UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

UN MODELO MARKOVIANO PARA EL ESTUDIO DE MIGRACIONES DE CRÉDITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIA

P R E S E N T A :

MA. ELENA HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

TUTOR
M. EN C. JORGE HUMBERTO DEL CASTILLO SPÍNDOLA

CO-TUTOR
DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2008

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Hernández
   Hernández
   Ma. Elena
   22 30 05 22
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   3-0024569-1

2. Datos del Tutor
   M. en C.
   Jorge Humberto
   Del Castillo
   Spíndola

3. Datos del Co-Tutor
   Dr. Pablo
   Padilla
   Longoria

4. Datos del sinodal 1
   Dra.
   María Asunción Begoña
   Fernández
   Fernández

5. Datos del sinodal 2
   Dra.
   Ana
   Meda
   Guardiola

6. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Ramsés
   Mena
   Chavéz

Díjome el corazón:
"Quiero saber, quiero aprender.
¡Instrúyeme tú, Khayyám, que tanto estudiaste!"
Al pronunciar la primera letra del alfabeto,
me replicó el corazón:
"¡Ahora ya sé.
Uno es la primera cifra del número que nunca acaba!"

Omar Ibn Ibrahim *El Khayyám*.

Agradecimientos

"No marcha firme por el camino,
el hombre que no recogió el fruto de la Verdad.
Si pudo rebatarlo al árbol de la Ciencia,
sabe que los días pasados y los días por venir
en nada difieren del alucinante
primer día de la Creación."

Omar Ibn Ibrahim *El Khayyám.*

Quiero externar mi agradecimiento a todas aquellas personas que me brindaron su apoyo directa e indirectamente en el desarrollo y conclusión de este trabajo. De manera particular agradezco

A mis padres, Enedina y Ascención

De quienes he recibido no sólo el amor de padres, sino también la comprensión, el apoyo y la orientación suficientes para salir adelante, porque el tenerlos al lado en todo momento me ha dado la confianza para continuar con la búsqueda de logros basados en principios. Gracias por creer en mí.

A mis hermanos Liliana, Homero, Isabel, Evelina, Alvaro y Aurora

Con quienes he compartido momentos familiares maravillosos y con quienes he aprendido que la unión familiar es el mayor logro.

A mis amigos Ale, Jos, Liz, Ana, Génesis, Jon, Andrés, Fernando, Porfirio, Alejandro, Raúl y Arturo

Con quienes compartí (y sigo compartiendo) momentos muy agradables, quienes me escucharon, entendieron, y sobretodo, me soportaron en situaciones académicas difíciles. Y por supuesto también a Diego, Miriam, Carlos, Eduardo, Czar, César, Claudia, y a muchas personas más, a quienes pido una disculpa porque sus nombres no me vienen a la cabeza en este momento, pero con quienes compartí momentos que sigo recordando y que me dejaron mucho.

Al M. en C. Jorge Humberto Del Castillo y al Dr. Pablo Padilla

Por el apoyo brindado para la realización de este trabajo.

A mis sinodales Dra. María Asunción Begoña Fernández, Dra. Ana Meda Guardiola y Dr. Ramsés Mena Chávez

Porque aún cuando sus actividades son muy demandantes, se dieron a la tarea de hacer un espacio para la revisión de este trabajo, aportándome correcciones y observaciones importantes.

A Aarón González

Por el apoyo, paciencia y comprensión que ha tenido para que pueda llevar a cabo mis trámites sin mayor complicación.

Finalmente, agradezco al Departamento de Matemáticas y Mecánica del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, IIMAS-UNAM, por el espacio que me brindaron para desarrollar este trabajo.

Porque estuvieron, porque están,
y porque siempre estarán:

A mis padres, con amor.

Índice general

Introducción

Las instituciones financieras con actividades crediticias juegan un papel importante como intermediarias entre unidades económicas con posiciones superavitarias y aquellas con posiciones deficitarias, de ahí la necesidad de establecer principios de administración y gestión de riesgos, coherentes con las actividades y características propias de dichas instituciones. En la búsqueda de mejores prácticas de administración de riesgos financieros, sobresale el interés por el estudio del *riesgo de crédito*, debido a que es la fuente principal de pérdidas tanto de instituciones bancarias como de las provocadas por fracasos empresariales como los de Enron, Worldcom y Kmart.

Aún cuando este tipo de riesgo ha estado presente en las actividades de las instituciones financieras, sólo recientemente diversas investigaciones se han enfocado al desarrollo de metodologías y modelos analíticos orientados a la valuación y cuantificación de sus efectos. Como bien es señalado en la literatura financiera, el origen de dichos estudios se encuentra en los trabajos de valuación de opciones de Black y Scholes (1973), mismos que posteriormente fueron desarrollados en un marco más analítico por Merton(1974), y al cual siguieron y siguen una vasta cantidad de trabajos sobre el tema.

El objetivo de esta tesis es explicar el modelo JLT (1997), uno de los primeros modelos en proponer el uso de calificaciones de crédito, y con ello el del *proceso de migración de crédito* (el proceso de cambio en la calidad de crédito de un instrumento financiero), para propósitos de valuación. Aún cuando, en términos prácticos, este modelo es uno de los más sencillos en su tipo, la tarea principal será explicar (en la medida de lo posible) los supuestos probabilísticos que lo sustentan así como las implicaciones y debilidades del mismo. Para este fin, hemos estructurado el trabajo de la siguiente manera:

- Capítulo 1. Debido a que los primeros trabajos sobre riesgo de crédito tenían como tarea principal cubrir pérdidas esperadas debidas a la ocurrencia del evento de incumplimiento, resulta comprensible que tienda a confundirse el concepto de *riesgo de incumplimiento* con el de *riesgo de crédito*, de ahí la necesidad de que este apartado este dedicado a la especificación y diferencia entre uno y otro, además de contemplar conceptos y aspectos básicos para la comprensión del modelo a tratar.

- Capítulo 2. Dado que el modelo JLT tiene como supuesto principal que el proceso de migración de crédito puede ser visto como una cadena de Markov homogénea en tiempo discreto, este capítulo involucra los conceptos y resultados principales de este tipo de procesos estocásticos, principalemente en un marco discreto; para el caso continuo se hace la extensión correspondiente aunque no de manera tan profunda. La mayoría de estos resultados pueden encontrarse en cualquier libro de probabilidad y procesos estocásticos, razón por la cual la demostración de varios de ellos ha sido omitida.

- Capítulo 3. Corresponde al capítulo principal. En este apartado se explica la importancia y características básicas del modelo JLT (1997), así como los supuestos y las dos principales aplicaciones en el ámbito financiero: el estudio de *spread* de crédito y la valuación de instrumentos sensibles a incumplimiento.

- Capítulo 4. En esta sección se abordan algunos de los métodos de estimación de matrices de transición debido a que, dada la naturaleza del modelo, son quienes caracterizan perfectamente al proceso de migración de crédito. Se explica el problema de cadenas *embedded*, el cual está relacionado con las características que debe cumplir una matriz estocástica para ser considerada una *matriz generadora* de algún proceso markoviano.

- Apéndices. Se enlistan conceptos básicos de teoría de la medida así como resultados de valuación de no-arbitraje: mercado de no-arbitraje, mercado completo, la fórmula de valuación general de instrumentos contingentes, medidas martingala equivalente y de manera particular, la llamada medida martingala *forward*.

Capítulo 1

Riesgo y Crédito

El presente capítulo esta diseñado para dar al lector un panorama general sobre uno de los tipos de riesgo más importantes en el sector financiero, el *riesgo de crédito*. Con este fin, después de tratar aspectos conceptuales, explicaremos a rasgos generales el uso y características de los principales modelos cuantitativos para su análisis.

Esperamos que este marco conceptual nos permita mostrar que el evento de *migración de crédito*, objeto de estudio en esta tesis, constituye solo una pequeña parte en el estudio del riesgo de crédito tanto en el campo de la industria financiera como en el campo de la investigación.

1.1. Riesgo Financiero

En el ámbito financiero no existe una única definición sobre lo que significa la palabra *riesgo*, para nuestros propósitos usaremos la siguiente

DEFINICIÓN 1.1 (RIESGO). *Incertidumbre o aleatoriedad en la obtención de un resultado seguro en las diferentes actividades financieras desarrolladas.*

Nótese que en la definición anterior damos cabida a la ocurrencia de beneficios u oportunidades que el mismo entorno ofrece, es decir, no restringimos nuestro concepto a la ocurrencia de eventos negativos, que dado el sector de estudio, serían el equivalente a pérdidas financieras. Es importante mencionar que para lo subsecuente, los modelos a considerar estarán orientados a la cuantificación del riesgo *puro*[1].

DEFINICIÓN 1.2 (CRÉDITO). *Contrato en el cual existe una transferencia de dinero que debe ser devuelto después de un tiempo determinado; participan un acreedor (quien transfiere el dinero), un deudor (quien lo recibe) y los términos de crédito.*

En sus actividades diarias, las instituciones financieras se ven afectadas principalmente por los siguientes tipos de riesgo financiero:

Riesgo de Mercado o Sistemático. Incertidumbre sobre los rendimientos futuros de una inversión como resultado de movimientos adversos en las condiciones de los mercados financieros. Hace referencia no sólo a las pérdidas latentes, sino también a las ganancias potenciales; incluye el riesgo de tipo de cambio, riesgo de tasa de interés y riesgo accionario.

Riesgo de Liquidez o de Financiamiento: Se refiere a las posibles pérdidas en el valor de un instrumento debidas a la necesidad de liquidarlo en condiciones financieras poco propicias.

Riesgo de Crédito:[2] Surge cuando una de las partes en un contrato financiero deja de cumplir con sus obligaciones, produciendo pérdidas financieras a la contraparte.

NOTA 1. *Es importante mencionar que la gestión de riesgos no solo considera los riesgos financieros arriba señalados, también considera los denominados riesgos no financieros tales como el riesgo operacional, riesgo de gestión, riesgo legal y riesgo regulatorio, generalmente agrupados en el término de riesgo operacional y legal. De igual modo, suelen identificarse otros tipos de riesgo como lo son el riesgo país, riesgo de moralidad y el riesgo soberano.*

1.2. Riesgo de Crédito (RC)

Como se mencionó anteriormente, la administración de *riesgo de crédito* es fundamental en la solvencia de cualquier institución financiera. En aras

[1] Una clasificación de riesgo: Riesgo puro (existe únicamente posibilidad de pérdida) y Riesgo especulativo (existe posibilidad de pérdida o ganancia)

[2] Observaciones sobre esta definición, así como definiciones más adecuadas serán desarrolladas posteriormente

de establecer una definición apropiada resulta importante señalar que aún cuando el evento crediticio por excelencia ha sido el denominado *evento de incumplimiento*, no es el único que constituye al riesgo financiero en cuestión.

Dentro del ámbito financiero suele darse la siguiente definición de Riesgo de Crédito:

> Riesgo correspondiente a las operaciones de crédito, préstamo o aval. Señala la posibilidad de incurrir en pérdidas por el incumplimiento, total o parcial, de los recursos prestados o avalados en una operación financiera al vencimiento de los pagos o rendimientos pactados.

A primera vista, dicha definición parece completa, no obstante hay que notar que las pérdidas financieras pueden darse no solo por incumplimiento sino también por la disminución en la calidad de crédito. En general se tiene que instrumentos financieros equivalentes emitidos por instituciones con diferentes calificación crediticias, presentan precios diferentes, teniendo un mayor precio los emitidos por aquella entidad con mayor calidad de crédito. Así, una definición más acertada podría ser:

> Posibilidad de pérdidas causadas por incumplimiento de la contraparte, o bien por aquellas causadas por cambios en la calidad de crédito del emisor (Ver [2]).

Debido a que el tema de esta tesis involucra al evento de migración de crédito, la definición que adoptaremos corresponde a la enunciada informalmente por Bielecki & Rutkowski [4]:

Definición 1.3 (Riesgo de Crédito). *Posibilidad de pérdida financiera asociada a la ocurrencia de cualquier tipo de evento crediticio como lo son el evento de incumplimiento, el evento de migración de crédito y el evento de variación de spread de crédito.*

En el contexto de riesgo de crédito existen diversas definiciones de incumplimiento; la adopción de una u otra depende del área de análisis en la que se este trabajando. Por ejemplo, la más utilizada para valuación de cartera se refiere al impago de los intereses y/o el capital de una deuda por un periodo determinado (por ejemplo, 90 días para créditos al consumo o 180 días para créditos comerciales); para propósitos de valuación de deuda riesgosa se entiende por incumplimiento al momento en el que ocurre la reestructuración de alguna deuda, a la situación en la que el valor de los activos de la empresa es inferior al de sus pasivos o bien, a la bancarrota del deudor.

Por su parte, el *spread* de crédito es entendido como el exceso de retorno de un bono corporativo sobre un bono equivalente que se asume libre de riesgo de crédito; puede expresarse como el diferencial entre el rendimiento a la fecha de maduración o entre las tasas forward instantáneas de ambos bonos, la determinación de este constituye la meta principal en la mayoría de modelos de riesgo crédito.

Existen muchas razones por las cuales a últimas fechas las investigaciones financieras se han centrado específicamente en el estudio del riesgo de crédito, entre ellas sobresalen las siguientes:

- Como se menciona en [27], aún cuando los préstamos constituyen la fuente principal de riesgo de crédito se ha encontrado que éste se encuentra presente en instrumentos financieros tales como aceptaciones, transacciones entre bancos, financiamiento comercial, transacciones de divisas extranjeras, contratos financieros a futuro, operaciones *swap*, bonos, acciones, opciones, en la extensión de compromisos y garantías, y liquidación de transacciones.

- La expansión y desarrollo del mercado de derivados extrabursátiles (OTC) que usualmente no son garantizados por la existencia de instituciones como Cámaras de Compensación.

- El aumento en las tasas de incumplimiento en años recientes, así como un crecimiento significativo del impacto de crisis financieras tales como la crisis asiática (1997), las crisis bancarias en países desarrollados (Suiza y Japón), la crisis del peso mexicano (1994-1995), la devaluación del rublo ruso en 1998 y muy recientemente el fracaso del crédito en Argentina (2001).

- El surgimiento de *derivados de crédito* en los cuales el riesgo de crédito actúa como unidad o activo subyacente permitiendo así una amplia variedad de formas para protegerse del riesgo asociado a las actividades financieras.

- La caída en la calidad promedio de los créditos, a la par de márgenes o *spreads* más pequeños.

- Los avances tecnológicos, principalmente en sistemas de cómputo, que han dado la oportunidad de implementar modelos altamente sofisticados.

- La insatisfacción con respecto a las medidas impuestas después de 1992 por el Banco Internacional de Pagos BIS (*Bank for International Settlements*) y los bancos centrales con respecto a los requerimientos de capital de crédito.

- La posibilidad de utilizar metodologías internas de valuación de riesgo de crédito para la obtención de requerimientos de capital como se estableció en el Acuerdo del Comité de Basilea 2006.

1.2.1. Clasificación de Riesgo de Crédito

Aún cuando no existe una clasificación de riesgo de crédito generalmente aceptada, adoptaremos la siguiente (Ver [4]):

a) **Riesgo Crédito de Referencia** (*Reference credit risk*). Dado un contrato, es el riesgo asociado a una tercera parte conocida como *entidad de referencia*, es decir, ambas partes del contrato se asumen libres de incumplimiento, sin embargo debido a especificaciones del contrato, esta parte de riesgo se relaciona con una tercera parte a la que denominaremos entidad de referencia (*reference entity*). [3]

b) **Riesgo Crédito de Contraparte** (*Counterparty credit risk*). Riesgo en el que los participantes de un contrato se exponen a que la otra parte incumpla (no hay garantías ante la ausencia de cámaras de compensación). Este tipo de riesgo es típico en contratos como: reclamos vulnerables (*vulnerable claims*) y swaps de incumplimiento (*defaultable swaps*). Se clasifica en:

   - Riesgo de incumplimiento unilateral
   - Riesgo de incumplimiento bilateral

[3] Los derivados de crédito tienen como objeto transferir completa o parcialmente este tipo de riesgo.

c) **Riesgo de Spread de Crédito** (*Credit spread risk*). Riesgo de pérdida financiera debida a cambios en el nivel de *spread* de crédito. Los modelos de *spread* de crédito abarcan curvas, volatilidades y correlaciones de *spread* de crédito.

1.2.2. Aplicación de Modelos de RC

La aplicación de modelos de riesgo de crédito se centra en dos áreas principalmente:

a) Administración de riesgo de crédito. El objetivo es determinar la distribución de pérdida de una deuda o de un portafolio de instrumentos sensibles a RC en un periodo de tiempo fijo, así como calcular medidas de riesgo basadas en dicha distribución.

El aspecto básico en esta área corresponde a la administración de portafolios. El análisis de RC en esta perspectiva se enfoca en el cálculo de:

1. probabilidad de incumplimiento (*probability of default*,PD)
2. pérdida dado el incumplimiento (*loss given default*, LGD)
3. exposición al incumplimiento (*exposure at default*, EAD)
4. requerimientos de capital y reservas.

En la actualidad, contamos con diversas técnicas para estos propósitos: modelos expertos[4] y modelos paramétricos como las metodologías de análisis discriminante o modelos de scoring (Z-scoring, Z-model), el modelo de frecuencias esperadas de incumplimiento *KMV Credit Monitor y Portfolio Manager*, la metodología de matrices de transición de J.P. Morgan (*Credit Metrics*), el modelo de análisis actuarial *CreditRisk*$^{+}$, las metodologías de Moody's (*Creditscore* y *RiskCalc*) y de McKinsey's (*McKinsey's CreditPortfolioView*).

b) Análisis de instrumentos expuestos a riesgo de crédito. En este marco, la aplicación de tales modelos cubre los principales aspectos que se presentan en el contexto de la valuación de contratos derivados[2]:

[4] Modelos basados en criterios subjetivos y el juicio o la experiencia del analista de cartera

1. Valuación de deuda bancaria y bonos corporativos, generalmente sensibles al incumplimiento.
2. Valuación de derivados de crédito sujetos a riesgo de incumplimiento de la contraparte.
3. Valuación de derivados de crédito libres de incumplimiento de la contraparte
4. Valuación de opciones libres de riesgo escritas sobre bonos riesgosos.

En virtud de lo anterior, se tiene que los principales instrumentos sensibles de riesgo de crédito son:

i) *Bonos Corporativos*: Instrumentos de deuda emitidos por corporaciones, en los cuales se comprometen a hacer pagos específicos en fechas futuras y a cambio de una cierta prima; constituyen parte de la estructura de la firma. En este caso, el evento de crédito puede darse por parte de la firma al no poder cumplir, en determinado momento, con los pagos a que se ha comprometido ocasionando al tenedor del bono una pérdida financiera.

ii) *Reclamos Vulnerables*: Contratos contingentes operados en OTC, pueden ser con riesgo de incumplimiento unilateral (opciones vulnerables) o bien, bilateral (*swaps* de incumplimiento).

iii) *Derivados de Crédito*: Instrumentos financieros derivados en los cuales el riesgo de crédito actúa como activo subyacente.

1.2.3. Clasificación de Modelos de RC

Gran cantidad de modelos cuantitativos se han desarrollado para el análisis del riesgo de crédito. Los primeros trabajos se enfocaron a la valuación de bonos de riesgo de crédito o instrumentos similares; posteriormente se extendieron para abarcar derivados que involucraban el crédito.
Dentro de toda esta investigación matemática se distinguen como aspectos más estudiados los siguientes:

i) *tiempo de incumplimiento*. En este aspecto se ha buscado modelar el tiempo de ocurrencia del evento de incumplimiento.

ii) *tiempo de migración*. Asociado a cambios en la calidad de crédito de deuda corporativa, se busca modelar el tiempo aleatorio de migración de crédito.

iii) *tasas de recuperación*.[5]: Corresponde a la cantidad que será pagado al tenedor del instrumento financiero en caso de que el incumplimiento ocurra antes de la fecha de maduración.

Dada la gran cantidad de modelos desarrollados hasta la fecha, resulta conveniente tener una clasificación de ellos. De acuerdo a su formulación, las metodologías que han sido utilizados para cubrir los tres puntos anteriores, pueden clasificarse en [4]:

a) Modelos Tradicionales.

Se caracterizan por su facilidad de cálculo, los principales son:

1. Sistemas de Calificación de crédito.
2. Modelos VaR (Creditmetrics, RiskMetrics, etc.).
3. Basados en datos históricos.
4. Basados en precios de bonos.

b) Modelos Estructurales

Se les denomina así por modelar la estructura de capital de la firma, aunque también se les conoce como modelos de valor de la firma o modelos específicos de la firma. El primer modelo de incumplimiento, considerado también como el primer modelo estructural, es el de Merton(1974).

Estudian el riesgo de crédito específico de un deudor corporativo particular (una firma); es decir, son utilizados para la valuación y protección de deuda corportiva, contratos comercializados entre instituciones financieras y entre inversionistas OTC. La mayor parte de modelos estructurales estan orientados al evento crediticio de incumplimiento de la firma a través del análisis de movimientos (aleatorios o no) del valor de la firma. Así, los principales aspectos de estudio en estos modelos corresponden a:

[5] Puede depender de la prioridad que tenga la deuda con respecto a otras obligaciones de la misma firma. Veáse Wong (1998) para un estudio sobre ellas.

1. la evolución del valor total de los activos de la firma[6]
2. la estructura de capital de la firma,
3. el evento de incumplimiento,
4. las reglas de recuperación en caso de incumplimiento,
5. otros aspectos económicos tales como tasas de interés.

En este tipo de modelos el riesgo de crédito es visto como una opción escrita sobre el valor de la firma[7]; de modo que suponen que el incumplimiento ocurre si la variable (o proceso) estocástico que representa el valor de los activos de la firma, cae bajo un valor referencial (*threshold*) que corresponde al valor de los pasivos de la misma a la fecha de maduración.

Características generales:

- Usan el valor de la firma para determinar el tiempo de incumplimiento, el cual es visto como un tiempo de paro predecible con respecto a la información disponible a los operadores (*traders*).
- Relaciona la calidad de crédito de una firma con las condiciones económicas y financieras de la misma.
- En algunos casos, el incumplimiento es visto de manera endógena al modelo como en el caso del modelo de Merton (1974); en otros se específica un umbral de incumplimiento exógeno, Longstaff y Schwartz (1995).
- La tasa de recuperación es determinada por los activos y pasivos de la firma al tiempo del incumplimiento, es decir se definen endógenamente.
- Las estrategias de cobertura son directas; permiten una replicación perfecta tanto de reclamos libres de incumplimiento como de reclamos de incumplimiento.

[6]El valor total de la firma es igual al valor de los activos de la firma, más la deducción de impuestos(del pago de cupones) menos el valor de costos de bancarrota; de igual modo no deben confundirse los conceptos de *valor total de la firma* y *valor de mercado de las acciones de la firma*.

[7]Por esta razón también son conocidos como *option-theoretic approach*

- Permiten el estudio de la estructura de capital óptima (el tiempo más favorable para la decisión de bancarrota).

- Se utilizan en la valuación de deuda corporativa que puede ser ejercida antes de la fecha de maduración; también pueden utilizarse en la valuación de bonos convertibles.

c) Modelos de Primer Tiempo de paso[8].

Fueron introducidos por Black y Cox (1976) como una extensión del modelo de Merton por lo que algunos autores los consideran un tipo de modelo estructural.

Características Generales:

- Permiten hacer valuaciones de instrumentos de deuda con horizontes de tiempo ya sea finitos o infinitos.

- Son utilizados para estudiar el tiempo de bancarrota óptimo, momento en el que el valor de los *equities* se máximiza o equivalentemente, en el que el valor de la deuda es minimizado.

- El tiempo de incumplimiento se asocia al primer tiempo de paso de algún proceso aleatorio específico, generalmente se considera el momento en el que el valor de los activos de la firma caen bajo una barrera o umbral de incumplimiento[9] preestablecido.

- Permiten incumplimiento o bancarrota prematura.

- Las tasas de interés involucradas pueden o no considerarse como procesos estocásticos. En virtud de esto, suelen identificarse dos tipos: modelos que involucran tasas de interés estocásticas y aquellos de tasa corta (*deterministic short-therm default-free interest rate*).

- En general, las tasas de recuperación son independientes del valor de la firma, salvo en el modelo de Black y Cox.

[8] First-passage-time models

[9] Punto en el cual el valor de los activos se considera insuficiente para que la empresa siga funcionando, puede considerarse como un proceso aleatorio (en cuyo caso se denomina *proceso barrera*)

- El umbral de incumplimiento puede fijarse endógena o exógenamente en el modelo.

