pi_x=2kp_x+kp_y, \qquad \Pi_z=mk\,(x-y)\,,$$

$$p_x=m\,\dot{x},\;\; p_y=m\,\dot{y}$$

nos llevó a:

$$H_M=-\frac{1}{2}k^2\,(x-y)^2+\frac{1}{2}k^2x^2+\frac{1}{2}\frac{k}{m}p_x^2+\frac{k}{m}p_yp_x$$

Pero necesitamos la transformación final a las variables estándar $\{X, Y, P_X, P_Y\}$ con:

$$P_X = m\dot{X}, \quad P_Y = m\dot{Y}\,.$$

La transformación adicional es:

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\alpha X + \beta Y\right), \quad y = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\mu X + \nu Y\right)\,,$$

donde α, β, μ y ν son los números complejos dados en (48). Utilizando las relaciones entre momentos y velocidades (38) y (39) obtenemos:

$$\begin{aligned} p_x &= m\,\dot{x} = \frac{m}{\sqrt{k}}\left(\alpha\,\dot{X} + \beta\,\dot{Y}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\alpha\,P_X + \beta\,P_Y\right)\,, \\ p_y &= m\,\dot{y} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\mu\,P_X + \nu\,P_Y\right)\,. \end{aligned}$$

En otras palabras:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\alpha X + \beta Y\right), \quad p_x = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\alpha\,P_X + \beta\,P_Y\right)\,, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\mu X + \nu Y\right), \quad p_y = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\mu\,P_X + \nu\,P_Y\right)\,. \end{aligned}$$

Incorporando la transformación completa:

$$\{x, z, \Pi_x, \Pi_z\} \to \{X, Y, P_X, P_Y\}\,,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\alpha X + \beta Y\right)\,, \\ z &= \frac{1}{m\sqrt{k}}\left(\alpha\,P_X + \beta\,P_Y\right), \\ \Pi_x &= \sqrt{k}\left(\left(2\alpha + \mu\right)\,P_X + \left(2\beta + \nu\right)\,P_Y\right) \\ \Pi_z &= m\sqrt{k}\left(\left(\alpha - \mu\right)X + \left(\beta - \nu\right)Y\right), \end{aligned} \tag{49}$$

Confirmemos la validez de la transformación (49). Partamos de la función Hamiltoniana:

$$H_M = -\frac{1}{2a}\Pi_z^2 - \frac{1}{2}bz^2 + \frac{1}{2}c\,x^2 + \Pi_x z\,,$$

que en este caso particular:

$$a = m^2, \quad b = 3mk, \quad c = k^2\,,$$

se reduce a:

$$H_M = -\frac{1}{2m^2}\Pi_z^2 - \frac{3}{2}mkz^2 + \frac{1}{2}k^2\,x^2 + \Pi_x z\,.$$

Sustituyendo las transformaciones (49) obtenemos:

$$\begin{aligned} H_M &= -\frac{k}{2}\left((\alpha-\mu)\,X+(\beta-\nu)\,Y\right)^2+\frac{k}{2}\,\left(\alpha X+\beta Y\right)^2 \\ &\quad +(\alpha\;P_X+\beta\;P_Y)\,\frac{1}{2m}\left[2\left(((2\alpha+\mu)\;\;P_X+(2\beta+\nu)\;\;P_Y)\right)-3\,(\alpha\;P_X+\beta\;P_Y)\right]\,. \end{aligned}$$

Los términos de la Hamiltoniana que contienen los momentos se reducen a:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{Momentos}} &= \frac{1}{2m}\left\{P_X^2\left(\alpha^2+2\alpha\mu\right)+2P_XP_Y\left(\alpha\beta+\alpha\nu+\beta\mu\right)+P_Y^2\left(\beta^2+2\beta\nu\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2m}\left\{P_X^2+P_Y^2\right\}\,, \end{aligned}$$

que es lo que deseamos y donde hemos hecho uso de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha^2+2\mu\alpha &= 1\,, \\ \alpha\beta+\alpha\nu+\beta\mu &= 0\,, \\ \beta^2+2\beta\nu &= 1\,. \end{aligned}$$

La parte potencial de la Hamiltoniana nos da:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{Potencial}} &= \frac{k}{2}\left\{X^2\left(2\alpha\mu-\mu^2\right)+2XY\left(\alpha\nu+\mu\beta-\mu\nu\right)+\left(2\beta\nu-\nu^2\right)Y^2\right\} \\ &= \frac{k}{2}\left\{X^2-2XY+2Y^2\right\}\,, \end{aligned}$$

que es lo que deseamos, y donde hemos ahora usado:

$$\begin{aligned} 2\alpha\mu-\mu^2 &= 1\,, \\ \alpha\beta+\alpha\nu+\beta\mu &= 0\,, \\ 2\beta\nu-\nu^2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Así, el resultado final es:

$$H_M=\frac{1}{2m}\left\{P_X^2+P_Y^2\right\}+\frac{k}{2}\left\{X^2-2XY+2Y^2\right\}\,,$$

que es la función Hamiltoniana del sistema original. De esta forma hemos conseguido una transformación que nos lleva del conjunto $\{x,z,\Pi_x,\Pi_z\}$ y su respectiva función Hamiltoniana, al sistema $\{X,Y,P_X,P_Y\}$ y la función Hamiltoniana original.

7.4. Verificando que la Transformación es Canónica.

La transformación:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\alpha X+\beta Y\right), \\
z &= \frac{1}{m\sqrt{k}}\left(\alpha\ P_X+\beta\ P_Y\right), \\
\Pi_x &= \sqrt{k}\left(\left(\left(2\alpha+\mu\right)\ P_X+\left(2\beta+\nu\right)\ P_Y\right)\right) \\
\Pi_z &= m\sqrt{k}\left(\left(\alpha-\mu\right)X+\left(\beta-\nu\right)Y\right),
\end{aligned}$$

debe ser canónica en virtud de las soluciones:

$$\alpha=\frac{i}{\sqrt{2i-1}},\quad \beta=\mu=\frac{1}{\sqrt{2i-1}},\quad \nu=\frac{(i-1)}{\sqrt{2i-1}}$$

o de las ecuaciones (42)-(47). En efecto, verificando los paréntesis de Poisson obtenemos:

$$\begin{aligned}
\{x,z\} &= \left\{\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\alpha X+\beta Y\right),\frac{1}{m\sqrt{k}}\left(\alpha\ P_X+\beta\ P_Y\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{1}{m\sqrt{k}}\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{x,\Pi_x\} &= \left\{\left(\alpha X+\beta Y\right),\left(\left(2\alpha+\mu\right)\ P_X+\left(2\beta+\nu\right)\ P_Y\right)\right\} \\
&= \alpha\left(2\alpha+\mu\right)+\beta\left(2\beta+\nu\right)=\alpha\mu+\beta\nu=\left(\alpha+\nu\right)\beta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2i-1}}\left(\frac{i}{\sqrt{2i-1}}+\frac{i-1}{\sqrt{2i-1}}\right)=\frac{2i-1}{2i-1}=1\,.
\end{aligned}$$

$$\{x,\Pi_z\}=0\,.$$

$$\{z,\Pi_x\}=0\,.$$

$$\begin{aligned}
\{z,\Pi_z\} &= \left\{\left(\alpha\ P_X+\beta\ P_Y\right),\left(\left(\alpha-\mu\right)X+\left(\beta-\nu\right)Y\right)\right\} \\
&= -\alpha\left(\alpha-\mu\right)-\beta\left(\beta-\nu\right)=\alpha\mu+\beta\nu=1\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\Pi_x,\Pi_z\} &= mk\left\{\left(2\alpha+\mu\right)\ P_X+\left(2\beta+\nu\right)\ P_Y,\left(\alpha-\mu\right)X+\left(\beta-\nu\right)Y\right\} \\
&= -mk\left(\left(2\alpha+\mu\right)\left(\alpha-\mu\right)+\left(2\beta+\nu\right)\left(\beta-\nu\right)\right) \\
&= -mk\left(2\alpha^2-\alpha\mu-\mu^2+2\beta^2-\beta\nu-\nu^2\right) \\
&= mk\left(1+\left(\mu^2+\nu^2\right)\right)\ ,
\end{aligned}$$

pero:

$$\left(\mu^2+\nu^2\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2i-1}}\right)^2+\left(\frac{(i-1)}{\sqrt{2i-1}}\right)^2=-1\,.$$

Así:

$$\{\Pi_x,\Pi_z\}=0\,.$$

con lo cual nos persuadimos de que nuestra transformación efectivamente es canónica.

