UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Fundamentos Categóricos de la Teoría de Módulos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

ALMA VIOLETA GARCÍA LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA

2008

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Agradezco a la UNAM porque desde pequeña me enseñó que el mundo es mucho más grande de lo que parece. A la Facultad de Ciencias por la formación académica y no académica que recibí en sus aulas. A mis profesores de la carrera, especialmente al Dr. Hugo Rincón por su paciencia, asesoría y amistad. También a los profesores y ayudantes Alejandro Garciadiego Dantan, Rafael Rojas Barbachano, David Meza Alcántara y Ernesto Mayorga Saucedo por sus excelentes cursos.

A mi mamá, por absolutamente todo.

Agradezco mi familia y amigos, por su apoyo. Especialmente a mis hermanos de la carrera Ernesto, Gasde, Emilio y Yadira; por su compañía y amistad durante estos años, sin ellos todo habría sido más dificil. Así como a Edgar, Bogar, Graciela y Augusto por estar siempre ahí.

A mis amigos matemáticos Rafael, Ilán, Fernando, Angel, Jesús, Luis, Raúl y Diego por las largas charlas matemáticas que compartimos y nos motivan cada día. También a Minerva, Ramón, Araceli y Karla por contagiarme su enorme alegría estos últimos semestres.

Índice general

Introducción

La teoría de categorías es una de las herramientas más utlizadas actualmente por las diversas ramas de la matemática. Gracias a ella es posible obtener resultados que relacionan distintas estructuras matemáticas u obtener propiedades intrínsecas de ellas desde su estructura categórica. De éste modo se pueden estudiar propiedades de módulos y anillos desde un punto de vista categórico.

El presente trabajo pretende esbozar la estructura interna de las categorías de módulos y más generalmente las categorías abelianas, basado principalmente en el libro de Peter J. Freyd, Categorías Abelianas, una introducción a la teoría de funtores y en Anillos de Cocientes de Bo Stenström para la parte de aplicaciones a la teoría de Módulos.

A lo largo de la tesis, revisaremos diversos aspectos de la teoría, por ejemplo, haremos notar que los subobjetos en categorías abelianas forman una retícula; extenderemos las nociones de generador y cogenerador que conocemos de la teoría de módulos a categorías abelianas en general. Observaremos que categorías de funtores entre categorías abelianas heredan estructura abeliana; revisaremos el comportamento de teoremas como el del Funtor Adjunto de Freyd y el Lema de Yoneda en el caso abeliano. Finalmente mostraremos un ejemplo de cómo con herramienta categórica es posible obtener propiedades intrínsecas de anillos y módulos con los Teoremas de Morita.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Categorías y Funtores

Definición 1.1.1. *Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de:*

(i) *Una clase de objetos.*

(ii) *Un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ para cada par de objetos de $\mathcal{C}$, cuyos elementos son llamados **morfismos** o **flechas** de C en C'.*

(iii) *Una función llamada composición $\circ : Hom_{\mathcal{C}}(C', C'') \times Hom_{\mathcal{C}}(C, C') \to Hom_{\mathcal{C}}(C, C'')$ para cada terna ordenada de objetos en $\mathcal{C}$. Denotaremos a los elementos de $Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ como $\alpha : C \to C'$ y a la composición con otro elemento $\beta : C' \to C''$ como $\beta \circ \alpha$.*

(iv) *Para todo objeto C en $\mathcal{C}$ se debe cumplir que existe un **morfismo identidad** $1_C \in Hom_{\mathcal{C}}(C, C)$ tal que $1_C \circ \alpha = \alpha$ y $\beta \circ 1_C = \beta$ para cualesquiera $\alpha : C' \to C$ y $\beta : C \to C''$.*

(v) *Si $\alpha : C \to C'$, $\beta : C' \to C''$ y $\gamma : C'' \to C'''$ son morfismos en $\mathcal{C}$ entonces $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$. Es decir, $\circ$ es asociativa.*

(vi) *Si* $(A, B) \neq (C, D)$ *entonces* $Hom(A, B) \cap Hom(C, D) = \emptyset$.

Definición 1.1.2. *Una categoría se llama* ***categoría pequeña*** *en caso de que su clase de objetos sea un conjunto.*

Definición 1.1.3. *Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son dos categorías, un funtor $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ asigna a cada objeto B en $\mathcal{B}$ un objeto $T(B)$ en $\mathcal{C}$ y a cada morfismo $\alpha \in Hom_{\mathcal{B}}(B, B')$ un morfismo $T(\alpha) \in Hom(T(B), T(B'))$ tal que:*

(i) $T(\beta \circ \alpha) = T(\beta) \circ T(\alpha)$ *para todo* $\alpha : B \to B'$, $\beta : B' \to B''$ *en* $\mathcal{B}$.

(ii) $T(1_B) = 1_{T(B)}$.

Observemos que un funtor $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ determina una función

$$\varphi : Hom_{\mathcal{B}}(B, B') \to Hom_{\mathcal{C}}(T(B), T(B'))$$

para cada par de objetos B y B' en $\mathcal{B}$.

Definición 1.1.4. *Decimos que un funtor $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es* ***fiel*** *si cada función φ es inyectiva. T es llamado* ***pleno*** *si φ es suprayectiva.*

Ejemplo 1.1.5. *Denotaremos como* ***Sets*** *a la categoría de conjuntos y funciones. Sea $\gamma : B' \to B''$ en $\mathcal{B}$. Definimos para cada $\alpha \in Hom(B, B')$, $Hom(B, \gamma) : Hom(B, B') \to Hom(B', B'')$ como $Hom(B, \gamma)(\alpha) = \gamma \circ \alpha$. Lo anterior determina un funtor $Hom(B, \_) : \mathcal{B} \to$* ***Sets*** *llamado funtor representable por B.*

Definición 1.1.6. *Un morfismo $\alpha : C \to C'$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un* ***isomorfismo*** *si existe un morfismo $\beta : C' \to C$ morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $\alpha \circ \beta = 1_{C'}$ y $\beta \circ \alpha = 1_C$. En esta situación decimos que C y C' son objetos isomorfos y que β es inverso de α.*

Definición 1.1.7. *Sean $S, T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores. Una* ***transformación natural*** *entre S y T consiste de una familia de morfismos $\{\eta_B : S(B) \to T(B)\}_{B \in \mathcal{B}}$ indicada por la clase de objetos de $\mathcal{B}$, tal que para todo morfismo $\beta : B \to B'$ en $\mathcal{B}$ el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{C}$*

$$\begin{array}{ccc} B & \quad & \begin{tikzcd} S(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "S(\beta)"'] & T(B) \arrow[d, "T(\beta)"] \\ S(B') \arrow[r, "\eta_{B'}"'] & T(B') \end{tikzcd} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\ B' & & \end{array}$$

Denotamos $\eta = \{\eta_B\}_{B \in \mathcal{B}} : S \Rightarrow T$ y llamamos a cada η_B la componente en B de la transformación natural η.

Definición 1.1.8. *Una transformación natural η es una* ***equivalencia natural*** *si cada η_B es un isomorfismo.*

Definición 1.1.9. *Dos categorías $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son* ***isomorfas*** *si existen funtores $S : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ y $T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ tal que $TS = Id_{\mathcal{B}}$ y $ST = Id_{\mathcal{C}}$.*

Definición 1.1.10. *Un funtor $S : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es una* ***equivalencia*** *si existe un funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ y equivalencias naturales $TS \Rightarrow Id_{\mathcal{B}}$ y $ST \Rightarrow Id_{\mathcal{C}}$.*

Observación 1.1.11. *Dado un funtor $S : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, denotamos como $S(\mathcal{B})$ a la clase de objetos y morfismos de $\mathcal{C}$ que son imágenes de objetos y morfismos de $\mathcal{B}$ bajo S.*

Proposición 1.1.12. *Un funtor $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia si y sólo si es fiel, pleno y todo objeto en $\mathcal{C}$ es isomorfo a un objeto de $S(\mathcal{B})$*

Demostración:

[$\Rightarrow$] Supongamos que S es una equivalencia, esto nos asegura la existencia de un funtor $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y equivalencias naturales $\eta : ST \Rightarrow Id_{\mathcal{D}}$ y $\mu : TS \Rightarrow Id_{\mathcal{C}}$.

Veamos primero que la función

$$\varphi : Hom_{\mathcal{C}}(C, C') \to Hom_{\mathcal{D}}(S(C), S(C'))$$

que determina el funtor S es inyectiva. Sean α, $\alpha' \in Hom_{\mathcal{C}}(SC, SC)$ que satisfacen $S(\alpha) = S(\alpha')$ y las componentes respectivas de μ y μ^{-1} dadas por los cuadrados:

$$\begin{tikzcd} TS(C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "TS(\alpha)"'] & C \arrow[d, "\alpha"] \\ TS(C') \arrow[r, "\mu_{C'}"] & C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\mu_C^{-1}"] \arrow[d, "\alpha'"] & TS(C) \arrow[d, "TS(\alpha')"] \\ C' \arrow[r, "\mu_{C'}^{-1}"] & TS(C') \end{tikzcd}$$

Así tenemos que $\alpha \circ \mu_C = \mu_{C'} \circ TS(\alpha) = \mu_{C'} \circ TS(\alpha') = \alpha' \circ \mu_{C'}$. Como μ_C es un isomorfismo podemos concluir que $\alpha = \alpha'$ es decir φ es inyectiva.

Demostramos a continuación que S es pleno. Sea $\delta \in Hom_{\mathcal{D}}(S(C), S(C'))$. Queremos encontrar $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ tal que $S(\alpha) = \delta$. Consideremos el morfismo $\mu_{C'} \circ T(\delta) \circ \mu_C^{-1} : C \to C'$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} S(C) \arrow[d, "\delta"'] \\ S(C') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TS(C) \arrow[r, tail, two heads, "\mu_C"] \arrow[d, "T(\delta)"'] & C \arrow[d, dotted] \\ TS(C') \arrow[r, tail, two heads, "\mu_{C'}"] & C' \end{tikzcd}$$

$S(\mu_{C'} \circ T(\delta) \circ \mu_C^{-1}) = S(\mu_{C'}) \circ ST(\delta) \circ S(\mu_C^{-1}) = S(\mu_{C'}) \circ \eta_{SC'}^{-1} \circ \delta \circ \eta_{SC} \circ S(\mu_C^{-1}) = 1_{SC'} \circ \delta \circ 1_{SC} = \delta$. Finalmente para cada objeto de $\mathcal{D}$ tenemos un isomorfismo $D \cong ST(D)$ dado por η_D.

$[\Leftarrow]$ $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es fiel, pleno y existe un isomorfismo $D \cong S(C)$ para cada $D \in \mathcal{D}$. Haciendo uso del axioma de elección para clases[1], escojamos C en $\mathcal{C}$ tal que $D \cong S(C)$ y definimos $T(D) = C$. Denotemos $\xi_D : ST(D) \to D$ al isomorfismo que elegimos.

[1] [1] Foundations, pag: 13–17.

Un morfismo $\beta : D \to D'$ induce un morfismo $\xi_{D'}^{-1} \circ \beta \circ \xi_D \in Hom_D(ST(D), ST(D'))$. Como S es fiel y pleno existe un único morfismo $T(\beta)$ en $Hom_C(T(D), T(D'))$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T(D) \arrow[d, "T(\beta)"'] & ST(D) \arrow[r, "\xi_D"] \arrow[d, "ST(\beta)"'] & D \arrow[d, "\beta"] \\
T(D) & ST(D') \arrow[r, "\xi_{D'}"] & D'
\end{tikzcd}$$

Lo anterior determina un funtor $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y una transformación natural $\xi : ST \Rightarrow Id_{\mathcal{D}}$ dada por los isomorfismos $\{\xi_D : STD \to D\}_{\mathcal{D}}$. Ahora, para cada C en $\mathcal{C}$ tenemos $\xi_{SC} : ST(SC) \to SC$ y como S es fiel y pleno, la función:

$$\varphi : Hom_{\mathcal{C}}(TS(C), C) \to Hom_D(ST(SC), S(C))$$

es un isomorfismo, por tanto existe un único $\nu_C \in Hom_{\mathcal{C}}(TS(C), C)$ tal que $S(\nu_C) = \xi_{SC}$.

Dado $\alpha : C \to C'$, consideremos el morfismo $\nu_{C'}^{-1} \circ \alpha \circ \nu_C : TS(C) \to TS(C')$ y apliquemos S al cuadrado I. Observemos que éste conmuta por la naturalidad de ξ y porque $S(\nu_C) = \xi_{SC}$:

$$\begin{tikzcd}
TS(C) \arrow[r, tail, two heads, "\nu_C"] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "I"] & C \arrow[d, "\alpha"] \\
TS(C') \arrow[r, tail, two heads, "\nu_{C'}"] & C'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
ST(SC) \arrow[r, "S(\nu_C)", "\xi_{SC}"'] \arrow[d, "STS(\alpha)"'] & S(C) \arrow[d, "S\alpha"] \\
ST(SC') \arrow[r, "S(\nu_C)", "\xi_{SC'}"'] & S(C')
\end{tikzcd}$$

Como S es pleno, para $STS(\alpha)$ existe $TS(\alpha) \in Hom_{\mathcal{C}}(TSC, TSC')$ tal que el diagrama I conmuta para cada $\alpha \in \mathcal{C}$, esto induce una transformación natural $\nu : TS \Rightarrow Id_{\mathcal{C}}$.

■

Ejemplo 1.1.13. *Sean $A_1, \ldots, A_n$ anillos y $A_1 \times \cdots \times A_n$ el producto directo de anillos. Entonces hay una equivalencia:*

$$Mod - A_1 \times \cdots \times Mod - A_n \longrightarrow Mod - (A_1 \times \cdots \times A_n)$$

dada por la asignación $(M_1, \ldots, M_n) \mapsto M_1 \times \cdots \times M_n$.

1.2. Morfismos y objetos distinguidos

Definición 1.2.1. *En una categoría* $\mathcal{C}$, *una flecha* $f : A \to B$ *es un* ***monomorfismo*** *si* $f \circ g = f \circ h$ *se tiene que* $g = h$. *En este caso usaremos la notación* $f : A \rightarrowtail B$. *Decimos que* f *es un* ***epimorfismo*** *si* $i \circ f = j \circ f$ *implica que* $i = j$, *ésto lo denotaremos* $f : A \twoheadrightarrow B$.

Proposición 1.2.2. *Todo isomorfismo es epimorfismo y monomorfismo.*

Demostración: Sea $\alpha : B \to C$ un isomorfismo, consideremos su inverso $\beta : C \to B$. Sean $x, y : A \to B$ tales que $\alpha \circ x = \alpha \circ y$, entonces $x = 1_B \circ x = \beta \circ \alpha \circ x = \beta \circ \alpha \circ y = 1_B \circ y = y$. Por lo tanto α es un monomorfismo. Similarmente si $w, z : C \to D$ son tales que $w \circ \alpha = z \circ \alpha$, entonces $w = w \circ 1_c = w \circ \alpha \circ \beta = z \circ \alpha \circ \beta = z \circ 1_C = z$ así α es un epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "1_C"] & & \\
A \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "1_B"'] & C \arrow[r, shift left, "z"] \arrow[r, shift right, "w"'] \arrow[d, "\beta"] & D \\
& & B &
\end{tikzcd}$$

∎

Definición 1.2.3. *Dos monomorfismos* $f : A_1 \rightarrowtail B$ *y* $g : A_2 \rightarrowtail B$ *en una categoría son* ***equivalentes*** *si existen morfismos* $\alpha : A_1 \to A_2$ *y* $\beta : A_2 \to A_1$ *con la propiedad* $f = g \circ \alpha$ *y* $g = f \circ \beta$.

Lo anterior determina una relación de equivalencia en la clase de monomorfismos que entran en un objeto B.

Definición 1.2.4. *Un **subobjeto** de B es una clase de equivalencia de monomorfismos que entran en B. Denotaremos $\lfloor f \rfloor$ al subobjeto representado por $f : A_1 \rightarrowtail B$. Decimos que el subobjeto representado por f está contenido en el subobjeto representado por $g : A_2 \rightarrowtail B$ ($f \in \lfloor g \rfloor$) si existe $h : A_1 \to A_2$ tal que $f = g \circ h$. Usaremos la notación $\lfloor f \rfloor \leq \lfloor g \rfloor$.*

Dos monomorfismos $f : A_1 \rightarrowtail B$ y $g : A_2 \rightarrowtail B$ representan al mismo subobjeto si $\lfloor f \rfloor \leq \lfloor g \rfloor$ y $\lfloor g \rfloor \leq \lfloor f \rfloor$.

Definición 1.2.5. *Dos epimorfismos en una categoría $f : B \twoheadrightarrow C_1$ y $g : B \twoheadrightarrow C_2$ son equivalentes si existen morfismos $\gamma : C_1 \to C_2$ y $\delta : C_2 \to C_1$ tales que $g = \gamma \circ f$ y $f = \delta \circ g$.*

Observemos que los morfismos γ y δ son inversos uno del otro, es decir C_1 es isomorfo a C_2.

Definición 1.2.6. *Un **objeto cociente** de B es una clase de equivalencia de epimorfismos cuyo dominio es B. Denotamos al objeto cociente representado por $f : B \twoheadrightarrow C_1$ como $\lceil f \rceil$. Decimos que $\lceil f \rceil \leq \lceil g \rceil$ si existe un morfismo $\epsilon : C_2 \to C_1$ que cumple $f = \epsilon \circ g$.*

Definición 1.2.7. *En una categoría $\mathcal{C}$ un objeto al que denotaremos i es un **objeto inicial** si para todo C en $\mathcal{C}$ existe una única flecha $i \to C$. 1 es un **objeto terminal** si para todo C en $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $C \to 1$.*

Proposición 1.2.8. *Los objetos inicial y terminal, si existen, son únicos salvo isomorfismo.*

Demostración: Sean i e i' objetos iniciales y 1 y $1'$ objetos terminales, entonces existen morfismos únicos $i \to i'$, $i' \to i$ y $1 \to 1'$ y $1' \to 1$ tales que los respectivos diagramas son conmutativos.

$$\begin{tikzcd} i' \arrow[d] \arrow[dr, "Id_{i'}"] & \\ i \arrow[r] \arrow[dr, "Id_i"'] & i' \arrow[d] \\ & i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1' \arrow[d] \arrow[dr, "Id_{1'}"] & \\ 1 \arrow[r] \arrow[dr, "Id_1"'] & 1' \arrow[d] \\ & 1 \end{tikzcd}$$

Por lo que $i \cong i'$ y $1 \cong 1'$.

■

Definición 1.2.9. *Un **objeto cero** es un objeto que es inicial y terminal a la vez, y lo denotaremos como* 0*.*

Definición 1.2.10. *Consideremos una categoría* $\mathcal{C}$ *con objeto cero. Un morfismo* $f : A \to B$ *es llamado **morfismo cero** si se factoriza a través de* 0*. Es decir, que el siguiente triangulo conmuta con* $w : A \to 0$ *y* $i : 0 \to B$ *los morifsmos únicos dados por el objeto inicial y terminal respectivamente:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "w"'] & & B \\ & 0 \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Usaremos la notación $\hat{0}$ *para distinguir al morfismo cero del objeto cero* 0*.*

Proposición 1.2.11. *En una categoría* $\mathcal{C}$ *con objeto cero, hay exactamente un morfismo cero entre cualesquiera dos objetos* A *y* B*. Y la composición del morfismo cero con un morfismo arbitrario es el morfismo cero.*

Demostración: Sean A y B en $\mathcal{C}$ con objeto cero 0. Como 0 es objeto terminal existe un único morfismo $A \to 0$ y un único $0 \to B$, por ser 0 también un objeto inicial. Por lo tanto existe un único morfismo $A \to 0 \to B$. Por otra parte, cualquier composición de la forma $f \circ \hat{0}$ o $\hat{0} \circ g$ se factoriza a través del objeto cero, entonces coincide con el morfismo cero.

■

Definición 1.2.12. *Dados dos morfismos $x : A \to B$ y $y : A \to B$, decimos que $e : E \to A$ es un* ***igualador*** *de x y y si:*

i) $x \circ e = y \circ e$

ii) Para todo $c : X \to A$ tal que $x \circ c = y \circ c$ existe un único morfismo $d : X \to E$ que $c = e \circ d$. A ésta propiedad se le conoce como ***propiedad universal del igualador*** *de dos morfismos.*

Proposición 1.2.13. *Si e es un igualador de $x : A \to B$ y $y : A \to B$ entonces e es un monomorfismo y representa al mayor subobjeto $\lfloor s \rfloor$ de A tal que $x \circ s = y \circ s$.*

Demostración: Supongamos que e es el igualador de x y y. Sean a y b morfismos tales que $e \circ a = e \circ b = c$. Notemos que $x \circ c = y \circ c$ pues $x \circ e \circ b = y \circ e \circ a$, entonces existe un único morfismo u tal que $c = e \circ u = e \circ a = e \circ b$, por lo tanto $a = b$.

■

Definición 1.2.14. *Dados $x : A \to B$ y $y : A \to B$, decimos que $f : B \to F$ es el* ***coigualador*** *de x y y si $f \circ x = f \circ y$ y para todo morfismo $c : B \to X$ tal que $c \circ x = c \circ y$ existe un único $d : F \to X$ tal que $d \circ f = c$.*

Definición 1.2.15. *En una categoría con objeto cero el* ***núcleo*** *de una flecha $f : A \to B$ es un morfismo $k : K \to A$ tal que $f \circ k = \hat{0}$ y para todo $x : X \to A$ con la propiedad de que $f \circ x = \hat{0}$, existe un único $y : X \to K$ que factoriza a $x = k \circ y$. Usaremos la notación $ker(f)$ para representar a dicho morfismo y $Ker(f)$ para referinos al objeto K.*

Observemos que un núcleo de un morfismo f es el igualador de f con el morfismo $\hat{0} : A \to B$ y por lo tanto un monomorfismo.

Propoisición 1.2.16. *Cualesquiera dos núcleos de f representan el mismo subobjeto.*

Demostración: Sean k y k' dos núcleos de f. Sean u y v los morfismos inducidos por la propiedad universal del núcleo respectivamente, es decir $k' = k \circ u$ y $k = k' \circ v$. De donde se sigue que $\lfloor k' \rfloor \leq \lfloor k \rfloor$ y $\lfloor k \rfloor \leq \lfloor k' \rfloor$.

∎

Definición 1.2.17. *El **conúcleo** de $f : A \to B$ es una flecha $c : B \to C$ tal que $c \circ f = \hat{0}$ y para todo $x : B \to X$ tal que $x \circ f = \hat{0}$ existe un único $y : C \to X$ tal que $x = y \circ c$. Es decir, el coigualador de f con el morfismo $\hat{0} : A \to B$. Denotaremos al morfismo conúcleo de f como $cok(f)$ y haremos la distinción con $Cok(f)$ cuando nos refiarmos al objeto.*

Dualmente, todo conucleo es un epimortismo y cualesquiera dos conúcleos de f representan el mismo objeto cociente.

Definición 1.2.18. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero. El **producto** de una familia $\{C_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{C}$ es un objeto C junto con morfismos $\{\pi_i : C \to C_i\}_{i\in I}$ tal que para cada objeto X y morfismos $\xi_i : X \to C_i$ existe una única flecha $\xi : X \to C$ con la propiedad de que $\pi_i \circ \xi = \xi_i$ para todo $i \in I$. Esto último se conoce como **propiedad universal del producto**. Usaremos la notación $\prod C_i$ para el producto y llamaremos **proyecciones** a los morfismos π_i y denotaremos como*

$$\begin{tikzcd} C = \prod C_i \arrow[r, "\pi_i"] & C_i \\ X \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "\xi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Nótese que la definición anterior puede ser caracterizada mediante la fórmula:

$$Hom(X, \prod_I C_i) \cong \prod_I Hom(X, C_i)$$

Ejemplo 1.3. *En las categorías de grupos, grupos abelianos, anillos y módulos, el producto de una fimial de objetos coincide con el producto cartesiano, de manera que si $\{C_i\}_I$ es una familia de objetos, entonces*

$$\prod_{i \in I} C_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} | x_i \in C_i \right\}$$

con $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$

Proposición 1.3.1. *Si $\alpha_i : B_i \to C_i$ son monomorfismos, entonces el morfismo inducido $\alpha : \prod B_i \to \prod C_i$ es un monomorfismo.*

Demostración: Sean $\eta, \xi : X \to \prod B_i$ tales que $\alpha \circ \eta = \alpha \circ \xi$, entonces tenemos que $\alpha_i \circ \pi_{B_i} \circ \eta = \alpha_{B_i} \circ \pi_i \circ \xi$, como cada α_i es monomorfismo $\pi_i \circ \eta = \pi_i \circ \xi$ para cada i. Por la propiedad universal de $\prod B_i$, existe un único $x : X \to \prod B_i$ que satisface $\pi \circ x = \pi_i \circ \eta = \pi_i \circ \xi$. Por lo tanto $\eta = \xi$

■

Definición 1.3.2. *El **coproducto** o suma directa de una familia de objetos $\{C_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{C}$ es un objeto $\bigoplus C_i$ junto con un morfismo $\iota_i : C_i \to \bigoplus C_i$ para cada $i \in I$ tal que para todo objeto X y morfismo $\xi : C_i \to X$ existe un único morfismo ξ tal que $\xi_i = \iota_i \circ \xi$ (**propiedad universal del coproducto**). Nos referiremos a los morfismos ι_i como inclusiones.*

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "\xi_i"'] & \bigoplus C_i \arrow[d, "\xi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Dualmente el coproducto se caracteriza por la fórmula:

$$Hom(\bigoplus_I C_i, X) \cong \prod_I Hom(C_i, X)$$

En las definiciones anteriores, si C_i es igual a un objeto A para toda i, denotaremos al producto como A^I y al coproducto como $A^{(I)}$.

Ejemplo 1.4. *En la categoría de grupos, el coproducto* $\coprod_{i\in I} G_i$ *coincide con el producto libre generado por los* G_i.

Proposición 1.4.1. *Dualmente a la proposición anterior, si* $\alpha_i : B_i \to C_i$ *es un epimorfismo para cada* $i \in I$, *entonces el morfismo inducido* $\alpha : \bigoplus B_i \to \bigoplus C_i$ *es tambien un epimorfismo.*

Ejemplos 1.4.2. 1. Un producto vacío *es un objeto terminal, un coproducto vacío es un objeto inicial.* 2. *En las categorías de gurpos, grupos abelianos, espacios vectoriales y espacios de Banach,* 0 *es el objeto cero. 3. En la categoría de conjuntos y en la de espacios topológicos el conjunto vacío es el objeto inicial y un conjunto unitario es el objeto terminal.*

Definiciónn 1.4.3. *Definimos el producto de dos categorías* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *como* $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, *cuyos objetos son pares de objetos* (A, B) *con* A *en la clase de objetos de* $\mathcal{A}$ *y* B *en los objetos de* $\mathcal{B}$. *Los morfismos* $(A, B) \to (A', B')$ *son pares de morfismos* $a : A \to A'$ *y* $b : B \to B'$ *en* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *respectivamente. Además tenemos asociados dos funtores proyección* $P_A : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *y* $P_B : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

Capítulo 2

Categorías Abelianas

En éste capítulo partiremos de la caracterización axiomática de categorías abelianas introducida por Peter Freyd y esbozaremos resultados significativos sobre su estructura interna.

Definición 2.0.4. *Una categoría $\mathcal{A}$ es abeliana si cumple con los siguientes axiomas:*

A0 $\mathcal{A}$ *tiene objeto cero*

A1 Para todo par de objetos A, B *en* $\mathcal{A}$ *hay un producto* $A \times B$ *y una suma* $A \oplus B$

A2 Todo morfismo tiene un núcleo y un conucleo

A3 Todo monomorfismo es núcleo de un morfismo y todo epimorfismo es conúcleo de un morfismo.

2.1. Núcleos y Conúcleos

Definición 2.1.1. *Sea B un objeto en una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Denotemos con S la clase de subobjetos de B y Q la clase de objetos cociente de B.*

$$S = \left\{ \lfloor f \rfloor \mid \stackrel{f}{\rightarrowtail} B \right\} \qquad Q = \left\{ \lceil g \rceil \mid B \stackrel{g}{\twoheadrightarrow} \right\}$$

Definimos $cok : S \to Q$ como $\lfloor f \rfloor \mapsto \lceil cok(f) \rceil$ y $ker : Q \to S$ tal que $\lceil g \rceil \mapsto \lfloor ker(g) \rfloor$.

Las funciones anteriores están bien definidas pues si $\lfloor f' \rfloor = \lfloor f \rfloor$, entonces existen α y β tales que $f = f' \circ \alpha$ y $f' = f \circ \beta$. Notemos que $cok(f) \circ f' = cok(f) \circ f \circ \beta = \hat{0}$, por la propiedad universal del conúcleo de f' existe un único β' tal que $cok(f) = \beta' \circ cok(f')$. Por otro lado $cok(f') \circ f = cok(f') \circ f' \circ \alpha = \hat{0}$ entonces existe una única α' tal que $cok(f') = \alpha \circ cok(f)$. Por lo tanto $\lceil cok(f) \rceil = \lceil cok(f') \rceil$. Asimismo $ker : Q \to S$ está bien definida.

Observación 2.1.2. *ker y cok invierten el orden.*

Demostración: Sean $\lfloor f \rfloor \leq \lfloor g \rfloor$ subobjetos de B con representantes $f : A_1 \rightarrowtail B$ y $g : A_2 \rightarrowtail B$, entonces existe α tal que $f = g \circ \alpha$. Consideremos los morfismos $cok(g)$ y $cok(f)$. Notemos que $cok(g) \circ f = cok(g) \circ (g \circ \alpha) = \hat{0}$. Por la propiedad universal de $Cok(f)$ existe un único $\beta : C_1 \to C_2$ tal que $cok(g) = \beta \circ cok(f)$. Es decir $\lceil cok(g) \rceil \leq \lceil cok(f) \rceil$.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dd, "a"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[rr, bend left, "\hat{0}"] & & C_2 \\
& B \arrow[ur, "cok(g)"] \arrow[dr, "cok(f)"'] & \\
A_2 \arrow[ur, "g"'] & & C_1 \arrow[uu, dashed, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Dualmente, dados dos objetos cociente de B, $\lceil h \rceil \leq \lceil k \rceil$ con representantes $h : B \twoheadrightarrow C_1$ y $k : B \twoheadrightarrow C_2$. Existe $\beta : C_2 \to C_1$ tal que $h = \beta \circ k$. Entonces $h \circ ker(k) = (\beta \circ k) \circ ker(k) = \beta \circ \hat{0} = \hat{0}$ implica que existe un único

$\alpha : K_2 \to K_1$ tal que $ker(k) = ker(h) \circ \alpha$, así $\lfloor ker(k) \rfloor \leq \lfloor ker(h) \rfloor$. Por lo tanto ker invierte el orden.

$$\begin{tikzcd}
K_2 \arrow[r, "ker(k)"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "k"] & C_1 \\
K_1 \arrow[ur, "ker(h)"'] & & C_2 \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

■

Teorema 2.1.3. *En categorías abelianas ker y cok son funciones inversas.*

Demostración: Sea A un objeto en una categoría abeliana y $\lfloor f \rfloor$ un subobjeto de A. Por el axioma A3 existe $g : A \to B$ tal que $f = ker(g)$, i.e. $f : Ker(g) \to A$. Entonces por la propiedad universal del conúcleo de f existe un único $\varphi : Cok(f) \to B$ tal que $g = \varphi \circ cok(f)$.

$$\begin{tikzcd}
 & Ker\,Coker(f) \arrow[d, tail, "k"] \arrow[dl, shift left, "\beta"] & \\
Ker(g) \arrow[ur, shift left, "\alpha"] \arrow[r, tail, "f"'] & A \arrow[r, "g"'] \arrow[d, two heads, "cok(f)"'] & B \\
 & Cok(f) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Consideremos $k = ker(cok(f))$, como $cok(f) \circ f = \hat{0}$, existe $\alpha : Ker(g) \to Ker\,Cok(g)$ tal que $f = k \circ \alpha$. Ahora, como $g \circ k = (\varphi \circ cok(f)) \circ k = \varphi \circ \hat{0} = \hat{0}$ entonces existe un único $\beta : Ker\,Cok(f) \to Ker(g)$ tal que $k = f \circ \beta$.

Por lo tanto $\lfloor k \rfloor \leq \lfloor f \rfloor$ y $\lfloor f \rfloor \leq \lfloor k \rfloor$ es decir $A \simeq Ker\,Cok(f)$ con lo que tenemos:

$$\lfloor f \rfloor = \lfloor ker\ cok(f) \rfloor \tag{2.1}$$

Dualmente si $\lfloor f \rfloor$ es un objeto conciente de A. Por el axioma A3 existe $g : B \to A$ tal que $f = cok(g)$. Consideremos $h = ker(f)$ y $cok(h)$. Observemos que $g \circ f = \hat{0}$. Entonces existe $\phi : B \to Ker(f)$ tal que $g = h \circ \phi$. Como

$f \circ h = \hat{0}$, existe $\alpha : Cok\,Ker(f) \to A$ tal que $f = \alpha \circ cok(h)$. Por otro lado $cok(h) \circ g = cok(h) \circ (h \circ \phi) = \hat{0}$ entonces hay un único $\beta : A \to CokKer(f)$ tal que $k = \beta \circ f$. Así $\lceil f \rceil \leq \lceil k \rceil$ y $\lceil k \rceil \leq \lceil f \rceil$ por lo tanto:

$$\lceil f \rceil = \lceil cok\ ker(f) \rceil \tag{2.2}$$

$$\begin{tikzcd}
& Ker(f) \arrow[d, tail, "h"] & \\
B \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "g"] & A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, two heads, "cok(h)"'] & Cok(g) \arrow[dl, shift left, "\beta"] \\
& Cok\,Ker(f) \arrow[ur, shift left, "\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

■

Observación 2.1.4. En una categoría con objeto cero, el conúcleo de un epimorfismo $f : A \to B$ es el morfismo $\hat{0} : B \to 0$. Dualmente, si f es monomorfismo entonces $ker(f) = \hat{0}$.

