



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

INSTITUTO DE GEOFÍSICA

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
DE LA TIERRA

“UN ALGORITMO DE TRANSFORMADA HOUGH PARA EL  
ANÁLISIS DE RADARGRAMAS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**MAESTRA EN CIENCIAS**

(MODELACIÓN)

P R E S E N T A:

**AIXA MARÍA RIVERA RÍOS**

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. ELSA LETICIA FLORES MÁRQUEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D. F. 2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## *Dedicatoria*

A mis padres, Adalexis y Pedro, por todo el apoyo y por el amor que me han brindado.

## *Agradecimientos*

Por guiarme en la elaboración de esta investigación y por su apoyo incondicional, le agradezco a mi asesora de tesis la Dra. E. Leticia Flores Márquez.

Un agradecimiento particular a la Dra. Claudia Arango Galván, por acceder a que trabaje a su lado, por nunca negarme su ayuda y por su calidad humana.

A Oscar Díaz Molina, por ofrecerme los datos necesarios para la realización de esta tesis.

Al Dr. René E. Chávez Segura, por sus observaciones que permitieron orientar esta investigación.

Al comité sinodal: Dr. Victor M. Velasco, Dr. Robert Yates, Dr. Martín Díaz, Dra. Claudia Arango y Dra. E. Leticia Flores, por sus sugerencias y consejos para un mejor desarrollo de la tesis.

Al Instituto de Geofísica por brindarme el espacio y los medios para la realización de este trabajo de investigación.

A la Dirección General de Estudios de Posgrado, por otorgarme la beca para poder culminar los estudios.

A la UNAM por darme la oportunidad de efectuar los estudios de posgrado y formarme académicamente.

A mis profesores y compañeros por sus enseñanzas.

A Sasha y a Alexis, mis hermanos, por su compañía y apoyo en todo momento. A Vero por su compañía, su amistad y su apoyo. A Frances y a Daisy, por su amistad y porque aunque no estuve, estuvieron. A Carmen, Magali y Juan por los ánimos que me brindaron y por su amistad. A Lenin, a Iván y a Cris por darme un espacio para poder terminar los estudios. A Sac, a Karla y a Anita por compartir cubo.

A mi familia por su apoyo absoluto.

¡Muchas Gracias!

# Índice

Resumen.....	1
Capítulo 1: Introducción .....	3
Capítulo 2: Radar de Penetración Terrestre (GPR).....	6
2.1 Antecedentes .....	6
2.2 Sistema de radar .....	7
2.3 Propagación de ondas electromagnéticas .....	10
2.4 Pre-procesado.....	18
2.5 Transformadas Aplicadas al GPR .....	23
Capítulo 3: Transformadas Integrales.....	25
3.1 Introducción.....	25
3.2 Transformada de Fourier.....	30
3.3 Transformada de Laplace .....	36
3.4 Transformada Ondicular .....	39
3.5 Transformada de Radon .....	42
Capítulo 4: Transformada de Hough.....	55
4.1 Introducción.....	55
4.2 Algoritmo Transformada de Hough (Ballard, 1981).....	57
4.3 Algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough.....	59
Capítulo 5: Aplicación y discusión .....	82
5.1 Localización de tuberías .....	83
5.2 Estratigrafía volcánica .....	91
Capítulo 6: Conclusiones .....	96
Bibliografía .....	98
Apéndices.....	101
Apéndice A: Kernels de detección de bordes.....	101
Apéndice B: Esquema del programa .....	104
Apéndice C: Resultados de la localización de tuberías. ....	110
Apéndice D: Resultados de los datos de estratigrafía volcánica.....	116

## Resumen

Esta investigación presenta un algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough para el realce de estructuras geológicas en datos de Radar de Penetración Terrestre (GPR, por sus siglas en inglés). Para su aplicación, es necesario obtener la imagen en escala de grises del radargrama. Los datos de GPR deben haber pasado por un pre-procesamiento, que consiste esencialmente en la remoción de ruido, deconvolución y migración. La primera parte del filtro consiste en la detección de bordes en la imagen, por lo que se realiza una convolución de la imagen con un kernel de detección de bordes. El algoritmo planteado está basado en la transformada generalizada de Hough propuesta por Ballard (1981). Por lo que, la imagen obtenida de la convolución debe transformarse en una imagen binaria. El método basado en la transformada de Hough consiste en la aplicación de la transformada generalizada de Hough para detectar localmente (en una ventana) las estructuras y obtener una imagen global, que contenga las estructuras de interés. A diferencia del algoritmo propuesto por Ballard (1981), en lugar de realizar una tabla de referencia (Tabla-R) que describe la estructura de antemano, se calcula una Tabla-R en cada paso de la ventana. Se definió un punto con una cantidad de píxeles y la ventana se recorre por cada punto en la imagen. La Tabla-R se obtiene mediante la descripción del punto de borde con respecto al punto de referencia en la ventana. Esta descripción consiste en su localización (con respecto al punto de referencia en la ventana) y su dirección. El proceso de binarizar la imagen se realizó con un algoritmo iterativo de detección de un umbral óptimo propuesto por Ridler y Calvard (1978). Además, se presenta otro algoritmo y aplica el basado en la transformada de Hough para localizar estructuras circulares que se caracterizan por las hipérbolas de difracción en el perfil de GPR. Sobre las hipérbolas detectadas, se ajusta un círculo, obteniendo la localización de su centro y radio. Para mostrar y validar los algoritmos, se aplicaron a 2 ejemplos de radargramas: el primero consiste en un perfil que contiene 3 hipérbolas de difracción correspondientes a 3 tubos enterrados y el segundo, en un perfil adquirido en campo para analizar estratigrafía volcánica.

## **Abstract**

This paper presents an algorithm based on the Generalized Hough Transform (GHT) to enhance geologic structures in Ground Penetrating Radar (GPR) data. For the application of the algorithm it is necessary to obtain a gray scale image of the radargram, and is necessary to get the image as a function of the horizontal distance and depth. Therefore, the GPR data had to pass through pre-processing techniques, which essentially consist of noise removal, deconvolution, and migration. The first part of this algorithm consists of getting an image that represents the borders of the structures, so the image has to be convolved with an edge detector mask. The process of getting a binary image was realized by an iterative optimal thresholding algorithm. The proposed algorithm consists of the application of the GHT to locally (in windows) detect the structures and obtain a global image that contains the structures of interest. Besides this algorithm, another one is proposed to localize circular structures that are characterized by diffraction hyperbolas in the GPR profile. In this case, the proposed GHT algorithm is applied and the other algorithm adjusts a circle on the hyperbolas detected by the first, getting the localization (center and radius) of the structure. Finally, to show and validate the algorithms, they were applied to an example that consists of a profile with three hyperbolas corresponding to three buried pipes.

## Capítulo 1: Introducción

El Radar de Penetración Terrestre (GPR, por sus siglas en inglés) es un método geofísico, que mediante la propagación de ondas electromagnéticas en el subsuelo, registra la propagación de la señal electromagnética, de donde es posible obtener la distribución de estructuras en el subsuelo a partir de las propiedades de transmisión de dichas señales. Este método presenta la ventaja de no ser invasivo, por lo que es muy útil en la detección de objetos someros; ha sido utilizado en la geofísica, en aplicaciones ambientales, en la ingeniería civil y en la arqueología. El sistema del radar consiste en un generador de señal, antenas transmisoras y receptoras, y un receptor. Mientras la antena se mueve sobre la superficie, la señal recibida se presenta como una función del tiempo de viaje, en forma de radargrama (Reynolds, 1997). El radargrama es la representación gráfica de las señales electromagnéticas tal que, el eje horizontal de la sección representa la posición del sistema GPR sobre la superficie terrestre y el eje vertical es el tiempo de viaje de la onda electromagnética.

El objetivo general del procesamiento de señales aplicado al GPR es interpretar el radargrama como una imagen del subsuelo que permita clasificar las reflexiones de la onda electromagnética generadas por la existencia de estructuras geológicas en el mismo. Debido a las analogías entre las ondas electromagnéticas y las sísmicas, actualmente los datos de GPR se pre-procesan con técnicas que fueron desarrolladas para el procesamiento de datos de reflexión sísmica.

En general, para el procesamiento de datos de reflexión sísmica y de datos de GPR, las transformadas integrales han sido aplicadas en su modelación, interpretación en el espacio de transformación y filtrado. Estas transformadas tienen su origen en el siglo XIX con los trabajos de Joseph Fourier y de Oliver Heaviside que durante el siglo XX toman proporciones más generales (Davies, 2005). Una transformada integral se puede definir como un cambio de base de los vectores que representan las señales geofísicas. La transformada de Radon es definida como una integral sobre una línea y su generalización es la proyección sobre formas arbitrarias, de acuerdo a un conjunto de funciones. En el procesamiento sísmico y de GPR, la transformada de Radon ha sido empleada para propósitos muy diversos, como descomposición de ondas planas, análisis de velocidad, supresión de múltiples, separación y filtrado de ondas, en la inversión de

datos de refracción, así como en la detección de lineamientos y filtrado direccional en el análisis geológico y geofísico (Nuzzo y Quarta, 2004).

La transformada de Hough se considera como una discretización de la transformada de Radon. Fue Hough (1962) quien inventó esta transformación para la detección de las rutas de partículas subatómicas pasando por un campo de visión. La transformada original de Hough fue diseñada para detectar líneas rectas y curvas, este método se utiliza sólo si se conocen las ecuaciones analíticas de las líneas de bordes del objeto. En 1981, Ballard planteó la transformada generalizada de Hough que detecta objetos aunque no se conozca su ecuación analítica. En este caso, la detección de objetos se realiza mediante una tabla de referencia (Tabla-R) o plantilla que describe el objeto a detectar.

El objetivo principal de esta tesis es la generación del algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough, para determinar de manera automatizada la existencia de estructuras geológicas en un radargrama. El filtro basado en la transformada de Hough consiste en la aplicación de la transformada generalizada de Hough para detectar localmente (en una ventana) las estructuras y producir una imagen global, que contenga las estructuras de interés. Por lo tanto, en el algoritmo propuesto no se realiza una Tabla-R de antemano, puesto que no conocemos la estructura que queremos segmentar en la imagen, sino que se calcula la Tabla-R en cada paso de la ventana. Además, se diseña un segundo algoritmo para localizar estructuras circulares presentes en el subsuelo y son detectadas por el sistema GPR.

Para cumplir con este objetivo se diseñaron algunas metas específicas que se detallan en los capítulos de la presente tesis. En el capítulo 2 se presenta la teoría del GPR que consiste en una descripción del sistema de radar y sus antecedentes, la teoría de propagación de ondas electromagnéticas y el pre-procesamiento de los datos. El capítulo 3, presenta una noción general de lo que es una transformación y en particular las transformaciones integrales, con una explicación general y algunos ejemplos de las transformaciones más aplicadas al procesamiento de datos geofísicos, en especial a los datos de GPR. Las transformadas integrales que se discuten en dicho capítulo son las de Fourier, Laplace, Ondicular y Radon, de las cuales se presentan sus definiciones en el caso continuo y discreto, sus propiedades y algunos ejemplos de aplicaciones a los datos de GPR. En el capítulo 4 se describe el algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough, así como el algoritmo para la localización de estructuras circulares. El capítulo 5 muestra dos ejemplos para exponer y validar la aplicación del algoritmo basado en la

transformada generalizada de Hough. El primer ejemplo consiste en la localización de tres tubos enterrados, en donde además de la transformada generalizada de Hough, se aplica la opción de localización de estructuras circulares. El segundo, es un ejemplo de estratigrafía volcánica, realizado en las faldas del volcán Parícutín en Michoacán, México, en el cual solo se aplicó el algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough debido a que no contiene estructuras circulares. El sexto capítulo presenta las conclusiones obtenidas de la realización de esta investigación. Finalmente, se incluye una serie de cuatro apéndices que contienen descripciones detalladas del algoritmo propuesto y de los resultados obtenidos.

## Capítulo 2: Radar de Penetración Terrestre (GPR)

### 2.1 Antecedentes

El Radar de Penetración Terrestre (GPR) es un método geofísico, que utiliza la propagación de ondas electromagnéticas en el subsuelo para registrar la retro-dispersión de la señal, de la cual es posible obtener la distribución de estructuras en el subsuelo mediante las propiedades de transmisión del medio en estudio. El desarrollo civil más temprano de este tipo de estudios fue hacia 1960 con el de radio-eco-sondeo utilizado en capas de hielo polar (Reynolds, 1997). Uno de los primeros usos militares del GPR fue durante la guerra de Vietnam, a fines de la década de 1960 y principios de 1970, con la finalidad de encontrar minas no metálicas y túneles (Peters et al., 1994).

El GPR es conocido como un método no destructivo de detección de objetos someros. Las aplicaciones de GPR pueden dividirse en dos clasificaciones basadas en la frecuencia principal de la antena. Para aplicaciones geológicas, cuando la penetración tiende a ser más importante que la resolución, se usan antenas con frecuencia  $\leq$  a 500 MHz y para aplicaciones a la ingeniería civil o pruebas no destructivas, se usan antenas con frecuencias  $\geq$  a 500 MHz, hasta 900 MHz o 1 GHz (Reynolds, 1997).

El GPR ha sido utilizado en el área de la geofísica para la localización de estructuras geológicas, en aplicaciones ambientales para la detección de fluidos de contaminantes, en la ingeniería civil para obtener información sobre las condiciones de una construcción y en la arqueología para localizar restos de civilizaciones. En investigaciones geofísicas, el GPR ha sido aplicado en sondeos geológicos de distintos tipos, desde la exploración de las capas de hielo del Ártico y Antártico, regiones de permafrost en Norteamérica, mapeos de granito, de calizas, de mármol y otras rocas (Daniels, 2004). El hielo tiene parámetros eléctricos que permiten pruebas con GPR a una penetración de metros a centenas de metros dependiendo de sus propiedades físicas, también tiene una morfología complicada con capas y otras estructuras que permiten la información de climas pasados. Entre los objetos específicos para aplicaciones ambientales se incluyen la localización de tanques enterrados, rellenos, estructuras geológicas, niveles de agua, trincheras y fluidos contaminantes. En la ingeniería civil, ha sido usado para localizar tuberías de plástico o metal enterradas en el subsuelo, imperfecciones en las varillas dentro de estructuras de concreto, laminaciones y huecos en calles y puentes. Existe una variedad de objetos no metálicos

enterrados y contrastes entre capas que son de interés en arqueología, y pueden ser detectadas bajo condiciones favorables de la propagación en el subsuelo. Se ha probado que el GPR es una herramienta útil para la percepción remota en áreas de minerales como es en la industria de canteras, de carbón y de sal en particular (Peters et al., 1994). Además, desde aviones o satélites, se ha aplicado en la exploración planetaria, formaciones de hielo, glaciares y penetrar a través de la cima de un bosque (Daniels, 2004).

## ***2.2 Sistema de radar***

El sistema de radar se compone de un generador de señal, antenas transmisoras y receptoras, y un receptor (Figura 1). Dicho sistema hace que la antena transmisora genere un tren de ondas de radio que se propaga en un rayo ancho. El tiempo de viaje de una onda de radio desde el instante de transmisión hasta el regreso, a la antena receptora, es del orden de nanosegundos (Reynolds, 1997). La parte más crítica del GPR es la antena, que usualmente tiene la forma de dipolos altamente cargados para reducir lo más posible el ruido de la misma, el cual puede extenderse a la ventana de la señal deseada. Estos dipolos en las antenas representan filtros pasa bandas donde la frecuencia central coincide aproximadamente con la frecuencia donde los dipolos tienen de largo la mitad de la longitud de la onda emitida en el ambiente que incluye las propiedades electromagnéticas del subsuelo (Peters et al., 1994). La fuente dipolar depende de la dirección y las ondas de campo registradas dependen del ángulo de orientación del transmisor y receptor relativo a la orientación de los objetos estudiados (Van Gestel y Stoffa, 2001). Básicamente, la señal recibida varía sinusoidalmente con el ángulo entre el par de antenas y el objeto que se quiere detectar. Además de rotar físicamente la antena, es posible intercambiar electrónicamente (conmutar) las señales del transmisor/receptor con un conjunto de múltiples pares de antenas co-localizadas. En adición a la directividad de la antena, se debe tomar en consideración la interacción del campo reactivo de la antena con el material dieléctrico y sus efectos en los patrones característicos de radiación. En general, el material puede ser considerado como un dieléctrico disipativo y por sus efectos de carga puede jugar un rol importante en la determinación de la ejecución en bajas frecuencias de la antena y en consecuencia del GPR. La interacción entre la antena y el semi-espacio dieléctrico es importante, debido a que puede causar una modificación de las características de radiación de la antena tanto espacial como temporalmente (Daniels, 2004). La antena se usa en modos monoestático y biestático. El modo

monoestático es cuando la antena sirve como transmisora y receptora, mientras que en el biestático, las antenas están separadas y una sirve como emisora y la otra como receptora (Reynolds, 1997). El sistema biestático es usado para reducir las réplicas directas del transmisor al receptor. En la práctica, las medidas de GPR están hechas por el movimiento continuo de las antenas en superficie (Peters et al., 1994). A través de este movimiento, la antena transmisora produce unas ondas de campo electromagnético cuyo campo eléctrico es polarizado paralelo al eje mayor de dicha antena y la antena receptora registra la componente paralela a su eje mayor (Van Gestel y Stoffa, 2001). Mientras la antena se mueve sobre la tierra, la señal recibida se presenta como una función del tiempo de viaje, o sea, el tiempo tomado desde el instante de transmisión hasta la detección del receptor, en forma de radargrama (Reynolds, 1997). El eje horizontal del radargrama es la posición en la superficie, y el eje vertical es el tiempo de viaje de la onda electromagnética (Figura 2). Cada vez que las antenas viajan una distancia igual al espaciado entre las trazas, la siguiente secuencia de eventos que ocurren en sistemas GPR son: 1) la onda es transmitida, 2) el receptor se enciende a esperar la señal reflejada, 3) después de un cierto periodo de tiempo el receptor se apaga (Peters et al., 1994). La Figura 3, presenta un esquema de cómo la señal electromagnética es propagada y reflejada hasta el receptor del sistema GPR. Al ser el GPR un método que detecta las reflexiones de la onda electromagnética, sus secciones son similares a las secciones de reflexión sísmica. Una diferencia entre datos de GPR y datos de reflexión sísmica es el contenido de frecuencias altas de los datos del GPR, que está en el rango de 100 MHz a 1GHz, comparado con 10-100 Hz de los métodos sísmicos. Como resultado del rango de frecuencia utilizado por el GPR, la máxima penetración de las medidas de GPR decrece hasta aproximadamente 40 m y la resolución incrementa (Van Gestel y Stoffa, 2001).



Figura 1. Sistema de GPR con una antena, en modo monoestático, sobre la superficie del subsuelo.

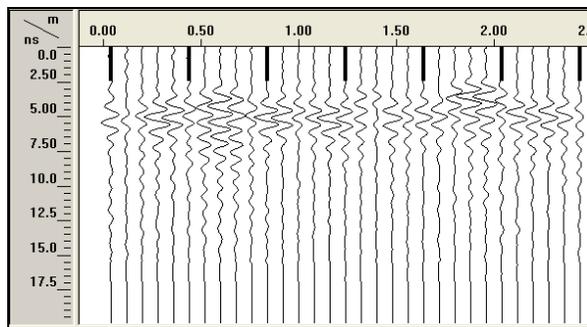


Figura 2. Ejemplo de un radargrama, el eje horizontal corresponde a la localización del sistema en superficie y el eje vertical corresponde al tiempo de viaje de la onda electromagnética.

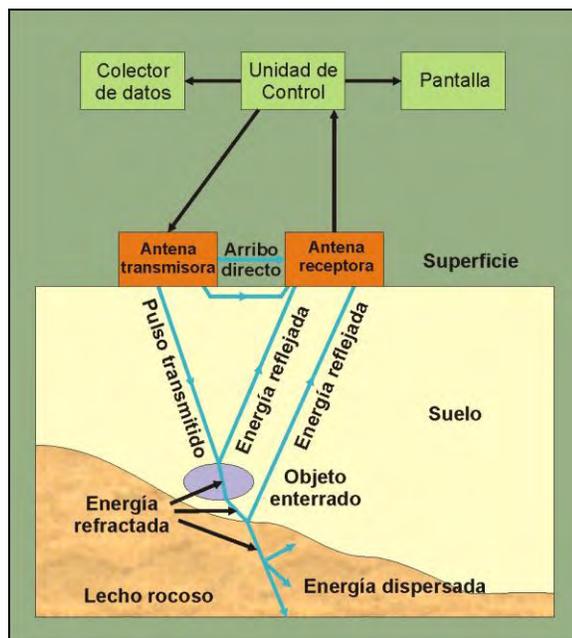


Figura 3. Esquema de la propagación de la señal electromagnética, emitida por la antena transmisora y reflejada por objetos en el subsuelo hacia la antena receptora.

Los arreglos para la obtención de datos en campo son el perfil de reflexión, sondeo de reflexión y refracción de ángulos anchos (WARR, por sus siglas en inglés), sondeos de punto medio común (CMP, por sus siglas en inglés) y transiluminación o tomografía de radar. En el perfil de reflexión, una o más antenas se mueven sobre la superficie terrestre simultáneamente con la medida del tiempo de viaje de los reflectores del radar. La configuración de las antenas en WARR, es una en la cual el transmisor se mantiene fijo en una localización y el receptor se mueve incrementando la distancia entre el emisor y el receptor. La localización de este sondeo debe ser en un área donde los reflectores principales son planos o estar inclinados a ángulos someros y se asume que las características del reflector son las mismas sobre el área del subsuelo por donde el sondeo se está realizando. El sondeo de punto medio común (CMP), se utiliza para no tener la suposición de que las características del reflector sean las mismas, en este caso, tanto el transmisor como el receptor se mueven alejando uno del otro para que el punto medio de reflexión entre ambos este en una localización fija. En la tomografía de radar, el transmisor y el receptor están en lados opuestos del medio en investigación (Reynolds, 1997). Según Daniels (2004), para su efectividad operacional, el GPR depende del cumplimiento de los siguientes requisitos:

- a) Acoplamiento eficiente de la radiación electromagnética en el suelo.
- b) Penetración adecuada de la radiación a través del subsuelo teniendo en cuenta la profundidad del objetivo.
- c) Obtener de los objetos enterrados u otra discontinuidad dieléctrica una señal suficientemente dispersa para la detección en o sobre la superficie del suelo.
- d) Un ancho de banda adecuado en la señal detectada, teniendo en cuenta la resolución deseada y los niveles de ruido.

### ***2.3 Propagación de ondas electromagnéticas***

Cuando trabajamos con GPR, la radiación es electromagnética y su propagación está descrita por las ecuaciones de Maxwell con el campo eléctrico perpendicular al magnético. Estas ecuaciones determinan los efectos de transmisión, reflexión, atenuación y dispersión de la onda propagada. Estas ecuaciones son la ley de Faraday, la ley de Ampere y la ley de Gauss, que se describen a continuación:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{(Ley de Faraday)} \\
\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} && \text{(Ley de Ampere)} \\
\nabla \cdot \vec{D} &= q && \text{(Ley de Gauss)} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.1}$$

donde  $\vec{E}$  es el vector de intensidad eléctrica (o campo eléctrico) [V/m]

$\vec{B}$  es el flujo magnético (o inducción magnética) [T = Wb/m<sup>2</sup>]

$\vec{H}$  es el vector de intensidad magnética (o campo magnético) [A/m]

$\vec{J}$  es la densidad de corriente (o conducción) [A/m<sup>2</sup>]

$\vec{D}$  es el flujo eléctrico (o corrientes de desplazamiento) [C/m<sup>2</sup>]

$q$  es la carga eléctrica [C/m<sup>3</sup>]

La ley de inducción electromagnética de Faraday nos dice que un campo magnético puede producir una corriente en una trayectoria cerrada si el flujo magnético está variando en el tiempo. De acuerdo con la ley de Lenz, el voltaje inducido por el flujo  $\vec{B}$  tiene una polaridad tal, que la corriente establecida en una trayectoria cerrada da lugar a un flujo que se opone al cambio de flujo magnético. La ley de Ampere establece que el campo magnético es generado tanto por las corrientes de conducción como por las de desplazamiento (Díaz Molina, 2003). La primera ecuación de la ley de Gauss establece que el flujo eléctrico que pasa a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total encerrada por esa superficie. La ley de Gauss para el campo magnético establece que las líneas de flujo magnético son cerradas y no terminan en una carga magnética (Hayt y Buck, 2006).

La propagación de las ondas electromagnéticas depende de dos factores: de la naturaleza del medio (la permitividad o constante dieléctrica, la permeabilidad magnética y la conductividad) y de la frecuencia de la onda electromagnética. Para completar el sistema de ecuaciones se tienen las relaciones constitutivas, que describen la dependencia de la propagación electromagnética con la naturaleza del medio. Éstas son:

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\
\vec{B} &= \mu \vec{H} \\
\vec{J} &= \sigma \vec{E} \\
\varepsilon &= \varepsilon_0 \varepsilon_r, \quad \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m} \\
\mu &= \mu_0 \mu_r, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

donde  $\varepsilon$  es la permitividad dieléctrica, [F/m]  
 $\mu$  es la permeabilidad magnética, [H/m]  
 $\varepsilon_0$  y  $\mu_0$  corresponden a los valores del vacío  
 $\varepsilon_r$  y  $\mu_r$  corresponden a los valores relativos al medio  
y  $\sigma$  es la conductividad eléctrica, [S/m]

La permitividad dieléctrica es una medida del grado de resistencia del medio a un flujo de carga y se determina por la relación entre el desplazamiento eléctrico y la intensidad del campo que lo produce. La permeabilidad magnética es la habilidad de un medio de dar paso a las líneas de campo magnético y se determina por la relación entre la inducción magnética y el campo magnético externo. La conductividad eléctrica es la capacidad de un material para transportar cargas mediante el proceso de conducción y se determina por la ley de Ohm, que relaciona la densidad de corriente con el campo eléctrico. La propagación de la onda electromagnética muestra dos extremos: un dieléctrico perfecto y un conductor perfecto. El comportamiento de la mayoría de las rocas se encuentran dentro de un rango intermedio, el de dieléctricos disipativos y el GPR, cuyo rango de frecuencias es de 1 a 1000 MHz, se encuentra dentro de esta región intermedia (Díaz Molina, 2003).

Utilizando la notación de Daniels (2004), una onda propagándose en la dirección positiva de  $z$  en un dieléctrico disipativo puede ser descrita por la siguiente ecuación  $E(z) = E_0 e^{-jkz}$ , donde la constante de propagación es

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \text{ m}^{-1} \tag{2.3}.$$

La longitud de onda  $\lambda$  es definida como la distancia en la cual la onda se propaga en un periodo de oscilación y  $k\lambda = 2\pi$ , entonces  $\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{v}{f}$  donde la velocidad de propagación

es  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$  y  $f$  es la frecuencia de la onda. En general la permitividad y la conductividad son

complejas y se pueden expresar como  $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$  y  $\sigma = \sigma' - j\sigma''$  donde  $\varepsilon'$  y  $\sigma'$  son las partes reales y  $\varepsilon''$  y  $\sigma''$  son las partes imaginarias. El parámetro  $\varepsilon'$  se relaciona a la permitividad eléctrica, mientras que el parámetro  $\varepsilon''$  está relacionado a la pérdida asociada a la conductividad y a la frecuencia (Daniels, 2004). La permitividad real aumenta mientras la frecuencia decae, por lo que, la permitividad de alta frecuencia ( $\varepsilon_\infty$ ) se toma como la permitividad real menor cuando la permitividad imaginaria es cero. La permitividad imaginaria indica la absorción o pérdida de energía dentro del material dieléctrico y esto contribuye a la absorción de ondas de radio dentro del subsuelo (Reynolds, 1997).

En general los parámetros de interés para una aplicación de GPR son la atenuación y la velocidad de propagación de la onda. En un dieléctrico conductivo, la constante de propagación es compleja  $k = \omega\sqrt{\mu(\varepsilon' - j\varepsilon'')}$  y puede ser separado en sus partes real e imaginaria

$$jk = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)} \quad (2.4)$$

donde la constante de atenuación es

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} - 1\right]} \quad (2.5)$$

y la constante de fase

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} + 1\right]} \quad (2.6)$$

El factor sin dimensión  $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$  es conocido como la tangente de pérdida ( $\tan(\delta)$ ) del material. En el caso de materiales secos y relativamente sin pérdida, es razonable considerar que ( $\tan(\delta)$ ) es constante alrededor del rango de frecuencias utilizado. Para materiales húmedos y con pérdida  $\tan(\delta) = \frac{\sigma' + \omega\varepsilon''}{\omega\varepsilon' - \sigma''}$  (Daniels, 2004). La constante dieléctrica relativa de un medio estratificado está relacionada con la porosidad ( $\phi$ ) considerando la proporción de constituyentes presentes y sus respectivas constantes dieléctricas relativas. La relación entre las medidas de la constante

dieléctrica relativa y la porosidad, cuando el campo es aplicado paralelo a la estratificación, es  $\varepsilon_r = (1-\varphi)\varepsilon_m + \varphi\varepsilon_w$  donde  $\varepsilon_m$  y  $\varepsilon_w$  son las permitividades dieléctricas relativas para la matriz rocosa y los poros de agua fluida, respectivamente. Cuando el campo externo es aplicado perpendicular a la estratificación, entonces  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_m \varepsilon_w}{[(1-\varphi)\varepsilon_m + \varphi\varepsilon_w]}$  (Reynolds, 1997). Una aproximación para la tangente de pérdida, que permite una indicación del orden de magnitud es cuando  $\sigma$  es pequeña, entonces

$$\tan(\delta) = \frac{\sigma'}{\omega\varepsilon'}. \quad (2.7)$$

La velocidad de propagación disminuye con el incremento de la tangente de pérdida y de la constante dieléctrica relativa. A su vez, la tangente de pérdida debe ser  $\tan(\delta) \gg 1$  para que  $v$  disminuya y es razonable suponer que para  $\tan(\delta) < 1$ ,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (2.8)$$

debido a que  $\mu_r \approx 1$  para la mayoría de los materiales geológicos y  $c \cong 2.99 \times 10^8 \text{ m/s}$  es la velocidad de la luz (Daniels, 2004).

En la práctica, la velocidad de las ondas de radio ( $V_m$ ) en cualquier medio depende de la velocidad de la luz en el vacío, de la constante dieléctrica relativa y de la permeabilidad magnética relativa

$$V_m = \frac{c}{\left\{ \left( \frac{\varepsilon_r \mu_r}{2} \right) [(1 + \tan^2(\delta)) + 1] \right\}^{1/2}} \quad (2.9)$$

donde  $\tan(\delta)$  es el factor de pérdida, ecuación (2.7). Para materiales de baja pérdida  $\tan(\delta) \approx 0$  y la velocidad de las ondas de radio puede ser aproximada por la ecuación (2.8). Los valores de la constante dieléctrica relativa varían de 1, en aire, a 81, en agua. Pero la mayoría de los materiales geológicos, presentan valores para esta constante entre 3 y 30 (Reynolds, 1997). Como la permitividad relativa del agua es del orden de 81, por más pequeña que sea la cantidad

de humedad presente, se incrementa significativamente la permitividad relativa del material. La dependencia en la frecuencia de las propiedades dieléctricas del material estudiado implica que debe haber alguna variación en la velocidad de propagación con la frecuencia (Daniels, 2004). El contraste de la constante dieléctrica relativa entre capas adyacentes produce una reflexión en la radiación electromagnética incidente y a mayor contraste, mayor va a ser la cantidad de energía reflejada. La razón de la energía reflejada, está relacionada con el coeficiente de reflexión  $\mathbf{R}$  que

se determina por este contraste entre las capas adyacentes  $\mathbf{R} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{i+1}} - \sqrt{\varepsilon_i}}{\sqrt{\varepsilon_{i+1}} + \sqrt{\varepsilon_i}}$ , para las capas  $i$  e

$i+1$ , respectivamente, donde  $\varepsilon_{i+1} > \varepsilon_i$ , es decir  $\varepsilon_i$  incrementa con la profundidad (Reynolds, 1997). Este coeficiente de reflexión aplica en un medio no conductivo con capas horizontales, considerando que se emite una radiación con una sola frecuencia. En general, el coeficiente de

reflexión se mide de acuerdo con la impedancia intrínseca  $\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ , la razón entre el campo

eléctrico y el magnético, en cada medio  $\mathbf{R} = \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\eta_{i+1} + \eta_i}$ . La amplitud de la señal reflejada es

afectada por la propagación dieléctrica del material, por las características geométricas del objeto y por los parámetros dieléctricos del objeto (Daniels, 2004).

La pérdida de energía y la atenuación son factores que resultan en un decaimiento de la fuerza de la señal mientras las ondas de radio se propagan por el medio. La pérdida total, a una distancia dada, consiste de cinco términos: la pérdida causada por la antena, pérdida en la transmisión entre aire y superficie, pérdida causada por la propagación geométrica del rayo, atenuación en el subsuelo como función de las propiedades del material y pérdida debida a la dispersión de la señal desde el objeto en estudio. La pérdida de energía es consecuencia de la pérdida de reflexión-transmisión alrededor de cada interface y ocurre cada vez que las ondas pasan por alguna frontera. Si hay objetos con dimensiones del mismo orden que el largo de onda de la señal, estos objetos pueden dispersar la energía de una manera aleatoria, este proceso es conocido como dispersión Mie y causa dispersión o “clutter” en la sección del radar (Reynolds, 1997). Cuando las dimensiones físicas de la interfase o de la anomalía son pequeñas, entonces la pérdida debida a la dispersión por el objeto crece debido a la geometría de la situación y la señal que regresa se hace más pequeña. Bajo algunas condiciones las dimensiones físicas de la anomalía son tales que crean una estructura resonante, la cual incrementa el nivel de la señal que

regresa y decrece la pérdida de dispersión debido al objeto. El “clutter” puede ser causado por el movimiento entre las antenas transmisoras y receptoras, en el caso de un sistema biestático, así como por las reflexiones múltiples entre la antena y la superficie terrestre. En general, el “clutter” es significativo en rangos pequeños de tiempo y decrece en tiempos más largos. Es posible cuantificar el coeficiente de cambio del nivel pico de la señal del “clutter” como función del tiempo, este parámetro asigna un límite para la capacidad de detección del sistema de radar (Daniels, 2004).

