



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL GRAFICAEDRO

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICA

P R E S E N T A:
MARIANA LÓPEZ DUDET

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO



2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DATOS DEL JURADO

<p>1. Datos de la alumna López Dudet Mariana 56 76 12 23 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 40100280-3</p>
<p>2. Datos del tutor: Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Dra. Déborah Oliveros Braniff</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Dr. Luis Montejano Peimbert</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 Dr. Javier Páez Cárdenas</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 M. en C. Pietra Adriana Delgado Escalante</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito El Graficaedro 77 pp. 2008</p>

A Pepe, a Vonnette y a Gabo

A Manuel

Agradecimientos

Agradezco a Gaby, a Déborah y a María, por el maravilloso trabajo que realizamos y por hacer de éste una gran experiencia.

A Isabel, por el tiempo invertido y la paciencia, y a Egon, por la valiosa aportación de ideas.

Agradezco a mis papás, por el amor y el apoyo infinito.

A Manolito, por su contribución artística y, sobre todo, por estar siempre a mi lado.

A María (nuevamente) y a Emiliano, por escucharme y ayudarme en lo que concierne a la tesis y en lo que no.

A Javier, por todos esos semestres de proporcionarme asesoría de todo tipo.

A Luis, porque me enseñó a ver que la vida no es larga pero es bien ancha.

A Pietra, por el mejor curso de mi carrera.

A Chime, a Gerardo, a Chos, a Gina, a Sergio, a Adriana, a Gabo y a Jime, por constituir la porra oficial de este proyecto.

A Huguito y a Polola, por una amistad incondicional y por proporcionar una sede alterna para la conclusión de este trabajo.

A Serena, a Abraham y a Víctor, por el soporte técnico.

Agradezco a todos los antes mencionados, a Alux, a Dano, a Dan, a Arturo, a Jova y a Diego, ante todo, por su amistad.

Índice general

Introducción	v
0.1. El Permutaedro	v
1. Definiciones	1
1.1. Gráficas	1
1.2. Teoría de Grupos	4
1.3. Politopos	7
2. Gráficas de Cayley	15
2.1. Introducción	15
2.2. Definición	15
3. Gráficas de tamaño tres	31
3.1. $\mathcal{G}(K_3)$	31
3.2. $\mathcal{G}(T_3)$	34
3.3. $\mathcal{G}(E_3)$	38
4. El Graficaedro	45
4.1. El teorema principal	45

Introducción

En este trabajo proponemos la construcción de un politopo abstracto, basada en un caso particular de gráficas de Cayley, que en cierto sentido generaliza al *permutaedro*, un politopo, que según Gunter Ziegler, en [6], fue aparentemente investigado por Pieter Hendrik Schoute en 1911. Por su naturaleza hemos llamado a este politopo el Graficaedro.

Para construir el Graficaedro es necesario entender principios básicos de teoría de gráficas, politopos y teoría de grupos. En el capítulo 1, establecemos las nociones fundamentales que sustentan esta tesis.

En los capítulos 2 y 3 estudiamos detalladamente algunas propiedades de las gráficas de Cayley que dan origen a la construcción del Graficaedro para, en el capítulo 4, definirlo formalmente y demostrar que es un politopo abstracto.

0.1. El Permutaedro

La idea de la construcción del Graficaedro, como ya mencionamos, está basada en un politopo llamado permutaedro. De hecho, uno de los objetivos que cumple esta tesis es el de demostrar que el permutaedro se puede ver como un caso particular de Graficaedro.

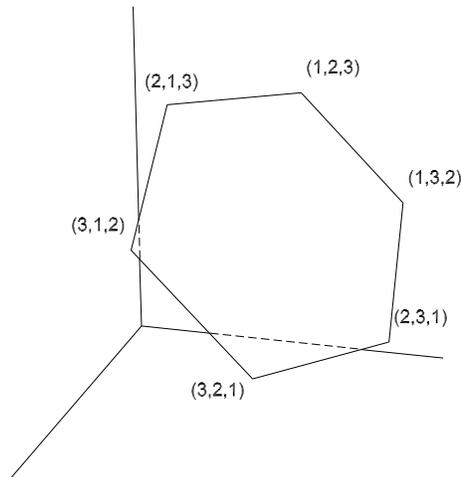
Intuitivamente, un politopo convexo es un objeto que generaliza a los polígonos y poliedros, el sentido en que puede interpretarse como un “poliedro” de dimensión n , es decir, que el espacio euclidiano más pequeño en el que el politopo puede ser inmerso es \mathbb{E}^n .

Una generalización aún más amplia que surge a partir de este concepto es la de politopo abstracto, que se trata de una estructura que, como su nombre lo dice, *abstrae* las propiedades combinatorias de los politopos convexos y los

construye de otra manera, fuera del espacio euclidiano.

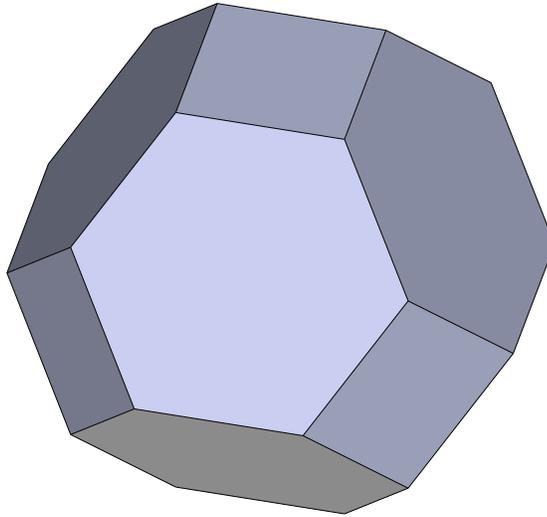
Este trabajo, que tiene como objetivo general demostrar la existencia de una familia de politopos (abstractos) que se construyen a partir de la estructura de ciertas gráficas, surgió a partir del análisis del siguiente ejemplo:

Consideremos el conjunto C de puntos en \mathbb{E}^3 que se obtienen permutado las coordenadas del punto $(1, 2, 3) \in \mathbb{E}^3$, y tomemos el subconjunto \widehat{C} de \mathbb{E}^3 más chiquito que contenga a C y que dados cualesquiera dos puntos en \widehat{C} , el segmento que los une está completamente contenido en \widehat{C} . El conjunto \widehat{C} , que se ilustra en la figura de abajo, es la *cerradura convexa* (o *casco convexo*) de C .



Es fácil demostrar que \widehat{C} es un hexágono regular que está inmerso en \mathbb{E}^2 .

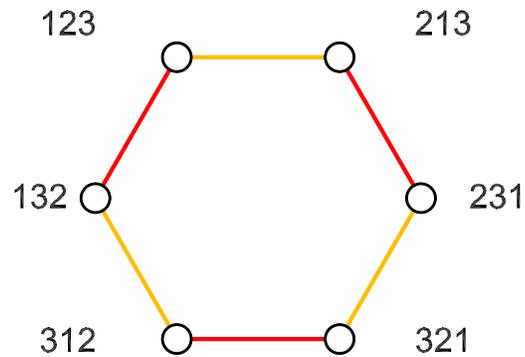
Si ahora construimos el conjunto C' a partir del punto $(1, 2, 3, 4) \in \mathbb{E}^4$, $\widehat{C}' \subset \mathbb{E}^4$ forma la siguiente figura:



En general, se define el permutaedro de dimensión $d - 1$, como la cerradura convexa del conjunto de puntos en \mathbb{E}^d que se obtienen permutando las coordenadas de $(1, 2, \dots, d)$ y se denota Π_{d-1} .

Ahora, consideremos la gráfica $G(\Pi_{d-1})$ que tiene como vértices a las permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, d\}$, de tal forma que dos vértices son adyacentes si y sólo si una difiere de la otra en la transposición de dos números adyacentes.

Ejemplo 1. Si $d = 3$, Π_2 es el hexágono regular que se ilustra anteriormente y $G(\Pi_2)$ es la siguiente gráfica:



En $G(\Pi_2)$, dos vértices, digamos 312 y 132, son adyacentes porque solamente

difieren en intercambiar el lugar de dos elementos que se encuentran uno al lado del otro, en este caso, el 1 y el 3.

En el capítulo 3, en la sección 3.2 demostramos que esta gráfica es isomorfa a una gráfica de Cayley que es, a su vez, isomorfa a la gráfica del Graficaedro de una gráfica en particular.

Capítulo 1

Definiciones

Este trabajo está basado, principalmente, en la teoría desarrollada alrededor de tres objetos matemáticos: gráficas, grupos y politopos. En este capítulo definimos los conceptos básicos que utilizaremos para definir al Graficaedro y demostrar que es un politopo, entre otras cosas.

1.1. Gráficas

Una *gráfica (simple)* G es un conjunto finito de objetos, llamados *vértices*, junto con un conjunto (que puede ser vacío) de parejas no ordenadas de vértices distintos, llamadas *aristas*. Denotaremos al *conjunto de vértices* de G por $V(G)$, mientras que el *conjunto de aristas* se denota $E(G)$.

Si $e = \{u, v\}$ es una arista de G entonces se dice que u y v son *vértices adyacentes* en G . En ese caso, u y e son incidentes en G , de la misma forma que v y e . Más aún, si e_1 y e_2 son aristas que inciden en un mismo vértice, se dice que son *aristas adyacentes*. Denotaremos a la arista $\{u, v\}$ simplemente por uv o vu .

El número de vértices de una gráfica G es llamado el *orden* de G y denotado $p(G)$ o sólo p , mientras el número de aristas es el *tamaño* de G , denotado por $q(G)$ o sólo q . Diremos que una gráfica G de orden p y tamaño q es una (p, q) -gráfica.

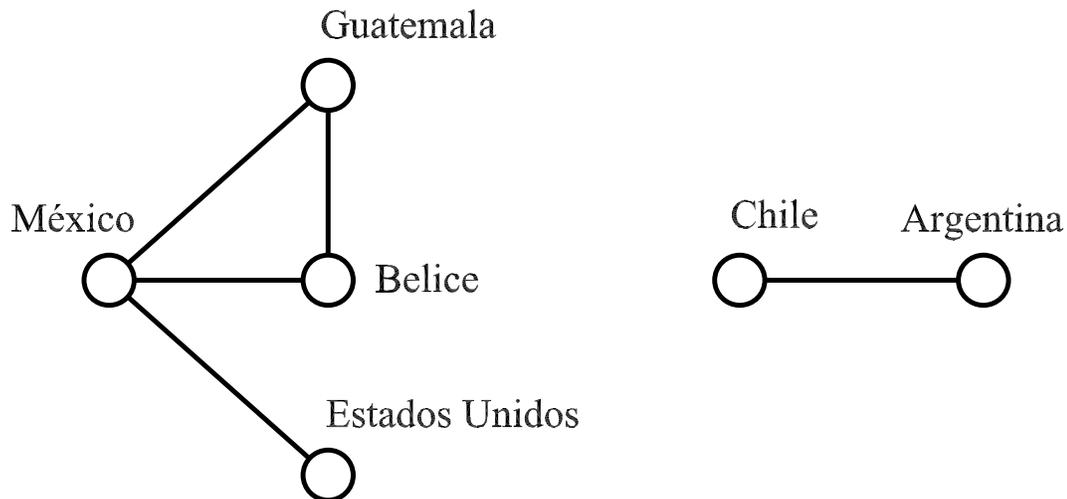
Ejemplo 2. Sea G la gráfica cuyos vértices son los elementos de $V(G) = \{\text{México, Guatemala, Belice, Argentina, Chile, Estados Unidos}\}$ y tal que

dos de estos son adyacentes si y solo si tienen una frontera en común, es decir las aristas de G son el conjunto de parejas ordenadas

$$E(G) = \{\{México, Guatemala\}, \{México, Belice\}, \{México, Estados Unidos\}, \\ \{Belice, Guatemala\}, \{Argentina, Chile\}\}.$$

En este caso, G es una gráfica de orden $p = 6$ y tamaño $q = 5$.

Una gráfica puede ser descrita mediante un dibujo en el cual cada vértice es representado por un punto y cada arista es representada por un segmento de curva que une parejas de puntos que corresponden a parejas de vértices adyacentes. A continuación se muestra un posible dibujo de la gráfica del ejemplo anterior:



Una gráfica G es *completa* si cualesquiera dos de sus vértices son adyacentes. Las gráficas completas de orden p se denotan por K_p . Por el contrario, si el conjunto de aristas de G es vacío, decimos que G es una gráfica *vacía*.

El *complemento* de una gráfica G , denotado \overline{G} es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(\overline{G}) = V(G)$ y tal que dos vértices u y v son adyacentes en \overline{G} si y sólo si u y v no son adyacentes en G .

Dos gráficas G_1 y G_2 son *iguales* si $V(G_1) = V(G_2)$ y $E(G_1) = E(G_2)$. Ahora bien, decimos que dos gráficas G_1 y G_2 son *isomorfas* si existe una biyección $\Phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que Φ preserva la adyacencia; esto es que uv es una arista de G_1 si y sólo si $\Phi(u)\Phi(v)$ es arista en G_2 . Tal función Φ es un *isomorfismo de gráficas*.

El *grado* de un vértice v en una gráfica G es el número de aristas en G incidentes con v y se denota $\delta_G(v)$. Decimos que G es *regular de grado r* o *r -regular* si para cada vértice v de G se tiene que $\delta_G(v) = r$.

Una gráfica H es *subgráfica* de una gráfica G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. En el caso en que $V(H) = V(G)$ decimos que H es una *subgráfica generadora* de G . Si $\{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subseteq E(G)$, denotaremos por $G_{\{e_1, e_2, \dots, e_k\}}$ a la subgráfica generadora de G cuyas aristas son e_1, e_2, \dots, e_k . Nótese que en particular, G puede escribirse como $G_{E(G)}$. Análogamente, G_\emptyset denotará a la subgráfica generadora de G cuyo conjunto de aristas es vacío.

Una *trayectoria* es una subgráfica cuyos vértices forman una sucesión v_1, v_2, \dots, v_n tal que v_i es adyacente a v_{i+1} y $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$. Si entre cualesquiera dos vértices u, v de una gráfica G existe una trayectoria que tenga como vértices a u y a v , decimos que G es *conexa*.

Si G es una gráfica, $v \in V(G)$ y $|V(G)| \geq 2$ entonces $G - v$ denota la subgráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) - \{v\}$ y cuyas aristas son todas las de G que no inciden en v ; si $e \in E(G)$, entonces $G - e$ es la subgráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G) - \{e\}$. Si u, v son vértices de G y $e = uv$, $G + e$ denota a la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G) \cup \{e\}$.

Si U es un subconjunto no vacío de $V(G)$ de una gráfica G , entonces la subgráfica $\langle U \rangle$ de G *inducida* por U es la gráfica cuyo conjunto de vértices es U y cuyas aristas son todas aquellas aristas de G que sean incidentes en dos elementos de U .

Si G y K son dos gráficas, la *unión* de G y K , denotada $G \cup K$, es la gráfica con conjunto de vértices $V(G) \cup V(K)$ y conjunto de aristas $E(G) \cup E(K)$.

1.2. Teoría de Grupos

Grupos de Permutaciones

Una *permutación de un conjunto* A es una función $\Phi : A \rightarrow A$ que es biyectiva.

Dadas dos permutaciones σ y τ de A , podemos definir como operación entre ellas a la composición $\sigma \circ \tau$ que es a su vez una función biyectiva que va de A en A y por tanto una permutación, a la que llamaremos *producto de permutaciones* y denotaremos simplemente por $\sigma\tau$, recordando que la acción debe ser leída de derecha a izquierda: primero se aplica τ y después σ . Esta operación es asociativa, es decir, $(\tau\sigma)\gamma = \tau(\sigma\gamma)$ ya que la composición de funciones lo es.

Un conjunto no vacío G , dotado de una operación binaria asociativa $*$, es un *grupo* si existe un elemento e de G tal que $e * a = a = a * e$ para todo elemento $a \in G$, y si dado un elemento $a \in G$ existe un elemento $b \in G$ tal que $a * b = e = b * a$.

Se puede demostrar que el conjunto de permutaciones de un conjunto no vacío A , que se denota S_A , es un grupo bajo el producto de permutaciones, es decir,

- i) en S_A hay un elemento ι que al operarlo con cualquier elemento $\sigma \in S_A$ el resultado $\sigma\iota = \iota\sigma = \sigma$, a saber, la función identidad $\iota : A \rightarrow A$ tal que $\iota(a) = a$ para cualquier $a \in A$,
- ii) para cada elemento $\sigma \in S_A$ existe un único elemento $\sigma' \in S_A$ tal que $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma = \iota$, a saber, $\sigma' = \sigma^{-1}$, la función inversa de σ ; y por último,
- iii) como ya habíamos aclarado, el resultado de operar dos permutaciones de A es de nuevo una permutación de A .

Si $A = \{1, 2, \dots, n\}$ escribiremos \mathbb{N}_n en lugar de A y S_n en lugar de S_A .

Dado un conjunto A y una permutación σ del mismo, podemos definir una relación en A de la siguiente forma: dados dos elementos $a, b \in A$, se tiene que $a \sim b$ si y sólo si $b = \sigma^n(a)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Se puede demostrar que \sim es una relación de equivalencia en A :

i) \sim es **Reflexiva**:

$$a \sim a \text{ ya que } a = \iota(a) = \sigma^0(a)$$

ii) \sim es **Simétrica**:

Si $a \sim b$ entonces $b = \sigma^n(a)$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$. Pero $a = \sigma^{-n}(b)$ y $-n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $b \sim a$

iii) \sim es **Transitiva**:

Supongase que $a \sim b$ y $b \sim c$ entonces $b = \sigma^n(a)$ y $c = \sigma^m(b)$ para algún $n, m \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo, tenemos que $c = \sigma^m(\sigma^n(a)) = \sigma^{n+m}(a)$, por lo tanto $a \sim c$

De esta forma, cada permutación σ induce una partición distinta de A en clases de equivalencia llamadas *órbitas* de σ . Para cada elemento $a \in A$ el conjunto $o(a) = \{x \in A \mid x = \sigma^m(a) \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}\}$, es la órbita de σ que contiene a a y se escribe mediante una notación cíclica, de la siguiente forma:

$$o(a) = (a \ \sigma(a) \ \sigma^2(a) \ \dots \ \sigma^{t-1}(a))$$

donde $\sigma^t(a) = a$ con $t \leq n$. Nótese que, por consecuencia de lo anterior, cada permutación σ puede escribirse como el producto de sus órbitas.

Ejemplo 3. Sea $\tau \in S_8$, es decir, una permutación del conjunto $\mathbb{N}_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, definida mediante la siguiente regla de correspondencia: $\tau(1) = 2, \tau(2) = 5, \tau(3) = 3, \tau(4) = 6, \tau(5) = 1, \tau(6) = 4, \tau(7) = 8, \tau(8) = 7$

En este caso, τ tiene cuatro órbitas:

$$o(1) = (1 \ 2 \ 5) = o(2) = o(5)$$

$$o(3) = (3)$$

$$o(4) = (4 \ 6) = o(6)$$

$$o(7) = (7 \ 8) = o(8)$$

por lo que

$$\tau = (1 \ 2 \ 5)(4 \ 6)(7 \ 8).$$

En esta notación, las órbitas que constan de un solo elemento se omiten. La única función cuyas órbitas constan todas de un solo elemento es la identidad y se escribe $\iota = (a)$ donde a es cualquier elemento de \mathbb{N}_n (generalmente se utiliza $a = 1$).

Decimos que una permutación σ *mueve* a un elemento a del dominio si $\sigma(a) \neq a$. En otro caso decimos que lo *fija*.

Cuando una permutación τ mueve únicamente dos elementos, dejando fijos a los demás, decimos que τ es una *transposición*. Nótese que en este caso no existe otra posibilidad para los elementos que se mueven, más que ser uno la imagen del otro bajo la permutación.

Diremos que, dada una permutación σ del conjunto $\mathbb{N}_p = \{1, 2, \dots, p\}$, dos elementos i y j en la imagen de σ son adyacentes si sus preimágenes son elementos consecutivos de \mathbb{N}_p , es decir, si existe $k \in \mathbb{N}_p$ tal que $\sigma(k) = i$ y $\sigma(k+1) = j$.

Una parte fundamental de este trabajo esta basada en los dos resultados siguientes:

Teorema 1.1. *Toda permutación es un producto de transposiciones.*

Teorema 1.2. *(de Cayley) Todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones.*

Si G es un grupo, un subconjunto H de G es un *subgrupo* si H es por sí mismo un grupo. Dado un subgrupo H de G y un elemento $g \in G$, una *clase lateral derecha de H en G* es el subconjunto de G

$$Hg = \{hg | h \in H\}$$

Si X es un subconjunto de un grupo G , el *subgrupo generado por X* es el subgrupo de G más pequeño que contiene a X , y se denota $\langle X \rangle$. También se dice que X *genera* a $\langle X \rangle$.

Lema 1. *Sea G un grupo. Si $K \subseteq G$ y $g \in G$, son equivalentes las siguientes afirmaciones para todo elemento $h \in G$:*

i) $h \in \langle K \rangle g$

ii) $\langle K \rangle h = \langle K \rangle g$

Demostración. Que ii) implica i) es inmediato, ya que por ser $\langle K \rangle$ un grupo, tiene un elemento neutro e y por tanto, $h = eh \in \langle K \rangle h = \langle K \rangle g$.

Por otro lado, si $h \in \langle K \rangle g$ entonces h es de la forma $h = k_0 g$ para algún elemento $k_0 \in \langle K \rangle$, por lo que

$$\langle K \rangle h = \langle K \rangle k_0 g = \langle K \rangle g$$

debido a que $\langle K \rangle$ es un grupo. Por lo tanto, i) implica ii). \square

Dado un grupo G y un conjunto $C \subseteq G$ tal que $g \in C$ si y sólo si $g^{-1} \in C$ (cerrado bajo inversos) y que no contenga a la identidad, la *gráfica de Cayley asociada a G y C* , que se denota $\mathcal{G}(G, C)$, es una gráfica con conjunto de vértices G y conjunto de aristas $E(\mathcal{G}(G, C)) = \{gh | hg^{-1} \in C\}$ (en el capítulo 2 se analiza detalladamente este concepto y se ilustran varios ejemplos).

