Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

APROXIMACIÓN DE SIMETRIZACIONES POR POLARIZACIONES Y SU APLICACIÓN A ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ELÍPTICAS MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ALBERTO SALDAÑA DE FUENTES

DIRECTOR DE TESIS:

DR. NILS ACKERMANN

2008

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno
Saldaña
De Fuentes
Alberto
55272458
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
301646651

2. Datos del tutor
Dr.
Nils
Ackermann

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Mónica Alicia
Clapp
Jiménez-Labora

4. Datos del sinodal 2
Dra.
María de la Luz Jimena
de Teresa
de Oteyza

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Salvador
Pérez
Esteva

6. Datos del sinodal 4
Dra.
Magali Louise Marie
Folch
Gabayet

7.Datos del trabajo escrito.
Aproximación de Simetrizaciones por Polarizaciones y su aplicación a Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas mediante Métodos Variacionales
112p
2008

Aproximación de Simetrizaciones por Polarizaciones y su Aplicación a Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas mediante Métodos Variacionales

Alberto Saldaña De Fuentes

2008

A mi hermano Manolo,

gracias por siempre creer en mi.

Agradecimientos

Hay mucha gente a quien quisiera agradecer, por su apoyo, afecto y compañía durante esta etapa de mi vida, y que si no fuera por el gran cariño y admiración que siento hacia mi hermano, el mérito de esta tesis y lo que simboliza estaría dedicado a cualquiera de las persona que aquí aparecen.

Quiero iniciar por agradecer a mis padres, Manuel y Aída Saldaña, por todo su amor, comprensión, apoyo y paciencia durante estos años.

A Nils Ackermann, por todo el tiempo que invirtió en este trabajo, por su gran dedicación y disposición, paciencia, preocupación, por todo el apoyo y la constante motivación, por todas las oportunidades que me ha dado para desarrollarme académica, intelectual y profesionalmente. *Ohne deine Hilfe wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen, Dank von ganzem Herzen, Nils!*

A Mónica Clapp, por mostrarme lo interesante, divertido y apasionante que pueden ser las matemáticas, su investigación y su enseñanza.

A mis demás sinodales, Luz de Teresa, Magali Folch y Salvador Pérez. Muchas gracias por su tiempo, por todos sus comentarios y correcciones.

A Óscar Jiménez, gracias por apoyarme siempre que lo necesitaba y por compartir tantas cosas conmigo a lo largo de estos años; por tu preocupación y constante aliento. Eres una persona muy especial en mi vida.

A las autoridades del Instituto de Matemáticas por haberme tenido la confianza y otorgarme un lugar para estudiar y conocer a investigadores y otros becarios. Y por supuesto, el agradecimiento también va para todos ellos: Kenya, Ingrid, Daniel, Carlos, Claudia, Nicolás, Jairo, Sergio, Gloria, Gris, José Luis, Gerónimo, Serena, Reyna, Mariano, Ilán, Erick, Jesús, de quienes he aprendido muchas cosas, y cada día aprendo más.

A Mario Alberto Reyes, por innumerables consejos y por todo su apoyo, pero sobretodo, por su gran amistad.

A Luis Antonio Rincón Solís, por todas las oportunidades que me ha dado, por sus consejos y porque es una persona que admiro profundamente por su dedicación y entrega.

A Daniel Labardini, porque tuve la fortuna de ser su alumno a inicios de la carrera, y de conocer su contagioso gusto y pasión por las matemáticas.

A toda mi familia: A mi tío Armando Saldaña, por sus consejos, apoyo y confianza, a mi abuela, mis tías, mis primas por su amor y constante cuidado; a mi tío Poncho, porque aunque ya no está con nosotros lo tengo siempre presente.

A mis amigos: Carlos Alberto Guerrero, G.Alberto González, Daniel Cadena, Irving Lester Carmona, Víctor Hugo Gómez, Samuel Guzmán, Adrián Fragoso, Efrén Araujo, Jorge Alfonso Guzmán, Juan Pablo Hernández, Karla Bassols, Eduardo Selim Martínez, Esteban Castro, Laura Velasco, Liliana Delgado; con cada uno tengo entrañables historias, gracias por compartir su vida conmigo en estos últimos años.

A Verónica Elizabeth Cruz, porque eres el mejor equipo para emprender proyectos, la mejor cómplice para vivir aventuras y una inmejorable compañera y amiga. Gracias por todo Vero.

Y finalmente, quiero agradecer a Claudia Leticia Sánchez, por su gran disposición para siempre escucharme, por su comprensión y consejos, por su apoyo y cuidado. Te quiero mucho Claudia.

Me da mucho gusto poder agradecer a tantas personas, y espero no haber olvidado a nadie.

Sinceramente,

Alberto Saldaña.

Septiembre 2008.

Índice general

Introducción

En este trabajo estudiaremos las simetrías de soluciones de Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas (EDPE). Para ello nos valdremos primordialmente de tres herramientas muy interesantes: las Simetrizaciones, las Polarizaciones y los Métodos Variacionales. Los tres son conceptos matemáticos antiguos, y han tenido una evolución notable hasta nuestros días, generalizándose cada vez a espacios más y más abstractos.

Por ejemplo, en el problema modelo

$$(\wp) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u), & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde:

- Δ es el operador Laplaciano usual ($\Delta u = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x^i})^2$),
- Ω es una bola abierta en $\mathbb{R}^N$,
- $\partial\Omega$ denota la frontera de la bola Ω,

se sabe que cuando la función f es Lipschitz continua, decreciente en $r = |x|$ y u es una solución positiva y continua hasta la frontera, entonces el famoso resultado de Gidas, Ni y Nirenberg [18] dice que u es radial y $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ (para una visión más panorámica de simetrías en soluciones de EDP puede consultarse el artículo de Xavier Cabré [11], donde también se encuentra una versión del resultado de Gidas, Ni y Nirenberg). En este caso la existencia de una solución positiva automáticamente implica la existencia de una función radialmente simétrica.

Las soluciones de ($\wp$) pueden obtenerse al encontrar los puntos críticos del funcional de Euler-Lagrange φ definido en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ por

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u(x)|^2}{2} - F(|x|, u(x)) \right) dx,$$

donde $F(r,t) = \int_0^t f(r,s)ds$.

La Simetrización de Schwarz mapea una función no negativa $u \in H_0^1(\Omega)$ a una función más simétrica u^*. Se puede demostrar [26] que si $\frac{\partial f}{\partial r} \leq 0$, entonces $\varphi(u^*) \leq \varphi(u)$. Por lo tanto, si existe un minimizador de φ, debe existir un minimizador simétrico. En los problemas que se tratan en el presente trabajo no será posible encontrar minimizadores globales, sin embargo los métodos variacionales nos permitirán hacer una aseveración equivalente en un mínimo local. De esta manera, se demostrará en algunos casos la existencia de una solución positiva simétrica sin asumir que f es Lipschitz continua en la variable u.

En este trabajo modificaremos el Teorema Minimax General de Willem [33] para obtener sucesiones de Palais-Smale cuyos elementos sean cada vez más y más simétricos, y de este modo demostrar que algunos valores críticos son alcanzados por funciones simétricas. Sin embargo, esta modificación debe hacerse con mucho cuidado, pues resulta que la función que mapea una función con su simetrización puede ser no continua en espacios de Sobolev

[2], por lo cual es necesario desarrollar un método de aproximación de las simetrizaciones, de tal manera que se conserve la continuidad en las construcciones del Teorema Minimax General. Este método es desarrollado por Schaftingen [27] mediante el uso de Polarizaciones.

A continuación se explicará brevemente el contenido, por capítulos, del presente trabajo de tesis: En el capítulo 1 se desarrolla el concepto de Arreglo de una función, y posteriormente de Simetrización, centrándose en la Simetrización de Schwarz, aunque es importante mencionar que estos resultados se pueden extender a otras como la Simetrización de Steiner, la Simetrización Esférica por Capas (Spherical Cap Symmetrization) y los arreglos crecientes. En este mismo capítulo se enuncian sus propiedades principales, que bajo algunas hipótesis técnicas, son las siguientes:

- Una simetrización * mapea cualquier función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ a una función más simétrica $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$.
- u^* es radialmente simétrica y decreciente.
- u y u^* tienen la misma norma en L^p y $\int_\Omega u(x)dx = \int_{\Omega^*} u^*(x)dx$.
- $||u^* - v^*||_p \leq ||u - v||_p$

El el capítulo 2 se desarrolla el método de aproximación de simetrizaciones. Se define primero el concepto de polarización y se demuestran sus principales propiedades, para después demostrar que una sucesión de polarizadores puede aproximar a la Simetrización de Schwarz. Dada una función, construir dicha sucesión es relativamente sencillo, sin embargo en el artículo en el que se basó esta Tesis [26] se encontró un error en la construcción de la aproximación uniforme. Esperamos dar una prueba consistente de este resultado en un trabajo futuro. Finalmente, se demuestra la continuidad de la función polarizadora en espacios de Sobolev, y se formula la generalización de este método a espacios de Banach.

El capítulo 3 está dedicado a demostrar el Teorema Minimax General de Willem. Para ello se desarrolla primero un caso particular muy conocido:*El Teorema del Paso de Montaña*, y el lema sobre el cual se basa la demostración: el *Lema Cuantitativo de Deformación*.

El capítulo 4 unifica los tres capítulos anteriores: enuncia y demuestra el Principio Variacional Simétrico de Schaftingen utilizando la aproximación por polarizaciones, demostrando así no sólo la existencia de una solución simétrica, sino también que está vinculada a un valor minimax c y sin hipótesis de diferenciabilidad o de continuidad Lipschitz sobre la función f. Finalmente, en el capítulo 5 se da una aplicación formulada para un caso general de este Principio a Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas no Lineales cuando el dominio es una bola.

Alberto Saldaña De Fuentes

Agosto 2008

Prólogo

Antes de entrar en materia, me gustaría retomar un poco el contexto que rodea algunos de los conceptos más importantes en este trabajo. Para ello, quiero agradecer primero a Marina Sosa, de la Universidad de Buenos Aires, a quien no tengo el gusto de conocer, pero cuyo trabajo de tesis [30] disfruté bastante y fue de mucha utilidad para escribir este Prólogo.

Simetrizaciones

Empecemos hablando de las simetrizaciones. Para ello, recordemos primero el *Problema de Dido,* el cual establece que de todos los dominios en el plano con un perímetro dado, el disco y sólo el disco es aquel que maximiza el área encerrada. Esto se expresa con la *desigualdad isoperimétrica clásica*

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

donde L es el perímetro y A el área encerrada por éste. La igualdad sólo se alcanza con el disco. En tres dimensiones se obtiene algo equivalente, si S es la superficie de un cuerpo y V el volumen del mismo, entonces

$$S^3 \geq 36\pi V^2,$$

y la igualdad sólo se alcanza con la bola. Así, uno se puede explicar por qué las burbujas de jabón son esféricas: la burbuja alcanzará una posición de equilibrio cuando la energía potencial debido a la tensión de la superficie sea minimal. Esta energía es proporcional al área de la superficie de la burbuja. Por lo tanto, dado un volumen de aire que forma la burbuja, ésta tomará una forma esférica que minimiza el área de la superficie. Las dos desigualdades anteriores pueden generalizarse a cualquier dimensión [21].

El estudio de desigualdades isoperimétricas conlleva una interrelación muy interesante de Análisis, Geometría y Ecuaciones Diferenciales Parciales. Se han hecho muchas conjeturas, algunas han sido ya resueltas, pero un gran número de ellas permanecen aún abiertas. Así, se puede observar que en la naturaleza, las simetrías (esféricas) aparecen al momento de optimizar recursos y una de las principales herramientas en el estudio de problemas isoperimétricos es la *Simetrización de Schwarz*. Esta simetrización actúa de manera similar al caso de la burbuja, pues uno puede partir de conjuntos amorfos y extraños, pero después de pasar por el proceso de simetrización, se obtiene un conjunto con simetría esférica (una bola). Esta idea puede generalizarse a funciones mediante el concepto de *conjunto de nivel*, como se explicará de manera formal en el primer capítulo. Esto da la pauta para aplicar simetrizaciones a la teoría de Ecuaciones Diferenciales, y una forma de hacer esta vinculación es mediante los llamados *Métodos Variacionales*, y justamente de esto se trata el capítulo 4.

Métodos Variacionales

Los Métodos Variacionales son una evolución moderna de lo que antes se conocía como *Cálculo de Variaciones,* que fue motivado por problemas como el ya mencionado Problema de Dido. Sin embargo los primeros problemas del Cálculo de Variaciones fueron postulados a la par del nacimiento del Cálculo, a finales del siglo XVII, como el problema de Newton del sólido de revolución, que ofrece la menor resistencia de un fluido, o el problema de encontrar la trayectoria más corta que une dos puntos fijos en el plano, el espacio o sobre una superficie (*geodésica*), sólo por citar algunos.

En la actualidad, después de años de estudio y optimización, los problemas del Cálculo de Variaciones consisten en encontrar máximos o mínimos de funcionales reales definidas en espacios de funciones. El problema modelo, como mostró Euler a mediados del siglo XVII, consiste en encontrar el mínimo (o el máximo) de una expresión de la forma

$$\int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx \tag{1}$$

sobre todas las funciones suaves y que vayan de (a, b) a $\mathbb{R}^N$.

Euler y después Lagrange mostraron que si tal función y existía, debía ser solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\frac{d}{dx}\partial_{y'} f(x, y(x), y'(x)) - \partial_y f(x, y(x), y'(x)) = 0 \tag{2}$$

que recibió el nombre de *Ecuación de Euler-Lagrange* correspondiente al problema de Cálculo de Variaciones ([30]). Cuando $y(x)$ es una función de n variables y (1) corresponde a una integral múltiple sobre un conjunto $n-$dimensional Ω, entonces la ecuación de Euler-Lagrange asociada es una ecuación diferencial parcial, y las condiciones en a y b se substituyen por condiciones para y sobre la frontera $\partial\Omega$.

Los matemáticos de la época concentraron sus esfuerzos en buscar soluciones explícitas de la Ecuación de Euler-Lagrange, y luego encontrar candidatos para mínimo de (1) sobre una familia de funciones. Sin embargo, esto no siempre era posible, por ejemplo cuando la ecuación (2) es no lineal o no es integrable. Esto cambió cuando a mediados del siglo XIX el trabajo de Gauss en Teoremas de Existencia motivó un nuevo enfoque, que consistía en mostrar la existencia de una solución de (2), que satisfacía ciertas condiciones en la frontera, y probar que (1) tiene un máximo o mínimo sobre la clase de funciones que satisfacen las condiciones de frontera. Este método recibió el nombre de *Método directo del Cálculo de Variaciones.* Primero surgió de forma heurística en demostraciones incompletas de Gauss, Dirichlet, Kelvin y Riemann sobre las soluciones del llamado *Problema de Dirichlet*

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } \Omega, \\ u(x) = f(x), & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Δ es el Laplaciano y f es una función con valores reales definida en $\partial\Omega$.

La ecuación $(\mathcal{D})$ es la Ecuación de Euler Lagrange asociada a la *integral de Dirichlet*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

La existencia de un mínimo fue considerada una consecuencia trivial de su positividad (*Principio de Dirichlet*), hasta que Weierstraß dio un contraejemplo en 1870, en dimensión 1, mostrando que la integral

$$\int_{-1}^{1} [xy'(x)]^2 dx$$

no tiene mínimos sobre el conjunto de funciones C^2 tales que $y(-1) = a$, $y(1) = b$, cuando $a \neq b$. Sin embargo, este no fue un contraejemplo del Principio de Dirichlet, y finalmente en 1900 Hilbert esbozó una demostración rigurosa de este Principio cuando n=2, bajo ciertas condiciones sobre f y Ω. Fue el principio de una larga sucesión de artículos, que daban cuenta de la profecía que Hilbert hizo en su famosa conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticos en Paris:

> "Estoy convencido de que será posible probar teoremas de existencia usando un principio general, cuya naturaleza está motivada por el Principio de Dirichlet".

La situación en este momento es bien resumida por Volterra, quien en 1932 escribió:

> "En lugar de estudiar los problemas de cálculo de variaciones reduciéndolos a ecuaciones diferenciales, es conveniente reducir los problemas que, a primera vista son de ecuaciones diferenciales, a problemas de cálculo de variaciones. Esto tiene una importancia, que puede decirse filosófica, y también una importancia práctica.
>
> Los nuevos métodos del Cálculo de Variaciones no sólo son importantes desde el punto de vista de esta ciencia, sino también tienen gran interés para el estudio de ecuaciones diferenciales y de muchos problemas que están conectados. También le dan un nuevo interés a la teoría de funcionales."

Recientemente, los Métodos Variacionales se constituyeron como una herramienta muy importante en el tratamiento de Ecuaciones Diferenciales, pues en algunos casos es posible trasladar el problema a uno Variacional, donde se busca encontrar máximos o mínimos, locales o globales, de un funcional cuyo conjunto de puntos críticos son las soluciones de la Ecuación Diferencial en cuestión. Sin embargo, en algunos casos de interés, el funcional φ no está acotado inferiormente (o superiormente) por lo que no es posible encontrar mínimos (o máximos) globales y, en estos casos, los Métodos Minimax, los cuales se centran en puntos silla, son de gran utilidad. El Teorema Minimax más conocido es el *Teorema del Paso de Montaña*, el cual tiene una geometría muy interesante. Se supone lo siguiente:

- $\varphi \in C^2(X, \mathbb{R})$ ("El valle de montañas"),

- $e \in X,\ r > 0$ tal que $||e|| > r$, (un punto al otro lado de las montañas),

- $\inf_{||u||=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e)$ (forma montañosa)

- $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ (los caminos entre 0 y e),

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)).$$

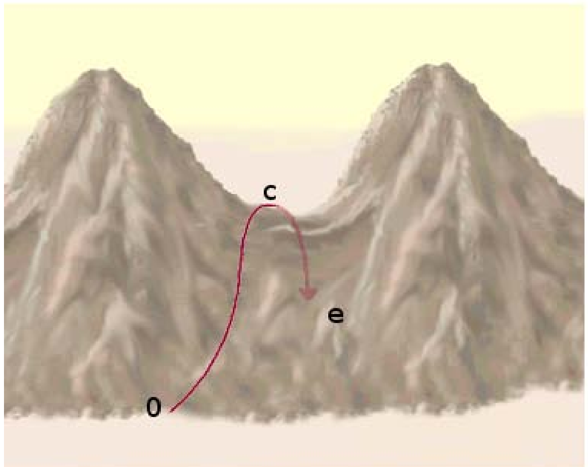

Figura 1: La geometría del Paso de Montaña

Entonces, el Teorema del Paso de Montaña nos encuentra una altura máxima más pequeña (el real c), y siempre podemos encontrar una sucesión $(u_n) \subset X$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi(u_n) &\to c, \\ \varphi'(u_n) &\to 0. \end{aligned}$$

Es decir, una sucesión de puntos casi críticos. El Teorema General del Paso de Montaña en un espacio de Banach fue introducido por Ambrosetti y Rabinowitz en 1973 y, junto con la Teoría del Grado Topológico, se han convertido en las herramientas más usadas y fructíferas del análisis funcional no lineal.

Este teorema y una generalización serán demostradas en el Capítulo 3. Su demostración usa una *técnica de deformación* que fue introducida en 1934 por Lusternik y Schnirelmann. Ésta consiste en deformar un funcional φ, afuera del conjunto de puntos críticos, a través de soluciones de su *sistema gradiente asociado* $\sigma' = -\nabla\varphi(\sigma)$ u otro sistema cualitativamente equivalente. Finalmente, con el teorema del Paso de Montaña, y *condiciones de compacidad* introducidas por Palais y Smale en 1965, se puede garantizar la existencia de soluciones de Ecuaciones Diferenciales, como se verá en el capítulo 5.

Capítulo 1

Simetrización

La Simetrización de Schwarz es un tipo particular de arreglo de funciones, definidas en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dada una función real en este conjunto, se construye una función asociada, que tiene como dominio la bola centrada en el origen, con la misma medida que Ω, esencialmente el mismo rango de valores, y que cumple dos propiedades en particular: es radial, y radialmente decreciente. Para llegar a este objetivo, se construye primero el arreglo decreciente unidimensional de una función.

Notación 1.1. A lo largo de este capítulo, a menos que se indique lo contrario, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ será un conjunto medible con medida de Lebesgue positiva.

1.1 El Arreglo Decreciente

Sea $u\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\} \bigcup \{-\infty\}$ una función medible. Para $t \in \mathbb{R}$, definimos el conjunto de nivel como

$$\{u > t\} := \{x \in \Omega \mid u(x) > t\}.$$

Los conjuntos $\{u < t\}$, $\{u \geq t\}$, $\{u = t\}$ se definen de manera análoga. Entonces definimos la **función de distribución** de u como

$$\mu_u(t) := |\{u > t\}|, \ t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

donde $|\ \ |$ representa la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

Nota 1.2. Sea $A_0 := \{t \in \mathbb{R} \mid |\{u > t\}| = 0\}$. Entonces el supremo esencial (sup.ess) se define $\operatorname{sup.ess}(u) := \infty$ si $A_0 = \emptyset$, $\operatorname{sup.ess}(u) := \inf A_0$ en otro caso. Análogamente se define el ínfimo esencial (inf.ess). Además, se cumple que $\operatorname{sup.ess} u \in A_0$ si $A_0 \neq \emptyset$

Enunciaremos ahora algunas de las propiedades más importantes de la función de distribución.

