



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**“PROPUESTAS PARA MEJORAR EL MANEJO DE
CARTERAS EN EL SEGURO DE DAÑOS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

AGNI RODRIGO CERDA MENDOZA

DIRECTOR DE TESIS:

ACT. RICARDO HUMBERTO SEVILLA AGUILAR



2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1.- Datos del Alumno

Cerda
Mendoza
Agni Rodrigo
50254003
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
300242360

2.- Datos del Tutor

Act.
Ricardo Humberto
Sevilla
Aguilar

3.- Datos del Sinodal 1

M. en I.
Juan Carlos
Vargas
Aguilar

4.- Datos del Sinodal 2

M. en S.A.R.
Irma Evelia
Valencia
Sepúlveda

5.- Datos del Sinodal 3

Act.
Fernando Alonso
Pérez Tejada
López

6.- Datos del Sinodal 4

Act.
Fernando
Pérez
Márquez

7.- Datos del trabajo escrito

“Propuestas para mejorar el manejo de carteras en el seguro de daños”
82 p
2008

AGRADECIMIENTOS

A mi tutor el Act. Ricardo Sevilla por la paciencia y el tiempo dedicado a la dirección de este trabajo.

A mis sinodales M. en I. Juan Carlos Vargas, M. en S.A.R. Irma Valencia, Act. Alonso Pérez Tejada y Act. Fernando Pérez Márquez por el tiempo dedicado a revisarlo, corregirlo y enriquecerlo.

A Jaime Vázquez Alamilla, a Jair Morales y a Salvador Núñez por todo el apoyo brindado durante este tiempo.

Gracias.

DEDICATORIAS

A mis padres, Ramón e Isabel por siempre haber creído en mi a lo largo de este ciclo, y por toda la ayuda brindada durante el mismo.

A mis hermanos, René, Sara y Rafael por mostrarme la sencillez de la vida aún en los momentos más difíciles.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1: NOCIONES PREELIMINARES DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA	3
1.1 Variables aleatorias.....	3
1.2 Clasificación de variables aleatorias.....	4
1.2.1 Variables aleatorias discretas.....	4
1.2.2 Variables aleatorias continuas.....	7
1.3 Momentos de una variable aleatoria.....	9
1.4 Función generadora de momentos.....	12
1.5 Algunas nociones de probabilidad condicional.....	15
1.6 Algunos teoremas relevantes.....	16
1.7 Nociones básicas de estadística.....	17
1.8 Pruebas de bondad de ajuste.....	18
CAPÍTULO 2: APLICACIONES DE VARIABLES ALEATORIAS MIXTAS A LA MODELACIÓN, COSTEO Y MANEJO DE ALGUNOS SEGUROS DE DAÑOS	21
2.1 Combinación entre variables continuas y variables discretas.....	21
2.2 Cálculo de los momentos de las variables aleatorias mixtas y su interpretación en el seguro de daños.....	23
2.3 Variables mixtas como modelo de algunos seguros de daños.....	25
2.4 La distribución de S	30
2.4.1 Convoluciones.....	30
2.4.2 Método de la función generadora de momentos.....	33
2.4.3 Método de aproximación gaussiana.....	34
2.5 Cálculo de la prima de riesgo, prima recargada, prima neta y prima total.....	39
CAPÍTULO 3: APROXIMACIÓN A LA DISTRIBUCIÓN DE S MEDIANTE LA DISCRETIZACIÓN SELECTIVA DE RECLAMOS INDIVIDUALES APLICADA AL TEOREMA DE PANJER, EN EL MODELO DE RIESGO COLECTIVO	40
3.1 Modelo de riesgo colectivo.....	40
3.2 Características numéricas de S	40
3.3 Distribuciones apropiadas para N y X_i	41
3.3.1 Distribuciones para N	41
3.3.2 Distribuciones para X_i	43
3.4 Métodos para encontrar o aproximar la distribución de S	44
3.4.1 Método de convoluciones.....	44
3.4.2 Método de aproximación Normal a la distribución de S	49
3.5 Método alternativo de discretización selectiva de reclamos individuales aplicado al Teorema de Panjer.....	50
3.6 Comparaciones entre los métodos de discretización selectiva de reclamos individuales, convoluciones y de aproximación normal.....	62

<i>CAPÍTULO 4: APROXIMACIONES AL COEFICIENTE DE AJUSTE MEDIANTE POLINOMIOS DE TAYLOR Y EL MÉTODO DE NEWTON-RHAPSON, EN EL MODELO EN TIEMPO DISCRETO</i>	64
4.1 Modelación del comportamiento de carteras de seguro a lo largo del tiempo como un proceso de riesgo.....	64
4.5 Modelo en tiempo discreto.....	65
4.5 Aproximaciones al coeficiente de ajuste mediante los polinomios de Taylor y el método de Newton-Rhapson.....	67
4.5 Modelo en tiempo continuo.....	73
4.5 Comparaciones entre el modelo en tiempo continuo y el modelo en tiempo discreto....	77
<i>CONCLUSIONES</i>	80
<i>BIBLIOGRAFÍA</i>	82

INTRODUCCIÓN

Los seguros tienen por objeto la cobertura de riesgos ligados a fenómenos aleatorios los cuales, en general, son económicamente adversos. Dichos fenómenos involucran una incertidumbre sobre los posibles resultados en que pueden derivar, como por ejemplo la destrucción parcial o total de bienes materiales, pérdida de riquezas, etc. En particular los seguros de daños garantizan a las personas y a los entes que desean utilizarlos, mediante el pago de ciertas cantidades de dinero denominadas primas, el resarcimiento monetario de las pérdidas en su patrimonio por las cuales pudieran ser afectados, dentro de los límites y según las modalidades previstas en el momento de establecer el contrato de seguro. En síntesis, la existencia de este tipo de instrumentos sirve para defender a los individuos y organizaciones, contra todas aquellas adversidades frente a las cuales la prevención es prácticamente imposible, y el ahorro insuficiente.

En este sentido y debido a la incertidumbre involucrada en la ocurrencia de los eventos catastróficos a los que hacen frente los seguros de daños, su tratamiento, evaluación, costeo y manejo requiere una fundamentación en ramas de la matemática enfocadas al estudio de fenómenos aleatorios como la teoría de la probabilidad y la teoría del riesgo. No obstante, en muchas ocasiones los métodos utilizados por las aseguradoras no se apegan lo suficiente a dichos fundamentos, y por lo tanto sus procedimientos pueden ser mejorados.

El objetivo de este trabajo es el de exponer, de manera general, la forma en que se utilizan varias herramientas matemáticas para modelar diversos tipos de seguros de daños, sin embargo, también busca hacer algunas propuestas, fundamentadas en la teoría del riesgo, la estadística y el análisis numérico, para mejorar su tratamiento, evaluación, costeo y manejo. Cabe señalar, que también puede ser utilizado como material de consulta de ciertos temas, en el curso de matemáticas actuariales del seguro de daños.

En el capítulo I se introducen conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, los cuales fungirán de base teórica para los procedimientos de modelación, costeo y manejo de carteras que se expondrán en los capítulos posteriores. También se introducen las herramientas estadísticas básicas para el manejo de la información, a partir de las cuales se realizarán los cálculos respectivos. Los textos que se consultaron en la elaboración de este capítulo son aquellos denotados por los números (4), (5), (6) y (7) de la bibliografía.

A su vez en el capítulo II, se expone la manera en que son utilizados los conceptos del capítulo I para modelar varios tipos de seguros de daños, además de que se detalla la forma en que, a partir de estos modelos, se obtienen métodos para analizar su comportamiento y las cantidades necesarias para costear dichos seguros. Los elementos teóricos de este capítulo fueron redactados tomando como base (1) y (2).

En el capítulo III, se expone el modelo de riesgo colectivo el cual se utilizará para modelar algunos seguros de daños que no fueron incluidos en el capítulo anterior; se enuncian sus principales características numéricas, así como los métodos tradicionales que existen para encontrar o aproximar la distribución del monto agregado de reclamos. Finalmente, se propone un método alternativo para aproximar dicha distribución, para posteriormente

contrastarlo con los métodos tradicionales. La parte teórica de este capítulo fue redactada tomando en cuenta elementos de (1), (2) y (3).

Por último, en el capítulo IV se exponen las herramientas utilizadas en el manejo de las carteras a lo largo del tiempo, se expone el modelo en tiempo discreto para la evaluación de las mismas y se hace una propuesta, utilizando como fundamento a los polinomios de Taylor y al método de Newton-Rhapson, para aproximar con tanta precisión como se desee la cota de Lundberg. Finalmente se comparan los resultados obtenidos a través del modelo en tiempo discreto con los obtenidos a través del modelo en tiempo continuo. Los elementos teóricos de este capítulo fueron redactados basados en (1), (2), (9), (10) y (11).

CAPÍTULO 1: NOCIONES PRELIMINARES DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA.

En este capítulo se revisarán varios conceptos probabilidad y estadística, así como teoremas, propiedades y sus respectivas aplicaciones que justificarán los métodos y procedimientos de los capítulos posteriores.

1.1 Variables aleatorias

Las variables aleatorias normalmente modelan cierto tipo de fenómenos, los cuales involucran una incertidumbre sobre los posibles resultados en que pueden derivar. En esta sección se definirá formalmente lo que es una variable aleatoria y se caracterizarán los tipos más comunes de ellas.

La definición de variable aleatoria involucra conceptos de teoría de la medida, no obstante existe una definición equivalente la cual excluye este tipo de conceptos y es más práctica para los propósitos de este texto. Antes de enunciar esta definición, se establecen algunos conceptos preliminares.

Definición. (σ -álgebra). Sea Ω un conjunto. Una colección Γ de subconjuntos de Ω es una σ -álgebra de Ω si cumple las siguientes condiciones:

1. $\Omega \in \Gamma$
2. Si $A \in \Gamma$, entonces $A^c \in \Gamma$
3. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Gamma$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$

Para las siguientes definiciones se supondrá siempre que Ω es un conjunto cualquiera y Γ una σ -álgebra de Ω .

Definición. (Medida de Probabilidad). Una medida de probabilidad es una función $P: \Gamma \rightarrow [0,1]$, que satisface:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A) \geq 0, \forall A \in \Gamma$
3. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Gamma$ satisface que $A_i \cap A_j$ es nula $\forall i \neq j$, entonces $P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$.

Cabe señalar que a la terna ordenada (Ω, Γ, P) se le denomina regularmente en la literatura **espacio de probabilidad**. Estos conceptos permiten establecer la siguiente definición:

Definición. (Variable aleatoria). Una variable aleatoria es una función $X: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^1$ la cual verifica que $X^{-1}(-\infty, x] \in \Gamma^2$, para toda $x \in \mathfrak{R}$.

¹ \mathfrak{R} se refiere al conjunto de los números reales, los detalles de este conjunto se estudian en *Spivak, Michael. Calculus, Reverte, 1992.*

De ahora en adelante se denotará al conjunto $X^{-1}(-\infty, x]$ con la notación $[X \leq x]$. Este conjunto puede interpretarse con fines prácticos como “el evento de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual a un número x ”. Una vez que se ha definido la noción de variable aleatoria, se establece a continuación la definición de función de distribución la cual permitirá hacer una clasificación de las variables aleatorias.

Definición. (Función de distribución). La función de distribución de una variable aleatoria X es la función $F : \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$, definida como sigue:

$$F(x) = P[X \leq x]$$

donde P es una medida de probabilidad.

De esta definición se puede concluir inmediatamente, que dado un espacio de probabilidad (Ω, Γ, P) y una variable aleatoria X , siempre existe su correspondiente función de distribución. A continuación se enuncian algunas propiedades importantes de $F(x)$:

Propiedad I. Sea $F(x)$ la función de distribución de una variable aleatoria X . Entonces:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
3. Si $x_1 \leq x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$
4. $F(x)$ es continua por la derecha, es decir $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$ ³ para todo $x_0 \in \mathfrak{R}$
5. $P[X < a] = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$.
6. $P[a \leq X \leq b] = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$
7. $P[a < X < b] = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a)$

1.2 Clasificación de variables aleatorias

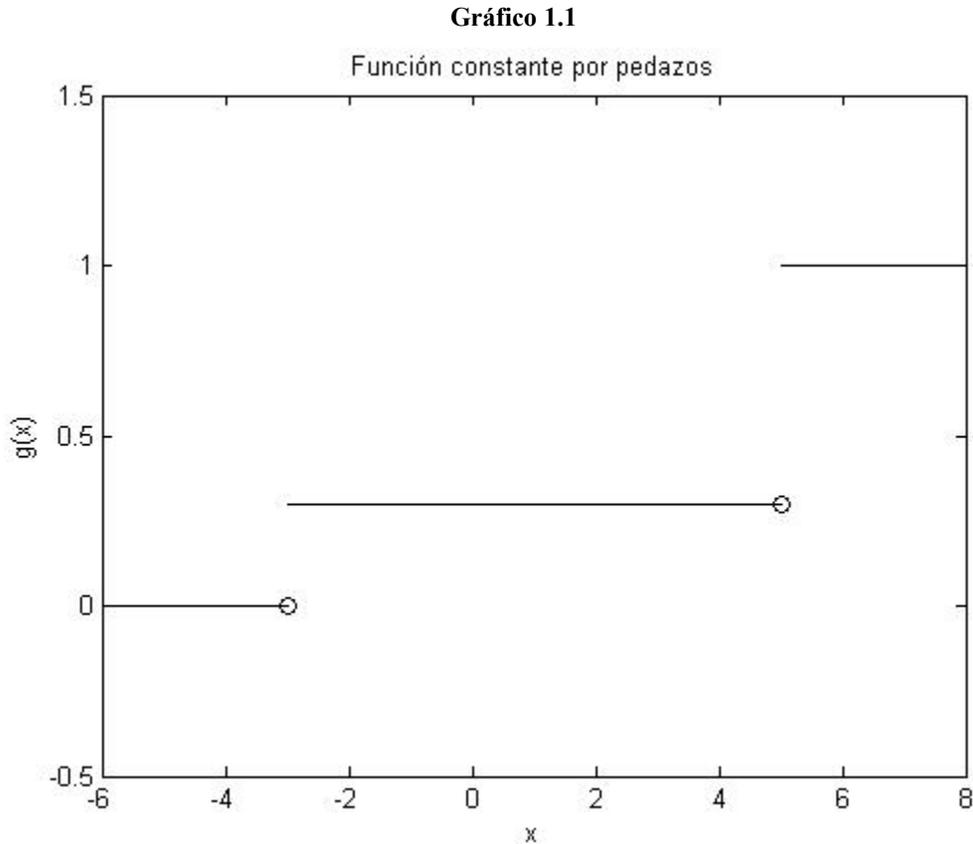
Las variables aleatorias se dividen en varios tipos dependiendo de las características de la correspondiente función de distribución. En este escrito, debido a sus fines prácticos, sólo se establecerán tres tipos, pero en cursos avanzados de probabilidad pueden establecerse más subdivisiones.

1.2.1 Variables aleatorias discretas

² El símbolo $X^{-1}(-\infty, x]$ se refiere a la imagen inversa del conjunto $(-\infty, x]$ bajo la función X , la definición y propiedades de este concepto pueden encontrarse en *Bartle, Robert G., Introducción al análisis matemático, Limusa, 1982.*

³ El símbolo $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x)$ se refiere al límite por la derecha de $F(x)$ en el punto x_0 , las nociones de límite, límite por la derecha y límite por la izquierda se discuten en *Spivak, Michael. Calculus, Reverte, 1992.*

Definición. (Variable aleatoria discreta). La variable aleatoria X se llama discreta si su correspondiente función de distribución $F(x)$ es una función constante por pedazos. Esto quiere decir que $F(x)$ es una función escalón ⁴. Para aclarar ideas, el siguiente gráfico ejemplificará una función que es “constante por pedazos” .



Una definición equivalente de este tipo de variables aleatorias las caracteriza como aquellas cuyo conjunto imagen, denotado por $\text{Im}(X)$ ⁵, es a lo mas numerable ⁶. Ahora bien, sea X una variable aleatoria discreta. Para este tipo de variables aleatorias siempre es posible encontrar un intervalo de la forma $[x_i, x_j]$, en el cual la correspondiente función de distribución de X , la cual se denotará por $F(x)$, tiene uno y sólo un salto. Por cada uno de estos intervalos se puede obtener una nueva función definida de la siguiente manera: $f(x_j) = F(x_j) - F(x_i)$. A la función f se le denomina función de densidad de X ,

⁴ Las características de las funciones escalón se pueden estudiar en *Spivak, Michael. Calculus, Reverte, 1992.*

⁵ La definición y propiedades de este concepto pueden encontrarse en *Bartle, Robert G., Introducción al análisis matemático, Limusa, 1982.*

⁶ La numerabilidad de un conjunto A cualquiera se discute en *Rudin, Walter. Principles of mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1964.*

además el número $f(x_j)$ representa la probabilidad de que X tome el valor puntual x_j . De manera formal:

$$f(x) = \begin{cases} P[X = x] & \text{si } F \text{ tiene un salto en } x \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Existe una forma de reconstruir la función de distribución de X a partir de su función de densidad, que consiste en sumar todos los posibles valores de $f(x)$ hasta el valor en el que se desea evaluar $F(x)$, es decir:

$$(1) \quad F(x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

A continuación se establece un ejemplo para aclarar el uso de esta fórmula.

Ejemplo 1. Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

A continuación se calcula $F(3)$ y $P[2 < X < 4]$.

Según la fórmula (1):

$$F(3) = \sum_{u \leq 3} f(u) = f(1) + f(2) + f(3) = 3/5$$

Es claro que para cualquier número $y \in [3, 4)$ se tiene que $F(y) = 3/5$. Si se procede análogamente para los números 1, 2, 4 y 5, se tiene que:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/5 & \text{si } x \in [1, 2) \\ 2/5 & \text{si } x \in [2, 3) \\ 3/5 & \text{si } x \in [3, 4) \\ 4/5 & \text{si } x \in [4, 5) \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Ahora para calcular $P[2 < X < 4]$, se utiliza la **Propiedad I**:

$$P[2 < X < 4] = \lim_{x \rightarrow 4^-} F(x) - F(2) = 3/5 - 2/5 = 1/5$$

En la práctica, las variables aleatorias discretas se utilizan para modelar el comportamiento de fenómenos aleatorios cuyos posibles resultados son subconjuntos de N ⁷.

1.2.2 Variables aleatorias continuas

Definición. (Variable aleatoria continua). La variable aleatoria X se llama continua si su correspondiente función de distribución es una función continua ⁸.

En cursos avanzados de probabilidad se divide a las variables aleatorias continuas en **absolutamente continuas** y **singulares** ⁹. No obstante puesto que las variables que se manejarán en los capítulos posteriores de este texto son del primer tipo, se establecerá su definición y de aquí en adelante cada vez que se refiera a una **variable aleatoria continua**, se sobreentenderá que la misma es **absolutamente continua**.

Definición. (Variable aleatoria absolutamente continua). La variable aleatoria continua X con función de distribución $F(x)$ se llama absolutamente continua, si existe una función no negativa e integrable f tal que para cualquier valor de x se cumple:

$$(2) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

En tal caso a la función f se le llama función de densidad de X . Al igual que en el caso de las variables aleatorias discretas hay una forma de obtener la función de densidad $f(x)$ a partir de la función de distribución $F(x)$, mediante la aplicación del teorema fundamental del cálculo ¹⁰. Esto es:

$$(3) \quad f(x) = F'(x)$$

Es claro, a partir de la ecuación (2), la manera en que se puede reconstruir $F(x)$ si se conoce $f(x)$.

Ejemplo 2. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{si } x \in [0, \infty) \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

⁷ N representa al conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

⁸ Una función $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es continua en $x_0 \in \mathfrak{R}$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Los detalles de la continuidad

de una función se estudian en *Spivak, Michael. Calculus, Reverte, 1992.*

⁹ Véase *Rincón, Luis. Curso intermedio de Probabilidad, Las prensas de Ciencias, 2007.*

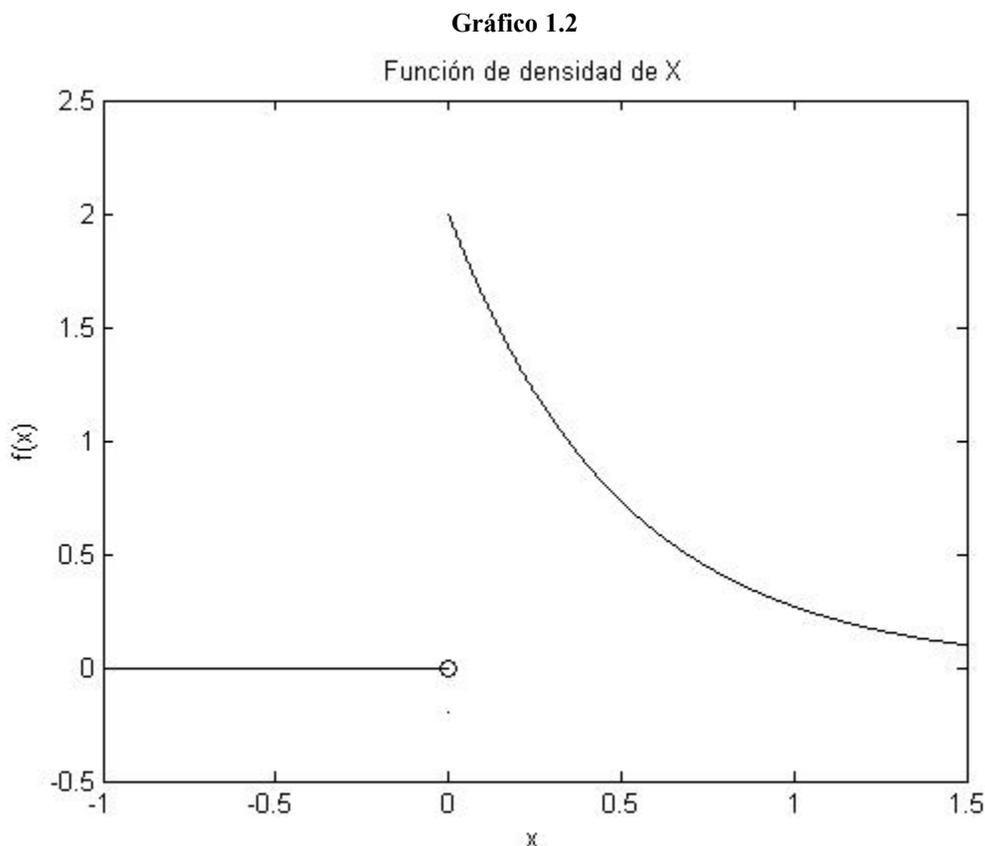
¹⁰ Este teorema puede encontrarse en *Spivak, Michael. Calculus, Reverte, 1992.*

A continuación se calcula $f(x)$ y $P[1 \leq X \leq 2]$.

Según la ecuación (3):

$$f(x) = (1 - e^{-2x})' = 2e^{-2x}$$

para $x \in [0, \infty)$. Ahora bien, si $x \in (-\infty, 0)$ se tiene que $f(x) = (0)' = 0$. A continuación se resumen los resultados en el siguiente gráfico:



Ahora según la **Propiedad I**:

$$\begin{aligned} P[1 \leq X \leq 2] &= F(2) - \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = (1 - e^{-4}) - \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - e^{-2x}) = (1 - e^{-4}) - (1 - e^{-2}) \\ &= e^{-2} - e^{-4} \end{aligned}$$

A partir de este ejemplo se puede inferir que cuando la variable aleatoria X es continua:

$$(4) \quad P[a \leq X \leq b] = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(b) - F(a)$$

Además se puede demostrar también que si X es continua, la siguiente igualdad se verifica:

$$(5) \quad P[a < X < b] = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a) = F(b) - F(a)$$

Cabe mencionar que a partir de la **Propiedad I**, se puede demostrar que si $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria X continua, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Mientras que si X es discreta:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$$

Existe un **tercer tipo** de variables aleatorias, las cuales modelan bastante mejor que los dos tipos que se acaban de examinar, los riesgos asegurable dentro del ramo del seguro de daños. No obstante, puesto que su definición surge de manera natural al examinar un ejemplo que involucre una situación real, el concepto de esta tercera clasificación se introduce en el siguiente capítulo de este texto.

1.3 Momentos de una variable aleatoria

Los momentos de una variable aleatoria son números que brindan información acerca de las características o comportamiento de dicha variable. En general, los primeros dos son los más usados y serán de gran utilidad en los capítulos posteriores de este texto.

Para las siguiente definición se supondrá que X es una variable aleatoria y $f(x)$ su correspondiente función de densidad.

Definición. (Esperanza o primer momento de una variable aleatoria). Sea X una variable aleatoria continua, entonces la esperanza de X , a la que se denotará con el símbolo $E[X]$, se define como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Mientras que si X es discreta, $E[X]$ se define como:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

En algunas ocasiones el número $E[X]$ no es convergente ¹¹, en este caso se dice que X tiene esperanza infinita. Pero cuando $E[X]$ es convergente, lo cual se denota $E[X] < \infty$, se dice que X **tiene esperanza finita**. Es frecuente que a la esperanza de una variable aleatoria también se le llame **media** y se le denote con el símbolo μ . En el siguiente capítulo se expone un concepto nuevo, la integral de Riemann-Stieltjes, el cual permite definir de una manera más general el concepto de esperanza y brinda un método para calcular $E[X]$ para variables aleatorias que no son ni **completamente discretas** ni **completamente continuas**.