Demostración: Tenemos que $cok(f) \circ f = \hat{0} \circ f = \hat{0}$, como f es un epimorfismo $cok(f) = \hat{0}$. Análogamente si f es un monomorfismo, $ker(f) = \hat{0}$.

■

Observación 2.1.5. *El núcleo del morfismo $\hat{0} : 0 \to A$ es el morfismo id_A. Y el conúcleo de $\hat{0} : B \to 0$ es id_B.*

Teorema 2.1.6. *En categorías abelianas, un morfismo que es monomorfismo y epimorfismo es un isomorfismo.*

Demostración: Sea $f : A \to B$ monomorfismo y epimorfismo. Y consideremos su núcleo y conúcleo respectivamente. Además por la observación anterior, $id_A = cok\,ker(f)$ y $id_B = ker\,cok(f)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "ker(f)"] & A \arrow[r, tail, two heads, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[r, "cok(f)"] \arrow[dl, dotted] & 0 \\
& A & B \arrow[u, "1_B"'] \arrow[ul, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Como $f \circ ker(f) = \hat{0}$, entonces por la propiedad universal del conúcleo de $ker(f)$ existe un único morfismo $\alpha : B \to A$ tal que $id_A = \alpha \circ f$. Del mismo modo obtenemos un único morfismo $\beta : B \to A$ tal que $id_B = f \circ \alpha$.

Entonces tenemos que $\beta = id_A \circ \beta = \alpha \circ f \circ \beta = \alpha \circ id_B = \alpha$. Por lo tanto f es un isomorfismo.

■

2.2. Subobjetos y objetos cociente

Definición 2.2.1. *Sea A en $\mathcal{A}$, abeliana. Definimos la* ***intersección*** *de dos subobjetos de A como su mayor cota inferior (ínfimo) en la familia de subobjetos de A.*

Teorema 2.2.2. *En categorías abelianas, todo par de subobjetos tiene una intersección.*

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y un objeto A en ella. Sean $\lfloor f \rfloor$ y $\lfloor g \rfloor$ subobjetos de A con representantes $f : A_1 \to A$ y $g : A_2 \to A$. Denotemos $h = cok(f)$ y $k = ker(h \circ g)$. Por (2.1) $f = ker(h)$ y $h \circ g \circ k = \hat{0}$ implican que existe un único $j : A_{1,2} \to A_1$ tal que $g \circ k = f \circ j := \alpha$.

Notemos que $\alpha \in \lfloor f \rfloor$ y $\alpha \in \lfloor g \rfloor$ entonces$\alpha \in (\lfloor f \rfloor \cap \lfloor g \rfloor)$. Es decir α es cota inferior para $\lfloor f \rfloor$ y $\lfloor g \rfloor$. Veamos que α es la mayor cota inferior. Sean x_1, x_2 tales que $g \circ x_2 = f \circ x_1 := \phi$. Esto es, ϕ es una cota inferior de f y de g.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "x"] \arrow[drr, bend left, "x_2"] \arrow[ddr, bend right, "x_1"'] & & & \\
 & A_{1,2} \arrow[r, "k"] \arrow[d, dashed, "j"] & A_2 \arrow[d, tail, "g"] & \\
 & A_1 \arrow[r, tail, "f"'] & A \arrow[r, "h"'] & F
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $h \circ g \circ x_2 = h \circ f \circ x_1 = \hat{0} \circ x_1 = \hat{0}$. Como $k = ker(h \circ g)$, por la propiedad universal del núcleo existe una única $x : X \to A_{1,2}$ tal que $k \circ x = x_2$. Ahora $f \circ j \circ x = g \circ k \circ x = g \circ x_2 = f \circ x_1$ como f es monomorfismo entonces $j \circ x = x_1$. Lo que significa que hay un único morfismo con la propiedad de $\phi = \alpha \circ x$. Así $\phi \leq \alpha$. Por lo tanto α es el ínfimo de f y g.

■

Teorema 2.2.3. *En categorías abelianas todo par de objetos cociente tiene una intersección.*

Demostración: Sean $\lceil f \rceil$ y $\lceil g \rceil$ objetos cociente de B. Denotemos $f' = ker(f)$ y $h = cok(g \circ f')$. Por (2.2) $f = cok(f')$, como $h \circ g \circ f' = \hat{0}$, existe un único $j : A_1 \to A_{1,2}$ tal que $j \circ f = h \circ g$.

Llamemos β a la igualdad $j \circ f = h \circ g$, entonces $\beta \leq f$ y $\beta \leq g$. Por lo tanto β es cota inferior de $\lceil f \rceil$ y $\lceil g \rceil$.

Sean x_1 y x_2 tales que $x_1 \circ f = x_2 \circ g := \gamma$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f'"] & B \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, two heads, "g"] & A_1 \arrow[d, dashed, "j"] \arrow[ddr, bend left, "x_1"] & \\
 & A_2 \arrow[r, "h"'] \arrow[drr, bend right, "x_2"'] & A_{1,2} \arrow[dr, dotted, "x"] & \\
 & & & X
\end{tikzcd}$$

Como $h = cok(f' \circ g)$ y $x_2 \circ (g \circ f') = x_1 \circ f \circ f' = x_1 \circ \hat{0} = \hat{0}$, entonces existe un único $x : A_{1,2} \to X$ tal que $x_2 = x \circ h$. Así tenemos que $x \circ j \circ f = x \circ h \circ g = x_2 \circ g = x_1 \circ f$ y como f es un epimorfismo, entonces $x_1 = x \circ j$. Es decir, existe un único morfismo x tal que $\gamma = x \circ \beta$. Así $\gamma \leq \beta$. Por lo tanto, β es el ínfimo de $\lceil f \rceil$ y $\lceil g \rceil$

■

Corolario 2.2.4. *En categorías abelianas*

$i)$ *Todo par de subobjetos tiene una mínima cota superior (Supremo).*

$ii)$ *Todo par de objetos cociente tiene una mínima cota superor.*

Demostración:

$i)$ Sean $\lfloor f \rfloor$ y $\lfloor g \rfloor$ subobjetos de A con representantes $f : A_1 \to A$ y $g : A_2 \to A$. Por el teroema 2.2.3 sabemos que existe el ínfimo de $cok(f)$ y $cok(g)$ al que llamaremos $i = c_1 \circ cok(f) = c_2 \circ cok(g)$.

Denotemos $m = ker(i) : M \to A$ y observemos que $i \circ g = (c_2 \circ g') \circ g = \hat{0}$ entonces existe un único $k_2 : A_2 \to M$ tal que $m \circ k_2 = g$. Así mismo existe un único $k_1 : A_1 \to M$ tal que $m \circ k_1 = f$. Por lo tanto m es cota superior de $\lfloor f \rfloor$ y $\lfloor g \rfloor$. Probemos que es la menor.

Sea $\varphi : L \rightarrowtail A$ tal que $f \leq \varphi$ y $g \leq \varphi$. Entonces existen l_1 y l_2 tales que $\varphi \circ l_1 = f$ y $\varphi \circ l_2 = g$.

Consideremos $cok(\varphi) : A \to Q$. Entonces $cok(\varphi) \circ f = cok(\varphi) \circ (\varphi \circ l_1) = \hat{0} \circ l_2 = \hat{0}$, así que existe un único $t_1 : C_1 \to Q$ tal que $t_1 \circ cok(f) = cok(\varphi)$. Analogamente hay un único $t_2 : C_2 \to Q$ tal que $t_2 \circ cok(g) = cok(\varphi)$. Como i es el ínfimo de $cok(g)$ y $cok(f)$, entonces $cok(\varphi) \leq i$, es decir, existe $h : I \to Q$ tal que $h \circ i = cok(\varphi)$.

$$\begin{tikzcd}
L & & & & \\
& M \arrow[dr, "m"] & A_2 \arrow[l, "k_2"'] \arrow[d, tail, "g"] \arrow[ull, bend right, "l_2"'] & & \\
& A_1 \arrow[u, "k_1"] \arrow[r, tail, "f"'] \arrow[uul, bend left, "l_1"] & A \arrow[r, "cok(f)"] \arrow[d, "cok(g)"'] \arrow[dr, "i"] & C_1 \arrow[d, "c_1"] \arrow[ddr, bend left, "t_1"] & \\
& & C_2 \arrow[r, "c_2"'] \arrow[drr, bend right, "t_2"'] & I \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
& & & & Q
\end{tikzcd}$$

Así $cok(\varphi) \circ m = (h \circ i) \circ m = h \circ \hat{0}$. Por la propiedad universal del núcleo existe un único $l : M \to L$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, "\varphi"] & & \\
M \arrow[u, dotted, "l"] \arrow[r, "m"] & A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "cok(\varphi)"'] & I \arrow[d, "h"] \\
& & Q
\end{tikzcd}$$

Es decir $m \leq \varphi$. Por lo tanto m es el supremo de $\lfloor f \rfloor$ y $\lfloor g \rfloor$.

$ii)$ Sean $\lceil f \rceil$ y $\lceil g \rceil$ objetos cociente de B, denotemos $i = \lceil f \rceil \cap \lceil g \rceil$ y $p = cok(i)$.

Tenemos que $i \circ g = k_2 \circ ker(g) \circ g = k_2 \circ \hat{0} = \hat{0}$ entonces hay un único $a_2 : P \to A_2$ tal que $a_2 \circ g = p$. Por otro lado $i \circ f = k_1 \circ ker(f) \circ f = k_1 \circ \hat{0} = \hat{0}$ implica que existe un único $a_1 : P \to A_1$ con la propiedad de qie $a_1 \circ f = p$. En consecuencia p es cota superior de $\lceil f \rceil$ y $\lceil g \rceil$.

Supongamos que un epimorfismo ψ es cota superior de f y g. Es decir que existen q_1 y q_2 tales que $q_1 \circ \psi = f$ y $q_2 \circ \psi = g$. Entonces $f \circ ker(\psi) = (q_1 \circ \psi) \circ ker(\psi) = q_1 \circ \hat{0} = \hat{0}$. Tenemos un único $r_1 : R \to K_1$ tal que $ker(\psi) = ker(f) \circ r_1$. Análogamente existe un único morfismo $r_2 : R \to K_2$ dado por la propiedad universal del núcleo tal que $ker(\psi) = ker(g) \circ r_2$. Por lo tanto $ker(\psi) \leq ker(f)$ y $ker(\psi) \leq ker(g)$.

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[drr, bend left, "r_2"] \arrow[dr, dotted, "s"] \arrow[ddrr, squiggly, tail, "ker(\psi)"'] \arrow[ddr, bend right, "r_1"'] & & & & \\
 & I \arrow[r, "k_2"] \arrow[d, "k_1"'] \arrow[dr, "i"] & K_2 \arrow[d, tail, "ker(g)"] & & \\
 & K_1 \arrow[r, tail, "ker(f)"'] & B \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, two heads, "g"'] \arrow[dr, "p"] \arrow[ddrr, squiggly, two heads, "\psi"'] & A_1 & \\
 & & A_2 & P \arrow[u, "a_1"'] \arrow[l, "a_2"] & \\
 & & & & Q \arrow[ul, dotted, "r"'] \arrow[uul, bend right, "q_1"'] \arrow[ull, bend left, "q_2"]
\end{tikzcd}
$$

Por ser i el ínfimo, hay una única $s : R \to I$ tal que $ker(\psi) = i \circ s$, es decir $ker(\psi) \leq i$. Notemos que $p \circ ker(\psi) = p \circ (i \circ s) = \hat{0} \circ s = \hat{0}$, por la propiedad del conúcleo, existe un único $r : Q \to P$ que hace $\psi = r \circ p$, es decir, $p \leq \psi$. Por lo tanto p es el supremo de $\lceil f \rceil$ y $\lceil g \rceil$.

■

De los dos resultados anteriores podemos concluir que la familia de objetos cociente de B y la familia de subobjetos de A forman una retícula, a ésta última la denotaremos com $L(A)$. Más adelante podremos probar que se trata de una retícula modular.

2.3. Igualadores y coigualadores

Sean $x : A \to X,\ y : B \to X$ morfismos en una categoría abeliana, denotaremos al morfismo dado por la propiedad universal del producto de $A \times B$ como $\binom{a}{b} : C \to A \times B$ donde $a : X \to A$ y $b : X \to B$.

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\ & X \arrow[ul, "a"] \arrow[u, "\binom{a}{b}"] \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Lema 2.3.1. *Sea $x : A \to B$, entonces el morfismo $\binom{1}{x} : A \to A \times B$ es un monomorfismo.*

Demostración: Sean $g, h : C \to A$ tales que $\binom{1}{x} \circ g = \binom{1}{x} \circ h$, es decir, $\binom{g}{x \circ g} = \binom{h}{x \circ h}$ entonces $\pi_A \circ \binom{g}{x \circ g} = \pi_A \circ \binom{h}{x \circ h}$ con lo que $g = h$, por lo tanto $\binom{1}{x}$ es un monomorfismo.

■

Teorema 2.3.2. *En categorías abelianas, todo par de morfismos $x : A \to B$ y $y : A \to B$ tienen igualador*

Demostración: Consideremos los monomorfismos $A \xrightarrow{\binom{1}{x}} A \times B$ y $A \xrightarrow{\binom{1}{y}} A \times B$. Si $K \xrightarrow{k} A \times B$ es su intersección, tenemos que $k = \binom{k_2}{y \circ k_2} = \binom{k_1}{x \circ k_1}$, entonces $\pi_A \circ \binom{k_2}{y \circ k_2} = \pi_A \circ \binom{k_1}{x \circ k_1}$, esto implica que $k_1 = k_2 := e$. Por otro lado $\pi_B \circ \binom{k_2}{y \circ k_2} = \pi_B \circ \binom{k_1}{x \circ k_1}$, por lo tanto $y \circ e = x \circ e$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "i"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\ & K \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"] & A \arrow[d, "\binom{1}{x}"] \\ & A \arrow[r, "\binom{1}{y}"'] & A \times B \end{tikzcd}$$

Sea $f : X \to A$ tal que $x \circ f = y \circ f$, como K es la intersección de $\binom{1}{x}$ y $\binom{1}{y}$ entonces existe un único morfismo $i : K \to X$ tal que $f = e \circ i$. Por lo tanto e es el igualador de y y x.

■

Sean $x : A \to X,\ y : B \to X$ morfismos en una categoría abeliana, denotamos al morfismo dado por la propiedad universal del conúcleo como $\langle x, y\rangle$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "x"'] & A+B \arrow[d, "\langle x,y\rangle"] & B \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[dl, "y"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Lema 2.3.3. *Sea $x : A \to B$, entonces el morfismo $\langle x, 1_B\rangle : A \times B \to B$ es un epimorfismo.*

Demostración: Sean $f, g : B \to C$ tales que $f\circ\langle x, 1_B\rangle = g\circ\langle x, 1_B\rangle$. Entonces $\langle f \circ x, f\rangle\circ i_B = \langle g \circ x, g\rangle\circ i_B$ implica que $f = g$, así $\langle x, id_B\rangle$ es un epimorfismo.

■

Teorema 2.3.4. *En categorías abelianas, todo par de morfismos $x : A \to B$ y $y : A \to B$ tienen coigualador*

Demostración: Sean $x, y : A \to B$, por el lema anterior $\langle x, 1_B\rangle$ y $\langle y, 1_B\rangle$ son epimorfismos. Sea (P, p_1, p_2) su intersección, es decir $p_1\circ\langle y, 1_B\rangle = p_2\circ\langle x, 1_B\rangle$, entonces $\langle p_1 \circ y, p_1\rangle \circ i_B = \langle p_2 \circ x, p_2\rangle \circ i_B$ por lo tanto $p_1 = p_2 := p$. Así $\langle p_1 \circ y, p_1\rangle \circ i_A = \langle p_2 \circ x, p_2\rangle \circ i_A \Rightarrow p \circ y = p \circ x$, es decir p coiguala a x y y.

Supongamos que hay un morfismo $q : B \to Q$ tal que $q\circ y = q\circ x$, entonces $q \circ \langle y, 1_B\rangle = q \circ \langle x, 1_B\rangle$. Como P es la intersección de $\langle x, 1_B\rangle$ y $\langle y, 1_B\rangle$, existe un único $r : P \to Q$ tal que $r\circ p = q$. Por lo tanto p es el coigualador de x y y.

■

2.4. Producto y coproducto fibrado

Definición 2.4.1. *Un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "a"'] & C \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado *(Pullback) si para todo par de morfismos* $x_1 : X \to A$ *y* $x_2 : X \to A$ *tales que* $a \circ x_1 = b \circ x_2$*, existe un único* $x : X \to P$ *tal que* $p_1 \circ x = x_1$ *y* $p_2 \circ x = x_2$*.*

Teorema 2.4.2. *En categorías abelianas, todo diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "y"] \\ A \arrow[r, "x"'] & C \end{tikzcd}$$

puede extenderse a un producto fibrado.

Demostración: Consideremos el diagrama I y k el igualador de $y \circ \pi_B$ y $x \circ \pi_A$. Observemos que el cuadrado II conmuta.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & B \arrow[d, "y"] \\ A \arrow[r, "x"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "\pi_B \circ k"] \arrow[d, "\pi_A \circ k"'] \arrow[dr, phantom, "II"] & B \arrow[d, "y"] \\ A \arrow[r, "x"'] & C \end{tikzcd}$$

Supongamos que existen $l_1 : L \to A$ y $l_2 : L \to B$ tales que $x \circ l_1 = y \circ l_2$. Por la propiedad universal del producto, existe un único $l : L \to A \times B$ tal que $l_1 = \pi_A \circ l$ y $l_2 = \pi_B \circ l$. Así $x \circ \pi_A \circ l = y \circ \pi_B \circ l$, es decir, l iguala los morfismos $y \circ \pi_B$ y $x \circ \pi_A$, entonces existe un único $m : L \to K$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, dashed, "m"] \arrow[drr, dashed, "l"] \arrow[drrr, bend left, "l_2"] \arrow[ddrr, bend right, "l_1"'] & & & \\
& K \arrow[r, "k"] & A \times B \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"] & B \arrow[d, "y"] \\
& & A \arrow[r, "x"] & C
\end{tikzcd}$$

■

Proposicion 2.4.3. *Si tenemos dos productos fibrados:*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "y"] \\
A \arrow[r, "x"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & B \arrow[d, "y"] \\
A \arrow[r, "x"'] & C
\end{tikzcd}$$

Entonces $P \cong Q$. De hecho, hay un único isomorfismo $r : P \to Q$ tal que $p_1 = q_1 \circ r$ y $p_2 = q_2 \circ r$.

Demostración:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "y"] \\
& A \arrow[r, "x"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed, "\beta"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\
& Q \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "q_2"'] & B \arrow[d, "y"] \\
& A \arrow[r, "x"'] & C
\end{tikzcd}$$

Sean α y β los morfismos dados por la propiedad universal del producto fibrado respectivamente. Tenemos que $\beta \circ \alpha = id_Q$ y $\alpha \circ \beta = id_P$ por lo tanto $P \cong Q$

■

Observemos que si consideramos la categoría cuyos objetos son flechas con codominio C y morfismos entre $(A \to C)$ y $(B \to C)$, de la forma $f : A \to B$ tal que $A \xrightarrow{f} B \to C = A \to C$.
El producto $(P \to C) = (A \to C) \times (B \to C)$ es el morfismo diagonal del producto fibrado.

Definición 2.4.4. *Un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "c"'] & B \arrow[d, "q_2"] \\ C \arrow[r, "q_1"'] & P \end{tikzcd}$$

es un coproducto fibrado *(Pushout) si para todo par de morfismos* $x_1 : C \to X$ *y* $x_2 : B \to X$ *tales que* $x_1 \circ c = x_2 \circ b$*, existe un único* $x : P \to X$ *tal que* $x \circ q_1 = x_1$ *y* $x \circ q_2 = x_2$

Teorema 2.4.5. *Dualmente en categorías abelianas, todo diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

puede extenderse a un coproducto fibrado de manera única (salvo isomorfismo).

Demostración: Consideremos el coproducto de C y B (dado por el axioma A1) $C \xrightarrow{i_C} C \oplus B \xleftarrow{i_B} B$. Sea d el coigualador de $i_C \circ g$ y $i_B \circ f$. Sean $x_1 : C \to X$ y $x_2 : B \to X$ tales que $x_1 \circ g = x_1 \circ f$. Por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $x : C \oplus B \to X$ tal que $x \circ i_C = x_1$ y $x \circ i_B = x_2$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "i_B"'] \arrow[rrd, bend left, "x_2"] & & \\
C \arrow[r, "i_C"] \arrow[rrrd, bend right] & C \oplus B \arrow[r, "d"] \arrow[rrd, dashed, "x"'] & D \arrow[rd, dashed, "r"] & \\
& & & X
\end{tikzcd}$$

Así $x \circ i_B \circ f = x_2 \circ f = x_1 \circ g = x \circ i_C \circ g$, por lo tanto x coiguala a $i_C \circ g$ y $i_B \circ f$. Por la propiedad del coigualador, existe un único $r : D \to X$ tal que $x = r \circ d$.

■

2.5. La imagen y la coimagen de un morfismo

Definición 2.5.1. *La* **imagen** *de un morfismo $f : A \to B$ es el menor subobjeto $\lfloor s \rfloor$ de B, tal que f se factoriza a través del morfismo s. Es decir:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted] & B \\
S \arrow[ru, "s"'] &
\end{tikzcd}
\quad \textit{tal que si} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted] & B \\
S' \arrow[ru, "s'"'] &
\end{tikzcd}
\quad \textit{entonces} \quad
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "s"] \arrow[d, dotted, "\exists"'] & B \\
S' \arrow[ru, "s'"'] &
\end{tikzcd}$$

Denotaremos al morfismo como $im(f)$ y al objeto S como $Im(f)$

Definición 2.5.2. *Un monomorfismo $s : S \rightarrowtail B$* **permite** *$f : A \to B$ si existe $a : A \to S$ tal que $s \circ a = f$.*

Definición 2.5.3. *Un epimorfismo $b : B \twoheadrightarrow F$* **anula** *$f : A \to B$ si $b \circ f = \hat{0}$*

Lema 2.5.4. *Un subobjeto permite $f : A \to B$ si y sólo si su conúcleo anula a f.*

Demostración: $[\Rightarrow]$ $s : S \rightarrowtail B$ permite $A \xrightarrow{f} B$. Es decir, hay un morfismo $a : A \to S$ tal que $f = s \circ a$. Sea $r = cok(s)$, entonces $r \circ f = r \circ s \circ a = \hat{0} \circ a = \hat{0}$ por lo tanto r anula a f.

$[\Leftarrow]$ Sea $s : S \rightarrowtail B$ tal que $r = cok(s)$ anula a f, es decir $r \circ f = \hat{0}$. Como s es un monomorfismo $s = ker(r)$, entonces por la propiedad universal del núcleo, existe un único $a : A \to S$ tal que $f = s \circ a$. Por lo tanto, s permite a f.

■

Teorema 2.5.5. *En categorías abelianas, un morfismo $f : A \to B$ tiene imagen y es igual a $ker\ cok(f)$.*

Demostración: Sea $c = cok(f)$, c es el mayor objeto cociente que anula a f y $ker(c)$ es el menor subobjeto que permite a f, por lo tanto $ker cok(f) = im(f)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, dotted, "a"'] & & B \arrow[r, "c"] & C \\
Ker\ Cok(f) \arrow[urr, "s"'] & & &
\end{tikzcd}$$

■

Teorema 2.5.6. *Para categorías abelianas, $f : A \to B$ es un epimorfismo si y sólo si $Im(f) = B$ si y sólo si $Cok(f) = 0$*

Demostración: $[\Leftarrow]$ supondremos que $Cok(f) = 0$.

Del teorema anterior tenemos que $Im(f) = Ker\ Cok(f) = B$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\hat{0}"] & \hat{0} \\
B \arrow[ur, "id_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Sean u, v tales que $u \circ f = v \circ f$, sea q el igualador de u y v. Como q es monomorfismo, por el axioma A3 $q = ker(w)$ para algún w. Pero f también iguala a u y v, entonces existe un único m tal que $f = q \circ m$.

Consideremos $cok(f)$. Tenemos que $w \circ f = w \circ q \circ m = \hat{0} \circ m = \hat{0}$, entonces existe un único n tal que $w = n \circ cok(f)$. Como $cok(f) = \hat{0}$ entonces $w = \hat{o}$ de donde $q = ker(\hat{0})$, por lo tanto q es también epimorfismo y dado que $u \circ q = v \circ q$ entonces $u = v$. Por lo tanto f es un epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[d, two heads, "q"'] & \\
A \arrow[ur, "m"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, "k"] & C \\
 & W & 0 \arrow[l, "n"]
\end{tikzcd}$$

[$\Rightarrow$] Supongamos que f es un epimorfismo. Sea $h = cok(f)$, entonces $h \circ f = \hat{0} = \hat{0} \circ f$ implica que $h = \hat{0}$ por lo tanto $Cok(f) = 0$ y así $Im(f) = Ker\ Cok(f) = Ker(0) = B$.

■

Corolario 2.5.7. *$x : A \to Im(x)$ es un epimorfismo.*

Definición 2.5.8. *La* **coimagen** *de $f : A \to B$ es el menor objeto cociente $\lceil c \rceil$ de A a través del cual se factoriza f.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "c"'] & B \\
 & C \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
\quad \textit{tal que si} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "d"'] & D \\
 & D \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
\quad \textit{entonces} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "c"] \arrow[dr, two heads, "d"'] & C \\
 & D \arrow[u, dotted, "\exists"']
\end{tikzcd}$$

Definición 2.5.9. $q : A \twoheadrightarrow Q$ permite *a* $f : A \to B$ *si hay un morfismo* $a : Q \to B$ *tal que* $f = a \circ q$.

Definición 2.5.10. $p : P \twoheadrightarrow A$ anula *a* $f : A \to B$ *si* $f \circ p = \hat{0}$.

Lema 2.5.11. *Un morfismo q permite a $f : A \to B$ si y sólo si $ker(q)$ anula f*

Demostración: $[\Rightarrow]$ Sea $r = ker(q)$, entonces $f \circ r = a \circ q \circ r = a \circ \hat{0} = \hat{0}$, por lo tanto r anula a f.

$[\Leftarrow]$ Sea $r = ker(q)$, r anula a f, es decir, $f \circ r = \hat{0}$, entonces $q = cok(r)$ y por la propiedad universal del conúcleo existe un único $a : Q \to B$ tal que $f = a \circ q$.

■

Teorema 2.5.12. *En categorías abelianas* $coim(f) = cok\, ker(f)$

Demostración: Sea $f : A \to B$. Por el lema anterior $k = ker(f)$ anula a f si y sólo si $c = cok\ ker(f)$ permite a f. Veamos que c es el menor objeto cociente con esa propiedad.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dotted, "m"'] \arrow[dr, tail, "d'"] & & \\
K \arrow[r, tail, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, two heads, "d"] & B \\
& C & D \arrow[l, dotted, "z"'] \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}$$

Sea $d : A \twoheadrightarrow D$ que factoriza a f y $d' = ker(d)$, entonces $f \circ d' = a \circ d \circ d' = a \circ \hat{0} = \hat{0}$, entonces existe un único $m : M \to K$ tal que $d' = k \circ m$. Ahora como $c \circ d' = c \circ k \circ m = \hat{0} \circ m = \hat{0}$ y $d = cok(d')$, existe un único $z : D \to C$ tal que $c = z \circ d$. Por lo tanto $c < d$ y así $cok\ ker(f) = coim(f)$.

■

Teorema 2.5.13. $f : A \to B$ *es monomorfismo si y sólo si* $Coim(f) = A$ *si y sólo si* $Ker(f) = 0$.

Demostración: [$\Leftarrow$] $Ker(f) = 0$, entonces $Coim(f) = Cok\ Ker(f) = Cok(\hat{0}) = A$.

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[dr, "k"] & \bullet \arrow[l, dotted, "n"'] \arrow[d, "w"] & \\
W \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & B \\
& Q \arrow[ur, dotted, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Sean u y v tales que $f \circ u = f \circ v$ y sea q su coigualador, entonces existe un único morfismo $m : Q \to B$ tal que $f = m \circ q$. Por otro lado, como q es un epimorfismo tenemos que $q = cok(w)$ para algún w. Entonces $f \circ w = m \circ q \circ w = m \circ \hat{0} = \hat{0}$. Si $k = ker(f)$, existe un único n tal que $w = k \circ n$. Pero $k = \hat{0}$ entonces $q = cok(0) = id_A$, así q es un isomorfismo, en particular monomorfismo, entonces $q \circ u = q \circ v$ implica que $u = v$. Por lo tanto f es un monomorfismo.

■

Teorema 2.5.14. *Sea $p : A \twoheadrightarrow I'$ una coimagen de $f : A \to B$, entonces $i : I' \to B$ es monomorfismo.*

Demostración: Probaremos que $Ker(i) = 0$.

Sea $x : X \to I'$ tal que $i \circ x = \hat{0}$ y $q = cok(x)$, existe un único $r : Q \to B$ tal que $i = r \circ q$.

Dado que $q \circ p$ es un epimorfismo, entonces existe h tal que $q \circ p = cok(h)$. Entonces $f \circ h = r \circ (q \circ p) \circ h = r \circ \hat{0} = \hat{0}$, si $k = ker(f)$, existe un único morfismo $l : H \to K$ tal que $h = k \circ l$. Y $p \circ h = p \circ (k \circ l) = \hat{0}$ entonces hay un único $s : Q \to I$ tal que $p = s \circ (q \circ p)$.

Como p es epimorfismo, $s \circ q = id_{I'}$ entonces q es monomorfismo, como $q \circ x = \hat{0}$ entonces $x = \hat{0}$ en particular $ker(i) = \hat{0}$. Por lo tanto i es monomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dl, dotted, "l"'] \arrow[d, "h"] & \\
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "p"'] & B \\
X \arrow[r, "x"] & I' \arrow[ur, "i"] \arrow[r, shift left, "q"] & Q \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[u, dotted, "r"']
\end{tikzcd}$$

■

Teorema 2.5.15. *Sea $s : I \rightarrowtail B$ la imagen de $f : A \to B$, entonces $\alpha : A \to I$ tal que $f = s \circ \alpha$ es un epimorfismo.*

Demostración: Probemos que $cok(\alpha) = \hat{0}$

Sea x tal que $x \circ \alpha = \hat{0}$ y $q = ker(x)$. Sabemos que por la propiedad universal del núcleo que existe un único morfismo $r : A \to Q$ tal que $\alpha = q \circ r$.

La composición $s \circ q$ es un monomorfismo, por el axioma A3 hay un morfismo h tal que $s \circ q = ker(h)$. Entonces $h \circ f = h \circ s \circ \alpha = h \circ s \circ q \circ r = \hat{0} \circ r = \hat{0}$. Si $C = Cok(f)$, existe una única $l : C \to H$ tal que $l \circ c = h$.

Ahora $h \circ s = l \circ c \circ s = \hat{0}$ (pues $s = ker\ cok(f) = ker(c)$), entonces existe un único $t : S \to Q$ tal que $s = s \circ q \circ t$, entonces $i_s = q \circ t$ dado que s es monomorfismo. Por lo tanto q es epimorfismo, así $x \circ q = \hat{0}$ implica que $x = \hat{0}$, en particular $cok(\alpha) = \hat{0}$ en particular α es un epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, shift left, "q"] & S \arrow[l, shift left, "t"] \arrow[r, "x"] \arrow[d, tail, "s"] & X \\
A \arrow[u, dotted, "r"] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, two heads, "c"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[dl, dotted, "l"] \\
 & H &
\end{tikzcd}$$

■

Teorema de factorización única 2.5.16. *En categorías abelianas, sea $f : A \to B$ con $f = j \circ i$ donde $i : A \to I$ es epimorfismo y $j : I \to B$ es monomorfismo, entonces i es una coimagen de f y para cualquier otra factorización $f = s \circ p$ donde p sea epimorfismo y s monomorfismo, hay un único isomorfismo $\alpha : I \to I'$ tal que $p = \alpha \circ i$, $j = s \circ \alpha$.*

Demostración:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "i"'] \arrow[ddr, bend right, two heads, "p"'] & & B \\
& I \arrow[ur, tail, "j"'] \arrow[d, dotted, tail, two heads, "k"] & \\
& Coim(f) \arrow[uur, bend right, tail, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Sea $A \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} B$ una factorízación de $f : A \to B$ como en las hipótesis. Sea $f = s \circ p$ la factorización dada por la coimagen de f, es decir $s = coim(f)$ es el menor objeto cociente que permite a f, entonces existe un epimorfismo $k : I \twoheadrightarrow Coim(f)$ tal que $k \circ i = p$. Entonces tenemos que $j \circ i = f = s \circ p = s \circ k \circ i$, dado que i es epimorfismo, entonces $j = s \circ k$ y como j es monomorfismo, entonces k también es monomorfismo. Por lo tanto k es un isomorfismo entre i y la coimagen de f.