Proposición 1.3. *Sea $u \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, entonces*

1. *μ_u es decreciente.*

2. $t \geq \operatorname{sup.ess} u \implies \mu_u(t) = 0$,
   $t < \operatorname{inf.ess} u \implies \mu_u(t) = |\Omega|$ *(i.e. $\mu_u(\mathbb{R}^N) \subset [0, |\Omega|]$).*

3. *μ_u es una función continua por la derecha.*

Demostración. 1 y 2 son claros a partir de (1.1) y de la Nota 1.2. Para 3, sea $t \in \mathbb{R}$ y $(h_n) \subset (0, \infty)$ tal que $h_n \to 0$. El hecho de que

$$\{u > t + h_{n_1}\} \subset \{u > t + h_{n_2}\} \text{ si } h_{n_2} \leq h_{n_1}$$

y que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{u > t + h_n\} = \{u > t\}$$

implican por el Teorema 1.19(d) en el libro de Rudin [25] que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_u(t+h_n) = \lim_{n\to\infty} |\{u > t+h_n\}| = |\{u > t\}| = \mu_u(t)$$

□

Definición 1.4. Sea $u \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ medible. Se dice que u es **simetrizable** si $\mu_u(t) < \infty$ para todo $t > \operatorname{inf.ess} u$ y $|\{u = \infty\}| = |\{u = -\infty\}| = 0$. Llamaremos Σ_Ω al conjunto de las funciones simetrizables definidas en el conjunto Ω.

Lema 1.5. *Sea* $u \in \Sigma_\Omega$. *Entonces* $\mu_u(t) < |\Omega|$ *para todo* $t > \operatorname{inf.ess} u$. *Además* $\lim_{t\to\infty} \mu_u(t) = 0$ *y* $\lim_{t\to-\infty} \mu_u(t) = |\Omega|$.

Demostración. Si $|\Omega| = \infty$, el resultado se sigue de la definición 1.4. Si $|\Omega| < \infty$ haremos una demostración contraposición. Supongamos que $\mu_u(t) \geq |\Omega|$, entonces $\mu_u(t) = |\Omega|$ por la Proposición 1.3, por lo tanto se tiene que

$$|\{u < t\}| \leq |\{u \leq t\}| = |\Omega| - |\{u > t\}| = |\Omega| - \mu_u(t) = 0$$

y entonces $t \leq \operatorname{inf.ess} u$.

Demostremos ahora el primer límite. Sea $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to \infty$ monótonamente y definamos $A_n := \{u > t_n\}$. Entonces $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$ y s.p.g. supongamos que $t_1 > \operatorname{inf.ess} u$ entonces $|A_1| = \mu_u(t_1) < \infty$. Por lo tanto en vista del Teorema 1.19(e) en [25] se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_u(t_n) = \lim_{n\to\infty} |A_n| = |\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n| = |\{u = \infty\}| = 0,$$

pues $u \in \Sigma_\Omega$.

Análogamente para el segundo límite, sea $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to -\infty$ monótonamente y definamos $A_n := \{u > t_n\}$. Entonces $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \mu_u(t_n) = \lim_{n\to\infty} |A_n| = |\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n| = |\Omega \backslash \{u = -\infty\}| = |\Omega|.$$

□

Ejemplo 1.6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $p \in [1, \infty)$ y $u \in L^p(\Omega)$. Si $u \geq 0$ o si $|\Omega| < \infty$ entonces $u \in \Sigma_\Omega$.

Definición 1.7. Sea $u \in \Sigma_\Omega$. Entonces el **arreglo decreciente (unidimensional)** de u, es una función $u^{\#} : [0, |\Omega|) \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$u^{\#}(s) := \inf\{r \mid \mu_u(r) \leq s\}.$$

Nota 1.8. En esencia, $u^{\#}$ puede verse como la inversa de la función de distribución μ_u de u. Sin embargo, como $\mu_u(t)$ es sólo monotonamente decreciente, puede tener discontinuidades de salto. Si t es un punto de discontinuidad, entonces la definición precedente fija el valor de $u^{\#}$ en el intervalo $[\mu_u(t+), \mu_u(t-)]$ como t, donde $t+$ y $t-$ denotan el límite por la derecha y por la izquierda respectivamente. Y cuando μ_u tiene un intervalo constante, entonces $u^{\#}$ tiene una discontinuidad de salto.

Ejemplo 1.9 (Kawohl (1986))**.** Sea $\Omega = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$. Definimos $u : \Omega \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$u(y) := \begin{cases} 2 + y, & -2 \leq y \leq -1, \\ 1, & -1 \leq y \leq 0, \\ 1 + y, & 0 \leq y \leq 0{,}5, \\ 2 - y, & 0{,}5 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

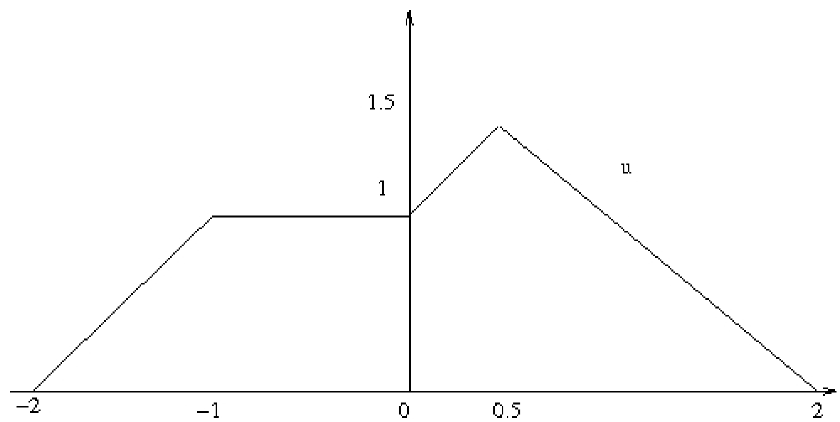

Figura 1.1: Función original.

Entonces se sigue fácilmente que

$$\mu_u(t) = \begin{cases} 4 & t \leq 0 \\ 4 - 2t, & 0 \leq t < 1, \\ 3 - 2t, & 1 \leq t \leq 1.5, \\ 0, & t \geq 1.5, \end{cases}$$

y que

$$u^{\#}(s) = \begin{cases} (3 - s)/2, & 0 \leq s \leq 1, \\ 1, & 1 \leq s \leq 2, \\ (4 - s)/2, & 2 \leq s \leq 4. \end{cases}$$

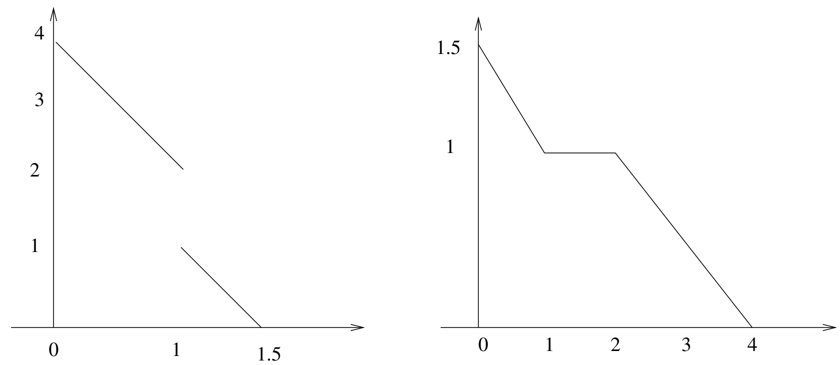

Figura 1.2: Comparación entre μ_u (izquierda) y $u^{\#}$ (derecha)

Definición 1.10. Se dice que dos funciones reales (que pueden tener distinto conjunto de definición) son **equimedibles** si tiene la misma función de distribución. Se dice que las funciones equimedibles son **arreglos** una de la otra.

Veamos ahora algunas de las propiedades del arreglo decreciente.

Proposición 1.11. *Sea $u \in \Sigma_\Omega$, entonces se cumple que:*

i) $u^{\#}$ *es no creciente.*

ii) $u^{\#}$ *es continua por la derecha.*

iii) $t \in \mathbb{R},\ s \in [0, |\Omega|)$. *Entonces* $\mu_u(t) \leq s \iff u^{\#}(s) \leq t$.

iv) $u^{\#}(0) = \operatorname{sup.ess} u,\ \text{lím}_{s \to |\Omega|-} u^{\#} = \operatorname{inf.ess} u$.

v) $u^{\#} \in \Sigma_{[0,|\Omega|)}$ *y* $\mu_u = \mu_{u^{\#}}$ *(i.e. u y $u^{\#}$ son funciones equimedibles).*

Demostración. i) Este resultado se sigue de la definición de $u^{\#}$.

ii) Sea $t \in [0, |\Omega|)$ y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [t, |\Omega|)$ tal que $t_n \to t$ y $\{t_n\}$ es no creciente. Definamos:

$$\begin{aligned} r_0 &:= u^{\#}(t) = \operatorname{ínf}\{r \mid \mu_u(r) \leq t\}, \\ r_n &:= u^{\#}(t_n) = \operatorname{ínf}\{r \mid \mu_u(r) \leq t_n\}. \end{aligned}$$

Como $u \in \Sigma_\Omega$, entonces para todo $s > 0$ se tiene que $u^{\#}(s) < \infty$ (de lo contrario, se tendría que $\mu_u(r) > s > 0$ $\forall r \in \mathbb{R}$ contradiciendo que $\operatorname{lím}_{t\to\infty} \mu_u(t) = 0$, como fue demostrado en el Lema 1.5).

Supongamos primero que $t > 0$. Entonces $r_0, r_n < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Demostraremos que $r_n \to r_0$ cuando $n \to \infty$. Dado que $\{t_n\}$ es decreciente y la definición de r_n, se tiene que

$$\mu_u(r_{n+1}) \leq t_{n+1} \leq t_n \implies r_{n+1} \geq r_n$$

pues r_n es el ínfimo con esa propiedad y μ_u es una función continua por la derecha. Por lo tanto $\{r_n\}$ es creciente.

Además, se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_u(r_0) \leq t \leq t_n \implies r_0 \geq r_n \implies \{r_n\} \text{ es convergente.}$$

Sea r' este límite, entonces se tiene por la implicación anterior que $r_0 \geq r'$. Por otro lado como μ_u es una función decreciente y por la definición de r_n se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_u(r') \leq \mu_u(r_n) \leq t_n \implies \mu_u(r') \leq t,$$

al tomar el límite. Por lo tanto, por la definición de r_0 se sigue que $r_0 \leq r'$. Y por lo tanto $r' = r_0$ y $r_n \to r_0$.

Si $t = 0$ puede suceder que $r_0 < \infty$ ó $r_0 = \infty$. En el primer caso, como $u^{\#}$ es una función decreciente se tiene que $r_n < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y la misma demostración del caso anterior funciona. Para el caso $t = 0$ y $r_0 = \infty$ se infiere de esta última igualdad que

$$\mu_u(r) > 0 \ \forall r \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Ahora, supongamos que la sucesión $\{r_n\}$ definida del mismo modo que en el primer caso, converge a $r' < \infty$. Entonces se tendría que $\mu_u(r') \leq t_n$ y tomando límites $\mu_u(r') = 0$ lo cual es una contradicción a (1.2).

iii) Sean $t \in \mathbb{R},\ s \in [0, |\Omega|)$, supongamos que $\mu_u(t) \leq s$ entonces $u^{\#}(s) \leq t$ por definición de $u^{\#}$. Supongamos ahora que $u^{\#}(s) \leq t$, sean $t_n > t$ tal que $t_n \to t$ cuando $n \to \infty$, entonces por definición de $u^{\#}$ se tiene que $\mu_u(t_n) \leq s$. Se toman límites y el resultado se sigue de que μ_u es continua por la derecha.

iv) $u^{\#}(0) = \text{ínf}\{r \mid \mu_u(r) = 0\} = \operatorname{sup.ess} u$. Ahora sea

$$\alpha := \lim_{s \to |\Omega|-} u^{\#}(s).$$

Se demostrará que $\alpha = \operatorname{inf.ess} u$. Sea $s \in [0, |\Omega|)$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_u(r) \leq s < |\Omega|$, entonces por la Proposición 1.3 inciso 2, se tiene que $r \geq \operatorname{inf.ess} u$ y entonces por definición de $u^{\#}$ se sigue que $u^{\#}(s) \geq \operatorname{inf.ess} u$, y por lo tanto $\alpha \geq \operatorname{inf.ess} u$. Para demostrar la otra desigualdad se procederá por contradicción, supongamos que $\alpha > \operatorname{inf.ess} u$, entonces existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > \beta > \operatorname{inf.ess} u$. Luego por la monotonía de $u^{\#}$ se tiene que

$$u^{\#}(s) \geq \alpha > \beta \ \ \forall \ \ s \in [0, |\Omega|),$$

pero por iii), se sigue que

$$\mu_u(\beta) > s \ \ \forall \ \ s \in [0, |\Omega|),$$

entonces, haciendo tender $s \to |\Omega|$

$$\mu_u(\beta) \geq |\Omega|.$$

Pero por el Lema 1.5 se sigue que

$$\beta \leq \inf. \operatorname{ess} u,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto

$$\lim_{s \to |\Omega|-} u^{\#}(s) = \inf. \operatorname{ess} u.$$

v) La monotonía de $u^{\#}$ implica que

$$\begin{aligned} \mu_{u^{\#}}(t) = |\{u^{\#} > t\}| &= \sup(\{s \geq 0 \mid u^{\#}(s) > t\} \bigcup \{0\}) \quad (1.3) \\ &= \inf\{s \geq 0 \mid u^{\#}(s) \leq t\}. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Sea $t \in \mathbb{R}$, se demostrará que $\mu_u(t) = \mu_{u^{\#}}(t)$. Si $u^{\#}(s) > t$ para toda $s \in [0, |\Omega|)$ entonces por definición

$$\mu_{u^{\#}}(t) = |\{u^{\#} > t\}| = |\Omega|.$$

Por otro lado, se tiene que

$$u^{\#}(s) > t \implies \inf\{r \mid \mu_u(r) \leq s\} > t \implies \mu_u(t) > s,$$

para toda $s \in [0, |\Omega|)$, de donde se sigue que $\mu_u(t) \geq |\Omega|$. Dado que $\mu_u(t) \leq |\Omega|$ siempre se cumple, se tiene que $\mu_u(t) = \mu_{u^{\#}}(t)$.

Ahora, si existe $s \geq 0$ tal que $u^{\#}(s) \leq t$. Entonces por $iii)$ se tiene que $\mu_u(t) \leq s$, y de (1.4) se sigue que

$$\mu_u(t) \leq \mu_{u^{\#}}(t).$$

La otra desigualdad se demostrará por contradicción. Supongamos que $\mu_{u^{\#}}(t) < \mu_u(t)$. Entonces existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_{u^{\#}}(t) < \beta < \mu_u(t)$, pero por $iii)$ se tiene que $u^{\#}(\beta) > t$, entonces por (1.3) se sigue que

$$\mu_{u^{\#}}(t) \geq \beta > \mu_{u^{\#}}(t),$$

lo cual es una contradicción.

□

Proposición 1.12. *El mapeo $u \to u^{\#}$ es no decreciente, i.e. si $u \leq v$, donde u y v son funciones reales en Ω, entonces $u^{\#} \leq v^{\#}$.*

Demostración. Como $\{u > t\} \subset \{v > t\}$, se tiene que

$$\{t \mid |\{v > t\}| < s\} \subset \{t \mid |\{u > t\}| < s\}$$

y el resultado se sigue de la definición. □

1.2 Simetrización de Schwarz

Definición 1.13. Dado un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^N$ de medida positiva, se denota por E^* (a menos que se especifique otra cosa) a la bola abierta de dimensión N centrada en el origen, con la misma medida de Lebesgue que E, i.e. $|E^*| = |E|$. Se dice que E^* es la **Simetrización de Schwarz** de E.

Lema 1.14. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ medibles. Entonces*

$$|A \backslash B| \geq |A^* \backslash B^*| \tag{1.5}$$

Demostración. Supongamos que $|A| \geq |B|$, entonces

$$A^* \bigcap B^* = B^* \implies |A^* \bigcap B^*| = |B^*| = |B| \geq |A \bigcap B|.$$

Análogamente se tiene que

$$|B| \geq |A| \implies |A^* \bigcap B^*| \geq |A \bigcap B|.$$

Seguiremos la prueba por casos. Supongamos que $|A| < \infty$, entonces

$$|A \backslash B| = |A| - |A \bigcap B| \geq |A^*| - |A^* \bigcap B^*| = |A^* \backslash B^*|.$$

Ahora, si $|A| = \infty$ entonces hay dos casos:

1. $|A \backslash B| = \infty \implies |A \backslash B| \geq |A^* \backslash B^*|$.

2. $|A \backslash B| < \infty \implies |B| = \infty \implies A^* = B^* = \mathbb{R}^N$ y entonces

$$0 = |A^* \backslash B^*| \leq |A \backslash B|.$$

$\square$

Notación 1.15. Dado un vector $x \in \mathbb{R}^N$, denotamos su norma Euclidiana por $|x|$. Finalmente, denotaremos por ω_N el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^N$. Recordemos que

$$\omega_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)},$$

donde $\Gamma(s)$ es la función gamma usual.

Definición 1.16. Sea $u \in \Sigma_\Omega$. Entonces, su **Simetrización de Schwarz**, o su **arreglo decreciente y esféricamente simétrico**, es la función $u^*: \Omega^* \to \mathbb{R}$ definida como

$$u^*(x) := u^\#(\omega_N |x|^N),\ x \in \Omega^*.$$

Ejemplo 1.17. Sea $\Omega = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$. Definimos $u : \Omega \to \mathbb{R}$ como en el ejemplo 1.9:

$$u(y) := \begin{cases} 2 + y, & -2 \leq y \leq -1, \\ 1, & -1 \leq y \leq 0, \\ 1 + y, & 0 \leq y \leq 0{,}5, \\ 2 - y, & 0{,}5 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

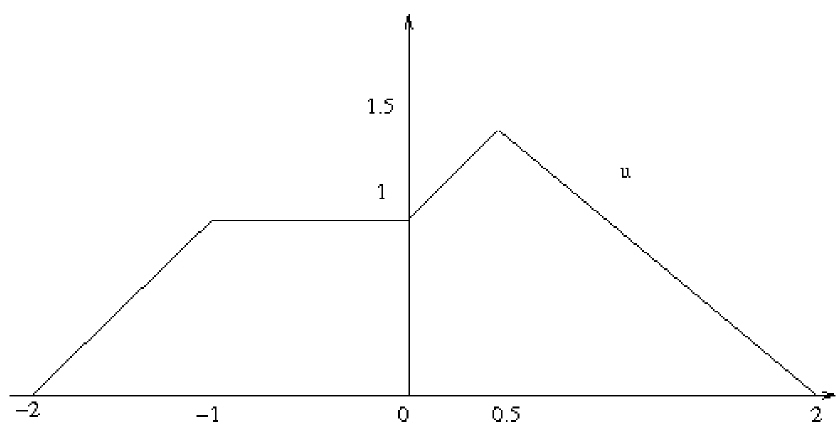

Figura 1.3: Función original.

Entonces $\Omega = \Omega^* = (-2, 2)$ y u^* está dada por

$$u^*(-x) = u^*(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x, & 0 \leq x \leq 0{,}5, \\ 1, & 0{,}5 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

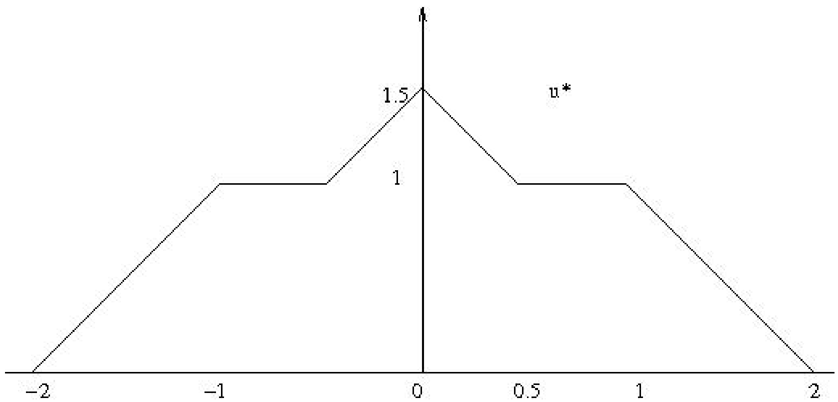

Figura 1.4: Función simetrizada.

A continuación demostraremos que la Simetrización de Schwarz u^* es un arreglo del Arreglo Decreciente $u^\#$ (y por lo tanto también de la función simetrizada u).

Proposición 1.18. *Sean* $u \in \Sigma_\Omega$ *y* $t \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$|\{u^* > t\}| = |\{u^\# > t\}|. \tag{1.6}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
|\{u^* > t\}| &= |\{x \in \Omega^* \mid u^*(x) = u^\#(\omega_N |x|^N) > t\}| && (1.7)\\
&= (\sup\{s \in [0, |\Omega|) \mid u^\#(\omega_N s^N) > t\})^N \omega_N && (1.8)\\
&= \sup\{r \in [0, |\Omega|) \mid u^\#(r) > t\} && (1.9)\\
&= |\{r \in [0, |\Omega|) \mid u^\#(r) > t\}| && (1.10)\\
&= |\{u^\# > t\}|. && (1.11)
\end{aligned}$$

□

Del resultado anterior se sigue la siguiente proposición, que nos da otras caracterizaciones útiles de la Simetrización de Schwarz. Algunos autores definen desde un inicio a la Simetrización de Schwarz con alguna de estas caracterizaciones, de modo que son también definiciones equivalentes.

Proposición 1.19. *Sean $u \in \Sigma_\Omega$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces se cumplen:*

1. $\{u^* > t\} = \{u > t\}^*$,
2. $u^*(y) = \sup\{c \in \mathbb{R} \mid y \in \{u > c\}^*\}$.