8. Sumario de las Primeras Dos Transformaciones.

En el caso particular:

$$k = K,\ m = M$$

la función Hamiltoniana de cuarto orden:

$$H_M = -\frac{1}{2m^2}\Pi_z^2 - \frac{3}{2}mkz^2 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \Pi_x z$$

está relacionada con la función Hamiltoniana estándar:

$$H_S = \frac{1}{2m}(P_X^2 + P_Y^2) + \frac{k}{2}(X^2 - 2XY + 2Y^2)$$

a través de la transformación canónica:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\alpha X + \beta Y\right), \\
z &= \frac{1}{m\sqrt{k}}\left(\alpha P_X + \beta\, P_X\right), \\
\Pi_x &= \sqrt{k}\left((2\alpha+\mu)\ P_X + (2\beta+\nu)\ P_Y\right) \\
\Pi_z &= m\sqrt{k}\left((\alpha-\mu)\, X + (\beta-\nu)\, Y\right),
\end{aligned}$$

con:

$$\alpha = \frac{i}{\sqrt{2i-1}},\quad \beta = \mu = \frac{1}{\sqrt{2i-1}},\quad \nu = \frac{(i-1)}{\sqrt{2i-1}}$$

9. Transformación a Coordenadas Normales: La Transformación Completa.

Realizamos ahora la última transformación del conjunto $\{x, z, \Pi_x, \Pi_z\}$ al conjunto de coordenadas normales $\{\xi_1, \xi_2, P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\}$. Por simplicidad, consideraremos de aquí en adelante el caso particular:

$$k = K = 1\,, \qquad m = M = 1\,.$$

donde entonces:

$$a = mM = 1\,, \qquad b = mK + (m+M)k = 3\,, \qquad c = kK = 1\,,$$

y:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\,, \qquad \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\,.$$

En este caso, cada una de las funciones Hamiltonianas H_M, H_S, H_N son:

$$H_M = -\frac{1}{2}\Pi_z^2 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}x^2 + \Pi_x z\,, \tag{50}$$

$$H_S = \frac{1}{2}\left(P_X^2 + P_Y^2\right) + \frac{1}{2}\left(X^2 - 2XY + 2Y^2\right)\,, \tag{51}$$

$$H_N = \frac{1}{2}\left(P_{\xi_1}^2 + P_{\xi_2}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\omega_1^2\xi_1^2 + \omega_2^2\xi_2^2\right)\,. \tag{52}$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y \\ z &= \alpha Px + \beta Py \\ \Pi_x &= (2\alpha+\beta)P_X + (2\beta+\nu)P_Y \\ \Pi_z &= (\alpha-\beta)X + (\beta-\nu)Y \end{aligned}$$

e inversamente:

$$\begin{aligned} X &= (2\alpha+\beta)x - \alpha\Pi_z \\ Y &= (\alpha+\beta)x - \beta\Pi_z \\ P_X &= (\beta-\alpha)z + \alpha\Pi_x \\ P_Y &= (\alpha-2\beta)z + \beta\Pi_x \end{aligned}$$

La relación entre variables $\{X, Y, P_X, P_Y\}$ y $\{\xi_1, \xi_2, P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\}$ es:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\,\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\,\xi_2\right) \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(-\sqrt{\omega_1^2-1}\,\xi_1 + \sqrt{1-\omega_2^2}\,\xi_2\right) \\ P_X &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\,P_{\xi_1} + \frac{1}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\,P_{\xi_2}\right) \\ P_Y &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(-\sqrt{\omega_1^2-1}\,P_{\xi_1} + \sqrt{1-\omega_2^2}\,P_{\xi_2}\right) \end{aligned}$$

e inversamente:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\sqrt{1-\omega_2^2}\,X - \frac{1}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\,Y\right) \\ \xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\sqrt{\omega_1^2-1}\,X + \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\,Y\right) \\ P_{\xi_1} &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\sqrt{1-\omega_2^2}\,P_X - \frac{1}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\,P_Y\right) \\ P_{\xi_2} &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\sqrt{\omega_1^2-1}\,P_X + \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\,P_Y\right) \end{aligned}$$

Finalmente encadenando estas dos transformaciones obtenemos la transformación entre variables $\{x, z, \Pi_x, \Pi_z\}$ y $\{\xi_1, \xi_2, P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\}$:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\omega_1^2-1}}-\beta\sqrt{\omega_1^2-1}\right)\xi_1+\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\omega_2^2}}+\beta\sqrt{1-\omega_2^2}\right)\xi_2\right)\\
z &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\omega_1^2-1}}-\beta\sqrt{\omega_1^2-1}\right)P_{\xi_1}+\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\omega_2^2}}+\beta\sqrt{1-\omega_2^2}\right)P_{\xi_2}\right)\\
\Pi_x &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\left(\frac{(2\alpha+\beta)}{\sqrt{\omega_1^2-1}}-(2\beta+\nu)\sqrt{\omega_1^2-1}\right)P_{\xi_1}+\left(\frac{(2\alpha+\beta)}{\sqrt{1-\omega_2^2}}+(2\beta+\nu)\sqrt{1-\omega_2^2}\right)P_{\xi_2}\right)\\
\Pi_z &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\left(\frac{(\alpha-\beta)}{\sqrt{\omega_1^2-1}}-(\beta-\nu)\sqrt{\omega_1^2-1}\right)\xi_1+\left(\frac{(\alpha-\beta)}{\sqrt{1-\omega_2^2}}+(\beta-\nu)\sqrt{1-\omega_2^2}\right)\xi_2\right)
\end{aligned}$$

e inversamente:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\left((2\alpha+\beta)\sqrt{1-\omega_2^2}-\frac{(\alpha+\beta)}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\right)x+\left(-\alpha\sqrt{1-\omega_2^2}+\frac{\beta}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\right)\Pi_z\right)\\
\xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\left((2\alpha+\beta)\sqrt{\omega_1^2-1}+\frac{(\alpha+\beta)}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\right)x-\left(\alpha\sqrt{\omega_1^2-1}+\frac{\beta}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\right)\Pi_z\right)\\
P_{\xi_1} &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\left((\beta-\alpha)\sqrt{1-\omega_2^2}-\frac{(\alpha-2\beta)}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\right)z+\left(\alpha\sqrt{1-\omega_2^2}-\frac{\beta}{\sqrt{1-\omega_2^2}}\right)\Pi_x\right)\\
P_{\xi_2} &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}\left(\left((\beta-\alpha)\sqrt{\omega_1^2-1}+\frac{(\alpha-2\beta)}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\right)z+\left(\alpha\sqrt{\omega_1^2-1}+\frac{\beta}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\right)\Pi_x\right)
\end{aligned}$$

Este último conjunto de transformaciones se escribe numéricamente como:

$$\begin{aligned}
x &= (0{,}66874\ i)\xi_1+(0{,}66874)\xi_2\\
z &= (0{,}66874\ i)P_{\xi_1}+(0{,}66874)P_{\xi_2}\\
\Pi_x &= (0{,}255436\ i)P_{\xi_1}+(1{,}75078)P_{\xi_2}\\
\Pi_z &= (1{,}75078\ i)\xi_1+(0{,}255436)\xi_2
\end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (0{,}255436\ i)x-(0{,}66874\ i)\Pi_z\\
\xi_2 &= (1{,}75078)x-(0{,}66874)\Pi_z\\
P_{\xi_1} &= -(1{,}75078\ i)z+(0{,}66874\ i)\Pi_x\\
P_{\xi_2} &= -(0{,}255436)z+(0{,}66874)\Pi_x
\end{aligned}$$

lo cual nos impulsa a escribirlas de forma simplificada como:

$$\begin{aligned}
x &= i\tilde{b}\xi_1+\tilde{b}\xi_2\\
z &= i\tilde{b}P_{\xi_1}+\tilde{b}P_{\xi_2}\\
\Pi_x &= i\tilde{a}P_{\xi_1}+\tilde{c}P_{\xi_2}\\
\Pi_z &= i\tilde{c}\xi_1+\tilde{a}\xi_2
\end{aligned} \tag{53}$$

y:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= i\tilde{a}x - i\tilde{b}\Pi_z \\
\xi_2 &= \tilde{c}x - \tilde{b}\Pi_z \\
P_{\xi_1} &= -i\tilde{c}z + i\tilde{b}\Pi_x \\
P_{\xi_2} &= -\tilde{a}z + \tilde{b}\Pi_x
\end{aligned} \tag{54}$$

con:

$$\tilde{a} = 0.225436\,, \qquad \tilde{b} = 0.66874\,, \qquad \tilde{c} = 1.75078\,, \tag{55}$$

y donde se cumplen las igualdades:

$$\tilde{b}\,(\tilde{c} - \tilde{a}) = 1\,, \qquad \tilde{a}\tilde{c} = \tilde{b}^2\,. \tag{56}$$

Dichas relaciones entre $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ y $\tilde{c}$ se pueden escribir de forma ligeramente más general como:

$$\frac{\tilde{a}}{\omega_2^2} = \tilde{b} = \frac{\tilde{c}}{\omega_1^2} = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}}\,. \tag{57}$$