∎

2.6. Sucesiones Exactas

Teorema 2.6.1. *En categorías abelianas, para* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $im(f) = ker(g)$

b) $coim(g) = cok(f)$

c) Si $k = ker(g),\ h = cok(f)$ *entonces* $g \circ f = \hat{0}$ *y* $h \circ k = \hat{0}$

Demostración: $a) \Rightarrow c)$ Sea $i = im(f) = ker(g) = k$, consideramos la factorización de f a través de su imagen $f = i \circ \alpha$. Tenemos que $g \circ f = g \circ i \circ \alpha = g \circ k \circ \alpha = \hat{0} \circ \alpha = \hat{0}$. Sea $h = cok(f)$, entonces $k = im(f) = ker\ cok(f) = ker(h)$ por lo tanto $h \circ k = \hat{0}$.

$c) \Rightarrow a)$ Supongamos que $g \circ f = \hat{0}$ y $h \circ k = \hat{0}$. Sea $i = ker\ cok(f) = ker(h)$ la imagen de f, por la propiedad universal del núcleo, existe un único monomorfismo ϵ tal que $k = i \circ \epsilon$ entonces $k \leq i$. Como $g \circ f = \hat{0}$ existe un único $\beta : A \to Ker(f)$ tal que $f = k \circ \beta$, es decir, f se factoriza a través de k. Pero i es el menor subobjeto que permite a f, entonces hay un $\gamma : Im(f) \to Ker(g)$ tal que $i = k \circ \gamma$ entonces $i \leq k$ por lo tanto $im(f) = ker(g)$.

$b) \Rightarrow c)$ Tenemos que $cok(f) = coim(g)$. Si $k = ker(g)$ y $h = cok(f)$ entonces $h = cok(f) = coim(g) = cok\ ker(g) = cok(k)$, sea ϕ el morfismo que nos da la factorización de g a través de su coimagen $g = \phi \circ h$, entonces $g \circ f = \phi \circ h \circ f = \phi \circ \hat{0} = \hat{0}$. Por otro lado $h = cok(k)$ así $h \circ k = \hat{0}$.

$c) \Rightarrow b)$ $g \circ f = \hat{0}$ y $h \circ k = \hat{0}$, veamos que $coim(g) = cok(f)$. Denotamos $c = coim(g)$, sabemos que existe δ tal que $h = c \circ \delta$, por lo tanto $h \leq c$. Ahora como $g \circ f = \hat{0}$, existe un único $\delta : Cok(f) \to Coim(g)$ tal que $g = \delta \circ h$. Es decir, g se factoriza a través de h, como c es el menor objeto cociente que permite a g, hay un morfismo $\varphi : Cok(f) \to Coim(g)$ tal que $c = \varphi \circ h$ entonces $c \leq h$. Concluimos que $coim(g) = cok(f)$.

■

Definición 2.6.2. *Decimos que una sucesión* $\cdots \to A_{i-1} \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots$ *es* exacta *si para toda* i, $im(A_{i-1} \to A_i) = ker(A_i \to A_{i+1})$

Proposición 2.6.3. *En categorías abelianas:*

i) $0 \to K \xrightarrow{f} A$ *es exacta si y sólo si* f *es un monomorfismo.*

ii) $0 \to K \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B$ *es exacta si y sólo si* $f = ker(g)$*.*

iii) $B \xrightarrow{h} F \to 0$ *es exacta si y sólo si* h *es epimorfismo.*

iv) $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} F \to 0$ *es exacta si y sólo si* $h = cok(g)$*.*

v) $0 \to A \xrightarrow{g} B \to 0$ *es exacta si y sólo si* g *es isomorfismo.*

vi) $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{1_B} B$ *es exacta si y sólo si* $g = \hat{0}$*.*

vii) $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ *es exacta si y sólo si* $g = cok(f)$ *y* f *es monomorfismo.*

Demostración:

i) Supongamos que $0 \to K \xrightarrow{f} A$ es exacta, entonces $im(\hat{0}) = ker(f)$. Sea $i : Im(\hat{0}) \to K$. Sabemos que p tal que $\hat{0} = i \circ p$ es un epimorfismo, por lo tanto $ker(f) = i = \hat{0}$. Recíprocamente, sea f monomorfismo, tenemos que $ker(f) = \hat{0}$, entonces $im(\hat{0}) = ker\ cok(\hat{0}) = ker(1_K) = \hat{0} = ker(f)$.

ii) $0 \to K \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B$ es exacta, entonces $im(\hat{0}) = ker(f)$ y $im(f) = ker(g)$. Por *i)* tenemos que f es monomorfismo, entonces $f = im(f) = ker\ cok(f) = ker(g)$. Ahora, $f = ker(g)$ implica que $cok(f) = cok\ ker(g) = coim(g)$, por el teorema anterior $im(f) = ker(g)$.

iii) Si $B \xrightarrow{h} F \to 0$ es exacta si y sólo si $im(h) = ker(\hat{0}) = id_F$ si y sólo si h es epimorfismo.

iv) Supongamos que $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} F \to 0$ es exacta, es decir $im(g) = ker(h)$ y $im(h) = ker(\hat{0})$, por *iii)*, h es un epimorfismo, así $cok(g) = coim(h) = h$. Recíprocamente si $h = cok(g)$ entonces es un epimorfismo, por *iii)* $B \xrightarrow{h} F \to 0$ es exacta. Ahora observemos que $ker(h) = ker\ cok(g) = im(g)$ por lo tanto $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} F \to 0$ es exacta.

v) $0 \to A \xrightarrow{g} B \to 0$ es exacta si y sólo si, por *i)* y *iii)*, g es monomorfismo y epimorfismo, por lo tanto isomorfismo.

vi) Sea $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{1_B} B$ exacta, entonces $im(g) = ker(id_B) = \hat{0}$, es decir $g = \hat{0} \circ \alpha$ por lo que $g = \hat{0}$. Si $g = \hat{0}$ entonces $im(g) = \hat{0} = ker(id_B)$ por lo tanto $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{1_B} B$ es exacta.

vii) Supongamos que $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es exacta. Entonces $im(f) = ker(g)$. Por *i)*, f es monomorfismo y g es epimorfismo entonces $cok(f) = cok\ ker(g) = g$. Por otro lado si suponemos que f es monomorfismo y $g = cok(f)$ tenemos que $im(f) = ker\ cok(g) = ker(g)$ por lo tanto $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es exacta.

■

2.7. La estructura aditiva de las categorías abelianas

Teorema 2.7.1. *En categorías abelianas, la sucesión:*

$$0 \to A \xrightarrow{\iota_A} A + B \xrightarrow{\langle 0,1 \rangle} B \to 0$$

es exacta.

Demostración: Veamos primero que ι_A es monomorfismo. Sean u y v tales que $\iota_A \circ u = \iota_A \circ v$. Tenemos que $u = \langle 1,0 \rangle \circ \iota_A \circ u = \langle 1,0 \rangle \circ \iota_A \circ v = v$ por lo tanto ι_A es un monomorfismo y por el lema (2.3.3), $\langle 0,1 \rangle$ es un epimorfismo. Resta probar que $ker(\langle 0,1\rangle) = im(\iota_A)$. Notemos que $\langle 0,1\rangle \circ \iota_A = \hat{0}$ por definición de $\langle 0,1\rangle$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "\hat{0}"'] & A+B \arrow[d, "\langle 0,1\rangle"] & B \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[dl, "id_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Sea $\langle x,y\rangle : A+B \to X$ tal que $\langle x,y\rangle \circ \iota_A = \hat{0}$, entonces $x=0$ y existe $y : B \to X$ tal que $\langle 0,y\rangle = y \circ \langle 0,1\rangle$, así $\langle 0,1\rangle = cok(\iota_A)$, lo que implica $im(\iota_A) = ker\ cok(\iota_A) = ker(\langle 0,1\rangle)$. Por lo tanto la sucesión $0 \to A \stackrel{\iota_A}{\to} A+B \stackrel{\langle 0,1\rangle}{\to} B \to 0$ es exacta.

■

Teorema 2.7.2. *En categorías abelianas, la sucesión*

$$0 \to A \stackrel{\binom{1}{0}}{\to} A \times B \stackrel{\pi_B}{\to} B \to 0$$

es exacta.

Demostración: Del lema 2.3.1 tenemos que $\binom{1}{0}$ es un monomorfismo. Veamos que π_B es epimorfismo. Sean u y v tales que $u \circ \pi_B = v \circ \pi_B$. Entonces $u \circ \pi_b \circ \langle 0,1\rangle = u \circ id_B = v \circ \pi_B \circ \langle 0,1\rangle = v \circ id_B$, por lo tanto $u = v$. Así π_B es un epimorfismo.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\hat{0}"'] \arrow[d, "\langle 0,1\rangle"'] \arrow[dr, "id_B"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \end{tikzcd}$$

Ahora probemos que $cok(\binom{1}{0}) = coim(\pi_B)$, para esto basta demostrar que $ker(\pi_B) = \binom{1}{0}$. Como el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[d, "\binom{1}{0}"'] \arrow[dr, "\hat{0}"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces $\pi_B \circ \binom{1}{0} = \hat{0}$. Sea $\binom{x}{y} : X \to A \times B$ tal que $\pi_B \circ \binom{x}{y} = \hat{0}$, entonces $\pi_B \circ y = \hat{0} \Rightarrow y = \hat{0}$. Por lo tanto x es el único morfismo tal que $\binom{x}{0} = \binom{1}{0} \circ x$ por lo tanto $\binom{1}{0} = ker(\pi_B)$, entonces $coim(\pi_B) = cok\ ker(\pi_B) = cok(\binom{1}{0})$.

■

Teorema 2.7.3. *Dualmente, tenemos que en categorías abelianas las siguientes sucesiones son exactas:*

$i)$ $0 \to B \overset{\binom{0}{1}}{\to} A \times B \overset{\pi_A}{\to} A \to 0.$

$ii)$ $0 \to B \overset{\iota_B}{\to} A + B \overset{\langle 1,0 \rangle}{\to} A \to 0.$

Proposición 2.7.4. *La intersección de* $A \overset{\iota_A}{\to} A \times B$ *y* $B \overset{\iota_B}{\to} A + B$ *es cero.*

Demostración: Sabemos que $cok(\iota_A) \circ \iota_B = \langle 0, 1 \rangle \circ \iota_B = id_B$, y de la construcción de la intersección de dos subobjetos (teorema 2.2.2) tenemos que $ker(\langle 0, 1 \rangle \circ \iota_B) = ker(id_B) = \hat{0}$. Por lo tanto $\iota_A \circ \iota_B = \hat{0}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "ker(id_B)"] \arrow[d, dotted] & B \arrow[d, "\iota_B"] \arrow[dr, dotted, "id_B"] & \\ A \arrow[r, "\iota_A"] & A + B \arrow[r, "\langle 0,1 \rangle"] & B \end{tikzcd}$$

■

Proposición 2.7.5. *La intersección de los objetos cociente* $A \times B \overset{\pi_A}{\to} A$ *y* $A \times B \overset{\pi_B}{\to} B$ *es cero.*

Demostración: Sabemos que $\pi_A \circ \binom{1}{0} = id_A$, entonces $\pi_A \cap \pi_B = cok(id_A) = \hat{0}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[dr, "id_A"'] & A \times B \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"] & B \arrow[d, dotted] \\
& A \arrow[r, "\hat{0}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

■

Dada una suma $A_1 + \cdots + A_n$ y un producto $B_1 \times \cdots \times B_m$ finitos, un morfismo entre ellos está representado por una matriz $X \in \mathbb{M}_{m\times n}$ donde

$X_{i,j} = A_j \xrightarrow{\iota_j} A_1 + \cdots + A_n \xrightarrow{X} B_1 \times \cdots \times B_m \xrightarrow{\pi_i} B_i$.

Teorema 2.7.6. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : A_1 + A_2 \longrightarrow A_1 \times A_2$ *es un isomorfismo.*

Demostración: Sea $k = ker\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Por el teorema 2.7.1 la sucesión

$$0 \to A_1 \xrightarrow{\iota_{A_1}} A_1 + A_2 \xrightarrow{\langle 0,1\rangle} A_2 \to 0$$

es exacta, es decir $\iota_{A_1} = ker\,\langle 0, 1\rangle$.

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[d, "k"] & \\
& A_1 + A_2 \arrow[dl, "\langle 1,0\rangle"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\langle 0,1\rangle"] & \\
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & A_2
\end{tikzcd}$$

Por otro lado $\hat{0} = \pi_2 \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ k = \langle 0, 1\rangle \circ k$, entonces existe un único α tal que $k = \iota_{A_1} \circ \alpha$, con esto $k \leq \iota_{A_1}$. Análogamente, de la sucesión exacta $0 \to A_2 \xrightarrow{\iota_{A_2}} A_1 + A_2 \xrightarrow{\langle 1,0\rangle} A_2 \to 0$ tenemos que $\pi_1 \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ k = \langle 0, 1\rangle \circ k = \langle 1, 0\rangle \circ k = 0$, entonces existe β tal que $k = \iota_{A_1} \circ \beta$ con lo que $k \leq \iota_{A_2}$. Por lo tanto $k \leq \iota_{A_1} \cap \iota_{A_2} = \hat{0}$ así que $k = \hat{0}$.

Ahora si consideramos $c = cok\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, como $0 \to A_2 \overset{\binom{0}{1}}{\to} A_1 \times A_2 \overset{\pi_{A_1}}{\to} A_1 \to 0$ es exacta, existe un único γ tal que $c = \gamma \circ \pi_{A_1}$, es decir $c \leq \pi_{A_1}$. Como $0 \to A_1 \overset{\binom{1}{0}}{\to} A_1 \times A_2 \overset{\pi_{A_2}}{\to} A_2 \to 0$ es exacta y $\iota_{A_1} \circ \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \circ c = \binom{1}{0} \circ c$, entonces existe δ tal que $c = \delta \circ \pi_{A_2}$, así $c \leq \iota_{A_2}$, por lo tanto $c \leq \iota_{A_1} \cap \iota_{A_2} = \hat{0}$, en consecuencia $c = \hat{0}$. Por lo tanto $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ es un isomorfismo, es decir $A_1 + A_2 \cong A_1 \times A_2$.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\iota_{A_1}"] \arrow[dr, "\binom{1}{0}"'] & A_1 + A_2 \arrow[d] & A_2 \arrow[l, "\iota_{A_2}"'] \arrow[dl, "\binom{0}{1}"] \\
& A_1 \times A_2 \arrow[d, "c"] & \\
& C &
\end{tikzcd}$$

■

Como consecuencia del teorema anterior, podemos considerar los morfismos $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$ como las proyecciones; $\binom{1}{0}$ y $\binom{0}{1}$ como las inclusiones; y denotaremos al objeto como $A_1 \oplus A_2$ y en adelante nos referiremos a él como la *suma directa* de A_1 y A_2. Para posteriores definiciones, denotamos los morfismos $\delta = \binom{1}{1} : A \to A \oplus A$ y $\sigma = \langle 1, 1\rangle : A \oplus A \to A$.

Definición 2.7.7. *Dados dos morfismos $x, y : A \to B$, definimos*

i) $x +_L y = \langle x, y\rangle \circ \delta$.

ii) $x +_R y = \sigma \circ \binom{x}{y}$.

Proposición 2.7.8. *Sean $\hat{0}$, $x : A \to B$, entonces*

1. $\hat{0} +_L x = x = x +_L \hat{0}$.

2. $\hat{0} +_R x = x = x +_R \hat{0}$.

Demostración:

1. $0 +_L x = \langle 0, x\rangle \circ \binom{1}{1} = \langle 0, x\rangle \circ \iota_2 \circ \pi_2 \circ \binom{1}{1} = x \circ id_A = x$. Por otro lado $x +_L 0 = \langle x, 0\rangle \circ \binom{1}{1} = \langle x, 0\rangle \circ \iota_1 \circ \pi_2 \circ \binom{1}{1} = x \circ id_A = x$.

2. $\hat{0} +_R x = \langle 1, 1\rangle \circ \binom{0}{x} = \langle 1, 1\rangle \circ \iota_2 \circ \pi_2 \circ \binom{0}{x} = id_B \circ x = x$
$x +_R \hat{0} = \langle 1, 1\rangle \circ \binom{0}{x} = \langle 1, 1\rangle \circ \iota_1 \circ \pi_1 \circ \binom{x}{0} = id_B \circ x = x$.

■

Proposición 2.7.9. *Dados $u : B \to C$, $z : C \to A$ y un par de morfismos $x, y : A \to B$, tenemos que*

i) $u \circ x +_L u \circ y = u \circ (x +_L y)$.

ii) $x \circ z +_R y \circ z = (x +_R y) \circ z$.

Demostración:

i) $u \circ (x +_L y) = u \circ \left(\langle x, y\rangle \circ \binom{1}{1}\right) = \langle u \circ x, u \circ y\rangle \circ \binom{1}{1} = u \circ x +_L u \circ y$.

ii) $(x +_R y) \circ z = \left(\langle 1, 1\rangle \circ \binom{x}{y}\right) \circ z = \langle 1, 1\rangle \circ \binom{x \circ z}{y \circ z} = (x \circ z +_R y \circ z)$.

■

Observación 2.7.10. *Sean $w, x, y, z : A \to B$, entonces*

$$\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \langle w, x\rangle \\ \langle y, z\rangle \end{pmatrix}$$

Demostración: Recordemos que $X = \left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)$ es la matriz dada por los morfismos de la forma

$$f_{i,j} = \pi_\iota \circ X \circ \iota_j : A_j \to B_i$$

Es decir, el morfismo X hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, dotted, "w"'] \arrow[drr, dotted, "y"' near end] & A \oplus A \arrow[d, "X"] & A \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, dotted, "z"] \arrow[dll, dotted, "x" near end] \\
B & B \oplus B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Para el par de morfismos $w, x : A \to B$, existe un único $\langle w, x\rangle : A \oplus A \to B$ que hace conmutar el triángulo de la izquierda en el diagrama de abajo. Análogamente para $y, z : A \to B$ hay un único $\langle y, z\rangle : A \oplus A \to B$ que hace conmutar el triángulo de la derecha.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, dotted, "w"'] \arrow[drr, dotted, "y"' near end] & A \oplus A \arrow[d, dashed] \arrow[dl, dashed, "\langle w,x\rangle"'] \arrow[dr, dashed, "\langle y,z\rangle"] & A \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, dotted, "z"] \arrow[dll, dotted, "x" near end] \\
B & B \oplus B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ahora tenemos que $\langle w, x\rangle, \langle y, z\rangle$ son morfismos que entran en cada una de las componentes de $B \oplus B$, entonces por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo $\binom{\langle w,x\rangle}{\langle y,z\rangle}$ que hace conmutar el diagrama. Por lo tanto $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \binom{\langle w,x\rangle}{\langle y,z\rangle}$.

Dualmente podemos considerar los morfismos $\binom{w}{y}$ y $\binom{x}{z}$ que salen de los sumandos de $A \oplus A$. Por la propiedad universal del coproducto, tenemos un único morfismo $\left\langle \binom{w}{y}, \binom{x}{z} \right\rangle$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, dotted, "w"'] \arrow[drr, dotted, "y"' near end] \arrow[dr, dashed, "\binom{w}{y}"'] & A \oplus A \arrow[d, dashed] & A \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, dotted, "z"] \arrow[dll, dotted, "x" near end] \arrow[dl, dashed, "\binom{x}{z}"] \\
B & B \oplus B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Concluimos que $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \left\langle \binom{w}{y}, \binom{x}{z} \right\rangle$.

∎

Teorema 2.7.11. *$+_L$ y $+_R$ son la misma operación binaria y es asociativa y conmutativa.*

Demostración: Calculemos $\sigma \circ \binom{w\ x}{y\ z} \circ \delta$.

Por una parte $\left[\sigma \circ \binom{\langle w,x \rangle}{\langle y,z \rangle}\right] \circ \delta = [\langle w,x \rangle +_R \langle y,z \rangle] \circ \delta = \langle w,x \rangle \circ \delta +_R \langle y,z \rangle \circ \delta = (w +_L x) +_R (y +_L z)$. Por otro lado $\sigma \circ \left[\left\langle \binom{w}{y}, \binom{x}{z} \right\rangle \circ \delta\right] = \sigma \circ \left[\binom{w}{y} +_L \binom{x}{z}\right] = \sigma \circ \binom{w}{y} +_L \sigma \circ \binom{x}{z} = (w +_R y) +_L (x +_R z)$. Por lo tanto $(w +_L x) +_R (y +_L z) = (w +_R y) +_L (x +_R z)$.

Si $x = y = 0$ tenemos que $\left(w +_L \hat{0}\right) +_R \left(\hat{0} +_L z\right) = \left(w +_R \hat{0}\right) +_L \left(\hat{0} +_R z\right)$ entonces $w +_R z = w +_L z$. Es decir $+_R$ y $+_L$ son la misma operación binaria. Por lo tanto $(w + x) + (y + z) = (w + y) + (x + z)$. Ahora, si considersmos el caso en el que $y = \hat{0}$, tenemos que $(w + x) + z = w + (x + z)$. Por lo tanto $+$ es una operación asociativa. Finalmente si tenemos $w = z = \hat{0}$, entonces $x + y = y + x$ por lo tanto $+$ es conmutativa.

■

Del teroema anterior (2.7.11) y la proposición 2.7.8 podemos concluir que la clase de morfismos en una categoría abeliana con la suma y el morfismo cero tiene estructura de monoide conmutativo. En las siguientes observaciones probaremos las reglas usales de operaciones de matrices.

Observación 2.7.12. *Sean $a, b : A \to B$, $x, y : B \to C$ en una categoría abeliana. entonces*

i) $\binom{a}{b} = \binom{a}{0} + \binom{0}{b}$

ii) $\langle x, y \rangle = \langle x, 0 \rangle + \langle 0, y \rangle$

iii) $\langle x, 0 \rangle \circ \binom{a}{0} = x \circ a$

iv) $\langle x, y \rangle \circ \binom{a}{b} = x \circ a + y \circ b$

Demostración:

$i)$ Recordemos que $\binom{a}{0}+\binom{0}{b} = \left\langle\binom{a}{0}, \binom{0}{b}\right\rangle \circ \delta$ y que $p_1 \circ \binom{a}{b} = a$ y $p_2 \circ \binom{a}{b} = b$.
Por otro lado: $p_1 \circ \left\langle\binom{a}{0}, \binom{0}{b}\right\rangle \circ \delta = p_1 \circ \binom{\langle a,0\rangle}{\langle 0,b\rangle} \circ \delta = \langle a, 0\rangle \circ \delta = a+0 = a$ y $p_2 \circ \left\langle\binom{a}{0}, \binom{0}{b}\right\rangle \circ \delta = p_2 \circ \binom{\langle a,0\rangle}{\langle 0,b\rangle} \circ \delta = \langle 0, b\rangle \circ \delta = 0+b = b$.
Por lo tanto $\binom{a}{b} = \binom{a}{0} + \binom{0}{b}$.

$ii)$ Análogamente, queremos probar que el morfismo $\langle x, 0\rangle + \langle 0, y\rangle = \sigma \circ \binom{\langle x,0\rangle}{\langle 0,y\rangle}$ antecedido por las inclusiones coincide con $\langle x, y\rangle \circ \iota_1 = x$ y $\langle x, y\rangle \circ \iota_2 = y$. Calculemos $\sigma \circ \binom{\langle x,0\rangle}{\langle 0,y\rangle} \circ \iota_1 = \sigma \circ \left\langle\binom{x}{0}, \binom{0}{y}\right\rangle \circ \iota_1 = \sigma \circ \binom{x}{0} = x+0 = x$.
Por otro lado, $\sigma \circ \binom{\langle x,0\rangle}{\langle 0,y\rangle} \circ \iota_2 = \sigma \circ \left\langle\binom{a}{0}, \binom{0}{b}\right\rangle \circ \iota_2 = \sigma \circ \binom{0}{y} = 0+y = y$.
Por lo tanto $\langle x, y\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle 0, y\rangle$.

$iii)$ $\langle x, 0\rangle \circ \binom{a}{0} = \langle x, 0\rangle \circ \binom{1}{1} \circ \langle 1, 1\rangle \circ \binom{a}{0} = (x+0) \circ (a+0) = x \circ a$.

$iv)$ $\langle x, y\rangle \circ \binom{a}{b} = \langle x, y\rangle \circ \left[\binom{a}{0} + \binom{0}{b}\right] = \langle x, y\rangle \circ \binom{a}{0} + \langle x, y\rangle \circ \binom{0}{b} = \langle x, 0\rangle \circ \binom{a}{0} + \langle 0, y\rangle \circ \binom{a}{0} + \langle x, 0\rangle \circ \binom{0}{b} + \langle 0, y\rangle \circ \binom{0}{b} = xa + yb$.

∎

Corolario 2.7.13. *Consideremos los siguientes morfismos*

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A_1 \oplus A_2 \to B_1 \oplus B_2$$
$$g = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} : B_1 \oplus B_2 \to C_1 \oplus C_2$$

La composición $g \circ f$ coincide con el producto de matrices

Demostración: Observemos que la matriz $g \circ f$ queda determinada por morfismos $x_{i,j} : A_j \to C_i$ tales que $x_{i,j} = p_i \circ (g \circ f) \circ \iota_j$. Entonces:

$$x_{11} = \langle 1, 0\rangle \circ \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \binom{1}{0} = \langle w, x\rangle \circ \binom{a}{c} = w \circ a + x \circ c.$$

$$x_{12} = \langle 1, 0\rangle \circ \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \binom{0}{1} = \langle w, x\rangle \circ \binom{b}{d} = w \circ b + x \circ d.$$

$$x_{21} = \langle 0, 1\rangle \circ \binom{w\ x}{y\ z} \circ \binom{a\ b}{c\ d} \circ \binom{1}{0} = \langle y, z\rangle \circ \binom{a}{c} = y \circ a + z \circ c.$$

$$x_{22} = \langle 0, 1\rangle \circ \binom{w\ x}{y\ z} \circ \binom{a\ b}{c\ d} \circ \binom{0}{1} = \langle y, z\rangle \circ \binom{b}{d} = y \circ b + z \circ d.$$

Así $g \circ f = \begin{pmatrix} w \circ a + x \circ c & w \circ b + x \circ d \\ y \circ a + z \circ c & y \circ b + z \circ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

■

Teorema 2.7.14. *Sean A y B objetos en una categoría abeliana, entonces el conjunto de morfismos de A en B con la operación $+$ es un grupo abeliano.*

Demostración: Sea $x : A \to B$. Consideremos el morfismo

$$\begin{pmatrix} 1\ 0 \\ x\ 1 \end{pmatrix} : A \oplus B \to A \oplus B$$

y su núcleo $k = \binom{k_1}{k_2}$. Tenemos que $\hat{0} = \binom{1\ 0}{x\ 1} \circ \binom{k_1}{k_2} = \binom{k_1}{x \circ k_1 + k_2}$ con lo que $k_1 = \hat{0}$ y $k_2 = \hat{0}$, entonces $k = \hat{0}$. Por lo tanto $\binom{1\ 0}{x\ 1}$ es un monomorfismo.

Sea $\langle c_1, c_2\rangle = cok\binom{1\ 0}{x\ 1}$, entonces $\hat{0} = \langle c_1, c_2\rangle \circ \binom{1\ 0}{x\ 1} = \langle c_1 + c_2 \circ x, c_2\rangle$. Entonces $c_1 = \hat{0}, c_2 = \hat{0}$, por lo tanto $\binom{1\ 0}{x\ 1}$ es un epimorfismo. Hemos probado que $\binom{1\ 0}{x\ 1}$ es un isomorfismo, es decir, existe $\binom{a\ b}{c\ d}$ tal que $\binom{1\ 0}{x\ 1} \circ \binom{a\ b}{c\ d} = \binom{a\ \ b}{ax+c\ bx+d} = \binom{1\ 0}{0\ 1} = id_{A\oplus B}$. De donde tenemos que $a = 1$, $b = \hat{0}$ y como $bx + d = 1$ entonces $d = 1$ y $ax + c = 0$ lo que implica que $x + c = 0$. Por lo tanto la matriz $\binom{1\ 0}{c\ 1}$ es el inverso de $\binom{1\ 0}{x\ 1}$. Esto nos asegura la existencia del morfismo c al que llamaremos el inverso de x y lo denotaremos $-x$.

■

Del teorema anterior tenemos que en categorías abelianas el conjunto de morifismos entre cualesquiera dos objetos C y C' con la suma y el morfismo cero, es decir $(Hom(C, C'), \oplus, \hat{0})$ forman un grupo abeliano.

Definición 2.7.15. *Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es* ***preaditiva*** *si cada conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ es un grupo abeliano.*

Observemos que en tal caso, la composición

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(C', C'') \times Hom_{\mathcal{C}}(C, C') \to Hom_{\mathcal{C}}(C, C'')$$

es un morfismo de grupos en ambas variables.

2.8. Suma directa

Definición 2.8.1. *Un conjunto de cuatro morfismos $u_1 : A_1 \to S$, $u_2 : A_2 \to S$, $p_1 : S \to A_1$ y $p_2 : S \to A_2$ es un* sistema de suma directa *si S es una suma directa de $A_1 \oplus A_2$ y $u_1 = \binom{1}{0}$, $u_2 = \binom{0}{1}$, $p_1 = \langle 1, 0 \rangle$ y $p_2 = \langle 0, 1 \rangle$.*

Teorema 2.8.2. *Si $u_1 : A_1 \to S$, $u_2 : A_2 \to S$, $p_1 : S \to A_1$ y $p_2 : S \to A_2$ son tales que:*

$i)$ $p_1 \circ u_1 = id_{A_1}$

$ii)$ $p_2 \circ u_1 = \hat{0}$

$iii)$ $p_2 \circ u_2 = id_{A_2}$

$iv)$ $p_1 \circ u_2 = \hat{0}$

$v)$ $u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2 = id_S$

entonces u_1, u_2, p_1 y p_2 forman un sistema de suma direta.

Demostración: Sean $x_1 : X \to A_2$ y $x_2 : X \to A_2$. Definimos $x : X \to S$ como $x = u_1 \circ x_1 + u2 \circ x_2$.

Así $p_1 \circ x = p_1 \circ u_1 \circ x_1 + p_1 \circ u_2 \circ x_2 = id_{A_1} \circ x_1 + \hat{0} \circ x_2 = x_1$ y $p_2 \circ x = p_2 \circ u_1 \circ x_1 + p_2 \circ u_2 \circ x_2 = \hat{0} \circ x_1 + id_{A_2} \circ x_2 = x_2$. Veamos que x es el único morfismo que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, shift left, "u_1"] & S \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift left, "p_2"'] & A_2 \arrow[l, shift left, "u_2"'] \\
& X \arrow[ul, "x_1"] \arrow[u, "x"] \arrow[ur, "x_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Sea w tal que $p_1 \circ w = x_1$ y $p_2 \circ w = x_2$. Tenemos que $x = id_s \circ x = (u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2) \circ x = u_1 \circ p_1 \circ x + u_2 \circ p_2 \circ x = u_1 \circ x_1 + u_2 \circ x_2 = u_1 \circ p_1 \circ w + u_2 \circ p_2 \circ w = (u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2) \circ w = id_s \circ w = w$. Por lo tanto S es el producto de A_1 y A_2.

Ahora si tenemos $y_1 : A_1 \to Y$ y $y_2 : A_2 \to Y$ y definimos $y = y_1 \circ p_1 + y_2 \circ p_2$ tenemos que $y \circ u_1 = y_1 \circ p_1 \circ u_1 + y_2 \circ p_2 \circ u_2 = y_1 \circ id_{A_1} + y_2 \circ \hat{0} = y$ y $y \circ u_2 = y_1 \circ p_1 \circ u_2 + y_2 \circ p_2 \circ u_2 = y_1 \circ \hat{0} + y_2 \circ id_{A_2} = y_2$. Probemos la unicidad de y. Sea $z : S \to Y$ con la propiedad de que $z \circ u_1 = y_1$ y $z \circ u_2 = y_2$. $z = z \circ id_s = z \circ (u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2) = z \circ u_1 \circ p_1 + z \circ u_2 \circ p_2 = y_1 \circ p_1 + y_2 \circ p_2 = y$. Por lo tanto S es la suma directa de A_1 y A_2.