En adición a las pérdidas de reflexión-transmisión en las interfaces, la energía se pierde por absorción, donde se convierte la energía electromagnética en calor. Otro tipo de pérdida de energía se debe a la propagación geométrica de la señal transmitida. La señal del radar es transmitida en un rayo en forma de cono con un ángulo de  $90^\circ$ . Mientras dicha señal se aleja del transmisor, se desparrama causando una reducción de energía por unidad de área proporcional al inverso del cuadrado de la distancia recorrida  $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ . Una causa fundamental de la pérdida de energía es la atenuación, que es una función compleja de las propiedades dieléctricas y eléctricas del medio por donde la señal está viajando. En un dieléctrico conductivo y para materiales no magnéticos, el coeficiente de atenuación es

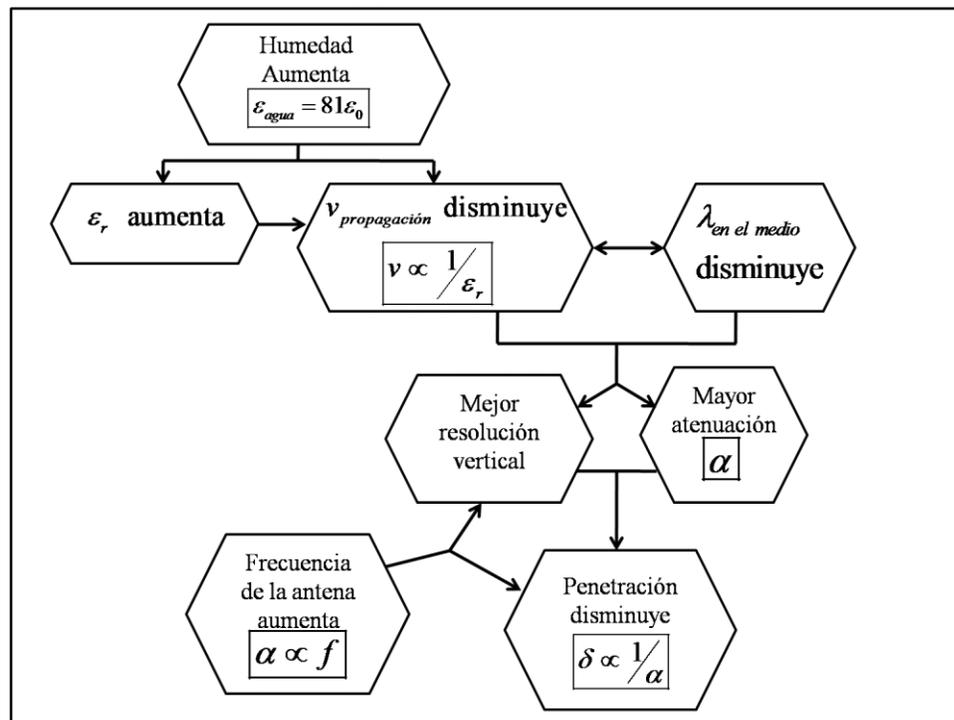
$$\alpha = \omega \left\{ \left( \frac{\mu \varepsilon}{2} \right) \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (2.10)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\mu = \mu_r \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m es la permeabilidad magnética,  $\sigma$  es el valor de la conductividad a una frecuencia dada (S/m) y  $\varepsilon$  el valor de la permitividad dieléctrica (Reynolds, 1997). Como una regla, el material que tiene valores altos de conductividad de baja frecuencia tendrá mayor atenuación de señal. Por lo tanto, grava, arena, roca seca y agua fresca son relativamente fáciles de detectar usando métodos de radar, mientras que agua salada, suelos de arcilla y menas conductivas o minerales son menos fáciles de detectar, pero una reducción en la frecuencia transmitida permite la investigación adecuada de estos materiales, con un costo de reducción en la resolución entre objetos (Daniels, 2004).

La resolución horizontal de un sistema de radar de subsuelo es importante cuando se quiere localizar objetos y cuando es necesario distinguir entre más de un objeto a la misma

profundidad. Esta resolución está definida por las características de la antena y por el procesamiento de señal empleado. Para alcanzar una resolución horizontal aceptable se requiere una ganancia alta de la antena. Por esto, se necesita una antena con una apertura significativa en las frecuencias transmitidas más bajas (Daniels, 2004).

Al igual que con otras ondas electromagnéticas, la profundidad en donde la amplitud de la señal decrece al 37% (ó  $\frac{1}{e}$ ) del valor inicial se conoce como la profundidad de penetración (skin depth) y es inversamente proporcional al factor de atenuación, es decir  $\delta = \frac{1}{\alpha}$ . El material afecta la forma, la configuración y la amplitud del tren de onda de incidente y efectivamente lo filtra (Reynolds, 1997). A continuación se presenta un esquema (Diagrama 1) de cómo, según Daniels (2004) y Reynolds (1997), la humedad del material afecta y filtra la configuración del tren de onda, dando lugar a una mejor resolución vertical, pero menor profundidad de penetración de la onda.



**Diagrama 1. Diagrama de cómo la humedad del material y la frecuencia de la antena afectan la resolución y penetración de la onda electromagnética.**

Debe hacerse un compromiso entre la penetración y la resolución, considerando la selección del ancho de banda del sistema o rango de frecuencias a ser utilizadas (Daniels, 2004). Cada antena

está diseñada para operar sobre un rango de frecuencias donde el máximo ocurre en la frecuencia central de la misma que es inversamente proporcional al periodo del pulso en nanosegundos. El largo equivalente del pulso es el producto del periodo por la velocidad de onda apropiada para el material. La resolución se puede tomar como un cuarto del largo de onda ( $\lambda$ ) de la radiación incidente, donde  $\lambda = \frac{V}{f}$ ,  $V$  la velocidad de onda y  $f$  la frecuencia de la onda incidente

(Reynolds, 1997). Profundidades mayores de 30 m requieren longitudes de impulsos en el orden de 40 ns (aproximadamente un ancho de banda de 50 MHz a una frecuencia centrada en 25 MHz), y pruebas de precisión de bajo rango pueden usar longitudes de pulsos de un orden menor a 1 ns, aproximadamente 2 GHz a una frecuencia centrada en 1 GHz. La magnitud de este efecto generalmente es menor para el rango de frecuencias típicamente empleado en trabajos de radar de subsuelo. En las situaciones de prueba más prácticas, la permitividad relativa puede ser desconocida (Daniels, 2004). Se sabe por experiencia en aplicaciones de GPR que los objetos locales, cuya dimensión transversal es pequeña en comparación con el largo de la ruta pasada durante el sondeo de subsuelo, da una respuesta específicamente hiperbólica en los perfiles de GPR (Golovko, 2004). Si una función de dispersión hiperbólica puede ser medida entonces la

velocidad de propagación puede derivarse de  $V_m = 2 \sqrt{\frac{x_{n-1}^2 - x_0^2}{(t_{n-1}^2 - t_0^2)}}$  donde  $(x_{n-1}, t_{n-1})$  corresponde a

la localización en el perfil de un punto en la asíntota de la hipérbola y  $(x_0, t_0)$  corresponde al ápice de la hipérbola, por lo tanto la profundidad del objeto es (Daniels, 2004):

$$d_0 = \frac{V_m t_0}{2}. \quad (2.11)$$

## ***2.4 Pre-procesado***

El objetivo general del procesamiento de señal aplicado al GPR es presentar una imagen que pueda ser interpretada por el operador o clasificar el regreso del objeto con respecto a un procedimiento de prueba o una plantilla. El pre-procesamiento de señal es principalmente un modo de reducir la razón de señal-“clutter” de datos de radar, que es la llave para la detección de objetos (Daniels, 2004). Debido a las analogías cinemáticas entre las ondas electromagnéticas y las sísmicas, actualmente se procesan los datos de GPR con técnicas desarrolladas para el procesamiento de datos de reflexión sísmica, aunque hay diferencias entre las propiedades del

campo de ondas y en las geometrías utilizadas para adquirir los datos (Nuzzo y Quarta, 2004). El procedimiento inicial cuando se pre-procesan datos es guardarlos en un formato dimensional apropiado y luego aplicarle los algoritmos necesarios. Según Daniels (2004), los datos pueden ser considerados como un *A-scan*, es decir como una sola traza de onda, como un *B-scan*, que guarda los datos como un conjunto de ondas, en donde el eje horizontal es la distancia recorrida en el sondeo y el vertical es el tiempo de viaje de la onda y finalmente como un *C-scan*, que contiene los datos adquiridos por varias líneas paralelas de sondeo, en este caso el perfil contiene dos ejes en superficie, perpendiculares entre sí y el eje vertical correspondiente al tiempo de viaje de la señal.

La onda recibida puede ser descrita como una convolución de un número de funciones de tiempo cada una representando una respuesta de impulso de un componente del sistema de radar en adición a la contribución de ruido de varias fuentes

$$f_r(t) = f_s(t) * f_{a1}(t) * f_c(t) * f_{gf}(t) * f_t(t) * f_{gr}(t) * f_{a2}(t) + n(t) \quad (2.12)$$

donde:

$f_s(t)$  es la señal aplicada a la antena,

$f_{a1}(t)$  es la respuesta al impulso del transmisor y  $f_{a2}(t)$  la del receptor,

$f_c(t)$  es la respuesta del acoplamiento de una antena a la otra,

$f_{gf}(t)$  es la respuesta al impulso de la señal transmitida hacia el subsuelo,

$f_{gr}(t)$  es la respuesta al impulso de la señal regresando a la superficie y

$n(t)$  es el ruido.

Una operación de proceso importante es asegurar que la media del *A-scan* sea cercana a cero, esto asume que la distribución de probabilidad de la amplitud del *A-scan* es simétrica alrededor de la media, que no está torcida o desplazada y que la media del tiempo corto sea constante sobre el tiempo de duración del *A-scan*. Un algoritmo de procesamiento de señal que puede satisfacer esta situación es  $A'_n(t) = A_n(t) - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N A_n(t)$ , donde  $A_n(t)$  es la muestra de datos sin procesar,

$A'_n(t)$  es la muestra de datos procesados y  $n$  es el numero de muestras (Daniels, 2004).

La corrección estática se realiza para tomar en consideración el efecto en el tiempo de viaje, de la topografía irregular o cambiante y de variaciones en la velocidad cerca de la

superficie. En un sondeo tomado sobre una superficie irregular, las diferencias en elevación de la fuente y el receptor individual deben ser tomadas en consideración para compensar por las diferencias en el tiempo de viaje causado por la topografía. El tiempo de viaje tomado desde el reflector hasta la antena será retrasado por la diferencia en la elevación dividida por la velocidad de la onda en la capa cercana a la superficie (Reynolds, 1997).

El primer paso es filtrar los datos para realzar la información deseada de la imagen. Los datos de GPR presentan dos tipos comunes de ruido coherente: las oscilaciones del sistema y la dispersión en la superficie (Nuzzo y Quarta, 2004). La contribución principal de los niveles de ruido en general es causada por el receptor del radar y esto pasa frecuentemente para receptores de muestras del dominio del tiempo. Una técnica importante de pre-procesamiento es la reducción de ruido y se puede llegar a ella mediante un promedio de cada muestra individual del *A-scan* o mediante un ordenamiento y un promedio repetido de cada *A-scan*. El efecto general de este proceso es reducir la varianza del ruido y mejorar la razón de señal a ruido. La forma

general de esta operación de filtrado está dada por  $A'_n(t) = A'_{n-1}(t) + \frac{A_n(t) - A'_{n-1}(t)}{K}$ , donde

$A'_n(t)$  son los valores promediados,  $A_n(t)$  son los valores originales y el factor  $K$  puede ser un valor fijo o un valor relacionado a  $n$  o a  $N$ . Los filtros pasa altas aplicados a los datos del *A-scan* mejoran el cociente señal dispersión en situaciones donde la dispersión es causada por una energía de baja frecuencia adicional, generada por interacciones de la antena con el suelo. Además, ruido excesivo de alta frecuencia puede ser reducido por un filtro pasa bajas (Daniels, 2004). Las oscilaciones del sistema se presentan como eventos periódicos horizontales o sub-horizontales que cruzan toda la sección. El mejor modo de eliminar las oscilaciones del sistema es restarle una traza promedio a todas las trazas, conocido comúnmente como “background removal”. Otro modo es modelar la “traza de ruido” mediante la multiplicación de la traza promedio por una función de ganancia conteniendo ceros en la parte superior y unos en la parte inferior, conectado por una zona estrecha para evitar efecto en los bordes (Nuzzo y Quarta, 2004). Existe una posibilidad de ecos múltiples o resonancias en el radar de penetración terrestre. Esto puede ocurrir como un resultado de reflexiones entre la antena y la superficie o dentro de cables conectados a cualquiera de las antenas. Este efecto puede ser considerablemente incrementado como un resultado de una aplicación de ganancia variante en el tiempo. Lo esperado es que todas las reflexiones individuales sean de retraso mínimo. Esto generalmente es

fiable porque la mayoría de los coeficientes de reflexión son menores que la unidad, por lo tanto mientras más impulsos son reflejados y re-reflejados mayor será la atenuación y el retraso. Como un resultado, la energía se concentra en el principio del tren de las ondículas. Un método simple para remover estas múltiples reflexiones es mediante un filtro que elimine el retraso y la atenuación de los valores de la ondícula principal a partir del tren de múltiples ondículas a un tiempo correspondiente al arribo de la primera reflexión. Mientras se retiene la información de fase, es posible eliminar los ecos múltiples en el dominio del tiempo. Un ejemplo de este método es mediante un filtro de la forma  $F(z) = \frac{1}{1 + cz^n}$ . En esencia este filtro elimina el retraso por  $n$  y la atenuación por  $c$  de los valores de la ondícula principal a partir del tren de múltiples ondículas a un tiempo correspondiente al arribo de la primera reflexión (Daniels, 2004).

Cuando las interfases están a una distancia más cercana que la mitad de una longitud de onda, la señal reflejada de una interfase puede combinarse con la de otra. En estas circunstancias, un tipo de procesamiento de deconvolución debe ser requerido para reconocer la respuesta de una interfase individual y permitir que sean caracterizadas y trazadas. El principio general de la optimización de la ondícula es filtrar las muestras de serie de tiempo de un modo que la salida filtrada sea una función de impulso representando la deconvolución de la señal. Un filtro óptimo es aquel en el cual la energía de la diferencia entre el filtro actual y el deseado es minimizada. Dicho filtro se denomina óptimo o filtro de mínimos cuadrados y es conocido como el criterio de error de mínimos cuadrados medio de Wiener y se denomina filtro de Wiener. En el caso donde la señal es modificada por la adición de ruido blanco Gaussiano, el filtro óptimo es un filtro combinado que representa el procesamiento convencional de señales de radar (Daniels, 2004).

El objetivo de la deconvolución es la compresión de cada onda en un solo pulso de Dirac ( $\delta$ ) tal que cada reflexión sea también un simple pulso de Dirac. Haciendo esto, es posible determinar la serie de reflexión que define la secuencia estratigráfica del subsuelo. El operador de deconvolución (o filtro inverso)  $I$  está diseñado para realizar la convolución de éste con una ondícula compuesta  $W$  para producir el pulso Dirac, es decir  $I * W = \delta$ . Se puede realizar la convolución de este filtro inverso con la traza del radargrama para producir la serie de reflexión  $R$  ( $I * S = R$ ) donde  $S$  es la traza observada. El tipo de filtro que mejor realiza la reducción de la ondícula a un pulso Dirac es el filtro de Wiener. Este tipo de deconvolución se conoce como deconvolución “spiking” o deconvolución de blanqueado. Una convolución de la ondícula de

fuente  $W$  con la serie de reflexión  $R$  produce la traza observada  $S$  y se denota como  $R*W = S$ . El operador de deconvolución  $D$  puede ser diseñado tal que, cuando se haga la convolución de éste con la ondícula de fuente  $W$ , se produzca una salida de Dirac  $\delta$ , es decir  $D*W = \delta$ . El objetivo del proceso de deconvolución es descomponer la traza para poder revelar la serie de reflexión  $R$  (Reynolds, 1997):

$$D*S = D*R*W = D*W*R \quad (2.13)$$

y

$$D*W*R = \delta*R = R \quad (2.14).$$

Un proceso importante es la migración que está basada en el principio de fuente secundaria de Huygen. Este principio plantea, que cualquier punto del frente de onda puede actuar como una fuente secundaria produciendo un frente de onda circular cuando se ve en dos dimensiones o esférico en 3D. Este proceso consiste en colapsar los aparentes frentes de onda secundarios en sus puntos de origen (Reynolds, 1997), de manera que cuando las trazas son desplegadas como una sección transversal, el tamaño, forma y profundidad de los objetos puede ser determinado (Peters et al., 1994). La separación de tiempo de los objetos está relacionado a su espaciamento físico, así como a la velocidad de propagación que puede variar dependiendo de las propiedades del material (Daniels, 2004). La profundidad desde el tope del objeto es calculada por la división del tiempo de viaje entre dos por la velocidad de la onda electromagnética en el subsuelo, ecuación (2.11) (Peters et al., 1994). La difracción de hipérbolas puede ser colapsada hacia el ápice de donde la difracción fue originada. Superficies planas e inclinadas pueden ser corregidas a su posición correcta con respecto a su localización en la superficie (Reynolds, 1997). La velocidad de propagación es la clave en la migración, puesto que de ésta se obtienen los valores de profundidad. Si se usan dos antenas separadas, una como transmisor y la otra como receptor, en el modo biestático, es posible determinar la variación vertical en la velocidad de ondas de radio, y por lo tanto la constante dieléctrica relativa. Para una secuencia de estratos horizontales, las velocidades para cada estrato se calculan mediante la raíz del promedio cuadrático de la velocidad (RMS por sus siglas en inglés), es decir que para el estrato  $i$

$$V_{RMS} = \left[ \frac{\sum v_i^2 t_i}{\sum t_i} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Si se utiliza sólo una antena en el modo monoestático, la determinación de la velocidad de ondas sólo puede hacerse con una correlación directa de datos de pozos adyacentes, con objetos a una profundidad conocida o por conjeturas que es la más empleada y puede darnos estimaciones con precisión de  $\pm 20\%$ . Las velocidades de las ondas de radio determinadas para la primera capa es un promedio de valor de tiempo en el intervalo de tiempo correspondiente. Para determinar las velocidades de capas en particular, es necesario usar la fórmula de Dix para derivar el intervalo de velocidad. La fórmula de Dix nos da la velocidad del intervalo  $V_{int}$  sobre el  $n$ -ésimo intervalo es

$$V_{int} = \left[ \frac{(V_{RMS,n})^2 t_n - (V_{RMS,n-1})^2 t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

donde  $V_{RMS,n}$ ,  $t_n$  y  $V_{RMS,n-1}$ ,  $t_{n-1}$  son las velocidades RMS y los tiempos dobles de viaje para los rayos reflejados en el  $n$ -ésimo reflector y  $(n-1)$ -ésimo respectivamente (Reynolds, 1997). Un acercamiento geométrico puede usarse en el caso de dos dimensiones de un material con una velocidad constante conocida. Cuando las velocidades en la migración se toman menores a las correctas, las asíntotas de la difracción se extienden bajo la localización del reflector. Mientras que si se toman mayores, dichas asíntotas se extienden sobre la localización del reflector. La técnica de migración geométrica simplemente mueve o migra un segmento del tiempo del *A-scan* al ápice de la curva de máxima convexidad (hipérbola de difracción). Una técnica alternativa es el método que utiliza la ecuación de onda y muestra que las técnicas de extrapolación de ondas de campo están basadas en tres métodos: el acercamiento mediante la sumatoria de Kirchhoff, el método de ondas planas (método F-K) y el método de diferencias finitas (Daniels, 2004). El objetivo principal de la migración F-K para aplicaciones en GPR es producir una imagen que tenga picos nítidos y distintivos en la localidad del objeto y menos estructuras significantes en otros lugares (Xu et al., 2003).

## ***2.5 Transformadas Aplicadas al GPR***

La rotación de Alford nos permite extraer las reflexiones de cada ángulo de orientación del transmisor y receptor sin tener que coleccionar datos para distintas configuraciones de las antenas. Además, permite encontrar el ángulo de orientación del eje principal de anisotropía y del promedio acimutal de anisotropía del medio. Para objetos con directriz distinta la reflexión es

también dependiente de la orientación de las antenas. La fuerza de reflexión depende sólo del ángulo de orientación entre las antenas y el eje principal del objeto. Como resultado la orientación del eje principal puede ser extraída (Van Gestel y Stoffa, 2001).

La transformada ondicular discreta (DWT por sus siglas en inglés), del término en inglés wavelet, es una transformada integral especial, la cual tiene una variedad de aplicaciones en el procesamiento de imágenes y en el análisis y filtrado de señales geofísicas. La descomposición de wavelet permite caracterizar la señal al ser localizada en ambos dominios: tiempo y frecuencia. Esta propiedad hace de la DWT una herramienta útil para analizar señales no-estacionarias cuyos contenidos de frecuencia varían con el tiempo. La DWT en 2D, como la transformada de Fourier en 2D (FT por sus siglas en inglés) o la transformada  $f-k$ , puede ser útil para el análisis y filtrado de rasgos inclinados, especialmente cuando se trata de fenómenos que ocurren en una región del plano espacio-tiempo, así como en regiones locales del plano de frecuencia en 2D (Nuzzo y Quarta, 2004).

La escala en 2D o el mapeo de frecuencia vs. tiempo, de una señal 1D en tiempo, provista por un análisis de multirresolución en 1D (MRA por sus siglas en inglés) permite que rasgos a una escala específica sean filtrados localmente, sin alterar sustancialmente el resto de los datos. El MRA en 2D puede proveer una separación de segmentos inclinados que se mapean en los distintos paneles de detalles (Nuzzo y Quarta, 2004).

La transformada de Radon lineal (RT por sus siglas en inglés) mapea una línea sesgada en el dominio de 2D a un punto en el dominio de Radon. La RT se conoce comúnmente como una suma sesgada (“slant-stack”) o  $\tau-p$ , porque realiza una suma a través de las líneas sesgadas con intersección en tiempo  $\tau$  y pendiente  $p$ . Para datos muestreados, se definió la transformada discreta de Radon (DRT por sus siglas en inglés), para limitar los problemas de “aliasing”. La RT lineal es útil para el filtrado de inclinaciones y puede ser aplicada a conjunto de datos con ruido lineal coherente (Nuzzo y Quarta, 2004).

## Capítulo 3: Transformadas Integrales

### 3.1 Introducción

Las transformadas integrales han sido aplicadas a los datos geofísicos para su modelación, interpretación en el espacio de transformación y filtrado. En general, las señales geofísicas se modelan con sistemas de ecuaciones diferenciales y existen transformadas integrales que contienen propiedades con respecto a la diferenciación o integración que son capaces de reducir el orden del sistema de ecuaciones para poder obtener soluciones numéricas con menos costo computacional. Además, una transformada integral puede ser utilizada para filtrar los datos, es decir eliminar aquellas componentes que no nos interesan para su interpretación. Algunas de las transformadas nos permiten analizar los datos en el espacio de transformación (como es el caso de la de Fourier) en donde se pueden obtener propiedades que la caracterizan y son útiles para interpretaciones de la misma.

#### *Definición*

Una transformación lineal matemática se puede definir como una aplicación que actúa sobre dos conjuntos asociando a cada elemento del primero uno del segundo. Para que esta aplicación tenga la categoría de transformada debe cumplir las siguientes propiedades (Garay de Pablo, 1998):

1. Los dos conjuntos que relaciona tienen que ser conjuntos funcionales, es decir, sus elementos deben ser funciones.
2. La aplicación debe ser lineal, por lo que debe respetar la suma de los elementos del conjunto y productos por escalares.

Si un conjunto funcional está definido en el dominio  $(x, y)$  y un segundo lo está en el dominio  $(u, v)$ , entonces la transformación establece una correspondencia entre puntos del plano  $xy$  y del plano  $uv$ . Si a cada punto del plano  $uv$  le corresponde un solo punto del plano  $xy$ , y recíprocamente, entonces se dice que hay una transformación biunívoca.

#### *Causas y propiedades de la transformación*

Cuando las funciones representan algún proceso físico, la transformada debe estar asociada a alguna propiedad o relación que tenga interés para su aplicación. Además la

transformada debe servir como herramienta para abordar ciertos problemas interesantes (Garay de Pablo, 1998).

Una propiedad común en todas las transformadas es el hecho de que, en un par de transformadas, una analiza y la otra sintetiza. Esta propiedad se puede entender cuando en un espacio vectorial expresamos un vector como una combinación de los vectores de una base. La expresión del vector como una combinación de los vectores de una base representa el análisis, mientras que el vector sintetiza este análisis. Los elementos de un espacio pueden ser representados en términos de una parte propia de dicho espacio. La elección de esta parte propia es importante para definir las propiedades y posibles aplicaciones del par de transformadas (Garay de Pablo, 1998). Por ejemplo, el cambio de una convolución a una multiplicación, hecho por la transformada de Fourier, es un cambio de base en el espacio lineal donde se define la señal (Grilo et al., 1991).

### ***Cambio de base***

Por analogía entre las señales y los vectores, el valor de la señal en un punto de la variable se puede presentar como la componente del vector en el vector base asociado al punto. Cada señal definida en un dominio puede ser pensada como la representación de un vector (Grilo et al., 1991).

Supongamos que hay un problema matemático expresado con coordenadas relativas a la base  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  y que queremos re-expresarlo con relación a otra base  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ . Como el conjunto de vectores  $\{\psi_j\}$  forman una base, entonces para cada vector  $\phi_i$ , existen números  $c_j^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  para los cuales

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n c_j^{(i)} \psi_j . \quad (3.1)$$

Estos números  $c_j^{(i)}$  son las coordenadas del vector  $\phi_i$  relativos a la base  $\{\psi_j\}$  y en el caso en que  $\{\psi_j\}$  es la base natural, el número  $c_j^{(i)}$  es el  $j$ -ésimo elemento del vector  $\phi_i$ . Si  $\hat{x}_i$  y  $x'_i$  son componentes del vector  $x$  relativas a las bases  $\{\psi_j\}$  y  $\{\phi_i\}$ , respectivamente, entonces la representación de un vector en términos de una base dada es

$$\hat{x}_j = \sum_{i=1}^n c_j^{(i)} x_i' . \quad (3.2)$$

Escrito en notación vectorial,  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{x}'$ , donde  $\mathbf{C}$  es la matriz de coeficientes que expresa la base  $\{\phi_i\}$  en términos de la base  $\{\psi_j\}$  con el número  $c_j^{(i)}$  en la  $j$ -ésima fila y  $i$ -ésima columna de  $\mathbf{C}$  (Keener, 2000).

### ***Transformadas integrales***

Las transformadas integrales tienen su origen en el siglo XIX con el trabajo de Joseph Fourier y Oliver Heaviside, que durante el siglo XX se asignan a un marco más general (Davies, 2005). Por una transformada integral, nos referimos a la relación de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t) f(t) dt = F(s) \quad (3.3)$$

tal que la función  $f(t)$  es transformada a otra función  $F(s)$  mediante una integral. Se dice que la nueva función  $F(s)$  es la transformada de  $f(t)$ , y  $K(s,t)$  es el kernel de la transformación. Tanto  $K(s,t)$  como  $f(t)$  deben satisfacer ciertas condiciones para asegurar la existencia de la integral y una función de transformación  $F(s)$  única. Cuando ambos límites de integración en la integral definida son finitos, tenemos una transformada finita (Andrews y Shivamoggi, 1999). Se puede apreciar que  $K(s,t)$  actúa como una matriz “infinita” y “continua” que multiplica las componentes  $f(t)$  de la base  $t$  para darnos las componentes  $F(s)$  en la base  $s$  (Grilo et al., 1991).

Un problema básico en el uso de las transformadas integrales es determinar la función  $f(t)$  cuando su transformada  $F(s)$  es conocida. En muchos casos la solución del problema inverso es otra relación de transformada integral del tipo:

$$\int_D H(s,t) F(s) ds = f(t) \quad (3.4)$$

donde  $H(s,t)$  es otro kernel y  $D$  es el dominio de  $s$ . Como resultado tenemos la transformada inversa de la transformada en particular (Andrews y Shivamoggi, 1999). De la misma manera,  $H(s,t)$  actúa como una matriz “infinita” y “continua” que multiplica las componentes  $F(s)$  en

la base  $s$  para darnos las componentes  $f(t)$  de la base  $t$  (Grilo et al., 1991). La idea principal detrás de la teoría de transformadas es la elección cuidadosa de las bases para que el problema pueda ser “diagonalizado”. Por ejemplo, la transformada de Fourier cambia una convolución a una multiplicación, este hecho puede verse como un cambio de la matriz utilizada en la convolución a una matriz diagonal realizada por esta transformada. Por lo que la transformada de Fourier convierte el operador de convolución y las señales hacia una referencia donde los eigenvectores de la matriz de convolución son vectores de la base (Grilo et al., 1991), y por esta razón la matriz  $\mathbf{H}$  es diagonal.

### ***Transformada bidimensional o aplicada a imágenes***

Así como una señal unidimensional puede ser representada en términos de funciones base, una imagen puede ser expandida en términos de un conjunto discreto de arreglos de base llamados imágenes base (Jain, 1989). La transformación se puede entender como una descomposición de la imagen en un dominio bidimensional, empleando una base de imágenes, donde cada componente en el dominio de la transformada corresponde a la cantidad de la imagen base dentro de la imagen original. Además se puede considerar la transformación como un modo de sintetizar la imagen con un análisis bidimensional en el dominio de transformación. El objetivo es presentar la imagen en un marco de referencia apropiado para una aplicación en particular (Lira, 2002).

En el contexto de procesamiento de imágenes, la representación de una imagen  $u(m,n)$  de  $N \times N$  en términos de una base dada, es la transformación de la forma:

$$v(k,l) = \sum_{m,n=0}^{N-1} u(m,n) a_{k,l}(m,n), \quad 0 \leq k,l \leq N-1 \quad (3.5)$$

donde  $\{a_{k,l}(m,n)\}$  es el kernel de la transformación, que multiplica las componentes de la imagen  $u$  de la base  $(m,n)$  para darnos las componentes de la imagen  $v$  de la base  $(k,l)$ . A los elementos  $v(k,l)$  se les denominan los coeficientes de la transformación, es decir, son los coeficientes de la imagen transformada  $\mathbf{V} = \{v(k,l)\}$  (Jain, 1989).

En el caso de transformadas integrales aplicadas a imágenes, la transformación se representa como:

$$V(k,l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(m,n) A_{k,l}(m,n) dm dn \quad (3.6)$$

donde  $A_{k,l}(m,n)$  representa el kernel de la transformación,  $U(m,n)$  es la imagen original y  $V(k,l)$  es la imagen transformada. La característica de esta transformación es que la forma funcional de  $V$  se obtiene de la forma de  $U$  ponderada por el kernel  $A$  y no del valor de las variables  $(m,n)$  de la imagen  $U$ . Entonces, el valor de la función de transformada depende del intervalo completo de las variables  $(m,n)$  o de un subintervalo de éstas. Por lo que la estructura del espacio donde se encuentra  $V$  está determinada por la naturaleza del kernel  $A$  (Lira, 2002).

Como se explicó en el capítulo de Radar de Penetración Terrestre, los datos pueden obtenerse como una sola traza (*A-scan*) o como un conjunto de trazas en función de la posición del GPR (*B-scan*). Para el caso del *A-scan*, la transformada integral que se aplica es de una dimensión y en el caso del *B-Scan* se aplica la transformada en dos dimensiones. Se estableció, que este *B-scan* puede convertirse en imagen, donde el mínimo valor de la señal corresponde a 0 y el valor máximo de la misma corresponde a 255, para el caso en el que tenemos una imagen en escala de grises. Por lo que de la misma manera aplicaría la transformada integral bidimensional para la imagen obtenida del *B-scan*.

Con esta noción general de lo que es una transformación y en particular las transformaciones integrales, en este capítulo se pretende dar una explicación general y algunos ejemplos de las transformaciones que son las más aplicadas al procesamiento de datos geofísicos, en especial a los datos de GPR. Las transformadas integrales que se discuten en este capítulo son las de Fourier, Laplace, Ondicular y Radon, de las cuales se presentan sus definiciones en el caso continuo y discreto, sus propiedades y algunos ejemplos de aplicaciones a los datos de GPR.

### 3.2 Transformada de Fourier

La importancia de la transformada de Fourier en el procesamiento de señales se debe a la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) porque reduce significativamente el número de operaciones requeridas para calcular la transformada discreta. La transformada discreta de Fourier (DFT, por sus siglas en inglés) de una serie que contiene  $N$  puntos requiere  $N^2$  operaciones. Cuando  $N$  es grande, como es el caso de los datos geofísicos, se hace evidente el costo computacional de la DFT.

A principios del siglo XX, Runge y König describieron un procedimiento en términos de series de Fourier, usando la periodicidad y simetría de éstas, para obtener un análisis de Fourier de dos análisis de  $N$  puntos consistiendo de un poco más de  $N$  operaciones. En 1942, Danielson y Lanczos describieron un método basado en el de Runge y König, para resolver el problema de dispersión de rayos-X. El método de Danielson y Lanczos consistía en que si  $N$  es una potencia de dos, es decir  $N = 2^m$ , la serie se puede dividir en  $\log_2 N$  subseries y la cantidad de operaciones requerida para calcular la DFT de estas subseries es proporcional a  $N \log_2 N$ . Durante décadas no fue evidente la eficiencia de este método, hasta que en el 1965, Tukey y Cooley presentan el algoritmo de la FFT. El algoritmo presentado por Tukey y Cooley es más general debido a que puede ser aplicado cuando  $N$  es compuesto, es decir  $N = r \times s$  y no necesariamente  $N$  tiene que ser potencia de dos, resultando en  $N(r + s)$  operaciones, en vez de  $N^2$  operaciones. Cuando  $N$  es potencia de dos, el algoritmo de la FFT consiste de  $N \log_2 N$  operaciones (Cooley et al., 1967).