Demostración. De (1.6) y por la Proposición 1.11 inciso v) se sigue que

$$|\{u^* > t\}| = |\{u^\# > t\}| = |\{u > t\}| = |\{u > t\}^*|. \tag{1.12}$$

Por la continuidad por la derecha de $u^\#$ se tiene que $\{u^* > t\}$ son bolas abiertas centradas en el origen, al igual que $\{u > t\}^*$, por definición. Entonces de (1.12) se sigue la afirmación 1, es decir:

$$\{u^* > t\} = \{u > t\}^*. \tag{1.13}$$

Ahora veremos que 1 implica 2.

$$\begin{aligned} u^*(y) &= \sup\{c \in \mathbb{R} \mid u^*(y) > c\} \\ &= \sup\{c \in \mathbb{R} \mid y \in \{u^* > c\}\} \\ &= \sup\{c \in \mathbb{R} \mid y \in \{u > c\}^*\}. \end{aligned}$$

□

Para terminar esta sección, demostraremos una propiedad muy importante de las simetrizaciones de funciones, llamada la "no expansividad."

Proposición 1.20 (No expansividad de los arreglos)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ 1 < p < \infty$ *y* $g : [-\infty, \infty] \to [0, +\infty]$ *definida por* $g(t) := |t|^p$*, entonces para todas funciones* $u, v \in \Sigma_\Omega,\ u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ *se cumple:*

$$\int_\Omega g(u - v) \geq \int_{\Omega^*} g(u^* - v^*). \tag{1.14}$$

Demostración. Empecemos por notar que $u, v \in \Sigma_\Omega$ implica que las integrales están bien definidas, pues $|\{u = \infty\}| = |\{u = -\infty\}| = |\{v = \infty\}| = |\{v = -\infty\}| = 0$.

Para $1 < p < \infty$ se tiene que $g(0) = \dot{g}(0) = 0$, y para cada $s, s' \in \mathbb{R}$ es fácil verificar que:

$$g(s' - s) = \int_s^{s'} \int_t^{s'} \ddot{g}(t' - t) dt' dt. \tag{1.15}$$

Denotaremos a la función indicadora (o función característica) del conjunto A, como "$\mathbb{I}_A$". Entonces de la identidad anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} g(u(x) - v(x)) &= \int_{v(x)}^{u(x)} \int_t^{u(x)} \ddot{g}(t' - t) dt' dt \\ &= \int_{v(x)}^{u(x)} \int_t^{\infty} \ddot{g}(t' - t) \mathbb{I}_{\{u > t'\}}(x) dt' dt \\ &= \int_{v(x)}^{\infty} \int_t^{\infty} \ddot{g}(t' - t) \mathbb{I}_{\{u > t'\}}(x) \mathbb{I}_{\{u > t\}}(x) dt' dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_t^{\infty} \ddot{g}(t' - t) [(1 - \mathbb{I}_{\{v > t\}}(x)) \mathbb{I}_{\{u > t'\}}(x) \mathbb{I}_{\{u > t\}}(x)] dt' dt. \end{aligned}$$

Como $t' > t$ entonces $\{u > t'\} \subset \{u > t\}$, este hecho junto con el Lema 1.14

implican que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(u(x)-v(x))dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_t^{\infty}\ddot{g}(t'-t)\int_\Omega(1-\mathbb{I}_{\{v>t\}}(x))\mathbb{I}_{\{u>t'\}}(x)dxdt'dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_t^{\infty}\ddot{g}(t'-t)|\{u>t'\}\backslash\{v>t\}|dt'dt \\
&\geq \int_{-\infty}^{\infty}\int_t^{\infty}\ddot{g}(t'-t)|\{u>t'\}^*\backslash\{v>t\}^*|dt'dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_t^{\infty}\ddot{g}(t'-t)\int_{\Omega^*}(1-\mathbb{I}_{\{v^*>t\}}(x))\mathbb{I}_{\{u^*>t'\}}(x)dxdt'dt \\
&= \int_{\Omega^*}\int_{-\infty}^{\infty}\int_t^{\infty}\ddot{g}(t'-t)(1-\mathbb{I}_{\{v^*>t\}}(x))\mathbb{I}_{\{u^*>t'\}}(x)\mathbb{I}_{\{u^*>t\}}(x)dt'dtdx \\
&= \int_{\Omega^*}\int_{v^*(x)}^{u^*(x)}\int_t^{u^*(x)}\ddot{g}(t'-t)dt'dtdx \\
&= \int_{\Omega^*} g(u^*(x)-v^*(x))dx.
\end{aligned}$$

□

Este resultado puede probarse para g cualquier función convexa, y una prueba de este hecho puede consultarse en el artículo de J.A. Crowe y J.A. Zweibel [14].

El siguiente Corolario es una consecuencia de la Proposición anterior junto con el Apéndice A, en donde se desarrollan algunos resultados sobre la no expansividad de mapeos que conservan la integral y preservan orden, como es el caso de la Simetrización de Schwarz.

Corolario 1.21. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,$u, v \in \Sigma_\Omega$, $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. *Entonces para cualquier* $1 \leq p \leq \infty$, *se cumple que*

$$||u^* - v^*||_p \leq ||u-v||_p.$$

Demostración. El resultado es claro para $p = \infty$, pues la simetrización coloca las normas $||\cdot||_\infty$ de u y v en 0. El caso $1 < p < \infty$ es dado por la Proposición anterior. Para $p = 1$ se sigue del Lema A.1. $\square$

Las siguientes definiciones serán útiles en los siguientes capítulos.

Definición 1.22. Definimos:

$$\begin{aligned}
L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) &:= \{f \in L^p(K) \mid \forall K \subset \mathbb{R}^N \text{ compacto } \}.\\
L^p_*(\mathbb{R}^N) &:= L^p_+(\mathbb{R}^N) := \{f \in L^p(\mathbb{R}^N) \mid f(x) \geq 0 \text{ en c.t.p. } x \in \mathbb{R}^N\}.\\
C_+(\mathbb{R}^N) &:= \{f \in C(\mathbb{R}^N) \mid f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}^N\}.\\
C_*(\mathbb{R}^N) &:= \{f \in C(\mathbb{R}^N) \mid f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}.\\
C^\infty_c(\mathbb{R}^N) &:= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto}\}.\\
K_*(\mathbb{R}^N) &:= \{f \in C(\mathbb{R}^N) \mid f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto}\}.
\end{aligned}$$

También será necesario tener presente la definición de los espacios de Sobolev, que involucran el concepto de derivada débil. Esto se puede revisar con más detalle en [16] o en [19].

$$\begin{aligned}
W^{1,p}(\Omega) &:= \{f \in L^p(\Omega) \mid \nabla f \in L^p(\Omega)\}.\\
W^{1,p}_{loc}(\Omega) &:= \{f \in W^{1,p}(K) \mid \forall K \subset \Omega \text{ compacto } \}.\\
W^{1,p}_0(\Omega) &:= \overline{W^{1,p}(\Omega) \bigcap C^\infty_c(\Omega)} \text{ (con respecto a la norma de } W^{1,p}).\\
W^{1,p}_{0,+}(\Omega) &:= \{f \in W^{1,p}_0(\Omega) \mid f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in \Omega\}.
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Aproximación de Simetrizaciones

En este capítulo introduciremos el concepto de polarización, el cual es un tipo de arreglo muy simple de funciones, y se demostrará que se puede aproximar la Simetrización de Schwarz con una sucesión de polarizadores. También se demuestra que el mapeo que relaciona la función con su polarización es continuo en los espacios de Sobolev.

A lo largo de este capítulo, Ω denotará un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$.

2.1 Polarizaciones

Definición 2.1. Un conjunto $H \subset \mathbb{R}^N$ es un **polarizador** si es un semiespacio cerrado afin de $\mathbb{R}^N$, i.e. H es el conjunto de todos los puntos que cumplen que $a \cdot x \leq b$ para algún $a \in \mathbb{S}^{N-1}, b \in \mathbb{R}$. Además, denotaremos por $\mathcal{H}$ el conjunto de todos los polarizadores de esta forma.

Notación 2.2. Para cualquier $x \in \mathbb{R}^N$ y cualquier polarizador $H \in \mathcal{H}$, x^H denota la reflexión de x con respecto a ∂H. Con la notación de la Definición 2.1 tenemos que $x^H = x - 2(a \cdot x - b)a$.

Definición 2.3. Sea $H \in \mathcal{H}$. Definimos la **polarización de un conjunto** A como el conjunto

$$A^H := \{x^H \mid x \in A\}.$$

Definición 2.4. La **polarización** de una función $u\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por el polarizador $H \in \mathcal{H}$ es la función $u^H\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definida como:

$$u^H(x) = \begin{cases} \text{máx}\{u(x), u(x^H)\}, & \text{si } x \in H; \\ \text{mín}\{u(x), u(x^H)\}, & \text{si } x \notin H. \end{cases} \tag{2.1}$$

Nota 2.5. Se puede definir una métrica sobre el conjunto de polarizadores de modo que $\mathcal{H}$ sea homeomorfo a la esfera de dimensión N, $S^N := \{x \in \mathbb{R}^{N+1} : ||x|| = 1\}$ sin los polos. Primero definamos la biyección $\psi : S^{N-1} \times \mathbb{R} \to S^N \backslash \{\text{PN}, \text{PS}\}$, usando la notación de la definición 2.1, de la siguiente manera:

$$\psi(a, b) = ((\cos(\arctan b))a, \text{sen}(\arctan b))$$

donde PN y PS denotan los polos norte y sur respectivamente en S^N. Entonces para cada par $(a, b) \in S^{N-1} \times \mathbb{R}$, la primera coordenada de Psi nos da un punto en $\overline{B_1(0, \mathbb{R}^N)}$, y la segunda coordenada un real en $(-1, 1)$, de modo que $\psi(a, b)$ localiza un punto en la esfera S^N para cada a y b.

Una vez más apoyándonos en la Definición 2.1 definimos la biyección $\Psi : \mathcal{H} \to S^N \backslash \{\text{PN}, \text{PS}\}$, por

$$\Psi(H) = \psi(a, b)$$

Esta biyección induce la siguiente métrica sobre $\mathcal{H}$:

$$d(H_1, H_2) = |\Psi(H_1) - \Psi(H_2)|$$

de tal manera que $\mathcal{H}$ y $S^N \backslash \{\mathrm{PN}, \mathrm{PS}\}$, son homeomorfos por medio de Ψ.

Definición 2.6. Definimos el **conjunto de polarizadores extendidos** $\overline{\mathcal{H}}$ como el conjunto de polarizadores $\mathcal{H}$ unión "dos polarizadores al infinito", definidos por $u^{H_{+\infty}} := u_+ := \text{máx}\{u, 0\}$ y $u^{H_{-\infty}} := -u_- := \text{mín}\{u, 0\}$.

Nota 2.7. La métrica definida en la Nota 2.5 se puede generalizar al conjunto $\overline{\mathcal{H}}$. Con la misma notación, definimos la biyección $\Psi : \overline{\mathcal{H}} \to S^N$ por

$$\Psi(H) = \begin{cases} \psi(a, b) & \text{si } H \notin \{H_{+\infty}, H_{-\infty}\} \\ \mathrm{PN} & \text{si } H = H_{+\infty} \\ \mathrm{PS} & \text{si } H = H_{-\infty}. \end{cases}$$

Análogamente, esta biyección induce la siguiente métrica sobre $\overline{\mathcal{H}}$:

$$d(H_1, H_2) = |\Psi(H_1) - \Psi(H_2)|$$

de tal manera que $\overline{\mathcal{H}}$ y S^N son homeomorfos por medio de Ψ.

Definición 2.8. Si $H \in \overline{\mathcal{H}}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, la polarización de $u\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ con respecto a H se define como $u^H = \tilde{u}^H|_\Omega$, donde $\tilde{u}$ es la extensión de u a $\mathbb{R}^N$ tomando el valor 0 fuera de Ω.

Definición 2.9. Se define el conjunto $\mathcal{H}_*$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_* := \{H \in \mathcal{H} \mid 0 \in H\} \bigcup \{H_{+\infty}\}.$$

Nota 2.10. Dado que las polarizaciones de conjuntos son simplemente reflexiones, se tiene que satisfacen las siguientes propiedades: sean $H \in \mathcal{H}$, $A, B \subset \mathbb{R}^N$ medibles y $|\cdot|$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$, entonces

$$\begin{aligned} A \subseteq B \quad &\Rightarrow \quad A^H \subseteq B^H, \\ |B^H \backslash A^H| \quad &= \quad |B \backslash A|. \end{aligned}$$

A la primera propiedad se le llama **monotonía**.

A continuación se demuestra, al igual que con la Simetrización de Schwarz en el capítulo anterior, la no expansividad de las polarizaciones. Para ello se utilizarán dos resultados de Crandall y Tartar [13], y uno de Brezis y Strauss [7], que se pueden encontrar junto con su demostración en el Apéndice A, y son los Lemas A.1,.A.2 y A.3. La prueba toma ventaja de dos propiedades muy importantes de las polarizaciones: que preservan la integral, es decir

$$\int_\Omega u^H(x)dx = \int_\Omega u(x)dx \quad \text{cuando} \quad \Omega = \Omega^H \tag{2.2}$$

y que preservan el orden, es decir

$$\forall u, v \text{ medibles tales que } u \leq v \text{ c.t.p.} \implies u^H \leq v^H \text{ c.t.p.} \tag{2.3}$$

Ambas son fáciles de demostrar a partir de la definición de polarización de una función (Definición 2.4). Para la prueba de la no expansividad, haremos uso de la continuidad de las polarizaciones en L^p, hecho que se demuestra a continuación.

Proposición 2.11. *Sea $H \in \mathcal{H}$ y $\Omega = \Omega^H$. La función polarización de $L^p(\Omega)$ a $L^p(\Omega) : u \mapsto u^H$ es continua con $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración. Sean $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ y $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ tales que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$. Entonces de la demostración de que los espacios L^p son completos (ver por ejemplo [25] Teorema 3.1.1 página 67) se puede obtener una función $U \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n|, |u| \leq U$. Sea $\tilde{u}$ la extensión de u a todo $\mathbb{R}^N$ por cero y sea $H\tilde{U} := \tilde{U}(x^H)$, entonces $|\tilde{u}_n|, |\tilde{u}| \leq \tilde{U} \leq \tilde{U} + H\tilde{U} =: V \in L^p(\Omega)$. Entonces $|\tilde{u}_n^H|, |\tilde{u}^H| \leq V$ y por lo tanto $|u_n^H|, |u^H| \leq V\ |_\Omega \in L^p(\Omega)$. Luego

$$|u_n^H - u^H|^p \leq (|u_n^H| + |u^H|)^p \leq 2^p V^p \in L^1(\Omega).$$

Y por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue se sigue que $\int_\Omega |u_n^H - u^H|^p dx \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Para $p = \infty$ el resultado se sigue de la definición de u^H, pues $||u^H||_\infty = ||u||_\infty$. □

Proposición 2.12. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$, $u, v \in L^p(\Omega)$, $H \in \mathcal{H}$. *Entonces se cumple que*

$$||u^H - v^H||_p \leq ||u - v||_p.$$

Demostración. Demostraremos el resultado primero para funciones en $C_c^\infty(\Omega)$. Por las propiedades (2.2) y (2.3) se satisfacen las hipótesis del Lema A.1 con $C = L^1(\Omega)$, lo cual garantiza la no expansividad de las polarizaciones para $p = 1$. Además, es fácil verificar que

$$\text{si } r \in \mathbb{R}^+, u \in L^\infty(\Omega) \text{ entonces } (u + r)^H = u^H + r,$$

a partir de la Definición 2.4, por lo tanto también se satisfacen las hipótesis del Lema A.2 con $C = L^\infty(\Omega)$, lo cual garantiza la no expansividad de las polarizaciones para $p = \infty$. Entonces se satisfacen las hipótesis del Lema

A.3, con $j(\cdot) = |\cdot|^p$, donde $1 \leq p \leq \infty$, lo cual nos dice que para toda $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$, y $1 \leq p \leq \infty$ se tiene que

$$||u^H - v^H||_p \leq ||u - v||_p. \tag{2.4}$$

Ahora, sean $u, v \in L^p(\Omega)$ entonces como $C_c^\infty(\Omega)$ es un conjunto denso en $L^p(\Omega)$ se tiene que existen sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ en } L^p(\Omega) \text{ cuando } n \rightarrow \infty \text{ y} \\ v_n &\rightarrow v \text{ en } L^p(\Omega) \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Y entonces se sigue por la Proposición 2.11 y por (2.4) y (2.5) que

$$||u^H - v^H||_p \leftarrow ||u_n^H - v_n^H||_p \leq ||u_n - v_n||_p \rightarrow ||u - v||_p.$$

□

Para terminar la sección, demostraremos unas propiedades básicas de las polarizaciones en los espacios de Sobolev.

Proposición 2.13. *Sea* $u \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, $H \in \mathcal{H}$ *y definimos* $v(x) := u(x^H)$. *Entonces* $u^H \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ *y se cumple que*

$$\nabla u^H(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & si\ x \in \{x \in \Omega \mid u(x) \geq v(x)\} \bigcap H, \\ \nabla v(x), & si\ x \in \{x \in \Omega \mid u(x) < v(x)\} \bigcap H, \\ \nabla u(x), & si\ x \in \{x \in \Omega \mid u(x) \leq v(x)\} \bigcap H^c, \\ \nabla v(x), & si\ x \in \{x \in \Omega \mid u(x) > v(x)\} \bigcap H^c. \end{cases}$$

Además para $1 \leq p \leq \infty$, *si* $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *entonces* $\nabla u^H \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *y* $||\nabla u||_p = ||\nabla u^H||_p$.

Demostración. Sea $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Demostraremos que $u^H \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Definamos para $\varepsilon > 0$ la función $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$f_\varepsilon(t) := \begin{cases} (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Entonces las siguientes propiedades se deducen fácilmente:

- $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$,
- $f_\varepsilon(0) = 0$,
- $|f_\varepsilon(t)| \leq |t| \ \forall t \in \mathbb{R}$,
- $|f'_\varepsilon(t)| \leq 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$,
- $f_\varepsilon(t) \to \max\{t, 0\}$ cuando $\varepsilon \to 0$.
- Para $t > 0$ se tiene que $f'_\varepsilon(t) \to 1$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Entonces gracias a la Notación 2.2 no es difícil comprobar que para $i \in \{1, 2, ..., N\}$,

$$\partial_i v(x) = \partial_i u(x^H)^{H_0} \tag{2.6}$$

donde H_0, usando la Definición 2.1, es un polarizador que tiene como parámetros el mismo a del polarizador H y $b = 0$. Por lo tanto se tiene que $v \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Definamos también los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \Omega \mid u(x) \geq v(x)\} \bigcap H, \\ B &:= \{x \in \Omega \mid u(x) < v(x)\} \bigcap H, \\ C &:= \{x \in \Omega \mid u(x) \leq v(x)\} \bigcap H^c, \\ D &:= \{x \in \Omega \mid u(x) > v(x)\} \bigcap H^c. \end{aligned}$$

Entonces $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D = \Omega$, además son ajenos y se cumple que

$$B^H = D \text{ y } B = D^H. \tag{2.7}$$

Recordemos que si $x \in H$ entonces

$$\begin{aligned} u^H(x) &= \max\{u(x), u(x^H)\} = u(x) + (u(x^H) - u(x))_+, \\ u^H(x^H) &= \min\{u(x), u(x^H)\} = u(x) - (u(x) - u(x^H))_+, \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $u_+ := \max\{u, 0\}$. Por lo tanto, en vista de las propiedades límite de f_ε resulta natural hacer la siguiente construcción: Sea $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega_\varepsilon(x) := \begin{cases} u(x) + f_\varepsilon(v(x) - u(x)), & \text{si } x \in H, \\ u(x) - f_\varepsilon(u(x) - v(x)), & \text{si } x \in H^c. \end{cases}$$

Entonces $\omega_\varepsilon \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Los detalles de la demostración de este hecho pueden revisarse en el Apéndice B Lema B.1.