■

Teorema 2.8.3. *Sean* $u_1 : A_1 \to S$*,* $u_2 : A_2 \to S$*,* $p_1 : S \to A_1$ *y* $p_2 : S \to A_2$ *tales que* $p_1 \circ u_1 = id_{A_1}$*,* $p_2 \circ u_1 = \hat{0}$*,* $p_2 \circ u_2 = id_{A_2}$*,* $p_1 \circ u_2 = \hat{0}$ *y las sucesiones:*

$$A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_2} A_2$$

$$A_2 \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_1} A_1$$

son exactas, entonces u_1, u_2, p_1 *y* p_2 *forman un sistema de suma directa.*

Demostración: Consideremos x_1, x_2 y $x = u_1 \circ x_1 + u_2 \circ x_2$ como en el teorema anterior. Veamos que el siguente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "u_1"] & S & A_2 \arrow[l, "u_2"'] \\
& X \arrow[ul, "x_1"] \arrow[u, "x"] \arrow[ur, "x_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$p_1 \circ x = p_1 \circ (u_1 \circ x_1 + u2 \circ x_2) = p_1 \circ u_1 \circ x_1 + p_1 \circ u_2 \circ x_1 = id_{A_1} \circ x_1 + \hat{0} \circ x_1 = x_1$. Además $p_2 \circ x = p_2 \circ (u_1 \circ x_1 + u2 \circ x_2) = p_2 \circ u_1 \circ x_1 + p_2 \circ u_2 \circ x_2 = \hat{0} \circ x_1 + id_{A_2} \circ x_2 = x_2$. Veamos que x es el único morfismo que hace conmutar el diagrama. Sea x' tal que $p_1 \circ x' = x_1$ y $p_2 \circ x' = x_2$. Consideremos el morfismo $-x'$. Sea $z = x - x'$. Como $id_{A_1} = p_1 \circ u_1$ es un monomorfismo, entonces u_1 es un monomorfismo. Entonces tenemos que la sucesión $0 \to A_1 \stackrel{u_1}{\to} S \stackrel{p_2}{\to} A_2$ es exacta. Como $p_2 \circ z = p_2 \circ x - p_2 \circ x' = x_2 - x_2 = 0$, por la propiedad universal del núcleo existe un único morfismo $\nu : X \to A_1$ tal que $z = u_1 \circ \nu$. Pero $\nu = id_{A_1} \circ \nu = (p_1 \circ u_1) \circ \nu = p_1 \circ z = p_1 \circ x - p_1 \circ x' = x_1 - x_1 = \hat{0}$ implica que $z = \hat{0}$, por lo tanto S es el producto de A_1 y A_2.

Dualmente demostraremos que S es el coproducto de A_1 y A_2. Sean $y_1 : A_1 \to Y$ y $y_2 : A_2 \to Y$. Definamos $y = y_1 \circ p_1 + y_2 \circ p_2$. Veamos que y hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "y_1"'] & S \arrow[d, "y"] & A_2 \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "y_2"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

$y \circ u_2 = (y_1 \circ p_1 + y_2 \circ p_2) \circ u_2 = y_1 \circ p_1 \circ u_2 + y_2 \circ p_2 \circ u_2 = \hat{0} + y_2 \circ id_{A_2} = y_2$. Por otra parte $y \circ u_1 = (y_1 \circ p_1 + y_2 \circ p_2) \circ u_1 = y_1 \circ p_1 \circ u_1 + y_2 \circ p_2 \circ u_1 = y_1 \circ id_{A_1} + \hat{0} = y_1$. Supongamos ahora que hay un morfismo y' que también hace conmutar el diagrama, definamos $w = y - y'$. Observemos que p_1 es epimorfismo, y como la sucesión $A_2 \stackrel{u_2}{\to} S \stackrel{p_1}{\to} A_1$ es exacta y $w \circ u_2 = \hat{0}$, existe un único morfismo $\eta : A_1 \to Y$ tal que $w = \eta \circ p_1$. Entonces $\eta = \eta \circ id_{A_1} = \eta \circ p_1 \circ u_1 = w \circ u_1 = y \circ u_1 - y' \circ u_1 = y_1 - y_1 = \hat{0} \Rightarrow z = \hat{0}$ así z es única. Por lo tanto S es la suma directa de A_1 y A_2.

■

2.9. Teoremas del Producto y Coproducto Fibrado

Proposición 2.9.1. *En categorías abelianas, dados dos morfismos $x, y : A \to B$, si $z = x - y$ entonces $ker(z)$ es el igualador de x y y.*

Demostración: Sea $k = ker(z)$, entonces $\hat{0} = (x - y) \circ k = x \circ k - y \circ k \Rightarrow x \circ k = y \circ k$, es decir k iguala a los dos morfismos, entonces existe un único monomorfismo α tal que si e es el igualador de x y y, $e = \alpha \circ k$. Por otro lado, como e es el igualador $x \circ e = y \circ e$ entonces $0 = x \circ e - y \circ e = z \circ e$ por la propiedad universal del núcleo existe un único monomorfismo β tal que $k = e \circ \beta$.

■

Teorema 2.9.2. *Sea*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "e"] & C \end{tikzcd}$$

un producto fibrado. Entonces:

(i) *Si e es monomorfismo entonces b es monomorfismo.*

(ii) *Sea k el núcleo de b. Entonces $a \circ k$ es el núcleo de e.*

(iii) *Como caso particular, b es monomorfismo si y sólo si e lo es.*

Demostración:

(i) Sea $x : X \to P$ con la propiedad $b \circ x = \hat{0}$. Por la conmutatividad del cuadrado tenemos que $e \circ a \circ x = f \circ b \circ x = \hat{0}$, como e es monomorfismo entonces $a \circ x = \hat{0}$. De la unicidad dada por la propiedad del producto fibrado tenemos que $x = \hat{0}$. En particular $ker(b) = \hat{0}$.

(ii) Sea $k = ker(b)$, entonces $e \circ a \circ k = f \circ b \circ k = e \circ \hat{0} = \hat{0}$. Sea m tal que $e \circ m = \hat{0}$, entonces $\hat{0} : M \to B$ hace conmutar el cuadrado:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\hat{0}"] \arrow[d, "m"] & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "e"] & C \end{tikzcd}$$

Como P es el producto fibrado de e y f, existe un único $p : M \to P$ tal que $a \circ p = m$ y $b \circ p = \hat{0}$. Como $k = ker(b)$, existe un único morfismo $l : M \to K$ tal que $p = k \circ l$, así $m = a \circ p = a \circ k \circ l$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[drrr, bend left, "\hat{0}"] \arrow[drr, dotted, "p"] \arrow[dr, dotted, "l"'] \arrow[ddrr, bend right, "m"'] & & & \\ & K \arrow[r, "k"] & P \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "f"'] \\ & & A \arrow[r, "e"] & C \end{tikzcd}$$

Unicidad: Sea $s : M \to K$ tal que $m = a \circ k \circ s$. Quisieramos ver que $s = l$. Notemos que $b \circ k \circ s = \hat{0}$, como $k = ker(b)$, existe un único morfismo φ tal que $\varphi \circ k = s \circ k$. Por lo tanto $a \circ k = ker(e)$.

(iii) En el caso particular en el que b es monomorfismo, $b \circ k = \hat{0} \Rightarrow k = \hat{0}$, entonces $a \circ k = \hat{0} = ker(e)$ por lo tanto e es un monomorfismo.

$\blacksquare$

Teorema 2.9.3. *En categorías abelianas, si*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & B \arrow[d, "e"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, entonces:

(i) *Si f es un epimorfismo, entonces a es un epimortismo*

(ii) *Si $q = cok(e)$ entonces $q \circ f = cok(b)$*

(iii) *Si además e es un epimorfismo entonces b es también un epimorfismo.*

Demostración:

(i) Por la construcción del producto fibrado de f y e (Teorema 2.4.2), tenemos que k es el igualador de los morfismos $f \circ \pi_A$ y $e \circ \pi_B$. Por 2.9.1 $k = ker(f \circ \pi_A - e \circ \pi_B)$. Denotemos $\mu = f \circ \pi_A - e \circ \pi_B$. Como $f = \mu \circ \iota_A$ es un epimorfimso, entonces μ es epimorfismo, así $\mu = cok(k)$. Sea $x : B \to X$ tal que $\hat{0} = x \circ a$ entonces $\hat{0} = x \circ a = x \circ \pi_B \circ k$ entonces existe un único $\eta : C \to X$ tal que $\eta \circ \mu = x \circ \pi_B$. Entonces $\eta \circ f = \eta \circ \mu \circ \iota_A = x \circ \pi_B \circ \iota_A = x \circ \hat{0}$. Como f es epimorfismo $\eta = \hat{0}$ lo que implica que $x \circ \pi_B = \hat{0}$, por lo tanto $x = \hat{0}$ en particular $cok(a) = \hat{0}$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "a"] \arrow[dd, "b"'] \arrow[dr, dotted, "k"] & & B \arrow[dl, shift left, "\iota_B"] \arrow[dd, "e"] \arrow[dddr, bend left, "x"] & \\
& A \oplus B \arrow[ur, shift left, "\pi_B"] \arrow[dl, shift left, "\pi_A"] \arrow[dr, dotted, "\mu"] & & \\
A \arrow[ur, shift left, "\iota_A"] \arrow[rr, "f"'] & & C \arrow[dr, dotted, "\eta"] & \\
& & & X
\end{tikzcd}$$

(ii) Sea x tal que $x \circ b = \hat{0}$, entonces $x \circ b = \hat{0} \circ a$. Como el cuadrado es un coproducto fibrado, existe un único morfismo φ tal que $\varphi \circ e = \hat{0}$ y $\varphi \circ f = x$. Por la propiedad universal del conucleo, existe un único ν tal que $\varphi = \nu \circ q$. Entonces $\varphi \circ f = \nu \circ q \circ f = x$, así $q \circ f = cok(b)$. La unicidad de ν se sigue de la unicidad que nos da la propiedad universal.

(iii) En particular si e es epimorfismo, $cok(e) = \hat{0}$ implica que $cok(b) = \hat{0}$ con lo que b es un epimorfismo.

■

Proposición 2.9.4. *Consideremos el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "e"] \\ B \arrow[r, "f"'] & P \end{tikzcd}$$

y la sucesión

$$C \xrightarrow{\binom{a}{b}} A \oplus B \xrightarrow{\langle e,-f\rangle} P$$

Entonces:

$i)$ $\langle e, -f\rangle \circ \binom{a}{b} = \hat{0}$ *si y sólo si el cuadrado comnuta.*

$ii)$ $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\binom{a}{b}} A \oplus B \xrightarrow{\langle e,-f\rangle} P$ *es exacta si y sólo si el cuadrado es un producto fibrado.*

$iii)$ $C \xrightarrow{\binom{a}{b}} A \oplus B \xrightarrow{\langle e,-f\rangle} P \longrightarrow 0$ *es exacta si y sólo si el cuadrado es un coproducto fibrado.*

$iv)$ $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\binom{a}{b}} A \oplus B \xrightarrow{\langle e,-f\rangle} P \longrightarrow 0$ *es exacta si y sólo si el cuadrado es un producto fibrado y un coproducto fibrado.*

Demostración:

$i)$ Tenemos que $\langle e, -f\rangle \circ \binom{a}{b} = \hat{0}$, si y sólo si $e \circ a - f \circ b = 0 \Rightarrow e \circ a = f \circ b$ es decir, el cuadrado conmuta.

$ii)$ $[\Rightarrow]$ $\quad 0 \to C \xrightarrow{\binom{a}{b}} A \oplus B \xrightarrow{\langle e,-f\rangle} P$ es exacta. Como $\langle e, -f\rangle \circ \binom{a}{b} = \hat{0}$ tenemos que el cuadrado conmuta. Como $\binom{a}{b}$ es monomorfismo, entonces $\binom{a}{b} = ker\, \langle e, -f\rangle$. Sea $\binom{x}{y} : X \to A \oplus B$ tal que $\langle e, -f\rangle \circ \binom{x}{y} = \hat{0}$, entonces existe un único $\alpha : X \to C$ tal que $\binom{x}{y} = \binom{a}{b} \circ \alpha$, esto implica que $x = a \circ \alpha$ y que $y = b \circ \alpha$. Por lo tanto el cuadrado es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
& C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "e"] \\
& B \arrow[r, "-f"] & P
\end{tikzcd}$$

[$\Leftarrow$] Supongamos que el cuadrado es un producto fibrado. Como conmuta tenemos que $\langle e, -f\rangle \circ \binom{a}{b}$. Si $\binom{x}{y} = ker\,\langle e, -f\rangle$, entonces existe un único β tal que $\binom{x}{y} \circ \beta = \binom{a}{b}$. Por otro lado consideremos $\binom{i}{j} = im\binom{a}{b}$, i.e. el menor subobjeto que factoriza a $\binom{a}{b}$. $\binom{i}{j} \circ \delta = \binom{a}{b}$. Entonces existe γ tal que $\binom{i}{j} = \binom{x}{y} \circ \gamma$. Por lo tanto $\binom{i}{j} \leq \binom{x}{y}$.

Como $\binom{x}{y} = ker\,\langle e, -f\rangle$ tenemos que $e \circ x - f \circ y = \hat{0}$ entonces $e \circ x = f \circ y$, como el cuadrado es un producto fibrado, existe un único α tal que $x = a \circ \alpha$ y $y = b \circ \alpha$. Así $\binom{x}{y} = \binom{a \circ \alpha}{b \circ \alpha} = \binom{a}{b} \circ \alpha = \binom{i}{j} \circ \delta \circ \alpha$ entonces $\binom{x}{y} \leq \binom{i}{j}$. Por lo tanto $im\binom{a}{b} = ker\,\langle e, -f\rangle$. Finalmente como $\binom{x}{y} \cong \binom{a}{b}$ tenemos que $\binom{a}{b}$ es monomorfismo. por lo tanto la sucesión

$$0 \to A \oplus B \to P$$

es exacta.

$iii)$ [$\Rightarrow$] $C \xrightarrow{\binom{a}{b}} A \oplus B \xrightarrow{\langle e, -f\rangle} P \to 0$ es exacta. Por $i)$ el cuadrado conmuta y $\langle e, -f\rangle = coim\,\langle e, -f\rangle = cok\binom{a}{b}$, entonces para todo $\langle x, y\rangle$ tal que $\langle x, y\rangle \circ \binom{a}{b} = \hat{0}$ existe un único morfismo α tal que $\alpha \circ \langle e, -f\rangle = \langle x, y\rangle$. Así $\alpha \circ e = x$ y $\alpha \circ -f = y$. Por lo tanto el cuadrado es un coproducto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "e"] \arrow[ddr, bend left, "x"] & \\
B \arrow[r, "-f"'] \arrow[drr, bend right, "y"'] & P \arrow[dr, dotted, "\alpha"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

[$\Leftarrow$] Supongamos que el cuadrado es un coproducto fibrado. Como es conmutativo, tenemos que $\langle e, -f\rangle \circ \binom{a}{b} = 0$. Sea $\langle i, j\rangle = coim\,\langle e, -f\rangle$ y $\langle e, -f\rangle = \alpha \circ \langle i, j\rangle$ la mínima factorización. Sea $\langle p, q\rangle = cok\binom{a}{b}$, existe un único β tal que $\langle e, -f\rangle = \langle p, q\rangle \circ \beta$. Como $\langle i, j\rangle = coim\,\langle e, -f\rangle$ entonces $\langle i, j\rangle \leq \langle p, q\rangle$.

Por otro lado $\langle p, q\rangle \circ \binom{a}{b} = \hat{0} \Rightarrow p \circ a = -q \circ b$. Como el cuadrado es un coproducto firado, existe un único γ tal que $\gamma \circ e = p$ y $\gamma \circ f = -q$. Así $\langle p, q\rangle = \gamma \circ \langle e, -f\rangle$, de donde $\langle p, q\rangle = \gamma\alpha \circ \langle i, j\rangle$ es decir $\langle p, q\rangle \leq \langle i, j\rangle$. Por lo tanto $cok\binom{a}{b} = coim\,\langle e, -f\rangle$ y como $\langle e, -f\rangle \cong \langle p, q\rangle$ entonces $\langle e, -f\rangle$ es un epimorfismo. $\therefore C \overset{\binom{a}{b}}{\to} A \oplus B \overset{\langle e, -f\rangle}{\longrightarrow} P \to 0$ es exacta.

$iv)$ De $i)$ y $ii)$ se sigue que $0 \to C \overset{\binom{a}{b}}{\to} A \oplus B \overset{\langle e, -f\rangle}{\longrightarrow} P \to 0$ es exacta si y sólo si el cuadrado es un producto fibrado y un coproducto fibrado.

■

2.10. Lemas Clásicos

Lema 2.10.1. *Consideremos el siguiente digrama conmutativo tal que la sucesión de abajo es exacta.*

$$\begin{tikzcd} & B_{11} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & B_{12} \arrow[d, "\gamma"] & \\ 0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r, "\delta"] & B_{22} \arrow[r, "\epsilon"] & B_{23} \end{tikzcd}$$

Entonces el cuadrado es un producto fibrado si y sólo si la sucesión
$0 \longrightarrow B_{11} \xrightarrow{\alpha} B_{12} \xrightarrow{\epsilon\circ\gamma} B_{23}$ *es exacta.*

Demostración: $[\Rightarrow]$ Supongamos que el cuadrado es un producto fibrado. Como $\delta = im(\delta) = ker(\epsilon)$, tenemos que $(\epsilon\circ\gamma)\circ\alpha = \epsilon\circ(\gamma\circ\alpha) = \epsilon\circ\delta\circ\beta = \hat{0}$. Veamos que $\alpha = ker(\epsilon\circ\gamma)$. Sea x tal que $(\epsilon\circ\gamma)\circ x = \hat{0}$. Como $\delta = ker(\epsilon)$ existe un único z tal que $\delta\circ z = \gamma\circ x$, es decir, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "z"'] & B_{1,2} \arrow[d, "\gamma"'] \\ B_{2,1} \arrow[r, "\delta"] & B_{2,2} \end{tikzcd}$$

Entonces existe un único y tal que $z = \beta\circ y$ y $x = \alpha\circ y$. Ahora supongamos que hay otro morfismo w tal que $x = \alpha\circ w$, entonces $\delta\circ z = \gamma\circ x = \gamma\circ\alpha\circ w = \delta\circ\beta\circ w$ pero δ es un monomorfismo, hemos probado que $z = \beta\circ w$. Por la propiedad del producto fibrado, $w = y$. Por lo tanto $\alpha = ker(\epsilon\circ\gamma)$.

$[\Leftarrow]$ $0 \to B_{11} \overset{\alpha}{\to} B_{12} \overset{\epsilon\circ\gamma}{\to} B_{23}$ es exacta. Sean x y z morfismos tales que $\delta\circ z = \gamma\circ x$. Entonces $\epsilon\circ\gamma\circ x = \epsilon\circ\delta\circ z = \hat{0}$, como $\alpha = ker(\epsilon\circ\gamma)$ existe un único y tal que $x = \alpha\circ y$. Por otro lado $\delta\circ\beta\circ y = \gamma\circ\alpha\circ y = \gamma\circ x = \delta\circ z$ implica que $\beta\circ y = z$ pues δ es monomorfismo. Por lo tanto el cuadrado es un producto fibrado.

■

Lema 2.10.2. *Dualmente en el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} B_{2,3} \arrow[r, "\epsilon"] & B_{2,2} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"] & B_{2,1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\ & B_{1,2} \arrow[r, "\alpha"] & B_{11} & \end{tikzcd}$$

En el cual la sucesión de arriba es exacta, tenemos que el cuadrado es un coproducto fibrado si y sólo si la sucesión $B_{2,3} \xrightarrow{\gamma\circ\epsilon} B_{1,2} \xrightarrow{\alpha} B_{1,1} \longrightarrow 0$ *es exacta.*

Demostración: $[\Rightarrow]$ Supongamos que el cuadrado es un coproducto fibrado. Queremos ver que $\alpha = cok(\gamma \circ \epsilon)$. Sea $x : B_{12} \to X$ tal que $x \circ \gamma \circ \epsilon = \hat{0}$. Como $cok(\epsilon) = coim(\delta) = \delta$ existe un único $y : B_{21} \to X$ tal que $y \circ \delta = x \circ \gamma$. De la propiedad del coproducto fibrado tenemos la existencia de un único $z : B_{11} \to X$ tal que $z \circ \beta = y$ y $z \circ \alpha = x$.

Ahora supongamos que hay un morfismo $w : B_{11} \to x$ tal que $w \circ \alpha = x$. Entonces $y \circ \delta = x \circ y = w \circ \alpha \circ \gamma = w \circ \beta \circ \delta$, como δ es un epimorfismo $y = w \circ \beta$. Por la unicidad del morfismo z dado por el coproducto fibrado, tenemos que $w = z$.

$[\Leftarrow]$ La sucesión $B_{23} \overset{\gamma\circ\epsilon}{\to} B_{12} \overset{\alpha}{\to} B_{11} \to 0$ es exacta. Sea $x : B_{12} \to X$ tal que $x \circ (\gamma \circ \epsilon) = \hat{0}$, entonces existe un único morfismo $z : B_{11} \to X$ tal que $z \circ \alpha = x$. Por otro lado $\delta = cok(\epsilon)$ y $(x \circ \gamma) \circ \epsilon = \hat{0}$, entonces existe un único morfismo $y : B_{21} \to X$ dado por la propiedad universal del conúcleo tal que $y \circ \delta = x \circ \gamma$. Entonces $y \circ \delta = x \circ \gamma = z \circ \alpha \circ \gamma = z \circ \beta \circ \delta$ implica que $y = z \circ \beta$ pues δ es un epimorfismo.

■

Lema 2.10.3. *Si* $\alpha : B_2 \to B_3$ *es un monomorfismo, entonces* $ker(\beta) = ker(\alpha \circ \beta)$ *en la sucesión*

$$B_1 \xrightarrow{\beta} B_2 \xrightarrow{\alpha} B_3$$

Demostración: Sea $k = ker(\beta)$, entonces $(\alpha \circ \beta) \circ k = \hat{0}$. Sea x tal que $(\alpha \circ \beta) \circ x = \hat{0}$, como α es un monomorfismo, tenemos que $\beta \circ x = \hat{0}$. Entonces existe un único morfismo y tal que $k \circ y = x$ por lo tanto $k = ker(\alpha \circ \beta)$.

■

Lema 2.10.4. *Si* $\alpha : B_1 \to B_2$ *es un epimorfismo, entonces* $cok(\beta) = cok(\beta \circ \alpha)$ *en la sucesión*

$$B_1 \xrightarrow{\alpha} B_2 \xrightarrow{\beta} B_3$$

Demostración: Sea $c = cok(\beta)$ y $d = cok(\alpha \circ \beta)$. Entonces $c \circ (\beta \circ \alpha) = \hat{0} \circ \alpha = \hat{0}$, por la propiedad universal del conúcleo de $\beta \circ \alpha$ existe un único $x : cok(\alpha \circ \beta) \to Cok(\beta)$ tal que $c = x \circ \delta$. Por otro lado $d \circ \beta \circ \alpha = \hat{0}$. Como α es epimorfismo, tenemos que $d \circ \beta = \hat{0}$, por la propiedad universal del conúcleo de β existe un único y tal que $d = y \circ c$. Por lo tanto $c \cong d$.

■

Lema 2.10.5. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo. Entonces la sucesión* $0 \to B_0 \xrightarrow{\gamma} B_1 \xrightarrow{\epsilon} B_3$ *es exacta si y sólo si la sucesión* $0 \to B_2 \xrightarrow{\alpha} B_3$ *es exacta.*

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_0 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "id_{B_0}"'] & B_1 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "id_{B_1}"'] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_0 \arrow[r, "\gamma"] & B_1 \arrow[r, "\epsilon"] & B_3 &
\end{tikzcd}$$

Demostración: [$\Leftarrow$] Supongamos que la sucesión $0 \to B_2 \xrightarrow{\alpha} B_3$ es exacta, es decir, que α es un monomorfismo. Por el lema 2.10.4 $ker(\beta) = ker(\alpha \circ \beta)$ entonces $\gamma = im(\gamma) = ker(\beta) = ker(\alpha \circ \beta) = ker(\epsilon)$ así la sucesión $0 \to B_0 \xrightarrow{\gamma} B_1 \xrightarrow{\epsilon} B_3$ es exacta.

[$\Rightarrow$] La sucesión $0 \to B_0 \xrightarrow{\gamma} B_1 \xrightarrow{\epsilon} B_3$ es exacta. Sea $k = ker(\alpha)$. Consideremos el producto fibrado de β y k.

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & K \arrow[d, "k"'] & \\
0 \arrow[r] & B_0 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "id_{B_0}"'] & B_1 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "id_{B_1}"'] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_0 \arrow[r, "\gamma"] & B_1 \arrow[r, "\epsilon"] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como β es epimorfismo, el teorema 2.9.3 nos dice que p_2 es un epimorfismo. Basta probar que $k \circ P_2 = \hat{0}$. Notemos que $\epsilon \circ (id_{B_1} \circ p_1) = \alpha \circ \beta \circ p_1 = \alpha \circ k \circ p_2 = \hat{0} \circ p_2 = \hat{0}$. Como $\gamma = ker(\epsilon)$ exise un único morfismo $\eta : P \to B_2$ tal que $\gamma \circ \eta = p_1$. Tenemos que $k \circ p_2 = \beta \circ p_1 = \beta \circ (\gamma \circ \eta) = \beta \circ \gamma \circ \eta = \hat{0} \circ \eta = \hat{0}$. Como p_2 es epimorfismo, $k = ker(\alpha) = 0$

■

Lema 2.10.6. *Dualmente. La sucesión $B_3 \xrightarrow{\epsilon} B_1 \xrightarrow{\gamma} B_0 \to 0$ es exacta si y sólo si la sucesión $B_3 \xrightarrow{\alpha} B_2 \to 0$ es exacta.*

$$\begin{tikzcd}
 & B_3 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & B_1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & B_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & B_1 \arrow[r, "\gamma"] & B_0 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Demostración: [$\Leftarrow$] α es un epimorfismo, entonces por el lema 2.10.4 tenemos que $\gamma = coim(\gamma) = cok(\beta) = cok(\beta \circ \alpha)$ por lo tanto $B_3 \xrightarrow{\epsilon} B_1 \xrightarrow{\gamma} B_0 \to 0$ es exacta.

$[\Rightarrow]$ Supongamos que la sucesión $B_3 \xrightarrow{\epsilon} B_1 \xrightarrow{\gamma} B_0 \to 0$ es exacta. Sea $c = cok(\alpha)$ y (P, p_1, p_2) el coproducto fibrado de β y c, es decir $p_1 \circ \beta = p_2 \circ c$. Como β es monomorfismo, tenemos que p_2 es monomorfismo. Como $\gamma = cok(\epsilon)$, tenemos que $p_1 \circ id \circ \epsilon = p_1 \circ \beta \circ x = p_2 \circ c \circ \alpha = \hat{0}$ entonces existe un único $\eta : B_0 \to P$ tal que $p_1 = \eta \circ \gamma$, entonces $p_2 \circ c = p_1 \circ \beta = \eta \circ \gamma \circ \beta = \eta = \hat{0}$ por lo tanto α es un epimorfismo.

■

Lema 2.10.7. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con columnas exactas y la sucesión $0 \to B_{21} \xrightarrow{g} B_{22} \xrightarrow{g'} B_{23}$ exacta.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & B_{12} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta"'] & B_{13} \arrow[d, "\gamma"'] \\
0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B_{22} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B_{23} \\
0 \arrow[r] & B_{31} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & B_{32} & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

La sucesión $0 \to B_{11} \xrightarrow{f} B_{12} \xrightarrow{f'} B_{13}$ es exacta si y sólo si $0 \to B_{31} \xrightarrow{h} B_{32}$ es exacta. Más aún, el cuadrado I es un producto fibrado.

Demostración: La sucesión $0 \to B_{11} \xrightarrow{f} B_{12} \xrightarrow{f'} B_{13}$ es exacta si y sólo si $f = im(f) = ker(f')$. Como γ es un monomorfismo, por el lema 2.10.3 $ker(f') = ker(\gamma \circ f')$ con lo que $f = ker(\gamma \circ f')$, es decir $0 \to B_{11} \xrightarrow{f} B_{12} \xrightarrow{\gamma \circ f'} B_{23}$ es exacta. Esto ocurre si y sólo si el cuadrado I es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} & B_{11} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "I"] & B_{12} \arrow[d, "\beta"] & & \\ 0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r, "g"] & B_{22} \arrow[r, "g'"] & B_{23} & ex \end{tikzcd}$$

Simétricamente, I es un producto fibrado si y sólo si la sucesión $0 \to B_{11} \overset{\alpha}{\to} B_{21} \overset{\beta' \circ g}{\to} B_{32}$ es exacta.

$$\begin{tikzcd} & B_{11} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & B_{21} \arrow[d, "g"] & \\ 0 \arrow[r] & B_{12} \arrow[r, "\beta"] & B_{22} \arrow[r, "\beta'"] & B_{32} \end{tikzcd}$$

Si y solo si del siguiente diagrama, h es un monomorfismo.

$$\begin{tikzcd} & & & 0 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id"'] & B_{21} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "id"'] & B_{31} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 & ex \\ 0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r, "\alpha"] & B_{21} \arrow[r, "\beta' \circ g", "h \circ \alpha"'] & B_{32} & & \end{tikzcd}$$

■

Lema 2.10.8. *Si las columnas son exactas y la sucesión (*) es exacta en:*

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & & \\ & B_{32} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta'"] & B_{31} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & 0 & \\ B_{23} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\gamma"] & B_{22} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "II"] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 & (*) \\ B_{13} \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B_{12} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

Entonces la sucesión $B_{13} \xrightarrow{f'} B_{12} \xrightarrow{f} B_{11} \to 0$ *es exacta si y sólo si* $B_{32} \xrightarrow{h} B_{31} \to 0$ *es exacta y el cuadrado* II *es un coproducto fibrado.*

Demostración: La sucesión $B_{13} \xrightarrow{f'} B_{12} \xrightarrow{f} B_{11} \to 0$ es exacta si y sólo si $f = cok(f)$. Como γ es un epimorfismo, por el lema 2.10.4 $cok(f') = cok(f' \circ \gamma)$ lo que implica que $B_{23} \xrightarrow{f' \circ \gamma} B_{12} \xrightarrow{f} B_{11} \to 0$ es exacta. Por el lema 2.10.2 el cuadrado II es un coproducto fibrado

$$\begin{tikzcd}
B_{23} \arrow[r, "g'"] & B_{22} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "II"] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
& B_{12} \arrow[r, "f"] & B_{11} &
\end{tikzcd}$$

Simétricamente, II es un coproducto fibrado si y sólo si la sucesión $B_{32} \xrightarrow{\gamma \circ \beta'} B_{22} \xrightarrow{\alpha} B_{12} \to 0$ es exacta.

$$\begin{tikzcd}
B_{32} \arrow[r, "\beta'"] & B_{22} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "II"] & B_{12} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
& B_{12} \arrow[r, "\alpha"] & B_{11} &
\end{tikzcd}$$

Sí y sólo si por el lema 2.10.6 en el siguiente diagrama, h es un epimorfismo

$$\begin{tikzcd}
& B_{32} \arrow[r, "\gamma \circ \beta'"] \arrow[d] & B_{12} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{31} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & B_{12} \arrow[r, "\alpha"] & B_{11} \arrow[r] & 0 \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}$$

■

Lema 2.10.9. ***Lema del nueve.*** *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con columnas exactas y la sucesión (*) exacta.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & (i) \\
0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & B_{12} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta"'] & B_{13} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 & \\
0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B_{22} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "II"] & B_{23} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"'] & 0 & (*) \\
0 \arrow[r] & B_{31} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & B_{32} \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & B_{33} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (ii) \\
 & 0 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

La sucesión (i) es exacta si y sólo si la (ii) es exacta.

Demostración: Por el lema 2.10.9 la sucesión $0 \to B_{11} \xrightarrow{f} B_{12} \xrightarrow{f'} B_{13}$ es exacta si y sólo si h es un monomorfismo. Aplicando el lema 2.10.8 tenemos que f es un epimorfismo si y sólo si la sucesión $B_{31} \xrightarrow{h} B_{32} \xrightarrow{h'} B_{33} \to 0$ es exacta. Así (ii) es exacta si y sólo si (ii) es exacta. Más aún, el cuadrado I es un producto fibrado y II un coproducto fibrado.

∎

Observación 2.10.10. Por simetría, podemos enunciar el Lema del nueve considerando a todas las sucesiones horizontales exactas y la columna media exacta, entonces la primer columna es exacta si y sólo si la tercer columna es exacta.

Teorema 2.10.11. ***Segundo Teorema de Isomorfismo*** *Sean $\beta : B_{12} \rightarrowtail B_{22}$ y $g : B_{21} \rightarrowtail B_{22}$ monomorfismos tal que el supremo (unión) de sus imágenes es B_{22}. Entonces existe un diagrama conmutativo de la forma:*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B_{12} \arrow[r, two heads, "f'"] \arrow[d, "\beta"'] & B_{12}/B_{11} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B_{22} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B_{22}/B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{21}/B_{11} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & B_{22}/B_{12} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Demostración: Sea B_{11} el ínfimo de g y b como subobjetos de $B_{22} = B_{12} \cap B_{21}$, recordemos que el cuadrado determinado por el ínfimo coincide con el producto fibrado de g y b. Además sabemos que el producto fibrado preserva monomorfismos, así f y α resultan también monomorfismos. Consideremos ahora los conúcleos: $f' = cok(f),\ g' = cok(g),\ \alpha' = cok(\alpha)$ y $\beta' = cok(\beta)$. Con esto tenemos la existencia de h y γ dada por la propiedad universal del conúcleo de α y f respectivamente.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B_{12} \arrow[r, two heads, "f'"] \arrow[d, "\beta"'] & B_{12}/B_{11} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B_{22} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B_{22}/B_{21} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{21}/B_{11} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & B_{22}/B_{12} \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & B_{33} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Ahora estamos en la situación del lema 2.10.7, como la sucesión de arriba es exacta tenemos que h es un monomorfismo. Dualmente, de la exactitud de la primer columna, γ es también monomorfismo. Si consideramos ahora el ínfimo de los objetos cociente β' y g' y lo denotamos como B_{33}, que coincide con el coproducto fibrado, tenemos que h' y γ' son también epimorfismos. Aplicando el lema 2.10.9 y la observación 2.10.10, la sucesión horizontal de abajo y la tercer sucesión vertical son exactas.

