



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## PROGRAMA DE MESTRIA Y DOCTORADO EN INGENIERIA

“Control descentralizado de una Clase de Sistemas  
No Lineales Usando Redes Neuronales Difusas”

Tesis presentada por

Miguel Ángel Hernández López



como requisito  
para obtener el Grado de Doctor  
en Ingeniería

Ciudad Universitaria, Distrito Federal.

Verano de 2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: **Dr. Alvarez Icaza Longoría Luis Agustín**

Secretario: **Dr. Benítez Pérez Héctor**

Vocal: **Dr. Tang Xu Yu**

1er. Suplente: **Dr. Arteaga Pérez Marco**

2do. Suplente: **Dr. Espinosa Pérez Gerardo René**

Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria

**TUTOR DE TESIS:**

**Dr. Tang Xu Yu**

---

**FIRMA**

## Agradecimientos

Quiero agradecer a todos los que hicieron esto posibles. Pero, en especial a mi esposa e hijo Natalia y Gonzalo por su amor, apoyo, comprensión y paciencia.

A mis Padres y a mi hermana por su apoyo incondicional.

Al Dr. Yu Tang, no solo por su asesoría, sino por su paciencia, apoyo, sus consejos y amistad.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por la formación y oportunidades que he adquirido por ella.

Al Consejo Nacional de Ciencia y tecnología por su apoyo, sin el cual este proyecto hubiera sido más complicado desarrollarlo.

# Índice

Resumen .....	VII
---------------	-----

## 1. Introducción

1.1. Motivación .....	1
1.2. Planteamiento del problema .....	3
1.3. Revisión de la literatura .....	5
1.4. Contribuciones .....	9
1.5. Organización del trabajo .....	10

## 2. Preliminares

2.1. Forma normal .....	12
2.2. Estabilidad .....	13
2.3. Redes neuronales difusas .....	14
2.4. Sistemas de lógica difusa .....	15
2.5. Redes neuronales .....	18
2.6. Redes neuronales difusas recurrentes (RNDR) .....	24
2.7. <i>Desigualdades utilizadas</i> .....	28
2.8. <i>Dinámica de un robot de dos grados de libertad.</i> .....	30

### **3. Control Por Redes Neuronales Pre-alimentadas**

3.1. Formulación del problema . . . . .	33
3.2. Aproximación de la ley de control ideal . . . . .	35
3.3. Diseño del <i>controlador</i> . . . . .	37
3.4. Resultados de simulaciones. . . . .	42
3.5. Conclusiones previas. . . . .	43

### **4. Control por Retroalimentación de Salida**

4.1. Formulación del problema . . . . .	45
4.2. Nueva estructura de redes neuronales difusas recurrentes- RNDR .	48
4.3. Diseño del controlador . . . . .	50
4.4. Retroalimentación de salida. . . . .	59
4.5. Resultados de simulación y experimentales . . . . .	60
4.6. Conclusiones previas. . . . .	62

### **5. Control por Retroalimentación de Salida con RNDR**

5.1. Formulación del problema. . . . .	75
5.2. Propuesta de una red neuronal difusa recurrente. . . . .	77
5.3. Diseño del control. . . . .	79
5.4. Resultados de simulación y experimentos. . . . .	79
5.5. Conclusiones previas. . . . .	80

### **6. Conclusiones . . . . . 92**

**7. Bibliografía..... 95**

## Resumen

En esta tesis, se presenta una metodología para el diseño y análisis de esquemas de control descentralizado para sistemas no lineales. En particular, se consideran tres casos. Primero, se diseña y analiza un esquema cuya ley de control está compuesta por dos términos, uno basado en SLD estáticos que aproxima la ley de control ideal del sistema, y otro una señal que compensa el efecto del término de interconexión en cada subsistema con el resto de la planta, así como también las incertidumbres del sistema en lazo cerrado. En ambos casos el diseño se lleva a cabo considerando la retroalimentación de los estados, y posteriormente la salida es retroalimentada por medio de un observador de estados. En el segundo esquema de control propuesto, se sustituye el SLD que aproxima la ley de control ideal del sistema por una Red Neuronal Difusa Recurrente (RNDR) adaptable. Por último, la tercera ley de control es un esquema diseñado por retroalimentación de salida, que consta de un solo término basado en una RNDR

Los resultados obtenidos, fueron validados por simulación en el primero esquema, y de manera experimental en el segundo y tercer controlador. Las simulaciones se hicieron con un robot de dos grados de libertad. Mientras que los experimentos, se llevaron a cabo en un robot de cinco grados de libertad tipo Rhino, aunque sólo se utilizaron dos eslabones (codo y hombro) para tener un movimiento planar.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

En la actualidad muchos sistemas están compuestos por un conjunto de subsistemas interconectados entre si. Por ejemplo, plantas generadoras de electricidad, plantas ensambladoras, procesos industriales, etc. Esta clase de sistemas presentan diferentes complicaciones, como es el contar con modelos matemáticos que involucran ecuaciones dinámicas de orden superior, un incremento en el grado de las incertidumbres tanto paramétricas como no paramétricas, además de requerir un alto flujo de información sobre el estado de la planta entre los subsistemas. Esto puede dificultar el diseño de un sistema de control centralizado, por el alto costo asociado o por limitaciones prácticas al encontrarse distribuidos en un espacio extenso [32]

Dado un sistema de dimensión elevada, si este puede ser dividido en un conjunto de subsistemas interconectados entre si, es posible bajo ciertas condiciones diseñar un esquema de control descentralizado para cada uno. Dichos esquemas de control poseen las propiedades de solo requerir información local del subsistema asignado, ser robustos a fallas en el resto de los subsistemas, además de poder alcanzar un desempeño similar al de un esquema de control centralizado, con la adecuada elección de los parámetros de diseño.

Algunos de los esquemas de control descentralizado que se han propuesto están basados en el uso de Sistemas de Lógica Difusa (SLD) y Redes Neuronales Artificiales (RNA). Esta combinación ha demostrado tener un alto desempeño en el control e identificación de sistemas. Pero la estructura de los SLD o RN ha resultado complejas, al involucrar un alto número de parámetros por sintonizar. En años recientes, se han propuesto estructuras de

SLD y RNA en los cuales las salidas de algunas de sus capas son retroalimentadas dentro de la propia estructura. Por lo que se les ha definido como Redes Neuronales Recurrentes (RNR) y Sistemas de Lógica Difusa Recurrentes (SLDR). Esta retroalimentación de términos proporciona una dinámica interna que les permite aproximar no solo mapeos estáticos, sino también mapeos dinámicos. Se han presentado en la literatura esquemas de control, sin embargo, muchos de los esquemas propuestos carecen de un análisis de estabilidad en lazo cerrado, o bien, requieren de fuertes restricciones sobre el sistema, que impiden su aplicación práctica.

En esta tesis, se presenta una metodología para el diseño y análisis de esquemas de control descentralizado para sistemas no lineales. En particular, se consideran tres casos. Primero, se diseña y analiza un esquema cuya ley de control está compuesta por dos términos, uno basado en SLD estáticos que aproxima la ley de control ideal del sistema, y otro una señal que compensa el efecto del término de interconexión en cada subsistema con el resto de la planta, así como también las incertidumbres del sistema en lazo cerrado. En ambos casos el diseño se lleva a cabo considerando la retroalimentación de los estados, y posteriormente la salida es retroalimentada por medio de un observador de estados. En el segundo esquema de control propuesto, se sustituye el SLD que aproxima la ley de control ideal del sistema por una Red Neuronal Difusa Recurrente (RNDR) adaptable. Por último, la tercera ley de control es un esquema diseñado por retroalimentación de salida, que consta de un solo término basado en una RNDR

Los resultados obtenidos, fueron validados por simulación en el primero esquema, y de manera experimental en el segundo y tercer controlador. Las simulaciones se hicieron con un robot de dos grados de libertad [34]. Mientras que los experimentos, se llevaron a cabo en un robot de cinco grados de libertad tipo Rhino, aunque sólo se utilizaron dos eslabones (codo y hombro) para tener un movimiento planar.

## 1.2. Planteamiento del problema

Considérese un sistema no lineal definido por el siguiente modelo

$$\begin{aligned}\Sigma : \dot{\mathbf{x}} &= F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})u \\ y &= H(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $u, y \in \mathbb{R}^N$  son los vectores de entradas y salidas del sistema, respectivamente,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  con  $n \geq N$  son los estados.  $F(\cdot)$ ,  $G(\cdot)$  y  $H(\cdot)$  son funciones suficientemente suaves. Asumimos que el sistema (1.1) puede ser descompuesto de acuerdo a algún criterio en  $N$  subsistemas interconectados de una entrada y una salida (ver [8]).

$$\begin{aligned}\Sigma_i : \dot{\mathbf{x}}_i &= F_i(\mathbf{x}) + G_i(\mathbf{x}_i)u_i \\ y_i &= H_i(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde  $[\mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T \ \dots \ \mathbf{x}_N^T]^T = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_i \triangleq [x_{i,1} \ x_{i,2} \ \dots \ x_{i,n_i}]^T \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $n = \sum_{i=1}^N n_i$  son los estados del  $i$ -ésimo subsistema,  $u_i, y_i \in \mathbb{R}$  son la entrada y salida de cada subsistema, respectivamente.

Antes de definir los objetivos, se presenta una definición clave para su planteamiento.

*Señal finalmente acotada.* Una señal  $x(t)$  es finalmente acotada, si existen constantes positivas  $b$  y  $c$ , independientes de  $t_0 > 0$ , tal que para cada  $a \in (0, c)$ , Existe  $T = T(a, b)$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\| \mathbf{x}(t_0) \| \leq a \implies \| \mathbf{x} \| \leq \beta, \forall t \geq t_0 + T \quad (1.3)$$

El objetivo es diseñar una ley de control descentralizada  $u_i$  para cada subsistemas, tal que la salida de cada uno de estos siga una señal de referencia previamente definida. Además, de que todas las señales asociadas a la ley de control sean acotadas y el error de seguimiento  $e_i^{(j)}$  entre la señal de referencia y la trayectoria real del subsistema sea uniforme finalmente acotado.

De manera particular los objetivos planteados son:

- Desarrollar un esquema de control descentralizado que requiera un mínimo de información de la planta.
- Analizar el desempeño de las Redes Neuronales Difusas (RND) dentro de esquemas de control directo. En especial de las RNDR.
- Estudiar los esquemas de control descentralizado de sistemas no lineales, tanto por retroalimentación de estados como de salida con y sin el uso de un observador de estados.

Para resolver estos problemas, es necesario considerar las siguientes suposiciones

### Suposiciones Generales

- $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $G_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ , y  $H_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones suaves posiblemente desconocidas
- En cada subsistema  $\Sigma_i$  existe un difeomorfismo  $T_i$  tal que

$$x_i = T_i(y_i) \quad (1.4)$$

### 1.3. Revisión de la literatura

En esta sección se hace una revisión de los trabajos de investigación más relevantes sobre los temas relacionados.

Los primeros trabajos sobre el control de sistemas de gran escala compuestos por un conjunto de subsistemas interconectados, fueron propuestos para sistemas lineales. En [11] se propone un esquema de control adaptable, con términos de interconexión no lineales, parámetros desconocidos y perturbaciones acotadas. Se logra establecer la estabilidad basado la condición de la Matriz-M [15]. La validación de los resultados fue hecha por medio de simulación. En [7], se elimina la necesidad de la condición de la Matriz-M al proponer un esquema de control adaptable cuyo diseño se basa en el cumplimiento de una condición de emparejamiento (**Matching**) (la cual implica que el término de interconexión entra al subsistema por el mismo canal por el cual lo hace la entrada). Con ello incorpora los términos de interconexión en el controlador y los maneja como entradas y salidas adicionales en los subsistemas, las cuales están relacionadas por una función desconocida pero acotada. Demostraron que si el límite de la interconexión es lineal y tiene un sesgo nulo, los controladores adaptables descentralizados pueden ser diseñados de tal forma que aseguren la convergencia de las señales del sistema en lazo cerrado. Sus resultados son evaluados en un sistema de dos péndulos unidos por un resorte.

Un esquema de control descentralizado para sistemas con términos de interconexión no lineales se analiza en [31]. Lo anterior se llevo a cabo al asumir que los términos de interconexión están acotados por un polinomio de orden superior, a partir de lo cual se propone un esquema de control adaptable independiente para cada subsistema que incorpora una señal de compensación que depende del polinomio que acota los términos de

interconexión. Este esquema de control garantiza la estabilidad de cada subsistema, así como la convergencia asintótica del error de seguimiento.

El control descentralizado de sistemas no lineales, se inicia por la extensión de resultados obtenidos inicialmente para sistemas lineales [27, 16, 5, 12]. Posteriormente, en [30] se presenta un esquema de control adaptable descentralizado para robots manipuladores. La ley de control retroalimenta la posición-velocidad-aceleración vía un controlador PID con ganancias ajustables. Considerando también robots manipuladores, en [23] se propone una ley de control compuesta por tres términos, un controlador PD más un término no-lineal y un elemento adaptable que aproxima el término de interconexión.

Asumiendo que se cumple alguna condición geométrica y utilizando una técnica de diseño basada en **back stepping** en [13] se considera una clase de sistemas no lineales interconectados que no satisfacen la condición emparejamiento, desarrollando un esquema de control adaptable por retroalimentación de salida vía un observador de estados.

Una herramienta que ha sido frecuentemente utilizada dentro de esquemas de control descentralizado, son los SLD y la RN [43, 39, 36, 38]. En [43], se propone un esquema de control descentralizado adaptable para sistemas no lineales, basado en el principio de modos deslizantes, con un SLD por medio del cual se compensan las incertidumbres del sistema. En [36] se proponen dos esquemas de control descentralizado para sistemas no lineales afines en control por retroalimentación de estados. El primero es un esquema de control directo y el segundo, es un controlador indirecto. Ambas leyes de control están basadas en Redes Neuronales de Base Radial y en la condición de la Matriz-M para llevar a cabo la determinación de la estabilidad del sistema. En [39] se diseñan dos esquemas de control descentralizado basado en SLD adaptables para sistemas no lineales. El primero, es un controlador directo en donde la ley de control es aproximada por un SLD. El segundo, es

un controlador indirecto, en donde las dinámicas desconocidas son aproximadas por un SLD. En los dos casos, las leyes de adaptación de los parámetros consecuentes de los SLD son obtenidas por medio del análisis de Lyapunov del sistema en lazo cerrado. En [39] se propone un esquema de control descentralizado no lineal, compuesto por dos términos, uno basado en SLD que aproxima la ley de control ideal del sistema, más un término adicional que compensa las incertidumbres y el término de interconexión en los subsistemas el cual se asume está acotado por un polinomio de alto orden conocido.

Además de los esquemas de control descentralizado basados en SLD y RN antes mencionados, existen otros diseños basados en estas herramientas que deben ser considerados. En la actualidad se pueden encontrar dos tipos de SLD. El primer es el tipo Mamdani, obtenido por la incorporación de la experiencia humana dentro de un esquema formado por reglas de inferencia, en donde la información es incorporada de manera lingüística por medio de funciones membresía en su parte antecedente y consecuente [2]. El segundo esquema, es presentado por Takagi y Sugeno en [37], donde se propone la estructura y metodología para el diseño de un SLD para su aplicación en la identificación y control de sistemas a partir de una relación entre sus entradas y salida. El diseño, análisis e implementación de esquemas de control para sistemas no lineales de manera directa e indirecta basado en SLD tipo Takagi-Sugeno es estudiado en [42]. Aquí se proponen diferentes controladores con SLD adaptables y leyes de adaptación obtenidas a partir del análisis de Lyapunov del sistema en lazo cerrado garantizando la estabilidad.

La incorporación de RN dentro del diseño de esquemas de control directo para una clase de sistemas no lineales, así como un análisis de la reconstrucción de funciones por medio de Redes Neuronales de Base Radial (RNBR) se presentan en [29], logrando establecer el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado. Posteriormente, en [26] es propuesto un esquema basado en RN para el control e identificación de sistemas no lineales utilizando

únicamente su entrada y salida sin la disponibilidad para medir de los estados del sistema y con ello resolver el problema de regulación y seguimiento de la salida.

En los últimos años, se han propuesto diferentes esquemas de control e identificación de sistemas basados en RN y SLD recurrentes. En [21] se muestra cómo una RNR es utilizada para compensar y reducir la influencia de la variación de parámetros y perturbaciones externas. La ley de adaptación de parámetros es obtenida a partir del uso de un algoritmo de retro-propagación dinámico. En [22] se utiliza una RNR similar para el diseño de un control híbrido adaptable. Con la diferencia de que el algoritmo de entrenamiento está basado en la imitación de una ley de control óptima, agregando una señal para compensar la diferencia entre la ley de control óptima y el control por RNR.

En [19] se presenta la estructura de una RNDR para el control e identificación de sistemas no lineales. La RNDR propuesta presenta la retroalimentación de estados en la capa consecuente, más específicamente las salida de las funciones membresía es retroalimentada dentro de la misma función. Los algoritmos de entrenamiento se obtienen a partir de minimizar una función de error cuadrático. El análisis de estabilidad del identificador y del controlador se hace de manera separada, logrando garantizar la convergencia de las señales de error de estimación y seguimiento. Aunque establecen fuertes restricciones al sistema. Un esquema similar se plantea en [17], en donde se diseñan dos RNDR una para identificar la dinámica del sistema y con base en la información obtenida se diseña un la segunda red por medio de la cual se controla el sistema. A diferencia del caso anterior la adaptación de los parámetros se lleva a cabo por medio de un algoritmo de retro-propagación (***backpropagation***) dinámico, a partir del cual se logra establecer la convergencia de las señales de error de seguimiento y estimación del sistema, si bien el desempeño es bueno el análisis de estabilidad no es realizado y se concretan a hacer el análisis de convergencia de los parámetros estimados.

En [14] se diseña un esquema para la identificación de sistemas basado en SLDR. La propuesta se basa en un SLD tipo Takagi-Sugeno, al cual se incorpora una salida adicional por cada regla de inferencia. Esta salida se convierte en un estado adicional de la red, debido a que es retroalimentado dentro de la misma red a la parte antecedente. Para llevar a cabo el entrenamiento de los parámetros de la parte consecuente se utilizan algoritmos genéticos. En este caso se carece de un análisis de convergencia y de estabilidad del sistema.

Los esquemas de control mencionados anteriormente presentan algunas dificultades para su implementación. Algunos, por las restricciones impuestas a los sistemas [16, 12, 13] y otros por la dificultad para implementar el control mismo [43,39,36]. Debido a lo antes mencionado, se considera que el control descentralizado es un tema aun abierto al estudio y que es posible su combinación con herramientas como los SLD y RN recurrentes, por medio de las cuales se pueda simplificar su diseño y mantener o mejorar su desempeño.

## 1.4. Contribuciones

Las contribuciones realizadas por esta investigación se resumen en:

- Se diseñó un esquema de control descentralizado para una clase de sistema no lineal por retroalimentación de estados, basado en Redes Neuronales Pre-alimentadas. Se logra establecer la estabilidad *finalmente acotada* del sistema en lazo cerrado. Estos resultados se presentaron en el CDC 2004 y en 10th IFAC/IFORS/IMACS/IFIP Symposium on Large Scale Systems: Theory and Applications 2004.

- Se propone la estructura de una Red Neuronal Difusa Recurrente (RNDR) que puede ser empleada en el control de una clase de sistemas no lineales. En la estructura propuesta se incorpora un término en la dinámica interna de la RNDR proporcionándole un grado de libertad adicional.
- Se diseñó un esquema de control descentralizado para una clase de sistemas no lineales por retroalimentación de estados, basado en Redes Neuronales Difusas Recurrentes adaptables, a partir del cual se logra establecer la estabilidad *finalmente acotada* del sistema en lazo cerrado. Estos resultados se presentaron en el congreso IMECS-ICCA-2007 y forman parte del libro cuyo título provisional es *Avances recientes en ingeniería e investigación de operaciones*, editado por Springer.
- Se diseñó un esquema de control descentralizado por retroalimentación de salida sin el uso de un observador de estados para una clase de sistemas no lineales con el cual se puede alcanzar estabilidad *finalmente acotada* de todas las señales en lazo cerrado. Los resultados fueron presentados en el congreso AMCA-2006 y han sido sometidos para su publicación en la revista *Control and Automation Theory*.

## 1.5. Organización del trabajo

La presentación de los resultados de la investigación así como los antecedentes necesarios para su revisión se encuentran organizados de la siguiente forma.

En el Capítulo 2, se proporcionan conceptos y antecedentes necesarios para el análisis de las leyes de control propuestas.

En el Capítulo 3, se diseña un esquema de control descentralizado basado en Sistemas de Lógica Difusa para sistemas no lineales afines en control por retroalimentación de estados.

El Capítulo 4 presenta un esquema de control por retroalimentación de salida para una clase de sistemas no lineales. El diseño se hace inicialmente por retroalimentación de estados, posteriormente la salida es retroalimentada por medio de un observador de alta ganancia.

El Capítulo 5 muestra el diseño de un esquema de control descentralizado por retroalimentación de salida sin el uso de un observador de alta ganancia. El diseño se hace considerando sistemas no lineales con subsistemas de segundo orden. Lo cual permite tener una ley de control compuesta sólo por un término basado en RNDR.

En el Capítulo 6, se presentan las conclusiones del trabajo, y se sugieren algunas extensiones de los trabajos en el futuro.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos teóricos sobre sistemas no lineales y Redes Neuronales Difusas que serán necesarios para el análisis del diseño de los esquemas de control propuestos.

### 2.1 Forma normal

Se consideran sistemas no-lineales afines en control definidos por

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.1)$$

$$y = h(x), \quad (2.2)$$

donde  $u, y \in \mathbb{R}$  son la entrada y salida del sistema, respectivamente,  $x \in \mathbb{R}^n$  los estados del sistema.  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones suficientemente suaves. Si se define  $y = \psi_1(x) = h(x)$  y

$$\psi_i = \frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}, \quad (2.3)$$

bajo la suposición de que el sistema (2.1)-(2.2) tiene orden relativo  $n$  se puede obtener

$$y^{(n)} = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x)u. \quad (2.4)$$

con

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x) \neq 0. \quad (2.5)$$

Esta ecuación muestra claramente que el sistema es linealizable tanto Entrada-Estado como Entrada-Salida. A partir de lo cual la señal de control por retroalimentación de estados está definida por

$$u = \frac{1}{\frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x)} \left[ -\frac{\partial \psi_n}{\partial x} f(x) + v \right]. \quad (2.6)$$

reduciendo el mapeo Entrada-Salida a

$$y^{(n)} = v, \quad (2.7)$$

el cual representa es una cadena de integradores.

## 2.2 Estabilidad

A continuación se presentan algunos teoremas y conceptos de estabilidad que serán necesarios posteriormente

*Teorema 2.1* Sea  $x=0$  un punto de equilibrio para  $\dot{x} = f(x)$  y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene  $x=0$ . Dada una función  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable tal que

$$W_1(x) \leq T(x) \leq W_2(x) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0, \quad (2.9)$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall x \in D$ , donde  $W_1(x)$  y  $W_2(x)$  son funciones positivas definidas en  $D$ . Entonces,  $x=0$  es estable

Dado un sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(x), \quad (2.10)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $D \subset \mathbb{R}^n$ , un dominio que contiene al origen, se dice que la solución de (2.10) es

- Acotada si existe una constante positiva  $c$ , independiente de  $t_0 \geq 0$ , tal que para cada  $a \in (0, c)$ , existe  $\beta = \beta(a) > 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\| \mathbf{x}(t_0) \| \leq a \implies \| \mathbf{x} \| \leq \beta, \forall t \geq t_0 \quad (2.11)$$

- **Globalmente acotada** si (2.11) es cierta para una  $a$  arbitraria
- **Finalmente acotada** con una cota  $b$  si existen constantes positivas  $b$  y  $c$ , independientes de  $t_0 > 0$ , tal que para cada  $a \in (0, c)$ , existe  $T = T(a, b)$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\| \mathbf{x}(t_0) \| \leq a \implies \| \mathbf{x} \| \leq b, \forall t \geq t_0 + T \quad (2.12)$$

- **Global uniforme finalmente acotada** si (2.12) es cierta para una  $a$  arbitrariamente grande.

## 2.3 Redes neuronales difusas

En esta sección se describen brevemente los Sistemas de Lógica Difusa (SLD), las Redes Neuronales (RN), las Redes Neuronales-difusas (RND) y las Redes Neuronales Recurrentes.