A continuación se enuncia una propiedad importante de la esperanza:

Propiedad II. Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una colección de variables aleatorias, tales que $E[X_i] < \infty$ para toda i y $\{c_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de constantes tales que $c_i \in \mathfrak{R}$ para toda i . Entonces:

$$E\left[\sum_{i=1}^n c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n c_i E[X_i]$$

En un plano más práctico cabe resaltar, que la interpretación del primer momento de una variable aleatoria es de gran utilidad, pues representa un **promedio ponderado** de los posibles valores que puede tomar dicha variable. Es decir, si se modela un fenómeno cuyo resultado es incierto con una variable aleatoria X , entonces $E[X]$ representará, en promedio, el resultado en que derivará dicho fenómeno.

Es frecuente encontrar casos en los que una variable aleatoria Y es función de otra variable aleatoria X , esto es $Y = g(X)$, y en los cuales la función de densidad de Y es desconocida o difícil de obtener. No obstante, existe un método para calcular $E[Y]$ con el simple hecho de conocer la función de densidad de X . Este hecho se enuncia en la siguiente propiedad:

Propiedad III. (Ley del estadístico inconsciente). Sean X y Y dos variables aleatorias tales que $Y = g(X)$, para alguna función g . Sea $f(x)$ la función de densidad de X . Entonces, si X es continua:

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Mientras que si X es discreta, se tiene que:

¹¹ La convergencia de una integral de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} g$ o de una serie de la forma $\sum_{i=1}^{\infty} g(i)$ se discute en Spivak, Michael. *Calculus*, Reverte, 1992.

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) f(x_i)$$

Ejemplo 3. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} * (1/2)^x * (1/2)^{3-x} & \text{si } x = 0, 1, 2, 3 \quad ^{12} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Sea $Y = X^2$. A continuación se calcula $E[Y]$.

Si se escribe $Y = g(X)$ con $g(u) = u^2$, por la **Propiedad III** se tiene que:

$$\begin{aligned} E[Y] = E[g(X)] = E[X^2] &= \sum_{i=0}^3 g(x_i) f(x_i) = \sum_{i=0}^3 i^2 \binom{3}{i} * (1/2)^i * (1/2)^{3-i} \\ &= 0^2 * 1 * 1 * (1/2)^3 + 1^2 * 3 * (1/2)^3 + 2^2 * 3 * (1/2)^3 \\ &\quad + 3^2 * 1 * (1/2)^3 \\ &= (1/2)^3 (0 + 3 + 12 + 9) = 24/8 = 3 \end{aligned}$$

Al número $E[X^2]$ se le llama **segundo momento de la variable aleatoria X** , de igual forma si el número $E[X^2]$ es convergente se dice que X tiene **segundo momento finito**.

De manera general, si $n \in \mathbb{N}$ se denota por $E[X^n]$ al n -ésimo **momento de la variable aleatoria X** .

Finalmente se especificará una característica de las variable aleatorias, que no es precisamente un momento pero que brinda información acerca de que tan “alejados” en promedio están los valores de X del valor constante $E[X]$.

Definición.(Varianza) Sea X una variable aleatoria con primer momento finito. La varianza de X , a la que se denotará por $Var[X]$, se define como:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

¹² El símbolo $\binom{n}{x}$ representa el número de combinaciones posibles de un conjunto de n elementos, cuando estos son tomados en subconjuntos de tamaño x .

Según esta definición, la varianza es una medida del grado de dispersión de los diferentes valores tomados por la variable con respecto a su media. La varianza se denota regularmente por el símbolo σ^2 . A la raíz cuadrada de σ^2 se le llama desviación estándar, y se le denota por σ . Nuevamente hay casos en los que $Var[X]$ no es convergente, y en esa situación se dice que la variable aleatoria no tiene varianza.

Puede utilizarse la **Propiedad II**, para encontrar una manera más sencilla de calcular $Var[X]$:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad Var[X] &= E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] \\
 &= E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 \\
 &= E[X^2] - (E[X])^2
 \end{aligned}$$

Finalmente se enunciará un resultado el cual facilita el calculo de la varianza de una suma de variables aleatorias, cuando estas son independientes¹³:

Propiedad IV. Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de variables aleatorias independientes tales que $Var[X_i] < \infty$ para toda i y $\{c_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de constantes tales que $c_i \in \mathfrak{R}$ para toda i . Entonces:

$$Var\left[\sum_{i=1}^n c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n c_i^2 Var[X_i]$$

1.4 Función Generadora de Momentos

A la mayor parte de las distribuciones que se utilizan en este texto, se les puede asignar una función la cual facilita en gran medida el cálculo de cualquiera de sus momentos, y además identifica de manera única dicha distribución, es decir, con el simple hecho de identificar la forma de la función generadora de momentos de una variable, se puede inferir que distribución tiene.

Definición. (Función generadora de momentos). La función generadora de momentos de la variable aleatoria X es la función:

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

definida para valores reales de t tales que $E[e^{tX}] < \infty$.

¹³ Se dice que las variables aleatorias $\{X_i\}_{i=1}^n$ son independientes, si se satisface que su función de densidad conjunta es el producto de las funciones de densidad de cada una de las variables X_i . El concepto de función de densidad conjunta se introduce en las secciones posteriores de este mismo capítulo. Los detalles formales de esta definición se encuentran en *Mood, Alexander et al. Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill, 1963.*

Si se calcula la derivada con respecto a t de $M_X(t)$, se tiene que:

$$\frac{d(E[e^{tX}])}{dt} = E\left[\frac{d(e^{tX})}{dt}\right] = E[Xe^{tX}]$$

Ahora si se evalúa la derivada en cero se tiene que:

$$\left.\frac{d(E[e^{tX}])}{dt}\right|_0 = E[Xe^{0X}] = E[X]$$

Es decir, la primera derivada de la función generadora de momentos (f.g.m.) de X evaluada en cero es igual a $E[X]$. Si se procede de manera recursiva se obtiene un método para calcular el n -ésimo momento de X , para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Este hecho se puede expresar formalmente de la siguiente manera:

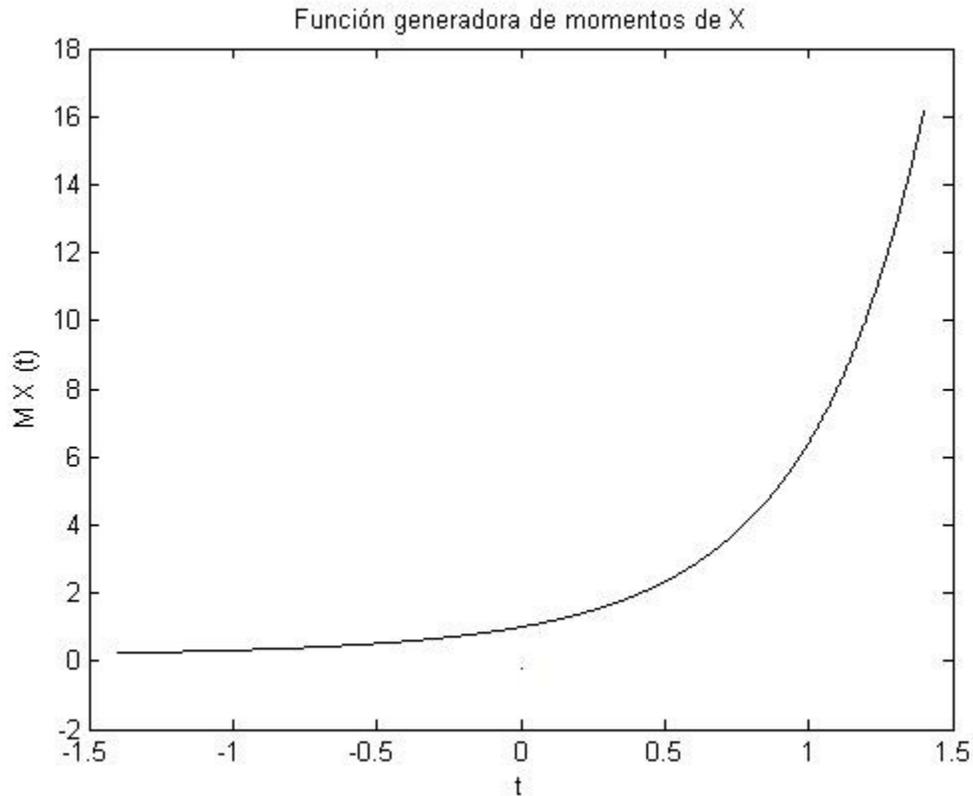
$$(7) \quad \left.\frac{d^n(M_X(t))}{dt^n}\right|_0 = \left.\frac{d^n(E[e^{tX}])}{dt^n}\right|_0 = E[X^n]$$

Ejemplo 4. Con la función de densidad de la variable aleatoria X del **Ejemplo 3**, se calculará nuevamente $E[X^2]$ con el método de la f.g.m.

La función generadora de momentos del **Ejemplo 3** esta dada por:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{i=0}^3 e^{ti} * \binom{3}{i} * (1/2)^i * (1/2)^{3-i} = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} * (1/2e^t)^i (1/2)^{3-i} \\ &= (1/2e^t + 1/2)^3 \end{aligned}$$

Gráfico 1.3



Ahora:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(M_X(t))}{dt^2} \Big|_0 &= \frac{d^2\left(\left(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\right)^3\right)}{dt^2} \Big|_0 = \left(3/2e^t * e^t * \left(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\right) + 3/2 * e^t * \left(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\right)\right) \Big|_0 \\ &= 3/2 * 1 + 3/2 * 1 = 3 \end{aligned}$$

Lo cual coincide con el resultado del **Ejemplo 3**.

A continuación se enuncia una propiedad que facilita el cálculo de la función generadora de momentos de una suma de variables aleatorias:

Propiedad V. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes, y cuyas f.g.m. existen en una vecindad no trivial alrededor del cero. Esto es $E[e^{tX_i}] < \infty$ para toda i y para toda $t \in (-s, s)$ para algún número positivo s . Entonces:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

Finalmente, es importante señalar que si se conoce $M_X(t)$ y esta es igual a $M_Y(t)$, entonces X y Y tienen la misma distribución.

1.5 Algunas nociones de probabilidad condicional

En esta sección se enuncian varias definiciones y propiedades importantes referentes al proceso de condicionamiento de una variable aleatoria con respecto a otra. Para las siguientes definiciones y propiedades se supone que X y Y son dos variables aleatorias.

Definición. (Función de distribución conjunta). La función de distribución conjunta de X y Y , es una función $F(x, y) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow [0,1]$ dada por:

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$$

Definición. (Función de densidad conjunta). Sean X y Y variables aleatorias continuas. La función de densidad conjunta de X y Y , si existe ¹⁴, es una función $f(x, y) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ que verifica:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds$$

Mientras que si X y Y son discretas, su función de densidad conjunta se define como aquella función $f(x, y) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow [0,1]$ que satisface:

$$f(x, y) = P[X = x, Y = y]$$

Hay una propiedad importante que permite obtener las funciones de densidad individuales tanto de X como de Y , a partir de su respectiva función de densidad conjunta, la cual se establece a continuación.

Propiedad VI. Sean X y Y variables aleatorias continuas y $f(x, y)$ su correspondiente función de densidad conjunta. Denótese por $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ a las funciones de densidad individuales de X y Y respectivamente. Entonces, la siguientes igualdades se verifican:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Mientras que si X y Y son discretas:

¹⁴ Hay ocasiones en que $f(x, y)$ puede no existir, no obstante, para todos los casos que se examinan en este texto la existencia de $f(x, y)$ está asegurada. Véase Rincón, Luis. *Curso intermedio de probabilidad*. Las Prensas de Ciencias, 2007. Este material se puede consultar en <http://www.matematicas.unam.mx/lars>.

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x, y_i)$$

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y)$$

En seguida se define las funciones de densidad condicional, así como la esperanza condicional de una variable aleatoria dado un valor de otra. Para las siguientes definiciones se supone que $y_0 \in \mathfrak{R}$, verifica $f_Y(y_0) \neq 0$.

Definición. (Función de densidad condicional). La función de densidad condicional de X dado que $Y = y_0$, está dada por:

$$f_{X|Y=y_0}(x|y_0) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

Definición. (Esperanza condicional). Sean X y Y variables aleatorias continuas. La esperanza condicional de X dado que $Y = y_0$, se define como:

$$E[X|Y = y_0] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y_0}(x|y_0) dx$$

Mientras que si X y Y son discretas:

$$E[X|Y = y_0] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_{X|Y=y_0}(x_i|y_0)$$

Las definiciones para $f_{Y|X=x_0}(y|x_0)$ y $E[Y|X = x_0]$ son análogas. Es claro que por cada valor particular que tome Y , existe un valor $E[X|Y = y_0]$ asociado. Esto permite definir una nueva variable aleatoria $h(Y) = E[X|Y]$. Cabe señalar que si Y fuera discreta, entonces $E[X|Y]$ sería también discreta; de igual forma si Y fuera continua, entonces $E[X|Y]$ sería continua. Finalmente, se enunciará la siguiente propiedad de la función $h(Y)$:

Propiedad VII. Sean X y Y dos variables aleatorias con primero y segundo momento finito. Entonces las siguientes igualdades se verifican:

$$E[X] = E[E[X|Y]]$$

$$Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$$

1.6 Algunos teoremas relevantes

Teorema 1. (Probabilidad total). Sea (Ω, Γ, P) un espacio de probabilidad y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Gamma$ una colección de eventos tales que $A_i \cap A_j$ es nula para toda $i \neq j$ y además $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$. Sea $B \in \Gamma$. Entonces:

$$P[B] = \sum_{i=1}^{\infty} P[B|A_i]P[A_i]$$

Teorema 2. (Del límite central). Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas¹⁵ tales que para cada natural n , $E[X_n] = \mu$ y $Var[X_n] = \sigma^2 < \infty$. Entonces:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

1.7 Nociones básicas de estadística

En esta sección se detallarán algunos conceptos básicos de estadística, así como varios teoremas relevantes.

Definición. (Muestra aleatoria). Una muestra aleatoria de una población con función de densidad de probabilidad $f(x; \Theta)$ ¹⁶, es un conjunto $\{X_i\}_{i=1}^n$, de variables aleatorias independientes y tales que todas comparten a $f(x)$ como función de densidad.

Definición. (Estimador). Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una muestra aleatoria de una población con función de densidad $f(x; \Theta)$. Un estimador del parámetro $\theta \in \Theta$, al cual se denotará por $\hat{\theta}$, es una función de la muestra aleatoria. Es decir:

$$\hat{\theta} = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

para alguna función T .

Cabe señalar que en algunas ocasiones no sólo se busca estimar algún parámetro desconocido, sino alguna función de él como por ejemplo $\tau(\theta) = E[X_i]$ o $\varphi(\theta) = Var[X_i]$. No obstante, existen algunos estimadores conocidos, los cuales estiman con mucha exactitud dichas funciones. A continuación se enlistarán dos de ellos, los cuales serán de gran utilidad en los capítulos posteriores:

¹⁵ Esto quiere decir todas las variables aleatorias tienen la misma función de densidad.

¹⁶ El símbolo Θ representa al conjunto de cantidades desconocidas incluidas en la función de densidad de probabilidad de la muestra, a las cuales se les denomina parámetros.

$$(8) \quad \bar{X} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n X_i$$

$$(9) \quad S^2 = \frac{1}{n-1} * \sum (X_i - \bar{X})^2$$

Estos son los estimadores más comúnmente usados para $\tau(\theta) = E[X_i]$ y $\varphi(\theta) = Var[X_i]$ respectivamente.

1.8 Pruebas de bondad de ajuste

Una de las herramientas estadísticas más comúnmente usadas en la práctica es la realización de las pruebas de hipótesis. Una prueba de hipótesis es un procedimiento el cual consiste en comparar una cantidad concreta obtenida a partir de la muestra aleatoria, llamada estadístico de prueba¹⁷, contra un **valor fijo obtenido a través de tablas de aproximaciones numéricas**, para comparar dos hipótesis H_0 y H_a que se hacen acerca de $f(x; \Theta)$. Dicho valor es el número real t_0 en el cual $F_T(t_0) = 1 - \alpha$, donde $F_T(t)$ representa a la función de distribución del estadístico de prueba y $\alpha \in (0,1)$ el nivel de significancia descriptivo de la prueba, el cual se elige antes de la misma. Al número t_0 se le suele denominar también **cuantil $1 - \alpha$** .

Una **prueba de bondad de ajuste** es un caso particular de las pruebas de hipótesis en la cual la suposición H_0 **propone una distribución concreta** para la muestra aleatoria. La prueba de bondad de ajuste más conocida es la denominada **prueba ji-cuadrada**.

La **prueba ji-cuadrada** consiste en dividir al conjunto de los números reales en $k + 1$ clases mutuamente excluyentes, y una vez hecho esto calcular la probabilidad \hat{p}_j de que una observación aleatoria X caiga en la j -ésima clase **suponiendo cierta la hipótesis H_0** , para toda j . Después de esto, se calcula el estadístico de prueba el cual está dado por:

$$\chi^2_{est} = \sum_{j=0}^k \frac{(n_j - n\hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_j}$$

Donde n_j representa el número de observaciones de la muestra contenidas en la j -ésima clase y n el tamaño de la muestra. Finalmente se compara χ^2_{est} con el **cuantil $1 - \alpha$** de una distribución ji-cuadrada con $k - m$ grados de libertad. En este caso m representa el número de parámetros estimados. De aquí en adelante, $\chi^2_{(k-m)}$ denotará al **cuantil $1 - \alpha$** .

¹⁷ La definición formal de estadístico de prueba puede encontrarse en *Mood, Alexander et al. Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill, 1963.*

La **regla de decisión** es rechazar H_0 , al $(1 - \alpha)$ de confianza, si $\chi^2_{est} \geq \chi^2_{(k-m)}$; en caso contrario se acepta H_0 . Para dejar más claro este punto a continuación se detallará un ejemplo:

Ejemplo 5. Se tiene una muestra aleatoria de valores enteros no negativos la cual se resume en la siguiente tabla:

Observación	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Repeticiones de la observación	13	27	28	17	11	1	2	1	0

A continuación se realizará una prueba ji-cuadrada, para contrastar las hipótesis:

$$H_0: X \sim Poisson(\lambda) \text{ vs. } H_a: X \not\sim Poisson(\lambda)$$

al 0.95 de confianza¹⁸. En primer lugar, se estimará el parámetro λ para explicitar la distribución que según H_0 debe tener X . Ahora se puede demostrar que si $X \sim Poisson(\lambda)$, entonces $E[X] = \lambda$, por lo tanto según **(8)** \bar{X} es un buen estimador para λ . Haciendo los cálculos se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{100} (13 * 0 + 27 * 1 + 28 * 2 + 17 * 3 + 11 * 4 + 1 * 5 + 2 * 6 + 1 * 7 + 0 * 8) \\ &= \frac{1}{100} (27 + 56 + 51 + 44 + 5 + 12 + 7) = 2.02 \end{aligned}$$

Por lo tanto las hipótesis a contrastar quedan de la forma:

$$H_0: X \sim Poisson(2.02) \text{ vs. } H_a: X \not\sim Poisson(2.02).$$

En este caso las observaciones se dividirán en los 9 grupos dados por la información en la tabla. A continuación se calculará \hat{p}_j para toda j :

$$\hat{p}_0 = P[X = 0] = \frac{(2.02)^0 e^{-2.02}}{0!} = 0.13265547$$

$$\hat{p}_1 = P[X = 1] = \frac{(2.02)^1 e^{-2.02}}{1!} = 0.26796404$$

¹⁸ Se dice que $X \sim Poisson(\lambda)$, si $f_X(x) = \frac{(\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}$

Procediendo de manera análoga se obtienen los demás valores, que se enlistan en la siguiente tabla:

$\hat{p}_0 = 0.13265547$
$\hat{p}_1 = 0.26796404$
$\hat{p}_2 = 0.27064368$
$\hat{p}_3 = 0.18223341$
$\hat{p}_4 = 0.09202787$
$\hat{p}_5 = 0.03717926$
$\hat{p}_6 = 0.01251702$
$\hat{p}_7 = 0.00361205$
$\hat{p}_8 = 0.0011672$

Con estos datos se procederá al cálculo del estadístico de prueba:

$$\chi^2_{est} = \sum_{j=0}^K \frac{(n_j - n\hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_j} = \sum_{j=0}^8 \frac{(n_j - 100\hat{p}_j)^2}{100\hat{p}_j} = 4.152986991$$

Ahora bien esta cantidad debe compararse con $\chi^2_{(8-1)}$. Buscando dicho valor en tablas se obtiene que $\chi^2_{(7)} = 14.1$. Por lo tanto puesto que $\chi^2_{est} = 4.152986991 < 14.1 = \chi^2_{(7)}$, **se concluye** que $X \sim Poisson(2.02)$ al 0.95 de confianza. Cabe señalar que si hubiese ocurrido que $\chi^2_{est} \geq \chi^2_{(7)}$, se hubiera rechazado la hipótesis H_0 y por lo tanto se hubiera concluido que X no tiene una distribución Poisson.

CAPÍTULO 2: APLICACIONES DE VARIABLES ALEATORIAS MIXTAS A LA MODELACIÓN, COSTEO Y MANEJO DE ALGUNOS SEGUROS DE DAÑOS.

En este capítulo se expondrá la manera en que se utilizan las herramientas del capítulo previo para modelar varios tipos de seguros de daños, y a su vez se introducirá el concepto de un tipo distinto de variable aleatoria. También se detallarán los métodos más comúnmente usados para el manejo y evaluación de dichos seguros, y finalmente se describirá la manera en que, partir de estos elementos, se calcula el monto de los diversos tipos de primas existentes.

2.1 Combinación entre variables continuas y variables discretas

Las variables aleatorias se clasifican en varios tipos dependiendo de las características de la correspondiente función de distribución. Al menos existen tres tipos: discretas, continuas y combinaciones de estas dos, a las que se denominará mixtas. En el capítulo previo se introdujo la definición y características de las variables discretas y de las variables continuas, por lo que a continuación únicamente se estudiará el tercer tipo de variables.

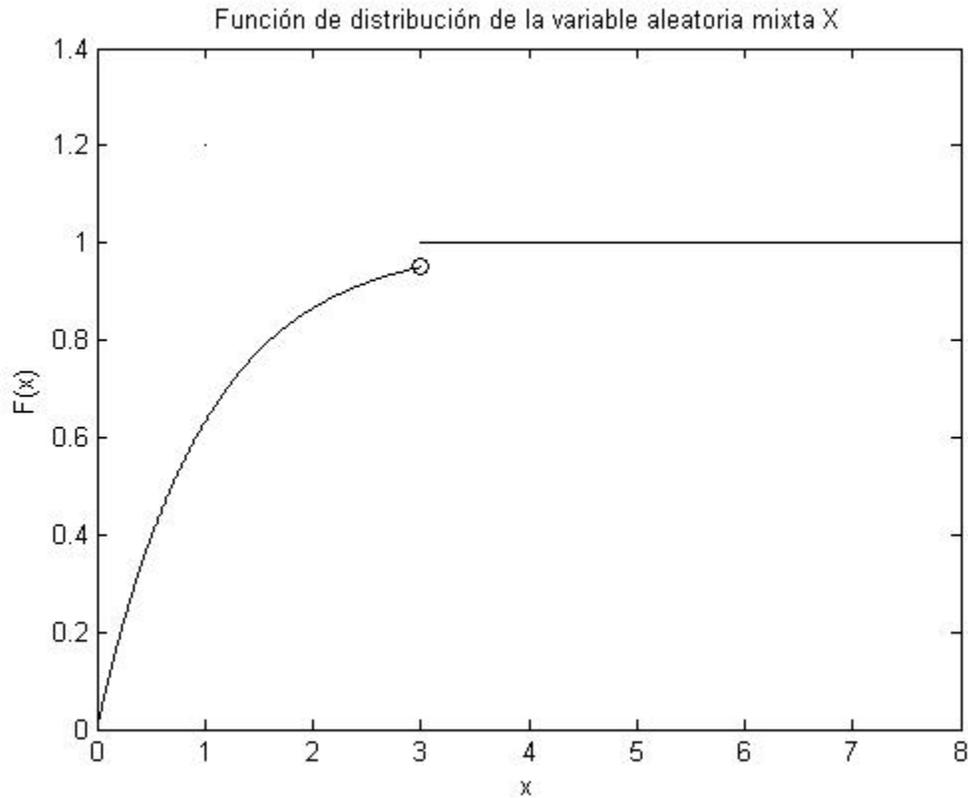
Definición. (Variable aleatoria mixta). Una variable aleatoria X que no es discreta ni continua se llama variable aleatoria mixta. Es decir son aquellas, cuya función de distribución en algunos intervalos presenta saltos, mientras que en otros intervalos es continua. Para aclarar ideas, a continuación se expone un ejemplo.

