



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

CONTROL ROBUSTO DE SISTEMAS CON
INCERTIDUMBRES NO ACOPLADAS MEDIANTE MODOS
DESLIZANTES DE ORDEN SUPERIOR

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERIA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A :

JOSÉ ANTONIO ESTRADA TORRES

TUTOR:

Dr. LEONID FRIDMAN



2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

Secretario: Luis Agusín Icaza Longoría

Vocal: Dr. Leonid Fridman

1^{er}. Suplente: Gerardo René Espinoza Pérez

2^{do}. Suplente: Francisco Javier Bejarano Rodríguez

Lugar donde se realizó la tesis:

Posgrado de Ingeniería, Ciudad Universitaria

México, D.F.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Leonid Fridman

FIRMA

Agradecimientos

- A mis madre Flor de María Torres y a mi padre Antonio Estrada por todo lo que de ellos he aprendido y por su apoyo.

- Al Dr. Leonid Fridman por su asesoría en el desarrollo de este trabajo, así como a los profesores con los que tuve el privilegio de tomar clases durante la maestría por su esfuerzo y dedicación para lograr que el posgrado en ingeniería eléctrica, opción control, tenga un nivel digno de la máxima casa de estudios de nuestro país.

- Al CONACyT por el valioso apoyo económico que me otorgó durante los estudios de maestría.

ÍNDICE GENERAL

1..	<i>Introducción</i>	1
2..	<i>Antecedentes</i>	8
2.1.	Grado relativo	8
2.2.	Transformación a la forma no lineal controlable por bloques	11
2.3.	Forma de retroalimentación estricta	16
2.4.	Inclusiones diferenciales y homogeneidad	16
2.5.	Modos deslizantes de orden superior	19
2.5.1.	Propiedades de homogeneidad de modos deslizantes de orden superior	21
2.5.2.	Control cuasi continuo homogéneo por modos deslizantes de orden superior	24
3..	<i>Compensación de perturbaciones desacopladas mediante modos deslizantes de orden superior</i>	27
3.1.	Planteamiento del problema	28
3.2.	Algoritmo de diseño	29
3.2.1.	Prueba de convergencia	31
3.3.	Ejemplos	34
4..	<i>Conclusiones</i>	43

Índice general	v
<hr/>	
<i>Apéndice</i>	45
<i>A.. Prueba del Teorema 2.4.1</i>	46
<i>B.. Prueba del Teorema 2.5.1</i>	48

1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo, como su nombre lo indica, se aborda el problema de diseño de control para sistemas con perturbaciones no acopladas. El problema de diseño de control para sistemas no lineales con incertidumbres es un problema aún abierto a propuestas de nuevas soluciones. Cuando se trata de perturbaciones que cumplen la condición de acoplamiento, existen diferentes técnicas que permiten alcanzar cierto nivel de robustez del control diseñado. El rediseño de Lyapunov y el control por modos deslizantes (Utkin 1992), por ejemplo, son técnicas en las que el control obtenido es discontinuo y que pueden asegurar robustez a perturbaciones acopladas, sin embargo cuando se habla de incertidumbres o perturbaciones no acopladas la técnica mas usada para el diseño es la conocida con el nombre de *backstepping* (Kokotović *et al.* 1991).

El *backstepping* es un procedimiento recursivo que combina la obtención de una función de Lyapunov con el diseño por realimentación, en esta técnica el problema de diseño para el sistema completo se separa en una serie de subsistemas de menor orden, que incluso pueden llegar a ser escalares. Aprovechando que para sistemas de menor orden y sistemas escalares hay una mayor flexibilidad de diseño, se puede resolver el problema de estabilización, seguimiento y control robusto con condiciones menos restrictivas que las que exigen otros métodos. El *backstepping* se puede aplicar en sistemas con estructura triangular, al menos a bloques. Dicha estructura es tal que

cada estado puede ser controlado por otro, es decir que algunos estados son usados como control virtual, en una forma escalonada, hasta llegar al estado en el que aparece la entrada de control real. Se puede ver como una conexión en cascada donde el primer estado tiene como entrada un segundo estado a través de un integrador, este segundo estado a su vez, tiene como entrada un tercero, también a través de integrador, y así sucesivamente hasta llegar al estado en el que aparece la entrada de control real.

El procedimiento de diseño consiste en tomar el primer subsistema y aprovechando la estructura del sistema diseñar un control suave, que lo estabilice. Luego se busca una función de Lyapunov para este primer control virtual que asegure la estabilidad asintótica del primer subsistema. Enseguida se procede a hacer un cambio de coordenadas tal que la derivada del primer control virtual aparece ahora en el segundo subsistema. Lo que se obtiene después del cambio de coordenadas es que el primer subsistema es estable cuando su entrada es cero. Para el segundo subsistema se procede a diseñar un control agregándole a la función de Lyapunov, conocida del primer subsistema, un término que depende de la variable introducida para hacer el cambio de coordenadas antes mencionado. Al calcular la derivada de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema se elige el control de tal forma que asegure que dicha derivada sea negativa, es decir que asegure estabilidad asintótica. Este procedimiento se repite hasta llegar a la entrada de control real. En presencia de perturbaciones desacopladas, con la condición de que sean acotadas por la norma del estado, es posible asegurar estabilidad asintótica.

Estado del Arte

Como se puede apreciar por lo arriba mencionado, el *backstepping* hace del diseño por retroalimentación un procedimiento sistemático que involucra una transformación de coordenadas paso a paso y la obtención, en cada paso, de un control virtual basado en una función de Lyapunov. El problema es que se llega a leyes de control complejas que demandan gran capacidad de cómputo, que se incrementa con el orden del sistema, por lo que en ocasiones no es realizable, prácticamente hablando. Tratando de solucionar esta desventaja se han propuesto esquemas que combinan el diseño por *backstepping* con otras técnicas de control robusto, especialmente el control de estructura variable (Freeman y Kokotović 1993), (Liu y Zinober 1996).

En (Bartolini *et al.* 2000) se estudia la combinación del control por modos deslizantes de segundo orden con *backstepping*, esto con el objetivo de reducir la demanda de cálculo del *backstepping*. Después en (Ferrara y Giacomini 2001) se vuelve a estudiar esta combinación, pero en este artículo lo que se busca es aplicar modos deslizantes de segundo orden a sistemas con perturbaciones no acopladas. El procedimiento de diseño es igual al de *backstepping* con la diferencia de que es detenido en el paso $n - 1$ y se introducen dos nuevas variables obtenidas mediante la apropiada selección de la superficie de deslizamiento. Los resultados obtenidos aseguran estabilidad asintótica localmente. En (Scarrat y Zinober 2000) se extiende la viabilidad de la aplicación de un diseño que combina modos deslizantes y *backstepping*, a sistemas que no están en la forma triangular, con la condición de que sean observables y de fase mínima, separando el diseño del control de la identificación de los parámetros con incertidumbre; los efectos desestabilizadores de la identificación se compensan mediante la introducción de amortiguamiento no lineal. En (Koshkouei y Zinober 2000) se sortea la condición de fase mínima para

sistemas que pueden ser transformados a una forma especial (forma de retroalimentación semiestricta). Todos estos trabajos se basan esencialmente en el diseño por *backstepping* y sólo en los pasos finales introducen el control por modos deslizantes.

El control por modos deslizantes, que como se ha mencionado no compensa perturbaciones desacopladas (Drazenovic 1969), también ha sido combinado con otras técnicas de control con el fin de robustificar el diseño ante perturbaciones no acopladas (Davis y Spurgeon 1993). En (Choi 2003) se desarrolla un método de diseño en el que la superficie de deslizamiento es conmutada usando un criterio basado en desigualdades matriciales lineales (LMI). En lo que se refiere a la elección de la matriz de proyección, (Castaños y Fridman 2006) propone un método de elección que asegura que las perturbaciones desacopladas no serán amplificadas y se minimiza su efecto, en este método se combina el control H_∞ con control por modos deslizantes integrales.

El problema de control robusto para sistemas en la forma no lineal controlable por bloques (forma NCB) (Loukianov y Utkin 1981), es abordada en (Loukianov 2002) en donde se aplica modos deslizantes para compensar la incertidumbre acoplada y la dinámica de orden reducido que se obtiene, una vez que se alcanza el modo deslizante, es estabilizada mediante el enfoque de alta ganancia. Para ello se realiza una transformación de coordenadas adicional a la forma NCB, la cual lleva al sistema a una forma lineal, y se introduce la nueva dinámica deseada. Los parámetros de la forma lineal se eligen lo suficientemente grandes, en forma jerárquica, y tomando en cuenta la cota de las perturbaciones, para que la dinámica estable domine a la dinámica de las perturbaciones, logrando acotamiento final de las soluciones. En esta misma línea en (Huerta-Avila *et al.* 2007), se estudia una aplicación práctica de compensación de perturbaciones desacopladas en el control des-

centralizado de generadores síncronos. El esquema propuesto combina control por bloques (Loukianov 1998), control integral por modos deslizantes (Utkin *et al.* 1999) y control por modos deslizantes anidados (Adhami-Mirhosseini y Yazdanpanah 2005). Las dos últimas se aplican para suprimir las perturbaciones desacopladas. Siguiendo la técnica de control por bloques algunos estados son usados como controles virtuales. De nuevo se realiza una transformación de coordenadas que introduce una dinámica lineal pero además se incluye un término adicional destinado a compensar las perturbaciones desacopladas. Debido a esta transformación es necesario que cada control virtual sea suave, ya que es necesario diferenciarlo, por lo que en el término adicional se usa la función sigmoide en lugar de la función signo, lo cual provoca pérdida de exactitud.

Planteamiento del problema

Hasta aquí, se han mencionado trabajos que combinan diferentes técnicas para diseñar controles robustos ante perturbaciones desacopladas. A excepción de los métodos que se concentran en la selección de la matriz de proyección, todos los otros usan la idea de control virtual. Con *backstepping* se corre el riesgo de llegar a leyes de control tan complejas que el cálculo numérico demande una capacidad de cálculo enorme. Por otra parte, debido a la necesidad de diferenciar cada control virtual, es necesario que estos sean suaves por lo que no es posible aplicar en ellos modos deslizantes estándar, empleados en gran variedad de aplicaciones por sus características de robustez y tiempo de convergencia finito. Esta dificultad puede eludirse sin tener que recurrir a la introducción de funciones sigmoide. La solución que en esta tesis se propone es utilizar modos deslizantes de alto orden (Fridman y Levant 2002). Los modos deslizantes de alto orden fueron desarrollados para superar el problema

de castaño (*chattering*) de los modos deslizantes estándar. Dicho problema se presenta principalmente debido retardos en la conmutación y a dinámica no modelada que incrementa el grado relativo del sistema y provoca perturbaciones del modo deslizante ideal. Se han hecho grandes avances en esta área que hacen posible la aplicación práctica de estos controladores de alto orden.

Contribución de la tesis

El algoritmo de diseño que aquí se propone es aplicable a sistemas en la forma de retroalimentación estricta (Krstic *et al.* 1995), (Khalil 2002). No necesita transformación de coordenadas y logra seguimiento exacto en tiempo finito de la señal deseada en presencia de perturbaciones no acopladas. El tipo de control por modos deslizantes de alto orden usado aquí es el llamado cuasi continuo, el cual tiene la característica de ser discontinuo única y exclusivamente en la variedad de deslizamiento correspondiente, la cual está determinada por el orden del controlador. El diseño se realiza en una forma jerárquica, definiendo en el primer paso la dinámica deseada para la salida mediante la señal de referencia y en cada paso subsecuente la dinámica de cada estado está determinada por el anterior con lo que el diseño es sistemático.

Estructura de la tesis

Este trabajo presenta un algoritmo para diseñar controladores robustos ante perturbaciones no acopladas mediante el uso de modos deslizantes de alto orden. Está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presentan una serie de conceptos que posteriormente son utilizados en el algoritmo de diseño. El capítulo consta de cuatro secciones

en las que se presenta el concepto de grado relativo, después se introduce la transformación de coordenadas que lleva a un sistema no lineal, afín en el control, de una forma general a la forma no lineal controlable por bloques y un caso particular de ésta llamada forma de retroalimentación estricta. La parte final introduce los conceptos sobre inclusiones diferenciales y homogeneidad, conceptos en los que se fundamentan los controladores por modos deslizantes de alto orden.

En el capítulo 3 se describe el algoritmo de diseño propuesto, se da la prueba de convergencia y se presentan los resultados obtenidos en simulación para validar los resultados teóricos.

Por último en el capítulo 4 se presentan las conclusiones generales, se discuten los resultados obtenidos y las líneas de trabajo futuro que permitirían complementar o generalizar dichos resultados.

2. ANTECEDENTES

La finalidad de este capítulo, es introducir el tipo de sistemas para los que es aplicable el esquema de control propuesto y estudiar los conceptos matemáticos en los que se basa dicho diseño. En la primera sección se da la definición de grado relativo (Isidori 1989). En la segunda sección se describe una transformación que hace posible llevar a un sistema no lineal, en forma general, a la forma no lineal controlable por bloques (forma NCB) (Loukianov 2002). También en esta segunda sección se dan las condiciones bajo las cuales dicha transformación es realizable. La importancia de la transformación a la forma NCB es que el esquema de compensación de perturbaciones desacopladas propuesto, es aplicable a sistemas cuyo modelo tiene una forma que es un caso particular de la forma NCB, llamada forma de retroalimentación estricta (Khalil 2002), que es definida en la tercera parte de este capítulo. En la sección 4 se introducen conceptos referentes a inclusiones diferenciales y sus soluciones, se dan las definiciones de homogeneidad y de orden del modo deslizante. En las últimas dos secciones se estudian las propiedades de homogeneidad de los modos deslizantes de alto orden y finalmente se presenta el control cuasi continuo por modos deslizantes de alto orden.