### 2.3.1 Sistemas de lógica difusa

Los Sistemas Lógica Difusa son una de las áreas de la Inteligencia Artificial mediante la cual se busca reproducir la forma en la cual lleva a cabo el razonamiento humano al resolver un problema. Esto se logra llevar a cabo gracias a una estructura de reglas de inferencia denominadas *Reglas If-then*, las cuales están formadas por dos bloques denominados parte antecedente y parte consecuente y que están compuestos por los siguientes elementos:

- *Funciones membresía*: Es una función que determina el grado de pertenencia de un elemento de un conjunto. Se denota generalmente por  $\mu$  y puede adoptar valores entre 0 y 1. Las funciones membresía que se suelen utilizar son las que se muestran en la Figura 2.1.
- *Conjuntos Difusos*: Son conjuntos en los que se segmentan los espacios de discusión de las variables de entrada del sistema por funciones membresía donde por medio del uso de la Lógica Difusa, se obtienen los grados de pertenencia parciales de cada valor de las señales de entrada.
- *Reglas If-Then*: Es un conjunto de reglas constituidas por dos bloques. El primero, está formado por conjuntos difusos, en donde se realiza la transformación de los valores numéricos en valores lingüísticos. El segundo bloque, determina el valor que tendrá la salida, si las variables de entrada pertenecen a la parte antecedente correspondiente. Las reglas IF- THEN, se pueden interpretar como, si (IF) las condiciones  $x$  se cumplen, entonces (THEN) la salida es  $Y$ .

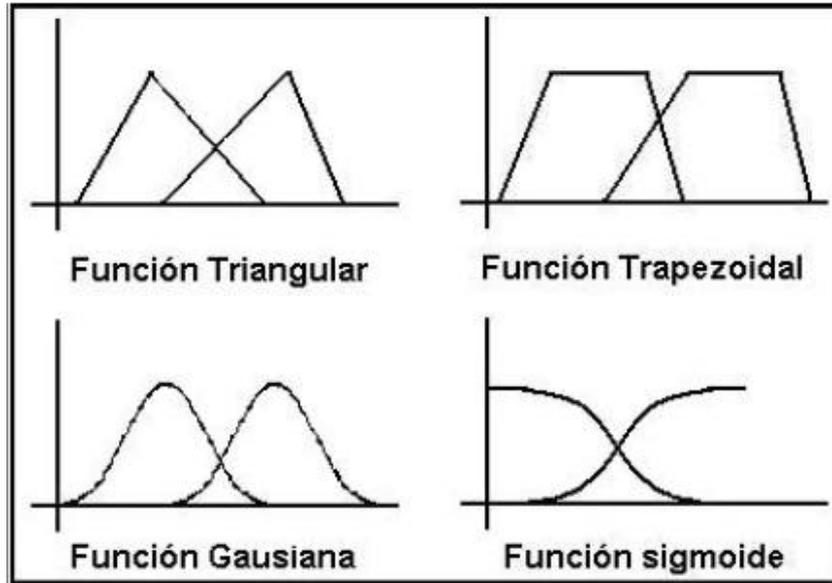


Figura 2.1: Funciones membresía más utilizadas.

En la actualidad existen dos tipos de SLD, los tipos Mamdani y tipo Sugeno. En este trabajo, se utiliza únicamente modelos del tipo Sugeno. Los modelos tipo Sugeno se caracterizan por aproximar los sistemas haciendo uso de valores constantes (conocidos como singletons), o bien por polinomios de primer grado. Como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned}
 & \text{IF } X_1 \text{ is } A_1 \text{ and } \dots \text{ and } X_n \text{ is } A_n \\
 & \text{THEN } Y_r = b_{0,r} + b_{1r}X_1 + \dots + b_{nr}X_n \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

O bien

$$\text{IF } X_1 \text{ is } A_1 \text{ and } \dots \text{ and } X_n \text{ is } A_n \quad \text{THEN } Y_r = b_{0,r} \quad (2.14)$$

Donde  $X_i$  es la  $i$ -ésima variable de entrada,  $A_i$  es el conjunto difuso asociado a la  $i$ -ésima variable de entrada,  $Y_{ir}$  es la  $i$ -ésima salida de la regla número  $r$ , y  $b_{0,r}, b_{1r}, \dots, b_{nr}$ , son constantes reales. La parte antecedente de la regla  $\text{IF } X_1 \text{ is } A_1 \text{ and } \dots \text{ and } X_n \text{ is } A_n$ , utiliza los conjuntos difusos definidos para

cada una de las variables de entrada, y obtiene el grado de pertenencia y el nivel de activación de cada regla (denotado por  $w$ ). Para ello se hace uso de la norma T. El siguiente paso es evaluar la parte consecuente, su función es la de convertir los valores difusos de las reglas en valores físicos. (Then  $y_r = b_r$  ó Then  $y_r = b_{0,r} + b_{1,r} * X_1 + \dots + b_{n,r} * x_n$ ), lo cual dará un valor  $y_r$  por cada regla. De esta forma la salida del sistema difuso estará dada por la siguiente ecuación

$$Y = \frac{\sum_{k=1}^r y_k w_k}{\sum_{k=1}^r w_k} \quad (2.15)$$

Donde  $r$  es el número de reglas que tienen el sistema difuso,  $w$  es el grado de pertenencia obtenido en cada una de las reglas.

#### **SLD como un aproximador universal:**

Los SLD son aproximadores universales (2.15), en el sentido de que dada una función  $f : \mathbb{R}^{n_{in}} \rightarrow \mathbb{R}$  dentro de un conjunto compacto (cerrado y acotado)  $Y \subset \mathbb{R}^{n_{in}}$  pueden ser aproximada por un SLD con una precisión arbitrariamente alta [42]. Esto es, para cualquier  $k > 0$  existe un SLD  $u(\mathbf{x})$  definido por

$$u(\mathbf{x}) = B^*W(\mathbf{x}), \quad (2.16)$$

donde  $B^*$  es el vector de parámetros óptimo

$$B^* = \arg \min_{B \in \mathbb{R}^{1 \times nr}} \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in X} | BW(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) | \right\} \quad (2.17)$$

tal que

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} | u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) | < k \quad (2.18)$$

A la luz de este resultado, la función  $f(\mathbf{x})$  puede ser expresada como

$$f(\mathbf{x}) = B^*W(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^{n_{in}}, \quad (2.19)$$

donde  $\Delta f(\mathbf{x})$  es llamado *error de aproximación* y satisface

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} |\Delta f(\mathbf{x})| < k \quad (2.20)$$

En la práctica, el vector de parámetros óptimo puede no ser único o bien desconocido. Existen varios métodos que pueden ser utilizados para estimar sus valores.

### 2.3.2 Redes neuronales

Una red neuronal, es un conjunto de neuronas conectadas entre sí a través de unas fibras llamadas dendritas, cada conexión establecida entre dos neuronas es conocida como sinapsis y representa el aprendizaje adquirido. Las Redes Neuronales (RN) surgen con la intención modelar los procesos mentales del ser humano, en especial su capacidad de aprendizaje. De lo anterior se desprende la inquietud de crear una arquitectura que se adapte de mejor manera a la ejecución de procesos cognitivos de los seres humanos.

Los demás elementos que componen una RN son:

- Un conjunto de ligas de conexión (para llevar a cabo la sinapsis), cada una de las cuales está caracterizada por un peso, que describe el efecto que tendrá la conexión entre las neuronas. En la Figura 2.2 se puede ver estos

pesos definidos por  $w_{i,j}$  donde  $i$  marca la neurona destino y  $j$  la neurona origen.

- Un sumador, para sumar las señales de entrada multiplicadas por los pesos respectivos de cada conexión (sinapsis con cada neurona).
- Un conjunto de funciones  $g_i$  que pondera la salida de la neurona.

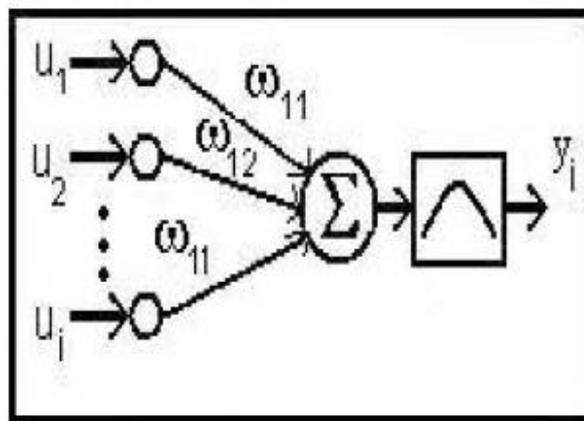


Figura 2.2: Perceptrón, elemento más simple de una Red Neuronal

Las RN's puede ser divididas de la siguiente forma (Figura 2.3).

- Capa de entrada (*input layer*),
- Capas ocultas (*hidden layers*),
- Capa de salida (*output layer*),

El elemento básico de una RN es la neurona, la cual es la unidad de procesamiento de información. Una sola neurona más sus sinapsis es llamada perceptrón, y constituye la base de las redes de neuronas. Los parámetros lineales asociados con la neurona en la entrada se denominan pesos. El perceptrón está constituido por las  $i$  entradas provenientes de fuentes externas, las  $i$  conexiones o pesos  $w = (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1i})$  y la salida. En realidad un

perceptrón es la red neuronal más simple posible (aquella donde no existen capas ocultas). La respuesta del perceptrón obedece la siguiente dinámica: sumar el producto de los potenciales sinápticos  $w_{ij}$  por sus entradas (ver Figura 2.2) y el resultado a su vez es argumento de la función de activación  $g_i$  (las funciones de activación son equivalentes a las funciones membresía vistas en la Sección 2.2.1), obteniéndose así las salida  $y_i$  de cada neurona. En términos matemáticos, podemos definir la salida de la neurona presentada en la Figura 2.2 como

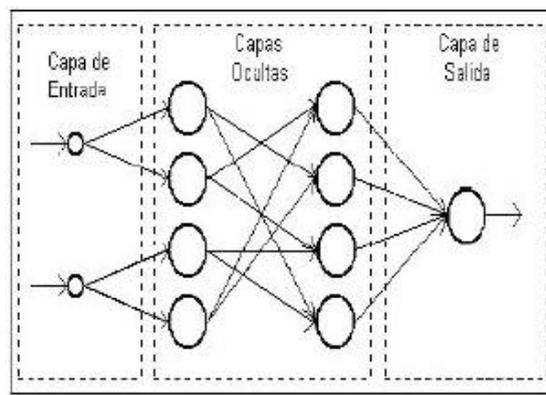


Figura 2.3 : Neurona de multiples capas

$$x_i = \sum_{j=1}^N w_{i,j} u_j$$

$$y_i = g_i(x_i).$$

Un aspecto fundamental de las RN's es su capacidad de aprendizaje. Varias estrategias de entrenamiento han sido propuestas, de las cuales se presentaran las más comunes.

- 1 Algoritmo retro-propagación (Backpropagation):** Estrictamente hablando, este algoritmo es solo un método para la programación del método gradiente de la salida de una Red Perceptrón Multi-Capa con

respecto a sus pesos. De hecho, el método corresponde a la aplicación de la regla de la cadena de la derivada.

- 2 Inicialización:** Los parámetros de las capas ocultas son inicializados por un conocimiento a priori o bien son elegidos de manera aleatoria.
- 3 Activación Regulada de los Pesos:** Es una forma simple de entrenar una RN ya que los pesos de las capas ocultas son inicializados, mientras que los de la capa de salida son estimados por algún otro método (como por ejemplo mínimos cuadrados).
- 4 Optimización No Lineal:** Es el método más común para entrenar una RN. Es un método basado en el gradiente que es usado de la siguiente forma

$$\theta_k^{ij} = \theta_{k-1}^{ij} - \eta \frac{\partial J_k}{\partial \theta_{k-1}^{ij}} \quad (2.21)$$

donde  $\theta = [\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m, \theta^{11}, \dots, \theta^{MP}]^T$  es el vector de pesos de la RN y contiene a todos los pesos que la constituyen,  $\eta$  es un valor constante positivo que modifica la velocidad de entrenamiento, y  $J$  es una función decreciente a ser optimizada. En general la función  $J$  normalmente usada es el error cuadrático

$$J_k = e_k^2 = (y_k - y_{k,d})^2, \quad (2.22)$$

donde  $y_{k,d}$  es la salida deseada. La función  $J$  está definida por

$$J = \sum_{i=1}^N e_i^2. \quad (2.23)$$

Las arquitecturas de RN más comunes son:

- 1 Redes Neuronales Prealimentadas
- 2 Redes Neuronales Difusas
- 3 Redes Neuronales Recurrentes

## Redes neuronales prealimentadas (RNP)

La arquitectura de una RNP consiste en un conjunto de neuronas básicas organizadas en capas como se muestra en la Figura 2.4. Como se puede observar, son de tipo multi-capas. Dentro de una RNP las señales a través de sus nodos se propagan de las capas ( $i$ ) hacia las capas delanteras ( $i+1$ ) de la red. La capa de entrada generalmente sirve para propagar las señales de entrada a lo largo de las capas ocultas, lo cual se suele hacer de manera directa (sin modificar su valor) o bien asignándole un determinado peso a cada entrada. Una vez que las entradas han sido propagadas, las capas ocultas se encargan de ponderar las señales, generalmente por medio del uso de funciones membresía (ver Sección 2.2.1). La capa de salida cuantifica el valor de cada una de las ponderaciones hechas en las capas medias y determina la salida de la RNP. La salida de la RNP mostrada en la Figura 2.4, puede ser calculada como:

$$y = \sum_{i=1}^N v_j G_j \left( \sum w_{i,j} u_j \right) \quad (2.24)$$

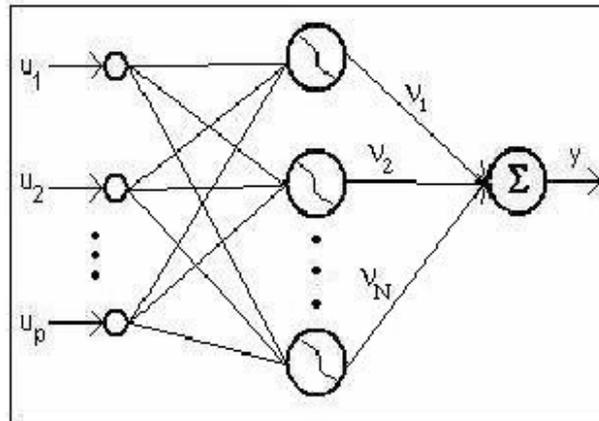


Figura 2.4: Red Neuronal Pre-alimentada

El proceso de aprendizaje de una red neuronal Pre-alimentadas se caracteriza por ser supervisado pues los parámetros de la red, conocidos como pesos, son estimados a partir de un conjunto de patrones compuestos por las entradas y la salida.

## Redes neuronales difusas (RND)

Típicamente, la estructura de una Red Neuronal Difusa (RND) consta de un Sistema de Lógica Difusa (SLD) expresado en forma de RN (ver Figura 2.5), para poder utilizar los algoritmos de aprendizaje de las RN y optimizar sus parámetros de una forma sistemática.

Un modelo difuso de parámetros simples (*singleton*) puede ser escrito en forma conjunta donde el operador producto se usa como norma-T. El grado de pertenencia de cada una de las  $r$  reglas se puede calcular como

$$\mu_i(u) = \prod_{j=1}^p \mu_{ij}(u_j), \quad (2.25)$$

de esta forma se tiene la conjunción de todas la combinaciones de funciones membresía posibles. La formulación de la base de reglas es

$$y = \sum_{i=1}^M \theta_i \Phi_i(u)$$

$$\Phi_i(u) = \frac{\mu_i(u)}{\sum_{j=1}^M \mu_j(u)}$$
(2.26)

El denominador en (2.26) garantiza la salida de los modelos difusos sea normalizada.

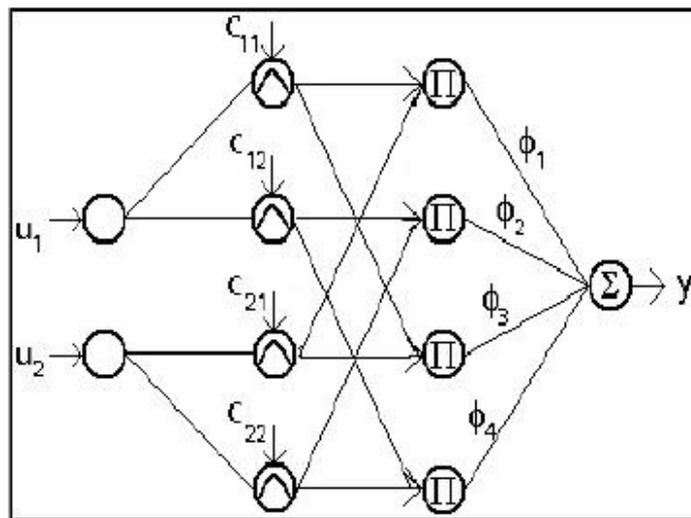


Figura 2.5: Red Neuronal-Difusa

### 2.3.3 Redes neuronales difusas recurrentes (RNDR)

A continuación se considera otro tipo de red neuronal que tiene una estructura recurrente. En las redes antes estudiadas, el flujo de información se da de una capa ( $i$ ) hacia la capa ( $i+1$ ). En este caso, es posible tener conexiones desde una capa ( $i$ ) hacia alguna de las capas anteriores ( $i-k$ , con  $k \geq 1$ ). Esta estructura de RN es denominada Red Neuronal Recurrente (RNR). Es necesario mencionar que las mayoría de las estructuras recurrentes están basadas en alguno de los tipos de redes antes mencionados.

El uso de estructuras recurrentes permite tener una dinámica interna dentro de un espacio de estados no lineal. Por consiguiente, los estados internos del modelo pueden verse como herramientas artificiales que permiten reproducir mapeos estáticos y también dinámicos.

Las RNDR pueden ser agrupadas en cuatro topologías, que son:

**Redes completamente recurrentes:** Consiste de una red con neuronas completamente conectadas entre sí con funciones de activación,  $p$  entradas, y  $r$  salidas (Figura 2.6)). En este caso la liga entre las neuronas representa un estado interno del modelo. Presentan una estructura no organizada de las capas. Y debido a su comportamiento no lineal puede ser usada para la identificación de sistemas dinámicos no lineales.

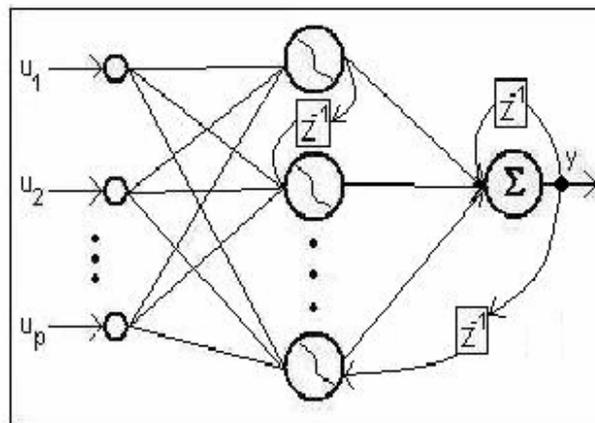


Figura 2.6: Red Completamente Recurrentes

**Redes parcialmente recurrentes:** A diferencia de las redes completamente recurrentes este tipo de redes se basan en RNP aunque tienen una capa adicional llamada de contexto, las salidas de las neuronas de esta capa son los estados internos del modelo, los cuales dependen de las capas y estados previos (Figura 2.7).

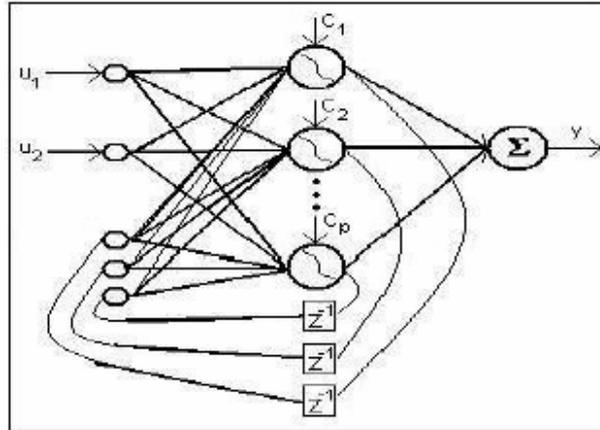


Figura 2.7: Red Parcialmente Recurrentes

*Redes de estados recurrentes:* Este tipo de red es una aplicación directa de un modelo no lineal en espacio de estados. La principal diferencia es que se trata de una red con una dinámica externa de modo que la salida o bien las salidas adicionales son retroalimentadas (Figura 2.8). Las ventajas que esta red presentan son

1. El número de estados puede ser ajustado independientemente del número de neuronas.
2. Los estados del modelo actúan como entradas, lo que hace sencillo su acceso
3. El modelo de estados permite incorporar estados del sistema físico real sin problemas.
4. Por su estructura puede ser utilizados cualquiera de los modelos de red neuronal previamente vistos.

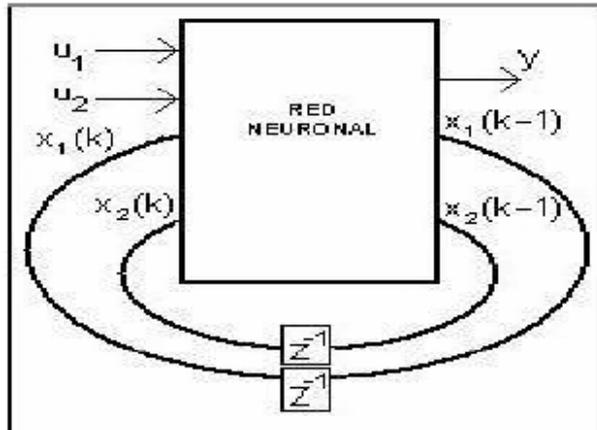


Figura 2.8: Red de Estados Recurrentes

Redes no lineales en espacio de estados: Su estructura está basada en las redes neuronales pre-alimentadas que son extendidas por una retroalimentación local (Figura 2.9). Esto significa que no hay conexiones retroalimentadas entre capas sucesivas ni conexiones laterales entre las neuronas de una misma capa.

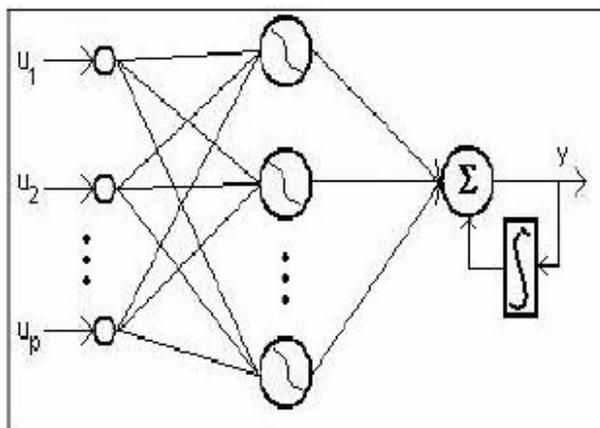


Figura 2.9: Red No Lineales en Espacio de Estados

El esquema de redes neuronales recurrentes más empleado dentro del control e identificación es la red de Hopfield (Figura (2.10))

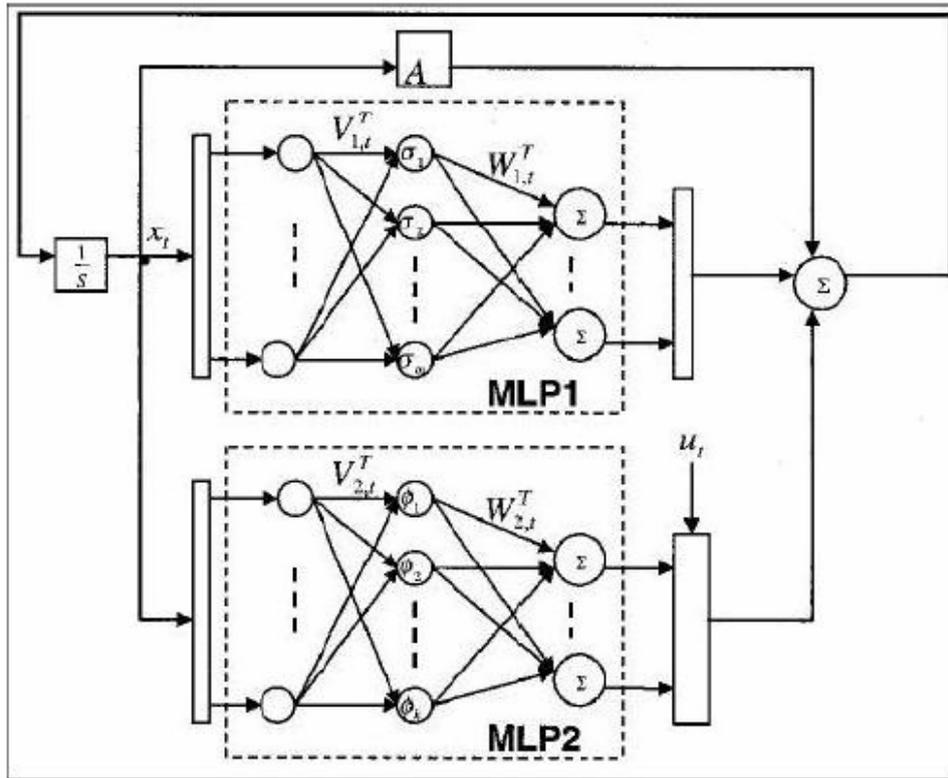


Figura 2.10: Red Neuronal de Hopfield

## 2.4 Desigualdades utilizadas

A continuación presentamos algunas y desigualdades que serán necesarios en el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado.