1.3. Politopos

Si A es un conjunto, una relación en A es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$. Decimos que una relación \leq en A es un *orden parcial* si \leq es *reflexiva* ($a \leq a$), *antisimétrica* ($a \leq b$ y $b \leq a$ implica que $a = b$) y *transitiva* (si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$). En ese caso decimos que la pareja ordenada (A, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado (copo).

Un *conjunto totalmente (linealmente) ordenado* (coto) es un copo (A, \leq) tal que dados cualesquiera dos elementos distintos $a, b \in A$, estos son comparables en el orden \leq , es decir, se cumple que $a \leq b$ o bien $b \leq a$ (dicotomía).

Si A es un copo, una *cadena* es un conjunto $C \subseteq A$ tal que C está totalmente ordenado. Diremos que una cadena es *maximal* si no existe otra cadena que la contenga propiamente.

Un *politopo (abstracto) de rango (finito) n* o un *n -politopo (abstracto)* es un copo \mathcal{P} que satisface ciertas propiedades que enunciaremos más adelante, entre otras, que está dotado de una función de rango monótona estricta cuya imagen es $\{-1, \dots, n\}$. En el fondo, esta función establece una jerarquía en el conjunto, que permite definir la relación de orden entre sus elementos. Para $0 \leq j \leq n$ los elementos de \mathcal{P} de rango j se llaman *j -caras* y se denotan F_j . Diremos que las caras de rango 0, 1 y $n - 1$ son *vértices*, *aristas* y *facetas*, respectivamente.

Para que un copo \mathcal{P} con una función de rango sea efectivamente un n -politopo es necesario que tenga una cara mínima F_{-1} y una cara máxima F_n (llamadas *caras impropias* de \mathcal{P}), así como que cada cadena maximal (llamada *bandera*) de \mathcal{P} tenga exactamente $n + 2$ caras. Denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ al conjunto de todas las banderas de \mathcal{P} . Decimos que dos banderas son *adyacentes* si difieren en exactamente una cara. También es necesario que \mathcal{P} sea fuertemente conexo por banderas, es decir que dadas cualesquiera dos banderas $\Phi, \Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ exista una sucesión de banderas $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$ tal que cualesquiera dos banderas sucesivas Φ_i y Φ_{i+1} son adyacentes, con $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ para toda i . Finalmente \mathcal{P} debe satisfacer una condición de homogeneidad (frecuentemente llamada *propiedad diamante*), que establece que dadas cualesquiera dos caras $F, G \in \mathcal{P}$ con $\text{ran}(F) = j-1$ y $\text{ran}(G) = j+1$, si $F \leq G$ entonces existen exactamente dos caras H tales que $F \leq H \leq G$ con $\text{ran}(H) = j$.

Existen dos gráficas que aportan representaciones esquemáticas de un politopo \mathcal{P} . La primera es la *gráfica de incidencia* (o *diagrama de Hasse*), cuyos vértices son las caras de \mathcal{P} y es tal que dos caras F y G son adyacentes si son *incidentes* en \mathcal{P} (es decir, si $F \leq G$ o $G \leq F$). La segunda, que llamaremos simplemente la *gráfica de \mathcal{P}* , denotada $G(\mathcal{P})$, es tal que sus vértices son las 0-caras de \mathcal{P} y dos de ellas son adyacentes si inciden en una misma 1-cara de \mathcal{P} . Dadas dos caras F y G de un politopo \mathcal{P} tales que $F \leq G$, la *sección G/F* de \mathcal{P} es el conjunto de caras $\{H \mid F \leq H \leq G\}$. Si F_0 es un vértice, decimos que la sección F_n/F_0 es la *figura de vértice* de F_0 . Nótese que toda sección G/F de un politopo \mathcal{P} es también un politopo y tiene rango $\text{ran}(G/F) = \text{ran}(G) - \text{ran}(F) - 1$. (La propiedad del diamante establece que el diagrama de Hasse de cualquier sección de \mathcal{P} de rango 1 tiene forma de diamante.)

Sea \mathcal{P} un n -politopo y sea Φ una bandera de \mathcal{P} . La condición del diamante nos dice que para $i \in \{0, n-1\}$ existe exactamente una bandera que difiere de Φ en la i -cara. Tal bandera es llamada la bandera *i -adyacente* a Φ y se denota Φ^i . Más aún, definimos $\Phi^{i,j} = (\Phi^i)^j$ y extendemos la notación por inducción, es decir $\Phi^{i_0, i_1, \dots, i_k} = (\Phi^{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}})^{i_k}$. Nótese que para $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$(\Phi^i)^i = \Phi,$$

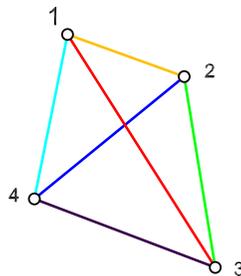
y si $|i - j| > 1$,

$$\Phi^{i,j} = \Phi^{j,i}.$$

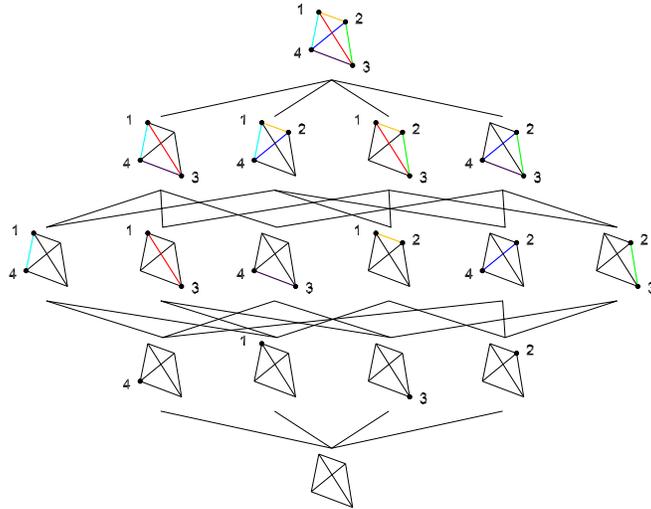
Denotaremos por $(\Phi)_i$ a la i -cara de la bandera Φ . Nótese que $(\Phi)_i = (\Phi^j)_i$ si y solo si $i \neq j$. Por conveniencia, frecuentemente omitimos las caras impropias cuando describimos una bandera, por lo que una bandera Φ puede ser denotada por $\{(\Phi)_0, (\Phi)_1, \dots, (\Phi)_{n-1}\}$. Dos i -caras de \mathcal{P} , F y F' , son *adyacentes* si existe una bandera Φ tal que $(\Phi)_i = F$ y $(\Phi^i)_i = F'$.

Por ejemplo, un 0-politopo contiene únicamente dos elementos (incidentes), F_{-1} y F_0 (por definición existen una cara mínima y una cara máxima); por lo tanto, salvo isomorfismo, existe un único 0-politopo y su gráfica consta de un único vértice. Por otro lado, un 1-politopo debe tener un diagrama (de Hasse) en forma de diamante, por lo tanto, su gráfica consta solamente de dos vértices adyacentes. Si \mathcal{P} es un 2-politopo, es fácil ver que el número de vértices y aristas de \mathcal{P} es el mismo. Más aún, cada vértice es incidente a exactamente dos aristas y cada arista es incidente a exactamente dos vértices. Por esta razón, un 2-politopo es llamado un *polígono*, o si es finito y tiene p vértices un p -ágono. Finalmente, los 3-politopos son frecuentemente llamados *poliedros*.

Ejemplo 4. Pensemos primero en un tetraedro



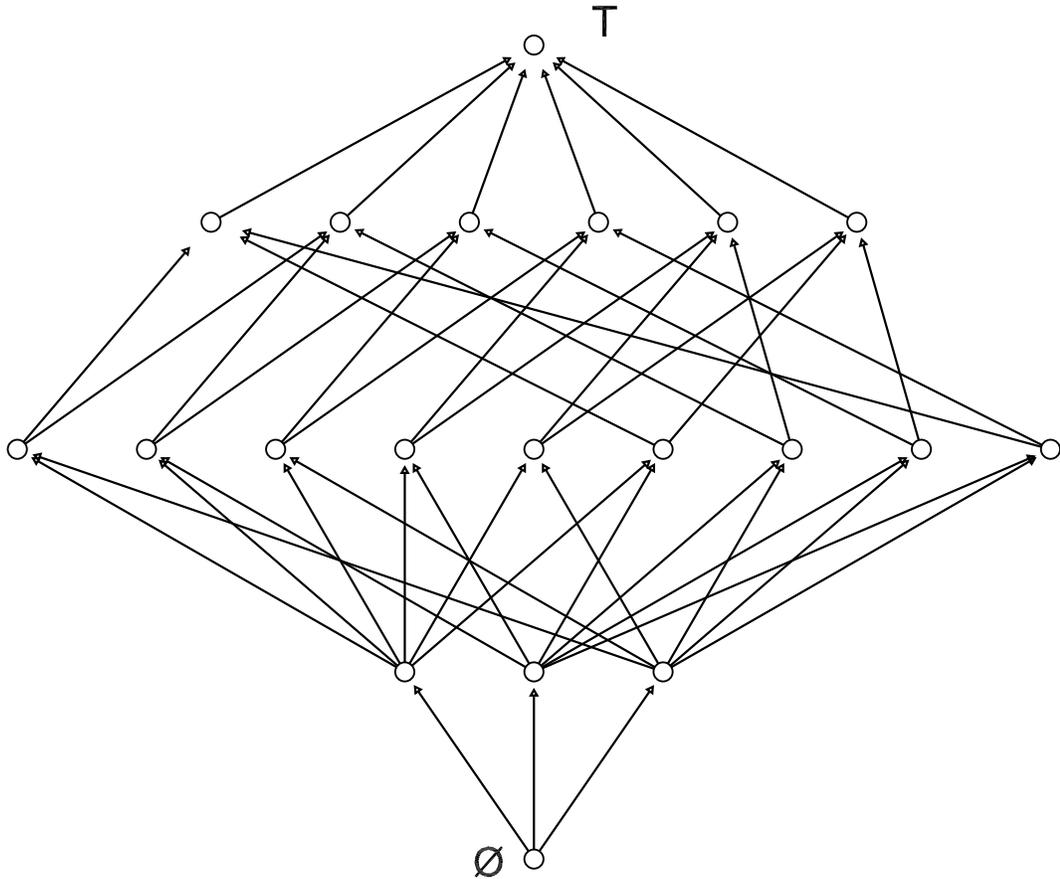
El conjunto formado por los vértices, aristas y caras de este, junto con el conjunto vacío y el tetraedro mismo, ordenado por la incidencia, es un politopo abstracto de rango 3



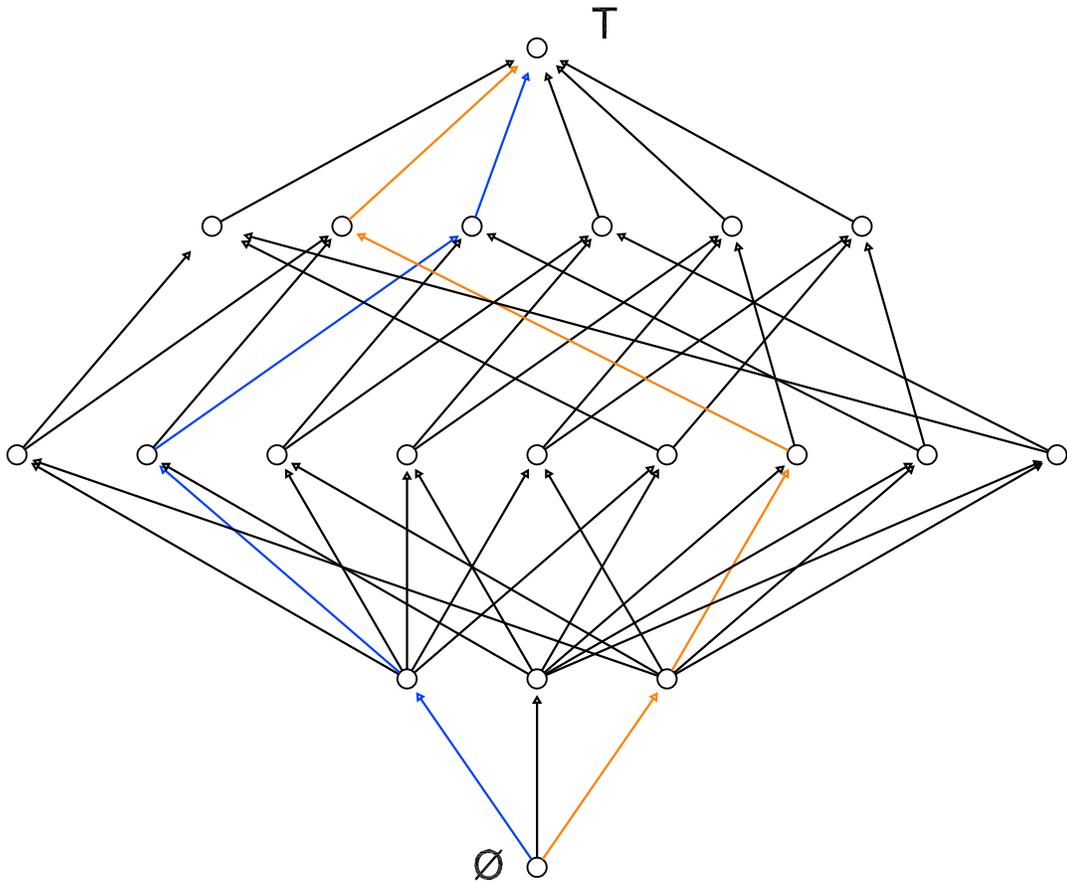
Esto ocurre para cualquier poliedro, ya que en el fondo, la teoría de los politopos abstractos generaliza en cierto sentido a los poliedros que se han estudiado desde la antigüedad.

El siguiente ejemplo lo construimos simplemente a partir de un conjunto de caras y una relación de orden que nos dice cuándo dos caras son incidentes.

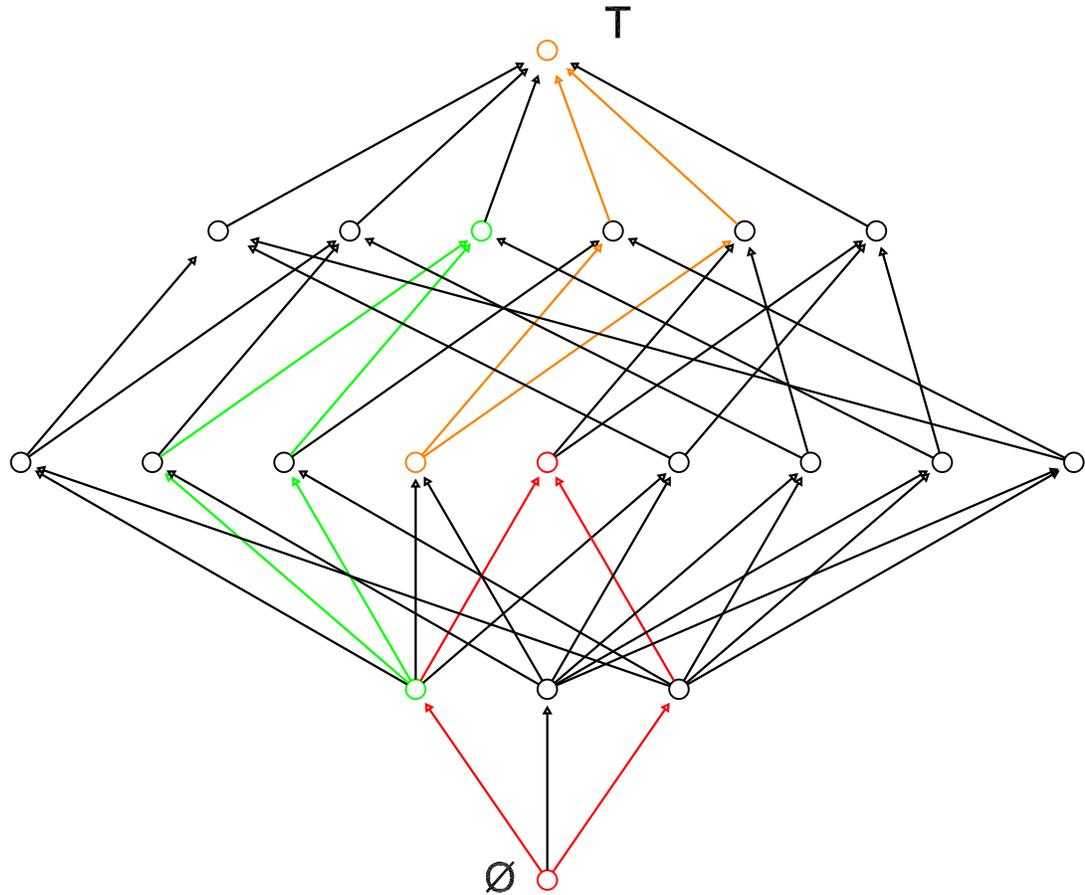
Ejemplo 5. Consideremos el siguiente diagrama D :



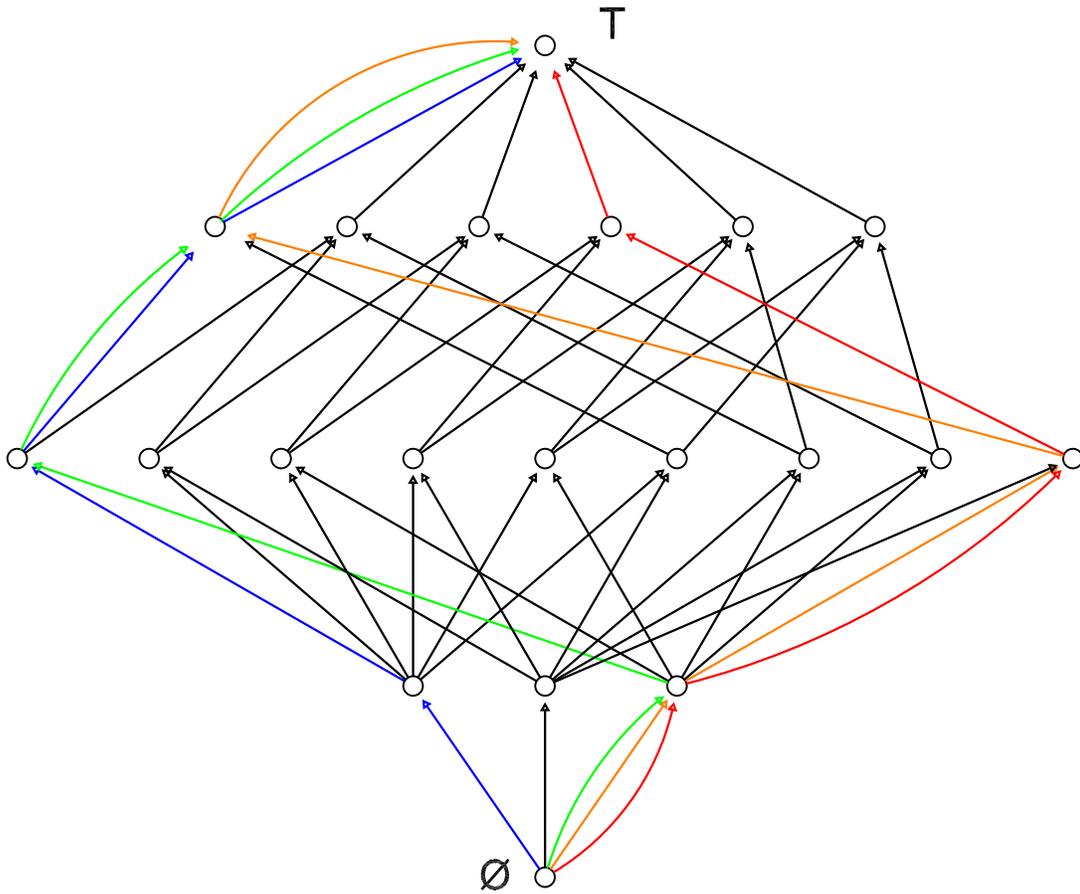
y digamos que un punto v es menor que un punto u si podemos encontrar un camino que va de v a u , siguiendo las flechas. Esta relación ordena parcialmente al conjunto de vértices de H y tiene elementos máximo y mínimo, ya que de \emptyset se puede llegar a cualquier punto y, de la misma manera, se puede ir desde cualquier punto hasta T . También, todo camino que vaya desde \emptyset hasta T pasa por exactamente tres puntos más



y si nos fijamos en dos puntos v y u tales que v es menor que u , donde se puede llegar desde v hasta u recorriendo un camino que conste de exactamente dos flechas, entonces existen exactamente dos caminos distintos que van desde V hasta u y los dos constan exactamente de dos flechas, como se muestra en la siguiente figura:



Por último, dados cualesquiera dos caminos, K , y J , que van desde \emptyset hasta T , existe un conjunto de caminos $K = K_1, K_2, \dots, K_n = J$ tales que cada camino K_i difiere del camino K_{i+1} en exactamente un punto y si los caminos K y J se intersectan entonces todos los demás caminos de la sucesión pasan por la intersección de K y J . En el dibujo siguiente, dados los caminos azul y rojo, el verde difiere del azul en el primer punto y después se encuentran y siguen juntos; el anaranjado comienza junto con el verde, difieren en el segundo punto y luego se encuentran y siguen juntos; y el rojo comienza junto con el anaranjado y únicamente difieren en el último punto antes de llegar T ; por lo tanto, \mathcal{P} es conexo por banderas (es fácil ver que si los caminos azul y rojo compartieran flechas, existe un conjunto de caminos que difieren uno de otro en un solo punto y que pasan por los mismos puntos de la intersección del azul y el rojo).



Por lo tanto, \mathcal{P} junto con el orden dado por las flechas en D , es un politopo abstracto y D es su diagrama de *Hasse*.