2.1. *Grado relativo*

A lo largo del presente trabajo el concepto de grado relativo de un sistema es utilizado frecuentemente. Es por ello que se incluye aquí su definición formal, primero para sistemas con una entrada una salida y luego para sistemas

con múltiples entradas y múltiples salidas.

Considérese el siguiente sistema no lineal con una entrada y una salida

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde f, g, h son suficientemente suaves en $D \subset \mathbb{R}^n$ (f, g son campos vectoriales). La derivada de la salida está dada por

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}[f(x) + g(x)u] \triangleq L_f h(x) + L_g h(x)u$$

donde $L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$ se denomina la derivada de Lie de h con respecto a f (o a lo largo de f), de forma análoga $L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x)$ es la derivada de Lie de h con respecto a g . Esta notación es conveniente cuando se realizan diferenciaciones repetidas, ya sea respecto del mismo o respecto de otro campo vectorial. Suponiendo que $L_g h(x) = 0$, al calcular la segunda derivada de y se tiene

$$\ddot{y} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}[f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u$$

Si el término que multiplica a la entrada es distinto de cero, se dice que el grado relativo del sistema es 2. Tomando en cuenta lo arriba mencionado, se introduce ahora la definición de grado relativo.

Definición 2.1.1 (Isidori 1989) *Se dice que el sistema (2.1) tiene grado relativo r en un punto x^0 si*

1. $L_g L_f^k h(x) = 0$ para toda x en una vecindad de x^0 y toda $k < r - 1$.
2. $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$

Lo anterior significa que la entrada aparece por primera vez en la r -ésima derivada total de la salida y . Nótese que pueden existir puntos donde el grado relativo no está definido.

Considérese el sistema multivariable (2.2), por facilidad únicamente se considerarán aquellos sistemas con el mismo número de entradas y de salidas.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.2}$$

con $x \in R^n$ y donde

$$\begin{aligned}u &= (u_1, \dots, u_m)^T \\ y &= (y_1, \dots, y_m)^T \\ g(x) &= [g_1(x) \ \dots \ g_m(x)]; \quad g(x) \in R^{n \times m} \\ h(x) &= (h_1(x), \dots, h_m(x))^T\end{aligned}$$

Definición 2.1.2 (Isidori 1989) *Se dice que el sistema (2.2) tiene grado relativo vectorial (r_1, \dots, r_m) en un punto x^0 si*

1.

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$$

para $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq m$, $k < r_i - 1$, y para toda x en una vecindad de x^0 .

2. La matriz $A(x) \in R^{m \times m}$ es no singular en $x = x^0$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}\tag{2.3}$$

Cada uno de los números r_1, \dots, r_m está asociado al i -ésimo canal de salida del sistema. Por definición para toda $k < r_i - 1$ el vector renglón

$$[L_{g_1} L_f^k h_i(x) \ \dots \ L_{g_m} L_f^k h_i(x)]$$

es cero para toda x en una vecindad de x^0 y para $k = r_i - 1$, este vector tiene al menos un elemento diferente de cero en x^0 ; esto es implicado por la condición de no singularidad de A y no a la inversa es decir: la existencia de al menos un elemento diferente de cero en cada renglón no implica la no singularidad de A . Esta condición de no singularidad, aunque muy restrictiva, es muy importante y puede verse como la versión multivariable de la condición $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ del caso escalar. Como consecuencia de la primera condición se tiene que para cada i , existe al menos un valor de j tal que el sistema (una entrada y una salida) con entrada u_j y salida y_i tiene exactamente grado relativo r_i en x^0 y para cualquier otro valor de j (i.e. de entrada) el correspondiente grado relativo, si existe, necesariamente es mayor o igual a r_i .

2.2. Transformación a la forma no lineal controlable por bloques

Considérese el siguiente sistema

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + g(x, t) \quad (2.4)$$

donde $x \in X \subset R^n$ es el vector de estados, $u \in U \subset R^m$ es el vector de control, el mapeo $g(x, t)$ es desconocido y caracteriza perturbaciones externas y variaciones de los parámetros. Se supone a los campos vectoriales f, g y las columnas de B como mapeos suaves y acotados de clase $C_{[0, \infty]}^\infty$, $f(0, t) = 0$ y el rango de $B(x, t) = m$, para toda $x \in X$ y $t \geq 0$. Se desea llevar al sistema no lineal afín en el control descrito por (2.4), a la forma NCB. Esto se logra aplicando el método de transformación integral (Loukianov y Utkin 1981), el cual se describe a continuación.

La forma NCB, formada por r bloques, se presenta en la ecuación (2.5)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + g_1(x_1, t) \\ \dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i, t) + B_i(\bar{x}_i, t)x_{i+1} + g_i(\bar{x}_i, t), \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{x}_r &= f_r(\bar{x}_r, t) + B_r(\bar{x}_r, t)u + g_r(\bar{x}_r, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

donde x se descompone en $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T$, $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i)^T$, x_i es un vector de n_i renglones; los índices (n_1, n_2, \dots, n_r) definen la estructura del sistema y cumplen con:

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m \quad y \quad \sum_{i=1}^r n_i = n$$

además

$$\text{rango } B_i = n_i \quad \forall x \in X \subset R^n \quad y \quad t \in [0, \infty), \quad i = 1, \dots, r.$$

El método de transformación integral para llevar a cabo la descomposición de la ecuación (2.4) a la ecuación (2.5) consiste en un procedimiento iterativo que consta de una serie de pasos:

Paso 1. Suponga que la matriz B en (2.4) puede descomponerse a la forma siguiente: $B(\cdot) = \begin{bmatrix} B_{r-1}(\cdot) \\ B_r(\cdot) \end{bmatrix}$, con $B_r \in R^{\bar{n}_r \times m}$

donde $\text{rango } B_r = \text{rango } B = \bar{n}_r \leq m \quad \forall x \in X \quad y \quad \forall t \geq 0$, se realiza un cambio de coordenadas tal que el estado se divide en $x = (x_{r-1}, x_r)^T$, $x_r \in X_r \subset R^{\bar{n}_r}$ $x_{r-1} \in X_{r-1} \subset R^{n-\bar{n}_r}$. La razón de esta descomposición es poder llevar el sistema a la forma regular:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{r-1} &= f_{r-1}(x_{r-1}, t) + B_{r-1}(x_{r-1}, t)x_r + g_{r-1}(x_{r-1}, t) \\ \dot{x}_r &= f_r(x_{r-1}, x_r, t) + B_r(x_{r-1}, x_r, t)u + g_r(x_{r-1}, x_r, t) \end{aligned}$$

Para lo cual se hacen las siguientes suposiciones:

S1) El mapeo desconocido $g(x, t)$, que representa las perturbaciones, puede descomponerse para dejar separadas las perturbaciones acopladas de las desacopladas, es decir:

$$g(x, t) = g^a(x_{r-1}, x_r, t) + g^d(x_{r-1}, t)$$

con $g^a(x, t) \in \text{span}B(x, t)$, lo cual representa perturbaciones acopladas.

S2) El sistema (2.6) es completamente integrable (Isidori 1989)

$$\Omega_r(d) = dx_{r-1} + A_r(x_{r-1}, x_r, t)dx_r = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{donde } A_r(x, t) = B_{r-1}(x, t)B_r^+(x, t)$$

donde $\Omega_r(d)$ es una forma diferencial, t es un parámetro, $B_r^+ = B_r^T[B_r B_r^T]^{-1}$ es la pseudoinversa de B_r . Bajo esta suposición es posible demostrar que una solución de la ecuación (2.6) está dada por:

$$x_{r-1} = \bar{\varphi}_r(x_r, t, c), \quad \bar{\varphi}_r = (\varphi_{r1}, \dots, \varphi_{r, n-\bar{n}_r})^T, \quad \text{rango } \frac{\partial \bar{\varphi}_r}{\partial c} = n - \bar{n}_r$$

donde c es un vector de $n - \bar{n}_r$ constantes de integración. Usando el teorema de funciones implícitas, puede obtenerse este vector como $c = \varphi_r(x_{r-1}, x_r, t)$, $\varphi_r = (\varphi_{r1}, \dots, \varphi_{r, n-\bar{n}_r})^T$ y tomando un cambio local de variables $\dot{x}'_{r-1} = \varphi_r(x_{r-1}, x_r, t)$, y bajo la suposición de separabilidad del mapeo $g(\cdot)$ es posible transformar al sistema (2.4) en:

$$\begin{aligned} \dot{x}'_{r-1} &= f'_{r-1}(x'_{r-1}, x_r, t) + g'_{r-1}(x'_{r-1}, t) \\ \dot{x}_r &= f_r(x'_{r-1}, x_r, t) + B_r(x'_{r-1}, x_r, t)u + g_r(x'_{r-1}, x_r, t) \end{aligned}$$

S3) Si además el mapeo f'_{r-1} es afín en su segundo argumento es decir:

$$f'_{r-1}(x'_{r-1}, x_r, t) = f''_{r-1}(x'_{r-1}, t) + B'_{r-1}(x'_{r-1}, t)x_r$$

Entonces se pueden considerar tres casos, respecto al rango de $B'_{r-1}(\cdot)$:

- 1) $\text{rango } B'_{r-1}(\cdot) = 0$
- 2) $\text{rango } B'_{r-1}(\cdot) = \bar{n}_{r-1} = n - \bar{n}_r$
- 3) $\text{rango } B'_{r-1}(\cdot) = \bar{n}_{r-1} < n - \bar{n}_r$

En el primer caso se tiene un sistema no controlable por lo que en lo subsecuente se considera que el sistema es localmente controlable. En el segundo caso, después de definir $x_{r-1} = x'_{r-1}$, $f_{r-1} = f''_{r-1}$, $B_{r-1} = B'_{r-1}$, y $g_{r-1} = g'_{r-1}$, se llega a:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{r-1} &= f_{r-1}(x_{r-1}, t) + B_{r-1}(x_{r-1}, t)x_r + g_{r-1}(x_{r-1}, t) \\ \dot{x}_r &= f_r(x_{r-1}, x_r, t) + B_r(x_{r-1}, x_r, t)u + g_r(x_{r-1}, x_r, t)\end{aligned}\quad (2.7)$$

si se está en el segundo caso la descomposición terminaría aquí.

Para la tercera posibilidad, se vuelve a realizar una descomposición, en forma análoga a la anteriormente descrita, que separe a las perturbaciones que son acopladas de las desacopladas cuando se toma a x_r como control ficticio. Supongase que el procedimiento se repite q veces, entonces:

Paso q . Se tiene el siguiente sistema obtenido en el paso $q - 1$:

$$\begin{aligned}\dot{x}'_{r-q} &= f'_{r-q}(x'_{r-q}, t) + B'_{r-q}(x'_{r-q}, t)x_{r-q+1} + g'_{r-q}(x'_{r-q}, t) \\ \dot{x}_i &= f_i(x'_{r-q}, \dots, x_i, t) + B_i(x'_{r-q}, \dots, x_i, t)x_{i+1} + g_i(x'_{r-q}, \dots, x_i, t) \\ & i = r - q + 1, \dots, r - 1 \\ \dot{x}_r &= f_r(x'_{r-q}, \dots, x_r, t) + B_r(x'_{r-q}, \dots, x_r, t)u + g_1(x'_{r-q}, \dots, x_r, t)\end{aligned}\quad (2.8)$$

Suponiendo que $\text{rango } B'_{r-q} \neq 0$, esto es que el sistema es localmente controlable, entonces se descompone el subsistema (2.8) en:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{r-q-1} &= f_{r-q-1}(x_{r-q-1}, t) + B_{r-q-1}(x_{r-q-1}, t)x_{r-q} + g_{r-q-1}(x_{r-q-1}, t) \\ \dot{x}_{r-q} &= f_{r-q}(x_{r-q-1}, x_{r-q}, t) + B_{r-q}(x_{r-q-1}, x_{r-q}, t)x_{r-q+1} + g_{r-q}(x_{r-q-1}, x_{r-q}, t)\end{aligned}$$

donde $x'_{r-q} = (x_{r-q-1}, x_{r-q})^T$, $x_{r-q} \in X_{r-q} \subset R^{\bar{n}_q}$, $x_{r-q-1} \in X_{r-q-1} \subset R^{n-\bar{n}_r-\dots-\bar{n}_q}$, $\text{rango } B_{r-q} = \bar{n}_q$. Para lo cual se han generalizado las suposiciones S1 y S2 denotadas para este paso Sq1 y Sq2:

Sq1) El mapeo desconocido $g'_{r-q}(x, t)$, puede descomponerse en:

$$g'_{r-q}(x, t) = g_{r-q}^a(x_{r-q-1}, x_{r-q}, t) + g_{r-q}^d(x_{r-q-1}, t)$$

donde $g_{r-q}^a(x, t) \in \text{span} B'_{r-q}(x, t)$.