*Desigualdad 1:* Desigualdad de Chebyshev definida por

$$\sum_{i=1}^N a_i \sum_{j=1}^N b_j \leq N \sum_{i=1}^N a_i b_i, \quad (2.27)$$

para

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N, \quad 0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_N \quad (2.28)$$

*Desigualdad 2:* Dado un parámetro  $a$  desconocido y el error de estimación paramétrica definido como  $\tilde{a} = \hat{a} - a$ , donde  $\hat{a}$  es su valor estimado, podemos ver que

$$-\tilde{a}\hat{a} \leq -\frac{3}{4}\tilde{a}^2 + a^2. \quad (2.29)$$

*Demostración:*

Para verificar la desigualdad es necesario analizar la desigualdad siguiente

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\frac{1}{2}|\tilde{a}| - |a|\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}|\tilde{a}|^2 - |\tilde{a}||a| + |a|^2 \\ |\tilde{a}||a| &\leq \frac{1}{4}|\tilde{a}|^2 + |a|^2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ahora

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\tilde{a}\hat{a} &= -\frac{1}{2}\tilde{a}(\tilde{a} + a) \\ &= -\frac{1}{2}(\tilde{a}^2 + \tilde{a}a) \\ &\leq -\frac{1}{2}\tilde{a}^2 + \frac{1}{2}|\tilde{a}||a| \\ &\leq -\frac{1}{2}\tilde{a}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}|\tilde{a}|^2 + |a|^2\right) \\ &\leq -\frac{3}{8}\tilde{a}^2 + \frac{1}{2}|a|^2 \\ -\tilde{a}\hat{a} &\leq -\frac{3}{4}\tilde{a}^2 + |a|^2 \\ -\tilde{a}\hat{a} &\leq -\frac{3}{4}\tilde{a}^2 + a^2 \end{aligned}$$

*Desigualdad 3:* dada una señal  $x \in \mathbb{R}$  y una constante positiva  $\epsilon \geq 0$ , tenemos que

$$\frac{\epsilon x}{|x| + \epsilon} \leq \epsilon \quad (2.32)$$

## 2.5 Dinámica de un robot de dos grados de libertad

Una de las clases de sistemas que nos interesa controlar son los robots manipuladores, en particular se consideran robots con articulaciones rotacionales, motivo por el cual en esta sección se presentan algunos antecedentes sobre su modelado matemático. La ecuación dinámica de un robot manipulador puede ser descrita por una ecuación diferencial no lineal de la forma

$$M(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + C(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + g(\mathbf{x}) + F(\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}, \quad (2.32)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es un vector con los desplazamientos angulares de las articulaciones,  $M(\mathbf{x}) = [m_{ij}(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia,  $C(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \ddot{\mathbf{x}}$  con  $C(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = [c_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , vector de pares de Coriolis y centrífugos,  $g(\mathbf{x}) = [g_i(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  vector de pares gravitacionales,  $F(\dot{\mathbf{x}}) = [f_i(\dot{\mathbf{x}}_i)] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  vector con pares de fricción y  $\mathbf{u} = [u_i] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el vector con los torques de las entradas de control. Se puede ver a la dinámica de (2.32) como un sistema de Múltiples-Entradas-Múltiples-Salidas, que contiene términos altamente no lineales y además incertidumbres paramétricas.

Las siguientes son algunas propiedades de la dinámica de un robot manipulador, en donde  $\mathbf{x}$  es el vector de desplazamiento angular de eslabón,  $\dot{\mathbf{x}}$  es un vector con su velocidad angular.

*Propiedad 1:* La matriz de inercia  $M(\mathbf{x})$  es una matriz simétrica positiva definida acotada por  $c_1 I \leq M(\mathbf{x}) \leq c_2 I$  donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes positivas conocidas.

*Propiedad 2:* La matriz  $\dot{M}(\mathbf{x}) - 2C(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  es anti-simétrica, esto implica  $\dot{M}(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + C(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})^T$

*Propiedad 3:*  $C(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  es acotada en  $\mathbf{x}$  y lineal en  $\dot{\mathbf{x}}$ . Existe una constante positiva  $K_c$  tal que  $\|C(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\| \leq K_c \|\dot{\mathbf{x}}\|$

*Propiedad 4:* El término gravitacional, está acotado de la siguiente forma

$$\|G(\mathbf{q})\| \leq g_b(\mathbf{x}) \text{ donde } g_b \text{ es una función escalar.}$$

Para el desarrollo del control descentralizado, cada articulación se considera como un subsistema del robot manipulador inter-conectado por pares que representan los términos de acoplamiento inercial, los términos de Coriolis y el centrífugo, la fricción, y términos de la gravedad. Se realiza la separación de términos en los que dependen solo de variables locales  $(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \ddot{\mathbf{x}}_i)$  y los que depende de variables de otras articulaciones, da una ecuación dinámica no lineal de segundo orden para el  $i$ -ésimo subsistema

$$m_i(\mathbf{x}_i)\ddot{\mathbf{x}}_i + c_i(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i)\dot{\mathbf{x}}_i + g_i(\mathbf{x}_i) + z_i(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \ddot{\mathbf{x}}_i) = u_i,$$

donde el término de interconexión  $z_i$  puede ser expresado como

$$z_i \triangleq \left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^n m_{ij}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}}_j + [m_{ii}(\mathbf{x}) - m_i(\mathbf{x}_i)] \ddot{\mathbf{x}}_i \right\} \\ + \left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}_j + [c_{ii}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - c_i(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i)] \dot{\mathbf{x}}_i \right\} + [\bar{g}_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{x}_i)]$$

# Capítulo 3

## Control Por Redes Neuronales Pre-alimentadas

A continuación se presenta el diseño y análisis de un esquema de control descentralizado para sistemas no lineales de gran escala. Primero, se muestra el diseño de la ley de control por retroalimentación de estados y posteriormente se lleva a cabo la retroalimentación de la salida. El control se diseña a partir de la aproximación de la ley de control ideal por un SLD. Posteriormente, se utiliza una señal de compensación para eliminar el efecto del término de interconexión de cada subsistema, el efecto de las incertidumbres tanto paramétricas como no paramétricas y los errores de aproximación.

### 3.1 Formulación del problema

Considere un sistema no lineal con Múltiples Entradas y Múltiples Salidas definido por (1.1), asumiendo que el grado relativo es  $n_i$ , la dinámica de (1.2) puede ser expresada como ([36])

$$y_i^{(n_i)} = f_i(y_i) + g_i(y_i)u_i + Z_i(y), \quad (3.1)$$

donde  $Z_i(x)$  representa la interconexión del  $i$ -ésimo subsistema con el resto de la planta, con  $y_i = [y_i \ y_i^{(1)} \ \dots \ y_i^{(n_i-1)}]^T$ , y  $y = [y_1^T \ y_2^T \ \dots \ y_N^T]^T$ .

Para el diseño de la ley de control se hacen las siguientes suposiciones:

*Suposición 3.1:*  $0 < \underline{g}_i \leq g_i(x_i) \leq \overline{g}_i q_i(\|x_i\|), \forall x_i \in R^{n_i}$ , donde  $\underline{g}_i$  y  $\overline{g}_i$  son constantes positivas desconocidas, y  $q_i(\|x_i\|) = \sum_{k=0}^{m_i} \|x_i\|^{p_{k,i}}$  con

$m_i \geq 0$  un entero conocido, y  $0 \leq P_{1,i} \leq P_{2,i} \dots \leq P_{m_i,i}$  constantes,  $\| \cdot \|$  denota la norma Euclidiana.

*Suposición 3.2:* La interconexión en cada subsistema está acotada por

$$| Z_i(\mathbf{x}) | = \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{i,j} q_j(\| \mathbf{x}_j \|), \quad (3.2)$$

para alguna  $c_{i,j} \geq 0$

Dada una señal de referencia  $y_{r,i}$  para el  $i$ -ésimo subsistema, se asume que  $y_{r,i}$  y sus derivadas de orden superior hasta  $(n_i - 1)$  son acotadas, y  $y_{r,i}^{(n_i)}$  es al menos continua a tramos. A partir de lo anterior se puede definir  $\mathbf{Y}_{r,i} = [y_{r,i} \ y_{r,i}^{(1)} \ \dots \ y_{r,i}^{(n_i-1)}]^T$  y  $\mathbf{Y}_{R,i} = [y_{r,i} \ y_{r,i}^{(1)} \ \dots \ y_{r,i}^{(n_i-1)}, y_{r,i}^{(n_i)}]^T$ . Si se define el error de seguimiento en el  $i$ -ésimo subsistema como

$$e_i^{(j)} = y_i^{(j)} - y_{r,i}^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n_i - 1 \quad (3.3)$$

y la versión filtrada del error de seguimiento en el  $i$ -ésimo subsistema como

$$s_i = (p + \lambda_i)^{n_i-1} e_i, \quad (3.4)$$

donde  $p$  denota el operador derivada con respecto al tiempo, y  $\lambda_i > 0$  es una constante definida por el usuario. A partir de (3.3) y (3.4) se tiene

$$e_i^{(j)} = \frac{p^j}{(p + \lambda_i)^{(n_i-1)}} s_i(t), \quad j = 0, 1, \dots, n_i - 1. \quad (3.5)$$

Por lo tanto si  $|s_i(t)| \leq \psi_i, \forall t \geq 0$ , entonces  $|e_i^{(j)}(t)| \leq \psi_i(2\lambda_i)/\lambda_i^{n_i-1} \forall t \geq 0$ . De esta manera, la ley del control puede ser diseñada de tal forma que el error de seguimiento filtrado  $s_i(t)$  sea finalmente acotado. La dinámica de  $s_i$  es obtenida a partir de (3.4), (3.5) y (1.2) como

$$\dot{s}_i = -\lambda_i s_i + f_i(x_i) + \varrho_i(y_i, y_{r,i}) + g_i(x_i)u_i + Z_i(x), \quad (3.6)$$

donde

$$\varrho_i(y_i, y_{r,i}) = -y_{r,i}^{(n_i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_{n_i}^j \lambda_i^j p^{n_i-j} e_j, \quad (3.7)$$

A partir de la anterior se elige la ley de control

$$u_i = -\frac{1}{g_i(x_i)} [f_i(x_i) + \varrho_i(y_i, y_{r,i}) + K_i s_i], \quad k_i > 0 \quad (3.8)$$

La cual garantiza que el error filtrado  $s_i(t) \rightarrow 0$  exponencialmente en ausencia de la interconexión ( $Z_i(x) = 0$ ).

La ley de control (3.8) se denotará por  $u_i^*$  y se le referirá como el control ideal. En coordenadas  $y_i$ , esta ley de control puede ser expresada como  $u_i^*(y_i, y_{r,i})$ . No es posible aplicarla debido al desconocimiento  $f_i(\cdot)$ ,  $g_i(\cdot)$  y  $h_i(\cdot)$  y por lo tanto también las funciones  $f_i(\cdot)$  y  $g_i(\cdot)$  pueden ser aproximadas con cualquier grado de precisión dentro en un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i+1}$  por un aproximador universal. Un SLD puede ser utilizado para este propósito.

### 3.2. Aproximación de la ley de control ideal

La ley de control ideal (3.8) será aproximada por un SLD definido de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
R^r \quad & \text{if } y_{r,i} \text{ is } A_0^r(y_{r,i}) \text{ and } \dots \text{ and } y_{r,i}^{(n_i)} \text{ is } A_{n_i}^r(y_{r,i}^{(n_i)}) \text{ and} \\
& y_i \text{ is } A_{n_i+1}^r(y_i) \text{ and } \dots \text{ and } y_i^{(n_i-1)} \text{ is } A_{2n_i-1}^r(y_i^{(n_i-1)}) \\
& \text{then } u_i = b_i^r
\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde  $R^r$  denota la  $r$ -ésima regla,  $1 \leq r \leq n_r$ ,  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{n_i}, x_{n_i+1}, \dots, x_{2n_i-1}]^T \triangleq [y_{r,i}, \dot{y}_{r,i}, \dots, y_{r,i}^{(n_i)}, y_i, \dot{y}_i, \dots, y_i^{(n_i-1)}]^T \in X \subset \mathbb{R}^{n_{in}}$  con  $n_{in} \triangleq 2n_i - 1$  son las entradas y salida del SLD, respectivamente, con  $X$  un conjunto compacto.  $b^r$  es un valor constante denotado como singleton y  $A_1^r(x_i) \dots A_{n_{in}}^r(x_{n_{in}})$  son conjuntos difusos caracterizados por Funciones membresía Gaussianas

$$\mu_{A_j^r}(x_j) = e^{-\left(\frac{x_j - c_j^r}{\sigma_j}\right)^2}, \tag{3.10}$$

donde  $c_j^r$  es el centro y  $\sigma_j$  es el ancho de la función de membresía Gaussianas. La salida del SLD está dada

$$u = \sum_{r=1}^{n_r} w^r(\hat{\mathbf{x}}) b^r \tag{3.11}$$

$$w^r(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{j=1}^{n_r} \mu_{A_j^r}(x_j)}{\sum_{j=1}^{n_{in}} \prod_{j=1}^{n_{in}} \mu_{A_j^r}(x_j)}. \tag{3.12}$$

La definición de la salida del SLD permite realizar una parametrización en su parte consecuentes  $b^r$ :

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= [b^1 \ b^2 \ \dots \ b^{n_r}] [w^1 \ w^2 \ \dots \ w^{n_r}]^T \\
&= BW(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

El vector  $B \in R^{1 \times n_r}$  será referido como *vector de parámetros* del SLD y  $W : X \rightarrow R^{n_r}$  las *funciones de base difusa*. El conjunto de reglas difusas (3.9) se dice completo, si para cualquier  $x \in X$  hay por lo menos una regla difusa activa, esto es  $\sum_{j=1}^{n_r} \prod_{j=1}^{n_{in}} \mu_{A_j^r}(x_j) > 0$ .

### 3.3. Diseño del controlador

En esta sección se diseña un control para la planta (1.2) aproximando la ley ideal del control (3.8) por medio de un SLD. Se utiliza la técnica del análisis de Lyapunov [15] para diseñar una señal que pueda compensar la incertidumbre que se presenta por el desconocimiento del vector de parámetros óptimos del SLD, y del error que existe al aproximar la ley de control ideal, y por la existencia del término de interconexión.

Se propone una ley de control para cada subsistema (1.2) de la planta (1.1) como

$$u_i = u_{0,i} + u_{c,i}, \quad (3.14)$$

donde  $u_{0,i}$  es un control nominal que representa la mejor experiencia disponible para controlar el  $i$ -ésimo subsistema dado por  $n_r$  reglas difusas (para  $r = 1, 2, \dots, n_r$ ) de la forma (3.9), excepto por la parte consecuente en donde la salida de cada regla será denotada por  $B_{o,i}$ . Lo anterior, se debe a que el vector de parámetros  $B$  es desconocido por lo que será empleado un vector de parámetros nominal, denotado por  $B_i^0 = [b_{0,i}^1 \ b_{0,i}^2 \ \dots \ b_{0,i}^{n_r,i}]$ , con la función de base difusa  $W_i(y_i, y_{r,i})$ . Esto define el control nominal como

$$u_{0,i} = B_i^0 W_i(y_i, y_{r,i}). \quad (3.15)$$

La componente  $u_{c,i}$  se diseña por re-diseño de Lyapunov para compensar las incertidumbres que son el resultado del error entre los parámetros nominales y los óptimos, así como el error de la aproximación y el término de interconexión

$$u_{c,i} = -(\hat{\delta}_i S_i)^2 \frac{S_i}{\hat{\delta}_i S_i |s_i| + \epsilon_i} \quad (3.16)$$

$$\dot{\hat{\delta}}_i = -\sigma_i \hat{\delta}_i + \gamma |s_i| S_i, \quad \hat{\delta}_i(0) > 0. \quad (3.17)$$

donde  $\epsilon_i, \sigma_i, \gamma_i > 0$  son parámetros de diseño,  $\delta_i(t)$  es el estimado de  $\delta_i$  (definido posteriormente (3.24) en el instante  $t \geq 0$  y

$$S_i \triangleq \sum_{k=0}^{m_i} |x_i|^{p_{k,i}}. \quad (3.18)$$

donde  $m_i$  y  $p_{k,i}$  están definidos en la Suposición 3.1.

*Teorema 3.1:* Considere el sistema (1.1) bajo las Suposiciones 3.1 y 3.2, con las leyes de control y adaptación definidas por (3.14)-(3.18). Entonces todas las señales del sistema en lazo cerrado compuesto por (1.1), (3.14)-(3.18) están acotadas y tienen errores de seguimiento y de estimación finalmente acotados por  $\frac{\epsilon}{\alpha}$ .

*Demostración:* Primero se llevarán a cabo los siguientes análisis

De los resultados en la Sección 3.2, la ley de control ideal (3.8) puede ser aproximada por un SLD con un vector de parámetros óptimo  $B_i^*$  y las funciones de base difusa  $W_i(y_i, y_{r,i})$  de la siguiente forma

$$u_i^* = B_i^* W_i(y_i, y_{r,i}) + \Delta u_i(y_i, y_{r,i}). \quad (3.19)$$

con base en lo anterior y sumando y restando  $u_i^*$  podemos reescribir la ley de control (3.14) como

$$u_i = u_i^* + \left\{ u_{c,i} + \tilde{B}_i W_i(y_i, y_{r,i}) - \Delta u_i(y_i, y_{r,i}) \right\}, \quad (3.20)$$

con  $\tilde{B}_i \triangleq B_i^0 - B_i^*$ . Sustituyendo (3.20) en (3.6), la dinámica del error filtrado en términos de la incertidumbre paramétrica, el error de la aproximación y la interconexión puede ser expresada como

$$\dot{s}_i = -(\lambda_i + k_i)s_i + \{g_i(x_i)[u_{c,i} + \tilde{B}_i W_i(y_i, y_{r,i}) - \Delta u_i(y_i, y_{r,i})] + z_i(x)\} \quad (3.21)$$

De la Suposición 3.1 y considerando el error de aproximación  $\Delta u_i(y_i, y_{r,i})$  y la interconexión se tiene

$$\begin{aligned} & g_i(x_i)[\tilde{B}_i W_i(y_i, y_{r,i}) - \Delta u_i(y_i, y_{r,i})] + z_i(x) \\ & \leq |g_i(x_i)[\tilde{B}_i W_i(y_i, y_{r,i}) - \Delta u_i(y_i, y_{r,i})] + z_i(x)| \\ & \leq \bar{g}_i q_i(\|y_i\|) [\|\tilde{B}_i\| + |\Delta u_i|] + |z_i(x)|, \\ & \leq \bar{g}_i \rho_i q_i(\|y_i\|) + \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{i,j} q_j(\|x_j\|) \\ & \leq \sum_{j=1}^N \delta_{i,j} q_j(\|x_j\|) \\ & = \sum_{j=1}^N \delta_{i,j} S_j, \end{aligned}$$

para alguna constante  $\rho_i \geq \|\tilde{B}_i\| + |\Delta u_i|$ , y

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j} & i \neq j \\ \bar{g}_i \rho_i & i = j \end{cases} \quad (3.23)$$

$\forall y_i \in Y \subset \mathbb{R}^{n_i}$  y  $y_{r,i} \in Y_R \subset \mathbb{R}^{n_i+1}$ , donde  $Y_R$  es un conjunto compacto que contiene la señal de referencia y sus derivadas de orden superior hasta  $n_i$ , y  $Y$  un conjunto compacto cuya definición será más clara después del análisis subsecuente, y

$$\delta_i = \frac{N \max_j \delta_{i,j}}{\underline{b}_i}. \quad (3.24)$$

Considérese la siguiente función positiva definida

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left\{ s_i^2 + \frac{g_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i^2 \right\}, \quad (3.25)$$

donde  $\tilde{\delta}_i \triangleq \hat{\delta}_i - \delta_i$ . Derivando la función  $V$  con respecto al tiempo y sustituyendo (3.17) y (3.21) se tiene

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^N (\lambda_i + k_i) s_i^2 + \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{g_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i \dot{\tilde{\delta}}_i + s_i \{ g_i(x_i)(u_{c,i} + \tilde{B}_i W_i(y_i, y_{r,i}) - \Delta u_i) + z_i(x) \} \right\} \quad (3.26)$$

A continuación, se acota el último término de (3.26) usando la componente de compensación  $u_{c,i}$  en (3.16)

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{g_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i \dot{\delta}_i + s_i \{ g_i(\mathbf{x}_i)(u_{c,i} + \tilde{B}_i W_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{r,i}) - \Delta u_i) + z_i(\mathbf{x}) \} \right\} \\
\leq & \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{g_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i \dot{\delta}_i + s_i g_i(\mathbf{x}_i) u_{c,i} \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ |s_i| \{ |g_i(\mathbf{x}_i)(\tilde{B}_i W_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{r,i}) - \Delta u_i)| + |z_i(\mathbf{x})| \} \right\} \\
\leq & \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{g_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i \dot{\delta}_i + s_i g_i(\mathbf{x}_i) u_{c,i} \right\} + \sum_{i=1}^N |s_i| \sum_{j=1}^N \delta_{ij} S_j \\
\leq & \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{g_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i \dot{\delta}_i + s_i \underline{g}_i u_{c,i} \right\} + \sum_{i=1}^N N \max_j \{ \delta_{ij} \} |s_i| S_i \\
= & \sum_{i=1}^N \underline{g}_i \left\{ \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i \dot{\delta}_i + s_i u_{c,i} + \delta_i |s_i| S_i \right\} \\
= & \sum_{i=1}^N \underline{g}_i \left\{ \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i \dot{\delta}_i - \tilde{\delta}_i |s_i| S_i \right\} + \sum_{i=1}^N \underline{g}_i \left\{ s_i u_{c,i} + \hat{\delta}_i |s_i| S_i \right\} \\
\leq & \sum_{i=1}^N \frac{\underline{g}_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i \left[ \dot{\delta}_i - \gamma_i |s_i| S_i \right] + \sum_{i=1}^N \underline{g}_i \epsilon_i \\
= & \sum_{i=1}^N \underline{g}_i \frac{\sigma_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i \dot{\delta}_i + \sum_{i=1}^N \underline{g}_i \epsilon_i \\
\leq & \sum_{i=1}^N \underline{g}_i \frac{\sigma_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i^2 + \sum_{i=1}^N \underline{g}_i \left[ \epsilon_i + \frac{\sigma_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i^2 \right]. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

La segunda desigualdad sigue de (3.22), la tercera desigualdad es la consecuencia de aplicar la desigualdad de Chebyshev (2.27), notando que  $|s_i| \leq |s_j| \Leftrightarrow |S_i| \leq |S_j|$  (ver (3.18)) y el hecho de que  $0 < \underline{g}_i \leq g_i(\mathbf{x}_i)$  y  $s_i u_{c,i} \leq 0$ . La última desigualdad sigue de  $-\tilde{\delta}_i \dot{\delta}_i \leq -\tilde{\delta}_i^2 + \hat{\delta}_i$ , ya que  $\hat{\delta}_i \geq 0, \forall t \geq 0$ .

De (5.20) y (2.36) se tiene

$$\dot{V} = -2\alpha V + \epsilon, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.28}$$

donde

$$\alpha \triangleq \min_{ij} \{ \lambda_i + k_i, \sigma_j \}, \text{ y } \epsilon \triangleq \sum_{i=1}^N \underline{g}_i \left[ \epsilon_i + \frac{\sigma_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i^2 \right]$$

Dado

$$r_{s_i} \triangleq \max \left\{ \sum_{i=1}^N \left\{ |s_i(0)|^2 + \frac{g_i}{\gamma_i} \tilde{\delta}_i^2 \right\}, \frac{\epsilon}{\alpha} \right\}, E \triangleq \left\{ s_i \in \mathbb{R} \mid |s_i| \leq r_{s_i}^{1/2} \right\} \subset \mathbb{R}$$

el conjunto compacto para un  $Y \subset \mathbb{R}^{n_i}$ . Entonces  $E$  es invariante. Esto implica que para cualquier condición inicial  $s_i(0) \in E \Rightarrow s_i(t) \in E, \forall t \geq 0$ . Por lo tanto,  $y(t) \in Y, t \geq 0$ .

Con lo cual se tiene que el error filtrado está *finalmente acotado* por  $\frac{\epsilon}{\alpha}$  que puede hacerse arbitrariamente pequeño al escoger los parámetros de diseño apropiadamente.

### 3.3. Resultados de simulaciones

En esta sección se muestra las gráficas con los resultados obtenidos en simulación al aplicar la ley de control (3.14) en un robot manipulador planar de dos grados de libertad.

Los parámetros para la simulación son los siguientes. La parte antecedente está definida a partir de Funciones Membresía Gaussianas con los siguientes datos (*centro, ancho*)= $\{(-0.35, 0.21), (0.35, 0.21)\}$ . Y los valores de los Singletons son NS=50, PS=50, NL=100, PL=-100\$. El término de compensación se implementó con los siguientes parámetros  $\lambda_i = 25, \epsilon_i = 1, \sigma_i = 1$  y  $\gamma = 1$ .

En la Figura 3.1 se presenta los resultados obtenidos por simulación al aplicar la ley de control (3.14) en un robot de dos grados de libertad.

Las señales mostradas en la Figura tiene las siguientes unidades: el error  $e_i$  y la señal de referencia  $y_{r,i}$  en *grados*, las señales de control  $u_i$  están en volts, y  $\hat{\delta}_i$  carece de unidades.