10. Generalización a Cualquier Caso.

Hasta este punto hemos construido una transformación canónica compleja entre los Hamiltonianos H_M y H_N, en el caso particular $k = K = 1$ y $m = M = 1$. Resulta que es posible generalizar los resultados obtenidos a cualquier valor de los parámetros k, K, m y M. Efectivamente, se puede conectar los Hamiltonianos:

$$H_M = -\frac{1}{2Mm}\Pi_z^2 - \frac{Mm}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) z^2 + \frac{Mm}{2}\omega_1^2\omega_2^2\, x^2 + \Pi_x z\,,$$

y:

$$H_N = \frac{1}{2}\left(P_{\xi_1}^2 + P_{\xi_2}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\omega_1^2\xi_1^2 + \omega_2^2\xi_2^2\right)\,,$$

por medio de las mismas transformaciones canónicas complejas (58) y (58):

$$\begin{aligned}
x &= i\tilde{b}\xi_1 + \tilde{b}\xi_2 \\
z &= i\tilde{b}P_{\xi_1} + \tilde{b}P_{\xi_2} \\
\Pi_x &= i\tilde{a}P_{\xi_1} + \tilde{c}P_{\xi_2} \\
\Pi_z &= i\tilde{c}\xi_1 + \tilde{a}\xi_2
\end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= i\tilde{a}x - i\tilde{b}\Pi_z \\
\xi_2 &= \tilde{c}x - \tilde{b}\Pi_z \\
P_{\xi_1} &= -i\tilde{c}z + i\tilde{b}\Pi_x \\
P_{\xi_2} &= -\tilde{a}z + \tilde{b}\Pi_x
\end{aligned}$$

donde los coeficientes $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ y $\tilde{c}$ ahora están dados por:

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{Mm}{\omega_1^2 - \omega_2^2}}\,\omega_2^2\,, \qquad \tilde{b} = \frac{1}{\sqrt{Mm\,(\omega_1^2 - \omega_2^2)}}\,, \qquad \tilde{c} = \sqrt{\frac{Mm}{\omega_1^2 - \omega_2^2}}\,\omega_1^2\,. \quad (58)$$

Notamos que en este caso general se cumplen las relaciones:

$$\tilde{a}\tilde{c} = \omega_1^2\omega_2^2\,\tilde{b}^2 \qquad \tilde{b}\,(\tilde{c} - \tilde{a}) = 1\,. \quad (59)$$

11. La Transformación a Nivel Lagrangiano.

Podemos ver cómo se ve la transformación que hemos construido a nivel Lagrangiano. Más en concreto, se debe conectar las Lagrangianas:

$$L = \frac{Mm}{2}\left(-\ddot{X}^2 + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)\,\dot{X}^2 - \omega_1^2\omega_2^2\,X^2\right)\,. \quad (60)$$

y:

$$L_\xi = \frac{1}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\omega_1^2\xi_1^2 + \omega_2^2\xi_2^2\right)\,. \quad (61)$$

Regreseando a las definiciones de los momentos recordamos que:

$$\Pi_z = -Mm\,\ddot{x}\,, \quad (62)$$

de tal forma que las transformaciones (58) se escriben:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= i\left(\tilde{a}x + Mm\tilde{b}\ddot{x}\right)\,, \\ \xi_2 &= \tilde{c}x + Mm\tilde{b}\ddot{x}\,. \end{aligned} \quad (63)$$

Sustituyendo en L_ξ llegamos al resultado:

$$L_\xi = L + \frac{d}{dt}\left(Mm\,\dot{x}\ddot{x}\right)\,, \quad (64)$$

es decir, que ambas Lagrangianas son iguales hasta una derivada total. Sin embargo, debemos decir que la transformación canónica vista a nivel Lagrangiano (63) es manifiestamente no local, lo cual puede levantar preguntas acerca de si dicha transformación es de hecho invertible. No obstante, recalcamos que al menos a nivel Hamiltoniano, dentro del formalismo de Ostrogradsky, la transformación está bien definida y permitirá realizar la cuantización del sistema de orden superior, como se verá en las secciones siguientes.

12. Cuantización y Condiciones de Realidad.

Todo el trabajo se ha realizado a nivel clásico, y ahora deseamos realizar la cuantización del sistema. Como se recordará, este propósito ha sido ya realizado en una sección anterior, partiendo del Hamiltoniano:

$$H_N = \frac{1}{2}\left(P_{\xi_1}^2 + P_{\xi_2}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\omega_1^2\xi_1^2 + \omega_2^2\xi_2^2\right)\,,$$

y por lo tanto, cuantizando en términos de los operadores $\{\xi_1, \xi_2, P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\}$. Ahora se desea cuantizar partiendo del operador Hamiltoniano H_M:

$$H_M = -\frac{1}{2Mm}\Pi_z^2 - \frac{Mm}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) z^2 + \frac{Mm}{2}\omega_1^2\omega_2^2\, x^2 + \Pi_x z\,,$$

es decir, cuantizaremos partiendo de los operadores $\{x, z, \Pi_x, \Pi_z\}$ y explotaremos su relación con el conjunto de operadores $\{\xi_1, \xi_2, P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\}$. Los operadores mencionados cumplirán las relaciones de conmutación:

$$[x, \Pi_x] = [z, \Pi_z] = i\,, \tag{65}$$

y:

$$[x, z] = [\Pi_x, \Pi_z] = [x, \Pi_z] = [z, \Pi_x] = 0\,, \tag{66}$$

heredadas de sus paréntesis de Poisson clásicos. Igualmente, los operadores $\{\xi_1, \xi_2, P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\}$ cumplirán con relaciones similares, ya descritas en (21):

$$\left[\xi_i, P_{\xi_j}\right] = i\delta_{i,j}\,, \tag{67}$$

y:

$$[\xi_i, \xi_j] = \left[P_{\xi_i}, P_{\xi_j}\right] = 0\,. \tag{68}$$

Fijamos ahora las condiciones de realidad del sistema al pedir que los operadores $\{\xi_1, \xi_2, P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\}$ sean Hermíticos. Hacemos esto al considerar que la descripción del sistema en término de dicho conjunto de operadores está más cerca de la física original del problema, además de que la solución del problema de eigenvalores en ese caso es inmediata. Un punto importante que debe mencionarse es que, al hacer dicha elección en las condiciones de realidad del problema, los operadores $\{x, z, \Pi_x, \Pi_z\}$ no pueden ya ser Hermíticos. Esto puede verse claramente de las relaciones (58). En efecto, tomando la primera de dichas relaciones:

$$x = i\tilde{b}\xi_1 + \tilde{b}\xi_2\,,$$

y tomando el conjugado Hermítico:

$$x^\dagger = -i\tilde{b}\xi_1^\dagger + \tilde{b}\xi_2^\dagger\,,$$

pero, recordando que $\xi_i^\dagger = \xi_i$ obtenemos:

$$x^\dagger = -i\tilde{b}\xi_1 + \tilde{b}\xi_2 \neq x\,.$$

De esta forma, al dotar de Hermiticidad a un conjunto de operadores, se sacrifica la Hermiticidad del otro. Siguiendo los lineamientos planteados en el capítulo anterior, realizaremos la cuantización del sistema en términos del conjunto de operadores no-Hermíticos $\{x, z, \Pi_x, \Pi_z\}$. Recordamos sin embargo que en nuestro caso particular al realizar la cuantización en términos de los operadores mencionados estamos cuantizando el sistema en término de los operadores de

Ostrogradsky, es decir, estamos cuantizando el sistema en su planteamiento como sistema de orden superior. En particular, notamos que los operadores x y Π_z están relacionados por medio de (58) con los operadores de coordenada ξ_1 y ξ_2 únicamente y por lo tanto puede dotárseles de interpretación como operadores de coordenada ellos mismos. Daremos entonces preferencia a la base de eigenfunciones $|x, \Pi_z\rangle$ para describir al sistema, de la misma forma que podría describirse por medio de la base $|\xi_1, \xi_2\rangle$. La base $|x, \Pi_z\rangle$ cumple con las ecuaciones:

$$x|x', \Pi_z'\rangle = x'|x', \Pi_z'\rangle\,, \qquad \Pi_z|x', \Pi_z'\rangle = \Pi_z'|x', \Pi_z'\rangle\,, \tag{69}$$

y:

$$\langle x'^*, \Pi_z'^*|x^\dagger = \langle x'^*, \Pi_z'^*|x'\,, \qquad \langle x'^*, \Pi_z'^*|\Pi_z^\dagger = \langle x'^*, \Pi_z'^*|\Pi_z'^*\,. \tag{70}$$

La relación de completez de dicha base se debe escribir en general:

$$\int d\mu\,(x, \Pi_z)\,|x, \Pi_z\rangle\langle x, \Pi_z| = I\,, \tag{71}$$

donde:

$$d\mu\,(x, \Pi_z) = d^2x\, d^2\Pi_z\ \mu\,(x, \Pi_z)\ , \tag{72}$$

es decir, las integrales son sobre las partes reales y complejas de x y Π_z.