#### *Transformada continua de Fourier*

La transformada de Fourier continua se deriva del teorema de la integral de Fourier, que nos dice:

Si  $f$  y su derivada  $f'$  son funciones continuas por pedazo y si  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ , es decir si  $f$  es absolutamente integrable, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[s(t-x)] dt ds \quad (3.7)$$

en los puntos  $x$  donde  $f$  es continua.

Mediante la fórmula de Euler, podemos expresar la representación integral de la serie de Fourier en términos de funciones exponenciales complejas y de aquí derivar el par de transformadas de Fourier:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t) dt \quad (3.8)$$

y

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} F(s) ds . \quad (3.9)$$

En donde  $F(s)$  se denomina como la transformada de Fourier de  $f(t)$  y a  $f(t)$  la transformada inversa de Fourier de  $F(s)$ . Una propiedad de esta transformada es que la función  $f(t)$  puede tener ciertas discontinuidades finitas y se puede mostrar que  $F(s)$  es una función continua. Debido a esto, se dice que la transformada de Fourier es un proceso de suavizado (Andrews y Shivamoggi, 1999). En geofísica y en el procesamiento de imágenes, es común su utilización en 2D, donde los dominios son usualmente distancia  $(x, y)$  y frecuencia espacial  $(u, v)$ :

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \\ f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv \end{aligned} \quad (3.10)$$

A continuación se presentan algunas de las propiedades operacionales de la transformada de Fourier, donde se usa la notación de  $F(s)$  y  $G(s)$  para las transformadas de Fourier de  $f(t)$  y  $g(t)$ , respectivamente. Además  $\mathcal{F}\{f(t);s\}$  representa la transformada de Fourier de  $f(t)$  y  $\mathcal{F}^{-1}\{F(s);t\}$  la transformada inversa.

- *Propiedad de linealidad:* Para cualquier constante  $C_1$  y  $C_2$ , se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{C_1 f(t) + C_2 g(t); s\} &= C_1 F(s) + C_2 G(s) \\ \mathcal{F}^{-1}\{C_1 F(s) + C_2 G(s); t\} &= C_1 f(t) + C_2 g(t)\end{aligned}\quad (3.11)$$

- *Propiedad de producto escalar:* Si  $a$  es un escalar, entonces

$$\mathcal{F}\{f(at); s\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right), a \neq 0 \quad (3.12)$$

- *Propiedad de desplazamiento:* La multiplicación de  $f(t)$  o  $F(s)$  por un exponencial complejo causa un desplazamiento en la variable de transformación en la integración de la transformada o de la inversa.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{iat} f(t); s\} &= F(s + a) \\ \mathcal{F}\{f(t - a); s\} &= e^{ias} F(s)\end{aligned}\quad (3.13)$$

- *Propiedad de diferenciación:* Si  $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$  son continuas y absolutamente integrables,  $f^{(n)}$  es suave por pedazos y absolutamente integrable y

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} f'(t) = \dots = \lim_{|t| \rightarrow \infty} f^{(n-1)}(t) = 0 \quad (3.14)$$

entonces

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t); s\} = (-is)^n F(s), n = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

- *Teorema de convolución:* La transformada de Fourier aplicada a la convolución de dos funciones es la multiplicación de las transformadas de Fourier de cada función, es decir

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t); s\} = F(s)G(s) \quad (3.16)$$

Una forma alternativa de este teorema es

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)G(s); t\} = (f * g)(t) \quad (3.17)$$

- *Identidad de Parseval*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds \quad (3.18)$$

En aplicaciones físicas, la cantidad en el lado izquierdo de esta relación representa la energía total en forma de onda, como las ondas de sonido o eléctricas. Por lo que esta relación establece que la energía total está dada por el área bajo la curva de  $|F(s)|^2$ . Esta cantidad se llama el espectro de energía o la función de densidad de energía espectral de  $f(t)$  (Andrews y Shivamoggi, 1999).

### ***Transformada discreta de Fourier***

Suponga que tenemos una función muestreada para  $N$  tiempos discretos  $t = kT$ , donde  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  y si deseamos calcular su transformada de Fourier en los  $N$  puntos, debemos tener estos puntos uniformemente espaciados en el periodo  $T$ . Entonces, tomamos las frecuencias discretas  $f = \frac{j}{NT}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$  que cubren un solo periodo. Tomando  $x(k) = x(kT)$  y

$X(j) = X\left(\frac{j}{NT}\right)$ , definimos la transformada discreta de Fourier como

$$X(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-\frac{2\pi i j k}{N}}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.19)$$

La ecuación de la inversa de la transformada discreta de Fourier es

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X(j) e^{\frac{2\pi i j k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.20)$$

Una distinción entre la transformada discreta de Fourier y la continua es que tanto  $\{x(k)\}$  como  $\{X(j)\}$  forman secuencias periódicas con periodo  $N$ , debido a la periodicidad de las series de Fourier, es decir

$$\begin{aligned} x(k+N) &= x(k) \quad \forall k \\ X(j+N) &= X(j) \quad \forall j \end{aligned} \quad (3.21)$$

### *Aplicaciones de la transformada de Fourier*

Las aplicaciones de la transformada de Fourier se deben a la eficiencia computacional de la FFT y por las propiedades de esta transformada, podemos resolver problemas de manera más rápida. Una de las principales aplicaciones de esta transformada, es el diseño de filtros digitales en el dominio de Fourier para remover las frecuencias que no se desean de las señales geofísicas. Esto se debe al teorema de convolución, ya que así, el costo computacional del filtrado disminuye de manera considerable. Además, la transformada de Fourier se puede aplicar en el modelado de las señales y en otros aspectos del pre-procesamiento de las mismas. A continuación se presentan algunos ejemplos de estas aplicaciones a los datos de GPR.

Una de las aplicaciones que tiene la transformada de Fourier en el análisis de datos de GPR, es medir el patrón del campo EM de la antena transmisora del radar. En este caso, se mide el voltaje transitorio que es proporcional a la derivada temporal del campo eléctrico, para una dirección de la antena. La aplicación de la transformada de Fourier, en este caso se debe a su propiedad de diferenciación, entonces el voltaje medido es transformado al dominio de la frecuencia y mediante la propiedad de diferenciación, se deriva el campo eléctrico. Finalmente el campo eléctrico obtenido se transforma al dominio del tiempo, mediante la transformada inversa de Fourier, para obtener el patrón del mismo (Smith y Scott, 1989). De manera análoga, en la modelación de los datos de GPR para un medio estratificado y lateralmente homogéneo, la transformada de Fourier en las coordenadas horizontales y en tiempo, transforman las ecuaciones de Maxwell a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que dependen sólo de las coordenadas verticales (Sena et al., 2004).

La detección de la firma o patrón de un objeto en el dominio de tiempo-frecuencia, se obtiene mediante la correlación entre la representación en tiempo-frecuencia de la señal recibida con una señal de referencia. Esta representación en tiempo-frecuencia, se obtiene por la distribución de Wigner-Ville que se deriva de la densidad espectral de potencia mediante la transformada de Fourier de la función de autocorrelación. Otro modo de diseñar un detector del patrón de radiación de un objeto, es mediante la función de ambigüedad que es la transformada de Fourier bidimensional de la distribución de Wigner-Ville (Sun y Li, 2003).

Los métodos de migración en el pre-procesado de los datos de GPR, usan la ecuación de onda para retro-propagar las señales recibidas en la tierra como un esfuerzo para localizar las posiciones de las estructuras. Estos métodos colapsan las formas hiperbólicas de los datos en

puntos como impulsos en la imagen de salida, localizando la posición correcta del objeto. En la práctica, los métodos de migración de frecuencia-número de onda ( $f-k$ ), se calculan a partir la transformada de Fourier de los datos adquiridos y mediante la ecuación de extrapolación se migran los datos a la profundidad deseada. Finalmente se aplica la transformada inversa de Fourier para obtener la imagen deseada en el dominio espacial (Xu et al., 2003).

### 3.3 Transformada de Laplace

Oliver Heaviside inventó su cálculo operacional para resolver ecuaciones diferenciales en la teoría de líneas de transmisión eléctrica. Su trabajo fue formalizado utilizando la integral de Laplace, consecuentemente obteniendo el par de transformadas de Laplace (Davies, 2005). La transformada de Laplace y su fórmula de inversión se pueden derivar directamente de la transformada de Fourier y de este modo tener una perspectiva de la relación entre la transformada de Fourier y la de Laplace (Andrews y Shivamoggi, 1999).

#### *Transformada de Laplace*

Cuando es de interés sólo la respuesta de un sistema debido a la acción de un agente  $f$  y se supone generalmente que es cero para  $t < 0$ , se tienen funciones causales que son mejor tratadas bajo la transformada de Laplace. Como no se requiere que  $f$  sea absolutamente integrable, se supone la siguiente función

$$g(t) = e^{-ct} f(t) h(t) \quad (3.22)$$

si  $f(t)$  satisface esta función, donde  $c$  es una constante real positiva y  $h(t)$  es la función unitaria de Heaviside

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Entonces,  $f$  debe satisfacer la siguiente condición

$$\int_0^{\infty} e^{-ct} |f(t)| dt < \infty \quad (3.24)$$

Como la función  $g$  satisface las condiciones de la transformada de Fourier se tiene

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{e^{-ct} f(t) h(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(c-is)t} f(t) dt \quad (3.25)$$

Haciendo un cambio de variable  $p = c - is$ , entonces

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t); p\} \quad (3.26)$$

llamada la transformada de Laplace de  $f(t)$  y de forma análoga

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \mathcal{L}^{-1}\{F(p); t\} \quad (3.27)$$

siendo la transformada inversa de Laplace. Si  $f$  es continua por pedazo en  $t \geq 0$  y es  $O(e^{c_0 t})$ , entonces  $f(t)$  tiene su transformada de Laplace  $F(p)$  en el semiplano  $\text{Re}(p) > c_0$ . Cuando se dice que una función es  $O(e^{c_0 t})$ , es decir que  $f$  es de orden exponencial  $c_0$ , se dice que  $f$  cumple con la propiedad de que existe un número real  $c_0$ , (Andrews y Shivamoggi, 1999) tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-ct} = \begin{cases} 0, & c > c_0 \\ \text{no hay límite, } & c < c_0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Como la transformada de Laplace se deriva de la transformada de Fourier, sus propiedades corresponden a las de Fourier.

### ***Transformada Z (Transformada de Laplace discreta)***

La transformada Z es una operación que convierte una señal discreta en una representación sobre el dominio de las frecuencias complejas. Bajo esta consideración, se toma como la transformada discreta de Laplace. Si se tiene una función continua para  $t \geq 0$  y de orden exponencial  $c_0$ , entonces esta función es muestreada para un número infinito de puntos  $x(nT), n = 0, 1, \dots, \infty$  y  $T$  es el intervalo de tiempo entre las muestras. La transformada de Laplace de la función muestreada,  $x(nT)$  es

$$\mathcal{L}\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT} \quad (3.29)$$

Haciendo un cambio de variables  $z = e^{pT}$  que transforma el eje de convergencia de la transformada de Laplace a un círculo en el plano  $z$ . Entonces la transformada Z se deriva de  $x(nT)$  como

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}, |z| > e^{\sigma T} \quad (3.30)$$

donde  $\text{Re}(p) = \sigma$  es el eje de convergencia de la transformada de Laplace. La transformada inversa es

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} X(z) z^{n-1} dz, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

donde el contorno cerrado  $|z|=R$  es tal que  $X(z)$  es analítica en y fuera del mismo (Andrews y Shivamoggi, 1999).

### ***Aplicaciones de la transformada de Laplace***

Cuando la función a transformar no es absolutamente integrable, la transformada de Fourier no es la apropiada y como la transformada de Laplace se deriva de la de Fourier, esta transformada es aplicable a estas señales de manera similar a la de Fourier. Por lo que las aplicaciones de la transformada de Laplace corresponden a la aplicación de filtros digitales debido a su propiedad de convolución, a la modelación de señales geofísicas y algunos métodos de pre-procesado de la señal. Un ejemplo de aplicación de esta transformada es en la modelación de una señal de GPR, proveniente de un suelo con materiales dispersivos y no lineales, con el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (Rappaport y Weedon, 1996; Sullivan, 1996).

### 3.4 Transformada Ondicular

#### *Transformada de Fourier por ventana*

La representación de Fourier clásica de una función proporciona información espectral sobre la función, pero la información espacial queda implícita. La transformada de Fourier por ventana es una combinación de función y transformación, mientras retiene alguna información espacial y también contiene alguna información de frecuencia. La idea de la transformada de Fourier por ventana es modular la señal con la traslación de una función de ventaneo con norma unitaria. Entonces se realiza la transformada de Fourier de esta señal modulada (Keener, 2000). La inexactitud de este método se debe al efecto de aliasing en las componentes altas y bajas de frecuencias que quedan fuera del rango de frecuencias de la ventana. Es decir, la ineficiencia se debe a aquellas frecuencias que deben ser analizadas en cada paso de tiempo a pesar del tamaño de la ventana o de las frecuencias dominantes en ésta (Torrence y Compo, 1998).

La transformada ondicular (del término en inglés wavelet) analiza la señal mediante la multiplicación de ésta con una función de ventana y realizando una expansión ortogonal, análoga a otras transformadas integrales lineales. Las funciones base, llamadas ondículas u ondículas madres, proveen localización en espacio, en un cierto grado debido al principio de incertidumbre (Sonka et al., 2008). También, esta transformada es aplicable para funciones no estacionarias, donde la transformada de Fourier no es aplicable.

#### *Transformada ondicular continua*

La transformada ondicular se define como una función  $f(t)$  que es descompuesta en un conjunto de funciones base  $\Psi$ -ondículas

$$c(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{s,\tau}^*(t) dt \quad (3.32)$$

donde  $\Psi_{s,\tau}^*(t)$  representa el conjugado complejo de  $\Psi_{s,\tau}(t)$ . Las nuevas variables después de la transformación son  $s$  (escala) y  $\tau$  (traslación). La transformada ondicular inversa sirve para sintetizar la señal  $f(t)$  de la energía finita en los coeficientes de ondículas  $c(s, \tau)$

$$f(t) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(s, \tau) \Psi_{s,\tau}(t) ds d\tau \quad (3.33)$$

### *Generación de ondículas*

Las ondículas son generadas a partir de una ondícula madre  $\Psi(t)$ , mediante dilatación  $s$  y translación  $\tau$

$$\Psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (3.34)$$

Algunas restricciones que la función  $\Psi_{s,\tau}$  debe obedecer para considerarla como ondícula son: que la ondícula tenga un espectro pasa banda y que la función de ondícula debe tener algo de suavidad y concentración tanto en tiempo como en el dominio de frecuencia (Sonka et al., 2008). Además, la resolución de una función de ondículas está determinada por un balance entre el ancho en el espacio real y el ancho en el espacio de Fourier. Una función fina en tiempo nos da buena resolución en tiempo pero pobre en frecuencia, mientras que una con un ancho grande tendrá resolución pobre en tiempo y buena en frecuencia (Torrence y Compo, 1998). En otras palabras, el principio de la transformada ondicular es usar una señal llamada ondícula que es finita en tiempo, oscilatoria, con media cero y en general irregular y antisimétrica (Perrin et al., 2000).

La función de ondículas debe reflejar el tipo de rasgos presentes en la serie de tiempo. Para cada  $s$  y  $\tau$  la transformada da valores altos si la función tiene componentes a esa escala para el tiempo que ocupa la ondícula. En cambio, si la escala de la ondícula es mucho mayor o menor que la de la función, la integral da valores nulos o muy pequeños. Por lo que el factor de escala determina la resolución con que se mide una ondícula y se puede considerar la transformada ondicular como un análisis en tiempo-escala o tiempo-resolución, en vez de tiempo-frecuencia (Nava, 2002). Es decir, el análisis mediante la transformada ondicular provee los coeficientes que miden la correlación entre la ondícula en una posición y con un factor de escala con la parte correspondiente de la señal analizada. Por lo que estos coeficientes son los que se despliegan en el plano tiempo-escala (Perrin et al., 2000).

Como la transformada ondicular preserva la energía, con base en el teorema de Parseval, es posible obtener la transformada ondicular, en forma equivalente, como

$$c(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \psi_{s,\tau}^*(\omega) d\omega \quad (3.35)$$

donde  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $f(t)$  y  $\psi_{s,\tau}(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $\Psi_{s,\tau}(t)$  (Torrence y Compo, 1998).

### ***Transformada ondicular discreta***

Suponga que se tiene una serie de tiempo  $x_n$ , con un espaciamento uniforme en tiempo  $\delta t$  y  $n=0,1,\dots,N-1$ . La transformada ondicular discreta se define como la convolución de  $x_n$  con una versión dilatada y trasladada de la ondícula  $\psi(\eta)$  (Torrence y Compo, 1998):

$$c_n(s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \psi^* \left[ \frac{(n'-n)\delta t}{s} \right] \quad (3.36)$$

### ***Aplicaciones de la transformada ondicular***

En esta sección se describen algunas de las aplicaciones de la transformada ondicular para el análisis de los datos de GPR. En la detección de minas, la transformada ondicular se aplica a la señal adquirida y mediante el cálculo de algunos parámetros estadísticos y momentos de esta señal descompuesta, de donde se puede obtener una buena detección del objeto enterrado. Para incrementar la tasa de detección, la tasa de falsa alarma debe ser lo más baja posible y esta disminución de la falsa alarma puede realizarse usando dos criterios conjuntos. Estos criterios son: que la forma del objeto detectado en la señal debe aproximarse a la forma real del objeto enterrado y que las detecciones deben estar localizadas en los mismos lugares de las imágenes para todas las descomposiciones realizadas (Perrin et al., 2000). Otra aplicación de la transformada ondicular es la eliminación de ruido en la señal de GPR mediante el análisis de multiresolución y redes de ondículas (Chen et al., 2005; Nuzzo y Quarta, 2004).

### 3.5 Transformada de Radon

La transformada de Radon  $g(s, \theta)$  de una función  $f(x, y)$ , está definida como

$$g(s, \theta) = \mathcal{R}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy, \quad (3.37)$$

$$-\infty < s < \infty, 0 \leq \theta < \pi$$

donde  $\mathcal{R}$  denota el operador de esta transformada, también llamado el operador de proyección. Esto es una integral sobre una línea inclinada a un ángulo  $\theta$  con respecto al eje- $y$  y a una distancia  $s$  del origen. En el sistema de coordenadas rotado  $(s, u)$  donde

$$\begin{aligned} s &= x \cos \theta + y \sin \theta & x &= s \cos \theta - u \sin \theta \\ u &= -x \sin \theta + y \cos \theta & y &= s \sin \theta + u \cos \theta \end{aligned} \quad (3.38)$$

la transformada de Radon puede ser expresada como

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du, \quad (3.39)$$

$$-\infty < s < \infty, 0 \leq \theta < \pi$$

La función  $g(s, \theta)$  es una proyección en una dimensión de  $f(x, y)$  a un ángulo  $\theta$ , que también se le denomina como una “suma de rayo”, debido a que representa una suma de  $f(x, y)$  sobre un rayo a una distancia  $s$  y a un ángulo  $\theta$  (Jain, 1989).

#### *Relación con la transformada de Fourier*

El operador de proyección puede ser entendido como un caso especial de una operación de un filtro lineal invariante de desplazamientos. En el dominio de Fourier esta operación de convolución corresponde a una multiplicación de la función de transferencia, que es una línea en el dominio espacial. De este modo, el operador de proyección corta una línea del espectro de la función, perpendicular al rayo de proyección (Jähne, 1997).

Por lo tanto, la transformada de Radon se relaciona con la transformada de Fourier, de acuerdo con el teorema de cortes de proyección o teorema de cortes de Fourier. Este teorema dice que el corte central a un ángulo  $\theta$  de la transformada de Fourier bidimensional de la función

$f(x, y)$  es igual a la transformada de Fourier en una dimensión con respecto a  $s$  de la proyección  $g(s, \theta)$  (Jain, 1989).

*Teorema de corte de proyección:* Si  $G(\xi, \theta) = \mathcal{F}_{1D} \{g(s, \theta); s\}$  es la transformada de Fourier en 1D de la proyección con respecto a  $s$ , entonces

$$G(\xi, \theta) = \mathcal{F}_p \{f(x, y)\} = F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \quad (3.40)$$

donde el subíndice  $p$ , denota la transformada de Fourier en coordenadas polares.

La transformada bidimensional de Fourier de la función  $f(x, y)$ , en coordenadas polares es

$$\mathcal{F}_p \{f(x, y)\} = F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i \xi (x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (3.41)$$

En el sistema de coordenadas rotado, ecuación (3.38), esta transformada es

$$\begin{aligned} F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) e^{-2\pi i \xi s} du ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \right] e^{-2\pi i \xi s} ds \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por la definición de la transformada de Radon en este sistema de coordenadas rotado, esta transformada bidimensional es

$$F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta) e^{-2\pi i \xi s} ds = G(\xi, \theta) \quad (3.43)$$

Por lo tanto, el teorema de cortes de proyección provee un método para derivar la transformada de Radon partiendo de la transformada bidimensional de Fourier de la función  $f(x, y)$ .

Como consecuencia directa de este teorema, la transformada de Radon puede ser usada para generar la transformada de Fourier discreta (DFT) en 2D de una imagen en coordenadas polares. Una vez que se tiene la proyección de la imagen para un cierto ángulo, mediante la DFT de esta proyección se obtienen muestras polares aproximadas del corte central en la misma orientación de la transformada de Fourier 2D de la imagen. La ventaja de este teorema es que la transformada de Radon es útil para reducir la dimensión de ciertas operaciones de procesamiento de imágenes. Un ejemplo de esta reducción de operaciones es la propiedad de convolución-proyección de esta transformada (Sanz et al., 1988).

### *Transformada inversa de Radon*

Para completar el par de transformadas de Radon, la transformada inversa se define como

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[ \frac{\partial g}{\partial s}(s, \theta) \right]}{x \cos \theta + y \sin \theta - s} ds d\theta \quad (3.44)$$

Por lo que, este par transformado provee el marco matemático necesario para pasar de las coordenadas espaciales  $(x, y)$  a las coordenadas del espacio de proyección  $(s, \theta)$ . En donde, a cada punto en el espacio  $(s, \theta)$  le corresponde una línea en el dominio espacial  $(x, y)$  (Jain, 1989). Por la complejidad de la ecuación de la transformada inversa, existen métodos para reconstruir la imagen partiendo de la proyección. Uno de estos métodos es denominado retro-proyección filtrada y el otro está basado en el teorema de corte de Fourier.

#### *Retro-proyección Filtrada*

Si tenemos disponibles las proyecciones de todas las direcciones, el operador de retro-proyección se define como

$$\begin{aligned} b(x, y) &= \int_0^\pi g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) ds d\theta \end{aligned} \quad (3.45)$$

A  $b(x, y)$  se le denomina la retro-proyección de  $g(s, \theta)$  y representa la acumulación de las sumas de rayo para todos los rayos que pasan por el punto  $(x, y)$ . El operador de retro-proyección mapea la función del espacio  $(s, \theta)$  hacia una función con coordenadas espaciales  $(x, y)$ . Este operador no es la transformada inversa de Radon, sino que es el adjunto del operador de la transformada de Radon (Jain, 1989). Por lo tanto, el operador de retro-proyección provee un método para reconstruir la imagen de la transformada de Radon.

#### *Inversión basada en el teorema de corte de proyección*

Como se mencionó anteriormente, el teorema de corte de Fourier relaciona la transformada en una dimensión de la proyección con el corte central, a un ángulo  $\theta$ , de la transformada de Fourier bidimensional de la función  $f(x, y)$ . Por este teorema, se puede

obtener la inversión de la transformada de Radon en dos pasos. En el primero, se obtiene la transformada de Fourier de la proyección como

$$F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta) e^{-2\pi i \xi s} ds \quad (3.46)$$

Finalmente, se obtiene la transformada inversa de Fourier como

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{-2\pi i(xk_x + yk_y)} dk_x dk_y \quad (3.47)$$

donde  $k_x = \xi \cos \theta$  y  $k_y = \xi \sin \theta$  (Toft, 1996).

### ***Propiedades de la transformada de Radon***

A continuación se presentan algunas de las propiedades de la transformada de Radon, donde se usa la notación de  $g_1(s, \theta)$  y  $g_2(s, \theta)$  para las transformadas de Radon de  $f_1(x, y)$  y  $f_2(x, y)$  o mediante el operador de la transformada de Radon,  $\mathcal{R}\{f(x, y)\}$  y  $\mathcal{R}^{-1}\{g(s, \theta)\}$  como el operador de la transformada inversa de Radon.

- *Propiedad de linealidad:* Por definición de la transformada integral, la transformada de Radon cumple con

$$\mathcal{R}\{a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)\} = a_1 g_1(s, \theta) + a_2 g_2(s, \theta) \quad (3.48)$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  son escalares.

- *Propiedad de producto escalar:* De forma análoga a la propiedad de producto escalar para las transformadas integrales, en el caso de la transformada de Radon, un ajuste de escala en las coordenadas  $(x, y)$  de  $f(x, y)$  resultan en un ajuste de escala de la coordenada  $s$  junto con un ajuste a la escala de amplitud de  $g(s, \theta)$ :

$$\mathcal{R}\{f(ax, ay)\} = \frac{1}{|a|} g(as, \theta), a \neq 0 \quad (3.49)$$

- *Limitación en espacio:* Las proyecciones  $g(s, \theta)$  son limitadas en el espacio  $s$ , si el objeto  $f(x, y)$  es limitado en el espacio  $(x, y)$ . Es decir, si

$$f(x, y) = 0, \quad |x| > \frac{D}{2}, |y| > \frac{D}{2} \quad (3.50)$$

entonces

$$g(s, \theta) = 0, \quad |s| > \frac{D\sqrt{2}}{2} \quad (3.51)$$

- *Propiedad de simetría y periodicidad:* Se define la simetría como

$$g(s, \theta) = g(-s, \theta \pm \pi) \quad (3.52)$$

y la periodicidad dice que la proyección es periódica en  $\theta$  con un periodo de  $2\pi$

$$g(s, \theta) = g(s, \theta + 2k\pi), \quad k \in \text{enteros} \quad (3.53)$$

- *Propiedad de desplazamiento:* Una traslación en  $f(x, y)$  resulta en un cambio de  $g(s, \theta)$  por una distancia igual a la proyección de la traslación del vector en la línea  $s = x \cos \theta + y \sin \theta$ :

$$\mathcal{R}\{f(x - x_0, y - y_0)\} = g(s - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta, \theta) \quad (3.54)$$

- *Propiedad de rotación:* Una rotación del objeto por un ángulo  $\theta_0$  causa una traslación de su transformada de Radon en la variable  $\theta$ . Es decir, si  $f(x, y) = f_p(r, \phi)$  es la función en coordenadas polares, entonces

$$\mathcal{R}\{f_p(r, \phi + \theta_0)\} = g(s, \theta + \theta_0) \quad (3.55)$$

En otras palabras, la rotación en el espacio de proyección corresponde a un cambio en la orientación del arreglo de proyección y los datos de proyección permanecen iguales (Sanz et al., 1988).

- *Propiedad de conservación de masa:* La masa total de la distribución  $f(x, y)$  se preserva por  $g(s, \theta)$  para todo  $\theta$ . Es decir, si la masa de la distribución  $f(x, y)$  se define por

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \quad (3.56)$$

entonces

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta) ds, \quad \forall \theta \quad (3.57)$$

- *Teorema de convolución-proyección:* La transformada de Radon de una convolución en dos dimensiones de dos funciones  $f_1(x, y)$  y  $f_2(x, y)$  es igual a la convolución en una dimensión de su transformada de Radon.

$$\mathcal{R} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-x', y-y') f(x', y') dx' dy' \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(s-s', \theta) g_2(s', \theta) ds' \quad (3.58)$$

### ***Transformada Generalizada de Radon***

Para una proyección sobre formas arbitrarias  $c(\mathbf{p})$ , se define la transformada de Radon como

$$\mathcal{R}_{c(\mathbf{p})} \{I\}(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^D} I(\mathbf{x}) \delta(C(\mathbf{x}; \mathbf{p})) d\mathbf{x} \quad (3.59)$$

donde  $I(\mathbf{x})$  es la imagen  $D$ -dimensional que contiene las formas  $N$ -dimensionales,  $\mathbf{p}$  el vector que contiene los parámetros de la curva,  $C(\mathbf{x}; \mathbf{p})$  un conjunto de funciones restringidas que juntas definen la forma y la integración se realiza sobre todo el dominio  $D$  de la imagen. A menudo un subconjunto de los parámetros especifica la localización de la forma, por lo que es conveniente escribir  $\mathbf{p} = \{\mathbf{q}, \mathbf{x}_0\}$ , donde  $\mathbf{x}_0$  es la localización de la forma y  $\mathbf{q}$  el resto de los parámetros que la definen. Por ejemplo, para un círculo centrado en  $\mathbf{x}_0$  y con radio  $r$ , el conjunto de funciones de restricción  $C(\mathbf{x}; \mathbf{p})$  que definen la forma es

$$C\{\mathbf{x}; \{r, \mathbf{x}_0\}\} = 0 \text{ con } C\{\mathbf{x}; \{r, \mathbf{x}_0\}\} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - r \quad (3.60)$$

Se puede interpretar la transformada de Radon como una transformada que provee un mapeo del espacio de la imagen al espacio de parámetros generado por los parámetros  $\mathbf{p}$ . La función creada en el espacio de parámetros contiene picos (máximos) para esos  $\mathbf{p}$  en donde la forma  $c(\mathbf{p})$  está presente en la imagen. La detección de formas es reducida a un problema simple de detección de estos máximos (van Ginkel et al., 2004).

### *Transformada de Hough*

Hough (1962) inventó la transformación para una aplicación en la detección de las rutas de partículas subatómicas pasando por un campo de visión. La transformada original de Hough fue diseñada para detectar líneas rectas y curvas, este método se utiliza sólo si se conocen las ecuaciones analíticas de las líneas de bordes del objeto. Ballard (1981), describió la transformada generalizada de Hough que puede encontrar objetos aunque no se conozca la ecuación analítica del mismo.

En la transformada generalizada de Hough se establece un arreglo de acumulador  $N$ -dimensional, cada dimensión correspondiente a uno de los parámetros de la forma que se quiere detectar. Cada elemento de este arreglo contiene el número de votos para la presencia del objeto con parámetros correspondientes al mismo. En este caso se genera una tabla de referencia que contiene la descripción del objeto. Si la forma con parámetros  $\mathbf{p}$  está presente en la imagen, todos los píxeles que son parte de ella incrementarán el elemento correspondiente del arreglo, produciendo un máximo. Para el caso en el que se quiere detectar una línea definida como  $s = x \cos \theta + y \sin \theta$ , los parámetros de la línea son  $(s, \theta)$  por lo que el arreglo del acumulador  $A(s, \theta)$  será incrementado cada vez que un píxel  $(x, y)$  cumpla con la función de restricción definida para la línea. Por lo tanto, la transformada de Hough, al igual que la de Radon, es un mapeo del espacio de la imagen  $(x, y)$  al espacio de parámetros  $(\mathbf{p})$  (van Ginkel et al., 2004).

### *Transformada de Hough como una discretización de la de Radon*

La colección de los datos de proyección es homólogo a la operación de histograma en una imagen en escala de grises. Para cada píxel se necesita calcular sólo el valor del píxel de la imagen de contorno (proyección). Cuando la imagen original es binaria, este procedimiento permite una implementación de la transformada de Hough de máxima similitud para la detección de líneas (Sanz et al., 1988).

La relación de la transformada de Hough con la de Radon, como una discretización de esta última, la describen claramente van Ginkel y colaboradores (2004). La transformada de Radon es un mapeo que puede ser abarcado de dos puntos de vista. El primero, “paradigma de lectura”, considera que un punto de datos en el espacio de destino es obtenido de todos los datos en el espacio de fuente. Esto es como la transformada de Radon es usualmente tratada. El

alternativo, “paradigma de escritura”, supone que un punto de datos en el espacio de fuente se mapea en puntos de datos en el espacio de destino. Esto es exactamente lo que la transformada de Hough realiza, no obstante en un entorno discreto. De acuerdo con esto, la transformada de Hough es una discretización de la transformada (continua) de Radon.

Paradigma de lectura (Radon): Para cada  $\mathbf{p}$ , colecciona todos los valores de  $I(\mathbf{x})$  aplicándole los pesos de la plantilla  $\delta(C(\mathbf{x}; \mathbf{p}))$  y se suma todo.

Paradigma de escritura (Hough): Inicializa la función entera  $P(\mathbf{p})$  con ceros. Para cada punto  $\mathbf{x}$  en la imagen de entrada determina su contribución, de acuerdo con  $\delta(C(\mathbf{x}; \mathbf{p}))$  para cada punto en  $P(\mathbf{p})$  y actualiza  $P(\mathbf{p})$ .