Ejemplo 1. Se tiene la siguiente función de distribución, la cual corresponde a la de una variable aleatoria mixta X .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

A continuación se esbozará su gráfica y se encontrará la respectiva función de densidad de X :

Gráfico 2.1



En este gráfico se puede observar que en el intervalo $[0,3)$ la variable aleatoria es continua, mientras que en el valor puntual 3 hay un salto, lo cual indica que en ese punto la variable aleatoria se comporta como una variable aleatoria discreta y además que toma el valor 3 con probabilidad e^{-3} . Puesto que X es mixta, su función de densidad se encontrará a partir de la combinación de los métodos expuestos en el **Capítulo 1** para obtener funciones de densidad tanto de variables aleatorias discretas como continuas. Ya que en el intervalo $[0,3)$, $F(x)$ es continua se tiene que:

$$f(x) = F'(x) = (1 - e^{-x})' = e^{-x}$$

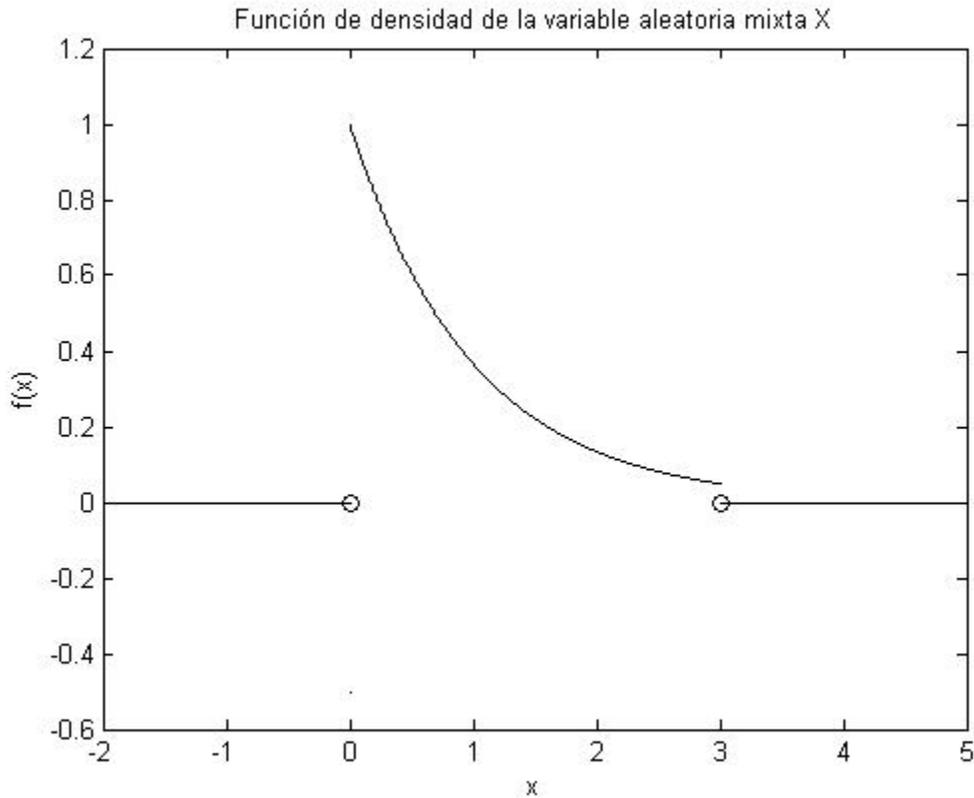
Mientras que para el valor puntual 3 se calculará el tamaño del salto:

$$f(3) = 1 - (1 - e^{-3}) = e^{-3}$$

Ahora puesto que en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(3, \infty)$, $F(x)$ es continua, se tiene que $f(x) = F'(x) = 0$. En síntesis:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } x > 3 \\ e^{-x} & \text{si } x \in [0,3) \\ e^{-3} & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Gráfico 2.2



En el **Capítulo 1** se definió $E[X]$ para variables aleatorias continuas y discretas, pero se omitió la definición para la clase de las variables mixtas. A continuación se definirá la esperanza de una variable aleatoria mixta.

2.2 Cálculo de los momentos de las variables aleatorias mixtas y su interpretación en el seguro de daños

Definición (Esperanza de una variable mixta). Sea X una variable aleatoria mixta con función de distribución $F(x)$. La esperanza de X , denotada por $E[X]$, se define como el número:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

Esta definición involucra un concepto matemático que se estudia en cursos de Análisis Matemático II: la integral de **Riemann-Stieltjes**¹⁹. No obstante debido a su naturaleza práctica, este texto se limitará a enunciar algunas de sus propiedades que permitirán calcular los momentos de las variables aleatorias mixtas.

¹⁹ Los detalles y propiedades de este concepto se encuentran en *Rudin, Walter. Principles of mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1964.*

Propiedad I. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$. Si $F(x)$ es diferenciable²⁰, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Lo cual quiere decir que si $F(x)$ es diferenciable, entonces la esperanza de X se calcula con la integral de **Riemann** ordinaria.

Propiedad II. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$. Si $F(x)$ es constante excepto en los puntos x_1, x_2, \dots , entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

Estas dos propiedades permitirán calcular las esperanzas de las variables aleatorias mixtas, además estas propiedades se pueden extender fácilmente para calcular todos los momentos de las variables aleatorias mixtas, es decir las siguientes ecuaciones son válidas:

- Si $F(x)$ es diferenciable y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

- Si $F(x)$ es constante excepto en los puntos x_1, x_2, \dots , y $n \in \mathbb{N}$:

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n f(x_i)$$

En síntesis, estas propiedades establecen que en los intervalos donde la función de distribución sea continua, la esperanza se calculará como se calcula para las variables aleatorias continuas, mientras que en los puntos donde haya saltos, la esperanza se calculará como se calcula para las variables aleatorias discretas. Para dejar más claro el uso de estas propiedades, se calcula a continuación $E[X]$ y $E[X^2]$ del **Ejemplo 1**:

$$E[X] = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^3 x dF(x) + \int_3^{\infty} x dF(x) = \int_0^3 x f(x) dx + 3 * P[X = 3]$$

²⁰ Se dice que una función $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es diferenciable en un punto x , si f es derivable en x .

$$\begin{aligned}
&= \int_0^3 x e^{-x} dx + 3 * (1 - (1 - e^{-3})) \\
&= -x e^{-x} \Big|_0^3 - e^{-x} \Big|_0^3 + 3 e^{-3} \\
&= 1 - 3 e^{-3} - e^{-3} + 3 e^{-3} = 1 - e^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_0^{\infty} x^2 dF(x) = \int_0^3 x^2 dF(x) + \int_3^{\infty} x^2 dF(x) = \int_0^3 x^2 f(x) dx + 3^2 * P[X = 3] \\
&= \int_0^3 x^2 e^{-x} dx + 3^2 * (1 - (1 - e^{-3})) \\
&= -x^2 e^{-x} \Big|_0^3 + 2 \int_0^3 x e^{-x} dx + 3^2 * e^{-3} \\
&= -(3)^2 * e^{-3} + 2(1 - 3 * e^{-3} - e^{-3}) + 3^2 * e^{-3} \\
&= 2(1 - 3 * e^{-3} - e^{-3})
\end{aligned}$$

Para calcular $Var[X]$ basta aplicar la fórmula (6) del **Capítulo 1**. Cabe señalar que en el caso del área de seguros, $E[X]$ representa la **prima de riesgo**. Esta prima se define como la cantidad **suficiente** que el asegurador requiere para hacer frente la pérdida aleatoria X . Más aun, $\sqrt{Var[X]}$ es la cantidad que representa las desviaciones en la siniestralidad de X .

En la práctica, además de la prima de riesgo, existen al menos tres tipos más de primas. Dichas primas tienen como base a la prima de riesgo, pero además incluyen diversos tipos de incrementos, como lo es margen de seguridad, el margen de utilidad, derechos sobre póliza y otros más. La definición matemática, así como la descripción de estas primas se hace en la sección 2.5.

2.3 Variables mixtas como modelo de algunos seguros de daños

A partir de este momento se va a considerar que se tiene un subconjunto de n pólizas de seguro, las cuales tienen la característica de que sólo admiten una y sólo una reclamación por siniestro durante el tiempo de vigencia de las mismas. Se denotará la pérdida aleatoria que la i -ésima póliza le causa al asegurador con la variable X_i .

Definición. El monto agregado de reclamos se define como la variable aleatoria S tal que:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Esta variable es el monto total que afronta una compañía aseguradora por concepto de reclamaciones durante el periodo completo del seguro. A partir de esta definición se puede observar que el comportamiento de S depende completamente del comportamiento de las variables individuales X_i . En seguida se examinan dos ejemplos, en los cuales las

estructuras de las variables X_i modelan bastante bien las reclamaciones aleatorias de varios tipos de seguros de daños.

Ejemplo 2.: Se supone que se tiene una póliza de seguro la cual obliga a pagar una suma asegurada de \$150,000, si ocurre el robo total de una motocicleta en el periodo de un año. La probabilidad de robo total de motocicletas según la experiencia estadística de la compañía es 0.1. Sea X el monto que paga la compañía aseguradora por esta póliza. Primeramente se calculará la función de distribución de X , así como $E[X]$ y $Var[X]$, ya que dichas cantidades serán de gran utilidad, para calcular los diversos tipos de primas:

Se sabe que:

$$\begin{aligned} P[X = 0] &= 0.9 \\ P[X = 150,000] &= 0.1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.9 & \text{si } 0 \leq x < 150,000 \\ 1 & \text{si } x \geq 150,000 \end{cases}$$

Ahora, por la ley del estadístico inconsciente:

$$\begin{aligned} E[X] &= 0 * 0.9 + 150,000 * 0.1 = 15,000 \\ E[X^2] &= 0^2 * 0.9 + (150,000)^2 * 0.1 = 2,250,000,000 \\ \Rightarrow Var[X] &= 2,025,000,000 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.: Se supone que se tiene una póliza de seguro la cual cubre la pérdida por incendio de una tienda de abarrotes con una suma asegurada máxima de 5,000 pesos. Además la póliza de este seguro estipula que se cubrirá a lo más un siniestro durante el tiempo de vigencia de la misma. Se supone también que la probabilidad de que ocurra un incendio en la tienda es 0.1, y por lo tanto la probabilidad de que no se incendie la tienda en el período de vigencia de la póliza es 0.9. Finalmente, se asume que la probabilidad de que dado que ocurrió un incendio en la tienda, la pérdida en la misma exceda 5,000 pesos, es también 0.1. Además se sabe que la distribución de los posibles reclamos dado que ocurrió el siniestro está dada por $h(x) = 0.00036(1 - x/5,000)^{21}$ en el intervalo $(0;5,000)$. Sea X el monto que paga la aseguradora por la pérdida aleatoria. Se calculará $E[X]$, $Var[X]$, $F(x)$ y $f(x)$.

²¹ Esta es la función de densidad condicional de los reclamos aleatorios dado que ocurrió el siniestro.

En primer lugar, se introducirá a la variable aleatoria I la cual indica la ocurrencia o no ocurrencia del incendio. En este caso particular, es claro que el evento ($I = 1$) se refiere a la ocurrencia del incendio, mientras que el evento ($I = 0$) se refiere a la no ocurrencia. Utilizando el **teorema de la probabilidad total** para calcular la función de distribución de X se tienen los siguientes casos:

Caso 1: $x < 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X \leq x] = P[X \leq x | I = 0] P[I = 0] + P[X \leq x | I = 1] P[I = 1] \\ &= 0 * 0.9 + 0 * 0.1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Caso 2: $x = 0$

$$\begin{aligned} F(0) &= P[X \leq 0] = P[X \leq 0 | I = 0] P[I = 0] + P[X \leq 0 | I = 1] P[I = 1] \\ &= 1 * 0.9 + 0 * 0.1 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

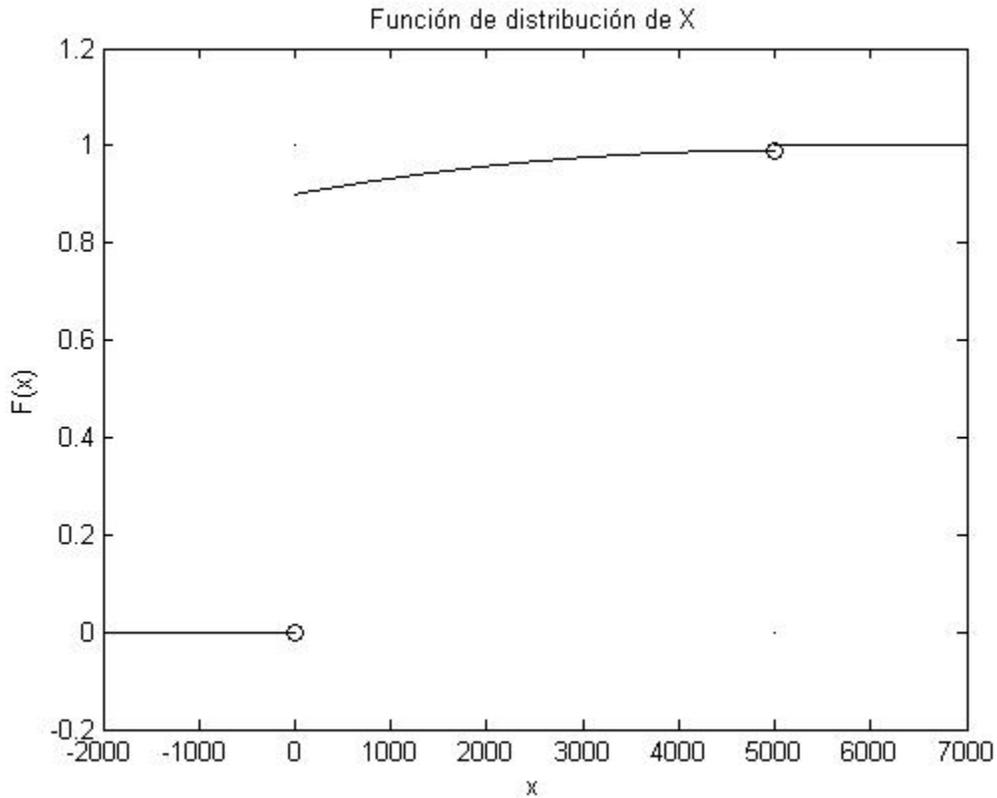
Caso 3: $0 < x < 5,000$

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X \leq x] = P[X \leq 0] + P[0 < X \leq x] = 0.9 + P[0 < X \leq x | I = 0] P[I = 0] \\ &\quad + P[0 < X \leq x | I = 1] P[I = 1] \\ &= 0.9 + 0 * 0.9 + .1 * \int_0^x 0.00036(1 - t / 5,000) dt \\ &= 0.9 + 0.1 * 0.00036 * (x - x^2 / 10,000) \\ &= 0.9 + 0.000036 * (x - x^2 / 10,000) \end{aligned}$$

Caso 4: $x \geq 5,000$

$$F(x) = P[X \leq x] = 1$$

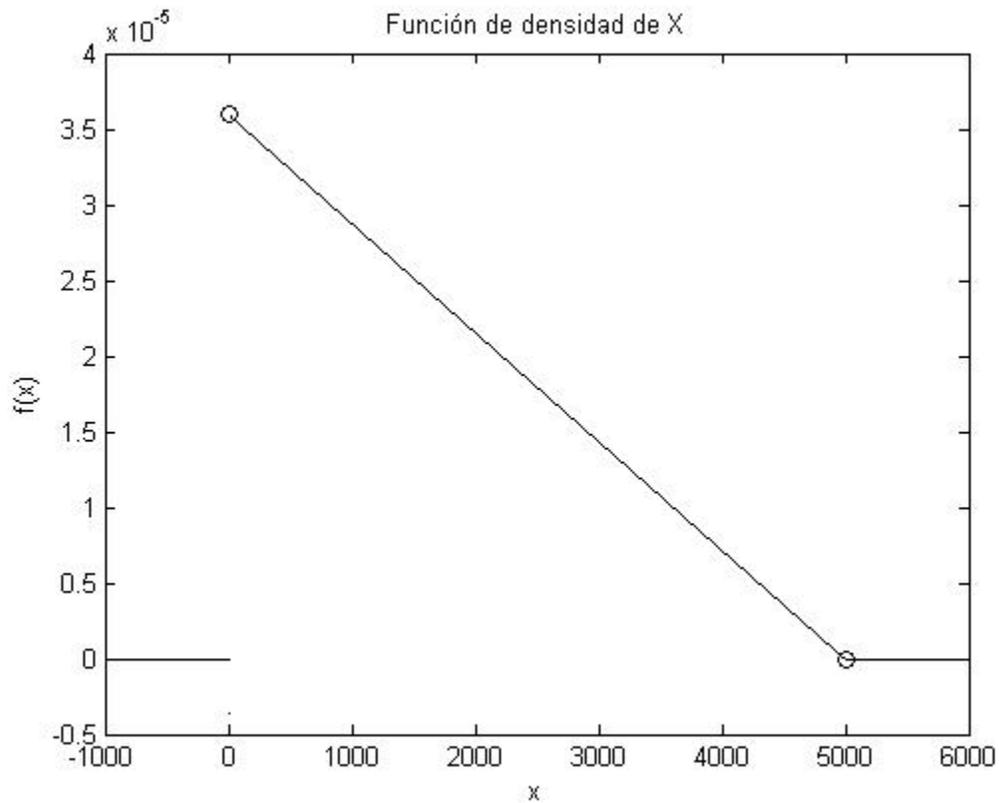
Gráfico 2.3



Si se observa el comportamiento de $F(x)$ se puede concluir que X es una variable aleatoria mixta; esto se debe a que $F(x)$ presenta dos saltos uno en el valor puntual 0 y otro en el valor puntual 5,000, mientras que en $(-\infty;0) \cup (0;5,000) \cup (5,000;\infty)$ $F(x)$ es una función continua. Una vez hecha esta observación se calculará a continuación $f(x)$. Procediendo de manera análoga al **Ejemplo 2** se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty;0) \cup (5,000;\infty) \\ 0.9 & \text{si } x = 0 \\ 0.000036 * (1 - x/5,000) & \text{si } 0 < x < 5,000 \\ 0.01 & \text{si } x = 5,000 \end{cases}$$

Gráfico 2.4



Es necesario señalar que los valores de $f(0)$ y $f(5,000)$ no aparecen en el gráfico, debido a que son muy grandes con respecto a la escala del mismo. Ahora bien, se calculará $E[X]$ y $Var[X]$. Utilizando las **Propiedades I y II** de la integral de **Riemann-Stieltjes**:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0 * P[X = 0] + \int_0^{5,000} x * 0.000036(1 - x/5,000) dx + 5,000 * P[X = 5,000] \\
 &= 0 * 0.9 + \int_0^{5,000} x * 0.000036(1 - x/5,000) dx + 5,000 * 0.01 \\
 &= 0.000036 * (x^2 / 2 - x^3 / 15,000) \Big|_0^{5,000} + 50 \\
 &= 150 + 50 \\
 &= 200
 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 0^2 * P[X = 0] + \int_0^{5,000} x^2 * 0.000036(1 - x/5,000) dx + 5,000^2 * P[X = 5,000] \\
 &= 0 * 0.9 + \int_0^{5,000} x^2 * 0.000036(1 - x/5,000) dx + 5,000^2 * 0.01
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.000036 * (x^3 / 3 - x^4 / 20,000) \Big|_0^{5,000} + 250,000 \\
&= 374,999.9 + 250,000 \\
&= 624,999.9
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Var}[X] = 624,999.9 - 200^2 = 584,999.9$$

2.4 La distribución de S

En esta sección se expondrán tres métodos con los que se puede encontrar la distribución de la variable aleatoria S o bien una aproximación: el método de convoluciones, el de la función generadora de momentos y el de aproximación gaussiana. A partir de este momento, se asumirá que las variables X_i que conforman la variable S son independientes.

2.4.1 Convoluciones

Según la teoría de la probabilidad se sabe que si X y Y son dos variables aleatorias continuas e independientes con función de densidad conjunta $f(x, y)$, la variable aleatoria $X + Y$ tiene función de densidad:

$$(1) \quad f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-v, v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-v) f_Y(v) dv$$

Cuando las variables son discretas, se tiene la igualdad:

$$(2) \quad f_{X+Y}(u) = \sum_k f(u-k, k) = \sum_k f_X(u-k) f_Y(k)$$

Definición. La convolución de dos funciones de densidad continuas f_1 y f_2 , es una función de densidad denotada por $f_1 * f_2$, y definida como sigue:

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y) f_2(y) dy$$

Mientras que si f_1 y f_2 fueran discretas:

$$(f_1 * f_2)(x) = \sum_k f_1(x-k) f_2(k)$$

Suponiendo que se tienen tres variables aleatorias continuas e independientes X, Y, Z , por la teoría de la probabilidad, la función de densidad de la suma esta dada por:

$$f_{X+Y+Z}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(u-y-z, y, z) dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-z-y) f_Y(y) f_Z(z) dy dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-z-y) f_Y(y) dy \right) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) ((f_X * f_Y)(u-z)) dz \\
&= ((f_X * f_Y) * f_Z)(u)
\end{aligned}$$

Ahora bien, si X, Y, Z fueran discretas:

$$\begin{aligned}
f_{X+Y+Z}(u) &= \sum_l \sum_k f_{X,Y,Z}(u-k-l, k, l) = \sum_l \sum_k f_X(u-k-l) f_Y(k) f_Z(l) \\
&= \sum_l f_Z(l) \sum_k f_X(u-k-l) f_Y(k) \\
&= \sum_l f_Z(l) ((f_X * f_Y)(u-l)) \\
&= ((f_X * f_Y) * f_Z)(u)
\end{aligned}$$

Este resultado permite obtener un algoritmo generalizado para encontrar la función de densidad de la suma de n variables aleatorias independientes, el cual se resume en esta propiedad:

Propiedad III. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes, entonces la función de densidad de su suma está dada por:

$$f_{\sum_1^n X_i}(u) = (f^{(n-1)} * f_{X_n})(u)$$

donde:

$$\begin{aligned}
f^{(n-1)} &= f^{(n-2)} * f_{X_{n-1}} \\
f^{(n-2)} &= f^{(n-3)} * f_{X_{n-2}} \\
&\vdots \\
f^{(2)} &= f_{X_1} * f_{X_2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4. Se supone que se tienen tres variables aleatorias X, Y, Z , las cuales toman los valores 0;1,000;2,000 y 2,500 con las probabilidades enlistadas en la siguiente tabla:

Tabla 2.1

s	$f_X(x)$	$f_Y(y)$	$f_Z(z)$
0	0.5	0.6	0
1,000	0.2	0.2	0.4
2,000	0.3	0.2	0.4
2,500	0	0	0.2

A continuación se encuentra la función de densidad de $S = X + Y + Z$.

Según lo establecido por la fórmula iterativa de la **Propiedad III**, se calculará en primer lugar $f_X * f_Y$. Primeramente se establecen los posibles valores que puede tomar $X + Y$, estos son 0;1,000; 2,000; 2,500; 3,000; 3,500; 4,000; 4,500 y 5,000. Ahora:

$$(f_X * f_Y)(0) = \sum_k f_X(0-k)f_Y(k) = f_X(0)f_Y(0) = 0.5 * 0.6 = 0.3$$

$$(f_X * f_Y)(1,000) = \sum_k f_X(1,000-k)f_Y(k) = f_X(1,000)f_Y(0) + f_X(0)f_Y(1,000) \\ = 0.2 * 0.6 + 0.2 * 0.5 = 0.22$$

$$(f_X * f_Y)(2,000) = \sum_k f_X(2,000-k)f_Y(k) = f_X(2,000)f_Y(0) + f_X(1,000)f_Y(1,000) \\ + f_X(0)f_Y(2,000) \\ = 0.3 * 0.6 + 0.2 * 0.2 + 0.5 * 0.2 = 0.32$$

Si se procede análogamente para los demás valores se obtiene:

Tabla 2.2

s	$f_X(x)$	$f_Y(y)$	$f_Z(z)$	$(f_X * f_Y)(s)$
0	0.5	0.6	0	0.3
1,000	0.2	0.2	0.4	0.22
2,000	0.3	0.2	0.4	0.32
2,500	0	0	0.2	0
3,000				0.1
3,500				0
4,000				0.06
4,500				0
5,000				0

Según el algoritmo posteriormente se debe obtener $(f_X * f_Y) * f_Z$ utilizando la cuarta y quinta columna de esta última tabla, realizando estos cálculos se tiene lo siguiente:

Tabla 2.3

s	$f_X(x)$	$f_Y(y)$	$f_Z(z)$	$(f_X * f_Y)(s)$	$((f_X * f_Y) * f_Z)(s)$
0	0.5	0.6	0	0.3	0
1,000	0.2	0.2	0.4	0.22	0.12
2,000	0.3	0.2	0.4	0.32	0.208
2,500	0	0	0.2	0	0.06
3,000				0.1	0.216
3,500				0	0.044
4,000				0.06	0.168
4,500				0	0.064
5,000				0	0.064
5,500					0.02

6,000					0.024
6,500					0.012

La última columna corresponde a la función de densidad de S , además a partir de esta columna resulta sumamente sencillo calcular su función de distribución. Los resultados finales se enlistan en la siguiente tabla:

Tabla 2.4

s	$f_S(s)$	$F_S(s)$
0	0	0
1,000	0.12	0.12
2,000	0.208	0.328
2,500	0.06	0.388
3,000	0.216	0.604
3,500	0.044	0.648
4,000	0.168	0.816
4,500	0.064	0.88
5,000	0.064	0.944
5,500	0.02	0.964
6,000	0.024	0.988
6,500	0.012	1

Cabe señalar que este método, aunque es exacto, puede generar grandes complicaciones de cálculo cuando n es muy grande, por lo cual se expondrán a continuación otros dos métodos que permiten obtener o en su caso aproximar la distribución de S de una manera más sencilla.