Por la construcción del supremo de β y γ (Lema 2.2.4) tenemos que $B_{33} = B_{22}/(B_{12} \cup B_{21})$ pero por hipótesis $B_{22} = B_{12} \cup B_{21}$. Por lo tanto $B_{33} = 0$ y γ y h son isomorfismos, es decir $\frac{B_{12}}{B_{12} \cap B_{21}} \cong \frac{B_{12} \cup B_{21}}{B_{21}}$ y $\frac{B_{21}}{B_{12} \cap B_{21}} \cong \frac{B_{12} \cup B_{21}}{B_{12}}$

■

Teorema 2.10.12. ***Tercer Teorema de Isomorfismo.*** *Sean $\alpha : B_{11} \rightarrowtail B_{21}$ y $g : B_{21} \rightarrowtail B_{22}$ monomorfismos. Entonces existe un diagrama conmutativo de la forma:*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r, "1_{B_{11}}"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B_{22} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B_{22}/B_{21} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{21}/B_{11} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & B_{22}/B_{11} \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & \frac{B_{22}/B_{11}}{B_{21}/B_{11}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración: Definimos $\beta = g \circ \alpha$ y consideramos α' , g' y β' los conúcleos de α, g y β respectivamente. Observemos que $g' \circ \beta = g' \circ g \circ \alpha = \hat{0}$, es decir, el morfismo cero hace conmutar ése cuadrado. Como las sucesiones verticales son exactas, tenemos un morfismo h dado por la propiedad del conúcleo de α que por el lema 2.10.7, se trata de un monomorfismo. Además $h' \circ \beta' \circ g = h' \circ h \circ \alpha = \hat{0}$, entonces existe un único γ que cumple $\gamma \circ g' = h' \circ \beta'$. Notemos que γ es un epimorfismo puesto que la composición con $\gamma \circ g'$ lo es. De la observación 2.10.10 se sigue que la columna de la izquierda es exacta. Es decir, $\frac{B_{22}/B_{11}}{B_{21}/B_{11}} \cong \frac{B_{22}}{B_{21}}$

■

Teorema 2.10.13. *Sea $g : B_{21} \to B_{22}$ tal que existe $s : B_{22} \to B_{21}$ tal que $s \circ g = 1$. Entonces si la sucesión $0 \to B_{21} \xrightarrow{g} B_{22} \xrightarrow{g'} B_{23} \to 0$ es exacta, existe un morfismo $s' : B_{23} \to B_{22}$ tal que $g' \circ s' = 1$ y B_{22} junto con g, s, g' y s' forman un sistema de suma directa.*

Demostración:

Consideremos los morfismos $1_{B_{22}}, g \circ s : B_{22} \to B_{22}$ junto con su diferencia. Entonces $(1_{B_{22}} - g \circ s) \circ g = 1_{B_{22}} \circ g - g \circ s \circ g = g - g \circ (s \circ g) = g - g = \hat{0}$. Como $g' = cok(g)$, existe un único $s' : B_{23} \to B_{22}$ tal que $s' \circ g' = 1_{B_{22}} - g \circ s$, de donde

$$s' \circ g' + g \circ s = 1_{B_{22}} \qquad (*)$$

Además $g' \circ g = \hat{0}$ por la exactitud de la sucesión. Por otro lado $(g' \circ s') \circ g' = g' \circ (s' \circ g') = g' \circ (1_{B_{22}} - g \circ s) = g' \circ 1_{B_{22}} - g' \circ g \circ s = g' - \hat{0} = g'$ pero g' es un epimorfismo entonces $g' \circ s' = 1_{B_{23}}$.

Ahora por $(*)$ tenemos $g \circ s \circ s' = (1_{B_{22}} - s' \circ g') \circ s' = s' - s' \circ g' \circ s' = s' \circ s' = \hat{0}$ y como g es un monomorfismo, entonces $s \circ s' = \hat{0}$. Por lo tanto B_{22} junto con s, s', g y g' forman un sistema de suma directa.

■

Capítulo 3

Resultados Importantes

Decimos que una categoría es **aditiva** si es preaditiva, tiene objeto cero y biproductos binarios. De manera que con los resultados del teorema de factorizacion única 2.5.16 y el teorema 2.3.9 podemos definir ahora una categoría abeliana $\mathcal{A}$ como una categoría aditiva en la que todo morfismo α tiene un núcleo, un conúcleo y una factorización $\alpha = \gamma \circ \beta$ donde β es un epimorfismo y γ un monomorfismo. En base a ello, estudiaremos en adelante algunos resultados importantes de la teoría de categorías en el caso abeliano para finalmente adentrarnos en la teoría de Morita.

3.1. Funtores aditivos

Definición 3.1.1. *Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son categorías preaditivas, entonces el funtor $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un **funtor aditivo** si satisface*

$$T(\beta + \beta') = T(\beta) + T(\beta')$$

para todo par de morfismos $\beta,\ \beta' : B \to B'$. Es decir que la función

$$T : Hom_{\mathcal{B}}(B, B') \to Hom_{\mathcal{C}}(TC, TC')$$

sea un morfismo de grupos.

Definición 3.1.2. *Sea un funtor $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$.*

1. *T es **exacto** si dada una sucesión exacta en $\mathcal{B}$, su imagen bajo T es también una sucesión exacta.*

2. *Decimos T que es **exacto izquierdo** si para una sucesión exacta de la forma $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ en $\mathcal{B}$, $0 \to T(B') \to T(B) \to T(B'')$ es exacta.*

3. *Dualmente, T es **exacto derecho** si dada una sucesión exacta en $\mathcal{B}$, $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ se tiene que $T(B') \to T(B) \to T(B'') \to 0$ es exacta.*

Proposición 3.1.3. *El funtor $Hom : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ es exacto izquierdo en cada variable.*

Demostración: Sea X un objeto en $\mathcal{C}^{op}$. Consideremos una sucesión exacta $0 \to Y' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Y''$. Entonces tenemos en $\mathcal{A}b$ la sucesión:

$$0 \longrightarrow Hom(X, Y') \xrightarrow{hom(X,i)} Hom(X, Y) \xrightarrow{hom(X,j)} Hom(X, Y')$$

Como $Hom(X, \_)$ es un funtor, tenemos que $hom(X, j) \circ hom(X, i) = hom(X, j \circ i) = hom(X, \hat{0}) = \hat{0} \circ \_$. Sea $g \in Im(hom(X, i))$ entonces $hom(X, j) \circ hom(X, i)(g) = \hat{0}$ por lo tanto $g \in Ker(hom(X, j))$.

Más aún, supongamos que existe $\alpha : A \to Hom(X, Y)$ con la propiedad de que $hom(X, j) \circ \alpha = \hat{0}$, entonces para todo $\varphi \in A$ se tiene que $hom(X, j) \circ \alpha(\varphi) = j \circ \alpha(\varphi) = \hat{0}$ pero como $i = ker(j)$ entonces existe un único $\beta : X \to Y'$ que hace conmutar el siguiente triángulo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "j"] & Y'' \\
& X \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "\alpha(\varphi)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si a cada φ le asignamos el morfismo β con esta propiedad, tenemos un único morfismo $u : A \to Hom(X, Y')$ tal que $u \circ hom(X, i) = \alpha$, es decir $hom(X, i) = ker(hom(X, j))$ y como consecuencia $hom(X, i)$ es un monomorfismo.

Consideremos ahora $f \in Hom(X, Y)$ tal que $hom(X, j)(f) = j \circ f = \hat{0}$, entonces existe un único $f' : X \to Y'$ tal que $i \circ f' = f$ dado que $i = ker(j)$. Es decir, $hom(X, i)(f') = f$ por lo tanto $f \in Im(hom(X, i))$.

Hemos probado que $Hom(X, \_)$ es exacto izquierdo. Apliquemos ahora $Hom(\_, X)$ a la sucesión $0 \to Y' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Y''$.

$$0 \longrightarrow Hom(Y'', X) \xrightarrow{hom(j,X)} Hom(Y, X) \xrightarrow{hom(i,X)} Hom(Y', X)$$

Analogamente al caso anterior tenemos

$$hom(i, X) \circ hom(j, X) = hom(j \circ i, X) = \hat{0}$$

con lo que tenemos que $hom(j, X)$ es un monomorfismo. Falta probar que $Im(hom(j, X) = Ker(hom(i, X))$; sea $f \in Im(hom(j, X))$, entonces existe $k \in Hom(Y'', X)$ tal que $hom(j, X)(k) = k \circ j = f$ entonces $hom(i, X)(f) = f \circ i = k \circ j \circ i = k \circ \hat{0} = \hat{0}$ que es lo que buscábamos.

■

3.2. Objetos inyectivos y proyectivos

Definición 3.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana.*

1) *Decimos que un objeto C es* **proyectivo** *si el funtor $Hom(C, \_) : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ es exacto.*

2) *C es inyectivo si $Hom(\_, C) : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{A}b$ es exacto.*

Lema 3.2.2. (i) *Un objeto C es proyectivo si y sólo si para todo epimorfismo $j : Y \to Y''$ y todo morfismo $g : C \to Y''$ existe $\bar{g} : C \to Y$ tal que $j \circ \bar{g} = g$.*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\bar{g}"'] \arrow[d, "g"] & \\ Y \arrow[r, "j"] & Y'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(ii) *C es un objeto inyectivo si y sólo si para todo morfismo $f : Y' \to C$ y todo monomorfismo $i : Y' \to Y$ existe $\bar{f} : Y \to C$ tal que $f = \bar{f} \circ i$.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, dotted, "\bar{f}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Demostración: Probaremos (ii). Sea $0 \to Y' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Y'' \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{C}$. C es inyectivo si y sólo si la sucesión

$$0 \to Hom(Y'', C) \xrightarrow{hom(j,C)} Hom(Y, C) \xrightarrow{hom(i,C)} Hom(Y', C) \to 0$$

Es exacta, esto si y sólo si $hom(i, C)$ es un epimorfismo, es decir, $Im(hom(i, C)) = Hom(Y', C)$, así para toda $f \in Hom(Y', C)$ existe $\bar{f} \in Hom(Y, X)$ tal que $hom(i, C)(\bar{f}) = \bar{f} \circ i = f$.

■

Proposición 3.2.3. *Sea $\{C_i\}_I$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$, entonces:*

(i) $\oplus_I C_i$ *es proyectivo si y sólo si cada* C_i *es proyectivo.*

(ii) $\prod_I C_i$ *es inyectivo si y sólo cada* C_i *es inyectivo.*

Demostración: Probaremos (ii), [$\Rightarrow$] Supongamos que $\prod C_i$ es inyectivo. Sean $p_i : \prod C_i \to C_i$ las proyecciones canónicas y un monomorfismo $m : X' \to X$. Fijemos C_{i_0} en la familia $\{C_i\}_I$; queremos demostrar que para todo morfismo $f : X' \to C_{i_0}$ existe $\bar{f}$ tal que $\bar{f} \circ m = f$.

El morfismo $f : X' \to C_{i_0}$ determina un único $g : X' \to \prod C_i$ que hace conmmutar el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dotted, "g"] & \\ C_{i_0} & \prod C_i \arrow[l, "p_{i_0}"] \end{tikzcd}$$

tal que para todo $i \neq i_0$ se tiene que $p_i \circ g = \hat{0}$. Entonces como $\prod C_i$ es inyectivo, existe $\bar{g}$ con la propiedad de que $p_i \circ \bar{g} \circ m = g$. Así $p_{i_0} \circ \bar{g} \circ m = p_{i_0} \circ g = f$ que es lo que buscábamos.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, dotted, "p_{i_0} \circ \bar{g}"] \\ & C_{i_0} & \end{tikzcd}$$

[$\Leftarrow$] Supongamos que C_i es un objeto inyectivo para cada i. Sea $m : X' \to X$ un monomorfismo y un morfismo $f : X' \to \prod C_i$. Consideremos además las proyecciones naturales $p_i : \prod C_i \to C_i$ para cada i, así tenemos el morfismo $p_i \circ f : X \to C_i$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, dotted, "g_i"] \\
& \prod C_i \arrow[r, "p_i"'] & C_i
\end{tikzcd}$$

Como C_i es inyectivo existe un único $g_i : X \to C_i$ tal que $g_i \circ m = p_i \circ f$. Sea $g : X \to \prod C_i$ el morfismo inducido por la familia de g_i tal que $p_i \circ g = g_i$. Entonces $p_i \circ g \circ m = g_i \circ m = p_i \circ f$. Por lo tanto $g \circ m = f$.

■

3.3. La retícula de subobjetos de C es modular

Observación 3.3.1. Dada una sucesión exacta $0 \to C_0 \overset{\alpha_0}{\to} C_1 \overset{\alpha_1}{\to} C \to 0$ podemos construir su producto fibrado con respecto a un morfismo $\alpha_2 : C_2 \to C$.

Si consideramos el siguiente diagrama conmutativo donde P es el producto fibrado de α_1 y α_2 y β_0 es el morfismo inducido por $\alpha_0 : C_0 \to C_1$ y $\hat{0} : C_0 \to C_2$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_0 \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] & P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & C_2 \arrow[d, "\alpha_2"'] & \\
0 \arrow[r] & C_0 \arrow[r, "\alpha_0"] & C_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sea $\psi : X \to P$ con la propiedad de $\beta \circ \psi = \hat{0}$. Entonces $\alpha_1 \circ \gamma \circ \psi = \hat{0}$. Como $\alpha_0 = ker(\alpha_1)$ existe un único $\lambda : X \to C_0$ tal que $\gamma \circ \psi = \alpha_0 \circ \lambda = \alpha_0 \circ 1_{C_0} \circ \lambda = \gamma \circ \beta_0 \circ \lambda$ y $\alpha_2 \circ \beta \circ \psi = \alpha_1 \circ \gamma \circ \psi = \alpha_1 \circ \gamma \circ \beta \circ \lambda$ entonces de la unicidad dada por la propiedad universal de P tenemos que $\psi = \beta_0 \circ \gamma$.

El caso particular en que α_2 es un monomorfismo, nos dice que cada subobjeto C_2 de $C_1/C_0 \cong C$ es de la forma P/C_0 para algún subobjeto P de C_1. Dicho de otra manera, la rectícula $L(C)$ de subobjetos de $C \cong C_1/C_0$ es isomorfa a la retícula de subobjetos $L([C_0, C_1])$

Definición 3.3.2. *Una retícula L es **modular** si para todo $a, b, c \in L$ con $a \leq b$ se tiene $(c \wedge b) \vee a = (c \vee a) \wedge b$. Equivalentemente L es modular si y sólo si todo intervalo I de L tiene la siguiente propiedad: Si $c \in I$ tiene dos complementos $a, b \in I$ con $a \leq b$, entonces $a = b$. Véase [11] página 66.*

Proposición 3.3.3. *La retícula de subobjetos de C es modular.*

Demostración: Como el intervalo $[B_1, B_2]$ de $L(C)$ es isomorfo a la retícula $L(B_2/B_1)$, basta suponer que los subobjetos $B_1 \overset{\iota}{\hookrightarrow} B_2$ tienen un complemento en común C'. Es decir $B_1 \oplus C' = C$ y $B_2 \oplus C' = C$. Entonces el morfismo inducido $f = \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un isomorfismo, en consecuencia ι es también un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} B_1 \oplus C \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B_2 \oplus C \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

■

3.4. Generadores y Cogeneradores

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas y un funtor aditivo $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Recordemos que T es fiel si es inyectivo en morfismos, así $T(\alpha) \neq \hat{0}$ para todo $\alpha \neq \hat{0}$ en $\mathcal{C}$.

Proposición 3.4.1. *Un funtor exacto T es fiel si y sólo si $T(C) \neq 0$ para todo objeto C distinto de cero.*

Demostración: $[\Rightarrow]$ Supongamos que T es fiel y $T(C) = 0$, entonces $T(1_C) = 1_{TC} = \hat{0}$, Por lo tanto $1_C = \hat{0}$ y $C = 0$.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que T es exacto y para cada objeto $C \neq 0$, $T(C) \neq 0$. Sea $\alpha \neq \hat{0}$ con $\alpha = im(\alpha) \circ \gamma$, entonces $Im(\alpha) \neq 0$ y por la exactitud de T, $T(\alpha)$ es un monomorfismo y $T(\gamma)$ es epimorfismo, es decir $T(Im(\alpha)) = Im(T(\alpha)) \neq 0$, por lo tanto $T(\alpha) \neq \hat{0}$.

■

Definición 3.4.2. *Un objeto C de $\mathcal{C}$ es un* ***generador*** *para $\mathcal{C}$ si $Hom(C,\_)$ es fiel. C es un* ***cogenerador*** *si el funtor $Hom(\_,C)$ es fiel.*

Proposición 3.4.3. *Supongamos que una categoría $\mathcal{C}$ tiene coproductos. Si U es un generador, entonces para todo objeto C existe un epimorfismo $U^{(I)} \to C$ para algún conjunto de índices I.*

Demostración: Sea $C \neq 0$, como U es un generador, entonces $Hom(U,C) \neq 0$. Sea $I = Hom(U,C)$ y $\varphi : U^{(I)} = \bigoplus_{\alpha\in I} U_\alpha \to C$ el morfismo inducido por $\alpha : U_\alpha \to C$ para cada $\alpha \in I$.

$$
\begin{tikzcd}
U_\alpha \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\iota_\alpha"'] & C \arrow[r, "\gamma"] & C' \\
\bigoplus U\alpha \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Sea $\hat{0} \neq \gamma : C \to C'$, entonces $Hom(U,\gamma) \neq \hat{0}$ y $Hom(U,C) \neq 0$, por lo tanto existe α tal que $\gamma \circ \alpha \neq \hat{0}$, así $\gamma \circ \varphi \circ \iota_\alpha = \gamma \circ \alpha \neq \hat{0}$ para cada α entonces $\gamma \circ \varphi \neq \hat{0}$. Por lo tanto φ es epimorfismo.

■

Proposición 3.4.4. *Un objeto proyectivo P es un generador si y sólo si existe un morfismo distinto de cero $\alpha : P \to C$ para cada $C \neq 0$.*

Demostración: $[\Leftarrow]$ Supongamos que P es un generador proyectivo, entonces $Hom(P,\_)$ es exacto y fiel, así $Hom(P,\gamma) = \hat{0}$ si y sólo si $\gamma = \hat{0}$.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que P es un objeto proyectivo y para cada $C \neq 0$ existe $\hat{0} \neq \alpha \in Hom(P,C)$. Entonces $Hom(P,\_)$ es fiel, por lo tanto P es un generador.

■

Proposición 3.4.5. *Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene productos. Si V es un cogenerador, entonces para cada objeto C existe un monomorfismo $C \to V^I$ para algún conjunto de índices I.*

Demostración: Sea $C \neq 0$, consideramos $I = Hom(C, V) \neq \{0\}$ y el morfismo $\psi : C \to \prod_{\alpha \in I} V_\alpha = V^I$ inducido por $\alpha \in Hom(C, V)$.

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[r, dotted, "\psi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \prod V_\alpha \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & & V \end{tikzcd}$$

Sea $\hat{0} \neq \gamma : C' \to C$ entonces $Hom(\gamma, V) \neq 0$ pues V es un cogenerador, por lo tanto existe $\alpha \in Hom(C, V)$ tal que $\alpha \circ \gamma \neq \hat{0}$, así $\pi_\alpha \circ \phi\gamma = \alpha \circ \gamma \neq \hat{0}$ para todo $\gamma \neq \hat{0}$. Así ϕ es un monomorfismo.

∎

Proposición 3.4.6. *Un objeto inyectivo E es un cogenerador si y sólo si existe un morfismo distinto de cero $C \to E$ para cada $C \neq 0$.*

Demostración: [$\Rightarrow$] Sea E un cogenerador inyectivo, entonces $Hom(\_E)$ es fiel e inyecivo en morfismos, es decir $Hom(\gamma, E) = 0$ si y sólo si $\gamma = \hat{0}$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que E es inyectivo y para cada $C \neq 0$ hay un morfismo $\hat{0} \neq \alpha \in Hom(C, E)$. Por lo tanto $Hom(\_, E)$ es fiel.

∎

Definición 3.4.7. *Se dice que una categoría es* ***localmente pequeña*** *si la clase de subobjetos de cualquier objeto es un conjunto.*

Proposición 3.4.8. *Si $\mathcal{C}$ tiene un generador, entonces $\mathcal{C}$ es localmente pequeña.*

Demostración: Sea U un generador en la categoría. Sea $\beta : B \rightarrowtail C$ un representante de $\lfloor \beta \rfloor$. Definimos para β:

$$\langle \beta \rangle = \{\alpha \in Hom(U,B) | \alpha \text{ se factoriza a través de } \beta\} \subseteq Hom(U,C)$$

Sea $\beta' : B' \to C$ tal que $\beta' \notin \lfloor \beta \rfloor$, en particular, no existe un isomorfismo entre β y β'. Consideremos el ínfimo de β y β'. Sean γ y γ' los monomorfismos inducidos.

Notemos que $\beta' \notin \lfloor \beta \rfloor$ implica que $\beta \cap \beta' \neq \beta$, en consecuencia γ no es un isomorfismo. Del mismo modo si $\beta \notin \lfloor \beta' \rfloor$ entonces γ' no puede ser un isomorfismo. En nuestro caso podemos suponer que γ' no es un isomorfismo, como de hecho es un monomorfismo entonces no es epimorfismo. Así $q' = cok(\gamma') \neq \hat{0}$.

Sea $\hat{0} \neq \alpha \in \langle \beta' \rangle$, es decir, $\alpha = \beta' \circ x$ para alguna $x : U \to B'$ distinta de $\hat{0}$ y supongamos que $\alpha \in \langle \beta \rangle$. Entonces existe $y \neq \hat{0}$ tal que $\alpha = \beta \circ y$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrd, bend left, "y"] \arrow[rd, dotted, "u"] \arrow[rrdd, squiggly, "\alpha"'] \arrow[rdd, bend right, "x"'] & & \\
& P \arrow[r, tail, "\gamma"] \arrow[d, tail, "\gamma"'] & B \arrow[d, tail, "\beta"] \\
& B' \arrow[r, tail, "\beta'"'] \arrow[d, "q'"'] & C \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad del producto fibrado del ínfimo de β y β', existe un único morfismo $u : U \to P$ tal que $\gamma' \circ u = x$ y $\gamma \circ u = y$. Entonces tenemos $\hat{0} \neq q' \circ x = q' \circ \gamma \circ u$ ésto es una contradicción pues $q' = cok(\gamma')$. Por lo tanto $\alpha \notin \langle \beta \rangle$. Concluimos que $\lfloor \beta \rfloor \neq \lfloor \beta' \rfloor$ generan subconjuntos distintos $\langle \beta \rangle \neq \langle \beta' \rangle$ de $Hom(U,C)$. Así si S es la clase de subobjetos de C entonces

$$\bigcap_{\beta \in S} \langle \beta \rangle \subseteq Hom(U,C)$$

Nos dice que S es un conjunto y por lo tanto $\mathcal{C}$ es localmente pequeña.

■

Proposición 3.4.9. *Sea M un $A-$módulo derecho con anillo de endomorfismos $B = End_A(M)$, entonces:*

(i) *Si M_A es un generador, entonces ${}_BM$ es proyectivo finitamente generado.*

(ii) *Si M_A es proyectivo finitamente generado, entonces ${}_BM$ es un generador.*

AUN FALTA LA DEMOSTRACIÓN.

Ejemplo 3.4.10. Una familia $\{U_i\}_I$ de objetos en una categoría $\mathcal{C}$ es una **familia de generadores** si para todo $\alpha : B \to C$ distinto de cero, existe un monomorfismo $\beta : U_i \to B$ para alguna i tal que $\alpha \circ \beta \neq \hat{0}$. Si $\mathcal{C}$ tiene coproductos, entonces $\bigoplus_I U_i$ es un generador.

Demostración: U_i es un generador, entonces $Hom(U_i, \_)$ es un funtor fiel, así $Hom(U_i, \alpha) \neq \hat{0}$, es decir, existe $\beta \in Hom(U_i, B)$ tal que $\alpha \circ \beta \neq \hat{0}$. Por otro lado, sabemos que

$$Hom(\bigoplus_I U_i, B) \cong \prod_I Hom(U_i, B)$$

Queremos ver que $Hom(\bigoplus_I U_i, \alpha) \neq \hat{0}$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod_I Hom(U_i, B) \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, dotted, "\eta\neq\hat{0}"] & Hom(U_i, B) \arrow[d, "\alpha\circ_"] \\
\prod_I Hom(U_i, C) \arrow[r, "q_i"] & Hom(U_i, C)
\end{tikzcd}$$

Donde p_i y q_i son proyecciones. Por la propiedad universal del producto hay una única $\eta \neq \hat{0}$ tal que $q_i \circ \eta = (\alpha \circ \_) \circ P_i \neq \hat{0}$. Denotemos $\eta = Hom(\bigoplus U_i, \alpha)$. Como q_i es un epimorfismo, existe $\epsilon \in \prod Hom(U_i, B)$ tal que $q_i \circ \eta(\epsilon) = (\alpha \circ \beta) \circ p_i \neq \hat{0}$ para toda i, con lo que $Hom(\bigoplus U_i, B) \neq \hat{0}$. Por lo tanto $\bigoplus_I U_i$ es un generador.

■

3.5. Categorías de Funtores

Definición 3.5.1. *Si $\mathcal{I}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria, definimos la categoría **Fun($\mathcal{I},\mathcal{C}$)** cuyos objetos son funtores $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ y los morfismos entre ellos son transformaciones naturales.*

Notemos que $Fun(\mathcal{I},\mathcal{C})$ es en efecto una categoría. Para cada funtor $S \in Fun(\mathcal{I},\mathcal{C})$ tenemos la transformación natural $Id_S = \left\{(Id_S)_i = Id_{S(i)}\right\}_{\mathcal{I}}$ y si tenemos un par de transformaciones naturales $\eta : R \Rightarrow S$ y $\mu : S \Rightarrow T$ definimos $\mu \circ \eta : R \Rightarrow T$ dada por la familia de morfismos $\{\mu_i \circ \eta_i : R(i) \to T(i)\}_{\mathcal{I}}$.

Por comodidad denotaremos al conjunto de transformaciones naturales entre dos funtores S y T como $Nat(S,T)$. Observemos que cada transformación natural está dada por una familia de morfismos indicada en una categoría pequeña I, así $Nat(S,T) \subseteq \prod_I Hom(S(i),T(i))$ que es un conjunto.

Proposición 3.5.2. *Si $\mathcal{I}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ es preaditiva (abeliana) entonces $Fun(\mathcal{I},\mathcal{C})$ es también preaditiva (abeliana).*

Demostración: Sean $S,T \in Fun(\mathcal{I},\mathcal{C})$ con $\xi,\eta : S \Rightarrow T$ transformaciones naturales. Definimos $(\xi + \eta) = \xi{+}\eta$ en $Nat(S,T)$ dada por morfismos $\xi_i{+}\eta_i \in Hom(S(i),T(i))$ que es un grupo abeliano dado que $\mathcal{C}$ es preaditiva. Además para cada morfismo ξ_i existe $-\xi_i \in Hom(S(i),T(i))$ tal que $\xi_i + (-\xi_i) = \hat{0}$, lo que implica que $-\xi = \{\xi_i\}_{\mathcal{I}} \in Nat(S,T)$.

Definimos $\zeta : S \Rightarrow T$ la **transformación natural cero** dada por la familia de morfismos $\left\{\zeta_i = \hat{0} : S(i) \to T(i)\right\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Todo lo anterior dota a $Nat(S,T)$ de una estructura de grupo abeliano, por lo tanto $Fun(\mathcal{I},\mathcal{C})$ es preaditiva.

Si además $\mathcal{C}$ es abeliana y tenemos $T_1,\ldots,T_n$ funtores en $Fun(\mathcal{I},\mathcal{C})$. Definimos $T = T_1 \times \cdots \times T_n$ de la forma:

$$\begin{array}{ccc} i & & T(i) = T_1(i) \times \cdots \times T_n(i) \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(\mu)} \\ j & & T(j) = T_1(j) \times \cdots \times T_n(j) \end{array}$$

donde $T(\mu) = \begin{pmatrix} T_1(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & T_n(\mu) \end{pmatrix}$. Veamos que T es un funtor. Para el morfismo identidad $1_i : i \to i$ tenemos que $T(1_i)$ corresponde a la matriz:

$$\begin{pmatrix} T_1(1_i) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & T_n(1_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{T_1(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1_{T_n(i)} \end{pmatrix} = 1_{T(i)}$$

Ahora si consideramos $i \xrightarrow{\mu} j \xrightarrow{\lambda} k$ en $\mathcal{I}$ y $T(\mu) = M_\mu$ y $T(\lambda) = M_\lambda$ las matrices correspondientes, entonces la composición $T(\lambda) \circ T(\mu)$ coincide con el producto de las matrices, que por ser diagonales se multiplican entrada a entrada, es decir $[M_\lambda M_\mu]_{ll} = T_l(\lambda) \circ T_l(\mu) = T_l(\lambda \circ \mu)$ para cada funtor T_l con $1 \leq l \leq n$. Por lo tanto $T(\lambda) \circ T(\mu) = T(\lambda \circ \mu)$, con lo que $T = T_1 \times \cdots \times T_n \in Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$.

Solo falta ver que $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ tiene núcleos. Tomemos una transformación natural $\eta : S \Rightarrow T$ y definamos para cada $i \in \mathcal{I}$: $K(i) = Ker(\eta_i)$ y para cada $\mu : i \to j, K(\mu)$ como el morfismo dado por la propiedad universal del núcleo de η_j.

$$\begin{array}{ccc} i & & \begin{tikzcd} K(i) \arrow[r, "ker(\eta_i)"] \arrow[d, dotted, "K(\mu)"'] & S(i) \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "S(\mu)"] & T(i) \arrow[d, "T(\mu)"] \\ K(j) \arrow[r, "ker(\eta_j)"] & S(j) \arrow[r, "\eta_j"] & T(j) \end{tikzcd} \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \\ j & & \end{array}$$

Notemos que $K(1_i)$ es el único morfismo con la propiedad de $ker(\eta_i) \circ K(1_i) = 1_{S(i)} \circ ker(\eta_i) = ker(\eta_i)$, es decir $K(1_i) = 1_{K(i)}$. Tambien por la unicidad dada por la propiedad universal del núcleo, si dados $i \xrightarrow{\mu} j \xrightarrow{\lambda} k$ en $\mathcal{I}$, entonces $K(\lambda) \circ K(\mu) = K(\lambda \circ \mu)$ pues ambos hacen comutar el cuadrado exterior en el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[d, "\mu"'] & K(i) \arrow[r, "ker(\eta_i)"] \arrow[d, dotted, "K(\mu)"] \arrow[dd, dotted, bend right, "K(\lambda\circ\mu)"'] & S(i) \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "S(\mu)"] & T(i) \arrow[d, "T(\mu)"] \\
j \arrow[d, "\lambda"'] & K(j) \arrow[r, "ker(\eta_j)"] \arrow[d, dotted, "K(\lambda)"] & S(j) \arrow[r, "\eta_j"] \arrow[d, "S(\lambda)"] & T(j) \arrow[d, "T(\lambda)"] \\
k & K(k) \arrow[r, "ker(\eta_k)"] & S(k) \arrow[r, "\eta_k"] & T(k)
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto $K \in Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ y tenemos una transformación natural $\kappa : K \Rightarrow S$ determinada por la familia $\{ker(\eta_i)\}_{\mathcal{I}}$ para cada $\eta \in Nat(S, T)$ que además cuenta con una propiedad universal dada puntualmente. Dualmente tenemos la existencia de conúcleos en $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ y así concluimos que la categoría $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ es también abeliana.

■

Definición 3.5.3. *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías preaditivas. Denotamos como* ***Hom(**$\mathcal{B}, \mathcal{C}$**)** *a la subcategoría plena de $Fun(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ que consta de los funtores aditivos de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$.*

Proposición 3.5.4. *Si $\mathcal{B}$ es una categoría pequeña y preaditiva y $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, entonces $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ es una subcategoría abeliana de $Fun(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.*

En adelante, denotaremos como h_B al funtor $Hom(\_, B) : \mathcal{B} \to \mathcal{A}b$.

Lema de Yoneda 3.5.5. *Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y preaditiva. Para todo objeto B de $\mathcal{B}$ y todo funtor aditivo $T : \mathcal{B}^{op} \to \mathcal{A}b$ hay un isomorfismo*

$$Nat(h_B, T) \cong T(B)$$

que es natural en B y en T.