En este punto, debemos ahondar más sobre las implicaciones en nuestra elección de las condiciones de realidad. Notemos primero que el planteamiento del problema de mayor orden fue realizado a partir de la función Lagrangiana:

$$L = \frac{Mm}{2}\left(-\,\ddot{x}^2 + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)\,\dot{x} - \omega_1^2\omega_2^2\,x\right)\,.$$

con x real. Esto a su vez nos llevaba a variables de Ostrogradsky $\{x, z, \Pi_x, \Pi_z\}$ reales. Ahora, hemos construido una relación entre dichas variables con las variables de dos osciladores armónicos $\{\xi_1, \xi_2, P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\}$ que resulta ser compleja. Más aún, a través de nuestras condiciones de realidad hemos escogido por razones físicas que en dicha relación las variables $\{\xi, P_\xi\}$ sean reales, y representadas a nivel cuántico por operadores Hermíticos, lo cual determina que las variables de Ostrogradsky $\{x, \Pi\}$ deben ser complejas, alejándonos así del planteamiento original del sistema de mayor orden. Es decir, al fijar nuestras condiciones de realidad hemos realizado una *continuación analítica* del sistema de mayor orden en las variables $\{x, z, \Pi_x, \Pi_z\}$.

Sin embargo, recalcamos que dicha complexificación del problema no es arbitraria. En efecto, si consideramos el espacio fase $\{x, \Pi\}$ extendido a todo valor complejo de las coordenadas y momentos, entonces hemos comenzado por plantear el problema en el plano $\{x, \Pi\}$ real, y al fijar las condiciones de realidad, hemos realizado continuación analítica a un plano complejo $\{x, \Pi\}$ bien definido precisamente por las transformaciones canónicas. Más aún, solo sobre ese plano es posible mapear el producto interno originalmente enfermo en término de las variables $\{x, \Pi\}$ al producto interno bien definido en término de las variables

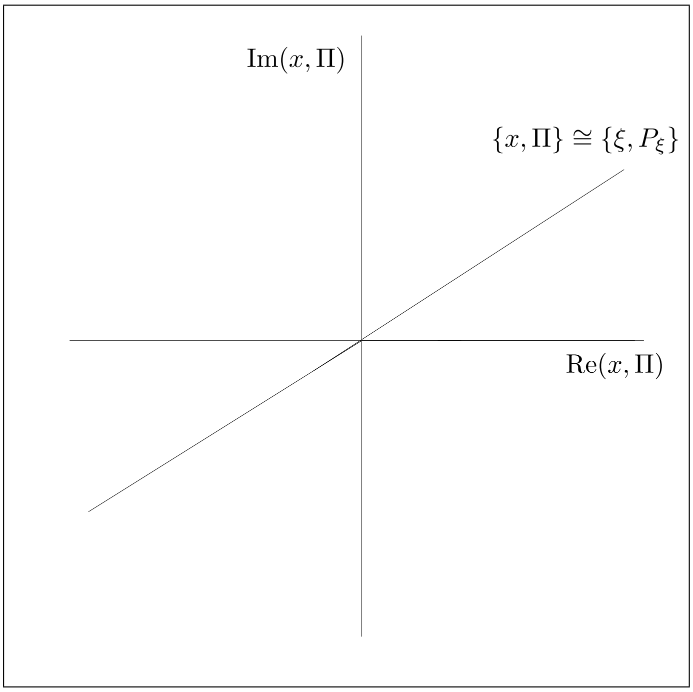

Figura 2: Complexificación del Oscilador de Pais-Uhlenbeck.

$\{\xi, P_\xi\}$ por medio de la función de medida. Esto se encuentra ilustrado en la figura (2).

En lo que sigue, explotaremos la relación de dichos operadores con los operadores Hermíticos y buscaremos finalmente la medida del producto interno. Dicha medida deberá solucionar el problema de fantasmas en los estados del sistema de mayor orden.

13. Cálculo de la Medida.

Nos disponemos ahora a obtener la medida del producto interno. Primero, calculemos mediante el principio de acción de Schwinger la variación total de la cantidad $\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|x'', \Pi''_z\rangle$:

$$\delta\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|x'', \Pi''_z\rangle = i\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|(G_{P_{\xi_1}} + G_{P_{\xi_2}}) - (G_x + G_{\Pi_z})\,|x'', \Pi''_z\rangle\,,$$

donde:

$$G_{P_{\xi_1}} = -\xi_1 \delta P_{\xi_1}\,, \qquad G_{P_{\xi_2}} = -\xi_2 \delta P_{\xi_2}\,,$$

y

$$G_x = \Pi_x \delta x\,, \qquad G_{\Pi_z} = -z\delta\Pi_z\,.$$

Así:

$$\delta\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|x'', \Pi''_z\rangle = i\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}| - \xi_1\delta P'_{\xi_1} - \xi_2\delta P'_{\xi_2} - \Pi_x\delta x'' + z\delta\Pi''_z|x'', \Pi''_z\rangle\,.$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= i\tilde{a}x - i\tilde{b}\Pi_z\,,\\ \xi_2 &= \tilde{c}x - \tilde{b}\Pi_z\,,\\ \Pi_x &= i\tilde{a}P_{\xi_1} + \tilde{c}P_{\xi_2}\,,\\ z &= i\tilde{b}P_{\xi_1} + \tilde{b}P_{\xi_2}\,,\end{aligned}$$

y haciendo actuar sobre bras y kets:

$$\begin{aligned}\delta\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|x'', \Pi''_z\rangle &= i\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|\left(-i\tilde{a}x'' + i\tilde{b}\Pi''_z\right)\delta P'_{\xi_1} + \left(-\tilde{c}x'' + \tilde{b}\Pi''_z\right)\delta P'_{\xi_2}\\ &\quad + \left(-i\tilde{a}P'_{\xi_1} - \tilde{c}P'_{\xi_2}\right)\delta x'' + \left(i\tilde{b}P_{\xi_1} + \tilde{b}P_{\xi_2}\right)\delta\Pi''_z|x'', \Pi''_z\rangle\\ &= \langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|x'', \Pi''_z\rangle\delta\left\{\left(\tilde{a}x'' - \tilde{b}\Pi''_z\right)P'_{\xi_1} + \left(-i\tilde{c}x'' + i\tilde{b}\Pi''_z\right)P'_{\xi_2}\right\}\,.\end{aligned}$$

Integrando obtenemos:

$$\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|x'', \Pi''_z\rangle = \exp\left\{\left(\tilde{a}x'' - \tilde{b}\Pi''_z\right)P'_{\xi_1} + \left(-i\tilde{c}x'' + i\tilde{b}\Pi''_z\right)P'_{\xi_2}\right\}\,. \tag{73}$$

donde la constante de integración la hemos fijado a 1. Comencemos entonces con:

$$\begin{aligned}\langle P_{\xi_1}, P_{\xi_2}|x, \Pi_z\rangle &= \exp\left\{(\tilde{a}x - \tilde{b}\Pi_z)P_{\xi_1} + (-i\tilde{c}x + i\tilde{b}\Pi_z)P_{\xi_2}\right\}\,,\\ \langle x^*, \Pi^*_z|P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\rangle &= \exp\left\{(\tilde{a}x^* - \tilde{b}\Pi^*_z)P_{\xi_1} + (i\tilde{c}x^* - i\tilde{b}\Pi^*_z)P_{\xi_2}\right\}\,.\end{aligned}$$

Ahora, tenemos:

$$\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\rangle = \delta\left(P'_{\xi_1} - P_{\xi_1}\right)\delta\left(P'_{\xi_2} - P_{\xi_2}\right)\,.$$

Sustituyendo la relación de completez en el espacio $\{|x, \Pi_z\rangle\}$:

$$1 = \int d\mu\,(x, \Pi_z)\,|x, \Pi_z\rangle\langle x^*, \Pi^*_z|\,,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\rangle &= \int d\mu\,(x, \Pi_z)\,\langle P'_{\xi_1}, P'_{\xi_2}|x, \Pi_z\rangle\langle x^*, \Pi^*_z|P_{\xi_1}, P_{\xi_2}\rangle\\ &= \int d\mu\; e^{\left\{\left(\tilde{a}x - \tilde{b}\Pi_z\right)P'_{\xi_1} + \left(-i\tilde{c} + i\tilde{b}\Pi_z\right)P'_{\xi_2}\right\}}e^{\left\{\left(\tilde{a}x^* - \tilde{b}\Pi^*_z\right)P'_{\xi_1} + \left(i\tilde{c} - i\tilde{b}\Pi^*_z\right)P'_{\xi_2}\right\}}\,.\end{aligned}$$