Capítulo 2

Gráficas de Cayley

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos a una familia de gráficas de Cayley, determinadas a partir del conjunto de aristas de una gráfica simple, como se detalla a continuación. Es importante conocer algunas de sus propiedades ya que posteriormente demostramos que dada una gráfica G , la gráfica de Cayley determinada por las aristas de G es isomorfa a la gráfica del graficaedro de G .

2.2. Definición

Como ya mencionamos, dado un grupo H y un conjunto $C \subseteq H$, cerrado bajo inversos y que no contiene a la identidad, la gráfica de Cayley, $\mathcal{G}(H, C)$, es tal que sus vértices son los elementos de H y sus aristas son las parejas de vértices de la forma $e = \{g, h\}$, donde $hg^{-1} \in C$, es decir, dos vértices, g y h , son adyacentes siempre que $h = cg$ con $c \in C$. En los siguientes párrafos ejemplificaremos este concepto directamente con las gráficas que utilizaremos a lo largo de todo este trabajo.

Supongamos que G es una gráfica simple con p vértices y $e = \{i, j\}$ es una arista de G . Definimos $\tau_e := (i \ j) \in S_{V(G)}$, es decir, τ_e es el elemento del grupo de permutaciones de los vértices de G que mueve exactamente a los vértices que forman la arista e . Así, dado un conjunto K de aristas de G , definimos el conjunto Γ_K como sigue:

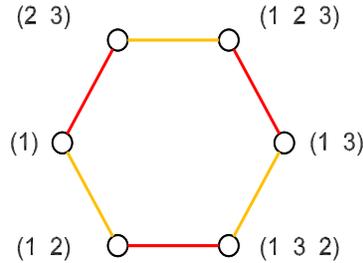
$$\Gamma_K := \begin{cases} \{\iota\} & \text{si } K = \emptyset, \\ \{\tau_{e_{i_1}}, \dots, \tau_{e_{i_k}}\} & \text{si } K = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}. \end{cases}$$

Nótese que si $K \neq \emptyset$, Γ_K es un subconjunto del grupo de permutaciones de los vértices de G , al cual no pertenece la identidad y es cerrado bajo inversos, ya que toda transposición es inverso de sí misma. Con base en esto, si G es una gráfica no vacía, la gráfica cuyos vértices son las permutaciones de los vértices de G y tal que dos permutaciones σ y γ son adyacentes si y sólo si $\sigma = \tau_{e_{i_k}} \gamma$ para algún $e_{i_k} \in E(G)$, es una gráfica de Cayley, $\mathcal{G}(S_{V(G)}, \Gamma_K)$.

Ejemplo 6. Sea G la trayectoria de longitud dos, con vértices 1, 2 y 3, cuyas aristas son $e_1 = \{1, 2\}$ y $e_2 = \{2, 3\}$.

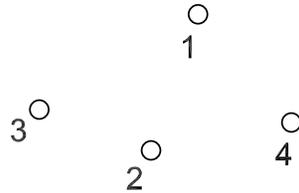


Cada una de las subgráficas generadoras de G , $G_{\{e_1\}}$ y $G_{\{e_2\}}$ induce un conjunto distinto y ajeno de aristas de $\mathcal{G}(S_{V(G)}, \Gamma_{E(G)})$, el conjunto de aristas anaranjadas es generado por la transposición $\tau_{e_1} = (1\ 2)$ y el de aristas rojas por la transposición $\tau_{e_2} = (2\ 3)$, de la siguiente manera: (1) es adyacente a $(2\ 3) = (2\ 3)(1)$ (rojo) y a $(1\ 2) = (1\ 2)(1)$ (anaranjado); $(1\ 2\ 3)$ es adyacente a $(1\ 3)$ (rojo) y a $(2\ 3)$ (anaranjado) ya que $(2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 3)$ y $(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3)$, y por último, el vértice $(1\ 3\ 2)$ es adyacente a $(1\ 2)$ y a $(1\ 3)$, ya que $(2\ 3)(1\ 3\ 2) = (1\ 2)$ y $(1\ 2)(1\ 3\ 2) = (1\ 3)$.

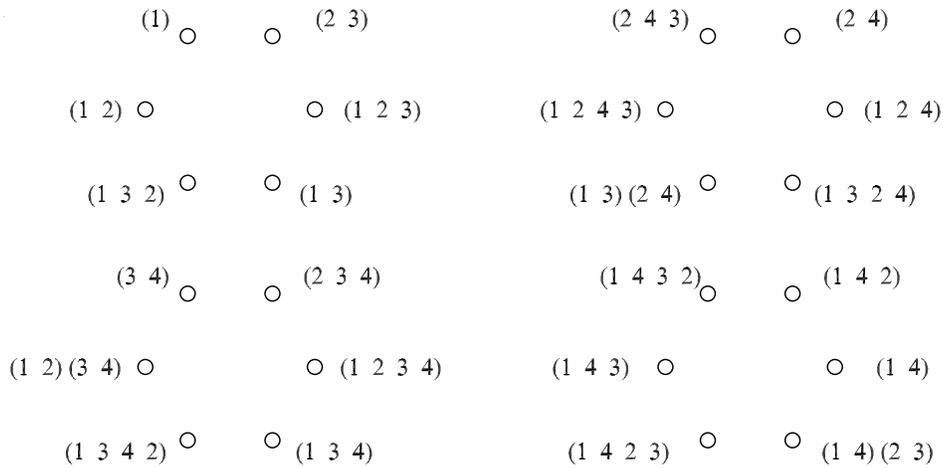


Si $K = \emptyset$ definimos a $\mathcal{G}(S_{V(G)}, \Gamma_K)$ como la gráfica vacía cuyos vértices son los elementos del conjunto de permutaciones de los vértices de G .

Ejemplo 7. Sea G la gráfica vacía cuyos vértices son los elementos de \mathbb{N}_4 .



Según la definición, $\mathcal{G}(S_{V(G)}, \Gamma_\emptyset)$ es la gráfica vacía cuyos vértices son los elementos de S_4 , el grupo de permutaciones de \mathbb{N}_4 .



Dado que $\mathcal{G}(S_{V(G)}, \Gamma_K)$ queda determinada en forma única por la estructura de la gráfica (base) G , en adelante denotaremos a $\mathcal{G}(S_{V(G)}, \Gamma_K)$ simplemente por $\mathcal{G}(G)$ y diremos que es la gráfica de Cayley asociada a G .

Las siguientes proposiciones tienen como objetivo describir algunas propiedades de $\mathcal{G}(G)$ que intuitivamente nos permitirán entender cómo se forman las caras del Graficaedro.

Proposición 1. Si G es una (p, q) -gráfica conexa con $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ entonces el conjunto de transposiciones $\Gamma_{E(G)} = \{\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \dots, \tau_{e_q}\}$ genera a S_p .

(Dado que toda permutación es producto de transposiciones (teorema 1.1) el problema se reduce a demostrar que cualquier transposición en S_p puede ser escrita como un producto de transposiciones de vértices adyacentes en G .)

Demostración. Si $\tau \in S_p$ es una transposición, por definición, τ mueve a exactamente dos elementos de \mathbb{N}_p , digamos i y j .

Si i es adyacente a j en G , entonces $\tau = (i j)$ es producto de transposiciones de vértices adyacentes en G .

En caso contrario, dado que G es una gráfica conexa, existe una mínima sucesión $i = v_1, v_2, \dots, v_r = j$ de vértices de G tales que v_i es adyacente a v_{i+1} para toda $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ por lo que τ puede ser representada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (i j) &= (v_1 v_r) \\ &= (v_1 v_2)(v_2 v_3) \dots (v_{r-1} v_r)(v_{r-1} v_{r-2})(v_{r-2} v_{r-3}) \dots (v_3 v_2)(v_2 v_1), \end{aligned}$$

es decir, como producto de transposiciones de vértices adyacentes en G . \square

Demostraremos que una subgráfica generadora de una subgráfica G da lugar a una subgráfica generadora de $\mathcal{G}(G)$.

Proposición 2. *Si G es una (p, q) -gráfica con $V(G) = \mathbb{N}_p$, H es subgráfica generadora de G si y sólo si $\mathcal{G}(H)$ es subgráfica generadora de $\mathcal{G}(G)$ con $V(\mathcal{G}(G)) = S_p$.*

Demostración. Si H es una subgráfica generadora de G , tenemos que $V(G) = V(H)$, por lo tanto $V(\mathcal{G}(H)) = S_p = V(\mathcal{G}(G))$.

Ahora, sean σ y τ dos permutaciones adyacentes en $\mathcal{G}(H)$. Eso quiere decir que existe $\alpha = (i j) \in S_p$ tal que $\sigma = \alpha\tau$ donde i y j adyacentes en H . Debido a que H es una subgráfica generadora de G , i y j también son adyacentes en G y por tanto, σ es adyacente a τ en $\mathcal{G}(G)$. Así, $\mathcal{G}(H) \subseteq \mathcal{G}(G)$ y, como $V(\mathcal{G}(H)) = V(\mathcal{G}(G))$, $\mathcal{G}(H)$ es subgráfica generadora de $\mathcal{G}(G)$.

Ahora si suponemos que $\mathcal{G}(H)$ es una subgráfica generadora de $\mathcal{G}(G)$ entonces $V(\mathcal{G}(H)) = V(\mathcal{G}(G))$, pero cada elemento tanto de $V(\mathcal{G}(H))$ como de $V(\mathcal{G}(G))$ es, por definición, una permutación de los vértices de sus respectivas gráficas base, H y G . Por lo que podemos concluir que $V(H) = V(G)$.

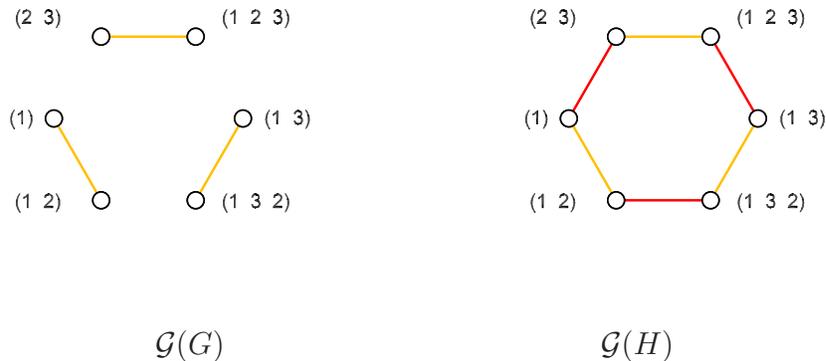
Por otro lado, si i y j son vértices adyacentes en H , entonces cualesquiera dos permutaciones σ y τ tales que $\sigma = (i j)\tau$ son adyacentes en $V(\mathcal{G}(H))$ y, por contención, en $V(\mathcal{G}(G))$. Esto último implica, por definición, que i es adyacente a j en la gráfica base de $\mathcal{G}(G)$, es decir, en G . Por lo tanto, $H \subseteq G$. \square

En general, conforme a la definición de unión de gráficas que dimos en el capítulo 1, dadas dos gráficas G y H , $\mathcal{G}(H) \cup \mathcal{G}(G)$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(\mathcal{G}(G) \cup \mathcal{G}(H)) = V(\mathcal{G}(G)) \cup V(\mathcal{G}(H)) = S_{V(G)} \cup S_{V(H)}$ y cuyo conjunto de aristas es $E(\mathcal{G}(H) \cup \mathcal{G}(G)) = E(\mathcal{G}(H)) \cup E(\mathcal{G}(G))$. Observemos que si $V(G) = V(H)$ se tiene que $S_{V(G)} = S_{V(H)}$, por lo que $S_{V(G)} = S_{V(G)} \cup S_{V(H)} = S_{V(H)}$, es decir que, en la unión, identificamos vértices iguales. Consecuentemente, si una misma arista pertenece tanto a G como a H , en la unión dicha arista aparece una sola vez.

Ejemplo 8. Sean G y H las siguientes gráficas:



Por la proposición anterior se tiene que $\mathcal{G}(G) \subseteq \mathcal{G}(H)$, como se muestra en la siguiente figura:



Dada una gráfica G , denotaremos por $\cup\mathcal{G}(G_K)$ a la unión de las gráficas $\mathcal{G}(G_K)$ tal que G_K es una subgráfica generadora de G con $G_K \neq G$ (es decir, con $K \neq E(G)$). Con la siguiente proposición, lo que buscamos demostrar es que $\mathcal{G}(G)$ puede ser obtenida a partir de la unión de las gráficas $\mathcal{G}(G_K)$ tales que G_K es subgráfica generadora de G .

Proposición 3. *Si G es una (p, q) -gráfica con $q \geq 2$ entonces $\mathcal{G}(G) = \cup\mathcal{G}(G_K)$ con G_K subgráfica generadora propia de G .*

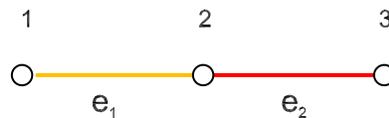
Demostración. Por la proposición anterior, tenemos que $\mathcal{G}(G_K) \subseteq \mathcal{G}(G)$ para toda G_K subgráfica generadora de G , por lo tanto $\cup\mathcal{G}(G_K) \subseteq \mathcal{G}(G)$.

Por otro lado, para cualquier G_K subgráfica generadora de G se tiene que $V(G_K) = V(G)$, por lo que $V(\mathcal{G}(G_K)) = V(\mathcal{G}(G))$ y por lo tanto $V(\cup\mathcal{G}(G_K)) = \cup V(\mathcal{G}(G_K)) = V(\mathcal{G}(G))$.

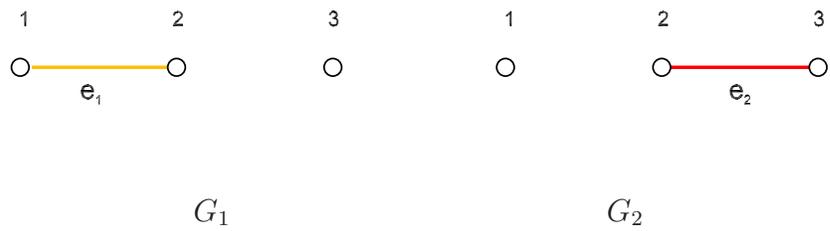
Si $\sigma, \gamma \in S_p$ son adyacentes en $\mathcal{G}(G)$, existe $e \in E(G)$ tal que $\tau_e \in S_p$ cumple que $\sigma = \tau_e \gamma$, por lo tanto σ es adyacente a γ en $\mathcal{G}(G_{\{e\}})$ (donde $G_{\{e\}}$ es la subgráfica generadora de G cuya única arista es e). Nótese que $G_{\{e\}}$ es una subgráfica propia de G ya que $q \geq 2$, lo que implica que σ es adyacente a γ en $\cup\mathcal{G}(G_K)$ con G_K subgráfica generadora propia de G . Por lo tanto $\mathcal{G}(G) \subseteq \cup\mathcal{G}(G_K)$. \square

(En principio se pide que $q \geq 2$, ya que este resultado es falso si G tiene tamaño 1 ó 0 debido a que, en esos casos, las subgráficas generadoras propias de G son vacías o no están definidas.)

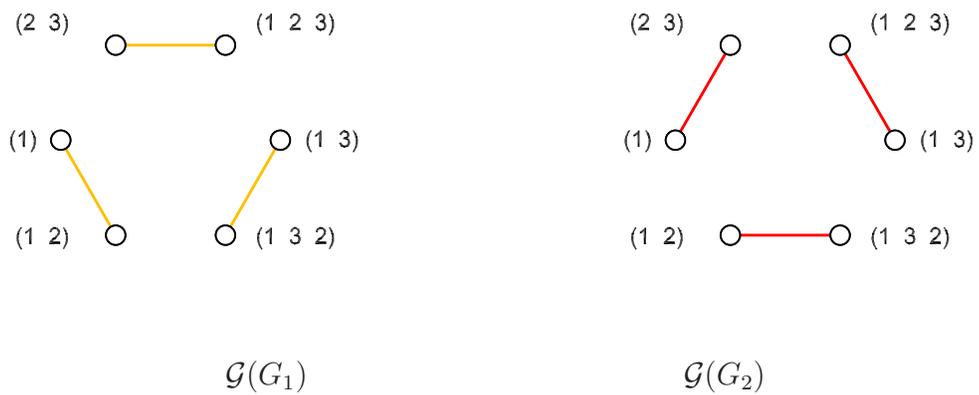
Ejemplo 9. Consideremos nuevamente a G como la trayectoria de longitud dos

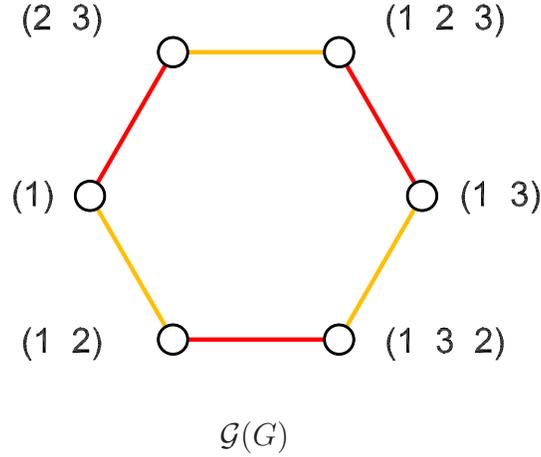


y las subgráficas generadoras propias de G , G_{e_1} y G_{e_2} .



Por la proposición anterior, $\mathcal{G}(G_{e_1}) \cup \mathcal{G}(G_{e_2}) = \mathcal{G}(G)$, como se muestra a continuación:





Proposición 4. Si G y H son gráficas isomorfas entonces $\mathcal{G}(G)$ y $\mathcal{G}(H)$ son gráficas isomorfas.

Demostración. Si G y H son dos (p, q) -gráficas isomorfas, entonces existe una función $f : V(G) \rightarrow V(H)$ que es un isomorfismo de gráficas entre G y H .

Sea $F : V(\mathcal{G}(G)) \rightarrow V(\mathcal{G}(H))$ una función tal que $F(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1}$ para toda permutación $\sigma \in S_{V(G)}$ (nótese que $V(\mathcal{G}(G)) = S_{V(G)}$ para cualquier gráfica G , por lo que utilizamos ambos conjuntos indistintamente).

Observemos que F está bien definida, es decir si $\sigma = \gamma \in S_{V(G)}$ entonces $f \circ \sigma \circ f^{-1} = f \circ \gamma \circ f^{-1} \in S_{V(H)}$ ya que σ, γ y f son funciones biyectivas.

Ahora, F es inyectiva, ya que si $\sigma \neq \gamma$ entonces existe $k \in V(G)$ tal que $\sigma(k) \neq \gamma(k)$, lo que implica que $f \circ \sigma(k) \neq f \circ \gamma(k)$. Pero $f \circ \sigma(k) = f \circ \sigma \circ f^{-1}(f(k))$ y $f \circ \gamma(k) = f \circ \gamma \circ f^{-1}(f(k))$, por lo tanto existe un elemento de $V(H)$, a saber $f(k)$ cuya imagen bajo $F(\sigma)$ y $F(\gamma)$ es distinta, lo que implica que $F(\sigma) \neq F(\gamma)$.

También F es suprayectiva ya que si $\sigma' \in S_{V(H)}$, para $\sigma := f^{-1} \circ \sigma' \circ f \in S_{V(G)}$ tenemos que

$$F(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ \sigma' \circ f) \circ f^{-1} = \sigma'.$$

Ahora bien, si σ y γ son dos permutaciones adyacentes en $\mathcal{G}(G)$, por definición existe $\alpha \in S_{V(G)}$ tal que $\sigma = \alpha\gamma$ con $\alpha = (i j)$ donde i y j son vértices adyacentes de G . Entonces se tiene que

$$F(\sigma) = F(\alpha\gamma) = f \circ (\alpha\gamma) \circ f^{-1} = f \circ \alpha \circ (f^{-1} \circ \gamma \circ f) \circ f^{-1} = (f \circ \alpha \circ f^{-1})(f \circ \gamma \circ f^{-1})$$

por ser f un isomorfismo. Por lo tanto

$$F(\sigma) = (f \circ \alpha \circ f^{-1})(f \circ \gamma \circ f^{-1}) = F(\alpha) \circ F(\tau).$$

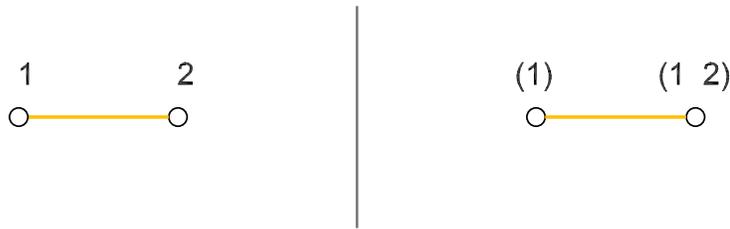
Como $\alpha = (i \ j)$, con i adyacente a j en G , la función $f \circ \alpha \circ f^{-1}$ queda definida de la siguiente manera, para cada $x \in V(H)$:

$$f \circ \alpha \circ f^{-1}(x) = \begin{cases} f(j), & x=f(i); \\ f(i), & x=f(j); \\ f(k), & x=f(k). \end{cases}$$

Como f es un isomorfismo entre las gráficas G y H , $f(i)$ es adyacente a $f(j)$ en H , por lo que podemos concluir que $f \circ \alpha \circ f^{-1}$ es una transposición de vértices adyacentes en H . Por lo tanto, F es un isomorfismo entre las gráficas $\mathcal{G}(G)$ y $\mathcal{G}(H)$. □

A continuación analizamos varios ejemplos para distintas gráficas G .

Ejemplo 10. Sea $G = K_2$, la gráfica completa de orden $p = 2$, cuyos vértices son los elementos de $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$ (izquierda).