Sq2) El sistema (2.10) es completamente integrable (Isidori 1989)

$$\Omega_q(d) = dx_{r-q-1} + A_{r-q}(x_{r-q-1}, x_{r-q}, t)dx_{r-q} = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{donde } A_{r-q} = -B_{r-q-1}B_{r-q}^+$$

Entonces es posible hacer un cambio local de coordenadas, dado por $\dot{x}'_{r-q-1} = \varphi_{r-q}(x'_{r-q-1}, x_{r-q}, t)$, tal que el sistema queda descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}'_{r-q-1} &= f'_{r-q-1}(x'_{r-q-1}, x_{r-q}, t) + g'_{r-q-1}(x'_{r-q-1}, t) \\ \dot{x}_i &= f_i(x'_{r-q-1}, \dots, x_i, t) + B_i(x'_{r-q-1}, \dots, x_i, t)x_{i+1} + g_i(x'_{r-q-1}, \dots, x_i, t) \\ &\quad i = r - q, \dots, r - 1 \\ \dot{x}_r &= f_r(x'_{r-q-1}, \dots, x_r, t) + B_r(x'_{r-q-1}, \dots, x_r, t)u + g_1(x'_{r-q-1}, \dots, x_r, t) \end{aligned}$$

Si se hace ahora una generalización de la suposición S3:

Sq3) El mapeo f'_{r-q-1} es afín en su segundo argumento es decir:

$$f'_{r-q-1}(x'_{r-q-1}, x_{r-q}, t) = f''_{r-q-1}(x'_{r-q-1}, t) + B'_{r-q-1}(x'_{r-q-1}, t)x_{r-q}$$

Entonces se llega a la siguiente representación:

$$\begin{aligned} \dot{x}'_{r-q-1} &= f'_{r-q-1}(x'_{r-q-1}, t) + B'_{r-q-1}(x'_{r-q-1}, t)x_{r-q} + g'_{r-q-1}(x'_{r-q-1}, t) \\ \dot{x}_i &= f_i(x'_{r-q-1}, \dots, x_i, t) + B_i(x'_{r-q-1}, \dots, x_i, t)x_{i+1} + g_i(x'_{r-q-1}, \dots, x_i, t) \\ &\quad i = r - q, \dots, r - 1 \\ \dot{x}_r &= f_r(x_{r-q-1}, \dots, x_r, t) + B_r(x_{r-q-1}, \dots, x_r, t)u + g_1(x_{r-q-1}, \dots, x_r, t) \end{aligned}$$

Lema 2.2.1 (Loukianov 2002) Usando de forma iterativa el algoritmo arriba descrito, si el sistema es localmente controlable y en cada paso se cumplen las suposiciones Sq1, Sq2 y Sq3, entonces existe un número $r \leq n$ tal que el sistema (2.4) toma la forma no lineal controlable por bloques (2.5).

2.3. Forma de retroalimentación estricta

El sistema de una entrada-una salida dado por la ecuación (2.11), está en la forma de retroalimentación estricta (Khalil 2002). Nótese que si en el algoritmo descrito en la sección anterior $r = n$, la forma NCB, ecuación (2.5), es equivalente a (2.11).

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + g_1(x_1, t) \\ \dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i, t) + B_i(\bar{x}_i, t)x_{i+1} + g_i(\bar{x}_i, t) \\ \dot{x}_n &= f_n(\bar{x}_n, t) + B_n(\bar{x}_n, t)u + g_n(x, t) \\ i &= 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estados, $x_i \in R$, $\bar{x}_i = [x_1 \dots x_i]^T$; $u \in R$ es el vector de control. Además se supone que $f_i(\bar{x}_i, t)$ y $B_i(\bar{x}_i, t)$ son campos vectoriales suaves y que el término desconocido $g_i(\cdot)$, debido a incertidumbre de los parámetros y a las perturbaciones externas, es acotado; $B_i(\cdot) \neq 0 \quad \forall x \in X \subset R^n, t \in [0, \infty)$. Nótese que $f_i(\cdot)$ y $B_i(\cdot)$ y $g_i(\cdot)$ dependen únicamente de los estados $x_1 \dots x_i$ de ahí el nombre de retroalimentación estricta. Esta relación de dependencia es importante, como se verá en el siguiente capítulo, debido a las condiciones que se deben satisfacer respecto al grado relativo del sistema, para aplicar el algoritmo de diseño propuesto.

2.4. Inclusiones diferenciales y homogeneidad

A continuación se presentan algunas definiciones y conceptos que son usados en la sección 2.5, para llegar a los resultados ahí obtenidos.

Definición 2.4.1 Una inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x)$ es llamada una inclusión diferencial de Filippov si el conjunto vectorial $F(x)$ es no vacío, cerrado, convexo, localmente acotado y semicontinuo por arriba (Filippov 1988). La última condición significa que la máxima distancia entre los puntos de $F(x)$ y el conjunto $F(y)$ tiende a cero cuando $x \rightarrow y$. Las soluciones están definidas como funciones del tiempo absolutamente continuas. Dichas soluciones siempre existen (Filippov 1988) y satisfacen la inclusión diferencial en casi todas partes.

Las soluciones de inclusiones de Filippov existen para cualquier condición inicial y tienen la mayoría de las propiedades estándar conocidas, excepto unicidad (Filippov 1988).

Definición 2.4.2 Se dice que una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ con el lado derecho localmente acotado y medible en el sentido de Lebesgue se entiende en el sentido de Filippov si sus soluciones están definidas como las soluciones de una inclusión de Filippov especialmente construida $\dot{x} \in F(x)$. En el caso más usual, cuando f es continua en casi todas partes, el procedimiento es tomar $F(x)$ como la cerradura convexa del conjunto de todos los posibles valores límite de f en un punto dado x , obtenido cuando el punto de continuidad y , tiende a x . Una solución de $\dot{x} = f(x)$ es por definición una solución de $\dot{x} \in F(x)$.

Los valores de f dentro de un conjunto con medida 0, no influyen en las soluciones de Filippov. Como ya se ha mencionado, el diseño de controladores del tipo HOSM se simplifica cuando está basado en la homogeneidad de las inclusiones diferenciales consideradas. En las definiciones siguientes se aborda el concepto de homogeneidad y algunas propiedades asociadas a él.

Definición 2.4.3 Una función $f : R^n \rightarrow R$ (y respectivamente un conjunto de campos vectoriales $F(x) \subset R^n$, $x \in R^n$, o un campo vectorial $f : R^n \rightarrow$

R^n) es llamada homogénea de grado $q \in R$ con el operador de dilatación $d_\kappa : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\kappa^{m_1}x_1, \kappa^{m_2}x_2, \dots, \kappa^{m_n}x_n)$ (Bacciotti y Rosier 2001), donde m_1, \dots, m_n son números positivos (pesos), si para cualquier $\kappa > 0$ se cumple que $f(x) = \kappa^{-q}f(d_\kappa x)$ (respectivamente $F(x) = \kappa^{-q}d_\kappa^{-1}F(d_\kappa x)$, o $f(x) = \kappa^{-q}d_\kappa^{-1}f(d_\kappa x)$).

El grado de homogeneidad q , diferente de cero, de un campo vectorial siempre puede ser escalado a ± 1 cambiando apropiadamente los pesos m_1, \dots, m_n .

Como se puede observar la definición de homogeneidad es diferente para una función que para un campo vectorial, esto se debe a que en el contexto que aquí se aborda, un campo vectorial está asociado a una ecuación diferencial. Considérese la función $f(x)$ con grado de homogeneidad q_f es decir $f(x) = \kappa^{-q_f}f(d_\kappa x)$, si $f(x)$ es vista como campo vectorial está asociada a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, por lo que $\dot{x} = \kappa^{-q_f}f(d_\kappa x)$, aplicando la dilatación al lado izquierdo se tiene:

$$\frac{d(d_\kappa x)}{d(\kappa^{m_t}t)} = \kappa^{-q_f}f(d_\kappa x); \quad m_t \text{ es el peso de } t$$

de donde $\frac{dx}{dt} = \kappa^{-q}d_\kappa^{-1}f(d_\kappa x); \quad q = q_f - m_t$

Como puede verse el grado de homogeneidad del campo vectorial $f(x)$ es igual al grado de homogeneidad de la función $f(x)$ menos el peso de la variable t . Es importante resaltar que la homogeneidad de un campo vectorial (un conjunto de campos vectoriales $F(x)$) puede definirse de forma equivalente como la invariancia de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ (la inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x)$) respecto a la transformación combinada de tiempo y coordenadas $G_\kappa : (t, x) \mapsto (\kappa^{-q}t, d_\kappa x)$.

Se dan a continuación tres propiedades de las inclusiones diferenciales e inmediatamente después un teorema que relaciona a las tres.

1. Una inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x)$ (ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$) es global y uniformemente estable en tiempo finito en $x = 0$, si es estable

en el sentido de Lyapunov y para cualquier $R > 0$ existe $T > 0$, tal que cualquier trayectoria que inicia dentro del disco $\|x\| < R$ converge a $x = 0$ en el tiempo T .

2. Una inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x)$ (ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$) es global, asintótica y uniformemente estable en $x = 0$, si es estable en el sentido de Lyapunov y para cualquier $R > 0$, existen $\varepsilon > 0, T > 0$, tales que cualquier trayectoria que inicia dentro del disco $\|x\| < R$, entra al disco $\|x\| < \varepsilon$ en tiempo T y permanece ahí $\forall t > T$.

Un conjunto D es llamado de dilatación contraible si $d_\kappa D \subset D$ para cualquier $\kappa < 1$.

3. Una inclusión diferencial homogénea (una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$) es contractiva si existen dos conjuntos compactos D_1, D_2 y $T > 0$, tales que D_2 contiene al origen y está en el interior de D_1 , D_1 es de dilatación contraible y todas las trayectorias que inicien dentro de D_1 en el tiempo 0 se localizan en D_2 en el tiempo T .

Teorema 2.4.1 (*Levant 2005a*) *Sea $\dot{x} \in F(x)$ una inclusión de Filippov homogénea con un grado de homogeneidad negativo $-p$. Entonces las propiedades 1, 2 y 3 son equivalentes y el tiempo máximo de asentamiento es una función, continua y homogénea, de las condiciones iniciales y del grado p .*

Es evidente que 1 implica 2 y a su vez, que 1 y 2 implican 3. La prueba de que 3 implica 1 y 2 se incluye al final de este trabajo como apéndice.

2.5. Modos deslizantes de orden superior

El enfoque de control por modos deslizantes se basa en mantener, exactamente, una restricción debidamente seleccionada (e.g. $\sigma = x - y_d = 0$). Esto se

logra mediante conmutación a alta frecuencia de la señal de control. Además de que los modos deslizantes estándar son aplicables únicamente cuando el grado relativo es uno, la conmutación de alta frecuencia provoca vibraciones, efecto conocido como castaño (en inglés *chattering*). Esta exigencia en cuanto al grado relativo, así como el efecto de castaño, pueden removerse cuando se usa debidamente el enfoque de modos deslizantes de alto orden, conservando las propiedades de convergencia en tiempo finito y mejorando aún su precisión. El diseño de estos controladores resulta difícil debido a la complejidad del problema, sin embargo, prácticamente todos los controladores por modos deslizantes de alto orden (HOSM por las siglas en inglés de *Higher Order Sliding Modes*) poseen la característica de homogeneidad. Al construir nuevos controladores HOSM, basándose en el enfoque de homogeneidad las pruebas de convergencia se vuelven estándar y se asegura la mayor precisión posible en presencia de mediciones ruidosas, retardos y considerando la discretización (Levant 2006). Supongase que se desea mantener una restricción, dada por la igualdad de una función suave σ a cero. Como se supone que el grado relativo del sistema es conocido y es constante, existe un número r tal que si la función σ se deriva r veces aparecerá la entrada, es decir, tratándose de un control por modos deslizantes, una discontinuidad. Entonces los modos deslizantes se clasifican por el número de la derivada total, $\sigma^{(r)}$, en la que aparece por primera vez dicha discontinuidad. A este número se le denomina orden de deslizamiento. A continuación se estudian las propiedades del control HOSM homogéneo y se presenta un método de construcción de una clase de estos controladores, los cuales son función de σ y de sus $r - 1$ derivadas. Para realizar el cálculo de las $r - 1$ derivadas de σ que el control requiere, se utiliza el diferenciador robusto exacto (Levant 1998),(Levant 2003), cuyo desarrollo también se basa en los conceptos de homogeneidad.

2.5.1. *Propiedades de homogeneidad de modos deslizantes de orden superior*

Antes de comenzar el planteamiento del problema se da la definición formal del orden de deslizamiento. Por simplicidad, se tratan únicamente modos deslizantes respecto a una restricción escalar. Considérese una ecuación diferencial discontinua $\dot{x} = f(x)$, donde $x \in R^n$ y $f(\cdot)$ es una función vectorial localmente acotada y medible. Entiéndase esta ecuación diferencial en el sentido de Filippov y considérese una restricción dada por $\sigma(x) = 0$, donde $\sigma : R^n \mapsto R$ es una función suficientemente suave.

Definición 2.5.1 *Suponga que las derivadas respecto al tiempo $\dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$, a lo largo de la trayectoria del sistema, existen y son funciones continuas (univaluadas) de x . Entonces el conjunto deslizante de orden r , que forma una condición de dimensión r en los estados de la dinámica del sistema, está determinado por las igualdades:*

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0 \quad (2.12)$$

Sea el conjunto dado por (2.12), no vacío y localmente un conjunto integral en el sentido de Filippov (i.e. son trayectorias de Filippov). Entonces se dice que las trayectorias correspondientes, dentro del conjunto (2.12), están en el modo deslizante de orden r , respecto a la restricción σ .