Descomponemos en partes real e imaginaria:

$$x = \alpha + i\beta\,, \qquad \Pi_z = \gamma + i\rho\,, \tag{74}$$

$$x^* = \alpha - i\beta\,, \qquad \Pi^*_z = \gamma - i\rho\,. \tag{75}$$

donde $\{\alpha,\beta,\gamma,\rho\}$ son números reales. En término de esta descomposición de $\{x,\Pi_z\}$, la diferencial de la medida es:

$$d\mu\left(x,\Pi_z\right)=d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\rho\;\mu\left(\alpha,\beta,\gamma,\rho\right)\,.$$

Sustituyendo (74)-(75) en el argumento de las exponenciales y juntando términos obtenemos:

$$\begin{aligned}\langle P'_{\xi_1},P'_{\xi_2}|P_{\xi_1},P_{\xi_2}\rangle &= \int d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\rho\;\mu\,\Big\{e^{\left\{\tilde{a}\left(P'_{\xi}+P_{\xi_1}\right)-i\tilde{c}\left(Pi'_{\xi_2}-P_{\xi_2}\right)\right\}\alpha}e^{\left\{i\tilde{a}\left(P'_{\xi}-P_{\xi_1}\right)+\tilde{c}\left(Pi'_{\xi_2}+P_{\xi_2}\right)\right\}\beta}\\ &\quad e^{\left\{-\tilde{b}\left(P'_{\xi}+P_{\xi_1}\right)+i\tilde{b}\left(Pi'_{\xi_2}-P_{\xi_2}\right)\right\}\gamma}e^{\left\{-i\tilde{b}\left(P'_{\xi}-P_{\xi_1}\right)-\tilde{b}\left(Pi'_{\xi_2}+P_{\xi_2}\right)\right\}\rho}\Big\}\,.\end{aligned}$$

Proponemos:

$$\mu(\alpha,\beta,\gamma,\rho)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\,\delta\left(\tilde{b}\gamma-\tilde{a}\alpha\right)\delta\left(\tilde{b}\rho-\tilde{c}\beta\right)\,. \tag{76}$$

Sustituyendo en $\langle P'_{\xi_1},P'_{\xi_2}|P_{\xi_1},P_{\xi_2}\rangle$ y usando:

$$\int dx\,dy\;f(x,y)\delta(by-ax)=\int dxf(bx,ax)\,,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\langle P'_{\xi_1},P'_{\xi_2}|P_{\xi_1},P_{\xi_2}\rangle &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\rho\;\delta\left(\tilde{b}\gamma-\tilde{a}\alpha\right)\delta\left(\tilde{b}\rho-\tilde{c}\beta\right)\\ &\quad\Big\{e^{\left\{\tilde{a}\left(P'_{\xi}+P_{\xi_1}\right)-i\tilde{c}\left(Pi'_{\xi_2}-P_{\xi_2}\right)\right\}\alpha}e^{\left\{i\tilde{a}\left(P'_{\xi}-P_{\xi_1}\right)+\tilde{c}\left(Pi'_{\xi_2}+P_{\xi_2}\right)\right\}\beta}\\ &\quad e^{\left\{-\tilde{b}\left(P'_{\xi}+P_{\xi_1}\right)+i\tilde{b}\left(Pi'_{\xi_2}-P_{\xi_2}\right)\right\}\gamma}e^{\left\{-i\tilde{b}\left(P'_{\xi}-P_{\xi_1}\right)-\tilde{b}\left(Pi'_{\xi_2}+P_{\xi_2}\right)\right\}\rho}\Big\}\\ &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int d\alpha\,d\beta\Big\{e^{\left\{\tilde{a}\left(P'_{\xi}+P_{\xi_1}\right)-i\tilde{c}\left(Pi'_{\xi_2}-P_{\xi_2}\right)\right\}\tilde{b}\alpha}e^{\left\{i\tilde{a}\left(P'_{\xi}-P_{\xi_1}\right)+\tilde{c}\left(Pi'_{\xi_2}+P_{\xi_2}\right)\right\}\tilde{b}\beta}\\ &\quad e^{\left\{-\tilde{b}\left(P'_{\xi}+P_{\xi_1}\right)+i\tilde{b}\left(Pi'_{\xi_2}-P_{\xi_2}\right)\right\}\tilde{a}\alpha}e^{\left\{-i\tilde{b}\left(P'_{\xi}-P_{\xi_1}\right)-\tilde{b}\left(Pi'_{\xi_2}+P_{\xi_2}\right)\right\}\tilde{c}\beta}\Big\}\\ &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int d\alpha\,d\beta\Big\{e^{-i\left(\tilde{b}\tilde{c}-\tilde{a}\tilde{b}\right)\left(P'_{\xi_2}-P_{\xi_2}\right)\alpha}e^{-i\left(\tilde{b}\tilde{c}-\tilde{a}\tilde{b}\right)\left(P'_{\xi_1}-P_{\xi_1}\right)\beta}\Big\}\\ &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int d\alpha\,d\beta\Big\{e^{-i\left(P'_{\xi_2}-P_{\xi_2}\right)\alpha}e^{-i\left(P'_{\xi_1}-P_{\xi_1}\right)\beta}\Big\}\\ &= \delta\left(P'_{\xi_1}-P_{\xi_1}\right)\delta\left(P'_{\xi_2}-P_{\xi_2}\right)\,,\end{aligned}$$

que es lo que deseábamos, y donde hemos usado $\tilde{b}\left(\tilde{c}-\tilde{a}\right)=1$. De esta forma, la base de eigenfunciones $|x,\Pi_z\rangle$ de los operadores no-Hermíticos satisfacen la relación de completez:

$$\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int d^2x\,d^2\Pi_z\;\delta\left(\tilde{b}\,\mathrm{Re}(\Pi_z)-\tilde{a}\,\mathrm{Re}(x)\right)\delta\left(\tilde{b}\,\mathrm{Im}(\Pi_z)-\tilde{c}\,\mathrm{Im}(x)\right)|x,\Pi_z\rangle\langle x,\Pi_z^*|=I\,. \tag{77}$$

Como hemos dicho antes, esta medida mapea el producto interno en término de las variables no-Hermíticas x y Π_z al producto interno bien definido escrito en términos de las coordenadas normales ξ_1 y ξ_2, dando solución al problema de normas negativas característico en el caso del oscilador de Pais-Uhlenbeck. Esto está en clara ventaja con el enfoque empleado en [**?**] donde es necesario exigir que de alguna forma el Hamiltoniano adopte una forma PT-simétrica.

14. Principio de Acción de Schwinger y el Propagador.

Para finalizar, en este capítulo aplicaremos el principio de acción de Schwinger para calcular el propagador $\langle x^*, \Pi_z^*, t|x, \Pi_z, t=0\rangle$. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, consideraremos el caso $k = K = 1$, $m = M = 1$. La variación de dicha cantidad está dada por:

$$\begin{aligned}&\delta\langle x'^*, \Pi_z'^*, t|x'', \Pi_z'', 0\rangle \\ &= i\langle x'^*, \Pi_z'^*, t|\left\{\Pi_x^\dagger(t)\delta x'^* - z^\dagger(t)\delta\Pi_z'^* - \Pi_x\delta x'' + z\delta\Pi_z'' - H\delta t\right\}|x'', \Pi_z'', 0\rangle\,,\end{aligned}$$

donde los bras y kets cumplen, en la representación de Heisenberg:

$$x|x'', \Pi_z'', 0\rangle = x''|x'', \Pi_z'', 0\rangle\,, \qquad \Pi_z|x'', \Pi_z'', 0\rangle = \Pi_z''|x'', \Pi_z'', 0\rangle\,,$$

y:

$$\langle x'^*, \Pi_z'^*, t|x^\dagger(t) = \langle x'^*, \Pi_z'^*, t|x'^*\,, \qquad \langle x'^*, \Pi_z'^*, t|\Pi_z^\dagger(t) = \langle x'^*, \Pi_z'^*, t|\Pi_z'^*\,,$$

de tal forma que debemos expresar a $\{z, \Pi_x, z^\dagger(t), \Pi_x^\dagger(t)\}$ en términos de $\{x, \Pi_z, x^\dagger(t), \Pi_z^\dagger(t)\}$.