Dentro de la larga lista de trabajos dedicados a los modelos estructurales y a los modelos de primer tiempo de paso, podemos mencionar los siguientes: Merton (1974), Black y Cox (1976), Galai y Masulis (1976), Geske (1977), Brennan y Schwartz (1977,1978, 1980), Mason y Bhattacharya (1981), Pitts y Selby (1983), Cooper y Mello (1991), Rendleman (1992), Kim et. al. (1993a), Nielson et al. (1993), Leland (1994), Longstaff y Schwartz (1995), Anderson y Sundaresan (1996, 2000), Leland y Toft (1996), Mella-Barral y Tychon (1996), Briys y de Varenne (1997), Crouhy (1998), Duffie y Lando(1998), Ericson y Reneby (1998),Cathcart y El-Jahel (1998), Anderson y Sundaresan (2000), Buffet (2000) y Ericsson (2000).

d) Modelos de Forma Reducida[10]

Tienen sus orígenes en los trabajos de Jarrow & Turnbull (1995) y en los de Duffie-Singleton(1999). No hacen referencia al concepto de valor de la firma ni al de estructura de capital. En éstos, el evento de crédito es especificado en términos de algún proceso de salto definido de manera exógena. Permiten modelar tiempos de incumplimiento aleatorios u otros eventos de crédito no predecibles. Por el evento de crédito que estudian, pueden distinguirse los siguientes:

1. *Modelos basados en la intensidad*: Concernientes únicamente al evento de incumplimiento, se basan en la ocurrencia y severidad de este visto como un proceso de salto cuya intensidad[11] representa el riesgo de incumplimiento en un intervalo de tiempo dado.

   Características generales:

   - El tiempo de incumplimiento no es un tiempo de paro predecible, de modo que la cobertura perfecta de reclamos de incumplimiento con el uso de valores libres de incumplimiento es imposible.

[10]También conocidos como *Intensity and ratings based approaches.*

[11]La *intensidad de incumplimiento*, denotado generalmente por λ , corresponde a la probabilidad de salto del cumplimiento al incumplimiento de la firma; conocida en inglés como *hazard rate of default*, de ahí que también dichos modelos sean identificados como *hazard rate models*

- No es necesario especificar la estructura prioritaria de las obligaciónes de la firma.
- Dado que el proceso de incumplimiento modela únicamente el tiempo de incumplimiento, la tasa de recuperación se asume exogéna

Podemos distinguir los siguientes trabajos referentes a dichos modelos: Pye (1974), Ramaswamy y Sundaresan (1986), Litterman e Iben (1991), Jarrow y Turnbull (1995,2000), Duffie (1996), (1996,1998a, 1998b), Lando (1997, 1998), Monkkonen (1997) y Madan y Unal (1998).

2. *Modelos de migraciones de crédito*: Se enfocan en el estudio del evento de migración entre diversas calificaciones de crédito (*credit rating*) y se clasifican en:

   a) Modelos de calificación de crédito única (*single credit rating model*). Aquellos en los que la migración entre diversas calificaciones de crédito no es permitida.

   b) Modelos de calificación de crédito múltiples (*multiple credit ratings model*). Aquellos en los que se permite el cambio de calidad de crédito a diferentes *ratings*.

   La modelación estocástica de migración de crédito se debe principalmente a: Das y Tufano (1996), Jarrow et. al (1997), Duffie y Singleton (1998), Kijima (1998), Kijima y Komoribayashi (1998), Thomas et. al (1998), Huge y Lando (1999), Bielecki y Rutkowski (2000), Lando (2000a) y Schönbucher (2000).

3. *Estructura de incumplimiento a plazos* (*defaultable term structure*): Tienen como objetivo modelar la estructura a plazos de incumplimiento de tasas de interés (en inglés *the defaultable term structure of interest rates*). Se acostumbra comenzar con algún modelo de la estructura a plazos libre de incumplimiento (en inglés *the default-free term structure*) para cada clase de crédito incluido en el modelo, por ejemplo: modelar en términos de la tasa de interés instantánea (Vasicek (1977),

Cox et. al. (1985a)), en términos de tasas *forward* instantáneas (Heath et. al. (1985b)), o bien tasas de mercado como tasas *forward* LIBOR (Brace et. al. (1997))

NOTA 2. *Se habla también de los llamados modelos generales de forma reducida propuestos por Wong(1998) y Bélanger et. al. (2001) como la generalización de los modelos estructurales y los de forma reducida. También se identifican los modelos de forma reducida con variables estado y los modelos híbridos que constituyen una variante de los de intensidad con variables de estado.*

1.3. Observaciones Generales

Como hemos visto en este primer capítulo, el estudio de riesgo de crédito es relativamente reciente y se ha incrementado por los grandes avances tecnológicos sobre todo en el ámbito computacional. Queremos mencionar que, aún cuando hemos adoptado una definición para el riesgo de crédito como el riesgo de pérdida asociado a la ocurrencia de algún evento crediticio, estamos concientes de que en el ámbito financiero no existe una definición universal. La definición utilizada aquí, es aquella que consideramos más adecuada dado que distingue entre el estudio del tiempo de incumplimiento, del *spread* de crédito y del proceso de migración de crédito, siendo este último el objeto de interés en esta tesis.

De igual modo, enfantizamos que dependiendo el enfoque, o el tipo de evento a estudiar, la clasificación de modelos para el análisis de riesgo de crédito también es muy variada; sin embargo, esperamos que la manera en la que se abordó permita al lector identificar las principales diferencias entre los modelos de mayor relevancia en el aspecto teórico. El capítulo siguiente esta tiene como fin proporcionar la herramienta probabilística necesaria para el estudio del proceso de migración de crédito mediante un modelo de forma reducida de calificaciones de crédito múltiples (visto como una cadena de Markov Homogénea en tiempo discreto) para su incorporación en la valuación de instrumentos financieros, es decir para el modelo JLT (1997).

Finalmente, queremos mencionar que aún cuando el panorama presentado en este capítulo tiene como objetivo el mostrar, al menos en un aspecto muy general, que el evento de migración de crédito constituye solo una pequeña parte en el estudio del riesgo de crédito, ello no significa que sea un aspecto poco importante; veremos que éste constituye una de las principales preocupaciones en la industria financiera, no solo en el marco de valuación de instrumentos financieros, sino también en su uso para la administración de riesgos.

Capítulo 2

Cadenas de Markov

Las Cadenas de Markov[1] juegan un papel fundamental en tanto constituyen los modelos matemáticos más simples para el estudio de fenómenos que involucran el tiempo. Una cadena de Markov será entendida como un proceso estocástico cuya propiedad característica corresponde a la llamada *pérdida de memoria* que, en términos prácticos, se reduce a decir que el estado actual del proceso es el único que tiene influencia sobre el siguiente.

Esta sección pretende exponer los resultados necesarios sobre la teoría de Cadenas de Markov debido a que son el modelo clásico para el estudio del proceso de migración de crédito . Para el desarrollo de este capítulo hemos retomado gran parte de las definiciones y resultados de Bielecky y Rutkowsky[4], los cuales han sido complementados en donde se ha considerado oportuno. Así, se abordaran los siguientes aspectos: definición de cadenas de Markov, tiempos aleatorios asociados (tiempos de salto y de absorción) y su comportamiento bajo el uso de medidas de probabilidad equivalentes.

2.1. Notación

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, \ldots\} =: \mathbb{N}^*$.
- $\mathbb{R} := (-\infty, \infty), \quad \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$.

[1] El estudio de estos procesos fue iniciado por el matemático ruso Andrei Andreevich Markov (1856-1922) en 1907.

- Las letras n, m, k denotarán números enteros mientras que t y s denotarán números reales.

- $\langle(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F}\rangle$:= base estocástica donde la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ representa al espacio de probabilidad subyacente sobre el cual estarán definidos los procesos en cuestión: Ω corresponde al espacio muestral[2], $\mathcal{F}$ a una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad). Mientras que $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ denotará alguna filtración en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $\mathbb{F}^{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{F}$; se le denomina filtración subyacente o fundamental.

- El conjunto finito $\mathcal{K} := \{1, 2, 3, \ldots, K\}$ representará el espacio de estados. El espacio de estados es el conjunto de valores distintos que toma un proceso estocástico, cuando dicho conjunto es numerable o finito[3] (como es el caso) el proceso es llamado *cadena*.

- Trabajaremos con sucesiones de variables aleatorias $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ para el caso discreto, y con $(\mathcal{C}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ para el caso continuo, definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en $\mathcal{K}$ es decir, $\mathcal{C}_i : \Omega \to \mathcal{K}$ con $i \in \mathbb{N}^*$ (caso discreto) o bien, $i \in \mathbb{R}^+$ (caso continuo).

- $\mathbb{F}^{\mathcal{C}} := (\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ corresponde a la *filtración natural* generada por el proceso $\mathcal{C}$, de modo que $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_n := \sigma(\mathcal{C}_k : k = 0, \ldots, n)$.

- $p^{(n)}_{ij}(m) := \mathbb{P}(\mathcal{C}_{m+n} = j \mid \mathcal{C}_m = i))$ *probabilidad de transición en n pasos*, es decir la probabilidad de llegar al estado j en n pasos dado que en el tiempo m el proceso (discreto) se encuentra en el estado i . Para $n = 1$, simplemente usaremos la notación $p_{ij}(m)$. Para cadenas homogéneas usaremos $p^{(n)}_{ij}$ y p_{ij} respectivamente.

- $p_{ij}(s, s + t) = \mathbb{P}(\mathcal{C}_{s+t} = j \mid \mathcal{C}_s = i))$ denota la probabilidad de llegar al estado j en el tiempo $s + t$ dado que en s el proceso (continuo) se encuentra en el estado i. Para cadenas homogéneas usaremos $p_{ij}(t)$.

- $\mu_0 := [\mu_0(i)]_{1\leq i\leq K} = [\mathbb{P}\{\mathcal{C}_0 = i\}]_{1\leq i\leq K}$ el vector renglón $K-$dimensional denotará la distribución de probabilidad inicial para la cadena de Markov $\mathcal{C}$ bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}$.

[2]Trataremos únicamente con los llamados espacios discretos: finitos o numerablemente infinitos. Un elemento arbitrario de Ω será denotado por ω y diremos que E es un evento si $E \subseteq \Omega$

[3]Dado que $\mathcal{K}$ es finito, es claro que cualquier función $h : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ es acotada y medible tomando la σ-álgebra potencia

- $\mu_l := [\mu_l(i)]_{1\leq i\leq K} = [\mathbb{P}\{\mathcal{C}_l = i\}]_{1\leq i\leq K}$ el vector renglón $K-$dimensional denotará la distribución de probabilidad de $\mathcal{C}$ en el tiempo l.

NOTA 3. *En adelante $\mathbb{P}$ denotará la medida de probabilidad original (real), mientras que $\mathbf{P}$ se referirá a la matriz de transición asociada a una cadena de Markov bajo tal medida. Del mismo modo, $\mathbb{P}^*$ hará referencia a la medida de probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$, con matriz de transición $\mathbf{P}^*$.*

2.2. Cadenas de Markov: Tiempo Discreto

2.2.1. Conceptos Preliminares

Dada la base estocástica $\langle(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F}\rangle$, donde $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra potencia (2^Ω), y el conjunto finito $\mathcal{K} = \{1, \ldots, K\}$ introducimos la siguiente

DEFINICIÓN 2.1 (CADENA DE MARKOV). *Sea $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diremos que $\mathcal{C}$ es una Cadena de Markov bajo $\mathbb{P}$ con respecto a $\mathbb{F}$ (en adelante una $\mathbb{F}$-Cadena de Markov) si para cualquier funcion $h : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ se satisface lo siguiente:*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(\mathcal{C}_{n+m}) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(\mathcal{C}_{n+m}) \mid \sigma(\mathcal{C}_n)), \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^*. \tag{2.1}$$

Observaciones:

- la $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(\mathcal{C}_{n+m}) \mid \sigma(\mathcal{C}_n))$ corresponde a $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(\mathcal{C}_{n+m}) \mid \mathcal{C}_n) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*$ debido a que el proceso en cuestión es discreto.

- la propiedad de Markov dada en (2.1) puede generalizarse para cualquier función $\bar{h} : \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ y cada $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}^*$ como

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\bar{h}(\mathcal{C}_{n+m_1}, \ldots, \mathcal{C}_{n+m_k})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\bar{h}(\mathcal{C}_{n+m_1}, \ldots, \mathcal{C}_{n+m_k})|\mathcal{C}_n).$$

- bajo el supuesto de que $\mathbb{F}^{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{F}$, se sigue que si $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{F}$-cadena de Markov bajo $\mathbb{P}$ entonces es una $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}$-cadena de Markov (el recíproco no necesariament es cierto).

DEFINICIÓN 2.2 (CADENA DE MARKOV HOMOGÉNEA). *Sea $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diremos que $\mathcal{C}$ es una Cadena de Markov Homogénea bajo $\mathbb{P}$ con respecto a $\mathbb{F}$ (en adelante una $\mathbb{F}$-Cadena de Markov Homogénea) si es una $\mathbb{F}$-Cadena de Markov y satisface*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(\mathcal{C}_{n+m}) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(\mathcal{C}_{k+m}) \mid \mathcal{C}_k), \qquad \forall n, m, k \in \mathbb{N}^*.$$

Dado que el conjunto $\mathcal{K}$ es finito, las definiciones anteriores pueden simplificarse a las definiciones equivalentes siguientes:

DEFINICIÓN 2.3 (CADENA DE MARKOV). *Sea $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diremos que $\mathcal{C}$ es una Cadena de Markov bajo $\mathbb{P}$ con respecto a $\mathbb{F}$ (en adelante una $\mathbb{F}$-Cadena de Markov) si $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$ y $\forall j \in \mathcal{K}$ se cumple*

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C}_{n+m} = j \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbb{P}\{\mathcal{C}_{n+m} = j \mid \mathcal{C}_n\}.$$

DEFINICIÓN 2.4 (CADENA DE MARKOV HOMOGÉNEA). *Sea $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diremos que $\mathcal{C}$ es una Cadena de Markov Homogénea bajo $\mathbb{P}$ con respecto a $\mathbb{F}$ (en adelante una $\mathbb{F}$-Cadena de Markov Homogénea) si es una $\mathbb{F}$-Cadena de Markov y $\forall n, m, k \in \mathbb{N}^*$ y $\forall j \in \mathcal{K}$ son válidas*

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C}_{n+m} = j \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbb{P}\{\mathcal{C}_{n+m} = j \mid \mathcal{C}_n\} = \mathbb{P}\{\mathcal{C}_{k+m} = j \mid \mathcal{C}_k\}.$$

Es decir, el proceso $\mathcal{C}$ es una *cadena de Markov* si la probabilidad de encontrarse en el estado j en el tiempo $n+m$, dado que se cuenta con la información del proceso acumulada *hasta* el tiempo n (representada por la filtración $\mathcal{F}_n$), es igual a la probabilidad de encontrarse en el estado j tomando, únicamente, la información del proceso *en* el tiempo n (representada por $\mathcal{C}_n$, $\sigma(\mathcal{C}_n)$), es decir, el futuro es independiente del pasado dado el presente inmediato (*propiedad de Markov*). Y es homogénea o estacionaria si la probabilidad de ir de un estado a otro es independiente del tiempo del cual parte.

NOTA 4. *De la definición anterior puede verse que tratar con cadenas homogéneas simplifica el manejo de las probabilidades de transición al hacerlas dependientes de dos parámetros únicamente, los estados i y j, y no de tres, como lo harían las cadenas homogéneas, para las cuales se requeriría también el tiempo.*

La nota anterior nos lleva a tratar con cadenas homogéneas. Veremos que dada una cadena de Markov, bastará determinar sus probabilidades de transición para caracterizarla completamente, para ello introducimos los siguientes conceptos

DEFINICIÓN 2.5 (MATRIZ ESTOCÁSTICA). *La matriz $\mathbf{M}$ es una matriz estocástica si satisface que*

a) $\mathbf{M}$ tiene entradas no negativas, es decir $m_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{K}$;
b) Cada renglón de $\mathbf{M}$ suma uno, esto es $\sum_j m_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{K}$.

DEFINICIÓN 2.6 (MATRIZ DE TRANSICIÓN). *Dada $\mathcal{C}$ una $\mathbb{F}$-cadena de Markov homogénea, la matriz de transición de un paso asociada a $\mathcal{C}$ denotada por* $\mathbf{P} = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq K}$, *corresponde a la matriz estocástica de dimensión* $\mid \mathcal{K} \mid \times \mid \mathcal{K} \mid$ *con entradas*

$$p_{ij} = \mathbb{P}\{\mathcal{C}_{n+1} = j \mid \mathcal{C}_n = i\} \tag{2.0}$$

para cada $n \in \mathbb{N}^*$ *y estados arbitrarios* $i, j \in \mathcal{K}$, *es decir*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,K} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ p_{K,1} & p_{K,2} & \cdots & p_{K,K} \end{pmatrix}$$

la cual contiene toda la información necesaria para describir la dinámica del proceso entre los elementos de $\mathcal{K}$.

Una vez que el proceso $\mathcal{C}$ ha sido definido, lo deseable sería explicar su evolución en dos diferentes escalas de tiempo, digamos a corto y mediano plazo. El estudio a corto plazo esta determinado por la igualdad (2.0). Para el estudio del segundo, se hace necesaria la siguiente

DEFINICIÓN 2.7 (MATRIZ DE TRANSICIÓN EN m PASOS). *Dada $\mathcal{C}$ una $\mathbb{F}$-cadena de Markov homogénea, la matriz de transición de m pasos,* $m \in \mathbb{N}^*$ *asociada a $\mathcal{C}$ denotada por* $\mathbf{P}^{(m)} = (p_{ij}^{(m)})_{1\leq i,j\leq K}$, *corresponde a la matriz estocástica de dimensión* $\mid \mathcal{K} \mid \times \mid \mathcal{K} \mid$ *cuyas entradas quedan determinadas por las probabilidades de transición*[4]

$$p_{ij}^{(m)} = \mathbb{P}\{\mathcal{C}_{n+m} = j \mid \mathcal{C}_n = i\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Proposición 2.8 (Ecuación de Chapman-Kolmogorov). *Dada $\mathcal{C}$ una $\mathbb{F}$-cadena de Markov homogénea,* $\forall m, n, r \in \mathbb{N}^*$, *se cumple*

$$p_{ij}^{(n+r)}(m) = \sum_k p_{ik}^{(n)}(m) p_{kj}^{(r)}(m+n). \tag{2.0}$$

Observaciones:

1. La proposición (2.0) tiene como consecuencia que $\mathbf{P}^{(n)}(m)$ no depende de m, ya que $\mathbf{P}^{(n+r)}(m) = \mathbf{P}^{(n)}(m)\mathbf{P}^{(r)}(m+n)$ y $\mathbf{P}^{(n)}(m) = \mathbf{P}^n$, la $n-$ésima potencia[5] de $\mathbf{P}$.

[4] Se define para $m = 0$, $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$.

[5] Debido a que (2.0) corresponde a la fórmula para la multiplicación de matrices

2. Por la observación anterior, en adelante usaremos la siguiente notación: $\mathbf{P}^{(n)} := \mathbf{P}^{(n)}(m)$ y $p_{ij}^{(n)} := p_{ij}^{(n)}(m)$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, por lo que (2.0) queda expresada como

$$p_{ij}^{(n+r)} = \sum_{k=1}^{K} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(r)} = \sum_{k=1}^{K} p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n)}. \tag{2.1}$$

3. En términos matriciales, la igualdad (2.1) se escribe como

$$\mathbf{P}^{(n+r)} = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}^{(r)}. \tag{2.2}$$

4. $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{Id}$, donde $\mathbf{Id}$ corresponde a la matriz identidad $K-$dimensional.

5. De (2.1) y (2.2) se siguen

   - el *análisis del primer paso*

$$\mathbf{P}^{(n+1)} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.3}$$

   - el *análisis del último paso*

$$\mathbf{P}^{(n+1)} = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.4}$$

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) pueden reescribirse respectivamente, con la ecuaciones de Kolmogorov siguientes

i) *Ecuación hacia atrás (backward) de Kolmogorov*

$$\Delta\mathbf{P}^{(n+1)} = \Lambda\mathbf{P}^{(n)}, \quad \mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{Id}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

ii) *Ecuación hacia adelante (forward) de Kolmogorov*

$$\Delta\mathbf{P}^{(n+1)} = \mathbf{P}^{(n)}\Lambda, \quad \mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{Id}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

donde

- $\Delta\mathbf{P}^{(n+1)} := \mathbf{P}^{(n+1)} - \mathbf{P}^{(n)}$,
- $\Lambda = \mathbf{P} - \mathbf{Id}$ es conocida como la *matriz generadora* asociada a la matriz estocástica $\mathbf{P}$.

Observaciones:

1. Nótese que las entradas sobre la diagonal de la matriz Λ son números no positivos.

2. Cada renglón de Λ suma 0.

3. En este contexto, las ecuaciones backward y forward de Kolmogorov coinciden.

Para concluir esta sección, enunciaremos el resultado que permite relacionar las probabilidades de encontrarse en un determinado estado en tiempos futuros con el estado inicial del proceso; con este fin introducimos la siguiente

DEFINICIÓN 2.9 (DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD INICIAL). *La distribución de probabilidad inicial para $\mathcal{C}$ bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ corresponde al vector renglón*

$$\mu_0 = [\mu_0(i)]_{1\leq i\leq K} = [\mathbb{P}\{\mathcal{C}_0 = i\}]_{1\leq i\leq K},$$

De manera análoga definimos la *distribución de probabilidad al tiempo n*, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ como

$$\mu_n = [\mu_n(i)]_{1\leq i\leq K} = [\mathbb{P}\{\mathcal{C}_n = i\}]_{1\leq i\leq K}.$$

LEMA 2.1. $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ *se verifica*

$$\mu_{m+n} = \mu_0 \mathbf{P}^{(m+n)} = \mu_m \mathbf{P}^{(n)} = \mu_n \mathbf{P}^{(m)}$$

NOTA 5. *Todo lo anterior muestra que el proceso estocástico en cuestión queda determinado completamente una vez que la matriz de transición $\mathbb{P}$ y la función de masa inicial μ_0 son especificados, es decir, el estudio de cadenas de Markov se reduce al estudio de propiedades algebraicas de matrices.*

2.2.2. Cambio de Medida de Probabilidad

En esta sección enunciaremos los resultados de Bielecki y Rutkowski[4] referentes a las condiciones bajo las cuales el proceso $\mathcal{C}$, una $\mathbb{F}-$cadena de Markov bajo $\mathbb{P}$, preserva dicha propiedad bajo el cambio a una medida de probabilidad equivalente $\mathbb{P}^*$. Si la propiedad se preserva, veremos como se relacionan las probabilidades de transición dependientes del tiempo

$p^*_{ij}(n) = \mathbb{P}\{\mathcal{C}_{n+1} = j|\mathcal{C}_n = j\}$ con las probabilidades bajo la medida original.

Dado un horizonte de tiempo $T^* < \infty$ fijo, definimos el conjunto (ordenado) de fechas $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T^*\}$. Si $\mathbb{P}^*$ es una medida de probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}_{T^*})$ entonces la derivada de Radon-Nicodym se define como

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{T^*}} = \eta_{T^*}, \quad \mathbb{P} - c.s \tag{2.5}$$

y satisface lo siguiente:

i) η_{T^*} es una variable aleatoria $\mathcal{F}_{T^*}-$medible y estrictamente positiva $\mathbb{P}-$c.s.

ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\eta_{T^*}) = 1$.

Observaciones:

- puede demostrarse que el proceso η_n sigue una martingala estrictamente positiva bajo la medida $\mathbb{P}$, es decir $\eta_n = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\eta_{T^*}|\mathcal{F}_n), \quad \forall n \in \mathcal{T}$.

- una expresión equivalente a (2.5) y que permite ver de manera más clara el uso de la derivada de Radon-Nicodym para expresar a la primer medida en términos de la segunda es

$$\mathbb{P}^*(A) = \int_A \eta_n(\omega) d\mathbb{P}\{\omega\}, \qquad A \in \mathcal{F}_n$$

- la derivada de Radon-Nicodym es útil en el cálculo de la esperanza de cualquier proceso integrable X, mediante el cambio a una medida de probabilidad equivalente determinado por la siguiente expresión (ver [7]):

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[X] = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}^*(\omega) = \int_\Omega X(\omega) \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}\left[X \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\right].$$

Recuérdese que el objetivo perseguido es el de explicar la relación entre las probabilidades de transición reales y las de riesgo neutral, los resultados siguientes son también tomados de Bielecki y Rutkowsky, quienes muestran las condiciones bajo las cuales es posible establecer dicha relación.

Condición 1. La v.a. $\eta_n^{-1}\eta_{n+1}$ es $\sigma(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n+1})-$medible $\forall n \in \mathcal{T} \setminus \{T^*\}$. En otras palabras,

$$\eta_n^{-1}\eta_{n+1} = g_n(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n+1}) \qquad \forall n \in \mathcal{T} \setminus \{T^*\},$$

para alguna función $g_n : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$.