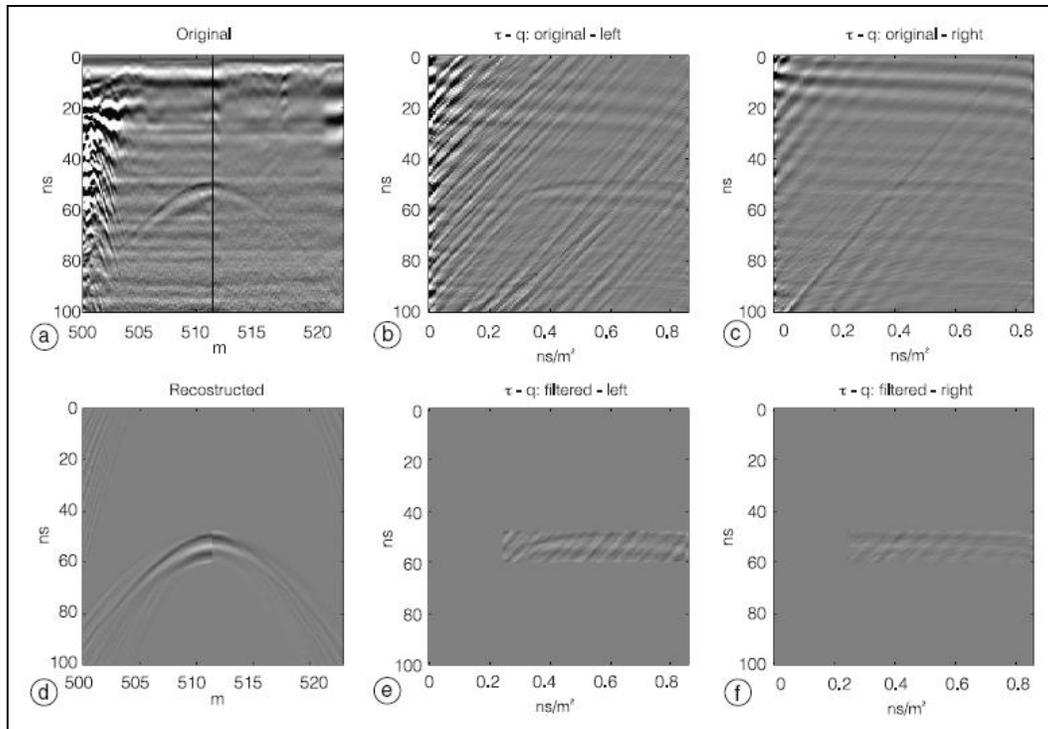
### ***Aplicaciones***

La teoría de Radon y sus bases matemáticas están bien establecidas para funciones deterministas  $f(x, y)$  y sus aplicaciones son bien conocidas. Ésta incluye aplicaciones en tomografía computarizada, para diagnósticos en medicina, radio astronomía, microscopía electrónica, interferometría óptica y exploración geofísica. Otras aplicaciones suponen la reducción de la complejidad de algoritmos, por ejemplo para el cálculo de la transformada de Fourier en 2D en coordenadas polares y el uso del teorema de convolución para reducir la operación de convolución en 2D a una convolución de proyecciones 1D. Extensiones recientes de la teoría de Radon han sido aplicadas a campos aleatorios y son útiles para filtrar ruido que tiene una caracterización estadísticas de los campos estocásticos. La representación y manipulación del espacio de proyección en imágenes ha tenido impacto en problemas de visión por computadoras. Dentro del tema de análisis de imagen, se han desarrollado algoritmos para aproximar la transformada de Hough sobre patrones lineales o no-lineales (Sanz et al., 1988). En el procesamiento sísmico, la transformada lineal de Radon, la parabólica (o  $\tau-q$ ) y la hiperbólica han sido usadas para una variedad de propósitos, como descomposición de ondas planas, análisis de velocidad, en la supresión de múltiples, en la separación y filtrado de ondas, y en la inversión de datos de refracción. Esta transformada ha sido usada principalmente en la detección de lineamientos y filtrado direccional en el análisis geológico y geofísico (Nuzzo y Quarta, 2004). A continuación se presentan tres ejemplos de la transformada de Radon, dos con la transformada parabólica y uno con la transformada lineal.

En el primer ejemplo, Nuzzo (2003) utiliza la transformada de Radon parabólica para eliminar el ruido coherente hiperbólico en una sección de GPR. Esta transformada ha sido el modo más frecuente aplicado al procesamiento sísmico, es decir cuando la trayectoria parabólica es mapeada en zonas parecidas a puntos en el dominio  $\tau-q$  donde pueden ser removidos con más facilidad. Una extensión directa de esta transformada puede ser aplicada en la atenuación de ruido coherente hiperbólico en los perfiles de GPR monoestáticos y especialmente para la remoción de la dispersión de superficie donde la velocidad del medio es la velocidad de la onda electromagnética en el aire. Distinto de las situaciones comunes en sísmica, usualmente se presenta en los perfiles de GPR una hipérbola completa (en vez de la mitad).

Para mostrar este método se extrajo una matriz de  $510 \times 460$  de un perfil adquirido para obtener la presencia de una cavidad o zonas fracturadas de la calle S. Isidoro-Torre Inserraglio (Lecce, Italia) donde una cavidad cárstica colapsó en 1992. El perfil, adquirido con una antena de 200 MHz, pasa sobre un sumidero colapsado y rellenado, el cual muestra difracciones intensas en el lado izquierdo (Figura 1a) y bajo un cable telefónico aéreo, que muestra una hipérbola de difracción en la velocidad del aire centrada en la abscisa de 512 m. El hecho de que la hipérbola se atenúa mientras se aleja del ápice y que la variación de amplitud entre las ramas izquierdas y derechas hace de este caso real uno casi ideal para probar las metodologías de la transformada de Radon.

Para presentar la transformada de Radon (TR) parabólica, se transformó la matriz completa. Primero se dividió la matriz de datos con respecto a la posición del ápice (línea vertical en la Figura 1a) y las sub-matrices se procesaron por separado. Luego de ajustar los parámetros para la TR parabólica, se obtuvieron las secciones  $\tau-q$  (Figuras 1b y 1c) para las sub-matrices, donde las hipérbolas se mapean en rasgos lineales horizontales y diagonales causados por las anomalías intensas del sumidero que perturban estas secciones completas. Seleccionando las mismas ventanas  $\tau-q$  para ambas secciones y removiendo las zonas externas que no corresponden a la hipérbola (Figuras 1e y 1f) se realiza la transformada inversa, combinando las dos sub-matrices que nos lleva al resultado final (Figura 1d).



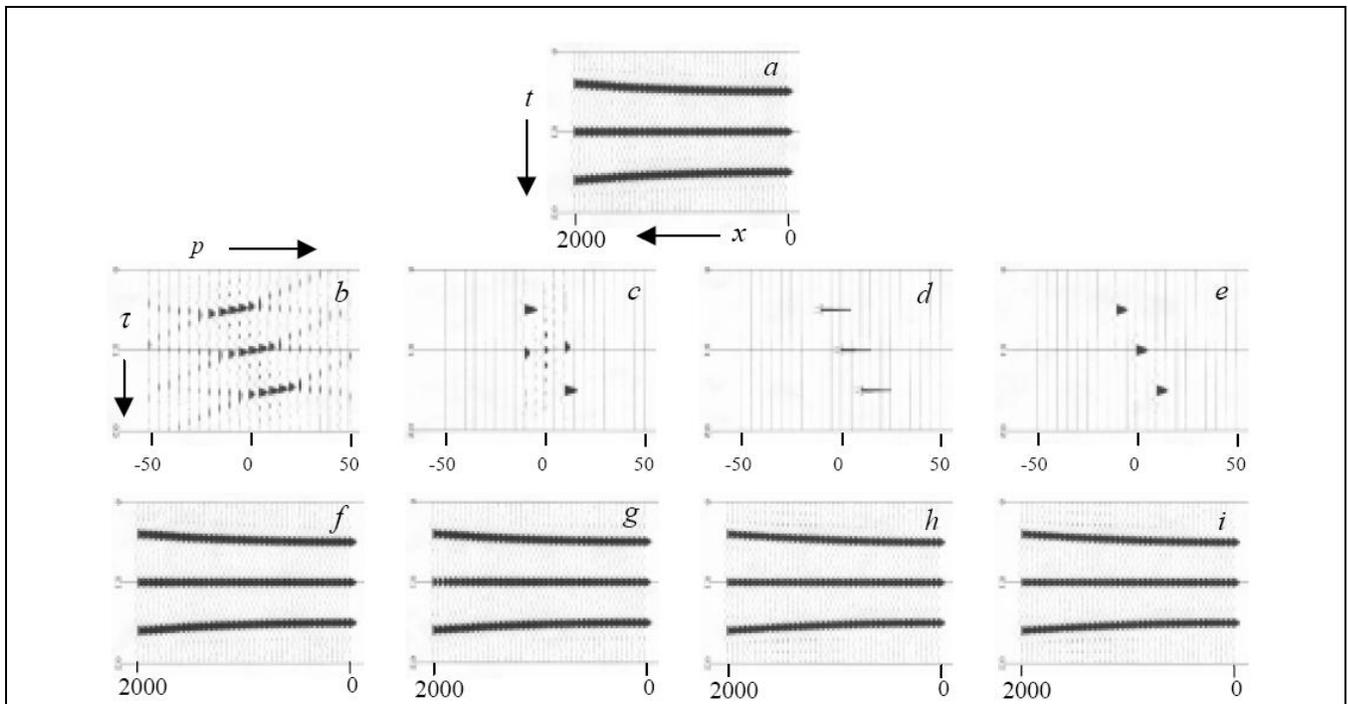
**Figura 1. Remoción de la dispersión de superficie mediante la transformada de Radon parabólica. a) Perfil original mostrando la hipérbola de difracción y la línea vertical que divide dicha hipérbola por el ápice; b) Transformada de Radon parabólica del sub-perfil izquierdo; c) Transformada de Radon parabólica del sub-perfil derecho; d) Imagen reconstruida de la hipérbola de difracción; e) Selección o filtrado de la localización de la hipérbola en el sub-perfil izquierdo; f) Selección o filtrado de la localización de la hipérbola en el sub-perfil derecho (tomado de Nuzzo, 2003).**

Como segundo ejemplo, Cary (1998) presenta la TR parabólica para reconstruir el ruido coherente de los datos sísmicos, con varias restricciones al modelo y al error cuadrático para elegir la que mejor elimina el efecto de aliasing en la discretización. El efecto de aliasing puede ser eliminado tomando un integrando de banda limitada cuando se convierte la ecuación integral de Radon en una sumatoria. Es decir, una mejor aproximación a la integral de Radon se obtiene suponiendo que el campo de ondas es de banda limitada tanto en tiempo como en espacio, con intervalos de muestreo de acuerdo con los intervalos de Nyquist.

Para esta aplicación se realizó un modelo sintético con tres parábolas de banda limitada y amplitud constante (Figura 2a) localizadas en -10, 0 y 10 ms, respectivamente. Como estos datos satisfacen las condiciones del modelo parabólico con amplitud constante se espera que la transformada de Radon de los datos de entrada (Figura 2a) proporcione tres ondas, de banda limitada, separadas en  $p=-10, 0$  y 10 ms, respectivamente, como se muestra en la Figura 2e. En vez de obtener esta solución deseada, la solución estándar de la transformada de Radon con mínimos cuadrados regresa una solución compleja (Figura 2b). Esto permite pensar que cada

parábola en los datos de entrada no son parábolas solas, sino que son una superposición de un número de parábolas de distintas formas y amplitudes de onda. Este ejemplo muestra que la solución de una transformada de Radon con apertura limitada no es única. Es decir, se tienen distintas soluciones de Radon (Figuras 2b, 2c, 2d y 2e) que son capaces de analizar los datos, y no hay modo de distinguir entre ellos debido a que sus inversas (Figuras 2f a 2i) son básicamente las mismas con error mínimo.

De estas soluciones es mejor tomar la solución que sea capaz de analizar los datos con el menor número de eventos en el dominio de Radon. Por lo que se toma la solución que minimice la restricción de error cuadrático en los datos y que reduzcan a su vez la restricción del modelo. La Figura 2b asegura la estabilidad de la inversión mediante la restricción del tamaño completo del modelo. La Figura 2c es una solución obtenida del algoritmo de “escasez” no lineal, el cual usa un algoritmo en el dominio de frecuencias con una restricción del modelo como la mínima entropía en la dirección  $p$ . La Figura 2d usa el mismo tipo de restricción tanto en  $\tau$  como en  $p$  en un algoritmo en el dominio del tiempo. Todos los casos son medidos sobre una banda limitada de frecuencias de los datos. La solución deseada se presenta en la Figura 2e y se obtiene mediante un filtrado pasa bandas del modelo planteado en la Figura 2d.



**Figura 2. a) Datos de entrada. b) Transformada de Radon estándar de mínimos cuadrados. c) Transformada de Radon obtenida de la restricción de “escasez” en  $p$ . d) Transformada de Radon obtenida con una restricción de “escasez” en  $p$  y**

**$\tau$ . e) Igual que (d) pero filtrada con un filtro pasa bandas en el rango de frecuencias de los datos de entrada. f) a i) son las transformadas inversas de b) a e) respectivamente (tomado de Cary, 1998).**

Como ejemplo de aplicación de la transformada lineal de Radon, Nuzzo y Quarta (2004) la presentan para la remoción de líneas en una imagen binaria, donde las líneas pueden representar rasgos característicos de las secciones de GPR. La transformada de Radon lineal es útil para filtrar líneas y puede ser aplicada a los datos con ruido lineal coherente. Basado en el hecho de que las líneas en el dominio se mapean a puntos en el dominio  $\tau - p$ , el filtrado de líneas se realiza mediante la eliminación de zonas cuyos centros son el punto correspondiente en el dominio de Radon, seguido por una transformación inversa.

El ejemplo sintético consiste de una matriz binaria de  $64 \times 64$  con siete líneas de distintas pendientes (Figura 3a). Dos líneas inclinadas (a y f) pueden simular las colas asintóticas de las hipérbolas de difracción de superficie. La línea casi horizontal y las inclinadas (b1, b2 y c) pueden representar fronteras estratigráficas y las dos líneas horizontales y cercanas entre sí (d y e) pueden representar el ruido de oscilaciones del sistema. Como los máximos relativos a todas las líneas son identificables, es posible tener una estimación certera de sus parámetros de construcción (Figura 3d). Un filtro pasa bandas en  $p$  sobre el dominio  $\tau - p$  (Figura 3e) remueve los eventos de inclinación abrupta (Figura 3b). Mientras que un filtro pasa bajas en  $\tau$  (Figura 3f) es efectivo para filtrar los eventos horizontales de oscilación del sistema. Estos filtrados, permiten que las interfaces geológicas queden prácticamente sin perturbaciones (Figura 3c).

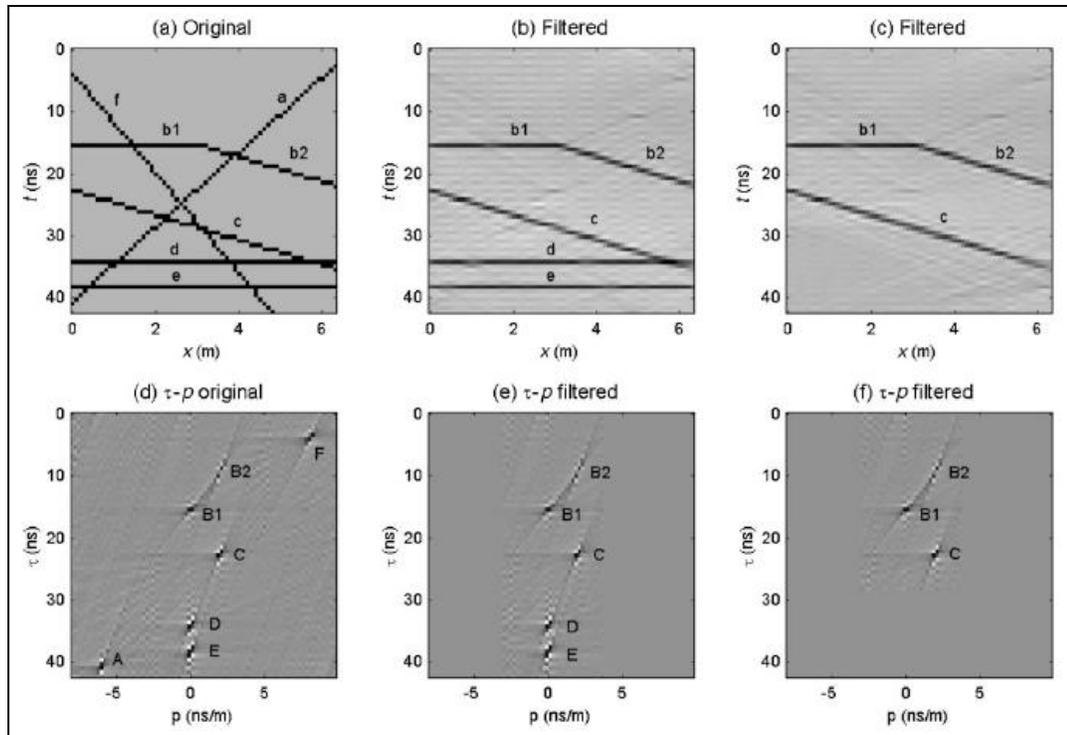


Figura 3. Ejemplo de un filtrado  $\tau - p$  para la remoción de líneas con distintas pendientes. (a) Ejemplo sintético en donde las líneas se etiquetaron con letras minúsculas en el dominio  $t - x$ , que se mapean a puntos en el dominio  $\tau - p$ , cuyos puntos correspondientes se etiquetaron con letras mayúsculas (d). (b) Sección filtrada donde las líneas con inclinación abrupta a y f han sido removidas mediante un filtrado en el dominio  $\tau - p$  (e). (c) Sección filtrada donde las líneas de ruido horizontal d y e fueron removidas y la línea horizontal b1 se preserva mediante el filtrado en el dominio  $\tau - p$  (f) (tomado de Nuzzo y Quarta, 2004).

## Capítulo 4: Transformada de Hough

### 4.1 Introducción

Un método alternativo del procesamiento de un *B-scan* está basado en técnicas de procesamiento de imágenes. Aquí se asume que los niveles de pre-procesamiento más básicos han sido llevados a cabo y que el *B-scan* está presentado como escalas de grises o una imagen con códigos de color. Como los datos de radar son dipolares es normal codificar la amplitud de una manera definida, es decir, el escalamiento de amplitud en una escala de grises asignaría el valor más negativo al negro y el valor más positivo al blanco (Daniels, 2004). Un método de procesamiento de imágenes que se ha aplicado a imágenes de GPR es el de segmentación que se define como agrupaciones de regiones o rasgos con características similares. Los métodos de segmentación se pueden dividir en tres grupos de acuerdo con las propiedades dominantes que emplean de la imagen. El primer grupo es el conocimiento global sobre la imagen o sus partes, el conocimiento usualmente se representa mediante el histograma de las propiedades de la imagen. El segundo es la segmentación basada en bordes y el tercero la segmentación basada en regiones (Sonka et al., 2008).

El grupo de conocimiento global parte de la idea de que muchos objetos o regiones en la imagen están caracterizados por una reflectividad o absorción de luz constantes en su superficie. Por lo tanto, la constante de brillantez o umbral puede ser determinado para segmentar los objetos del fondo. Métodos basados en una aproximación del histograma de la imagen usando una suma ponderada de dos o más densidades de probabilidad con distribución normal, representan un acercamiento distinto llamado detección de umbral óptimo. Este método de detección de umbral óptimo asume que las regiones de los niveles de grises principales, es decir que los niveles de grises correspondientes al objeto, están presente en la imagen (Sonka et al., 2008).

El segundo grupo de segmentación se basa en bordes encontrados por algún operador de detección de bordes. Se sigue un procesamiento adicional para combinar los bordes y tener cadenas de bordes que corresponden mejor a los de la imagen. El propósito es llegar por lo menos a una segmentación parcial, esto es agrupar los bordes locales en una imagen que solo presenta las cadenas de bordes que corresponden a los objetos o partes de la imagen que son de interés (Sonka et al., 2008).

La transformada de Hough es un método de segmentación basado en la detección de bordes. Como vimos en el capítulo anterior, esta transformada es básicamente un caso especial, es decir, una discretización de la transformada de Radon (Pipan et al., 1998). Esencialmente la transformada de Hough, transforma una línea en el espacio de la imagen en un punto en el espacio de coordenadas polares y una reflexión hiperbólica se transforma en un conjunto de líneas (Daniels, 2004). Hough (1962) inventó la transformación para una aplicación en la detección de las rutas de partículas subatómicas pasando por un campo de visión. La transformada original de Hough fue diseñada para detectar líneas rectas y curvas, este método se utiliza solo si se conocen las ecuaciones analíticas de las líneas o curvas de bordes del objeto. Más tarde, se describió la transformada generalizada de Hough que puede encontrar objetos aunque no se conozca la ecuación analítica del borde (Sonka et al., 2008).

La idea básica en la detección de líneas es que cualquier línea recta en la imagen es representada por un solo punto en el espacio de parámetros y cualquier parte de esta línea recta es transformada en el mismo punto. El espacio de parámetros es representado por una estructura de celdas rectangular, llamado el arreglo acumulador cuyos elementos son las celdas acumuladoras. En otras palabras, líneas existentes en la imagen pueden ser detectadas con valores altos en las celdas en el arreglo acumulador y los parámetros de la línea detectada están especificados por las coordenadas (pendiente, intercepción de la línea) del arreglo acumulador. Como un resultado, la detección de líneas en la imagen es transformada a una detección de un máximo local en el espacio acumulador (Sonka et al., 2008).

En el procesamiento de datos de reflexión sísmica, la transformada de Hough ha sido aplicada para la detección de estructuras geológicas lineales y para la remoción de múltiples horizontales. Para detectar fallas que aparecen en las secciones sísmicas o en las secciones de tiempo, la idea principal es determinar todos los posibles píxeles de líneas en la imagen. Dichos píxeles son transformados a curvas sinusoidales en el espacio polar de parámetros de Hough y la región donde se encuentra la falla corresponde a un máximo en el arreglo acumulador (AlBinHassan y Marfurt, 2003). Uno de los pasos para la remoción de múltiples en sísmica es aplicar la transformada de Hough, ajustar los múltiples detectados a un modelo de trazas y restarle el modelo ajustado a la sección original. Usando una línea horizontal como curva paramétrica, para la identificación de múltiples alineados horizontalmente, se obtiene un espacio de parámetros de 1D (Pipan et al., 1998).

## 4.2 Algoritmo Transformada de Hough (Ballard, 1981)

Los bordes de la región deseada raramente se pueden describir usando una curva de frontera paramétrica con un pequeño número de parámetros, en este caso, se utiliza la transformada generalizada de Hough. El método de la transformada generalizada de Hough, propuesto por Ballard (1981), describe un algoritmo para la detección de objetos con una forma específica en una imagen que ha sido transformada a una representación de bordes. Este algoritmo usa la información de los bordes para definir un mapeo de la orientación del punto de borde a un punto de referencia de la forma. El punto de referencia puede ser el origen del sistema de coordenadas locales. La generalización de la transformada de Hough para curvas no-analíticas consiste en definir los parámetros de la curva generalizada (Figura 1) como  $\mathbf{a} = \{\mathbf{y}, s, \theta\}$  donde  $\mathbf{y} = (x_r, y_r)$  es el origen de referencia de la curva,  $\theta$  es su orientación y  $s$  describe un factor de escala. La llave para la generalización de la transformada de Hough es el uso de la información direccional, que además de mejorar su precisión, hace el algoritmo más rápido (Ballard, 1981).

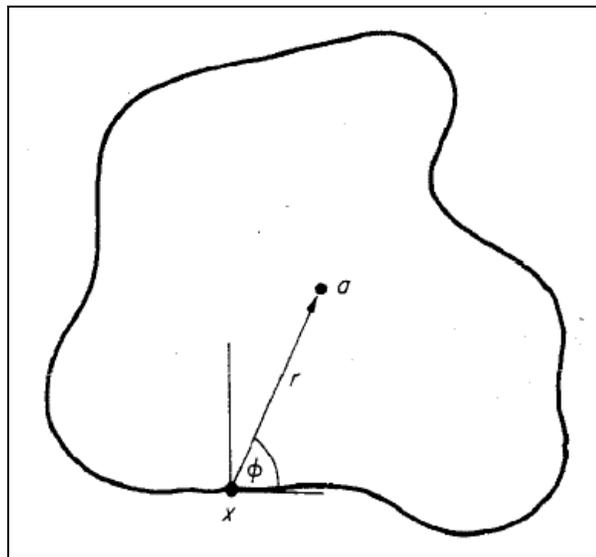


Figura 1. Geometría para la transformada generalizada de Hough (Ballard, 1981)

A continuación se describe el algoritmo para la transformada generalizada de Hough propuesto por Ballard (1981). Primero se construye la tabla de referencia (Tabla-R) que describe la curva que se quiere detectar. La Tabla-R se construye tomando un punto de referencia para la curva; sea  $\mathbf{y}$  este punto de referencia. Entonces, para cada punto de borde  $\mathbf{x}$ , se calcula la dirección del gradiente  $\phi(\mathbf{x})$  y se guarda  $\mathbf{r}(\phi) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$  en función de la dirección (Tabla 1). La

transformada generalizada de Hough, incrementa todos los puntos de referencias en el arreglo acumulador de acuerdo con la Tabla-R que describe la curva. Es decir, para un píxel de borde  $\mathbf{x}$  en la imagen, se incrementan todos los puntos  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  en el arreglo acumulador  $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ , donde  $\mathbf{r}$  es un elemento de la Tabla-R con dirección  $\phi$ . Por lo tanto el máximo en  $\mathbf{A}(\mathbf{a})$  corresponde la curva descrita por la Tabla-R (Ballard, 1981).

$i$	$\phi_i$	$R_{\phi_i}$
0	0	$\{\mathbf{r} \mid \mathbf{a} - \mathbf{r} = \mathbf{x}, \mathbf{x} \in B, \phi(\mathbf{x}) = 0\}$
1	$\Delta\phi$	$\{\mathbf{r} \mid \mathbf{a} - \mathbf{r} = \mathbf{x}, \mathbf{x} \in B, \phi(\mathbf{x}) = \Delta\phi\}$
2	$2\Delta\phi$	$\{\mathbf{r} \mid \mathbf{a} - \mathbf{r} = \mathbf{x}, \mathbf{x} \in B, \phi(\mathbf{x}) = 2\Delta\phi\}$
...	...	...

**Tabla 1. Formato de la Tabla-R (Ballard, 1981)**

La transformada de Hough reconoce formas parcialmente deformadas y se comporta muy bien en el reconocimiento de objetos ocluidos. Además, la transformada es robusta en la presencia de estructuras adicionales en la imagen y es insensible al ruido en la imagen (Sonka et al., 2008) Para detectar las hipérbolas de difracción es necesario tener un método robusto de segmentación, que permita la integración del conocimiento sobre una forma posible de curva diferente (Kleinmann et al. 1993). Imágenes de radar típicas contienen hipérbolas traslapadas de varias tuberías enterradas y no hay un modo fácil de aislar un pico de reflexión de otro (Windsor et al., 2005). El principio de la transformada de Hough es seleccionado como base de la detección de curvas de difracción (Kleinmann et al., 1993). Este método puede ser aplicado para automáticamente definir la permitividad dieléctrica del medio (Golovko, 2004).

El objetivo principal de esta tesis es la generación de un filtro basado en la transformada generalizada de Hough, para realzar estructuras geológicas en un radargrama. Para ello es necesario obtener la imagen en escala de grises del radargrama, preferiblemente que esté en función de la distancia horizontal y de la profundidad. Por lo tanto, los datos de GPR deben haber pasado por un pre-procesamiento, que consiste esencialmente en la remoción de ruido, deconvolución y migración. La primera parte de la generación de este filtro consiste en la

detección de bordes en la imagen, por lo que se realiza una convolución de la imagen con un kernel de detección de bordes. Como el algoritmo está basado en la transformada generalizada de Hough propuesta por Ballard (1981), la imagen debe transformarse en una representación de bordes, es decir debemos tener una imagen binaria que contenga solamente los bordes de las estructuras. El umbral para binarizar la imagen, es detectado por un método de segmentación global, específicamente con un algoritmo iterativo de detección de un umbral óptimo propuesto por Ridler y Calvard (1978). Finalmente, el filtro basado en la transformada de Hough es aplicado. Este filtro consiste en la aplicación de la transformada generalizada de Hough para detectar localmente (en una ventana) las estructuras y obtener una imagen global, que contenga las estructuras de interés. Por lo tanto, en el algoritmo propuesto no se realiza una Tabla-R de antemano, puesto que no conocemos la estructura que queremos segmentar en la imagen, sino que se calcula la Tabla-R en cada paso de la ventana.

### ***4.3 Algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough***

#### ***Algoritmo Transformada Hough***

El algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough, se programó en el lenguaje JAVA. El programa contiene ocho clases principales cuyos métodos calculan partes del algoritmo planteado en cada clase. La clase principal del programa, denominada como “*VisualizaHough*”, contiene los métodos necesarios para visualizar el programa y ejecutarlo fuera de la ventana de comandos, además de obtener las salidas y la opción de guardar dichas salidas. En adición a las clases principales del programa, existen tres clases que trabajan las imágenes como archivos para poderlas abrir y guardar; dos clases que convierten la imagen en formato BMP a una matriz de trabajo; y tres clases que tienen los métodos para desplegar las imágenes, dibujar sobre ellas y normalizar su histograma. Finalmente, se tienen cuatro clases que tienen las opciones de resolver sistemas lineales. En general, se obtienen matrices de las imágenes de entrada y los algoritmos se calculan sobre estas matrices, para luego pasarlas a imágenes de salida. Como notación, el recorrido por los índices de las matrices se realiza de la siguiente manera  $i = [a : inc : b] = a, a + inc, a + 2inc, \dots, b$ , donde  $inc$  es el incremento de los índices,  $a$  es el valor inicial y  $b$  el final. Cuando  $inc = 1$ , entonces el recorrido se define como  $i = [a : b] = a, a + 1, a + 2, \dots, b$ .

### *Detección de Bordes: Clase Convolución*

Como se mencionó, el primer paso de este algoritmo es obtener una representación de los bordes en la imagen. La detección o extracción de bordes amplifica los cambios abruptos en intensidad en la imagen y remueve el resto de la información (Daniels, 2004). Un borde es una propiedad local del píxel y sus vecinos intermedios, es un vector con magnitud y dirección y nos dice cuán rápido varía la intensidad de la imagen en una vecindad pequeña de un píxel. La dirección del borde es perpendicular a la dirección del gradiente que apunta a la dirección de más rápido crecimiento de la función de la imagen y su magnitud es la magnitud del gradiente (Sonka et al., 2008).

Los operadores de gradientes que son capaces de detectar la dirección del borde son representados por una colección de máscaras, cada una correspondiente a una dirección (Sonka et al., 2008). Los tres tipos básicos de operadores para la detección de bordes son el Laplaciano, el Prewitt, el operador de Sobel y el operador de Kirsch. El operador de Sobel, de Prewitt y de Kirsch tienen la ventaja de que proveen información de la dirección del borde (Daniels, 2004). Estos tres operadores de gradientes direccionales aproximan la primera derivada. El operador de Sobel se utiliza como un detector simple de bordes horizontales y verticales. En el operador Prewitt y en el de Kirsch, el gradiente es estimado en ocho posibles direcciones para cada máscara de convolución y la convolución resultante de mayor magnitud indica la dirección del gradiente. La dirección del gradiente está dada por la máscara que tiene la respuesta máxima. El operador de Laplace es uno que aproxima las segundas derivadas y nos da solamente la magnitud del gradiente (Sonka et al., 2008). El operador Laplaciano es isotrópico, es decir que extrae los bordes de la imagen en todas las direcciones (Daniels, 2004).

Normalmente una máscara de un filtro de dos dimensiones, cuyos coeficientes son seleccionados para la imagen del objeto, en donde se requiere el análisis, se convoluciona con los datos. Las técnicas de procesamiento de imágenes envuelven operaciones de filtrado que requiere una ejecución rápida de un algoritmo de convolución en dos dimensiones. En la adaptación de plantillas o de filtros se convoluciona la imagen con un kernel que contiene el patrón que se quiere detectar en los datos. Esta adaptación se usa en reconocimiento de patrones o de textura para determinar cuáles partes de la imagen contienen el objeto (Daniels, 2004). La contribución de los píxeles  $g(m,n)$ , de la imagen  $\mathbf{G}$ , en una vecindad  $O$  es ponderada por los coeficientes del kernel (o máscara)  $\mathbf{h}$ , obteniendo la imagen filtrada  $\mathbf{F}$  como

$$f(i, j) = \sum_{(m,n) \in O} h(i-m, j-n)g(m, n) \quad (4.1)$$

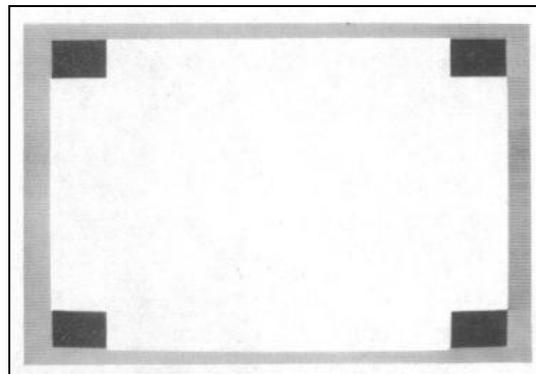
Para el algoritmo propuesto se diseñaron varios kernels de detección de bordes, los cuales se encuentran en la clase *KernelConvolucion*, para tener la opción de elegir cuál es el que mejor extrae los bordes de las estructuras en la imagen de GPR. Además de kernels de Laplaciano, se diseñaron kernels que detectan alguna dirección puesto que en algunas imágenes de GPR se realzan mejor las estructuras. El primer grupo de kernels diseñado son operadores de búsqueda de líneas y se diseñaron para las direcciones de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $135^\circ$  con tamaño de  $[3 \times 3]$  píxeles (Apéndice A.1). Estos kernels sirven como plantillas de patrones de líneas y asumen que el ancho de estas líneas es de aproximadamente uno o dos píxeles. También se diseñaron los operadores de Kirsch para las mismas direcciones y del mismo tamaño que los de búsqueda de líneas (Apéndice A.2). Los operadores de Laplace se plantearon para tamaños de  $[5 \times 5]$ ,  $[7 \times 7]$  y  $[9 \times 9]$  comprendiendo un total de ocho kernels presentes en el Apéndice A.3. Inicialmente los kernels de Laplace se diseñaron para un tamaño de  $[3 \times 3]$ , pero como son isotrópicos y pequeños comparados con los tamaños (en píxeles) de las estructuras en las imágenes de GPR, estos kernels borran prácticamente la imagen completa. Es por esto que se diseñaron los de detección de líneas y los de Kirsch, que aunque son pequeños no borran la imagen completa. Los kernels de Laplace de tamaño de  $[5 \times 5]$  presentan claramente todos los bordes en la imagen de GPR, pero en el caso de imágenes con múltiples horizontales estos múltiples se realzan y pueden ocluir las estructuras de la imagen. Los de tamaño de  $[7 \times 7]$  y  $[9 \times 9]$  agrandan los bordes de las estructuras y pueden presentar bordes que son demasiado anchos comparados con los bordes reales de las estructuras. La convolución de estos kernels con la imagen, se realizó con el método de convolución contenido en la librería de JAVA.