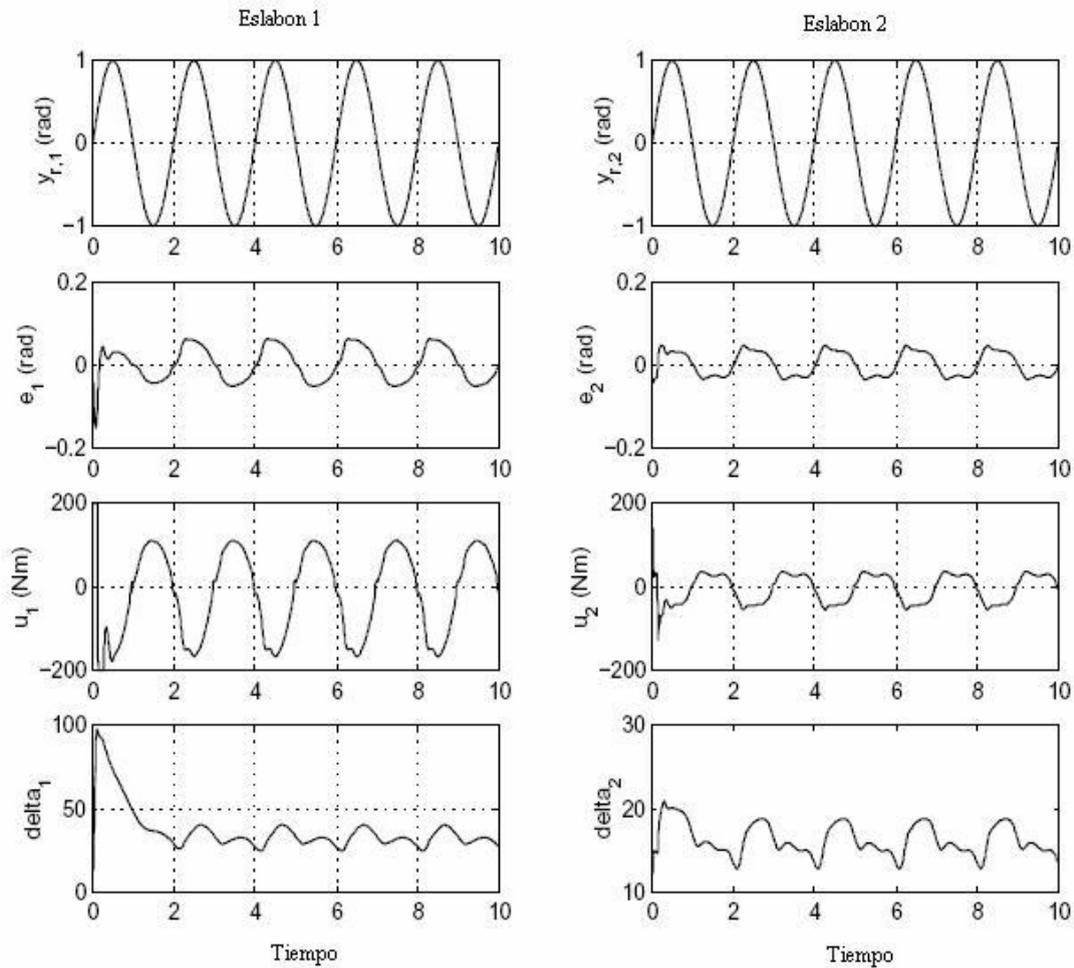


Figura 3.1: Resultados obtenidos por medio de simulación al aplicar la ley de control (3.14)

### 3.3. Conclusiones previas

Como se puede apreciar en la Figura 3.1, el desempeño de la ley de control no es muy bueno, en cuanto al error de seguimiento se refiere. Aunque, si se considera que las señales de error tienen un comportamiento uniforme el desempeño se puede considerar aceptable.

Con base en lo antes mencionado, se buscara mejorar el rendimiento de la ley de control (3.14) por medio del uso de una Red neuronal Recurrente Difusa (RNDR), en lugar del SLD estático (3.15). Además, se buscara establecer las leyes de adaptación necesarias para la RNDR y que le sistema en lazo sea estable.

# Capítulo 4

## Control Por Retroalimentación de Salida

En este capítulo, se presenta el diseño y análisis de un esquema de control descentralizado para sistemas no-lineales definidos por (1.1), compuesto por un conjunto de  $N$  subsistemas de segundo orden de la forma (1.2), suposición que es cumplida en particular por sistemas mecánicos. La ley de control propuesta se compone de dos términos. A diferencia del capítulo anterior, la ley de control ideal es aproximada por una RNDR adaptable y no por un SLD estático. De igual forma se utiliza una señal que compensa el efecto del término de interconexión y las incertidumbres del sistema en lazo cerrado.

El diseño se lleva a cabo inicialmente por retroalimentación de estados, posteriormente la salida es retroalimentada utilizando un observador de alta ganancia. La ley de control diseñada se evalúa de manera experimental y por medio simulación. Las simulaciones se llevaron a cabo en un robot de dos grados de libertad, mientras que los experimentos se efectuaron en un robot tipo Rhino de cinco grados de libertad, de los cuales sólo se utilizaron dos eslabones para tener un movimiento planar.

### 4.1 Formulación del problema

Considérese el sistema no-lineal (1.1) compuesto por  $N$  subsistemas de la forma (1.2). Particularmente se toma en cuenta el caso en el cual los subsistemas son de segundo orden  $n_i = 2$ . A partir de esto la dinámica de (1.2) puede ser expresada como

$$\ddot{y}_i = f_i(y_i) + g_i(y_i)u_i + Z_i(y), \quad (4.1)$$

$y_i = [y_i \ y_i^{(1)}]^T$ ,  $Y = [Y_1^T \ Y_2^T \ \dots \ Y_N^T]^T$ , donde  $Z_i$  representa la interconexión del i-ésimo subsistema con el resto de la planta.

Dada una señal de referencia  $y_{r,i}$  continuamente diferenciable para el i-ésimo subsistema, se asume que  $y_{r,i}$  y  $\ddot{y}_{r,i}$  son acotadas, y  $\ddot{y}_{r,i}$  es al menos continua a tramos. Se define el error de seguimiento en el i-ésimo subsistema como

$$e_i^{(j)} = y_i^{(j)} - y_{r,i}^{(j)}, \quad j = 0, 1 \quad (4.2)$$

De manera similar a  $y_i$ , se define  $Y_{r,i} = [y_{r,i} \ \dot{y}_{r,i}]^T$  y  $Y_{R,i} = [y_{r,i} \ \dot{y}_{r,i} \ \ddot{y}_{r,i}]^T$ .

La dinámica del error en cada subsistema  $e_i$  puede ser obtenida a partir de derivar (4.2) y sustituir en ella (4.1)

$$\dot{E}_i = A_i E_i + B_i [f_i(y_i) + g_i(y_i)u_i + Z_i(Y) - \ddot{y}_{r,i}], \quad (4.3)$$

donde  $E_i = [e_i \ \dot{e}_i]^T$ , y las matrices

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^2$$

Para el diseño de la señal de control se hacen las siguientes suposiciones.

*Suposición 4.1:* El término de interconexión de cada subsistema de la planta (1.2), está acotado por una función  $q_i(\|E_i\|)$  en la siguiente forma

$$|Z_i(Y)| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} q_j(\|E_j\|), \quad (4.4)$$

para alguna  $c_{ij} \geq 0$ , donde  $\| \cdot \|$  denota la norma Euclidiana, y  $q_i(\| E_i \|) = \sum_{k=0}^{m_i} |p_i^T E_i|^{p_{k,i}}$  con  $m_i > 0$  un entero conocido, y  $0 = p_{0,i} \leq p_{1,i} \leq p_{2,i} \leq \dots \leq p_{m_i,i}$  alguna constante, y  $P_i$  la última columna de  $P_i$ .

$$[A_i - B_i K_i]^T P_i + P_i [A_i - B_i K_i] = -I, \quad (4.5)$$

donde  $A_i$  y  $B_i$  son matrices de de la ecuación (4.3) y  $K_i$  se elige tal que la matriz  $A_i - B_i K_i$  sea Hurwitz,

*Suposición 4.2:* La ganancia de control satisface que

$$0 < \underline{g}_i \leq g_i(y_i) \leq \bar{g}_i q_i(\| E_i \|),$$

$\forall y_i \in R^2$ , donde  $\underline{g}_i$  y  $\bar{g}_i$  son constantes positivas desconocidas.

Nótese que en ausencia del término de interconexión ( $Z_i(y) = 0$ ), si el modelo dinámico fuera conocido, se puede definir la ley de control como

$$u_i = -\frac{1}{g_i(y_i)} [f_i(y_i) + K_i E_i - \ddot{y}_{r,i}] \quad (4.6)$$

lo que queda como

$$\dot{E}_i = (A_i - B_i K_i) E_i, \quad (4.7)$$

lo cual garantiza que el error de seguimiento  $E_i(t) \rightarrow 0$  exponencialmente.

## 4.2. Nueva estructura de redes neuronales difusas recurrentes - RNDR

En el Capítulo 2 estudiamos las Redes Neuronales Difusas Recurrentes (RNDR), su definición y las diferentes estructuras que presentan. En esta sección, se presenta una nueva arquitectura de la RNDR que se utiliza para el desarrollo de una ley de control para sistemas no lineales afines en control definidos por (1.1). La estructura de la RNDR está inspirada en la propuesta por el trabajo de Juang en [14]. Se propone una estructura de reglas para la parte difusa de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 R^r & : \quad \text{if } e_i \text{ is } A^r(e_i) \text{ and } z_i \text{ is } B^r(z_i) \\
 & \quad \text{then } \zeta_i^r = \theta^r \text{ and } \xi_i = \phi^r
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde  $R^r$  denota  $r$ -ésima regla de la parte difusa de la RNDR,  $1 \leq r \leq n_r$ .  $e_i$  y  $z_i \in \mathbb{R}$  son las entradas de la RNDR. En este caso  $e_i$  es el error de seguimiento del  $i$ -ésimo subsistema,  $z_i$  es el estado interno de la RNDR y que representa la dinámica del controlador propuesto.  $\xi_i^r \in \mathbb{R}$  y  $\zeta_i^r \in \mathbb{R}$  son las salida de la  $r$ -ésima regla.  $\theta_i^r, \phi_i^r$  son parámetros constante (**singletons**), y  $A^r(e_i), B^r(z_i)$  son conjuntos difusos caracterizados por dos tipos de funciones membresía Gaussianas o Sigmoides, definidas como:

$$\begin{aligned}
 \mu_{A^r}(e_i) & = \exp \left\{ -\left( \frac{e_i - c_i^r}{\sigma_i^r} \right)^2 \right\} \\
 \mu_{B^r}(z_i) & = \frac{1}{1 + \exp \{ \zeta_i^r (a_i^r - z_i) \}},
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

en donde  $c_i^r$ ,  $a_i^r$  son los centros y  $\sigma_i^r$  y  $\varsigma_i^r$  los anchos de sus respectivas funciones.

Se puede definir la salida de la RNDR como

$$u_{f,i}(e_i, z_i) \triangleq z_i + \phi_i^T W_i(e_i, z_i) \quad (4.10)$$

$$\dot{z}_i \triangleq -\gamma_i z_i + \theta_i^T W_i(e_i, z_i), \quad (4.11)$$

En donde  $\theta_i^T = [\theta_i^1 \ \theta_i^2 \ \dots \ \theta_i^{n_r}]$ ,  $\phi_i^T = [\phi_i^1 \ \phi_i^2 \ \dots \ \phi_i^{n_r}]$ ,  $W_i(e_i, z_i) = [w_{1,i} \ w_{2,i} \ \dots \ w_{n_r,i}]^T$ . Con

$$w_{k,i}(e_i, z_i) = \mu_A^k(e_i) \mu_B^k(z_i), \quad (4.12)$$

Si se observa (4.11), se puede ver que tiene la estructura de un filtro paso bajas, por lo cual su estabilidad puede ser determinada en términos de la estabilidad Entrada Acotada-Salida Acotada. Si se considera al término  $\theta_i^T W_i(e_i, z_i)$  como la entrada y además está acotada (está acotada al tratarse de un vector de parámetros constantes en el caso de  $\|\theta_i\| \leq c_{\theta,i}$  y cada  $w_r(\cdot) \leq 1$  para  $r = 1, \dots, n_{r,i}$ , por lo que  $\|W_i(e_i, z_i)\| \leq n_{r,i}$  donde  $n_{r,i}$  es el número de reglas). Entonces el estado interno también está acotado por una constante  $c_{z,i}$  de la siguiente forma

$$\|z_i\| \leq c_{z,i} \quad (4.13)$$

La implementación de la RNDR definida en (4.10) y (4.11) no puede ser llevada a cabo debido a que los vectores de parámetros  $\theta_i$  y  $\phi_i$  son desconocidos. Dado lo antes mencionado es necesario utilizar valores estimados de ambos vectores.

Por lo cual se define a  $\hat{u}_{f,i}(e_i, \hat{z}_i)$  y  $\dot{\hat{z}}_i(e_i, \hat{z}_i)$  Como los estimados de  $u_{f,i}(e_i, z_i)$  y  $\dot{z}_i(e_i, z_i)$  respectivamente, de la siguiente manera

$$\hat{u}_{f,i}(e_i, \hat{z}_i) \triangleq \hat{z}_i + \hat{\phi}_i^T W_i(e_i, \hat{z}_i) \quad (4.14)$$

$$\dot{\hat{z}}_i \triangleq -\gamma_i \hat{z}_i + \hat{\theta}_i^T W_i(e_i, \hat{z}_i) + N_{1,i}, \quad (4.15)$$

en donde  $\hat{\theta}_i^T = [\hat{\theta}^1 \ \hat{\theta}^2 \ \dots \ \hat{\theta}^{n_r}]$ ,  $\hat{\phi}_i^T = [\hat{\phi}^1 \ \hat{\phi}^2 \ \dots \ \hat{\phi}^{n_r}]$  son los vectores de valores estimados de  $\theta_i$  y  $\phi_i$ , respectivamente. Y  $W_i(e_i, \hat{z}_i) = [\hat{w}_{1,i} \ \hat{w}_{2,i} \ \dots \ \hat{w}_{n_r,i}]^T$

(para simplificar el análisis posterior se define  $\hat{W} \triangleq W_i(e_i, \hat{z}_i)$ ).  $N_{1,i}$  es un término adicional que será definido posteriormente, de tal forma que el estado interno  $\hat{z}_i$  (4.15) cumpla que

$$|\hat{z}_i| \leq \bar{c}_{z,i}, \quad (4.16)$$

en donde  $\bar{c}_{z,i}$  es una constante positiva.

### 4.3. Diseño del controlador

Se propone la siguiente ley de control

$$u_i = u_{c,i} + \hat{u}_{f,i}, \quad (4.17)$$

donde  $\hat{u}_{f,i}$  es un controlador basado en RNDR para el  $i$ -ésimo subsistema dado por (4.14) y (4.15). El conjunto difuso y las  $R_i$  reglas dadas en la funciones de base difusa  $\hat{W}_i$  y el vector de parámetros  $\hat{\Phi}_i = [\hat{\phi}^1 \ \hat{\phi}^2 \ \dots \ \hat{\phi}^{n_{r,i}}]^T$ . Por lo tanto

$$\hat{u}_{f,i}(e_i, \hat{z}_i) = \hat{z}_i + \hat{\phi}_i^T \hat{W}_i, \quad (4.18)$$

con  $N_{1,i}$  en (4.15) dado por

$$N_{1,i}(E_i) = -\frac{\sigma_i q_i(\|E_i\|) p_i^T E_i}{q_i(\|E_i\|) |p_i^T E_i| + \sigma_i}, \quad (4.19)$$

$\sigma_i > 0$ . La estructura de  $N_{1,i}$  es similar a la que se presenta en la desigualdad (2.32), a partir de la cual se concluye que  $N_{1,i}$  está acotada por  $\sigma_i$ . La componente  $u_{c,i}$  está definida como

$$u_{c,i} = -\frac{|\hat{\delta}_i| \hat{\delta}_i (p_i^T E_i) q_i^3(\|E_i\|)}{|\hat{\delta}_i (p_i^T E_i)| q_i^2(\|E_i\|) + \epsilon_i} \quad (4.22)$$

$$\dot{\hat{\delta}}_i = -\rho_i \hat{\delta}_i + \alpha_i |p_i^T E_i| q_i(\|E_i\|), \quad (4.23)$$

con  $\hat{\delta}_i(0) > 0$ , donde  $\hat{\delta}_i$  es el estimado de  $\delta_i$  (definido posteriormente). Con las siguientes leyes de adaptación

$$\dot{\hat{\theta}} = -\vartheta_i \hat{\theta}_i + \frac{\varrho_i \hat{z}_i}{\|\hat{W}_i\| |\hat{z}_i| + \varrho_i} \hat{W}_i \quad (4.22)$$

$$\dot{\hat{\phi}}_i = -\psi_i \hat{\phi}_i - \varsigma_i \frac{\varphi_i p_i^T E_i q_i(\|E_i\|)}{|p_i^T E_i| q_i(\|E_i\|) + \varphi_i} \hat{W}_i \quad (4.23)$$

Las ecuaciones (4.22) y (4.23), presentan una estructura de filtro paso bajas, por lo cual  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$  serán acotadas si las entradas son acotadas. En ambos casos los segundos términos del lado derecho de las ecuaciones hacen las veces de entradas y tiene una estructura similar a la mostrada en la desigualdad (2.32), por lo que están acotados por  $\varrho_i$  y  $\varphi_i$  respectivamente. A partir de lo anterior se puede concluir que los términos  $\tilde{z}_i$ ,  $\hat{\theta}_i$  y  $\hat{\phi}_i$  son acotados por  $\bar{c}_{z,i}$ ,  $\bar{c}_{\theta,i}$  y  $\bar{c}_{\phi,i}$  respectivamente, con  $\bar{c}_{z,i}$ ,  $\bar{c}_{\theta,i}$  y  $\bar{c}_{\phi,i}$  constantes, y  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \epsilon_i, \sigma_i$  son parámetros de diseño mayores a cero,  $q_i(\|E_i\|)$  está definida en la Suposición 4.1, y  $p_i$  es el último vector columna de la matriz  $P_i$  de la ecuación de Lyapunov (ver (4.5)).

**Teorema 4.1:** *Considérese el sistema (1.1) bajo las Suposiciones 4.1 y 4.2, con las leyes de control y adaptación definidas por (4.17)-(4.23). Entonces todas las señales del sistema en lazo cerrado compuesto por (1.1), (4.17)-(4.23) están acotadas y tienen errores de seguimiento y de estimación finalmente acotados por  $\sqrt{\frac{\lambda}{2r}}$ .*

**Demostración:** Antes de iniciar la demostración, se harán algunas definiciones y cambios que faciliten el análisis. Se define el error de estimación de las señales  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\delta$  como:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_i &= \hat{\theta}_i - \theta_i \\ \tilde{\phi}_i &= \hat{\phi}_i - \phi_i \\ \tilde{\delta}_i &= \hat{\delta}_i - \delta_i,\end{aligned}\tag{4.24}$$

sustituyendo en la ley de control (4.17), sumando y restando los siguientes términos  $u_i^*$ ,  $u_{f,i}$  y utilizando las definiciones (4.14) y (4.10), se tiene

$$\begin{aligned}
u_i &= u_{c,i} + \hat{u}_{f,i} \\
&= u_{c,i} + \hat{u}_{f,i} + u_i^* - u_i^* + u_{f,i} - u_{f,i} \\
&= u_i^* + u_{c,i} + \hat{z}_i + \hat{\phi}_i^T \hat{W}_i - z_i - \phi_i^T W_i + [u_{f,i} - u_i^*] \\
&= u_i^* + u_{c,i} + \tilde{z}_i + \hat{\phi}_i^T \hat{W}_i - \phi_i^T W_i + [u_{f,i} - u_i^*] \\
&= u_i^* + \bar{u}_i,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

en donde  $\bar{u}_i$  es

$$\bar{u}_i = u_{c,i} + \tilde{z}_i + \hat{\phi}_i^T \hat{W}_i - \phi_i^T W_i + [u_{f,i} - u_i^*]. \tag{2.26}$$

Sustituyendo (4.26) el sistema en lazo cerrado queda como:

$$\dot{E}_i = [A_i - B_i K_i] E_i + B_i [g_i(y_i) \bar{u}_i + Z_i(Y)] \tag{4.27}$$

Para determinar la estabilidad del sistema completo consideramos la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left\{ E_i^T P_i E_i + \frac{g_i}{\alpha_i} \tilde{\delta}_i^2 + \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i^2 + \frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i + \frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \tilde{\phi}_i \right\},$$

Derivando V con respecto al tiempo, se tiene

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} [\dot{E}_i^T P_i E_i + E_i^T P_i \dot{E}_i] + M_i \right\}.$$

donde

$$M_i = +\frac{\bar{g}_i}{\alpha_i} \tilde{\delta}_i \dot{\tilde{\delta}}_i + \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i \dot{\tilde{z}}_i + \frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i + \frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \dot{\tilde{\phi}}_i.$$

Usando (4.25) para analizar  $E_i^T P_i \dot{E}_i + \dot{E}_i^T P_i E_i$  se tiene

$$\begin{aligned} & E_i^T P_i \{ [A_i - B_i K_i] E_i + B_i [g_i(y_i)(\bar{u}_i) + Z_i(Y)] \} + \\ & \{ [A_i - B_i K_i] E_i + B_i [g_i(y_i)(\bar{u}_i) + Z_i(Y)] \}^T P_i E_i \\ = & E_i^T P_i [A_i - B_i K_i] E_i + E_i^T [A_i - B_i K_i]^T P_i E_i + 2E_i^T P_i \{ B_i [g_i(y_i)(\bar{u}_i) + Z_i(Y)] \} \\ = & E_i^T \{ P_i [A_i - B_i K_i] + [A_i - B_i K_i]^T P_i \} E_i + 2E_i^T P_i \{ B_i [g_i(y_i)(\bar{u}_i) + Z_i(Y)] \} \\ = & -E_i^T E_i + 2E_i^T P_i B_i [g_i(y_i)(\bar{u}_i) + Z_i(Y)]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sustituyendo (4.25) y (4.29) en (4.28)

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} E_i^T E_i + p_i^T E_i [g_i(y_i)(u_{c,i}) + M_i + p_i^T E_i [g_i(y_i)(\hat{\phi}_i^T \hat{W}_i + \tilde{z}_i - \phi_i^T W_i \right. \\ & \left. + [u_{f,i} - u_i^*]) + Z_i(Y)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Analizando el término  $p_i^T E_i [g_i(y_i)(\hat{\phi}_i^T \hat{W}_i + \tilde{z}_i - \phi_i^T W_i + [u_{f,i} - u_i^*]) + Z_i(Y)]$  de (4.30), se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N p_i^T E_i \{ g_i(y_i)(\hat{\phi}_i^T \hat{W}_i + \tilde{z}_i - \phi_i^T W_i + u_{f,i} - u_i^*) + Z_i(Y) \} \\ \leq & \sum_{i=1}^N | p_i^T E_i \{ \bar{g}_i q_i(\| E_i \|) (\hat{\phi}_i^T \hat{W}_i + \tilde{z}_i - \phi_i^T W_i + u_{f,i} - u_i^*) + Z_i(Y) \} | \\ \leq & \sum_{i=1}^N | p_i^T E_i | \{ \bar{g}_i q_i(\| E_i \|) (|\hat{\phi}_i^T \hat{W}_i| + c_{z,i} + \\ & \bar{c}_{z,i} + |\phi_i^T W_i| + |u_{f,i} - u_i^*|) + |Z_i(Y)| \} \\ \leq & \sum_{i=1}^N | p_i^T E_i | \{ \bar{g}_i q_i(\| E_i \|) (\|\hat{\phi}_i^T\| \|\hat{W}_i\| + c_{z,i} + \\ & \bar{c}_{z,i} + \|\phi_i^T\| \|W_i\| + k_{u,i}) + \sum_{j=1}^N C_{i,j} q_j(\| E_j \|) \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^N |p_i^T E_i| \{ \bar{g}_i c_i q_i(\|E_i\|) + \sum_{i=1}^N C_{i,j} q_j(\|E_j\|) \} \\
&\leq \sum_{i=1}^N |p_i^T E_i| \sum_{i=1}^N \delta_{i,j} q_j(\|E_j\|) \\
&\leq \sum_{i=1}^N N \max_j(\delta_{i,j}) |p_i^T E_i| q_j(\|E_i\|) \\
&= \sum_{i=1}^N \underline{g}_i \delta_i |p_i^T E_i| q_i(\|E_i\|).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Agrupando las siguientes constantes  $c_i = \bar{c}_{z,i} + c_{z,i} + \bar{c}_{\phi,i} r_i + c_{\phi,i} r_i + k_{u,i}$ , y