Considérese ahora el siguiente sistema una entrada-una salida

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a(t, \xi) + b(t, \xi)u, & \xi \in R^n, u \in R \\ \sigma &: (t, \xi) \mapsto \sigma(t, \xi) \in R \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde σ es la salida medida del sistema, u es la entrada de control. Las funciones a, b son desconocidas. Lo que se desea es lograr que la igualdad $\sigma = 0$ se cumpla en tiempo finito y una vez que se satisface mantener esa

igualdad; para ello se utilizará una retroalimentación discontinua. Primero se extiende el sistema mediante una ecuación ficticia $\dot{t} = 1$, con ello es posible considerar sistemas no autónomos. Haciendo las siguientes definiciones: $\tilde{\xi} = (\xi, t)^T$, $\tilde{a}(\tilde{\xi}) = (a(t, \xi), 1)^T$, $\tilde{b}(\tilde{\xi}) = (b(t, \xi), 0)^T$, el sistema (2.13) toma la forma de la ecuación (2.14)

$$\dot{\tilde{\xi}} = \tilde{a}(\tilde{\xi}) + \tilde{b}(\tilde{\xi})u \quad \sigma = \sigma(\tilde{\xi}) \quad (2.14)$$

Se supone que el grado relativo r del sistema (2.14) es conocido y constante. Entonces, la siguiente ecuación se cumple (Isidori 1989).

$$\begin{aligned} \sigma^{(r)} &= h(t, \xi) + g(t, \xi)u, \quad g(t, \xi) \neq 0 & (2.15) \\ \text{donde } h(t, \xi) &= \sigma^{(r)}|_{u=0} \\ g(t, \xi) &= \frac{\partial}{\partial u} \sigma^{(r)} \end{aligned}$$

Debido a la incertidumbre en las funciones $a(\cdot), b(\cdot)$ y a que sólo se conocen cotas para ellas, no es posible llegar a la forma (2.15) a partir de (2.13). Suponga que las siguientes desigualdades

$$0 < K_m \leq \frac{\partial}{\partial u} \sigma^{(r)} \leq K_M, \quad |\sigma^{(r)}|_{u=0} \leq C \quad (2.16)$$

se cumplen para algunos valores de $K_m, K_M, C > 0$. Estas condiciones se cumplen, al menos localmente, para cualquier sistema suave (2.13) con un grado relativo bien definido en un punto dado $\dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$. Supóngase que las desigualdades (2.16) se cumplen globalmente. Entonces (2.15),(2.16) implican la siguiente inclusión diferencial

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \quad (2.17)$$

El control acotado de retroalimentación

$$u = \Psi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \quad (2.18)$$

es construido de tal forma que la igualdad $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$, se establece en tiempo finito. Obsérvese que si el u fuera continua, su valor sería cercano a la constante $\Psi(0, \dots, 0)$ en una vecindad del origen, dicho valor tendría el objetivo de estabilizar el origen de $\sigma^{(r)} = c + ku$, pero $c \in [-C, C], k \in [K_m, K_M]$; por lo que la función Ψ tiene que ser discontinua en el origen. Supongase que el control (2.18), impone propiedades de homogeneidad a la inclusión (2.17),(2.18), el lado derecho de (2.17) sólo puede ser una función multivaluada con grado de homogeneidad 0; esto debido al término $[-C, C]$, ya que si el grado de homogeneidad fuera positivo entonces el lado derecho de (2.17),(2.18) tiende a cero cerca del origen (con $0 < \kappa < 1; f(x) = \kappa^{-q}f(d_\kappa x) > f(d_\kappa x)$), lo cual no es posible con $C > 0$. Con un grado de homogeneidad negativo este lado derecho es no acotado cerca del origen ($f(x) < f(d_\kappa x)$), lo cual contradice el acotamiento local de Ψ . Por lo tanto el grado de homogeneidad de (2.17), debe de ser 0 y el grado de homogeneidad de la función $\sigma^{(r-1)}$ debe ser opuesto al grado de homogeneidad del sistema completo (i.e igual al peso de la variable de tiempo). Para verificar esta última afirmación suponga que el grado de homogeneidad de la función $\sigma^{(r-1)}$ es m_{r-1} , entonces $\sigma^{(r-1)}(x) = \kappa^{-m_{r-1}}\sigma^{(r-1)}(d_\kappa x)$ y el sistema completo $\sigma^r = \frac{d\sigma^{(r-1)}(x)}{dt}$ deberá ser invariante a la transformación $G_\kappa : (t, x) \mapsto (\kappa^{-q}t, d_\kappa x)$, sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma^r(x) &= \frac{d\sigma^{(r-1)}(d_\kappa x)}{d\kappa^{-q}t} \\ \sigma^r(x) &= \frac{d\kappa^{m_{r-1}}\sigma^{(r-1)}(x)}{d\kappa^{-q}t}\end{aligned}$$

es decir $m_{r-1} = -q$, q es el grado de homogeneidad del sistema completo; obsérvese que para $\sigma^{(r-2)}$, $m_{r-2} = -2q$. Escalando el grado de homogeneidad a -1 , se tiene que los pesos de $t, \sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ son $1, r, r-1, \dots, 1$ respectivamente.

Definición 2.5.2 La inclusión (2.17),(2.18) y el controlador (2.18), son llamados deslizantes homogéneos de orden r si se cumple que para cualquier $\kappa > 0$ y $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ la transformación combinada de tiempo y coordenadas:

$$G_\kappa : (t, \sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \mapsto (\kappa t, \kappa^r \sigma, \kappa^{r-1} \dot{\sigma}, \dots, \kappa \sigma^{(r-1)}) \quad (2.19)$$

preserva la inclusión diferencial (2.17),(2.18).

La transformación (2.19) convierte a la inclusión (2.17),(2.18) en:

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M] \Psi(\kappa^r \sigma, \kappa^{r-1} \dot{\sigma}, \dots, \kappa \sigma^{(r-1)})$$

Por lo que (2.18) es deslizante homogéneo de orden r si y solo si:

$$\Psi(\kappa^r \sigma, \kappa^{r-1} \dot{\sigma}, \dots, \kappa \sigma^{(r-1)}) = \Psi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \quad (2.20)$$

2.5.2. Control cuasi continuo homogéneo por modos deslizantes de orden superior

Con la finalidad de reducir el efecto de castaño, se diseña un controlador que es continuo en todas partes excepto en el conjunto deslizante de orden r : $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$. Debido a esta propiedad dicho controlador es llamado cuasi continuo. En la práctica, el conjunto $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ nunca es alcanzado debido a retardos de conmutación, ruidos de medición y perturbaciones que no se desvanecen en el origen. La dinámica estará en una vecindad del modo deslizante de orden r . Considérese el método de construcción del control dado por las expresiones (2.21)

$$\begin{aligned} \varphi_{0,r} &= \sigma, \quad N_{0,r} = |\sigma|, \quad \Psi_{0,r} = \varphi_{0,r}/N_{0,r} = \text{sign}\sigma \\ \varphi_{i,r} &= \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r} \\ N_{i,r} &= |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \\ \Psi_{i,r}(\cdot) &= \varphi_{i,r}/N_{i,r}; \quad i = 0, \dots, r-1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$, son números positivos. La siguiente proposición se puede probar por inducción.

Proposición 2.5.1 (*Levant 2005b*) $N_{i,r} > 0$. La función $\Psi_{i,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i)})$ es continua en todas partes (i.e. puede ser redefinida por continuidad) excepto en el punto $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(i)} = 0$.

Teorema 2.5.1 (*Levant 2005b*) Puesto que $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}, \alpha > 0$ son escogidos suficientemente grandes en el orden dado, el controlador homogéneo de orden r .

$$u = -\alpha \Psi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \quad (2.22)$$

asegura la estabilidad en tiempo finito de (2.17), (2.22). El modo deslizante de orden r , estable en tiempo finito, $\sigma \equiv 0$ es establecido en el sistema (2.13), (2.22).

La prueba del teorema 2.5.1, dónde se especifican las condiciones que deben cumplir los parámetros β_i, α , se incluye en el apéndice.

En la práctica, no es necesario conocer los valores exactos de C, K_m, K_M para aplicar estos controladores. Con α suficientemente grande, cada elección de los parámetros β , determina una familia de controladores aplicable a todos los sistemas del tipo (2.13) con grado relativo r . Como resultado de la proposición (2.5.1), se tiene que el control (2.22) es continuo en todas partes excepto en el modo deslizante de orden r es decir, en el conjunto: $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$.

A continuación se dan ejemplos de controles cuasi continuos con $r \leq 4$.

1. $u = -\alpha \text{sign} \sigma$
2. $u = -\alpha \frac{\dot{\sigma} + |x|^{1/2} \text{sign} \sigma}{|\dot{\sigma}| + |x|^{1/2}}$

$$\begin{aligned}
3. \quad u &= -\alpha \frac{\ddot{\sigma} + 2(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3})^{-1/2}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \text{sign}\sigma)}{\ddot{\sigma} + 2(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3})^{1/2}} \\
4. \quad u &= -\alpha \frac{\dot{\sigma} + 3[\ddot{\sigma} + (|\dot{\sigma}| + 0.5|\sigma|^{3/4})^{-1/3}(\dot{\sigma} + 0.5|\sigma|^{3/4} \text{sign}\sigma)][|\dot{\sigma}| + (|\dot{\sigma}| + 0.5|\sigma|^{3/4})^{2/3}]^{1/2}}{|\ddot{\sigma}| + 3[|\dot{\sigma}| + (|\dot{\sigma}| + 0.5|\sigma|^{3/4})^{2/3}]^{1/2}}
\end{aligned}$$

Con la finalidad de preservar las propiedades de exactitud y estabilidad en tiempo finito, se incluye como parte del controlador el diferenciador homogéneo, robusto y exacto (Levant 2003) para calcular $\dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ en tiempo real. Su aplicación es factible debido a que Ψ en (2.18) es acotada lo que implica que $\sigma^{(r)}$ es acotada. El controlador con el diferenciador queda de la forma:

$$\begin{aligned}
u &= -\alpha \Psi(z_0, \dots, z_{r-1}) & (2.23) \\
\dot{z}_0 &= -\lambda_0 L^{1/r} |z_0 - \sigma|^{(r-1)/r} \text{sign}(z_0 - \sigma) + z_1 \\
\dot{z}_1 &= -\lambda_1 L^{1/r-1} |z_1 - \dot{z}_0|^{(r-2)/(r-1)} \text{sign}(z_1 - \dot{z}_0) + z_2 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{r-2} &= -\lambda_{r-2} L^{1/2} |z_{r-2} - \dot{z}_{r-3}|^{1/2} \text{sign}(z_{r-2} - \dot{z}_{r-3}) + z_{r-1} \\
\dot{z}_{r-1} &= -\lambda_{r-1} L \text{sign}(z_{r-1} - \dot{z}_{r-2}) & (2.24)
\end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $z_0 = \sigma_0$, $z_i = z_2 = \dots = z_{r-1} = 0$, además se debe cumplir que $L \leq C + \sup|\Psi|K_M$ y los parámetros λ_i son seleccionados de tal forma que $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{r-1}$. Una posible elección de estos parámetros para $r \geq 6$ es $\lambda_{r-1} = 1,1$, $\lambda_{r-2} = 1,5$, $\lambda_{r-3} = 3$, $\lambda_{r-4} = 5$, $\lambda_{r-5} = 8$, $\lambda_{r-6} = 12$. Si se consideran los pesos $r - i$, para cada z_i con $i = 0, 1, \dots, r - 1$, se obtiene la inclusión diferencial (2.17),(2.23),(2.24) con grado de homogeneidad -1 . Debido al tiempo finito de convergencia del diferenciador (Levant 2003), la inclusión diferencial de Filippov correspondiente también es uniformemente estable en tiempo finito.

3. COMPENSACIÓN DE PERTURBACIONES DESACOPLADAS MEDIANTE MODOS DESLIZANTES DE ORDEN SUPERIOR

En este capítulo se propone un nuevo algoritmo de diseño de control para aquellos sistemas en la forma de retroalimentación estricta dada por (2.11). Con este algoritmo de diseño, se obtiene seguimiento exacto y en tiempo finito de la salida deseada, en presencia de perturbaciones no acopladas. El procedimiento se basa en un enfoque jerárquico de diseño y hace uso de controladores cuasi continuos por modos deslizantes de alto orden, descritos en el capítulo 2. Este método usa la idea de control virtual, pero tiene la ventaja de evitar la transformación de coordenadas y el enfoque de alta ganancia. Como primer paso se define la dinámica deseada de la salida, esta dinámica está determinada por la tarea a realizar, ya sea esta de regulación o seguimiento. Una vez que se ha definido la dinámica para el estado que representa la salida del sistema, la dinámica de los estados subsecuentes estará definida por la del estado anterior. Para lograr el comportamiento deseado, cada control virtual se divide en dos partes, una está destinada a compensar la parte no lineal nominal del sistema y la segunda es responsable de lograr la dinámica deseada aún en presencia de perturbaciones. Puesto que la señal de referencia y las perturbaciones se suponen acotadas, los controles virtuales también serán acotados. Es en esta segunda parte del control donde se incluye un algoritmo cuasi continuo por modos deslizantes de alto orden, sin embargo, no es agregado directamente si no a través de un número determinado de integrales que

dependerá del grado relativo del estado en particular.