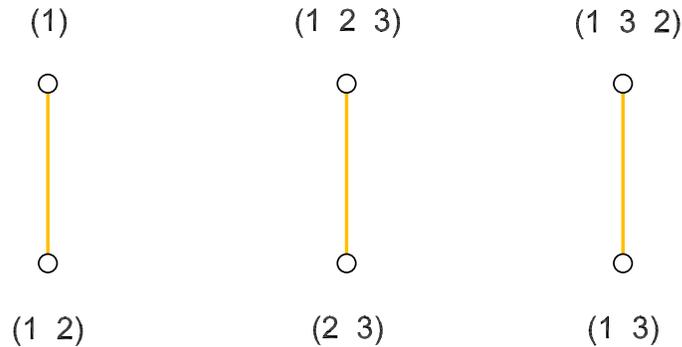
Los vértices de $\mathcal{G}(G)$ (derecha) son los elementos del grupo de permutaciones $S_2 = \{(1), (1 \ 2)\}$ y son adyacentes ya que existe una transposición $\alpha = (1 \ 2) \in S_2$ tal que $\alpha(1) = (1 \ 2)(1) = (1 \ 2)$ o equivalentemente,

$\alpha(1\ 2) = (1\ 2)(1\ 2) = (1)$, que cumple con la condición de que $\alpha = (i\ j)$ con i adyacente a j en G , por lo que $\mathcal{G}(G)$ es también una gráfica completa de orden $p = 2$.

Ejemplo 11. Sea G la gráfica de orden $p = 3$ cuyos vértices son los elementos de $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$ y cuya única arista es $e_1 = \{1, 2\}$.

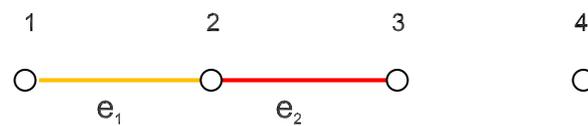


Los vértices de $\mathcal{G}(G)$, como se ilustra en la siguiente figura, son los elementos del grupo de permutaciones $S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ y debido a que la única arista de G es $e = \{1, 2\}$, dos vértices σ y τ en $\mathcal{G}(G)$ son adyacentes si $\sigma = \alpha\tau$ con $\alpha = (1\ 2)$. Entonces, las aristas de la gráfica de Cayley quedan definidas de la siguiente forma: el vértice $\iota = (1)$ es adyacente a $\alpha = (1\ 2)$, ya que $\alpha\alpha = (1\ 2)(1\ 2) = (1) = \iota$; el vértice $\sigma = (1\ 2\ 3)$ es adyacente a $\tau = (2\ 3)$, ya que $\sigma = (1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3) = \alpha\tau$ y el vértice $\sigma' = (1\ 3)$ es adyacente a $\tau' = (1\ 3\ 2)$, ya que $\sigma' = (1\ 3) = (1\ 2)(1\ 3\ 2) = \alpha\tau'$

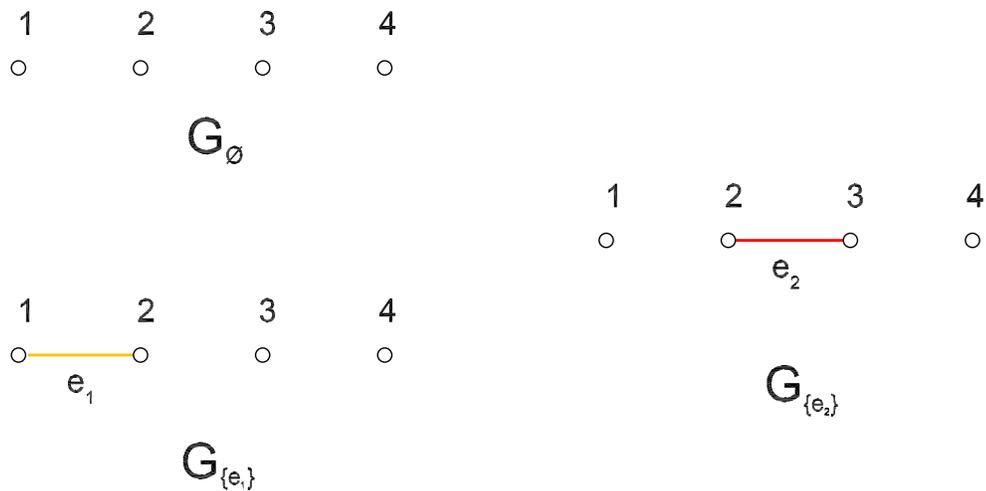


Observese que en general, cada vértice de $\mathcal{G}(G)$ es adyacente a tantos vértices como aristas tenga G , por lo que si G es una gráfica de tamaño q , $\mathcal{G}(G)$ es una gráfica q -regular.

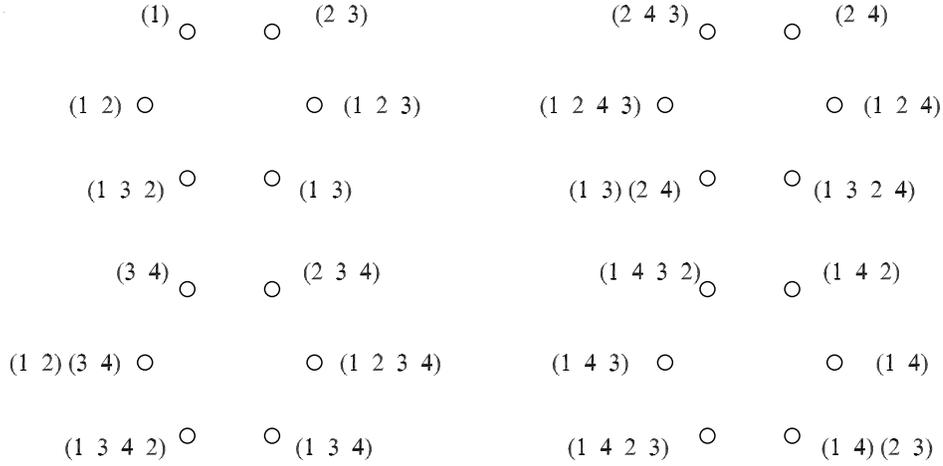
Ejemplo 12. Sea G la gráfica cuyos vértices son los elementos del conjunto $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, cuyas aristas son $e_1 = \{1, 2\}$ y $e_2 = \{2, 3\}$



y consideremos sus subgráficas generadoras propias, G_\emptyset , G_{e_1} y G_{e_2}



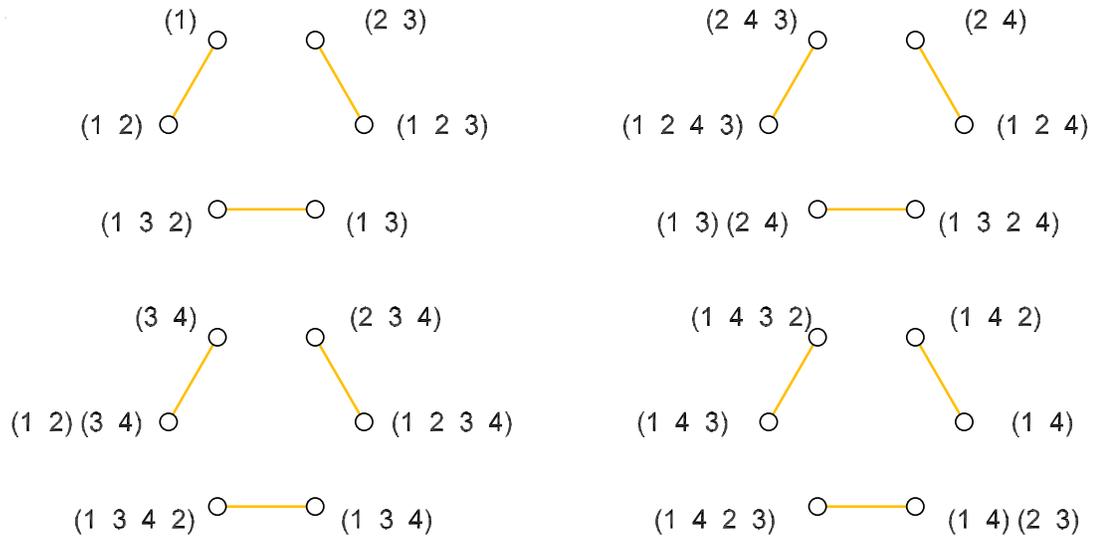
En primer lugar, $G(\emptyset)$ es la gráfica vacía cuyos vértices son los elementos del grupo de permutaciones S_4 y por tanto, de orden $4! = 24$ que se muestra a continuación:



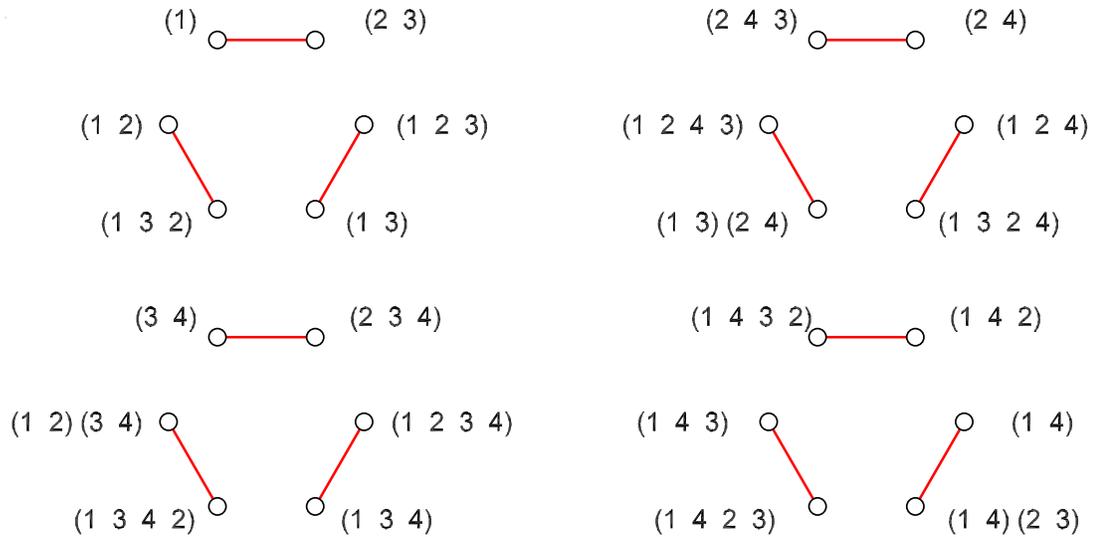
Ahora, cada gráfica $\mathcal{G}(G_{\{e_1\}})$ y $\mathcal{G}(G_{\{e_2\}})$ forma un conjunto distinto de aristas de $\mathcal{G}(G)$.

Como vimos en los ejemplos 10 y 11, la $\mathcal{G}(G)$ de una gráfica G de tamaño uno es, o bien una gráfica completa de orden dos, en el caso de que G sea isomorfa a K_2 , o bien una gráfica disconexa cuyas componentes conexas son isomorfas a K_2 , en caso de que el orden de G sea mayor que dos, como ocurre en este caso con $G_{\{e_1\}}$ y $G_{\{e_2\}}$.

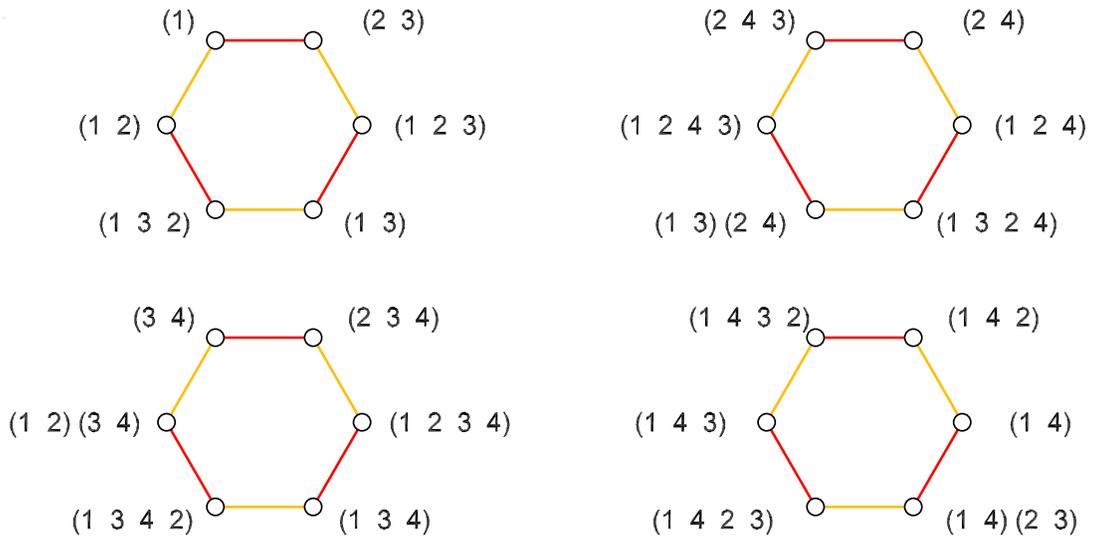
En $\mathcal{G}(G_{\{e_1\}})$, las adyacencias quedan definidas mediante la multiplicación de cada permutación por la transposición $\tau_{e_1} = (1\ 2)$, correspondiente a la arista $e_1 = \{1, 2\}$ de $G_{\{e_1\}}$, como en el ejemplo 6. A continuación se ilustra $\mathcal{G}(G_{\{e_1\}})$:



Por la proposición 4, debido a que $G_{\{e_2\}}$ es isomorfa a $G_{\{e_1\}}$, la construcción de $\mathcal{G}(G_{\{e_2\}})$ es análoga a la de $\mathcal{G}(G_{\{e_1\}})$, con la particularidad de que en este caso serán adyacentes las permutaciones σ y γ que cumplan que $\sigma = (2\ 3)\gamma$. A continuación se ilustra $\mathcal{G}(G_{\{e_2\}})$:



Finalmente, $\mathcal{G}(G)$ es la unión de $\mathcal{G}(G_\emptyset)$, $\mathcal{G}(G_{\{e_1\}})$ y $\mathcal{G}(G_{\{e_2\}})$, como se muestra a continuación:

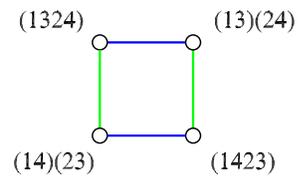
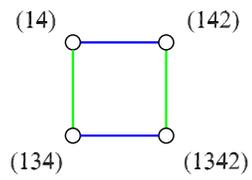
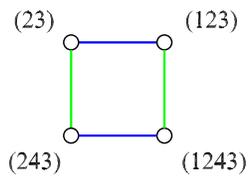
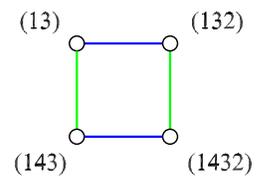
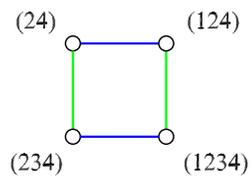
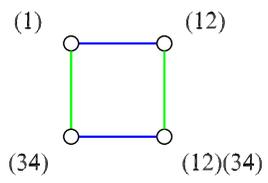


El último tipo de gráfica que es preciso analizar, para abarcar todas las $\mathcal{G}(G)$ tales que G es una subgráfica generadora de alguna gráfica conexa de tres aristas, es la siguiente:

Ejemplo 13. Sea G la $(4, 2)$ -gráfica cuyos vértices son los elementos de \mathbb{N}_4 y cuyas aristas son $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{3, 4\}$



Por lo tanto, $\mathcal{G}(G)$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es S_4 y cuyas aristas quedan determinadas a partir de dos transposiciones, $\tau_{e_1} = (1 2)$ y $\tau_{e_2} = (3 4)$, correspondientes a las aristas de G , haciendo que dos permutaciones σ y γ sean adyacentes si y sólo si $\sigma = (1 2)\gamma$ o bien $\sigma = (3 4)\gamma$.



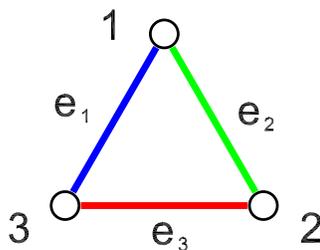
Capítulo 3

Gráficas de tamaño tres

En este capítulo estudiaremos las gráficas de Cayley asociadas a las tres gráficas conexas no isomorfas de tamaño $q = 3$ que existen, la trayectoria de longitud tres (T_3), la gráfica completa de orden tres (K_3) y la estrella (o garra, que definiremos más adelante) de tamaño tres (E_3), para lo que utilizaremos algunos ejemplos analizados en el capítulo 2, ya que las gráficas a partir de las cuales se formaron tales ejemplos son subgráficas generadoras de las que nos interesan en esta sección.

3.1. $\mathcal{G}(K_3)$

Sea K_3 la gráfica completa cuyo conjunto de vértices es $V(K_3) = A_3 = \{1, 2, 3\}$, y cuyas aristas son $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{2, 3\}$ y $e_3 = \{3, 1\}$.



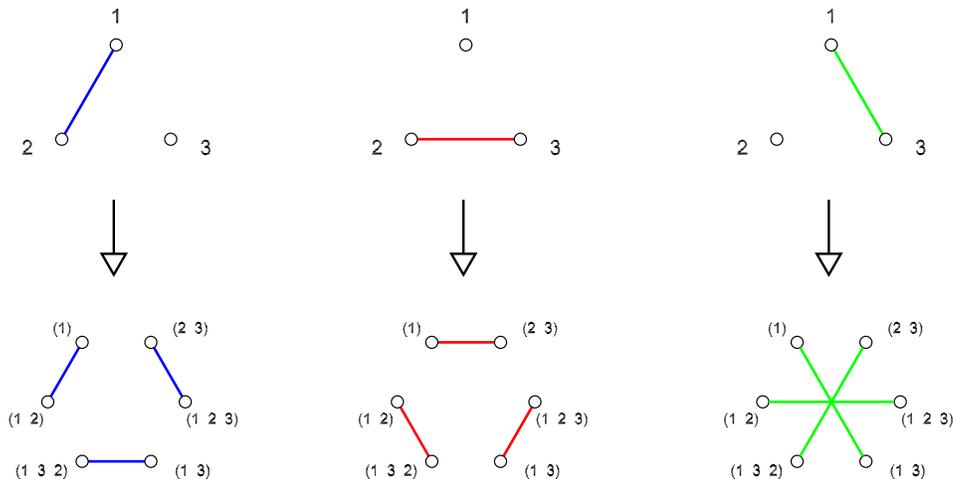
Por definición, cualesquiera dos vértices de K_3 son adyacentes, por lo que $\mathcal{G}(K_3)$ queda definida de la siguiente forma: sus vértices son los elementos

de $S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ y dos de ellos, σ y γ , son adyacentes si y solamente si ocurre uno de los siguientes casos:

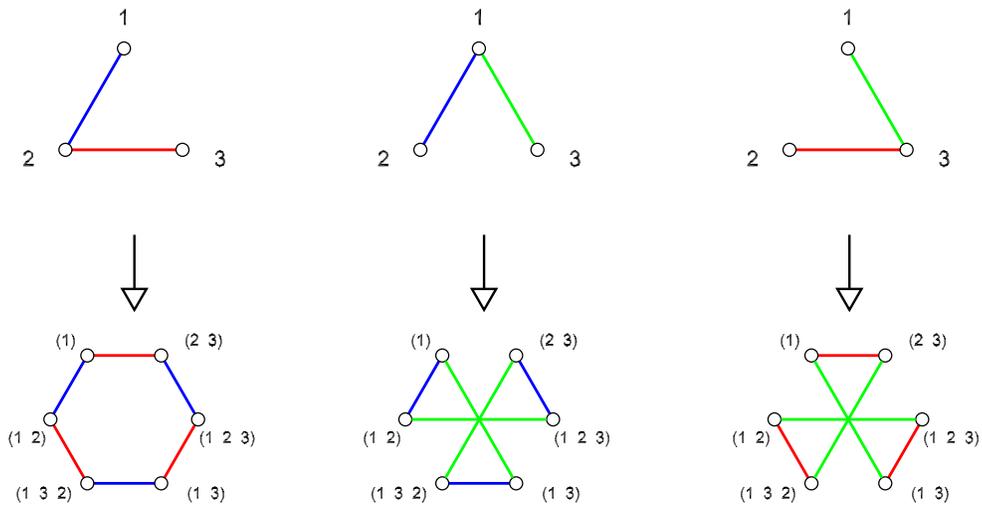
- i) $\sigma = (1\ 2)\gamma$,
- ii) $\sigma = (2\ 3)\gamma$,
- iii) $\sigma = (1\ 3)\gamma$.

(Es decir, si existe una transposición $\tau \in S_3$ de vértices adyacentes en K_3 tal que $\sigma = \tau\gamma$.)