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} \bar{g}_i c_i + c_{i,j} & i = j \\ c_{i,j} & i \neq j \end{cases}$$

en donde  $\underline{g}_i \delta_i = N \max_j(\delta_{i,j})$ . La quinta desigualdad resulta de aplicar la desigualdad de Chebyshev (2.27), observando que  $|p_i^T E_i| \leq |p_j^T E_j| \Leftrightarrow q_i(\|E_i\|) \leq q_j(\|E_j\|)$ . Por lo tanto, sustituyendo (4.31) en (4.19) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N \{ &-\frac{1}{2} E_i^T E_i + p_i^T E_i g_i(y_i) u_{c,i} + \underline{g}_i \delta_i |p_i^T E_i| q_i(\|E_i\|) + \frac{g_i}{\alpha_i} \tilde{\delta}_i \dot{\tilde{\delta}}_i + \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i \dot{\tilde{z}}_i + \\
&\frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i + \frac{\bar{g}_i}{S_i} \tilde{\phi}_i^T \dot{\tilde{\phi}}_i \},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

A continuación se analizan de manera separada los términos que contengan los siguientes elementos  $\tilde{z}_i$ ,  $\tilde{\phi}_i$  y  $\tilde{\theta}_i$  y. Primero, consideraremos el término  $\frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i \dot{\tilde{z}}_i$  para lo cual se utiliza (4.11) y (4.19), con lo cual el resultado es:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i \dot{\tilde{z}}_i \\
= & \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i [-\gamma_i \tilde{z}_i + \hat{\theta}_i^T \hat{W}_i - \theta_i^T W_i + N_{1,i}] \\
\leq & -\bar{g}_i \tilde{z}_i^2 + \left| \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i [\hat{\theta}_i^T \hat{W}_i - \theta_i^T W_i + N_{1,i}] \right| \\
\leq & -\bar{g}_i \tilde{z}_i^2 + \left| \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i \right| [|\hat{\theta}_i^T \hat{W}_i| + |\theta_i^T W_i| + |N_{1,i}|] \\
\leq & -\bar{g}_i \tilde{z}_i^2 + \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} |\bar{c}_{z,i} + c_{z,i}| [\bar{c}_{\theta,i} r_i + c_{\theta,i} r_i + \sigma_i] \\
\leq & -\bar{g}_i \tilde{z}_i^2 + C_{1,i},
\end{aligned} \tag{4.33}$$

con  $C_{1,i} = \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} |\bar{c}_{z,i} + c_{z,i}| [\bar{c}_{\theta,i} r_i + c_{\theta,i} r_i + \sigma_i]$ . Para el caso de  $\frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i$  se emplea la ley de adaptación (4.22), obteniendo

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \left[ -\vartheta_i \hat{\theta}_i + \frac{\varrho_i \hat{z}_i}{\|\hat{W}_i\| \|\hat{z}_i\| + \varrho_i} \hat{W}_i \right] \\
= & -\frac{\bar{g}_i \vartheta_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i + \frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \left[ \frac{\varrho_i \hat{z}_i}{\|\hat{W}_i\| \|\hat{z}_i\| + \varrho_i} \hat{W}_i \right] \\
\leq & -\frac{\bar{g}_i \vartheta_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i + \left| \frac{\bar{g}_i \tilde{\theta}_i^T}{\eta_i} \right| \varrho_i \\
\leq & -\frac{\bar{g}_i \vartheta_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i + \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} \|\tilde{\theta}_i^T\| \\
\leq & -\frac{\bar{g}_i \vartheta_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i + \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} [\|\hat{\theta}_i\| + \|\theta_i\|] \\
\leq & -\frac{\bar{g}_i \vartheta_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i + \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} [\bar{C}_{\theta,i} + C_{\theta,i}].
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Si se sustituye (4.23) en  $\frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \dot{\tilde{\phi}}_i$ , entonces

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \dot{\hat{\phi}}_i \\
= & \frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \left[ -\psi_i \hat{\phi}_i - \varsigma_i \frac{\varphi_i p_i^T E_i q_i (\|E_i\|)}{|p_i^T E_i q_i (\|E_i\|) + \varphi_i|} \hat{W}_i \right] \\
\leq & -\frac{\bar{g}_i \psi_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \hat{\phi}_i + [\bar{c}_{\phi,i} + c_{\phi,i}] \varphi_i r_i.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Sustituyendo los resultados previos (4.33), (4.34), (4.35) en (4.32) se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} E_i^T E_i - \bar{g}_i z_i^2 - \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i - \frac{\bar{g}_i \psi_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \hat{\phi}_i + p_i^T E_i [\bar{g}_i q_i (\|E_i\|) u_{c,i} + \right. \\
& \left. \underline{g}_i \delta_i | p_i^T E_i | q_i (\|E_i\|) + \frac{g_i}{\alpha_i} \tilde{\delta}_i \dot{\hat{\delta}}_i + \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} [\bar{C}_{\theta,i} + C_{\theta,i}] + C_{1,i} + [\bar{c}_{\phi,i} + c_{\phi,i}] \varphi_i \right\}, \tag{4.36}
\end{aligned}$$

si se suma y se resta  $\hat{\delta}_i$  a  $\underline{g}_i \delta_i | p_i^T E_i | q_i (\|E_i\|)$  para obtener su error de estimación y se separan los términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \underline{g}_i \delta_i | p_i^T E_i | q_i (\|E_i\|) \\
= & \underline{g}_i (\delta_i \pm \hat{\delta}_i) | p_i^T E_i | q_i (\|E_i\|) \\
= & \underline{g}_i (\hat{\delta}_i - \tilde{\delta}_i) | p_i^T E_i | q_i (\|E_i\|) \\
\leq & \bar{g}_i \hat{\delta}_i | p_i^T E_i | q_i^2 (\|E_i\|) - \underline{g}_i \tilde{\delta}_i | p_i^T E_i | q_i (\|E_i\|).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Sustituyendo la ley de adaptación de  $\hat{\delta}_i$  (4.21), la ley de control  $u_i$  (4.17) y el resultado anterior (4.37) en (4.36)

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} E_i^T E_i - \bar{g}_i \tilde{z}_i^2 - \frac{\bar{g}_i \vartheta_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i - \frac{\bar{g}_i \psi_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \hat{\phi}_i + \frac{\hat{\delta}_i |p_i^T E_i| q_i^2 (\|E_i\|) \epsilon_i}{|\hat{\delta}_i (p_i^T E_i) q_i^2 (\|E_i\|)|} + \epsilon_i \right. \\
&\quad \left. - \frac{g_i \rho_i}{\alpha_i} \tilde{\delta}_i \hat{\delta}_i + C_{1,i} + \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} [\bar{C}_{\theta,i} + C_{\theta,i}] + [\bar{c}_{\phi,i} + c_{\phi,i}] \varphi_i \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} E_i^T E_i - \bar{g}_i \tilde{z}_i^2 - \frac{\bar{g}_i \vartheta_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i - \frac{\bar{g}_i \psi_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \hat{\phi}_i \right. \\
&\quad \left. - \frac{g_i \rho_i}{\alpha_i} \tilde{\delta}_i \hat{\delta}_i + \epsilon_i + C_{1,i} + \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} [\bar{C}_{\theta,i} + C_{\theta,i}] + [\bar{c}_{\phi,i} + c_{\phi,i}] \varphi_i \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} E_i^T E_i - \bar{g}_i \tilde{z}_i^2 - \frac{\bar{g}_i \vartheta_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i - \frac{\bar{g}_i \psi_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \tilde{\phi}_i \right. \\
&\quad \left. - \frac{g_i \rho_i}{\alpha_i} \tilde{\delta}_i^2 + \epsilon_i + C_{1,i} + \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} [\bar{C}_{\theta,i} + C_{\theta,i}] + [\bar{c}_{\phi,i} + c_{\phi,i}] \varphi_i \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\bar{g}_i \vartheta_i}{4\eta_i} \theta_i^T \theta_i + \frac{3\bar{g}_i \psi_i}{4\varsigma_i} \phi_i^T \phi_i + \frac{3g_i \rho_i}{4\alpha_i} \delta_i^2 \right\},
\end{aligned}$$

La segunda desigualdad se obtiene al utilizar (2.32)), y la última es resultado de aplicar (2.29). Si se agrupan los términos constantes de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\lambda &= \sum_{i=1}^N \{ \epsilon_i + C_{1,i} + [\bar{c}_{\phi,i} + c_{\phi,i}] \varphi_i + \\
&\quad \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} [\bar{C}_{\theta,i} + C_{\theta,i}] + \frac{3\bar{g}_i \vartheta_i}{4\eta_i} \theta_i^T \theta_i + \frac{3\bar{g}_i \psi_i}{4\varsigma_i} \phi_i^T \phi_i + \frac{3g_i \rho_i}{4\alpha_i} \delta_i^2 \}
\end{aligned}$$

y  $\tau = \min_i \{ \frac{1}{2}, \frac{g_i \rho_i}{\alpha_i}, \bar{g}_i, \frac{\bar{g}_i \vartheta_i}{\eta_i}, \frac{\bar{g}_i \psi_i}{\varsigma_i} \}$  se tiene que

$$\dot{V} \leq -2\tau V + \lambda, \quad (4.38)$$

con lo cual se obtiene un error finalmente acotado, cuya cota está definida como

$\sqrt{\frac{\lambda}{2\tau}}$ , la cual se puede hacer arbitrariamente pequeña por la elección apropiada de los parámetros de diseño. El conjunto compacto para el cual las variables de

lazo cerrado está caracterizado por  $V(t) \leq \max\{V(0), \frac{\lambda}{2\tau}\}$  una bola cuyo radio es  $R$ ,  $R \leq \max\{V(0), \frac{\lambda}{2\tau}\}$ .

#### 4.4. Retroalimentación de salida

En el caso en el cual  $[e_i \ \dot{e}_i]$  no se encuentren disponibles, basados en el principio de separación [1], es posible utilizar un Observador de Alta Ganancia (OAG) con un desempeño similar y así poder utilizar los estados estimados dentro del esquema de control propuesto (4.17). A continuación se presenta el OAG utilizado.

##### **Observador de alta ganancia**

Ahora se utiliza un observador de Alta-Ganancia [15] para estimar los estados de los subsistema (1.2). Se demuestra en [15] que el diseño de tal OAG satisface el principio de la separación. Su diseño requiere que el control por retroalimentación de estados garantice el acotamiento semi-global de  $y_i$  y las ganancias del observador sean altas. El OAG está dado por

$$\begin{aligned}
 e_{1,i} &= e_i \\
 \dot{\hat{e}}_{1,i} &= \hat{e}_{2,i} + \frac{\alpha_{1,i}}{\varepsilon_{ob,i}^2}(e_i - \hat{e}_{1,i}), \quad 1 \leq j \leq n_i - 1 \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{e}}_{2,i} &= \frac{\alpha_{2,i}}{\varepsilon_{ob,i}^2}(e_{1,i} - \hat{e}_i),
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

donde  $0 < \varepsilon_{ob,i}^{n_i} \ll 1$  es un parámetros de diseño, y  $\alpha_{j,i} > 0$  es elegido tal que las raíces de  $p^{n_i} + \alpha_{1,i}p^{n_i-1} + \dots + \alpha_{n_i-1,i}p + \alpha_{n_i,i}$  tengan parte real negativa.

El estimado  $y_i$  es

$$\hat{y}_i^{(j-1)} = \hat{e}_{j,i} + y_{r,i}^{(j-1)}, \quad 1 \leq j \leq 2, \quad (4.40)$$

el controlador es implementado por la sustitución de  $y_i$  en (4.17)-(4.23) por su estimado. El controlador está saturado fuera de una región compacta de interés para prevenir la introducción de picos en el OAG [15], i.e.,

$$u_i = u_{max,i} \text{sat} \left( \frac{u_{o,i} - u_{c,i}}{u_{max,i}} \right)$$

donde  $\text{sat}(\cdot)$  es la función saturación y  $u_{max,i}$  el límite de saturación, elegido para cubrir la región de interés.

## 4.5. Resultados de simulación y experimentales

A continuación en las siguientes figuras se presentan las gráficas con los resultados obtenidos al aplicar la ley de control (4.17) al robot Rhino (sólo se utilizaron codo y hombro). Se llevaron a cabo diferentes pruebas con la intención de validar las dos componentes de la ley de control propuesta (4.17).

La ley de control y las leyes de adaptación de parámetros fueron implementadas con los siguientes parámetros: La parte antecedente de la RNDR está definida a partir de funciones membresía Gaussianas ( $[\text{centro}, \text{ancho}] = \{[-0.35, -0.21], [0, 0.21], [0.35, 0.21]\}$ ), y sigmoides ( $[\text{centro}, \text{ancho}] = [0, 0.21]$ ). Los parámetros de la RNDR utilizados fueron  $\sigma_i = 0.9$ ,  $\gamma_i = 0.5$ ,  $\varrho = 0.7$ ,  $\varphi = 0.3$ ,  $\vartheta_i = 1$  y  $\psi_i = 1$ . Los parámetros de la señal de compensación son  $\rho_i = 1$ ,  $\epsilon_i = 1$  y  $\alpha_i = 1$ .

En primer lugar presentamos los resultados obtenidos por medio de simulación (Figuras 4.1 y 4.2), con la intención de probar la ley de control (4.17) por medio de retroalimentación de estados sin el uso de un observador.

Los experimentos realizados fueron:

El primer experimento (figuras (4.3) y (4.4)) consistió en aplicar la ley de control (4.17) a dos eslabones del robot Rhino, con la intención de que bs ángulos de cada articulación sigan una trayectoria dada.

El segundo experimento (figuras 4.5 y 4.6), se lleva a cabo con la intención de validar el desempeño del término basado en la RNDR, por lo cual la prueba inicia aplicando la ley de control (4.17) con ambos términos y posteriormente es retirada la señal de compensación, por lo tanto el control del sistema lo realizó la RNDR ya entrenada.

El tercer experimento (Figuras 4.7 y 4.8), se lleva a cabo con la intención de validar el desempeño de la señal de compensación, por lo cual la prueba inicia aplicando la ley de control (4.17) con ambos términos y posteriormente se retira el basado en la RNDR, por lo tanto el control del sistema lo realiza únicamente la señal de compensación.

Los siguientes dos experimentos se llevaron a cabo para validar el desempeño de los términos que componen la ley de control (4.17) , cuando alguno de los dos términos no está bien sintonizados. En primer lugar, se valida el término basado en la RNDR, por lo que el cuarto experimento (Figuras 4.9 y 4.10) inicio con la aplicación únicamente de la señal de compensación aunque mal sintonizada, de forma que al aplicar la RNDR el desempeño mejore. En el quinto experimento (Figuras 4.11 y 4.12), el procedimiento es similar, solo que en este caso el experimento se inició aplicando la ley de control basada en la RNDR no bien sintonizada y posteriormente se incorporó la señal de compensación.

Las señales mostradas en las figuras tiene las siguientes unidades: el error  $e_i$  y la señal de referencia  $y_{r,i}$  en *grados*, las señales de control  $u_i$ ,  $u_{c,i}$ , y  $u_{f,i}$  están en volts, las señales  $\hat{\theta}_i$ ,  $\hat{\phi}_i$  y  $\hat{\delta}_i$  carecen de unidades.

## 4.6. Conclusiones previas

De acuerdo a los resultados que se muestran en las Gráficas, se puede observar que el desempeño de la ley de control es bueno, pero se sigue teniendo dependencia de los estados y del término de compensación en la ley de control (4.20). Ambas son situaciones que en el siguiente capítulo se muestra como quitar.

En cuanto a los resultados obtenidos estos mejoran sustancialmente los obtenidos y mostrados en el capítulo anterior.

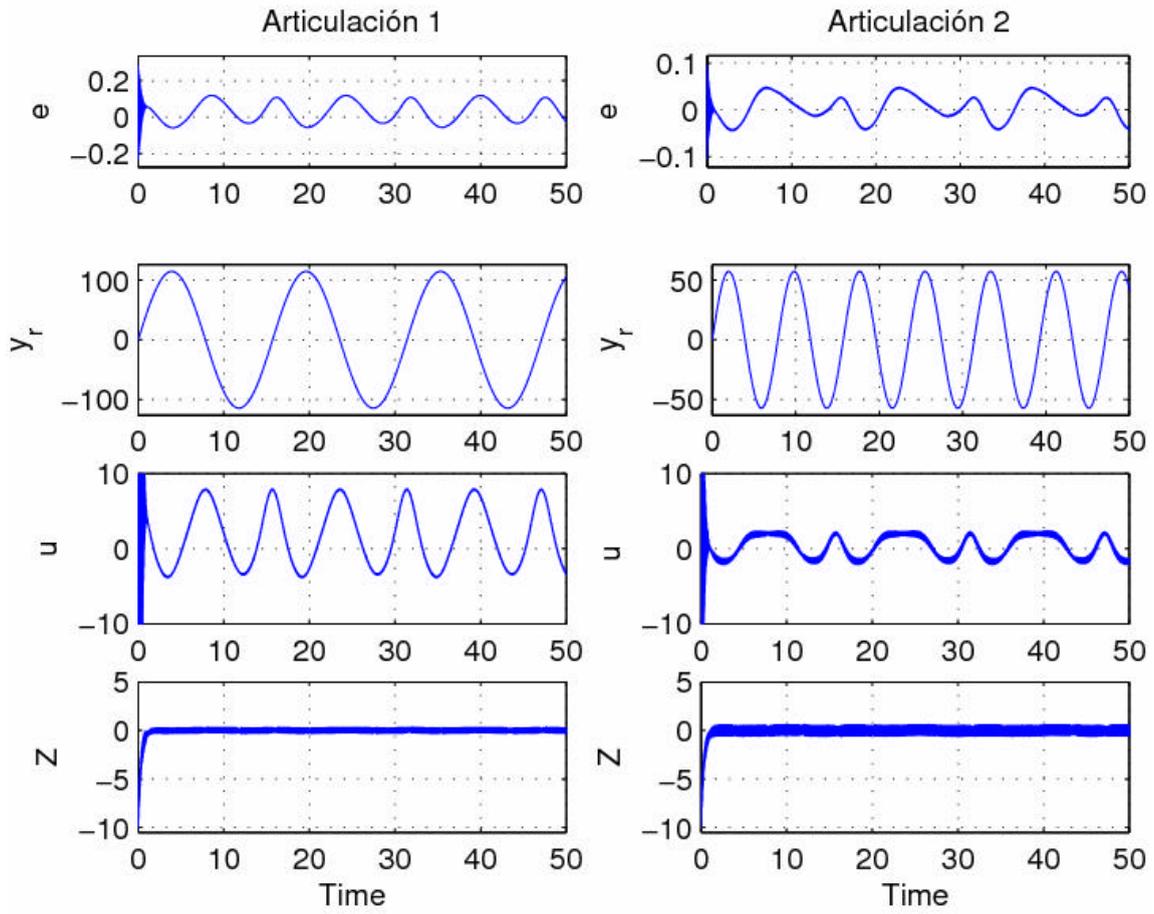


Figura 4.1: Resultados obtenidos por medio de simulación al aplicar la ley de control (4.17)

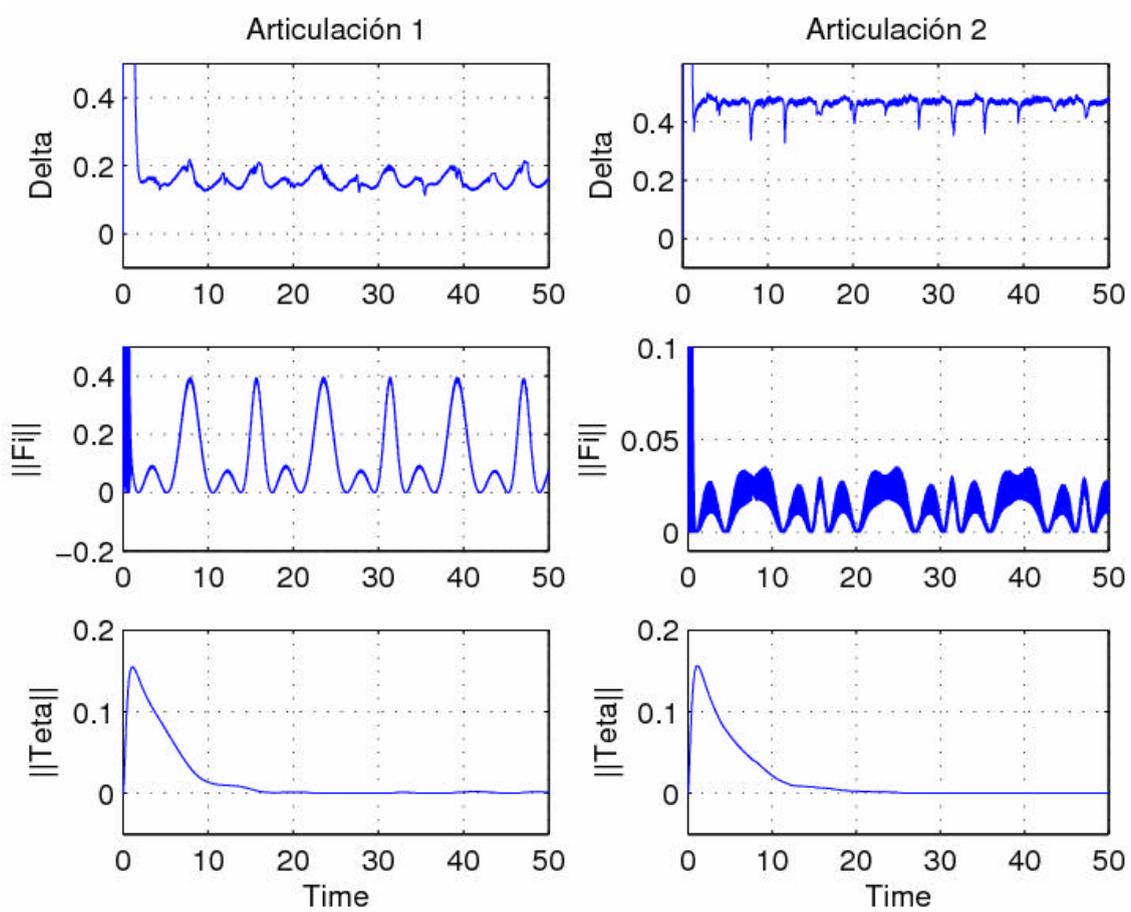


Figura 4.2: Resultados obtenidos por medio de simulación al aplicar la ley de control (4.17)

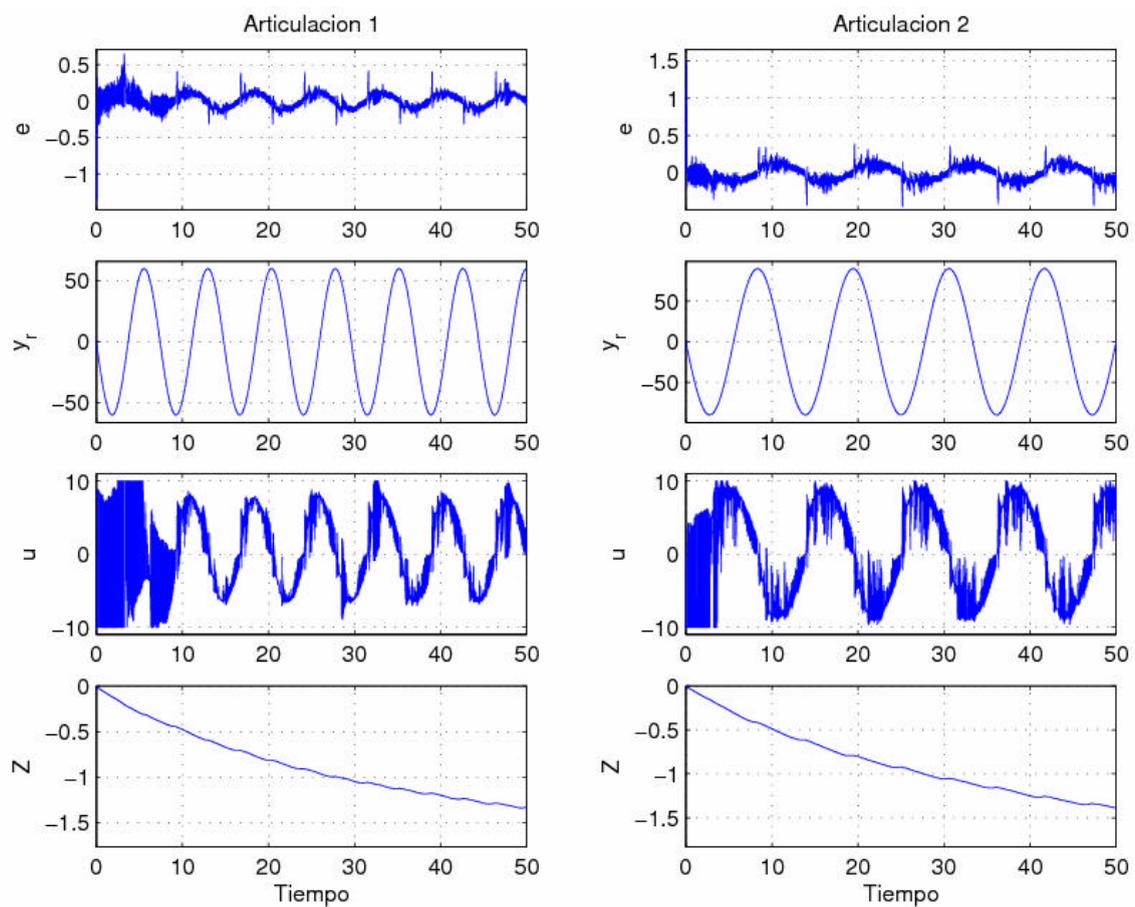


Figura 4.3 Resultados experimentales de la aplicación de la ley de control (4.17) por retroalimentación de estados en los eslabones 1 y 2 (señales  $e_i$ ,  $y_{r,i}$ ,  $u_i$  y  $z_i$ ).