Demostración: Sea $\eta \in Nat(h_B, T)$. Consideremos la componente en B de la transformación $\eta_B : h_B(B) = Hom(B, B) \to T(B)$, y definimos $\theta_{B,T} : Nat(h_B, T) \to T(B)$ como $\theta_{B,T}(\eta) = \eta_B(1_B)$.

Sean η, μ y $\zeta \in Nat(h_B, T)$. Con ζ la transformación natural cero definida en la proposición 3.5.2. Entonces $\theta_{B,T}(\eta + \mu) = (\eta + \mu)_B(1_B) = (\eta_B + \mu_B)(1_B) = \eta_B(1_B) + \mu_B(1_B) = \theta_{B,T}(\eta) + \theta_{B,T}(\mu)$, además $\theta_{B,T}(\zeta) = \zeta_B(1_B) = 0$.

$\theta_{B,T}$ es un isomorfismo.

Sea $\eta \in Nat(h_B, T)$ tal que $\theta_{B,T}(\eta) = \eta_B(1_B) = 0 \in T(B)$. Sea $\alpha \in Hom(B', B)$, como η es una transformación natural, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[d, "\alpha"'] & Hom(B', B) \arrow[r, "\eta_{B'}"] & T(B') \\ B & Hom(B, B) \arrow[u, "\_\circ\alpha"'] \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[ur, phantom, "1"] & T(B) \arrow[u, "T\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Entonces $\eta_{B'}(\alpha) = T(\alpha) \circ \eta_B(1_B) = T(\alpha)(0) = 0$ por lo tanto $\eta = \zeta$, es decir $\theta_{B,T}$ es un monomorfismo.

Definamos para cada $x \in T(B)$ un morfismo $\mu(x)_{B'}(\alpha) = T(\alpha)(x)$ con $\alpha : B' \to B$. Veamos que $\{\mu(x)_{B'} : h_B(B') \to T(B')\}_{B' \in \mathcal{B}}$ determina una transformación natural. Si $\beta : C \to B'$ en $\mathcal{B}$, demostraremos que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\beta"'] & Hom(C, B) \arrow[r, "\mu(x)_C"] & T(C) \\ B' & Hom(B', B) \arrow[u, "\_\circ\beta"'] \arrow[r, "\mu(x)_{B'}"'] \arrow[ur, phantom, "2"] & T(B') \arrow[u, "T(\beta)"'] \end{tikzcd}$$

Sea $\alpha \in Hom((B', B))$, entonces $\mu(x)_C \circ (\_ \circ \beta)(\alpha) = \mu(x)_C(\alpha \circ \beta) = T(\alpha \circ \beta)(x) = T(\beta) \circ T(\alpha)(x)$ pues T es contravariante. Por otro lado $T(\beta) \circ \mu(x)_{B'}(\alpha) = T(\beta) \circ T(\alpha)(x)$. Hemos probado que el cuadrado 2 conmuta, es decir, para cada $x \in T(B)$ tenemos una transformación natural $\mu(x) = \{\mu(x)_{B'}\}_{B' \in \mathcal{B}} \in Nat(h_B, T)$.

Calculemos $\theta_{B,T}(\mu(x))$.

Por definición, tenemos que $\theta_{B,T}(\mu(x)) = \mu(x)_B(1_B) = T(1_B)(x) = 1_{T(B)}(x) = x$. El paso intermedio surge de la conmutatividad de 2 al sustituir β por 1_B. Con ésto tenemos que $\theta_{B,T}$ es también un epimorfismo y por lo tanto un isomorfismo de grupos.

$\theta_{B,T}$ es natural en B y en T. Para ésto necesitamos probar la conmutatividad de los dos diagramas siguientes:

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[d, "\alpha"'] & Nat(h_{B'},T) \arrow[r, "\theta_{B',T}"] & T(B') \\
B & Nat(h_B,T) \arrow[u, "(_\circ a)"'] \arrow[r, "\theta_{B,T}"] \arrow[ur, phantom, "3"] & T(B) \arrow[u, "T(\alpha)"']
\end{tikzcd}$$

Y para la naturalidad en T probaremos que 3 conmuta.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d, Rightarrow, "\sigma"'] & Nat(h_B,S) \arrow[r, "\theta_{B,S}"] \arrow[d, "\sigma\circ_"'] \arrow[dr, phantom, "4"] & S(B) \arrow[d, "\sigma_B"] \\
T & Nat(h_B,T) \arrow[r, "\theta_{B,T}"] & T(B)
\end{tikzcd}$$

El morfismo $\alpha : B' \to B$ induce una transformación natural $a : h_{B'} \Rightarrow h_B$ dada por la familia de morfismos $\{(\alpha \circ \_)_C : h_{B'}(C) \to h_B(C)\}_{C\in\mathcal{B}}$. Si $\beta : C \to D$ en $\mathcal{B}$, tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "\beta"] & h_{B'}(C) \arrow[r, "(\alpha\circ_)_C"] & h_B(C) \\
D & h_B(D) \arrow[u, "_\circ\beta"] \arrow[r, "(\alpha\circ_)_D"'] & h_B(D) \arrow[u, "_\circ\beta"]
\end{tikzcd}$$

Así si fijamos el funtor T, tenemos un morfismo $(\_ \circ a) : Nat(h_B, T) \to Nat(h_{B'}, T)$. Por otro lado, sabemos que si $\eta : h_B \Rightarrow T$ entonces el cuadrado 1 conmuta, es decir $\eta_{B'} \circ (\_ \circ \alpha) = T(\alpha) \circ \eta_B$. Así $\eta \circ a : h_{B'} \Rightarrow h_B \Rightarrow T$ y sus componentes se calculan $(\eta \circ a)_C = \eta_C \circ a_C = \eta_a \circ (\alpha \circ \_)_C$. Entonces

$\theta_{B',T}(\eta \circ a) = (\eta \circ a)_{B'}(1_{B'}) = \eta_{B'} \circ (\alpha \circ 1_{B'}) = \eta_{B'} \circ \alpha = T(\alpha) \circ \eta_b(1_B) = T(\alpha) \circ \theta_{B,T}(\eta)$. Esto es, el cuadrado 3 conmuta.

Tomemos dos funtores $S, T : \mathcal{B}^{op} \rightarrow \mathcal{A}b$ y una transformación natural $\sigma : S \Rightarrow T$. Sea $\mu \in Nat(h_B, S)$, entonces $\sigma \circ \mu \in Nat(h_B, T)$ y $\theta_{B,T}(\sigma \circ \mu) = (\sigma \circ \mu)_B(1_B)$. Por otro lado $\sigma_B \circ \theta_{B,S}(\mu) = \sigma_B \circ \mu_B(1_B) = (\sigma \circ \mu)_B(1_B)$, en consecuencia 4 conmuta y obtenemos la naturalidad en T de $\theta_{B,T}$

■

Corolario 3.5.6. *Una categoría pequeña y preaditiva $\mathcal{B}$ es equivalente a la subcategoría plena de $Hom(\mathcal{B}^{op}, \mathcal{A}b)$ de funtores representables.*

Demostración: Consideremos el funtor $E : \mathcal{B} \rightarrow Hom(\mathcal{B}, \mathcal{A}b)$ definido como sigue:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\beta"'] & Hom(\_, B) \arrow[d, "\beta\circ\_"'] \\ B' \arrow[r, mapsto] & Hom(\_, B') \end{tikzcd}$$

Los morfismo en $Hom(\mathcal{B}^{op}, \mathcal{A}b)$ forman el conjunto $Nat(h_B, h_{B'})$. Aplicando el Lema de Yoneda a $T = h_{B'}$, tenemos que $Nat(h_B, h_{B'})$ es isomorfo a $h_{B'}(B) = Hom(B, B')$. Esto nos dice que E es un funtor fiel y pleno, es decir una equivalencia entre $\mathcal{B}$ y $Hom(\mathcal{B}^{op}, \mathcal{A}b)$.

■

Definición 3.5.7. *Una sucesión de funtores $0 \rightarrow h_L \rightarrow h_M \rightarrow h_N \rightarrow 0$ es exacta en $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{A}b)$ si y sólo si $0 \rightarrow h_L(B) \rightarrow h_M(B) \rightarrow h_N(B) \rightarrow 0$ es exacta para cada $B \in \mathcal{B}$.*

Corolario 3.5.8. *La familia $\{h_B\}_{B \in \mathcal{B}}$ es una familia de generadores proyectivos para $Hom(\mathcal{B}^{op}, \mathcal{A}b)$.*

Demostración: Probaremos que para cada funtor $T : \mathcal{B}^{op} \rightarrow \mathcal{A}b$ distinto del funtor constante cero, $Nat(h_B, T) \neq \{\zeta\}$. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $0 \neq T(B)$, como $\theta_{T,B} : T(B) \to Nat(h_B, T)$ es un isomorfismo de grupos, existe $0 \neq x \in T(B)$ tal que $\theta_{T,B}(x) = \eta \neq \zeta$. Por lo tanto $Nat(h_B, T) \neq \{\zeta\}$ para cada $T \neq 0$. Por la proposición 3.4.4 tenemos que cada h_B es un generador proyectivo.

■

Ejemplos 3.5.9. 1. *Módulos.* Sea $\mathcal{A}$ la categoría con un solo objeto $\{*\}$ y cuyos morfismos son los elementos de un anillo A. Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva. Un funtor aditivo $T : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ corresponde con un morfismo de anillos

$$A = Hom(*, *) \xrightarrow{\varphi} Hom(T(*), T(*)) = Hom(C, C)\,\text{donde} C = T(*)$$

Un objeto C en una categoría junto con un morfismo de anillos $\varphi : A \to Hom(C, C)$ se conoce como un $A-$**objeto izquierdo** en $\mathcal{C}$. Dualmente un $A-$**objeto derecho** de $\mathcal{C}$ está dado por un morfismo de anillos $\phi : A^{op} \to Hom(C, C)$. Si consideramos $\mathcal{C} = \mathcal{A}b$ tenemos que $\varphi(a) = (a\Delta\_) \in Hom(C, C)$ con $T(*) = C$ un grupo abeliano y $A \in A$, entonces los A-objetos izquierdos en $\mathcal{A}b$ son $A-$módulos. Con ello tenemos el isomorfismo de categorías $A - Mod \cong Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$.

2. *Pregavillas.* Sea X un espacio topológico. Una **pregavilla** abeliana F en X asigna a cada abierto U de X, un grupo abeliano $F(U)$ y asigna a cada inclusión $U \hookrightarrow V$ un morfismo de grupos $\rho_{V,U} : F(V) \to F(U)$. La composición de dos inclusiones $U \hookrightarrow V \hookrightarrow W$ bajo F se denota $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$ Definimos $\mathcal{I}_X$ cuyos objetos son los abiertos de X y los morfismos son inclusiones. Entonces una pregavilla es un funtor $F : \mathcal{I}_X^{op} \to \mathcal{A}b$.

3. *Categorías de Diagramas.* Sean C_0, C_1, C_2 objetos en una categoría $\mathcal{C}$. Consideremos a los diagramas de la forma $C_0 \to C_1 \to C_2$. Un morfismo

entre ellos es una triada de morfismos f_0, f_1, f_2 que hace conmutar los cuadrados:

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & C_2 \arrow[d, "f_2"'] \\
C'_0 \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] & C'_2
\end{tikzcd}$$

Sea $\mathcal{I}$ una categoría con solo tres objetos a, b, c y morfismos $\alpha : a \to b$, $\beta : b \to c, \beta \circ \alpha : a \to c$ junto con las identidades en cada objeto. Sean $F, G : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ funtores tales que:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C} \\
a \arrow[d, "\alpha"'] & C_0 \arrow[d] \\
b \arrow[d, "\beta"'] & C_1 \arrow[d] \\
C & C_2
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{I} \arrow[r, "G"] & \mathcal{C} \\
a \arrow[d, "\alpha"'] & C'_0 \arrow[d] \\
b \arrow[d, "\beta"'] & C'_1 \arrow[d] \\
C & C'_2
\end{tikzcd}$$

Un morfismo entre los dos diagramas anteriores es una transformación natural $\eta : F \to G$ dada por $\eta_a = f_0, \eta_b = f_1, \eta_c = f_2$. Así, la categoría de diagramas en $\mathcal{C}$ es isomorfa a $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. En general, si $\mathcal{I}$ es una categoría pequeña, $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ puede considerarse una categoría de diagramas.

4. *Sistemas dirigidos.* Sea I un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que I es un **conjunto dirigido** si para cada pareja $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$. Un sistema dirigido de módulos consiste en un módulo M_i para cada $i \in I$ y un morfismo de módulos $\alpha_{i,j} : M_i \to M_j$ para cada $i \leq j$ y un morfismo $\alpha_{i,i} : M_i \to M_i$. Además si $i \leq j \leq k$ implica que $\alpha_{j,k} \circ \alpha_{i,j} = \alpha_{i,k}$.

3.6. Límites y Colímites

Definición 3.6.1. *Sea $\mathcal{I}$ una categoría pequeña, consideremos un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. Si X es un objeto en $\mathcal{C}$ se tiene una familia de morfismos $\alpha_i : X \to F(i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$, entonces decimos que la familia $\{\alpha_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ es* ***compatible*** *si para todo $\lambda : i \to j$ en $\mathcal{I}$, $\alpha_j = F(\lambda) \circ \alpha_i$.*

Definición 3.6.2. *Un* ***límite*** *para el funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ es un objeto $\varprojlim F$ en $\mathcal{C}$ junto con una familia compatible de morfismos $\left\{\varphi_i : \varprojlim F \to F(i)\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ tal que para cualquier otra familia compatible $\{\xi_i : X \to F(i)\}_{\mathcal{I}}$ existe un único $\xi : X \to \varprojlim F$ tal que $\varphi_i \circ \xi = \xi_i$.*

Definición 3.6.3. *Una categoría $\mathcal{C}$ es* ***completa*** *si el límite existe para todo funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ cuando $\mathcal{I}$ es pequeña.*

Proposición 3.6.4. *Si $\mathcal{C}$ es completa, entonces $\varprojlim$ es un funtor de $Fun(\mathcal{I},\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ donde $\mathcal{I}$ es pequeña.*

Demostración: Sean $F, G \in Fun(\mathcal{I},\mathcal{F})$ y $\eta : F \Rightarrow G$ una transformación natural. Por hipótesis $\varprojlim F$ y $\varprojlim G$ existen en $\mathcal{C}$, claramente definiremos $\varprojlim(F) = \varprojlim F$ para cada funtor en $Fun(\mathcal{I},\mathcal{C})$. Además para cada i tenemos el morfismo $\eta_i : F(i) \to G(i)$. Sean $\left\{\varphi_i : \varprojlim F \to F(i)\right\}_{\mathcal{I}}$ y $\left\{\gamma_i : \varprojlim G \to G(i)\right\}_{\mathcal{I}}$ las familias compatibles de cada límite.

Veremos que la familia $\left\{\eta_i \circ \varphi_i : \varprojlim F \to G(i)\right\}_{\mathcal{I}}$ es compatible: Para $\lambda : i \to j$ en $\mathcal{I}$ tenemos que $G(\lambda) \circ \eta_i \circ \varphi_i = \eta_j \circ F(\lambda) \circ \varphi_i = \eta_j \circ \varphi_j$ se sigue de la naturalidad de η y de que $\{\varphi_i\}$ es una familia compatible.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "\lambda"'] & F(i) \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "F(\lambda)"'] & G(i) \arrow[d, "G(\lambda)"] \\ j & F(j) \arrow[r, "\eta_j"] & G(j) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varprojlim F \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & F(i) \arrow[d, "F(\lambda)"] \\ & F(j) \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de $\underleftarrow{lim}G$ existe un único morfismo $\underleftarrow{lim}F \to \underleftarrow{lim}G$ al que denotaremos $\underleftarrow{lim}\eta$ que hace conmutar el siguiente cuadrado para cada i:

$$\begin{tikzcd}
\underleftarrow{lim}F \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, dotted, "\underleftarrow{lim}\eta"'] & F(i) \arrow[d] \\
\underleftarrow{lim}G \arrow[r, "\gamma_i"] & G(i)
\end{tikzcd}$$

Veamos que ésta asignación es un funtor. Para la transformación natural $id_F : F \Rightarrow F$ tenemos que $\underleftarrow{lim}(id_F)$ es el único morfismo con la propiedad de que $1_{F(i)} \circ \varphi_i = \varphi \circ \underleftarrow{lim}(id_F)$ por lo tanto $\underleftarrow{lim}(id_F) = 1_{\underleftarrow{lim}F}$.

Dadas $\eta : F \Rightarrow G$ y $\mu : G \Rightarrow H$ transformaciones naturales, tenemos que el cuadrado exterior conmuta, entonces por la propiedad universal de $\underleftarrow{lim}H$, $\underleftarrow{lim}(\mu) \circ \underleftarrow{lim}\eta = \underleftarrow{lim}(\mu \circ \eta)$.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d, Rightarrow, "\eta"'] \\
G \arrow[d, Rightarrow, "\mu"'] \\
H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underleftarrow{lim}F \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, dotted, "\underleftarrow{lim}(\eta)"] \arrow[dd, dotted, bend right, "\underleftarrow{lim}(\mu\circ\eta)"'] & F(i) \arrow[d, "\eta_i"] \\
\underleftarrow{lim}G \arrow[r, "\gamma_i"] \arrow[d, dotted, "\underleftarrow{lim}(\mu)"] & G(i) \arrow[d, "\mu_i"] \\
\underleftarrow{lim}H \arrow[r, "\psi_i"] & H(i)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\underleftarrow{lim}$ es un funtor de $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ en $\mathcal{C}$.

■

Definición 3.6.5. *Dualmente, el colímite de un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ es un objeto $\underrightarrow{lim}F$ junto con una familia compatible de morfismos $\left\{\psi_i : F_i \to \underrightarrow{lim}F\right\}$ que es universal para familias compatibles $\{\xi_i : F(i) \to X\}$.*

Definición 3.6.6. *Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es cocompleta si $\underrightarrow{lim}F$ existe para todo funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ con $\mathcal{I}$ pequeña.*

Ejemplos 3.6.7. 1. *Productos y coproductos.* Sea $\mathcal{I}$ una categoría discreta, es decir, los objetos forman un conjunto y los únicos morfismos en la categoría son las identidades. Dado un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$ completa, entonces tenemos una familia de morfismos $\left\{\varprojlim F \to F(i)\right\}$ para cada $i \in \mathcal{I}$ sin condiciones para la compatibilidad, con lo que $\varprojlim F = \prod F(i)$. Dualmente si $\mathcal{C}$ es cocompleta, se tiene $\varinjlim F = \bigoplus F(i)$.

2. *Limites directos y límites inversos*. Dado un sistema dirigido $(M_i, \alpha_{i,j})_I$ definido en el ejemplo 3.5.9 4. Consideramos la unión disjunta $\bigcup M_i$ y definimos una relación $\sim$ en $\bigcup M_i$ como sigue: $x \sim y$ si $x \in M_i$, $y \in M_j$ y existe $k \in I$ tal que $i \leq k$, $j \leq k$ y $\alpha_{i,k}(x) = \alpha_{j,k}(y)$ en M_k. Se prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y que $\bigcup M_i/\sim$ es también un módulo. Así el **límite directo** de $(M_i, \alpha_{i,j})_I$ lo definimos como $\varinjlim M_i = \bigcup M_i/\sim$.

   Denotaremos $Dir\,(I, A - Mod)$ a la categoría de sistemas dirigidos de módulos sobre el conjunto I. Un morfismo $\varphi : (M_i, \alpha_{i,j}) \to (N_i, \beta_{i,j})$ consta de una familia de morfismos $\varphi_i : M_i \to N_i$ tal que si $i \leq j$ se tiene que:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\alpha_{i,j}"'] & N_i \arrow[d, "\beta_{i,j}"] \\ M_j \arrow[r, "\varphi_j"] & N_j \end{tikzcd}$$

   conmuta. Entonces tenemos un funtor $\varinjlim : Dir\,(I, A - Mod) \longrightarrow A - Mod$.

3. *Productos y coproductos fibrados.* Sea $\mathcal{I}$ la categoría de diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\kappa"'] & i \\ & j \end{tikzcd}$$

junto con los morfismos identidad. Si $\mathcal{C}$ es cocompleta y $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ es un funtor, entonces el colímite de F es el coproducto fibrado de $F(\lambda)$ y $F(\mu)$.

$$\begin{tikzcd} F(k) \arrow[r, "F(\lambda)"] \arrow[d, "F(\kappa)"'] & F(i) \arrow[d] \\ F(j) \arrow[r] & \varinjlim F \end{tikzcd}$$

Proposición 3.6.8. *Si $\mathcal{C}$ tiene productos e igualadores, entonces es completa.*

Demostración: Probaremos que en $\mathcal{C}$ el límite existe para cada funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ donde $\mathcal{I}$ es una categoría pequeña. Sea $\lambda : i \to j$ un morfismo en $\mathcal{I}$ denotamos $i = s(\lambda)$ y $j = t(\lambda)$ (source y target).

Consideremos el producto $\prod_{\mathcal{I}} F(i)$ sobre los objetos de $\mathcal{I}$, junto con las proyecciones $\pi_{s(\lambda)} : \prod F(i) \to F(s(\lambda)) = F(i)$ y el producto $\prod_{\Lambda} F(\lambda)$ sobre Λ el conjunto de morfismos en $\mathcal{I}$

Observemos que para cada $\lambda \in \Lambda$, tenemos un par de morfismos $\pi_{t(\lambda)}$ y $F(\lambda) \circ \pi_{s(\lambda)}$ del producto $\prod_{\mathcal{I}}(F(i))$ en $F(t(\lambda))$ los cuales inducen un par de morfismos de $\prod_{\mathcal{I}} F(i) \to \prod_{\Lambda} F(t(\lambda))$ dados por la propiedad universal del producto; a los que denotaremos $\left(\pi_{t(\lambda)}\right)_{\Lambda}$ y $\left(F_{\lambda} \circ \pi_{s(\lambda)}\right)_{\Lambda}$ respectivamente.

$$\begin{tikzcd} \prod_{\mathcal{I}} F(i) \arrow[r, "\pi_{t(\lambda)}"] \arrow[d, dotted, "\left(\pi_{t(\lambda)}\right)_{\Lambda}"'] & F(t(\lambda)) \\ \prod_{\Lambda} F(t(\lambda)) \arrow[ur, "\pi_{t(\lambda)}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \prod_{\mathcal{I}} F(i) \arrow[r, "F\lambda\circ\pi_{s(\lambda)}"] \arrow[d, dotted, "\left(F\lambda\circ\pi_{s(\lambda)}\right)_{\Lambda}"'] & F(t(\lambda)) \\ \prod_{\Lambda} F(t(\lambda)) \arrow[ur, "\pi_{t(\lambda)}"'] & \end{tikzcd}$$

Sea E el igualador de éstos dos morfismos. Entonces $\left(\pi_{t(\lambda)}\right)_{\Lambda} \circ e = \left(F\lambda \circ \pi_{s(\lambda)}\right)_{\Lambda} \circ e$, si componemos con $\pi_{t(\lambda)}$ por la izquierda, obtenemos que e es el igualador del par de morfismos $\pi_{t(\lambda)}$ y $F\lambda \circ \pi_{s(\lambda)}$ para cada λ.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "\mu_i"'] & \prod_{\mathcal{I}} F(i) \arrow[r, shift left, "(\pi_{t(\lambda)})_\Lambda"] \arrow[r, shift right, "(F\lambda\circ\pi_{s(\lambda)})_\Lambda"'] \arrow[d, "\pi_i"] & \prod_\Lambda F(t(\lambda)) \\
& F(i) &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, la familia de morfismos $\mu_i = \pi_i \circ e$ determina una transformación natural $\mu : \Delta_E \Rightarrow F$ donde $\Delta_E : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ es el funtor constante E; pues para cada i se tiene $F\lambda \circ \pi_i \circ e = F\lambda \circ \pi_{s(\lambda)} \circ e = \pi_{t(\lambda)} \circ e = \pi_j \circ e = \mu_j$.

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[d, "\lambda"'] & \Delta_E(i) = E \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, "1_E"'] & F(i) \arrow[d, "F(\lambda)"] \\
j & \Delta_E(j) = E \arrow[r, "\mu_j"] & F(j)
\end{tikzcd}$$

Esto nos da condiciones de compatibilidad para la familia $\{\mu_i : E \to F(i)\}_{\mathcal{I}}$. Consideremos ahora una familia compatible $\{\xi_i : X \to F(i)\}_{\mathcal{I}}$. Por la propiedad unviersal del producto, la familia induce un morfismo $\xi : X \to \prod_{\mathcal{I}} F(i)$ tal que $\xi_i = \pi_i \circ \xi$. Por la compatibilidad tenemos que $\xi_j = F\lambda \circ \xi_i$. Entonces $\pi_j \circ \xi = F\lambda \circ \pi_i \circ \xi$, es decir $\pi_{t(\lambda)} \circ \xi = F\lambda \circ \pi_{s(\lambda)} \circ \xi$ por lo tanto ξ iguala a π_{t_λ} con $F\lambda \circ \pi_{s(\lambda)}$. Como E es el igualador, existe un único morfismo φ con la propiedad de que $e \circ \varphi = \xi$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & \prod_{\mathcal{I}} F(i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_\Lambda F(t(\lambda)) \\
X \arrow[u, dotted, "\varphi"] \arrow[ur, "\xi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Así $\xi_j = \pi_j \circ \xi = \pi_j \circ e \circ \varphi = \mu_j \circ \varphi$ y además $F\lambda \circ \xi_i = F\lambda \circ \pi_i \circ \xi = F\lambda\pi_j \circ e \circ \varphi = F\lambda \circ \mu_i \circ \varphi$, esto es que el siguente triángulo es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dotted, "\varphi"] \arrow[ddl, bend right, "\xi_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\xi_j"] & \\
 & E \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dr, "\mu_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F\lambda"] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\{\mu_i\}_{\mathcal{I}}$ es universal para familias compatibles de morfismos. Por lo tanto $E = \varprojlim F$.

■

Corolario 3.6.9. *Si $\mathcal{C}$ es abeliana y $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ es un funtor, entonces*

$$\varprojlim F = Ker\left(\prod_{\mathcal{I}} F(i) \xrightarrow{\pi} \prod_{\Lambda} F(t(\lambda))\right)$$

Demostración: Consideremos $\pi_{t(\lambda)}$ y $F(\lambda) \circ \pi_{s(\lambda)}$ como en la demostración de arriba y definimos $\pi_\lambda = F(\lambda) \circ \pi_{s(\lambda)} - \pi_{t(\lambda)} : \prod_{\mathcal{I}} F(i) \to F(t(\lambda))$. Éste morfismo induce un único $\pi : \prod_{\mathcal{I}} F(i) \to \prod_{\Lambda} F(t(\lambda))$. Observemos que considerar el núcleo de π es equivalente a considerar el igualador de $\left(\pi_{t(\lambda)}\right)_\Lambda$ y $\left(F_\lambda \circ \pi_{s(\lambda)}\right)_\Lambda$, con lo cual los detalles de la prueba son similares a los de la proposición anterior.

Sea $u = ker(\pi)$, definamos $\varphi_i = \pi_i \circ u$ para cada i y probemos que forman una familia compatible: $F(\lambda) \circ \varphi_i = F(\lambda) \circ \pi_i \circ u = \pi_j \circ u = \varphi_j$. Ahora si tenemos otra familia compatible $\{\xi_i : X \to F(i)\}_{\mathcal{I}}$, ésta induce un único morfismo $\xi : X \to \prod_{\mathcal{I}} F(i)$ tal que $\xi_i = \pi_i \circ \xi$. Además $\pi_\lambda \circ \xi = \left(F(\lambda) \circ \pi_{s(\lambda)} - \pi_{t(\lambda)}\right) \circ \xi = F(\lambda) \circ \pi_{s(\lambda)} \circ \xi - \pi_{t(\lambda)} \circ \xi = F(\lambda) \circ \xi_i - \xi_j = \hat{0}$, entonces por la propiedad universal del núcleo, existe $\eta : X \to Ker(\pi)$ tal que $\xi = u \circ \eta$, que preserva la compatibilidad compuesta con φ_i. Concluimos que $\varprojlim F = Ker\left(\prod_{\mathcal{I}} F(i) \xrightarrow{\pi} \prod_{\Lambda} F(t(\lambda))\right)$.

■

Proposición 3.6.10. *Dualmente, si $\mathcal{C}$ tiene coproductos y conúcleos y $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ es un funtor, entonces*

$$\varinjlim F = Coker\left(\bigoplus_{\Lambda} F(s(\lambda)) \xrightarrow{\iota} \bigoplus_{\mathcal{I}} F(i)\right)$$

Donde ι es el morfismo inducido por

$$\iota_\lambda = \iota_{t(\lambda)} \circ F(\lambda) - \iota_{s(\lambda)} : F(s(\lambda)) \to \bigoplus_{\mathcal{I}} F(i)$$

Corolario 3.6.11. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría completa y $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor. Sea $\{\alpha_i : F(i) \to C\}$ una familia compatible de morfismos que inducen $\alpha : \varprojlim F \to C$. Entonces $Im(\alpha) = \sum Im(\alpha_i)$*

Demostración:

Sea $\overline{\alpha}$ el morfismo inducido por la familia $\{\alpha_i\}_{\mathcal{I}}$ y la propiedad universal del coproducto. Observemos que $Im(\overline{\alpha}) = \sum_I Im(\alpha_i)$, así podemos considerar la factorización epi-mono $\overline{\alpha} = \mu \circ \epsilon$ que construimos a partir de la imagen de cada α_i; observemos que ϵ es un epimorfismo por la proposicion 1.4.1.

$$\begin{tikzcd}
 & F(i) \arrow[dl, hook] \arrow[d, two heads, "\epsilon_i"] \arrow[dr, "\alpha_i"] & \\
\bigoplus_{\mathcal{I}} F(i) \arrow[dr, "e"'] & Im(\alpha_i) \arrow[r, tail] \arrow[d, hook] & C \\
 & \sum Im(\alpha_i) \arrow[ur, tail, "\mu"] &
\end{tikzcd}$$

Además podemos factorizar $\overline{\alpha}$ a través de la imagen de α como $\overline{\alpha} = q \circ p \circ u$ donde u es el conúcleo de ι (proposición 3.6.10) y $\alpha = q \circ p$ pues $\overline{\alpha} = \alpha \circ u$. Es decir, $\sum Im(\alpha_i) = Im(\overline{\alpha}) = Im(\alpha)$

$$
\begin{tikzcd}
 & F(i) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\alpha_i" near start] & \varinjlim F \arrow[d, dotted, "\alpha"] \arrow[dr, two heads, "p"] & \\
\bigoplus_\Lambda F(s(\lambda)) \arrow[r, "\iota"] & \bigoplus_{\mathcal{I}} F(i) \arrow[ur, "u" near start] \arrow[r, dotted, "\overline{\alpha}"] \arrow[d, two heads, "\epsilon"'] & C & Im(\alpha) \arrow[l, tail, "q"] \\
 & Im(\overline{\alpha}) \arrow[ur, tail, "\mu"] & &
\end{tikzcd}
$$

■

Definición 3.6.12. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías preaditivas, decimos que un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$* ***preserva límites*** *si para todo funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ donde $\mathcal{I}$ es pequeña y $\varprojlim F$ existe; se tiene que $T(\varprojlim F) = \varprojlim TF$*

Proposición 3.6.13. *Sea $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo entre dos categorías abelianas. Son equivalentes:*

$i)$ *T es exacto izquierdo.*

$ii)$ *T preserva núcleos*

$iii)$ *T preserva límites finitos.*

Demostración:

$i) \Rightarrow ii)$ T es un funtor exacto izquierdo. Sea $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ una sucesión exacta en $\mathcal{C}$, es decir $\alpha = ker(\beta)$. Entonces

$$0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C)$$

es exacta, es decir $T(\alpha) = ker(T(\beta))$. Por lo tanto T preserva núcleos.

$ii) \Rightarrow iii)$ Sea $\mathcal{I}$ una categoría finita, $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor con límite en $\mathcal{C}$. Recordemos por la construcción del límite en la proposición 3.6.9 que la siguiente sucesion es exacta:

$$0 \longrightarrow \varprojlim F \xrightarrow{u} \prod_{\mathcal{I}} F(i) \xrightarrow{\pi} \prod_{\Lambda} F(t(\lambda))$$

Como el funtor T preserva núcleos, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con sucesiones exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(\varprojlim F) \arrow[r, "T(u)"] & T(\prod_{\mathcal{I}} F(i)) \arrow[r, "T(\pi)"] \arrow[d, "\cong"', "\text{T es aditivo e } \mathcal{I} \text{ finito}"] & T(\prod_{\Lambda} F(t(\lambda))) \arrow[d, "\cong"'] \\
0 \arrow[r] & \varprojlim TF \arrow[r] & \prod_{\mathcal{I}} TF(i) \arrow[r] & \prod_{\Lambda} TF(t(\lambda))
\end{tikzcd}$$

Definimos para cada $i \in \mathcal{I}$, $\varphi_i = T(\pi_i) \circ T(u) : T(\varprojlim F) \to TF(i)$. Notemos que $TF(\lambda) \circ \varphi_i = TF(\lambda) \circ T(\pi_i) \circ T(u) = T(F(\lambda) \circ \pi_i) \circ T(u) = T(\pi_j) \circ T(u) = \varphi_j$. Por lo tanto $\{\varphi_i\}_{\mathcal{I}}$ es una familia compatible.