Proposición 2.10. *Si $\mathcal{C}$ sigue una $\mathbb{F}-$cadena de Markov homogénea bajo $\mathbb{P}$ y si se satisface la* condición 1, entonces

i) $\mathcal{C}$ sigue una $\mathbb{F}-$cadena de Markov bajo $\mathbb{P}^*$,

ii) $p^*_{ij}(n) = p_{ij}g_n(i,j)$ para estados arbitrarios $i, j \in \mathcal{K}$ y $\forall n \in \mathcal{T} \setminus \{T^*\}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}^*$ fijo, $s = 1$ y para cualquier estado $j \in K$, de (2.1) sabemos por hipótesis que $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{F}-$cadena de Markov bajo $\mathbb{P}$, es decir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{F}_t\} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{C}_t\},$$

queremos demostrar que si $\mathbb{P}^*$ es una medida de probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$ entonces $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{F}-$cadena de Markov bajo $\mathbb{P}^*$, i.e.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{F}_t\} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{C}_t\},$$

partiendo del lado izquierdo de la igualdad anterior y utilizando el teorema de Bayes se obtiene

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{F}_t\} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}\eta_{T^*}|\mathcal{F}_t\}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{\eta_{T^*}|\mathcal{F}_t\}} \tag{2.6}$$

Además, por propiedad de la esperanza condicional se tienen las siguientes igualdades para el numerador de la ecuación anterior, para $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}\eta_{T^*}|\mathcal{F}_t\} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}\eta_{T^*}|\mathcal{F}_{t+1}\}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{\eta_{T^*}|\mathcal{F}_{t+1}\}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}\eta_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

sustituyendo (2.7) en (2.6) se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{F}_t\} &= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}\eta_{t+1}|\mathcal{F}_t\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{\eta_{T^*}|\mathcal{F}_t\}} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}\eta_{t+1}|\mathcal{F}_t\right]}{\eta_t} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}\eta_t^{-1}\eta_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}g(\mathcal{C}_t,\mathcal{C}_{t+1})|\mathcal{F}_t\right] \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Hasta aquí, lo único que podemos concluir de (2.8) es que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{F}_t\}$ es una variable aleatoria $\sigma(\mathcal{C}_t)-$medible. Con este resultado y el hecho de que $\sigma(\mathcal{C}_t) \subseteq \mathcal{F}_t$, y de las propiedades de esperanza condicional se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{F}_t\} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{F}_t\}|\sigma(\mathcal{C}_t)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\sigma(\mathcal{C}_t)\} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\{\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{C}_t\} \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto hemos demostrado que $\mathcal{C}$ sigue una $\mathcal{F}-$cadena de Markov bajo $\mathbb{P}^*$. La demostración del inciso ii) se obtiene de varias de las igualdades utilizadas anteriormente

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^*(t) &= \mathbb{P}^*\{\mathcal{C}_{t+1}=j|\mathcal{C}_t=i\} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{\eta_t^{-1}\eta_{t+1}\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{C}_t=i\} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{g_t(\mathcal{C}_t,\mathcal{C}_{t+1})\mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_{t+1}=j\}}|\mathcal{C}_t=i\} \\
&= p_{ij}g_t(i,j). \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

□

Observación:

- De la proposición (2.10) se tiene que, suponiendo cierta la condición 1), la propiedad de Markov se preserva bajo la medida de probabilidad equivalente $\mathbb{P}^*$, sin embargo no se garantiza que ocurra lo mismo con la homogeneidad[6].

[6]Existen casos especiales en los que la homogeneidad también se conserva.

En [4], Bielecki y Rutkowsky introducen la siguiente condición con el objetivo de encontrar una representación más clara de la relación entre las probabilidades de transición reales con las de riesgo neutral.

Condición 2. Existe un conjunto finito A, tal que $\forall n \in \mathcal{T} \setminus \{T^*\}$, el producto $\eta_n^{-1}\eta_{n+1}$ admite la siguiente representación

$$\eta_n^{-1}\eta_{n+1} = 1 + \sum_{\alpha \in A} \tilde{m}_n^\alpha \hat{m}_{n+1}^\alpha, \tag{2.11}$$

donde

- $\tilde{m}_n^\alpha$ es $\sigma(\mathcal{C}_n)-$medible, es decir $\tilde{m}_n^\alpha = \tilde{g}_n^\alpha(\mathcal{C}_n)$ para alguna función $\tilde{g}_n^\alpha : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$.

- $\hat{m}_{n+1}^\alpha$ es $\sigma(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n+1})-$medible, es decir $\hat{m}_{n+1}^\alpha = \hat{g}_{n+1}^\alpha(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n+1})$ para alguna función $\hat{g}_{n+1}^\alpha : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$.

La condición anterior y la proposición (2.10) permiten obtener el siguiente resultado

Corolario 2.11. *Si $\mathcal{C}$ sigue una $\mathbb{F}-$cadena de Markov homogénea bajo $\mathbb{P}$ y suponemos cierta la* condición 2, entonces

i) $\mathcal{C}$ sigue una $\mathbb{F}-$cadena de Markov bajo $\mathbb{P}^*$

ii) $\forall i, j \in \mathcal{K}$ y $\forall n \in \mathcal{T} \setminus \{T^*\}$ se sostiene la siguiente relación

$$p_{ij}^*(n) = p_{ij}\left(1 + \sum_{\alpha \in A} \tilde{g}_n^\alpha(i)\hat{g}_{n+1}^\alpha(i,j)\right) \tag{2.12}$$

NOTA 6. *Hasta aquí hemos visto que bajo la condición 1), o su equivalente la condición 2), la propiedad de Markov se conserva bajo el uso de medidas de probabilidad equivalentes aún cuando no necesariamente ocurre lo mismo con la homogeneidad. Además, (2.12) proporciona una relación*[7] *entre las probabilidades de transición originales con las probabilidades de la medida equivalente.*

[7] Es posible obtener una relación más conveniente para (2.12), para ello consúltese [4], sección 11.

2.2.3. Tiempo de Absorción

Los estados de una cadena de Markov puden ser agrupados en clases de acuerdo a si, dado un estado de una cierta clase, se puede acceder a este a partir de otros estados de la misma clase.

DEFINICIÓN 2.12. *Para $i, j \in \mathcal{K}$ decimos que j es accesible*[8] *desde i ($i \to j$) si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$, esto es, si con probabilidad positiva la cadena puede visitar al estado j habiendo iniciado en i.*

DEFINICIÓN 2.13. *Para $i, j \in \mathcal{K}$ decimos que ambos se comunican ($i \leftrightarrow j$) si $i \to j$ y $j \to i$.*

La definición 2.13 establece una relación de equivalencia[9] que particiona al espacio de estados en clases de equivalencia, dando lugar a la siguiente clasificación:

a) *Cadena irreducible:* si la relación de equivalencia (2.13) induce únicamente una clase de equivalencia, es decir el proceso es irreducible si todos los estados se comunican entre sí.

b) *Cadena reducible:* si la relación de equivalencia (2.13) induce a más de una clase de equivalencia.

DEFINICIÓN 2.14. *Dado $i \in \mathcal{K}$ decimos que i es un estado*

i) recurrente[10] *si la probabilidad de retornar al estado i en un tiempo finito es uno*[11]*, es decir*

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C}_n = i, \mathcal{C}_k \neq i, k = 1, 2, \ldots, n-1 | \mathcal{C}_0 = i\} = 1.$$

ii) transitorio si no es recurrente, es decir

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C}_n = i, \mathcal{C}_k \neq i, k = 1, 2, \ldots, n-1 | \mathcal{C}_0 = i\} < 1.$$

[8] También suele decirse que i se comunica con j

[9] Es decir, es: reflexiva, simétrica y transitiva

[10] Para un estudio más profundo sobre recurrencia en cadenas de Markov consultar Karlin, sección 5,6 y 7 de capítulo 2.

[11] Otra condición para que i sea recurrente es que el número esperado de retornos sea infinito.

Definición 2.15 (Estado Absorbente). *Diremos que un estado $k \in \mathcal{K}$ es absorbente para una $\mathbb{F}-$cadena de Markov bajo $\mathbb{P}$ si*

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C}_n = k | \mathcal{C}_m = k\} = 1, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*, m \leq n \tag{2.13}$$

Dado el interés por el comportamiento del proceso bajo un cambio de medida de probabilidad equivalente, se tiene la siguiente proposición

Proposición 2.16. *Sea $\mathbb{P}^*$ una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ equivalente a $\mathbb{P}$, y sea $\mathcal{C}$ una $\mathbb{F}-$cadena de Markov bajo $\mathbb{P}$ y bajo $\mathbb{P}^*$. Entonces $k \in \mathcal{K}$ es un estado absorbente para $\mathcal{C}$ bajo $\mathbb{P}$ si y solo si k es absorbente para $\mathcal{C}$ bajo $\mathbb{P}^*$.*

Demostración. Por hipótesis, $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{F}-$cadena de Markov bajo $\mathbb{P}$ y bajo $\mathbb{P}^*$, medida martingala equivalente a $\mathbb{P}$, de modo que por la proposición 2.10, tenemos que se cumple la condición 1), de ahí que es válida la relación siguiente entre las probabilidades reales y las de riesgo neutral

$$p^*_{ij}(n) = p_{ij} g_n(i,j), \qquad i,j \in \mathcal{K}, \qquad \forall n \in \mathcal{T} \setminus \{T^*\}.$$

Sea $i = K$, de la igualdad anterior tenemos lo siguiente

$$p^*_{Kj}(n) = p_{Kj} g_n(K,j), \qquad j \in \mathcal{K}, \qquad \forall n \in \mathcal{T} \setminus \{T^*\},$$

pero como K es un estado absorbente se tiene que $p_{Kj} = 0$, entonces

$$\begin{aligned} p^*_{Kj}(n) &= 0 * g_n(K,j), \\ &= 0 \qquad \forall j \in \mathcal{K}, \qquad \forall n \in \mathcal{T} \setminus \{T^*\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, K es un estado absorbente para $\mathcal{C}$ bajo $\mathbb{P}^*$. $\square$

Observaciones:

1. Si K es el único estado absorbente para $\mathcal{C}$ una $\mathbb{F}-$cadena de Markov bajo $\mathbb{P}$ con matriz de transición $\mathbf{P}$, se tiene

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,K-1} & p_{1,K} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ p_{K-1,1} & \cdots & p_{K-1,K-1} & p_{K-1,K} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $p_{ii} < 1$ para cada $i = 1, \ldots, K-1$

2. La matriz generadora asociada Λ toma la siguiente forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} p_{1,1}-1 & \dots & p_{1,K-1} & p_{1,K} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p_{K-1,1} & \dots & p_{K-1,K-1}-1 & p_{K-1,K} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.17 (Primer tiempo de salto al estado absorbente). *El tiempo aleatorio τ corresponde al primer tiempo en el que el proceso $\mathcal{C}$ salta al estado absorbente K. En términos matemáticos queda determinado por la siguiente expresión*

$$\tau = \text{mín}\{n \geq 0 : \mathcal{C}_n = K\}$$

Nota 7. *Para propósitos posteriores, nos interesará encontrar la distribución de probabilidad para τ bajo $\mathbb{P}$ y bajo la medida equivalente $\mathbb{P}^*$, razón por la cual el resto de la sección presentará resultados referentes a ello.*

Notación:

- $\tilde{\mathbf{P}} = [\tilde{p}_{ij}]_{1 \leq i,j \leq K-1}$ denotará la matriz cuadrada $K-1$-dimensional que se obtiene de suprimir el último renglón y la última columna de $\mathbf{P}$.

- $\tilde{\mathbf{P}}^k = [\tilde{p}_{ij}]_{1 \leq i,j \leq K-1}$ denota la $k-$ésima potencia de $\tilde{\mathbf{P}}$.

Para un estudio más profundo de la siguiente proposición, remitimos al capítulo 2 de Bhattacharya y Waymire (1990) ([3]).

Proposición 2.18. *Sea $i \in \mathcal{K}, i \neq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se satisface*

$$\mathbb{P}\{\tau \leq n | \mathcal{C}_0 = i\} = 1 - \sum_{j=1}^{K-1} \tilde{p}_{ij}^{(n)}(0) \tag{2.14}$$

Corolario 2.19. *Sea $i \in \mathcal{K}, i \neq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se satisface*

$$\mathbb{P}\{\tau \leq n | \mathcal{C}_0 = i\} = 1 - \sum_{j=1}^{K-1} p_{ij}^{(n)}(0) \tag{2.15}$$

Observaciones:

1. Para cualquier estado inicial $i = 1, \dots, K-1$, se sabe (Ver [3]) que $\mathbb{P}\{\tau = \infty | \mathcal{C}_0 = i\} = 0$ si y solo si todos los estados $i = 1, \dots, K-1$ de $\mathcal{C}$ son *transitorios*, o equivalentemente si el estado K es el único estado *recurrente*.

2. Asumiremos que K es el único estado recurrente en $\mathcal{C}$, ello implica que K es el único estado *absorbente* bajo la medida $\mathbb{P}$.

Sea $\mathbb{P}^*$ cualquier medida de probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}^{\mathcal{C}}_{T^*})$ y utilizando una notación equivalente a la de la medida $\mathbb{P}$ para las probabilidades de transición en n pasos, se sigue que

$$\mathbf{P}^{*(n)}(m) = \prod_{u=0}^{n-1} \mathbf{P}^*(m+u) \tag{2.16}$$

Definición 2.20 (Tiempo de absorción truncado). *Dada $\mathcal{C}$ una $\mathbb{F}$ cadena de Markov, definimos el tiempo de absorción truncado como*

$$\tau^* = \text{mín}\{n = 0, \dots, T^* : \mathcal{C}_n = K\}$$

La distribución de probabilidad de τ^* bajo $\mathbb{P}^*$ queda establecida en el siguiente

Corolario 2.21. *Para cada $n = 1, \dots, T^*$ y cada $i \neq K$ tenemos*

$$\mathbb{P}^*\{\tau^* \leq n | \mathcal{C}_0 = i\} = 1 - \sum_{j=1}^{K-1} p^{*(n)}_{ij}(0),$$

y

$$\mathbb{P}^*\{\tau^* = \infty | \mathcal{C}_0 = i\} = 1 - \mathbb{P}^*\{\tau^* > T^* | \mathcal{C}_0 = i\}. \tag{2.17}$$

2.3. Cadenas de Markov: Tiempo Continuo

2.3.1. Conceptos Preliminares

Sea $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un proceso continuo por la derecha sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con valores en $\mathcal{K}$, y sea $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}$ la filtración natural generada por el proceso $\mathcal{C}$ y $\mathbb{F}$ alguna filtración tal que $\mathbb{F}^{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{F}$.

DEFINICIÓN 2.22 (CADENA DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO). *Sea* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *diremos que* $\mathcal{C}$ *es una Cadena de Markov en tiempo continuo bajo* $\mathbb{P}$ *con respecto a* $\mathbb{F}$ *(en adelante una* $\mathbb{F}$*-Cadena de Markov) si para cualquier funcion* $h : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ *se satisface lo siguiente:*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(\mathcal{C}_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(\mathcal{C}_{t+s}) \mid \sigma(\mathcal{C}_t)), \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}^+$$

DEFINICIÓN 2.23 (MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN). *Sea* $\mathcal{C}$ *una* $\mathbb{F}$*-cadena de Markov en tiempo continuo la familia de dos parámetros* $\mathbf{P}(s,t), s,t \in \mathbb{R}^+, s \leq t$ *de matrices estocásticas es llamada la familia de matrices de probabilidades de transición asociada a* $\mathcal{C}$ *si*

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C}_t = j | \mathcal{C}_s = i\} = p_{ij}(s,t), \quad \forall i, j \in \mathcal{K}$$

Observación:

- En la definición (2.23), $\forall t \in \mathbb{R}^+$ se satisface la igualdad $\mathbf{P}(t,t) = \mathbf{Id}$.

Al igual que en el caso discreto, para efectos de aplicación resultará conveniente el uso de cadenas de Markov Homogéneas, por tal motivo enunciamos las siguientes definiciones equivalentes al caso discreto

DEFINICIÓN 2.24 (CADENA DE MARKOV HOMÓGENEA EN TIEMPO CONTINUO). *Sea* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *diremos que* $\mathcal{C}$ *es una Cadena de Markov Homogénea en tiempo continuo bajo* $\mathbb{P}$ *con respecto a* $\mathbb{F}$ *(en adelante una* $\mathbb{F}$*-Cadena de Markov Homogénea en tiempo continuo) si es una* $\mathbb{F}$*-Cadena de Markov en tiempo continuo y satisface*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(\mathcal{C}_{t+s}) \mid \mathcal{C}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(\mathcal{C}_{u+s}) \mid \mathcal{C}_u), \qquad \forall s, t, u \in \mathbb{R}^+$$

DEFINICIÓN 2.25 (MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN). *Sea* $\mathcal{C}$ *una* $\mathbb{F}$*-cadena de Markov homogénea en tiempo continuo, la familia de un parámetro* $\mathbf{P}(t), t \in \mathbb{R}^+$ *de matrices estocásticas es llamada la familia de matrices de probabilidades de transición asociada a* $\mathcal{C}$ *si*

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C}_{s+t} = j | \mathcal{C}_s = i\} = p_{ij}(t), \quad \forall i, j \in \mathcal{K}. \tag{2.18}$$

Observaciones:

1. Si $\mathbf{P}(t), t \in \mathbb{R}^+$ es la familia de matrices de transición para $\mathcal{C}$ entonces para cualquier subconjunto $A \subseteq \mathcal{K}$ tenemos

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C}_{t+s} \in A | \mathcal{C}_t\} = \sum_{j\in A} p_{\mathcal{C}_t j}(s), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^+$$

2. En el caso continuo no existe la noción de *tiempo de paso* ya que el parámetro t es continuo, por ello es importante estudiar la distribución del tiempo de permanencia del proceso en el estado i antes de saltar a cualquier otro estado (S_i). Dado el supuesto de Markov se sabe que S_i sigue una distribución exponencial (Ver, Norris (1998)). Esto significa que para cada estado $i \in \mathcal{K}$, $\exists \lambda_i$ tasa constante positiva tal que, una vez que el proceso alcanza el estado i, permanece ahí por una cantidad de tiempo determinada por la variable aleatoria $S_i \sim \exp(-\lambda_i t)$, independiente de la historia pasada. Ya que el tiempo de permanencia se distribuye exponencialmente[12] entonces la probabilidad de que una transición ocurra durante un intervalo corto de tiempo esta dada por

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_t \neq i | \mathcal{C}_{t-\Delta t} = i) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \tag{2.19}$$

Por otra parte, la probabilidad de transición de i a j en el intervalo $(t - \Delta t, t]$ es $\mathbb{P}(\mathcal{C}_t = j | \mathcal{C}_{t-\Delta t} = i)$. De la propiedad de Markov se tiene que

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_t = j | \mathcal{C}_{t-\Delta t} = i) = \mathbb{P}(\mathcal{C}_{\Delta t} = j | \mathcal{C}_0 = i$$

Ahora definimos λ_{ij} por

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}(\mathcal{C}_{\Delta t} = j | \mathcal{C}_0 = i)}{\Delta t} \tag{2.20}$$

asumiendo que el limite por la derecha existe en $[0, \infty)$. Por definición λ_{ij} debe ser no negativo. Para construir una trayectoria del proceso de cadena de Markov continua y homogénea, considere la probabilidad condicional de migrar del estado i al estado j, dado un salto desde la calificación i, definido por

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_t = j | \mathcal{C}_{t-\Delta t} = i, \mathcal{C}_t \neq i) = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{C}_t = j | \mathcal{C}_{t-\Delta t} = i)}{\mathbb{P}(\mathcal{C}_t \neq i | \mathcal{C}_{t-\Delta t} = i)}.$$

Usando (2.19) y (2.20), tenemos

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_t = j | \mathcal{C}_{t-\Delta t} = i, \mathcal{C}_t \neq i) = \frac{\lambda_{ij} \Delta t + o(\Delta t)}{\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)}.$$

[12] Significa también que el número de saltos sigue una distribución Poisson.

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, tenemos

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_t = j | \mathcal{C}_{t-} = i, \mathcal{C}_t \neq i) = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$$

la cual representa la probabilidad condicional de que el proceso entre a un nuevo estado j, dado un salto desde el estado i. Ya que existen $K-1$ posibles estados para el salto, la conservación de la probabilidad requiere que

$$\lambda_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{K} \lambda_{ij}$$

De aquí que todo lo que necesitamos para construir una trayectoria del proceso es el paramétro λ_{ij}.

3. Análogo al caso discreto, si $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{F}$-cadena de Markov homogénea en tiempo continuo, entonces satisface las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov dadas por

$$\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^+,$$

o equivalentemente, para cada $i, j \in \mathcal{K}$ y $s, t \in \mathbb{R}^+$

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k=1}^{K} p_{ik}(t) p_{kj}(s) = \sum_{k=1}^{K} p_{ik}(s) p_{kj}(t).$$

4. Puede demostrarse que

$$\mu_{t+s} = \mu_0 \mathbf{P}(t+s) = \mu_t \mathbf{P}(s) = \mu_s \mathbf{P}(t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^+.$$

5. Bajo el supuesto de que la familia $\mathbf{P}(\cdot)$ es continua por la derecha en $t = 0$, es decir $\lim_{t\downarrow 0} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0)$ y por el punto 2) se sigue que

$$\lim_{s\to 0} \mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t), \quad \forall t > 0,$$

y así

$$\lim_{s\to 0} \mathbf{P}\{\mathcal{C}_{t+s} = j | \mathcal{C}_t = i\} = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathcal{K}, t > 0. \tag{2.21}$$

6. La continuidad por la derecha implica la diferenciabilidad por la derecha en $t = 0$ de dicha familia, específicamente para cada $i, j \in \mathcal{K}$ los siguientes límites existen

$$\lambda_{ij} := \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}. \tag{2.22}$$

Definición 2.26 (Matriz generadora infinitesimal). *La matriz $\Lambda := [\lambda_{ij}]_{1 \leq i,j \leq K}$ es llamada la matriz generadora infinitesimal para una cadena de Markov asociada con la familia $\mathbf{P}(\cdot)$ via (2.18)*

Observaciones:

1. Para cada $i \neq j$, $\lambda_{ij} \geq 0$ y $\lambda_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^{K} \lambda_{ij}$

2. Λ también es conocida como la *matriz de intensidad* debido a que cada entrada λ_{ij} representa la intensidad de transición del estado i al estado j

3. Para el caso continuo, las ecuaciones de Kolmogorov se definen por:

   i) *Ecuación backward de Kolmogorov*

   $$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \Lambda \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{Id}. \tag{2.23}$$

   ii) *Ecuación forward de Kolmogorov*

   $$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\Lambda, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{Id}. \tag{2.24}$$

   ambas ecuaciones tienen la misma solución (única) dada por:

   $$\mathbf{P}(t) = e^{t\Lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n t^n}{n!}, \quad \forall t \in \mathbf{R}^+. \tag{2.25}$$

   Resultado que permite concluir que la matriz generadora Λ determina de manera única todas las propiedades probabilísticas relevantes de una cadena homogénea.

Otro modo de llegar a la ecuación (2.25) es notanto que la matriz de probabilidad de transición para el intervalo Δt puede expresarse como

$$\mathbf{P}(t, t + \Delta t) = \mathbf{Id} + \Delta t \boldsymbol{\Lambda} + o(\Delta t),$$

De modo que la matriz de probabilidades de transición en el periodo $m \in \mathbb{R}^+$ (recuerde la diferencia, no es el $m-$ésimo paso como en el caso discreto) puede obtenerse de manera similar. Sea $s = t + m\Delta t$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t, s) &\approx (\mathbf{Id} + \Delta t \boldsymbol{\Lambda})^m \\ &= \left(\mathbf{Id} + \frac{(s-t)}{m} \boldsymbol{\Lambda}\right)^m. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Tomando el límite $m \to \infty$ tenemos

$$\mathbf{P}(t, s) = \exp((s - t)\boldsymbol{\Lambda})$$

Así, al calcular la matriz exponencial de una matriz generadora $\boldsymbol{\Lambda}$, podemos obtener la matriz de probabilidades de transición para un periodo arbitrario $s - t$.

Observación:

- Bajo el supuesto de que K es el único estado absorbente, se cumple lo siguiente

$$\lim_{h\to\infty} \exp(h\boldsymbol{\Lambda}) \to \mathbf{D} = \begin{pmatrix} p_{1,1} - 1 & \dots & p_{1,K-1} & p_{1,K} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p_{K-1,1} & \dots & p_{K-1,K-1} - 1 & p_{K-1,K} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3.2. Cadenas de Markov *Embedded*

Sean $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ una $\mathbb{F}-$cadena de Markov homogénea bajo $\mathbb{P}$ con generadora infinitesimal Λ. Sea $\tau_n, n \in \mathbb{N}$ la sucesión aleatoria de tiempos de salto sucesivos de $\mathcal{C}$, definida como (por convención $\tau_0 = 0$):

$$\tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1} : \mathcal{C}_t \neq \mathcal{C}_{\tau_{n-1}}\}.$$

Puede demostrarse que

i) el tiempo aleatorio que transcurre entre un salto y su consecutivo sigue una ley de probabilidad condicional con parámetro $-\lambda_{ii} > 0$, es decir $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{P}\{\tau_n - \tau_{n-1} > t | \mathcal{C}_{\tau_{n-1}} = i\} = e^{\lambda_{ii} t}, \quad \forall i = 1, \ldots, K. \tag{2.27}$$

ii) las probabilidades condicionales de transición satisfacen

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C}_{\tau_n} = j | \mathcal{C}_{\tau_{n-1}} = i\} = p_{ij} =:= -\frac{\lambda_{ij}}{\lambda ii}, \quad \forall i, j \in \mathcal{K}, i \neq j. \tag{2.28}$$

NOTA 8. *Ya que $\mathcal{C}$ es una cadena homogénea, las leyes de probabilidad específicadas arriba no dependen del número de transiciones en el pasado (esto es, de n) sino únicamente del valor tomado por $\mathcal{C}$ después del salto previo.*

DEFINICIÓN 2.27 (CADENA DE MARKOV "EMBEDDED". TIEMPO DISCRETO). *La cadena de Markov en tiempo discreto $\hat{\mathcal{C}}_n = \mathcal{C}_{\tau_n}, n \in \mathbb{N}^*$, es llamada la cadena de Markov encajada correspondiente a la cadena de Markov en tiempo continuo $\mathcal{C}$. La sucesión $\hat{C}$ es una cadena de Markov homogénea bajo $\mathbb{P}$ con matriz de transición dada por $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{1 \leq i,j \leq K}$.*

DEFINICIÓN 2.28 (ESTADO ABSORBENTE). *Sea $\mathcal{C}_t, t \in \mathbb{R}^+$ una $\mathbb{F}-$cadena de Markov homogénea, decimos que un estado $k \in \mathcal{K}$ es absorbente si*

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C}_s = k | \mathcal{C}_t = k\} = 1, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+, t \leq s.$$

Observación:

1. De (2.22), es claro que si un estado $k \in \mathcal{K}$ es absorbente, entonces tenemos $\lambda_{kj} = 0$ para cada $j = 1, \ldots, K$.