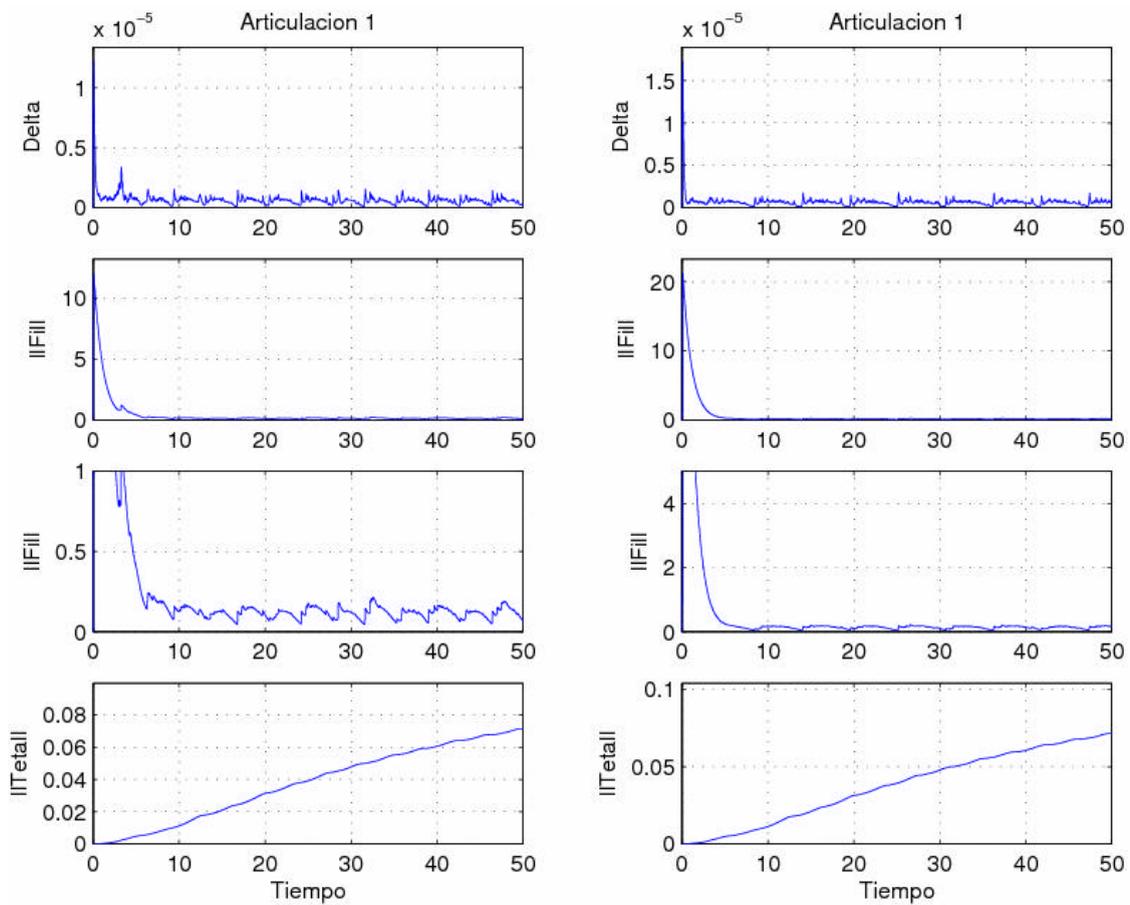


Figura 4.4. Resultados experimentales de la aplicación de la ley de control (4.17) por retroalimentación de estados en los eslabones 1 y 2 (señales  $\delta_i$ ,  $\|\phi_i\|$  y  $\|\theta_i\|$ ).

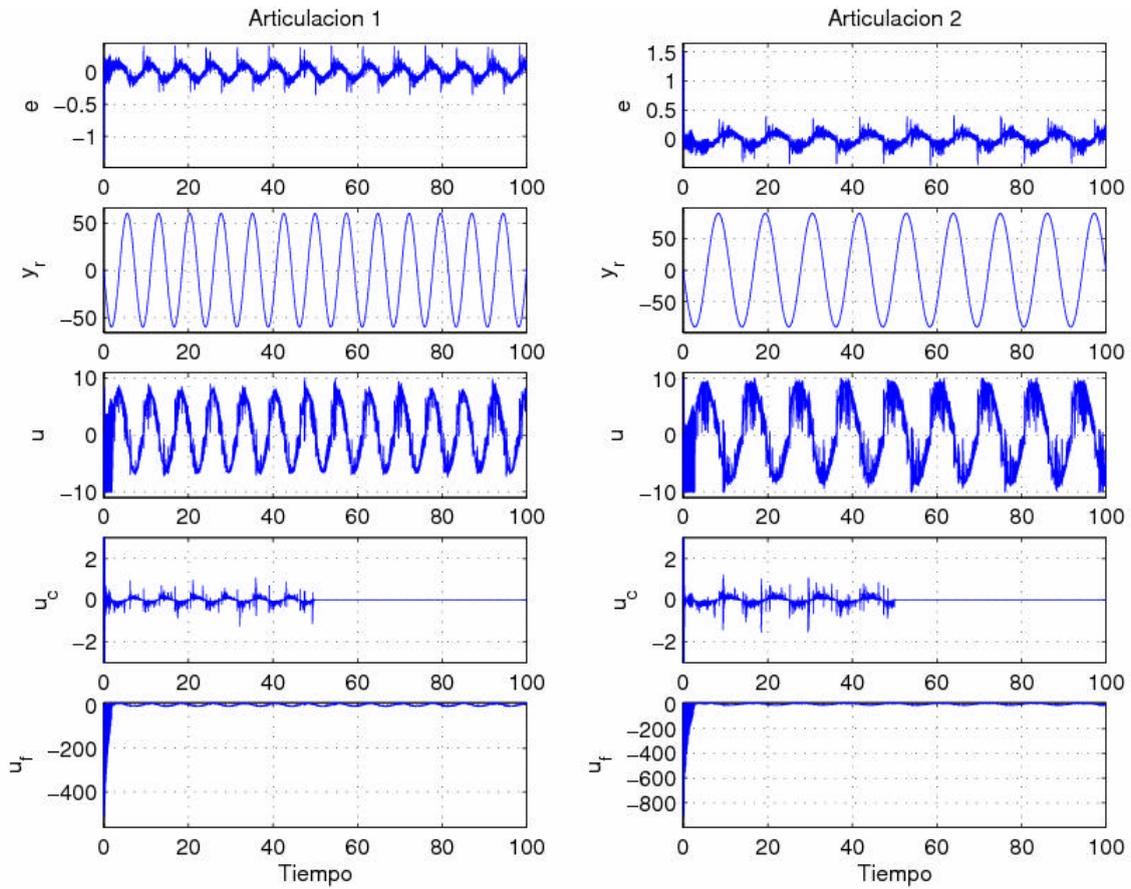


Figura 4.5: Aplicación de la ley de control (2.17) al inicio y después de 50 seg. la señal de compensación es retirada, mostrando un buen desempeño de la RNDR entrenada (señales  $e_i$ ,  $y_{r,i}$ ,  $u_i$  y  $z_i$ ).

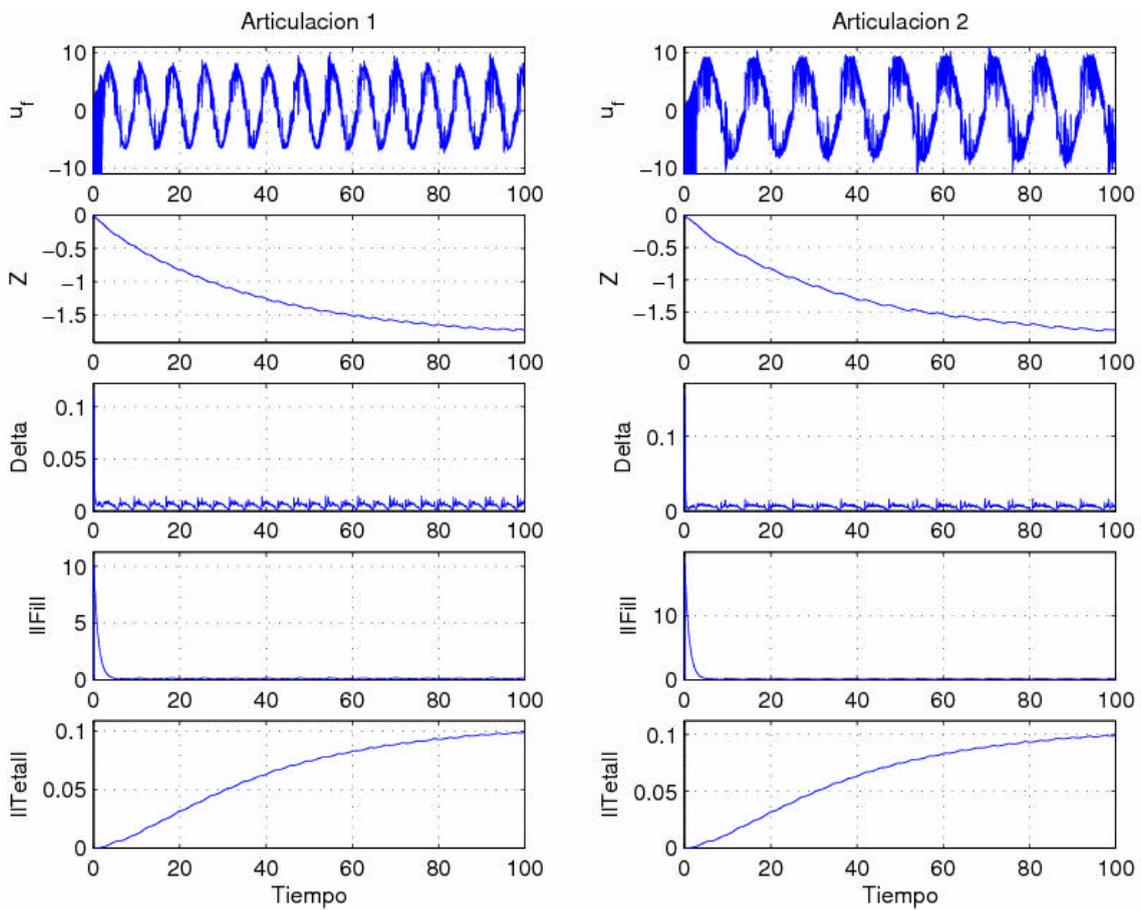


Figura 4.6: Aplicación de la ley de control (4.17) al inicio y después de 50 seg. la señal de compensación es retirada, mostrando un buen desempeño de la RNDR entrenada (señales  $\delta_i$ ,  $\|\phi_i\|$  y  $\|\theta_i\|$ ).

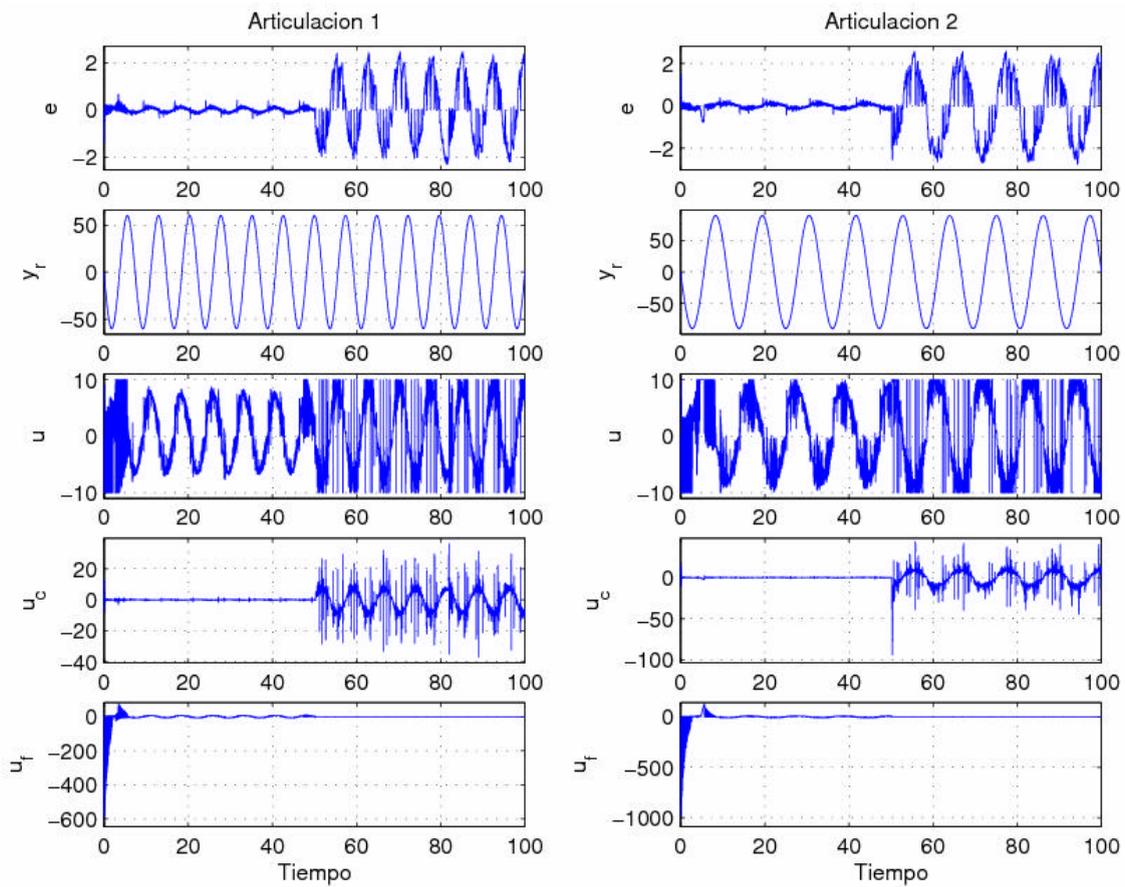


Figura 4.7 Aplicación de la ley de control (4.17) al inicio y después de 50 seg. la señal de la RNDR es retirada, mostrando como influye su efecto en la señal de control (señales  $e_i$ ,  $y_{r,i}$ ,  $u_i$  y  $z_i$ ).

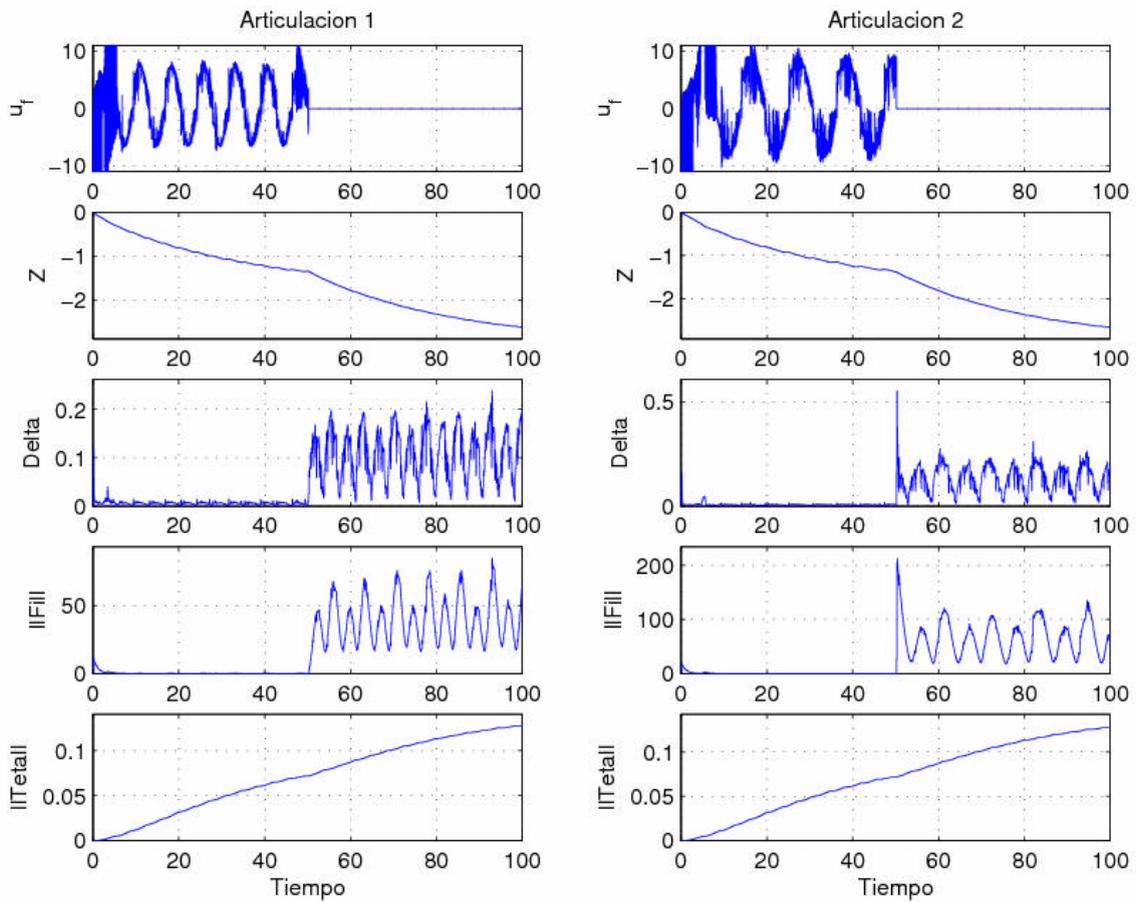


Figura 4.8: Aplicación de la ley de control (4.17) al inicio y después de 50 seg. la señal de la RNDR es retirada, mostrando como influye su efecto en la señal de control (señales  $\delta_i$ ,  $\|\phi_i\|$  y  $\|\theta_i\|$ )

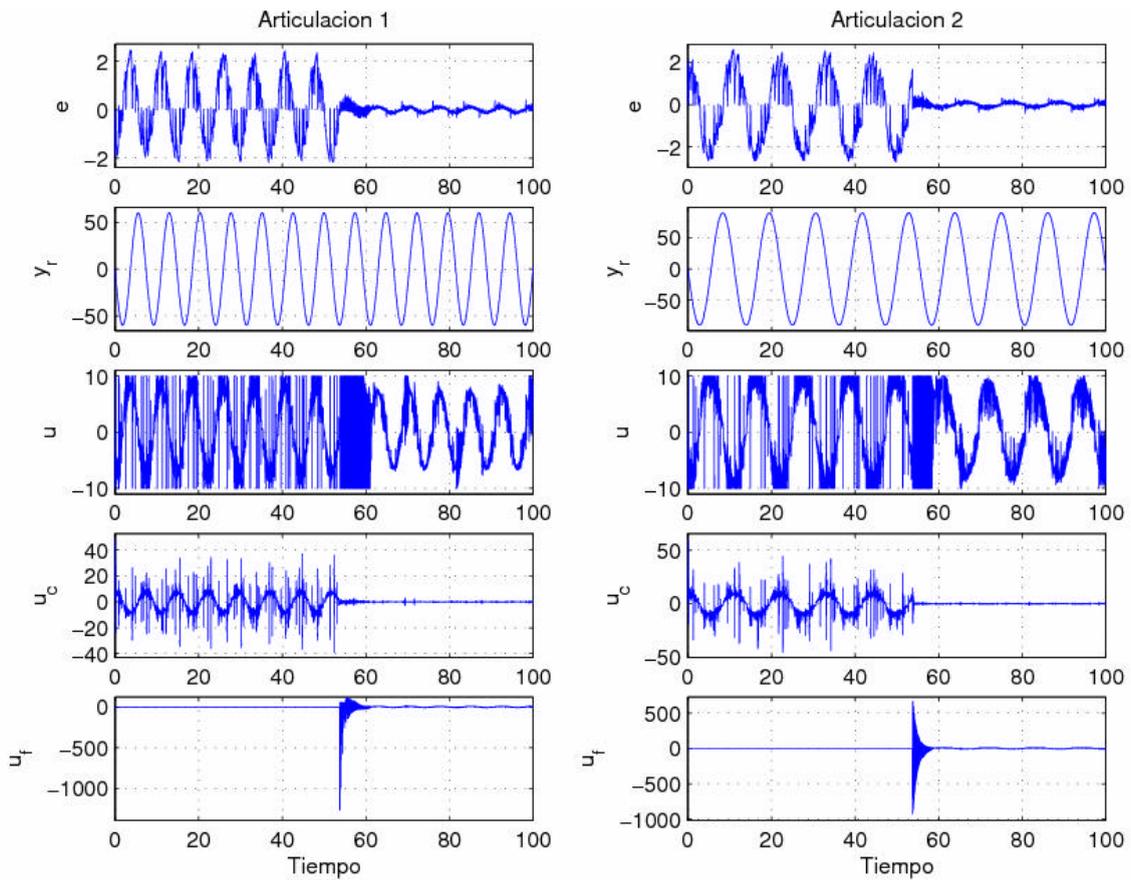


Figura 2.9: Aplicación de la señal de compensación de la ley de control (4.17) al inicio y a partir de los 50 seg. Se suma el efecto de la señal de la RNDR sin entrenar, mostrando su efecto en el

desempeño de la salida de cada subsistema (señales  $e_i, y_{r,i}, u_i$  y  $z_i$ ).

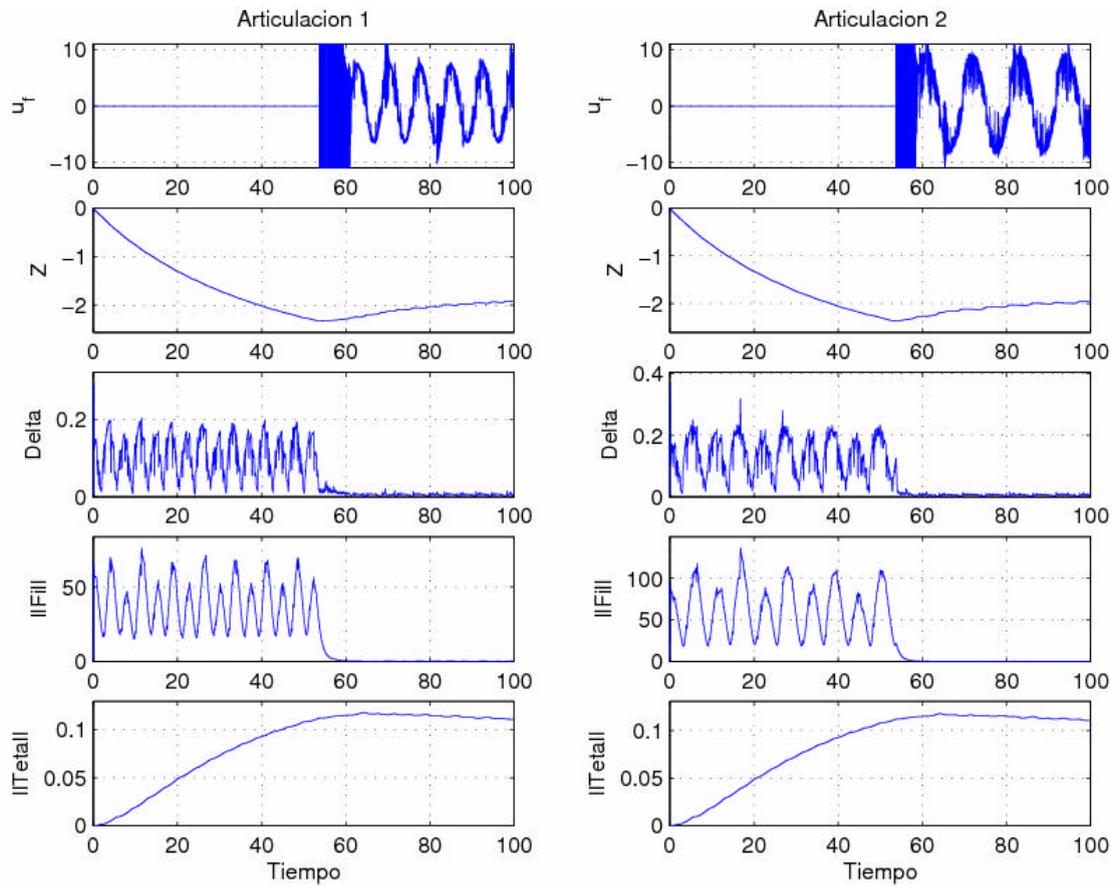


Figure 2.10: Aplicación de la señal de compensación de la ley de control (4.17) al inicio y a partir de los 50 seg. Se suma el efecto de la señal de la RNDR sin entrenar, mostrando su efecto en el desempeño de la salida de cada subsistema (señales  $\delta_i$ ,  $\|\phi_i\|$  y  $\|\theta_i\|$ )

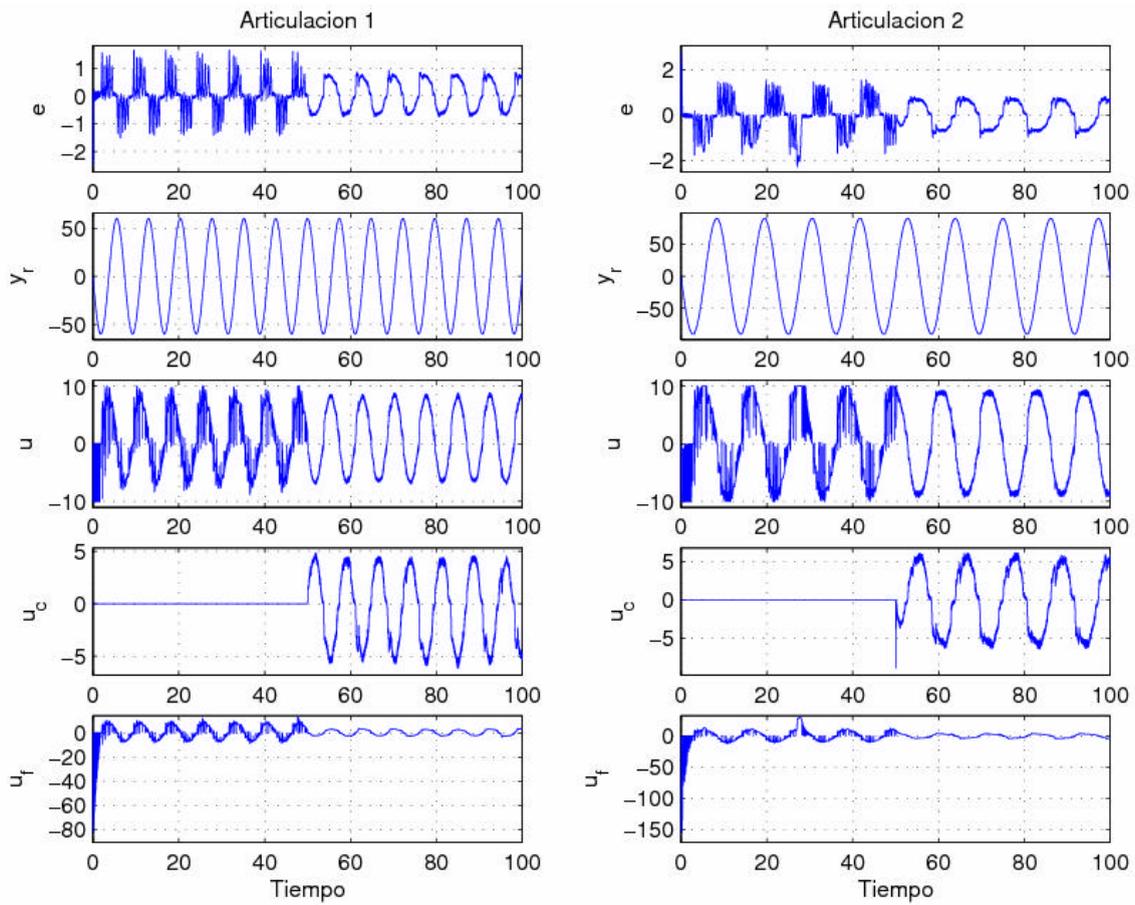


Figura 4.11: Aplicación del término basado en la RNDR de la ley de control (4.17) (sin sintonizar) al inicio y a partir de los 50 seg. se suma el efecto de la señal de compensación, mostrando su

efecto en el desempeño de la salida de cada subsistema (señales  $e_i, y_{r,i}, u_i$  y  $z_i$ ).