Ahora, sea $\xi_i : X \to TF(i)$ una familia compatible. Esta induce un morfismo $\varphi : X \to \prod_{\mathcal{I}} TF(i)$ dado por la propiedad universal del producto.

Entonces $T(\pi) \circ \xi = \hat{0}$ si y sólo si $\pi_{TF(t(\lambda))} \circ T(\pi) \circ \xi = \hat{0}$. Calculemos $\pi_{TF(t(\lambda))} \circ T(\pi) \circ \xi = T(\pi_{F(t(\lambda))}) \circ T(\pi) \circ \xi = T(\pi_\lambda) \circ \xi = T\left((F(\lambda) \circ \pi_i) - \pi_{t(\lambda)}\right) \circ \xi = \left(TF(\lambda) \circ T(\pi_i) - T\pi_{t(\lambda)}\right) \circ \xi = TF(\lambda) \circ T(\pi_i) \circ \xi - T(\pi_{t(\lambda)}) \circ \xi = TF(\lambda) \circ \xi_i - TF(t(\lambda)) = TF(j) - TF(j) = \hat{0}$ por lo tanto $T(\pi) \circ \xi = \hat{0}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(\varprojlim F) \arrow[r, "T(u)"] & \prod_{\mathcal{I}} TF(i) \arrow[r, "T(\pi)"] \arrow[dr, "T(\pi_\lambda)"'] & \prod_{\Lambda} TF(t(\lambda)) \arrow[d, "\pi_{TF(t(\lambda))}"] \\
& X \arrow[ur, "\xi"'] & & TF(t(\lambda))
\end{tikzcd}$$

Como T preserva núcleos, $T(\varprojlim F) = T(Ker(u)) = Ker(T(u))$. Entonces existe un único $\eta : X \to T(\varprojlim F)$ tal que $\xi = T(u) \circ \eta$. Así $\varphi_j \circ \eta = T(\pi_j) \circ T(u) \circ \eta = T(\pi_j) \circ \xi = \xi_j$ y $\varphi_i \circ \eta = T(\pi_i) \circ \eta = T(\pi_i) \circ \xi = \varphi_i$ por lo tanto $T(\varprojlim F)$ tiene la propiedad universal del límite de TF, es decir T preserva límites.

$iii) \Rightarrow i)$ Supongamos que T preserva límites. Sea $\mathcal{I}$ la categoría determinada por $Obj(\mathcal{I}) = \{i, j\}$ y morfismos $Hom(i, i) = \{1.i\}$, $Hom(j, j) = \{1, j\}$, $Hom(i, j) = \{\lambda, \mu\}$ y $Hom(j, i) = \emptyset$.

Sea $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor y consideremos la familia de morfismos dada con el límite de F. Entonces para λ y μ tenemos que $F(\lambda) \circ \varphi_i = \varphi_j = F(\mu) \circ \varphi_i$, es decir φ_i iguala a $F(\lambda)$ y $F(\mu)$. Además, para cualquier otro morfismo $x_i : X \to F(i)$ que los iguale, existe un único $\eta : X \to \underleftarrow{lim} F$ tal que $x = \varphi_i \circ \eta$ por la propieda universal del límite.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dotted, "\eta"] \arrow[ddl, bend right, "x_i"'] \arrow[ddr, bend left] & \\
& \underleftarrow{lim} F \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\
F(i) \arrow[rr, shift left, "F(\lambda)"] \arrow[rr, shift right, "F(\mu)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto φ_i es el igualador de $F(\lambda)$ y $F(\mu)$. En particular si $F(\mu) = \hat{0}$, $\varphi_i = ker(F(\lambda))$ y $\underleftarrow{lim} F = Ker(F(\lambda))$. Dicho de otra manera, un núcleo en $\mathcal{C}$ siempre lo podemos ver como el límite de un funtor.

Consideremos la sucesión $0 \longrightarrow \underleftarrow{lim} F \xrightarrow{\varphi_i} F(i) \xrightarrow{F(\lambda)} F(j)$. Como T preserva límites, $T\left(Ker(F(\lambda))\right) = T\left(\underleftarrow{lim} F\right) = \underleftarrow{lim} TF = Ker(TF(\lambda))$. Es decir, la sucesión $0 \longrightarrow \underleftarrow{lim} TF \xrightarrow{T(\varphi_i)} TF(i) \xrightarrow{TF(\lambda)} TF(j)$ es exacta. Por lo tanto T es exacto izquierdo.

■

Proposición 3.6.14. *Dualmente al teorema anterior: Son equivalentes para un funtor aditivo $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías abelianas.*

$i)$ *T es exacto derecho.*

ii) T preserva conúcleos.

iii) T preserva colímites finitos.

Proposición 3.6.15. *Si $\mathcal{J}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ es completa, entonces $Fun(\mathcal{J},\mathcal{C})$ es completa.*

Demostración: Sea $\mathcal{I}$ una categoría pequeña. Consideremos un funtor $F : \mathcal{I} \to Fun(\mathcal{J},\mathcal{C})$ y veamos que $\varprojlim F$ existe en $Fun(\mathcal{J},\mathcal{C})$. Observemos primero que si λ es un morfismo en $\mathcal{I}$, entonces $F(\lambda)$ es una transformación natural:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I} \arrow[r, "F"] & Fun(\mathcal{J},\mathcal{C}) \\ i \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\lambda"'] & F(i) : \mathcal{J} \to \mathcal{C} \arrow[d, Rightarrow, "F(\lambda)"] \\ i' \arrow[r, mapsto] & F(i') : \mathcal{J} \to \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(i) \arrow[r, Rightarrow, "F(\lambda)"] & F(i') \\ j \arrow[d, "\lambda"'] & F(i)(j) \arrow[r, "F(\lambda)_j"] \arrow[d, "F(i)(\mu)"'] & F(i')(j) \arrow[d, "F(i')(\mu)"] \\ j' & F(i)(j') \arrow[r, "F(\lambda)_{j'}"'] & F(i')(j') \end{tikzcd}$$

Definamos para F, el funtor $\check{F} : \mathcal{J} \to Fun(\mathcal{I},\mathcal{C})$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{J} \arrow[r, "\check{F}"] & Fun(\mathcal{I},\mathcal{C}) \\ j \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\mu"'] & \check{F}(j) = F_j \arrow[d, Rightarrow, "\check{F}(\mu)=\check{\mu}"] \\ j' \arrow[r, mapsto] & \check{F}(j') = F_{j'} \end{tikzcd}$$

Donde F_j y $\check{\mu}$ están dados por los siguiente cuadrados conmutativos:

Es decir, $\check{\mu}_i = F(i)(\mu)$. Notemos que F_j hereda las propiedades funtoriales de F. Por otro lado, dado que $\mathcal{C}$ es completa, $\varprojlim : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ es un funtor:

$$\mathcal{I} \xrightarrow{F_j} \mathcal{C} \qquad\qquad F_j \xRightarrow{\check{\mu}} F_{j'}$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\lambda"] & F_j(i) = F(i)(j) \arrow[d, "F_j(\lambda)=F(\lambda)_j"] \\ i' \arrow[r, mapsto] & F_j(i') = F(i')(j) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[d, "\lambda"] & F_j(i) \arrow[r, "F(i)(\mu)"] \arrow[d, "F_j(\lambda)"] & F_{j'}(i) \arrow[d, "F_{j'}(\lambda)"] \\ i' & F_j(i') \arrow[r, "F(i')(\mu)"] & F_{j'}(i') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} j \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\mu"'] & \varprojlim F_j \arrow[d, "\varprojlim \check{\mu}"] \\ j' \arrow[r, mapsto] & \varprojlim F_{j'} \end{tikzcd}$$

Observemos que $\left(\varprojlim F \circ \check{F}\right) \in Fun(\mathcal{J},\mathcal{C})$, es tal que para cada $j \in \mathcal{J}$, $\left(\varprojlim F \circ \check{F}\right)(j) = \varprojlim \left(\check{F}(j)\right) = \varprojlim F_j$. Probaremos que $\left(\varprojlim F \circ \check{F}\right)$ es el límite para F.

Primero veamos que hay una familia compatible de transformaciones naturales $\left\{\varphi_i : \left(\varprojlim F \circ \check{F}\right) \Longrightarrow F(i)\right\}_{\mathcal{I}}$. Como $\varprojlim F_j$ existe en $\mathcal{C}$ por ser completa, existe una familia compatible $\left\{\varprojlim F_j \xrightarrow{(\varphi_i)_j} F_j(i)\right\}_{\mathcal{I}}$, es decir, $F(\lambda)_i \circ (\varphi_i)_j = (\varphi_{i'})_j$ para cada $j \in \mathcal{J}$ y cada $\lambda \in \mathcal{I}$. Definimos $(\varphi_i)_j$ como el i-ésimo morfismo compatible en la familia $\left\{\varprojlim F_j \xrightarrow{(\varphi_i)_j} F_j(i)\right\}_{\mathcal{I}}$. Así tenemos una transformación natural $\varphi_i : \left(\varprojlim \circ \check{F}\right) \Rightarrow F(i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$.

Veamos ahora que la familia $\left\{\varphi_i : \left(\varprojlim \circ \check{F}\right) \Rightarrow F(i)\right\}$ es compatible. Esto es, que para cada $\lambda \in \mathcal{I}$ el siguiente triángulo conmuta.

$$\begin{tikzcd} \varprojlim \circ \check{F} \arrow[r, Rightarrow, "\varphi_i"] \arrow[dr, Rightarrow, "\varphi_{i'}"'] & F(i) \arrow[d, Rightarrow, "F(\lambda)"] & i \arrow[d, "\lambda"] \\ & F(i') & i' \end{tikzcd}$$

Demostraremos que en cada componente $(F(\lambda) \circ \varphi_i)_j = (\varphi_{i'})_j$. Si calculamos la componente j-ésima de las transformaciones naturales del triángulo anterior, obtenemos el siguiente diagrama que conmuta porque $\left\{(\varphi_i)_j\right\}$ es ya una familia compatible.

$$\begin{tikzcd}
\left(\underleftarrow{lim} \circ \check{F}\right)(j) = \underleftarrow{lim}F_j \arrow[r, "(\varphi_i)_j"] \arrow[dr, "(\varphi_{i'})_j"'] & F_j(i) = F(i)(j) \arrow[d, "F_j(\lambda)"] \\
& F_j(i') = F(i')(j)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\{\varphi_i\}$ es compatible.

Dado $G \in Fun(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ junto con una familia compatible de transformaciones naturales $\{\gamma_i : G \Rightarrow F(i)\}_{\mathcal{I}}$. Induce una familia compatible de morfismos $(\gamma_i)_j : G(j) \to F(i)(j) = F_j(i)$, entonces por la propiedad universal de $\underleftarrow{lim}F_j$ existe un único η_j que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& & F_j(i) \arrow[dd, "F_j(\lambda)"] & i \arrow[dd, "\lambda"] \\
G(j) \arrow[r, dotted, "\eta_j"] \arrow[urr, bend left, "(\gamma_i)_j"] \arrow[drr, bend right, "(\gamma_{i'})_j"'] & \underleftarrow{lim}F_j \arrow[ur, "(\varphi_i)_j"] \arrow[dr, "(\varphi_{i'})_j"'] & & \\
& & F_j(i') & i'
\end{tikzcd}$$

Así $\{\eta_j\}_{\mathcal{J}}$ determina una transformación natural η tal que $\varphi_i \circ \eta = \gamma_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Concluimos que $\left(\underleftarrow{lim} \circ \check{F}\right)$ tiene la propiedad universal de $\underleftarrow{lim}F$. Por lo tanto $Fun(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ es una categoría completa.

■

Observación 3.6.16. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría completa e $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ categorías pequeñas. Además $F : \mathcal{I} \to Fun(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ y $\check{F} : \mathcal{J} \to Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ funtores, como* *en la proposición anterior. Entonces*

$$\varprojlim_{\mathcal{J}}\left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F\right) = \varprojlim_{\mathcal{I}}\left(\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}\right)$$

Donde el subíndice del límite indica la familia compatible correspondiente.

Demostración: Sea $\left\{\varphi_i : \varprojlim_{I} F \Rightarrow F(i)\right\}$. Como $\mathcal{C}$ es completa, entonces existe $\varprojlim_{\mathcal{J}}\left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F\right)$. Es decir, tenemos una familia compatible de morfismos $\left\{\psi_j : \varprojlim_{\mathcal{J}}\left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F\right) \longrightarrow \left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F\right)(j)\right\}_{\mathcal{J}}$.

Por otro lado tenemos $\check{F} : \mathcal{J} \to Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. Como $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ es completa, podemos considerar el límite $\left\{\xi_j : \varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F} \Rightarrow \check{F}(j)\right\}_{\mathcal{J}}$ y a su vez existe $\left\{\varsigma_i : \varprojlim_{\mathcal{I}}\left(\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}\right) \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}\right\}_{\mathcal{I}}$

Como $\varprojlim_{\mathcal{I}} F = \left(\varprojlim \circ \check{F}\right)$, entonces para cada i, existe un único morfismo α_i por la propiedad universal de $\varprojlim_{\mathcal{I}} F$ tal que $(\xi_j)_i = (\varphi_i)_j \circ \alpha_i$. Para cada $j \in \mathcal{J}$ existe un único β_j tal que $(\varphi_i)_j = \beta_j \circ (\xi_j)_i$.

$$\begin{tikzcd}
\left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F\right)(j) = \left(\varprojlim F_j\right)(i) \arrow[r, "(\varphi_i)_j"] \arrow[d, dotted, shift left, "\beta_j"] & F(i)(j) \\
\left(\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}\right)(i) \arrow[u, dotted, shift left, "\alpha_i"] \arrow[ur, "(\xi_j)_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Definimos las transformaciones naturales $\alpha = \{\alpha_i\}_{\mathcal{I}} : \varprojlim \check{F}(i) \Rightarrow \varprojlim F(j)$ y $\beta = \{\beta_j\}_{\mathcal{J}} : \varprojlim F(j) \Rightarrow \varprojlim \check{F}(i)$.

Con lo anterior, tenemos un par de familias compatibles $\{\alpha \circ \psi_j\}$ y $\{\beta \circ \varsigma_i\}$ que inducen ϵ y δ que hacen conmutar el diagrama de abajo. Por lo tanto $\varprojlim_{\mathcal{J}}\left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F\right) = \varprojlim_{\mathcal{I}}\left(\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}\right)$ en $\mathcal{C}$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \varprojlim_{\mathcal{J}}\left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F\right) \arrow[dddll, bend right, "\psi_j"'] \arrow[dddrr, bend left, "\psi_{j'}"] \arrow[d, dotted, shift left, "\delta"] & & \\
 & & \varprojlim_{\mathcal{I}}\left(\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}\right) \arrow[u, dotted, shift left, "\epsilon"] \arrow[dl, "\varsigma_i"'] \arrow[dr, "\varsigma_{i'}"] & & \\
 & \left(\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}\right)(i) \arrow[rr] \arrow[dl, Rightarrow, shift right, "\beta"'] & & \left(\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}\right)(i') \arrow[dr, Rightarrow, shift left, "\beta'"] & \\
\left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F\right)(j) \arrow[rrrr] \arrow[ur, Rightarrow, shift right, "\alpha"'] & & & & \left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F\right)(j') \arrow[ul, Rightarrow, shift left, "\alpha'"]
\end{tikzcd}
$$

∎

Proposición 3.6.17. *El funtor* $\varprojlim_{\mathcal{J}} : Fun(\mathcal{J}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ *preserva límites.*

Demostración:

Observemos primero que la correspondencia entre F y $\check{F}$ es biyectiva, es decir, tenemos un isomorfismo de categorías $Fun(\mathcal{I}, Fun(\mathcal{J}, \mathcal{C})) \cong Fun(\mathcal{J}, Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C}))$. Así simétricamente al resultado de la proposición 3.6.15 tenemos que $\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F} = \left(\varprojlim_{\mathcal{J}} \circ F\right)$ y por la observación anterior $\varprojlim_{\mathcal{J}}\left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F\right) = \varprojlim_{\mathcal{I}}\left(\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}\right) = \varprojlim_{\mathcal{I}}\left(\varprojlim_{\mathcal{J}} \circ F\right)$ que prueba que $\varprojlim_{\mathcal{J}}$ preserva límites.

∎

Ejemplos 3.6.18. 1. *Límites directos de módulos.* El funtor

$$\varinjlim : Dir\,(I, A - Mod) \to A - Mod$$

definido en el ejemplo 3.6.7 2, es exacto. Entonces por la proposición 3.6.14, $\varinjlim$ preserva colimites.

2. *El funtor Hom.* Como sabemos (por el ejemplo 3.1.3), el funtor $Hom(\_,\_) : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{A}b$ es exacto izquierdo en cada variable, entonces preserva colímites:

$$Hom_{\mathcal{C}}\left(C, \varprojlim D_i\right) \cong \varprojlim Hom_{\mathcal{C}}\left(C, D_i\right)$$

$$Hom_{\mathcal{C}}\left(\varinjlim C_i, D\right) \cong \varprojlim Hom_{\mathcal{C}}\left(C_i, D\right)$$

3. *Coproductos.* Sea $\{C_i\}_I$ una familia infinita de objetos, el coproducto

$$\bigoplus_I C_i = \varprojlim \bigoplus_J C_i$$

Donde $J \subset I$, finito. La propiedad del límite se obtiene a partir de la propiedad universal del coproducto.

4. *Familias directas de subobjetos.* Sea $\mathcal{C}$ una categoría cocompleta y C un objeto de $\mathcal{C}$. Decimos que una familia $\{C_i\}_I$ de subobjetos de C es directa si I es un conjunto dirigido con el siguiente orden: $i \leq j$ si $C_i \subseteq C_j$.

   Observemos que $\varprojlim C_i$ no es necesariamente un subobjeto de C. Sin embargo existe un morfismo canónico $\alpha : \varprojlim C_i \to C_i$ cuya imagen conocemos por el corolario 3.6.11. Esto es $Im(\alpha) = \sum C_i$.

Proposición 3.6.19. *Si $\{C_i\}_I$ es una familia de subobjetos de C, entonces el límite directo de el sistema $\{C/C_i\}_I$ de objetos cociente es $C/\sum C_i$*

Demostración: La familia $\{f_i : C_i \rightarrowtail C\}_I$ induce una flecha $a : \bigoplus C_i \to C$ que es un monomorfismo. Por el lema 3.6.11 $Im(a) = \sum C_i$ y el ejemplo anterior. Entonces

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, hook, "\iota_i"'] & C \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "\cong"'] & C/C_i \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\gamma_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sum C_i \arrow[r, "im(a)"] & C \arrow[r, "\sigma_i"] & C/\sum C_i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sea γ_i dado por la propiedad universal del conúcleo, con la propiedad de que $\gamma_i \circ \pi_i = \sigma_i \circ 1_C$. Se prueba que la familia $\{\gamma_i : C/C_i \to C/\sum C_i\}_I$ es compatible. Sea $C_i \hookrightarrow C_j$, entonces induce un único $k : C/C_i \to C/C_j$ tal que $k_i \circ \pi_i = \pi_j \circ 1_C$. y $\gamma_i = \gamma_j \circ k$.

Sea $\left\{\psi_i : C_i \to \varinjlim C_i\right\}_I$ la familia compatible que nos da $\varinjlim C_i$, entonces existe un único $\alpha : \varinjlim C_i \to C$ tal que $\alpha \circ \psi_i = f_i$ para cada $i \in I$. Consideremos la factorización de α sobre su imagen. De nuevo por el lema 3.6.11, tenemos que $Im(\alpha) = \sum C_i$. Ahora apliquemos el funtor exacto derecho $\varinjlim : Dir(\{C_i\}, I) \to \mathcal{C}$ a la sucesión exacta $0 \to C_i \to C \to C/C_i \to 0$. Obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim C_i \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, two heads] & C \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \varinjlim (C/C_i) \arrow[r] \arrow[d, dotted, shift right, "\lambda"'] & 0 \\
\sum C_i \arrow[r] & C \arrow[r] & C/\sum C_i \arrow[r] \arrow[u, dotted, shift right, "\mu"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces existen morfismos únicos λ y μ dadps por la propiedad universal del conúcleo y del colímite, respectivamente, que hacen conmutar el cuadrado de la derecha. Por lo tanto $\varinjlim C/C_i = C/\sum C_i$

■

3.7. Funtores Adjuntos

Definición 3.7.1. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías preaditivas y dos funtores $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Decimos que T es **adjunto derecho** de S y lo denotamos $S \dashv T$ (simétricamente S es adjunto izquierdo de T) si hay una equivalencia natural:*

$$\eta : Hom_{\mathcal{C}}(\ \ , T(\ \ )) \Longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(S(\ \ ), \ \ )$$

de funtores de $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}b$. Es decir, para cada par de objetos $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$ existe un isomorfismo $\eta_{C,D} : Hom_{\mathcal{C}}(C, T(D)) \to Hom_{\mathcal{D}}(S(C), D)$ que es natural en C y en D. Esto es, si $\lambda : C' \to C$ y $\delta : D \to D'$ tenemos los siguientes cuadrados conmutativos.

$$\begin{array}{ccc} Hom(C,T(D)) & \xrightarrow{\eta_{C,D}} & Hom(S(C),D) \\ {\scriptstyle \_\circ\lambda}\downarrow & \text{Naturalidad en } C & \downarrow{\scriptstyle \_\circ S(\lambda)} \\ Hom(C',T(D)) & \xrightarrow[\eta_{C',D}]{} & Hom(S(C'),D) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Hom(C,T(D)) & \xrightarrow{\eta_{C,D}} & Hom(S(C),D) \\ {\scriptstyle T(\delta)\circ\_}\downarrow & \text{Naturalidad en } D & \downarrow{\scriptstyle \delta\circ\_} \\ Hom(C,T(D')) & \xrightarrow[\eta_{C,D'}]{} & Hom(S(C'),D) \end{array}$$

Dicho de otra manera, la naturalidad en C y D de η se puede sintetizar en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Hom(C,T(D)) & \xrightarrow{\eta_{C,D}} & Hom(S(C),D) \\ {\scriptstyle T(\delta)\circ\_\circ\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta\circ\_\circ S(\lambda)} \\ Hom(C',T(D')) & \xrightarrow{\eta_{C',D'}} & Hom(S(C'),D') \end{array}$$

Proposición 3.7.2. *Si T y T' son adjuntos derechos de $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entonces T y T' son naturalmente equivalentes.*

Demostración: Sean C en $\mathcal{C}$ y D en $\mathcal{D}$. Entonces tenemos isomorfismos $\eta_{C,D} : Hom(C, T(D)) \to Hom(S(C), D)$ y $\mu_{C,D}^{-1} : Hom(S(C), D) \to Hom(C, T'(D))$. Consideremos $\lambda_{C,D} = \mu_{C,D}^{-1} \circ \eta_{C,D}$ y observemos que $\lambda_{C,D}$ es también un isomorfismo y es natural en C y en D. Sean $\delta : D \to D'$ y $\gamma : C' \to C$ entonces el cuadrado exterior conmuta dado que los cuadrados de adentro conmutan por la naturalidad de η y μ respectivamente.

$$
\begin{tikzcd}
Hom(C,T(D)) \arrow[r, "\eta_{C,D}"] \arrow[d, "T(\delta)\circ\_\circ\gamma"'] \arrow[rr, bend left, "\lambda_{C,D}"] & Hom(S(C),D) \arrow[r, "\mu^{-1}_{C,D}"] \arrow[d, "\delta\circ\_\circ S(\gamma)"'] & Hom(C.T'(D)) \arrow[d, "T'(\delta)\circ\_\circ\gamma"'] \\
Hom(C',T(D')) \arrow[r, "\eta_{C',D'}"'] \arrow[rr, bend right, "\lambda_{C',D'}"'] & Hom(S(C'),D') \arrow[r, "\mu^{-1}_{C',D'}"'] & Hom(C',T'(D'))
\end{tikzcd}
$$

Así tenemos una equivalencia natural $\lambda : Hom(\_, T(\_)) \Rightarrow Hom(\_, T'(\_))$.

Consideremos $\lambda_{T(D),D} : Hom(T(D), T(D)) \to Hom(T(D), T'(D))$. Definimos $\varphi_D = \lambda_{TD,D}(1_{T(D)}) : T(D) \to T'D$. Veamos que φ_D determina una equivalencia natural $\varphi : T \Rightarrow T'$. Primero observemos que φ_D es un isomorfismo para cada D.

Sustituyamos $C = T(F)$ en el cuadrado de la naturalidad de λ en D. Si $\delta : D \to D'$, tenemos que el siguiente cuadrado conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
Hom(T(D),T(D)) \arrow[r, "\lambda_{T(D),D}"] \arrow[d, "T(\delta)\circ\_"'] & Hom(T(D),T'(D)) \arrow[d, "T'(\delta)\circ\_"] \\
Hom(T(D),T(D')) \arrow[r, "\lambda_{T(D),D'}"] & Hom(T(D),T'(D'))
\end{tikzcd}
$$

En consecuencia

$$\lambda_{T(D),D'}\left(T(\delta)\right) = T'(\delta) \circ \lambda_{T(D),D}\left(1_{T(D)}\right) = T(\delta) \circ \varphi_D \tag{3.1}$$

Además, por el cuadrado de la naturalidad de λ en C y cuando consideramos $T(\delta) : T(D) \to T(D')$ en $\mathcal{C}$, se tiene el siguiente cuadrado conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
Hom(T(D'),T(D')) \arrow[r, "\lambda_{T(D')D'}"] \arrow[d, "\_\circ T(\delta)"'] & Hom(T(D'),T'(D')) \arrow[d, "\_\circ T'(\delta)"] \\
Hom(T(D),T(D')) \arrow[r, "\lambda_{T(D),D'}"] & Hom(T(D).T'(D'))
\end{tikzcd}
$$

de donde

$$\lambda_{T(D),D'}\left(T(\delta)\right) = \lambda_{T(D),D'}\left(1_{T(D')}\right) \circ T'(\delta) = \varphi_{D'} \circ T'(\delta) \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2) tenemos que $T'(\delta) \circ \varphi_D = \lambda_{T(D),D'}\left(T(\delta)\right) = \varphi_{D'} \circ T'(\delta)$. Esto es, el siguiente cuadrado conmuta para toda D en $\mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd} T(D) \arrow[r, "\varphi_D"] \arrow[d, "T(\delta)"'] & T'(D) \arrow[d, "T'(\delta)"] \\ T(D') \arrow[r, "\varphi_{D'}"] & T'(D') \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\varphi = \{\varphi_D\}_{\mathcal{D}} : T \Rightarrow T'$ determina una equivalencia natural.

■

Proposición 3.7.3. *Sea T adjunto derecho de S entonces el isomorfismo natural η determina transformaciones naturales $\xi : S \circ T \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ y $\varsigma : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow T \circ S$.*

Demostración:

Definamos $\xi_D = \eta_{T(D),D}\left(1_{T(D)}\right)$. Probaremos que $\{\xi_D\}_{\mathcal{D}}$ determina una transformación natural $\xi : S \circ T \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$.

De la naturalidad de η en D tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Hom(T(D),T(D)) \arrow[r, "\eta_{T(D),D}"] \arrow[d, "T(\delta)\circ\_"'] & Hom(ST(D),D) \arrow[d, "\delta\circ\_"] \\ Hom(T(D),T(D')) \arrow[r, "\eta_{T(D),D'}"'] & Hom(ST(D),D') \end{tikzcd}$$

Para $1_{T(D)} \in Hom(T(D),T(D))$ tenemos

$$\delta \circ \xi_D = \delta \circ \eta_{T(D),D}\left(1_{T(D)}\right) = \eta_{T(D),D'}\left(T(\delta)\right) \tag{3.3}$$

Por otro lado consideremos $\xi_{D'} = \eta_{T(D'),D'}\left(1_{T(D)}\right)$ y el cuadrado de la naturalidad de η en C aplicado a $T(\delta) : T(D) \to T(D')$.

$$\begin{tikzcd}
Hom(T(D'),T(D')) \arrow[r, "\eta_{T(D'),D'}"] \arrow[d, "_\circ T(\delta)"'] & Hom(ST(D'),D) \arrow[d, "_\circ ST(\delta)"] \\
Hom(T(D),T(D')) \arrow[r, "\eta_{T(D),D'}"'] & Hom(ST(D),D')
\end{tikzcd}$$

Entonces

$$\xi_{D'} \circ ST(\delta) = (\_ \circ ST(\delta)) \circ \eta_{T(D'),D'}\left(1_{T(D')}\right) = \eta_{T(D),D'}\left(T(\delta)\right) \tag{3.4}$$

Por lo tanto $\delta \circ \xi_d = \delta \circ \eta_{T(D),D'}\left(T(\delta)\right) = \xi_{D'} \circ ST(\delta)$. Es decir, tenemos una transformación natural $\xi : ST \Rightarrow 1_D$.

Dualmente definimos $\varsigma = \eta^{-1}_{C,S(C)}\left(1_{S(C)}\right) : C \to TS(C)$ para cada C. Consideremos el cuadrado conmutativo dado por la naturalidad de η en D:

$$\begin{tikzcd}
C & Hom(C',TS(C')) \arrow[d, "ST(\gamma)\circ_"'] & Hom(S(C'),S(C')) \arrow[l, "\eta^{-1}_{C,T(C')}"'] \arrow[d, "S(\gamma)\circ_"] \\
C' \arrow[u, "\gamma"] & Hom(C',TS(C)) & Hom(S(C'),S(C)) \arrow[l, "\eta^{-1}_{C',S(C)}"']
\end{tikzcd}$$

Entonces $TS(\gamma) \circ \varsigma_{C'} = TS(\gamma) \circ \eta^{-1}_{C',s(C')}\left(1_{S(C')}\right) = \eta^{-1}_{C',S(C)}\left(S(\gamma)\right)$. Por otro lado, tenemos el cuadrado de la naturalidad en C:

$$\begin{tikzcd}
C & Hom(C,TS(C)) \arrow[d, "_\circ\gamma"'] & Hom(S(C),S(C)) \arrow[l, "\eta^{-1}_{C,T(C)}"'] \arrow[d, "_\circ S(\gamma)"] \\
C' \arrow[u, "\gamma"] & Hom(C',TS(C)) & Hom(S(C'),S(C)) \arrow[l, "\eta^{-1}_{C',T(C)}"']
\end{tikzcd}$$

De donde obtenemos que $\eta^{-1}_{C,T(C)}\left(1_{S(C)}\right) \circ \gamma = \varsigma_C \circ \gamma = \eta^{-1}_{C',T(C)}\left(S(\gamma)\right)$. Así $TS(\gamma) \circ \varsigma_{C'} = \eta^{-1}_{C',S(C)}\left(S(\gamma)\right) = \varsigma_C \circ \gamma$, es decir, tenemos una transformación natural $\varsigma : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow T \circ S$.

$\blacksquare$

Proposición 3.7.4. *Sean $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Dada una transformación natural $\xi : ST \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$.*

Definimos $\eta_{C,D} : Hom(C, TD) \to Hom(SC, D)$ como $\eta_{C,D}(\alpha) = \xi_D \circ S(\alpha)$. Si $\eta_{C,D}$ es un isomorfismo para cada C y D entonces T es adjunto derecho de S.

Demostración: Basta probar que $\eta_{C,D}$ es natural en C y D. Sea $\gamma : C \to C'$. Sea $\alpha \in Hom(C', T(D))$ entonces $\eta_{C',T(D)}(\alpha) = \xi_D \circ S(\alpha)$, entonces $\xi_D \circ S(\alpha) \circ S(\gamma) = \xi_D \circ S(\alpha \circ \gamma) = \eta_{C,D}(\alpha \circ \gamma)$ por lo tanto el siguiente cuadrado conmuta y hemos probado la naturalidad en C

$$\begin{tikzcd}
Hom(C', T(D)) \arrow[r, "\eta_{C',D}"] \arrow[d, "_\circ\gamma"'] & Hom(S(C'), D) \arrow[d, "_\circ S(\gamma)"] \\
Hom(C, T(D)) \arrow[r, "\eta_{C,D}"'] & Hom(S(C), D)
\end{tikzcd}$$

Para probar la naturalidad en C, veamos que el cuadrado exterior conmuta para $\beta : D \to D$:

$$\begin{tikzcd}
Hom(C, T(D)) \arrow[r, "S(_)"] \arrow[d, "T(\beta)\circ_"] & Hom(S(C), ST(D)) \arrow[r, "\xi_D\circ_"] \arrow[d, "ST(\beta)\circ_"] & Hom(S(C), D) \arrow[d, "\beta\circ_"] \\
Hom(C, T(D')) \arrow[r, "S(_)"'] & Hom(S(C), ST(D)) \arrow[r, "\xi_{D'}\circ_"] & Hom(S(C), D')
\end{tikzcd}$$

El cuadrado de la izquierda conmuta dado que S es un funtor, el de la derecha es conmutativo pues x_i es una transformación natural, es decir $\beta \circ \xi_D = \xi_{D'} \circ ST(\beta)$. Así, si $\alpha \in Hom(C, T(D))$ entonces $\beta \circ \eta_{C,D}(\alpha) = \beta \circ \xi_D \circ S(\alpha) = \xi_{D'} \circ ST(\beta) \circ S(\alpha) = \eta_{C,D'}(T(\beta) \circ \alpha)$. Por lo tanto η es natural en D y así probamos que T es adjunto derecho de S.