Demostraremos primero que $\omega_\varepsilon \to u^H$ cuando $\varepsilon \to 0$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Notemos que

$$|\omega_\varepsilon(x) - u^H(x)| \leq |u(x)| + |v(x) - u(x)| + |u^H(x)|. \tag{2.9}$$

Gracias a que las polarizaciones son no expansivas (Proposición 2.12) se tiene que

$$|u| + |v - u| + |u^H| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Entonces, sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, entonces $|u| + |v - u| + |u^H| \in L^1_{loc}(\mathbb{K})$, y por (2.9) se satisfacen las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, y en vista de que $f_\varepsilon(t) \to (t)_+$ cuando $\varepsilon \to 0$ y de (2.8) se tiene que

$$\int_K |\omega_\varepsilon(x) - u^H(x)| dx \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0 \ \forall K \subset \mathbb{R}^N \text{ compacto.} \tag{2.10}$$

A continuación veremos que $\nabla\omega_\varepsilon \to U$ cuando $\varepsilon \to 0$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ donde $U : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ se define como

$$U(x) := \begin{cases} \nabla u(x), & \text{si } x \in A, \\ \nabla v(x), & \text{si } x \in B, \\ \nabla u(x), & \text{si } x \in C, \\ \nabla v(x), & \text{si } x \in D. \end{cases}$$

Por el Lema B.1 se tiene que para toda $i \in \{1, 2, ..., N\}$

$$\partial_i\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \partial_i u(x), & \text{si } x \in A, \\ \partial_i u(x) + f'_\varepsilon(v(x) - u(x))(\partial_i v(x) - \partial_i u(x)), & \text{si } x \in B, \\ \partial_i u(x), & \text{si } x \in C, \\ \partial_i u(x) - f'_\varepsilon(u(x) - v(x))(\partial_i u(x) - \partial_i v(x)), & \text{si } x \in D. \end{cases}$$

Además

$$|\partial_i\omega_\varepsilon - U^i| \leq |\partial_i v| + |\partial_i u - \partial_i v| + |\partial_i u| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

donde U^i denota la $i-$ésima coordenada de U. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, entonces $|\partial_i v| + |\partial_i u - \partial_i v| + |\partial_i u| \in L^1(\mathbb{K})$, y por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue y el hecho de que $f'_\varepsilon(t) \to 1$ para $t > 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ se sigue que

$$\int_K |\partial_i\omega_\varepsilon(x) - U^i(x)|dx \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0 \ \forall K \subset \mathbb{R}^N \text{ compacto.} \tag{2.11}$$

Ahora, sea $i \in \{1, 2, ..., N\}$ y $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x)\partial_i\varphi(x)dx &= -\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i\omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx, \\ \int_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x)\partial_i\varphi(x)dx &\to \int_{\mathbb{R}^N} u^H(x)\partial_i\varphi(x)dx, \\ -\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i\omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx &\to -\int_{\mathbb{R}^N} U^i(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^H(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^N} U^i(x)\varphi(x)dx,$$

es decir, $u^H \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $\nabla u^H = U$. Finalmente, de (2.7), (2.6), del hecho de que

$$\int_K |\partial_i u(x^H)^{H_0}|^p dx = \int_K |\partial_i u(x^H)|^p dx, \quad \forall K \subset \mathbb{R}^N \text{ compacto}$$

y la forma de ∇u^H se sigue fácilmente que $||\nabla u^H||_p = ||\nabla u||_p$ para $1 \leq p < \infty$. Para el caso $p = \infty$ se usa el hecho de que la polarización no altera el máximo de una función. $\square$

Corolario 2.14. *Sea $u \in W^{1,p}_+(\mathbb{R}^N)(1 \leq p \leq \infty)$, y sea $H \in \mathcal{H}$. Entonces $u^H \in W^{1,p}_+(\mathbb{R}^N)$ y se cumple que $||\nabla u^H||_p = ||\nabla u||_p$.*

Demostración. Sea $1 \leq p \leq \infty$, entonces como $u \in W^{1,p}_+(\mathbb{R}^N)$, por la desigualdad de Hölder se tiene que $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Entonces por la Proposición anterior $u^H \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, y $||\nabla u^H||_p = ||\nabla u||_p$ que junto con la no expansividad de las polarizaciones (Proposición 2.12) implican que $u^H \in W^{1,p}_+(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Corolario 2.15. *Sean $H \in \mathcal{H}$, $\Omega = \Omega^H \subset \mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ de clase C^1, $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Si $u \in W^{1,p}_{0+}(\Omega)$ entonces $u^H \in W^{1,p}_{0,+}(\Omega)$, y $||\nabla u^H||_p = ||\nabla u||_p$.*

Demostración. Como $u \in W^{1,p}_{0+}(\Omega)$ entonces se puede extender u por cero fuera de Ω, es decir $u \in W^{1,p}_{0,+}(\mathbb{R}^N)$, luego por el corolario anterior se tiene $u^H \in W^{1,p}_{0,+}(\mathbb{R}^N)$ y se cumple que $||\nabla u^H||_p = ||\nabla u||_p$. Por lo tanto como $\Omega = \Omega^H$ y es suave se tiene que $u^H \in W^{1,p}_{0,+}(\Omega)$. $\square$

2.2 Aproximación de simetrizaciones por polarizaciones

Ahora el objetivo es aproximar las simetrizaciones del capítulo anterior por polarizaciones. Esto es un paso necesario, pues bajo ciertas condiciones la función simetrizadora de funciones * (ya sea de Schwarz o Steiner) puede ser no continua, sin embargo esta dificultad puede solucionarse mediante las polarizaciones. Para ello, necesitamos definir primero el concepto de módulo de continuidad.

Definición 2.16. Sea X un espacio métrico y $u : X \to \mathbb{R}$, entonces definimos el **módulo de continuidad de u** como

$$\omega_u(\delta) = \sup\{|u(x) - u(y)| \mid x, y \in X,\ d(x, y) \leq \delta\}$$

Proposición 2.17. *Sea* $H \in \mathcal{H}$, $A \subset \mathbb{R}^N$ *tal que* $A = A^H$ *y* $u : A \to \mathbb{R}^N$ *una función continua. Entonces* $\omega_{u^H} \leq \omega_u$.

Demostración. Sea $\delta > 0$. Fijamos $x, y \in A$ tales que $|x - y| \leq \delta$, entonces por definición $|x^H - y^H| \leq \delta$. La prueba se sigue por casos:

1. $x, y \in H$

   (a) $u(x) \leq u(x^H)$:

      i. $u(y) \leq u(y^H)$:

$$\begin{aligned} |u^H(x) - u^H(y)| &= |u(x^H) - u(y^H)| \\ &\leq \omega_u(\delta). \end{aligned}$$

      ii. $u(y) \geq u(y^H)$:

A. $u(y) \leq u(x^H)$:

$$\begin{aligned} |u^H(x) - u^H(y)| &= |u(x^H) - u(y)| \\ &= u(x^H) - u(y) \\ &\leq u(x^H) - u(y^H) \\ &\leq \omega_u(\delta) \end{aligned}$$

B. $u(y) \geq u(x^H)$:

$$\begin{aligned} |u^H(x) - u^H(y)| &= |u(x^H) - u(y)| \\ &= u(y) - u(x^H) \\ &\leq u(y) - u(x) \\ &\leq \omega_u(\delta). \end{aligned}$$

(b) $u(x) \geq u(x^H)$: Análogamente.

2. $x, y \in A \backslash H$: Análogamente.

3. $x \in A \backslash H,\ y \in H$: Análogamente.

Los casos restantes se siguen utilizando la mismas propiedades de la definición y del valor absoluto. □

Nota 2.18. En uno de los artículos en el que se basó este trabajo de Tesis [27] su autor Van Schaftingen enuncia y "demuestra" (ver [27]) un teorema en el que afirma la existencia de una sucesión de polarizadores que aproxima cualquier función en $L^p_*(\mathbb{R}^N)$. Sin embargo la construcción de dicha sucesión no es justificada. De modo que a lo largo de esta tesis será necesario asumir la existencia de esta sucesión como hipótesis.

Hipótesis 2.19. Existe una sucesión $(H_m) \subset \mathcal{H}_*$ tal que

$$u^{H_1 H_2 \dots H_m} \to u^* \quad \text{cuando } m \to \infty,$$

en $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [1, \infty]$ y $u \in K_*(\mathbb{R}^N)$.

Ahora, asumiendo la existencia de esta sucesión, se demuestran los resultados que enuncia en su artículo.

Teorema 2.20. *Asumiendo la Hipótesis 2.19,* $1 \leq p < +\infty$, *y* $u \in L^p_*(\mathbb{R}^N)$, *la sucesión* $u_m := u^{H_1 \dots H_m}$ *converge a* u^* *en* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Se sabe que existe un conjunto contable $N \subset K_*(\mathbb{R}^N)$ denso en $L^p_*(\mathbb{R}^N)$ y en $C_*(\mathbb{R}^N)$ (ver el libro de Willem [32]). Entonces la sucesión dada por la Hipótesis 2.19 aproxima la simetrización para todo $u \in N$. Sea $u \in L^p_*(\mathbb{R}^N)$ y $\varepsilon > 0$, y definamos $u_m := u^{H_1 \dots H_m}$. Por densidad, existe $v \in N$ tal que $||u - v||_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Y por la no expansividad de los arreglos se tiene que $||v_m - v^*||_p \leq \varepsilon/3$, para m suficientemente grande. Por lo tanto usando la no expansividad de la Simetrización de Schwarz y de las polarizaciones se sigue que

$$\begin{aligned}
||u_m - u^*||_p &\leq ||u_m - v_m||_p + ||v_m - v^*||_p + ||v^* - u^*||_p \\
&\leq 2||u - v||_p + ||v_m - v^*||_p \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Nota 2.21. Es importante mencionar que es posible encontrar sucesiones densas en el conjunto de polarizadores que no cumplen la Hipótesis 2.19.

El problema es interesante y esperamos encontrar una prueba explícita en trabajos futuros. Algunos avances se han hecho en esta dirección, y agregamos estos resultados en el Apéndice C.

2.3 Continuidad en Espacios de Sobolev

Ahora demostraremos que el mapeo que manda una función u a u^H es continuo. Este es un resultado importante que será la base de la continuidad de dicho mapeo en los espacios de Sobolev.

Lema 2.22. *Sea $1 \leq p < \infty$ y el mapeo $\mathfrak{h}\colon \mathcal{H} \times L^p(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ definido por $\mathfrak{h}(H,u) := u^H$. Entonces $\mathfrak{h}$ es continuo en $\mathcal{H} \times L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sean $1 \leq p < \infty$, $(H,u) \in \mathcal{H} \times L^p(\mathbb{R}^N)$, y una sucesión $\{(H_n,u_n)\} \subset \mathcal{H} \times L^p(\mathbb{R}^N)$, tal que con la métrica definida en la Nota 2.7

$$\begin{aligned} ||u - u_n||_p &\to 0 \text{ cuando } n \to \infty \\ d_{\mathcal{H}}(H,H_n) &\to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Además es claro que para todo $x \in \mathbb{R}^N$

$$H_n \to H \text{ en } \mathcal{H} \implies x^{H_n} \to x^H \text{ localmente unif. en } \mathbb{R}^N, \text{ cuando } n \to \infty. \tag{2.12}$$

Como $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existen $v, v_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que $||u - v||_p < \varepsilon$ y $||u_n - v_n||_p < \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además por (2.12) y la definición de polarización de una función se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} ||v^H - v^{H_n}||_\infty = ||v^H - \lim_{n\to\infty} v^{H_n}||_\infty = 0$$

y como el soporte de v es compacto se sigue la convergencia en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$

$$||v^H - v^{H_n}||_p < \varepsilon,$$

y por la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned}
||v - v_n||_p &\leq ||v - u||_p + ||u - u_n||_p + ||u_n - v_n||_p < 3\varepsilon, \\
||u_n - v||_p &\leq ||u_n - u||_p + ||u - v||_p < 2\varepsilon, \\
||v^{H_n} - u_n^{H_n}||_p &\leq ||v^{H_n} - v_n^{H_n}||_p + ||v_n^{H_n} - u_n^{H_n}||_p, \\
||u_n^H - u_n^{H_n}||_p &\leq ||u_n^H - v^H||_p + ||v^H - v^{H_n}||_p + ||v^{H_n} - u_n^{H_n}||_p, \\
||u^H - u_n^{H_n}||_p &\leq ||u^H - u_n^H||_p + ||u_n^H - u_n^{H_n}||_p.
\end{aligned}$$

uego por la no expansividad de las polarizaciones

$$\begin{aligned}
||v^{H_n} - u_n^{H_n}||_p &\leq ||v - v_n||_p + ||v_n - u_n||_p < 4\varepsilon, \\
||u_n^H - u_n^{H_n}||_p &< 2\varepsilon + ||v^H - v^{H_n}||_p + 2\varepsilon < 5\varepsilon, \\
||u^H - u_n^{H_n}||_p &\leq ||u - u_n||_p + ||u_n^H - u_n^{H_n}||_p < 6\varepsilon,
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que el mapeo $\mathfrak{h}$ es continuo en el sentido de $L^p(\mathbb{R}^N)$. □

Definición 2.23. Se dice que un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es **invariante** con respecto a la Simetrización de Schwarz * si $\Omega^* = \Omega$.

Nota 2.24. En el caso de la Simetrización de Schwarz, la invarianza nos dice que si Ω es acotado no vacío entonces es una bola abierta centrada en el origen, si no es acotado, entonces es todo $\mathbb{R}^N$. Para otras simetrizaciones la definición de invarianza es la misma, y la formulación de los resultados que sigue es análoga.

Proposición 2.25. *Sea* $1 \leq p < \infty$ *y* Ω *un conjunto abierto e invariante respecto a* **, entonces el mapeo* $\mathfrak{h} : \mathcal{H}_* \times L^p_*(\Omega) \rightarrow L^p_*(\Omega)$ *es continuo en* $\mathcal{H}_* \times L^p_*(\Omega)$*.*

Demostración. Sea $1 \leq p < \infty$, como $u \in L^p_*(\Omega)$ se tiene que $u \geq 0$, por lo tanto y por la no expanisvidad de las polarizaciones para cualquier $H \in \mathcal{H}_*$ se tiene que $u^H \in L^p_*$. Es decir, el mapeo $\mathfrak{h} : \mathcal{H}_* \times L^p_*(\Omega) \rightarrow L^p_*(\Omega)$ está bien definido. La continuidad se sigue del Lema anterior, pues $\mathfrak{h}$ es una restricción de una función continua al espacio $\mathcal{H}_* \times L^p_*(\Omega)$. $\square$

Para probar la continuidad en los espacios de Sobolev nos valdremos de un concepto muy importante en la geometría de algunos espacios de Banach, llamado "convexidad uniforme".

Definición 2.26. Se dice que un espacio de Banach $(E, ||\cdot||)$ es **uniformemente convexo** si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo x, y en E se cumple que

$$||x|| = ||y|| = 1, ||x - y|| \geq \varepsilon \implies ||\frac{x+y}{2}|| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Nota 2.27. La convexidad uniforme implica un concepto más débil llamado *convexidad estricta*, el cual geométricamente quiere decir que ningún segmento de linea está contenido en la esfera unitaria. De la definición es fácil ver esto, pues se toman dos puntos distintos en la esfera, y se demuestra que el punto intermedio no está contenido en ella. Es interesante notar que la convexidad uniforme, y por ende la convexidad estricta, son propiedades métricas, es decir, que si uno cambia la métrica por una equivalente, la propiedad puede no conservarse. En nuestro caso trabajaremos con una norma en particular, de los espacios de Sobolev $W^{1,p}$:

$$||u||_{W^{1,p}} := \left(||u||_p^p + \sum_{i=1}^{n} ||\partial_i u||_p^p \right)^{1/p} \text{ si } p < \infty.$$

Lema 2.28. *El espacio $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es uniformemente convexo si $1 < p < \infty$.*

Demostración. Sea $1 < p < \infty, q := p/(p-1)$ y $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Para demostrar el lema usaremos las siguientes desigualdades

$$||u+v||_p^p + ||u-v||_p^p \leq 2^{p-1}(||u||_p^p + ||v||_p^p) \text{ si } p \geq 2, \tag{2.13}$$

$$||u+v||_p^q + ||u-v||_p^q \leq 2(||u||_p^p + ||v||_p^p)^{q-1} \text{ si } p < 2, \tag{2.14}$$

ambas fueron probadas por Clarkson en [12].

Sean $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tales que $||u||_{W^{1,p}} = ||v||_{W^{1,p}} = 1$. Veamos primero el caso $p \geq 2$. Entonces por (2.13)

$$\begin{aligned}
& ||u+v||_{W^{1,p}}^p + ||u-v||_{W^{1,p}}^p \\
= \; & ||u+v||_p^p + \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u + \partial_i v||_p^p + ||u-v||_p^p + \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u - \partial_i v||_p^p \\
\leq \; & 2^{p-1}(||u||_p^p + ||v||_p^p) + \sum_{i=1}^{N} (2^{p-1} ||\partial_i u||_p^p + ||\partial_i v||_p^p) \\
= \; & 2^{p-1}(||u||_{W^{1,p}}^p + ||v||_{W^{1,p}}^p) = 2^p.
\end{aligned}$$

Sea $0 < \varepsilon \leq 2$, y $||u-v||_{W^{1,p}}^p \geq \varepsilon$, entonces por lo anterior

$$||u+v||_{W^{1,p}}^p \leq 2^p - ||u-v||_{W^{1,p}}^p \leq 2^p \Big(1 - \Big(\frac{\varepsilon}{2} \Big)^p \Big),$$

y por lo tanto

$$\Big|\Big| \frac{u+v}{2} \Big|\Big|_{W^{1,p}} \leq 1 - \delta(\varepsilon),$$

con $\delta(\varepsilon) := 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{(1/p)}$. Es fácil comprobar que $\delta(\varepsilon) > 0$ bajo las hipótesis de este caso. Por lo tanto $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es uniformemente convexo si $p \geq 2$.

Para el caso $p < 2$ usaremos la desigualdad (2.14) y el hecho de que

$$f(t) := (1+t)^r \geq (1+t^r) =: g(t) \text{ para } r > 1 \text{ y } t \geq 0. \tag{2.15}$$

Esto se demuestra fácilmente notando que $f(0) = g(0)$ y $f'(t) \geq g'(t)$.

Entonces en vista de que $q/p > 1$ y $q - 1 > 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
& ||u+v||_{W^{1,p}}^q + ||u-v||_{W^{1,p}}^q \\
= \; & (||u+v||_p^p + \sum_{i=1}^N ||\partial_i u + \partial_i v||_p^p)^{q/p} + (||u-v||_p^p + \sum_{i=1}^N ||\partial_i u - \partial_i v||_p^p)^{q/p} \\
\leq \; & ((||u+v||_p^q + \sum_{i=1}^N ||\partial_i u + \partial_i v||_p^q)^{p/q})^{q/p} + ((||u-v||_p^q + \sum_{i=1}^N ||\partial_i u - \partial_i v||_p^q)^{p/q})^{q/p} \\
\leq \; & 2(||u||_p^p + ||v||_p^p)^{q-1} + \sum_{i=1}^N 2(||\partial_i u||_p^p + ||\partial_i v||_p^p)^{q-1} \\
\leq \; & 2(||u||_p^p + ||v||_p^p + \sum_{i=1}^N ||\partial_i u||_p^p + ||\partial_i v||_p^p)^{q-1} \\
= \; & 2(||u||_{W^{1,p}}^p + ||v||_{W^{1,p}}^p)^{q-1} \leq 2^q.
\end{aligned}$$

Y análogamente al caso anterior, esto implica que

$$\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|_{W^{1,p}} \leq 1 - \delta(\varepsilon),$$

con $\delta(\varepsilon) := 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{(1/q)}$. Por lo tanto $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es uniformemente convexo para $1 < p < \infty$. □

La importancia de la convexidad uniforme en espacios de Banach radica en la relación que se puede establecer entre el espacio y su dual topológico.

Esta relación se formaliza a través del concepto de reflexividad y de convergencia débil.

Definición 2.29. Sea E un espacio de Banach, y E' su dual topológico.

$$E' := \{L : E \to \mathbb{R} \mid L \text{ es lineal y continua}\}.$$

Decimos que E es **reflexivo** si el mapeo

$$\varphi : E \to E'' \text{ definido por } \varphi(x)(f) := f(x) \quad \forall f \in E'$$

es sobreyectivo.

Definición 2.30. Sea E un espacio de Banach, $u \in E$ y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión. Se dice que $\{u_n\}$ **converge débilmente** a u (que se denota con el símbolo $u_n \rightharpoonup u$) si $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ en $\mathbb{R}$ para todo $\varphi \in E'$.

A continuación se enunciarán tres resultados que relacionan estos conceptos, y se dan las referencias para consultar su demostración.

Proposición 2.31. *Sean E un espacio de Banach uniformemente convexo, $u \in E$ y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión tal que $u_n \rightharpoonup u$ y $||u_n||_E \to ||u||_E$ en $\mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$. Entonces la sucesión $\{u_n\}$ converge a u respecto a la norma de E.*

La demostración de esta Proposición puede verse en el libro de Beauzamy [6] (Proposición 7, Capítulo 2, Parte 3, página 198).

Proposición 2.32. *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

La demostración de esta Proposición puede revisarse en el libro de Beauzamy [6] (Proposición 6, Capítulo 2, Parte 3, página 196).

Proposición 2.33. *En un espacio de Banach reflexivo, toda sucesión acotada tiene una subsucesión débilmente convergente.*

La demostración de esta Proposición también se encuentra libro de Beauzamy [6] (Corolario 2, Capítulo 3, Parte 1, página 61).

En nuestro caso, se obtiene el siguiente lema:

Lema 2.34. *Sea* $1 < p < \infty, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Entonces* $u_n \to u$ *en* $W^{1,p}(\Omega)$ *si y sólo si* $u_n \to u$ *en* $L^p(\Omega)$ *y* $||\nabla u_n||_p \to ||\nabla u||_p$ *en* $\mathbb{R}$.

Demostración. De la definición de $||\cdot||_{W^{1,p}}$ es claro que si $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ entonces $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $||\nabla u_n||_p \to ||\nabla u||_p$ en $\mathbb{R}$.