2.4.2 Método de la función generadora de momentos

En esta sección se expondrá la manera en que se utiliza la **Propiedad V** del **Capítulo 1**, para encontrar la distribución S .

A continuación se mostrará un ejemplo para aclarar el uso de esta propiedad:

Ejemplo 5. Se supone que se tiene una colección de variables aleatorias independientes $\{X_i\}_{i=1}^{100}$, tal que $X_i \sim \text{Poisson}(50)$. En seguida se encuentra la distribución de $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$.

Usando la **Propiedad V** del **Capítulo 1**, se tiene que:

$$M_{\sum_{i=1}^{100} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{100} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{100} e^{50(e^t - 1)} = e^{5,000(e^t - 1)}$$

Es claro que $e^{5,000(e^t-1)}$ es la función generadora de momentos de una variable Poisson con parámetro 5,000, por lo tanto se puede concluir que:

$$S = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim Poisson(5,000)$$

Aunque este método también se puede aplicar cuando n es grande, la mayoría de las veces resulta casi imposible hacer el reconocimiento de la función generadora resultante de multiplicar las funciones generadoras individuales, por lo cual en seguida se introducirá un método cuya aplicación práctica no presenta ninguna dificultad.

2.4.3 Método de aproximación gaussiana

En esta sección se utiliza el **Teorema 2** enunciado en el **Capítulo 1** de este texto, para dar una aproximación a la distribución de S . Este teorema será bastante útil, ya que si bien brinda sólo una aproximación, si n es bastante grande la precisión de la misma es muy buena. En seguida, se establecerá un ejemplo para que quede claro el uso del teorema.

Ejemplo 6. Una compañía aseguradora tiene un portafolio con 100 pólizas individuales. Sea X_i el monto aleatorio que paga la compañía aseguradora al i -ésimo asegurado por concepto de reclamación. Además se tiene que para cada póliza, la probabilidad de reclamación es $1/6$, y que la distribución de los montos de reclamo dado que hubo una reclamación está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

a) Utilizando dos métodos distintos, se calculará $f(s)$, $F(s)$, $E[S]$ y $Var[S]$ para conocer la siniestralidad esperada, así como la desviación promedio de la misma.

i) El primer método consiste en encontrar la función de distribución los reclamos individuales. Sea X_i uno de los 100 reclamos individuales. Procediendo análogamente a la forma en que se procedió en el **Ejemplo 3**, se tienen los siguientes casos:

Caso 1: $x < 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X_i \leq x] = P[X_i \leq x | I = 0] P[I = 0] + P[X_i \leq x | I = 1] P[I = 1] \\ &= 0 * 5/6 + 0 * 1/6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Caso 2: $x = 0$

$$\begin{aligned} F(0) &= P[X_i \leq 0] = P[X_i \leq 0 | I = 0] P[I = 0] + P[X_i \leq 0 | I = 1] P[I = 1] \\ &= 1 * 5/6 + 0 * 1/6 \\ &= 5/6 \end{aligned}$$

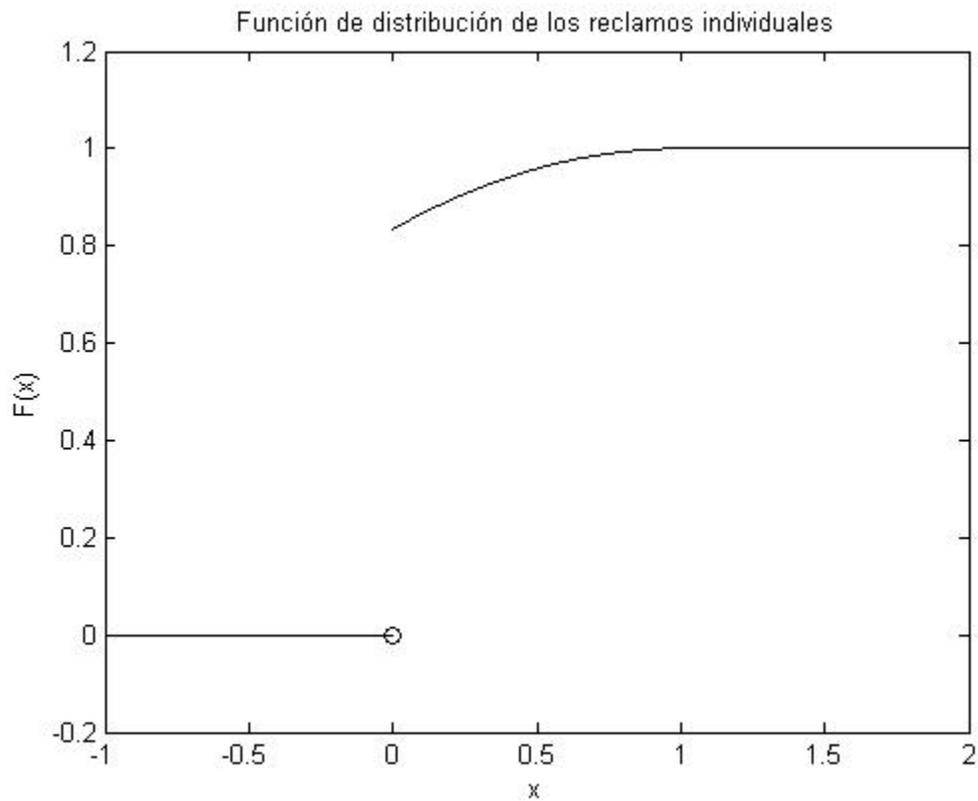
Caso 3: $0 < x \leq 1$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P[X_i \leq x] = P[X_i \leq 0] + P[0 < X_i \leq x] = 5/6 + P[0 < X_i \leq x | I = 0] P[I = 0] \\
 &\quad + P[0 \leq X_i < x | I = 1] P[I = 1] \\
 &= 5/6 + 0 * 5/6 + 1/6 * \int_0^x 2(1-t) dt \\
 &= 5/6 + 1/6 * \left. -(1-t)^2 \right|_0^x \\
 &= 5/6 + 1/6 * (-x^2 + 2x)
 \end{aligned}$$

Caso 4: $x \geq 1$

$$F(x) = P[X_i \leq x] = 1$$

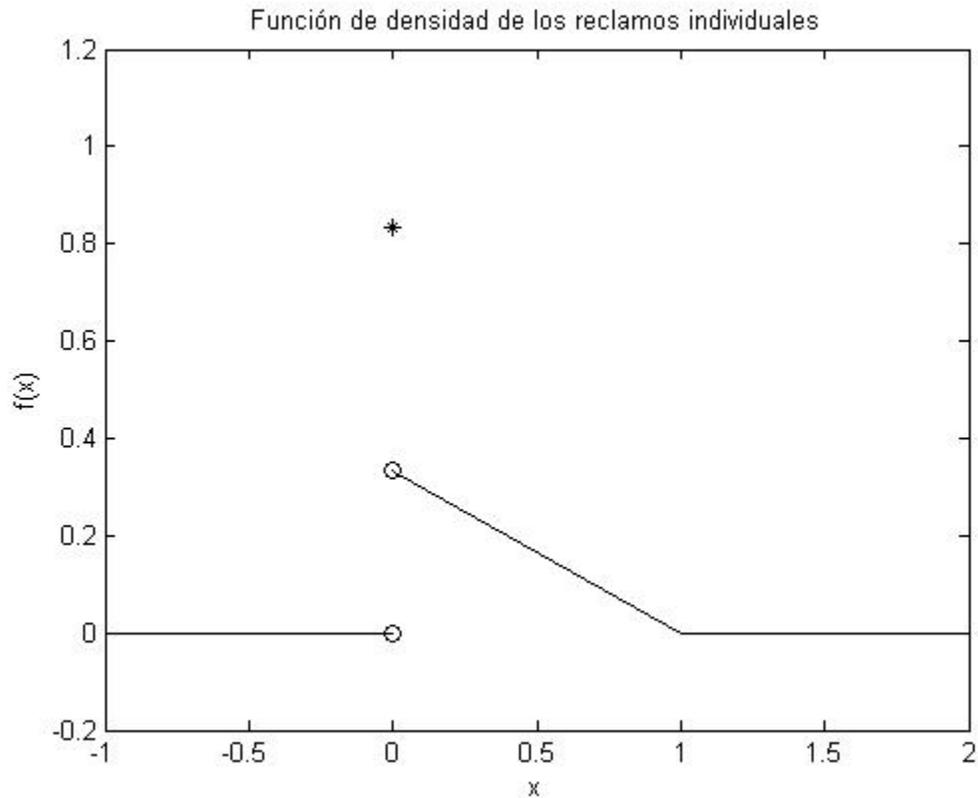
Gráfico 2.5



Una vez que se tiene la función de distribución de cada reclamo individual, se debe obtener su respectiva función de densidad. Si se procede de manera análoga al **Ejemplo 1** se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } x > 1 \\ \frac{5}{6} & \text{si } x = 0 \\ \frac{2}{6}(1-x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Gráfico 2.6



Ahora bien:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0 * P[X = 0] + \int_0^1 x * \frac{2}{6}(1-x) dx \\ &= 0 * \frac{5}{6} + \frac{1}{6} * \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Y:

$$\begin{aligned} E[(X_i)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 0^2 * P[X = 0] + \int_0^1 x^2 * \frac{2}{6}(1-x) dx \\ &= 0 * \frac{5}{6} + \frac{2}{6} * \int_0^1 x^2(1-x) dx \end{aligned}$$

$$= 2/6 * (x^3 / 3 - x^4 / 4) \Big|_0^1 = 1/36$$

$$\therefore \text{Var}[X] = 1/36 - (1/18)^2 = 0.02469$$

Ahora, como las X_i son independientes se tiene que:

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{32} X_i\right] = \sum_{i=1}^{32} E[X_i] = 100 * 1/18 = 50/9$$

$$\text{Var}[S] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^{32} X_i\right] = \sum_{i=1}^{32} \text{Var}[X_i] = 100 * 0.02469 = 2.469$$

ii) El segundo método consiste en utilizar la **Propiedad VII** del **Capítulo 1**, para obtener los valores correspondientes de la siniestralidad de S . Utilizando dichas fórmulas y la ley del estadístico inconsciente se tiene que:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= E[E[X_i|I]] = \sum_{i=0}^1 E[X_i|I=i] P[I=i] = E[X_i|I=0] * 5/6 + E[X_i|I=1] * 1/6 \\ &= 0 * 1 * 5/6 + \int_0^1 x * f_{X_i|1}(x|1) dx * 1/6 \\ &= 0 * 1 * 5/6 + \int_0^1 x * 2(1-x) dx * 1/6 \\ &= 1/18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_i] &= E[\text{Var}[X_i|I]] + \text{Var}[E[X_i|I]] = \sum_{i=0}^1 \text{Var}[X_i|I=i] P[I=i] \\ &\quad + E[(E[X_i|I])^2] - (E[E[X_i|I]])^2 \\ &= \text{Var}[X_i|I=0] P[I=0] + \text{Var}[X_i|I=1] P[I=1] \\ &\quad + (E[X_i|I=0])^2 P[I=0] + (E[X_i|I=1])^2 P[I=1] \\ &\quad - (E[E[X_i|I]])^2 \\ &= \left(\sum_x (x - E[X_i|I=0])^2 f_{X_i|0}(x|0) \right) P[I=0] \\ &\quad + \left(\int_0^1 (x - E[X_i|I=1])^2 f_{X_i|1}(x|1) dx \right) P[I=1] \\ &\quad + \left(\sum_x x * f_{X_i|0}(x|0) \right)^2 P[I=0] \\ &\quad + \left(\int_0^1 x * f_{X_i|1}(x|1) dx \right)^2 P[I=1] - (E[E[X_i|I]])^2 \\ &= 0 * 5/6 + \left(\int_0^1 (x - E[X_i|I=1])^2 f_{X_i|1}(x|1) dx \right) * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P[I = 1] + 0 * 5 / 6 + \left(\int_0^1 x * f_{X_i|1}(x|1) dx \right)^2 * P[I = 1] \\
& - \left(E[X_i|I = 0] * P[I = 0] + E[X_i|I = 1] * P[I = 1] \right)^2 \\
& = \left(\int_0^1 (x - E[X_i|I = 1])^2 f_{X_i|1}(x|1) dx \right) * P[I = 1] \\
& + \left(\int_0^1 x * f_{X_i|1}(x|1) dx \right)^2 * P[I = 1] * (1 - P[I = 1]) \\
& = (1/6 - (1/3)^2) * 1/6 + (1/3)^2 * 1/6 * 5/6 \\
& = 0.024691
\end{aligned}$$

Como las X_i son independientes:

$$\begin{aligned}
E[S] &= E\left[\sum_{i=1}^{32} X_i\right] = \sum_{i=1}^{32} E[X_i] = 100 * 1/18 = 50/9 \\
Var[S] &= Var\left[\sum_{i=1}^{32} X_i\right] = \sum_{i=1}^{32} Var[X_i] = 100 * 0.02469 = 2.469
\end{aligned}$$

b) Ahora bien, se tiene la problemática de que la compañía requiere que el monto de las primas individuales, sirva para cubrir también el monto total que pagará de esta cartera por concepto de desviaciones en la siniestralidad. ¿Cuánto debe recargar las primas de riesgo individuales $E[X_i]$ para que esto suceda con un nivel de confianza de 0.95?

La traducción matemática de esta condición es:

$$(3) \quad P[S - (1 + \theta)E[S] \leq 0] = P[S \leq (1 + \theta)E[S]] = 0.95$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
E[S] &= 50/9 \\
Var[S] &= 2.469
\end{aligned}$$

Entonces **(3)** es equivalente a:

$$\begin{aligned}
& P\left[\frac{S - 50/9}{\sqrt{2.469}} \leq \frac{(1 + \theta)50/9 - 50/9}{\sqrt{2.469}}\right] = 0.95 \\
\Rightarrow & P\left[\frac{S - 50/9}{1.571305} \leq \frac{50/9 * \theta}{1.571305}\right] = \Phi\left(\frac{50/9 * \theta}{1.571305}\right) = 0.95
\end{aligned}$$

Por las tablas de la distribución normal se sabe que:

$$c_{0.95} = 1.65$$

Entonces:

$$\frac{50/9 * \theta}{1.571305} = 1.65 \Rightarrow \theta = 1.65 * 1.571305 * 9 / 50 = 1.65 * \sigma_s / \mu_s = 0.46667$$

∴ Las primas individuales deben recargarse 46.667%

La cantidad σ_s / μ_s se denomina **coeficiente de variación**, el cual indica la cantidad proporcional en que se debe recargar la prima con respecto a un cuantil establecido, en relación a las desviaciones en la siniestralidad.

2.5 Cálculo de la prima de riesgo, prima recargada, prima neta y prima total

En la práctica se distinguen cuatro tipos diferentes de primas: **la prima de riesgo**, la cual se definió en este capítulo; **la prima de riesgo recargada (P.R.)**, la cual incluye una cantidad extra denominada margen o recargo de seguridad a un nivel de confianza previamente establecido, y cuya ecuación es:

$$P.R. = (1 + \theta)E[X]$$

Cabe señalar que dicho margen depende de la experiencia estadística de asegurador, así como de las condiciones financieras en las que se encuentre.

La **prima neta o de tarifa**²² (π) es aquella que incluye incrementos por concepto de gastos administrativos, costos de adquisición y margen de utilidad, es decir, en esta prima el asegurador incluye los gastos proporcionales por conceptos como luz, agua, teléfono, salarios, autos utilizados, viajes, comisiones de agentes, bonos por ventas, etc., y por el monto que el asegurador espera obtener producto del seguro y que representa la utilidad del mismo. La ecuación de la prima neta o de tarifa está dada por:

$$\pi = \frac{P.R.}{1 - (\% \text{ Gastos de Administración} + \% \text{ Gastos de Adquisición} + \% \text{ Utilidad})}$$

Finalmente, la **prima total**²³ ($P.T.$) es el importe de la prima neta, al que se incluyen los derechos de póliza o gastos de expedición, el recargo por pago fraccionado si lo hubiera y el impuesto correspondiente.

$$P.T. = (\pi + \text{Recargo por Pago Fraccionado} + \text{Derechos de póliza}) * (1 + \% \text{ Impuestos})$$

²² Cfr. Proyecto Edufinet en <http://150.214.14.125/content/view/429/159>

²³ Cfr. http://www.segurosdeautos.com.mx/glosario_de_seguros.html

CAPÍTULO 3: APROXIMACIÓN A LA DISTRIBUCIÓN DE S MEDIANTE LA DISCRETIZACIÓN SELECTIVA DE RECLAMOS INDIVIDUALES APLICADA AL TEOREMA DE PANJER, EN EL MODELO DE RIESGO COLECTIVO.

En el capítulo anterior se expuso la manera en que se modelan aquellos seguros de daños cuyas pólizas admiten una y sólo una reclamación por siniestro durante el tiempo de vigencia de las mismas. En este capítulo se expondrá un modelo que permite describir aquellos seguros de daños cuyas pólizas cubren un número ilimitado de reclamaciones durante la vigencia de los mismos, se enunciarán sus principales características numéricas y se describirán los métodos tradicionales que existen para encontrar o aproximar la distribución del monto agregado de reclamos. Finalmente se propondrá un método alternativo para aproximar dicha distribución, para posteriormente contrastarlo con los métodos tradicionales.

3.1 Modelo de riesgo colectivo

A partir de este momento se va a considerar que se tiene un portafolio de pólizas de seguro cuyo tamaño podría desconocerse, es decir, no necesariamente se sabe cuantas pólizas hay en dicho portafolio ²⁴, y además que tiene la característica de que las pólizas en dicho portafolio admiten un número ilimitado de reclamaciones. Se denotará la pérdida aleatoria que el i -ésimo reclamo del portafolio genera a la compañía por X_i , y además se denotará por N al número total aleatorio de reclamos, que dicho portafolio genera durante la vigencia de las pólizas.

Definición. El modelo de riesgo colectivo se define como la variable aleatoria S tal que:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

En este caso S es el monto total que afronta la compañía por concepto de reclamos generados por el portafolio, y normalmente se le denomina monto agregado de reclamos.

Para efectos prácticos, de aquí en adelante se supondrá que las variables X_i son **independientes e idénticamente distribuidas**, y además que N es también **independiente** de cada X_i . Además se adoptará la notación $E[X_i^k] = \mu_k$ y $Var[X_i] = \sigma^2$.

3.2 Características numéricas de S

Si se observa la estructura de S , se puede inferir que no es una variable aleatoria común, ya que involucra **dos fuentes de incertidumbre**: la primera es el monto aleatorio o intensidad de cada uno de los reclamos y la segunda, la cantidad de reclamos que se generan a lo largo de la vigencia de las pólizas. No obstante, utilizando de la **Propiedad VII del Capítulo 1** es posible encontrar la esperanza, varianza y función generadora de momentos de S de una manera sencilla:

$$(1) \quad E[S] = E[E[S|N]] = \sum_n E[S|N = n] P[N = n]$$

²⁴ El término cartera se refiere a un subconjunto de pólizas de seguro

$$\begin{aligned}
&= \sum_n n \mu P[N = n] \\
&= \mu \sum_n n P[N = n] \\
&= \mu E[N]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \text{Var}[S] &= E[\text{Var}[S|N]] + \text{Var}[E[S|N]] = \sum_n \text{Var}[S|N = n] P[N = n] \\
&\quad + \sum_n (E[S|N = n])^2 P[N = n] \\
&\quad - (E[E[S|N]])^2 \\
&= \sigma^2 E[N] + \mu^2 E[N^2] - \mu^2 (E[N])^2 \\
&= \sigma^2 E[N] + \mu^2 \text{Var}[N]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad M_S(t) &= E[e^{tS}] = E[E[e^{tS}|N]] = \sum_n E[e^{tS}|N = n] P[N = n] \\
&= \sum_n E[e^{t(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}] P[N = n] \\
&= \sum_n E[e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}] P[N = n] \\
&= \sum_n (E[e^{tX_i}])^n P[N = n] \\
&= \sum_n e^{\ln(M_{X_i}(t))^n} P[N = n] \\
&= \sum_n e^{n \ln(M_{X_i}(t))} P[N = n] \\
&= M_N(\ln(M_{X_i}(t)))
\end{aligned}$$

Es preciso establecer, que en el caso del modelo de riesgo colectivo, el valor de $E[S]$ representa la **prima de riesgo**. Finalmente, cabe señalar que si bien estas tres cantidades brindan información bastante importante acerca de S , no funcionan para calcular los márgenes de solvencia ni las desviaciones en la siniestralidad. Debido a esto último, en las siguientes secciones se expondrán métodos para encontrar las distribuciones de N , X_i y S .

3.3 Distribuciones apropiadas para N y X_i

En esta sección se enlistarán las distribuciones asociadas a N y X_i , que son más comúnmente usadas en la práctica en el proceso de modelación.

3.3.1 Distribuciones para N

En general, suele modelarse a N con las siguientes distribuciones:

1. *Poisson*. Se dice que N se distribuye Poisson, lo cual se denotará $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, si su función de densidad está dada por:

$$f_N(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

Si $N \sim Poisson(\lambda)$, se puede demostrar que $E[N] = VAR[N] = \lambda$, por lo cual se utilizará esta distribución cuando se conozca que la varianza del número aleatorio de reclamos es muy parecida a su media.

2. *Binomial Negativa*. Se dice que N se distribuye Binomial Negativa, lo cual se denotará $N \sim BinNeg(r, p)$, si su función de densidad está dada por:

$$f_N(n) = \binom{r+n-1}{n} p^r q^n$$

Si $N \sim BinNeg(r, p)$, en general se tiene que $E[N] = \frac{rq}{p} < \frac{rq}{p^2} = VAR[N]$, por lo cual se utilizará esta distribución cuando se conozca que la varianza del número aleatorio de reclamos es mayor que su media.

3. *Binomial*. Se dice que N se distribuye Binomial, lo cual se denotará $N \sim Bin(r, p)$, si su función de densidad está dada por:

$$f_N(n) = \binom{r}{n} p^n q^{r-n}$$

Si $N \sim Bin(r, p)$, en general se tiene que $E[N] = np > npq = VAR[N]$, por lo cual se utilizará esta distribución cuando se conozca que la varianza del número aleatorio de reclamos es menor que su media.

En general en la práctica se cuenta con tablas de estadísticas, en las cuales hay una lista que revela el número de pólizas que se siniestraron i veces durante el año, para valores de i que sean significativos²⁵. A continuación se presentará un ejemplo en el que se ajusta una distribución para N , cuando se cuenta con una de dichas tablas.

Ejemplo 1. Se tiene experiencia estadística de 100 pólizas que durante el tiempo de vigencia de las mismas se siniestraron en diversas ocasiones, resumida en la siguiente tabla:

Tabla 3.1

Número de siniestros	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de pólizas	11	25	28	20	9	3	3	0	1

A continuación se encontrará la distribución del número de siniestros.

²⁵ Este hecho se refiere a que la lista se trunca a partir de que un valor k , que tiene la propiedad de que el número de pólizas que se siniestraron i veces para toda $i > k$ es cero.

Primeramente se calcularán \bar{X} y S^2 .

$$\bar{X} = \left(\sum_{i=0}^8 i \text{freq}(i) \right) * 1/100 = (0 * 11 + 1 * 25 + 2 * 28 + 3 * 20 + 4 * 9 + 5 * 3 + 6 * 3 + 7 * 0 + 8 * 1) * 1/100 = 2.18$$

$$S^2 = 1/100 * \sum_{i=0}^8 \text{freq}(i) * (i - \bar{X})^2 = 1/100 * (11 * (-2.18)^2 + 25 * (-1.18)^2 + 28 * (-0.18)^2 + 20 * (0.82)^2 + 9 * (1.82)^2 + 3 * (2.82)^2 + 3 * (3.82)^2 + 0 * (4.82)^2 + 1 * (5.82)^2) = 2.3276$$

Puesto que $\bar{X} \approx S^2$, a continuación se realizará una prueba de bondad de ajuste, que pruebe las hipótesis: $H_0: X \sim \text{Poisson}(2.18)$ vs. $H_a: X \not\sim \text{Poisson}(2.18)$. Tomando las 9 clases especificadas por la tabla y procediendo de manera análoga al **Ejemplo 5** del **Capítulo 1**, se tiene que $\chi^2_{est} = 5.98879509 < 14.1 = \chi^2_{(7)}$. Por lo tanto se concluye que $X \sim \text{Poisson}(2.18)$ al 0.95 de confianza.