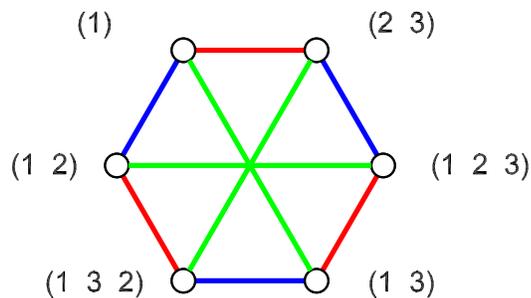
Dado que a cada una de las transposiciones $(1\ 2)$, $(2\ 3)$ y $(1\ 3)$ corresponde a una arista de K_3 , cada uno de los casos anteriores, por separado, es la gráfica $\mathcal{G}(G_{\{e_i\}})$, con $i \in \{1, 2, 3\}$, de una subgráfica generadora $G_{\{e_1\}}$, $G_{\{e_2\}}$ y $G_{\{e_3\}}$ de K_3 , respectivamente. Así mismo, cada una de estas subgráficas generadoras es isomorfa a la gráfica G del ejemplo 11, por lo que las gráficas de Cayley inducidas por cada una de ellas son isomorfas a la descrita en dicho ejemplo y, por transitividad, isomorfas entre sí. Estas gráficas coinciden con ser conjuntos independientes de aristas (es decir, que cualesquiera dos aristas son no adyacentes) cuyos vértices son los elementos de S_3 , como se puede apreciar en la siguiente figura:



Consideremos ahora las subgráficas generadoras de K_3 de tamaño dos. Dado que cada una de ellas es igual a la unión de dos subgráficas generadoras de tamaño uno (proposición 3), sus correspondientes gráficas de Cayley son aquellas que resultan de la unión de las gráficas de Cayley de las respectivas subgráficas de tamaño uno, como se ilustra a continuación:



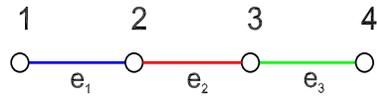
Finalmente, también por la proposición 3, $\mathcal{G}(K_3)$ es la gráfica que resulta de la unión de las gráficas anteriores, que se ilustra a continuación:



3.2. $\mathcal{G}(T_3)$

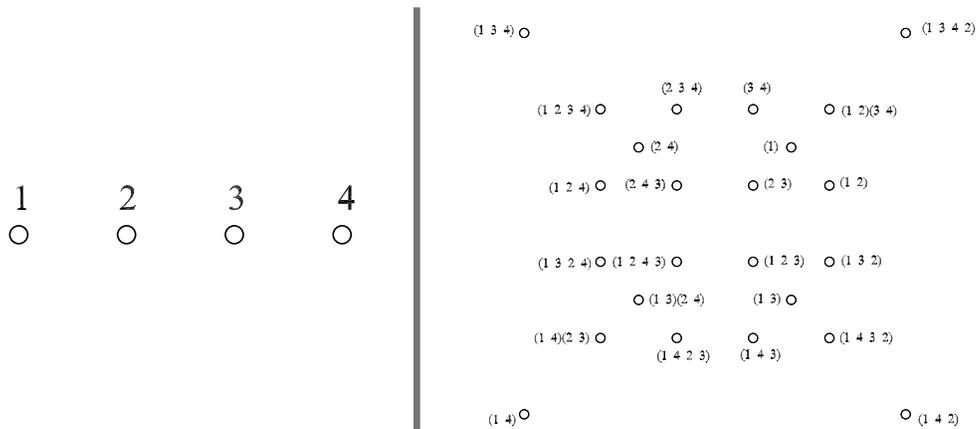
Salvo isomorfismo, una *trayectoria de longitud n* puede ser definida como una gráfica cuyos vértices son los elementos de \mathbb{N}_{n+1} y tal que dos vértices u y v son adyacentes si y sólo si $u = v + 1$.

Consideremos entonces la trayectoria de longitud tres

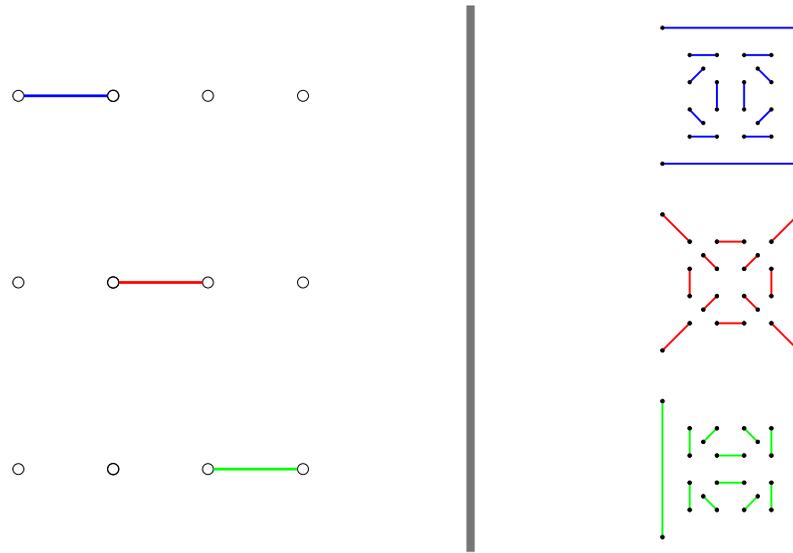


y sus subgráficas generadoras, $G_\emptyset, G_{\{e_1\}}, G_{\{e_2\}}, G_{\{e_3\}}, G_{\{e_1, e_2\}}, G_{\{e_2, e_3\}}, G_{\{e_3, e_1\}}$.

La gráfica de Cayley asociada a G_\emptyset es la gráfica vacía cuyos vértices son los elementos de S_4 .



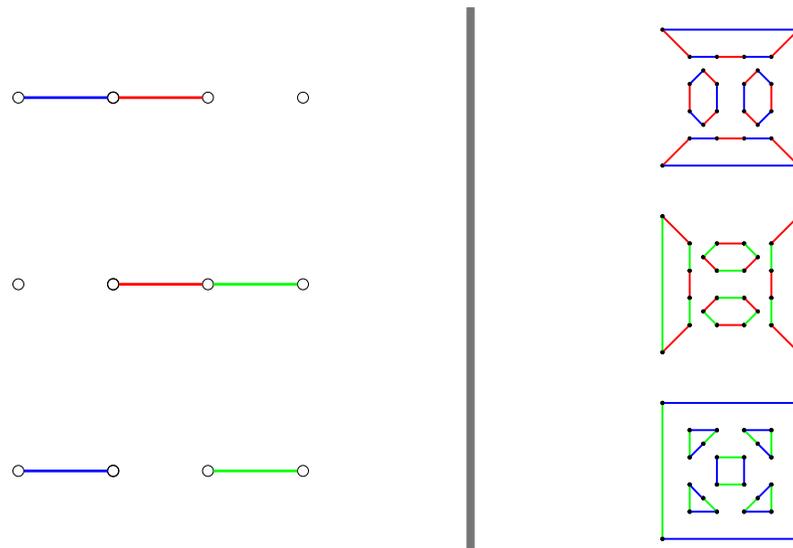
Nuevamente, para construir las gráficas de Cayley asociadas a $G_{\{e_i\}}$, lo que hacemos es tomar como vértices los elementos del grupo de permutaciones S_4 y multiplicar cada uno por la transposición τ_{e_i} correspondiente, haciendolo adyacente en $\mathcal{G}(G_{\{e_i\}})$ al resultado de dicho producto. En consecuencia, $\mathcal{G}(G_{\{e_1\}}), \mathcal{G}(G_{\{e_2\}})$ y $\mathcal{G}(G_{\{e_3\}})$ se ven así:



respectivamente.

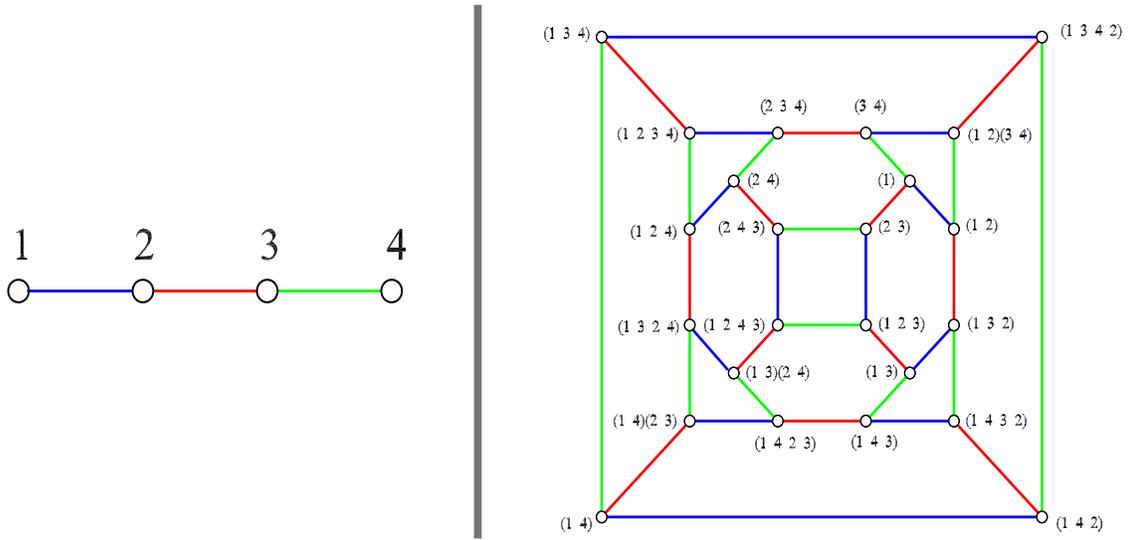
Por la proposición 3,

$$\mathcal{G}(G_{\{e_i, e_j\}}) = \mathcal{G}(G_{\{e_i\}}) \cup \mathcal{G}(G_{\{e_j\}}),$$



de la misma forma que

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(G_{\{e_1, e_2\}}) \cup \mathcal{G}(G_{\{e_2, e_3\}}) \cup \mathcal{G}(G_{\{e_3, e_1\}})$$



Como mencionamos anteriormente, la gráfica de Cayley asociada en esta forma a una trayectoria de longitud n es isomorfa a la gráfica de Π_n . A continuación demostramos esta afirmación.

Recordemos primero que la gráfica de Π_n , $G(\Pi_n)$, es aquella que tiene como vértices las permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, n+1\}$, de tal forma que dos vértices son adyacentes si y solo si una difiere de la otra en la transposición de dos números adyacentes. En otras palabras, dos permutaciones, σ y γ , son adyacentes si y solo si $\sigma = \tau\gamma$ con $\tau = (\gamma(k) \ \gamma(k+1))$ para algún $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Sea $\Phi : S_{n+1} \rightarrow S_{n+1}$ tal que $\Phi(\sigma) = \sigma^{-1}$ para toda $\sigma \in S_{n+1}$ (en este caso, S_{n+1} es el conjunto de vértices tanto de $\mathcal{G}(T_n)$ como de la gráfica de Π_n).

Proposición 5. Φ es un isomorfismo de gráficas.

Demostración. Sean σ y σ' dos permutaciones en S_{n+1} .

Primero, Φ está bien definida ya que $\Phi(\sigma) \neq \Phi(\sigma')$ implica que $\sigma^{-1} \neq (\sigma')^{-1}$ y, por tanto, que $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1} \neq ((\sigma')^{-1})^{-1}$, por ser σ y σ' funciones biyectivas.

Más aún, si $\sigma \neq \sigma'$ entonces $\sigma^{-1} = \Phi(\sigma)$ es distinto de $(\sigma')^{-1} = \Phi(\sigma')$, de lo contrario $\sigma^{-1} = (\sigma')^{-1}$ implicaría que $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1} = ((\sigma')^{-1})^{-1} = \sigma'$ lo cual, bajo la suposición de que $\sigma \neq \sigma'$, es una contradicción. Por lo tanto Φ es una función inyectiva.

Ahora, dada una permutación $\sigma \in S_{n+1}$, existe $\sigma' \in S_{n+1}$ tal que $\Phi(\sigma') = \sigma$, a saber $\sigma' = \sigma^{-1}$. Esta última condición implica que Φ es suprayectiva.

Para demostrar que Φ preserva adyacencias, sean σ y γ dos permutaciones en S_{n+1} , adyacentes en $G(\Pi_n)$. Esto quiere decir que existe $\tau \in S_{n+1}$ tal que $\sigma = \tau\gamma$ con $\tau = (\gamma(k) \ \gamma(k+1))$ para algún elemento $k \in \mathbb{N}_n$.

Para probar que $\Phi(\sigma)$ y $\Phi(\gamma)$ son permutaciones adyacentes en $\mathcal{G}(T_n)$ basta con exhibir una permutación $\alpha \in S_{n+1}$ tal que $\Phi(\sigma) = \alpha\Phi(\gamma) = \alpha\gamma^{-1}$ con $\alpha = (i \ j)$ donde i es adyacente a j en T_n .

Ahora, $\sigma = \tau\gamma$ implica que

$$\Phi(\sigma) = \Phi(\tau\gamma) = (\tau\gamma)^{-1} = \gamma^{-1}\tau^{-1},$$

pero

$$\gamma^{-1}\tau^{-1} = \gamma^{-1}\tau,$$

ya que τ es una transposición.

Es decir, basta con demostrar que

$$\gamma^{-1}\tau = \alpha\gamma^{-1}$$

para algún $\alpha = (i \ j) \in S_{n+1}$, con i adyacente a j en $\mathcal{G}(T_n)$.

Sea $\alpha = \gamma^{-1}\tau\gamma$, es decir,

$$\alpha = \gamma^{-1}(\gamma(k) \ \gamma(k+1))\gamma,$$

y observemos que

- $\gamma^{-1}\tau\gamma(k) = \gamma^{-1}\tau(\gamma(k)) = \gamma^{-1}\gamma(k+1) = k+1,$
- $\gamma^{-1}\tau\gamma(k+1) = \gamma^{-1}\tau(\gamma(k+1)) = \gamma^{-1}\gamma(k) = k$ y

- si $a \notin \{k, k+1\}$, entonces $\gamma^{-1}\tau\gamma(a) = \gamma^{-1}(\gamma(a)) = a$.

Por lo tanto,

$$\alpha(a) := \begin{cases} k & \text{si } a = k+1, \\ k+1 & \text{si } a = k, \\ a & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es decir, $\alpha = (k \ k+1)$. Nótese que, por definición, k y $k+1$ son adyacentes en T_{n+1} , por lo que

$$\Phi(\sigma) = \alpha\Phi(\gamma)$$

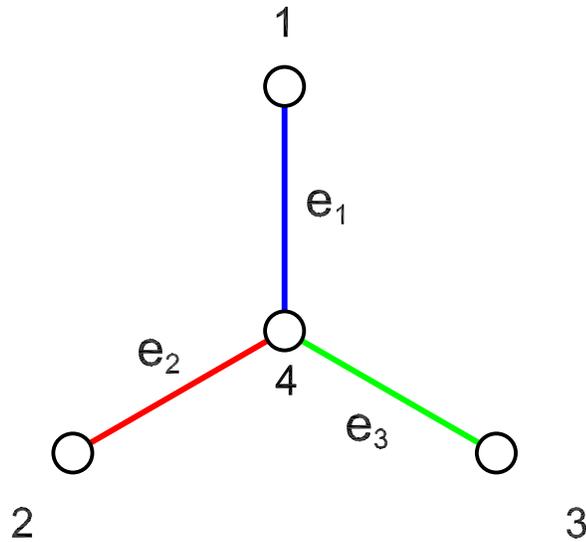
con α una transposición de vértices adyacentes en T_{n+1} .

□

3.3. $\mathcal{G}(E_3)$

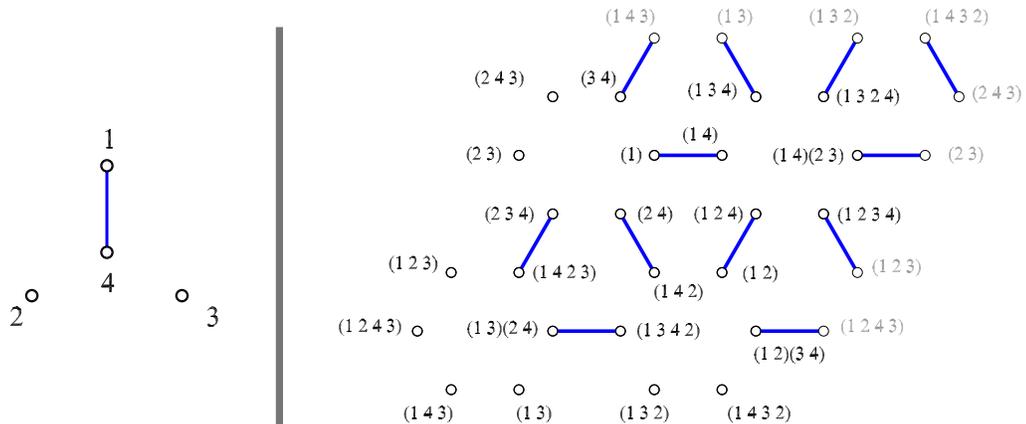
Llamaremos *estrella (o garra) de tamaño n* a la gráfica tal que sus vértices son los elementos del conjunto \mathbb{N}_{n+1} y tal que dos vértices u y v son adyacentes si y sólo si $u = k$ y $v \neq k$, para algún $k \in \mathbb{N}_{n+1}$ fijo (salvo isomorfismo), y la denotaremos E_n .

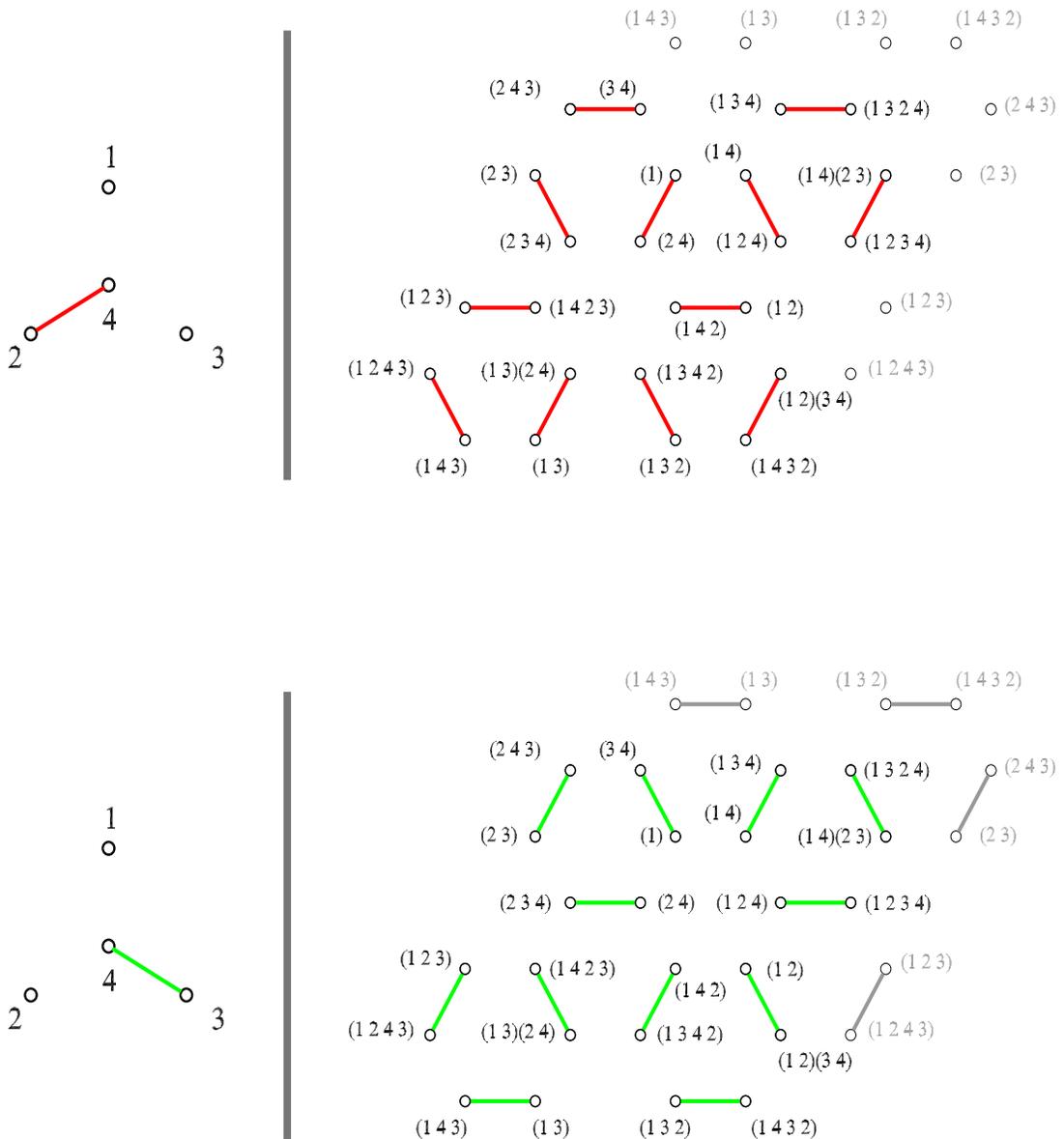
Sea $G = E_3$ la estrella de tamaño $n = 3$



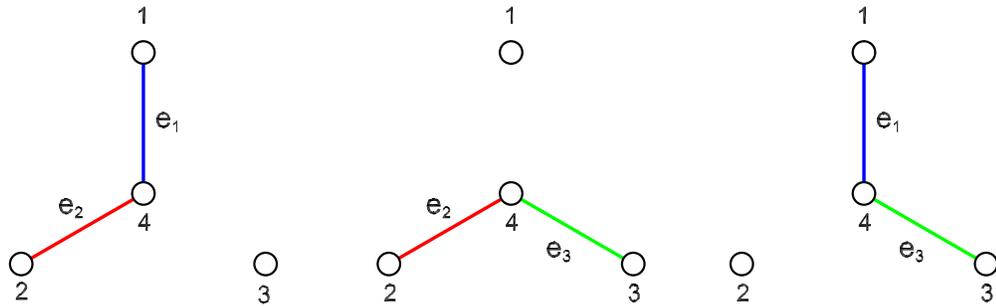
y consideremos sus subgráficas generadoras $G_\emptyset, G_{\{e_1\}}, G_{\{e_2\}}, G_{\{e_3\}}, G_{\{e_1, e_2\}}, G_{\{e_2, e_3\}}, G_{\{e_3, e_1\}}$.

Dado que $V(E_3) = V(T_3)$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, tanto G_\emptyset como $G_{\{e_i\}}$ en este ejemplo son gráficas isomorfas a las correspondientes del ejemplo anterior por lo que las gráficas de Cayley de éstas son isomorfos a las de aquellas (por la proposición 4), es decir, son tres gráficas de 24 vértices y doce aristas que son de hecho conjuntos independientes.