Supongamos ahora que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $||\nabla u_n||_p \to ||\nabla u||_p$ en $\mathbb{R}$, entonces $\{u_n\}$ es acotada en $W^{1,p}(\Omega)$, y por el Lema 2.28 y las Proposiciones 2.32 y 2.33 se tiene que existe una subsucesión débilmente convergente, que denotaremos de nueva cuenta por $\{u_n\}$, es decir $u_n \rightharpoonup u$. Es claro que bajo estas hipótesis $||u_n||_{W^{1,p}} \to ||u||_{W^{1,p}}$ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto por la Proposición 2.31 se tiene que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. Hemos demostrado que para cualquier subsucesión de (u_n) existe una subsucesión que converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$, por lo tanto se tiene que la sucesión original converge. $\square$

Proposición 2.35. *Sea* Ω *un abierto invariante respecto a* $*$ *y* $1 < p < \infty$, *entonces el mapeo* $\mathfrak{h} : H_* \times W^{1,p}_{0,+}(\Omega) \to W^{1,p}_{0,+}(\Omega)$ *es continuo.*

Demostración. Sean $1 < p < \infty, (H, u) \in H_* \times W^{1,p}_{0,+}(\Omega)$, y $\{(H_n, u_n)\} \subset$

$H_* \times W^{1,p}_{0,+}(\Omega)$, una sucesión tal que

$$\begin{aligned} ||u - u_n||_{W^{1,p}} &\to 0 \text{ cuando } n \to \infty, \\ d_{\mathcal{H}}(H, H_n) &\to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Entonces por el Lema 2.34 se tiene que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $||\nabla u_n|| \to ||\nabla u||_p$ en $\mathbb{R}$. Y por la Proposición 2.25 se tiene que $u_n^{H_n} \to u^H$ en $L^p(\Omega)$, cuando $n \to \infty$. Y como $||\nabla u_n^{H_n}||_p = ||\nabla u_n||_p \to ||\nabla u||_p = ||\nabla u^H||_p$, se sigue nuevamente por el Lema 2.34 que $u_n^{H_n} \to u^H$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

2.4 Generalización a Espacios de Banach

En esta sección se hará una abstracción de las propiedades más importantes de los elementos de esta aproximación de simetrizaciones, y se presentará en un marco axiomático para cualquiesquiera espacios de Banach.

Hipótesis 2.36. Sean X, V espacios de Banach, $S \subset X$ y una función $* : S \to V$ definida por $u \mapsto u^*$. Sea $\mathcal{H}_*$ un espacio topológico arcoconexo y un mapeo $\mathfrak{h} : S \times \mathcal{H}_* \to S$ definido por $(u, H) \mapsto u^H$. Se asume que:

1. X está continuamente encajado en V,
2. El mapeo $\mathfrak{h}$ es continuo,
3. Para cada $u \in S$ y $H \in \mathcal{H}_*$, $u^{*H} = u^{H*} = u^*$ y $u^{HH} = u^H$,
4. Existe una sucesión $(H_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{H}_*$ tal que para cada $u \in S$, $u^{H_1 \ldots H_m} \to u^*$ en V cuando $m \to \infty$,
5. Para cada $u, v \in S$ y $H \in \mathcal{H}_*$, $||u^H - v^H||_V \leq ||u - v||_V$.

Veamos ahora un ejemplo de condiciones bajo las cuales estas hipótesis se cumplen. Debido a la Nota 2.18 supondremos la Hipótesis 4.

Ejemplo 2.37. (Simetrización de Schwarz para funciones no negativas.) Sea $\Omega = B_1(0, \mathbb{R}^N)$ ó $\mathbb{R}^N$, $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $V = (L^p \bigcap L^{p^*})$, donde $p^* = Np/(N-p)$, S el conjunto de funciones no negativas de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $*$ denota la Simetrización de Schwarz, y sea $\mathcal{H}_*$ como en la Definición 2.8 y $\mathfrak{h} : S \times \mathcal{H}_* \to S$ definido por $(u, H) \mapsto u^H$. Entonces las Hipótesis 2.36 se satisfacen por el Corolario 2.15 y las Proposiciones 2.12, 2.35 y el Teorema 2.20.

A continuación se derivarán algunas propiedades a partir de la asunción de las Hipótesis 2.36.

Proposición 2.38. *Para cualesquiera $u, v \in S$,*

$$||u^* - v^*||_V \leq ||u - v||_V.$$

Demostración. Por las hipótesis 4 y 5, se tiene que para cualquier $m \geq 1$

$$\begin{aligned} ||u^* - v^*||_V &\leq ||u^* - u^{H_1 \ldots H_m}||_V + ||u^{H_1 \ldots H_m} - v^{H_1 \ldots H_m}||_V + ||v^{H_1 \ldots H_m} - v^*||_V \\ &\leq ||u^* - u^{H_1 \ldots H_m}||_V + ||u - v||_V + ||v^{H_1 \ldots H_m} - v^*||_V. \end{aligned}$$

La afirmación se sigue de la propiedad (4) cuando $m \to \infty$. □

Proposición 2.39. *Supóngase que se cumplen las Hipótesis 2.36 y sea $H_0 \in \mathcal{H}_*$. Entonces existe una extensión continua $\mathbb{R}_0^+ \to \mathcal{H}_*$, $t \mapsto H_t$ del mapeo $n \mapsto H_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ tal que el mapeo $T : S \times \mathbb{R}^+ \to V$, $T(u, t) = u^{H_0 H_1 \ldots H_{\lfloor t \rfloor} H_t}$ (donde $\lfloor t \rfloor$ denota el más grande entero menor o igual a t) es continuo y $\lim_{t \to \infty} T(u, t) = u^*$ en V para todo $u \in S$.*

Demostración. Sea $t \mapsto \mathcal{H}_t$ una extensión continua a $\mathbb{R}_0^+$ del mapeo $n \mapsto H_n$ (la cual existe ya que $\mathcal{H}_*$ es arcoconexo). Sean $n \in \mathbb{N}_0$, y $(u,t) \in S \times [n, n+1]$, definimos $T_n(u,t) := u^{H_0 H_1 \ldots H_n H_t} = \mathfrak{h}(H_t, u^{H_0 H_1 \ldots H_n})$, con $\mathfrak{h}$ dada por el Lema 2.22. Como los mapeos $t \mapsto H_t$ y $\mathfrak{h} : \mathcal{H}_* \times S \to V$ son continuos, se sigue que $T_n : S \times [n, n+1] \to V$ es continuo. Además, se tiene que $u^{H_0 H_1 \ldots H_n H_n} = u^{H_1 \ldots H_n}$, es decir, T_{n-1} y T_n coinciden en $S \times \{n\}$ para $n \geq 1$.

Sea $(u,t) \in S \times \mathbb{R}_0^+$, definimos $T(u,t) := T_{\lfloor t \rfloor}(u,t)$. Como T_n es continuo para toda $n \in \mathbb{N}_0$ y $T_{n-1} = T_n$ en $S \times \{n\}$ y $S \times [n-1, n]$ son conjuntos cerrados, se tiene que T es un mapeo continuo. Además $T(u,t) = T_{\lfloor t \rfloor}(u,t) = u^{H_0 H_1 \ldots H_{\lfloor t \rfloor} H_t}$.

Por simplicidad y para mantener la notación estándar, adoptaremos la notación $u^t := T(u,t)$, que no debe causar confusión con potencia. Además por las hipótesis 3 y 5 se sigue que para cualquier $u \in V$

$$||u^t - u^*||_V \leq ||u^{\lfloor t \rfloor} - u^*||_V \to 0 \;\text{ cuando } t \to \infty.$$

$\square$

Capítulo 3

El Teorema Minimax General

Para construir los teoremas de la Teoría Variacional en espacios de Banach necesitamos primero una generalización apropiada del concepto de derivada. La más simple es **la derivada de Gâteaux**.

Notación 3.1. A lo largo del capítulo usaremos la siguiente notación: Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, denotaremos por X' el espacio dual de X, es decir:

$$X' = \{L : X \to \mathbb{R} \mid L \text{ es lineal y continua}\}$$

con la norma:

$$||L||_{X'} := \sup_{||x||=1} |Lx|$$

y llamaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a la **dualidad** entre X' y X, es decir, si $x \in X$ y $f \in X'$ entonces $\langle f, x \rangle := f(x)$. Además, $U \subset X$ será un abierto no vacío.

3.1 Funciones Derivables en Espacios de Banach

Definición 3.2. Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}$, decimos que φ tiene una **derivada de Gâteaux** $f \in X'$ en $u \in U$, si para todo $h \in X$ se tiene que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi(y+th) - \varphi(y) - \langle f, th\rangle] = 0.$$

La derivada de Gâteaux en u se denota por $\varphi'(u)$.

Una condición más restrictiva es la derivabilidad de Fréchet:

Definición 3.3. Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}$, decimos que φ tiene una **derivada de Fréchet** $f(u) \in X'$ en $u \in U$ si

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{||h||}[\varphi(u+h) - \varphi(u) - \langle f(u), h\rangle] = 0.$$

Además, el funcional φ pertenece a $C^1(U, \mathbb{R})$ si la derivada de Fréchet de φ existe y es continua en U (como aplicación $f : U \to X'$).

Nota 3.4. Claramente la derivada de Fréchet en u es la misma que la derivada de Gâteaux en u, la cual denotaremos por $\varphi'(u)(h) = \langle\varphi'(u), h\rangle$. De esta manera se puede generalizar en espacios de Banach la condición necesaria para la existencia de máximos y mínimos locales de φ en $u \in U$,

$$\varphi'(u) = 0 \tag{3.1}$$

cuando φ es diferenciable en el sentido de Gâteaux en u. Cualquier punto $u \in U$ que satisfaga (3.1) se llama un **punto crítico** de φ, y el correspondiente número $\varphi(u)$ se llama **valor crítico**.

Entonces, si una aplicación $\Phi : X \to X'$ cumple que $\Phi = \varphi'$ para alguna función Gâteaux diferenciable $\varphi : X \to \mathbb{R}$, todo punto crítico de φ será una solución de la ecuación

$$\Phi(u) = 0,$$

en particular, el caso de un máximo o un mínimo local de φ lo cumple.

Finalmente recordaremos la definición del gradiente:

Definición 3.5. Si X es un espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot, \cdot)$ y φ tiene una derivada de Gâteaux en $u \in U$, el **gradiente** de φ en u es el único elemento $\nabla\varphi(u) \in X$ tal que

$$(\nabla\varphi(u), h) = \langle \varphi'(u), h \rangle \quad \forall h \in X.$$

El objetivo de este capítulo es demostrar el Teorema Minimax General, y pensando en la mejor comprensión de esta teoría, se probará primero un caso particular muy importante conocido como el Teorema del Paso de Montaña.

3.2 Teorema del Paso de Montaña

El Teorema del Paso de Montaña es de los más simples principios variacionales, y también uno de los más útiles. Para demostrarlo necesitamos probar primero un caso particular de otro resultado muy importante conocido como el Lema Cuantitativo de Deformación. En la siguiente sección se prueban los resultados generales.

Notación 3.6. Sea X un espacio normado y $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$, definimos

$$\varphi^d := \varphi^{-1}((-\infty, d]).$$

Lema 3.7 (Cuantitativo de Deformación (caso particular)). *Sea X un espacio de Hilbert, $\varphi \in C^2(X,\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Supongamos que*

$$(\forall u \in \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])) : ||\varphi'(u)|| \geq 2\varepsilon.$$

Entonces existe $\eta \in C(X,X)$ tal que

(i) $\eta(u) = (u),\ \forall u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$,

(ii) $\eta(\varphi^{c+\varepsilon}) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$.

Demostración. Definamos:

$$\begin{aligned}
A &:= \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]),\\
B &:= \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]),\\
\psi(u) &:= \frac{\operatorname{dist}(u, X\backslash A)}{\operatorname{dist}(u, X\backslash A) + \operatorname{dist}(u, B)},
\end{aligned}$$

entonces ψ es localmente Lipschitz continua, $\psi = 1$ en B, $\psi = 0$ en $X\backslash A$ y $\psi \in [0,1]$ en X.

Definamos también el campo vectorial localmente Lipschitz continuo

$$f(u) := \begin{cases} -\psi(u)\nabla\varphi(u)||\nabla\varphi(u)||^{-2}, & u \in A;\\ 0, & u \in X\backslash A. \end{cases}$$

Es claro que $||f(u)|| \leq (2\varepsilon)^{-1}$ en X. Además, para cada $u \in X$, el problema de Cauchy

$$\frac{d}{dt}\sigma(t,u) = f(\sigma(t,u)), \tag{3.2}$$

$$\sigma(0,u) = u, \tag{3.3}$$

tiene solución única $\sigma(\cdot, u)$ definida en $\mathbb{R}$ y σ es continua en $\mathbb{R} \times X$ (véase, por ejemplo el libro de Serge Lang [23] Corolarios 1.6 y 1.7 pag. 72 para la existencia del flujo y el libro de Wolfgang Walter [31] Capítulo 6 Teorema VII pag. 53 para su extensión a todo $\mathbb{R}$).

Definamos el mapeo η en X por $\eta(u) := \sigma(2\varepsilon, u)$. Veamos que satisface (i).

Sea $u \notin A$, entonces por (3.3) se tiene que

$$\sigma(0, u) \notin A. \tag{3.4}$$

Por definición, A^c es abierto, y como σ es una función continua, se tiene que existen $I \times U \subset \mathbb{R} \times X$ abiertos tales que $0 \in I$ y

$$\sigma(t, v) \notin A \quad \forall (t, v) \in I \times U.$$

Para demostrar (i), por contradicción, supongamos que existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $\gamma(t) := \sigma(t, u) \in A$. Entonces podemos definir

$$t_0 := \text{mín}\{t \geq 0 \mid \gamma(t) \in A\}$$

el cual se alcanza ya que A es cerrado y γ es continua. Además por (3.4) se tiene que $t_0 > 0$. Entonces

$$\gamma(t) \notin A \quad \forall t \in [0, t_0),$$

pero por (3.3), (3.4) y la definición de f se tiene que

$$\gamma'(t) = f(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Pero eso implica que

$$\gamma(t_0) = \gamma(0) + \int_0^{t_0} \gamma'(s) ds = \gamma(0) = u \notin A$$

lo cual contradice la definición de t_0. Por lo tanto,

$$\sigma(t,u) \notin A \quad \forall u \notin A \text{ y } t \geq 0. \tag{3.5}$$

Sea $u \notin A$, entonces $f(\sigma(s,u)) = 0$ para toda $s \in \mathbb{R}^+$, y luego

$$\eta(u) = \sigma(2\varepsilon, u) = u + \int_0^{2\varepsilon} f(\sigma(s,u))ds = u$$

lo cual prueba i).

Y como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) &= (\nabla\varphi(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}\sigma(t,u)) \\ &= (\nabla\varphi(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u)) \qquad (3.6) \\ &= -\psi(\sigma(t,u)), \end{aligned}$$

$\varphi(\sigma(\cdot,u))$ es no creciente. Sea $u \in \varphi^{c+\varepsilon}$. Si existe $t \in [0, 2\varepsilon]$ tal que $\varphi(\sigma(t,u)) < c - \varepsilon$, entonces $\varphi(\sigma(2\varepsilon,u)) < c - \varepsilon$, y (ii) se satisface. Si

$$\sigma(t,u) \in \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]), \ \forall t \in [0, 2\varepsilon],$$

y entonces se obtiene de (3.6) y de $\Psi \equiv 1$ en B que

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma(2\varepsilon,u)) &= \varphi(u) + \int_0^{2\varepsilon} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u))dt \\ &= \varphi(u) - \int_0^{2\varepsilon} \psi(\sigma(t,u))dt \\ &\leq c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon, \end{aligned}$$

y (ii) también se satisface. □

Teorema 3.8 (Del Paso de Montaña)**.** *Sean X un espacio de Hilbert, $\varphi \in C^2(X,\mathbb{R})$, $e \in X$ y $r > 0$ tales que $||e|| > r$ y*

$$b := \inf_{||u||=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e). \tag{3.7}$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que *a)* $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$

b) $||\varphi'(u)|| < 2\varepsilon$,

donde

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)) \tag{3.8}$$

y

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}. \tag{3.9}$$

Demostración. La hipótesis (3.7) implica que

$$b \leq \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)),$$

y de este modo

$$b \leq c \leq \max_{t \in [0,1]} \varphi(te).$$

Haremos la demostración por contradicción. Supongamos que, para alguna $\varepsilon > 0$, la conclusión del teorema no fuera satisfecha. Como el interés del Teorema se centra en ε pequeñas, podemos suponer que

$$c - 2\varepsilon \geq \varphi(0) \geq \varphi(e). \tag{3.10}$$

Por la definición de c, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon. \tag{3.11}$$

Por definición de c, siempre existe $u \in X$ tal que a) se satisface, por lo que debe ser b) la condición que no se satisface; luego podemos aplicar el lema precedente. Consideremos $\beta := \eta \circ \gamma$, donde η está dada por el Lema 3.7, de modo que $\sup_{t \in [0,1]} \varphi(\beta(t)) \leq c - \varepsilon$. Entonces usando (i) y (3.10),

$$\beta(0) = \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0,$$

y similarmente $\beta(1) = e$, de modo que $\beta \in \Gamma$. Se sigue de (ii) y de (3.11) que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} \varphi(\beta(t)) \leq c - \varepsilon,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $u \in X$ tal que $a)$ y $b)$ se satisfacen. $\square$

Sin embargo, para poder asegurar que c es un valor crítico de φ, se necesita la siguiente condición de compacidad.

Definición 3.9 (Brézis-Coron-Nirenberg, 1980)**.** Sea X un espacio de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$. Se dice que el funcional φ **satisface la condición de Palais-Smale en c**, o simplemente que satisface $(PS)_c$, si toda sucesión $(u_n) \subset X$ tal que

$$\varphi(u_n) \to c, \quad \varphi'(u_n) \to 0 \tag{3.12}$$

tiene una subsucesión convergente.

En virtud de esta definición, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.10 (Ambrosetti-Rabinowitz, 1973)**.** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.8, si φ satisface $(PS)_c$, entonces c es un valor crítico de φ.*

Demostración. El Teorema 3.8 nos garantiza la existencia de una sucesión $(u_n) \subset X$ que cumple (3.12). Y como φ satisface $(PS)_c$, entonces (u_n) tiene una subsucesión convergente a $u \in X$. Pero entonces $\varphi(u) = c$ y $\varphi'(u) = 0$. $\square$

3.3 Lema Cuantitativo de Deformación

Ahora buscaremos generalizar el Lema 3.7 a un resultado conocido como el Lema Cuantitativo de Deformación y encontrar así una versión general del Teorema del Paso de Montaña que llamaremos el Teorema Minimax General. Para ello, necesitamos primero la definición de pseudogradiente, definida por Palais en 1966.

Definición 3.11. Sea M un espacio métrico, X un espacio normado y $h : M \to X'\backslash\{0\}$ un mapeo continuo. Un **campo pseudogradiente de h en M** es un campo vectorial continuo localmente Lipschitz $g : M \to X$ tal que, para cada $u \in M$,

$$\begin{aligned} ||g(u)|| &\leq 2||h(u)||_{X'}, \qquad (3.13) \\ \langle h(u), g(u)\rangle &\geq ||h(u)||^2_{X'}. \qquad (3.14) \end{aligned}$$

Nota 3.12. En el caso de un espacio de Hilbert H, para $\varphi : H \to \mathbb{R}$, con $\varphi \in C^1(H)$, para cada $x \in H$ aplicando el Teorema de Representación de Riesz, existe $y \in H$ único tal que $D\varphi(x)(y) = \langle y, z\rangle$ para todo $z \in H$, luego se puede definir el gradiente de φ en x por $\nabla\varphi(x) = y$. Y en este caso, las desigualdades de la Definición 3.11 se cumplen trivialmente

$$\begin{aligned} ||y|| \quad &= \quad ||D\varphi(x)||, \\ D\varphi(x)(y) = \quad \langle y, y\rangle \quad &= ||D\varphi(x)||^2. \end{aligned}$$

De modo que el gradiente es en particular un campo pseudogradiente.

El siguiente lema de existencia se debe a Palais.

Lema 3.13. *Bajo las hipótesis de la Definición 3.11, existe un campo pseudogradiente de h en M.*

Demostración. Para cada $v \in M$, por la definición de la norma en el espacio dual, existe $x \in X$ tal que $||x|| = 1$ y

$$\langle h(v), x \rangle > \frac{2}{3}||h(v)||_{X'}.$$

Definimos $y := (\frac{3}{2}||h(v)||_{X'})x$ de modo que

$$||y|| < 2||h(v)||_{X'}, \ \langle h(v), y \rangle > ||h(v)||^2_{X'}.$$

Como h es continua, existe una vecindad abierta N_v de v tal que para cada $u \in N_v$:

$$||y|| \leq 2||h(u)||_{X'}, \ \langle h(u), y \rangle \geq ||h(u)||^2_{X'}. \tag{3.15}$$

La familia

$$\mathcal{N} := \{N_v : v \in M\}$$

es una cubierta abierta de M. Como M es un espacio métrico, es entonces paracompacto, y por lo tanto existe una cubierta abierta localmente finita $\mathcal{M} := \{M_i \mid i \in I\}$ de M más fina que $\mathcal{N}$ (los detalles técnicos de este hecho se pueden revisar en el libro de Dugundji [15] Capítulo 8, Teorema 4.2, página 170). Para cada $i \in I$, existe $v \in M$ tal que $M_i \subset N_v$. Luego existe $y = y_i$ tal que (3.15) se satisface para cada $u \in M_i$.

Definamos en M,

$$\begin{array}{rcl}\rho_i(u) & := & \operatorname{dist}(u, M \backslash M_i), \\ \beta_i(u) & := & \dfrac{\rho_i(u)}{\sum\limits_{k \in I} \rho_k(u)}, \\ g(u) & := & \sum\limits_{i \in I} \dfrac{\rho_i(u)}{\sum\limits_{j \in I} \rho_j(u)} y_i = \sum\limits_{i \in I} \beta_i(u) y_i.\end{array}$$

Entonces $\rho_i(y) = 0$ si $y \notin M_i$, y por cómo está definida es fácil demostrar que ρ_i es Lipschitz continua con constante de Lipschitz $K = 1$. Además el denominador de β_i es una suma finita distinta de cero. De modo que $g : M \to X$ está bien definida. Demostraremos a continuación que g es un campo pseudogradiente de h en M.