#### *Binarización: Clase ImagenUmbral*

Luego de la aplicación de un detector de bordes a la imagen en escala de grises, mediante la convolución, se debe obtener una imagen binaria para aplicarle el algoritmo basado en la transformada de Hough. El método utilizado para obtener una imagen binaria, donde el blanco corresponde a estructuras y el negro al fondo de la imagen, es conocido como detección de umbral óptimo, propuesto por Ridler y Calvard (1978). En una imagen, rasgos de interés pueden ser extraídos de su entorno usando una técnica de detección de umbral en donde los niveles de

gris menores que este umbral se mapean a negro y aquellos mayores que el umbral se mapean al blanco, o viceversa. La presencia de dos picos en el histograma de la imagen, demuestra la existencia de dos regiones de brillantez distintas en la imagen, una correspondiente al objeto y la otra a su entorno. Es razonable escoger el umbral en nivel de gris medio entre estos dos picos. La discriminación entre el objeto y su fondo puede ser mejorada mediante la derivación del umbral de una serie de muestras de fondo tomadas cerca del objeto para excluir el mayor ruido. El método de umbral óptimo, es un método automático simple de selección del umbral donde un proceso iterativo nos lleva sucesivamente a niveles de umbral refinados que convergen a un valor óptimo luego de aproximadamente cuatro iteraciones (Ridler y Calvard, 1978).

Primero se considera que las cuatro esquinas de la escena contienen solamente píxeles de fondo y el resto contiene el objeto (Figura 2). Esta partición puede ser usada como una función de intercambio  $f(s)$  para enviar la imagen al integrador uno o dos. Si  $f(s)=0$  la señal de la imagen de entrada pasa al integrador I y se considera como fondo. Mientras que, si  $f(s)=1$  la señal de la imagen de entrada pasa al integrador II y representa el objeto. Cuando el elemento (píxel) final de la imagen de entrada ha sido recibido, se hace un promedio de las salidas de los integradores para encontrar el umbral  $L_0$  y el resultado producido se introduce como una nueva función de intercambio para la segunda imagen de entrada. El proceso se repite hasta que la función de intercambio se haga constante en las siguientes iteraciones (Ridler y Calvard, 1978).



**Figura 2. Primera aproximación del objeto y fondo (tomado de Ridler y Calvard, 1978)**

La clase *ImagenUmbral*, que realiza la binarización, recibe la imagen salida de la clase *Convolucion*, que se convierte a matriz para calcular el umbral óptimo. Sea  $\mathbf{I}$  la imagen de salida de la convolución, con tamaño de  $[M \times N]$ ,  $\mu_o$  el promedio de los píxeles correspondientes al objeto,  $\mu_f$  el promedio de los píxeles correspondientes al fondo de la imagen,  $u$  el umbral

calculado para la imagen y **B** la imagen binaria del mismo tamaño de la imagen de entrada. Entonces, para inicializar el umbral se tiene que los píxeles correspondientes al fondo son los de las esquinas de la imagen y el resto son los del objeto.

<p>1. Inicializa umbral</p> $\mu_f^0 = \frac{I(0,0) + I(0, N-1) + I(M-1, 0) + I(M-1, N-1)}{4}$ $\mu_o^0 = \frac{\sum_{(m,n) \in \text{Objeto}} I(m,n)}{(M \times N) - 4}$ $u^0 = \frac{\mu_o^0 + \mu_f^0}{2}$	(4.2)
---	-------

En el promedio inicial de los píxeles de objeto, se define  $(m,n) \in \text{Objeto}$  como  $\{(m,n) | (m,n) \neq (0,0), (0, N-1), (M-1, 0), (M-1, N-1)\}$ . De acuerdo con este umbral, se asignan los píxeles de fondo y del objeto, y se continúa iterativamente hasta obtener el umbral óptimo.

<p>2. Asignación de los píxeles de fondo y de objeto (en la iteración <math>i</math>)</p> <p style="margin-left: 40px;">Para <math>m = [0 : M-1]</math></p> <p style="margin-left: 80px;">Para <math>n = [0 : N-1]</math></p> <p style="margin-left: 120px;">Si <math>I(m,n) \geq u^i \Rightarrow B(m,n) = 1</math></p> <p style="margin-left: 120px;">Si <math>I(m,n) &lt; u^i \Rightarrow B(m,n) = 0</math></p> <p>3. Cálculo del nuevo umbral</p> $\mu_f^{i+1} = \frac{\sum_{\{(m,n)   I(m,n) < u^i\}} I(m,n)}{\# I(m,n) < u^i}$ $\mu_o^{i+1} = \frac{\sum_{\{(m,n)   I(m,n) \geq u^i\}} I(m,n)}{\# I(m,n) \geq u^i}$ $u^{i+1} = \frac{\mu_f^{i+1} + \mu_o^{i+1}}{2}$ <p>4. Se regresa al segundo paso y se calcula el nuevo umbral (tercer paso).</p> <p>Cuando <math> u^{i+1} - u^i  &lt; 0.0001</math>, se detiene el algoritmo iterativo y se obtiene la imagen binaria <b>B</b>.</p>	(4.3)
--	-------

Tanto en el promedio de los píxeles del objeto, como en el de los píxeles del fondo, se define  $\#I(m,n) \geq u^i$  y  $\#I(m,n) < u^i$  como la cantidad de píxeles que cumplen la condición de pertenecer al objeto y al fondo, respectivamente.

*Referencia: Clase Referencia*

Esta clase contiene los métodos necesarios para ejecutar la transformada generalizada de Hough, así como el acumulador, las tablas de referencia, además de los métodos descriptivos de los bordes de la imagen. Esta clase recibe como entrada la imagen binaria **Bin**, el tamaño de un punto  $[PA \times PL]$  píxeles, el tamaño de la ventana  $[VA \times VL]$  puntos y la localización del punto de referencia en la ventana  $(X_V^R, Y_V^R) = \left( \frac{VA-1}{2}, \frac{VL-1}{2} \right)$ .

En primer lugar se inicializa la matriz de índices del acumulador **InAc** con valores de -1, esta matriz es de la misma dimensión que **Bin** y eventualmente contendrá los índices del vector del acumulador, indicando el punto correspondiente a un elemento del mismo. Con esta matriz, se procede a inicializar el vector de acumulador haciendo un recorrido de la ventana por todos los puntos de la imagen. Si hay bordes en la ventana entonces se toma el punto de referencia de la ventana, en la localización de la misma, como un punto correspondiente al acumulador. Para decidir si un punto es de borde, se define el método *ValorPunto* (4.4) que calcula el porcentaje de píxeles con valor de 1 en el punto y si dicho porcentaje es  $\geq$  a 60%, entonces el punto es de borde y tendrá valor de 1; de lo contrario tendrá valor de 0.

$$\begin{array}{l}
 \text{ValorPunto}(i,j) \\
 \quad Val = 0 \\
 \quad \text{Para } k = [0 : PA-1] \\
 \quad \quad \text{Para } l = [0 : PL-1] \\
 \quad \quad \quad \text{Si } \text{Bin}(i+k, j+l) = 1 \Rightarrow Val = Val + 1 \\
 \text{Si } \frac{Val}{PA \cdot PL} \times 100 < 60\% \Rightarrow \text{Punto} = 0 \\
 \text{Si } \frac{Val}{PA \cdot PL} \times 100 \geq 60\% \Rightarrow \text{Punto} = 1
 \end{array} \tag{4.4}$$

A continuación se describe el método que inicializa el vector de acumulador de acuerdo con la imagen **Bin** de tamaño  $[A \times L]$ , el punto de referencia detectado en el paso de la ventana

es  $(X_{Bin}^R, Y_{Bin}^R)$  y el tamaño del vector acumulador  $\mathbf{Ac}$ , o el número de puntos de referencia encontrados, es de  $[NumPuntos]$ .

<pre> Inicializa acumulador   NumPuntos = 0   Para i = [0:PA:(A-VA·PA-1)]     Para j = [0:PL:(L-VL·PL-1)]       HayBordes(i, j)       Si <math>(X_{Bin}^R = i + X_V^R \cdot PA \text{ y } Y_{Bin}^R = j + Y_V^R \cdot PL)</math>         <math>\Rightarrow \begin{cases} \text{InAc}(X_{Bin}^R, Y_{Bin}^R) = NumPuntos \\ NumPuntos = NumPuntos + 1 \end{cases}</math> </pre>	(4.5)
---	-------

<pre> HayBordes(i, j)   Para k = [0:VA-1]     Para l = [0:VL-1]       Si <math>(k, l) \neq (X_V^R, Y_V^R)</math>         <math>\Rightarrow</math> Si <math>(\text{ValorPunto}(i + k \cdot PA, j + l \cdot PL) - \text{ValorPunto}(i + X_V^R \cdot PA, j + Y_V^R \cdot PL) = 1)</math>           <math>\Rightarrow (X_{Bin}^R, Y_{Bin}^R) = (i + X_V^R \cdot PA, j + Y_V^R \cdot PL)</math>, Se detiene la búsqueda. </pre>	(4.6)
--	-------

Se puede apreciar que cuando el método *HayBordes* (4.6) no detecta ningún borde en la localización de la ventana, el punto de referencia detectado será el de la localización de ventana anterior que si contiene bordes. Es por esto que en la inicialización del vector de acumulador, se tiene la condición de que el punto de referencia detectado por el método (4.6) sea el mismo punto de referencia en la localización de la ventana. En el método (4.6) (para la ventana), se propone que hay bordes cuando la resta entre cualquier punto de la ventana y el punto de referencia da un valor de uno.

Además, en esta clase se genera la matriz, del mismo tamaño que la imagen de entrada, que contiene la dirección de los bordes de dicha imagen. Para generar esta matriz, se hace un recorrido por todos los puntos de la imagen, si el punto tiene valor de cero, se le asigna el valor de 4 en la localización de dicho punto en la matriz de dirección. Las direcciones que se definen para generar esta matriz, son las primeras cuatro direcciones del código de Freeman, estas son

$0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $135^\circ$  que en la matriz toman el valor de 0, 1, 2 y 3, respectivamente. Para que un punto contenga una de las direcciones, debe cumplir que haya tres puntos consecutivos en la misma dirección con valor de 1. Si uno de los puntos consecutivos en la dirección tiene valor de 0, entonces se hace la búsqueda de su dirección para las demás orientaciones. Si no cumple con ninguna de las cuatro direcciones, entonces se le da el valor de 4. A continuación se presenta el algoritmo utilizado para generar esta matriz de dirección, denominada como **ImDir**.

<p>Genera la matriz de dirección</p> <p style="margin-left: 40px;">Para <math>i = [0 : PA : (A - PA \cdot VA - 1)]</math></p> <p style="margin-left: 80px;">Para <math>j = [0 : PL : (L - PL \cdot VL - 1)]</math></p> <p style="margin-left: 120px;">Si <math>\text{ValorPunto}(i, j) = 0 \Rightarrow \text{AsignaDireccion}(i, j, 4)</math></p> <p style="margin-left: 120px;">Si <math>\text{Direccion1}(i, j) = 1 \Rightarrow \text{AsignaDireccion}(i, j, 1)</math></p> <p style="margin-left: 120px;">sino, Si <math>\text{Direccion3}(i, j) = 3 \Rightarrow \text{AsignaDireccion}(i, j, 3)</math></p> <p style="margin-left: 120px;">sino, Si <math>\text{Direccion2}(i, j) = 2 \Rightarrow \text{AsignaDireccion}(i, j, 2)</math></p> <p style="margin-left: 120px;">sino, Si <math>\text{Direccion0}(i, j) = 0 \Rightarrow \text{AsignaDireccion}(i, j, 0)</math></p> <p style="margin-left: 120px;">sino, <math>\text{AsignaDireccion}(i, j, 4)</math></p>	(4.7)
---	-------

El método *AsignaDireccion*, le asigna el valor de la dirección a todos los píxeles del punto en cuestión. Es decir, si la dirección es *dir* y el punto en cuestión está localizado en las coordenadas  $(i, j)$  de la imagen, entonces  $\text{ImDir}(i+k, j+l) = \text{dir}$ , para  $k = [0 : PA - 1]$  y  $l = [0 : PL - 1]$ . Los métodos de detección de dirección, regresan el número de la dirección, si la condición se cumple, de lo contrario regresan el valor de 4. En *Direccion0*, la condición es que  $\text{ValorPunto}(i, j+k \cdot PL) = 1$ , para  $k = 0, 1, 2$ , en el punto localizado en  $(i, j)$ . En la dirección de  $45^\circ$  (*Direccion1*), la condición es que  $\text{ValorPunto}(i+k \cdot PA, j-k \cdot PL) = 1$ , para  $k = 0, 1, 2$  y  $j > k \cdot PL$ . Para la dirección 2 ( $90^\circ$ ), la condición es  $\text{ValorPunto}(i+k \cdot PA, j) = 1$ , para  $k = 0, 1, 2$ . Finalmente, para la dirección de  $135^\circ$  la condición es que  $\text{ValorPunto}(i+k \cdot PA, j+k \cdot PL) = 1$ , para  $k = 0, 1, 2$ .

Como se mencionó a principios de este capítulo, la tabla de referencia se genera en cada paso de la ventana. Para la transformada generalizada de Hough, se definen cinco tablas de referencia, cada una correspondiente a una dirección, incluyendo la "dirección" 4 que es el caso en el que el punto de borde no corresponde a ninguna de las cuatro primeras direcciones. Como

la tabla se define en cada ventana, el tamaño de la misma o la cantidad máxima de puntos que puede contener es  $(VA \cdot VL)$ . Estas tablas contienen las  $(r, \alpha)$  para cada punto de borde y para cada dirección. En primer lugar, para cada paso de la ventana, se inicializa la tabla de referencia para cada dirección, es decir

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{TablaR0}(k,l)=0, \text{TablaR1}(k,l)=0, \\ \text{TablaR2}(k,l)=0, \text{TablaR3}(k,l)=0 \\ \text{y TablaR4}(k,l)=0 \end{array}} \quad (4.8)$$

para  $k = 0,1$  y  $l = [0 : VA \cdot VL - 1]$ . En la localización  $(i, j)$  de la ventana, se inicializan las tablas de referencia, los contadores de los puntos de bordes correspondientes a cada dirección, estos son  $PB0=0, PB1=0, PB2=0, PB3=0$  y  $PB4=0$  y el punto de referencia de la imagen en la localización de la ventana es  $(X_{Bin}^R, Y_{Bin}^R) = (i + X_V^R \cdot PA, j + Y_V^R \cdot PL)$ . Entonces, las tablas de referencia se generan como sigue:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Para } k = [0 : VA - 1] \\ \quad \text{Para } l = [0 : VL - 1] \\ \quad \quad \text{Si } (k,l) \neq (X_V^R, Y_V^R) \\ \quad \quad \quad \Rightarrow \text{Si ValorPunto}(i + k \cdot PA, j + l \cdot PL) = 1 \\ \quad \quad \quad \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{dir} = \text{ImDir}(i + k \cdot PA, j + l \cdot PL) \\ \text{Si } \text{dir} \neq 0 \Rightarrow \text{AsignaTablaR}(\text{dir}, i + k \cdot PA, j + l \cdot PL) \end{cases} \end{array}} \quad (4.9)$$

La condición: dirección distinta de  $0^\circ$ , se debe a que no se quiere detectar estratos horizontales, además de que la detección en esta dirección puede realzar los múltiples horizontales como posibles estructuras en la imagen. El método *AsignaTablaR* le asigna a la tabla de referencia correspondiente a la dirección de entrada, los valores de  $(r, \alpha)$  e incrementa el contador de los puntos correspondientes a dicha tabla. Donde  $r = \sqrt{(X_{Bin}^R - X^B)^2 + (Y_{Bin}^R - Y^B)^2}$  y

$\alpha = \arctan\left(\frac{Y_{Bin}^R - Y^B}{X_{Bin}^R - X^B}\right)$ , para la dirección *dir* y para el punto de borde  $(X^B, Y^B)$  de entrada a este método, entonces  $\boxed{\text{TablaRdir}(0, PBdir) = r, \text{TablaRdir}(1, PBdir) = \alpha \text{ y } PBdir = PBdir + 1}$ .

En la Figura 3 se describe la definición de una ventana (rectángulo rojo) de  $[3 \times 3]$

puntos y de un punto (sub-rectángulos rojos dentro de la ventana) de  $[3 \times 3]$  píxeles, donde cada píxel es un cuadrado negro en el fondo cuadrículado. En esta Figura se puede apreciar que, de acuerdo al método (4.4), los puntos 2, 4 y 6 dentro de la ventana, además del punto exterior a la misma, tienen el valor de 1, mientras que el resto de los puntos tienen valor de 0. Por la definición de la dirección de un punto de borde, el punto 2 tiene dirección de  $45^\circ$ , mientras que a los puntos 4 y 6 se les asignaría el valor de dirección 4 debido a que no hay tres puntos consecutivos en ninguna de las cuatro direcciones principales. El punto de referencia dentro de esa ventana es el punto 5 y en la Figura 4 se describe el parámetro  $r$  de la Tabla-R, para los puntos de bordes encontrados en dicha ventana. El parámetro  $\alpha = 0$  radianes para el punto 2, para el punto 4  $\alpha = 3\pi/2$  radianes y para el punto 6  $\alpha = \pi/2$  radianes. En esta ventana, los parámetros  $(r, \alpha)$  para el punto 2 estarían contenidos en la Tabla-R1, mientras que los parámetros para los puntos 4 y 6 estarían en la Tabla-R4.

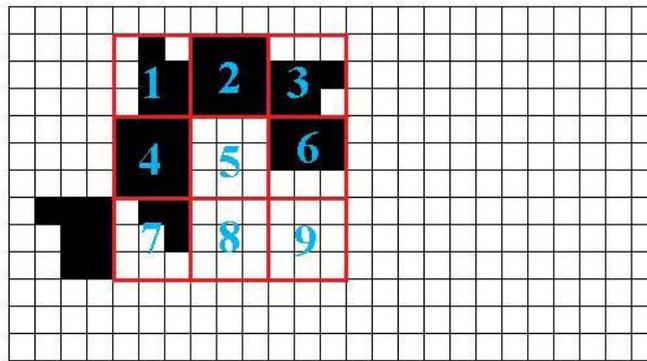


Figura 3. Definición de un punto de  $[3 \times 3]$  píxeles y de una ventana de  $[3 \times 3]$  puntos.

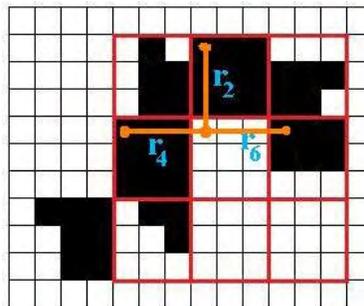


Figura 4. Descripción de la realización de la Tabla-R.

Luego de haber ejecutado la transformada generalizada de Hough, que se describe en la siguiente sección, se genera la imagen del acumulador de acuerdo a un umbral para el vector  $\mathbf{Ac}$ . Esta imagen es del mismo tamaño que la imagen de entrada, y todos los valores del vector  $\mathbf{Ac}$

que son mayores o iguales a este umbral corresponden a un punto con valor de 1 en la imagen del acumulador, de acuerdo con la matriz de índices del acumulador. Este umbral se obtiene con el mismo método utilizado para la binarización de la imagen propuesto por Ridler y Calvard (1978). En este caso, la suposición es que una distribución normal, del histograma del acumulador, corresponde a estructuras en el radargrama y la otra a objetos que no se consideran como estructuras. La imagen del acumulador se calcula como sigue:

$$\begin{array}{l}
 \text{Para } i = [0 : PA : A - VA \cdot PA - 1] \\
 \text{Para } j = [0 : PL : L - VL \cdot PL - 1] \\
 \text{Si } \text{InAc}(i, j) \neq -1 \text{ y Si } \text{Ac}(\text{InAc}(i, j)) \geq u_{ac} \\
 \Rightarrow \text{AsignaIndiceInversa}(i, j, I)
 \end{array} \tag{4.10}$$

A la imagen del acumulador se le denominó **IndiceINV** y el método *AsignaIndiceInversa* le asigna el valor de entrada al punto en la localización  $(i, j)$ , es decir  $\text{IndiceINV}(i+k, j+l)=1$ , para  $k = [0 : PA-1]$  y  $l = [0 : PL-1]$ , cuando el valor de entrada al método es 1.

#### *Transformada Generalizada de Hough: Clase THough*

Esta clase calcula la transformada generalizada de Hough sobre una imagen binaria que representa los bordes de las estructuras y de acuerdo a una tabla de referencia generada en cada paso de la ventana. Además de la imagen binaria, esta clase recibe el tamaño de un punto  $[PA \times PL]$  píxeles, el tamaño de la ventana  $[VA \times VL]$  puntos y la localización del punto de referencia en la ventana  $(X_v^R, Y_v^R) = \left( \frac{VA-1}{2}, \frac{VL-1}{2} \right)$ , es decir, el punto central de la ventana. En primer lugar, se aumenta el tamaño de la imagen binaria recibida obteniendo una nueva imagen cuyo tamaño es el de la imagen de entrada más el tamaño de la ventana por el tamaño del punto. Es decir, la imagen aumentada **Bin** tendrá tamaño de  $[A \times L] = [(M + VA \cdot PA) \times (N + VL \cdot PL)]$  donde  $[M \times N]$  es el tamaño de la imagen de entrada. Se definió esta nueva imagen, para poder hacer el recorrido de la ventana sobre todos los puntos de la imagen binaria. Luego, se inicializa la clase de referencia de la cual se obtiene el acumulador, las tablas de referencia, además de los métodos descriptivos de los bordes de la imagen. La inicialización de la clase de referencia se

realiza sobre la imagen **Bin**, con los valores del tamaño de la ventana, del punto y la localización del punto de referencia en la ventana.

Ya inicializada la clase de referencia, se tiene el vector de acumulador y se puede proceder a ejecutar la transformada generalizada de Hough, como sigue:

<p style="margin: 0;">Transformada de Hough</p> <p style="margin: 0; padding-left: 40px;">Para <math>i = [0 : PA : (A - VA \cdot PA - 1)]</math></p> <p style="margin: 0; padding-left: 80px;">Para <math>j = [0 : PL : (L - VL \cdot PL - 1)]</math></p> <p style="margin: 0; padding-left: 120px;">Si <math>\text{IndiceVentana}(i, j) = \text{true}</math></p> <p style="margin: 0; padding-left: 120px;"><math>\Rightarrow \text{TransformadaLocal}(i, j)</math></p>	(4.11)
--	--------

El método *IndiceVentana*, se encuentra en la clase *Referencia* y regresa un valor de verdadero si en la ventana hay por lo menos un índice de referencia, es decir si en la localización de la ventana, la matriz de índices de referencia contiene por lo menos un valor distinto de -1. Si se cumple esta condición, entonces calcula la transformada generalizada de Hough en la ventana. Aquí, se generan las tablas de referencia y si hay un punto de borde, entonces se incrementa el acumulador, de acuerdo con los parámetros de la ventana.

<p style="margin: 0;">TransformadaLocal(<math>i, j</math>)</p> <p style="margin: 0; padding-left: 40px;">TablaReferencia(<math>i, j</math>)</p> <p style="margin: 0; padding-left: 40px;">Para <math>k = [0 : VA - 1]</math></p> <p style="margin: 0; padding-left: 80px;">Para <math>l = [0 : VL - 1]</math></p> <p style="margin: 0; padding-left: 120px;">Si <math>\text{ValorPunto}(i + k \cdot PA, j + l \cdot PL) = 1</math></p> <p style="margin: 0; padding-left: 120px;"><math>\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{dir} = \text{DireccionBorde}(i + k \cdot PA, j + l \cdot PL) \\ \text{Si } \text{dir} \neq 0 \Rightarrow \text{AcumuladorLocal}(\text{dir}, i + k \cdot PA, j + l \cdot PL) \end{array} \right.</math></p>	(4.12)
---	--------

El método *DireccionBorde*, está contenido en la clase referencia y entrega (como lo dice su nombre) la dirección del punto en estudio. El método *AcumuladorLocal* (4.13), es el que incrementa el acumulador de acuerdo con los parámetros de la ventana. Es decir, para cada  $(r, \alpha)$  de la tabla de referencia (correspondiente a la dirección del punto de borde de entrada al método) se calcula la localización del punto de referencia como  $X^R = X^B + r \sin \alpha$  y  $Y^R = Y^B + r \cos \alpha$ , donde  $(X^B, Y^B)$  es la localización del punto de borde. Si el punto de referencia calculado

corresponde a un punto de referencia en el vector de acumulador, entonces se incrementa este elemento de dicho vector.

$\begin{aligned} & \text{AcumuladorLocal}(dir, i, j) \\ & \text{Para } m = [0 : P Bdir - 1] \\ & \quad X^R = i + \text{TablaRdir}(0, m) \cdot \sin(\text{TablaRdir}(1, m)) \\ & \quad Y^R = j + \text{TablaRdir}(0, m) \cdot \cos(\text{TablaRdir}(1, m)) \\ & \quad \text{Si } (X^R \geq 0 \text{ y } Y^R \geq 0) \text{ y Si } \text{InAc}(X^R, Y^R) \neq -1 \\ & \quad \Rightarrow \text{Ac}(\text{InAc}(X^R, Y^R)) = \text{Ac}(\text{InAc}(X^R, Y^R)) + 1 \end{aligned}$	(4.13)
--	--------

Como la ventana se pasa por cada punto de la imagen, en una ventana puede haber más de un punto de referencia, que puede ser incrementado de acuerdo al algoritmo del acumulador local.

Luego de haber recorrido la ventana por todos los puntos de la imagen, se obtiene el umbral del acumulador para generar la imagen binaria que contiene los puntos de referencias que representan estructuras. La transformada inversa, se calcula de la misma manera, es decir, se hace un recorrido de la ventana por todos los puntos de la imagen del acumulador, si dicho punto tiene valor de uno, entonces se calcula la inversa en la ventana.

$\begin{aligned} & \text{Transformada Inversa} \\ & \text{Para } i = [0 : PA : (A - VA \cdot PA - 1)] \\ & \quad \text{Para } j = [0 : PL : (L - VL \cdot PL - 1)] \\ & \quad \text{Si } \text{IndiceINV}(i, j) = 1 \\ & \quad \Rightarrow \text{AcumuladorInversa}(i, j, (X^R, Y^R)) \end{aligned}$	(4.14)
--	--------

El método *AcumuladorInversa* (4.15) es el que calcula la transformada inversa de Hough en la ventana. En este caso, se generan las tablas de referencia en dicha ventana y se hace un recorrido por todos los parámetros de dichas tablas. Entonces, para el punto de referencia de la ventana

$(X^R, Y^R)$ , se calcula el punto de borde como  $\begin{pmatrix} X^B \\ Y^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^R \\ Y^R \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$  para todos los  $(r, \alpha)$  en

todas las direcciones. Si el punto de borde calculado tiene valor de uno, entonces la imagen inversa **INV** que contiene las estructuras, contendrá dicho punto como un punto de borde de la

estructura. En este caso, la asignación del punto de borde en la imagen inversa, se realiza de acuerdo a los píxeles, con valor de 1, contenidos en el punto de la imagen **Bin**.

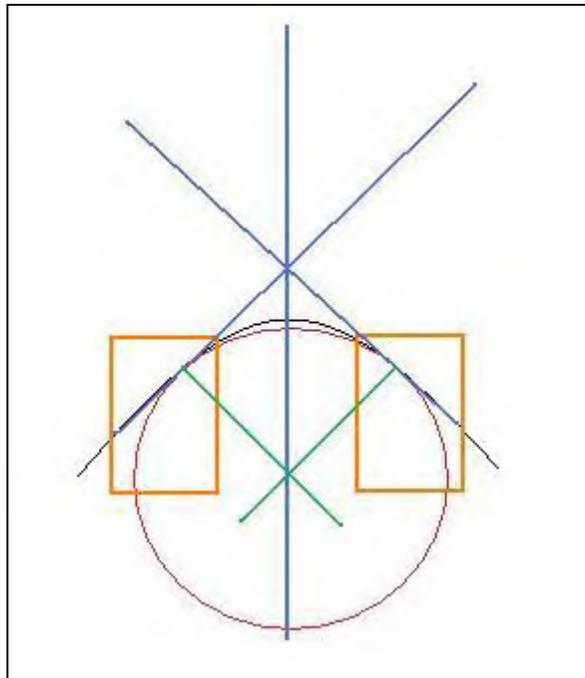
$$\begin{aligned}
 & \text{AcumuladorInversa}(i, j, (X^R, Y^R)) \\
 & \quad \text{TablaReferencia}(i, j) \\
 & \quad \text{Para } d = [0:4] \\
 & \quad \quad \text{Si } PBd \neq 0 \\
 & \quad \quad \Rightarrow \text{Para } m = [0:PBd-1] \\
 & \quad \quad \quad X^B = X^R - \text{TablaRd}(0, m) \cdot \sin(\text{TablaRd}(1, m)) \\
 & \quad \quad \quad Y^B = Y^R - \text{TablaRd}(0, m) \cdot \cos(\text{TablaRd}(1, m)) \\
 & \quad \quad \text{Si ValorPunto}(X^B, Y^B) = 1 \\
 & \quad \quad \quad \Rightarrow \text{Si Bin}(X^B + k, Y^B + l) = 1 \\
 & \quad \quad \quad \Rightarrow \text{INV}(X^B + k, Y^B + l) = 1, \\
 & \quad \quad \quad \text{para cada } k = [0:PA-1] \text{ y } l = [0:PL-1]
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

De acuerdo con la dirección del punto de borde, se le asigna al punto en la imagen **INV**, el valor correspondiente a los píxeles del punto en **Bin** que le sigue en esa dirección, para tener más continuidad en los bordes de las estructuras detectadas. Esta continuidad se realiza en el algoritmo (4.15), es decir, si la dirección es  $d$  y el punto de borde calculado es  $(X^B, Y^B)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{ Si } d = 0 \Rightarrow \text{Bin}(X^B + k, Y^B + PL + l) = 1 \\
 & \Rightarrow \text{INV}(X^B + k, Y^B + PL + l) = 1, \text{ para } k = [0:PA-1] \text{ y } l = [0:PL-1] \\
 & \bullet \text{ Si } d = 1 \Rightarrow \text{Bin}(X^B + k, Y^B + PL + l) = 1 \\
 & \Rightarrow \text{INV}(X^B + PA + k, Y^B - PL + l) = 1, \text{ para } k = [0:PA-1] \text{ y } l = [0:PL-1] \\
 & \bullet \text{ Si } d = 2 \Rightarrow \text{Bin}(X^B + k, Y^B + PL + l) = 1 \\
 & \Rightarrow \text{INV}(X^B + PA + k, Y^B + l) = 1, \text{ para } k = [0:PA-1] \text{ y } l = [0:PL-1] \\
 & \bullet \text{ Si } d = 3 \Rightarrow \text{Bin}(X^B + k, Y^B + PL + l) = 1 \\
 & \Rightarrow \text{INV}(X^B + PA + k, Y^B + PL + l) = 1, \text{ para } k = [0:PA-1] \text{ y } l = [0:PL-1]
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

### *Determinación de Estructuras Circulares*

En el caso que el GPR pasa sobre estructuras circulares en el subsuelo, como tuberías y túneles, o estructuras que tienen superficies curvas, se presentan hipérbolas de difracción en el perfil de reflexión. Estas hipérbolas de difracción son detectadas por la transformada generalizada de Hough y para obtener la estructura característica de estas hipérbolas se obtiene la directriz de la misma, mediante la transformada de Hough de líneas y de acuerdo a la intersección de estas directrices, con la bisectriz es posible obtener el centro y radio del círculo contenido en la misma (Figura 5). Cuando se finaliza la transformada generalizada de Hough, este programa tiene la opción de continuar con la localización de estas estructuras, en el caso que existan hipérbolas de difracción. El primer paso de esta parte del programa, es erosionar la imagen, es decir, obtener una imagen cuyos bordes se presentan con espesor de un píxel y no de un punto. Esta imagen erosionada es desplegada para dibujar sobre ella un rectángulo por cada línea de la hipérbola que se quiere detectar. La transformada lineal de Hough se aplica sobre cada rectángulo, debido a que cuando se aplica sobre toda la imagen no obtiene las directrices de cada hipérbola. Los parámetros de estas líneas detectadas se pasan al programa de localización de las estructuras para obtener y dibujar las mismas sobre el perfil de GPR.



**Figura 5. Descripción de cómo se ajusta el círculo a una hipérbola de difracción en este algoritmo, de acuerdo con la selección de rectángulos (color naranja). Las líneas azules corresponden a las directrices y bisectriz de la hipérbola (en negro). Las líneas verdes son perpendiculares a las directrices y el centro de la estructura circular (en rojo) corresponde al punto medio de la intersección entre estas perpendiculares con la bisectriz.**

*Erosión de imagen: Clase Erosión*

Esta clase reduce el borde de la imagen binaria a la dimensión de un píxel. La entrada a esta clase es la imagen binaria resultante de la inversa de la transformada generalizada de Hough que contiene las hipérbolas de difracción como estructuras detectadas. Sea **IEr** la imagen erosionada y **ITH** la salida de la transformada generalizada de Hough. Entonces, la erosión se realiza como sigue:

<p>Erosión</p> <p style="margin-left: 40px;">Para <math>i = [0 : A - 1]</math></p> <p style="margin-left: 80px;">Para <math>j = [0 : L - 1]</math></p> <p style="margin-left: 120px;">Si <math>ITH(i, j) \neq 0</math> y Si <math>(ITH(i, j) - ITH(i, j - 1) = 1)</math></p> <p style="margin-left: 120px;"><math>\Rightarrow IEr(i, j) = 1</math></p>	(4.17)
--	--------

La imagen **IEr** es desplegada para seleccionar los rectángulos conteniendo las líneas que se quieren detectar. Es decir, para cada hipérbola presente en la imagen se detectan dos líneas, de acuerdo a sus directrices. Es recomendable que se seleccionen los rectángulos en las zonas que contengan la directriz y que estén cerca del ápice de la hipérbola, además que la selección de estos rectángulos se haga de acuerdo al orden (de izquierda a derecha) en que se encuentran las directrices de las hipérbolas. Esto produce un arreglo de coordenadas denominado **coord** que contiene las coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  correspondientes a las esquinas superior izquierda e inferior derecha del rectángulo, respectivamente. El arreglo de coordenadas tiene tamaño de  $[4 \times NumZonas]$ , donde *NumZonas* es la cantidad de rectángulos seleccionados.

