

Diseño de una instalación experimental para estudiar la interacción llanta-pavimento

Tesis presentada por

Jeannete Guadalupe Aguilar Martínez

en el área de Control, campo de conocimiento de Ingeniería Eléctrica

para obtener el grado de

Maestra

en

Ingeniería

en el

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

de la

Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria, México D.F.

Director de Tesis:

Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esta tesis fue aprobada por el siguiente jurado:

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez
Presidente

Dr. Marco Arteaga Pérez
Secretario

Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria
Primer Vocal

Dr. Yu Tang Xu
Primer Suplente

Dr. Héctor Benítez Pérez
Segundo Suplente

Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria

Tutor

Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México D.F.

2008

Con mucho cariño a mis padres Rafael y Yola...

A ti papá por darme tu apoyo incondicional, tus consejos y tu fuerza, a ti mamá gracias por estar siempre a mi lado brindándome tu amor, ternura y comprensión, gracias por ser tal como eres... Me han enseñado a encarar las adversidades sin perder nunca la dignidad ni desfallecer en el intento. Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi perseverancia y mi empeño, y todo ello con una gran dosis de amor y sin pedir nunca nada a cambio.

A mis hermanos, mis mejores amigos, Roberto y Junior gracias por estar conmigo y apoyarme siempre, sin ustedes mi vida no sería lo mismo, los quiero mucho.

Y como olvidar a mi sobrina Lluvia, gracias por darle esa chispa a mi vida.

Agradecimientos

Mi sincero agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México, mi segunda casa, donde forje mi formación estudiantil.

Gracias al Instituto de Ingeniería por el apoyo brindado.

Un agradecimiento especial al Doctor Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria por asesorarme a lo largo de la tesis, por compartir su conocimiento e inspirar en mí, mucha admiración. Las palabras no son suficientes para expresar mi gratitud hacia usted.

A todo el colegio de control, mis profesores que formaron parte de mi vida como estudiante, gracias doctores.

A todos aquellos que han compartido parte de su vida conmigo, gracias por regañarme, aconsejarme, compartir risas y llantos a todos ustedes, Maty, Briss, Trejolín, Gustavo, Irlanda, Charlangas, Toño, Lalito, Alexito, Lenin, José Luis, Jesús el master, Pato, Miguelito, Mi vecinis, Chris, Luis Miguel, José Juan, Cañitas, La señorita Lesly, Tomate, Diana, Faty, Juan Carlos, Lulú, Karinita, Petruska, Ocar, Rene, Rubén, Serchito, Yadis, Pato, Vicsito guapo, Pablito, Fer, Iván, Rodolfo, Raulichi y a todas aquellas personas que de alguna manera me apoyaron en algún momento.

Este trabajo no hubiera sido posible sin la ayuda del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca que recibí durante el tiempo que tomó la realización de este trabajo.

Gracias a todos...!!

Gracias por ayudarme a lograrlo...!!

Jeannete Aguilar
Ciudad Universitaria, México, D.F., 2008

Resumen

En este trabajo se diseña una instalación experimental para estudiar el fenómeno de fricción entre llanta y pavimento. Dicha instalación consta de un rodillo, una llanta y un motor de corriente directa. Se estudia el problema de la dinámica de la tracción y frenado a través de modelos dinámicos de fricción, basados en el de LuGre (Canudas de Wit, C. et al. 1995), estos utilizan solo un cuarto de vehículo. Se dimensionan los elementos base para el banco de pruebas experimental y se especifican los componentes de dicho proyecto. Finalmente, se diseñan algoritmos de control para el movimiento del mismo.

Abstract

An experimental setup is designed for the study of friction phenomena between tire and pavement. This setup consists of a roller, a tire and a direct-current motor. The problem of traction and braking dynamics is analyzed through dynamic friction models which are based on the of LuGre (Canudas de Wit, C. et al. 1995), considering also a quarter-vehicle. Dimensions for the mechanical elements are provided as well as basic procedures for testing. Components for this project are specified. Control algorithms are developed for regulating system motion.