Primero veremos que g es localmente Lipschitz. Sea $x \in M$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in M_{i_0}$. Como M_i es abierto, existe $J \subseteq I$ finito y $r > 0$ tal que si $B_r(x, M) \cap M_i \neq \emptyset$ entonces $i \in J$, además $B_r(x, M) \subset M_{i_0}$ y $c := \text{dist}(B_r(x, M), M \backslash M_{i_0}) > 0$. Entonces para toda $u, v \in U := B_r(x, M)$

$$0 < c \leq \rho_{i_0}(v) \leq \sum_{j \in J} \rho_j(v) \qquad \text{y} \qquad \rho_i(v) \leq 2r + c =: K' \quad \forall\, i \in J.$$

Entonces en $B_r(x, M)$ se tiene que $\beta_i = \frac{\rho_i}{\sum\limits_{j \in J} \rho_j}$ es Lipschitz continua para toda $i \in J$ y por lo tanto $g = \sum_{i \in J} \beta_i(u) y_i$ también es Lipschitz continua. Ahora, notemos que $\sum_{i \in I} \beta_i(u) = 1$, entonces de (3.15) se sigue que

$$||g(u)|| = ||\sum_{i \in I} \beta_i(u) y_i|| \leq \sum_{i \in I} \beta_i(u) ||y_i|| \leq \sum_{i \in I} \beta_i(u) 2 ||h(u)||_{X'} = 2||h(u)||_{X'}.$$

Por lo tanto (3.13) se cumple. Además

$$\begin{aligned} \langle h(u), g(u) \rangle &= \langle h(u), \sum_{i \in I} \beta_i(u) y_i \rangle \\ &= \sum_{i \in I} \beta_i(u) \langle h(u), y_i \rangle \\ &\geq \sum_{i \in I} \beta_i(u) ||h(u)||^2_{X'} = ||h(u)||^2_{X'}. \end{aligned}$$

Por lo que (3.14) se satisface, y entonces g es un campo pseudogradiente de h en M. $\square$

Notación 3.14. En la formulación y demostración del siguiente teorema se utilizará la siguiente notación: sea φ una función real definida en un espacio normado X, y sea S un subconjunto de X,

$$\begin{aligned} \varphi^d &:= \{u \in X \mid \varphi(u) \leq d\}, \\ S_\delta &:= \{u \in X \mid \operatorname{dist}(u, S) \leq \delta\}. \end{aligned}$$

El siguiente lema fue demostrado por Willem en 1983.

Lema 3.15 (Cuantitativo de Deformación)**.** *Sea X un espacio de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ tales que*

$$(\forall u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \bigcap S_{2\delta}) : ||\varphi'(u)|| \geq 8\varepsilon/\delta. \tag{3.16}$$

Entonces existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que:

i) $\eta(t, u) = u$, *si* $t = 0$ *o si* $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \bigcap S_{2\delta}$,

ii) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \bigcap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$,

iii) $\eta(t, \cdot)$ *es un homeomorfismo de* X, $\forall t \in [0, 1]$,

iv) $||\eta(t, u) - u|| \leq \delta$, $\forall u \in X$, $\forall t \in [0, 1]$,

v) $\varphi(\eta(\cdot, u))$ *es no creciente,* $\forall u \in X$,

vi) $\varphi(\eta(t, u)) < c$, $\forall u \in \varphi^c \bigcap S_\delta$, $\forall t \in (0, 1]$.

Demostración. Por el Lema 3.13 existe un campo pseudogradiente g de φ' en $M := \{u \in X \mid \varphi'(u) \neq 0\}$.

Definamos:

$$\begin{aligned} A &:= \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \bigcap S_{2\delta}, \\ B &:= \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \bigcap S_{\delta}, \\ \psi(u) &:= \frac{\operatorname{dist}(u, X\backslash A)}{\operatorname{dist}(u, X\backslash A) + \operatorname{dist}(u, B)}, \end{aligned}$$

de modo que ψ es localmente Lipschitz continua, $\psi = 1$ en B y $\psi = 0$ en $X\backslash A$. Definamos también el campo vectorial localmente Lipschitz continuo

$$f(u) := \begin{cases} -\psi(u)g(u)||g(u)||^{-2}, & u \in A; \\ 0, & u \in X\backslash A. \end{cases}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y por la definición 3.11 se tiene que

$$||\varphi'(u)||^2_{X'} \leq \langle \varphi'(u), g(u) \rangle \leq ||\varphi'(u)||_{X'} ||g(u)||.$$

Luego de la hipótesis (3.16), tenemos que

$$||f(u)|| = ||\psi(u)|| \frac{||g(u)||}{||g(u)||^2} \leq 1 \frac{1}{||\varphi'(u)||_{X'}} \leq \delta/8\varepsilon, \tag{3.17}$$

para toda $u \in \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \bigcap S_{2\delta})$.

Consideremos ahora el problema de Cauchy

$$\frac{d}{dt}\sigma(t,u) = f(\sigma(t,u)), \tag{3.18}$$

$$\sigma(0,u) = u. \tag{3.19}$$

Por el Teorema de Existencia y Unicidad para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, para cada $u \in X$, existe una única solución $\sigma(\cdot, u)$ definida en $\mathbb{R}$ y continua en $\mathbb{R} \times X$ (véase, por ejemplo [29]). Definamos el mapeo η en $[0,1] \times X$ por $\eta(t,u) := \sigma(8\varepsilon t, u)$. Veamos ahora que η cumple las condiciones del Lema.

i) Tenemos que $\eta(0,u)=\sigma(0,u)=u$, por (3.18). Supongamos ahora que $u\notin A$, entonces análogamente que la demostración del Lema 3.7, del resultado (3.5) se sigue que $f(\sigma(s,u))=0$, para toda $s\geq 0$, luego

$$\eta(t,u)=\sigma(8\varepsilon t,u)=u+\int_0^{8\varepsilon t} f(\sigma(s,u))ds=u.$$

iii) Esta es una propiedad bien conocida del flujo, nombre con el que comúnmente se le conoce a σ dentro de la teoría de Ecuaciones Diferenciales. Para más detalles remitimos al lector al libro de Herbert Aman [3] Capítulo 2, Sección 10, Teorema 10.14.

iv) Se sigue de la Definición 3.11, la definición de f y de (3.17) que, para toda $u\in X$ y $t\geq 0$,

$$\begin{aligned} ||\eta(t,u)-u|| &= ||\sigma(8\varepsilon t,u)-u|| \\ &= \left|\left|\int_0^{8\varepsilon t} f(\sigma(\tau,u))d\tau\right|\right| \\ &\leq \int_0^{8\varepsilon t} ||f(\sigma(\tau,u))||d\tau \\ &\leq 8\varepsilon t\frac{\delta}{8\varepsilon}\leq\delta. \end{aligned} \tag{3.20}$$

v) Por la definición 3.11, tenemos que para $u\in A$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) &= \langle\varphi'(\sigma(t,u)),\frac{d}{dt}\sigma(t,u)\rangle \\ &= \langle\varphi'(\sigma(t,u)),f(\sigma(t,u)\rangle \\ &= \langle\varphi'(\sigma(t,u)),-\psi(\sigma(t,u))\frac{g(\sigma(t,u))}{||g(\sigma(t,u))||^2}\rangle \\ &= \frac{-\psi(\sigma(t,u))}{||g(\sigma(t,u))||^2}\langle\varphi'(\sigma(t,u)),g(\sigma(t,u))\rangle \\ &\leq -\psi(\sigma(t,u))\frac{||\varphi'(\sigma(t,u))||^2_{X'}}{||g(\sigma(t,u))||^2}\leq\frac{-\psi(\sigma(t,u))}{4}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Y entonces $\varphi \circ \sigma$ es decreciente como función de t. Si $u \in A^c$ entonces por la definición de f y por $i)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) &= \langle \varphi'(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}\sigma(t,u)\rangle \\ &= \langle \varphi'(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u)\rangle = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi(\eta(\cdot,u))$ es no creciente para toda $u \in X$.

vi) Sean $u \in \varphi^c \bigcap S_\delta,\ t \in [0,1]$, entonces $\varphi(u) \leq c$ y $v)$ junto con (3.21) y $\psi > 0$ en B, garantizan que si $t > 0$ entonces

$$\varphi(\eta(t,u)) < \varphi(\eta(0,u)) = \varphi(u) < c.$$

ii) Sea $u \in \varphi^{c+\varepsilon} \bigcap S$. Si existe $t \in [0, 8\varepsilon]$ tal que $\varphi(\sigma(t,u)) < c - \varepsilon$, entonces por $v)$, $\varphi(\eta(1,u)) = \varphi(\sigma(8\varepsilon,u)) \leq \varphi(\sigma(t,u)) < c-\varepsilon$, entonces $\eta(1,u) \in \varphi^{c-\varepsilon}$, y $ii)$ se satisface. Si

$$\sigma(t,u) \in \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]),\ \forall t \in [0, 8\varepsilon],$$

se obtiene de (3.21) que

$$\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) \leq -\frac{1}{4}\psi(\sigma(t,u))$$

y entonces como $\psi \equiv 1$ en B,

$$\begin{aligned}\varphi(\eta(1,u)) &= \varphi(\sigma(8\varepsilon,u)) \\ &= \varphi(\sigma(0,u)) + \int_0^{8\varepsilon} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u))dt \\ &\leq \varphi(u) - \frac{1}{4}\int_0^{8\varepsilon} \psi(\sigma(t,u))dt \\ &\leq c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon,\end{aligned}$$

y entonces $\eta(1,u) \in \varphi^{c-\varepsilon}$, por lo tanto $ii)$ también se satisface.

□

Nota 3.16. El Lema Cuantitativo de Deformación nos indica que si c no es un valor crítico, entonces $\varphi^{c-\varepsilon}$ es un retracto de deformación de $\varphi^{c+\varepsilon}$. Por lo tanto, una forma simple de encontrar puntos críticos, sería observar los conjuntos φ^a y φ^b con $a > b$, y en caso de que φ^b no sea un retracto de deformación de φ^a, entonces se podría asumir que existe un valor crítico en $[a, b]$.

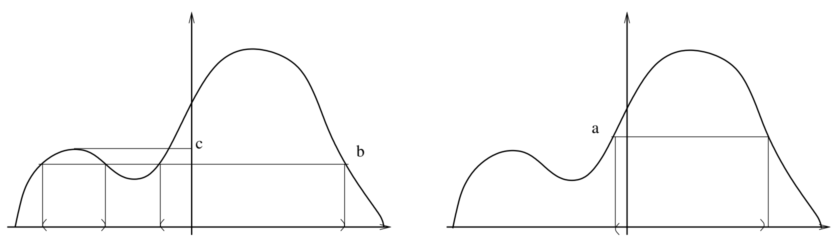

Figura 3.1: La topología de los conjuntos φ^a y φ^b, son distintas al rededor de un punto crítico.

3.4 El Teorema Minimax General

A continuación se enunciará y demostrará la versión general del Teorema del Paso de Montaña, este teorema fue demostrado por Willem en 1996, y aquí incluimos una pequeña variante del Teorema, propuesta por Schaftingen, que servirá para demostrar más adelante el Principio Variacional Simétrico.

Teorema 3.17 (Willem, 1996)**.** *Sea X un espacio de Banach. Sea M_0 un subespacio cerrado de un espacio métrico M y $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Definimos*

$$\Gamma = \{\gamma \in C(M, X) \mid \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Si $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisface:*

$$\infty > c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) > a = \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u)) \tag{3.22}$$

entonces para cada $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$, $\delta > 0$ *y* $\gamma \in \Gamma$ *tales que*

$$\sup_M \varphi \circ \gamma \leq c + \varepsilon, \tag{3.23}$$

existe $u \in X$ *tal que:*

1. $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$,

2. $\operatorname{dist}(u, \gamma(M) \bigcap \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])) \leq 2\delta$,

3. $||\varphi'(u)|| \leq 8\varepsilon/\delta$.

Demostración. Se demostrará por contradicción. Supongamos que existen $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$, $\delta > 0$ y $\gamma \in \Gamma$ tales que (3.23) se cumple, pero para toda $u \in X$ 1 ó 2 ó 3, no se satisfacen. Entonces para toda $u \in X$ que cumplen 1 y 2 asumimos que 3 no se cumple, y podemos aplicar entonces el Lema 3.15 con $S := \gamma(M) \bigcap \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$. Tenemos que

$$c - 2\varepsilon > a. \tag{3.24}$$

Definimos $\beta(u) := \eta(1, \gamma(u))$. Para cada $u \in M_0$, obtenemos de (3.24) y de i) del Lema 3.15 que

$$\beta(u) = \eta(1, \gamma_0(u)) = \gamma_0(u),$$

de modo que $\beta \in \Gamma$. Se sigue de (3.23) y de ii) del Lema 3.15 que

$$\sup_{u \in M} \varphi(\beta(u)) = \sup_{u \in M} \varphi(\eta(1, \gamma(u))) \leq c - \varepsilon,$$

lo cual es una contradicción a la definición de c. $\square$

Capítulo 4

Simetrías y Principios Variacionales

Las simetrizaciones nos permiten restringir la búsqueda de minimizadores a un subconjunto de funciones simétricas. En este capítulo demostraremos que en ciertos niveles críticos, existe un punto crítico que es simétrico.

El Teorema 3.17 nos garantiza la existencia de una sucesión de Palais-Smale $(u_n)_{n\geq 1}$ tal que $\varphi'(u_n) \to 0$ y $\varphi(u_n) \to c$. Este es un paso importante para probar que c es un valor crítico de φ. Esto sucede si además φ satisface la condición de Palais-Smale $(PS)_c$: cualquier sucesión (u_n) tal que $\varphi'(u_n) \to 0$ y $\varphi(u_n) \to c$ tiene una subsucesión (fuertemente) convergente.

En este capítulo se demuestra que bajo las Hipótesis 2.36 se puede obtener más información acerca de la simetría de u. La primera idea que a uno se le podría ocurrir, es la de sustituir el camino γ por su simetrización $\gamma^* : t \in M \mapsto \gamma(t)^*$. Entonces la u que nos da el Teorema 3.17 estaría muy cerca del conjunto $\gamma^*(M)$. Desafortunadamente, cuando $N > 1$, $X = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

y * es la Simetrización de Schwarz, * no es continua en X (para más detalles al respecto se refiere al lector al artículo de Almgren [2]), de modo que el camino simetrizado γ^* podría ser discontinuo. Sin embargo, la idea funciona si la simetrización es aproximada uniformemente por transformaciones continuas. La convergencia de las aproximaciones de las simetrizaciones por polarizaciones dada por el Teorema 2.20 no es uniforme, pero se vuelve uniforme con un cambio de variable apropiado.

Proposición 4.1. *Sean M un espacio métrico, M_0 y M_1 subconjuntos de M cerrados y disjuntos. Supongamos que $X, V, S, *, \mathcal{H}_*, \mathfrak{h}$ y $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_*$ satisfacen las Hipótesis 2.36, $\gamma \in C(M,S)$ y $H_0 \in \mathcal{H}_*$. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{\gamma} \in C(M,S)$ tal que*

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &= \gamma(t)^{H_0} \qquad \forall t \in M_0, \qquad (4.1) \\ ||\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)^*||_V &\leq \varepsilon \qquad \forall t \in M_1. \end{aligned}$$

Además, para todo $t \in M$ existen $n \in \mathbb{N}_0$ y $H \in \mathcal{H}_*$ tales que $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)^{H_0 H_1 \ldots H_n H}$.

Demostración. Para $t \in M_1$, sea $\delta_t > 0$ tal que

$$B_{\delta_t}(t, M) \bigcap M_0 = \emptyset \qquad (4.2)$$

y tal que para todo $s \in B_{\delta_t}(t, M)$, $||\gamma(s) - \gamma(t)||_V \leq \varepsilon/3$ (esto es posible gracias a que γ es continua y a que X está continuamente encajado en V).

Sea (H_n) la sucesión en $\mathcal{H}_*$ dada en la Hipótesis 2.36. La Proposición 2.39 nos garantiza la existencia de una función continua $T : S \times \mathbb{R}^+ \to S$ definida por $T(u,\theta) = u^{H_0 H_1 \ldots H_{\lfloor\theta\rfloor} H_\theta}$ con $H_t \in \mathcal{H}_*$ para toda $t \geq 0$, y que se denota simplemente por $u^\theta := T(u,\theta)$. Además, esta función cumple que para cada $t \in M_1$, existe $\theta_t \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$||\gamma(t)^\theta - \gamma(t)^*||_V \leq \varepsilon/3 \text{ para } \theta \geq \theta_t. \tag{4.3}$$

La colección $\mathcal{O} = \{M \backslash M_1\} \bigcup \{B_{\delta_t}(t,M)\}_{t \in M_1}$ forma una cubierta abierta del espacio métrico M. Entonces existe una partición de la unidad $(\rho_U)_{U \in \mathcal{O}}$ subordinada a esta cubierta (los detalles técnicos de este hecho se pueden revisar en el libro de Dugundji [15] Capítulo 8, Teorema 4.2, página 170), es decir

1. $\rho_U : M \to [0,1]$ son funciones continuas para todo $U \in \mathcal{O}$,
2. para cada $t \in M$ existe una vecindad de t donde sólo un número finito de ρ_U no son cero idénticamente,
3. $\operatorname{supp}(\rho_U) \subset U$ para todo $U \in \mathcal{O}$,
4. $\sum_{U \in \mathcal{O}} \rho_U(t) = 1$ para cada $t \in M$.

Si $s \in M_1$ entonces $B_{\delta_s}(s,M) \in \mathcal{O}$, y escribimos $\rho_s := \rho_{B_{\delta_s}(s,M)}$. Definimos $\Theta : M \to \mathbb{R}_0^+$ como

$$\Theta(t) := \sum_{s \in M_1} \rho_s(t)\theta_s,$$

la función Θ es continua gracias a las propiedades 1 y 2.

Sea $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t)^{\Theta(t)}$. Si $t \in M_0$, entonces $\Theta(t) = 0$ gracias a (4.2) y a la propiedad 3, por lo tanto $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)^{H_0}$, por definición.

Sea $t \in M_1$, entonces por la propiedad 3 se sigue que $\rho_{M \backslash M_1}(t) = 0$. Entonces $\sum_{s \in M_1} \rho_s(t) = 1$ y sólo un número finito de puntos $s \in M_1$ cumple que $\rho_s(t) \neq 0$. Fijamos $s \in M_1$ tal que $\theta_s = \text{mín}\{\theta_r \mid r \in M_1, \rho_r(t) \neq 0\}$ y

$\rho_s(t) \neq 0$. Por lo tanto $\theta_s = \sum_{r\in M_1} \rho_r(t)\theta_s \leq \sum_{r\in M_1} \rho_r(t)\theta_r = \Theta(t)$. Luego, por las Hipótesis 2.36 (inciso 5), la Proposición 2.38 y de (4.3) se sigue que

$$\begin{aligned} ||\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)^*||_V &\leq ||\gamma(t)^{\Theta(t)} - \gamma(s)^{\Theta(t)}||_V + ||\gamma(s)^{\Theta(t)} - \gamma(s)^*||_V + ||\gamma(s)^* - \gamma(t)^*||_V \\ &\leq ||\gamma(s)^{\Theta(t)} - \gamma(s)^*||_V + 2||\gamma(s) - \gamma(t)||_V \leq \varepsilon \end{aligned}$$

pues $t \in B_{\delta_s}(s, M)$ implica que $||\gamma(s) - \gamma(t)||_V \leq \varepsilon/3$. □

Nota 4.2. Por las Hipótesis 2.36 inciso 3 y la definición de $\tilde{\gamma}$, se sigue que $\gamma^* = \tilde{\gamma}^*$.

Corolario 4.3 (Aproximación uniforme de simetrizaciones.)**.** *Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un mapeo continuo $T : S \to S$ tal que $||Tu - u^*||_V < \varepsilon$ para cada $u \in S$.*

Demostración. El resultado se sigue de aplicar la Proposición 4.1 con $M_0 = \emptyset$, $M = M_1 = S$ y $\gamma(u) = u$, con $Tu = \tilde{\gamma}(u)$. □

Ahora podemos enunciar y demostrar el resultado principal del capítulo.

Teorema 4.4 (Principio Variacional Simétrico (Van Schaftingen, 2004))**.** *Sean $X, S, V, *, \mathcal{H}_*$ y $\{H_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{H}_*$ como en las Hipótesis 2.36, sea M_0 un subconjunto cerrado de un espacio métrico M y $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Definimos*

$$\Gamma = \{\gamma \in C(M, X) \mid \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Si $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisface:

$$\infty > c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in M} \varphi(\gamma(t)) > a = \sup_{\gamma_0\in\Gamma_0} \sup_{t\in M} \varphi(\gamma_0(t))$$

y si para cualquier $H \in \mathcal{H}_*$ y $u \in S$, $\varphi(u^H) \leq \varphi(u)$, entonces para cada $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$, $\delta > 0$ y $\gamma \in \Gamma$ tales que:

1. $\sup_M \varphi \circ \gamma \leq c + \varepsilon$,

2. $\gamma(M) \subset S$,

3. existe $H_0 \in \mathcal{H}_*$ *tal que* $\gamma|_{M_0}{}^{H_0} \in \Gamma_0$,

existe $u \in X$ *tal que:*

1. $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$,

2. $||u - u^*||_V \leq 2(2K + 1)\delta$,

3. $||\varphi'(u)||_{X'} \leq 8\varepsilon/\delta$,

donde K *es la norma de la inyección de* X *a* V*.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $c - 2\varepsilon > a$. Sea $M_1 = (\varphi \circ \gamma)^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$. Este conjunto es claramente cerrado. La Proposición 4.1 nos garantiza un camino $\tilde{\gamma} \in C(M, X)$ tal que las condiciones (4.1) son válidas para δ en lugar de ε. Además por hipótesis, $\varphi(\gamma(t)) \geq \varphi(\tilde{\gamma}(t))$ para todo $t \in M$. Entonces

$$\sup_{t \in M} \varphi \circ \tilde{\gamma}(t) \leq c + \varepsilon.$$

El Teorema 3.17 con $\tilde{\gamma}$ en lugar de γ nos garantiza la existencia de una u tal que:

1. $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$,

2. $\mathrm{dist}_X(u, \tilde{\gamma}(M) \bigcap \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])) \leq 2\delta$,

3. $||\varphi'(u)|| \leq 8\varepsilon/\delta$.