$coord = \begin{bmatrix} x_1^0 & y_1^0 & x_2^0 & y_2^0 \\ x_1^1 & y_1^1 & x_2^1 & y_2^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{NumZonas-1} & y_1^{NumZonas-1} & x_2^{NumZonas-1} & y_2^{NumZonas-1} \end{bmatrix}$	(4.18)
--	--------

*Transformada Lineal de Hough: Clase HoughLinea*

En la transformada lineal de Hough, para un píxel de borde con coordenadas  $(x, y)$  se calcula la ecuación  $\rho(\theta) = x \cos \theta + y \sin \theta, \forall \theta$  y se incrementa el acumulador **A** para el punto  $(\rho, \theta)$  calculado. Además, todos los puntos de bordes que pasan por la misma línea incrementan

el mismo punto del acumulador. De aquí, que esta transformada pasa una línea (del espacio de la imagen) a un punto en el espacio de parámetros.

Como entrada a la clase que ejecuta la transformada lineal de Hough, se tiene la imagen erosionada **IEr**, el arreglo de coordenadas **coord** y la cantidad de rectángulos seleccionados **NumZonas**. En primer lugar se define el tamaño de los vectores que contienen los parámetros  $(\rho, \theta)$ . El valor máximo del vector  $\rho$  se define como la distancia mayor que puede estar contenida en la imagen, esta es  $\rho_{\max} = \sqrt{A^2 + L^2}$ , para la imagen de entrada de tamaño  $[A \times L]$ . Entonces, el tamaño del vector  $\rho$  es  $Tam\rho = 2\rho_{\max} + 1$  y el tamaño del vector  $\theta$  es  $Tam\theta = Tam\rho$  para tener una mejor resolución en la imagen del acumulador. El valor máximo del vector  $\theta$  es  $\theta_{\max} = 2\pi$  y el tamaño del acumulador es  $[Tam\theta \times Tam\rho]$ . Entonces se inicializan los vectores de parámetros como sigue:

$$\begin{array}{l} \rho = [-\rho_{\max} : \rho_{\max}] \\ \theta = \left[ 0 : \frac{\theta_{\max}}{Tam\theta - 1} : \theta_{\max} \right] \end{array} \quad (4.19)$$

Luego de haber inicializado los parámetros del acumulador, se procede a ejecutar la transformada lineal de Hough sobre cada rectángulo seleccionado. Para cada zona, primero se inicializa el acumulador (haciendo cero todos sus elementos), luego se calcula la transformada lineal y se obtiene el máximo del acumulador  $\max(\mathbf{A})$ . Con este máximo se obtienen los parámetros de la línea detectada en la zona, se dibuja la línea en la imagen inversa **THL** y se guardan los parámetros en un arreglo **Param** de tamaño  $[2 \times NumZonas]$ . Este arreglo de parámetros contiene los valores de  $(\rho, \theta)$  de la línea detectada en cada zona.

<p>Transformada de Línea</p> <p><math>zona = 0</math></p> <p>Mientras <math>zona &lt; NumZonas</math></p> <p style="padding-left: 20px;"><math>A(i, j) = 0</math>, para <math>i = [0 : Tam\theta - 1]</math> y <math>j = [0 : Tam\rho - 1]</math></p> <p style="padding-left: 20px;">Para <math>i = [coord(0, zona) : coord(2, zona) - 1]</math></p> <p style="padding-left: 40px;">Para <math>j = [coord(1, zona) : coord(3, zona) - 1]</math></p> <p style="padding-left: 60px;">Si <math>I\text{Er}(i, j) \neq 0</math></p> <p style="padding-left: 80px;"><math>\Rightarrow \rho = j \cos(\theta(k)) + i \sin(\theta(k))</math>, para <math>k = [0 : Tam\theta - 1]</math></p> <p style="padding-left: 80px;"><math>A(k, \rho + \rho_{\max}) = A(k, \rho + \rho_{\max}) + 1</math></p> <p style="padding-left: 20px;">Inversa.</p> <p style="padding-left: 20px;"><math>zona = zona + 1</math></p>	(4.20)
--	--------

En el algoritmo de la transformada de línea (4.20), se puede apreciar que luego de calcular dicha transformada sobre el rectángulo, se procede al método denominado *Inversa* (4.21). Este método es el que obtiene los parámetros correspondientes al máximo del acumulador y dibuja la línea en la imagen inversa. Después de ejecutar la transformada inversa en la zona, se incrementa el número de zonas y se ejecuta nuevamente la transformada de líneas de Hough.

<p>Inversa</p> <p style="padding-left: 20px;">Para <math>i = [0 : Tam\theta - 1]</math></p> <p style="padding-left: 40px;">Para <math>j = [0 : Tam\rho - 1]</math></p> <p style="padding-left: 60px;">Si <math>A(i, j) = \max(\mathbf{A})</math></p> <p style="padding-left: 80px;"><math>\Rightarrow \begin{cases} Param(0, zona) = \rho(j) \\ Param(1, zona) = \theta(i) \\ DibujaLinea(i, j) \end{cases}</math></p> <p style="padding-left: 20px;">DibujaLinea(<math>i, j</math>)</p> <p style="padding-left: 40px;">Para <math>x = [0 : A - 1]</math></p> <p style="padding-left: 60px;">Para <math>y = [0 : L - 1]</math></p> <p style="padding-left: 80px;">Si <math>\rho(j) = y \cos(\theta(i)) + x \sin(\theta(i))</math></p> <p style="padding-left: 80px;"><math>\Rightarrow \text{THL}(x, y) = 1</math></p>	(4.21)
--	--------

De esta clase, es posible obtener la imagen inversa con las líneas de cada zona, la imagen erosionada con los rectángulos dibujados y la imagen del acumulador para el último rectángulo, debido a que se inicializa para cada rectángulo. Además, de esta clase se obtienen los parámetros

de las líneas detectadas para calcular la localización de los círculos contenidos en cada hipérbola de difracción, que se discute a continuación.

#### *Localización de estructuras: Clase Localización*

Esta clase contiene los métodos necesarios para obtener la localización de la estructura circular cuya señal se caracteriza por una hipérbola de difracción. En general, luego de obtener las directrices de la hipérbola mediante la transformada lineal de Hough, se calcula la intersección de estas directrices y sobre este punto de intersección se dibuja la bisectriz de las mismas. Sobre las zonas elegidas, se obtiene el punto de la directriz que tenga la menor distancia al punto de intersección de dichas directrices. En estos puntos sobre las directrices, se calcula la recta ortogonal a las mismas y se obtiene la intersección de estas rectas ortogonales con la bisectriz. De estas intersecciones tenemos dos centros posibles para la estructura circular que queremos localizar, entonces, el centro de la estructura se obtiene mediante el promedio de estos dos centros. Con este centro de la estructura, se obtienen dos radios cada uno correspondiente a la distancia entre el punto elegido en cada directriz y dicho centro. De la misma manera, el radio de la estructura se obtiene mediante el promedio entre estos dos radios calculados.

La clase *Localizacion*, recibe de entrada la imagen erosionada **IEr**, la cantidad de zonas elegidas *NumZonas*, el arreglo de coordenadas de cada rectángulo **coord** y el arreglo de los parámetros de cada línea detectada por la transformada de líneas de Hough **Param**. El primer paso es el cálculo de la localización del punto de intersección entre las directrices y obtener la ecuación de la bisectriz. Como se mencionó, se selecciona un rectángulo para cada línea que se quiere detectar y esta selección se hace de izquierda a derecha, tomando primero la directriz con pendiente positiva y segundo la de pendiente negativa. Entonces, en el arreglo de coordenadas, cada dos rectángulos contiene las directrices de una sola hipérbola de difracción y el número de bisectrices a calcular son  $NumZonas/2$  y se obtiene el arreglo de parámetros  $(\rho, \theta)$  de cada bisectriz **Pbis** de tamaño  $\left[ 2 \times \frac{NumZonas}{2} \right]$ . El método *CalculaLocalizacion* hace un recorrido por cada dos zonas para calcular la intersección entre estas dos directrices y dibujar la bisectriz como se plantea a continuación.

<p>CalculaLocalización</p> <p><math>NumBis = 0</math></p> <p>Para <math>i = [0 : 2 : NumZonas - 2]</math></p> $\begin{pmatrix} y_{int} \\ x_{int} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(Param(1,i)) & \sin(Param(1,i)) \\ \cos(Param(1,i+1)) & \sin(Param(1,i+1)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Param(0,i) \\ Param(0,i+1) \end{pmatrix}$ $Pbis(1, NumBis) = \theta_{bis} = \frac{Param(1,i) + Param(1,i+1)}{2} \tag{4.22}$ $Pbis(0, NumBis) = \rho_{bis} = y_{int} \cos(\theta_{bis}) + x_{int} \sin(\theta_{bis})$ <p>DibujaBisectriz.</p> <p>DetectaPunto.</p> <p><math>NumBis = NumBis + 1</math></p>
---

Sea **ImBis** la imagen que contiene los puntos de intersección de las bisectrices, las bisectrices y los puntos obtenidos para cada directriz. Entonces, el método *DibujaBisectriz* ejecuta lo siguiente  $\boxed{\text{Si } \rho_{bis} = y \cos(\theta_{bis}) + x \sin(\theta_{bis}) \Rightarrow \text{ImBis}(x, y) = 1, \text{ para } x = [0 : A-1] \text{ y } y = [0 : L-1]}$ . El punto de intersección se dibuja en esta imagen como un punto de  $[3 \times 3]$  píxeles, es decir  $\text{ImBis}(y_{int} + k, x_{int} + l)$ , para  $k = [0 : 2]$  y  $l = [0 : 2]$ . El método *DetectaPunto* (4.23), es el que realiza la búsqueda del punto en la directriz que tiene la menor distancia al punto de intersección, de acuerdo con la imagen erosionada. Estos puntos se guardan en un arreglo **Puntos** de tamaño  $[2 \times NumZonas]$  y la búsqueda se realiza en cada zona y de acuerdo a la condición de que el punto sea de borde y quede en la directriz.

<p><b>Detecta Punto</b></p> <p>En el rectángulo <math>i</math></p> <p>Para <math>x = [\text{coord}(2,i) - 1 : -1 : \text{coord}(0,i)]</math></p> <p>Para <math>y = [\text{coord}(3,i) - 1 : -1 : \text{coord}(1,i)]</math></p> <p>Si <math>(\text{IEr}(x,y) = 1 \text{ y } \text{Param}(0,i) = y \cos(\text{Param}(1,i)) + x \sin(\text{Param}(1,i)))</math></p> $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Puntos}(0,i) = x \\ \text{Puntos}(1,i) = y \\ \text{ImBis}(x+k, y+l) = 1, \text{ para } k = [0:2] \text{ y } l = [0:2] \end{array} \right. \quad \text{Detiene la búsqueda}$ <p>En el rectángulo <math>i+1</math></p> <p>Para <math>x = [\text{coord}(0,i+1) - 1 : \text{coord}(2,i+1)]</math></p> <p>Para <math>y = [\text{coord}(1,i+1) - 1 : \text{coord}(3,i+1)]</math></p> <p>Si <math>(\text{IEr}(x,y) = 1 \text{ y } \text{Param}(0,i+1) = y \cos(\text{Param}(1,i+1)) + x \sin(\text{Param}(1,i+1)))</math></p> $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Puntos}(0,i+1) = x \\ \text{Puntos}(1,i+1) = y \\ \text{ImBis}(x+k, y+l) = 1, \text{ para } k = [0:2] \text{ y } l = [0:2] \end{array} \right. \quad \text{Detiene la búsqueda} \quad (4.23)$
--

Luego de haber ejecutado el método (4.22) para todas las zonas, se procede al método *CalculaCentro* (4.24). Este método obtiene las líneas ortogonales a las directrices, calcula el centro y el radio de la estructura circular que se quiere detectar y dibuja estas estructuras sobre una imagen nueva **ImC**. Los parámetros de cada círculo (*centro,radio*) se dibujan con el método “*drawOval*” de la librería de gráficos en JAVA.

Calcula Centro

$NumBis = 0$

Para  $i = [0 : 2 : NumZonas - 2]$

$\theta_{\perp}^i = Param(1, i) + 90^{\circ}$

$\theta_{\perp}^{i+1} = Param(1, i + 1) + 90^{\circ}$

$\rho_{\perp}^i = Puntos(1, i)\cos(\theta_{\perp}^i) + Puntos(0, i)\sin(\theta_{\perp}^i)$

$\rho_{\perp}^{i+1} = Puntos(1, i + 1)\cos(\theta_{\perp}^{i+1}) + Puntos(0, i + 1)\sin(\theta_{\perp}^{i+1})$

$$\begin{pmatrix} y_{centro}^i \\ x_{centro}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\perp}^i) & \sin(\theta_{\perp}^i) \\ \cos(PBis(1, NumBis)) & \sin(PBis(1, NumBis)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_{\perp}^i \\ PBis(0, NumBis) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{centro}^{i+1} \\ x_{centro}^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\perp}^{i+1}) & \sin(\theta_{\perp}^{i+1}) \\ \cos(PBis(1, NumBis)) & \sin(PBis(1, NumBis)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_{\perp}^{i+1} \\ PBis(0, NumBis) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{centro} \\ x_{centro} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_{centro}^i + y_{centro}^{i+1}}{2} \\ \frac{x_{centro}^i + x_{centro}^{i+1}}{2} \end{pmatrix}$$

$$r^i = \sqrt{(Puntos(0, i) - x_{centro})^2 + (Puntos(1, i) - y_{centro})^2}$$

$$r^{i+1} = \sqrt{(Puntos(0, i + 1) - x_{centro})^2 + (Puntos(1, i + 1) - y_{centro})^2}$$

$$r = \frac{r^i + r^{i+1}}{2}$$

DibujaCirculo( $(x_{centro}, y_{centro}), r$ )

$NumBis = NumBis + 1$

(4.24)

Para obtener la localización de la estructura circular de acuerdo con la escala en distancia horizontal y profundidad, obtenemos los parámetros de *scan/metro* y *muestras/metros* del encabezado de los datos. Entonces, el centro es

$$\left( \frac{x_c}{scan/metro}, \frac{y_c}{muestras/metros} \right) \quad (4.25)$$

y un punto en el círculo tendrá coordenadas

$$\left( \frac{x}{scan/metro}, \frac{y}{muestras/metros} \right) \quad (4.26)$$

El radio de la estructura será

$$r = \sqrt{\left(\frac{x}{\text{scan/metro}} - \frac{x_c}{\text{scan/metro}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\text{muestras/metro}} - \frac{y_c}{\text{muestras/metro}}\right)^2} \quad (4.27)$$

### ***Asignación de la escala: Clase Escala***

La inversa de la transformada generalizada de Hough se dibuja sobre la imagen original, marcando las estructuras obtenidas. Igualmente, la imagen que contiene las estructuras circulares se dibuja sobre la imagen original. Entonces, a la imagen original con las estructuras detectadas se le dibuja la escala en metros (distancia horizontal y profundidad). Esta clase recibe de entrada la imagen original, dibuja una línea roja cada metro, una negra cada 5 metros y escribe cada 5 metros la distancia tanto en horizontal como en vertical. El método *DibujaEscala* obtiene de entrada, los metros iniciales de la distancia horizontal (en el caso que se quiera interpretar un pedazo del perfil), la constante dieléctrica  $\varepsilon$ , el rango  $R$  en  $ns$  y los  $scans/metro$ , del encabezado de los datos de GPR. Con la constante dieléctrica es posible obtener la velocidad de propagación de onda en una dirección como  $V = \frac{0.3}{2\sqrt{\varepsilon}}$  y la profundidad de penetración es

$P = V \cdot R$ . Como al convertir los datos de GPR a imagen se pasa cada  $(scan, muestra)$  como un píxel en la imagen, entonces la distancia horizontal máxima, para una imagen de tamaño  $[M \times N]$ , es  $D = \frac{N}{scans/metro}$  y la cantidad de  $muestra/metros = \frac{M}{P}$ . Con los parámetros de

$scans/metro$  y  $muestras/metro$  se dibujan las marcas cada metro en la imagen. Finalmente, el método *ImagenColor* que recibe de entrada la imagen binaria y la imagen con la escala, es el que dibuja la imagen (salida de la transformada o de la localización) sobre la imagen original.

Las clases principales que ejecutan la transformada generalizada de Hough y la localización de estructuras circulares (cuando tenemos el caso de dichas estructuras), fueron las discutidas en las secciones anteriores. El esquema del programa, de cómo trabaja el visualizador y los diagramas de flujo del algoritmo, se discuten en el Apéndice B.

## Capítulo 5: Aplicación y discusión

En este capítulo se presentan dos ejemplos para mostrar y validar la aplicación del algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough. El primer ejemplo consiste en la localización de tres tubos enterrados, en donde además de la transformada generalizada de Hough, se aplica la opción de localización de estructuras circulares. El segundo, es un ejemplo de estratigrafía volcánica, realizado en las faldas del volcán Parícutín en Michoacán, México, en donde se aplicó el algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough para determinar estructuras en general. El pre-procesamiento de los datos se realizó con el programa RADAN 6 que tiene la opción de editar el encabezado de los archivos, los cuales describen el sistema de radar utilizado, así como los ajustes realizados en el momento del sondeo, la constante dieléctrica del medio y los parámetros de detección de la señal. Las opciones de despliegue de los datos disponibles en este paquete de pre-procesado son: solo una traza “O-Scope”, como una sección de trazas “Wiggle” o en forma de color-amplitud con distintas tablas de color “Linescan”, además de la conjunción de algunos de estos despliegues. Para limpiar los datos, este programa tiene las opciones de crear filtros pasa alta, pasa bajas o pasa bandas, así como la remoción de cada traza un promedio de todas las trazas. Además de las opciones para corregir las distancias horizontales, correcciones de topografía, tiene las posibilidades de aplicar funciones de ganancia para lidiar con las señales de amplitud baja; también contiene funciones de deconvolución y migración. Existen utilerías externas para convertir los datos de GPR a formato ASCII y a formato de imagen BMP. De estas utilerías, se utilizó “Radan to Bitmap conversion utility” que tiene la posibilidad de convertir archivos de RADAN de 8 bits y 16 bits a imágenes en formato BMP de 24 bits. Esta utilería tiene las opciones de obtener la imagen en distintas escalas de colores, además de escoger un sub-rango de la imagen introduciendo el número de muestra inicial y final, así como el número de A-scan inicial y final. Con esta utilería se obtuvieron imágenes a escala de gris y con el mismo rango de los datos originales, para la aplicación del algoritmo propuesto en esta tesis. A continuación, se discuten los trabajos realizados en cada ejemplo y una comparación de los resultados obtenidos por el algoritmo y los de la investigación correspondiente a cada uno.

## 5.1 Localización de tuberías

### Descripción de los datos

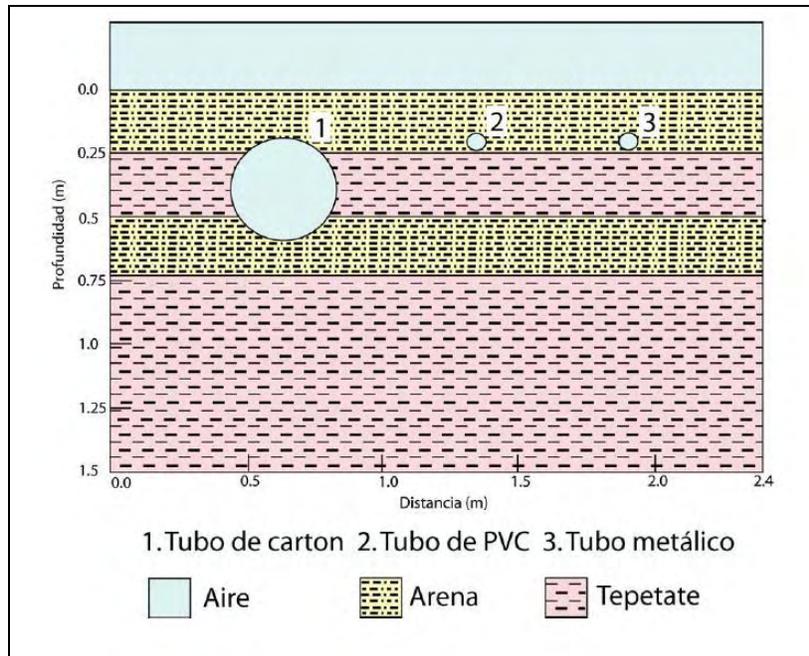
El primer ejemplo fue desarrollado por Sierra Jiménez (2007) para la modelación de los datos de GPR con el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo. En su trabajo, Sierra Jiménez utilizó radargramas sintéticos, levantados dentro de materiales conocidos, para la comparación y validación de su modelo. De este trabajo, se tomó el radargrama levantado en campo para la validación del algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough y la localización de estructuras circulares. El área de estudio consistió en una zanja cavada con 2.5 metros de largo, 2 metros de ancho y aproximadamente 80 centímetros de profundidad. La zanja se rellenó con cuatro capas de arena y tepetate intercaladas (Tabla 1), y se enterraron tres tubos de distintos materiales: cartón, pvc y metal (Tabla 2), cuyo modelo se muestra en la Figura 1. La adquisición se realizó con una consola GSSI SIR-3000 y una antena SubECHO de 1.2 GHz, obteniendo un perfil de 500 trazas (o *A-scans*) por 512 muestras correspondientes a 2.5 metros por 16 ns (Sierra Jiménez, 2007).

Capa	Material	Profundidad (m)	Permeabilidad Magnética	Conductividad Eléctrica (S/m)	Permitividad Eléctrica
1	arena	0	$\mu_0$	0.00001	$6.8\varepsilon_0$
2	tepetate	0.25	$\mu_0$	0.000001	$10.5\varepsilon_0$
3	arena	0.5	$\mu_0$	0.00001	$6.8\varepsilon_0$
4	tepetate	0.73	$\mu_0$	0.000001	$10.5\varepsilon_0$

**Tabla 1. Descripción de las capas (tomado de Sierra Jiménez, 2007)**

Tubo	Radio (m)	Distancia (m)	Profundidad (m)	Material	Perm. Magnética	Cond. Eléctrica (S/m)	Permitividad Eléctrica
1	0.20	0.59	0.39	cartón	$\mu_0$	-	$3\varepsilon_0$
2	0.025	1.3	0.205	pvc	$\mu_0$	-	$3\varepsilon_0$
3	0.025	1.86	0.205	metal	$\mu_0$	100E6	$1\varepsilon_0$

**Tabla 2. Descripción de los tubos, la distancia y la profundidad corresponden a las del centro de la circunferencia de los tubos (tomado de Sierra Jiménez, 2007)**



**Figura 1. Esquema de localización de las tuberías enterradas en un medio formado de capas intercaladas (tomado de Sierra Jiménez, 2007)**

### ***Pre-procesado***

El pre-procesado de este perfil consistió en un ajuste a la escala vertical o corrección de la posición en tiempo, remoción de múltiples horizontales mediante el método de “background removal”, la aplicación de un filtro pasa altas, migración y deconvolución. Los datos originales contenían el reflector de la superficie del suelo en  $t \cong 3.01$  ns, es por esto que se realizó el ajuste de la escala en tiempo asignándole el tiempo de 0 ns al tiempo correspondiente al reflector de la superficie. Esta corrección permite un mejor cálculo de la profundidad, debido a que se considera que la parte superior del perfil es una aproximación de la superficie del subsuelo. Para la remoción de los múltiples horizontales, se aplicó un filtro pasa altas horizontal conocido como “background removal” con un largo de  $N = 501$  scans, debido a que los múltiples están presentes a lo largo de todas las trazas. Este filtro le resta a cada traza un promedio de las  $N$  trazas; la aplicación de este filtro con el largo elegido, puede eliminar algunos reflectores correspondientes a estratos horizontales, pero estas estructuras no son de interés para la aplicación del algoritmo de Hough. Posteriormente se aplica un filtro pasa altas, de respuesta al impulso con duración finita, utilizando una ventana rectangular y una frecuencia de corte de 450 MHz. Se eligió este tipo de filtro debido a que produce resultados simétricos, las reflexiones no se desplazan en tiempo o en posición y la ventana utilizada aplica el mismo peso a los datos

sobre el largo del filtro. Se aplicó una migración con velocidad variable, con un modelo de velocidad realizado de acuerdo a la velocidad efectiva de propagación en cada capa y una ganancia de amplitud de 4 (Tabla 3). Este tipo de migración calcula la velocidad real de cada capa, de acuerdo a la efectiva y de estas velocidades reales se obtiene la profundidad. La deconvolución se empleó para remover la reverberación de la onda propagada cuyo largo era de 31 muestras. El método de deconvolución aplicado, se denomina: “deconvolución predictiva”, debido a que trata de aproximar la forma del pulso transmitido mientras la antena se acopla a la superficie del suelo. El intervalo de predicción debe ser asignado como el largo deseado del pulso de salida, en este caso se utilizó un intervalo de 5 muestras para aproximar la deconvolución tipo “spiking” que reduce la ondícula a un pulso Dirac. El porcentaje de pre-blanqueado estabiliza el filtro suavizando la salida y reduciendo el ruido, se eligió el valor de 1% para este parámetro de la deconvolución. Se le aplicó una ganancia de 4 para lidiar con la atenuación de la señal producida por el proceso de deconvolución. Finalmente, se volvió a aplicar un filtro pasa bandas de respuesta al impulso con una ventana rectangular, utilizando frecuencias de corte de 450 MHz y 1030 MHz, para disminuir el ruido producido por el proceso de migración y deconvolución.

Capa	Profundidad (m)	Tiempo (~ns)	Permitividad eléctrica $\epsilon_r$	Velocidad $v_{ef} = 0.3 / \sqrt{\epsilon_r}$
1	0	0	6.8	0.115
2	0.25	5.77	10.5	0.093
3	0.50	11.55	6.8	0.115
4	0.73	16.86	10.5	0.093

**Tabla 3. Modelo de velocidad aplicado en el método de migración.**

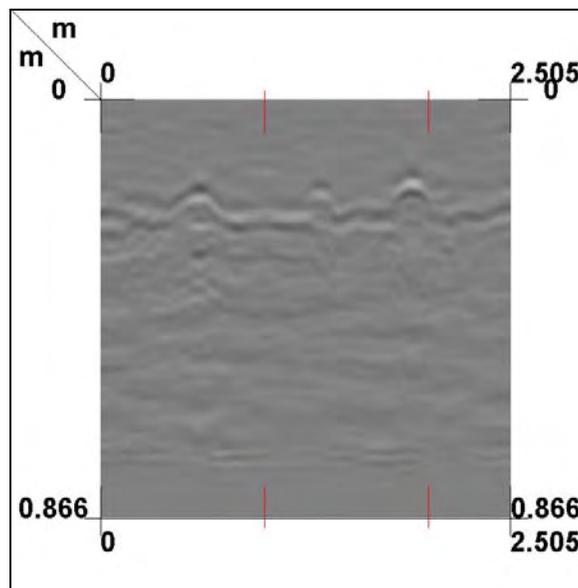
### ***Resultados***

A continuación se discuten los parámetros utilizados y los resultados obtenidos del algoritmo basado en la transformada de Hough, en el Apéndice C se muestran las salidas de cada paso del algoritmo propuesto. Como primer paso, se convirtieron los datos pre-procesado a imagen con formato BMP de 24 bits, en escala de gris, obteniendo una imagen de [501×512] píxeles (Figura 1, Apéndice C.1). Como parámetros de escala se ingresaron: la constante

dieléctrica ( $\epsilon_r = 12$ ), el rango ( $R = 20$ ) y las *trazas/metros* ( $s/m = 200$ ); obteniendo una distancia horizontal de  $D = 2.505$  m y una profundidad de  $P = 0.866$  m (Figura 2). En la detección de bordes, se realizó la convolución de la imagen de entrada con un kernel Kirsch de  $[3 \times 3]$  con dirección de  $90^\circ$ :

$$K = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

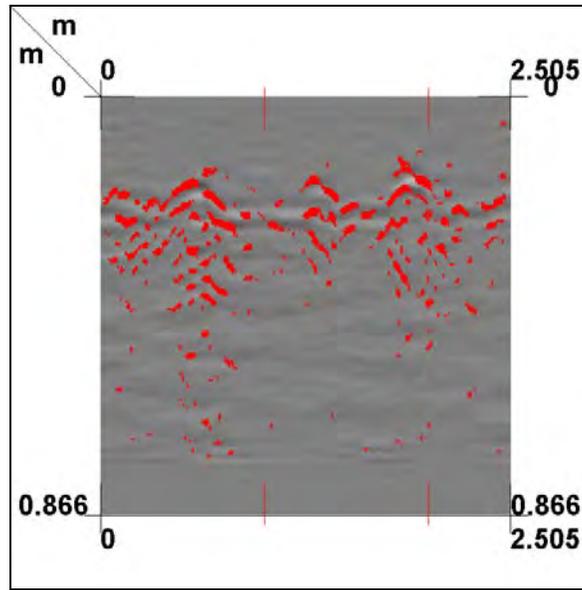
Se eligió este kernel debido a que es el que mejor realza las hipérbolas y en el caso de estos datos sólo nos interesan dichas hipérbolas para validar y mostrar la localización de las estructuras circulares. El proceso de binarización se realizó con 8 iteraciones y el umbral óptimo calculado fue de un nivel de gris de 14. Este umbral presenta como objetos, pequeños cambios en amplitud debido a que la salida de la convolución (Figura 2, Apéndice C.1) contiene niveles de grises bajos. De todos modos en la imagen binaria se preservan las hipérbolas (Figura 3, Apéndice C.1) y en el algoritmo de transformada generalizada de Hough, por la definición de un punto con una cierta cantidad de píxeles, se toman estos objetos, con pequeños cambios de amplitud, como ruido.



**Figura 2. Imagen original con la escala en metros.**

Para la aplicación de la transformada generalizada de Hough se definió un punto de  $[3 \times 3]$  píxeles, debido al ancho del borde de las hipérbolas y una ventana de  $[3 \times 3]$  puntos. Se

detectaron 3774 puntos de referencia, es decir los puntos centrales de las ventanas que contienen bordes. El umbral del acumulador fue de 3 puntos y todos los puntos de referencias que contienen un valor  $\geq$  a este umbral se utilizaron para obtener la transformada inversa (Figura 3). Estos puntos de referencia se localizan en las hipérbolas (Figura 4, Apéndice C.1), por lo que en la transformada inversa obtenemos los bordes de dichas hipérbolas, además de bordes correspondientes a re-reflexiones de las mismas y bordes proporcionados por pequeñas zonas que contienen cambios en dirección (Figura 5, Apéndice C.1).



**Figura 3. Estructuras obtenidas por la transformada inversa sobre la imagen original.**

En la localización de las estructuras circulares se asignó la selección de 6 líneas, cada una correspondiente a una cola de la hipérbola. Como primer paso, se erosionó la imagen para obtener los bordes de las hipérbolas con dimensión de un píxel (Figura 6, Apéndice C.1). Sobre la imagen erosionada se seleccionaron los rectángulos (Figura 7, Apéndice C.2) en donde se aplica la transformada lineal de Hough para detectar las directrices de las hipérbolas. Los arreglos de las coordenadas en el espacio de parámetros de Hough se definieron como

$$\rho = [-716.0, 716.34] \text{ con un incremento de } 1 \text{ y } \theta = [0, 2\pi] \text{ con un incremento de } \frac{2\pi}{2(716.34)},$$

con la finalidad de tener la misma cantidad de elementos en cada arreglo y tener un arreglo acumulador con mejor resolución. Los máximos del acumulador para cada línea detectada y los parámetros polares de cada línea se muestran en la Tabla 4. En el Apéndice C.2 se muestran las

imágenes correspondientes a las líneas detectadas (Figura 9 del Apéndice) y al acumulador del último rectángulo seleccionado (Figura 8 del Apéndice).

Zona	Máximo Acumulador	$\rho$	$\theta$
0	8	149	0.680
1	15	0	2.426
2	10	266	0.978
3	8	192	2.036
4	14	335	0.781
5	7	261	2.128

**Tabla 4. Descripción de las líneas detectadas en cada rectángulo: el valor máximo del acumulador en cada zona, la coordenada  $\rho$  en píxeles y la coordenada  $\theta$  en radianes.**

Por cada dos rectángulos seleccionados, se definió un rectángulo (Figura 10, Apéndice C.2) que contiene las dos directrices calculadas por la transformada lineal de Hough, para obtener la localización de la estructura circular. En primer lugar se obtuvo la intersección de las directrices de las hipérbolas y sobre esta intersección se obtuvo la bisectriz a dichas directrices. Sobre cada directriz y dentro de cada zona se eligió el punto que esté más cerca del punto de intersección entre las directrices y que esté contenido en la hipérbola. En estos puntos se obtuvo la perpendicular a su respectiva directriz y se calculó la intersección de cada perpendicular con la bisectriz, obteniendo dos posibles centros y radios para el círculo. Finalmente se tomó el centro como el valor medio entre estos dos centros calculados y lo mismo se realizó para el radio del círculo. La imagen de los puntos y la bisectriz se encuentra y describe en la Figura 11 del Apéndice C.2, en la Figura 4 se muestra la imagen con las estructuras circulares calculadas y en la Tabla 5 se encuentran los parámetros de la localización de estas estructuras.