Calculamos las soluciones a las ecuaciones de Heisenberg para los operadores x, z, Π_x y Π_z obtenidas de H_M. Las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= z(t)\\ \dot{\Pi}_x(t) &= -x(t)\\ \dot{z}(t) &= -\Pi_z(t)\\ \dot{\Pi}_z(t) &= 3z(t) - \Pi_x(t)\,.\end{aligned}$$

Desacoplando dichas ecuaciones, encontramos la siguiente ecuación para x(t):

$$x^{(4)}(t) + 3\ddot{x}(t) + x(t) = 0\,,$$

y similares para los demás operadores. La solución general para $x(t)$ es:

$$x(t) = C_1e^{i\omega_1 t} + C_2e^{-i\omega_1 t} + C_3e^{i\omega_2 t} + C_4e^{-i\omega_2 t}\,,$$

mientras que para las demás variables tenemos:

$$\begin{aligned}z(t) &= i\omega_1(C_1e^{i\omega_1 t} - C_2e^{-i\omega_1 t}) + i\omega_2(C_3e^{i\omega_2 t} - C_4e^{-i\omega_2 t})\,,\\ \Pi_x(t) &= i\omega_1(3-\omega_1^2)(C_1e^{i\omega_1 t} - C_2e^{-i\omega_1 t}) + i\omega_2(3-\omega_2^2)(C_3e^{i\omega_2 t} - C_4e^{-i\omega_2 t})\,,\\ \Pi_z(t) &= \omega_1^2(C_1e^{i\omega_1 t} + C_2e^{-i\omega_1 t}) + \omega_2(C_3e^{i\omega_2 t} - C_4e^{-i\omega_2 t})\,.\end{aligned}$$

Fijamos las constantes C_i´s en término de las condiciones iniciales al tiempo $t=0$: $x(t=0)\equiv x$, $\Pi_z(t=0)\equiv\Pi_z$ y de las condiciones finales al tiempo t: $x^\dagger(t)$ y $\Pi_z^\dagger(t)$. Para fijar las condiciones finales, hacemos uso de las relaciones:

$$x^\dagger = \tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})x - 2\tilde{b}^2\Pi_z\,,$$
$$\Pi_z^\dagger = 2\tilde{b}^2 x - \tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\Pi_z\,,$$

válidas para todo tiempo. De esta forma llegamos al siguiente sistema de ecuaciones para las C_i´s:

$$\begin{aligned}
x &= C_1+C_2+C_3+C_4\,,\\
\Pi_z &= \omega_1^2(C_1+C_2)+\omega_2^2(C_3+C_4)\,,\\
x^\dagger(t) &= \left(\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})-2\tilde{b}^2\omega_1^2\right)\left(C_1e^{i\omega_1 t}+C_2e^{-i\omega_1 t}\right)\\
&\quad+\left(\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})-2\tilde{b}^2\omega_2^2\right)\left(C_3e^{i\omega_2 t}+C_4e^{-i\omega_2 t}\right)\,,\\
\Pi_z^\dagger(t) &= \left(2\tilde{b}^2-\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\omega_1^2\right)\left(C_1e^{i\omega_1 t}+C_2e^{-i\omega_1 t}\right)\\
&\quad+\left(2\tilde{b}^2-\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\omega_2^2\right)\left(C_2e^{i\omega_2 t}+C_4e^{-\omega_2 t}\right)\,.
\end{aligned}$$

La solución a dicho sistema es:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{(\omega_1^2-\omega_2^2)2i\sin(\omega_1 t)}\Big\{e^{-i\omega_1 t}\left\{\omega_2^2x-\Pi_z\right\}+\Big\{2\tilde{b}^2-\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\omega_2^2\Big\}x^\dagger(t)\\
&\quad+\Big\{2\tilde{b}^2\omega_2^2-\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\Big\}\Pi_z^\dagger(t)\Big\}\,,\\
C_2 &= \frac{-1}{(\omega_1^2-\omega_2^2)2i\sin(\omega_1 t)}\Big\{e^{i\omega_1 t}\left\{\omega_2^2x-\Pi_z\right\}+\Big\{2\tilde{b}^2-\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\omega_2^2\Big\}x^\dagger(t)\\
&\quad+\Big\{2\tilde{b}^2\omega_2^2-\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\Big\}\Pi_z^\dagger(t)\Big\}\\
C_3 &= \frac{-1}{(\omega_1^2-\omega_2^2)2i\sin(\omega_2 t)}\Big\{e^{-i\omega_2 t}\left\{\omega_1^2x-\Pi_z\right\}+\Big\{2\tilde{b}^2-\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\omega_1^2\Big\}x^\dagger(t)\\
&\quad+\Big\{2\tilde{b}^2\omega_1^2-\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\Big\}\Pi_z^\dagger(t)\Big\}\,,\\
C_4 &= \frac{1}{(\omega_1^2-\omega_2^2)2i\sin(\omega_2 t)}\Big\{e^{i\omega_2 t}\left\{\omega_1^2x-\Pi_z\right\}+\Big\{2\tilde{b}^2-\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\omega_1^2\Big\}\\
&\quad+\Big\{2\tilde{b}^2\omega_1^2-\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\Big\}\Pi_z^\dagger(t)\Big\}\,.
\end{aligned}$$

Sustituyendo dichas soluciones en:

$$z = i\omega_1(C_1-C_2)+i\omega_2(C_3-C_4)\,,$$
$$\Pi_x = i\omega_2(C_1-C_2)+i\omega_1(C_3-C_4)\,,$$

obtenemos las expresiones deseadas para z y Π_x, mientras que usando las siguientes ecuaciones derivadas de las condiciones de realidad:

$$z^\dagger(t) = -\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})z(t)+2\tilde{b}^2\Pi_x(t)\,,$$
$$\Pi_x^\dagger(t) = -2\tilde{b}^2z(t)+\tilde{b}(\tilde{a}+\tilde{c})\Pi_x(t)\,,$$

obtenemos las expresiones deseadas para $z^\dagger(t)$ y $\Pi_x(t)$. Los resultados son:

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1}{(\omega_1^2-\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}\{\{-\omega_1\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\omega_2\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}x \\
&\quad +\{\omega_2\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-\omega_1\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\Pi_z \\
&\quad +\{\omega_1\sin(\omega_1 t)+\omega_2\sin(\omega_2 t)\}x^\dagger(t)+\{-\omega_2\sin(\omega_1 t)-\omega_1\sin(\omega_2 t)\}\Pi_z^\dagger(t)\}\,, \\
\Pi_x &= \frac{1}{(\omega_1^2-\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}\{\{-\omega_1^3\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\omega_2^3\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}x \\
&\quad +\{\omega_1\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-\omega_1\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\Pi_z \\
&\quad +\{\omega_1^2\sin(\omega_1 t)+\omega_2^3\sin(\omega_2 t)\}x^\dagger(t)+\{-\omega_1\sin(\omega_1 t)-\omega_2\sin(\omega_2 t)\}\Pi_z^\dagger(t)\}\,, \\
z^\dagger(t) &= \frac{1}{(\omega_1^2-\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}\{\{-\omega_1\sin(\omega_1 t)-\omega_2\sin(\omega_2 t)\}x \\
&\quad +\{\omega_2\sin(\omega_1 t)+\omega_1\sin(\omega_2 t)\}\Pi_z \\
&\quad +\{\omega_1\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-\omega_2\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}x^\dagger(t) \\
&\quad +\{-\omega_2\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\omega_1\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\Pi_z^\dagger(t)\}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_z^\dagger(t) &= \frac{1}{(\omega_1^2-\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}\{\{-\omega_1^3\sin(\omega_1 t)-\omega_2^3\sin(\omega_2 t)\}x \\
&\quad +\{\omega_1\sin(\omega_1 t)+\omega_2\sin(\omega_2 t)\}\Pi_z \\
&\quad +\{\omega_1^3\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-\omega_2^3\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}x^\dagger(t) \\
&\quad +\{-\omega_1\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\omega_2\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\Pi_z^\dagger\}\,.
\end{aligned}
$$

Deseamos ahora calcular el valor del Hamiltoniano:

$$H=-\frac{1}{2}\Pi_z^2-\frac{3}{2}z^2+\frac{1}{2}x^2+\Pi_x z\,,$$

en término de $\{x,\Pi_z,x^\dagger(t),\Pi_z^\dagger(t)\}$, usando los resultados anteriores. Como el Hamiltoniano está compuesto de términos cuadráticos, entonces necesitamos calcular el valor de los conmutadores:

$$\left[x,x^\dagger(t)\right]\,,\qquad \left[x,\Pi_z^\dagger(t)\right]\,,\qquad \left[\Pi_z,x^\dagger(t)\right]\,,\qquad \left[\Pi_z,\Pi_z^\dagger(t)\right]\,. \tag{78}$$

Para hacerlo, escribimos el Hamiltoniano H en término coordenadas normales $\{\xi_1,\xi_2,P_{\xi_1},P_{\xi_2}\}$:

$$H=\frac{1}{2}\left(P_{\xi_1}^2+P_{\xi_2}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\omega_1^2\xi_1^2+\omega_2^2\xi_2^2\right)\,.$$

Las ecuaciones de Heisenberg para $\{\xi_1,\xi_2,P_{\xi_1},P_{\xi_2}\}$ son:

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1(t) &= P_{\xi_1}(t)\,, \\
\dot{P}_{\xi_1}(t) &= -\omega_1^2\xi_1(t)\,, \\
\dot{\xi}_2(t) &= P_{\xi_2}(t)\,, \\
\dot{P}_{\xi_2}(t) &= -\omega_2^2\xi_2(t)\,.
\end{aligned}
$$