Veamos ahora que $\tilde{\gamma}(M) \cap \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \subseteq \tilde{\gamma}(M_1)$. Sea $t \in M$ tal que $c - 2\varepsilon \leq \varphi(\tilde{\gamma}(t)) \leq c + 2\varepsilon$. Como $\varphi(\tilde{\gamma}(t)) \leq \varphi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon$, entonces $c - 2\varepsilon \leq \varphi(\gamma(t)) \leq c + 2\varepsilon$, es decir, $t \in M_1$ y se sigue la contención desada. Por lo tanto, de 2 se deduce que

$$\mathrm{dist}_X(u, \tilde{\gamma}(M_1)) \leq 2\delta \tag{4.4}$$

Entonces por (4.4), la Proposición 4.1, la Nota 4.2 y la Proposición 2.38 se siguen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \inf_{t\in M_1} ||u - \tilde{\gamma}(t)||_V &\leq K \inf_{t\in M_1} ||u - \tilde{\gamma}(t)||_X \leq 2K\delta, \\ \inf_{t\in M_1} ||\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)^*||_V &\leq \delta, \\ \inf_{t\in M_1} ||\gamma(t)^* - u^*||_V &\leq \inf_{t\in M_1} ||\tilde{\gamma}(t) - u||_V \leq K \inf_{t\in M_1} ||\tilde{\gamma}(t) - u||_X \leq 2K\delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} ||u - u^*||_V &\leq \inf_{t\in M_1} (||u - \tilde{\gamma}(t)||_V + ||\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)^*||_V + ||\gamma(t)^* - u^*||_V) \\ &\leq (4K+1)\delta. \end{aligned}$$

□

En otras palabras, el Teorema 4.4 nos dice que cuando un funcional no incrementa su valor con ninguna polarización y si la construcción minimax es invariante bajo una polarización (la existencia de H_0 que preserva Γ_0), entonces existe una sucesión de Palais-Smale casi simétrica.

No es equivalente para un funcional decrecer su valor con una simetrización que con una polarización. De hecho, muchas desigualdades de simetrizaciones pueden ser probadas con desigualdades de polarizaciones [10]; pero algunas desigualdades (v.gr. la desigualdad de Riesz-Sobolev) valen para simetrizaciones, pero no para polarizaciones [28].

Capítulo 5

Aplicación

En este capítulo se incluye lo esencial de una aplicación que propuso Schaftingen en su artículo [26]. Dada la Nota 2.18 asumiremos a lo largo de este capítulo lo siguiente:

Hipótesis 2.19 Existe una sucesión $(H_m) \subset \mathcal{H}_*$ tal que

$$u^{H_1 H_2 \ldots H_m} \to u^* \quad \text{cuando } m \to \infty,$$

en $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [1, \infty]$ y $u \in K_*(\mathbb{R}^N)$.

5.1 Simetría de Puntos Críticos

Veremos las propiedades simétricas de las soluciones de problemas elípticos semilineales.

$$\begin{cases} -\Delta u + a(|x|)u = f(|x|, u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es una bola de radio $b > 0$, y f y a son funciones continuas.

Entonces las soluciones son puntos críticos del funcional:

$$\varphi(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{a(|x|)u^2}{2} - F(|x|, u)dx,$$

definido en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, donde $F(r,t) = \int_0^t f(r,s)ds$ si $t \geq 0$, $r \geq 0$ y $F(r,t) = 0$ si $t \leq 0$. Ahora, asumiremos que:

(a_1) $a \in L^{N/2}([0,b))$ si $N \geq 3$, $a \in L^q([0,b))$ para $q > 1$ si $N = 2$ y $a \in L^1([0,b))$ si $N = 1$.

Bajo la hipótesis (a_1), el operador $u \mapsto -\triangle u + a(|x|)u$ tiene una sucesión no decreciente de valores propios $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_i \leq \ldots$, repetidos según su multiplicidad y con funciones ortonormales asociadas $(e_i)_{i\geq 1}$ en $L^2(\Omega)$ [33]. También supondremos que:

(f_1) $f \in C([a,b) \times \mathbb{R})$ y para alguna $1 < p < 2^* := 2N/(N-2)$ y $C > 0$,

$$|f(r,u)| \leq C(1 + |u|^{p-1}),$$

(f_2) existe $\alpha > 2$ y $R > 0$ tales que

$$|u| \geq R \Rightarrow 0 < \alpha F(r,u) \leq u f(r,u),$$

(f_3) $|f(r,u)| = o(|u|)$, $|u| \to 0$, uniformemente para $r \in [0,b)$.

Bajo la hipótesis (f_1), el funcional φ es de clase $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Bajo (f_1) y (f_2) el funcional φ satisface la condición de Palais-Smale: cualquier sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $d = \sup_n \varphi(u_n) < \infty$ y $\varphi'(u_n) \to 0$ contiene una subsucesión convergente [33].

Consideraremos la clase

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) \mid \gamma(0) = 0 \text{ y } \varphi(\gamma(1)) < 0\},$$

y sea

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)).$$

Si $\lambda_1 > 0$, entonces por el teorema de Paso de Montaña existe un punto crítico tal que $\varphi(u) = c$ [33].

Teorema 5.1. *Bajo las hipótesis* (a_1) *y* (f_{123}), *si* $\lambda_1 > 0, \Omega$ *es una bola,* a *es una función creciente y* $f(\cdot, s)$ *decreciente donde* $s \in \mathbb{R}^+$, *entonces existe un punto crítico no negativo invariante bajo la Simetrización de Schwarz.*

Demostración. Sean $S = X = H_0^1(\Omega)$, $V = L^p(\Omega)$, $M = [0,1]$, $M_0 = \{0,1\}$, $H_0 \in \mathcal{H}_*$ cualquier polarizador fijo,

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) \mid \gamma(0) = 0 \text{ y } \varphi(\gamma(1)) < 0\},\\
\Gamma_0 &= \{\gamma \in C(M_0, H_0^1(\Omega)) \mid \gamma(0) = 0, \varphi(\gamma(1)) < 0\},
\end{aligned}$$

$\delta = 1/n^{1/2}$ y $\varepsilon = 1/n$. Entonces de la preservación de los polarizadores de normas en espacios de sobolev y en L^p se sigue que $\varphi(u^H) = \varphi(u)$. Además, si $c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t))$, entonces se cumple que

$$c > a := \sup_{\gamma_0\in\Gamma_0} \sup_{t\in M} \varphi(\gamma_0(t))$$

y que $c < \infty$ (para consultar los detalles puede verse [32] sección 2.4). Para cada $n \geq 1$, sea $\gamma \in \Gamma$ tal que:

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \leq c + 1/n.$$

Como $\varphi(|u|) \leq \varphi(u)$, podemos suponer que $\gamma(t) \geq 0$ para cada $t \in [0,1]$. Además $\gamma([0,1]) \subset H_0^1(\Omega)$ y $\gamma|_{M_0}{}^{H_0} \in \Gamma_0$. Luego, el Teorema 4.4 nos garantiza la existencia de una sucesión $(u_n) \in H_0^1(\Omega)$ tal que $|\varphi(u_n) - c| \leq 2/n$, $||\varphi'(u_n)||_{H_0^{-1}(\Omega)} \leq 8/n^{1/2}$ y $||u_n - u_n^*||_{L^2(\Omega)} \leq 2(2K+1)/n^{1/2}$. Como φ satisface la condición de Palais-Smale (ver también [32] sección 2.4 página 46), pasando a una subsucesión tenemos que, $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$, con $\varphi(u) = c$, $\varphi'(u) = 0$ y $u = u^*$. $\square$

Apéndices

Apéndice A

En este Apéndice demostraremos dos resultados de Crandall y Tartar [13] y uno de Brezis y Strauss [7], que fueron utilizados en los Capítulos 1 y 2, para demostrar el Corolario 1.21 y la Proposición 2.12 sobre la no expansividad de las simetrizaciones y las polarizaciones. Para efectos de este Apéndice, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ medible, $T : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ un mapeo que conserva la integral, es decir

$$\int_\Omega T(f) = \int_\Omega f, \tag{A.1}$$

entonces se demostrará que T es no expansiva si y sólo si preserva orden. Para ser más precisos, sea $f \vee g := \max\{f, g\}$ y $r^+ := r \vee 0$. Se tiene que

Lema A.1. *Sea $C \subset L^1(\Omega)$ con la propiedad de que $f, g \in C$ implica que $f \vee g \in C$. Sea $T : C \to L^1(\Omega)$ que satisface* (A.1) *para $f \in C$. Entonces las siguientes tres propiedades de T son equivalentes:*

1. *$f, g \in C$ y $f \leq g$ c.t.p. implica que $T(f) \leq T(g)$ c.t.p.,*

2. *$\int_\Omega (T(f) - T(g))^+ \leq \int_\Omega (f - g)^+$ para $f, g \in C$,*

3. *$\int_\Omega |T(f) - T(g)| \leq \int_\Omega |f - g|$ para $f, g \in C$.*

Demostración. Asumiendo que (A.1) se cumple, se demostrará que $1 \implies 2 \implies 3 \implies 1$. Sea, $f, g \in C$. Entonces $f \vee g = g + (f-g)^+ \in C$ por hipótesis y si 1 se cumple, $T(f \vee g) - T(g) \geq 0$. Además, $T(f) - T(g) \leq T(f \vee g) - T(g)$. Entonces se tiene que

$$(T(f) - T(g))^+ \leq T(f \vee g) - T(g). \tag{A.2}$$

Junto con (A.1) se sigue que

$$\int_\Omega (T(f) - T(g))^+ \leq \int_\Omega (T(f \vee g) - T(g)) = \int_\Omega (f \vee g - g) = \int_\Omega (f - g)^+,$$

lo cual demuestra $1 \implies 2$. Que $2 \implies 3$ es trivial al asumir 2, pues

$$\begin{aligned}\int_\Omega |T(f) - T(g)| &= \int_\Omega (T(f) - T(g))^+ + \int_\Omega (T(g) - T(f))^+ \\ &\leq \int_\Omega (f - g)^+ + \int_\Omega (g - f)^+ = \int_\Omega |f - g|.\end{aligned}$$

Finalmente, si $f, g \in C, f \geq g$ y 3 se cumple, entonces la identidad $2s^+ = |s| + s$ y (A.1) implican que

$$\begin{aligned}2\int_\Omega (T(g) - T(f))^+ &= \int_\Omega |T(g) - T(f)| + \int_\Omega (T(g) - T(f)) \\ &\leq \int_\Omega |g - f| + \int_\Omega (g - f) = 0,\end{aligned}$$

de modo que $T(g) \leq T(f)$ en c.t.p. $\square$

Lema A.2. *Sea $C \subset L^\infty(\Omega)$ con la propiedad de que $f, g \in C$ implica que $f \vee g \in C$ y $f + ||(g - f)^+||_\infty \in C$. Sea $T : C \to L^\infty(\Omega)$ que satisface que*

$$\text{si } r \in \mathbb{R}^+, f \in C \text{ y } f + r \in C, \text{ entonces } T(f + r) = T(f) + r. \tag{A.3}$$

Entonces las siguientes tres propiedades de T son equivalentes:

1. $f, g \in C$ *y* $f \leq g$ *c.t.p. implica que* $T(f) \leq T(g)$ *c.t.p.,*

2. $(T(f) - T(g))^+ \leq ||(f-g)^+||_\infty$ *en c.t.p. para* $f, g \in C$,

3. $|T(f) - T(g)| \leq ||f-g||_\infty$ *en c.t.p. para* $f, g \in C$.

Demostración. Asumiendo que (A.3) se cumple, se demostrará que $1 \implies 2 \implies 3 \implies 1$.

Sean $f, g \in C$. Entonces $g + ||(f-g)^+||_\infty \in C$ por hipótesis y $g + ||(f-g)^+||_\infty \geq f \vee g$ en c.t.p. Por lo tanto 1, (A.2) y (A.3) implican que

$$(T(f) - T(g))^+ \leq T(g + ||(f-g)^+||_\infty) - T(g) = ||(f-g)^+||_\infty \text{ en c.t.p.}$$

con lo cual queda demostrado 2. La implicación $2 \implies 3$ es inmediata como en el caso anterior. Para probar que $3 \implies 1$, sea $f \leq g$ en c.t.p. Entonces usando (A.3) y 3 con $r = ||(g-f)^+||_\infty = ||g-f||_\infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||T(f) - T(g) + r||_\infty &= ||T(f+r) - T(g)||_\infty \\ &\leq ||(f-g) + r||_\infty \leq r \end{aligned}$$

lo cual implica que $T(f) - T(g) \leq 0$ en c.t.p., i.e. 3. □

Lema A.3. *Sea* $T : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ *tal que*

a) $||Tu - Tv||_1 \leq ||u-v||_1$ *en c.t.p.,*

b) $Tu(x) - Tv(x) \leq \max\{0, \sup_\Omega (u-v)\}$ *en c.t.p.*

Sea $j : (-\infty, \infty) \to [0, +\infty]$ *una función convexa continua tal que* $\min j = j(0) = 0$. *Entonces*

$$\int_\Omega j(Tu(x) - Tv(x))dx \leq \int_\Omega j(u(x) - v(x))dx,$$

para toda $u, v \in L^1(\Omega)$ *con* $j \circ (u-v) \in L^1(\Omega)$.

Demostración. Definimos $y(x) := \text{mín}\{u(x), v(x) + t\}$ donde $t \geq 0$. Nótese que $y(x)$ es integrable y que $y(x) \leq v(x) + t$ en c.t.p. Por la hipótesis *b*), $Ty(x) \leq Tv(x) + t$ en c.t.p. Por lo tanto

$$Tu(x) - Tv(x) - t \leq Tu(x) - Ty(x) \quad \text{en c.t.p.}$$

Tomando la parte positiva da cada lado de la desigualdad e integrando sobre Ω, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_\Omega [Tu(x) - Tv(x) - t]^+ dx &\leq \int_\Omega [Tu(x) - Ty(x)]^+ dx \\ &\leq \int_\Omega |Tu(x) - Ty(x)| dx \\ &\leq \int_\Omega |u(x) - y(x)| dx \\ &= \int_\Omega [u(x) - v(x) - t]^+ dx, \end{aligned}$$

usando la hipótesis *a*) y la definición de $y(x)$. De manera análoga, intercambiando u por v y con $t' := -t \leq 0$ se sigue que

$$\int_\Omega [Tv(x) - Tu(x) + t']^+ dx \leq \int_\Omega [v(x) - u(x) + t']^+ dx.$$

Así hemos demostrado el resultado para dos casos particulares: $j_1(r) := (r - t)^+$ y $j_2(r) := (-r - t)^+$. Usando estos dos casos, se puede llegar a la desigualdad

$$\int_\Omega [t(Tu(x) - Tv(x) - t)]^+ dx \leq \int_\Omega [t(u(x) - v(x) - t)]^+ dx \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{A.4}$$

El caso general se sigue de tomar combinaciones convexas de j_1 y j_2. Si j es una función convexa continua arbitraria en $\mathbb{R}$ con derivada localmente Lipschitz continua tal que $j(0) = 0 = \text{mín}\, j$, entonces j' es diferenciable en casi todo punto con derivada en L^∞_{loc} (ver el libro de Rudin [25] Teorema 7.20) y se cumple que

$$j(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j''(t)}{|t|}[t(r-t)]^+ dt. \tag{A.5}$$

La igualdad anterior puede verificarse fácilmente considerando los casos $r \geq 0$ y $r < 0$ por separado e integrando por partes.

Multiplicando (A.4) por $j''(t)/|t|$ e integrando, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega} \frac{j''(t)}{|t|}[t(Tu(x)-Tv(x)-t)]^+ dxdt \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega} \frac{j''(t)}{|t|}[t(u(x)-v(x)-t)]^+ dxdt.$$

Notemos que $j'' \geq 0$, pues como j es convexa, j' es creciente y para casi todo t_o en $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{j'(t_o+h) - j'(t_o)}{h} \geq 0.$$

Ahora, por el Teorema de Fubini y (A.5) se sigue que

$$\int_\Omega j(Tu(x) - Tv(x))dx \leq \int_\Omega j(u(x) - v(x))dx.$$

Si j es una función convexa semicontinua inferiormente arbitraria con $j(0) = 0 = \min j$, existe una sucesión $\{j_\lambda\}$ de funciones como en (A.5) que convergen a j monótonamente por debajo. Por ejemplo, se pueden definir

$$j_\lambda(r) := \inf_t \{\frac{1}{2\lambda}|r-t|^2 + j(t)\}.$$

Evidentemente se cumple que $j_\lambda(0) = 0 = \min j_\lambda$, y la demostración de que cumplen tener derivada Lipschitz continua y ser convexas puede encontrarse en [8]. Entonces por el resultado anterior se tiene que

$$\int_\Omega j_\lambda(Tu(x) - Tv(x))dx \leq \int_\Omega j_\lambda(u(x) - v(x))dx \leq \int_\Omega j(u(x) - v(x))dx,$$

lo cual implica que $j(Tu - Tv) \in L^1(\Omega)$ y la desigualdad deseada después de pasar al límite.

Para más detalles respecto al proceso de regularización de funciones convexas, se puede revisar el artículo de Attouch [4] y los textos de Yosida [34] y Moreau [24]. $\square$

Apéndice B

En este Apéndice se demostrará un resultado técnico que se utilizó en la prueba de la Proposición 2.13.

Lema B.1. *Sea* $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N), H \in \mathcal{H}, v(x) := u(x^H)$, *y para* $\varepsilon > 0$ *se define la función* $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como:*

$$f_\varepsilon(t) := \begin{cases} (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Sean $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\omega_\varepsilon(x) := \begin{cases} u(x) + f_\varepsilon(v(x) - u(x)), & \text{si } x \in H, \\ u(x) - f_\varepsilon(u(x) - v(x)), & \text{si } x \in H^c, \end{cases}$$

y $V_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *definida para cada* $i \in \{1, 2, ..., N\}$ *por*

$$V_i(x) := \begin{cases} \partial_i u(x), & \text{si } x \in A, \\ \partial_i u(x) + f'_\varepsilon(v(x) - u(x))(\partial_i v(x) - \partial_i u(x)), & \text{si } x \in B, \\ \partial_i u(x), & \text{si } x \in C, \\ \partial_i u(x) - f'_\varepsilon(u(x) - v(x))(\partial_i u(x) - \partial_i v(x)), & \text{si } x \in D, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \Omega \mid u(x) \geq v(x)\} \bigcap H \\ B &:= \{x \in \Omega \mid u(x) < v(x)\} \bigcap H \\ C &:= \{x \in \Omega \mid u(x) \leq v(x)\} \bigcap H^c \\ D &:= \{x \in \Omega \mid u(x) > v(x)\} \bigcap H^c. \end{aligned}$$

Entonces $\omega_\varepsilon \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *y* $\partial_i \omega_\varepsilon = V_i$ *para toda* $i \in \{1, 2, ..., N\}$.

Demostración. Se demostrará que $\omega_\varepsilon \in W^{1,1}(B)$ para cualquier bola abierta B de $\mathbb{R}^N$ centrada en el origen, y ello implicará que lo mismo se cumple para cualquier compacto K de $\mathbb{R}^N$, pues siempre se puede encontrar un radio lo suficientemente grande tal que K esté contenido en B.

Sea $r > 0$, denotaremos simplemente por B_r a $B_r(0, \mathbb{R}^N)$. Sea también $\{u_n\} \subset C^\infty(B_r)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,1}(B_r)$ y definimos $v_n(x) := u_n(x^H)$. Claramente $v_n \in C^\infty(B_r)$ (se puede encontrar una fórmula sencilla para la derivada si se asume sin pérdida de generalidad que $0 \in \partial H$).

Las siguientes propiedades de f_ε se deducen fácilmente de su definición:

- $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$,

- $f_\varepsilon(0) = 0 = f'_\varepsilon(0)$,

- $|f_\varepsilon(t)| \leq |t| \ \forall t \in \mathbb{R}$,

- $|f'_\varepsilon(t)| \leq 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$, A continuación definamos $h_n, g_n, \vartheta_n : B_r \to \mathbb{R}$ como

$$
\begin{aligned}
h_n(x) &:= u_n(x) + f_\varepsilon(v_n(x) - u_n(x)), \\
g_n(x) &:= u_n(x) - f_\varepsilon(u_n(x) - v_n(x)), \\
\vartheta_n(x) &:= \begin{cases} h_n(x), & \text{si } x \in H \bigcap B_r, \\ g_n(x), & \text{si } x \in H^c \bigcap B_r. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Como u_n y v_n coinciden en ∂H y como $f_\varepsilon(0) = 0$ se tiene que h_n y g_n coinciden en ∂H, además como h_n y g_n son funciones continuas en su dominio se puede afirmar que ϑ_n es una función continua en B_r. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
\partial_i h_n(x) &= \partial_i u_n(x) + f'_\varepsilon(v_n(x) - u_n(x))(\partial_i v_n(x) - \partial_i u_n(x)), \\
\partial_i g_n(x) &= \partial_i u_n(x) - f'_\varepsilon(u_n(x) - v_n(x))(\partial_i u_n(x) - \partial_i v_n(x)),
\end{aligned}
$$

en el interior de sus respectivos dominios, y definimos

$$
W_n^i(x) := \begin{cases} \partial_i h_n(x), & \text{si } x \in H \bigcap B_r, \\ \partial_i g_n(x), & \text{si } x \in H^c \bigcap B_r. \end{cases}
$$

Entonces para todo $x \in \partial H \bigcap B_r$ y cualquier sucesión $\{x_n\} \subset B_r$ tal que $x_n \to x$ se tiene que $W_n^i(x_n) \to \partial_i u_n(x)$ cuando $n \to \infty$, pues $u_n(x) = v_n(x)$ y $f'_\varepsilon(0) = 0$. Y como $\partial_i h_n$ y $\partial_i g_n$ son funciones continuas en su dominio se puede afirmar que W_n^i es una función continua en B_r y que $W_n^i = \partial_i \vartheta_n$, i.e. $\vartheta_n \in C^1(B_r(0, \mathbb{R}^N))$.