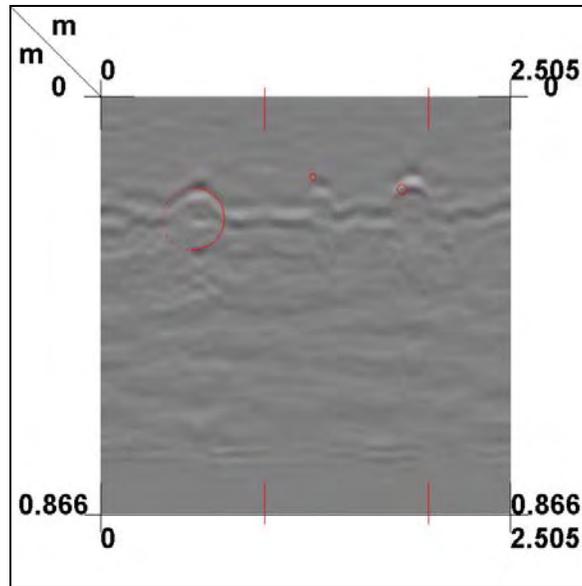


Figura 4. Imagen de las estructuras circulares sobre la imagen original con la escala en metros.

Tubo	Radio (m)	Distancia (m)	Profundidad (m)
1	0.206	0.565	0.252
2	0.021	1.295	0.166
3	0.037	1.84	0.191

Tabla 5. Resultado de los parámetros de los tubos, la distancia y la profundidad corresponden al centro de la circunferencia de los mismos.

### *Discusión*

En la Tabla 6 se presenta el porcentaje de error de cada parámetro de la localización de los círculos calculados, este porcentaje se calculó de la siguiente manera:

$$\left( \% \text{ Error} = \frac{\text{Valor Real} - \text{Valor Calculado}}{\text{Valor Real}} * 100 \right).$$

En general el porcentaje de error de estos parámetros fluctúa entre 0.39% y 48%. El menor porcentaje se obtuvo en la distancia con valores entre 0.39% y 4.24%. Esto es debido a que la localización del vértice de las hipérbolas se encuentra en la posición horizontal real del centro del tubo y la localización de este parámetro se obtiene de acuerdo a la posición de la bisectriz que pasa, aproximadamente, por este vértice. El error en profundidad varía entre 6.83% y 35.4% y puede ser debido a que en algún paso del pre-procesado estos reflectores se desplazaron con respecto a su posición vertical. Es por esto que el pre-procesado es parte esencial de la aplicación de este algoritmo, debido a que influye en el caso de la localización en profundidad. En el radio

de los tubos, el porcentaje de error varía entre 3% y 48%, donde el mayor porcentaje de error se obtuvo en el radio del tubo de metal. Este error se debe a que el tubo de metal es el que presenta mayor amplitud en el perfil de GPR, en la detección de bordes se produce un borde mayor al borde real de esta estructura y en la erosión, la separación de las colas de esta hipérbola se incrementa. De acuerdo con Shihab y Al-Nuaimy (2005), que realizan el ajuste del círculo por mínimos cuadrados mediante la selección de un conjunto de puntos en la hipérbola, los métodos convencionales de ajustes de círculo presentan porcentajes de error mayores a 45%.

Tubo	% Error Radio	% Error Distancia	% Error Profundidad
1	3	4.2	35.4
2	16	0.39	19
3	48	1.08	6.83

**Tabla 6. Porcentaje de error de los parámetros de los tubos.**

## 5.2 Estratigrafía volcánica

### Descripción de los datos

El perfil de GPR de este ejemplo fue adquirido por Villanueva Inchaurregui (2006), para conocer la estructura de las cenizas producidas por el volcán Parícutín y la forma en que la erosión en la zona ha influido en dicha estructura. En su estudio, Villanueva Inchaurregui (2006) realizó varias líneas para hacer una comparación con trincheras y datos obtenidos en investigaciones anteriores. Para la aplicación del algoritmo propuesto, se utilizó la línea adquirida en el Sector F, Ruta 2, con una antena de 200 MHz y una longitud de 500 metros (Figura 5). El algoritmo se aplicó sólo a los primeros 50 metros de estos datos obteniendo un perfil con 10001 scans por 2048 muestras, correspondientes a 50 metros en distancia por 17 metros en profundidad (Figura 6).

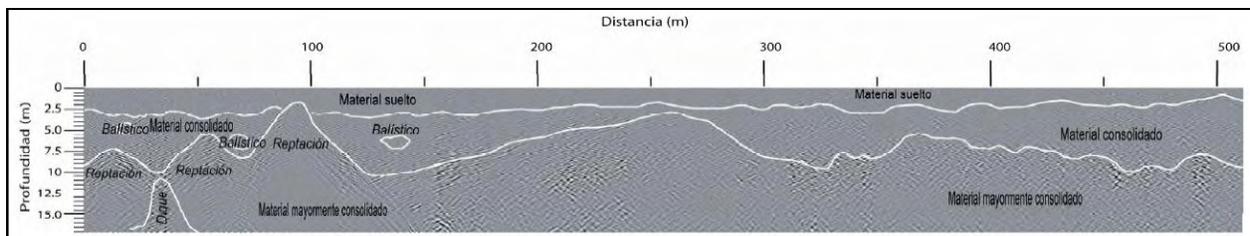


Figura 5. Perfil de GPR del Sector F, Ruta 2 adquirido con una antena de 200 MHz (tomado de Villanueva Inchaurregui, 2006)

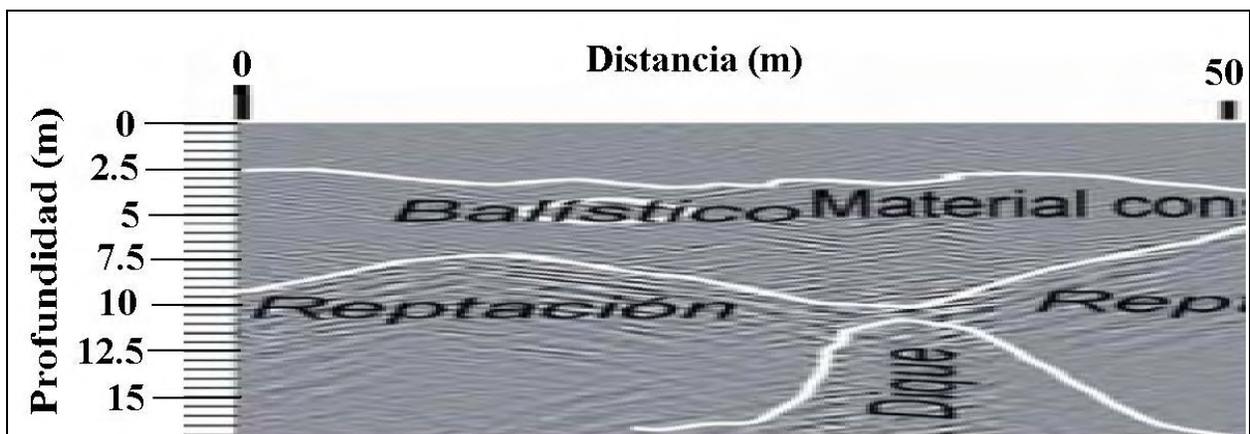


Figura 6. Primeros 50 metros del perfil de GPR mostrado en la Figura 5 (editado de Villanueva Inchaurregui, 2006)

### ***Pre-procesado***

El pre-procesamiento de estos datos consistió de la remoción de múltiples horizontales, deconvolución, migración y filtrado. En la remoción de los múltiples horizontales, se aplicó el filtro pasa alta horizontal con un largo de  $N = 1023$  scans, debido a que los múltiples están presentes a lo largo de todas las trazas y el máximo valor de  $N$  que se puede utilizar es éste. La deconvolución se empleó para remover la reverberación de la onda propagada cuyo largo era de 31 muestras. El intervalo de predicción asignado fue de 5 muestras para aproximar la deconvolución tipo “spiking” que reduce la ondícula a un pulso Dirac y se utilizó un porcentaje de pre-blanqueado de 1%. Se le aplicó una ganancia de 3 para disminuir la atenuación de la señal producida por el proceso de deconvolución. Se empleó el método de migración de Kirchhoff que produce un promedio de la velocidad mediante la suma de las trazas contenidas en la hipérbola de difracción. En la aplicación de este método se ajustó visualmente una hipérbola con un ancho de 63 scans, calculando una velocidad de propagación constante (sobre todo el perfil) de  $v = 0.1134 \frac{m}{ns}$ , además se aplicó una ganancia de 4 para aumentar la amplitud de la señal que disminuye debido a este proceso. Se utilizó un filtro pasa bandas de respuesta al impulso con duración finita utilizando una ventana rectangular, con frecuencias de corte de 100 MHz y 400 MHz, para reducir el ruido producido por el proceso de migración y deconvolución. En último lugar, se empleó una función de ganancia lineal con tres puntos y valores de (2, 1.5 y 0.7) para aumentar la resolución en amplitud sobre la parte superior del perfil.

### ***Resultados***

Para estos datos solo se empleó la transformada generalizada de Hough, debido a que no contiene estructuras circulares. El Apéndice D presenta las imágenes de salida de cada paso de la aplicación en este ejemplo. La imagen de entrada al algoritmo se generó en formato BMP de 24 bits, en escala de gris y tamaño de  $[10001 \times 2048]$  (Figura 1, Apéndice D). Los parámetros de escala ingresados fueron: la constante dieléctrica ( $\epsilon_r = 7$ ), el rango ( $R = 300$ ) y las trazas/metros ( $s_m = 200$ ); obteniendo una distancia horizontal de  $D = 50.005$  m y una profundidad de  $P = 17.008$  m (Figura 7).

Para la detección de bordes se realizó la convolución de la imagen original con un kernel laplaciano de  $[5 \times 5]$

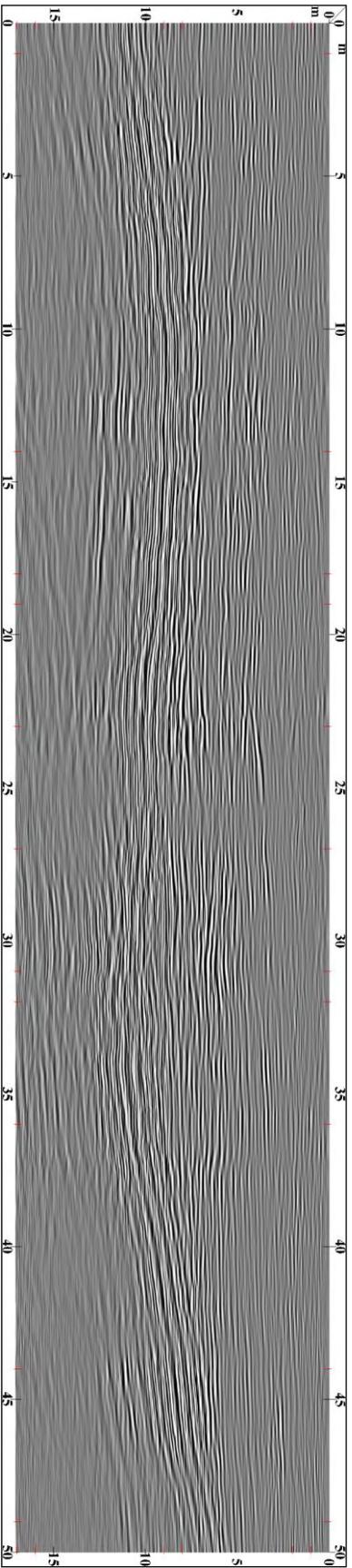
$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ -1 & 16 & -60 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Este kernel no detecta bordes en una dirección en particular, sino que obtiene todos los cambios de amplitud en el perfil como posibles bordes. Para este ejemplo, este kernel fue el que obtuvo los bordes de las estructuras con mayor valor en nivel de gris y con mejor continuidad (Figura 2, Apéndice D). El proceso de binarización se realizó con 11 iteraciones y un umbral con un nivel de gris de 86, presentando los bordes que contienen un nivel de gris  $\geq$  a este umbral, como objetos (Figura 3, Apéndice D).

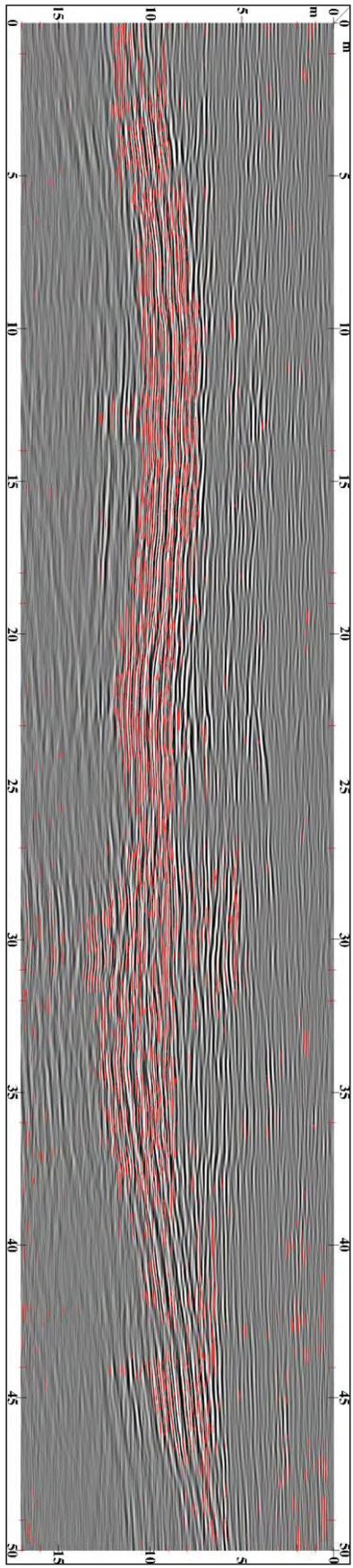
En la transformada generalizada de Hough se definió un punto de  $[5 \times 5]$  píxeles y una ventana de  $[3 \times 3]$  puntos. Se definieron estos parámetros para obtener la transformada inversa con buena continuidad de las estructuras detectadas y menor cantidad de ruido. Este proceso se realizó con ventanas de  $[5 \times 5]$  y  $[7 \times 7]$  puntos, pero hubo una disminución de los puntos de referencia detectados por el umbral del acumulador y la continuidad de la estructura decreció. Se detectaron 88,514 puntos de referencia, es decir los puntos centrales de las ventanas que contienen bordes. El umbral del acumulador fue de 6 puntos y todos los puntos de referencias que contienen un valor  $\geq$  a este umbral se utilizaron para obtener la transformada inversa (Figura 8). En el Apéndice D se presentan las imágenes correspondientes al acumulador (Figura 4 del Apéndice) y a la inversa de este ejemplo (Figura 5 del Apéndice).

### ***Discusión***

En la imagen resultante se presentan pequeños segmentos horizontales debido al tamaño de la ventana con respecto al tamaño de la imagen, en estas zonas los puntos de referencias correspondientes al umbral del acumulador quedan dentro de bordes que son anchos y no se logra obtener el borde completo. En la totalidad de la imagen, está presente una estructura que oscila entre los 5 y 10 metros, aproximadamente. Esta estructura tiene buena continuidad, a excepción de los últimos 10 metros del perfil y corresponde al contacto entre el material consolidado con el material que sufre reptación, de acuerdo con Villanueva Inchaurregui (2006).



**Figura 7. Imagen original con escala en metros.**



**Figura 8. Estructuras obtenidas por la transformada inversa, sobre la imagen original.**

## Capítulo 6: Conclusiones

En esta investigación se diseñó un algoritmo basado en la transformada generalizada de Hough para realzar estructuras geológicas, de manera automática en un radargrama. Este objetivo fue completamente alcanzado a través de varios procesos intermedios que también fueron desarrollados.

Para obtener la localización de las estructuras geológicas sobre un radargrama, es necesario que éste haya sido pre-procesado, primero expresándolo como función de distancias, tanto en la escala horizontal como en la profundidad. Para la aplicación del algoritmo propuesto los datos de GPR se analizan como imágenes en escala de grises y no como series de tiempo. La imagen pre-procesada debe convertirse a una imagen binaria, que represente los bordes de las estructuras detectadas por el GPR. Por lo que se diseñaron varios kernels, con la finalidad de seleccionar de ellos el que presente mejor realce de los bordes en la imagen. Este proceso se realizó con un algoritmo iterativo de detección de umbral óptimo, propuesto por Ridler y Clavard (1978).

A diferencia de la transformada generalizada de Hough propuesta por Ballard (1981), en este algoritmo se detectan estructuras localmente y la tabla de referencia se genera en cada paso de la ventana. La ventana se define con una cantidad específica de puntos y no de píxeles. La acumulación de votos para un punto de referencia, se realiza de acuerdo a la cantidad de puntos de bordes y su dirección con respecto a los parámetros de la tabla de referencia. Por esto, se consideran estructuras a las zonas que contengan cambios de dirección en la imagen de GPR.

Para el análisis de hipérbolas de difracción, que como se mencionó caracterizan a las estructuras circulares en el subsuelo, se diseñó otro algoritmo que ajusta un círculo a las hipérbolas detectadas por el algoritmo anterior y obtiene complementariamente la localización (radio y centro) de éste. El primer paso es erosionar la imagen para obtener dichas hipérbolas con dimensión de un píxel. Sobre esta imagen erosionada se seleccionan dos rectángulos que acoten las asíntotas de la hipérbola para ajustar el círculo.

La localización de la estructura circular depende del pre-proceso realizado, del realce de las hipérbolas mediante la transformada generalizada de Hough y de la selección de las asíntotas de las hipérbolas. Si el método de migración aplicado no ajusta los reflectores a su localización real, las estructuras circulares no corresponderían a las del subsuelo. Del algoritmo de

transformada generalizada de Hough, se deben obtener las hipérbolas bien definidas, para que en la imagen erosionada estén presentes las asíntotas de las hipérbolas y hacer una selección adecuada de las mismas. Finalmente, la selección de los rectángulos, que acotan dichas asíntotas, es determinante para el ajuste del círculo. Esta selección se realiza de manera visual, por lo que la ubicación calculada de los círculos deberá corroborarse, también visualmente, sobre las hipérbolas del radargrama.

Se aplicaron los algoritmos a dos ejemplos prácticos. El primer ejemplo corresponde a tres tubos enterrados a diferentes profundidades y de diferentes materiales, para el realce de hipérbolas de difracción, concluimos que el kernel con mejor realce es el de Kirsch de  $[3 \times 3]$  píxeles para la dirección de  $90^\circ$ . En la aplicación del algoritmo basado en la transformada de Hough se detectaron las hipérbolas de difracción además de re-reflexiones de la misma. Como resultado del ajuste de un círculo a dichas hipérbolas, podemos concluir que la detección de estructuras circulares permite estimaciones del radio dentro del 48 % y del centro de la estructura dentro del 20%, de acuerdo con la Tabla 1. Además se concluye que la obtención de la localización de la estructura circular, depende del tipo de material de la misma. Shihab y Al-Nuaimy (2005) mencionan que los métodos convencionales de ajustes de círculo presentan porcentajes de error mayores a 45%.

Tubo	Centro %
1	19.8
2	9.7
3	3.96

**Tabla 1. Promedio entre el porcentaje de error en la distancia horizontal y profundidad, de la localización de estructuras circulares.**

El segundo ejemplo es de estratigrafía volcánica y se concluye que el mejor kernel de realce es un Laplaciano de  $[5 \times 5]$  píxeles, el cual obtiene los bordes en todas las direcciones. En este caso se definió un punto de  $[5 \times 5]$  píxeles y una ventana de  $[3 \times 3]$  puntos, debido a que fueron los parámetros que realzaron las estructuras con mayor continuidad. El algoritmo de la transformada generalizada de Hough, detectó un contacto entre dos estratos de cenizas volcánicas, que coincide con un contacto descrito en la investigación previa.

## Bibliografía

- AlBinHassan, N. M., and Marfurt, K., 2003, Fault detection using Hough transforms: SEG Expanded Abstracts, v. 22, no. SAT P1, p. 1719-1721
- Andrews, L. C., and Shivamoggi, B. K., 1999, Integral transforms for engineers: Washington, USA, SPIE-The International Society for Optical Engineering 353 p.
- Ballard, D. H., 1981, Generalized Hough transform to detect arbitrary patterns: IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, v. 13, no. 2, p. 111-122
- Cary, P. W., 1998, The simplest discrete Radon transform: SEG Expanded Abstracts, v. 17, no. ST18, p. 1999-2002
- Chen, X. L., Tian, M., and Yao, W. B., 2005, GPR Signals De-Noising By Using Wavelet Networks: Machine Learning and Cybernetics, 2005. Proceedings of 2005 International Conference on, v. 8, p. 4690-4693
- Cooley, J., Lewis, P., and Welch, P., 1967, Historical notes on the fast Fourier transform: Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on, v. 15, no. 2, p. 76-79
- Daniels, D. J., 2004, Ground Penetrating Radar: London, UK, The Institution of Electrical Engineers, 726 p.
- Davies, B., 2005, Integral Transforms, From Encyclopaedia of Nonlinear Science, Routledge, p. 1-4
- Díaz Molina, O., 2003, Modelación 1D directa e inversa de datos de radar de penetración terrestre: Universidad Nacional Autónoma de México, 110 p.
- Garay de Pablo, J., 1998, Transformadas matemáticas en teoría de señales: Discurso de Ingreso: Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza, p. 1-33
- Golovko, M. M., 2004, The automatic determination of soil permittivity using the response from a subsurface local object: Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 2004 Second International Workshop, p. 248-250
- Grilo, F. C. V., Casimiro, A., and Lopes, J. A. C., 1991, Integral transforms as a change of basis in a vectorial space: Circuits and Systems, 1991., IEEE International Symposium on, p. 2773-2775
- Hayt, W. H., and Buck, J. A., 2006, Teoría Electromagnética: México, DF, Editorial McGraw-Hill Interamericana, 582 p.
- Hough, P. V. C., 1962, Method and means for recognizing complex patterns US Patent 3069654: Washington, DC: Patent and Trademark Office.
- Jähne, B., 1997, Digital Image Processing, Concepts, Algorithms, and Scientific Applications: Germany, Springer, p. 277-283
- Jain, A. K., 1989, Fundamentals of digital image processing: New Jersey, USA, Prentice Hall, 569 p.
- Keener, J. P., 2000, Principles of Applied Mathematics: Transformation and Approximation: Massachusetts, USA, Perseus Books Group, p. 1-91

- Kleinmann, L., Laugks, J., and Nick, K. P., 1993, Image processing and pattern recognition in ground penetrating radar data: Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1993. IGARSS'93. 'Better Understanding of Earth Environment', International, p. 1903-1906
- Lira, J., 2002, Introducción al tratamiento digital de imágenes: México, D.F., IPN, Centro de Investigación en Computación, 447 p.
- Nava, F. A., 2002, Procesamiento de series de tiempo: México, D.F., Fondo de Cultura Económica, 349 p.
- Nuzzo, L., 2003, Coherent noise attenuation in GPR data by linear and parabolic Radon transform techniques: *Annals of Geophysics*, v. 46, p. 533-547
- Nuzzo, L., and Quarta, T., 2004, Improvement in GPR coherent noise attenuation using t-p and wavelet transforms: *Geophysics*, v. 69, no. 3, p. 789-802
- Perrin, S., Bibaut, A., Duflos, E., and Vanheeghe, P., 2000, Use of wavelets for ground-penetrating radar signal analysis and multisensor fusion in the frame of land mine detection: *Systems, Man, and Cybernetics, 2000 IEEE International Conference on*, v. 4, p. 2940-2945
- Peters, L. P., Daniels, J. J., and Young, J. D., 1994, Ground penetrating radar as a subsurface environmental sensing tool: *Proceedings of the IEEE*, v. 82, no. 12, p. 1802-1822
- Pipan, M., Geletti, R., Finetti, I., and Galuppo, P., 1998, Hough transform based multiple removal in the XT domain: *SEG Expanded Abstracts*, v. 17, no. SP6, p. 1245-1247
- Rappaport, C. M., and Weedon, W. H., 1996, Efficient modeling of electromagnetic characteristics of soil for FDTD ground penetrating radar simulation: *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1996. AP-S. Digest*, v. 1.
- Reynolds, J. M., 1997, *An Introduction to Applied and Environmental Geophysics*: England, John Wiley & Sons Ltd., p. 681-749
- Ridler, T. W., and Calvard, S., 1978, Picture thresholding using an iterative selection method: *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 8, no. 8, p. 630-632
- Sanz, J. L. C., Hinkle, E. B., and Jain, A. K., 1988, *Radon and Projection Transform-Based Computer Vision, Algorithms, A Pipeline Architecture, and Industrial Applications*: Berlin, Germany, Springer-Verlag, 123 p.
- Sena, A. R., Sen, M. K., and Stoffa, P. L., 2004, Modeling of ground penetrating radar data in stratified media, *in SEG Int'l Exposition and 74th Annual Meeting*, Denver Colorado.
- Shihab, S., and Al-Nuaimy, W., 2005, Radius Estimation for Cylindrical Objects Detected by Ground Penetrating Radar: *Sensing and Imaging: An International Journal*, v. 6, no. 2, p. 151-166
- Sierra Jiménez, I., 2007, Modelación 1D y 2D de radar de penetración terrestre por el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo: *Universidad Nacional Autónoma de México*, 94 p.
- Smith, G. S., and Scott Jr, W. R., 1989, A scale model for studying ground penetrating radars: *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, v. 27, no. 4, p. 358-363

- Sonka, M., Hlavac, V., and Boyle, R., 2008, *Image Processing, Analysis, and Machine Vision*: Canada, Thomson Learning, 829 p.
- Sullivan, D. M., 1996, Z-transform theory and the FDTD method: *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, v. 44, no. 1, p. 28-34
- Sun, Y., and Li, J., 2003, Time-frequency analysis for plastic landmine detection via forward-looking ground penetrating radar: *Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings-*, v. 150, no. 4, p. 253-261
- Toft, P. A., 1996, *The Radon Transform-Theory and Implementation*: Technical University of Denmark, 308 p.
- Torrence, C., and Compo, G. P., 1998, A Practical Guide to Wavelet Analysis: *Bulletin of the American Meteorological Society*, v. 79, no. 1, p. 61-78
- Van Gestel, J. P., and Stoffa, P. L., 2001, Application of Alford rotation to ground penetrating radar data: *Geophysics*, v. 66, no. 6, p. 1781-1792
- van Ginkel, M., Hendriks, C. L. L., and van Vliet, L. J., 2004, *A short introduction to the Radon and Hough transforms and how they relate to each other*: Delft University of Technology.
- Villanueva Inchaurregui, Z. C., 2006, *Uso del Radar de Penetración Terrestre en la determinación de espesores y estratigrafía volcánica*: Universidad Nacional Autónoma de México, 114 p.
- Windsor, C. G., Capineri, L., and Falorni, P., 2005, The Estimation of Buried Pipe Diameters by Generalized Hough Transform of radar data: *Progress in Electromagnetics Research Symposium Proceedings, PIERS2005, Hangzhou, China, August*.
- Xu, X., Miller, E. L., and Rappaport, C. M., 2003, Minimum entropy regularization in frequency-wavenumber migration to localize subsurface objects: *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, v. 41, no. 8, p. 1804-1812

## Apéndices

### Apéndice A: Kernels de detección de bordes

#### A.1 Kernels de búsqueda de líneas

- (1)  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  Dirección 0: Kernel con tamaño de  $[3 \times 3]$  píxeles para la dirección de  $0^\circ$
- (2)  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  Dirección 1: Kernel con tamaño de  $[3 \times 3]$  píxeles para la dirección de  $45^\circ$
- (3)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$  Dirección 2: Kernel con tamaño de  $[3 \times 3]$  píxeles para la dirección de  $90^\circ$
- (4)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  Dirección 3: Kernel con tamaño de  $[3 \times 3]$  píxeles para la dirección de  $135^\circ$

#### A.2 Kernels de Kirsch

- (5)  $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$  Kirsch 3X3 0: Operador de Kirsch de  $[3 \times 3]$  píxeles para la dirección de  $0^\circ$
- (6)  $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & -5 \end{bmatrix}$  Kirsch 3X3 1: Operador de Kirsch de  $[3 \times 3]$  píxeles para la dirección de  $45^\circ$
- (7)  $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$  Kirsch 3X3 2: Operador de Kirsch de  $[3 \times 3]$  píxeles para la dirección de  $90^\circ$
- (8)  $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$  Kirsch 3X3 3: Operador de Kirsch de  $[3 \times 3]$  píxeles para la dirección de  $135^\circ$

### A.3 Kernels de Laplace

$$(9) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ -1 & 16 & -60 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Laplace 5X5 1: Operador Laplaciano de } [5 \times 5] \text{ píxeles}$$

$$(10) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 16 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Laplace 5X5 2: Operador Laplaciano de } [5 \times 5] \text{ píxeles}$$

$$(11) \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{Laplace 5X5 3: Operador Laplaciano de } [5 \times 5] \text{ píxeles}$$

$$(12) \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \text{Laplace 5X5 4: Operador Laplaciano de } [5 \times 5] \text{ píxeles}$$

$$(13) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Laplace 5X5 5: Operador Laplaciano de } [5 \times 5] \text{ píxeles}$$

$$(14) \begin{bmatrix} -10 & -5 & -2 & -1 & -2 & -5 & -10 \\ -5 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 7 & 8 & 7 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & -2 \\ -5 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & -5 \\ -10 & -5 & -2 & -1 & -2 & -5 & -10 \end{bmatrix} \text{Laplace 7X7 1: Operador Laplaciano de } [7 \times 7] \text{ píxeles}$$

$$(15) \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 48 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{Laplace 7X7 2: Operador Laplaciano de } [7 \times 7] \text{ píxeles}$$

$$(16) \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 84 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{Laplace 9X9 1: Operador Laplaciano de } [9 \times 9] \text{ píxeles}$$

## Apéndice B: Esquema del programa

A continuación se presenta un bosquejo del orden en el que se ejecuta el programa Transformada Hough, de acuerdo con el visualizador del mismo (Figura 1), y de las clases que se utilizan bajo las opciones elegidas. Este programa es una aplicación JAR, que se ejecuta con la plataforma de JAVA <sup>TM</sup> versión 1.6 o mayor, mediante un archivo “Batch”, que contiene los parámetros de memoria de JAVA. El visualizador contiene las opciones principales: **Archivo**, **Edita**, **Ejecuta** y **Visualiza**. Dentro de la opción de **Archivo**, se tienen las opciones de *Abrir*, *Guardar* y *Salir*. En **Edita** se tienen las opciones de cambiar el kernel de detección de bordes (*Kernel Convolución*), de cambiar el tamaño de la ventana y del punto (*Ventana*), de asignar los parámetros para obtener la escala (*Parámetros Escala*) y de asignar el número de zonas, en el caso que se quiera obtener la localización de estructuras circulares (*Zonas*). La opción **Ejecuta** contiene las opciones de ejecutar el algoritmo de la transformada generalizada de Hough (*Hough General*) y el algoritmo para localizar estructuras circulares (*Hough Líneas*), para habilitar este último se debe ejecutar *Hough General* y asignar el número de zonas primero. Finalmente la opción de **Visualiza**, despliega las imágenes de salida de cada clase ejecutada en los algoritmos y la que se despliega es la que se guarda bajo la opción de *Guardar*. Además del bosquejo, se presentan tres diagramas de flujo que describen algoritmo planteado en esta tesis.

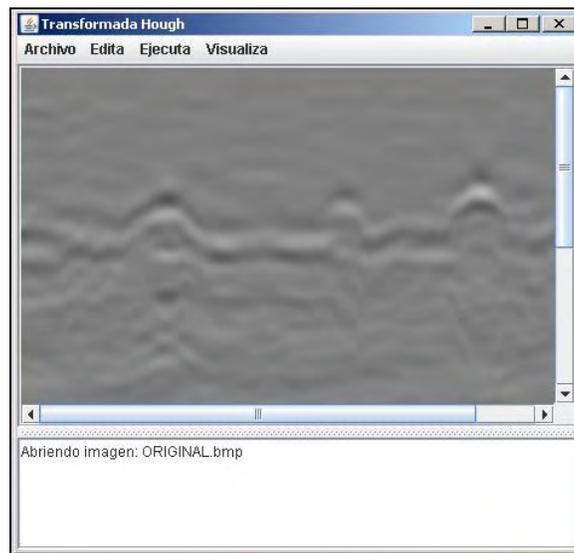


Figura 1. Visualizador del programa Transformada Hough

I. Visualizador: clase *VisualizaHough*

a. **Archivo:** *Abrir*

b. **Edita:** *Parámetros Escala*

Se debe asignar los parámetros de la escala para habilitar la opción de ejecutar *Hough General*.

c. **Edita:** *Kernel Convolución* (clase *KernelConvolucion*)

En esta opción se despliega el kernel seleccionado y para elegirlo se debe cerrar la ventana de selección de kernels.

d. **Edita:** *Ventana*

En esta opción se define el ancho y el largo (cuyos valores deben ser iguales y nones) del punto y de la ventana.

e. **Ejecuta:** *Hough General*

A continuación se presentan las clases que se ejecutan en este algoritmo.

i. Dibuja la escala: clase *Escala*

ii. Detección de bordes: clase *Convolucion*

iii. Binarización: clase *ImagenUmbral*

iv. Transformada Generalizada Hough: clase *THough*

v. Erosiona la imagen: clase *Erosion*

vi. Dibuja la salida de la transformada sobre la imagen original con la escala: clase *Escala*

f. **Visualiza:** Luego de haber ejecutado el algoritmo de la transformada generalizada de Hough, se pueden desplegar y guardar las siguientes imágenes.

i. *Original*

ii. *Escala:* la imagen original con la escala, salida de la clase *Escala*.

iii. *Convolución:* salida de la clase *Convolucion*

iv. *Binaria:* salida de la clase *ImagenUmbral*

v. *Hough General:* salidas de la clase *THough*

1. *Acumulador*

2. *Inversa*

3. *Inversa + Escala*

vi. *Erosión*: salida de la clase *Erosion*.

g. **Edita**: *Zonas*

Si se tienen hipérbolas de difracción, que caracterizan las estructuras circulares, se pasa a asignar el número de rectángulos de acuerdo a las líneas que se quieren obtener.

h. **Ejecuta**: *Hough Líneas*

A continuación se presentan las clases que se ejecutan en este algoritmo.

i. Primero se despliega la imagen erosionada para dibujar los rectángulos acotando las líneas que se quieren detectar.

ii. Transformada de líneas de Hough sobre cada rectángulo: clase *HoughLinea*

iii. Localización de estructuras: clase *Localizacion*

iv. Dibuja las estructuras obtenidas sobre la imagen original con la escala

i. **Visualiza**: Luego de haber ejecutado el algoritmo de localización de estructuras circulares, se pueden desplegar y guardar las siguientes imágenes.

i. *Hough Líneas*: salidas de la clase *HoughLinea*.