Fijando las condiciones iniciales $\xi_1(t=0) \equiv \xi_1$, $P_{\xi_1}(t=0) \equiv P_{\xi_1}$, $\xi_2(t=0) \equiv \xi_2$ y $P_{\xi_2}(t=0) \equiv P_{\xi_2}$ encontramos que las soluciones son:

$$\begin{aligned}
\xi_1(t) &= \cos(\omega_1 t)\xi_1 + \frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)P_{\xi_1}\,, \\
P_{\xi_1}(t) &= -\omega_1 \sin(\omega_1 t)\xi_1 + \cos(\omega_1 t)P_{\xi_1}\,, \\
\xi_2(t) &= \cos(\omega_2 t)\xi_2 + \frac{1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)P_{\xi_2}\,, \\
P_{\xi_2}(t) &= -\omega_2 \sin(\omega_2 t)\xi_2 + \cos(\omega_2 t)P_{\xi_2}\,.
\end{aligned}$$

De esta forma, usando las relaciones:

$$\begin{aligned}
x &= i\tilde{b}\xi_1 + \tilde{b}\xi_2\,, \\
\Pi_z &= i\tilde{c}\xi_1 + \tilde{a}\xi_2\,,
\end{aligned}$$

válidas para cada tiempo, y teniendo en cuenta el hecho de que clásicamente las coordenadas normales son reales y, por lo tanto, cuánticamente corresponden a operadores Hermíticos, obtenemos:

$$\begin{aligned}
x^\dagger(t) &= -i\tilde{b}\xi_1(t) + \tilde{b}\xi_2(t) \\
&= -i\tilde{b}\{\cos(\omega_1 t)\xi_1 + \frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)P_{\xi_1}\} + \tilde{b}\{\cos(\omega_2 t)\xi_2 + \frac{1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)P_{\xi_2}\}\,, \\
\Pi_z^\dagger(t) &= -i\tilde{c}\xi_1(t) + \tilde{a}\xi_2(t) \\
&= -i\tilde{c}\{\cos(\omega_1 t)\xi_1 + \frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)P_{\xi_1}\} + \tilde{a}\{\cos(\omega_2 t)\xi_2 + \frac{1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)P_{\xi_2}\}\,,
\end{aligned}$$

de tal forma que las relaciones de conmutación (78) se pueden calcular conociendo únicamente las relaciones de conmutación entre ξ_i´s y P_{ξ_i}´s. Así:

$$\begin{aligned}
\left[x, x^\dagger(t)\right] &= \frac{i}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\{\omega_2 \sin(\omega_1 t) + \omega_1 \sin(\omega_2 t)\}\,, \\
\left[x, \Pi_z^\dagger(t)\right] &= \frac{i}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\{\omega_1 \sin(\omega_1 t) + \omega_2 \sin(\omega_2 t)\}\,, \\
\left[\Pi_z, x^\dagger(t)\right] &= \frac{i}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\{\omega_1 \sin(\omega_1 t) + \omega_2 \sin(\omega_2 t)\}\,, \\
\left[\Pi_z, \Pi_z^\dagger(t)\right] &= \frac{i}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\{\omega_1^3 \sin(\omega_1 t) + \omega_2^3 \sin(\omega_2 t)\}\,,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la igualdad numérica:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}}\,.$$

Usando lo anterior, se llega a la siguiente expresión del Hamiltoniano H:

$$
\begin{aligned}
H \quad = \quad & \frac{1}{(\omega_1^2-\omega_2^2)\sin^2(\omega_1 t)\sin^2(\omega_2 t)}\Bigg\{\{\omega_1^2\sin^2(\omega_1 t)-\omega_2^2\sin^2(\omega_2 t)\}\left\{\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\dagger\,2}(t)}{2}\right\}\\
& +\{\omega_2^2\sin^2(\omega_1 t)-\omega_1^2\sin^2(\omega_2 t)\}\left\{\frac{\Pi_z^2}{2}+\frac{\Pi_z^{\dagger\,2}(t)}{2}\right\}\\
& +\{-\sin^2(\omega_2 t)\cos^2(\omega_2 t)+\cos^2(\omega_1 t)\sin^2(\omega_2 t)\}\{x\Pi_z+x^\dagger(t)\Pi_z^\dagger(t)\}\\
& +\{\sin^2(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\cos(\omega_1 t)\sin^2(\omega_2 t)\}\{\Pi_z^\dagger(t)x+x^\dagger(t)\Pi_z\}\\
& +\{-\omega_1^2\sin^2(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-\omega_2^2\cos(\omega_1 t)\sin^2(\omega_2 t)\}\{\,x^\dagger(t)x\}\\
& +\{-\omega_2^2\sin^2(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-\omega_1^2\cos(\omega_1 t)\sin^2(\omega_2 t)\}\{\Pi_z^\dagger(t)\Pi_z\}\Bigg\}\\
& -\frac{i}{2\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}\{\omega_2\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\omega_1\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\,.
\end{aligned}
$$

Hacemos notar que en todos los términos los operadores $\mathcal{O}^\dagger(t)$ se han dispuesto a la izquierda de los operadores $\mathcal{O}$, de tal forma que operen directamente sobre los bras correspondientes. Además, el último sumando se puede ver como:

$$
\begin{aligned}
& \frac{-i}{2\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}\{\omega_2\sin(\omega_1)\cos(\omega_2 t)+\omega_2\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\\
& = i\frac{d}{dt}\ln\left\{\sqrt{\frac{1}{\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}}\right\}\,.
\end{aligned}
$$

Obtenemos finalmente:

$$
\begin{aligned}
& \delta\langle x'^*,\Pi_z'^*,t|x'',\Pi_z'',0\rangle=\langle x'^*,\Pi_z'^*,t|\delta\Bigg\{\frac{i}{(\omega_1^2-\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}\Bigg\{\\
& \{\omega_1^3\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-\omega_2^3\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\left\{\frac{x''^2}{2}+\frac{x'^{*\,2}}{2}\right\}\\
& +\{\omega_2\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-\omega_1\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\left\{\frac{\Pi_z''^2}{2}+\frac{\Pi_z'^{*\,2}}{2}\right\}\\
& +\{\omega_1\sin(\omega_1 t)+\omega_2\sin(\omega_2 t)\}\{x'^*\Pi_z''+\Pi_z'^*x''\}\\
& +\{-\omega_1\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\omega_2\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\{x'^*\Pi_z'^*+x''\Pi_z''\}\\
& +\{-\omega_1^3\sin(\omega_1 t)-\omega_2^3\sin(\omega_2 t)\}\{x''x'^*\}+\{\omega_2\sin(\omega_1 t)-\omega_2\sin(\omega_2 t)\}\{\Pi_z''\Pi_z'^*\}\Bigg\}\\
& +\ln\sqrt{\frac{1}{\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}}\Bigg\}|x'',\Pi_z'',0\rangle\,,
\end{aligned}
$$

de tal forma que, integrando:

$$
\begin{aligned}
&\langle x'^{*},\Pi_z'^{*},t|x'',\Pi_z'',0\rangle=\sqrt{\frac{1}{\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}}\ \exp\Bigg\{\frac{i}{(\omega_1^2-\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)}\{\\
&\{\omega_1^3\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-\omega_2^3\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\left\{\frac{x''^2}{2}+\frac{x'^{*\,2}}{2}\right\}\\
&+\{\omega_2\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-\omega_1\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\left\{\frac{\Pi_z''^2}{2}+\frac{\Pi_z'^{*\,2}}{2}\right\}\\
&+\{\omega_1\sin(\omega_1 t)+\omega_2\sin(\omega_2 t)\}\{x'^{*}\Pi_z''+\Pi_z'^{*}x''\}\\
&+\{-\omega_1\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\omega_2\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\}\{x'^{*}\Pi_z'^{*}+x''\Pi_z''\}\\
&+\{-\omega_1^3\sin(\omega_1 t)-\omega_2^3\sin(\omega_2 t)\}\{x''x'^{*}\}+\{\omega_2\sin(\omega_1 t)-\omega_2\sin(\omega_2 t)\}\{\Pi_z''\Pi_z'^{*}\}\Bigg\}\,.
\end{aligned}
\tag{79}
$$

En el límite cuando $t\to 0$, dicha cantidad es aproximadamente:

$$
\begin{aligned}
&\langle x'^{*},\Pi_z'^{*},t\to 0|x'',\Pi_z'',0\rangle\approx\frac{1}{t}\exp\Bigg\{\frac{i}{2(\omega_1^2-\omega_2^2)t}\Big\{-\left(\omega_2^2(x''+x'^{*})^2-(\Pi_z''+\Pi_z'^{*})\right)^2\\
&+\left(\omega_1^2(x''-x'^{*})^2-(\Pi_z''-\Pi_z'^{*})\right)^2\Big\}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

o, en término de $\{\xi_1',\xi_2',\xi_1'',\xi_2''\}$:

$$
\langle x'^{*},\Pi_z'^{*},t\to 0|x'',\Pi_z'',0\rangle\approx\frac{1}{t}\exp\left\{\frac{i}{2}\{(\xi_1'-\xi_1'')^2+(\xi_2'-\xi_2'')^2\}\right\}
$$