De ahora en adelante, asumiremos que:

- El estado K es el único estado absorbente dentro del espacio de estados, ello implica que la generadora infinitesimal de $\mathcal{C}$ bajo $\mathbb{P}$ queda determinada por la matriz de intensidad

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \ldots & \lambda_{1,K-1} & \lambda_{1,K} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{K-1,1} & \ldots & \lambda_{K-1,K-1} & \lambda_{K-1,K} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- El estado inicial $\mathcal{C}_0 = x \neq K$ es fijo
- El tiempo aleatorio de absorción[13] en K es un $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}-$tiempo de paro y un $\mathbb{F}-$tiempo de paro. Además $\tau < \infty$, $\mathbb{P}-$casi seguramente[14].

NOTA 9. *Aún cuando las definiciones y resultados anteriores pueden extenderse al caso de cadenas de Markov condicionales, no los expondremos en este capítulo debido a que el modelo desarrollado en lo subsecuente solo utilizará cadenas de Markov no condicionales en tiempo discreto.*

2.4. Observaciones Generales

El objetivo del capítulo ha sido dar al lector la herramienta básica de cadenas de Markov homogéneas en tiempo discreto para comprender el modelo que será expuesto en el siguiente capítulo. Gran parte de las definiciones y resultados que fueron enunciados aquí pueden encontrarse en cualquier libro de cadenas de Markov y de procesos estocásticos en general, por lo que muchas demostraciones han sido omitidas. Los resultado más importante de este capítulo y los cuales deben tenerse en mente para lo subsecuente corresponden a los siguientes:

- La proposición (2.10) la cual establece que dada una $\mathcal{F}-$cadena de Markov homogénea bajo la medida de probabilidad real $\mathbb{P}$, es posible mantener la propiedad markoviana bajo el cambio a la medida de probabilidad equivalente $\mathbb{P}^*$, todo esto bajo el supuesto de que $\eta_t^{-1}\eta_{t+1}$ es $\sigma(\mathcal{C}_t, \mathcal{C}_{t+1})-$medible (con η_{T^*} la derivada de Radon-Nidodym como se define usualmente a partir de $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}^*$). Recuérdese que con dicho supuesto nada se garantiza sobre la preservación de la homogeneidad.
- El Corolario 2.21 porque muestra como obtener la distribución del tiempo de absorción del proceso $\mathcal{C}$ bajo la medida martingala equivalente $\mathbb{P}^*$, que en términos del modelo JLT se traduce en la distribución del estado de incumplimiento del deudor.

- La ecuación 2.16 tendrá gran relevancia debido a que, derivada del supuesto de homogeneidad del proceso $\mathcal{C}$, permitirá obtener las proba-

[13] Definido como $\tau = \inf\{t > 0 : \mathcal{C}_t = K\}$

[14] Dicho supuesto implica que el estado K es el único estado recurrente para $\mathcal{C}$

bilidades de transición de riesgo neutral en n pasos y que resultará útil en el proceso de calibración del modelo.

- Aún cuando no se desarrollará de manera detallada el modelo JLT (1997) en el caso continuo, se recomienda no dejar de lado dicha sección así como los resultados derivados de ello, es decir lo referente a cadenas de Markov *embedded* la cuales serán útiles en el último capítulo.

Los resultados de la última sección, como una generalización del caso discreto, tendrán relevancia en el último capítulo referente a las condiciones bajo las cuales una matriz estocástica puede considerarse proveniente de una cadena de Markov, así como de algunos métodos para obtener su matriz generadora.

Capítulo 3

Modelo JLT de Migración de Crédito

En este capítulo abordaremos el modelo propuesto en Jarrow, Lando y Turnbull(1997), formalizado posteriormente por Bielecki y Rutkowski en [4], el cual permite el estudio del proceso de migración de crédito vía una cadena de Markov homogénea. Trataremos tanto el caso discreto como su extensión al caso continuo, aunque este último de manera muy general. La formalización matemática ha sido tomada de [4] y de [22] básicamente.

3.1. Calificaciones de Crédito

Una de las principales preocupaciones de los participantes del mercado consiste en la cuantificación del riesgo de incumplimiento de la contraparte, para este fin se han desarrollado diversas metodologías de entre las que sobresalen aquellas basadas en *calificaciones de crédito* (también llamadas *rating* de crédito,[1]), así como las provenientes de modelos estructurales[2].

Dado que nuestro interés se enfoca en las metodologías asociadas a calificaciones de crédito, consideramos importante distinguirlas de lo que se conoce como *score de crédito* (credit scoring), término utilizado en el estudio del riesgo de crédito al consumo.

[1] *credit rating o credit quality*

[2] Por ejemplo el modelo de Merton (1974), el cual se basa en datos de balance y en volatilidades históricas de los títulos de la empresa en cuestión.

El *score* de crédito se asigna cuando los prestatarios son agentes económicos individualizados y los prestamistas generalmente son entidades bancarias (Ver [**?**]). Su contraparte en riesgo de crédito comercial es el *rating*, el cual se asigna cuando los prestatarios son grandes empresas o instituciones y los prestamistas grandes empresas o agentes económicos individualizados(pequeñas y medianas empresas y consumidores).

Definición 3.1 (Calificación de Crédito). *Medida de la calidad de crédito o de la propensión de incumplimiento de una firma. Evalúa la capacidad de la institución financiera para cumplir o incumplir con el pago de los compromisos adquiridos con los agentes económicos al tiempo que proporciona una clasificación de su deuda corporativa justificada para propósitos específicos.*

Observaciones:

1. La calificación de crédito puede ser específica de la firma o bien, específica de la emisión. En adelante, referiremos al *rating* como la calificación de crédito del instrumento financiero proveniente de la calificación asociada a la institución que lo emite.

2. Las calificaciones de crédito no corresponden únicamente a aquellas atribuidas por agencias de calificación comercial como lo son: Moody's Investors Service, Standard & Poor's Corporation y Fitch IBCA & Phelps[3], de hecho a raíz de las recientes modificaciones del Acuerdo de Basilea, gran parte de instituciones financieras mantienen sus propios sistemas de calificación basados en metodologías desarrolladas internamente (*internal ratings*).

3. Formalmente, la calidad de crédito en deuda corporativa es representada como un elemento de un conjunto finito de clases de calificación de crédito[4] (mutuamente disjuntas) denotado de ahora en adelante por $\mathcal{K} = \{1, \ldots, K\}$.

Las calificaciones de crédito no permanecen constantes, éstas son cambiantes en el tiempo y dicho cambio depende del deterioro o la mejora de la calidad

[3]Referimos a las siguientes páginas para obtener más información: *www.moodys.com, www.standardandpoors.com* y *www.fitchratings.com.*

[4]*Credit rating classes* o *credit grades.*

de crédito del instrumento en cuestión. Dicho fenómeno corresponde a la siguiente

DEFINICIÓN 3.2 (MIGRACIÓN DE CRÉDITO). *Cambio en el tiempo de la calificación de crédito de un instrumento de deuda entre varias*[5] *clases de crédito.*

Observación:

- En calificaciones otorgadas por agencias comerciales el deterioro o mejora en la calidad de crédito de una firma no implica un cambio inmediato en su calificación, ya que en general la recalificación ocurre anualmente.

Importancia del Proceso de Migración de Crédito.

Recientemente el estudio del proceso de migración de crédito ha tomado mayor importancia por las siguientes razones:

- Los modelos VaR de crédito requieren del cálculo de matrices de transición para su implementación.
- El nuevo acuerdo de Basilea permite el uso de sistemas de calificación interna para determinar requerimientos mínimos de capital.
- Los *ratings* son entradas clave en modelos referentes a la estructura a plazos de *spreads* de crédito, así como para la valuación de derivados de crédito tales como bonos incumplibles[6] o bonos *step-up*.
- A nivel internacional, las calificaciones de crédito soberanas[7] y sus procesos de migración juegan un papel determinante en la valuación y asignación de capital internacional.

Como se mencionó anteriormente, las agencias calificadoras habían sido las encargadas de proporcionar información referente a transiciones en la calificación de crédito, del mismo modo en el que KMV lo ha sido en las medidas

[5] Es la generalización de los estudios que consideraban solamente dos clases: incumplimiento y no incumplimiento.

[6] Bono corporativo que paga una cantidad constante X en la fecha de maduración T si no hay incumplimiento y si lo hay, paga una cantidad de recuperación $\tilde{X}$.

[7] El presente trabajo se enfoca únicamente al proceso de migración de deuda corporativa.Ver [18] para procesos de migración soberanos.

de distancia al incumplimiento. Sin embargo, al permitir el uso de calificaciones internas, el Acuerdo de Basilea ha sido determinante para el desarrollo de nuevas metodologías para la cuantificación del riesgo de crédito de las instituciones financieras.

Modelos de migración de crédito.

DEFINICIÓN 3.3 (MODELOS DE CALIFICACIÓN DE CRÉDITO MÚLTIPLES). *Término genérico referido a modelos de riesgo de crédito correspondientes al estudio del proceso de migración de crédito.*

Como fue señalado en el primer capítulo, los principales modelos basados en calificación de crédito corresponden a la categoría de *modelos de forma reducida*, cuya principal característica consiste en que el evento de incumplimiento es visto como un evento determinado por alguna variable independiente del proceso de valor de la firma, a saber, el proceso de migración.

Dentro de la literatura que involucra el estudio del proceso de migración de crédito encontramos los siguientes enfoques:

a) Modelos para el estudio del riesgo de incumplimiento. Tienen como principales autores a Altman y Kao (1992), Lucas y Lonsky (1992), Carty y Fons (1994), Belkin, Suchower y Forest (1998), Duffee (1998) y Helwege y Turner (1999), entre otros.

b) Modelos para la valuación de instrumentos financieros que involucran al proceso de migración. También son conocidos como modelos Markovianos debido a que utilizan cadenas de Markov para explicar la migración de crédito. Los principales estudios corresponden a Jarrow, Lando y Turnbull (1997), Kijima y Komoribayashi (1998) y Lando (2000).

3.2. Modelos Markovianos

El evento de migración de crédito entre varias *calificaciones* es modelado generalmente vía el *proceso de migración de crédito* $\mathcal{C}$ asociado a una cadena de Markov (condicional o no) en tiempo discreto o continuo, con espacio de estados finito $\mathcal{K}$. Una ventaja importante de estos modelos es el hecho de que las calificaciones de crédito son consideradas como variables de estado observables, lo que no ocurre necesariamente al considerar otro tipo de modelos como lo son los modelos de difusión.

Notación

Mantendremos la notación establecida en el capítulo anterior para cadenas de Markov, la reinterpretaremos en el contexto financiero de nuestro interés y agregaremos algunos nuevos conceptos.

- $\langle(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{G}\rangle$:= base estocástica que permitirá modelar al proceso de migración de crédito. En general consideraremos a la filtración $\mathbb{G}$ tal que $\mathbb{F}^{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{G}$.
- T^*:= fecha terminal de las actividades económicas en consideración (horizonte de tiempo), se supone a $0 < T^* < \infty$.
- $\mathcal{C}$:= cadena de Markov[8] en tiempo discreto con espacio de estados finito, que describe al proceso de migración de crédito del instrumento de deuda en cuestión[9].
- $\mathcal{K} = \{1, \ldots, K\}$:= espacio de estados del proceso de migración $\mathcal{C}$. Cada $j \in \mathcal{K}$ representa una calificación de crédito (por convención se ordenan de forma decreciente de modo que K corresponde al evento de incumplimiento).
- $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}$:= filtración natural generada por el proceso de migración $\mathcal{C}$. Es decir, es la información disponible a los participantes del mercado, generada únicamente por el proceso de migración de crédito.
- λ_{ij}:= intensidad de migración de la calificación de crédito i a la calificacion j, bajo la medida de probabilidad real $\mathbb{P}$. Análogamente λ^*_{ij} referirá las intensidades de migración pero bajo la medida martingala *spot* (medida de riesgo neutral) $\mathbb{P}^*$.
- $B(t, T)$:= precio al tiempo t de un bono cupón cero libre de riesgo que paga \$1 a la fecha de maduración T $(0 < t < T < T^*)$.

[8]Cuando expliquemos el caso discreto del modelo utilizaremos como indicadores del tiempo a n, m, k y para el caso continuo t, s; tal y como se usó en el capítulo anterior.

[9]En el desarrollo de este modelo usaremos como instrumento de deuda a un bono corporativo.

- B_t := proceso de descuento libre de riesgo al tiempo t.
- r_t := proceso estocástico de tasa corta de interés. No se específica ninguno en particular.
- $D(t,T)$:= precio en t de un bono corporativo con valor nominal de \$1 y fecha de maduración T con $t \leq T \leq T^*$. Si el esquema de recuperación es delta, $D^\delta(t,T)$.
- $D_i(t,T)$:= precio en t de un bono corporativo con valor nominal de \$1 y fecha de maduración T con $t \leq T \leq T^*$ y calificación de crédito inicial i. Si el esquema de recuperación es delta, $D_i^\delta(t,T)$.
- τ:=tiempo de paro que representa al tiempo de incumplimiento, es decir es el primer tiempo en el cual el proceso de migración $\mathcal{C}$ alcanza el estado de incumplimiento K.
- $\mathcal{T} = \{0,1,2,\ldots,T^*\}$:= conjunto de fechas de operación del mercado. Usaremos la notación $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}\backslash\{0\}$, $\mathcal{T}_{T^*} = \mathcal{T}\backslash\{T^*\}$ y $\mathcal{T}_{0,T^*} = \mathcal{T}\backslash\{0,T^*\}$, (notación análoga se usará para el espacio de estados $\mathcal{K}$).

En el desarrollo del modelo deben tenerse en cuenta los siguientes aspectos:

a) El proceso de descuento libre de riesgo al tiempo t se define como es usual en teoría de valuación de instrumentos financieros. Para el caso discreto

$$B_t = \prod_{u=0}^{t-1}(1+r_u),$$

y para el caso continuo

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right), \qquad \forall t \in \{0,1,\ldots,T^*\}$$

b) El modelo JLT tiene como objetivo la valuación de instrumentos financieros sujetos a riesgo de crédito, pero por simplicidad seguiremos los mismos resultados de Bielecky y Rutkowsky, es decir la teoría se expondrá únicamente para la valuación de bonos corporativos cupón cero.

NOTA 10. *Sugerimos tener presente los resultados del capítulo anterior referentes a las condiciones necesarias para la preservación de la propiedad markoviana bajo el cambio de la medida de probabilidad real a la medida de probabilidad equivalente; debido a que ello será necesario para la compresión de los supuestos establecidos en el Modelo JLT.*

3.2.1. Motivación.

Dado un mercado libre de arbitraje y completo[10], bajo un esquema de recuperación fraccional δ constante, se tiene que el precio al tiempo t con $t \leq T \leq T^*$, de un bono corporativo con fecha de maduración T, es

$$D^\delta(t,T) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1}(\delta \mathbb{I}_{\{T \geq \tau\}} + \mathbb{I}_{\{T<\tau\}})|\mathcal{G}_t). \tag{3.1}$$

La ecuación (3.1) depende de tres parámetros[11]: a) *la tasa de recuperación* δ, la cual se asume constante; b)*el proceso de tasa corta* r, para el cual puede asumirse algún modelo[12] y c) *el tiempo aleatorio de incumplimiento* τ, sobre el cual aún no se ha supuesto nada y para el que resulta necesario establecer una distribución.

Si suponemos independencia condicional de τ y del proceso de tasa de interés $\{r_t\}$, y si además suponemos que $B(t,T), \quad t \leq T \leq T^*$ es una familia de precios relativos de bonos libres de arbitraje[13] es posible simplificar (3.1) como sigue

$$D^\delta(t,T) = B(t,T)(\delta + (1-\delta)\mathbb{P}^*\{T < \tau|\mathcal{G}_t\}). \tag{3.2}$$

[10]Decimos que un mercado es completo sii todo reclamo contingente es replicable o bien, sii existe una única medida martingala equivalente

[11]Si el incumplimiento ocurre antes de T entonces $D^\delta(t,T) = \delta B(t,T)$, es decir el precio de un bono riesgoso se colapsa en la parte fraccional de un bono libre de riesgo.

[12]Existen varios modelos estocástico de tasas de interés: Vasicek, Ingerssol etc. Consúltese [7].

[13]Ver Anexo para la definición de este concepto

Demostración. El supuesto de condicionalidad entre el proceso τ y el proceso de tasa de interés r implica lo siguiente

$$\begin{aligned} D^{\delta}(t,T) &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[B_T^{-1}(\delta \mathbb{I}_{\{\tau \le T\}} + \mathbb{I}_{\{\tau > T\}})|\mathcal{G}_t] \\ &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[B_T^{-1}|\mathcal{G}_t]\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\delta \mathbb{I}_{\{\tau \le T\}} + \mathbb{I}_{\{\tau > T\}})|\mathcal{G}_t] \\ &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[B_T^{-1}|\mathcal{G}_t](\delta + (1-\delta)\mathbb{P}^*\{T < \tau|\mathcal{G}_t\}) \qquad (3.3) \end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos que $\forall T \in \{0, 1, \dots, T^*\}$ el proceso $Z^*(t,T) = B(t,T)/B_t$ sigue una $\mathbb{P}^*-$martingala, es decir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(Z^*(T,T)|\mathcal{G}_t) = Z^*(t,T) = \frac{B(t,T)}{B_t},$$

pero, por definición

$$Z^*(T,T) = \frac{B(T,T)}{B_T} = 1 * B_T^{-1} = B_T^{-1},$$

sustituyendo en la igualdad anterior llegamos a lo siguiente

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1}|\mathcal{G}_t) = \frac{B(t,T)}{B_t},$$

despejando de la igualdad anterior se llega a que

$$B(t,T) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1}|\mathcal{G}_t). \qquad (3.4)$$

Sustituyendo (3.4) en (3.3) se obtiene el resultado buscado

$$D^{\delta}(t,T) = B(t,T)(\delta + (1-\delta)\mathbb{P}^*\{T < \tau|\mathcal{G}_t\}).$$

$\square$

NOTA 11. *La ecuación (3.2) muestra que la evolución de la estructura a plazos de deuda riesgosa queda determinada de manera única, toda vez que se cuenta con la distribución del tiempo de incumplimiento, $\mathbb{P}^*\{T < \tau|\mathcal{G}_t\}$. El modelo JLT permite determinar de manera explícita tal distribución a través del uso de una cadena de Markov con espacio de estados finito determinado por calificaciones de crédito.*

3.2.2. Modelo de Jarrow, Lando y Turnbull

Desarrollado por Robert A. Jarrow, David Lando y Stuart M. Turnbull en 1997, fue el primer modelo de no-arbitraje en incorporar información de calificaciones de crédito para propósitos de valuación. De igual modo permite modelar la estructura a plazos de *spreads* de riesgo de crédito y su evolución en el tiempo. Sus características generales son:

1. Incorpora el efecto de calificaciones de crédito como indicador de la propensión a incumplir en instrumentos riesgosos.

2. Utiliza probabilidades de transición históricas para determinar probabilidades de riesgo neutral[14].

3. Permite la valuación y cobertura de deuda corporativa con opciones incluidas, de derivados extrabursátiles con contraparte riesgosa, de bonos gubernamentales sujetos a riesgo de incumplimiento y de derivados de crédito, además de ser aplicable en administración de riesgos.

4. En administración de riesgos permite generar la distribución de la exposición de crédito en contratos individuales o en portafolios, así como calcular perfil de exposición máxima y perfil de exposición esperada.

5. Excluye el incumplimiento múltiple; es decir, la clase de incumplimiento queda representada por un estado absorbente (K). Explícitamente: una vez que el proceso ha alcanzado la clase de incumplimiento se entenderá que no hay oportunidad de que se recupere y salte a una mejor calificación[15] y con ello, no habrá posibilidad de que vuelva a incumplir.

Condiciones de Mercado

- Suponemos un mercado sin fricción[16], completo y libre de arbitraje con horizonte de tiempo finito, $T^* > 0$, fijo.

- Bonos cupón cero libres de riesgo y riesgosos, con fecha de maduración $T,\ \forall T,\ 0 \leq T \leq T^*$, son operados en dicho mercado

[14] También conocidas como pseudo-probabilidades

[15] Aunque es un supuesto irrealista, facilita la teoría.

[16] No existen costos de transacción, bancarrota o impuestos y no hay problemas de divisibilidad en los activos.

- Asumiremos que la economía puede ser modelada con la base estocástica $\langle(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{G}\rangle$ con $\mathbb{P}$ la medida de probabilidad real y $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq T^*}$ la filtración que modela el flujo de información disponible a los inversionistas.

Supuestos Iniciales

S1 Existe una única medida de martingala[17] $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ sobre $(\Omega, \mathcal{G}_{T^*})$, tal que el proceso de descuento de bonos cupón cero libres de incumplimiento y de bonos cupón cero riesgosos siguen una $\mathbb{G}$-martingala bajo $\mathbb{P}^*$. Este supuesto es equivalente a considerar que se cuenta con una familia de precios relativos de bonos libres de arbitraje tanto para bonos corporativos como para bonos libres de riesgo.

S2 La tasa de interés corta (*spot*) libre de riesgo $\{r_t\}_{0\leq t\leq T^*}$, es vista como un proceso estocástico $\mathbb{F}-$adaptado, con $\mathbb{F}$ subfiltración de $\mathbb{G}$.

S3 El tiempo de incumplimiento τ y el proceso de tasa de interés libre de riesgo $\{r_t\}$, son variables aleatorias condicionalmente independientes dada la filtración $\mathbb{G}$ bajo la medida $\mathbb{P}^*$. Es decir, para cualquier ϕ funcional integrable del proceso r y cualquier función integrable $f(\tau)$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\phi(r)f(\tau)|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\phi(r)|\mathcal{G}_t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(f(\tau)|\mathcal{G}_t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Recuérdese que por la sección anterior tenemos que el precio de un bono riesgoso esta determinado por

$$D^\delta(t,T) = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1}(\delta\mathbb{I}_{\{T\geq\tau\}} + \mathbb{I}_{\{T<\tau\}})|\mathcal{G}_t),$$

aplicando la versión abstracta del teorema de Bayes[18], y sin utilizar el supuesto de condicionalidad entre τ y r, se obtiene que el precio del bono corporativo en términos de la medida martingala *forward* [19] $\mathbb{P}_T$ con $T < T^*$, corresponde al precio de un bono equivalente libre de

[17]El supuesto de no arbitraje garantiza la existencia de $\mathbb{P}^*$ medida de riesgo neutral o medida martingala equivalente, mientras que la unicidad queda determinada por la completez del mercado. Consúltese Mathematics of Financial Markets, para un estudio sobre medidas martingala equivalentes, Cap. 2.

[18]Ver [25]

[19]Es decir, la medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{G}_T)$ dada por $d\mathbb{P}_T/d\mathbb{P}^* = 1/B(0,T)B_T$, $\mathbb{P}^*$ c.s. Ver Anexo.

riesgo multiplicado por el *payoff* esperado (en pesos) en el tiempo T, explícitamente

$$D^{\delta}(t,T) = B(t,T)(\delta + (1-\delta)\mathbb{P}_T\{\tau > T|\mathcal{G}_t\}. \tag{3.5}$$

Por otro lado, sabemos que suponiendo cierto el supuesto de condicionalidad se llega a que

$$D^{\delta}(t,T) = B(t,T)(\delta + (1-\delta)\mathbb{P}^*\{T < \tau|\mathcal{G}_t\}).$$

Así, de (3.5) y de la igualdad anterior se sigue que

$$\mathbb{P}^*\{\tau > T|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}_T\{\tau > T|\mathcal{G}_t\}, \quad c.s.$$

S4 Los bonos corporativos están sujetos a esquemas de recuperación fraccional [20] constante (exógeno). Puede elegirse cualquier tipo de recuperación siempre y cuando sea constante. Actualmente existen varias extensiones a este modelo las cuales relajan este supuesto al permitir el uso de recuparaciones estocásticas.