1. *Acumulador*: de la última zona seleccionada.

2. *Inversa*: directrices de las hipérbolas.

3. *Zonas*: rectángulos elegidos para la localización de estructuras.

ii. *Localización*

1. *Zonas*: rectángulos utilizados para la detección de estructuras.

2. *Puntos*: bisectriz de las directrices obtenidas, el punto de intersección de las mismas, puntos sobre las líneas para calcular el centro y radio del círculo.

3. *Estructuras*: círculos detectados para cada hipérbola.

4. *Estructuras + Escala*

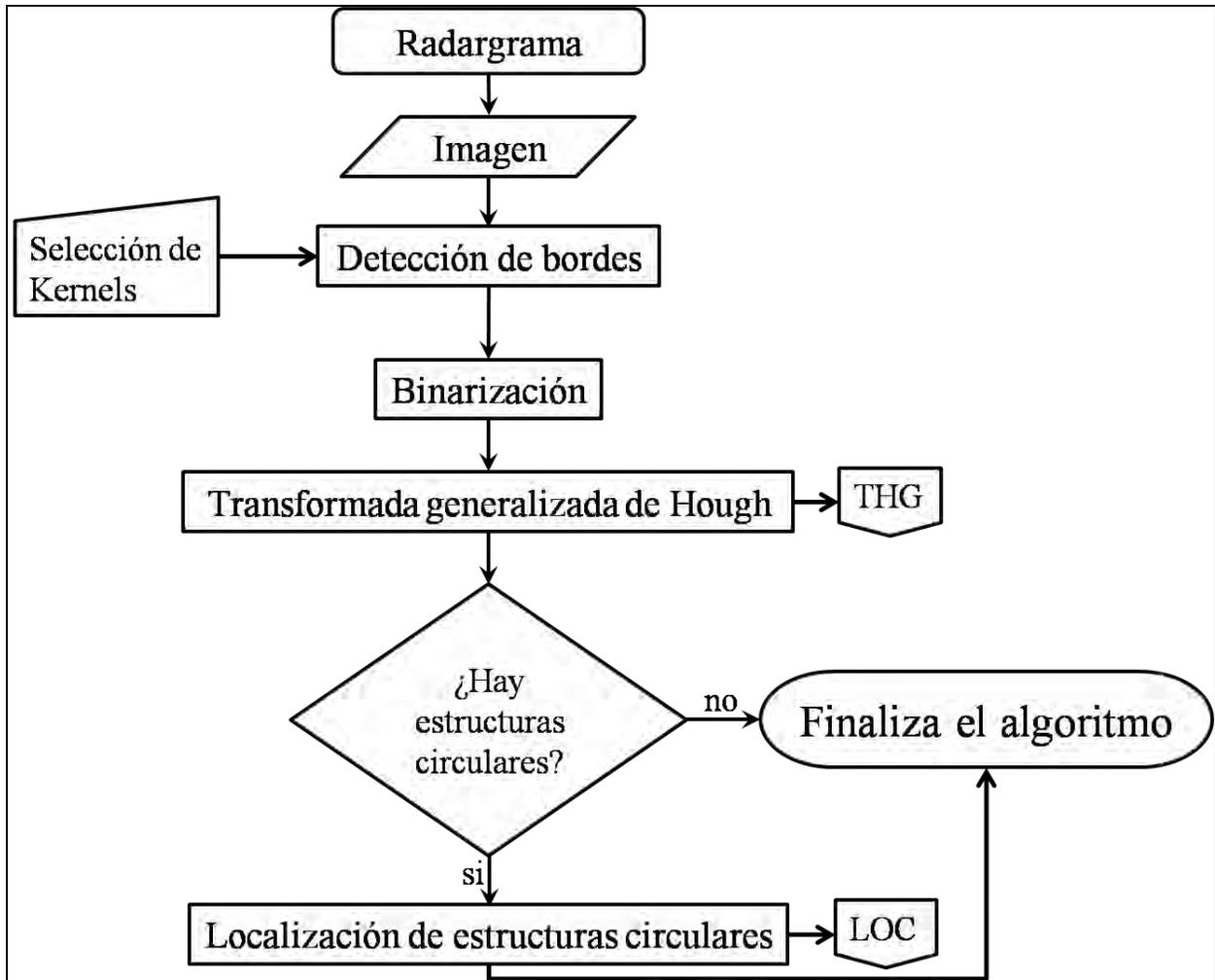


Diagrama 1. Diagrama de flujo general del algoritmo de transformada Hough.

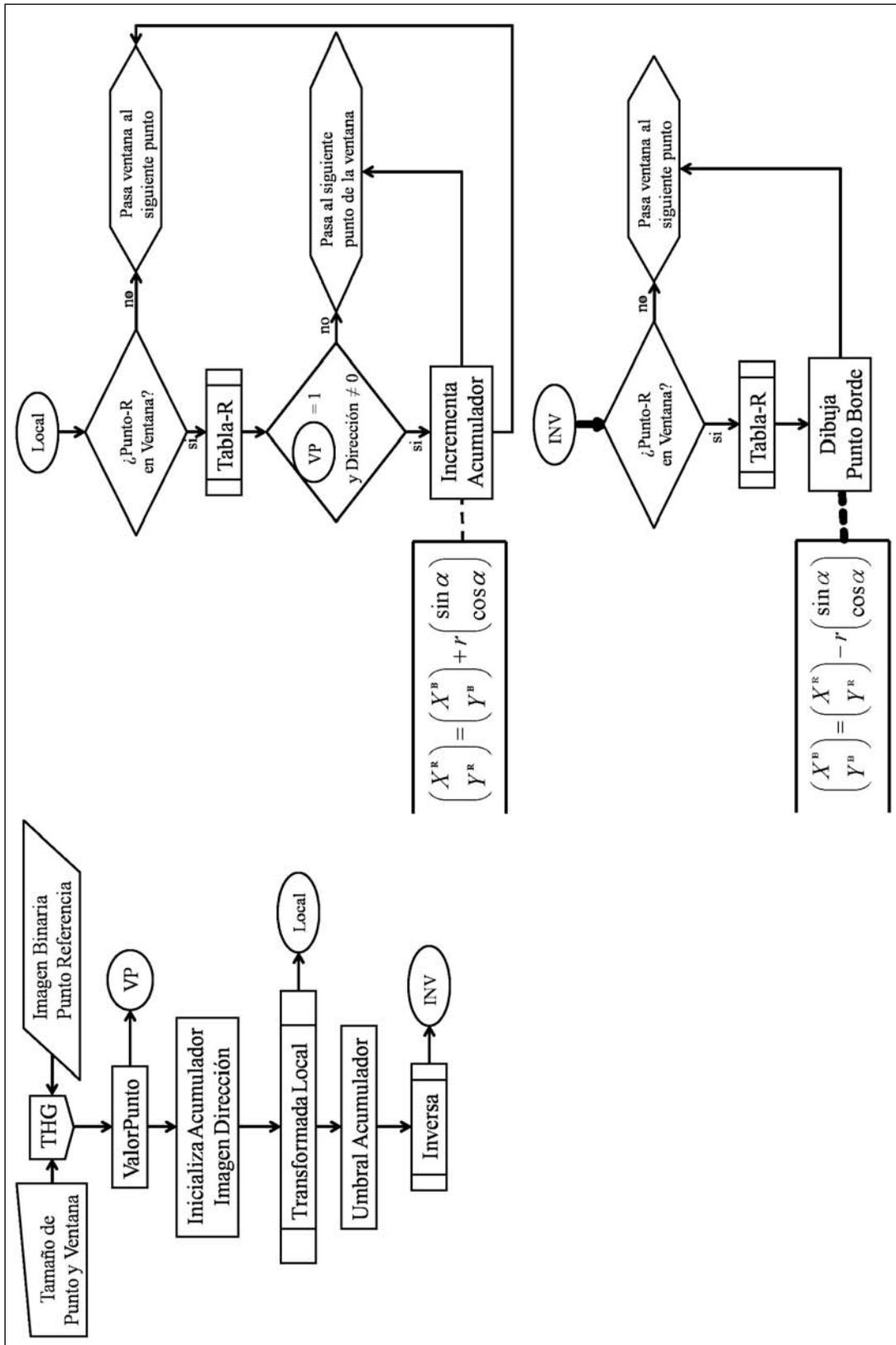


Diagrama 2. Diagrama de flujo de la subrutina: Transformada Generalizada de Hough.

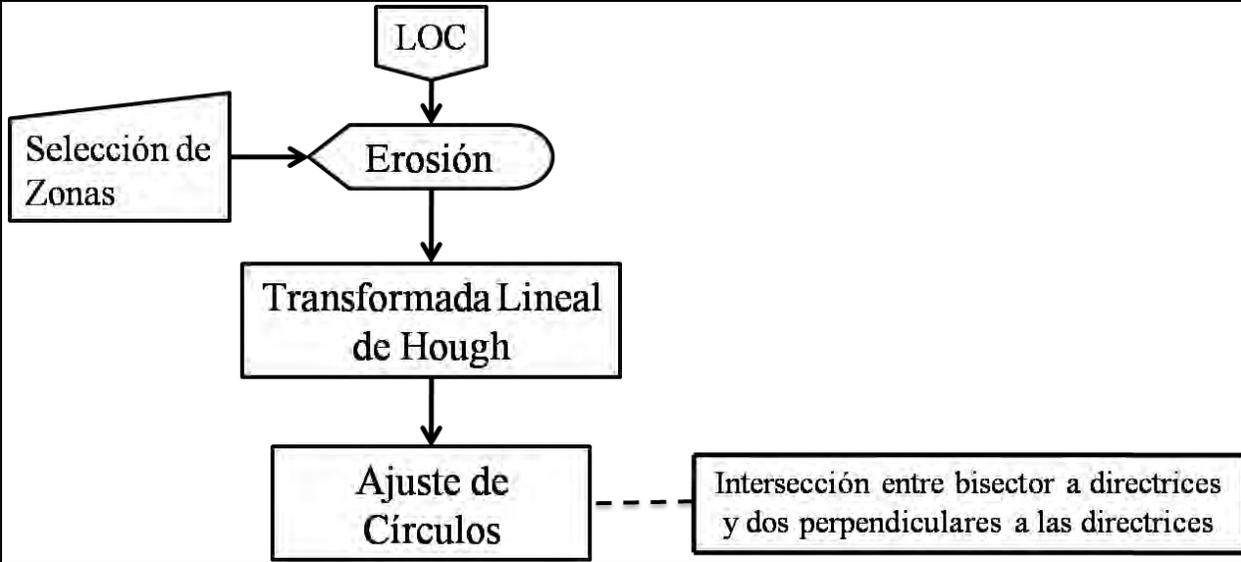
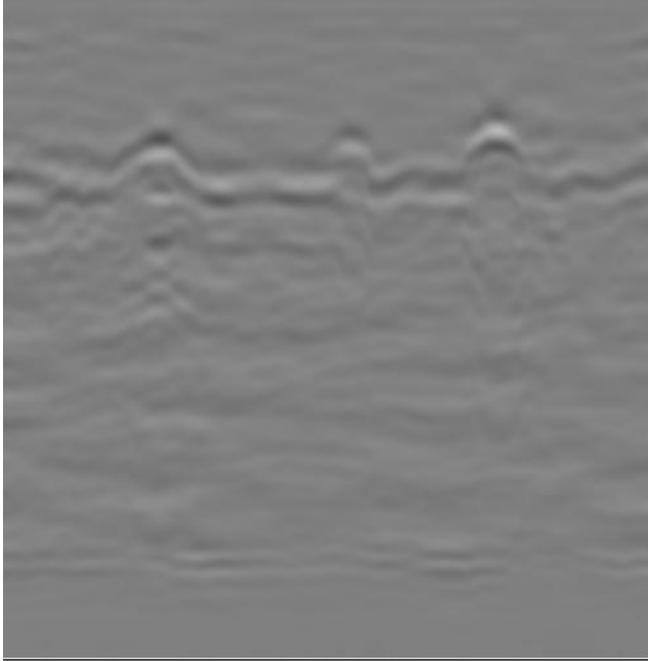


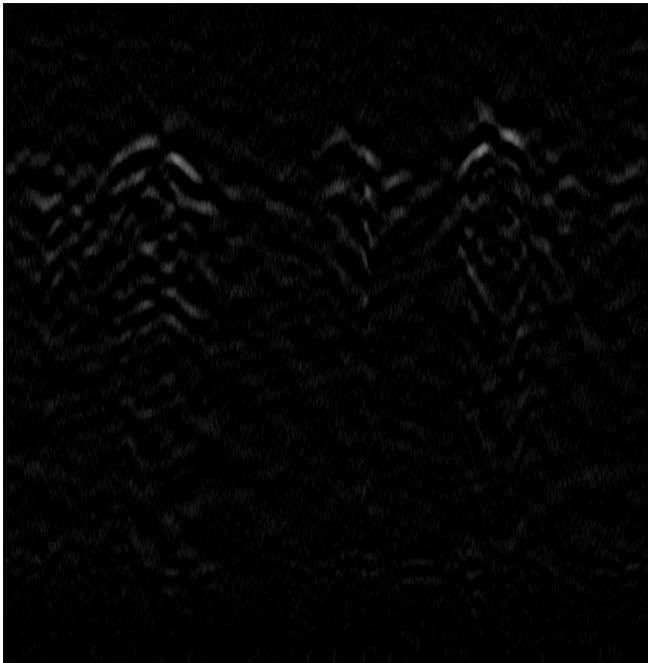
Diagrama 3. Diagrama de flujo de la subrutina: Localización de estructuras circulares.

***Apéndice C: Resultados de la localización de tuberías.***

***C.1 Salidas del algoritmo de transformada generalizada de Hough.***



**Figura 2. Imagen original**



**Figura 2. Bordes detectados con el kernel de Kirsch en la dirección de  $90^\circ$ , salida de la clase *Convolución***

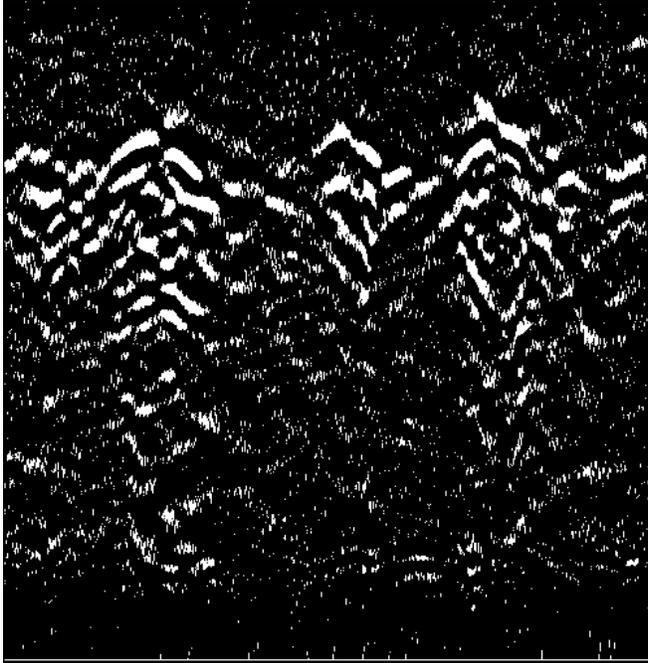


Figura 3. Imagen binaria, salida de la clase *ImagenUmbral*

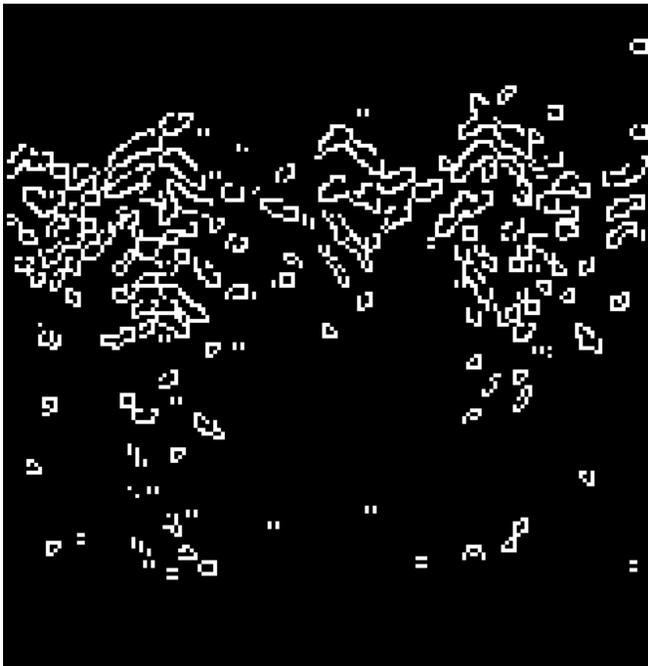
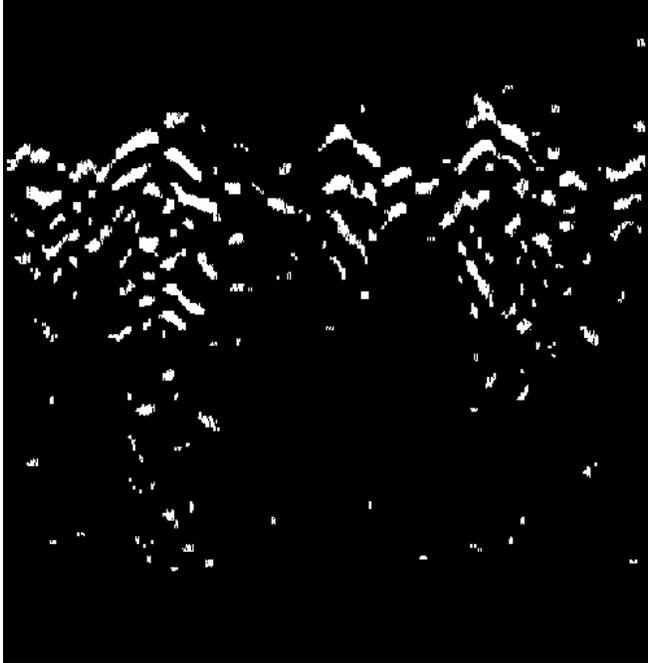
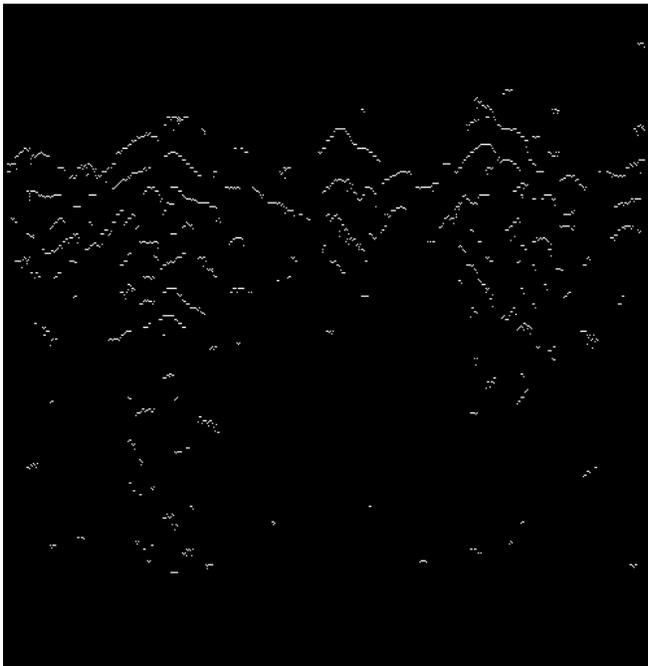


Figura 4. Acumulador de la transformada generalizada de Hough



**Figura 5. Inversa de la transformada generalizada de Hough**



**Figura 6. Inversa de la transformada generalizada de Hough erosionada**

*C.2 Salidas del algoritmo de localización de estructuras circulares.*

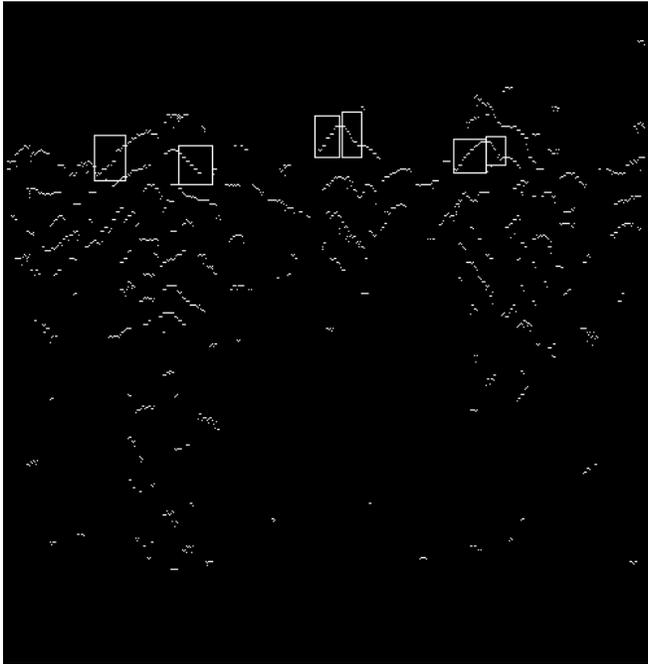


Figura 7. Zonas seleccionadas para la localización de estructuras circulares

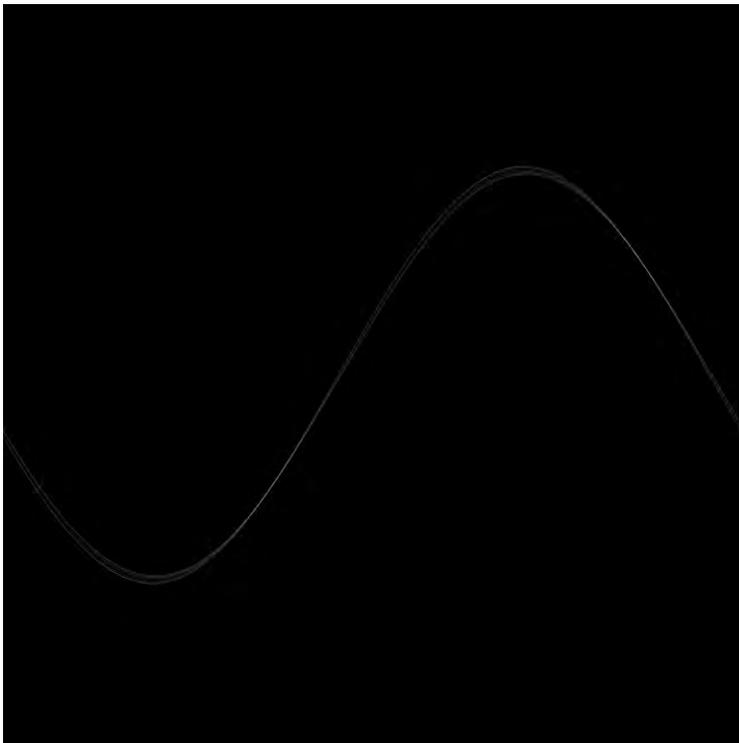
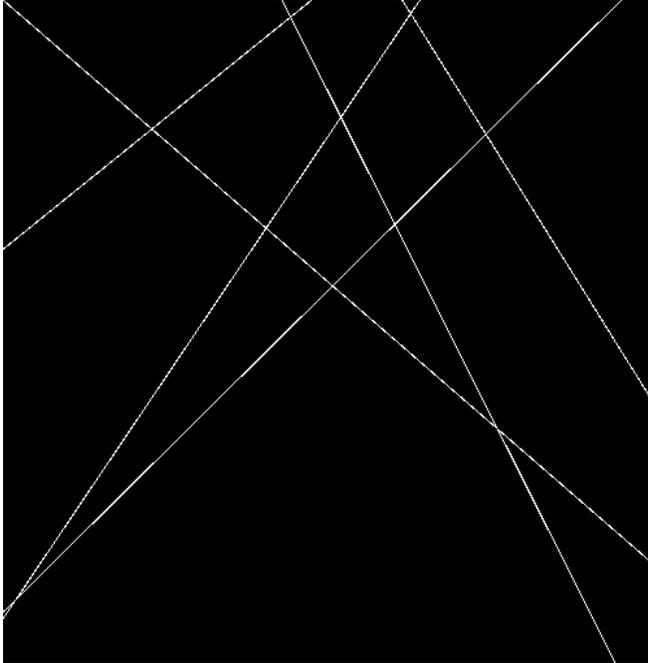
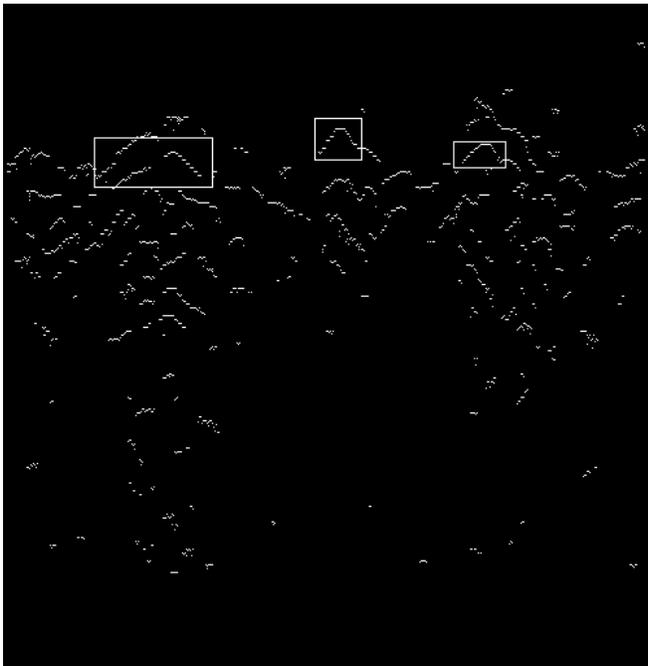


Figura 8. Acumulador de la transformada de líneas de Hough, para el último rectángulo seleccionado



**Figura 9. Líneas obtenidas por la transformada de líneas de Hough**



**Figura 10. Zonas en donde se calcula la localización de las estructuras circulares**

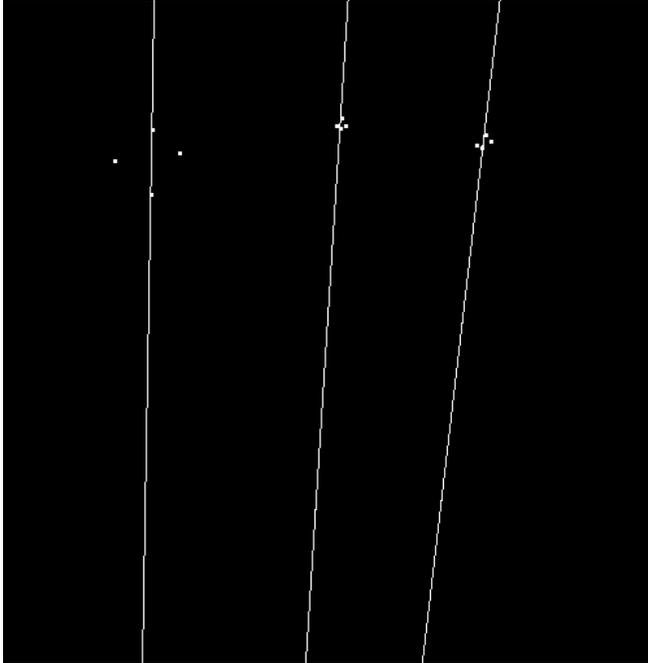


Figura 11. Imagen con las bisectrices de las hipérbolas, de acuerdo a las directrices. El punto sobre cada bisectriz, en la parte superior, es el punto de intersección de las directrices. Los puntos laterales a la bisectriz, son los elegidos automáticamente para el cálculo del centro de la estructura circular que viene siendo el punto sobre la bisectriz, en la parte inferior.

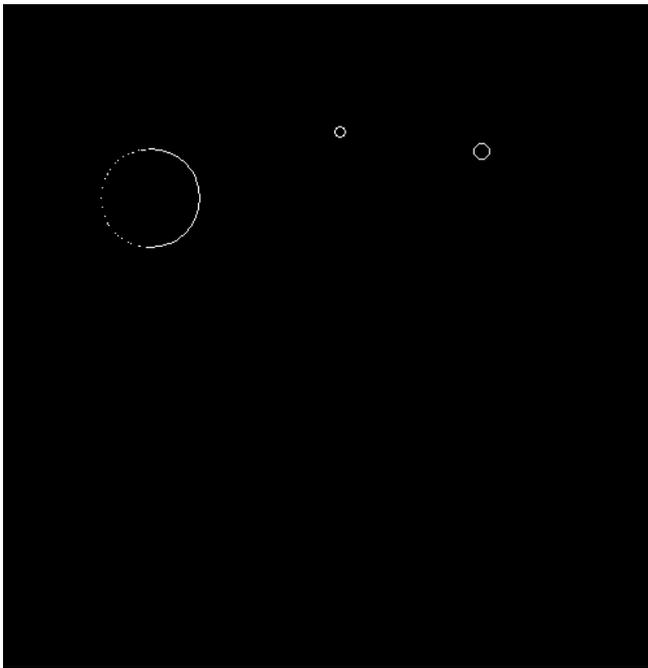


Figura 12. Estructuras obtenidas por la clase *Localización*.

*Apéndice D: Resultados de los datos de estratigrafía volcánica*

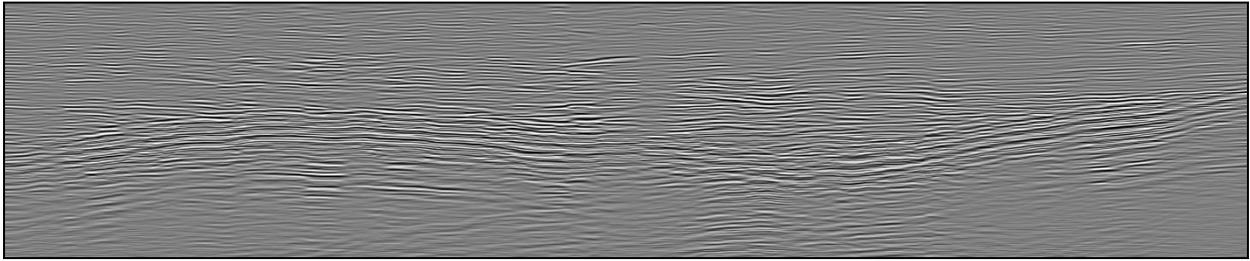


Figura 3. Imagen original.

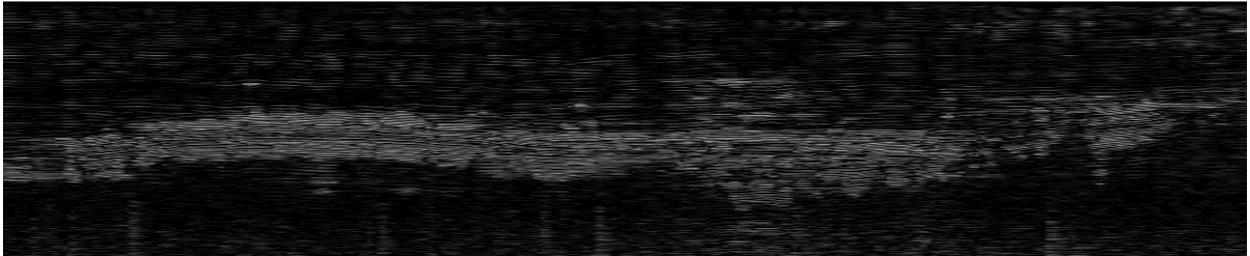


Figura 4. Bordes detectados con un operador laplaciano de  $[5 \times 5]$  píxeles, salida de la clase *Convolucion*.

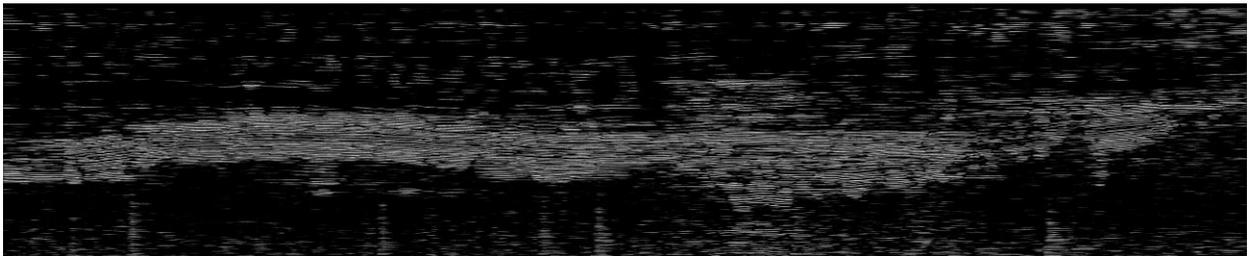


Figura 5. Imagen binaria, salida de la clase *ImagenUmbral*.

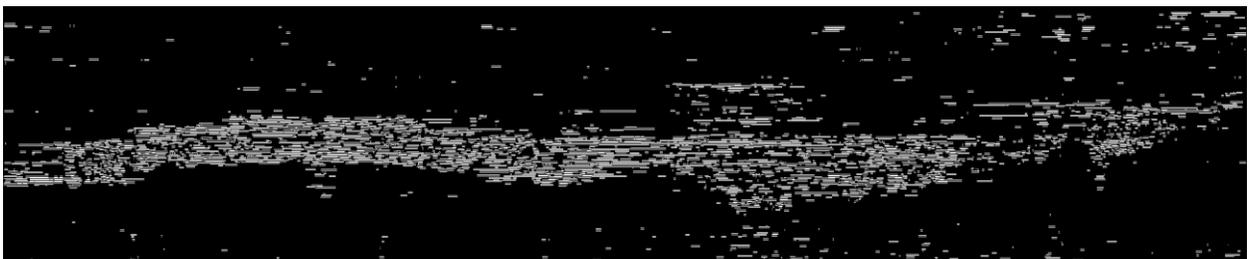


Figura 6. Acumulador de la transformada generalizada de Hough.



**Figura 7. Inversa de la transformada generalizada de Hough.**