■

Proposición 3.7.5. *Sea T un adjunto derecho de $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Entonces $\xi_{S(C)} \circ S(\varsigma_C) = 1_{S(C)}$ y $T(\xi_D) \circ \varsigma_{T(D)} = 1_{T(D)}$.*

Demostración: Como T es adjunto derecho de S, existen biyecciones $\eta_{C,D}$ para cada C y D, a partir de las cuales definiremos:

$$\xi_D = \eta_{T(D),D}\left(1_{T(D)}\right) : ST(D) \to D$$
$$\varsigma_C = \eta^{-1}_{C,S(C)}\left(1_{S(C)}\right) : C \to TS(C)$$

Por las dos proposiciones anteriores tenemos que estos morfismos determinan transformaciones naturales ξ y ς. Además podemos recuperar η a partir de una de ellas, es decir, $\eta_{C,D}\,(\alpha) = \xi_D \circ S(\alpha)$ para cada $\alpha \in Hom(C, T(D))$.

Consideremos el caso particular $\eta_{C,S(C)}\,(\varsigma_C) = \xi_{S(C)} \circ S(\varsigma_C)$ y el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom(S(C),S(C)) \arrow[r, "\eta^{-1}_{C,S(C)}"] \arrow[d, equal] & Hom(C,TS(C)) \arrow[d, "S(_)"] \arrow[dl, "\eta_{C,S(C)}"'] \\
Hom(S(C),S(C)) & Hom(S(C),STS(C)) \arrow[l, "\xi_{S(C)}\circ_"]
\end{tikzcd}$$

Entonces $1_{S(C)} = \eta_{C,S(C)} \circ \eta^{-1}_{C,S(C)}\left(1_{S(C)}\right) = \eta_{C,S(D)}\,(\varsigma_C) = \left(\xi_{S(C)}\right) \circ S(\varsigma_C) = \xi_{S(C)} \circ S(\varsigma_C)$.

Si consideramos el dual de 3.7.4 tenemos que $\eta^{-1}_{T(D),D}\,(\xi_D) = T(\xi_D) \circ \varsigma_{T(D)}$. Entonces el cuadrado conmutativo de abajo nos dice que $1_{T(D)} = \eta^{-1}_{T(D),D} \circ \eta_{T(D),D}\left(1_{T(D)}\right) = \eta^{-1}_{T(D),D}\,(\xi_D) = T(\xi_D) \circ \varsigma_{T(D)}$

$$\begin{tikzcd}
Hom(T(D),T(D)) \arrow[r, "\eta_{T(D),D}"] \arrow[d, equal] & Hom(ST(D),D) \arrow[d, "T(_)"] \arrow[dl, "\eta^{-1}_{T(D),D}"'] \\
Hom(T(D),T(D)) & Hom(TST(D),T(D)) \arrow[l, "_\circ\varsigma_{T(D)}"]
\end{tikzcd}$$

■

Observemos que la proposición anterior nos da la siguente conmutatividad entre transformaciones naturales con componentes en C y D respectivamente: A tal relación se le conoce como **identidades triangulares**.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, Rightarrow, "S\circ\varsigma"] \arrow[dr, Rightarrow, "id_S"'] & STS \arrow[d, Rightarrow, "\xi\circ S"] \\ & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, Rightarrow, "\varsigma\circ T"] \arrow[dr, Rightarrow, "id_T"'] & TST \arrow[d, Rightarrow, "T\circ\xi"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Proposición 3.7.6. *Un funtor adjunto derecho preserva límites, mientras que un adjunto izquierdo preserva colímites.*

Demostración: Sea $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ adjunto derecho de $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $F : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ con $\mathcal{I}$ una categoría pequeña tal que $\underleftarrow{lim}F$ existe en $\mathcal{D}$.

Sea $\{\chi_i : C \to TF(i)\}_{\mathcal{I}}$ una familia compatible de morfismos en $\mathcal{C}$. Tenemos isomorfismos $\eta_{C,F(i)} : Hom(C, TF(i)) \to Hom(SC, F(i))$ dados por la situación adjunta. Consideremos la familia de morfismos $\left\{\varphi_i = \eta_{C,F(i)}\left(\chi_i\right)\right\}_{\mathcal{I}}$ y veamos que es compatible en $\mathcal{D}$. Por la naturalidad de η en D tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Hom(C, TF(i)) \arrow[r, "\eta_{C,F(i)}"] \arrow[d, "TF(\mu)\circ\_"'] & Hom(S(C), F(i)) \arrow[d, "F(\mu)\circ\_"] \\ Hom(C, TF(j)) \arrow[r, "\eta_{C,F(j)}"'] & Hom(S(C), F(j)) \end{tikzcd}$$

Además por la compatibilidad de $\{\chi_i\}_{\mathcal{I}}$ podemos concluir que $F(\mu)\circ\varphi_i = F(\mu)\circ\eta_{C,F(i)}\left(\chi_i\right) = \eta_{C,F(j)}\left(TF(\mu)\circ\chi_i\right) = \eta_{C,F(j)}\left(\chi_j\right) = \varphi_j$, es decir $\{\varphi_i\}_{\mathcal{I}}$ es una familia compatible.

Sea $\left\{\alpha_i : \underleftarrow{lim}F \to F(i)\right\}_{\mathcal{I}}$ el límite de F entonces existe un único morfismo $\nu : S(C) \to \underleftarrow{lim}F$ tal que $\alpha_j\circ\nu = \varphi_j$ y $\alpha_i\circ\nu = \varphi_i$. Como tenemos un isomorfismo $Hom(S(C), \underleftarrow{lim}F) \cong Hom(C, T(\underleftarrow{lim}F))$ entonces existe un único λ que corresponde isomórficamente a ν que cumple con $T(\alpha_i)\circ\lambda = \chi_i$ y $T(\alpha_j)\circ\lambda = \chi_j$. Por lo tanto $T(\underleftarrow{lim}F)$ tiene la propiedad del límite de $T\circ F$. Por lo tanto T preserva límites.

∎

$$
\begin{tikzcd}
& S(C) \arrow[d, dotted, "\nu"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_j"] & \\
& \varprojlim F \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(\mu)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, dotted, "\lambda"] \arrow[ddl, bend right, "\chi_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\chi_j"] & \\
& T(\varprojlim F) \arrow[dl, "T\alpha_i"'] \arrow[dr, "T\alpha_j"] & \\
TF(i) \arrow[rr, "TF(\mu)"'] & & TF(j)
\end{tikzcd}
$$

Proposición 3.7.7. *Sea $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor exacto entre dos categorías abelianas. Si T es adjunto derecho de S y D es un objeto inyectivo de $\mathcal{D}$, entonces $T(D)$ es inyectivo en $\mathcal{C}$.*

Demostración: Observemos que si fijamos D, tenemos una equivalencia natural de funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}b$. $\eta_{\_,D} : Hom_{\mathcal{D}}(\_, T(D)) \Longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(S(\_), D)$.

Como D es un objeto inyectivo $Hom(\_, D)$ es un funtor exacto y S es también exacto por hipótesis, entonces $Hom(S(\_), D) \cong Hom(\_, T(D))$ es también exacto. Por lo tanto $T(D)$ es inyectivo.

■

Ejemplos 3.7.8. *1. Límites y colímites.* Si $\mathcal{C}$ es una categoría completa e $\mathcal{I}$ una categoría pequeña entonces el funtor $\varprojlim : Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ es el adjunto derecho de $K : C \to Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ definido en los objetos como $K(C) = k_C : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ el funtor constante, esto es, para cada $i \in \mathcal{I}$, $k_C(i) = C$ y $k_C(\mu) = 1_C$ para $\mu : i \to j$. Observemos además que toda $\alpha : C \to C'$, corresponde con la componente de una transformación natural $k_C \Rightarrow k_{C'}$, i.e. $(k(\alpha))_i = \alpha$ para toda i.

Sea $F \in Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. Una transformación natural $\eta \in Nat(k_C, F)$, induce una familia compatible de morfismos $\{\eta_i : C \to F(i)\}_{\mathcal{I}}$. Por la propiedad del límite de F, existe un único morfismo $\nu : C \to \varprojlim F$. Esto prueba que hay una correspondencia biyectiva $Hom(C, \varprojlim F) \cong Nat(k_C, F)$

2. *Equivalencias.* Sea $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una equivalencia aditiva, es decir, existe $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y equivalencias natuales $\xi : S \circ T \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ y $\varsigma : T \circ S \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$. Nótese que estamos en las condiciones de la proposición 3.7.4. Por lo tanto T es adjunto derecho de S. Sin embargo tenemos además otra equivalencia natural $\varsigma : T \circ S \to 1_{\mathcal{C}}$ que, análogamente con 3.7.4, se prueba que S es adjunto derecho de T. Es decir, tenemos los isomorfismos: $Hom(C, T(D)) \cong Hom(S(C), D)$ y $Hom(T(D), C) \cong Hom(D, S(C))$.

3. *El producto tensorial* Sean A y B anillos. Consideremos módulos L_A, ${}_AM_B$ y N_B. Entonces hay un isomorfismo $Hom_B(L \otimes_A M, N) \cong Hom_A(L, Hom_B(M, N))$ natural en L y N. Es decir $\_ \otimes_A M : Mod - A \to Mod - B$ es adjunto izquierdo de $Hom_B(M, \_) : Mod - B \to Mod - A$.

   Sea $f \in Hom(L \otimes M, N)$, definimos $\eta_{L,N}(f) = \hat{f} \in Hom(L, Hom(M, N))$ como $\left(\hat{f}(l)\right)(m) = f(l \otimes m)$.

   Demostremos primero la naturalidad en L. Sea $\lambda : L' \to L$ entonces $\left(\hat{f} \circ \lambda\right)(l')(m) = \left(\hat{f}\left(\lambda(l')\right)\right)(m) = f\left(\lambda(l')\right) \otimes m = \left(f \circ (\lambda \otimes 1_M)\right)(l' \otimes m) = f \circ \widehat{(\lambda \otimes 1_M)}\,(l', m)$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} Hom(L \otimes M, N) & \xrightarrow{\eta_{L,N}} & Hom(L, Hom(M, N)) \\ {\scriptstyle \_\circ(\lambda\otimes 1_M)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \_\circ\lambda} \\ Hom(L' \otimes M, N) & \xrightarrow[\eta_{L',N}]{} & Hom(L', Hom(M, N)) \end{array}$$

   Por otro lado, consideremos $\nu : N \to N$. Entonces $\left(\widehat{\nu \circ f}(l)\right)(m) = (\nu \circ f)(l \otimes m) = \nu\left(f(l \otimes m)\right) = \nu\left(\hat{f}(l)(m)\right) = \left(\nu \circ \hat{f}(l)\right)(m) = \left((\nu \circ \_)\left(\hat{f}(l)\right)\right)(m) = \left(\left((\nu \circ \_) \circ \hat{f}\right)(l)\right)(m)$. Por lo tanto

$$\begin{array}{ccc} Hom(L\otimes M,N) & \xrightarrow{\eta_{L,N}} & Hom(L,Hom(M,N)) \\ {\scriptstyle \nu\circ\_}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\nu\circ\_)\circ\_} \\ Hom(L\otimes M,N') & \xrightarrow[\eta_{L,N'}]{} & Hom(L,Hom(M,N')) \end{array}$$

conmuta.

3.8. Equivalencias de Morita

Proposición 3.8.1. *Son equivalentes para un funtor $S : Mod-A \to Mod-B$:*

(a) S tiene adjunto derecho.

(b) S es exacto izquierdo y preserva sumas directas.

(c) $S \cong \_ \otimes_A P$ para algún bimódulo ${}_AP_B$ único salvo isomorfismo.

Demostración:

$(c) \Rightarrow (a)$ Se tiene del ejemplo 3 en 3.7.8.

$(a) \Rightarrow (b)$ S preserva colímites por ser adjunto izquierdo, en particular preserva conúcleos y sumas directas.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sean M, N dos A-módulos derechos y $a \in A$, definimos para $x \in S(M)$, $ax = S(a \cdot \_)(x)$ que le da estructura de bimódulo a $S(M)$, de éste modo $S(A)$ tiene estructura de A,B-módulo.

Consideremos ahora un morfismo $f : M \to N$ en $A-Mod$ y la resolución de N y M como cocientes de módulos libres. Es decir $A^{(J)} \overset{m_1}{\to} A^{(I)} \overset{m_2}{\to} M \to 0$ y $A^{(K)} \overset{n_1}{\to} A^{(L)} \overset{n_2}{\to} M \to 0$.

Como $A^{(I)}$ es un módulo proyectivo, existe $q : A^{(I)} \to A^{(L)}$ con la propiedad de $n_2 \circ q = f \circ m_2$. Por la propiedad universal del núcleo, existe un único $r : A^{(J)} \to A^{(K)}$ que hace conmutativo el el cuadrado de la izquierda.

$$\begin{tikzcd}
A^{(J)} \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "r"'] & A^{(I)} \arrow[r, "m_2"] \arrow[d, "q"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
A^{(K)} \arrow[r, "n_1"] & A^{(L)} \arrow[r, "n_2"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Apliquemos S a la sucesión $A^{(J)} \overset{m_1}{\to} A^{(I)} \overset{m_2}{\to} M \to 0$. Como S preserva sumas directas, tenemos isomorfismos $\alpha : S\left(A^{(J)}\right) \to S(A)^{(J)}$ y $\beta : \left(A^{(I)}\right) \to S(A)^{(I)}$. Además, por la definición de $P = S(A)$ tenemos la sucesión $P^{(J)} \overset{\mu_1}{\to} P^{(I)} \overset{\mu_2}{\to} S(M) \to 0$.

Ahora apliquemos el funtor $\_ \otimes P$ a la sucesión de arriba. Como también preserva sumas directas tenemos isomorfismos $\gamma : P^{(J)} \to A^{(J)} \otimes P$ y $\delta : P^{(I)} \to A^{(I)} \otimes P$. Entonces tenemos el siguiente cuadrado conmutativo donde η_M existe por la propiedad universal del conúcleo y es un isomorfismo pues es epimorfismo y para cualquier $x \in S(M)$ tal que $\eta_M(x) = 0$ se prueba que $x = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
S\left(A^{(J)}\right) \arrow[r, "S(m_1)"] \arrow[d, "\alpha"', "\cong"] & S\left(A^{(I)}\right) \arrow[r, "S(m_2)"] \arrow[d, "\beta"', "\cong"] & S(M) \arrow[r] \arrow[d, "1_{S(M)}"] & 0 \\
P^{(J)} \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\gamma"', "\cong"] & P^{(I)} \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[d, "\delta"', "\cong"] & S(M) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\eta_M"] & 0 \\
A^{(J)} \otimes P \arrow[r, "m_1 \otimes 1_P"] & A^{(I)} \otimes P \arrow[r, "m_2 \otimes 1_p"] & M \otimes P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Procedemos análogamente para el módulo N y su resolución como cociente de un libre y obtenemos la cara delantera del siguiente diagrama. La cara superior, inferior y media horizontal conmutan pues S y $\_ \otimes P$ son funtores. La cara media horizontal conmuta dado que S preserva sumas directas. Estamos en condiciones de probar que la cara de la derecha conmuta, de ser así tendríamos que η determina una equivalencia natural entre S y $\_ \otimes P$.

Tenemos que $\eta_N \circ S(f) \circ 1_M \circ S(m_2) = \eta_N \circ S(f) \circ \mu_2 \circ \beta = (n_2 \otimes 1_P) \circ \phi \circ S(q) \circ, \beta = (n_2 \otimes 1_P) \circ (q \otimes 1_P) \circ \delta \circ \beta = (f \otimes 1_P) \circ (m_2 \otimes 1_P) \circ \delta \circ \beta = (f \otimes 1_P) \circ \eta_M \circ S(m_2)$. Como S es exacto derecho, $S(m_2)$ es un epimorfismo entonces $\eta_N \circ S(f) = (f \otimes 1_P) \circ \eta_M$.

$$
\begin{tikzcd}
S\left(A^{(J)}\right) \arrow[rr, "S(m_1)"] \arrow[dr, "S(r)"] \arrow[dd, "\alpha"', "\cong"] & & S\left(A^{(I)}\right) \arrow[rr, "S(m_2)"] \arrow[dr, "S(q)"] \arrow[dd, "\beta"', "\cong"] & & S(M) \arrow[rr] \arrow[dr, "S(f)"] \arrow[dd, "1_{S(M)}"] & & 0 & \\
& S\left(A^{(K)}\right) \arrow[rr, "S(n_1)"] \arrow[dd, "\cong"] & & S\left(A^{(L)}\right) \arrow[rr, "S(n_2)"] \arrow[dd, "\cong"] & & S(N) \arrow[rr] \arrow[dd, "1_{S(N)}"] & & 0 \\
P^{(J)} \arrow[rr, "\mu_1"] \arrow[dr, "S(r)"] \arrow[dd, "\gamma"', "\cong"] & & P^{(I)} \arrow[rr, "\mu_2"] \arrow[dr, "S(q)"] \arrow[dd, "\delta"', "\cong"] & & S(M) \arrow[rr] \arrow[dr, "S(f)"] \arrow[dd, dotted, "\eta_M"] & & 0 & \\
& P^{(K)} \arrow[rr, "\nu_1"] \arrow[dd, "\epsilon"', "\cong"] & & P^{(L)} \arrow[rr, "\nu_2"] \arrow[dd, "\phi"', "\cong"] & & S(N) \arrow[rr] \arrow[dd, dotted, "\eta_N"] & & 0 \\
A^{(J)} \otimes P \arrow[rr, "m_1\otimes 1_P"] \arrow[dr, "r\otimes 1_P"] & & A^{(I)} \otimes P \arrow[rr, "m_2\otimes 1_p"] \arrow[dr, "q\otimes 1_P"] & & M \otimes P \arrow[rr] \arrow[dr, "f\otimes 1_P"] & & 0 & \\
& A^{(K)} \otimes P \arrow[rr, "n_1\otimes 1_P"] & & A^{(L)} \otimes P \arrow[rr, "n_2\otimes 1_p"] & & N \otimes P \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}
$$

■

Corolario 3.8.2. *Son equivalentes para un funtor $S : Mod - B \to Mod - A$:*

(a) S es una equivalencia

(b) Existen bimódulos ${}_AP_B$ y ${}_BQ_A$ e isomorfismos de bimódulos $\alpha : P \otimes_B Q \to A$ y $\beta : Q \otimes_A P \to B$, y $S = \_ \otimes_B Q$.

Demostración:

$(a) \Rightarrow (b)$ S es una equivalencia entonces existe $T : Mod - A \to Mod - B$ tal que $S \circ T \cong 1_{Mod-A}$ y $T \circ S \cong 1_{Mod-B}$. Más aún, T es adjunto derecho e izquierdo de S. Por la proposición anterior tenemos que $T \cong \_ \otimes P$

con ${}_AP_B = T(A)$. Análogamente $S \cong \_ \otimes Q$ con ${}_BQ_A = S(B)$. Entonces tenemos los siguientes isomorfismos:

$$B \cong T \circ S(B) \cong T(Q) \cong Q \otimes_A P$$
$$A \cong S \circ T(A) \cong S(P) \cong P \otimes_B Q$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Consideremos el funtor $\_ \otimes_A P$ y veamos que cumple con ser inverso de S. Sea M en $Mod - A$. Calculemos $(\_ \otimes_B Q) \circ (\_ \otimes_A P)(M) = (M \otimes_A P) \otimes_B Q \cong M \otimes_A P \otimes Q \cong M \otimes_A A \cong M$. Análogamente tenemos para N en Mod_B que $(\_ \otimes_A P) \circ (\_ \otimes_B Q)(N) \cong N$. Estos resultados nos proporcionan las componentes de las transformaciones naturales $(\_ \otimes_B Q) \circ (\_ \otimes_A P) \Rightarrow 1_{Mod-A}$ y $(\_ \otimes_A P) \circ (\_ \otimes_B Q) \Rightarrow 1_{Mod-B}$. Por lo tanto S es una equivalencia.

∎

Observación 3.8.3. *Notemos que la condición (b) induce además una equivalencia $Q_B \otimes \_ : B - Mod \to A - Mod$. Lo que implica que tenemos una equivalencia entre $B - Mod$ y $A - Mod$ si y sólo si $Mod - B$ es equivalente con $Mod - A$.*

Definición 3.8.4. *Cuando una equivalencia tal existe, decimos que A y B son anillos Morita Equivalentes.*

Proposición 3.8.5. *Sean A y B anillos Morita equivalentes con bimódulos ${}_AP_B$, ${}_AQ_B$ e isomorfismos de bimódulos $\alpha : P \otimes_B Q \to A$ y $\beta : Q \otimes_A P \to B$ y $S = \_ \otimes_B Q$. Entonces:*

(a) P_B, Q_A, ${}_BQ$ *y* ${}_AP$ *son generadores proyectivos finitamente generados.*

(b) $Hom_B(P, B) \cong Q$, $Hom_A(Q, A) \cong P$, $Hom_B(Q, B) \cong P$
y $Hom_A(P, A) \cong Q$

(c) *Los morfismos de anillos canónicos* $A \cong Hom_B(P,P)$, $A \cong Hom_B(Q,Q)$, $B \cong Hom_A(Q,Q)$ *y* $B \cong Hom_A(P,P)$.

Demostración: Sean A y B anillos Morita equivalentes, entonces existen equivalencias

$$\_ \otimes_B Q : Mod - B \to Mod - A \text{ y } \_ \otimes_A P : Mod - A \to Mod - B$$

$$Q_A \otimes \_ : A - Mod \to B - Mod \text{ y } P_B \otimes \_ : B - Mod \to A - Mod$$

Cuya composición es naturalmente equivalente con el funtor identidad correspondiente y las componentes de dichas equivalencias naturales están dadas por los isomorfismos de bimódulos $\alpha : P \otimes_B Q \to A$ y $\beta : Q \otimes_A P \to B$ y $S = \_ \otimes_B Q$ como en 3.8.2.

Además como se trata de funtores equivalentes, podemos pensar en las siguientes adjunciones: $\_ \otimes_B Q \dashv \_ \otimes_A P$ y $Q_A \otimes \_ \dashv P_B \otimes \_$. Entonces por el ejemplo 3 de 3.7.8 y la proposición 3.7.2, tenemos que $\_ \otimes_B Q \cong Hom_B(P_B, \_)$ y $\_ \otimes_A P \cong Hom_A(Q_A, \_)$. Simétricamente obtenemos equivalencias naturales $Q_A \otimes \_ \cong Hom_A({}_AP, \_)$ y $P_B \otimes \_ \cong Hom_B({}_BQ, \_)$.

(a) Así $Hom_B(P_B, \_)$ es también una equivalencia y por lo tanto tiene adjunto derecho. Por la proposición 3.8.1, $Hom_B(P_B, \_)$ es exacto derecho, entonces P_B es un módulo proyectivo. Un segundo hecho es que como equivalencia $Hom_B(P_B, \_)$ es un funtor fiel, en consecuencia P_B es un generador. Finalmente veamos que P_B es finitamente generado.

Como $Hom(P, \_)$ preserva coproductos, tenemos que $Hom(P, \oplus N_i) \cong \oplus Hom(P, N_i)$, es decir a cada $f : P \to \oplus N_i$ corresponde una familia casi nula $\{p_i \circ f\}$ en $\oplus Hom(P, N_i)$. Consideremos a P como cociente de un libre $A^{(X)} \xrightarrow{p} P \to 0$. Como P es proyectivo, la sucesión se escinde, es decir, existe $i : P \to A^{(X)}$ tal que $p \circ i = 1_P$. Entonces si $\{e_x\}_X$ es la familia de generadores de $A^{(X)}$ y $\{m_x\}_X$ la familia de generadores de P, tenemos que $0 = p \circ i(m_x) = m_x$ para casi toda $x \in X$ pues la familia $\{p \circ i\}$ es casi nula. Por lo tanto m_x es un conjunto finito, es decir, P es finitamente generado. Los otros tres casos se prueban análogamente.

(b) $P_B \cong A \otimes_A P \cong Hom_A(Q, A)$ y $Q_A \cong B \otimes_B Q \cong Hom_B(P, B)$. Simétricamente ${}_AP \cong P_B \otimes B \cong Hom_B(Q, B)$ y ${}_BQ \cong Q_A \otimes A \cong Hom_A(P, A)$.

(c) Tenemos isomorfismos $B \cong Q \otimes_A P \cong Hom_B(Q, Q)$ y $A \cong P \otimes_B Q \cong Hom_B(P, P)$ y simétricamente $A \cong Q_A \otimes P \cong Hom_A(P, P)$ y $B \cong P_B \otimes Q \cong Hom_B(Q, Q)$.

■

Proposición 3.8.6. *Los Anillos Morita equivalentes tienen retículas isomorfas de ideales bilaterales.*

Demostración: Sean A y B anillos Morita equivalentes y un bimódulo ${}_AP_B$ de acuerdo al corolario anterior tal que $\_ \otimes_A P : Mod - A \to Mod - B$ es una equivalencia. Ésta induce un isomorfismo de retículas entre los ideales de A y los B-submódulos de P.

$$[0, A]_\bullet \xrightarrow{\_\otimes_A P} [0, P]_B$$

$$I_\bullet \leq A \longmapsto (I \otimes_A P)_B \leq P_B$$

Más aún, los ideales bilaterales de A pueden ser caracterizados como los ideales derechos de A que son invariantes bajo todos los endomorfismos de A. A ellos corresponden los submódulos de P invariantes bajo la imagen de estos endomorfismos, que son justamente los B-submódulos de P_B con estructura de A-módulos derechos.

Recíprocamente, si M es un A-B submódulo de P, como $\_ \otimes_A P$ es un funtor fiel y pleno, existe un único submódulo de A_A invariante bajo endomorfismos de A, es decir, un ideal bilateral de A. Por lo tanto tenemos un isomorfismo de retículas $_\bullet[0,A]_\bullet \cong_A [0,P]_B$.

$$_\bullet[0,A]_\bullet \xrightarrow{\_\otimes_A P} {}_A[0,P]_B$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "e"] \\ I \arrow[r, hook] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (I\otimes_A P)_B \arrow[r, hook] \arrow[d, "e\otimes_A P"'] \arrow[dr, phantom, "="] & P \arrow[d, "e\otimes_A P"] \\ (I\otimes_A P)_B \arrow[r, hook] & P \end{tikzcd}$$

Simétricamente tenemos un isomorfismo de retículas $_\bullet[0,B]_\bullet \cong_A [0,P]_B$ dado por la equivalencia $P_B \otimes \_ : B - Mod \to A - Mod$. Por lo tanto $_\bullet[0,A]_\bullet \cong_A [0,P]_B \cong_\bullet [0,B]_\bullet$.

■

En adelante construiremos la herramienta necesaria para decidir, cuando un anillo A es Morita equivalente a otro. Y cuál es la forma expícita de ese anillo.

Definición 3.8.7. 1. *Sea A un anillo y dos A-módulos derechos M_A y N_A. Sea $B = Hom_A(M,M)$ y $C = Hom_A(N,N)$. Definamos homomorfismos:*

$$\alpha : Hom_A(M,N) \otimes_B Hom_A(N,M) \longrightarrow C$$

$$\beta : Hom_A(N,M) \otimes_C Hom_A(M,N) \longrightarrow B$$

Como $\alpha(f\otimes g) = fg$ y $\beta(g\otimes f) = gf$.

2. *Denotamos $N \prec M$ si N es una sumando directo de una suma directa de copias de M. Y en caso de que $N \prec M$ y $M \prec N$, escribiremos $N \sim M$.*

Lema 3.8.8. *Las siguientes propiedades son equivalentes para α:*

(a) α *es un epimorfismo.*

(b) β *es un isomorfismo.*

(c) $N \prec M$.

Demostración:

$(a) \Leftrightarrow (b)$ Basta demostrar que α es un monomorfismo, es decir, si $\alpha\left(\sum_j f'_j \otimes g'_j\right) = 0$, entonces $\sum_j f'_j \circ g'_j = 0$.

Como α es epimorfismo, existe $\sum_i f_i \otimes g_i \in Hom_A(M,N) \otimes_B Hom_A(N,M)$ tal que $\alpha\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right) = \sum_i f_i g_i = 1_N$. Entonces $\sum_j f'_j \otimes g'_j = \sum_j f'_j \otimes g'_j \left(\sum_i f_i g_i\right) = \sum_j f'_j \otimes \sum_i g'_j f_i g_i = \sum_{j,i} f'_j \otimes g'_j f_i g_i = \sum_{j,i} f'_j g'_j f_i \otimes g_i = \sum_j f'_j g'_j \sum_i f_i \otimes g_i = 0$. Por lo tanto α es un isomorfismo.

$(a) \Leftrightarrow (c)$ $N \prec M$ si y sólo si N es sumando directo de M^n si y sólo si existen $f_i : M \to N$ y $g_i : N \to M$ tales que $\sum f_i g_i = 1_N$, es decir, si y sólo si $Im(\alpha) = C$. Aseguramos la existencia de esos morfismos pues tenemos $N \overset{\iota}{\hookrightarrow} M^n \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} N$ y $M \overset{u_i}{\hookrightarrow} M^n \overset{p_i}{\twoheadrightarrow} M$ a partir de los cuales definimos $f_i = \pi \circ u_i$ y $g_i = p_i \circ \iota$ que cumplen la condición.

■

Proposición 3.8.9. *Si N y M son A-módulos derechos tales que $M \sim N$, entonces $B = Hom_A(M,M)$ y $C = Hom_A(N,N)$ son anillos Morita equivalentes.*

Demostración: Como $N \prec M$ tenemos el isomorfismo $\alpha : Hom_A(M,N) \otimes_B Hom_A(N,M) \to C$. Análogamente a la proposición anterior, tenemos que $M \prec N$ implica que $\beta : Hom_A(N,M) \otimes_C Hom_A(M,N) \to B$ es un isomorfismo, es decir, estamos en las condiciones del corolario 3.8.2 que inducen una equivalencia entre $Mod - B$ y $Mod - C$.

■

Corolario 3.8.10. *Si $A \sim M$ entonces A y $Hom_A(M, M)$ son Morita equivalentes.*

Demostración: Consideremos el caso particular $N = A$. Entonces tenemos isomorfismos $\alpha : Hom_A(M, A) \otimes_B M \to A$ y $\beta : M \otimes_A Hom_A(M, A) \to Hom_A(M, M)$.

Observemos de las hipótesis que $A \prec M$ si y sólo si A es sumando directo de M^n, es decir $M^n \cong A \oplus K$ para algún A-módulo K. Es decir, M es un generador para $Mod - A$. Por otro lado, $M \prec A$ nos dice que M es proyectivo finitamente generado.

■

El corolario anterior nos da las condiciones que buscábamos para la equivalencia de Morita entre A y $Hom_A(M, M)$. Así tenemos el siguiente

Teorema 3.8.11. *Sea M un A-módulo derecho y $B = Hom_A(M, M)$. Los funtores $\_ \otimes_A Hom_A(M, A)$ y $\_ \otimes_B M$ inducen una equivalencia de Morita entre A y B si y sólo si M es un generador proyectivo finitamente generado en $Mod - A$.*

Ejemplo 3.8.12. *Anillos de matrices.* Sea A un anillo. Consideremos $M = A^n$. Entonces tenemos la condición necesaria $M \sim A$. Además $Hom_A(M, A) \cong_A A^n$, $Hom_A(M, M) \cong M_n(A)$ y tenemos isomorfismos

$$\alpha : Hom_A(M, A) \otimes_{M_n(A)} M \to A \text{ y } \beta : M \otimes_A Hom_A(M, A) \to M_n(A)$$

Por lo tanto un anillo A y el anillo de matrices con coeficientes en A son Morita equivalentes.

Bibliografía

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker., *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*. 2004. Disponible en linea: http://katmat.math.uni-bremen.de/acc

[2] F.W. Anderson, K.R. Fuller., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

[3] S. Awodey., *Category Theory*, Claredon Press, Oxford, 2006.

[4] A. Berrick, M. Keating., *Categories and modules with k-theory in view*, Cambridge University Press. 2000.

[5] F. Borceux., *Handbook of Categorical Algebra. 2*, vol. 50 de Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, 1-51.

[6] F. Borceux., *Handbook of Categorical Algebra. 1*, vol. 50 de Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[7] J. P. Freyd., *Abelian Categories*, Harper and Row, 1964. Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 3, 2003. Disponible en: http://www.tac.mta.ca/tac/tacreprints , 35-63.

[8] K. H. Rose., *XY-pic User's Guide*, Version 3.7, February 16, 1999. Disponible con URL: http://krisrose.net/ krisrose/ftp/TeX/

[9] J. van Oosten., *Basic category theory.*, BRICS, Department of Computer Science, University of Aarhus, January 1995. Disponible en linea: http://www.brics.dk/LS/95/1/BRICS-LS-95-1.ps.gz.

[10] N. Popescu., *Abelian Categories with Applications to Rings and Modules*, London Math. Soc., Academic Press, London, 1973.

[11] B. Stenström., *Rings of Quotients*, Grundlehren der math. Wissenschaft, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1975, 82-113