Caso Discreto

Nota 12. *Para denotar el tiempo discreto en este apartado utilizaremos las letras n, m.*

Considérese un modelo de mercado discreto[21], con fechas de operación dadas por el conjunto $\mathcal{T} = \{0, \ldots, T^*\}$ con horizonte de tiempo[22] (finito) $T^* \in \mathbb{N}^*$. Dado un bono incumplible con fecha de maduración T y calificación inicial $\mathcal{C}_0$, el cambio futuro en su calificación crediticia está descrito por el proceso estocástico $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_n)_{n\in\mathcal{T}}$, conocido como el *proceso de migración.*

Nota 13. *La calificación crediticia en el tiempo n, de un bono incumplible coincide con el valor asociado al proceso de migración $\mathcal{C}$ en el tiempo n, es decir al valor que corresponde a la variable aleatoria $\mathcal{C}_n$.*

[20] Es decir, un bono incumplible, paga a la fecha de maduración una fracción fija de su valor a la par.

[21] Corresponde a modelos en los cuales todas las cantidades relevantes toman un número finito de valores.

[22] Fecha terminal de las actividades económicas en consideración

Supuestos Adicionales.

S5 El proceso de migración $\mathcal{C}$ sigue una $\mathbb{G}-$cadena de Markov homogénea irreducible en tiempo discreto, bajo la medida de probabilidad real $\mathbb{P}$, con matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \dots & p_{1,K-1} & p_{1,K} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p_{K-1,1} & \dots & p_{K-1,K-1} & p_{K-1,K} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y matriz generadora

$$\Lambda = \begin{pmatrix} p_{1,1}-1 & \dots & p_{1,K-1} & p_{1,K} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p_{K-1,1} & \dots & p_{K-1,K-1}-1 & p_{K-1,K} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con espacio de estados $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$ correspondientes a las calificaciones de crédito posibles[23], donde el estado 1 representa el *rating* más alto y K el más bajo (incumplimiento). Este último, el estado K, es el único estado absorbente.

Observaciones:

- Dado que $\mathcal{C}$ sigue una $\mathbb{G}-$cadena de Markov homogénea entonces sigue una cadena de Markov homogénea ordinaria es decir una $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}-$cadena de Markov homogénea, ello significa que la evolución probabilística futura de calificación de crédito del bono en cuestión no depende de la historia del mercado (representada por la filtración $\mathbb{G}$) ni de la calificación pasada del bono (representada por la filtración $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}$), sino únicamente de la calificación actual. En el ámbito financiero ello significa que el mercado es eficiente, ello es, la información se acumula de manera eficiente en la última observación.

[23]En el caso de portafolios corporativos cada elemento de $\mathcal{K}$ representa el *rating* asignado internamente por el prestamista o externamente por una agencia de calificación. En el caso de portafolios de consumo (*retail portfolio*) cada estado puede definirse como un rango de *score* correspondiente a un nivel específico.

- El establecer transiciones en tiempo discreto significa que de ocurrir un cambio en el *rating*, este se dará únicamente después de un periodo fijo de tiempo (6 meses, 9 meses, 1 año, etc.).

- El supuesto de homogeneidad implica que las probabilidades de transición no cambian en el tiempo.

- Por simplicidad estamos asumiendo que K es el único estado absorbente ($p_{Kj} = 0, \forall j \in \mathcal{K}_K$ y $p_{KK} = 0$). El tiempo de incumplimiento se define[24] como el primer momento en el que el proceso de calificación alcanza el estado K, es decir

$$\tau := \inf\{n \in \mathcal{T} : \mathcal{C}_n = K\}$$

  por convención $\inf \phi = +\infty$.

- Se sabe que si el proceso de migración tiene un estado absorbente entonces la matriz de transición satisface

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

  es decir, el estado de incumplimiento se alcanza a largo plazo (desde cualquier estado) sin importar la calificación inicial.

- Dada la ordenación de los estados, las probabilidades de incumplimiento de un paso satisfacen la siguiente desigualdad[25]

$$p_{iK} \leq p_{jK}, \quad 1 \leq i \leq j \leq K. \tag{3.6}$$

[24]Para una firma que en el tiempo n tiene asignado el *rating* i, se define como

$$\tau := \inf\{m \geq n, m \in \mathcal{T} : \mathcal{C}_n = K\}$$

[25]Monotocidad estocástica para cadenas de Markov, ver [28], Cap. 7.

- Las matrices de transición de un paso pueden obtenerse empíricamente (usando datos históricos[26]). Estas matrices se caracterizan por concentrar las entradas distintas de cero alrededor de la diagonal[27](matrices diagonalmente dominantes).

NOTA 14. *Sobre el supuesto de homogeneidad del proceso de migración descansan la gran parte de críticas al modelo, debido a que diversos estudios con datos históricos muestran que la calificación crediticia se ve afectada por otros factores tales como ciclos económicos.*

S6 El proceso de migración $\mathcal{C}$ sigue una $\mathbb{G}-$cadena de Markov no necesariamente homogénea bajo la medida martingala $\mathbb{P}^*$ con estado absorbente K y matriz de transición dependiente del tiempo

$$\mathbf{P}^*(n) = \begin{pmatrix} p^*_{1,1}(n) & \dots & p^*_{1,K-1}(n) & p^*_{1,K}(n) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p^*_{K-1,1}(n) & \dots & p^*_{K-1,K-1}(n) & p^*_{K-1,K}(n) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observaciones:

- Recuérdese que la existencia y unicidad de $\mathbb{P}^*$ quedo garantizada al asumir un mercado completo y libre de arbitraje.

- Las probabilidades (de riesgo neutral) $p^*_{ij}(n)$ satisfacen

  - $p^*_{ij}(n) \geq 0, \forall i, j \in \mathcal{K}, i \neq j,$
  - $p^*_{ii}(n) = 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{K} p_{ij}(n)$ y
  - $p^*_{ij}(n) > 0, \forall i, j, i \neq j,$ si y solo sí $p_{i,j} > 0, 0 \leq n \leq \tau - 1.$

En el capítulo anterior se establecieron las condiciones bajo las cuales la propiedad de Markov relativa a la filtración de referencia $\mathbb{G}$, bajo el cambio a una medida de probabilidad equivalente, se preserva; así como su efecto sobre las probabilidades de transición de un paso. Para aplicar tales resultados Jarrow et. al (1997) establecen la siguiente condición técnica

[26]Para hacerlo, existen diversos métodos, algunos de los cuales serás explicados en el siguiente capítulo.

[27]Como señalan JLT, movimientos de dos o más *ratings* son eventos raros o inexistentes en lapsos de un año.

S7 Las probabilidades de transición bajo $\mathbb{P}$ y las probabilidades de transición bajo $\mathbb{P}^*$ satisfacen

$$p^*_{ij}(n) = \pi_i(n)p_{ij}, \quad \forall j \neq i, \quad i, j \in \mathcal{K}, \tag{3.7}$$

en forma matricial se tiene que

$$\mathbf{P}^*(n) = \begin{pmatrix} p^*_{1,1}(n) & \dots & p^*_{1,K-1}(n) & p^*_{1,K}(n) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p^*_{K-1,1}(n) & \dots & p^*_{K-1,K-1}(n) & p^*_{K-1,K}(n) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \pi_1(n)p_{1,1}(n) & \dots & \pi_1(n)p_{1,K-1}(n) & \pi_1(n)p_{1,K}(n) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \pi_{k-1}(n)p_{K-1,1}(n) & \dots & \pi_{K-1}(n)p_{K-1,K-1}(n) & \pi_{K-1}(n)p_{K-1,K}(n) \\ 0 & \dots & 0 & \pi_k(n)*1 \end{pmatrix}$$

o bien, haciendo un reacomodo se puede expresar como

$$\mathbf{P}^*(n) - \mathbf{Id} = \Pi(n)[\mathbf{P} - \mathbf{Id}]$$

con $\mathbf{Id}$ matriz identidad K-dimensional y $\Pi(n) = diag(\pi_1(n), \dots, \pi_{K-1}(n), 1)$ matriz diagonal K-dimensional.

Observaciones:

- $\pi_i(n)$ es independiente de j y es una función (no negativa) determinística dependiente del tiempo interpretada como *prima de riesgo*[28](ajuste aplicado a las probabilidades reales para obtener probabilidades de riesgo neutral).

- Del último renglón de la matriz tenemos que $\forall n, \pi_K(n) = 1$, llamaremos a $(\pi_1(n), \dots, \pi_{K-1}(n))$ el vector de prima de riesgo en el tiempo n.

- S7 implica que $p^*_{ii}(n) = 1 + \pi_i(n)(p_{ii} - 1)$, es decir

$$\mathbf{P}^*(n) = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{j=2}^K p_{1,j}(n) & \dots & \pi_1(n)p_{1,K-1}(n) & \pi_1(n)p_{1,K}(n) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \pi_{k-1}(n)p_{K-1,1}(n) & \dots & 1 - \sum_{j=1, j\neq K-1}^K p_{K-1,j}(n) & \pi_{K-1}(n)p_{K-1,K}(n) \\ 0 & \dots & 0 & \pi_k(n) \end{pmatrix}$$

NOTA 15. *En términos prácticos la condición S7 establece que para cualquier estado i, la probabilidad bajo la medida martingala $\mathbb{P}^*$ de saltar al estado $j \neq i$ se asume proporcional a la probabilidad correspondiente bajo la probabilidad real $\mathbb{P}$, con factor de proporcionalidad dependiente de i y n, pero no de j.*

[28] La independencia con el estado j implica que moverse del estado i al 1 asigna la misma prima de riesgo que si se transita del estado i al estado K.

3.2.3. Aplicaciones del Modelo

Recordemos que JLT plantearon y describieron la dinámica de incumplimiento como una cadena de Markov, con el objeto de analizar la estructura a plazos de *spread* de crédito, para lo cual requerían encontrar el valor de un bono incumplible, el proceso se explica a continuación.

a) Valuación de bonos incumplibles

Dado un bono incumplible cupón cero con calificación de crédito determinada por el proceso $\mathcal{C}$ en el tiempo n y asumiendo ciertos S1-S7, la probabilidad de que el incumplimiento ocurra después de la fecha de maduración[29] T, corresponde a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*\{\tau > T|\mathcal{G}_n\} &= \mathbb{P}^*\{\tau > T|\mathcal{C}_n\} \\ &= \sum_{j\neq K} p^*_{\mathcal{C}_n j}(n,T) \\ &= 1 - p^*_{\mathcal{C}_n K}(n,T), \quad n = 0,\ldots,T \end{aligned} \tag{3.8}$$

y si $\mathcal{C}_n = i$, para cada $0 \leq n \leq m \leq T$,

$$p^*_{ij}(n,m) := \mathbb{P}^*\{\mathcal{C}_m = j|\mathcal{C}_n = i\}, \quad \forall i,j \in \mathcal{K}. \tag{3.9}$$

de modo que el precio de un bono con calificación i, queda determinado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} D_i^\delta(n,T) &= B(n,T)[1-(1-\delta)\mathbb{P}^*(\tau \leq T)] \\ &= B(n,T)[\delta + (1-\delta)\sum_{j\neq K} p^*_{ij}(n,T)]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Observaciones:

- En (3.10) usamos el hecho de que $\mathbb{P}^*\{\tau > T|\mathcal{C}_n\} = 1 - \mathbb{P}^*\{\tau \leq T|\mathcal{C}_n\}$, de ahí que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*\{\tau \leq T|\mathcal{C}_n\} &= 1 - \sum_{j\neq K} p^*_{\mathcal{C}_n j}(n,T) \\ &= p^*_{\mathcal{C}_n K}(n,T). \end{aligned} \tag{3.11}$$

[29]En [22] se les denomina *probabilidad de solvencia en fechas futuras*

- Las probabilidades $p^*_{ij}(n,m)$ pueden obtenerse de las probabilidades de una paso $p^*_{ij}(n)$ y utilizando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

Combinando la ecuación (3.9) con (3.2), y bajo los supuestos S1-S7, obtenemos la siguiente

Proposición 3.4. *Si el valor en el tiempo n de un bono incumplible con fecha de maduración T, esquema de recuperación fraccional δ y* rating *de crédito i, se define como*

$$D^\delta_i(n,T) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(D^\delta_{\mathcal{C}_n}(n,T)|\mathcal{C}_n = i), \quad \forall i \in \mathcal{K}_K,$$

entonces

$$D^\delta_i(n,T) = B(n,T)(\delta + (1-\delta)\sum_{j\neq K} p^*_{ij}(n,T)), \tag{3.12}$$

donde

$$D^\delta(n,T) := D^\delta_{\mathcal{C}_n}(n,T) = B(n,T)(\delta + (1-\delta)\sum_{j\neq K} p^*_{\mathcal{C}_n j}(n,T)). \tag{3.13}$$

En el caso en el que se cuenta únicamente con dos clases de crédito (incumplimiento y no incumplimiento) denotadas por $i=1$, $i=2$, las fórmulas (3.12) y (3.13) se convierten en

$$D^\delta_1(n,T) = B(n,T)(\delta + (1-\delta)\mathbb{P}^*\{\tau > T|\mathcal{C}_n = 1\}, \tag{3.14}$$

y

$$D^\delta(n,T) = D_{\mathcal{C}_n}(n,T) = B(n,T)(\delta + (1-\delta)\mathbb{P}^*\{\tau > T|\mathcal{C}_n\}). \tag{3.15}$$

NOTA 16. *La ecuación (3.12), al proporcionar el precio teórico del instrumento de deuda, permite además de la cobertura, la identificación de oportunidades de arbitraje con dicho instrumento. El procedimiento para ello requiere la disponibilidad de la matriz de probabilidades de transición reales, $\mathbb{P}$, y la del vector de primas de riesgo $(\pi_1(n),\ldots,\pi_{K-1}(n))$, ya que ambos son utilizados para el cálculo de las probabilidades de riesgo neutral necesarias para obtener el precio teríco. El capítulo siguiente mostrará algunos métodos para encontrar la matriz $\mathbb{P}$ y en la sección de calibración de este apartado se dará el procedimiento para encontrar las primas de riesgo.*

b) Spread de Crédito.

DEFINICIÓN 3.5 (PROCESO DE SPREAD DE CRÉDITO). *El proceso de spread de crédito, $S_{\mathcal{C}_n}(n,T)$ se define como el diferencial entre la tasa forward de un paso sobre un bono incumplible en la fecha futura T ($g_{\mathcal{C}_n}(n,T)$) y la tasa forward de un paso para un bono libre de incumplimiento ($f(n,T)$), vistas en $n \leq T$, específicamente*

$$S_{\mathcal{C}_n}(n,T) := g_{\mathcal{C}_n}(n,T) - f(n,T) = \ln\left(\frac{\delta + (1-\delta)\sum_{j\neq K} p^*_{\mathcal{C}_n j}(n,T)}{\delta + (1-\delta)\sum_{j\neq K} p^*_{\mathcal{C}_n j}(n,T+1)}\right), \tag{3.16}$$

donde $g_{\mathcal{C}_n}(n,T) := -\ln\left(\frac{D_{\mathcal{C}_n}(n,T+1)}{D_{\mathcal{C}_n}(n,T)}\right)$, *y* $f(n,T) := -\ln\left(\frac{B(n,T+1)}{B(n,T)}\right)$.

Observaciones:

- En particular, sobre el conjunto $\{\mathcal{C}_n = i\}$, $g_i(n,T)$ representa el retorno *forward* de un paso sobre un bono incumplible que en el tiempo n se encuentra en la clase de crédito i (por supuesto, $g_K(n,T) = f(n,T)$).
- El *spread* de RC es dado en términos de la tasa de recuperación δ y la matriz de transición para clases de crédito.
- La ecuación (3.16) muestra que $S_{\mathcal{C}_n}(n,T)$ es estrictamente positivo en el modelo, excepto en el incumplimiento.

3.2.4. Calibración

El objetivo de este apartado es calibrar la versión discreta del modelo de JLT. Esta calibración corresponde a la propuesta en [4], la cual tiene como objetivo determiar la matriz de probabilidades de riesgo neutral $\mathbf{P}^*$ que hace que los precios de mercado observados $D_i(0,T)$ de un bono riesgoso con calificación de crédito i, coincidan con los valores teóricos dados por el modelo a través de la ecuación[30]

$$\begin{aligned} D_i(0,T) &= B(0,T)\left(1-(1-\delta)\mathbb{P}^*(\tau \leq T)\right) \\ &= B(0,T)(\delta + (1-\delta)\sum_{j\neq K} p^*_{ij}(0,T)). \end{aligned} \tag{3.17}$$

[30]En (3.12), usése $n = 0$.

La expresión anterior y el conocimiento de la estructura a plazos inicial del bono libre de incumplimiento permitirán la identificación de posibles oportunidades de arbitraje en el mercado financiero.

Procedimiento:

Dada (3.17), y suponiendo disponible la siguiente información:

1. La estructura a plazos inicial de un bono libre de incumplimiento, es decir los valores de mercado $B(0,T), \forall T \in \mathcal{T}_0$.
2. La estructura a plazos inicial de bonos incumplibles para cada una de las distintas clases de crédito: $D_i(0,T), \forall T \in \mathcal{T}_0$ y $\forall i \in \mathcal{K}_K$. Si el objetivo es analizar únicamente los bonos con calificación i, bastará la estructura a plazos para esa única calificación i, no obstante en este procedimiento esbozaremos el proceso general.
3. La matriz de probabilidad real $\mathbf{P}$ la cual es estimada con datos históricos sobre migraciones de crédito como se verá en el siguiente capítulo.

Paso I. De (3.17) es claro que debemos encontrar el valor de $\sum_{j \neq K} p^*_{ij}(0,T)$, de ahí la necesidad de obtener la matriz de transición de riesgo de neutral $\mathbf{P}^*(0,T)$

1. Sabemos que $\mathbf{P}^*(0,T) = [p^*_{ij}(0,T)]_{1 \leq i,j \leq K}$ para $T \in \mathcal{T}_{T^*}$, de modo que

$$\mathbf{P}^*(0,T) = \prod_{n=0}^{T-1} \mathbf{P}^*(n), \tag{3.18}$$

   esto es, las probabilidades de transición $p^*_{ij}(0,T)$ se obtienen a partir de las probabilidades de un paso $p^*_{ij}(n)$ vía las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

2. Bajo S7, se tiene que para $n \in \mathcal{T}_{T^*}$,

$$\mathbf{P}^*(n) = \Pi(n)\Lambda + \mathbf{Id} \tag{3.19}$$

   donde

   - $\Lambda = \mathbf{P} - \mathbf{Id}$ es la matriz generadora discreta,

- $\Pi(n)$ es la matriz diagonal $\Pi(n) = diag[\pi_1(n), \ldots, \pi_{K-1}(n), 1]$,
- **Id** es la matriz identidad K-dimensional.

Paso II. Notemos que (3.19) indica que nuestro problema se reduce a determinar la sucesión $\Pi(n), n \in \mathcal{T}_{T^*}$.

1. Ahora bien, si $i \in K$ representa la calificación inicial del bono $\mathcal{C}_0 = i$, entonces de (3.11) tenemos que para cada fecha de maduración $T \in \mathcal{T}_0$

$$\mathbb{P}^*(\tau \leq T) = p^*_{\mathcal{C}_0 K}(0,T) = p^*_{iK}(0,T),$$

2. Despejando $\mathbb{P}^*(\tau \leq T)$ en la primer parte de (3.17) e igualando al resultado anterior obtenemos

$$\mathbb{P}^*_{i,0}(\tau \leq T) := p^*_{iK}(0,T) = \frac{B(0,T) - D_i(0,T)}{B(0,T)(1-\delta)}, \quad \forall i \in \mathcal{K}, \forall T \in \mathcal{T}. \tag{3.20}$$

Paso III. Utilizando un proceso recursivo utilizaremos la igualdad (3.7) para encontrar los elementos de la matriz de transición de riesgo neutral $\mathbf{P}^*(0,T)$ dados por (3.20).

1. Para $n = 0$ calculamos los valores iniciales de prima de riesgo $(\pi_1(0), \ldots, \pi_{K-1}(0))$, igualando (3.7) con (3.20) y obtenemos

$$\pi_i(0) = \frac{B(0,1) - D_i(0,1)}{B(0,1)(1-\delta)p_{iK}}, \quad \forall i \in \mathcal{K}_K.$$

2. De (3.7) y (3.18) podemos calcular la matriz de transición de riesgo neutral de un paso $\mathbf{P}^*(0,1)$ como

$$\mathbf{P}^*(0) = \mathbf{Id} + \Pi(0)(\mathbf{P} - \mathbf{Id}).$$

y obtenemos

$$\mathbf{P}^*(0) = \begin{pmatrix} 1 + \pi_1(0)(p_{11} - 1) & \ldots & \pi_1(0)(p_{12}) & \pi_1(0)(p_{1K}) \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \pi_{K-1}(0)(p_{K-1,1}) & \ldots & 1 + \pi_{K-1}(0)(p_{K-1,K-1} - 1) & \pi_{K-1}(0)(p_{K-1,K}) \\ 0 & \ldots & 0 & \pi_K(0) \end{pmatrix}$$

3. Para $n = 1$, los valores de prima de riesgo corresponden a lo siguiente

$$\pi_i(1) = \frac{B(0,1) - D_i(0,1)}{B(0,1)(1-\delta)p_{iK}}, \quad \forall i \in \mathcal{K}_K.$$

4. De (3.7) y (3.18) podemos calcular la matriz de transición de riesgo neutral de un paso $\mathbf{P}^*(1)$ como

$$\mathbf{P}^*(1) = \mathbf{Id} + \Pi(1)(\mathbf{P} - \mathbf{Id}).$$

y obtenemos

$$\mathbf{P}^*(1) = \begin{pmatrix} 1+\pi_1(1)(p_{11}-1) & \dots & \pi_1(1)(p_{12}) & \pi_1(1)(p_{1K}) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \pi_{K-1}(1)(p_{K-1,1}) & \dots & 1+\pi_{K-1}(1)(p_{K-1,K-1}-1) & \pi_{K-1}(1)(p_{K-1,K}) \\ 0 & \dots & 0 & \pi_K(1) \end{pmatrix}$$

Así, hasta el momento podemos obtener $\mathbf{P}^*(0,2)$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(0,2) &= \mathbf{P}^*(0,1)\mathbf{P}^*(1,2) \\ &= \mathbf{P}^*(0)\mathbf{P}^*(1) \end{aligned} \tag{3.21}$$

5. Generalizando, $\forall n < T$ se obtienen las primas de riesgo $(\pi_1(n), \dots, \pi_{K-1}(n))$ como

$$\pi_i(n) = \frac{B(0,n) - D_i(0,n)}{B(0,n)(1-\delta)p_{iK}}, \quad \forall i \in \mathcal{K}_K.$$

Con este vector de primas de riesgo y con la matriz empírica $\mathbf{P}$, se calcula la matriz de transición de riesgo neutral de un paso, $\mathbf{P}^*(n)$. Este último resultado junto con las matrices $\mathbf{P}^*(0), \mathbf{P}^*(1), \dots, \mathbf{P}^*(n)$ permite el encontrar la matriz de transición de $n+1$ pasos como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(0,n+1) &= \mathbf{P}^*(0)\mathbf{P}^*(1)\cdots\mathbf{P}^*(n) \\ &= \mathbf{P}^*(0,1)\mathbf{P}^*(1,2)\cdots\mathbf{P}^*(n-1,n)\mathbf{P}^*(n,n+1) \\ &= \mathbf{P}^*(0,n)[\mathbf{Id} + \Pi(n)(\mathbf{P} - \mathbf{Id})] \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como lo indican Bielecki y Rutkowsky, en este procedimiento deben tenerse en cuenta los siguientes puntos:

- Dado un conjunto de datos iniciales disponibles, no hay garantía de que para cada n las matrices $\mathbf{P}^*(n)$ que resultan de (3.7) sean realmente matrices de transición ya que puede darse inconsistencia de datos con el modelo.

- Nótese que el proceso de calibración descrito involucra la estimación de tasas de recuperación δ, las cuales al igual que las matrices de transición estadísticas $\mathbf{P}$, pueden obtenerse de datos históricos.

- El supuesto de homogeneidad establecido en el modelo tiene como objeto el simplificar la estimación de la matriz de transición de $\mathcal{C}$ bajo $\mathbb{P}$. Este modelo es el más sencillo para el estudio de migraciones de crédito sin embargo su facilidad proviene de los supuestos que maneja; diversos estudios muestran que resulta más conveniente utilizar modelos de Markov condicionales.

Caso Continuo.

NOTA 17. *En este apartado, el tiempo se detonará por las letras s, t como es usual.*

Para el caso continuo, Jarrow y otros (1997) sustituyen los supuestos S5-S6 por las contrapartes continuas siguientes

S5c Bajo la medida de probabilidad real $\mathbf{P}$, el proceso de migración $\mathcal{C}$ sigue una $\mathbb{G}-$cadena de Markov homogénea en tiempo continuo con espacio de estados $\mathcal{K}$ finito, con matriz de intensidad

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,K-1} & \lambda_{1,K} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{K-1,1} & \dots & \lambda_{K-1,K-1} & \lambda_{K-1,K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tal que $\lambda_{ij} \geq 0, \forall i, j$ y $\lambda_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{K} \lambda_{ij}, \forall i \in \mathcal{K}$

Observación:

- El supuesto de continuidad permite que el cambio en la calidad de crédito ocurra en cualquier periodo de manera tal que podamos contar con matrices de transición para cualquier tiempo $t \in \mathbb{R}^+$.
- Las entradas λ_{ij} representan la proporción o tasa de transición del estado i al estado j.
- El tiempo de permanencia de la firma en la calificación de crédito i se distribuye exponencialmente con parámetro $q_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{K} q_{ij}$.
- Dada una transición en la calificación i, la probabilidad condicional de que una firma migre a una nueva calificación j es multinomialmente distribuida con q_{ij}/q_i.