Como

$$
|f_\varepsilon(u_n - v_n) - f_\varepsilon(u - v)| \leq |(u_n - v_n) - (u - v)| \leq 2|u_n - u|
$$

y

$$
|f'_\varepsilon(u_n - v_n)(\partial_i u_n - \partial_i v_n) - f'_\varepsilon(u - v)(\partial_i u - \partial_i v)| \leq |\partial_i u_n - \partial_i u| + |\partial_i v_n - \partial_i v|
$$

se tiene que $\vartheta_n \to \omega_\varepsilon$ y $W_n^i \to V_i$ en $L^1(B_r)$. Esto implica que ϑ_n es una sucesión de Cauchy en $W^{1,1}(B_r)$ y converge a una función en $W^{1,1}(B_r)$. La inyección continua $W^{1,1}(B_r) \hookrightarrow L^1(B_r)$ demuestra que esta función límite es ω_ε. Lo cual demuestra que $\omega_\varepsilon \in W^{1,1}(B_r)$. $\square$

Apéndice C

En este Apéndice agregamos algunos de los resultados que se tienen en la dirección de conseguir una sucesión de polarizadores que aproxime una función con su simetrización.

Para demostrar que algunas polarizaciones pueden aproximar una función dada con su simetrización, dividiremos la prueba en dos pasos: primero la compacidad relativa de cualquier sucesión de polarizaciones iteradas (lema C.1), después una condición de convergencia nos asegura la convergencia a la función simetrizada (lema C.2). Para fijar ideas, haremos las demostraciones para la Simetrización de Schwarz, pero las pruebas son completamente análogas para otras simetrizaciones.

Lema C.1. *Sea $u \in K_*(\mathbb{R}^N)$ y $(H_m)_{m\geq 0} \subset \mathcal{H}_*$ una sucesión de polarizadores. Definimos $u_m := u^{H_1 \ldots H_m}$. Entonces, existe $v \in K_*(\mathbb{R}^N)$ y una sucesión creciente $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que, para cualquier $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\lim_{k\to\infty} ||v - u_{m_k}||_p = 0.$$

Demostración. La compacidad de la sucesión $(u_m)_{m\geq 1}$ se prueba con el teorema de Arzelà-Ascoli. A continuación veremos que se cumplen las hipótesis del teorema:

1. La sucesión está uniformemente acotada: Para cualquier polarización H, $||u^H||_\infty = ||u||_\infty$, así pues, por inducción obtenemos que $||u_m||_\infty = ||u||_\infty < +\infty$.

2. La sucesión es equicontinua: Por el teorema 2.17 tenemos que $\omega_{u^H} \leq \omega_u$, se sigue por inducción que $\omega_{u_m} \leq \omega_u$. Como $u \in K_*(\mathbb{R}^N)$, u es uniformemente continua, y de estas dos propiedades se sigue que la sucesión es equicontinua.

Entonces el teorema de Arzelà-Ascoli garantiza la existencia de una subsucesión convergente en la norma $||\cdot||_\infty$ a una función $v \in C_+(\mathbb{R}^N)$. Sin embargo, como $(H_m)_{m\geq 0} \subset \mathcal{H}_*$ se tiene que existe $R > 0$ tal que $\mathrm{supp}(u_m) \subset B_R(0, \mathbb{R}^N)$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $v \in K_*(\mathbb{R}^N)$.

Y además se tiene que para $1 \leq p < \infty$

$$\int_{B_R(0,\mathbb{R}^N)} |u_m(x) - v(x)|^p dx \leq ||u_m - v||_\infty^p |B_R(0, \mathbb{R}^N)| \to 0,$$

cuando $m \to \infty$, lo cual concluye la demostración. $\square$

El siguiente lema nos dice, que para cualquier función no simétrica, existe un polarizador $H \in \mathcal{H}_*$ que la acerca a su simetrización.

Lema C.2. *Sea $u \in K_*(\mathbb{R}^N)$. Si $u \neq u^*$, entonces existe un polarizador $H \in \mathcal{H}_*$ tal que, para cualquier $1 \leq p < +\infty$,*

$$||u^H - u^*||_p < ||u - u^*||_p. \tag{C.1}$$

Demostración. Sea $H \in \mathcal{H}_*$ y $1 \leq p < +\infty$, entonces $u^* = (u^*)^H$ y por la no expansividad de las polarizaciones (Corolario 2.12), se tiene que:

$$||u^H - u^*||_p = ||u^H - (u^*)^H||_p \leq ||u - u^*||_p. \tag{C.2}$$

Para probar la desigualdad estricta es suficiente mostrar que para una elección adecuada de $H \in \mathcal{H}_*$ se cumple que:

$$|u^H(x) - u^*(x)|^p + |u^H(x^H) - u^*(x^H)|^p < |u(x) - u^*(x)|^p + |u(x^H) - u^*(x^H)|^p. \tag{C.3}$$

en un subconjunto $N \subset H$ de medida positiva. Pues entonces al integrar (C.3) sobre H se obtiene (C.1).

Como $u \neq u^*$, podemos encontrar un número $c > 0$ tal que

$$|\{u > c\} \triangle \{u^* > c\}| > 0.$$

Por la equimedibilidad se tiene que

$$|\{u^* > c\}| = |\{u > c\}|.$$

Si $\{u^* > c\} \backslash \{u \geq c\} = \emptyset$, eso significa que $u \equiv c$ en $\{u^* > c\} = \{u > c\}$ y como u es continua y u^* semicontinua por abajo (por la Proposición 1.11 (ii) y la Definición de u^*), existe $\varepsilon > 0$ tal que si $c' := c + \varepsilon$ entonces

$$\{u^* > c'\} \backslash \{u \geq c'\} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad |\{u > c'\} \triangle \{u^* > c'\}| > 0.$$

De modo que podemos suponer $\{u^* > c\} \backslash \{u \geq c\} \neq \emptyset$. Sea $y \in \{u^* > c\} \backslash \{u \geq c\}$ entonces $u^*(y) > c > u(y)$ y como u es continua y u^* es semicontinua inferiormente se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(y, \mathbb{R}^N) \subset \{u^* > c\} \backslash \{u \geq c\} \subset \{u^* > c\} \backslash \{u > c\}.$$

Además como $|\{u > c\} \backslash \{u^* > c\}| > 0$ entonces existe $p \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$|(\{u > c\} \backslash \{u^* > c\}) \bigcap B_\varepsilon(p, \mathbb{R}^N)| > 0.$$

Entonces podemos elegir un polarizador H tal que $y = (p)^H$ y $y \in H$ (como $u^*(p) \leq c < u^*(y)$ se sigue que $0 \in H$ y por Definición $H \in \mathcal{H}_*$).

Por lo tanto existe un subconjunto $N := B_\varepsilon(y, \mathbb{R}^N) \bigcap (\{u > c\} \backslash \{u^* > c\})^H \bigcap H$ de H de medida positiva tal que

$$u^*(x) > c \geq u(x), \quad u^*(x^H) \leq c < u(x^H) \;\; \forall x \in N. \tag{C.4}$$

De aquí se sigue que para toda $x \in N$

$$\begin{aligned} u^*(x) &> u(x), && \text{(C.5)} \\ u(x^H) &> u^*(x^H), && \text{(C.6)} \\ u^*(x) &> u^*(x^H), && \text{(C.7)} \\ u(x^H) &> u(x), && \text{(C.8)} \\ u^H(x) &= u(x^H), && \text{(C.9)} \\ u^H(x^H) &= u(x). && \text{(C.10)} \end{aligned}$$

Y mediante un análisis de los posibles casos, se demuestra que para todo $x \in N$

$$|u^H(x) - u^*(x)|^p + |u^H(x^H) - u^*(x^H)|^p < |u(x) - u^*(x)|^p + |u(x^H) - u^*(x^H)|^p, \tag{C.11}$$

es decir, la desigualdad (C.3) es estricta en N.

Aquí desarrollamos dos casos, y los demás son completamente análogos.

Caso I: $u^*(x) \geq u(x^H)$ y $u^*(x^H) \geq u(x)$. Entonces (C.5), (C.6), (C.7) y (C.8) implican que

$$|u^*(x) - u(x)| > |u^*(x) - u(x^H)| + |u^*(x^H) - u(x)|,$$

entonces

$$|u^*(x) - u(x)|^p > |u^*(x) - u(x^H)|^p + |u^*(x^H) - u(x)|^p$$

y junto con (C.9) y (C.10) se sigue (C.11).

Caso II: $u^*(x) < u(x^H)$ y $u^*(x^H) \geq u(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} |u^*(x) - u(x)| &> |u^*(x^H) - u(x)|, \\ |u(x^H) - u^*(x^H)| &> |u(x^H) - u^*(x)|, \end{aligned}$$

de donde se sigue (C.11).

Caso III: $u^*(x) \geq u(x^H)$ y $u^*(x^H) < u(x)$. Análogo al caso II.

Caso IV: $u^*(x) < u(x^H)$ y $u^*(x^H) < u(x)$. Análogo al caso I.

$\square$

Ahora estableceremos primero la convergencia de una sucesión de polarizadores para una función en particular.

Lema C.3. *Sean $u \in K_*(\mathbb{R}^N), 0 < \kappa < 1,$ y $\{H_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{H}_*$ una sucesión de polarizadores. Definimos $u_m := u^{H_1 \dots H_m}$. Si $\{H_m\}$ cumple que para toda $m \in \mathbb{N}$,*

$$||u_m - u^*||_1 - ||u_{m+1} - u^*||_1 \geq \kappa \sup_{H \in \mathcal{H}_*} (||u_m - u^*||_1 - ||u_m{}^H - u^*||_1). \quad \text{(C.12)}$$

Entonces la sucesión $\{u_m\}$ converge a u^* en $L^p(\mathbb{R}^N)$ para cualquier $1 \leq p \leq +\infty$, cuando $m \to \infty$.

Nota C.4. Para cualquier función $u \in K_*(\mathbb{R}^N)$, se puede construir una sucesión que cumpla la condición (C.12). En esencia, si $f_m : \mathcal{H}_* \to \mathbb{R}^N$ definida como $f_m(H) := ||u_m - u^*||_1 - ||u_m^H - u^*||_1$, entonces por la definición del supremo

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \overline{H} \in \mathcal{H}_* \text{ tal que } \ f_m(\overline{H}) \geq \sup_{H \in \mathcal{H}_*} f_m(H) - \varepsilon.$$

En particular podemos tomar $\varepsilon = (1-\kappa) \sup_{H \in \mathcal{H}_*} f_m(H)$, de donde se sigue (C.12).

Demostración. [del Lema C.3] Por el lema C.1 existe una subsucesión $(u_{m'})$ de $(u_m)_{m \geq 0}$ que converge a $v \in K_*$ para cualquier norma L^p. Como los arreglos $*$ son no expansivos (Proposición 1.20) y $u_m{}^* = u^*$,

$$||u^* - v^*||_p = \lim_{k \to \infty} ||u_{m'}{}^* - v^*||_p \leq \lim_{k \to \infty} ||u_{m'} - v||_p = 0,$$

entonces $u^* = v^*$. Para cualquier polarizador $H \in \mathcal{H}_*$, se tiene por la no expansividad de las polarizaciones y por la ecuación (C.12) que,

$$\begin{aligned} ||u_{m+1'} - u^*||_1 &\leq ||u_{m'+1} - u^*||_1 \\ &\leq ||u_{m'} - u^*||_1 + \kappa(||u_{m'}^H - u^*||_1 - ||u_{m'} - u^*||_1) \\ &= (1-\kappa)||u_{m'} - u^*||_1 + \kappa||u_{m'}^H - u^*||_1 \leq ||u_{m'} - u^*||_1. \end{aligned}$$

Tomando límites se obtiene que,

$$||v - u^*||_1 \leq (1-\kappa)||v - u^*||_1 + \kappa||v^H - u^*||_1 \leq ||v - u^*||_1,$$

de donde se sigue que, como $u^* = v^*$, $||v - v^*||_1 = ||v^H - v^*||_1$, lo cual sería absurdo si $v \neq v^*$ por el lema C.2. Por lo tanto la subsucesión $(u_{m'})$

converge a u^* para cualquier norma L^p, y finalmente la no expansividad de las polarizaciones y la unicidad del límite nos permiten concluir que

$$\lim_{k\to\infty} ||u_m - u^*||_p = \lim_{k\to\infty} ||u_{m'} - u^*||_p = 0.$$

$\square$

Notación y Definiciones Complementarias

- $B_r(p, X) := \{x \in X \mid d(p,r) < r\}$: la *bola de radio* r en el espacio métrico X.

- $\overline{B_r(p, X)} := \{x \in X \mid d(p,r) \leq r\}$: la *bola cerrada de radio* r en el espacio métrico X.

- f es una *función convexa* si $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, con $\lambda \in [0,1]$ y $x, y \in (-\infty, \infty)$.

- g es una función par si $g(s) = g(-s)$.

- Si A es un conjunto, "$\operatorname{int} A$" denota el *el interior de* A.

- La *función indicadora o característica* se define como:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- La *diferencia simétrica* se define como:

$$A \triangle B := (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A) = (A \bigcup B) \backslash (A \bigcap B).$$

$$
\begin{aligned}
L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) &:= \{f \in L^p(K) \mid \forall K \subset \mathbb{R}^N \text{ compacto } \}.\\
L^p_*(\mathbb{R}^N) &:= L^p_+(\mathbb{R}^N) := \{f \in L^p(\mathbb{R}^N) \mid f(x) \geq 0 \text{ en c.t.p. } x \in \mathbb{R}^N\}.\\
C_+(\mathbb{R}^N) &:= \{f \in C(\mathbb{R}^N) \mid f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}^N\}.\\
C_*(\mathbb{R}^N) &:= \{f \in C(\mathbb{R}^N) \mid f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}.\\
C^\infty_c(\mathbb{R}^N) &:= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto}\}.\\
K_*(\mathbb{R}^N) &:= \{f \in C(\mathbb{R}^N) \mid f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto}\}.\\
W^{1,p}(\Omega) &:= \{f \in L^p(\Omega) \mid \nabla f \in L^p(\Omega)\}.\\
W^{1,p}_{loc}(\Omega) &:= \{f \in W^{1,p}(K) \mid \forall K \subset \Omega \text{ compacto } \}.\\
W^{1,p}_0(\Omega) &:= \overline{W^{1,p}(\Omega) \bigcap C^\infty_c(\Omega)} \text{ (con respecto a la norma de } W^{1,p}).\\
W^{1,p}_{0,+}(\Omega) &:= \{f \in W^{1,p}_0(\Omega) \mid \ f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in \Omega\}.
\end{aligned}
$$

- Para $\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ p \in [1,\infty]$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos la *norma del espacio de Sobolev*

$$
\begin{aligned}
||u||_{W^{1,p}} &:= \left(||u||_p^p + \sum_{i=1}^n ||\partial_i u||_p^p\right)^{1/p} \text{ si } p < \infty,\\
||u||_{W^{1,\infty}} &:= \max_{i\in\{0,\ldots,n\}} ||\partial_i u||_\infty.
\end{aligned}
$$

- Dados M y N espacios métricos, se dice que $f : M \to N$ es *localmente Lipschitz continua* si $\forall u \in M\ \exists\ U \subset M$ vecindad abierta de u tal que existe una constante $K > 0$ (que depende de U) y que cumple que

$$d(f(x), f(y)) < Kd(x, y) \ \ \forall x, y \in U.$$

K recibe el nombre de *constante de Lipschitz.*

- Un espacio X es *paracompacto* si toda cubierta (abierta) tiene un refinamiento (abierto) localmente finito. Es decir, si $\mathcal{C}$ es una cubierta de X entonces existe $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda\in L}$, otra cubierta de X tal que para todo $C \in \mathcal{C}$ existe algún $C_\lambda \in \mathcal{C}'$ tal que $C_\lambda \subset C$ y para todo $x \in X$, existen índices $\lambda_1 \dots \lambda_n \in L$ y una vecindad $V \ni x$ tales que $V \bigcap C_\lambda \neq \emptyset \implies \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Se sabe que todo espacio métrico es paracompacto.

- Sea X un espacio métrico y $A \subset X$, $x \in X$ entonces

$$\operatorname{dist}(x, A) := \text{ínf}\{\operatorname{dist}(x, y) \mid y \in A\}.$$

- Sea φ una función real definida en un espacio normado X, y sea S un subconjunto de X,

$$\begin{aligned} \varphi^d &:= \{u \in X \mid \varphi(u) \leq d\} \\ ,S_\delta &:= \{u \in X \mid \operatorname{dist}(u, S) \leq \delta\}. \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] G. Alberti, *Some remarks about a notion of rearrengement*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29**, (2000) No. 2, 457-472.

[2] F. J. Almgren, Jr. y E. H. Lieb, *The (non) continuity of symmetric decreasing rearrangements (Cortona 1988)*, Symposia Mathematica **XXX** (Academic Press London, 1989), 89-102.

[3] H. Aman, *Ordinary Differential Equations. An Introduction to Nonlinear Analysis*, New York: de Gruyter, 1990.

[4] H. Attouch, D. Aze, *Approximation and regularization of arbitrary functions in Hilbert spaces by the Lasry-Lions method*, Annales de l'institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire, 10 no. 3 (1993), p. 289-312.

[5] A. Baerstein II, *A unified approach to symmetrization*, in Partial Differential Equatiuons of Elliptic Type, eds. A. Alvino et al., Symposia matematica, **35**, Cambridge Univ. Press (1995) 47-91. MR 96e:26019.

[6] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, Amsterdam: North-Holland mathematics studies, 1985.

[7] H. Brezis y W. A. Strauss, *Semi-linear second-order elliptic equations in L^1*, J. Math. Soc. Japan **25**, No 4, (1973) 565-589.

[8] H. Brezis, *Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires*, Israel J. Math. **9**, (1971) 513-534.

[9] H. Brezis, *Análisis funcional. Teoría y Aplicaciones*, Madrid: Alianza Editorial, 1984.

[10] F. Brock y A. Solynin, *An approach to symmetrization via Polarization*, Trans. Amer. Math. Soc. **352**, No 4, 1759-1796.

[11] X. Cabré, *Elliptic PDEs in Probability and Geometry. Symmetry and regularity of solutions*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **20**, 2008, 425-457.

[12] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396–414.

[13] M. G. Crandall y Luc Tartar, *Some relations between nonexpansive and order preserving mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **78**, No 3, (1980) 385-390.

[14] J.A. Crowe y J.A. Zweibel, *Rearrangements of Functions*, Journal of Functional Analysis **66**, 432-438, 1986.

[15] J. Dugundji, *Topology*, Boston : Allyn and bacon, 1966.

[16] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society: Graduate Studies in Mathematics, Volumen 19, 1998.

[17] G. B. Folland, *Real analysis : modern techniques and their applications*, New York : J. Wiley, 1999.

[18] B. Gidas, W. M. Ni y L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Commun. Math. Phys. 68(3) (1979) 209-243.

[19] D. Gilbarg y N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer: Berlin Heidelberg New York, 2001.

[20] B. Kawohl, *On the isoperimetric nature of a rearrengement inequality and its consequences for some variational problems*, Arch. Rational Mech. Anal., (1986) 227-243.

[21] S. Kesavan, *Symmetrization and Applications*, Series in Analysis Vol. 3, New Jersey : World Scientific, 2006.

[22] J.J. Koliha, *Approximation of Convex Functions*, Real Analysis Exchange, 29 (2003/2004), 465-471.

[23] S. Lang, *Differential and Riemannian Manifolds*, New York : Springer, 1995.

[24] J.-J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Lecture Notes, Collège de France, Paris, 1967.

[25] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, New York : McGraw-Hill, 1966.

[26] J. Van Schaftingen, *Symmetrization and minimax principles* , Commun. Contemp. Math. **7**, No 4 (2005) 463-481.

[27] J. Van Schaftingen, *Universal approximation of symmetrizations by polarization*, Proc. Amer. Math. Soc. **134**, No 1 (2005), 177-186.

[28] J. Van Schaftingen, *Anisotropic symmetrization*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 23 (2006), no. 4, 539–565.

[29] L. Schwartz, *Cours d'analyse*, Hermann, Paris, 1991-1994.

[30] M. Sosa, *Soluciones periódicas del péndulo forzado y condiciones de Landesman-Lazer*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Argentina, 85pp. 2006.

[31] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung*, Berlin, Springer, 2000.

[32] M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Casini, Paris, 2003.

[33] M. Willem, *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol 24 (Birkhäuser, Boston, Mass., 1996).

[34] K. Yosida, *Functional analysis*, third ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

CIENCIAS