3.3.2 Distribuciones para X_i

Puesto que en el caso particular de este texto X_i representa el i -ésimo reclamo aleatorio individual, es claro que, en general, debe ser modelado por una variable aleatoria no negativa y que tome un conjunto de valores que incluya valores fraccionarios. No obstante existen casos en los que distribuciones que incluyen también valores negativos, modelan bien los problemas prácticos. A continuación se presentan las distribuciones que en la práctica se asocian comúnmente a X_i .

4. *Gamma*. Se dice que X_i se distribuye Gamma, lo cual se denotará $X_i \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$, si su función de densidad está dada por:

$$f_{X_i}(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$$

Cabe señalar que si $X_i \sim \text{Gamma}(\lambda, 1)$, entonces, en realidad, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Es claro que la familia Gamma únicamente modela aquellos fenómenos cuyos posibles valores son no negativos.

5. *Normal*. Se dice que X_i se distribuye Normal, lo cual se denotará $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su función de densidad está dada por:

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}$$

3.4 Métodos para encontrar o aproximar la distribución de S

En esta sección se expondrán dos de los métodos más comúnmente usados para encontrar o aproximar la distribución de S , mismos que se compararán con el método alternativo de discretización selectiva de montos individuales, el cual será introducido en la sección 3.5.

Primeramente se hará la siguiente aclaración: cuando el número de reclamos se distribuye Poisson, es decir $N \sim Poisson(\lambda)$, se dice que S tiene una **distribución Poisson compuesta**. De manera más general, cualquier variable aleatoria T que pueda escribirse de la forma $T = X_1 + X_2 + \dots + X_M$, donde M es una variable que sólo toma enteros no negativos, se dice que tiene una distribución **compuesta**.

3.4.1 Método de convoluciones

Este método se basa en las distribuciones condicionales de S , dado cada uno de los posibles valores de N . Utilizando el teorema de la probabilidad total se tiene que:

$$f(s) = \sum_n f_{S|N=n}(s|n) P[N = n]$$

Ahora bien si $N = n$, S adquiere la forma $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, y por lo tanto $f_{S|N=n}(s|n)$ es en realidad la función de densidad de la suma de n variables aleatorias. Utilizando este hecho y la **Propiedad III del Capítulo 2** se tiene que:

$$(5) \quad f_S(s) = \sum_n f_{S|N=n}(s|n) P[N = n] = \sum_n f^{(n)}(s) P[N = n]$$

donde $f^{(n)}(s) = (f^{(n-1)} * f_{X_n})(s)$

A continuación se expondrá un ejemplo en el que se utiliza (5) para encontrar $f_S(s)$, utilizando el método de convoluciones.

Ejemplo 2. Se tiene un portafolio que puede tener una cantidad ilimitada de reclamaciones. A continuación se enlista la experiencia estadística de la compañía que muestra el número de pólizas de este tipo que emitió el año pasado y su respectiva frecuencia de reclamaciones.

Tabla 3.2

Número de siniestros	Número de pólizas
0	9,6978
1	9,240
2	704
3	43
4	9

Además se sabe que cada reclamo aleatorio individual del portafolio puede ser de 1,000; 2,000 ó 3,000, con probabilidades 0.5, 0.3 y 0.2 respectivamente. En seguida se calculará $f_S(s)$ y $F_S(s)$ para $s = 0; 1,000; 2,000; \dots; 5,000$, así como $E[S]$ y $Var[S]$.

Primeramente, se calculará \bar{X} y S^2 , y posteriormente se encontrará la distribución de N :

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \left(\sum_{i=0}^8 i \text{ frec}(i) \right) * 1/106974 = (0 * 96978 + 1 * 9240 + 2 * 704 + 3 * 43 + 4 * 9) * 1/106974 \\ &= 0.1011\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S^2 &= 1/106974 * \sum_{i=0}^8 \text{frec}(i) * (i - \bar{X})^2 = 1/106974 * (96978 * (0.1011)^2 + 9240 * (0.8989)^2 \\ &\quad + 704 * (1.8989)^2 + 43 * (2.8989)^2 + 9 * (3.8989)^2) \\ &= 0.1074\end{aligned}$$

Puesto que en este caso $\bar{X} < S^2$, se realizará una prueba ji-cuadrada, que pruebe las hipótesis: $H_0: N \sim BinNeg(r, p)$ vs. $H_a: N \not\sim BinNeg(r, p)$. No obstante, en primer lugar se procederá a estimar los parámetros r y p , para lo cual se utilizarán las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{r(1-p)}{p} &= E[X] = \bar{X} \\ \frac{r(1-p)}{p^2} &= Var[X] = S^2\end{aligned}$$

Utilizando estas dos ecuaciones se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{r(1-p)}{p} &= 0.1011 \\ \frac{r(1-p)}{p^2} &= 0.1074 \\ \Rightarrow 0.1011 &= 0.1074p \Rightarrow \hat{p} = 0.94134\end{aligned}$$

Lo cual implica:

$$\hat{r} = 0.1011 * (0.94134) / 0.5866 = 1.62241$$

Por lo tanto se probarán las hipótesis:

$$H_0: N \sim BinNeg(1.62, 0.94139) \text{ vs. } H_a: N \not\sim BinNeg(1.62, 0.94139).$$

Ahora bien en este caso se tomará a los siguientes intervalos para realizar la prueba ji-cuadrada: $(-\infty;0]$, $(0;1]$, $(1;2]$ y $(2;\infty]$; esto se debe a que la evidencia estadística correspondiente a 3 y 4 siniestros es muy pequeña a comparación de la evidencia para 0, 1 y 2 siniestros. En seguida se calcularán las \hat{p}_j 's, sin embargo, en primer lugar se enunciará una propiedad que facilitará su cálculo:

$$f_N(n) = \frac{(r+n-1)(1-p)}{n} * f_N(n-1)$$

Utilizando esta propiedad se tiene que:

$$\hat{p}_0 = f_N(0) = \binom{1.62+1-1}{1} (0.94139)^{1.62} (1-0.94139)^0 = 1 * (0.94139)^{1.62} * 1 = 0.90679$$

$$\hat{p}_1 = f_N(1) = \frac{(1.62+1-1)(1-0.94139)}{1} * f(0) = 1.62 * 0.05861 * 0.90679 = 0.0861$$

Si se procede de la misma manera para los demás valores de j , se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 3.3

$\hat{p}_0 = 0.90679$
$\hat{p}_1 = 0.0861$
$\hat{p}_2 = 0.00661$
$\hat{p}_3 = 0.0005$

Con estos datos se calculará el estadístico de prueba:

$$\chi^2_{est} = \sum_{j=0}^K \frac{(n_j - n\hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_j} = \sum_{j=0}^3 \frac{(n_j - 106,974\hat{p}_j)^2}{106,974\hat{p}_j} = 0.15606627$$

Puesto que $\chi^2_{est} = 0.15606627 < 3.84 = \chi^2_{(3-2)}$, se concluye que $N \sim BinNeg(1.62, 0.94139)$ al 0.95 de confianza.

Ahora bien, según (5):

$$f_S(s) = \sum_n f^{(n)}(s) \binom{1.62+n-1}{n} (0.94139)^{1.62} (0.05861)^n$$

A continuación se procederá a calcular $f_S(s)$ y $F_S(s)$, para $s = 0; 1,000; 2,000; \dots; 5,000$. Obsérvese que:

$$\begin{aligned}
f_S(0) &= \sum_n f^{(n)}(0) P[N = n] \\
&= f^{(0)}(0)P[N = 0] + f^{(1)}(0)P[N = 1] + f^{(2)}(0)P[N = 2] + f^{(3)}(0)P[N = 3] \\
&= f^{(0)}(0)P[N = 0] + P[X_1 = 0] \frac{(1.62 + 0)(0.05861)}{1} P[N = 0] + P[X_1 + X_2 = 0] \\
&\quad \frac{(1.62 + 1)(0.05861)}{2} P[N = 1] + P[X_1 + X_2 + X_3 = 0] \frac{(1.62 + 2)(0.05861)}{3} P[N = 2] \\
&= 1 * 0.90679 + P[X_1 = 0] * 0.0861 + P[X_1 = 0] P[X_2 = 0] * 0.00661 \\
&\quad + P[X_1 = 0] P[X_2 = 0] P[X_3 = 0] * 0.000467 \\
&= 1 * 0.90679 + 0 * 0.0861 + 0 * 0 * 0.00661 + 0 * 0 * 0 * 0.0004674 = 0.90679
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_S(1,000) &= f^{(0)}(1)P[N = 0] + f^{(1)}(1)P[N = 1] + f^{(2)}(1)P[N = 2] + f^{(3)}(1)P[N = 3] \\
&= f^{(0)}(1) * 0.90679 + P[X_1 = 1] * 0.0861 + P[X_1 + X_2 = 1] * 0.00661 \\
&\quad + P[X_1 + X_2 + X_3 = 0] * 0.000467 \\
&= 0 * 0.90679 + 0.5 * 0.0861 + (P[X_1 = 1 \cap X_2 = 0] + P[X_1 = 0 \cap X_2 = 1]) * \\
&\quad 0.00661 + (P[X_1 = 1 \cap X_2 = 0 \cap X_3 = 0] + P[X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 0] \\
&\quad + P[X_1 = 0 \cap X_2 = 0 \cap X_3 = 1]) * 0.000467 \\
&= 0 + 0.04305 + (P[X_1 = 1]P[X_2 = 0] + P[X_1 = 0]P[X_2 = 1]) * 0.00661 \\
&\quad + (P[X_1 = 1]P[X_2 = 0]P[X_3 = 0] + P[X_1 = 0]P[X_2 = 1]P[X_3 = 0] \\
&\quad + P[X_1 = 0]P[X_2 = 0]P[X_3 = 1]) * 0.000467 \\
&= 0.04305 + 2 * 0.5 * 0 * 0.00661 + 3 * 0.5 * 0 * 0 * 0.000467 = 0.04305
\end{aligned}$$

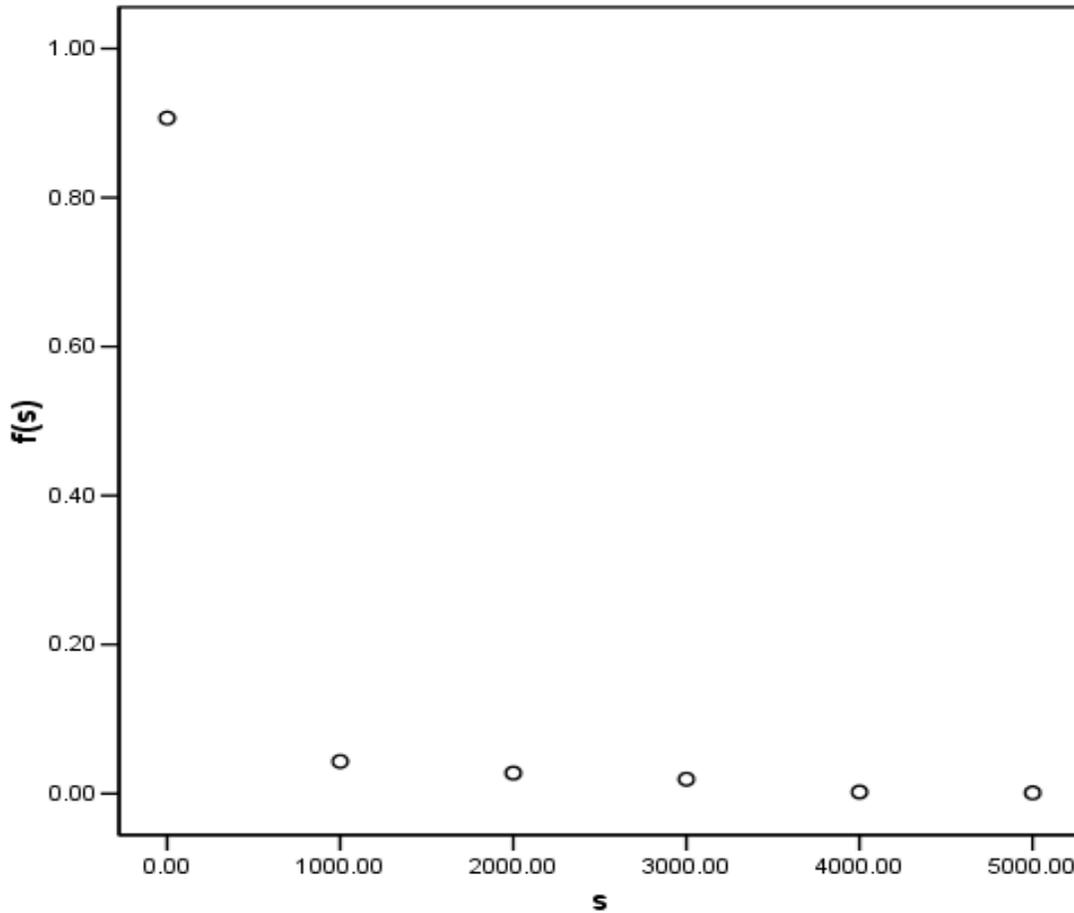
Si se procede de la misma forma para los demás valores, se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 3.4

$f_S(0) = 0.90679$
$f_S(1,000) = 0.04305$
$f_S(2,000) = 0.0274825$
$f_S(3,000) = 0.01926138$
$f_S(4,000) = 0.00202395$
$f_S(5,000) = 0.000931102$

El gráfico que representa la función de densidad de S hasta el valor puntual 5,000, se presenta a continuación:

Gráfico 3.1
Función de densidad de S



Haciendo las sumas respectivas de los valores de la función de densidad, se obtienen los siguientes datos de la función de distribución:

Tabla 3.5

$F_S(0) = 0.90679$
$F_S(1,000) = 0.94984$
$F_S(2,000) = 0.9773225$
$F_S(3,000) = 0.99658388$
$F_S(4,000) = 0.99860783$
$F_S(5,000) = 0.999538932$

Lo cual corresponde a los valores de $F_S(s)$ en el rango 0;1,000;2,000;...;5,000. Ahora bien, si se utilizan estos datos para calcular $E[S]$ y $Var[S]$, se tiene:

$$E[S] = \sum_s s f_s(s) = 0 * 0.90679 + 1,000 * 0.04305 + 2,000 * 0.0274825 + 3,000 * 0.01926138 \\ + 4,000 * 0.00202395 + 5,000 * 0.000931102 \\ = 168.55045$$

$$E[S^2] = \sum_s s^2 f_s(s) = 381,993.1675$$

$$\Rightarrow Var[S] = 397,141.503 - (169.937001)^2 = 353,583.9133$$

Mientras que si se utilizan las fórmulas **(1)** y **(2)**, se obtiene:

$$E[S] = \mu E[N] = (0.5 * 1,000 + 0.3 * 2,000 + 0.2 * 3,000) * \frac{(1.62)(0.5861)}{0.94139} = 171.461286$$

$$Var[S] = \sigma^2 E[N] + \mu^2 Var[N] = 610,000 * 0.1008595 + 2,890,000 * 0.107139 = 371,156.04$$

En donde se puede observar que si se obtiene $E[S]$ y $Var[S]$ tomando únicamente los valores de $f_s(s)$ en el rango $0; 1,000; 2,000; \dots; 5,000$, se genera una leve diferencia con respecto a los valores exactos obtenidos a través de las fórmulas.

No obstante, en la realidad práctica el conjunto de los montos de los posibles reclamos individuales suele ser mucho más grande que el conjunto $\{1,000; 2,000; 3,000\}$. Más aun, dicho conjunto, en general, ni siquiera es finito. En estos casos el método de convoluciones se vuelve inoperante, pues genera interminables problemas de cálculo. A continuación se expone un método que permite manejar este tipo de casos.

3.4.2 Método de aproximación Normal a la distribución de S

En esta sección se examinará un método que permite dar una aproximación a la distribución de S , sin que exista restricción alguna sobre la distribución de los posibles reclamos individuales. No obstante, en primer lugar se enunciará una propiedad la cual facilitará la aplicación de este método:

Propiedad I. Sea $\{S_i\}_{i=1}^n$ una colección de variables aleatorias *Poisson compuestas*, tales

que $N_i \sim Poisson(\lambda_i)$, con $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Entonces:

$$S = \sum_{i=1}^n S_i \sim PC(\lambda)^{26}$$

El método de aproximación normal se basa en el siguiente teorema:

²⁶ Esto quiere decir que S es una variable *Poisson compuesta* y que el respectivo parámetro de la distribución *Poisson* que involucra es λ .

Teorema 3. Sea $\{S_i\}_{i=1}^n$ una colección de variables aleatorias *Poisson compuestas*, tales que $N_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, con $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Entonces:

$$\frac{\sum_{i=1}^n S_i - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}} \sim N(0,1)$$

cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Para el caso en que el número de posibles reclamaciones tiene una distribución Binomial Negativa, el teorema queda de la siguiente forma:

$$\frac{\sum_{i=1}^n S_i - \frac{rq}{p}\mu}{\sqrt{\frac{rq}{p}\mu_2 + \frac{rq^2}{p^2}\mu}} \sim N(0,1)$$

cuando $r \rightarrow \infty$.

La manera en que se aplica el método de aproximación normal se especificará mediante un ejemplo, el cual se expondrá en la sección 3.6 y se comparará con el método que se expone en la siguiente sección.

3.5 Método alternativo de discretización selectiva de reclamos individuales aplicado al Teorema de Panjer

En esta sección se expondrá un método alternativo que permitirá aproximar la distribución de S de manera recursiva, lo cual brinda grandes facilidades de cálculo. Además, este método permite extender el conjunto de los posibles reclamos individuales a un conjunto infinito; en primer lugar se introducirá el teorema de Panjer y se establecerán las distribuciones del número de reclamos compatibles con él. Posteriormente se expondrá la manera en que se aplica el **método alternativo de discretización selectiva de reclamos individuales**, y finalmente se ejemplificará su uso con una serie de datos.

Teorema 4. (Fórmula de recursividad de Panjer). Sea S una variable aleatoria de la forma $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, la cual verifica:

$$(6) \quad P[N = n] = \left(a + \frac{b}{n}\right) P[N = n - 1]$$

para algunos $a, b \in R$ y para toda $n \in N$, y además tal que $\text{Im}(X_i) \subseteq N$ ²⁷. Entonces:

²⁷ Esto quiere decir que los posibles reclamos individuales pueden ser cualquier número natural

$$f_s(s) = \begin{cases} P[N = 0] & \text{si } s = 0 \\ \sum_{h=1}^s \left(\frac{a + bh}{s} \right) f_{X_i}(h) f_s(s-h) & \text{si } s \geq 1 \end{cases}$$

Se puede demostrar que tres distribuciones que satisfacen **(6)**, son la $Poisson(\lambda)$, la $BinNeg(r, p)$ y la $Bin(k, p)$. En estos casos los valores de las constantes a y b están dados de la siguiente manera:

Tabla 3.6

Si $N \sim Poisson(\lambda)$	$a = 0$ $b = \lambda$
Si $N \sim BinNeg(r, p)$	$a = (1 - p)$ $b = (1 - p)(r - 1)$
Si $N \sim Bin(k, p)$	$a = \frac{-p}{(1 - p)}$ $b = \frac{p(k + 1)}{(1 - p)}$

Ahora bien, a grandes rasgos el **método alternativo de discretización selectiva de reclamos individuales aplicado al Teorema de Panjer** consiste en estudiar la distribución de los reclamos individuales a partir de una muestra aleatoria tomada de la experiencia estadística del asegurador, de tal forma que se le pueda asignar una distribución conocida mediante la **prueba ji-cuadrada**. Una vez hecho esto se procede a hacer un análisis por intervalo; es decir, se propone una colección de clases que contengan a la totalidad de la muestra aleatoria y se propone una “distribución” **por cada una de las clases**, de tal forma que se obtenga una mejor aproximación al comportamiento por intervalos de los reclamos individuales. Finalmente se determina, por cada intervalo, un subconjunto de montos enteros los cuales presenten cierta **representatividad** con respecto a la “distribución” por intervalos, y se procede a aproximar $F_S(s)$ con el Teorema de Panjer, utilizando un proceso de discretización que **tenga como base a dichos montos representativos**.

A continuación se establecerá de manera formal el método:

Paso 1: Redondear los montos de la muestra aleatoria de reclamos individuales y **ajustar una distribución a dicha muestra**.

Paso 2: Proponer una colección de clases $\{C_j\}_{j=1}^n$, que sean mutuamente excluyentes y tales que la muestra aleatoria de montos de reclamación individuales este contenida en

$$\bigcup_{j=1}^n C_j.$$

Paso 3: Hacer un análisis cualitativo del comportamiento y concentración de los montos de reclamación individuales en cada una de las C_j 's.

Paso 4: Según el análisis del **Paso 3**, ajustar o en su defecto proponer cualitativamente una nueva distribución a los montos de reclamación individuales **en cada** C_j , y elegir como **montos enteros representativos** cantidades relacionadas con las medidas de tendencia central²⁸ de las distribuciones obtenidas en cada C_j . Cabe señalar que el número de montos enteros representativos que se elijan, dependerá del comportamiento de la distribución de montos individuales en cada C_j y no tiene restricción alguna.

Paso 5: Con la distribución obtenida en el **Paso 1**, para X_i , proceder a asignar probabilidades a los **montos enteros representativos** de la siguiente manera. Si $G = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ representa el conjunto de montos enteros representativos ordenados, asignar:

$$(7) \quad \tilde{p}(k_l) = P[a_l < X_i \leq b_l] \quad ^{29}$$

Es importante señalar que la elección de a_l y b_l puede realizarse de una **manera totalmente arbitraria**, con la única condición de que los intervalos resultantes de la forma $(a_l; b_l]$, contengan únicamente a un monto entero representativo, es decir k_l , y que sean disjuntos dos a dos. Por ejemplo, dicha elección puede realizarse tomando $a_l = k_{l-1}$ y $b_l = k_l$, en cuyo caso el monto entero representativo quedaría en el **extremo derecho del intervalo**, o bien eligiendo a_l y b_l de tal forma que k_l sea el punto medio del intervalo $(a_l; b_l]$. A esta última forma de elección se le denomina **método del punto medio**.

Paso 6: Se aplica el **Teorema 4** sustituyendo a la función $f_{X_i}(h)$, por la función:

$$\tilde{f}_{X_i}(h) = \begin{cases} \tilde{p}(h) & \text{si } h \in G \\ 0 & \text{si } h \notin G \end{cases}$$

A continuación se establecerá un ejemplo para precisar el uso del método expuesto:

²⁸ Las medidas de tendencia central más comunes son la media y la varianza, por lo cual como montos representativos pueden elegirse, por ejemplo, a μ_{C_j} , $\mu_{C_j} - \sigma_{C_j}$ y $\mu_{C_j} + \sigma_{C_j}$.

²⁹ Una condición importante que debe cumplir esta asignación de probabilidades, es que se debe verificar que

$$\sum_{l=1}^m \tilde{p}(k_l) = 1.$$

Ejemplo 3. Se tiene un portafolio S que puede tener una cantidad ilimitada de reclamaciones. A continuación se enlista una **muestra aleatoria** sobre la frecuencia en los reclamos individuales que recibió el asegurador el año pasado:

Tabla 3.7

Número de siniestros	Número de pólizas
0	13
1	27
2	28
3	17
4	11
5	1
6	2
7	1
8	0

Además, se cuenta con la siguiente tabla, la cual representa una muestra aleatoria sobre los posibles montos de reclamación individuales en pesos:

Tabla 3.8

263.74	2,756.82	4,790.63	6,864.70	9,862.73
342.70	2,769.66	4,852.10	6,886.09	
449.76	2,773.35	4,966.34	7,305.23	
523.13	2,832.54	4,987.58	7,828.55	
545.02	2,908.69	5,213.97	8,005.49	
614.05	3,038.23	5,339.48	8,443.37	
665.50	3,122.36	5,389.34	8,524.78	
867.96	3,823.50	6,200.45	8,602.30	
977.15	3,979.43	6,310.60	8,740.52	
1,185.05	4,120.46	6,368.16	9,222.49	
1,194.22	4,162.97	6,435.48	9,239.29	
1,556.05	4,169.92	6,596.50	9,253.58	
1,676.72	4,309.96	6,661.56	9,279.31	
2,343.21	4,543.28	6,681.65	9,478.73	
2,624.07	4,631.96	6,757.41	9,651.84	

A continuación se aproximará la distribución de S utilizando el **método alternativo de discretización selectiva de reclamos individuales** expuesto:

En primer lugar, cabe señalar que según el **Ejemplo 5 del Capítulo 1**, la frecuencia o número de reclamos tiene distribución Poisson con parámetro 2.02, es decir $N \sim Poisson(2.02)$.