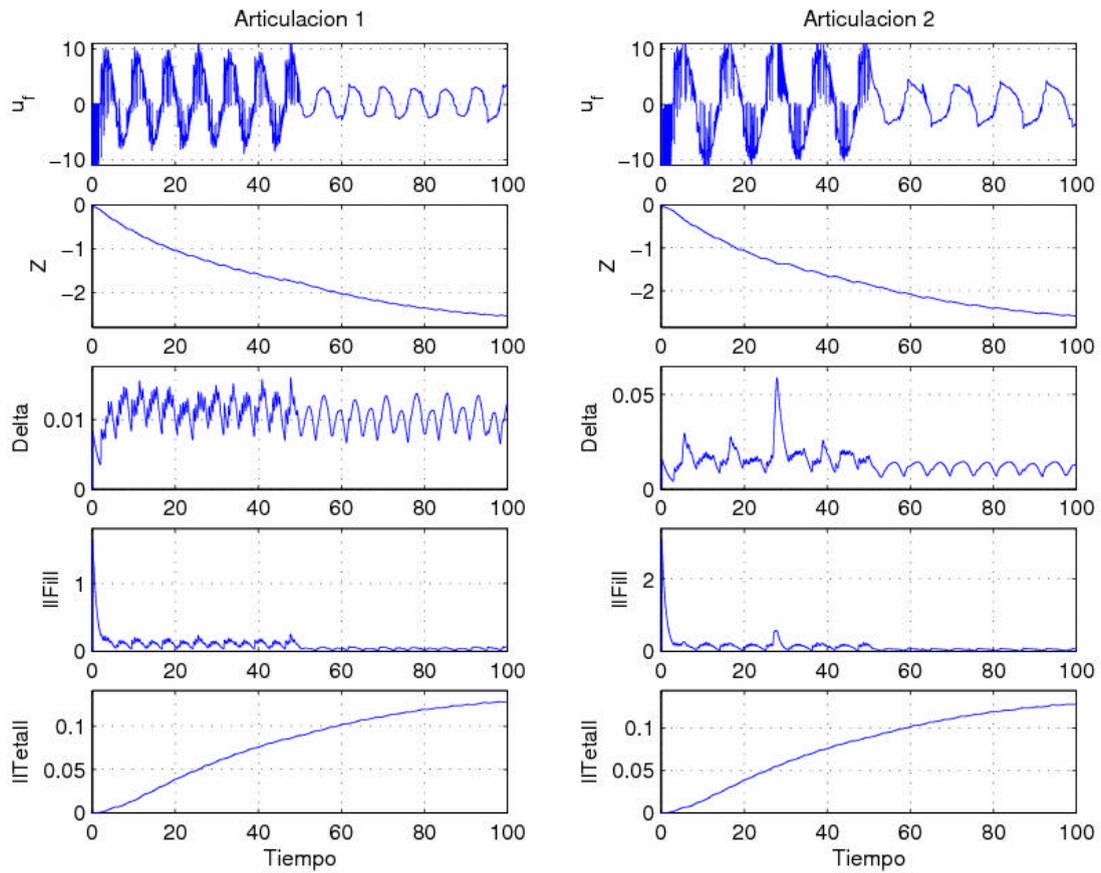


Figura 4.12: Aplicación del término basado en la RNDR de la ley de control (4.17) (sin sintonizar) al inicio y a partir de los 50 seg. se suma el efecto de la señal de compensación, mostrando su efecto

en el desempeño de la salida de cada subsistema (señales  $\delta_i, \|\phi_i\|_y, \|\theta_i\|$ )

# Capítulo 5

## Control Por Retroalimentación de Salida con RNDR

En este capítulo, presentamos el diseño y análisis de un esquema de control descentralizado para sistemas no-lineales definidos por (1.1) por retroalimentación de la salida sin el uso de un observador de estados. Al igual que en el capítulo anterior consideramos el caso particular de sistemas que pueden ser descompuestos en  $N$  subsistemas de segundo orden  $n_i = 2$ . A diferencia de los dos casos anteriores, en este la ley de control está compuesta por un solo término que depende exclusivamente de la señal de salida. La ley de control está compuesta por una RNDR que aproxima la ley de control descentralizada ideal.

Le ley de control diseñada, se evalúa de manera experimental. Los experimentos se realizan en un robot tipo Rhino de cinco grados de libertad, de los cuales solo se utilizaron dos eslabones para tener un movimiento plana.

### 4.1 Formulación del problema

Considerando el sistema del capítulo anterior, y a partir de

$$\ddot{y}_i = f_i(y_i) + g_i(y_i)u_i + Z_i(y), \quad (4.1)$$

donde  $y_i = [y_i \ y_i^{(1)}]^T$ , y  $y = [y_1^T \ y_2^T \ \dots \ y_N^T]^T$ , donde  $Z_i$  representa la interconexión del  $i$ -ésimo subsistema con el resto de la planta.

Se asume que cada subsistema (5.1) satisface las siguientes condiciones:

*Suposición 5.1:* La ganancia de control satisface que

$$0 < \underline{g}_i \leq g_i(y_i) \leq \bar{g}_i q_i(\| E_i \|),$$

$\forall y_i \in R^2$ , donde  $\underline{g}_i$  y  $\bar{g}_i$  son constantes positivas desconocidas y  $q_i(\| y_i \|) = (\| y_i \| + \lambda_{1,j})^{\nu_i}$ , donde  $\| \cdot \|$  denota la norma Euclidiana y  $\lambda_{1,j} > 0$ .

*Suposición 5.2:* El término de interconexión de cada subsistema de la planta (1.2), está acotado por una función  $q_i(\| y_i \|)$  en la siguiente forma

$$|Z_i(Y)| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} q_j(\| y_j \|) \quad (5.2)$$

para alguna  $c_{ij} \geq 0$ .

Dada una señal de referencia  $y_{r,i}$  continuamente diferenciable para el i-ésimo subsistema, se asume que  $y_{r,i}$  y  $\ddot{y}_{r,i}$  son acotadas, y  $\ddot{y}_{r,i}$  es al menos continua a tramos. Se define el error de seguimiento en el i-ésimo subsistema como

$$e_i^{(j)} = y_i^{(j)} - y_{r,i}^{(j)}, \quad j = 0, 1 \quad (5.3)$$

De manera similar a  $y_i$ , se define  $Y_{r,i} = [y_{r,i} \ \dot{y}_{r,i}]^T$  y  $Y_{R,i} = [y_{r,i} \ \dot{y}_{r,i} \ \ddot{y}_{r,i}]^T$ .

Su versión filtrada está definida como

$$s_i = (p + \zeta_i) e_i, \quad (5.4)$$

donde  $p$  denota el operador derivada respecto al tiempo, y  $\zeta_i > 0$ . Si  $|s_i(t)| \leq \psi_i, \forall t \geq 0$  entonces  $e_i$  y  $\dot{e}_i$  serán acotadas.

A partir de lo anterior, el objetivo es diseñar una ley de control que asegure que el error filtrado  $s_i$  sea finalmente acotado (estabilidad práctica), mientras las demás señales se mantengan acotadas. También, el error finalmente acotado debe poder hacerse lo suficientemente pequeño si se realiza la elección apropiada de los parámetros del controlador.

La dinámica de  $s_i$  puede ser obtenida de (5.1) y (5.3)

$$\dot{s}_i = -\zeta_i s_i + f_i(y_i) + \varrho_i(y_i, y_{R,i}) + g_i(y_i)u_i + Z_i(Y), \quad (5.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \varrho_i(y_i, y_{R,i}) &\triangleq -y_{r,i}^{(2)} + \sum_{j=0}^2 C_{i,j} \zeta_i^{2-j} p^{j+1} e_i \\ y_{r,i} &\triangleq [y_{r,i} \dot{y}_{r,i}]^T \in \mathbb{R}^2 \\ y_{R,i} &\triangleq [y_{r,i} \dot{y}_{r,i} y_{r,i}^{(2)}]^T \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

## 5.2. Propuesta de una red neuronal difusa recurrente

Las RNDR propuesta está inspirada en el SLDR presentado por [14], y está definida por

$$\begin{aligned} R^r &: \text{ if } e_i \text{ is } A^r(e_i) \text{ and } z_i \text{ is } B^r(z_i) \\ &\text{ then } \zeta_i^r = \theta^r \text{ and } \xi_i = \phi^r \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde  $R^r$  denota r-ésima regla de la parte difusa de la RNDR,  $1 \leq r \leq n_r$ .  $e_i$  y  $z_i \in \mathbb{R}$  son las entradas de la RNDR. En este caso  $e_i$  es el error de seguimiento

del  $i$ -ésimo subsistema,  $z_i$  es el estado interno de la RNDR y que representa la dinámica del controlador propuesto.  $\xi_i^r \in \mathbb{R}$  y  $\zeta_i^r \in \mathbb{R}$  son las salida de la  $r$ -ésima regla.  $\theta_i^r, \phi_i^r$  son parámetros constante (**singletons**), y  $A^r(e_i), B^r(z_i)$  son conjuntos difusos caracterizados por dos tipos de funciones membresía Gaussianas o Sigmoides, definidas como:

$$\begin{aligned}\mu_{A^r}(e_i) &= \exp\left\{-\left(\frac{e_i - c_i^r}{\sigma_i^r}\right)^2\right\} \\ \mu_{B^r}(z_i) &= \frac{1}{1 + \exp\{\zeta_i^r(a_i^r - z_i)\}},\end{aligned}$$

en donde  $c_i^r, a_i^r$  son los centros y  $\sigma_i^r$  y  $\zeta_i^r$  los anchos de sus respectivas funciones.

Sea la salida de la RNDR:

$$u_{f,i}(e_i, z_i) \triangleq z_i + \phi_i^T W_i(e_i, z_i) \quad (5.7)$$

$$\dot{z}_i \triangleq -\gamma_i z_i + \theta_i^T W_i(e_i, z_i), \quad (5.8)$$

En donde  $\gamma_i$  es una constante positiva,  $\theta_i^T = [\theta_i^1 \ \theta_i^2 \ \dots \ \theta_i^{n_r}]$ ,  $\phi_i^T = [\phi_i^1 \ \phi_i^2 \ \dots \ \phi_i^{n_r}]$  y  $W_i(e_i, z_i) = [w_{1,i} \ w_{2,i} \ \dots \ w_{n_r,i}]^T$ , para

$$w_{k,i}(e_i, z_i) = \mu_A^k(e_i) \mu_B^k(z_i), \quad (5.9)$$

Las RNDR definida anteriormente no puede ser implementada al ser desconocidos los vectores  $\theta_i$  y  $\phi_i$ . Por lo tanto, es necesario utilizar sus valores estimados. Por lo que se define La RNDR estimada como:

$$\hat{u}_{f,i}(e_i, \hat{z}_i) \triangleq \hat{\phi}_i^T W_i(e_i, \hat{z}_i) \quad (5.10)$$

$$\dot{\hat{z}}_i \triangleq -\gamma_i \hat{z}_i + \hat{\theta}_i^T W_i(e_i, \hat{z}_i), \quad (5.11)$$

en donde  $\hat{\theta}_i^T = [\hat{\theta}^1 \ \hat{\theta}^2 \ \dots \ \hat{\theta}^{n_r}]$ ,  $\hat{\phi}_i^T = [\hat{\phi}^1 \ \hat{\phi}^2 \ \dots \ \hat{\phi}^{n_r}]$  son los vectores de valores estimados de  $\theta_i$  y  $\phi_i$ , respectivamente. Y  $W_i(e_i, \hat{z}_i) = [\hat{w}_{1,i} \ \hat{w}_{2,i} \ \dots \ \hat{w}_{n_r,i}]^T$  (para simplificar el análisis posterior se define  $\hat{W} \triangleq W_i(e_i, \hat{z}_i)$ ). Seguido de (5.3) y (5.23) se puede ver que el estado interno es acotado de la siguiente forma

$$|\hat{z}_i| \leq \bar{c}_{z,i}, \quad (4.16)$$

en donde  $\bar{c}_{z,i} > 0$   $\hat{\theta}_i$  siempre que  $\hat{\theta}_i$  sea acotada.

### 5.3. Diseño del control

Se procede al diseño de la ley de control de la siguiente manera. Primero, se estudia una ley de control centralizada ideal. Después, se propone una ley de control descentralizada ideal, y finalmente, se muestra el diseño de una ley de control descentralizada adaptable.

#### 5.3.1 Control centralizado ideal

Si se asume que las  $f_i(y_i)$ ,  $g_i(y_i)$ ,  $b_i(y_i, y_{R,i})$  y  $Z_i(Y)$  del subsistema (5.5) son conocidas, se puede diseñar una ley de control centralizada  $u_i$

$$u_i = -\frac{1}{g_i(y_i)} [f_i(y_i) + k_i s_i + b_i(y_i, y_{R,i}) + Z_i(Y)]. \quad (5.13)$$

Sustituyendo (5.13) dentro de (5.5) se obtiene

$$\dot{s}_i = -(\zeta_i + k_i)s_i, \quad (5.14)$$

lo cual garantiza que el error filtrado  $s_i$  tiene a cero exponencialmente.

### 5.3.2 Control descentralizado ideal

La ley de control (5.13), necesita información del estado de todos los subsistemas, pero esto no siempre es posible. Por lo tanto se decidió diseñar una ley de control descentralizada. Si se asume que las funciones  $f_i(\mathbf{y}_i)$  y  $g_i(\mathbf{y}_i)$  del subsistema (5.5) son conocidas, se puede diseñar una ley de control descentralizado  $u_i$  como

$$u_i = -\frac{1}{g_i(\mathbf{y}_i)} [f_i(\mathbf{y}_i) + k_i s_i + b_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{R,i}) + S_i(\mathbf{y}_i)], \quad (5.15)$$

con

$$S_i(\mathbf{y}_i) = \frac{\delta_i^2 q_i^2 (\|\mathbf{y}_i\|) s_i}{\delta_i q_i (\|\mathbf{y}_i\|) |s_i| + \epsilon_i}, \quad (5.16)$$

donde  $\delta, \epsilon_i > 0$ ,

El sistema en lazo cerrado con la ley de control (5.15) en (5.5) es

$$\dot{s}_i = -(\zeta_i + k_i)s_i + Z_i(Y) - S_i(\mathbf{y}_i), \quad (5.17)$$

### Análisis de estabilidad

La siguiente función candidata de Lyapunov es considerada

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} s_i^2. \quad (5.18)$$

Derivando  $V$  con respecto al tiempo y usando (5.17), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N s_i \dot{s}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ -(\zeta_i + k_i) s_i^2 + s_i (Z_i(Y) - S_i(y_i)) \right\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Analizando el segundo término de (5.19), se tiene:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N s_i Z_i(Y) \\ &\leq \sum_{i=1}^N |s_i| |Z_i(Y)| \\ &\leq \sum_{i=1}^N |s_i| \sum_{j=1}^N c_{i,j} q_j(\|y_i\|) \\ &\leq \sum_{i=1}^N N \max_j(c_{i,j}) |s_i| q_i(\|y_i\|) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \delta_i |s_i| q_i(\|y_i\|), \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde  $\delta_i = N \max_j(c_{i,j})$ . La tercera desigualdad resulta de aplicar la desigualdad de Chebyshev (2.27). Usando (5.20) y (5.16) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -(\zeta_i + k_i) s_i^2 + \delta_i |s_i| q_i(\|y_i\|) - s_i S_i(y_i) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ -(\zeta_i + k_i) s_i^2 + \delta_i |s_i| q_i(\|y_i\|) - s_i \frac{\delta_i^2 q_i^2(\|y_i\|) s_i}{\delta_i q_i(\|y_i\|) |s_i| + \epsilon_i} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ -(\zeta_i + k_i) s_i^2 \frac{\delta_i^2 s_i^2 q_i^2(\|y_i\|) - \delta_i^2 q_i^2(\|y_i\|) s_i^2}{\delta_i q_i(\|y_i\|) |s_i| + \epsilon_i} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta_i |s_i| q_i(\|y_i\|) \epsilon_i}{\delta_i q_i(\|y_i\|) |s_i| + \epsilon_i} \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -(\zeta_i + k_i) s_i^2 + \epsilon_i \right\}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

EL control descentralizado ideal (5.15), denotado por  $u_i^*$ , no puede ser implementado al ser desconocidas las funciones  $f_i(\cdot)$  y  $g_i(\cdot)$ . Sin embargo, en la experiencia práctica existe un control PD (lineal o no lineal) que puede estabilizar un sistema mecánico con un desempeño razonable, lo cual puede ser usado para aproximar el comportamiento de (5.15). Ya que el mejor control PD es desconocido, se puede entonces usar una RNDR para aproximarlos. Por lo tanto, se asume la siguiente condición.

*Suposición 5.3:* Dada la ley de control  $u_i^*$ , existe un control PD denotado por  $|u_i^* - u_{PD,i}| \leq \kappa_i$  con  $\kappa_i$  una constante positiva.

### 5.3.3. Control descentralizado adaptable

Considérese la siguiente ley de control

$$u_i = \hat{u}_{f,i}, \tag{5.22}$$

los conjuntos difusos, las  $R_i$  reglas difusas, las funciones de base difusa  $\hat{W}_i$  y el vector de parámetros  $\hat{\phi}_i$  con la salida de la RNDR en (5.10), y las leyes de adaptación

$$\dot{\hat{\theta}} = -\eta_i \hat{\theta}_i + D_{i,\theta} \quad (5.23)$$

$$\dot{\hat{\phi}}_i = -\zeta_i \hat{\phi}_i - D_{i,\phi}, \quad (5.24)$$

donde

$$D_{i,\theta} = \frac{\varrho_i \hat{z}_i}{\|\hat{W}_i\| \|\hat{z}_i\| + \varrho_i} \hat{W}_i$$

$$D_{i,\phi} = \frac{\zeta_i R_i(e_i)}{|R_i(e_i)| + \zeta_i} \hat{W}_i,$$

y  $R_i(e_i) = \psi_{1,i} e_i |e_i| + \psi_{2,i} e_i + \psi_{3,i}$ , para  $\psi_{1,i}, \psi_{2,i}, \psi_{3,i}, \sigma_i, \zeta_i, \varrho_i > 0$

Se puede observar que el segundo término en (5.23) y (5.24) está acotado de la siguiente forma

$$\|D_{i,\theta}\| \leq \varrho_i \quad (5.25)$$

$$\|D_{i,\phi}\| \leq \zeta_i. \quad (5.26)$$

Por lo tanto, se puede ver de las definiciones (5.11), (5.23), (5.24) y usando (5.25), (5.26) que los términos  $\hat{z}_i, \hat{\theta}_i$  y  $\hat{\phi}_i$  están acotados de la siguiente manera

$$\|\hat{\theta}_i\| \leq \vartheta_i \quad (5.27)$$

$$\|\hat{\phi}_i\| \leq \varphi_i \quad (5.28)$$

$$|\hat{z}_i| \leq \bar{C}_i^z, \quad (5.29)$$

con  $\vartheta_i, \varphi_i, \bar{C}_i^z > 0$ .

## Análisis de Estabilidad

Antes de comenzar el análisis de estabilidad se hace algunos cambios en la ley de control (5.22), sumando y restando  $u_i^*, u_{pd,i}, u_{f,i}$  por lo cual se tiene:

$$\begin{aligned}
 u_i &= \hat{u}_{f,i} + u_i^* + [u_{pd,i} - u_i^*] + [u_{f,i} - u_{pd,i}] - u_{f,i} \\
 &= u_i^* + \hat{\phi}_i^T \hat{W}_i - \phi_i^T W_i + [u_{pd,i} - u_i^*] \\
 &\quad + [u_{f,i} - u_{pd,i}] \\
 &= u_i^* + \bar{u}_i,
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

donde

$$\bar{u}_i = \hat{\phi}_i^T \hat{W}_i - \phi_i^T W_i + [u_{pd,i} - u_i^*] + [u_{f,i} - u_{pd,i}] \tag{5.31}$$

El sistema en lazo cerrado con la ley de control (5.22) en (5.5) es

$$\dot{s}_i = -(\zeta_i + k_i)s_i + g_i(y_i)\bar{u}_i + Z_i(Y) - S_i(y_i) \tag{5.32}$$

De la Suposición 5.3 y utilizando (5.28), (5.10) y (5.7), se puede demostrar que  $\bar{u}_i$  es acotado

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i &\leq | \hat{\phi}_i^T \hat{W}_i | + | \phi_i^T W_i | + | [u_{pd,i} - u_i^*] | + \\
&\quad | [u_{f,i} - u_{pd,i}] | \\
&\leq \| \hat{\phi}_i \| \| \hat{W}_i \| + \| \phi_i \| \| W_i \| + l_i + \kappa_i \\
&\leq \vartheta_i r_i + \varphi_i r_i + l_i + \kappa_i \\
&= c_i,
\end{aligned} \tag{5.33}$$

donde  $c_i = \vartheta_i r_i + \varphi_i r_i + l_i + \kappa_i$ .

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \{ s_i^2 + \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} z_i^2 + \frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i + \frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \tilde{\phi}_i \}$$

Tomando la derivada V con respecto al tiempo a los largo de (5.32) se puede ver que

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \sum_{i=1}^N \{ s_i \dot{s}_i + M_i \} \\
&= \sum_{i=1}^N \{ s_i [ -(\zeta_i + k_i) s_i + g_i(y_i) \bar{u}_i + Z_i(Y) - S_i(y_i) ] + M_i \}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

donde:

$$M_i = \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \dot{z}_i \dot{z}_i + \frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i + \frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \dot{\tilde{\phi}}_i \tag{5.35}$$

Analizando  $s_i [g_i(y_i) \bar{u}_i + Z_i(Y)]$  y utilizando las Suposiciones 5.1 y 5.2 se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N |s_i \{g_i(\mathbf{y}_i)\bar{u}_i + Z_i(\mathbf{Y})\}| \\
\leq & \sum_{i=1}^N |s_i| \{ |g_i(\mathbf{y}_i)| |\bar{u}_i| + |Z_i(\mathbf{Y})| \} \\
\leq & \sum_{i=1}^N |s_i| \{ \underline{g}_i q_i(\|\mathbf{y}_i\|) c_i + \sum_{j=1, i \neq j}^N c_{i,j} q_j(\|\mathbf{y}_i\|) \} \\
\leq & \sum_{i=1}^N |s_i| \sum_{j=1}^N C_{i,j} q_j(\|\mathbf{y}_i\|) \\
\leq & \sum_{i=1}^N N \max_j(C_{i,j}) |s_i| q_i(\|\mathbf{y}_i\|) \\
\leq & \sum_{i=1}^N \delta_i |s_i| q_i(\|\mathbf{y}_i\|),
\end{aligned} \tag{5.35}$$

donde  $\delta_i = N \max_j(C_{i,j})$ . La tercera desigualdad es resultado de aplicar la desigualdad de Chebyshev (2.27).