- Al igual que en el caso discreto, K es el único estado absorbente. La cadena es irreducible.

S6c Bajo la medida martingala $\mathbb{P}^*$, el proceso de migración de crédito $\mathcal{C}$ sigue una $\mathbb{G}-$cadena de Markov no homogénea con matriz de intensidad dependiente del tiempo

$$\Lambda^*(t) = \begin{pmatrix} \lambda^*_{1,1}(t) & \dots & \lambda^*_{1,K-1}(t) & \lambda^*_{1,K}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \lambda^*_{K-1,1}(t) & \dots & \lambda^*_{K-1,K-1}(t) & \lambda^*_{K-1,K}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde cada entrada es una función $\lambda^*_{ij} : [0, T^*] \to \mathbb{R}^+$. Al igual que en el caso discreto, se asume que Λ satisface las condiciones de monotonía para las probabilidades de incumplimiento.

Para el caso continuo, el tiempo de incumplimiento se define como

$$\tau := \inf\{t \in [0, T^*] : \mathcal{C}_t = K\}.$$

y la condición técnica S7 se transforma en

S7c Existe una función matricial $U(t)$ de la forma

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_{1,1}(t) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & u_{K-1,K-1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tal que $u_{ii}(t), i \in \mathcal{K}_K$ son funciones estrictamente positivas, integrables[31] y tales que la matriz de intensidad real y la de riesgo neutral satisfacen $\Lambda(t)^* = U(t)\Lambda$ para cada $t \in [0, T^*]$.

[31] $\int_0^* T u_{i,i}(t) dt < \infty, \quad \forall i = 1, \dots, K-1.$

a) Fórmula de Valuación de un Bono.

Al igual que en el caso discreto, las *probabilidades de solvencia en fechas futuras* quedan determinadas por la siguiente relación

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*\{\tau > T|\mathcal{G}_t\} &= \mathbb{P}^*\{\tau > T|\mathcal{C}_t\} \\ &= \sum_{j\neq K} p^*_{\mathcal{C}_t j}(t,T) \\ &= 1 - p^*_{\mathcal{C}_t K}(t,T), \quad t \in [0,T] \end{aligned} \tag{3.23}$$

y si $\mathcal{C}_t = i$, para cada $0 \leq t \leq s \leq T^*$,

$$p^*_{ij}(t,s) := \mathbb{P}^*\{\mathcal{C}_s = j|\mathcal{C}_t = i\}, \quad \forall i,j \in \mathcal{K}. \tag{3.24}$$

Así, una vez que las probabilidades de transición $p^*_{ij}(t,s)$ son disponibles, se aplica la misma fórmula de valuación que en el caso discreto para determinar el precio de un bono incumplible, a saber

$$\tilde{D}^\delta_i(t,T) = B(t,T)[\delta + (1-\delta)(1 - p^*_{\mathcal{C}_t K}(t,T))]. \tag{3.25}$$

Observaciones:

- Dada $\mathbf{P}^*(t,s) = [p^*_{ij}(t,s)]_{1\leq i,j\leq K}$ y considerando la función de prima de riesgo como constante, es decir

  $$U(t) = U := diag[u_1, \ldots, u_{K-1}, 1], \quad \forall 0 \leq t \leq T^*$$

  se puede comprobar[32] que $\mathbf{P}^*(t,s) = \exp(U\Lambda(s-t))$, para cada $0 \leq t \leq s \leq T^*$.

b)Spread de Crédito.

DEFINICIÓN 3.6 (SPREAD DE CRÉDITO FORWARD INSTANTÁNEO). *El proceso de spread de crédito forward instantáneo, $S_{\mathcal{C}_t}(t,T)$ se define como el diferencial entre la tasa forward instantánea sobre un bono incumplible en la fecha futura T y la tasa forward instantánea para un bono libre de incumplimiento, vistas en $t \leq T$, es decir*

$$S_{\mathcal{C}_t}(t,T) := g_{\mathcal{C}_t}(t,T) - f(t,T) = \frac{(1-\delta)}{\delta + (1-\delta)(1 - p^*_{\mathcal{C}_t K}(t,T))} \frac{\partial p^*_{\mathcal{C}_t K}(t,T)}{\partial T}.$$

donde

[32] Ver [4]

- $g_{\mathcal{C}_t}(t,T) := -\frac{\partial \ln D_{\mathcal{C}_t}(t,T)}{\partial T}$,
- $f(t,T) := -\frac{\ln B(t,T)}{\partial T}$.

Observación:

- En particular, sobre el conjunto $\{\mathcal{C}_t = i\}$, $g_i(t,T)$ representa el retorno *forward* de un paso sobre un bono incumplible que en el tiempo t se encuentra en la clase de crédito i (por supuesto, $g_K(t,T) = f(t,T)$).

Calibración

Al igual que en el caso discreto, el objetivo de la calibración es identificar las matrices de intensidad de riesgo neutral, $\Lambda^*(t)$, que hacen que los precios de mercado $D_i(0,T)$ coincidan con los valores teóricos determinados por la ecuación siguiente

$$D_i(t,T) = B(t,T)\big(\delta + (1-\delta)(1 - p^*_{iK}(t,T))\big). \tag{3.26}$$

Asumiendo disponible la siguiente información:

- La estructura a plazos inicial de bonos libres de incumplimiento, es decir los precios $B(0,T)$ para $T \in [0,T^*]$.
- La estructura a plazos inicial de bonos incumplibles para varias clases de crédito, esto es: $D_i(0,T)$ para cada $T \in [0,T^*]$ y cualquier $i = 1,\dots,K-1$.

Procedimiento

Paso I. Estimar la tasa de recuperación δ y la matriz generadora estadística Λ.

Paso II. Una vez que se cuenta con δ y Λ,se procede al cálculo de la prima de riesgo de crédito, $U(t)$, discretizando el intervalo de tiempo y haciendo uso del procedimiento recursivo explicado en el caso discreto.

NOTA 18. *Aún cuando existen diversos métodos, la estimación de la matriz generadora asociada a una cadena de Markov en tiempo continuo resulta ser una tarea difícil.*

3.3. Observaciones Generales

El modelo JLT(1997) ha sido de gran importancia por el hecho de que ha permitido la incorporación del riesgo de crédito en la valuación de instrumentos de deuda corportiva mediante el uso de calificaciones de crédito. Además de ello ha sido la base para nuevos modelos markovianos entre los cuales podemos mencionar los siguientes:

Kijima y Komoribayashi. Este modelo mantiene los supuestos S1-S6 y únicamente hace una ligera modificación al supuesto S7. Recordemos, el supuesto 7 establecía que

$$p^*_{ij}(t) = \pi_i(n)p_{ij}, \qquad \forall j \neq i,$$

La modificación es la siguiente

$$p^*_{ij}(t) = \pi_i(n)p_{ij}, \qquad \forall j \neq K,$$

con la cual garantiza que si las probabilidades de incumplimiento p_{iK} son suficientemente chicas se siga cumpliendo este supuesto, ya que con el supuesto del modelo JLT éste deja de satisfacerse.

Das y Tufano. Extiende el modelo JLT suponiendo que la tasa de recuperación sigue un proceso estocástico correlacionado con tasas forward libres de incumplimiento.

Millossovich. También extiende el modelo JLT, reemplaza las tasas de recuperación constante por tasas de recuperación estocásticas introduciendo varias clases de incumplimiento (cada una con su tasa de recuperación correspondiente).

Para finalizar haremos las siguientes observaciones sobre el modelo JLT anteriormente explicado:

1. La interpretación financiera de suponer que el proceso de migración de crádito sigue una Cadena de Markov se refiere no exactamente a que la calificaón futura del instrumento en cuestión es independiente de las calificaciones anteriores, sino al hecho de que se cuenta con un mercado que permite que la información anterior se acumule de manera eficiente en la última observación. Así, la propiedad markoviana supone la existencia de un mercado eficiente.

2. El supuesto de homogeneidad es uno de los supuestos que más han sido cuestionados y sobre el cual descansan gran parte de las críticas a este modelo ya que existen varios estudios basados en datos históricos que muestran que el proceso de migración es dependiente de ciclos económicos.

3. Nótese que teóricamente, los modelos de Markov para el proceso de migración no hacen uso propiamente de la filtración natural, utilizan una filtración más grande ($\mathbb{F}^{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{G}$), lo que nos lleva al concepto de $\mathbb{G}-$cadena de Markov o bien a una cadena de Markov condicional. Que la filtración $\mathbb{G}$ sea mayor a la natural puede interpretarse diciendo que existen varias fuentes de incertidumbre como lo son el riesgo de mercado, el riesgo de crédito y otras debidas a factores económicos[4].

4. Un supuesto importante y el cual no debe dejarse de lado, tiene que ver con suponer que el proceso en estudio sigue también una $\mathbb{G}-$cadena de Markov bajo el uso de la medida de probabilidad equivalente $\mathbb{P}^*$. La discusión, aún no resuelta, tiene que ver con las condiciones bajo las cuales la preservación de la propiedad markoviana tiene sentido bajo el cambio a la medida de probabilidad equivalente cuando esta afecta todas las fuentes de incertidumbre del modelo [4].

5. En el capítulo anterior, se establecieron las condiciones sobre las derivadas de Radon-Nicodym que harían posible la preservación de la propiedad markoviana. No obstante, dichas condiciones son poco aplicables a modelos de riesgo de crédito dado que se asume que las derivadas de Radon-Nikodym son $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}-$adaptadas y no $\mathbb{G}-$adaptadas. Tal problema tiene como solución el establecer propiedades estructurales sobre la filtración $\mathbb{G}$: el riesgo de mercado y el riesgo de crédito son independientes, lo que lleva a exigir que la filtración $\mathbb{G}$ tenga la descomposición $\mathbb{G} = \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}^{\mathcal{C}}$ [4].

Capítulo 4

Estimación de Matrices de Migración

En el capítulo 3 vimos que el estudio de una cadena de Markov se reduce al correspondiente estudio de la matriz de transición asociada a ella. De modo que, al identificar al proceso de migración de crédito con una cadena de Markov, bastará determinar su matriz de probabilidades de transición para caracterizarlo completamente.

En este capítulo presentaremos algunos métodos de estimación de matrices de transición tanto para el caso discreto como para el caso continuo; para este último, siguiendo [6] y [21], desarrollaremos el problema de cadenas *embedded* referente a las condiciones de existencia e identificación de matrices generadoras de cadenas de Markov en tiempo continuo, resultados que permiten determinar si en realidad el proceso en estudio es o no compatible con una estructura markoviana. Concluimos el capítulo exponiendo algunas medidas de comparación de matrices de transición.

4.1. Matrices de Transición

Las matrices de transición constituyen la parte esencial en el estudio de cadenas de Markov debido a que son ellas quienes encierran toda lo información del proceso. Su uso para medir el riesgo de crédito inició con el surgimiento de la aplicación *Creditmetrics* de JP Morgan en 1997. Aplicado al estudio de migraciones de crédito supone que el proceso de migración sigue una cadena de Markov homogénea en tiempo discreto, es decir, asume el cumplimiento de las dos hipótesis fundamentales siguientes:

1. Dependencia Markoviana de orden 1. La calificación de crédito en un instante futuro depende únicamente de su calificacion en el estado anterior. Así, el tiempo de permanencia en la clase de crédito actual o cualquier otra variable, no influye en la probabilidad de transición hacia otra calificación en un instante futuro.

2. Homogeneidad temporal. Las probabilidades de transición de una calificación a otra no dependen del instante de tiempo de ocurrencia sino únicamente del lapso de tiempo transcurrido.

Una matriz de transición en este contexto muestra la probabilidad histórica de que un instrumento financiero cambie o mantenga su calificación en un periodo de tiempo específico. Se construyen mediante un arreglo cuadrangular de n filas por n columnas donde cada fila se etiqueta con una clase de crédito que representa la calificación al inicio del periodo; las mismas etiquetas se utilizan para las columnas pero estas representan la calificación del instrumento al final del periodo de análisis. Los elementos de este arreglo se interpretan del siguiente modo:

- Los elementos de la diagonal representan la probabilidad de que un instrumento mantenga su *rating* al final del periodo.
- Los elementos bajo la diagonal representan la probabilidad de que el instrumento aumente su calidad de crédito.
- Los elementos sobre la diagonal representan la probabilidad de que el instrumento disminuya su calificación.

El estudio del RC resulta más complejo que el estudio de RM, entre otras razones debido a que los eventos crediticios son menos frecuentes[1] que los cambios presentados en variables de mercado, ocasionando un monitoreo deficiente que se ve reflejado en el pausamiento o escasez de datos. Así, los métodos actuales de estimación de matrices de transición son variados y están en función de los datos disponibles: datos discretos o datos continuos.

[1] Sobre todo si el periodo de estudio es corto.

En el caso de matrices de migración de crédito debemos tener en cuenta los siguientes aspectos:

1. Las principales empresas calificadores (Standard & Poor's y Moody's) actualizan y publican de manera anual las matrices de transición de calificaciones de crédito e información relacionada. No obstante, la reciente modificación del acuerdo de Basilea permite que las instituciones financieras utilicen metodologías internas para el estudio del RC.

2. El general de matrices de transición son estimadas en intervalos de tiempo de un año, aunque es posible hacer la estimación en periodos más cortos, requiriendo con ello menos observaciones que para periodos grandes, sin que ello implique que la estimación es menos confiable[2].

3. En la administración de RC frecuentemente se requiere la estimación de probabilidades de incumplimiento de eventos raros[3], aún cuando datos de incumplimiento reales sobre ellos no existen.

4. La limitación de datos es dependiente del tiempo y tipo de exposición, por ejemplo existe mayor escasez cuando el proceso de migración corresponde a préstamos especializados o a deuda soberana (donde muy pocos incumplimientos han sido observados en el tiempo).

5. En aplicaciones bancarias, un modelo continuo es más apropiado que un modelo discreto, lo que lleva a requerir datos de calificación observados continuamente para la estimación de matrices de transición.

A rasgos generales, la estimación de matrices de transición depende de los datos con los que se cuenta, es decir si contamos con:

a) *Datos Discretos.* La primer opción consiste en hacer una estimación directa de la matriz de transición y así utilizar el modelo de Markov Discreto; la segunda opción se refiere a usar las observaciones discretas para construir un generador y con ello obtener el modelo continuo. Para este último caso referimos a [20] y a [5].

[2]Este tipo de estimaciones es necesaria para propósitos de valuación como para *swaps* de incumplimiento

[3]Por ejemplo, el incumplimiento de un instrumento con calificación de crédito alta; gran parte de estudios se han orientado al análisis de deuda corporativa con calificaciones bajas, para el cual se requiere una cantidad mínima de observaciones históricas mientras que para calificaciones altas, los datos son escasos en periodos cortos.

b) *Datos Continuos*[4]. Estimar intensidades de transición para construir la matriz generadora y a partir de ella obtener la matriz de probabilidades de transición y así recurrir al modelo de Markov continuo.

4.2. Estimación Directa

Los principales métodos de estimación directa de matrices de transición requieren del uso de *datos discretos* de transiciones individuales, es decir aquellos en los que las calificaciones de crédito han sido observadas solo en puntos discretos[5]. Para fines prácticos consideraremos que el instrumento de deuda en cuestión corresponde a bonos cupón cero con valor nominal de MXN 1.00.

Supuestos

- Sea T^* la fecha terminal de las actividades económicas en consideración (horizonte de tiempo), se supone a $0 < t < T^* < \infty$ con t la fecha actual.
- El mercado financiero es tal que la calificación de crédito de los bonos cupón cero con valor nominal de 1.00 y fecha de maduración $t < T < T^*$ corresponde a la calificación de la institución financiera que lo emite, dando lugar a bonos equivalentes pero con diferentes calificaciones de crédito.
- El conjunto de clases de crédito que pueden tomar los bonos corporativos corresponden al conjunto $\mathcal{K} = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, D\}$.
- El periodo de observación del cambio de calificaciones de crédito se registra en puntos discretos anuales.

[4]Un registro continuo significa que las transiciones de una firma entre diferentes *ratings* son registrados en las fechas en que ocurren y que el registro es completo en el sentido de que todos los cambios son registrados, de aquí que los registros continuos pueden entenderse como observaciones diarias.

[5]Por ejemplo, observaciones mensuales, anuales o bi-anuales.

Datos

Se cuenta con una secuencia temporal de observaciones discretas de cada deudor de las cuales podemos obtener

$$(N_{ij}(u, u+1) \quad : \quad \forall i, j \in \mathcal{K}), \qquad \forall u \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$$

donde:

$N_{ij}(u, u+1)$ denota el número de instrumentos que migraron de la calificación i a la calificación j en el periodo anual comprendido entre las fechas u y $u+1$ (la fecha t corresponde a la fecha actual).

Modelo

El proceso de migración para bonos cupón cero sujetos a riesgo de crédito con valor nominal de 1.00 y fecha de maduración T, sigue una cadena de Markov Homogénea en Tiempo Discreto $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_n)$ con espacio de estados $\mathcal{K}$, cada $\mathcal{C}_t$ representa el valor de la calificación del bono en el tiempo t.

Métodologías Las tres metodologías siguientes realizan la estimación directa de la matriz de transición $\mathbf{P}$, asociada al proceso de migración $\mathcal{C}$.

Método de Cohorte (Goodman y Anderson (1957)). La función de máxima verosímilitud se obtiene de K distribuciones independientes multinomiales y esta dada por

$$L(\mathbf{P}) = \prod_{i=1}^{K} \prod_{j=1}^{K} p_{ij}^{N_{ij}}.$$

De lo anterior tenemos que las probabilidades de transición p_{ij} tienen como estimador máximo verosímil a

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{u=0}^{t-1} N_{ij}(u, u+1)}{\sum_{u=0}^{t-1} N_{i}(u, u+1)}, \tag{4.1}$$

donde $N_i(u, u+1) = \sum_{j=1}^{K} N_{ij}(u, u+1)$, denota el número de instrumentos que tienen la calificación i al inicio del periodo de observación.

Debido a que en esta metodología se considera globalmente el flujo migratorio en todo el periodo de observación tiene la desventaja de que cambios imprevistos o transiciones anómalas no se vean reflejadas.

Método de matriz promedio (Collins (1972)).

Dada una secuencia temporal de flujos de migración de crédito, la estimación para las probabilidades de transición se obtiene como la media aritmética de los cambios de calificaciones entre los distintos instantes de tiempo consecutivos del periodo de observación, es decir

$$\hat{p_{ij}} = \frac{1}{t}\sum_{u=0}^{t-1}\frac{N_{ij}(u,u+1)}{N_i(u,u+1)},$$

Procedimiento markoviano (Faura Martínez y Gómez García (2001)).

Al igual que en el método de Cohorte, la matriz de transición se obtiene por máxima verosímilitud utilizando la información del flujo de migración más reciente (el correspondiente al periodo entre las fechas $t-1$ y t). Las probabilidades estimadas se obtienen como sigue

$$\hat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}(t-1,t)}{\sum_{j=1}^{K} N_{ij}(t-1,t)}$$

Observaciones:

- Los tres métodos anteriores proporcionan una matriz de transición constante la cual se utiliza como una matriz de proyección para instantes de tiempo futuros.
- El estimador dado en (4.1) arroja probabilidades iguales a 0 para aquellos eventos para los cuales no se observó ninguna transición del estado i al estado j, lo que dificulta su uso para aplicaciones en las cuales se requieren probabilidades de eventos atípicos (incumplimiento de deudores con calificaciones altas).
- Cuando las transiciones individuales son desconocidas y solo se cuenta con proporciones o cocientes agregados. Mattew T. Jons mostró que si la serie disponible es lo suficientemente grande, es posible obtener estimadores máximo verosímiles usando métodos de programación cuadrática. Ver [24].

4.3. Estimación de Matrices de Intensidad.

Cuando el registro en tiempo continuo de todas las transiciones es disponible, así como las fechas exactas en las cuales las firmas suben, bajan o incumplen, existe una fórmula explícita para el estimador máximo verosímil de las intensidades de transición.

Modelo
El proceso de migración $\mathcal{C}$ sigue una cadena de Markov en Tiempo Continuo.

Procedimiento
Realizar la estimación de la matriz de intensidades de transición $\mathbf{Q}$ y a partir de ella obtener la matriz de transición $\mathbf{P}$.

Datos
Dadas las observaciones continuas de cada deudor $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_t | 0 \leq t \leq T\}$ y asumiendo que la probabilidad del estado inicial es conocida.

Métodologías

(Lando y Skodeberg (2002)) Basados en Kuchler y Sorensen (1997), sugieren como estimador directo para la matriz generadora de observacione sobre el intervalor $[0, T]$. el estimador de máxima verosímilitud puede expresarse como

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Q}) &= \exp(-q_i(\tau_2 - \tau_1))q_{ij} \exp(-q_j(\tau_3 - \tau_2))q_{jk} \cdots \\ &= \prod_{i=1}^{K} \prod_{i \neq j} (q_{ij})^{N_{ij}(T)} \exp(-q_i R_i(T)), \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $R_i(t) = \int 0^t \mathbb{I}_{\{\mathcal{C}_s = i\}} ds$, el cual es el valor total del tiempo de permanencia en la calificación i hasta el tiempo t. $N_{ij}(t)$ es el número de transiciones de i a j hasta el tiempo t. Tomando el logaritmo tenemos

$$\log L(\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j \neq i} \log(q_{ij}) N_{ij}(T) - \sum_{i=1}^{K} \sum_{j \neq i} q_{ij} R_i(T). \tag{4.3}$$

De ahí que el estimador máximo verosímil para los elementos de la matriz generadora infinitesimal estan dados explícitamente por

$$\hat{q}_{ij} = \frac{N_{ij}(T)}{R_i(T)}, \tag{4.4}$$

Observaciones:

- El numerador denota el número de transiciones observadas en el intervalo $[0, T]$.
- El denominador cuenta el número de firmas que se mantienen en el estado i.
- Robert A. Jones[6], muestra que la matriz de transición para un intervalo unitario obtenida con $\mathbf{Q}$ dada por (4.4), sería diferente a la obtenida utilizando datos discretos.

Cuando el conjunto de datos es incompleto en el sentido de que solo es disponible la información de las calificaciones de las firmas en ciertos puntos en el tiempo (datos discretos), la estimación de $\mathbb{Q}$ esta relacionadaa con el llamado problema de cadenas *embedded*. Recordemos que existe una conección entre la matriz generadora y la matriz de probabilidades de transición, vía la función exponencial, misma que desarrollaremos en la siguiente sección.

Nota 19. *Hasta aquí, hemos vistmo métodos para estimar a la matriz generadora* $\mathbf{Q}$ *para posteriormente obtener a la matriz de transición* $\mathbf{P}$. *Lo siguiente será utilizar a la matriz de transición* $\mathbf{P}$ *para obtener a la matriz generadora; dicho problema es lo que se conoce como el problema de cadenas embedded.*

4.3.1. Problema de cadenas "Embedded"

Fue planteado por Elfinvg (1937) y estudiado posteriormente por Kingman (1962), Chung (1967), Johansen (1973, 1974); aplicado al contexto de procesos sociales por Singer y Spilerman, Coleman, y varios más, fue implementado en el marco financiero por Jarrow y otros (1997) y más recientemente por Israel y otros. Consiste en establecer las condiciones bajo las cuales

[6] Christensen, Jens y David Lando, *Confidence sets for continuous-time rating transition data.*

es posible afirmar que los resultados de un proceso son compatibles con la estructura de alguna[7] cadena de Markov en tiempo continuo con espacio de estados finito. Si este no es el caso, veremos que tan lejos se encuentra de alguna otra matriz que si sea *embeddable*.

Planteamiento de Bielecky y Rutkowsky [4]

Proposición 4.1. *Dado un proceso estocástico con espacio de estados finito $\mathcal{K}$, asumiendo que sus probabilidades de transición satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{QP}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{Id}, \tag{4.5}$$

con $\mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{Q}$ matrices $K-$dimensionales. Si $\mathbf{Q}$ es una matriz de intensidad, entonces las funciones $\mathbf{P}(t), t > 0$, las cuales son soluciones de (4.5), corresponden a las matrices de transición de una cadena de Markov estacionaria en tiempo continuo.

Puede demostrarse que (4.5) tiene como solución la fórmula exponencial

$$\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t), \quad t > 0, \tag{4.6}$$

Observaciones

Por lo anterior, este problema puede ser planteado como sigue:

> Dada $\mathcal{C}$ una $\mathbb{G}$ cadena de Markov homogénea en tiempo continuo con espacio de estados $\mathcal{K}$. Bajo el supuesto de que contamos con la matriz de probabilidades de transición correspondiente al tiempo $t = 1$, $\mathbb{P}(1) = [p_{ij}(1)]_{1\leq i,j\leq K}$, $\forall i, j \in \mathcal{K}$ y $\forall t \in \mathbb{R}^+$, tal que
>
> $$p_{ij}(1) = \mathbb{P}\{\mathcal{C}_1 = j|\mathcal{C}_0 = i\} = \mathbb{P}\{\mathcal{C}_{t+1} = j|\mathcal{C}_t = i\}.$$
>
> Buscaremos encontrar una matriz $\hat{\Lambda} = [\hat{\lambda}_{ij}]_{1\leq i,j\leq K}$ de dimensión $K \times K$ tal que

[7]Podría ocurrir que las observaciones sean consistentes con más de una estructura markoviana, aunque veremos más adelante que en el caso de matrices de migraciones de crédito se garantiza la unicidad.