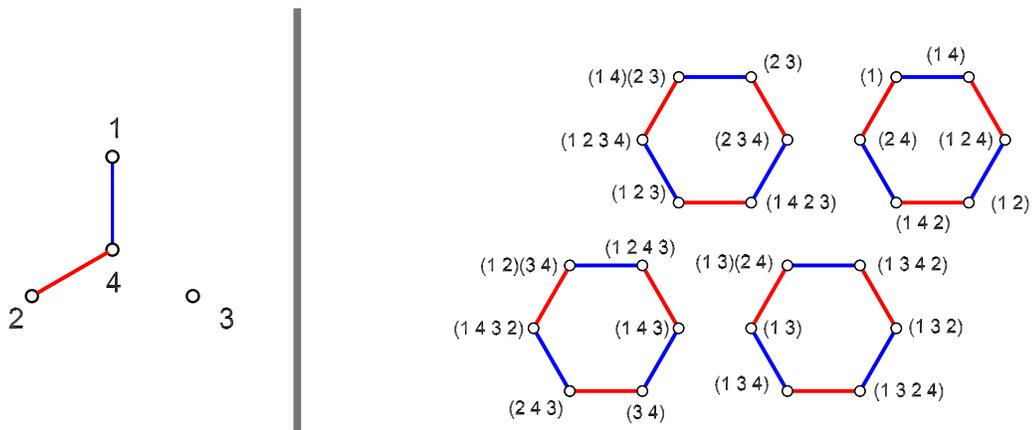


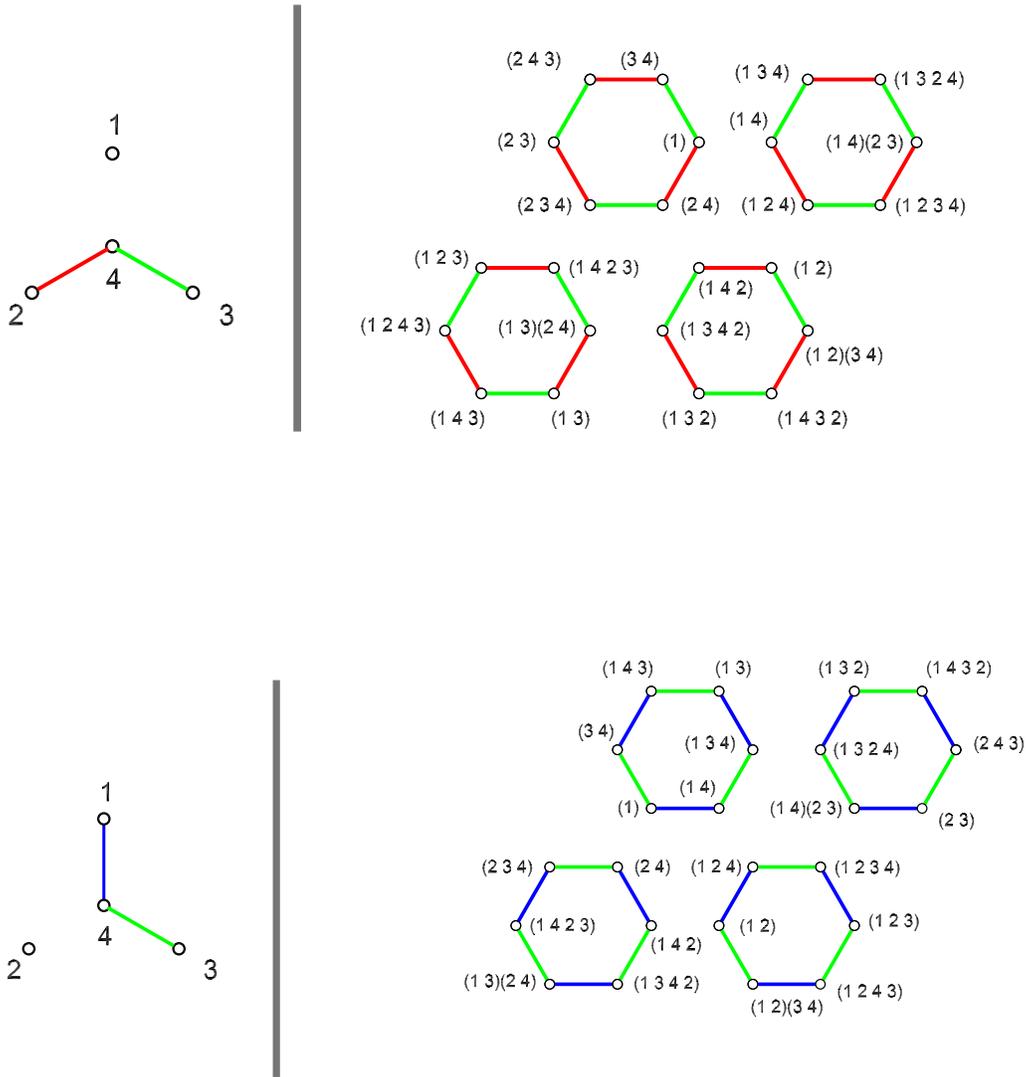


Lo que sí es distinto en la estrella y la trayectoria, es una de las subgráficas generadoras de tamaño dos. Por un lado, la trayectoria tiene una que consiste en dos aristas separadas, mientras que en la estrella, todas ellas son isomorfas a una trayectoria de longitud dos, más un vértice de grado cero.

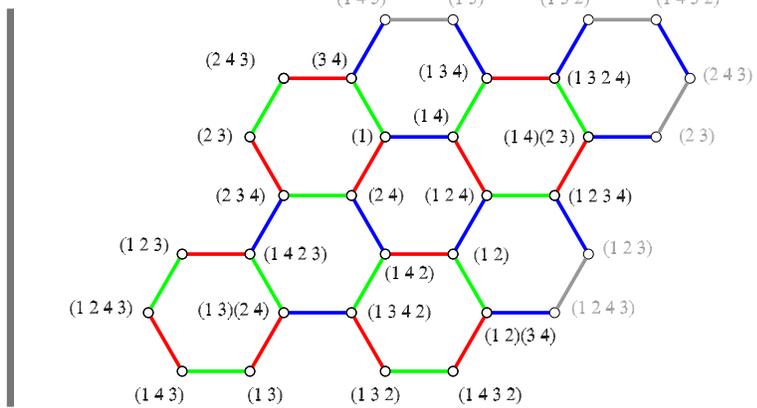
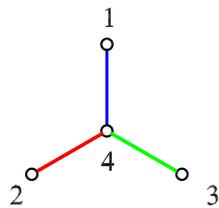


Es por eso que $\mathcal{G}(G_{\{e_1\}})$, $\mathcal{G}(G_{\{e_2\}})$ y $\mathcal{G}(G_{\{e_3\}})$ son isomorfas entre ellas, como se muestra más abajo:





Recordemos que, por la proposición 3, $\mathcal{G}(G_{\{e_i, e_j\}})$ se puede construir a partir de $\mathcal{G}(G_{\{e_j\}}) \cup \mathcal{G}(G_{\{e_i\}})$, para toda i y toda j en $\{1, 2, 3\}$, y, finalmente, $\mathcal{G}(G)$ queda determinada por $\mathcal{G}(G_{\{e_1, e_2\}}) \cup \mathcal{G}(G_{\{e_2, e_3\}}) \cup \mathcal{G}(G_{\{e_3, e_1\}})$.



Capítulo 4

El Graficaedro

En este capítulo demostraremos que dada una gráfica G , con p vértices y q aristas, existe un politopo de rango q , que llamamos *graficaedro de G* y denotamos \mathcal{P}_G , cuya estructura depende de la de G , ya que cada cara del politopo queda definida mediante un conjunto de aristas de G y un elemento de $S_{V(G)}$, el grupo de permutaciones de los vértices de G . En adelante, por conveniencia, trabajaremos únicamente con gráficas cuyos p vértices sean los elementos de $\mathbb{N}_p = \{1, 2, \dots, p\}$.

4.1. El teorema principal

A continuación definiremos el politopo \mathcal{P}_G asociado a una gráfica conexa G de tamaño q . Para ello, primero definimos el conjunto C_i de lo que serán las i -caras de \mathcal{P}_G para $i \in I = \{-1, 0, \dots, q\}$. Posteriormente definimos a \mathcal{P}_G como la unión de todos los conjuntos C_i , lo dotamos de un orden y demostramos que, con el orden dado, es un politopo abstracto de rango q .

Entonces, si G es una (p, q) -gráfica conexa, sea C_i para $i \in I = \{-1, 0, \dots, q\}$ el siguiente conjunto:

$$C_i := \begin{cases} \{(K_i, a) \mid K_i \subseteq E(G), |K_i| = i, a = \{\sigma\} \subseteq S_p\} & \text{si } i \neq -1, \\ \{(\emptyset, \emptyset)\} & \text{si } i = -1. \end{cases}$$

En adelante llamaremos *i-caras* a los elementos de C_i y, si $a \neq \emptyset$, denotaremos por σ_a al elemento de S_p que determina a a , es decir, $a = \{\sigma_a\}$.

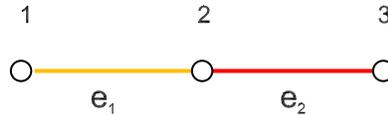
Con la finalidad de ilustrar ciertos detalles que es preciso tener en cuenta para definir correctamente al graficaedro, daremos una definición provisional de éste, así como de la relación de orden que determina cuándo dos caras del graficaedro son incidentes. Estas definiciones (provisionales) permitirán al lector entender la naturaleza de la definición final del graficaedro y sus bondades.

Definición 1. (provisional) $\mathcal{P}'_G = \bigcup_{i \in I} C_i$, con $I = \{-1, 0, \dots, q\}$.

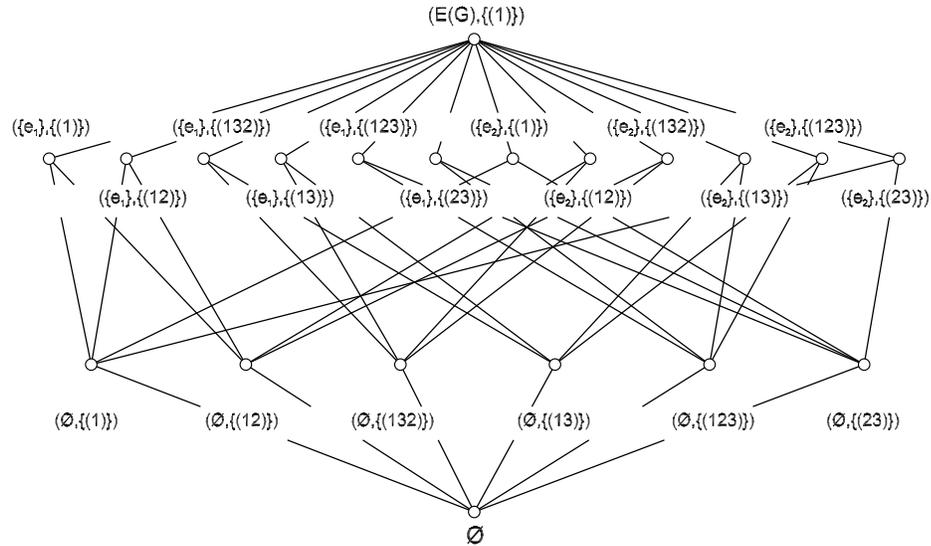
Definición 2. Dadas dos caras en \mathcal{P}'_G , decimos que $(K_i, a) <_{\mathcal{P}'_G} (L_j, b)$ si y solamente si

1. $K_i \subset L_j$ y
2. $a \subset b$ o bien $a \not\subset b$ y $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a \subset \langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b$.

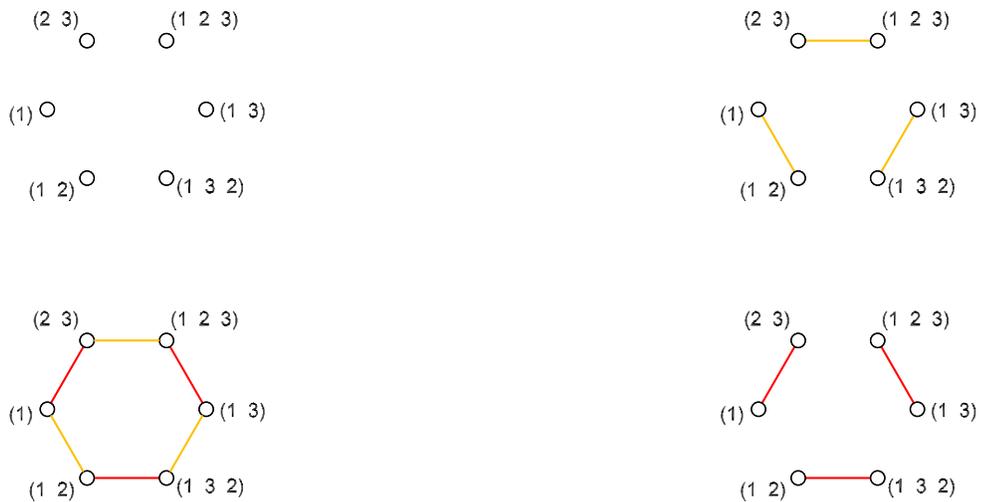
Ejemplo 14. Sea G la trayectoria de longitud 2:



La siguiente gráfica es el diagrama de Hasse de \mathcal{P}'_G , es decir, sus vértices son las caras de \mathcal{P}'_G y dos de éstos son adyacentes si las caras correspondientes son incidentes en \mathcal{P}'_G .



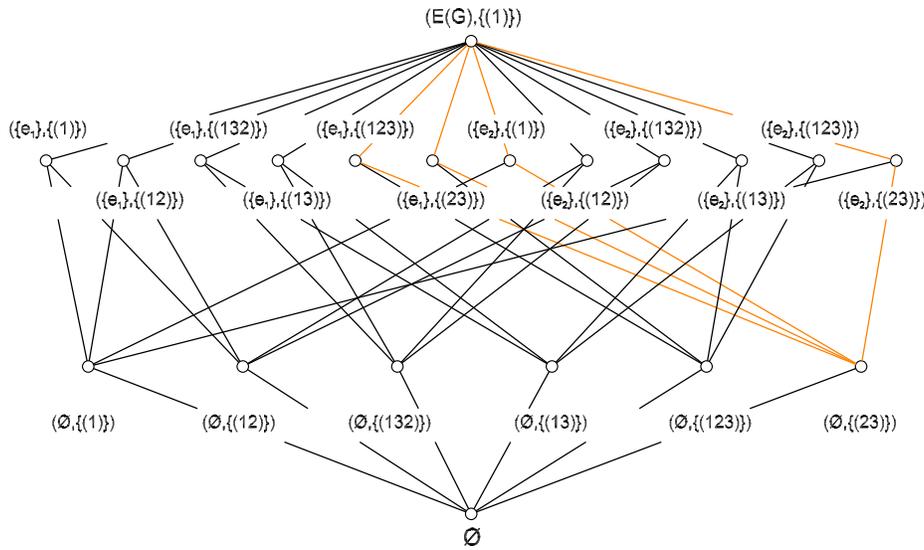
Consideremos, por otro lado, las gráficas que se muestran a continuación: $\mathcal{G}(G)_\emptyset$ (izquierda, arriba), $\mathcal{G}(G)$ (izquierda, abajo), $\mathcal{G}(G_{\{e_1\}})$ (derecha, arriba) y $\mathcal{G}(G_{\{e_2\}})$ (derecha, abajo) que analizamos en el capítulo 2:



Intuitivamente, una parte de lo que demostramos en este trabajo es que podemos establecer una correspondencia entre el graficaedro y la gráfica $\mathcal{G}(G)$, de tal manera que a cada cara de \mathcal{P}_G le corresponda una única componente conexa de la unión de las gráficas $\mathcal{G}(G_K)$ que resultan de cada conjunto

$K \subseteq E(G)$. En otras palabras, cada cara está representada por alguna componente de la gráfica $\mathcal{G}(G_K)$ para algún $K \subseteq E(G)$.

Sin embargo, con solo contar los vértices de $G(\mathcal{P}_G)$ y las componentes conexas de las gráficas de Cayley, ilustradas en las dos figuras anteriores, podemos notar que ni siquiera coinciden en número. Por lo tanto, bajo estas circunstancias sería imposible establecer una biyección entre $\mathcal{G}(G)$ y \mathcal{P}_G . De hecho, observando con detenimiento el digrama de Hasse de \mathcal{P}_G podemos notar que no se trata de un politopo, ya que las secciones de tamaño dos no tienen forma de diamante (y por tanto no cumple con la propiedad diamante)



El problema es que cada componente conexas de $\mathcal{G}(G)$ puede tener más de un vértice, y éstos corresponden a las 0-caras de \mathcal{P}_G , y por otro lado, en \mathcal{P}_G estamos considerando que parejas ordenadas distintas son caras distintas.

Para que el politopo quede correctamente definido (y poderlo relacionar con la gráfica de Cayley), basta identificar las parejas ordenadas que en el fondo son la misma, y lo hacemos mediante una relación de equivalencia, descrita en los siguientes párrafos.

Definición 3. Dos caras, $(K_i, a), (L_i, b) \in C_i$, son equivalentes, denotado $(K_i, a) \equiv (L_i, b)$, si y sólo si

- i) $K_i = L_i$ y
- ii) $a = b$ o $a \neq b$ y $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a = \langle \Gamma_{L_i} \rangle \sigma_b$.

Proposición 6. \equiv es una relación de equivalencia.

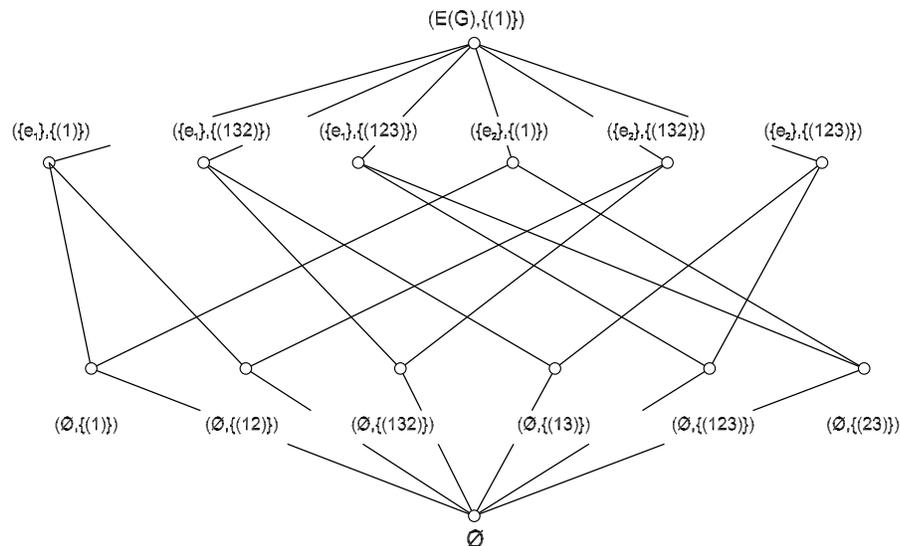
Demostración. i) \equiv es **reflexiva**.

ii) \equiv es **simétrica**: si $(K_i, a), (L_i, b) \in C_i$ cumplen que $(K_i, a) \equiv (L_i, b)$ entonces $K_i = L_i$ y ocurre una de dos cosas, $a = b$ o bien $a \neq b$ y $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a = \langle \Gamma_{L_i} \rangle \sigma_b$. En cualquiera de los dos casos, se tiene que $(L_i, b) \equiv (K_i, a)$.

iii) \equiv es **transitiva**: si $(K_i, a), (L_i, b), (M_i, c) \in C_i$ son tales que $(K_i, a) \equiv (L_i, b)$ y $(L_i, b) \equiv (M_i, c)$ entonces $K_i = L_i = M_i$. Ahora, si $a = \emptyset$, como $(K_i, a) \equiv (L_i, b)$ entonces, $b = \emptyset$ y, análogamente, $c = \emptyset$, con lo que se concluye que $(K_i, a) \equiv (M_i, c)$. Supongamos entonces que a, b y c son conjuntos no vacíos, distintos, entonces $(K_i, a) \equiv (L_i, b)$ y $(L_i, b) \equiv (M_i, c)$ implica que $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a = \langle \Gamma_{L_i} \rangle \sigma_b$ y $\langle \Gamma_{L_i} \rangle \sigma_b = \langle \Gamma_{M_i} \rangle \sigma_c$ por lo tanto $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a = \langle \Gamma_{M_i} \rangle \sigma_c$. Por lo tanto, $(K_i, a) \equiv (M_i, c)$.

□

Ejemplo 15. Con esto, el diagrama de Hasse de \mathcal{P}_G del ejemplo anterior es la siguiente gráfica:



donde se puede apreciar que todas las secciones de tamaño dos tienen forma de diamante.

Esta relación de equivalencia nos permite definir \mathcal{P}_G como la unión de C_i tal que $i \in I = \{0, \dots, q\}$, módulo la relación de equivalencia \equiv , de manera que caras equivalentes son identificadas como una misma. Formalmente,

Definición 4. si G es una gráfica conexa, sea $\mathcal{P}_G = \bigcup_{i \in I} C_i / \equiv$, con $I = \{-1, 0, \dots, q\}$, donde

$$C_i := \begin{cases} \{(K_i, a) \mid K_i \subseteq E(G), |K_i| = i, a = \{\sigma\} \subseteq S_p\} & \text{si } i \neq -1, \\ \{(\emptyset, \emptyset)\} & \text{si } i = -1. \end{cases}$$

y \equiv es la relación de equivalencia de la definición 3.

De esta manera, cada cara (K_i, a) , de \mathcal{P}_G , puede ser identificada con la componente conexa de la gráfica de Cayley generada por las trasposiciones asociadas a las aristas de G que tiene como uno de sus vértices a σ , pero como ya aclaramos, la misma componente queda identificada con todas las caras del politopo que sean equivalentes, ya que cada cara tiene como representante un vértice distinto de la componente.

Definición 5. Dadas dos caras en \mathcal{P}_G , decimos que $(K_i, a) <_{\mathcal{P}_G} (L_j, b)$ si y solamente si

1. $K_i \subset L_j$ y
2. $a \subset b$ o bien $a \not\subset b$ y $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a \subset \langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b$.

Decimos que $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L_j, b)$ si y solo si $(K_i, a) <_{\mathcal{P}_G} (L_j, b)$ o $(K_i, a) \equiv (L_j, b)$.

Proposición 7. $\leq_{\mathcal{P}_G}$ ordena parcialmente a \mathcal{P}_G (es decir $\leq_{\mathcal{P}_G}$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva).

Demostración. i) $\leq_{\mathcal{P}_G}$ es **reflexiva**.

- ii) $\leq_{\mathcal{P}_G}$ es **antisimétrica**: Sean (K_i, a) y (L_j, b) elementos de \mathcal{P}_G tales que $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L_j, b)$ y $(L_j, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (K_i, a)$.