3.1. Planteamiento del problema

Considere la clase de sistemas no lineales en la forma NCB especial de la ecuación (3.1):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + g_1(x_1, t) \\ \dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i, t) + B_i(\bar{x}_i, t)x_{i+1} + g_i(\bar{x}_i, t) \\ \dot{x}_n &= f_n(\bar{x}_n, t) + B_n(\bar{x}_n, t)u + g_n(x, t) \\ i &= 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estado, $x_i \in R$, $\bar{x}_i = [x_1 \dots x_i]^T$; $u \in R$ es el vector de control. Además $f_i(\bar{x}_i, t)$ y $B_i(\bar{x}_i, t)$ son campos vectoriales suaves, $g_i(\cdot)$ es una perturbación desconocida pero acotada con al menos $n-i$ derivadas acotadas, este término toma en cuenta variación de parámetros y perturbaciones externas, $B_i(\cdot) \neq 0 \quad \forall x \in X \subset R^n, t \in [0, \infty)$.

Se busca diseñar un controlador para que la salida, $y = x_1$, realice seguimiento exacto de una señal de referencia suave, $y_d(t)$. Esto es, la igualdad $y = y_d$ debe establecerse en tiempo finito, T , y mantenerse $\forall T > 0$.

Se supone el completo conocimiento del vector de estados x . El estado x_2 es usado como control virtual de x_1 y para garantizar que x_1 realice el seguimiento de y_d , la primer superficie de deslizamiento se elige como la diferencia entre estas dos señales. Luego se incluye la $(n-1)$ -ésima integral del controlador homogéneo deslizante de orden n como parte del primer control virtual; la prueba de convergencia deja claro el porqué de este procedimiento. El error entre el control virtual mencionado, valor deseado del estado, y el valor real del estado es considerado como superficie de deslizamiento para el siguiente control virtual. El procedimiento se repite hasta llegar a la entrada de control real. En la siguiente sección se describe paso a paso el algoritmo.

3.2. Algoritmo de diseño

Considerando el estado x_2 como control virtual en la primera ecuación de (3.1), la perturbación $g_1(x_1, t)$ aparece como acoplada. Se propone el siguiente algoritmo de diseño para realizar el seguimiento de y_d , en presencia de perturbaciones.

Paso 1:

Tomando a $x_2 = \phi_1(x_1)$ como control virtual, se elige como superficie de deslizamiento a $\sigma_1 = x_1 - y_d$. El controlador cuasi continuo homogéneo deslizante de orden n es incluido en $\phi_1(x_1)$. El control $\phi_1(x_1)$ deberá ser una función diferenciable $n - 1$ veces:

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1) &= B_1(\cdot)^{-1}\{-f_1(\cdot) + u_{1,1}\} \\ \dot{u}_{1,1} &= u_{1,2} \\ &\vdots \\ \dot{u}_{1,n-1} &= -\alpha_1 \Psi_{n-1,n}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)})\end{aligned}\tag{3.2}$$

La función $\Psi_{n-1,n}(\cdot)$ es el control cuasi continuo descrito en el capítulo 2, es decir (Levant 2005b):

$$\begin{aligned}\varphi_{0,n} &= \sigma, \quad N_{0,n} = |\sigma|, \quad \Psi_{0,n} = \varphi_{0,n}/N_{0,n} = \text{sign}\sigma \\ \varphi_{i,n} &= \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,n}^{(n-i)/(n-i+1)} \Psi_{i-1,n} \\ N_{i,n} &= |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,n}^{(n-i)/(n-i+1)} \\ \Psi_{n-1,n}(\cdot) &= \varphi_{n-1,n}/N_{n-1,n}; \quad i = 0, \dots, n-1\end{aligned}\tag{3.3}$$

A su vez las derivadas $\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)}$ se calculan mediante el diferenciador

robusto y exacto de orden $(n - 1)$ (Levant 2003):

$$\begin{aligned}
u &= -\alpha_1 \Psi(z_0, \dots, z_{r-1}) & (3.4) \\
\dot{z}_0 &= -\lambda_0 L^{1/r} |z_0 - \sigma|^{(r-1)/r} \text{sign}(z_0 - \sigma) + z_1 \\
\dot{z}_1 &= -\lambda_1 L^{1/r-1} |z_1 - \dot{z}_0|^{(r-2)/(r-1)} \text{sign}(z_1 - \dot{z}_0) + z_2 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{r-2} &= -\lambda_{r-2} L^{1/2} |z_{r-2} - \dot{z}_{r-3}|^{1/2} \text{sign}(z_{r-2} - \dot{z}_{r-3}) + z_{r-1} \\
\dot{z}_{r-1} &= -\lambda_{r-1} L \text{sign}(z_{r-1} - \dot{z}_{r-2}) & (3.5)
\end{aligned}$$

donde $|\sigma^{(n)}| \leq L$ y los parámetros $\lambda_n > \lambda_{n-1} > \dots > \lambda_1 > 0$ se eligen de manera apropiada para que las estimaciones z_0, \dots, z_{n-1} converjan a los valores $\sigma_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)}$ en tiempo finito.

Paso i:

Dado que la dinámica deseada para x_i es $\phi_{i-1}(x_i)$, entonces $\sigma_i = x_i - \phi_{i-1}(x_{i-1})$ debe elegirse como la i -ésima superficie de deslizamiento. El control propuesto es análogo a (3.2), pero con algunos cambios en el orden:

$$\begin{aligned}
\phi_i(x_i) &= B_i(\cdot)^{-1} \{-f_i(\cdot) + u_{i,1}\} \\
\dot{u}_{i,1} &= u_{i,2} \\
&\vdots \\
\dot{u}_{i,n-i} &= -\alpha_i \Psi_{n-i,n-i+1}(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \dots, \sigma_i^{(n-i)})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Es claro que además del orden del control cuasicontinuo $\Psi_{n-i,n-i+1}(\cdot)$, también se cambia la restricción siendo esta ahora $\sigma = \sigma_i$.

Paso n:

En este paso se obtiene $\phi_n(x_n)$, que de hecho es la señal de control real u . Para este paso no es necesario usar un control cuasi continuo, ya que teóricamente no es necesario que este estado se comporte de manera suave. Por lo tanto se elige el siguiente control con $\sigma_n = x_n - \phi_{n-1}(x_{n-1})$:

$$\begin{aligned}
u &= B_n(\cdot)^{-1} \{-f_n(\cdot) + u_{n,1}\} & (3.7) \\
\text{donde } u_{n,1} &= -\alpha_n \text{sign}(\sigma_n)
\end{aligned}$$

El término $u_{n,1} = -\alpha_n \text{sign}(\sigma_n)$ en el control (3.7) ha sido elegido por simplicidad, sin embargo, también se puede usar un algoritmo que brinde mayor suavidad al control, e.g. el algoritmo de super twisting.

Teorema 3.2.1 (*Estrada y Fridman 2008*) *Dado que y_d y $g_i(\cdot)$ en el sistema (3.1) son funciones suaves, con n y $n-i$ derivadas acotadas respectivamente, el control (3.7) obtenido como resultado final del algoritmo de diseño jerárquico arriba propuesto, con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ debidamente seleccionadas, asegura la estabilidad en tiempo finito de $\sigma_1 = x_1 - y_d = \dot{\sigma}_1 = \dots = \sigma_1^{(n-1)} = 0$.*

La selección de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, debe asegurar la convergencia en tiempo finito de la inclusión diferencial particular de cada paso del diseño, como se explica en la prueba de convergencia.

Como se puede apreciar, es necesario calcular en tiempo real cierto número de derivadas del error, para cada control virtual, el controlador resultante tiene un orden mayor al del sistema y existe cierta complejidad numérica para la realización de estos cálculos; por otra parte debe recordarse que la tarea de control requerida es compleja pues no se tiene entrada de control real sobre la salida que además está perturbada. Como punto a favor puede mencionarse que no aparecen derivadas parciales lo cual representa un nivel de complejidad mayor y que el procedimiento asegura seguimiento exacto.

3.2.1. Prueba de convergencia

- Para el estado n

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= f_n(\cdot) + B_n(\cdot)u + g_n(x, t) \\ \text{con } u &= B_n(\cdot)^{-1}\{-f_n(\cdot) + \alpha_n \text{sign}(\sigma_n)\} \\ \sigma_n &= x_n - \phi_{n-1}; \quad \phi_{n-1} \text{ suficientemente suave} \end{aligned}$$

Por lo que $\dot{\sigma}_n = -\alpha_n \text{sign}(\sigma_n) + g_n(x, t) + \dot{\phi}_{n-1}$, tomando $\alpha_n \geq |g_n(\cdot)| + |\dot{\phi}_{n-1}|$ asegura la aparición del modo deslizante estándar (de orden 1) para la restricción σ_n .

- Para el estado $(n - 1)$.

El control virtual ϕ_{n-1} como se definió en (3.6). La restricción está definida por $\sigma_{n-1} = x_{n-1} - \phi_{n-2}$, derivando y sustituyendo ϕ_{n-1} se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{n-1} &= \dot{x}_{n-1} - \dot{\phi}_{n-2} \\ &= f_{n-1}(\cdot) + B_{n-1}(\cdot)\phi_{n-1} + g_{n-1}(\bar{x}_{n-1}, t) - \dot{\phi}_{n-2} \\ \dot{\sigma}_{n-1} &= u_{n-1,1} + g_{n-1}(\bar{x}_{n-1}, t) - \dot{\phi}_{n-2}\end{aligned}$$

derivando de nuevo

$$\ddot{\sigma}_{n-1} = \dot{u}_{n-1,1} + \dot{g}_{n-1}(\bar{x}_{n-1}, t) - \ddot{\phi}_{n-2} \quad (3.8)$$

y de acuerdo a (3.6):

$$\dot{u}_{n-1,1} = -\alpha_{n-1}\Psi_{1,2}(\sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_{n-1})$$

Esto es (3.8) toma la forma (con $i = n - 1$):

$$\begin{aligned}\ddot{\sigma}_i &= h_i(t, x_i) + g_i(t, x_i)u_i \\ \text{con } h_i(t, x_i) &= \ddot{\sigma}_i|_{u_i=0} = \dot{g}_i(\cdot) - \ddot{\phi}_{n-2} \\ g_i(t, x) &= \frac{\partial}{\partial u_i}\ddot{\sigma}_i \\ u_i &= -\alpha_i\Psi_{1,2}(\sigma_i, \dot{\sigma}_i)\end{aligned} \quad (3.9)$$

Si existen constantes $K_{mi}, K_{Mi}, C_i > 0$ tales que se cumple que

$$0 < K_{mi} \leq \frac{\partial}{\partial u_i}\ddot{\sigma}_i \leq K_{Mi}, \quad |\ddot{\sigma}_i|_{u_i=0}| \leq C_i \quad (3.11)$$

entonces (3.9),(3.11) implican la inclusion diferencial

$$\ddot{\sigma}_{n-1} \in [-C_i, C_i] + [K_{mi}, K_{Mi}]u_i \quad (3.12)$$

y el controlador (3.10) asegura la estabilidad en tiempo finito de (3.12),(3.10). El modo deslizante de orden 2 estable es establecido para la restricción σ_{n-1} .

- Para el primer estado.

$\sigma_1 = x_1 - y_d$, ϕ_1 como se definió en (3.2). Derivando σ_1 y haciendo las sustituciones correspondientes se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_d \\ &= f_1(\cdot) + B_1(\cdot)\phi_1 + g_1(x_1, t) - \dot{y}_d \\ &= u_{1,1} + g_1(x_1, t) - \dot{y}_d \\ \sigma_1^{(n)} &= \dot{u}_{1,n-1} + g_1^{(n-1)}(x_1, t) - y_d^{(n)}\end{aligned}\quad (3.13)$$

donde $\dot{u}_{1,n-1} = -\alpha_1 \Psi_{n-1,n}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)})$. Notese que la ecuación (3.13) es análoga a (3.8), por lo que siguiendo el mismo procedimiento

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(n)} &= h_1(t, x_1) + g_1(t, x_1)u_1 \\ h_1(t, x_1) &= \sigma_1^{(n)}|_{u_1=0} = g_1^{(n-1)}(\cdot) - y_d^{(n)} \\ g_1(t, x_1) &= \frac{\partial}{\partial u_1} \sigma_1^{(n)}\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$u_1 = -\alpha_1 \Psi_{n-1,n}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)})\quad (3.15)$$

Si las desigualdades

$$0 < K_{m1} \leq \frac{\partial}{\partial u_1} \sigma_1^n \leq K_{M1}, \quad |\sigma_1|_{u_1=0} \leq C_1\quad (3.16)$$

se cumplen para algunas $K_{m1}, K_{M1}, C_1 > 0$ entonces (3.14),(3.16) implican la inclusión diferencial

$$\sigma_1^{(n)} \in [-C_1, C_1] + [K_{m1}, K_{M1}]u_1\quad (3.17)$$

y el controlador (3.15) asegura la estabilidad en tiempo finito de (3.17),(3.15). El modo deslizante de orden r , estable en tiempo finito se establece para la restricción σ_1 y $\sigma_1 = \dot{\sigma}_1 = \dots = \sigma_1^{(n-1)} = 0$.