Finalmente, podemos relacionar el propagador $\langle x'^{*},\Pi_z'^{*},t|x'',\Pi_z'',0\rangle$ escrito en variables no-Hermíticas con el propagador usual $\langle P_{\xi_1}',P_{\xi_2}',t|P_{\xi_1}'',P_{\xi_2}'',0\rangle$ escrito en variables Hermíticas. En efecto, partiendo de la relación de completez:

$$
\int dP_{\xi_1}dP_{\xi_2}|P_{\xi_1},P_{\xi_2}\rangle\langle P_{\xi_1},P_{\xi_2}|=1\,,
$$

entonces:

$$
\begin{aligned}
\langle x'^{*},\Pi_z'^{*},t|x'',\Pi_z'',0\rangle &= \int dP_{\xi_1}'dP_{\xi_2}'dP_{\xi_1}''dP_{\xi_2}''\\
&\quad\langle x'^{*},\Pi'^{*},t|P_{\xi_1}',P_{\xi_2}',t\rangle\langle P_{\xi_1}',P_{\xi_2}',t|P_{\xi_1}'',P_{\xi_2}'',0\rangle\langle P_{\xi_1}'',P_{\xi_2}'',0|x'',\Pi_z'',0\rangle\\
&= \int dP_{\xi_1}'dP_{\xi_2}'dP_{\xi_1}''dP_{\xi_2}''\\
&\quad\langle x'^{*},\Pi'^{*}|P_{\xi_1}',P_{\xi_2}'\rangle\langle P_{\xi_1}',P_{\xi_2}',t|P_{\xi_1}'',P_{\xi_2}'',0\rangle\langle P_{\xi_1}'',P_{\xi_2}''|x'',\Pi_z''\rangle\,.
\end{aligned}
$$

y donde se deben insertar los elementos de matriz (73). De esta forma, la dinámica descrita en la base no-Hermítica es totalmente equivalente a la descrita en la base Hermítica.

Conclusiones

A lo largo de la tesis, hemos expuesto y detallado una serie de herramientas y formalismos distintos con el propósito aplicarlos finalmente en el problema de la cuantización del oscilador de Pais-Uhlenbeck. Podemos resumir nuestro proceder en dicho problema. Primero, se ha desarrollado el mismo problema por un lado como una teoría de orden normal en la forma de dos osciladores armónicos, y por otro lado como una teoría de orden superior utilizando el formalismo de Ostrogradsky. En este punto se trata a ambas teorías como independientes entre sí, y se procede a construir la relación entre ambas mediante transformaciones canónicas que resultan ser complejas. Al fijar las condiciones de realidad del problema, realizamos una complexificación del sistema original de orden superior a una región en el espacio complejo de sus variables donde puede ser mapeado al sistema conformado por dos osciladores armónicos escrito en coordenadas reales. Más aún, se logra mapear el producto interno originalmente enfermo del sistema de orden superior al producto interno del sistema de dos osciladores que se encuentra bien definido, poniendo así fin al problema de fantasmas en la teoría. Todo esto se logró sin introducir nuevos formulaciones de la mecánica cuántica, como la mecánica cuántica PT-simétrica, sino tan solo valiéndonos de herramientas probadas, como transformaciones canónicas, o el principio de acción cuántico.

Como continuación del presente trabajo de tesis, podemos proponer varios puntos a desarrollar. El primero y más obvio es investigar una generalización del mismo método, proponiendo una función Lagrangiana del tipo:

$$L(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) \,,$$

donde la dependencia de hasta la n-ésima derivada es en forma cuadrática. En analogía con el trabajo expuesto, se puede intentar resolver el problema del modelo de mayor orden introduciendo operadores no-Hermíticos y conectando la Lagrangiana L complexificada con otra Lagrangiana puramente real $L_\xi\left(\xi_1, \dot{\xi}_2, \ldots, \xi_n, \dot{\xi}_n\right)$ por medio de:

$$\begin{aligned}
L\left(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}\right) \quad &+ \quad \frac{df}{dt} = L_\xi\left(\xi_1, \dot{\xi}_2, \ldots, \xi_n, \dot{\xi}_n\right) \,, \\
f \quad &= \quad f(x, \ldots, x^{(n)}) \,, \\
\xi_i \quad &= \quad \xi_i(x, \ldots, x^{(n)}) \,,
\end{aligned}$$

donde la función f es en general compleja, las coordenadas ξ_i son reales y solo su primera derivada $\dot{\xi}_i$ entran en L_ξ en forma cuadrática.

El segundo punto importante es la generalización del presente trabajo a teoría de campos. Dicha generalización resulta importante para que la investigación realizada encuentre su aplicación más relevante. El caso particular del campo escalar ha sido considerado en [**?**], mientras que el mismo campo con un término de interacción $\lambda\phi^4$ ha sido estudiado en [**?**]. El presente estudio espera poder contribuir positivamente a estos esfuerzos. En particular, se puede generalizar directamente el caso del oscilador de Pais-Uhlenbeck al caso de campos. En efecto, podemos ver que la densidad Lagrangiana de mayor orden:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\Box\phi\right)^2 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m_1^2 m_2^2}{2}\phi^2\,,$$

está relacionada con la densidad de orden normal:

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2}\partial_\mu\psi_1\partial^\mu\psi_1 - \frac{m_1^2}{2}\psi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi_2\partial^\mu\psi_2 - \frac{m_2^2}{2}\psi_2^2\,,$$

por medio de la ecuación:

$$\mathcal{L} + \partial_\mu f^\mu = \mathcal{L}_\psi\,,$$

donde:

$$\begin{aligned} f^\mu &= -\Box\phi\partial^\mu\phi\,, \\ \psi_1 &= i\left(\tilde{a}\phi + \tilde{b}\Box\phi\right)\,, \\ \psi_2 &= \tilde{c}\phi + \tilde{b}\Box\phi\,, \end{aligned}$$

y donde $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ y $\tilde{c}$ tienen la misma forma que en el caso del modelo de Pais-Uhlenbeck (**??**), con la sustitución $\omega_i \to m_i,\ i = 1, 2$. Notamos que la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_\psi$ es la correspondiente a dos campos de Klein-Gordon ψ_1 y ψ_2 y describe por lo tanto un sistema bien definido al exigir que dichos campos sean reales. En este marco, incluso pueden definirse términos de interacción, como por ejemplo:

$$\left(\phi\phi^*\right)^2 = -\frac{1}{\left(\tilde{c} - \tilde{a}\right)^4}\left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right)^2\,.$$

En vista de lo mencionado lineas arriba, podemos ver que el método descrito en la presente tesis permite una generalización inmediata a teoría de campos y parece posible una generalización a sistemas con derivadas de ordenes aún mayores.

Bibliografía

- M. Ostrogradsky, Mem. Acad. St. Petersbourg VI(4)(1850)385.
- P.D. Mannheim, D. Kazanas, Gen. Relativ. Gravit. 26, 337 (1994).
- D.A. Eliezer, R.P. Woodard, Nucl. Phys. B325, 389 (1989).
- P. Kristensen, C. Moller, K. Dan, Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Mess. 27 (1952)7.
- A. Connes, M.R. Douglas, A. Schwarz, JHEP 9802 (1998).
- N. Seiberg, E. Witten, JHEP 9802 (1999) 032.
- N. Seiberg, L. Susskind, N. Toumbas, JHEP 0006 (2000).
- T.C. Cheng, PM. Ho, M.C Yeh, Nucl. Phys. B 625 (2002).
- J.Z. Simon, Phys. Rev. D. 41 (1990)
- K.S. Stelle, Phys. Rev. D16, 953 (1977).
- S.W. Hawking, *Quantum Field Theory and Quantum Statistic: Essays in Honor of the Sixtieth Birthday of E.S. Fradkin*.
- T.D. Wick, G.C. Wick, Nucl. Phys. B9, 209 (1969).
- S.W. Hawking, T. Hertog, H.S. Reall, Phys. Rev. D65, (2002).
- P.D. Mannheim, A. Davidson, Phys. Rev. A71 (2005),
- C.M. Bender, P.D. Mannheim, Phys. Rev. Lett. 100, 110402 (2008)
- A. Pais, G.E. Uhlenbeck, Phys. Rev. 79, 145 (1950).
- C.M. Bender, Rep. Prog. Phys. 70 (2007).
- A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. 43 (2002).
- J. Schwinger, *Quantum Mechanics: Symbolism of Atomic Measurements.* Ed. Springer (2003).
- S.W. Hawking, T. Hertog, Phys. Rev. D65 (2002).