Esto implica, por una parte que $K_i \subseteq L_j$ y $L_j \subseteq K_i$, por lo que $K_i = L_j$.

Por otro lado, $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L_j, b)$ implica que $a \subseteq b$ o bien $a \not\subseteq b$ y $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a \subseteq \langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b$. Si $a \subseteq b$ necesariamente $a = \emptyset$ o $a = b$. Si $a = b$, $(K_i, a) = (L_j, b)$. Si $a = \emptyset$, como $(L_j, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (K_i, a)$ se tiene que $b \subseteq a$ por lo tanto $b = \emptyset = a$, por lo que $(K_i, a) = (\emptyset, \emptyset) = (L_j, b)$.

Ahora, si $a \not\subseteq b$ entonces $a \neq \emptyset$ y $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L_j, b)$ implica que $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a \subseteq \langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b$, pero $(L_j, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (K_i, a)$ implica que $\langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b \subseteq \langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a$, por lo tanto, $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a = \langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b$, por lo que $(K_i, a) \equiv (L_j, b)$.

- iii) $\leq_{\mathcal{P}_G}$ es **transitiva**: Sean (K_i, a) , (L_j, b) y (M_h, c) elementos de \mathcal{P}_G tales que $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L_j, b)$ y $(L_j, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (M_h, c)$. Esto implica, en primer lugar, que $K_i \subseteq L_j \subseteq M_h$.

Si $a \subseteq b$ necesariamente $a = b$ o $a = \emptyset$. Si $a = \emptyset$ se tiene que $a \subseteq c$ y por lo tanto $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (M_h, c)$. Si $a = b$ como $(L_j, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (M_h, c)$ se tiene que $b \subseteq c$ o $b \not\subseteq c$ y $\langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b \subseteq \langle \Gamma_{M_h} \rangle \sigma_c$. Si $b \subseteq c$, $a \subseteq c$ y por lo tanto $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (M_h, c)$. Si $b \not\subseteq c$, como $a = b$, $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a = \langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_b$ y $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_b \subseteq \langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b$ ya que $K_i \subseteq L_j$. También, $\langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b \subseteq \langle \Gamma_{M_h} \rangle \sigma_c$, por lo tanto $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a \subseteq \langle \Gamma_{M_h} \rangle \sigma_c$, concluyendo así que $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (M_h, c)$.

Ahora, si $a \not\subseteq b$ entonces $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a \subseteq \langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b$ y, por otro lado, $(L_j, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (M_h, c)$ implica que $b \subseteq c$ o $b \not\subseteq c$ y $\langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b \subseteq \langle \Gamma_{M_h} \rangle \sigma_c$. Si $b \subseteq c$ entonces $b = c$ ya que $b \neq \emptyset$, por lo tanto $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a \subseteq \langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b = \langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_c \subseteq \langle \Gamma_{M_h} \rangle \sigma_c$ ya que $L_j \subseteq M_h$. Por lo tanto, $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (M_h, c)$. Si $b \not\subseteq c$, $\langle \Gamma_{K_i} \rangle \sigma_a \subseteq \langle \Gamma_{L_j} \rangle \sigma_b \subseteq \langle \Gamma_{M_h} \rangle \sigma_c$ por lo tanto $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (M_h, c)$.

Por lo tanto $\leq_{\mathcal{P}_G}$ ordena parcialmente a \mathcal{P}_G . □

Una vez demostrada la proposición anterior, podemos asegurar que \mathcal{P}_G está dotado de una función de rango definida como sigue:

$\text{rank} : \mathcal{P}_G \rightarrow \{-1, 0, \dots, q\}$ de tal forma que

$$\text{rank}((K_i, a)) := \begin{cases} i & \text{si } (K_i, a) \neq (\emptyset, \emptyset) \\ -1 & \text{si } (K_i, a) = (\emptyset, \emptyset). \end{cases}$$

Nótese que si $i \neq -1$ entonces $\text{rank}((K_i, a)) = |K_i|$.

Esta función es monótona estricta creciente ya que si (K_i, a) y (K_j, b) son dos caras de \mathcal{P}_G tales que $(K_i, a) <_{\mathcal{P}_G} (K_j, b)$ entonces $K_i \subset K_j$. Como $|K_i| = i$ y $|K_j| = j$, $\text{ran}((K_i, a)) = i < j = \text{ran}((K_j, b))$.

Demostraremos a continuación que \mathcal{P}_G tiene caras máxima y mínima, que toda bandera tiene $q + 2$ elementos, que es fuertemente conexo por banderas y que cumple con la propiedad diamante, para así concluir que, efectivamente, se trata de un politopo abstracto de rango q .

Proposición 8. *Existe $(K, a) \in \mathcal{P}_G$ tal que $(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ para toda cara $(L, b) \in \mathcal{P}_G$.*

Demostración. Sea $(K, a) = (\emptyset, \emptyset)$.

Dado que $\emptyset \subseteq L$ para todo conjunto $L \subseteq E(G)$ y $\emptyset \subseteq b$ para todo conjunto $b \subseteq S_p$ se tiene que $(\emptyset, \emptyset) \leq_{\mathcal{P}_G} (K, a)$ para toda cara $(K, a) \in \mathcal{P}_G$.

□

Proposición 9. *Existe $(K, a) \in \mathcal{P}_G$ tal que $(L, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (K, a)$ para toda $(L, b) \in \mathcal{P}_G$.*

Demostración. Sea $(K, a) = (G, a)$, donde por G denotamos a $E(G)$ y $a = \{\sigma\}$ para algún elemento $\sigma \in S_p$.

Dada una cara cualquiera $(L, b) \in \mathcal{P}_G$, se tiene que $L \subseteq G$.

Si $b \subseteq a$ entonces $(L, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (G, a)$.

Si, por otro lado, $b \not\subseteq a$, como G es conexa se tiene que $\langle \Gamma_G \rangle = S_p$ (proposición 1). Esto implica que $\langle \Gamma_L \rangle \sigma_b \subseteq \langle \Gamma_G \rangle \sigma_a$ y, por lo tanto, que $(L, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (G, a)$.

□

Proposición 10. *Toda bandera de \mathcal{P}_G tiene exactamente $q + 2$ elementos.*

Demostración. Sea Φ una bandera de \mathcal{P}_G .

Lo que haremos es demostrar que la función de rango restringida a Φ establece una biyección entre Φ y el conjunto $\{-1, 0, \dots, \}$.

Sean $(K, a), (L, b) \in \Phi$ tales que $\text{rank}((K, a)) = \text{rank}((L, b))$.

Si $\text{rank}((K, a)) = -1$, $(K, a) = (\emptyset, \emptyset) = (L, b)$.

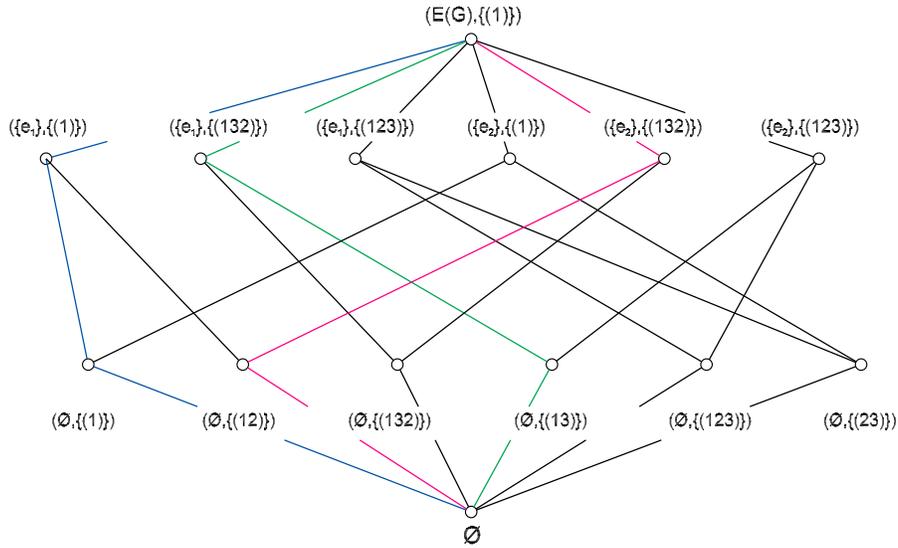
Si $\text{rank}((K, a)) = i \neq -1$, $|K| = i = |L|$ pero, dado que Φ está totalmente ordenado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$, por lo tanto, $K \subseteq L$, lo que implica que $K = L$ y que $(K, a) \equiv (L, b)$. Por tanto, $\text{rank} \upharpoonright_{\Phi}$ es inyectiva.

Ahora, para demostrar que $\text{rank} \upharpoonright_{\Phi}$ es suprayectiva supongamos lo contrario, es decir, que existe un elemento $k \in \{-1, 0, \dots, q\}$ tal que $\text{rank}((K, a)) \neq k$ para toda $(K, a) \in \Phi$.

Sea $k \in \{-1, \dots, q\}$ el mínimo elemento tal que $\text{rank}((K, a)) \neq k$ para toda $(K, a) \in \Phi$. Nótese que $k \neq -1$ y $k \neq q$, ya que tanto (\emptyset, \emptyset) como (G, a) pertenecen a Φ .

Sea $(N, d) \in \Phi$ tal que $\text{rank}((N, d)) = k - 1$ y sea $(M, c) \in \Phi$ la cara de rango mínimo, tal que $m = \text{rank}((M, c)) > k$. Entonces tenemos que $N \subset M$ con $|N| \leq |M| - 2$, por lo que existe $e \in M$ tal que $e \notin N$. Sea $K = N \cup \{e\}$, entonces (K, d) es tal que $(N, d) <_{\mathcal{P}_G} (K, d) <_{\mathcal{P}_G} (M, c)$, con $\text{rank}((K, d)) = k$, y, dado que Φ es una bandera, (K, d) debe pertenecer a Φ , contradiciendo la hipótesis de que ningún elemento de Φ tiene rango k . Por lo tanto $\text{rank} \upharpoonright_{\Phi}$ es una biyección. \square

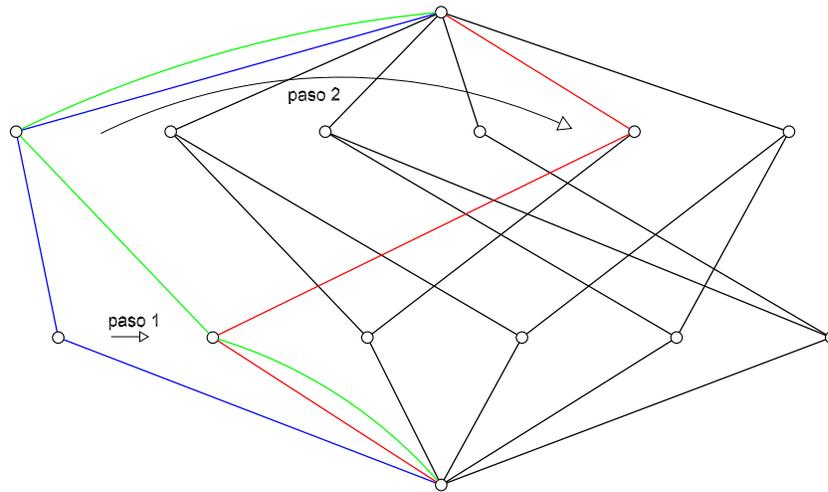
Ejemplo 16. Una bandera es una cadena maximal, es decir, un subconjunto totalmente ordenado tal que no existe otro que lo contenga propiamente. En la siguiente figura, que muestra una vez más al diagrama de Hasse de \mathcal{P}_G , se marcan con distintos colores algunas de sus banderas:



Se puede apreciar como cualquier camino que una el máximo con el mínimo, en una sola dirección (de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba, sin regresar) tiene la misma longitud, en este caso 3.

El siguiente paso es demostrar que \mathcal{P}_G es fuertemente conexo por banderas, es decir, que entre cualesquiera dos banderas, Φ y Ψ , de \mathcal{P}_G existe una sucesión de banderas adyacentes que contienen a la intersección $\Phi \cap \Psi$.

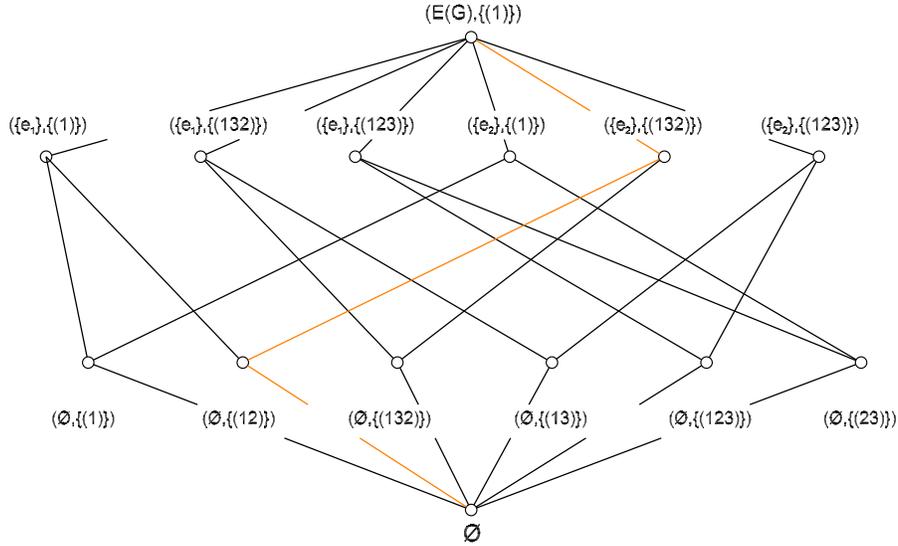
Ejemplo 17. Una sucesión de banderas adyacentes en \mathcal{P}_G se ve así:



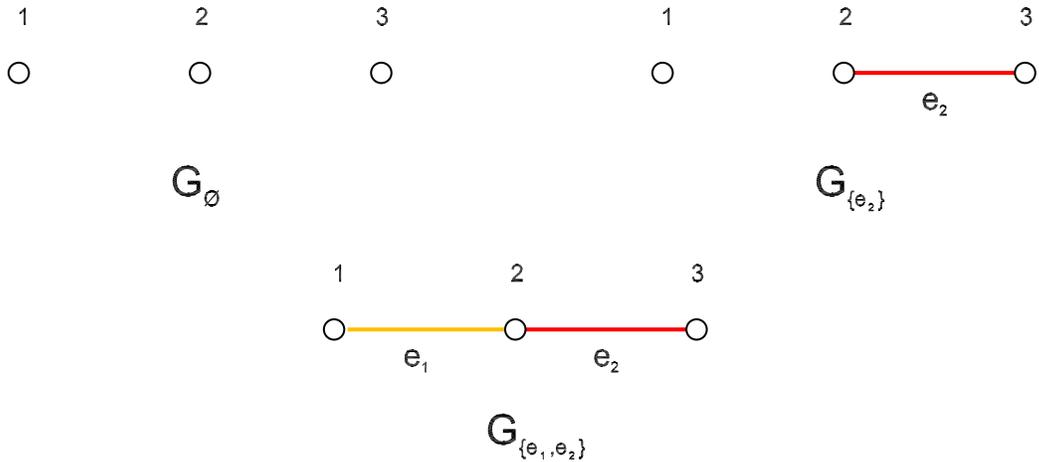
Es decir, partimos de la bandera azul y cambiando un solo vértice en cada paso, llegamos a la bandera roja (pasando por la verde).

Intuitivamente, cada bandera en \mathcal{P}_G está formada de dos partes: una familia de subconjuntos de $E(G)$ y un elemento de S_p , que sirve como un representante del conjunto de vértices de cada cara.

Ejemplo 18. Supongamos que G es la trayectoria de longitud 2 y B es la bandera de \mathcal{P}_G que tiene como 0-cara a $(\emptyset, (1\ 2))$, como 1-cara a $(\{e_2\}, \{(1\ 2)\})$, a la cara mínima y a la máxima.



Entonces podemos pensar que B queda definida mediante la permutación (1 2) y el conjunto de gráficas (o de sus aristas) que se muestra a continuación:



Si \mathcal{K} es la familia de conjuntos de aristas que da lugar a la bandera, se tiene que \mathcal{K} es de la forma $\{K_0, K_1, \dots, K_q\}$, donde cada K_i tiene cardinalidad i y está contenido en K_{i+1} . Por lo tanto, se trata de una familia de subconjuntos de $E(G)$ que está totalmente ordenada por la contención y es maximal con esa propiedad, es decir, no existe otra familia totalmente ordenada de subconjuntos

de G que la contenga propiamente. En la siguiente proposición demostramos que dadas dos familias de este tipo, podemos 'ir de una a la otra' mediante una sucesión de familias totalmente ordenadas, maximales, tales que cada familia difiere de la anterior en un único elemento y todas contienen a la intersección de las originales.

Con esto demostraremos posteriormente que entre cualesquiera dos banderas que tengan la misma 0-cara existe una sucesión de banderas adyacentes que contienen a la intersección de las originales.

Primero observemos que, si $\mathcal{K} = \{K_0, K_1, \dots, K_q\}$ es una familia totalmente ordenada, maximal, de conjuntos de aristas de una gráfica G , que tiene q aristas, para todo $K_m \in \mathcal{K}$ existe un único $e' \in K_{m+1}$ tal que $e' \notin K_m$. Entonces, para cada $e \in K_m$, definimos el conjunto $(K_m)'_e := K_m - e + e'$.

Ahora, para cada $e \in E(G)$, sea $K_j \in \mathcal{K}$ tal que $e \in K_j$ pero $e \notin K_{j-1}$ (K_j es el elemento más pequeño de \mathcal{K} al que pertenece e), y definamos

$$\begin{aligned} (\mathcal{K})'_e &:= \mathcal{K} \setminus \{K_j\} \cup \{(K_j)'_e\} \\ &= \{K_0, \dots, K_{j-1}, (K_j)'_e, K_{j+1}, \dots, K_q\}. \end{aligned}$$

Esta es una familia de conjuntos de aristas de G , totalmente ordenada por la contención, maximal con esa propiedad y que difiere de \mathcal{K} en exactamente un elemento.

Entonces, para cada $e \in E(G)$, sea \mathcal{K}_e^n , con $n \leq q - j$, definida recursivamente como sigue:

- $\mathcal{K}_e^1 = (\mathcal{K})'_e$ y
- $\mathcal{K}_e^{n+1} = (\mathcal{K}_e^n)'_e$.

En otras palabras,

- $\mathcal{K}_e^1 = \{K_0, \dots, K_{j-1}, (K_j)'_e, K_{j+1}, \dots, K_q\}$ y
- $\mathcal{K}_e^n = \{K_0, \dots, K_{j-1}, (K_j)'_e, (K_{j+1})'_e, \dots, (K_{j+n-1})'_e, K_{j+n}, \dots, K_q\}$, para $n \leq q - j$,

donde $j \in \{0, \dots, q\}$ es tal que K_j es el elemento de \mathcal{K} más pequeño al que pertenece e .

Proposición 11. *Dada una gráfica G , con q aristas, y dos familias, $\mathcal{K} = \{K_0, \dots, K_q\}$ y $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_q\}$, de conjuntos de aristas de G , totalmente ordenadas por la contención y maximales con esta propiedad, existe una sucesión $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r$ de familias totalmente ordenadas, maximales, de conjuntos de aristas de G , tal que, para toda $i \in \{0, \dots, r\}$,*

- i) \mathcal{K}_i difiere de \mathcal{K}_{i+1} en exactamente un elemento,
- ii) $\mathcal{F} \cap \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_i$ y,
- iii) si $|\mathcal{K} \cap \mathcal{F}| = q + 1 - n$ (es decir, si \mathcal{K} difiere de \mathcal{F} en n elementos) entonces $|\mathcal{K}_r \cap \mathcal{F}| \leq q + 1 - (n - 1)$ (\mathcal{K}_r difiere de \mathcal{F} en a lo más $n - 1$ elementos).

Demostración. Sea $j \in \{0, \dots, q - 1\}$ tal que $K_j \neq F_j$ y $K_i = F_i$ si $i > j$. Por construcción, existen un único $e_0 \in K_j$, tal que $e_0 \notin F_j$, y un único $e_1 \in F_j$, tal que $e_1 \notin K_j$.

Ahora, sea $l \in \{0, \dots, j - 1\}$ tal que $e_0 \in K_{j-l}$ pero $e_0 \notin K_{j-l-1}$, es decir, K_{j-l} es el elemento más pequeño de \mathcal{K} al que pertenece e_0 , y consideremos la siguiente sucesión

$$\mathcal{K}, \mathcal{K}_{e_0}^1, \dots, \mathcal{K}_{e_0}^{l+1}.$$

Observemos que

- $\mathcal{K}_{e_0}^1 = \{K_0, \dots, K_{j-l-1}, (K_{j-l})'_{e_0}, K_{j-l+1}, \dots, K_q\}$
- $\mathcal{K}_{e_0}^2 = \{K_0, \dots, K_{j-l-1}, (K_{j-l})'_{e_0}, (K_{j-l+1})'_{e_0}, K_{j-l+2}, \dots, K_q\}$
- $\mathcal{K}_{e_0}^3 = \{K_0, \dots, K_{j-l-1}, (K_{j-l})'_{e_0}, (K_{j-l+1})'_{e_0}, (K_{j-l+2})'_{e_0}, K_{j-l+3}, \dots, K_q\}$

etc., por lo que

$$\mathcal{K}_{e_0}^{l+1} = \{K_0, \dots, K_{j-l-1}, (K_{j-l})'_{e_0}, (K_{j-l+1})'_{e_0}, \dots, (K_{j-1})'_{e_0}, (K_j)'_{e_0}, \dots, K_q\},$$

pero, por construcción, $(K_j)'_{e_0} = K_j - e_0 + e_1 = F_j$.

Si $\mathcal{K}_{e_0}^i = \mathcal{K}_i$, la sucesión $\mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{l+1}$ es tal que, para cada $i \in \{0, \dots, l+1\}$, \mathcal{K}_i difiere de \mathcal{K}_{i+1} en exactamente un elemento.