- todas las entradas fuera de la diagonal sean no-negativas ($\hat{\lambda}_{ij} \geq 0, \forall i, j \in \mathcal{K}, i \neq j$),
- la suma por renglones sea igual a cero,
- $e^{\hat{\Lambda}} = \mathbf{P}(1)$, es decir se satisface

$$\hat{\lambda}_{ii} = -\sum_{j \neq i} \hat{\lambda}_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots, K$$

Observaciones:

- $\mathbf{Q}$ proporciona información sobre la estructura de nuestros datos:
  - i) $\frac{q_{ij}}{-q_{ii}}$:= probabilidad de transición del estado i al estado j, dada la ocurrencia de una transición.
  - ii) $\frac{1}{-q_{ii}}$:= tiempo esperado de que una firma en el estado i permanezca en ese mismo estado.
- Si $t = 1$ y suponemos que los terminos cuadráticos y de orden mayor pueden ser ignorados[8], se sigue que $\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{I}$.
- Los términos de mayor orden capturan la posibilidad de multiples transiciones dentro del intervalo t.
- La expresión (4.6) permite calcular probabilidades de incumplimiento y sobrevivencia sobre intervalos de longitud arbitraria.
- Los elementos fuera de la diagonal de $\mathbf{Q}$ tienen la siguiente interpretacia'on: son las intensidades de un proceso Poisson independiente de transitar del estado i al estado j.
- Los elementos sobre la diagonal, q_{ii}, se interpretan como la intensidad de llegada desde cualquier estado al estado i.

Para matrices de 2×2, la solución al problema de *embeddability* fue dada por D.G. Kendall[9], mientras que para matrices de dimensión mayor

[8]En [23] se menciona que en matrices de transición de calificaciones de crédito generalmente a partir del quinto término todos los elementos de las matrices son menores que 10^{-9}

[9]Probó que una matriz de 2×2 es compatible con un Proceso de Markov continuo si y solo si la suma de las entradas de la diagonal es mayor que uno.

Kingman(1962) y Johansen (1973) proporcionaron criterios matemáticos que aún hoy resultan computacionalmente deficientes. Las soluciones propuestas al problema de encontrar un generador a partir de la matriz de transición empírica se listan a continuación.

Jarrow, Lando y Turnbull(1997).

Jarrow, Lando y Turnbull fue de los primero en la aplicación de métodos para encontrar matrices generadoras en el ámbito financiero. Para ello, supuso que no existe más de una transición anual y eliminó los datos referentes al movimiento de firmas a la categorí de *no-calificados*. En tal método la matriz $\mathbf{Q}$ queda establecida del siguiente modo

$$\begin{aligned} \hat{q}_{ii} &= \ln p_{ii}, \qquad i = 1, \dots n \\ \hat{q}_{ij} &= \frac{p_{ij}(\ln p_{ii})}{p_{ii} - 1}, \qquad \forall j \neq i \end{aligned} \tag{4.7}$$

No debemos olvidar que la matriz así obtenida es solo una aproximación a $\mathbf{Q}$, de modo que $e^{\mathbf{Q}}$ es muy cercano a $\mathbf{P}$.

Zahl(1955)

Uno de los criterios que resultó erróneo fue el propuesto por Zahl[21], quien pretendió determinar la compatibilidad con cadenas de Markov en función de la convergencia de la serie de potencias

$$\frac{1}{t}\log(\mathbf{P}(t)) = \frac{1}{t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}[\mathbf{P}(t) - \mathbf{Id}]^m}{m}. \tag{4.8}$$

El uso de la serie (4.8) resultó ineficiente por las siguientes razones:

1. el hecho de que (4.8) converja no garantiza que $\log(\mathbf{P}(t)) \in \mathbf{Q}_=$, algunas entradas fuera de la diagonal podrían ser negativas.

2. si (4.8) no converge, aún podríamos encontrar $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{P} = e^{\mathbf{Q}}$.

3. dado que (4.8) esta asociada a la rama principal Log $\mathbf{P}$, en caso de que converja no dará información sobre la existencia de múltiples soluciones para la ecuación $\mathbf{P} = e^{\mathbf{Q}}$.

Por lo anterior, surge la siguiente pregunta respecto al modelo de cadena de markov homogéneo utilizado:

¿Por qué la solución $\bar{\mathbf{P}}$ *no pertenece a las soluciones buscadas?* .

La primera explicación posible es porque la matriz de probabilidades de transción real $\mathbf{P}$ no es "embedded" es decir no proviene de un proceso de Markov continuo homogéneo.

Yasunari Inamura proporciona un ejemplo en donde la condició anterior se cumple, para una matriz de transición con un horizonte de tiempo de 22 años, la no existencia del generador como se sabe puede provenir de que la propiedad de Markov así como la homogeneidad no es satisfecha por el proceso de migración. El supuesto de homogeneidad en un modelo de CMTC puede ser dudoso para horizontes de tiempo grandes (mayores a 20 años). En este caso, modelos no markovianos y no homogeneos resultan más preferibles, sin embargo su uso se dificulta cuando únicamente son disponibles datos observaciones discretas y limitadas.

Al parecer el supuesto de homogeneidad es dependiente del instrumento en estudio y del horizonte de tiempo. Kiefer y otros (2004) mostró que el supuesto markoviano homogéneo es válidos para la calificación de bonos municipales hasta por cinco años, mientras que bonos soberanos sostienen los mismo supuestos pero bajo horizontes de tiempo mayores.

Por lo tanto, tenemos que el supuesto markoviano homogeneo sigue siendo un problema abierto, Inamura considera una segunda explicación: la matriz de probabilidades de transción real $\mathbf{P}$ puede considerarse "embedded" de ahaí que si existe $\mathbf{Q}$ matriz que determina a $\mathbf{P}$, pero la matriz observada $\bar{\mathbf{P}}$ no es "embedded" debido a la variabilidad y a la discretización de los datos de migración de crédito observados. Existen varios estudios para tratar con este problema y se verán a continuación.

NOTA 20. *Por lo anterior tenemos que la descripción técnica del problema de cadenas* embedded *consiste en establecer criterios sobre las entradas de la matriz estocástica observada* $\mathbf{P}(t), t < \infty$*, las cuales garanticen que tal matriz puede ser escrita como en (4.6) para alguna matriz de transición* $\mathbf{Q}$*, teniendo en cuenta que la existencia de una solución para el problema planteado no* *necesariamente implica la existencia de la matriz generadora infinitesimal para $\mathcal{C}$.*

Israel, Rosenthal y Wei (2001).

Israel y otros (2001) proporcionan condiciones necesarias para la existencia de un generador exacto válido. Muestran que si el problema de *embbedability* tiene solución, es posible expresarlo por la siguiente expansión en series

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\mathbf{P} - \mathbf{I}) - \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{I})^2}{2} + \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{I})^3}{3} - \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{I})^4}{4} + \dots \tag{4.9}$$

Observación:

- Nótese que la expresión (4.9) corresponde a la expansión en serie de la función logaritmo en el caso de escalares, es decir es la inversa de la función exponencial.
- Igual que en el método anterior, la matriz así obtenida es solo una aproximación, de hecho podría suceder que elementos fuera de la diagonal resulten negativos, en cuyo caso los mismos autores proponen dos métodos de corrección que veremos más tarde.
- El métodos dado por (4.9) puede ser aplicado si la matriz de transición de entrada es por un intervalo diferente a un año, por ejemplo si la matriz de entrada fuera de dos años el generador anual podrá obtenerse dividiendo el resultado arrojado por (4.9) entre dos.

4.3.2. Condiciones Necesarias

En busca de determinar la compatibilidad de $\mathbf{P}$ con una cadena de Markov continua, será necesario verificar como primera paso el que se cumplan las condiciones necesarias siguientes[21]:

1. (Austin & Ornstein) Si $p_{ij}(t) = 0$ implica que $p_{ij}^{(n)}(t) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ y si $p_{ij}(t) \neq 0$ implica que $p_{ij}^{(n)}(t) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. (Kingman 1962) Si el $\det(\mathbf{P}) > 0$.
3. (Elfving 1937) Ningun eigenvalor λ_i de $\mathbf{P}$ puede satisfacer $|\lambda_i| = 1$ a menos que $\lambda = 1$. Además cualquier eigenvalor negativo debe tener multiplicidad algebraica par.

4. (Runnenberg 1962) Todos los eigenvalores de $\mathbf{P}$ deben permanecer dentro de la región H del plano complejo , acotada por la curva $x(v)+iy(v)$, con

$$x(v) = \left[\exp\left(-v + v\cos\frac{2\pi}{\mathrm{r}}\right)\right] cos\left(v\sin\frac{2\pi}{\mathrm{r}}\right) \tag{4.10}$$

$$y(v) = \left[\exp\left(-v + v\cos\frac{2\pi}{\mathrm{r}}\right)\right] sin\left(v\sin\frac{2\pi}{\mathrm{r}}\right) \tag{4.11}$$

con su respectiva imagen simétrica con respecto al eje real

En las fórmulas paramétricas anteriores, r corresponde a la dimensión de la matriz y v esta restringida a $0 \leq v \leq \pi/(\sin(2\pi/r))$.

Nota 21. *Las condiciones anteriores refieren a condiciones necesarias, esto es, si nuestro proceso no satisface alguna de ellas podremos decir que no es compatible con un modelo de Markov continuo, es decir no existe* $\mathbf{Q}$ *tal que* $\mathbf{P} = e^{\mathbf{Q}}$. *No obstante, el hecho de que* $\mathbf{P}$ *cumpla todas las condiciones anteriores no garantiza que sea compatible con nuestro modelo, para ello tendremos que establecer condiciones de suficiencia, las cuales estarán ligadas al comportamiento y características de todas las versiones de* $\log \mathbf{P}$.

4.3.3. Condiciones de no Existencia

La pregunta que deseamos responder es el saber si existe $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{P} = e^{\mathbf{Q}}$, para ello será útil la siguiente

Proposición 4.2. *Sea* $\mathbf{P}$ *una matriz de transición y suponga que se cumple alguna de las condiciones siguientes*

a) det $(\mathbf{P}) \neq 0$;

b) det $(\mathbf{P}) > \Pi_i p_{ii}$;

c) existen estados i, j tales que j es accesible desde i, pero $p_{ij} = 0$

entonces no existe un generador aproximado para $\mathbf{P}$.

Observación:

- Gran parte de las matrices de transición empíricas satisfacen la condición c). Por ejemplo, inversiones con calificaciónes altas tienen a exhibir en la matriz de probabilidades de transición probabilidades de incumpimiento iguales a cero, aún cuando la verdadera probabilidad no lo es. Sin embargo, el estado de incumplimiento es accesible desde una calificación alta si se consideran descensos sucesivos.

- Nótese que si $p_{ii} > 0{,}5, \forall i \in \mathcal{K}$ entonces necesariamente se satisface que $\det(\mathbf{P}) > 0$.

NOTA 22. *Basados en el método de serie de matrices, daremos otro criterio más para saber si existe o no un generador exacto, en caso contrario daremos métodos de aproximación a un generador.*

4.3.4. Encontrando un Generador

Sea $\mathbf{P}$ una matriz de transición de Markov homogénea $K-$dimensional, el objetivo es encontrar $\mathbf{Q}$ una matriz de intensidad[10] de las mismas dimensiones tal que $\exp(\mathbf{tQ}) = \mathbf{P}(\mathbf{t})$, sin perdida de generalidad asumiremos que $\mathbf{P}$ es anual ($t = 1$).

Método con serie de matrices.

Este método esta basado en la siguiente

Proposición 4.3. *Sea* $\mathbf{P}$ *como antes, si* $S = |\lambda - 1| < 1, \forall \lambda$ *eigenvalor de* $\mathbf{P}$*, entonces la serie*

$$(\mathbf{P}-\mathbf{I}) - \frac{(\mathbf{P}-\mathbf{I})^2}{2} + \frac{(\mathbf{P}-\mathbf{I})^3}{3} - \frac{(\mathbf{P}-\mathbf{I})^4}{4} + \dots \tag{4.12}$$

converge geométricamente a la matriz $\tilde{\mathbf{Q}}$ *cuyos renglones suman cero y es tal que* $\exp(\tilde{\mathbf{Q}}) = \mathbf{P}$.

[10]Por renglones suma cero, entradas fuera de la diagonal positivas y sobre la diagonal negativas

Observaciones:

- Si la serie (4.12) no converge o converge a $\tilde{\mathbf{Q}}$ una matriz que no satisface la no-negatividad fuera de la diagonal, ello no elude la posibilidad de que aún exista un generador para $\mathbf{P}$.

- La condición $S < 1$ no es más que una condición necesaria que generalmente es cierta en el ámbito de matrices de transición de riesgo de crédito por la siguiente

  Proposición 4.4. *Si las entradas de la diagonal de* $\mathbf{P}$ *matriz de transición son tales que* $p_{ii} > \frac{1}{2}, \forall i \in \mathcal{K}$ *(la matriz es estrictamente dominante diagonalmente), entonces* $S < 1$*, es decir la convergencia de la serie (4.12) queda garantizada.*

NOTA 23. *La proposición (4.3) nos permite obtener de manera sencilla una matriz* $\tilde{\mathbf{Q}}$ *que cumple con casi todas las propiedades de un generador válido (no garantiza la no-negatividad fuera de la diagonal). Para aquellos casos en los que la serie (4.12) converja a una matriz con entradas fuera de la diagonal con signo negativo, será posible hacer correcciones sobre tal matriz de modo que podamos encontrar un aproximador para el generador buscado, tal y como se explica a continuación.*

Si la serie (4.12) converge a $\tilde{\mathbf{Q}}$ una matriz con entradas negativas fuera de la diagonal, tenemos la posibilidad de utilizar al menos dos métodos de corrección: colocar ceros en las entradas negativas y compensar ese cambio ya sea en la diagonal (primer método) o bien a lo largo de todo el renglón (segundo método).
Así, dada $\tilde{\mathbf{Q}}$, obtendremos un generador aproximado $\mathbf{Q}$ con entradas determinadas por

Método a)

Dada $\tilde{\mathbf{Q}}$ obtendremos $\mathbf{Q}$ un generador de la siguiente manera

$$q_{ij} = \max(\tilde{q_{ij}}, 0), \quad j \neq i; \qquad q_{ii} = \tilde{q_{ii}} + \sum_{j \neq i} \min(\tilde{q_{ij}}, 0). \tag{4.13}$$

Esta técnica es considerada en Zahl, (1955).

Método b)

$$q_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ y } \tilde{q}_{ij} < 0 \\ \tilde{q}_{ij} - B_i|\tilde{q}_{ij}|/G_i, & \text{si } G_i > 0 \\ \tilde{q}_{ij}, & \text{si } G_i = 0 \end{cases}$$

donde

$$G_i = |\tilde{q}_i i| + \sum_{j \neq i} \text{máx}(\tilde{q}_{ij}, 0); \qquad B_i = \sum_{j \neq i} \text{máx}(-\tilde{q}_{ij}, 0)$$

Observación:

- Los métodos anteriores transforman a $\tilde{\mathbf{Q}}$ en una matriz de intensidad, sin embargo este no satisface exactamente $\exp(\mathbf{Q}) = \mathbf{P}$.

Existencia de múltiples generadores.

Los siguientes resultados fueron tomados de [**?**], y ellos corresponden a pruebas que indicarían cuando una matriz de transición $\mathbf{P}$ tiene uno o más generadores exactos.

Proposición 4.5 (Condiciones de Unicidad.). *Sea* $\mathbf{P}$ *es una matriz de transición con eigenvalores reales distintos*

a) *Si todos los eigenvalores de* $\mathbf{P}$ *son positivos entonces* $\mathbf{Q} = Log\mathbf{P}$ *es la única matriz real tal que* $\exp(\mathbf{Q}) = \mathbf{P}$.

b) *Si* $\mathbf{P}$ *tiene algún eigenvalor negativo, entonces existe una matriz con entradas complejas tal que* $\exp(\mathbf{Q}) = \mathbf{P}$.

Proposición 4.6. *Sea* $\mathbf{P}$ *una matriz de transición.*

a) *Si el det* $(\mathbf{P}) > \frac{1}{2}$, *entonces* $\mathbf{P}$ *tiene al menos un generador.*

b) *Si el det* $(\mathbf{P}) > \frac{1}{2} \parallel \mathbf{P} - \mathbf{I} \parallel < \frac{1}{2}$ *(usando cualquier norma), entonces el único posible generador para* $\mathbf{P}$ *es Log* $(\mathbf{P})$.

c) *Si* $\mathbf{P}$ *tiene eigenvalores distintos y det*$(\mathbf{P}) > e^{-\pi}$, *entonces el único posible generador para* $\mathbf{P}$ *es Log*$(\mathbf{P})$.

De ambas proposiciones se sigue el siguiente corolario

Corolario 4.7 (Condiciones de no existencia de un generador válido.). *Sea* $\mathbf{P}$ *una matriz de transición tal que al menos una de las siguientes tres condiciones se sostiene*

- *det* $(\mathbf{P}) > \frac{1}{2}$ *y* $\| \mathbf{P} - \mathbf{I} \| < \frac{1}{2}$, *o*
- $\mathbf{P}$ *tiene eigenvalores distintos y det* $(\mathbf{P}) > e^{-\pi}$; *o*
- $\mathbf{P}$ *tiene eigenvalores reales distintos.*

y suponga además que la serie (1) converge a una matriz $\mathbf{Q}$ *con entradas negativas fuera de la diagonal, entonces no existe un generador válido para* $\mathbf{P}$.

Nota 24. *No debemos olvidar que para propósitos de valuación las matrices empíricas no son del todo útiles, requerimos transformarlas bajo la medida de Riesgo Neutral (a travás de la prima de riesgo) que garantice que la nueva matriz no permite arbitraje.*

Métodos de comparación

Suponganse que hemos utilizado métodos diferentes para el cálculo de matrices generadoras aproximadas, la pregunta normal que surge es: ¿cual es la más precisa?. Para dar respuesta a esta pregunta, es necesario el uso de métodos de comparación como los siguientes:

[I]

Calcular la norma L^1 de la matriz[11] $\mathbf{P} - \exp(\tilde{\mathbf{Q}}_i)$ para todo $\tilde{\mathbf{Q}}_i$ generador aproximado de $\mathbf{P}$ y de ellos elegir el mínimo.

Nota 25. *Debemos tener en cuenta, que el método dado anteriormente es aplicable para la elección entre varios aproximadores, más adelante se establecerán métodos de elección entre generadores exactos, requiriendo antes de ello establecer criterios que indiquen cuando una matriz de transición tiene más de un generador v́lido.*

Si la matriz de transición $\mathbf{P}$ tuviera múltiples generadores podríamos utilizar alguno de los siguientes métodos para elegir el más adecuado

[11]Esta norma corresponde a la suma de todas las entradas de la matriz en cuestión.

Método 1.
Tomar el generador tal que produzca el valor más pequeño dado por

$$J = \sum_{i,j} |j - i||q_{ij}|,$$

Razón: Esta medida minimiza la oportunidad de que haya saltos entre estados demasiado distantes, lo que se justifica por el hecho de que en matrices de transición empíricas generalmente la calificación de crédito son parecidas en periodos de tiempo cortos.

NOTA 26. *En el contexto de riesgo de crédito, las matrices de transición difícilmente presentarán la existencia de más de un generador válido, esto es fácilmente comprobable de la proposición (4.6) inciso a).*

4.4. Observaciones finales

- El cuestionamiento sobre el cumplimiento del supuesto de homogeneidad temporal del proceso de migración tiene como fundamento la evidencia empírica de diversos estudios los cuales han mostrado la dependencia de este proceso a numerosos factores tales como ciclos económicos.

- Con la finalidad de flexibilizar el supuesto de homogeneidad y de propiedad markoviana han surgido los llamados modelos semi-markovianos los cuales consideran que las probabilidades de migración son funciones del tiempo de ocupación en la clase de crédito actual.

- La importancia de la estimación de matrices de transición en el modelo JLT radica en el hecho de que a través de ellas se hace la incorporación del riesgo de crédito para la valuación de instrumentos financieros riesgosos, sin embargo su uso es ampliamente conocido como técnica para el otorgamiento y seguimiento de los créditos que hace el sector financiero para prever pérdidas en caso de incumplimiento de sus clientes. Finalmente, para un mayor detalle referimos a [21] y [6], que corresponden a las fuentes principales de este capítulo.

Capítulo 5

Conclusiones

Todo el mundo quisiera marchar por la senda del conocimiento.
Unos la buscan afanosamente; otros dicen haberla encontrado ya.
Más un día una voz clamará: "No hay ruta ni sendero".

Omar Ibn Ibrahim *El Khayyám.*

La importancia del modelo JLT radica en el hecho de que fue el primero en plantear la valuación de deuda corporativa sujeta a riesgo de crédito, mediante el uso de calificaciones de crédito. Para ello fue necesaria la búsqueda de un modelo adecuado para el proceso de migración de crédito. No es de admirarse el hecho de que se haya pensado en modelar este fenómeno mediante cadenas de Markov, ya que este tipo de procesos estocásticos forman parte de las herramientas más importantes para análisis de procesos que involucran el tiempo y el espacio.

Como se mencionó a lo largo del trabajo, este modelo es teóricamente el más sencillo, utiliza supuestos como el de homogeneidad, supuesto que ha derivado gran cantidad de estudios (sustentados en evidencia empírica) que muestran la debilidad de dicho supuesto, ya que en la realidad el fenómeno de migración de crédito se encuentra influenciado por diversos factores económicos.

Los estudios mencionados nos muestran (aunque de hecho los autores mismos lo indican) que los supuestos realizados tienen como fin la facilidad de cálculo; es decir, se busca adecuar el modelo a la realidad y no al revés. Ello no quiere decir que haya una limitante en la ciencia probabilística y matemática, que impida crear modelos más cercanos a la realidad, de hecho existen modelos más sofisticados teóricamente que se adecuan mejor al proceso de estudio, veáse por ejemplo los modelos semi-markovianos en [8].

Surge la pregunta, ¿qué tipo de modelos son los que realmente se utilizan para fines prácticos?. Al menos en lo referente a la industria financiera suele optarse por los modelos menos complicados, debido entre otras cosas, a la insuficiencia de información que es requerida por este tipo de modelos, y aún más, por la premura para obtener resultados (propia de este tipo de actividades). Es por ello que el modelo de cadenas de Markov es ampliamente utilizado en el estudio de migraciones de crédito en la industria financiera.

En el presente trabajo se enunciaron los resultados de JLT y Bielecki y Rutkowsky sobre que condiciones probabilísticas hacen posible considerar al proceso de migración como cadena de Markov discreta para propósitos de valuación; no obstante en el último capítulo se explicaron algunos de los problemas e inconsistencias resultantes de este supuesto y se enunciaron las condiciones necesarias, a nivel matriz de transición, para que este supuesto se cumpla. Así, hemos visto que el supuesto básico del modelo JLT es la propiedad Markoviana sin embargo, a pesar de que en la práctica no se satisface (como ya se ha expuesto), sigue siendo de los modelos más adecuados para el estudio de este proceso.

Apéndice A

Glosario

- *Comité de Basilea.* El Comité de Basilea (*Basel Committee*) fue fundado por los gobernadores de los bancos centrales del G-10 en 1975. Es un comité de bancos centrales y supervisores reguladores de los países más industrializados del mundo que se reúne cada tres meses en el BIS. Formula estándares y pautas generales de supervisión bancaria, el primer documento referente a ello corresponde al Acuerdo de Capital de Basilea (Basilea I) en el cual propone una metodología para medir el riesgo crediticio según la estructura de activos mantenido por una entidad bancaria y detalla las reglas para determinar los requerimientos mínimos de capital que las instituciones bancarias deben cumplir. En junio de 2004 se aprobó el Nuevo Acuerdo de Capital (Basilea II). En el Acuerdo del Comité de Basilea de 1988 se estableció que el capital mínimo correspondería al 8 % sobre los activos ponderados por riesgo, modelo RAR (*Risk Asset Ratio*). Para un estudio general de las diferencias entre Basilea I y Basilea II, ver [12]

- *Bonos step-up.* Bono corporativo con cupones cuyo pago depende de la calidad de crédito del emisor, el pago de cupón incrementa cuando la calidad de crédito del emisor declina, y viceversa.

- *Credit Monitor^{TM}*. Software para la estimación de probabilidades de incumplimiento utilizando información de mercado. La principal salida de este software es la llamada Frecuencia Esperada de Incumplimiento (*Expected Default Frequency^{TM}*,EDF), misma que actualmente puede obtenerse haciendo uso de la herramienta llamada *Credit Edge^{TM}* también de KMV[1].