Paso 1: Los montos originales y su correspondiente expresión redondeada se enlista en la siguiente tabla:

Tabla 3.9

Montos originales	Montos redondeados	Montos originales	Montos redondeados	Montos originales	Montos redondeados
263.74	263	3,122.36	3,122	6,681.65	6,681
342.70	342	3,823.50	3,823	6,757.41	6,757
449.76	449	3,979.43	3,979	6,864.70	6,864
523.13	523	4,120.46	4,120	6,886.09	6,886
545.02	545	4,162.97	4,162	7,305.23	7,305
614.05	614	4,169.92	4,169	7,828.55	7,828
665.50	665	4,309.96	4,309	8,005.49	8,005
867.96	867	4,543.28	4,543	8,443.37	8,443
977.153	977	4,631.96	4,631	8,524.78	8,524
1,185.05	1,185	4,790.63	4,790	8,602.30	8,602
1,194.22	1,194	4,852.10	4,852	8,740.52	8,740
1,556.05	1,556	4,966.34	4,966	9,222.49	9,222
1,676.72	1,676	4,987.58	4,987	9,239.29	9,239
2,343.21	2,343	5,213.97	5,213	9,253.58	9,253
2,624.07	2,624	5,339.48	5,339	9,279.31	9,279
2,628.79	2,628	5,389.34	5,389	9,478.73	9,478
2,756.82	2,756	6,200.45	6,200	9,651.84	9,651
2,769.66	2,769	6,310.60	6,310	9,862.73	9,862
2,773.35	2,773	6,368.16	6,368		
2,832.54	2,832	6,435.48	6,435		
2,908.69	2,908	6,596.50	6,596		

A partir de los datos redondeados se obtienen los siguientes valores:

$$\bar{X} = 4,792.09$$

$$S^2 = 8,480,087.2$$

Ahora bien a continuación debe ajustarse una distribución a los montos de los reclamos individuales; en este sentido se realizará una prueba de bondad de ajuste para probar normalidad³⁰, es decir, con las hipótesis:

$$H_0 : X_i \sim N(4,792.09;8,480,087.2) \text{ vs. } H_a : X_i \not\sim N(4,792.09;8,480,087.2).$$

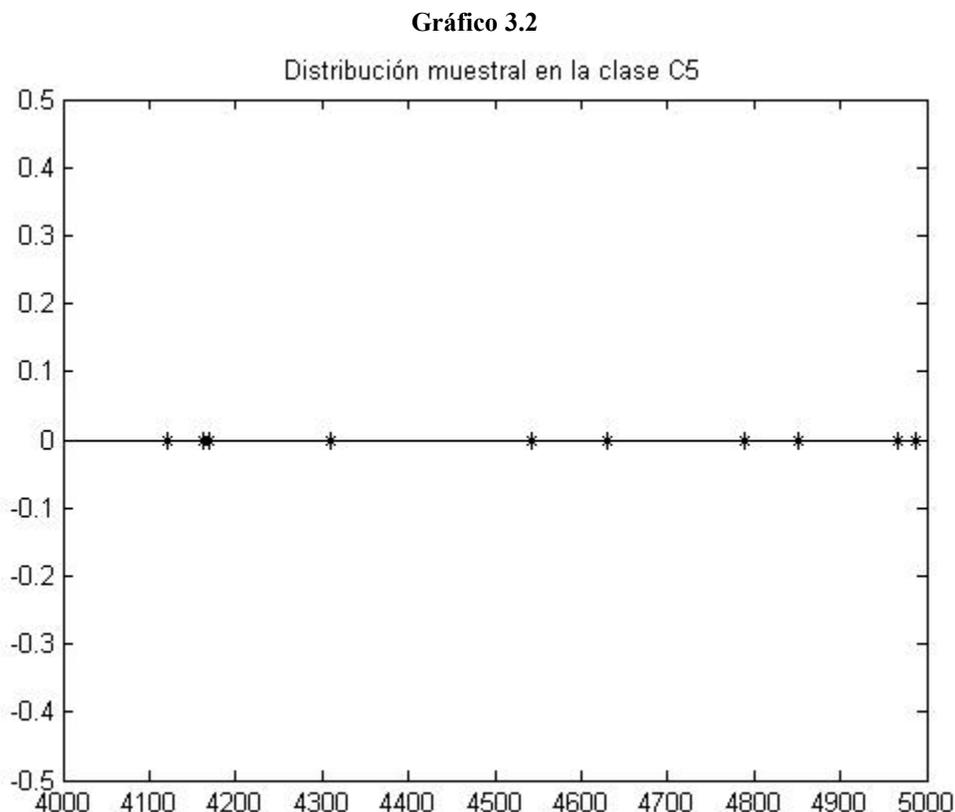
Si se dividen los datos en 10 clases y se realiza una **prueba ji-cuadrada**, se tiene que $\chi^2_{est} = 12.7587874 < 14.1 = \chi^2_{(9-2)}$, y por lo tanto se concluye que:

$$X_i \sim N(4,792.09;8,480,087.2)$$

³⁰ Cabe señalar que la selección de la distribución propuesta para la prueba de bondad de ajuste, puede fundamentarse en gráficas, observaciones de tendencia o incluso en el ensayo y error, como es el caso.

Paso 2: Los datos de la **Tabla 3.9** se dividirán de mil en mil³¹, y puesto se ha ajustado una distribución normal, la primera y la última clases se extenderán hasta $-\infty$ y ∞ respectivamente. Por lo tanto, se tiene la siguiente colección de clases mutuamente excluyentes: $C_1 = (-\infty; 1,000]$, $C_2 = (1,000; 2,000]$, $C_3 = (2,000; 3,000]$, $C_4 = (3,000; 4,000]$, $C_5 = (4,000; 5,000]$, $C_6 = (5,000; 6,000]$, $C_7 = (6,000; 7,000]$, $C_8 = (7,000; 8,000]$, $C_9 = (8,000; 9,000]$ y $C_{10} = (9,000; \infty)$.

Paso 3: Ahora bien, si se realiza un análisis cualitativo de la concentración de las observaciones en **cada una de las C_j 's**, se puede observar que en cada una de dichas clases los montos no tienen una tendencia hacia una zona particular del intervalo, sino que empíricamente se observa una uniformidad en su acomodo; a continuación se muestra gráficamente dicho acomodo en la clase C_5 :

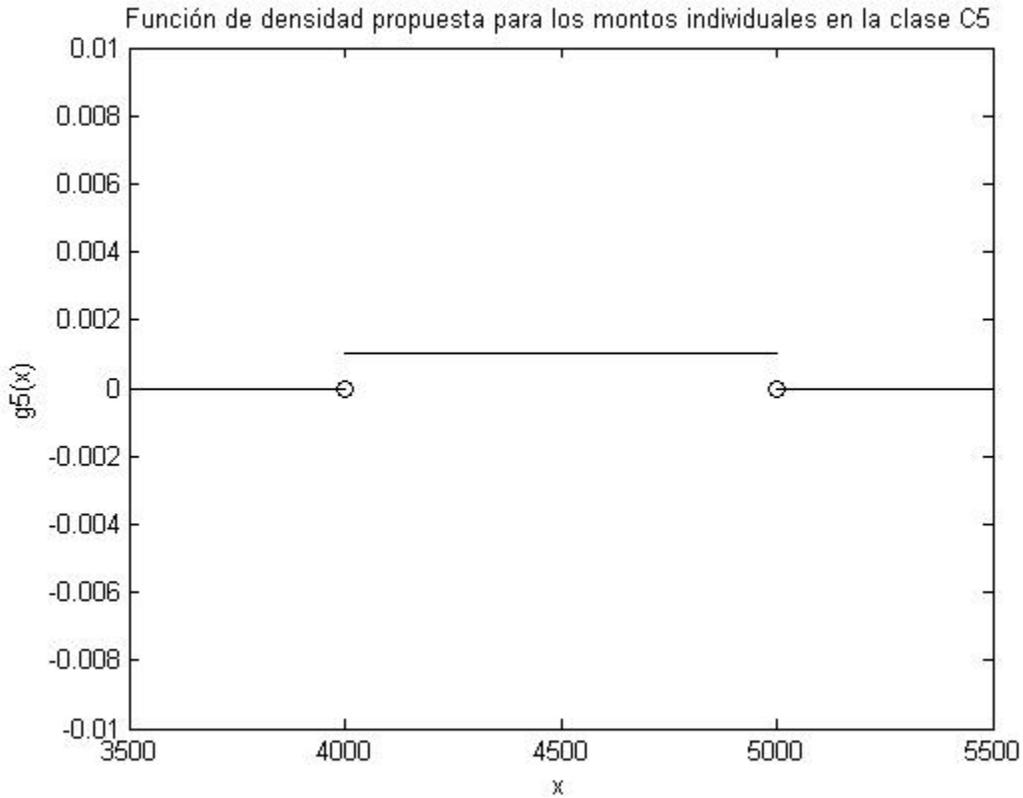


Paso 4: Con base en el **Paso 3** se propone una **distribución uniforme continua** en cada uno de los intervalos y por lo tanto el conjunto de **montos enteros representativos** se seleccionará utilizando las características de la distribución uniforme continua en cada C_j . Es importante señalar que las clases C_1 y C_{10} no son acotadas; no obstante, debido a que los montos son todos no negativos y no exceden el valor de 10,000 las distribuciones

³¹ Según la precisión que se desee tener en el análisis, los datos podrían ser divididos en clases más pequeñas.

uniformes continuas de las clases C_1 y C_{10} , se asumirán en los intervalos $(0;1,000]$ y $(9000;10,000)$.

Gráfico 3.3



En este caso particular, únicamente se seleccionará un monto entero representativo por cada clase³². Utilizando las características de la distribución uniforme continua se seleccionarán los **montos enteros representativos** de la siguiente manera:

Tabla 3.10

Montos enteros representativos
$k_1 = \mu_{C_1} = 500$
$k_2 = \mu_{C_2} = 1,500$
$k_3 = \mu_{C_3} = 2,500$
$k_4 = \mu_{C_4} = 3,500$
$k_5 = \mu_{C_5} = 4,500$
$k_6 = \mu_{C_6} = 5,500$

³² Si se deseará tener más precisión en la aproximación, podrían elegirse más de un monto entero representativo en cada clase.

$k_7 = \mu_{C_7} = 6,500$
$k_8 = \mu_{C_8} = 7,500$
$k_9 = \mu_{C_9} = 8,500$
$k_{10} = \mu_{C_{10}} = 9,500$

Paso 5: En este ejemplo particular la asignación de probabilidades se hará utilizando el **método del punto medio**³³, es decir, si k_l es el l -ésimo entero representativo, entonces se tomará a a_l como el extremo izquierdo del intervalo C_l , y a b_l como el extremo derecho de C_l .

Haciendo esta aclaración y utilizando (7) se tienen los siguientes resultados:

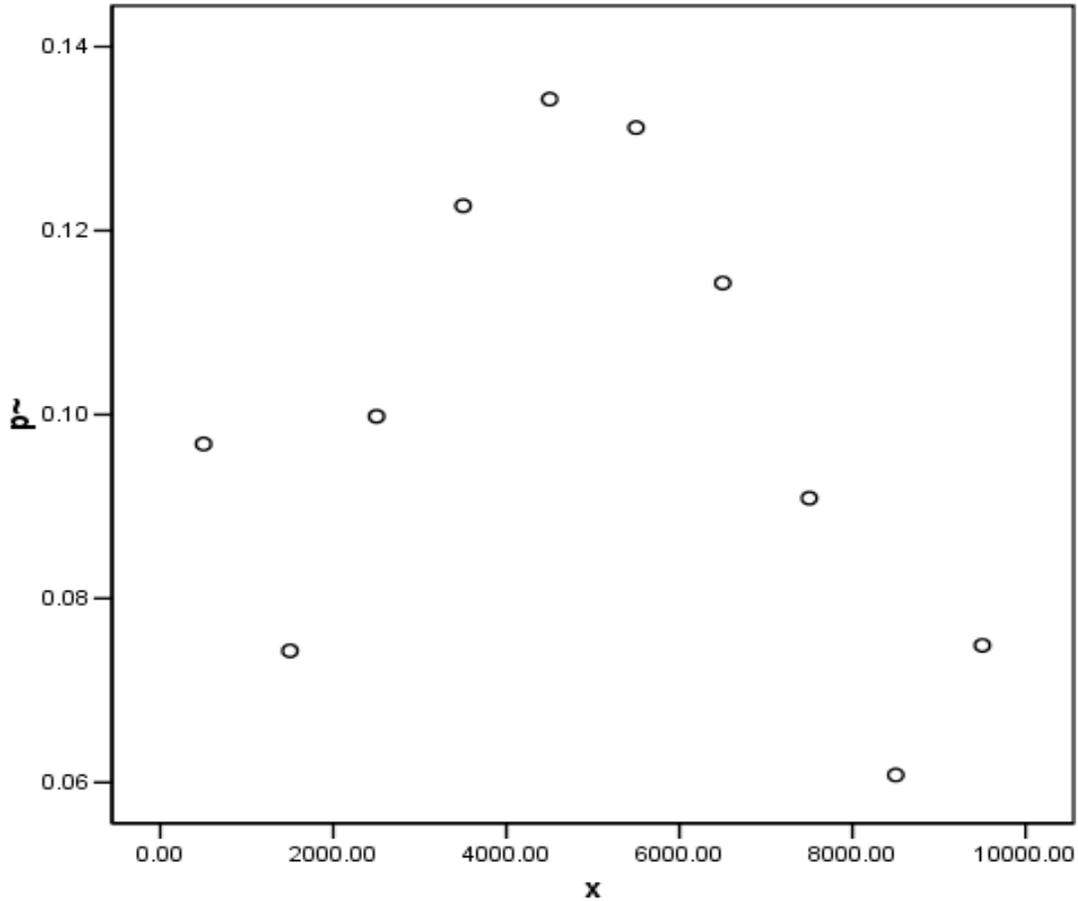
Tabla 3.11

$\tilde{p}(k_1) = P[X_i < 1,000] = \phi\left(\frac{1,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) = 0.0968$
$\tilde{p}(k_2) = P[1,000 < X_i \leq 2,000] = \phi\left(\frac{2,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) - \phi\left(\frac{1,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) = 0.0743$
$\tilde{p}(k_3) = P[2,000 < X_i \leq 3,000] = \phi\left(\frac{3,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) - \phi\left(\frac{2,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) = 0.0998$
$\tilde{p}(k_4) = P[3,000 < X_i \leq 4,000] = \phi\left(\frac{4,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) - \phi\left(\frac{3,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) = 0.1227$
$\tilde{p}(k_5) = P[4,000 < X_i \leq 5,000] = \phi\left(\frac{5,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) - \phi\left(\frac{4,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) = 0.1343$
$\tilde{p}(k_6) = P[5,000 < X_i \leq 6,000] = \phi\left(\frac{6,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) - \phi\left(\frac{5,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) = 0.1312$
$\tilde{p}(k_7) = P[6,000 < X_i \leq 7,000] = \phi\left(\frac{7,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) - \phi\left(\frac{6,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) = 0.1143$
$\tilde{p}(k_8) = P[7,000 < X_i \leq 8,000] = \phi\left(\frac{8,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) - \phi\left(\frac{7,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) = 0.0909$
$\tilde{p}(k_9) = P[8,000 < X_i \leq 9,000] = \phi\left(\frac{9,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) - \phi\left(\frac{8,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) = 0.0608$
$\tilde{p}(k_{10}) = P[X_i > 9,000] = 1 - \phi\left(\frac{9,000 - 4,792.09}{2,912.05}\right) = 0.0749$

Gráficamente:

³³ Cabe señalar que cuando el número de montos enteros representativos es grande, resulta muy laborioso utilizar el método del punto medio. En estos caso se recomienda utilizar el método del extremo derecho.

Gráfica 3.4
Densidad de los montos enteros representativos



Paso 6: A continuación se aplicará el **Teorema 4** utilizando $\tilde{f}_{X_i}(h)$, no sin antes aclarar que según las observaciones hechas al mismo y debido a que en este ejemplo particular $N \sim Poisson(2.02)$, la fórmula recursiva queda de la siguiente manera:

$$f_s(s) = \frac{2.02}{s} \left(\sum_{h=1}^s h \tilde{f}_{X_i}(h) f_s(s-h) \right)$$

Por ejemplo, si $s = 500$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f_s(500) &= \frac{2.02}{500} \left(\sum_{h=1}^{500} h \tilde{f}_{X_i}(h) f_s(500-h) \right) = \frac{2.02}{500} \left(\sum_{h=1}^{500} h \tilde{f}_{X_i}(h) f_s(500-h) \right) \\ &= \frac{2.02}{500} (0 + 500 * 0.0968 * f_s(0)) \\ &= 0.00404 * 500 * 0.0968 * P[N = 0] \\ &= 0.02593892 \end{aligned}$$

Los cálculos para el rango de 0 a 40,000 se resumen en la siguiente tabla:

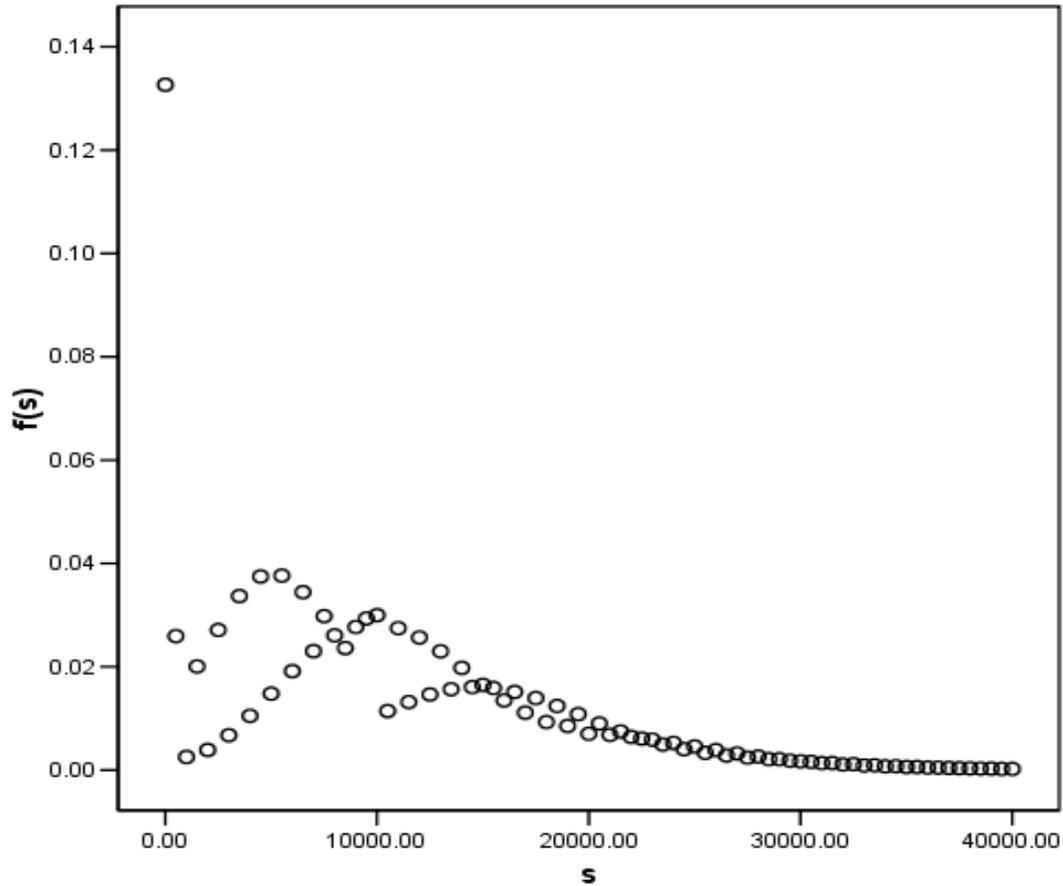
Tabla 3.12

s	$\frac{2.02}{s}$	$\sum_{h=1}^s h \tilde{f}_{X_i}(h) f_s(s-h)$	$f_s(s)$	$F_s(s)$
0		0.13265547	0.13265547	0.132655465
500	0.00404	6.42052451	0.02593892	0.158594384
1,000	0.00202	1.25544368	0.002536	0.16113038
1,500	0.00134667	14.9071938	0.02007502	0.181205401
2,000	0.00101	3.86252354	0.00390115	0.18510655
2,500	0.000808	33.5689909	0.02712374	0.212230295
3,000	0.00067333	10.0219106	0.00674809	0.218978381
3,500	0.00057714	58.363011	0.03368379	0.252662176
4,000	0.000505	20.8014235	0.01050472	0.263166895
4,500	0.00044889	83.4932532	0.03747919	0.300646089
5,000	0.000404	36.6328297	0.01479966	0.315445752
5,500	0.00036727	102.502863	0.03764651	0.353092258
6,000	0.00033667	56.9014089	0.01915681	0.372249066
6,500	0.00031077	110.839517	0.03444551	0.406694577
7,000	0.00028857	79.8291205	0.0230364	0.429730981
7,500	0.00026933	110.669012	0.02980685	0.459537835
8,000	0.0002525	103.297737	0.02608268	0.485620513
8,500	0.00023765	99.366712	0.02361421	0.50923472
9,000	0.00022444	123.426091	0.0277023	0.53693702
9,500	0.00021263	138.121259	0.02936894	0.566305962
10,000	0.000202	148.427944	0.02998244	0.596288407
10,500	0.00019238	59.4216278	0.01143159	0.607719996
11,000	0.00018364	149.612646	0.02747432	0.635194318
11,500	0.00017565	74.9501091	0.01316515	0.648359468
12,000	0.00016833	152.478167	0.02566716	0.674026626
12,500	0.0001616	90.6204723	0.01464427	0.688670894
13,000	0.00015538	148.014334	0.02299915	0.711670045
13,500	0.00014963	104.565862	0.01564615	0.727316196
14,000	0.00014429	137.124774	0.01978515	0.747101342
14,500	0.00013931	115.347663	0.01606912	0.763170464
15,000	0.00013467	122.384146	0.01648107	0.779651529
15,500	0.00013032	121.902756	0.01588668	0.795538211
16,000	0.00012625	106.790434	0.01348229	0.809020504
16,500	0.00012242	123.672736	0.01514054	0.824161045
17,000	0.00011882	93.5103583	0.01111123	0.835272275
17,500	0.00011543	120.798358	0.01394358	0.849215857
18,000	0.00011222	82.8050418	0.00929257	0.858508423
18,500	0.00010919	113.689606	0.01241368	0.870922099
19,000	0.00010632	80.4171872	0.00854962	0.879471716

19,500	0.00010359	104.631154	0.01083871	0.89031043
20,000	0.000101	69.6316568	0.0070328	0.897343227
20,500	9.8537E-05	91.6174015	0.00902767	0.906370893
21,000	9.619E-05	70.885351	0.0068185	0.913189389
21,500	9.3953E-05	79.5640944	0.00747532	0.920664713
22,000	9.1818E-05	70.0196642	0.00642908	0.927093791
22,500	8.9778E-05	67.9738749	0.00610254	0.933196335
23,000	8.7826E-05	67.116422	0.00589457	0.939090908
23,500	8.5957E-05	57.6379207	0.00495441	0.944045316
24,000	8.4167E-05	62.4957013	0.00526005	0.949305371
24,500	8.2449E-05	49.0372131	0.00404307	0.953348439
25,000	0.0000808	56.6153795	0.00457452	0.957922962
25,500	7.9216E-05	42.2576817	0.00334747	0.961270433
26,000	7.7692E-05	49.9964971	0.00388434	0.965154776
26,500	7.6226E-05	37.1095929	0.00282873	0.967983508
27,000	7.4815E-05	43.1620099	0.00322916	0.971212665
27,500	7.3455E-05	33.0820612	0.00243003	0.973642693
28,000	7.2143E-05	36.5449593	0.00263646	0.976279151
28,500	7.0877E-05	29.996627	0.00212608	0.978405228
29,000	6.9655E-05	30.54357	0.00212752	0.980532745
29,500	6.8475E-05	26.7212619	0.00182973	0.982362472
30,000	6.7333E-05	25.2152929	0.00169783	0.984060302
30,500	6.623E-05	24.1131542	0.001597	0.985657304
31,000	6.5161E-05	20.8346554	0.00135761	0.987014917
31,500	6.4127E-05	21.2780674	0.0013645	0.988379416
32,000	6.3125E-05	17.2694565	0.00109013	0.98946955
32,500	6.2154E-05	18.3820762	0.00114252	0.990612067
33,000	6.1212E-05	14.4285134	0.0008832	0.991495267
33,500	6.0299E-05	15.5744921	0.00093912	0.992434385
34,000	5.9412E-05	12.1797293	0.00072362	0.993158005
34,500	5.8551E-05	12.9724362	0.00075955	0.99391755
35,000	5.7714E-05	10.3779695	0.00059896	0.994516507
35,500	5.6901E-05	10.6545583	0.00060626	0.995122767
36,000	5.6111E-05	8.89346025	0.00049902	0.995621789
36,500	5.5342E-05	8.66128227	0.00047934	0.996101125
37,000	5.4595E-05	7.62043261	0.00041603	0.99651716
37,500	5.3867E-05	6.99795967	0.00037696	0.996894116
38,000	5.3158E-05	6.50203495	0.00034563	0.997239751
38,500	5.2468E-05	5.64620181	0.00029624	0.997535993
39,000	5.1795E-05	5.47935454	0.0002838	0.997819796
39,500	5.1139E-05	4.56358359	0.00023338	0.998053174
40,000	0.0000505	4.57684319	0.00023113	0.998284304

En el siguiente gráfico se esboza la aproximación a la función de densidad de S :

Gráfico 3.5
Aproximación a la densidad de S



Cabe señalar que la cuarta y quinta columnas pueden continuar indefinidamente, ya que puesto que el número de posibles reclamos no tiene límite, tampoco la suma agregada de los reclamos lo tiene. Ahora bien es importante señalar que $f_s(s)$ no representa exactamente $P[S = s]$, sino una aproximación por intervalos. Por ejemplo, si $s = 1,000$, $f_s(s)$ representa $P[500 < S \leq 1,000]$. Si se calcula $E[S]$ a partir de la cuarta columna de la tabla se obtiene que:

$$(*) \quad E[S] = 9,654.94$$

Mientras que si se obtiene con la fórmula (1), se tiene que:

$$E[S] = 9,680.02$$

Finalmente se calculará la **prima de riesgo recargada** ($P.R.$), para cubrir al 0.953348439 de confianza las desviaciones en la siniestralidad de la cartera S . Utilizando la ecuación (3) del **Capítulo 2** y la quinta columna de la última tabla se tiene que:

$$P[S \leq (1 + \theta)E[S]] = 0.953348439 \Leftrightarrow (1 + \theta)E[S] = 24,500$$

Lo cual utilizando (*), implica que:

$$\theta = \frac{24,500}{9,654.94693} - 1 = 1.537559$$

Por lo tanto la prima de riesgo recargada es:

$$P.R. = (1 + \theta)E[S] = (1 + 1.537559) * 9,654.94693 = 24,499.997476$$

3.6 Comparaciones entre los métodos de discretización selectiva de reclamos individuales, convoluciones y de aproximación normal.