3.3. Ejemplos

- **Sistema lineal.**

Considérese el siguiente sistema de tercer orden con perturbaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 1.5x_2 + g_1(x_1, t) \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_3 + g_2(\bar{x}_2, t) \\ \dot{x}_3 &= -1.5x_3 + 2u + g_3(x, t)\end{aligned}\tag{3.18}$$

las funciones g_1, g_2 son perturbaciones no acopladas acotadas y la función g_3 es una perturbación acoplada. Estas funciones están definidas por

$$\begin{aligned}g_1(x_1, t) &= 0.2\sin(t) + 0.1x_1 + 0.12 \\ g_2(\bar{x}_2, t) &= 0.3\sin(2t) + 0.2x_1 + 0.2x_2 - 0.4 \\ g_3(x, t) &= 0.2\sin(2t) + 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.3\end{aligned}$$

Se desea un controlador para que la salida, es decir x_1 , realice el seguimiento de la señal de referencia $y_d = 2\sin(0.15t) + 4\cos(0.1t) - 4$. Siguiendo el procedimiento dado en el algoritmo de diseño, la primera superficie de deslizamiento se elige como $\sigma_1 = x_1 - y_d$ y se construye el primer control virtual, $x_2 = \phi_1(x_1, t)$, como sigue

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1, t) &= \frac{1}{1.5}\{-2x_1 + u_{11}\} \\ \dot{u}_{11} &= u_{12} \\ \dot{u}_{12} &= -\alpha_1\Psi_{2,3}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \ddot{\sigma}_1)\end{aligned}$$

donde

$$\Psi_{2,3}(\cdot) = \frac{\ddot{\sigma}_1 + 2(|\dot{\sigma}_1| + |\sigma_1|^{2/3})^{-1/2}(\dot{\sigma}_1 + |\sigma_1|^{2/3}\text{sign}(\sigma_1))}{|\ddot{\sigma}_1| + 2(|\dot{\sigma}_1| + |\sigma_1|^{2/3})^{1/2}}$$

con lo que la segunda superficie es $\sigma_2 = x_2 - \phi_1(x_1, t)$ y el control virtual correspondiente es

$$\begin{aligned}\phi_2(x_2, t) &= -x_2 + u_{21} \\ \dot{u}_{21} &= -\alpha_2 \Psi_{1,2}(\sigma_2, \dot{\sigma}_2) \\ \Psi_{1,2}(\sigma_2, \dot{\sigma}_2) &= \frac{\dot{\sigma}_2 + |\sigma_2|^{1/2} \text{sign}(\sigma_2)}{|\dot{\sigma}_2| + |\sigma_2|^{1/2}}\end{aligned}$$

Finalmente para el estado x_3 , se elige $\sigma_3 = x_3 - \phi_2(x_2, t)$ y se introduce un control por modos deslizantes de primer orden

$$u = \frac{1}{2} \{1.5x_3 + \alpha_3 \text{sign}(\sigma_3)\}$$

Los resultados obtenidos en simulación se muestran en las figuras (3.1)-(3.4).

Se usaron los siguientes valores de parámetros $\alpha_1 = 0.92$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$.

Para que el control virtual ϕ_1 pueda realizar la tarea de mantener $\sigma_1 = x_1 - y_d = 0$, es necesario que haga una compensación exacta de las perturbaciones que entran por ese canal. Lo anterior significa que se debe cumplir que $B_1 u_{11} = \dot{y}_d - g_1(\cdot)$ para lograr que x_1 siga a la señal de referencia y_d . En la figura (3.3) se muestra el comportamiento de estas señales, apreciándose que en efecto se tiene el comportamiento esperado.

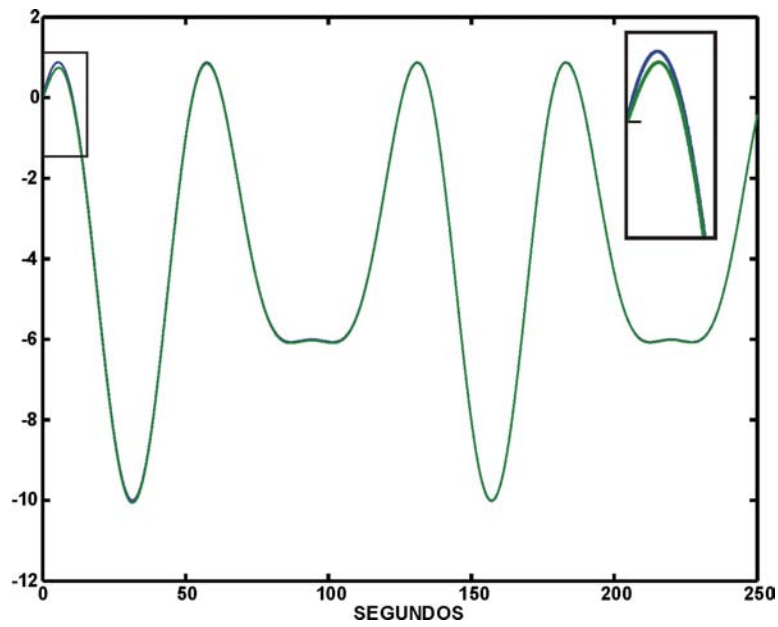


Fig. 3.1: Señales y_d , x_1

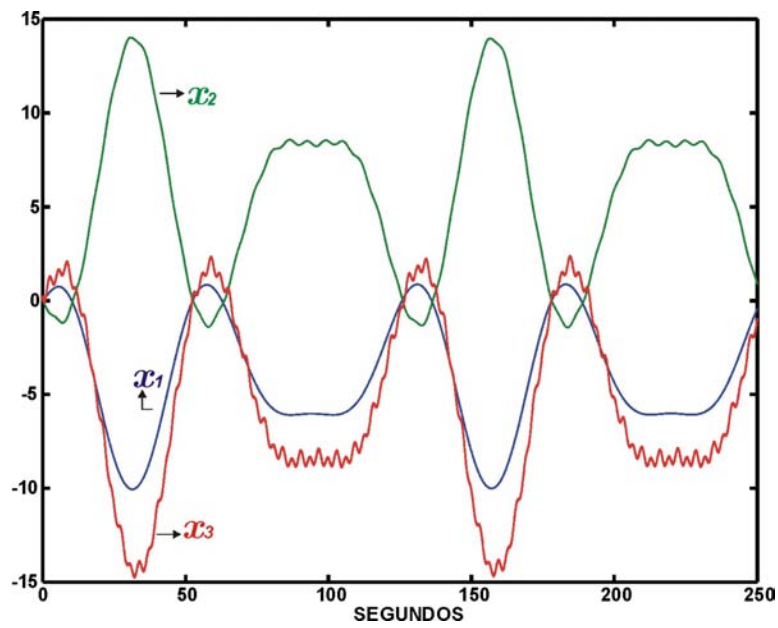


Fig. 3.2: Estados x_1 , x_2 , x_3

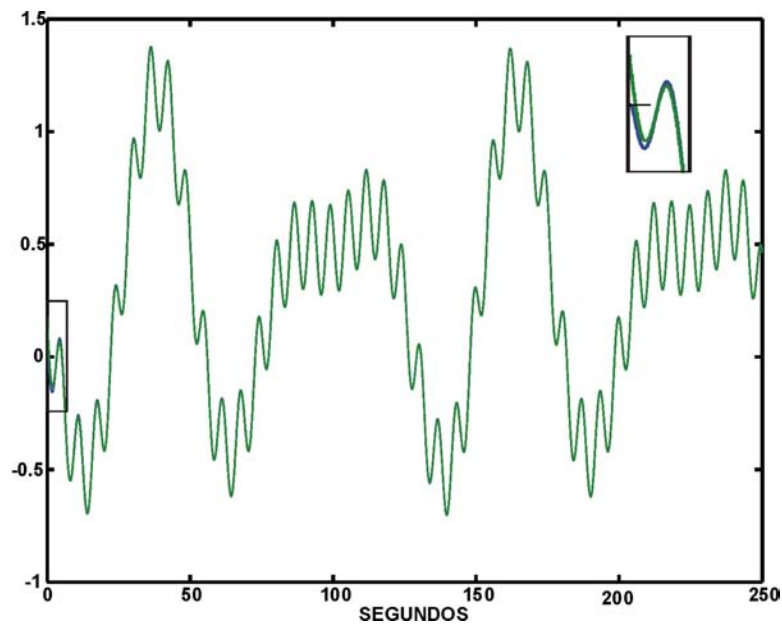


Fig. 3.3: Señales $B_1 u_{11}$ y $y_d - g_1(\cdot)$

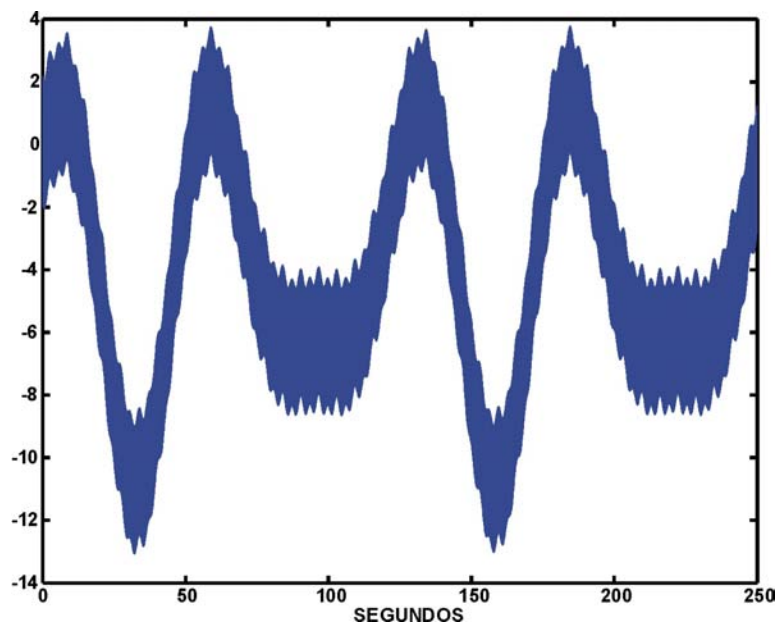


Fig. 3.4: Señal de control u

• Sistema no lineal.

Considérese el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2 + g_1(x_1, t) \\ \dot{x}_2 &= 0.8x_1x_2 + x_3 + g_2(\bar{x}_2, t) \\ \dot{x}_3 &= -1.5x_3^2 + 2u + g_3(x, t)\end{aligned}\tag{3.19}$$

las funciones g_1, g_2, g_3 y la señal de referencia y_d son las mismas que en el ejemplo anterior, es decir

$$\begin{aligned}g_1(x_1, t) &= 0.2\text{sin}(t) + 0.1x_1 + 0.12 \\ g_2(\bar{x}_2, t) &= 0.3\text{sin}(2t) + 0.2x_1 + 0.2x_2 - 0.4 \\ g_3(x, t) &= 0.2\text{sin}(2t) + 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.3 \\ y_d &= 2\text{sin}(0.15t) + 4\text{cos}(0.1t) - 4\end{aligned}$$

Eligiendo $\sigma_1 = x_1 - y_d$, se tiene

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1, t) &= \frac{1}{1.5}\{-2\text{sen}(x_1) + u_{11}\} \\ \dot{u}_{11} &= u_{12} \\ \dot{u}_{12} &= -\alpha_1\Psi_{2,3}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \ddot{\sigma}_1)\end{aligned}$$

donde

$$\Psi_{2,3}(\cdot) = \frac{\ddot{\sigma}_1 + 2(|\dot{\sigma}_1| + |\sigma_1|^{2/3})^{-1/2}(\dot{\sigma}_1 + |\sigma_1|^{2/3}\text{sign}(\sigma_1))}{|\ddot{\sigma}_1| + 2(|\dot{\sigma}_1| + |\sigma_1|^{2/3})^{1/2}}$$

Ahora se elige $\sigma_2 = x_2 - \phi_1(x_1, t)$ y el correspondiente control virtual

$$\begin{aligned}\phi_2(x_2, t) &= -0.8x_1x_2 + u_{21} \\ \dot{u}_{21} &= -\alpha_2\Psi_{1,2}(\sigma_2, \dot{\sigma}_2) \\ \Psi_{1,2}(\sigma_2, \dot{\sigma}_2) &= \frac{\dot{\sigma}_2 + |\sigma_2|^{1/2}\text{sign}(\sigma_2)}{|\dot{\sigma}_2| + |\sigma_2|^{1/2}}\end{aligned}$$

Finalmente para el estado x_3 , se elige $\sigma_3 = x_3 - \phi_2(x_2, t)$ y se introduce un control por modos deslizantes de primer orden

$$u = \frac{1}{2}\{1.5x_3^2 + \alpha_3 \text{sign}(\sigma_3)\}$$

Las figuras (3.5)-(3.8), muestran los resultados de simulación. Se usaron los siguientes valores de parámetros $\alpha_1 = 0.92, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -3.2$.

Es evidente que tanto la señal de control real u así como los controles virtuales x_2 y x_3 cambian su comportamiento para realizar la tarea de control con la nueva dinámica.

Como se mencionó anteriormente es posible usar el control denominado super twisting, en la etapa final del diseño, para suavizar la señal de control real. El término $u_{n,1}$ en la ecuación (3.7) quedaría entonces:

$$u_{n,1} = -\lambda|\sigma_n|^{1/2}\text{signo}(\sigma_n) + u_1 \quad (3.20)$$

$$\dot{u}_1 = \begin{cases} -u_1 & \text{si } |u_{n,1}| > U_M \\ -\alpha_n \text{signo}(\sigma_n) & \text{si } |u_{n,1}| < U_M \end{cases}$$

Con el fin de comparar el comportamiento de la señal de control u al utilizar la función signo con su comportamiento al usar super twisting, se realizó una simulación usando como parámetros del super twisting los siguientes valores $\lambda = 8, \alpha = 1,5, U_M = 2$. Las gráficas obtenidas usando super twisting son muy similares a las obtenidas con la función signo, la mayor diferencia está en el control por lo que en las gráficas (3.9),(3.10) se muestra un acercamiento que permite ver el contraste entre estas dos señales de control.