Sustituyendo el resultado anterior en (5.34) y utilizando (5.16), se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V} & \leq \sum_{i=1}^N \{ -(\zeta_i + k_i) s_i^2 + \delta_i |s_i| q_i(\|\mathbf{y}_i\|) \\
& \quad - s_i S_i(\mathbf{y}_i) + M_i \} \\
& \leq \sum_{i=1}^N \{ -(\zeta_i + k_i) s_i^2 + \epsilon_i + M_i \}.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Reemplazando (5.8) en  $\frac{\bar{q}_i}{\gamma_i} \dot{\tilde{z}}_i \tilde{z}_i$ , y usando (5.27) y (5.29) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \dot{\tilde{z}}_i \dot{\tilde{z}}_i &= \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i [-\gamma_i \tilde{z}_i + \hat{\theta}_i^T \hat{W}_i - \theta_i^T W_i] \\
&\leq -\bar{g}_i \tilde{z}_i^2 + \left| \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i [\hat{\theta}_i^T \hat{W}_i - \theta_i^T W_i] \right| \\
&\leq -\bar{g}_i \tilde{z}_i^2 + \left| \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \tilde{z}_i \right| \left[ \|\hat{\theta}_i^T \hat{W}_i\| + \|\theta_i^T W_i\| \right] \\
&\leq -\bar{g}_i \tilde{z}_i^2 + \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} \left[ \bar{c}_i^z + c_i^z \right] [\vartheta_i r_i + \bar{\vartheta}_i r_i],
\end{aligned} \tag{5.37}$$

sustituyendo (5.23) en  $\frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i &= \frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T [-\eta_i \hat{\theta}_i + D_{i,\theta}] \\
&\leq -\bar{g}_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i + \frac{\bar{g}_i}{\eta_i} \|\tilde{\theta}_i^T\| \|D_{i,\theta}\| \\
&\leq -\bar{g}_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i + \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} [\|\hat{\theta}_i\| + \|\theta_i\|] \\
&\leq -\bar{g}_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i + \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} [\vartheta_i + \bar{\vartheta}_i].
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Analizando  $\frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \dot{\tilde{\phi}}_i$  y sustituyendo (5.24):

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T \dot{\tilde{\phi}}_i &= \frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \tilde{\phi}_i^T [-\varsigma_i \hat{\phi}_i - D_{i,\phi}] \\
&\leq -\bar{g}_i \tilde{\phi}_i^T \hat{\phi}_i + \frac{\bar{g}_i}{\varsigma_i} \|\tilde{\phi}_i^T\| \|\zeta_i\| \|\hat{W}_i\| \\
&\leq -\bar{g}_i \tilde{\phi}_i^T \hat{\phi}_i + \frac{\bar{g}_i \zeta_i}{\varsigma_i} \|\hat{\phi}_i^T - \phi_i^T\| \|\hat{W}_i\| \\
&\leq -\bar{g}_i \tilde{\phi}_i^T \hat{\phi}_i + \frac{\bar{g}_i \zeta_i}{\varsigma_i} [\varphi_i + \bar{\varphi}_i] r_i,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
C_{1,i} &= \frac{\bar{g}_i}{\gamma_i} | \bar{c}_i^z + c_i^z | [ \bar{\vartheta}_i r_i + \vartheta_i r_i ] + \frac{\bar{g}_i \varrho_i}{\eta_i} [ \bar{\vartheta}_i + \vartheta_i ] \\
&\quad + \frac{\bar{g}_i \zeta_i}{\varsigma_i} [ \bar{\varphi}_{\phi,i} + \varphi_{\phi,i} ] r_i,
\end{aligned} \tag{5.40}$$

y utilizando (5.37), (5.38), (5.39),  $C_{1,i}$ , en (5.36), queda

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -(\zeta_i + k_i) s_i^2 - \bar{g}_i \tilde{z}_i^2 - \bar{g}_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i \right. \\
&\quad \left. - \bar{g}_i \tilde{\phi}_i^T \hat{\phi}_i + C_{1,i} \right\}.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad (2.29) en (5.40) la cota de  $\| \theta_i \|$  y  $\| \phi_i \|$

$$\begin{aligned}
& -\bar{g}_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i - \bar{g}_i \tilde{\phi}_i^T \hat{\phi}_i \\
& \leq -\frac{3\bar{g}_i}{4} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i + \bar{g}_i \theta_i^T \theta_i - \frac{3\bar{g}_i}{4} \tilde{\phi}_i^T \tilde{\phi}_i + \bar{g}_i \phi_i^T \phi_i \\
& \leq -\frac{3\bar{g}_i}{4} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i - \frac{3\bar{g}_i}{4} \tilde{\phi}_i^T \tilde{\phi}_i + \bar{g}_i | \theta_i^T \theta_i | + \bar{g}_i | \phi_i^T \phi_i | \\
& \leq -\frac{3\bar{g}_i}{4} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i - \frac{3\bar{g}_i}{4} \tilde{\phi}_i^T \tilde{\phi}_i + \bar{g}_i \| \theta_i \| \| \theta_i \| + \\
& \quad \bar{g}_i \| \phi_i \| \| \phi_i \| \\
& \leq -\frac{3\bar{g}_i}{4} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i - \frac{3\bar{g}_i}{4} \tilde{\phi}_i^T \tilde{\phi}_i + \bar{g}_i \vartheta_i^2 + \bar{g}_i \varphi_i^2,
\end{aligned} \tag{5.41}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -(\zeta_i + k_i) s_i^2 - \bar{g}_i \tilde{z}_i^2 - \frac{3\bar{g}_i}{4} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i \right. \\
&\quad \left. - \frac{3\bar{g}_i}{4} \tilde{\phi}_i^T \tilde{\phi}_i + \epsilon_i + \bar{g}_i \vartheta_i^2 + \bar{g}_i \varphi_i^2 + C_{1,i} \right\}
\end{aligned} \tag{5.42}$$

da  $\tau = \min_i \{ \frac{1}{2}, \bar{g}_i, \frac{3\bar{g}_i}{4} \}$  y  $\lambda = \sum_{i=1}^N \{ \epsilon_i + \bar{g}_i \vartheta_i^2 + \bar{g}_i \varphi_i^2 + C_{1,i} \}$  de lo cual sigue que

$$\dot{V} < -2\tau V + \lambda \quad (5.43)$$

Un error filtrado finalmente acotado por  $\sqrt{\frac{\lambda}{2\tau}}$ , el cual se puede hacer arbitrariamente pequeño con la apropiada elección de los parámetros del controlador. El conjunto compacto al cual las variables de lazo cerrado pertenecen está caracterizado por  $V(t) \leq \max\{V(0), \frac{\lambda}{2\tau}\}$  una región cuyo radio es  $R$ ,  $R \leq \max\{V(0), \frac{\lambda}{2\tau}\}$ .

#### 5.4. Resultados experimentales

A continuación se presentan las gráficas con los resultados obtenidos al aplicar la ley de control (5.22) a un robot tipo Rhino, del cual sólo se utilizaron dos grados de libertad (codo y hombro). La ley de control y las leyes de adaptación de parámetros fueron implementadas con los siguientes parámetros: La parte antecedente de la RNDR está definida a partir de funciones membresía Gaussianas ([centro, ancho]=[[-0.35, -0.21], [0, 0.21],[0.35, 0.21]]), y Sigmoides ([centro, ancho]=[0, 0.21])). Los parámetros de la RNDR utilizados fueron  $\sigma_i = 0.9$ ,  $\gamma_i = 0.5$ ,  $\varrho = 0.7$ ,  $\varphi = 0.3$ ,  $\vartheta_i = 1$  y  $\psi_i = 1$ . Los parámetros de la señal de compensación son  $\rho_i = 1$ ,  $\epsilon_i = 1$  y  $\alpha_i = 1$ .

En este caso únicamente presentamos los resultados obtenidos de manera experimental. En donde las señales mostradas en las figuras tiene las siguientes unidades: el error  $e_i$  y la señal de referencia  $y_{r,i}$  en *grados*, las señales de control  $u_i$ ,  $u_{c,i}$ , y  $u_{f,i}$  están en volts, las señales  $\hat{\theta}_i$ ,  $\hat{\phi}_i$  y  $\hat{\delta}_i$  carecen de unidades.

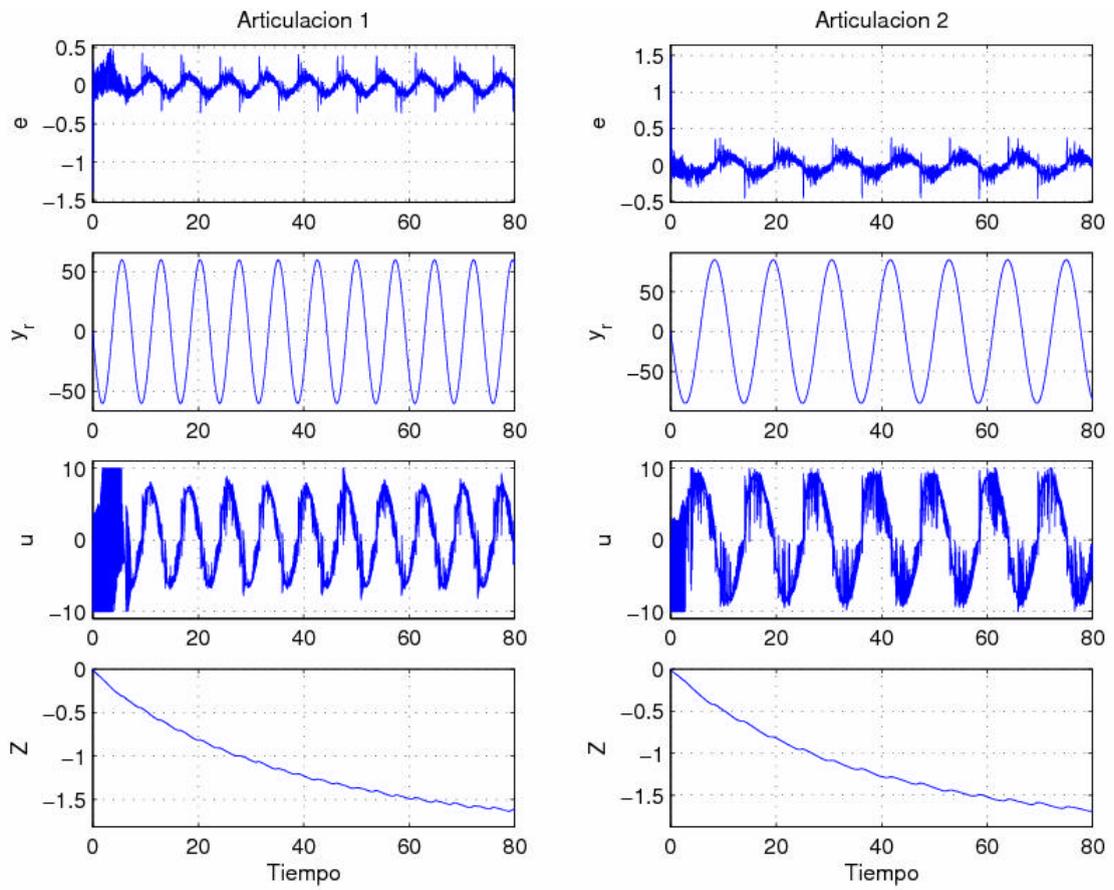


Figura 5.1: Resultados experimentales de la aplicación de la ley de control (5.22) por retroalimentación de estados en los eslabones 1 y 2 (señales  $e_i$ ,  $y_{r,i}$ ,  $u_i$  y  $z_i$ ).

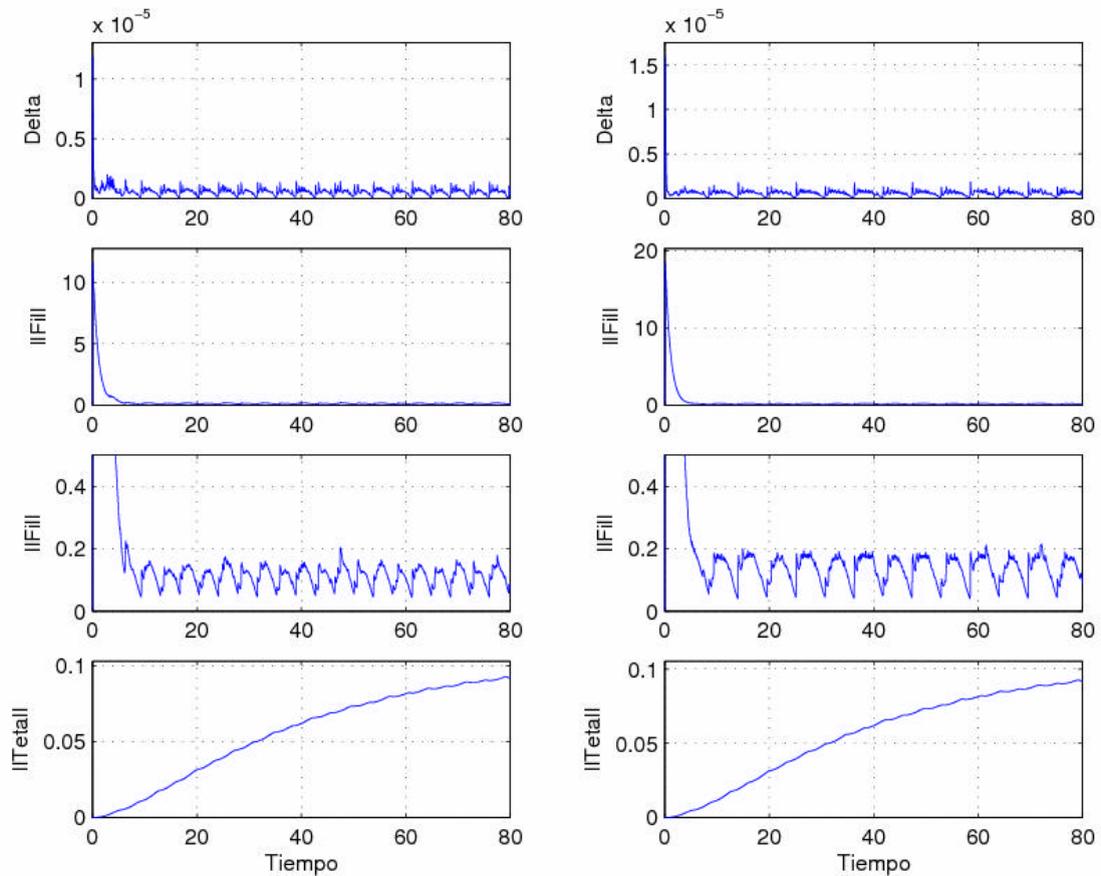


Figura 5.1: Resultados experimentales de la aplicación de la ley de control (5.22) por retroalimentación de estados en los eslabones 1 y 2 (señales  $\|\phi_i\|$  y  $\|\theta_i\|$ ).

## 5.5. Conclusiones previas

Como se puede apreciar en los resultados mostrados, el desempeño de la ley de control es bueno, además de que se logra quitar la dependencia de los estados y se demuestra que por medio de una RNDR se puede obtener un buen desempeño al utilizarla para aproximar una ley de control ideal.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Las conclusiones obtenidas de la investigación son las siguientes;

- Se introdujo la aplicación de un esquema de Neuronales-Difusas-Recurrentes dentro del control de sistemas de forma directa, con buenos resultados. Solo es necesario un mínimo de información sobre el estado de la planta y tener errores de seguimiento pequeños.
- Se obtuvo una estructura de Redes Neuronales-Difusa-Recurrente que incorpora un grado de libertad adicional en su estructura, que le permite tener una mayor capacidad de interacción con el sistema a controlar
- Se logró diseñar un esquema de control sencillo en su parte Neuronal-Difusa sin la necesidad de conocer muchos detalles del sistema y con un mínimo de información a priori.
- Se incorporaron términos recurrentes dentro de esquemas de control inteligente, lo que permitió la simplificación de la estructura de las Redes Neuronales Difusas, además de establecer la estabilidad en lazo cerrado.
- Se plantó un esquema de control por retroalimentación de salida, sin el uso de un observador de estados que, bajo ciertas condiciones, permite establecer un tipo de estabilidad para una clase de sistemas no lineales

A partir de los resultados obtenidos, se abren algunos puntos que pueden ser analizados en un futuro como son:

- Un análisis detallado de la Suposición 4 del Capítulo 5, que permita extenderla a sistemas de mayor orden.
- De acuerdo a lo mostrado en las gráficas en el capítulo 5, analizar bajo que condiciones la RNDR propuesta puede llevar a cabo el control del sistema sin la necesidad de un término de compensación.

Por otro lado, si se considera el desempeño de los esquemas de control propuestos comparados con otros, podemos decir que los resultados en general son buenos a partir de que:

- Las señales de error obtenidas en la aplicación de las leyes de control en los Capítulos 4 y 5 muestran errores menores a un grado. Que comparado con resultados obtenidos en [23, 30, 31] es aceptable si se toma en cuenta que son resultados obtenidos de manera experimental. En cuanto a los resultados obtenidos por simulación muestran un desempeño similar.
- En lo que se refiere a la aplicación de Redes Neuronales Difusas Recurrentes, por un lado se observa que son una buena opción para aproximar funciones desconocidas. Y por otro comparado con los trabajos [17, 19, 14] las condiciones impuesta al sistema son menores y los resultados similares, sólo que obtenidos de manera experimental.

# Bibliografía

- [1] Atassi A.N., Khalil H.K., “A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 44, pp. 1672-1687, 1999
- [2] Driankov J , *An introduction to Fuzzy Control* , Springer, 1996
- [3] Calcev G., “Some remarks on the stability of Mamdani fuzzy control systems”, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 6, pp. 436-442, 1998.
- [4] Chen Y. C. and Teng C. C., “A model reference control structure using a fuzzy neural network”, *Fuzzy Sets Syst*, vol. 73, pp. 29-36, 1995
- [5] Fu, L. C., “Robust adaptive decentralized control of robot manipulators”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 37, pp. 106-110, 1992.
- [6] Funahashi K. I., Nakamura Y., “Approximation of Dynamical Systems by Continuous Time Recurrent Neural Networks”, *Neural Networks*, pp. 801-806, 1993.
- [7] Gavel D. T., Siljak D. D., “Decentralized adaptive control: structural conditions for stability”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, pp. 413-426, 1989.
- [8] Grosdidier P., Morari M., “Interaction measure for system under decentralized control”, *Automatica*, Vol. 22, pp. 309-319, 1986.
- [9] Ge S. S., Hang C. C., T. Zang, “Adaptive neural networks control of nonlinear systems by state and output feedback”, *IEEE Transactions Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, Vol. 29, pp. 818-828, 1999.
- [10] Huang S., Tan K. K., Lee T. H., “Decentralized control design for large-scale systems with strong interconnections using neural networks”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 48, pp. 805-810, 2003.
- [11] Ioannou P. A., “Decentralized adaptive control on interconnected systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, pp. 291-298, 1986.
- [12] Jain S., Khorrami F., “Decentralized adaptive output feedback design for large-scale nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, pp. 729-735, 1997.
- [13] Jiang Z. P., Reppinger D. W., Hill D., “Decentralized nonlinear output-feedback stabilization with disturbance attenuation”, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 10, pp. 155-170, 2002.

- [14] Juang C. F., "A TSK-type recurrent fuzzy network for dynamic systems processing by neural network and genetic algorithms", *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 10, pp. 155-170, 2002.
- [15] Khalil H. K., *Nonlinear Systems* (3rd Ed.), Prentice-Hall, 2002.
- [16] Krishnamurthy P., Khorrami F., "Decentralized control and disturbance attenuation for large-scale nonlinear systems in generalized output-feedback canonical form", *Automatica*, Vol. 39, pp. 1923-1933, 2003.
- [17] Ku C. C., Lee K. Y., "Diagonal recurrent neural networks for dynamic systems control", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 6, pp. 144-156, 1995.
- [18] Seshagiri S., Khalil H. K., "Output feedback control of nonlinear systems using RBF neural networks", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 11, pp. 69-79, 2000.
- [19] Lee C. H., Teng C. C., "Identification and control of dynamic systems using recurrent fuzzy neural networks", *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 8, pp. 349-366, 2000.
- [20] Lin F. J., Wai R. J., Hong C. M., "Hybrid supervisory control using recurrent fuzzy neural network for tracking periodic inputs", *IEEE Trans. on Neural Networks*, pp. 456-470, 2001.
- [21] Lin F.J., Lin C.H., Hong C.M., "Robust control of linear synchronous servo drive using disturbance observer and recurrent neural network compensator", *IEE Proc., Electr. Power Appl*, pp. 263-272, 2000
- [22] Lin C.H., W.D., and Lin F.J., "Adaptive hybrid control using recurrent-neural-network for linear synchronous motor se Chourvo drives", *IEE Proc., Control Theory Appl*, pp. 156-168, 2001
- [23] Liu M., "Decentralized control of robot manipulators: nonlinear and adaptive approaches", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 44, pp. 357-363, 1999.
- [24] Grosdidier P., Morari M., "Interaction measure for system under decentralized control", *Automatica*, Vol. 22, pp. 309-319, 1986.
- [25] Nardi F., Hovakimyan N., Calise A. J., "Decentralized control of large-scale systems using single hidden layer neural networks", In *Proceedings of the American control conference*, Arlington, VA, June 25-27, pp. 3123-3127, 2001
- [26] Levin A., Narendra K. S., "Control of nonlinear dynamical systems using neural networks- Part II: Observability, identification, and control", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 7, pp. 30-42, 1996.

- [27] Ortega R., "An energy amplification condition for decentralized adaptive stabilization", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 41, pp. 285-288, 1996.
- [28] Rovithakis G. A., *Adaptive control with recurrent high-order neural networks : theory and industrial applications* , Springer, 2000.
- [29] Sanner R. M., Slotine J. J. E., "Gaussian networks for direct adaptive control", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 3, pp. 837-863, 1992.
- [30] Seraji H., "Decentralized adaptive controller of manipulators: Theory, simulation and experimentation", *IEEE Trans. Robotics Autom.*, Vol. 5, pp. 183-201, 1989.
- [31] Shi L., Singh S. K., "Decentralized adaptive controller design for large-scale systems with higher order interconnections", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, pp. 1106-1118, 1992.
- [32] Siljak D. D., *Decentralized Control of Complex Systems*, San Diego: Academic Press, 1991.
- [33] Slotine J. J. E., Li W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
- [34] Spong M. W., *Robot dynamics and control*, Jhon Wiley and sons, 1989
- [35] Spooner J. T., Maggiore M., Ordóñez R. and Passino K., *Stable Adaptive Control and Estimation for Nonlinear Systems: Neural and Fuzzy Approximator Techniques*, NY: John Wiley & Sons Inc., 2002
- [36] Spooner J. T., Passino K. M., "Decentralized adaptive control of nonlinear systems using radial basis neural networks", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, pp. 2050-2057, 1999.
- [37] Takagi T., Sugeno M., "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", *IEEE Transactions Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-15, pp. 116-132, 1984.
- [38] Tang Y., Tomizuka M., Guerrero-Ramírez G., Montemayo G., "Decentralized robust control of mechanical systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, pp. 771 - 776, 2000. BIBLIOGRAFÍA 84
- [39] Tong S., Li H. X., Chen G., "Adaptive fuzzy decentralized control for a class of largescale nonlinear systems", *IEEE Transactions Systems, Man, and Cybernetics Part B Cybernetics*, Vol. 33, pp. 1-6, 2003.

- [40] [40] V'elez D., Tang Y., "Adaptive robust fuzzy control of uncertain nonlinear systems", *IEEE Transactions on Man Systems and Cybernetics-B*, Vol. 11, pp. 411-419, 2003.
- [41] [41] Wang Y. C., Chien C. J., Teng C. C., "Direct adaptive iterative learning control of nonlinear systems using an output-recurrent fuzzy neural network", *IEEE Trans. On systems, Man and ciberneticis*, Vol. 34, pp. 1348-1359, 2004.
- [42] [42] Wang L., *Adaptive Fuzzy Systems and Control, Design and Stability Analysis*, Prentice Hall, 1994.
- [43] [43] Zhang T. P., Feng C. B, "Decentralized adaptive fuzzy control for large-scale onlinear systems", *Fuzzy Sets and Systems*, pp 61-70, 1996