En esta sección, en primer lugar, se examinará el **Ejemplo 3** utilizando el **método de aproximación normal** y se compararán los resultados con los obtenidos en dicho ejemplo. Finalmente se hará un balance entre cada uno de estos tres métodos.

Ejemplo 4. Con los datos del **Ejemplo 3**, se calculará la prima de riesgo recargada para cubrir al 0.953348439 de confianza las desviaciones en la siniestralidad de la cartera S , utilizando el método de aproximación normal.

Tomando $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 2.02$, $\mu = 4,792.09$, y puesto que:

$$\mu_2 = \mu^2 + \sigma^2 = (4,792.09)^2 + 8,480,087.2 = 31,444,213.7681$$

Se tiene que:

$$\frac{S - 9,680.0218}{\sqrt{63,517,311.8115}} \sim N(0,1)$$

Ahora bien si se requiere que:

$$P\left[\frac{S - 9,680.0218}{\sqrt{63,517,311.8115}} \leq \frac{(1 + \theta)E[S] - 9,680.0218}{\sqrt{63,517,311.8115}}\right] = 0.953348439$$

Entonces:

$$\begin{aligned} c_{0.95} &= \frac{(1 + \theta)E[S] - 9,680.0218}{\sqrt{63,517,311.8115}} \Rightarrow 1.65 = \frac{(1 + \theta)9,680.0218 - 9,680.0218}{\sqrt{63,517,311.8115}} \\ &\Rightarrow \theta = \frac{1.65\sqrt{63,517,311.8115}}{9,680.0218} = 1.358481 \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$P.R. = (1 + \theta)E[S] = (1 + 1.358481) * 9,654.94693 = 22,771.00889$$

Es claro que la prima de riesgo recargada obtenida a través del **Ejemplo 4**, es más pequeña que la obtenida por el **método alternativo de discretización selectiva de reclamos individuales**. No obstante, la prima obtenida en el **Ejemplo 3** toma como base las distribuciones reales de N y X_i y por lo tanto, aunque más grande, concuerda más precisamente con el comportamiento real de la cartera S , mientras que la obtenida en el **Ejemplo 4**, al asumir que S tiene distribución normal sin analizar la información estadística podría arrojar fallos.

Finalmente, se establecerá que debido a que el **método de convoluciones** presenta muchas restricciones en cuanto al rango de los posibles reclamos individuales y que el **método de aproximación normal** asume una distribución para S , la cual **no necesariamente coincide** con el comportamiento real de los datos, el mejor método para aproximar la distribución de S es el **método alternativo de discretización selectiva de reclamos individuales**, ya que no presenta restricción alguna sobre el rango de los posibles reclamos individuales, y además sus resultados se basan en la distribución real de N y X_i .

CAPÍTULO 4: APROXIMACIONES AL COEFICIENTE DE AJUSTE MEDIANTE POLINOMIOS DE TAYLOR Y EL MÉTODO DE NEWTON-RHAPSON, EN EL MODELO EN TIEMPO DISCRETO.

En este capítulo se expondrán los fundamentos y las herramientas que se utilizan en la evaluación de la viabilidad de los seguros de daños, a lo largo del tiempo. Estas herramientas son muy útiles para analizar el impacto financiero que generan las carteras en el tiempo. En primer lugar se expondrá el modelo en tiempo discreto para la evaluación de las mismas. Se hará una propuesta, utilizando como fundamento a los polinomios de Taylor y al método de Newton-Rhapson, para aproximar con tanta precisión como se desee la cota de Lundberg. Finalmente, se expondrá el modelo en tiempo continuo y se compararán los resultados obtenidos a través los dos métodos.

4.1 Modelación del comportamiento de carteras de seguro a lo largo del tiempo como un proceso de riesgo

A continuación se introducirá una definición la cual permitirá estudiar la viabilidad de una cartera o línea de negocio a lo largo del tiempo.

Definición. (Proceso de riesgo). El proceso de riesgo, también conocido como proceso de excedentes, es una función que a cada valor de t , donde t representa un momento específico del tiempo, le asocia una variable aleatoria dada por:

$$R(t) = u + c(t) - S(t)$$

donde:

$R(t)$: El capital neto con el que se cuenta al tiempo t , debido a los movimientos de una línea de negocio o cartera específica.

u : Capital inicial con el que se cuenta en dicha cartera.

$c(t)$: Monto que por concepto de cobro de primas de dicha cartera, se tiene al tiempo t .

$S(t)$: Monto acumulado que por concepto de reclamos se ha cubierto hasta el tiempo t .

A partir de esta definición puede observarse que $R(0) = u$. Es necesario señalar que el **proceso de riesgo**, es en realidad un proceso estocástico³⁴. No obstante debido a su naturaleza práctica, este texto no hará énfasis en este aspecto de $R(t)$, sino que se limitará a enunciar las propiedades requeridas para el desarrollo de este capítulo.

Ahora bien, cabe mencionar que la definición arriba expuesta puede modelar casi la totalidad de los problemas de análisis de carteras a lo largo del tiempo, debido a que no impone ninguna restricción sobre los posibles valores de t , ni sobre la frecuencia o forma con que se obtienen las primas a lo largo del tiempo. Es decir, la evaluación de $R(t)$, no necesariamente debe hacerse al final de un mes o año, sino que puede hacerse en cualquier

³⁴ La definición y propiedades de los procesos estocásticos se estudian en Rincón, Luis. *Introducción a los procesos estocásticos*. Este material se puede consultar en <http://www.matematicas.unam.mx/lars>.

instante del año o del mes. También debe mencionarse que según esta definición, las primas no necesariamente deben ingresar al inicio de algún periodo, sino que pueden hacerlo en cualquier instante a lo largo del año.

No obstante, una definición así de general puede generar bastantes problemas en su manejo, debido a esto el modelo expuesto en dicha definición suele simplificarse, en general, de dos formas más específicas. En las secciones subsecuentes se expondrán estas dos simplificaciones.

4.2 Modelo en tiempo discreto

Una de las dos simplificaciones más comunes del proceso de riesgo, consiste en modelar la manera en que se reciben las primas de manera **proporcional** al tiempo. Esto es $c(t) = k t$, para alguna $k \in R$. Sin embargo el punto más importante de esta primera simplificación reside en el hecho de que considera que **las reclamaciones son cubiertas al final del período en el que ocurrieron**, dicho periodo es especificado de antemano y podría ser un año o un mes. Este hecho reduce al conjunto de tiempos en los que el proceso $R(t)$ exhibe cambios aleatorios debidos a $S(t)$, a un conjunto numerable. Esta simplificación se establece de manera formal en la siguiente definición:

Definición. (Modelo en tiempo discreto). El modelo para el proceso de riesgo en tiempo discreto se define como:

$$R(n) = u + k n - S(n) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Ahora bien, si se introduce la variable aleatoria I_j la cual representa el **monto acumulado por reclamaciones durante el periodo j** , este proceso queda especificado por:

$$(1) \quad R(n) = u + k n - \sum_{j=1}^n I_j$$

Cabe señalar que de aquí en adelante se asumirá que las I_j 's son independientes e idénticamente distribuidas, además de que se asumirán como variables aleatorias con distribución compuesta.

En general el momento más importante de cualquier proceso de riesgo, es aquel t_0 del tiempo el cual tiene la propiedad de que $R(t_0) < 0$. Esto se debe a que en dicho momento la cantidad recibida por concepto de primas hasta t_0 , más el capital inicial no son suficientes para afrontar las reclamaciones hechas hasta dicho punto. A este estado del proceso se le denomina **estado de ruina**.

En este sentido y debido a la naturaleza incierta del proceso de riesgo, es fundamental conocer la probabilidad de la existencia de este tipo de puntos. De manera formal el problema se establece de la siguiente manera:

Definición. (Punto de ruina). Sea $A = \{t : R(t) < 0\}$. El punto de ruina del proceso $R(t)$, se define como el primer punto T del tiempo, tal que $R(T) < 0$. Es decir:

$$T = \begin{cases} \min A & \text{si } A \text{ es no nulo} \\ \infty & \text{si } A \text{ es nulo} \end{cases}$$

Definición. (Probabilidad de ruina). La probabilidad de ruina del proceso de riesgo $R(t)$, como función del capital inicial u , se define como:

$$\psi(u) = P[T < \infty]$$

En general el cálculo de la probabilidad de ruina de un proceso de riesgo es bastante complejo. En su lugar se enunciará un teorema para encontrar una cota superior para $\psi(u)$. En primer lugar, se introducirá la definición de **coeficiente de ajuste**, el cual se verá involucrado en el teorema.

Definición. (Coeficiente de ajuste). Sea $R(n)$ un proceso de riesgo en tiempo discreto. El coeficiente de ajuste se define como la **raíz positiva** r_0 de la ecuación:

$$(2) \quad M_{I-k}(r) = 1$$

Donde $M_{I-k}(r)$ representa la f.g.m. de la variable aleatoria $I_j - k$ para una j arbitraria. La existencia de r_0 en general no puede asegurarse, no obstante en algunos casos la primera y segunda derivada de $M_{I-k}(r)$, pueden arrojar información al respecto. A continuación se procede a enunciar el teorema:

Teorema 5. Sea $R(n) = u + k n - \sum_{j=1}^n I_j$ un proceso de riesgo en tiempo discreto, tal que

$\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ son independientes e idénticamente distribuidas. Entonces:

$$\psi(u) = P[T < \infty] \leq e^{-r_0 u}$$

donde r_0 denota el coeficiente de ajuste del proceso.

Ahora bien, en general para **cualquier proceso de riesgo** suele asociarse al incremento instantáneo ³⁵ de la función $c(t) = kt$, con el monto unitario de la prima de riesgo recargada; es decir, en general se establece la siguiente igualdad:

³⁵ Los incrementos instantáneos así como las nociones de derivada se estudian en *Spivak, Michael. Calculus, Reverte, 1992.*

$$(3) \quad \frac{d(kt)'}{dt} = k = (1 + \theta) E[S]$$

Donde θ representa el **recargo de la prima** unitaria dado un nivel de confianza previamente establecido.

Finalmente cabe señalar que en la mayoría de los casos prácticos, la ecuación (2) no tiene solución explícita, y en general ni siquiera tiene forma polinomial lo cual complica su resolución. En este sentido en la siguiente sección se introducirá un procedimiento el cual permite aproximar, con tanta precisión como se desee el coeficiente de ajuste.

4.3 Aproximaciones al coeficiente de ajuste mediante los polinomios de Taylor y el método de Newton-Rhapson

En general este método consiste en ubicar mediante evaluaciones sucesivas del polinomio de Taylor $P(r)$, construido a partir de una forma simplificada de (2), una de las raíces positivas de dicho polinomio la cual sea “cercana” al punto alrededor del cual se construyó. Una vez hecho esto, se aplica el método de Newton-Rhapson³⁶ para calcular dicha raíz, y una vez calculada se aplica nuevamente Newton-Rhapson, partiendo de la raíz obtenida, para calcular ahora la raíz de la forma simplificada de (2). A continuación se establecerá de manera formal el método:

Paso 1. Obtener una expresión simplificada de (2) a la cual se denotará por $h(r)$.

Paso 2. Calcular una aproximación polinomial de Taylor³⁷ alrededor del cero³⁸, la cual se denotará por $P(r)$, cuyo grado sea lo suficientemente grande para dar una buena aproximación de $h(r)$.

Paso 3. Realizar evaluaciones sucesivas de $P(r)$, en valores no negativos de r los cuales no deberán ser demasiado grandes, hasta encontrar dos valores $r_i < r_{i+1}$, tales que $P(r_i)$ y $P(r_{i+1})$ tengan diferente signo.

Paso 4. Utilizar el método de Newton-Rhapson con el polinomio $P(r)$, tomando como punto inicial ya sea a r_i ó a r_{i+1} , y aproximar la raíz de ese intervalo, la cual se denotará por τ , con tanta precisión como se desee.

Paso 5. Una vez encontrada τ , se aplica el método de Newton-Rhapson ahora con $h(r)$, utilizando como punto inicial a τ .

³⁶ El método de Newton-Rhapson se estudia en *Burden, Richard et al. Análisis Numérico, Grupo Editorial Iberoamericana, 1985.*

³⁷ Los detalles de los polinomios de Taylor se estudian en *Spivak, Michael. Calculus, Reverte, 1992.*

³⁸ Se construye el polinomio de Taylor alrededor del cero debido a que en la generalidad de los casos prácticos se puede observar que el coeficiente de ajuste, aunque es mayor que cero, no dista mucho de el.

Finalmente se hará una aclaración: es preciso realizar las evaluaciones sucesivas que establece el **Paso 3**, con $P(r)$ y no con $h(r)$, ya que en general $h(r)$ involucra funciones, como por ejemplo e^{ar} con valores de a grandes, las cuales son imposibles de evaluar en hojas de cálculo, incluso para valores de r cercanos a cero. A continuación se establecerá un ejemplo para precisar el uso del método expuesto:

Ejemplo 1. Suponiendo que $N \sim BinNeg(1.62, 0.94139)$ y que los reclamos individuales se comportan como en el **Ejemplo 3** del **Capítulo 3**, se aproximará con una precisión³⁹ menor que $5 * 10^{-7}$ el coeficiente de ajuste del proceso, y en seguida se obtendrá una cota superior para la probabilidad de ruina, suponiendo que se desea cubrir al 0.8 de confianza las desviaciones en la siniestralidad de I , y que se cuenta con un capital inicial de \$ 50,000.

Del **Ejemplo 3** del **Capítulo 3** se tiene que $X_i \sim N(4,792.09; 8,480,087.2)$, primeramente se calculará el valor de θ , según el **Teorema 3** del **Capítulo 3**:

$$\frac{I - \frac{1.62 * 0.05861}{0.94139} * 4,792.09}{\sqrt{\frac{1.62 * 0.05861}{0.94139} * 31,444,213.7 + \frac{1.62 * 0.00343513}{0.886215} 4,792.09}} = \frac{I - 483.328184}{1,780.865} \sim N(0,1)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P\left[\frac{I - 483.328184}{1,780.865} \leq \frac{(1 + \theta)E[S] - 483.328184}{1,780.865}\right] &= 0.8 \\ \Rightarrow \frac{(1 + \theta)E[S] - 483.328184}{1,780.865} &= 0.84 \\ \Rightarrow \theta &= \frac{0.84 * 1,780.865}{483.328184} = 3.09 \end{aligned}$$

A continuación se aplicará el método:

Paso 1. Obsérvese que:

$$M_{I-k}(r) = E[e^{r(I-k)}] = e^{-rk} E[e^{rI}] = 1 \Rightarrow M_I(r) = e^{rk}$$

Ahora bien se puede demostrar que si $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, se tiene que $M_X(r) = e^{\mu r + 1/2 \sigma^2 r^2}$, y que si $N \sim BinNeg(n; p)$, se tiene que $M_X(r) = \left(\frac{p}{1 - qe^r}\right)^n$. Haciendo las sustituciones numéricas respectivas, se tiene que:

³⁹ Esto quiere decir que, si α representa la aproximación al coeficiente de ajuste, $|h(\alpha)| < 5 * 10^{-7}$.

$$M_I(r) = M_N(\ln(M_X(r))) = \left(\frac{0.94139}{1 - 0.05861e^{\ln(e^{4.792.09r + 0.5(8480087.2r^2)})}} \right)^{1.62} = e^{(1+3.09)*483.3281r} = e^{1,976.8119r}$$

Lo cual implica:

$$\frac{0.94139}{1 - 0.05861e^{4,792.09r + 0.5(8480087.2r^2)}} = e^{1,976.8119r/1.62}$$

Es decir:

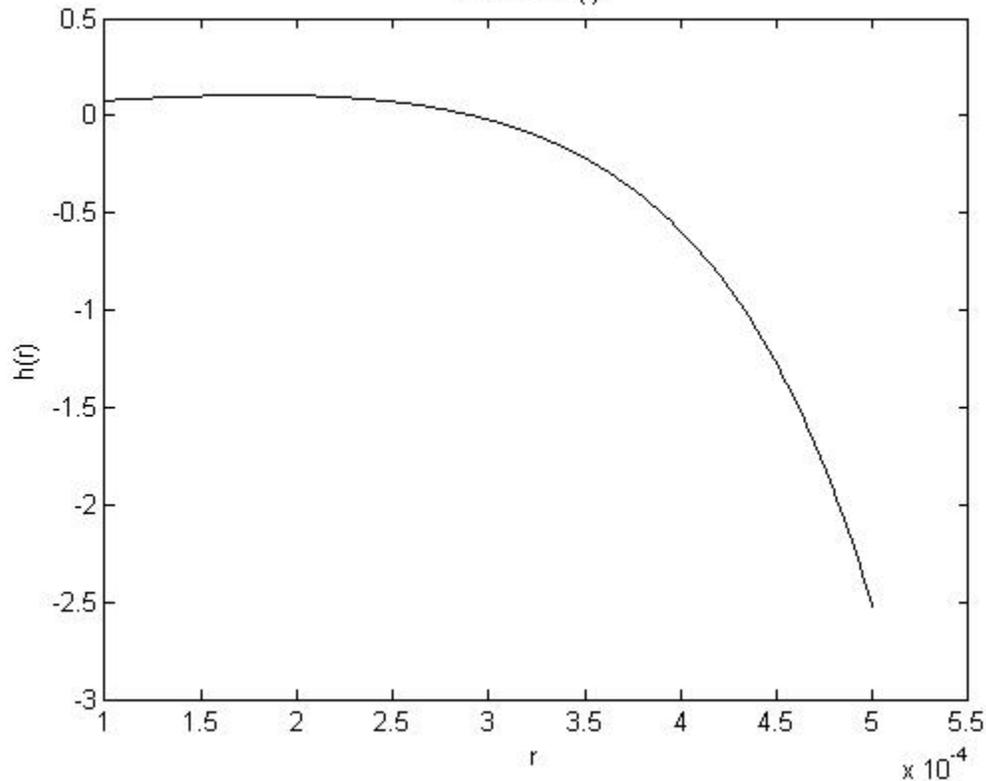
$$e^{1,220.2542r} - 0.05861e^{6,012.3442r + 4240043.6r^2} - 0.94139 = 0$$

Por lo tanto la forma simplificada de (2) está dada por:

$$h(r) = e^{1,220.2542r} - 0.05861e^{6,012.3442r + 4240043.6r^2} - 0.94139$$

Grafico 4.1

Función $h(r)$



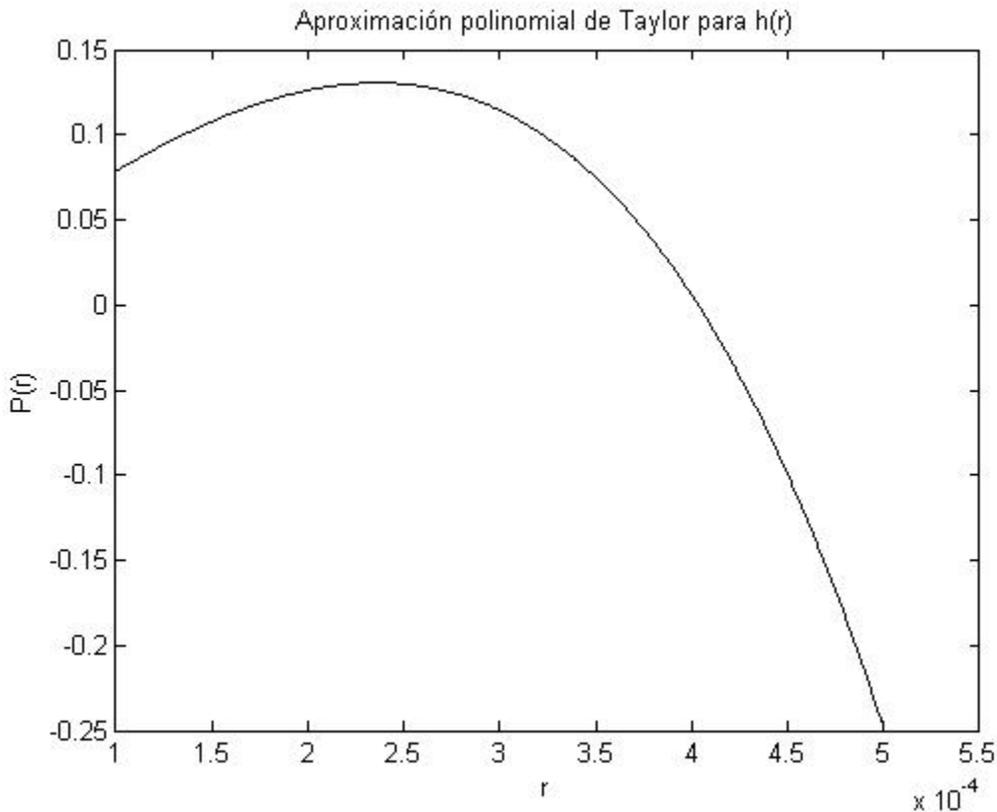
Finalmente obsérvese que $h(r)$ es una combinación de funciones exponenciales, y que en las hojas de cálculo, $h(r)$ se vuelve indefinida para valores pequeños de r .

Paso 2. A continuación se calculará el polinomio de Taylor de grado 4⁴⁰ alrededor del cero. La aproximación dada por dicho polinomio es:

$$P(r) = h(0) + \frac{h'(0) * r}{1!} + \frac{h''(0) * r^2}{2!} + \frac{h'''(0) * r^3}{3!} + \frac{h''''(0) * r^4}{4!}$$

$$= 0 + 867.87r - 563,324.22r^2 - 2,318,219,606r^3 - 4,023,269,692,357.49r^4$$

Gráfico 4.2



Paso 3. Utilizando una hoja de cálculo se realizan evaluaciones sucesivas en $P(r)$, pero a continuación únicamente se enlistan aquellas que son significativas:

Tabla 4.1

r	$P(r)$
0	0
0.00005	0.041670267
0.0001	0.078433213
0.00015	0.107644939

⁴⁰ La construcción de los polinomios de Taylor, establece que conforme el grado es más grande la precisión de la aproximación es mejor. En este ejemplo particular se tomó de grado 4, pero si se quisiera mejorar la precisión se podría tomar de cualquier grado superior a 4.

0.0002	0.126058052
0.00025	0.129821671
0.0003	0.114481426
0.00035	0.074979454
0.0004	0.005654401
0.00045	-0.099758574
0.0005	-0.248127806
0.00055	-0.446925119
0.0006	-0.704225827
0.00065	-1.028708735
0.0007	-1.429656138
0.00075	-1.916953822
0.0008	-2.501091064
0.00085	-3.19316063
0.0009	-4.004858778
0.00095	-4.948485254
0.001	-6.036943298
0.00105	-7.283739638
0.0011	-8.702984492
0.00115	-10.30939157
0.0012	-12.11827807

Paso 4. Obsérvese que entre 0.0004 y 0.00045 hay un cambio de signo, por lo tanto se toma a 0.0004 como punto inicial, y tras aplicar el método de Newton-Rhapson se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 4.2

r	$P'(r)$	$P(r)$	$p = r - \frac{P(r)}{P'(r)}$
0.0004	-1725.491812	0.005654401	0.000403277
0.000403277	-1773.012274	-7.77067E-05	0.000403233
0.000403233	-1772.372982	-1.40168E-08	0.000403233
0.000403233	-1772.372866	-1.66533E-15	0.000403233
0.000403233	-1772.372866	0	0.000403233

Ahora bien, la hoja de cálculo redondea el último valor de la primera columna, pero en realidad este valor es $r = 0.000403233143952306$ al cual se denotará por τ .