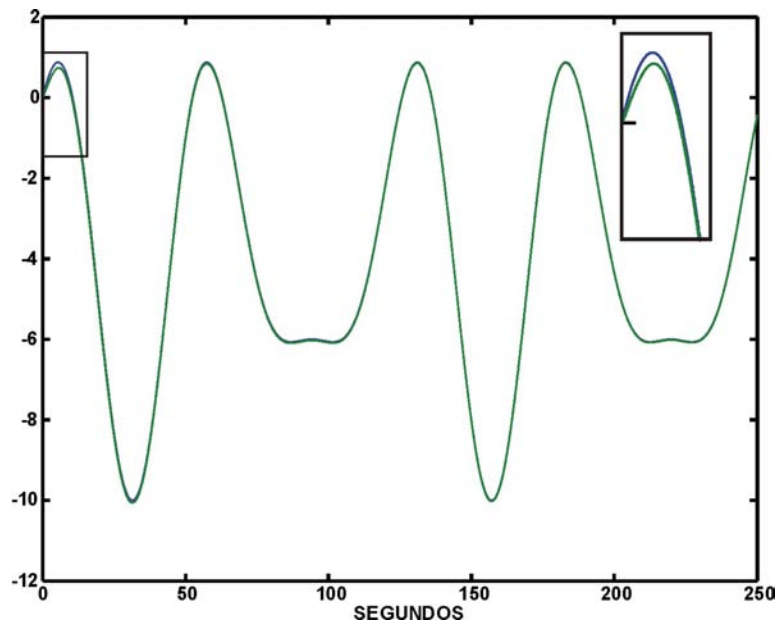


Fig. 3.5: Señales y_d , x_1

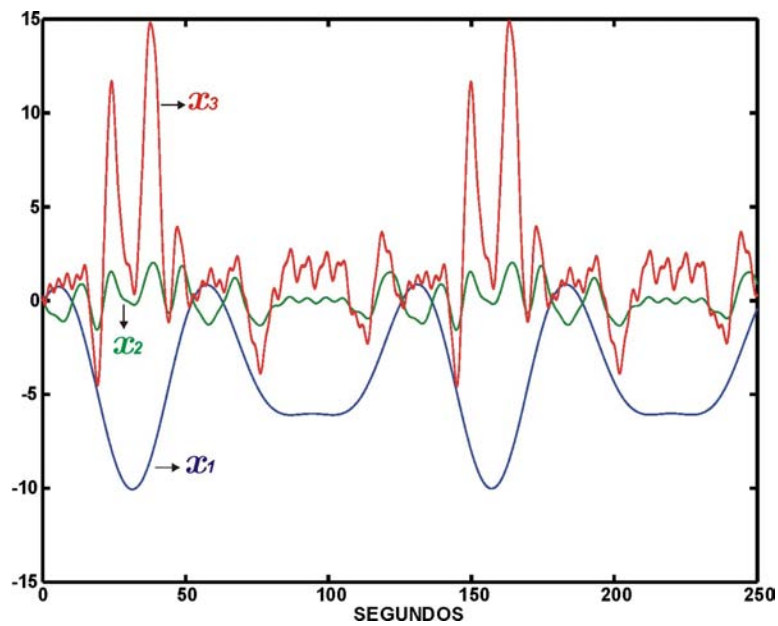


Fig. 3.6: Estados x_1 , x_2 , x_3

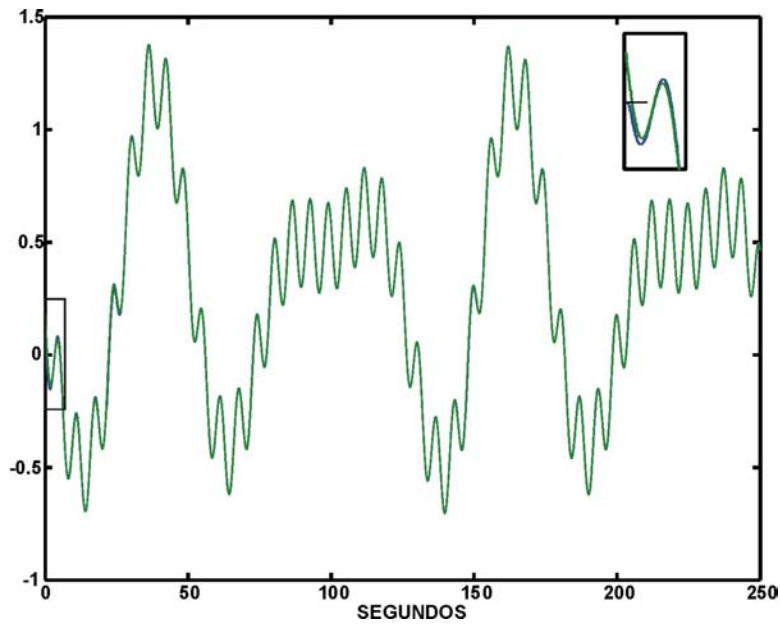


Fig. 3.7: Señales $B_1 u_{11}$ y $y_d - g_1(\cdot)$

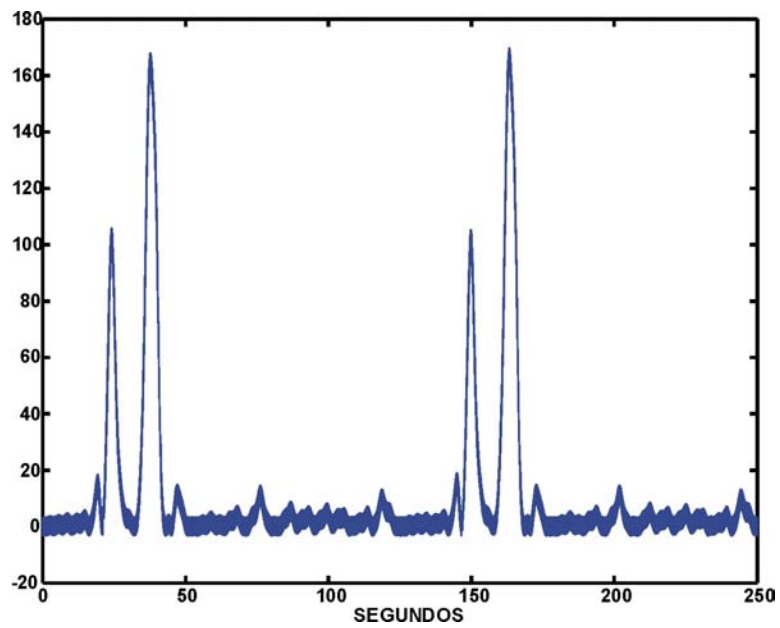


Fig. 3.8: Señal de control u

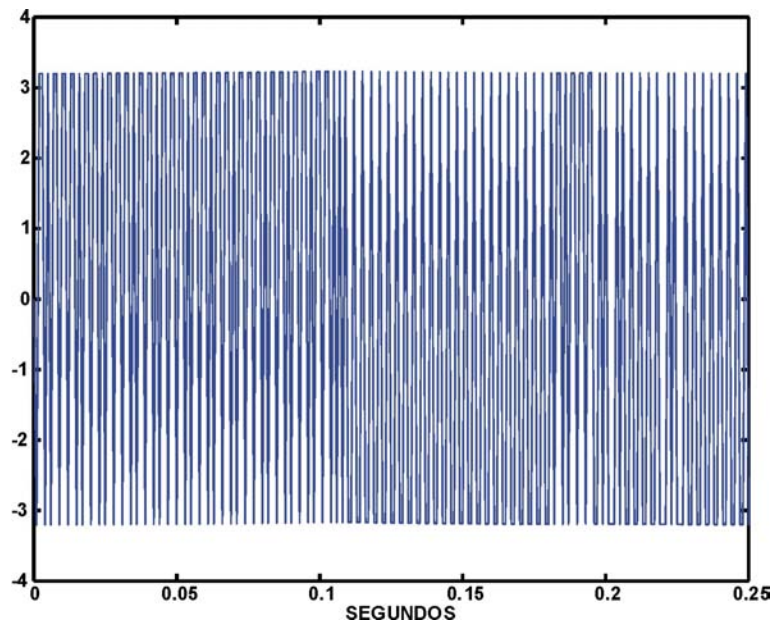


Fig. 3.9: Control u con función signo

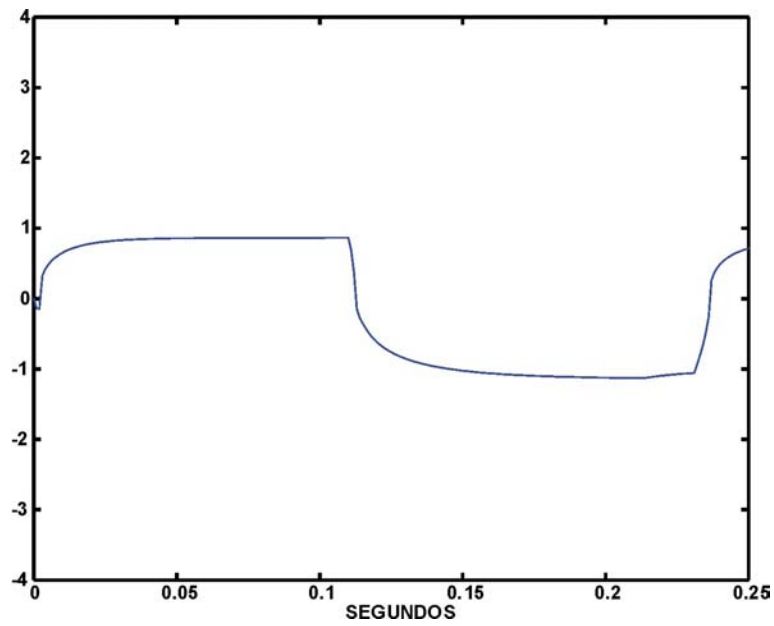


Fig. 3.10: Control u con super twisting

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se presenta un nuevo algoritmo de diseño para una clase de sistemas no lineales con incertidumbres no acopladas. El algoritmo asegura seguimiento exacto y convergencia en tiempo finito. El tipo de sistemas a los que el algoritmo propuesto es aplicable son aquellos cuyo modelo puede ser representado en la forma denominada de retroalimentación estricta. Se presenta un método de transformación para llevar un sistema no lineal afín en el control en forma general a la forma de retroalimentación estricta.

El esquema propuesto es probado en simulación con dos ejemplos, uno para un sistema lineal y el otro para uno no lineal. Los resultados obtenidos muestran la eficacia del diseño de control propuesto ya que en ambos casos el sistema es inestable con perturbaciones no desvanecientes y es necesario además de compensar la parte nominal, rechazar el efecto de las perturbaciones para lograr estabilizar el sistema.

Las principales ventajas de usar los algoritmos de control por modos deslizantes de alto orden son la robustez que tienen ante incertidumbres en los parámetros y que permiten obtener resultados del tipo convergencia exacta y en tiempo finito. Por otra parte, se tiene la desventaja de tener que calcular cierto número de derivadas en tiempo real para cada paso del algoritmo; además es importante resaltar que las condiciones necesarias para asegurar la convergencia sólo permiten asegurar estabilidad local.

Otra ventaja es que a diferencia de los métodos anteriormente propuestos, mencionados en la introducción de esta tesis, en los que es necesario una

transformación de coordenadas adicional a la forma de retroalimentación estricta, en el algoritmo propuesto en este trabajo no es necesario dicha transformación.

En el segundo ejemplo se hicieron dos simulaciones usando dos algoritmos de modos deslizantes diferentes en la señal real de control. En una se usa la función signo de los modos deslizantes estándar y en la otra el algoritmo supertwisting. Lo anterior muestra que es posible usar una señal de control suave y el controlador sigue realizando la tarea de control deseada.

Como trabajo de investigación futuro se puede mencionar el estudiar el comportamiento del controlador cuando no se tiene todo el estado, haciendo necesario el uso de observadores. En cuanto al alcance local de los resultados, una idea es usar modos deslizantes integrales de alto orden para ampliar la región de convergencia y poder obtener estabilidad semiglobal. También queda por estudiar como aplicar el esquema a sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas. Como se puede apreciar son varios los puntos que aún quedan por explorar referentes a los resultados aquí obtenidos.

Como comentario final es importante mencionar que los nuevos resultados teóricos en el área de control por modos deslizantes, hacen posible ampliar el espectro de aplicación de estos y, como es el caso de este trabajo, abordar problemas que no pueden ser resueltos mediante modos deslizantes estándar.