- *CreditMetrics*^{TM}. Pertenece a *RiskMetrics*^{TM} del banco JPMorgan; sus autores fueron Gupton, Finger y Bhatia. El principal producto es el conocido *CreditManager*^{TM} el cual tiene una funcionalidad similar a la de *Portfolio Manager*^{TM} de KMV.

- *Mercado completo.* Un mercado es completo si todo reclamo contingente es replicable o bien, si y solo si existe una única medida martingala equivalente.

- *Modelos VaR.* Metodologías de valoración del riesgo que proporciona la mínima pérdida potencial que un activo o portafolio presentará con determinado nivel de probabilidad durante un periodo predefinido de tiempo. En la industria financiera el estándar es calcular el VaR con un nivel de significancia del 5 %, lo que significa que una de cada veinte veces el activo en cuestión perderá de su valor a lo menos el factor VaR calculado.

- *Portfolio Manager*^{TM}. Software de KMV para la administración de riesgo de portafolios de crédito; obtiene la distribución de pérdida del portafolio dado.

- *Prima de Riesgo.* Es el sobrecoste que una entidad financiera cobra por un préstamo debido al riesgo estadístico de impago que este representa. Ajuste de riesgo necesarias para la transformación de las probabilidades reales en pseudo-probabilidades para la valuación de instrumentos financieros.

- *Riesgo de Tipo de Cambio:* Posibilidad de que el valor de un instrumento financiero pueda fluctuar como consecuencia de variaciones en las cotizaciones de las monedas.

- *Riesgo Operacional y Legal:* Se refiere a la posibilidad de pérdida debida al incumplimiento de disposiciones legales y administrativas, por procesos sin control, fallas en la operación de sistemas, etc.

- *Riesgo de Tasa de Interés.* Consiste en la posibilidad de fluctuación del valor presente de los flujos de efectivo futuros de un instrumento financiero por variaciones en la estructura de las tasas de interés.

[1]KMV fue fundada hace 20 años y recientemente adquirida por Moody's

- *Riesgo Accionario.* Posibilidad de fluctuacíón del precio de un instrumento como consecuencia de cambios en los precios de mercado independientemente de que sean causados por factores específicos al título o a su emisor, o bien por factores inherentes al mercado en el que se operan.

- *Swaps de incumplimiento.* Es un contrato mediante el cual ambas partes acuerdan intercambiar flujos de efectivo sobre un cierto principal a intervalor regulares de tiempo durante un periodo dado. Es un contrato de swap de incumplimiento, un vendedor de riesgo crediticio paga a otra parte por el derecho de recibir un pago en el caso de que se produjera el cambio acordado entre ellos en el estatus crediticio del crédito de referencia, usualmente un título corporativo.

- *Tasa de recuperación.* Proporción de una deuda que se podrá recuperar una vez que la contraparte ha caído en incumplimieto.

Apéndice B

Teoría de la Medida

DEFINICIÓN B.1 (ALGEBRA SOBRE Ω). *Diremos que la colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω es un álgebra sobre Ω si satisface los siguiente*

i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

ii) Si $\mathrm{F} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mathrm{F}^c := \Omega \backslash \mathrm{F} \in \mathcal{A}$,

iii) Si $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mathrm{F} \cup \mathrm{G} \in \mathcal{A}$.

DEFINICIÓN B.2 (σ-ÁLGEBRA SOBRE Ω). *Diremos que la colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de Ω es σ-álgebra sobre Ω si*

i) $\mathcal{S}$ es un álgebra sobre Ω,

ii) Si $\mathrm{F}_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \cup \mathrm{F}_n \in \mathcal{S}$.

Dada $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de Ω

DEFINICIÓN B.3 (σ-ÁLGEBRA GENERADA POR $\mathcal{C}$, $\sigma(\mathcal{C})$). *Es la más pequeña σ-álgebra de conjuntos de Ω,$\mathcal{S}$, tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$, es decir, es la intersección de todas las σ-álgebras sobre Ω, las cuales tienes a $\mathcal{C}$ como una subclase.*

DEFINICIÓN B.4 (ESPACIO DE MEDIDA). *Sea (Ω, σ_Ω) un espacio medible (σ_Ω es una σ-álgebra sobre Ω). Un mapeo $\mu : \sigma_\Omega \to [0, \infty]$ es llamado una medida sobre (Ω, σ_Ω) si μ es numerablemente aditiva. $(\Omega, \sigma_\Omega, \mu)$ es llamado un espacio de medida.*

Si $\mu(\Omega) = 1$, μ es conocida como una *medida de probabilidad* y $(\Omega, \sigma_\Omega, \mu)$ se conoce como *espacio de probabilidad*.

Definición B.5 (Función $\mathbf{F}-$medible). *Suponga que $h : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$. Para $A \subseteq \mathbb{R}$ se define $h^{-1}(A) := \{s \in \mathcal{S} : h(s) \in A\}$, entonces h es $\mathbf{F}-$medible si $h^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{F}$, esto es si $h^{-1}(A) \in \mathbf{F}$, $\forall A \in \mathbf{B}$.*

Definición B.6 (Variable aleatoria). *Dado $(\Omega, \mathbf{F})$ un espacio medible, una variable aleatoria X es una función $\mathbf{F} -$ medible sobre Ω. Es decir,*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{F}$$

.

Definición B.7 ($\sigma-$álgebra generada por una colección de funciones de Ω). *Dada una colección $(Y_\gamma : \gamma \in C)$ de funciones $Y_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ entonces*

$$\mathcal{Y} := \sigma(Y_\gamma : \gamma \in C)$$

se define como la $\sigma-$álgebra más pequeña de subconjuntos de Ω tal que cada función $Y_\gamma(\gamma \in C)$ es $\mathcal{Y}-$medible.

Nota:

- $\sigma(Y_\gamma : \gamma \in C) := \sigma(\{\omega \in \Omega : Y_\gamma(\omega) \in B\} : \gamma \in C, B \in \mathbf{B})$
- si X es variable aleatoria para algún $(\Omega, \mathbf{F})$ entonces $\sigma(X) \subseteq \mathbf{F}$

Definición B.8 (Espacio de Estados). *i) El espacio de estados $\mathbf{X}$ es llamado numerable si $\mathbf{X}$ es discreto, con un numero de elementos finito o numerable, y con la sigma-álgebra potencia.*

ii) El espacio de estados $\mathbf{X}$ es llamado general si esta dotado con una sigma-álgebra generada numerablemente.

iii) El espacio de estados $\mathbf{X}$ es llamado topológico si posee una topología metrizable, separable y localmente compacta con la sigma álgebra de Borel.

Definición B.9 (Proceso Estocástico). *Familia de variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio muestral Ω, indizadas en un conjunto I tales que*

- *Si I es numerable, $(X_1, X_2, \ldots)$ es conocido como un proceso en tiempo discreto.*

- *Si I es no-numerable $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es conocido como un proceso en tiempo continuo.*

Nota:

- Un proceso estocástico es algunas veces visto como una función de dos variables, $X_t(\omega) = X(t, \omega)$. Para t fija, la función es una variable aleatoria. Para ω fija, la función con valores reales resultante es conocida como una realización de t (*sample path*).

DEFINICIÓN B.10 (TIEMPO DE PARO). *Sea $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ un proceso estocástico con espacio de estados numerable, definidos sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Una variable aleatoria τ definida sobre el mismo espacio se dice que es un tiempo de paro si satisface lo siguiente*

- *Asume únicamente valores enteros (incluyendo posiblemente ∞).*

- *Para cada entero no-negativo m, el evento $\{\omega : \tau(\omega) \leq m\}$ esta determinado por las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_m$.*

Apéndice C

Valuación de no-arbitraje.

Consideraremos una base estocástica $\langle(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F}\rangle$, con $\mathbb{F}$ continua por la derecha y un horizonte de tiempo finito $0 < T^* < \infty$

DEFINICIÓN C.1 (MEDIDA MARTINGALA EQUIVALENTE). *Una medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ es una medida martingala equivalente a $\mathbb{P}$ si*

i) *$\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}^*$ son medidas equivalente, esto es $\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}^*(A) = 0, \forall A \in \mathcal{G}$,*

ii) *la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \in L^2$ (es decir, es cuadrado integrable con respecto a $\mathbb{P}$),*

iii) *el proceso de valor del activo descontado $D(0,.)S$ es una $\mathbb{P}^*$-martingala.*

Observaciones:

- $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}^*$ definidas sobre el mismo espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ son equivalentes, $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$, si coinciden sobre los mismos conjuntos de $\mathcal{F}$ que se sostienen casi seguramente.

Cuando dos medidas son equivalentes, es posible expresar a la primera en términos de la segunda a través de la derivada de Radon-Nikodym. Así, existe una martigala η_{T^*} sobre $\langle(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F}\rangle$ tal que

$$\mathbb{P}^*(A) = \int_A \eta_{T^*}(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathcal{F}_{T^*},$$

la cual puede ser escrita en forma más concisa como

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{T^*}} = \eta_{T^*}$$

el proceso η_{T^*} es llamada la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}^*$ con respecto a $\mathbb{P}$ restringida a $\mathcal{F}_{T^*}$.

La tarea de valuar reclamos contingentes involucra como elemento fundamental los métodos probabilísticos, de ahí el uso de *martingalas* como modelos probabilísticos de un juego justo. El método clásico para la valuación de instrumentos derivados es el llamado *método martingala* cuya característica principal es encontrar una medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ tal que el proceso de precios del *stock* descontado (proceso de precios relativo) S^*, definido como

$$S_0^* = S_0, \qquad S_T^* = B_t S_T,$$

sigue una $\mathbb{P}^*-$martingala; es decir, $S_0^* = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(S_T^*)$. De ahí que $\mathbb{P}^*$ es conocida como la medida martingala para el proceso de precios descontado S^*.

Esta metodología tiene como supuesto principal el de ausencia de arbitraje, razón por la cual se le conoce también como *enfoque de equilibrio parcial.* Así, tenemos la siguiente

Definición C.2 (Mercado de no-arbitraje). *Un modelo de mercado* $M = \{S, B, \Phi\}$ *es de no-arbitraje o libre de arbitraje si* $\nexists \phi \in \Phi$ *para el cual*

$$V_0(\phi) = 0, V_T(\phi) \geq 0 \qquad y \qquad \mathbb{P}\{V_T(\phi) > 0\} > 0.$$

donde

- $S := (S_t)_{t\in(0,T]}$*, proceso estocástico en tiempo discreto estrictamente positivo que modela el precio del instrumento subyacente.*

- B*:= proceso financiero del proceso de precios de un instrumento libre de riesgo.*

- Φ*:= conjunto de todos los posibles portafolios de bonos y stock que replican el valor del instrumento financiero derivado que pretende valuarse.*

Notas:

- La importancia del uso de medidas martingala, radica en el hecho de que son ellas quienes garantizan la unicidad del precio de cualquier instrumento financiero derivado.

- La idea básica de valuación de no arbitraje esta ligada a la existencia de un portafolio que replica exactamente el valor del *stock* a la fecha de maduración.

- Nótese que no se supone que la economía real es de riesgo neutral. Sĺo se introduce una medida equivalente que simplifica la valuación de instrumentos derivados y lo hace en términos de precios relativos.

- El precio de arbitraje tiene como soporte a la medida de probabilidad subjetiva $\mathbb{P}$, pero es invariante con respecto a la elección de la medida de probabilidad equivalente. En términos financieros diríamos que todos los inversionistas concuerdan en el rango de las fluctuaciones futuras de los precios del instrumento subyacente, no obstante tienen diferentes perspectivas de las probabilidades subjetivas correspondientes.

- El uso de una medida martingala $\mathbb{P}^*$ en valuación de arbitraje corresponde al supuesto de que todos los inversionistas son de riesgo neutral es decir, no diferencian entre instrumentos riesgosos y no riesgosos con las misma tasa de retorno esperada.

DEFINICIÓN C.3 (CUENTA BANCARIA O CUENTA DEL MERCADO DE DINERO). *Definimos $B(t)$ como el valor en el tiempo $t < T$, de una inversión libre de riesgo (incrementa a la tasa libre de riesgo que prevalece en el mercado), donde $B_0 = 1$ y para el mercado discreto*

$$B(t) = \sum_t (1+r)^t \qquad tin\mathbb{N}, \quad t < T$$

y para el mercado continuo

$$B(T) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$$

el término r_s corresponde a la tasa spot (instantánea para el caso continuo).

La definición anterior es un elemento importante en valuación de no-arbitraje debido a que suele utilizarse como *numeraire*, para el cual tenemos la siguiente definición

DEFINICIÓN C.4 (NUMERAIRE). *Un numeraire es cualquier activo positivo que no paga dividendos.*

Intituitivamente un *numeraire* es un activo de referencia que es elegido para normalizar el precio de los otros activos con respecto a este, nos permite relacionar precios en diferentes tiempos.

DEFINICIÓN C.5 (FACTOR DE DESCUENTO). *El factor de descuento B_t entre dos instantes de tiempo t y T corresponde a la cantidad en el tiempo t que es equivalente a $1 que será pagado en el tiempo T, y se define como*

$$B_t = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right).$$

Observaciones:

- Si la tasa *spot*, $\{r\}$ se supone una función determinística del tiempo, como se hace para aplicar la fórmula de Black-Sholes, tanto la cuenta bancaria $B(t)$ como el factor de descuento B_t resultan funciones determinísticas del tiempo.
- Si suponemos que $\{r\}$ es una proceso estocástico como se hace en la valuación de instrumentos de tasa de interés, entonces $B(t)$ y B_t también serán procesos estocásticos.

DEFINICIÓN C.6 (BONO CUPÓN CERO). *Un bono cupón cero, con fecha de maduración T (bono de descuento puro) y valor nominal o valor de carátula de $1, es un contrato que garantiza a su tenedor el pago de $1 en la fecha T, sin pagos intermedios. El valor del contrato en el tiempo $t < T$ es denotado por $B(t, T)$, de ahí que $B(T, T) = 1$ para toda T.*

Observaciones:

- Si la tasa r es determinística entonces $B_t = B(t, T)$ para todo (t, T) con $t < T$.
- Si r es estocástica entonces B_t también lo es y se verá que el precio de un bono cupón cero $B(t, T)$ puede verse como la esperanza de la variable aleatoria B_t bajo la medida de probabilidad martingala.

DEFINICIÓN C.7 (MERCADO COMPLETO). *Diremos que un mercado M es completo sii para todo reclamo contingente existe al menos una estrategia de replicado.*

Proposición C.8. *Si el mercado M es libre de arbitraje entonces cualquier reclamo contingente con estrategia de replicado es replicado de manera única.*

Uno de los resultados más importantes en valuación corresponde a Harrison y Pliska (1981), quienes probaron que la existencia de una medida martingala equivalente implica la ausencia de oportunidades de arbitraje. En (1983) probaron que el mercado es completo sii existe una única medida martingala equivalente. La importancia de la unicidad de la medida martingala equivalente radica en que no solo hace que el mercado sea libre de arbitraje, sino que permite la unicidad del precio asociado a cualquier reclamo contingente.

Podemos resumir la teoría de no-arbitraje como sigue:

- El mercado es de no-arbitraje sii existe al menos una medida martingala equivalente.
- El mercado es completo sii la medida martingala es única.
- En un mercado libre de arbitraje, no necesariamente completo, el precio de cualquier instrumento financiero puede ser únicamente determinado o por el valor de la estrategia de replicado asociada, o por la esperanza de riesgo neutral del *payoff* descontado bajo cualquiera de las medidas martingala de riesgo neutral equivalente.

Lo anterior fue formalizado por Harrison y Pliska (1981), en la siguiente

Proposición C.9. *Dado M un mercado libre de arbitraje. Para cualquier reclamo contingente X con fecha de maduración T, el precio de arbitraje asociado a X, $\pi_t(X)$, corresponde al determinado por la fórmula de valuación de riesgo neutral siguiente*

$$\pi_t(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_t X | \mathcal{F}_t), \qquad \forall t \leq T,$$

con $\mathbb{P}^*$ cualquier medida martingala equivalente a la medida de probabilidad real $\mathbb{P}$ (asociada a la elección de $B(t)$ como numeraire).

En 1995, Geman y otros observaron que si el factor de descuento es estocástico entonces la medida martingala $\mathbb{P}^*$ puede no ser muy conveniente para la valuación del reclamo contingente X, ya que el cálculo de la esperanza condicional puede ser muy complicado. En tal caso, se sugiere un cambio de medida por ejemplo el uso de una medida martingala forward; antes de pasar a este punto daremos dos resultados importantes en lo referente a el uso de un *numeraire* adecuado.
1. El precio de cualquier activo dividido por un activo de referencia, positivo y que no paga dividendos (llamado *numeraire*) es una martingala (sin deriva) bajo la medida asociada con dicho *numeraire*.
2. En el tiempo t, el precio de riesgo neutral

$$\pi_t = \mathbb{E}_t^B \left[B(t) \frac{Payoff(T)}{B(T)} \right]$$

es invariante al cambio de *numeraire*. Suponga que S es otro *numeraire*, entonce

$$\pi_t = \mathbb{E}_t^S \left[S_t \frac{Payoff(T)}{S_T} \right]$$

. Es decir, la fórmula de valuación es invariante a cambios de numeraire.

Para finalizar esta sección introducimos la siguiente definición

Definición C.10 (Familia de precios de bonos libres de riesgo). *La familia $B(t,T), \quad t \leq T \leq T^*$ de procesos adaptados al espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ es una familia libre de arbitraje de precios de bonos relativos al proceso de tasa de interés r si*

i) $B(T,T) = 1, \qquad \forall T \in \mathcal{T},$

ii) Existe $\mathbb{P}^*$ medida martingala equivalente a $\mathbb{P}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}_{T^*})$, tal que $\forall T \in \mathcal{T}$

$$Z^*(t,T) = \frac{B(t,T)}{B_t}, \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

sigue una martingala bajo $\mathbb{P}^*$.

De la definición anterior se tiene el siguiente resultado

$$B(t,t) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1} | \mathcal{F}_t), \qquad \forall t \in \mathcal{T}.$$

ya que se tiene que

$$Z^*(t,T) = \frac{B(t,T)}{B_t}, \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

y como se esta suponiendo que es una martingala bajo $\mathbb{P}^*$ entonces

$$\mathbb{E}(Z^*(T,T)|\mathcal{F}_t) = Z^*(t,T), \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

mientras que por definición $Z^*(T,T) = B(T,T)/B_T = B_T^{-1}$, entonces

$$\mathbb{E}(Z^*(T,T)|\mathcal{F}_t) = Z^*(t,T), \quad \forall t \in \mathcal{T} \tag{C.1}$$

$$\mathbb{E}(B_T^{-1}|\mathcal{F}_t) = Z^*(t,T), \quad \forall t \in \mathcal{T} \tag{C.2}$$

$$\mathbb{E}(B_T^{-1}|\mathcal{F}_t) = \frac{B(t,T)}{B_t}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \tag{C.3}$$

$$\tag{C.4}$$

despejando $B(t,T)$ se tiene que

$$B(t,t) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1}|\mathcal{F}_t), \qquad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Medida Forward

En algunos casos resulta conveniente utilizar como *numeraire* a un bono cupón cero $B(t,T)$, de tal modo que en la ecuación del punto **2** anterior, tendríamos que $S_T = B(T,T) = 1$, de manera que el precio en el tiempo t, de un instrumento derivado con fecha de maduración T se obtiene por la fórmula de valuación

$$\pi_t = B(t,T)\mathbb{E}^T\{X_T|\mathcal{F}_t\}, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{C.5}$$

donde X_T denota el *payoff* del reclamo contingente; mientras que $\mathbb{E}^T$ refiere a la esperanza bajo la medida martingala *forward*, es decir a la medida asociada al bono cupón cero con fecha de maduración T como *numeraire*. Nótese que si $B_t = B(t)/B(T)$ entonces la ecuación anterior queda como sigue

$$\pi_t(X) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1}|\mathcal{F}_t), \qquad \forall t \leq T,$$

La razón por la cual esta medida se conoce como medida martingala forward se encuentra en los siguientes resultados.

Proposición C.11. *Cualquier tasa forward simplemente compuesta prevalenciente en el intervalo con fecha final T sigue una martingala bajo la medida $T-$forward, es decir*

$$\mathbb{E}^T\{F(t,S,T)|\mathcal{F}_u\} = F(t,S,T), \tag{C.6}$$

para cada $0 \leq t \leq S < T$. En particular la tasa forward prevaleciente en el intervalo $[S,T]$ es la esperanza, bajo la medida forward, de la tasa futura spot simplemente compuesta en el tiempo S y con fecha de maduración T, es decir

$$\mathbb{E}^T\{L(S,T)|\mathcal{F}_t\} = F(t,S,T) \tag{C.7}$$

para cada $0 \leq t \leq S < T$.

La ecuacion C.7 puede extenderse a tasas instantáneas como lo establece la siguiente

Proposición C.12. *El valor esperado de cualquier tasa de interés spot instantánea, bajo la medida forward correspondiente, es igual a la tasa forward instantánea relacionada es decir,*

$$\mathbb{E}^T\{r_T|\mathcal{F}_t\} = f(t,T), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Recuerdése la formula de valuació de riesgo neutral siguiente:

$$pi_t(X) = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(XB_T^{-1}|\mathcal{F}_t), \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{C.8}$$

En virtud de esta fórmula, podemos expresar el precio de un bono cupoón cero con fecha de maduración T como sigue

$$B(t,T) = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1}|\mathcal{F}_t), \qquad \forall t \in [0,T], \tag{C.9}$$

para cualquier fecha de maduración $0 \leq T \leq T^*$. Lo deseable sería conocer la ley de probabilidad de la variable aleatoria B_T la cual es $\mathcal{F}_t-$medible.

Bibliografía

[1] Ahmed, Sarfaraz, Michael Cohen y Santiago Libreros (2004): *Use of transition Matrices in Risk Management and Valuation.*

[2] Ammann, M. (2001): *Credit Risk Valuation: Methods, Models, and Applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[3] Bhattacharya, Rabi N. and Edward C. Waymire (1990): *Stochastic Processes with Applications*,A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, Inc.

[4] Bielecki, T.R., Rutkowsky, M.(2002): *Credit Risk: modeling, valuation and hedging*,Berlin; Heidelber; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer.

[5] Bladt, Mogens y Michael Sorensen : *Efficient estimation of transition rates between credit ratings from observations at discrete time points.*

[6] Burton Singer y Seymour Spilerman (1976): *The Representation of Social Processes by Markov Models.* The American Journal of sociology, Vol. 82, No.1. (Jul., 1976), PP. 1-54.

[7] Brigo, Damiano y Fabio Mercurio (2006):*Interest Rate Models- Theory and Practice* Springer, 2a. ed.

[8] D'Amico, G., Janssen, J. y Manca, R. (2005): *Credit risk migration semi-Marov models: a reliability approch*, Universitá di Roma La Sapienza y Université de Bretagne Occidentale.

[9] Das, Satyajit. (1998): *Credit Derivatives. Tradings & Management of Credit & Default Risk*, John Wiley & Sons (Asia) Pte ltd.

[10] Dean, L. Isaacson y Richard W. Madsen (1976): *Markov Chains Theory and Applications*, John Wiley & Sons.

[11] De la Fuente, Ma. de Lourdes *La Administración Integral de Riesgos Financieros*

[12] De Miguel Dominguéz, José Carlos y otros:*La Medición del Riesgo de Crédito y el Nuevo Acuerdo de Capital del Comité de Basilea.*

[13] Galicia, Martha. (2003): *Nuevos Enfoques de Riesgo de Crédito* , Instituto de Riesgo Financiero .

[14] Elizalde, Abel(2003): *Credit Risk Models II: Structural Models*,CEMFI & Universidad Pública de Navarra.

[15] Ernest T. Moynahan, *Risk Administration*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957), 455–460.

[16] *Estudio de Incumplimientos de pago y de transición de calificaciones en México*. Standard & Poor's. Abril 2006.

[17] Grimmett, Geoffrey R. (2001): *Probability and Random Processes*, Oxford.

[18] Hu, Yen-Ting, Rudiger Kiesel y William Perraudin (2001): *The Estimation of Transition Matrices for Sovereign Credit Ratings.*

[19] Hull, J. (2000): *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice-Hall, Saddle River,N.J., 4^{ta}.ed.

[20] Inamura, Yasunari: *Estimating Continuous Time Transition Matrices from Discretely Observed Data.*

[21] Israel, Robert B. y Jeffrey S. Rosenthal y Jason Z. Wei (2000): Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices, with Applications to Credit Ratings

[22] Jarrow, Robert A. David Lando y Stuart M. Turnbull(1997):*A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads.*

[23] Jones, Robert A. (2003): *Simulating Continuous Time Rating Transitions*

[24] Jones, Mattwe T.: *Estimating Markov Transition Matrices Using Proportions Data: An Appliation to Credit Risk.*

[25] Musiela, M. y Rutkowski M. (1997): *Martingale Methods in Financial Modelling* Springer- Verlag Berlin Heidelberg New York

[26] Meyn, S.P. y R.L. Tweedie (1993): *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.

[27] *Principios para la Administración del Riesgo de Crédito.* Documento Consultivo emitido por la Comisión de Basilea de Supervisión de Bancos. Basilea Julio de 1999.

[28] Rolski, Tomasz y otros. (1998): *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons.

[29] Smithson, Charles, D. Guill Gene: (2004) *Valoración de Activos Crediticios*