Paso 5. Una vez obtenido el valor de τ , se procede a aplicar Newton-Rhapson en $h(r)$ y se obtiene:

Tabla 4.3

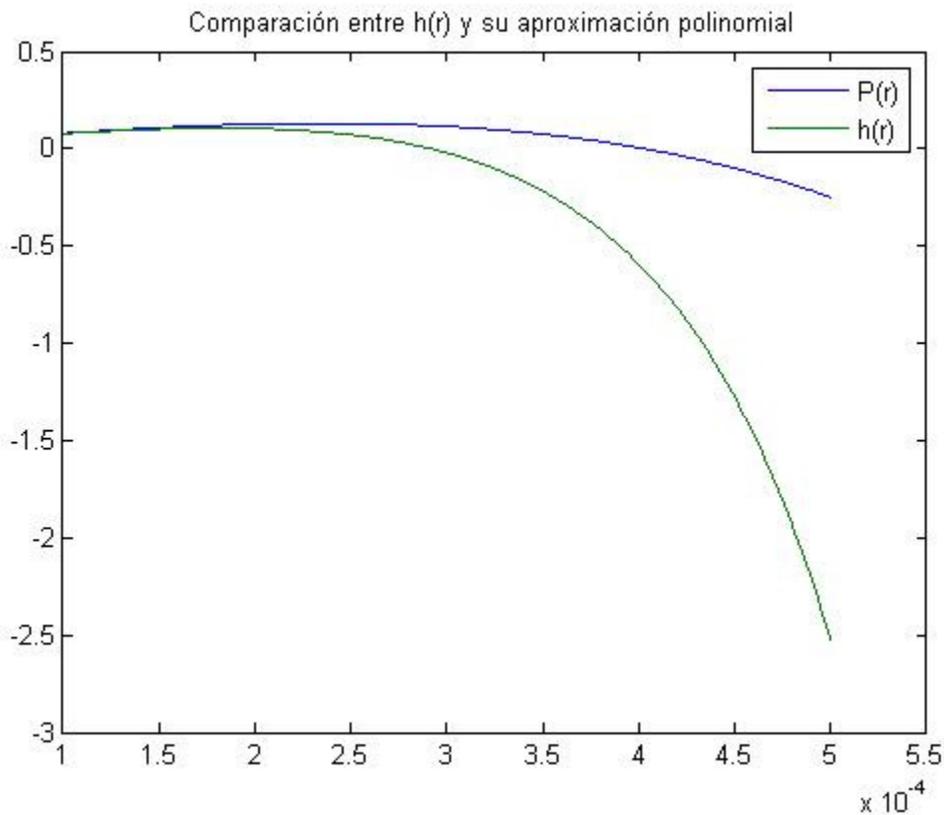
r	$h'(r)$	$h(r)$	$p = r - \frac{h(r)}{h'(r)}$
0.000403233	-10445.49907	-0.624820352	0.00034342

0.000343416	-4943.315744	-0.18266812	0.00030646
0.000306463	-2970.942352	-0.038882485	0.00029338
0.000293376	-2441.769883	-0.003544574	0.00029192
0.000291924	-2387.555818	-3.94629E-05	0.00029191
0.000291908	-2386.943409	-5.17873E-09	0.00029191
0.000291908	-2386.943329	-1.56541E-14	0.00029191
0.000291908	-2386.943329	0	0.00029191

Ahora bien, los últimos valores de la primera y tercera columnas son en realidad 0.000291907643749315 y un redondeo del verdadero valor de $h(0.000291907643749315)$, respectivamente; también es posible observar que los valores de la tercer columna están en orden decreciente y que el penúltimo valor ya satisface la condición de tener precisión menor que $5 \cdot 10^{-7}$, por lo tanto $r = 0.000291907643749315$ satisface también tener precisión menor que $5 \cdot 10^{-7}$ y se tomará la aproximación para el coeficiente de ajuste como:

$$r_0 = 0.000291907643749315$$

Gráfico 4.3



Finalmente se calculará una cota superior para la probabilidad de ruina; utilizando el **Teorema 5** se tiene:

$$\psi(u) = P[T < \infty] \leq e^{-0.000291907643749315 \cdot 50,000} = 0.000000458464860890615$$

Es decir, es casi imposible que el asegurador caiga en ruina.

4.4 Modelo en tiempo continuo

En algunas ocasiones surge la necesidad de evaluar el proceso de riesgo en algún momento, que no necesariamente es el final de un periodo establecido. Por ejemplo, en algunas ocasiones es importante examinarlo a mitad de año o en la segunda semana del mes. Para estos casos se analizará otro modelo conocido como **modelo en tiempo continuo**. A continuación se establecerá formalmente su definición:

Definición. (Modelo en tiempo continuo). Sea $k \in R$. El modelo para el proceso de riesgo en tiempo continuo se define como:

$$R(t) = u + kt - S(t) \quad \text{para } t \text{ en algún intervalo } B$$

Donde $N(t)$ es el número de reclamos hechos hasta el tiempo t y $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ el monto acumulado de la suma de los reclamos hechos hasta el tiempo t . Ahora bien, el modelo en tiempo continuo requiere asumir los siguientes supuestos:

1. Los incrementos en el número de siniestros son independientes, es decir, si los intervalos $(t_i, t_i + h)$ y $(t_j, t_j + h)$ son disjuntos, entonces las variables aleatorias $N(t_i + h) - N(t_i)$ y $N(t_j + h) - N(t_j)$ son **independientes**.
2. Los incrementos en el número de siniestros tienen una **distribución Poisson**, es decir, dados los intervalos $(t_i, t_i + h)$ y $(t_j, t_j + h)$ las variables aleatorias $N(t_i + h) - N(t_i)$ y $N(t_j + h) - N(t_j)$ tienen ambas distribución *Poisson*(λh).

En general, puesto que la distribución del incremento del número de siniestros es Poisson, es decir $N(t+h) - N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda h)$ para toda $t > 0$ y para toda $h > 0$, se dice que $N(t)$ es un **Proceso Poisson**. Este proceso tiene la propiedad de que:

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} P[N(t+h) - N(t) \geq 2 | N(s), 0 \leq s \leq t] = 0$$

Lo cual quiere decir que la probabilidad de que ocurra más de una reclamación en un periodo de tiempo muy corto es 0. Ahora bien si $N(t)$ es un Proceso Poisson, $S(t)$ se convierte en un **Proceso Poisson Compuesto**.

Al igual que en un proceso en tiempo discreto, los momentos más importantes en un proceso en tiempo continuo son los puntos en los que el proceso toma valores negativos, es decir el conjunto $\{t : R(t) < 0\}$, pues en dichos puntos se entra en estado de ruina. Debido a esto a continuación se procede a enunciar varias definiciones y propiedades, las cuales

permitirán exponer un método para encontrar o en su defecto acotar la probabilidad de ruina.

Definición. (Coeficiente de ajuste para un proceso en tiempo continuo). Sea $R(t)$ un proceso de riesgo en tiempo continuo. El coeficiente de ajuste para este tipo de procesos se define como la **raíz positiva** R_0 de la ecuación:

$$M_{S(t)-kt}(r) = 1$$

Ahora bien, según la ecuación (3) del **Capítulo 3**:

$$(5) \quad \begin{aligned} M_{S(t)-kt}(r) &= E[e^{r(S(t)-kt)}] = e^{-rkt} E[e^{rS(t)}] = e^{-rkt} M_{S(t)}(r) \\ &= e^{-rkt} M_{N(t)}(\ln M_X(r)) \end{aligned}$$

Suponiendo que $N(t)$ es un proceso poisson y utilizando (5) se tiene que:

$$M_{S(t)-kt}(r) = e^{-rkt} e^{\lambda t (e^{\ln(M_X(r))-1})} = e^{-rkt} e^{\lambda t (M_X(r)-1)}$$

Lo cual implica:

$$\ln(e^{-rkt + \lambda t (M_X(r)-1)}) = -rkt + \lambda t (M_X(r) - 1) = 0 = \ln(1)$$

Es decir:

$$\lambda (M_X(r) - 1) = rk$$

Ahora bien utilizando la ecuación (3) y tomando $E[S] = E[N]E[X_i] = \lambda \mu$, se tiene que:

$$(6) \quad M_X(r) - 1 = r(1 + \theta) \mu$$

Finalmente se enunciará un teorema que permitirá encontrar una cota superior para la probabilidad de ruina de un proceso en tiempo continuo:

Teorema 6. (Cota exponencial de Lundberg para la probabilidad de ruina) Sea $R(t) = u + kt - S(t)$ un proceso de riesgo en tiempo continuo, que verifica que $S(t)$ es un **proceso poisson compuesto**. Entonces:

$$\psi(u) = P[T < \infty] \leq e^{-R_0 u}$$

Donde R_0 denota al coeficiente de ajuste del proceso. A continuación se expondrá un ejemplo en donde se emplea el modelo en tiempo continuo:

Ejemplo 2. Se tiene la siguiente experiencia estadística, la cual corresponde a una muestra aleatoria de las reclamaciones en pesos **hechas durante 3 semanas** a un asegurador:

Tabla 4.4

444.07	1,985.70	3,916.47	7,525.62
1,032.58	2,041.72	4,121.01	8,881.50
1,094.56	2,047.74	4,564.38	9,659.99
1,118.93	2,213.17	4,736.8	10,970.59
1,129.36	2,320.5	4,800.95	11,84
1,261.17	2,335.70	4,926.78	17,108.72
1,485.70	2,760.5	5,753.79	17,763
1,554.72	2,897.37	5,921	36,860.69
1,686.17	3,458.36	6,788.10	
1,953.93	3,568.95	7,142.78	
1,960.54	3,874.36	7,441.24	

Además se ha ajustado una distribución Poisson con $\lambda = 50.3$ al número o frecuencia de reclamos N . Suponiendo que **las reclamaciones pueden ser cubiertas en cualquier momento del año**, a continuación se calculará una cota superior para la probabilidad de que el asegurador caiga en estado de ruina, teniendo en cuenta que posee con un capital inicial de \$ 50,000.

Es claro que el planteamiento del problema sugiere utilizar el **modelo en tiempo continuo**, puesto que **las reclamaciones pueden realizarse en cualquier momento del año**. En primer lugar se encontrará una distribución apropiada para los reclamos individuales. Empíricamente se observa que hay más concentración en los montos pequeños, que en los montos grandes, por lo cual se probarán a continuación las siguientes hipótesis:

$$H_0 : X_i \sim \text{Exp}(\alpha) \text{ vs. } H_a : X_i \not\sim \text{Exp}(\alpha).$$

Para estimar al parámetro el parámetro α se hace la siguiente observación:

$$\bar{X} = 1/\hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} = 1/\bar{X}$$

Lo cual quiere decir que un estimador para el parámetro α , es el recíproco de \bar{X} . Ahora bien $\bar{X} = 5,486.61767$, y por lo tanto $\hat{\alpha} = 0.00018226$. En este sentido las hipótesis quedan de la forma:

$$H_0 : X_i \sim \text{Exp}(0.00018226) \text{ vs. } H_a : X_i \not\sim \text{Exp}(0.00018226).$$

Ahora bien, si se dividen los montos en 11 clases y se realiza la **prueba ji-cuadrada** se obtiene que $\chi^2_{est} = 9.62502336 < 16.9 = \chi^2_{(10-1)}$, y por lo tanto se concluye que:

$$X_i \sim \text{Exp}(0.00018226)$$

Ahora bien, esto indica que el proceso de riesgo es un **Proceso Poisson Compuesto** con parámetro $\lambda = 50.3$ y distribución de montos individuales exponencial, esto es $X_i \sim Exp(0.00018226)$. Utilizando el método de aproximación normal visto en el **Capítulo 3**, y suponiendo que se desea cubrir al 0.95 de confianza las desviaciones en la siniestralidad, el recargo θ puede calcularse utilizando la siguiente expresión:

$$\frac{S - 50.3\mu}{\sqrt{50.3\mu_2}} \sim N(0,1)$$

Ahora bien, $\mu = 1/0.00018226 = 5,486.6673$, y $\mu_2 = (5,486.6673)^2 + 1/(0.00018226)^2 = 301031518.06 + 30,103,519.1387 = 60,207,037.1995$, por lo tanto:

$$\frac{S - 275,979.36519}{55,031.0273} \sim N(0,1)$$

Lo cual implica:

$$1.65 = \frac{(1 + \theta)275,979.36519 - 275,979.36519}{55,031.0273}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1.65(55,031.0273)}{275,979.36519} = 0.329014$$

Utilizando este último resultado, la igualdad (6) y puesto que $M_{X_i}(r) = \left(\frac{0.00018226}{0.00018226 - r} \right)$, la ecuación para encontrar el coeficiente de ajuste se reduce a:

$$\left(\frac{0.00018226}{0.00018226 - r} \right) - 1 = 1.329014 * 5,486.67r \\ = 7,291.85r$$

Por lo tanto:

$$0.00018226 = (0.00018226 - r)(1 + 7,291.85r)$$

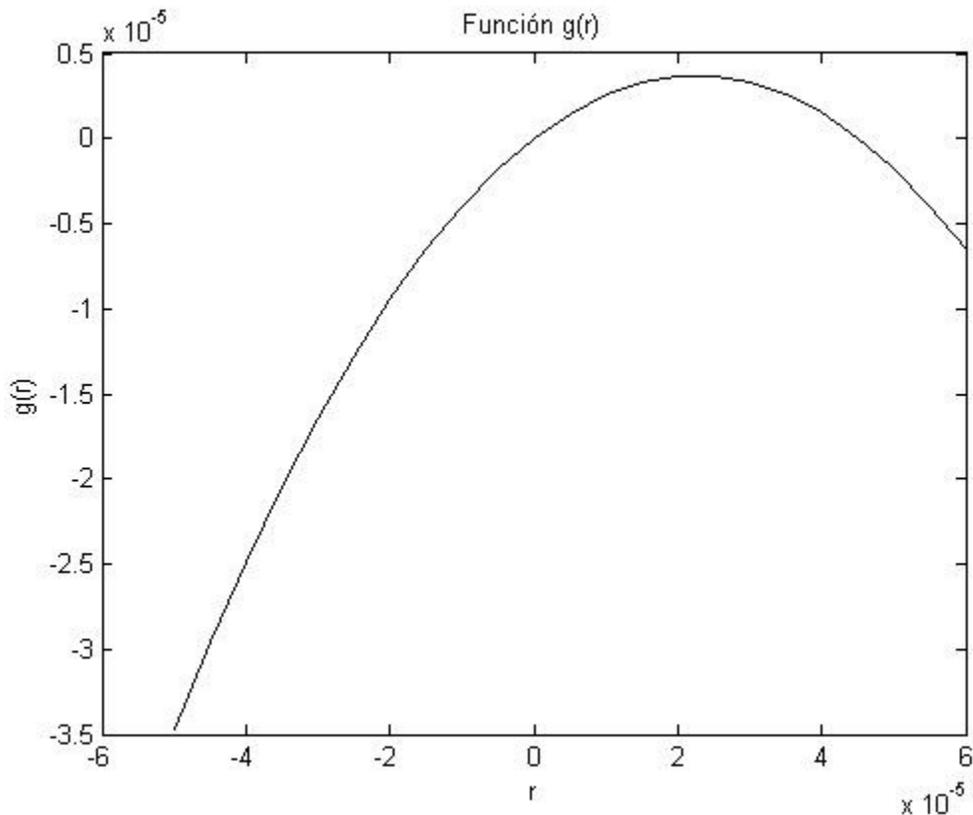
Lo cual implica:

$$0.00018226 = 0.00018226 + 1.329013r - r + 7,291.85r^2$$

Es decir:

$$g(r) = r(0.329013 - 7,291.85r) = 0.329013r - 7,291.85r^2 = 0$$

Gráfico 4.4



Ahora bien, es claro que $r=0$ es una raíz de $g(r)$, no obstante, por definición el coeficiente de ajuste es la raíz positiva de la ecuación; en este sentido el **coeficiente de ajuste** está dado por:

$$R_0 = \frac{0.329013}{7,291.85} = 0.0000451207$$

Por lo tanto, la cota superior para la probabilidad de ruina está dada por:

$$\psi(u) = P[T < \infty] \leq e^{-R_0 u} = e^{-2.256035} = 0.10476506$$

En la siguiente sección se evaluarán las ventajas y desventajas que presenta el modelo en tiempo continuo con respecto al modelo en tiempo discreto.

4.5 Comparaciones entre el modelo en tiempo continuo y el modelo en tiempo discreto

En esta sección se expondrán las similitudes que guardan el modelo en tiempo continuo y el modelo en tiempo discreto, y se establecerá la relación existente entre sus respectivos coeficientes de ajuste cuando la frecuencia o número aleatorio de siniestros tiene una distribución Poisson. Finalmente se hará una evaluación entre las ventajas y desventajas que proporcionan tanto el modelo en tiempo continuo, como el modelo en tiempo discreto.

En primer lugar, cabe señalar que a partir de los teoremas 5 y 6 se puede observar que tanto la cota del modelo en tiempo discreto, como la cota del modelo en tiempo continuo tienen forma exponencial y son bastante parecidas, con la única diferencia de que involucran raíces de ecuaciones que, en general, son distintas. No obstante, cuando se restringe la distribución de la frecuencia o número aleatorio de siniestros, la cota del modelo en tiempo discreto y la del modelo en tiempo continuo coinciden. De manera más formal, cuando el número o frecuencia de siniestros tiene distribución Poisson, se tiene la igualdad:

$$(7) \quad r_0 = R_0 \quad 41$$

Una prueba sencilla de este hecho puede hacerse analizando la ecuación del coeficiente de ajuste para el modelo en tiempo discreto; si I tiene distribución compuesta y su respectiva frecuencia aleatoria de reclamos tiene distribución Poisson con parámetro λ , la ecuación (2) puede simplificarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M_{I-k}(r) = 1 &\Rightarrow e^{-rk} M_N(\ln(M_X(r))) = 1 \Rightarrow e^{\lambda(e^{\ln(M_X(r))} - 1)} = e^{rk} \\ &\Rightarrow \lambda(M_X(r) - 1) = rk \\ &\Rightarrow M_X(r) - 1 = \frac{rk}{\lambda} = r(1 + \theta)\mu \end{aligned}$$

Ahora bien, como r_0 es el coeficiente de ajuste, es decir la raíz positiva de (2), se tiene que:

$$(8) \quad M_X(r_0) - 1 = r_0(1 + \theta)\mu$$

Y como R_0 es el coeficiente de ajuste para el modelo continuo, debe verificar (6), es decir:

$$(9) \quad M_X(R_0) - 1 = R_0(1 + \theta)\mu$$

Es decir, tanto r_0 como R_0 son raíces de la ecuación en r : $M_X(r) - 1 = r(1 + \theta)\mu$. Ahora bien, puesto que tanto r_0 como R_0 deben ser mayores que cero por definición, se concluye que $R_0 = r_0$.

Finalmente, se evaluarán las ventajas y desventajas de cada uno de los modelos; por lo que respecta al **modelo en tiempo continuo** se tiene que cuenta con la gran ventaja que permite hacer la evaluación del estado del proceso de riesgo en cualquier momento del año, sin tener que esperar a una fecha específica para hacerlo. No obstante, posee de igual forma una gran desventaja, la cual consiste en que no se cuenta con **expresiones explícitas simples** concernientes a este modelo, cuando el número de reclamaciones no tiene distribución Poisson, y por lo tanto su aplicación se reduce a una cantidad más pequeña de casos.

⁴¹ Este resultado puede ser consultado de manera más explícita en *Kass, Rob et al. Modern Actuarial Risk Theory, Kluwer Academic Publishers, 2001.*

Por el contrario, el **modelo en tiempo discreto** cuenta con la desventaja de que el tiempo de evaluación debe fragmentarse, en el sentido de que si se establece de antemano que las I_j 's representan los reclamos agregados al final del j -ésimo mes o año, debe esperarse a que se cumplan estos plazos para poder realizar la evaluación del proceso. Por otro lado, este modelo cuenta con la ventaja de que **no impone restricción alguna sobre la distribución de la frecuencia de los reclamos N** ; es decir, este modelo puede ser aplicado a una gama más amplia de casos que el modelo en tiempo continuo.

En síntesis, es más recomendable, en general, aplicar el **modelo en tiempo discreto** siempre y cuando se cuente con la seguridad de que es poco probable que la ruina pueda ocurrir a lo largo del mes o del año, al final de los cuales se pueda hacer la evaluación. En caso de que no se cuente con esta seguridad es recomendable utilizar el **modelo en tiempo continuo**, siempre y cuando la distribución del número de reclamos sea Poisson.

CONCLUSIONES

A partir del contenido de este escrito se puede concluir que una buena modelación y, por lo tanto, un costeo eficiente y equitativo de un seguro de daños, depende principalmente de la correcta adecuación de las herramientas probabilísticas, a la descripción del comportamiento aleatorio del evento catastrófico que se desea asegurar. Es decir si el comportamiento y características de la variable o variables aleatorias que se utilizan para modelar el evento catastrófico que se desea asegurar, no se adecuan al comportamiento histórico de dicho evento, los cálculos de las primas de riesgo, prima recargada, prima bruta y por lo tanto prima de tarifa podrían presentar sesgos los cuales estarían en la posibilidad de generar insolvencia económica para hacer frente a dicho evento catastrófico, o en su defecto incrementar dichas primas de manera irracional y desmedida.

Por lo que respecta al método alternativo para aproximar la distribución del monto agregado de reclamos presentado en el tercer capítulo, cabe señalar que es bastante eficiente en la realidad práctica ya que reduce de manera muy significativa los sumandos involucrados en la fórmula de recursividad de Panjer, y puesto que involucra cantidades bastante representativas de la distribución muestral de los montos de reclamación individuales, la aproximación resultante es bastante buena, además de que elimina las limitaciones prácticas que presenta dicha fórmula. Cabe señalar, también, que a partir de los gráficos empleados en este capítulo se puede concluir que estas herramientas proveen bastante ayuda, en el proceso de análisis cualitativo de los datos, y en la posterior conjetura sobre la posible distribución de la cual provienen. Dicha conjetura es fundamental para poder formular las hipótesis en la prueba ji-cuadrada.

Por otro lado, en lo que se refiere al método propuesto en el cuarto capítulo para aproximar el coeficiente de ajuste del modelo en tiempo discreto del proceso de riesgo, cabe señalar que elimina las restricciones de las posibles distribuciones del número aleatorio de reclamos en dicho proceso, ampliándolas a cualquier distribución que tome valores enteros no negativos y, por lo tanto, permite ampliar la variedad de casos prácticos en los que se puede aproximar una cota para la probabilidad de ruina. Además, a partir de los gráficos introducidos en este capítulo es posible observar que las aproximaciones polinomiales de Taylor, son muy precisas y permiten inferir de manera confiable, tanto las características como el comportamiento de las ecuaciones del coeficiente de ajuste.

Es preciso señalar que, en todos los capítulos, los gráficos que se refieren a funciones matemáticas o ecuaciones fueron realizados con el software Matlab, mientras que los gráficos que involucran datos estadísticos fueron realizados en SPSS.

Finalmente, cabe señalar que uno de los puntos que se debe analizar con más cuidado cuando se utilizan los métodos expuestos en este trabajo, es el que se refiere al ajuste de distribuciones precisas tanto al número aleatorio de reclamos como a los montos de reclamación individual, puesto que este procedimiento, en general, en la práctica no es fácil. Esto se debe principalmente, a que la mayoría de las veces la experiencia estadística con la que cuentan las aseguradoras presenta una gran cantidad de datos atípicos, así como irregularidades en el comportamiento de los datos.

En los casos en los que no es posible ajustar una distribución conocida tanto a la frecuencia aleatoria de siniestros, como a los montos de reclamación individual, es posible que se tenga que utilizar otro tipo de métodos estadísticos como las distribuciones frecuenciales y la estadística descriptiva, o bien métodos más sofisticados.

BIBLIOGRAFÍA

- (1) Bowers, Newton L. et al. *Actuarial Mathematics*, The Society Of Actuaries, EUA, 1997.
- (2) Kass, Rob et al. *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- (3) Gerber, Hans U. *Introduction to mathematical risk theory*, S. S. Huebner Foundation Monograph , University of Pennsylvania, 1979.
- (4) Rincón, Luis. *Curso Intermedio de Probabilidad*, Las Prensas De Ciencias, 2007.
- (5) Hoel, Paul G. et al. *Introduction to Probability Theory*, Houghton Mifflin Company, 1971.
- (6) Mood, Alexander et al. *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw-Hill, 1963.
- (7) Yamane, Taro. *Estadística*, Harla, 1974.
- (8) Hogg, Robert V. *Introduction to mathematical statistics*, Collier Macmillan International Editions, 1978.
- (9) Burden, Richard et al. *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericana, 1985.
- (10) Spivak, Michael. *Calculus*, Reverte, 1992.
- (11) Rincón, Luis. *Introducción a los procesos estocásticos*.⁴²
- (12) Bartle, Robert G. *Introducción al análisis matemático*, Limusa, 1982.
- (13) Rudin, Walter. *Principles of mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1964.
- (14) Molinaro, Luigi. *Lecciones de técnica actuarial de los seguros contra los daños*, Textos Universitarios, 1976.
- (15) PROYECTO EDUFINET, UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE ANDALUCÍA (UIA) et al , <http://150.214.14.125/content/view/429/159>, 2008.
- (16) SEGUROS DE AUTOS, AGENTES DE SEGUROS POR INTERNET, http://www.segurosdeautos.com.mx/glosario_de_seguros.html, 2008

⁴² Este material puede consultarse en <http://www.matematicas.unam.mx/lars>.