Por otro lado, si $K_i \in \mathcal{K} \cap \mathcal{F}$ entonces $K_i = F_i$ por lo que $e_0 \notin K_i$. Como en la construcción de \mathcal{K}_n únicamente se modifican elementos de \mathcal{K} a los que pertenece e_0 , $\mathcal{K} \cap \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_i$ para toda $i \in \{0, \dots, l+1\}$.

Por último, supongamos que \mathcal{K} difiere de \mathcal{F} en n elementos, es decir, que \mathcal{K} y \mathcal{F} tienen $q+1-n$ elementos iguales, entonces, como $(K_j)'_{e_0} = F_j$,

$$\mathcal{K}^{l+1} = \{K_0, \dots, K_{j-l-1}, (K_{j-l})'_{e_0}, (K_{j-l+1})'_{e_0}, \dots, (K_{j-1})'_{e_0}, (K_j)'_{e_0}, \dots, K_q\}$$

difiere de \mathcal{F} en a lo más $n-1$ elementos.

Entonces,

$$\mathcal{K}, \mathcal{K}_{e_0}^1, \dots, \mathcal{K}_{e_0}^{l+1}$$

es la sucesión buscada con $r = l+1$. □

Corolario 1. *Si G es una gráfica con q aristas, dadas dos familias, $\mathcal{K} = \{K_0, K_1, \dots, K_{q-1}\}$ y $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_{q-1}\}$, de conjuntos de aristas de G , totalmente ordenadas, maximales, existe una sucesión de familias $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_t = \mathcal{F}$ de conjuntos de aristas de G , totalmente ordenadas, maximales, tal que*

i) \mathcal{K}_i difiere de \mathcal{K}_{i+1} en un único elemento y

ii) $\mathcal{K} \cap \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_i$ para toda $i \in \{0, \dots, t\}$.

Demostración. Supongamos que \mathcal{K} y \mathcal{F} tienen d de sus $q+2$ elementos, en común y sea $n = q+2-d$. Por la proposición anterior, existe una sucesión $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_{r_1}$ tal que \mathcal{K}_{r_1} difiere de \mathcal{F} en a lo más $n-1$ elementos. Aplicando el mismo principio, existe una sucesión $\mathcal{K}_{r_1}, \mathcal{K}_{r_1+1}, \dots, \mathcal{K}_{r_2}$ tal que \mathcal{K}_{r_2} difiere de \mathcal{F} en a lo más $n-2$ elementos. Entonces, existe $k \leq n$ que cumple que la sucesión

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_{r_1}, \dots, \mathcal{K}_{r_2}, \dots, \mathcal{K}_{r_k},$$

de tal forma que $\mathcal{K}_{r_k} = \mathcal{F}$ y cada elemento de la sucesión difiere del anterior en exactamente un elemento, y $\mathcal{K} \cap \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_i$ para toda i . □

Observemos que dada una bandera, $\Phi = \{(\emptyset, \emptyset), (K_0, a), \dots, (K_q, a)\}$ la familia, $\mathcal{K} = \{K_0, \dots, K_{q-1}\}$, de subconjuntos de $E(G)$ que definen las caras propias de Φ , es tal que $K_i \subseteq K_{i+1}$ y $|K_i| = i$ para toda $i \in \{0, \dots, q-1\}$.

Por otro lado, una bandera Ψ puede ser definida en forma única mediante una sucesión, $\mathcal{F} = \{F_0 = \emptyset, F_1, \dots, F_{q-1}\}$, y un conjunto $a = \{\sigma_a\} \subseteq S_p$ de tal forma que $(\Psi)_i = (F_i, a)$ para toda $i \in \{0, \dots, q-1\}$.

Proposición 12. *Dadas dos banderas $\Phi, \Psi \subseteq \mathcal{P}_G$ existe una sucesión de banderas $\Phi = \Phi_0, \dots, \Phi_s = \Psi$ tal que Φ_i es adyacente a Φ_{i+1} y $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ para toda $i \in \{0, \dots, s\}$.*

Demostración. Sean $\Phi = \{(\emptyset, \emptyset), (K_0, a), \dots, (K_{q-1}, a), (G, a)\}$ y $\Psi = \{(\emptyset, \emptyset), (F_0, b), \dots, (F_{q-1}, b), (G, a)\}$ dos banderas de \mathcal{P}_G y sean $\mathcal{K} = \{K_0, \dots, K_{q-1}\}$ y $\mathcal{F} = \{F_0, \dots, F_{q-1}\}$, las sucesiones de conjuntos de aristas de G asociadas a Φ y Ψ , respectivamente.

caso 1 Primero supongamos que Φ y Ψ son banderas alrededor de un mismo vértice, es decir, que $(\Phi)_0 = (\Psi)_0$ (o, en otras palabras, $(K_0, a) = (F_0, b)$, lo que implica que $a = b$). Entonces, por el corolario 11 existe una sucesión, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_t = \mathcal{F}$, de familias totalmente ordenadas, maximales, de subconjuntos de $E(G)$ de forma que \mathcal{K}_i difiere de \mathcal{K}_{i+1} en exactamente un elemento y $\mathcal{K} \cap \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_i$ para toda $i \in \{0, \dots, t\}$.

Sea Φ_i la bandera cuya familia subyacente de subconjuntos de $E(G)$ es \mathcal{K}_i y cuya 0-cara es (\emptyset, a) . La sucesión $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_t = \Psi$ es tal que Φ_i es adyacente a Φ_{i+1} y $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ para toda $i \in \{0, \dots, t\}$.

caso 2 Supongamos ahora que Φ y Ψ tienen 0-caras distintas, es decir, que $a \neq b$.

Por el teorema 1.1 y el lema 1, existe un conjunto $\{\tau_{e_1}, \dots, \tau_{e_s}\}$, de transposiciones asociadas a las aristas de G , de tal forma que $\sigma_b = \tau_{e_s} \dots \tau_{e_2} \tau_{e_1} \sigma_a$, donde $i \neq j$ no implica que $e_i \neq e_j$.

Consideremos entonces una bandera Φ_{r_1} que tenga la misma 0-cara que Φ , pero cuya 1-cara sea $(\{e_1\}, \{\sigma_a\})$ y que contenga a $\Phi \cap \Psi$. Observemos que $(\{e_1\}, \{\sigma_a\}) \equiv (\{e_1\}, \{\tau_{e_1} \sigma_a\})$.

Por el caso 1, existe una sucesión de banderas adyacentes $\Phi = \Phi_0, \dots, \Phi_{r-1}$ de tal forma que cada elemento de la sucesión contiene a $\Phi \cap \Psi$.

Ahora consideremos la bandera 0-adyacente a $\Phi_{r_1}, \Phi_{r_1}^0$, es decir, aquella cuyas i -caras son las mismas que las de Φ_{r_1} salvo por la 0-cara. Observemos que la única posibilidad que existe es que la 0-cara de $\Phi_{r_1}^0$ sea $(\emptyset, \{\tau_{e_1}\sigma_a\})$.

Si $s = 1$ entonces $\Phi_{r_1}^0$ y Ψ son banderas que comparten la 0-cara, por lo que, por el caso 1, existe una sucesión $\Phi_{r_1}^0 = \Phi_{r_1+1}, \Phi_{r_1+2}, \dots, \Phi_{r_1+k} = \Psi$ de tal forma que Φ_i es adyacente a Φ_{i+1} y $\Phi_{r_1}^0 \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ para toda $i \in \{r_1 + 1, \dots, r_1 + k\}$. Por lo tanto, la sucesión

$$\Phi = \Phi_0, \dots, \Phi_{r_1}, \Phi_{r_1+1}, \dots, \Phi_{r_1+k} = \Psi$$

es la buscada.

Si $s \neq 1$, definimos Φ_{r_i} como la bandera cuya 0-cara es $(\emptyset, \{\tau_{e_{i-1}} \dots \tau_{e_1}\})$, es decir, la misma que la de $\Phi_{r_{i-1}}$ y cuya 1-cara es $(\{e_i\}, \{\tau_{e_{i-1}} \dots \tau_{e_1}\sigma_a\})$, de tal forma que la sucesión

$$\Phi = \Phi_0, \dots, \Phi_{r_1} \dots \Phi_{r_2} \dots \Phi_{r_s} \dots \Phi_{r_s+k} = \Psi$$

es tal que Φ_i es adyacente a Φ_{i+1} y $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ para toda $i \in \{0, \dots, r_s + k\}$, por lo tanto, la sucesión buscada.

□

Finalmente, con la siguiente proposición demostramos que \mathcal{P}_G satisface la propiedad diamante, es decir, que dadas cualesquiera dos caras F y G de \mathcal{P}_G , de rangos $i - 1$ e $i + 1$, respectivamente, existen exactamente dos caras J_1 y J_2 , de rango i , tales que $F <_{\mathcal{P}_G} J_k <_{\mathcal{P}_G} G$ para $k = 1, 2$.

Proposición 13. *Dadas dos caras $(K, a), (L, b) \in \mathcal{P}_G$ tales que $(K, a) <_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ con $\text{rank}((K, a)) = i - 1$ y $\text{rank}((L, b)) = i + 1$, existen exactamente dos caras $(J_i, c) \in \mathcal{P}_G$ tales que $(K, a) <_{\mathcal{P}_G} (J_i, c) <_{\mathcal{P}_G} (L, b)$.*

Demostración. Por la relación de incidencia, tenemos que $K \subset L$, con $|K| = |L| - 2$, por lo que existen exactamente dos elementos $e_1, e_2 \in L$ tales que

$e_1, e_2 \notin K$. Sea $J_i = K \cup \{e_i\}$ para $i \in \{1, 2\}$. Entonces (J_1, a) y (J_2, a) son elementos distintos de \mathcal{P}_G , que cumplen que $(K, a) <_{\mathcal{P}_G} (J_i, a) <_{\mathcal{P}_G} (L, b)$.

Por otro lado, J_1 y J_2 son las únicas caras de \mathcal{P}_G que satisfacen esta condición, ya que dado cualquier elemento $(J, x) \in \mathcal{P}_G$ tal que $(K, a) <_{\mathcal{P}_G} (J, x) <_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ se tiene que $K \subset J \subset L$, lo que implica que $J = J_i$ para algún $i \in \{1, 2\}$, y por otro lado, $a \in \langle \Gamma_J \rangle \sigma_x$ y $x \in \langle \Gamma_L \rangle \sigma_b$, lo que significa que $\langle \Gamma_L \rangle \sigma_x = \langle \Gamma_L \rangle \sigma_b$ pero si $(J_i, a) <_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ entonces $\langle \Gamma_L \rangle \sigma_b = \langle \Gamma_{J_i} \rangle \sigma_a$, por lo que se puede concluir que $(J_i, a) \equiv (J, x)$ para algún $i \in \{1, 2\}$. \square

Así, finalmente podemos enunciar el siguiente:

Teorema 4.1. *Dada una gráfica conexa G , con p vértices y q aristas, el conjunto parcialmente ordenado \mathcal{P}_G es un politopo abstracto de rango q .*

Demostración. \mathcal{P}_G cumple las siguientes condiciones:

- i) tiene máximo y mínimo,
- ii) toda bandera tiene $q + 2$ elementos,
- iii) es fuertemente conexo por banderas y
- iv) satisface la propiedad diamante.

Por lo tanto, \mathcal{P}_G es un politopo abstracto de rango q . \square

Teorema 4.2. *Dada una gráfica conexa G , con p vértices y q aristas, $\mathcal{G}(G)$ es una gráfica isomorfa a $G(\mathcal{P}_G)$.*

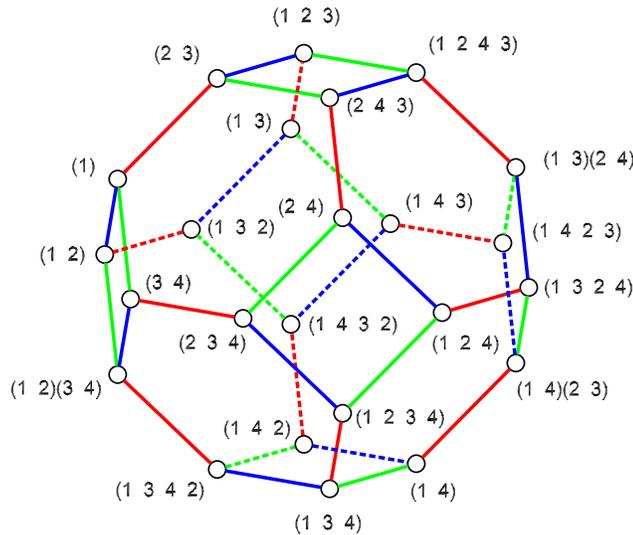
Demostración. Por definición, $G(\mathcal{P}_G)$ es la gráfica cuyos vértices son las parejas ordenadas de la forma $(\emptyset, \{\sigma\})$, con $\sigma \in S_p$, tal que dos de ellas son adyacentes si inciden en la misma 1-cara de \mathcal{P}_G . Esto significa que, si $(\emptyset, \{\sigma\})$ y $(\emptyset, \{\gamma\})$ son adyacentes en $G(\mathcal{P}_G)$, existe una cara $(\{e_i\}, \{\alpha\}) \in \mathcal{P}_G$ de tal forma que o bien $\sigma = \alpha$ o $\sigma \in \langle \Gamma_{\tau_{e_i}} \rangle \alpha$. Esto último implica que, si $\sigma \neq \alpha$, $\sigma = \tau_{e_i} \alpha$. Lo mismo ocurre con γ .

Si $\sigma \neq \gamma$, existen dos casos posibles: que $\sigma = \alpha$ y $\gamma = \tau_{e_i} \alpha$ o bien, $\gamma = \alpha$ y $\sigma = \tau_{e_i} \alpha$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\sigma = \alpha$ y $\gamma = \tau_{e_i}\alpha$, es decir, que $\gamma = \tau_{e_i}\sigma$. Esto implica, por definición, que γ es adyacente a σ en $\mathcal{G}(G)$, por lo tanto, una función $f : V(G(\mathcal{P}_G)) \rightarrow V(\mathcal{G}(G))$ tal que $f((\emptyset, \{\sigma\})) = \sigma$, que es claramente una biyección, es también un isomorfismo de gráficas entre $G(\mathcal{P}_G)$ y $\mathcal{G}(G)$. \square

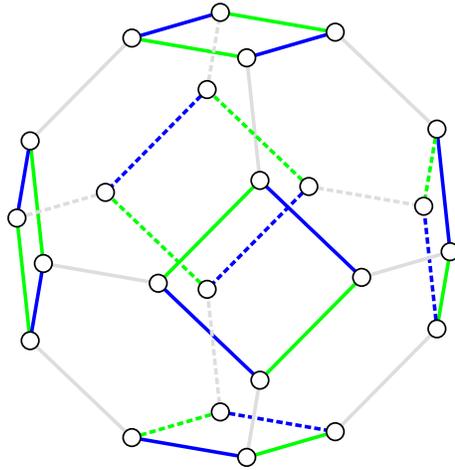
Analizaremos ahora algunos ejemplos. Para esto retomaremos las gráficas no isomorfas de tamaño tres y sus gráficas de Cayley asociadas, para construir sus graficaedros y comparar las gráficas de éstos con dichas graficas de Cayley.

Ejemplo 19. Sea G la trayectoria de longitud 3. Una forma de dibujar a $\mathcal{G}(G)$, distinta a la vista en el capítulo 3, es la siguiente:

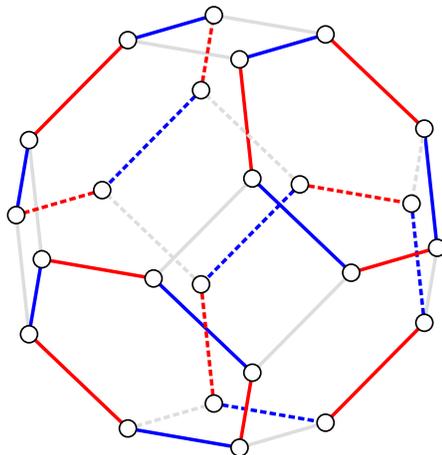


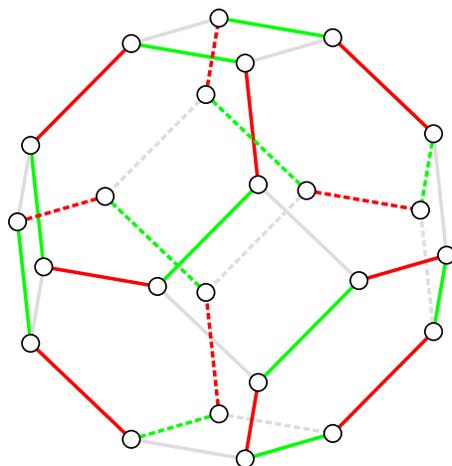
Lo que hicimos a lo largo de este trabajo fue demostrar que ésta gráfica es isomorfa a la gráfica del graficaedro de la trayectoria de longitud 3, de manera que a cada vértice σ de $\mathcal{G}(G)$ lo hacemos corresponder con la cara $(\emptyset, \{\sigma\})$ de \mathcal{P}_G .

Intuitivamente, podemos ver que dicho politopo es un poliedro convexo que tiene seis caras cuadradas



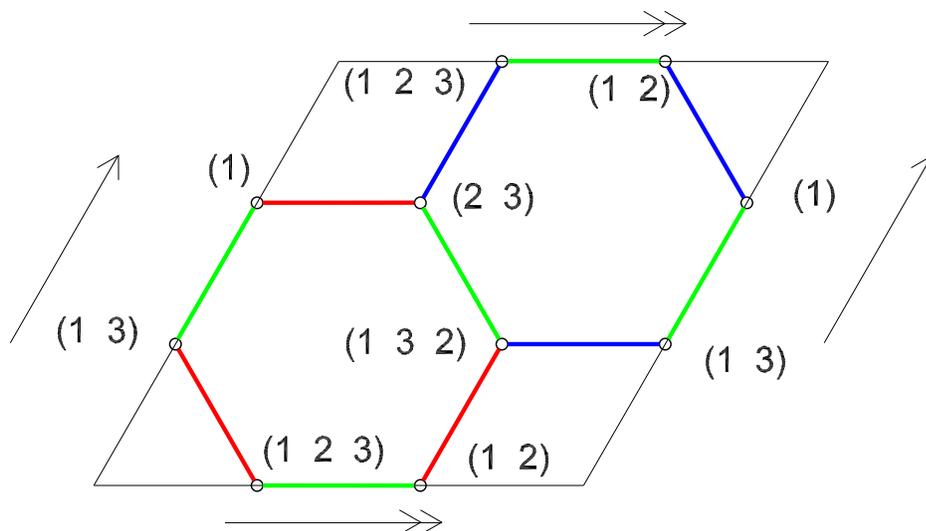
y ocho caras hexagonales





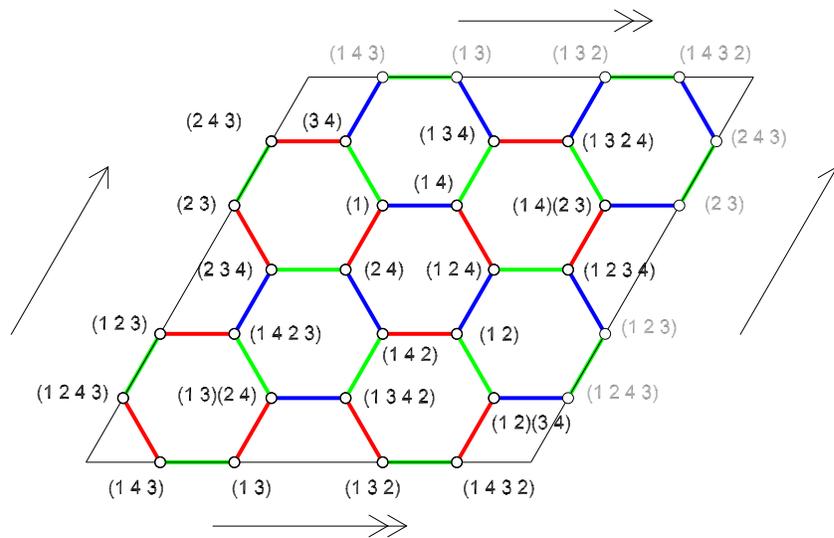
cada una de las cuales está relacionada con una componente conexa de la gráfica de Cayley asociada a alguna subgráfica generadora de G , de tamaño dos, y representada por uno de sus vértices.

Ejemplo 20. Sea G la gráfica completa de orden 3. Como en el ejemplo anterior, existe una forma de dibujar a $\mathcal{G}(G)$, distinta a la del capítulo 3, que aporta una idea bastante clara de cómo puede llegar a verse el graficaedro:



Hablando sin formalidad, esta es una representación de un politopo llamado $\{3,6\}_{(1,1)}$, en la que se aprecia que éste se puede construir sobre el toro, partiendo del paralelogramo e identificando sus lados como las flechas lo indican. Podemos ver que tiene, en total, seis vértices y tres caras hexagonales, una por cada pareja de aristas distintas de K_3 (rojo-verde, rojo-azul y azul-verde).

Ejemplo 21. Sea G la estrella de tamaño 3. En este caso, la misma forma de dibujar a $\mathcal{G}(G)$ es la que nos sirve para dar una representación del graficaedro, \mathcal{P}_G , así:



En este caso podemos observar, en forma intuitiva, que se trata de un politopo que tiene 24 vértices y doce caras hexagonales, que también se encuentra en el toro.

Bibliografía

- [1] Chartrand, Gary, Linda Lesniak: *Graphs & Digraphs*. Londres, Reino Unido: Chapman & Hall, 1996.
- [2] Fraleigh, John B.. *A first course in abstract algebra*. Boston, E.U.A.: Addison-Wesley, 2003.
- [3] Godsil, Chris, Gordon Royle. *Algebraic Graph Theory*. Nueva York, E.U.A.: Springer, c2001.
- [4] Hubard, Isabel. *From geometry to groups and back: the study of highly symmetric polytopes*. Tesis doctoral, 2007
- [5] McMullen, Peter, Egon Schulte: *Abstract Regular Polytopes*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University, 2002.
- [6] Ziegler, Gunter M: *Lectures on Polytopes*. Nueva York, E.U.A.: Springer, c1995.