APÉNDICE

A. PRUEBA DEL TEOREMA 2.4.1

¹Se debe probar que la propiedad 3 implica a la propiedad 1 y 2. Existe un número $0 < \kappa < 1$ tal que $D_2 \subset d_\kappa D_1 \subset D_1$. Esto se infiere por la continuidad de la distancia entre D_2 y la frontera de $d_\kappa D_1$ con respecto a κ en métrica de Hausdorff. Por lo tanto las trayectorias que inician en D_1 entran a $W_1 = d_\kappa D_1$ en tiempo T . Sea $W_j = d_\kappa^j D_1$, $j \in \mathbb{Z}$, $W_0 = D_1$, las trayectorias que inician en W_j terminan en W_{j+1} en tiempo $\kappa^{j+1}T$, por lo que:

$$\begin{aligned} \dots \supset W_{-1} \supset W_0 \supset W_1 \dots \supset W_j \\ \dots \cup W_{-1} \cup W_0 \cup W_1 \dots \cup W_j &= R^n \\ \dots \cap W_{-1} \cap W_0 \cap W_1 \dots \cap W_j &= 0 \end{aligned}$$

donde 0 es el origen. De donde, toda trayectoria que se inicie en W_j converge en tiempo finito al origen. El tiempo de convergencia es estimado por la siguiente expresión.

$$\kappa^{j+1}T(1 + \kappa^p + \kappa^{2p} + \dots + \kappa^{jp}) = \kappa^{j+1}T/(1 - \kappa^p)$$

Para cualquier $R > 0$, existe $\mu \ll 1$ tal que cualquier trayectoria que inicie en $d_\mu D_1$ no podrá abandonar el disco $\|X\| \leq R$ en el tiempo $\mu^p T$ debido al acotamiento local de $F(x)$. Esto prueba estabilidad de Lyapunov. Aplicando la transformación inversa $G_{\mu^{-1}}$ se obtiene que las trayectorias que inician en

¹ Esta prueba ha sido tomada de (Levant 2005a)

D_1 son confinadas a algún conjunto compacto D_0 en el tiempo T . Denotando $D_j = d_k^j D_0$, se obtiene una secuencia de conjuntos embebidos que se contraen hasta el origen 0. Por lo que toda trayectoria que inicie en 0 tiene que pertenecer a todos estos conjuntos y por lo tanto no puede abandonar 0.

El conjunto de trayectorias transitorias que inician en un punto dado es compacto en la métrica C (Filippov 1988). El tiempo máximo de convergencia Θ de todas las trayectorias que inician en x es una función homogénea $\Theta(x)$. Es igual a cero en el origen. Su continuidad en el origen se deriva de su homogeneidad: el tiempo máximo de convergencia tiende a cero cuando el disco $d_\kappa D$ de condiciones iniciales se contrae hacia el origen con $\kappa \rightarrow 0$. Cualquier solución que se inicia cercana a x llega a un punto cercano al origen en un tiempo $\Theta(x)$. El tiempo de convergencia residual es pequeño debido a la continuidad de la función $\Theta(x)$ en el origen.

B. PRUEBA DEL TEOREMA 2.5.1

¹Asígnense los pesos, grados de homogeneidad, $r-i$ a $\sigma^{(i)}$, $i = 0, \dots, r-1$, y a t el peso 1, grado negativo de homogeneidad del sistema, lo cual corresponde a la homogeneidad del modo deslizante de orden r .

Lema B.0.1 *El peso de $N_{i,r}$, es igual a $r-i$, $i = 0, \dots, r-1$. Cada función homogénea localmente acotada $\omega(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i)})$ de peso $r-i$ satisface la desigualdad $|w| \leq cN_{i,r}$ para alguna $c > 0$.*

Por lo tanto $N_{i,r}$ es una función positiva definida localmente acotada, lo que implica que $\omega/N_{i,r}$ es acotada por una esfera unitaria y por lo tanto en todas partes.

Lema B.0.2 *Sea $1 \leq i \leq r-2$, entonces para cualquier $\beta_i, \gamma_i, \gamma_{i+1}$ con $\beta_{i+1} > 0$ suficientemente grande, la siguiente desigualdad:*

$$|\sigma^{(i+1)} + \beta_{i+1}N_{i,r}^{(r-i-1)/(r-i)}\Psi_{i,r}| \leq \gamma_{i+1}N_{i,r}^{(r-i-1)/(r-i)}$$

asegura el establecimiento en tiempo finito y posterior mantenimiento, de la desigualdad:

$$|\sigma^{(i)} + \beta_iN_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)}\Psi_{i-1,r}| \leq \gamma_iN_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)}$$

Prueba: Considérese el conjunto $\Omega(\xi) = \{(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i)}) \mid |\Psi_{i,r}| \leq \xi\}$ para alguna determinada $\xi > 0$, $\xi < \gamma_i/(3\beta_i)$, $\xi < 1/3$. La desigualdad $|\Psi_{i,r}| \leq \xi$,

¹ Esta prueba ha sido tomada de (Levant 2005b)

implica que $|\sigma^{(i)}| \leq 2\beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)}$ y por lo tanto $\Omega(\xi) \in \Omega_1(\xi)$, donde el conjunto $\Omega_1(\xi)$ está definido por

$$|\sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r}| \leq 3\xi \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)}$$

Esto es equivalente, en su caso, a $\phi_- \leq \sigma^{(i)} \leq \phi_+$; donde ϕ_- , ϕ_+ son funciones homogéneas de $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}$ del peso $r - i$. Restringiendo ϕ_- y ϕ_+ a la esfera homogénea de radio $\rho = 1$, donde $\rho^p = \sigma^{p/r} + \sigma^{p/r-1} + \dots + (\sigma^{(i-1)})^{p/(r-i+1)}$, $p = 2r$, se obtienen funciones ϕ_{1-} , ϕ_{1+} continuas en dicha esfera. Estas funciones ϕ_{1-} , ϕ_{1+} pueden ser aproximadas por arriba y por abajo por funciones suaves ϕ_{2-} , ϕ_{2+} respectivamente.

Cualquier función ϕ definida en la esfera homogénea $\rho = 1$ es unívocamente extendida a la función Φ de peso $\omega = 0$ definida en el espacio completo $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}$ por la formula:

$$\Phi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}) = \rho^\omega \phi(\rho^{(-r)}\sigma, \rho^{(-r+1)}\dot{\sigma}, \dots, \rho^{(-r-i+1)}\sigma^{(i-1)})$$

donde la función ρ es la arriba definida. De esta forma las funciones ϕ_{2-} , ϕ_{2+} son extendidas por homogeneidad a las funciones continuas homogéneas ϕ_- y ϕ_+ de $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}$ de el peso $r - i$, y son suaves en todas partes excepto en 0, se tiene entonces $\Omega(\xi) \subset \Omega_2 = \{(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}) \mid \phi_- \leq \sigma^{(i)} \leq \phi_+\}$.

Ahora se demostrará que Ω_2 es invariante y atrae a las trayectorias cuando β_{i+1} es suficientemente grande. La frontera "superior" de Ω_2 está dada por la ecuación

$$\pi_+ = \sigma^{(i)} - \Phi_+ = 0$$

Fuera de Ω_2 se asegura la desigualdad $|\Psi_{i,r}| \geq \xi$. Supóngase que en el momento inicial $\pi_+ > 0$ y por lo tanto $\Psi_{i,r} \geq \xi$. Tomando en cuenta que $\dot{\Phi}_+$ es homogénea de peso $r - i - 1$ y, de acuerdo al **Lema B.0.1**, $|\Psi_+| \leq \kappa N_{i,r}^{(r-i-1)/(r-i)}$

y $|\pi_+| \leq \kappa_1 N_{i,r}$ para algunas $\kappa, \kappa_1 > 0$, se obtiene al diferenciar que para β_{i+1} suficientemente grande:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_+ &\leq (-\beta_{i+1}\xi + \gamma_{i+1})N_{i,r}^{(r-i-1)/(r-i)} - \dot{\Phi}_+ \\ &\leq (-\beta_{i+1}\xi + \gamma_{i+1} + \kappa)N_{i,r}^{(r-i-1)/(r-i)} \\ &\leq (-\beta_{i+1}\xi + \gamma_{i+1} + \kappa)(\kappa_1^{-1}\pi_+)^{(r-i-1)/(r-i)}. \end{aligned}$$

Por lo que π_+ se desvanece en tiempo finito con β_{i+1} suficientemente grande. De tal forma que la trayectoria ingresa inevitablemente en Ω_2 en tiempo finito. De forma similar, la trayectoria ingresa en Ω_2 cuando π_+ es negativo y por lo tanto $\Psi_{i,r} \leq -\xi$. Por lo anterior es evidente que Ω_2 es invariante.

Eligiendo Φ_+ y Φ_- suficientemente cercanas a ϕ_+ y ϕ_- en la esfera homogénea y β_{i+1} suficientemente grande, se obtiene del **Lema B.0.1** que $\Omega_2 \in \Omega_1(\gamma_i/(3\beta_i))$ y la afirmación del **Lema B.0.2**.

Se puede ahora relacionar el presente análisis con los modos deslizantes estándar, es decir de orden uno, de la siguiente forma, cuando $i = 0$ el **Lema B.0.2** quedaría de la siguiente forma:

Lema B.0.3 *La desigualdad $|\dot{\sigma} + \beta_1|\sigma|^{(r-1)/r} \text{sign}(\sigma)| \leq \gamma_1|\sigma|^{(r-1)/r}$, con $0 \leq \gamma_1 \leq \beta_1$ asegura que la identidad $\sigma \equiv 0$ es establecida en tiempo finito y una vez establecida se mantiene.*

Para terminar la prueba se procede de forma análoga a la prueba del **Lema B.0.2**, se prueba que para toda $\gamma > 0$ con α suficientemente grande se establece en tiempo finito la desigualdad $|\sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{1/2}\Psi_{r-2,r}| \leq \gamma N_{r-2,r}^{1/2}$ y es mantenida posteriormente.

BIBLIOGRAFÍA

- Adhami-Mirhosseini, A.** y **M. J. Yazdanpanah.** 2005. Robust tracking of perturbed systems by nested sliding mode control. *International conference on Control and Automation, Proceedings of the.* Budapest, Hungary. 44–48.
- Bacciotti, A.** y **L. Rosier.** 2001. Lyapunov functions and stability in control theory. *Lecture Notes in Control and Information Science.*
- Bartolini, G., A. Ferrara, L. Giacomini** y **E. Usai.** 2000. Properties of a combined backstepping second order sliding mode algorithm for some classes of nonlinear systems with non-matched uncertainties. *Transactions on Automatic Control* 45(7). 1334–1341.
- Castaños, F.** y **L. Fridman.** 2006. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control* 55(5). 853–858.
- Choi, H.** 2003. Robust implementation of sliding mode control schemes. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48. 1634–1638.
- Davis, R.** y **S. Spurgeon.** 1993. Robust implementation of sliding mode control schemes. *International Journal of Systems Science* 24. 733–743.
- Drazenovic, B.** 1969. The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica* 5(3). 287–295.

- Estrada, A.** y **L. Fridman.** 2008. Quasi-continuous hoshm control for systems with unmatched perturbations. *10th. IEEE Workshop on Variable Structure Systems.* Antalya, Turkey.
- Ferrara, A.** y **L. Giacomini.** 2001. Output feedback second-order sliding mode control for a class of nonlinear systems with non-matched uncertainties. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 123(7). 313–323.
- Filippov, A.** 1988. *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Freeman, R. A.** y **P. V. Kokotović.** 1993. Design of 'softer' robust nonlinear control law. *International Journal of Systems Science* 29. 1425–1437.
- Fridman, L.** y **A. Levant.** 2002. *Sliding Mode Control in Engineering.* Marcel Dekker. New York. 53–101.
- Huerta-Avila, H., A. G. Loukianov y J. M. C. nedo.** 2007. Nested integral sliding modes of large scale power systems. *46th IEEE Conference on Decision and Control, Proceedings of the.* 1993–1998.
- Isidori, A.** 1989. *Nonlinear Control Systems.* second edn. New York, USA: Springer Verlag.
- Khalil, H. K.** 2002. *Nonlinear Systems.* third edn. New York, USA: Prentice Hall.
- Kokotović, P. V., I. Kanellakopoulos y A. S. Morse.** 1991. *Foundations of Adaptive Control.* Springer-Verlag. chapter Adaptive Feedback Linearization of Non-linear Systems. 311–346.

- Koshkouei, A. J. y A. S. Zinober.** 2000. Adaptive sliding backstepping of a parametric semi-strict feedback systems with unmatched uncertainty. *6th. IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*. Gold Coast, Queensland, Australia. 393–402.
- Krstic, M., I. Kanellakopoulous y P. Kokotovic.** 1995. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York, USA: Wiley Interscience.
- Levant, A.** 1998. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica* 34(3). 379–384.
- Levant, A.** 2003. High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control* 76(9-10). 924–941.
- Levant, A.** 2005a. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica* (41). 823–830.
- Levant, A.** 2005b. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* 50(11). 1812–1816.
- Levant, A.** 2006. *Advances in Variable Structure*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 143–168.
- Liu, P. y A. Zinober.** 1996. Robust control of non-linear uncertain systems via sliding-mode with recursive-interlacing design. *IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*. Tokyo, Japan.
- Loukianov, A. G.** 1998. Nonlinear block control with sliding mode. *Automation and Remote Control* 7(59). 916–933.
- Loukianov, A. G.** 2002. Robust block decomposition sliding mode control design. *Mathematical Problems in Engineering* 8(4-5)(11). 349–365.

-
- Loukianov, A. G.** y **V. Utkin.** 1981. Methods of reducing equations for dynamic systems to a regular form. *Automation and Remote Control* 4)(42). 413–420.
- Scarrat, J. C.** y **A. S. Zinober.** 2000. Dynamical adaptive backstepping: A modular approach. *6th. IEEE International Workshop on Variable Structure Systems.* Gold Coast, Queensland, Australia. 403–412.
- Utkin, V. I., J. Guldner** y **J. Shi.** 1999. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems.* Taylor & Francis.
- Utkin, V.** 1992. *Sliding modes in control and optimization.* Berlin, Germany: Springer Verlag.