Índice general

Índice de figuras	VIII
Índice de cuadros	X
1. Introducción	1
1.1. Diferencia entre los modelos de fricción pseudoestáticos y dinámicos	2
1.2. Objetivos de la tesis	4
1.3. Estructura de la tesis	5
2. Modelo dinámico del vehículo	6
2.1. Modelo matemático de un cuarto de vehículo	7
3. Modelo dinámico de fricción	12
4. Control con base en Lyapunov para el sistema electro-mecánico	18
4.1. Modelo dinámico del motor de corriente directa	18
4.2. Modelo dinámico del sistema electro-mecánico	21
4.3. Trayectorias deseadas	24
4.4. Ley de control para el sistema electro-mecánico	27
4.5. Análisis dimensional para el diseño del banco de pruebas llanta-pavimento .	33
5. Resultados de las simulaciones	42
6. Conclusiones	69

Índice de figuras

1.1. Coeficiente de fricción μ vs deslizamiento longitudinal λ a diferentes velocidades del vehículo.	2
1.2. Sistema llanta-pavimento.	4
1.3. Diagrama de bloque del banco de pruebas.	5
2.1. Modelo de cuarto de vehículo.	6
2.2. Diseño del banco para estudiar la fricción llanta-pavimento (vista frontal)	8
2.3. Diseño del banco para estudiar la fricción llanta-pavimento (perspectiva)	9
3.1. Interfaz entre dos superficies de cerdas erizadas elásticas	12
3.2. Ejemplos de μ contra λ en pavimento y hielo, respectivamente. Los cuadrados muestran medidas y la línea recta es una aproximación lineal.	14
3.3. μ vs λ para diferentes superficies.	14
3.4. Rueda con parámetros concentrados	15
3.5. Rueda con parámetros distribuidos	16
4.1. Motor de corriente directa.	19
4.2. Circuito eléctrico de un motor de corriente directa.	20
4.3. Sistema electro-mecánico.	22
4.4. Trayectoria deseada del vehículo.	24
4.5. Diseño a escala llanta-pavimento.	34
4.6. Llanta para el banco de pruebas.	36
4.7. Rodillo para el banco de pruebas.	37
4.8. Banco de pruebas.	41
5.1. Servomotor convencional sin escobillas (brushless) utilizado en el diseño.	43
5.2. Dimensiones del motor.	44
5.3. Velocidad longitudinal deseada alcanzada en la maniobra (v_d).	45
5.4. Aceleración longitudinal deseada (\dot{v}_d).	45
5.5. Velocidad deseada alcanzada en la maniobra (ω_{2d}).	46
5.6. Velocidad Angular (ω_2).	46
5.7. Error de seguimiento para la velocidad angular ($\tilde{\omega}_2$).	47
5.8. Velocidad relativa deseada (s_d).	48
5.9. Velocidad relativa alcanzada (s).	48

5.10. Error de seguimiento para la velocidad relativa (\tilde{s}).	49
5.11. Fricción deseada (μ_d).	49
5.12. Fricción (μ).	50
5.13. Coeficiente de fricción μ en función del deslizamiento λ .	50
5.14. Corriente manipulada (i'_a).	51
5.15. Corriente real demandada (i_a).	52
5.16. Variable de error de corriente (\tilde{z}).	52
5.17. Voltaje requerido en la maniobra (V_e).	53
5.18. Velocidad deseada (v_d).	54
5.19. Aceleración deseada (\dot{v}_d).	54
5.20. Velocidad angular deseada ($\tilde{\omega}_{2d}$).	55
5.21. Velocidad Angular alcanzada (ω_2).	55
5.22. Error de seguimiento para la velocidad angular ($\tilde{\omega}_2$).	56
5.23. Velocidad relativa deseada (s_d).	57
5.24. Velocidad relativa alcanzada (s).	57
5.25. Error de seguimiento para la velocidad relativa (\tilde{s}).	58
5.26. Fricción deseada (μ_d).	58
5.27. Fricción (μ).	59
5.28. Corriente manipulada (i'_a).	59
5.29. Corriente demandada real (i_a).	60
5.30. Variable de error de corriente (\tilde{z}).	60
5.31. Voltaje requerido en la maniobra (V_e).	61
5.32. Velocidad deseada (v_d).	62
5.33. Aceleración deseada (\dot{v}_d).	62
5.34. Velocidad deseada alcanzada (ω_{2d}).	63
5.35. Velocidad Angular real (ω_2).	63
5.36. Error de seguimiento para la velocidad angular ($\tilde{\omega}$).	64
5.37. Velocidad relativa deseada (s_d).	64
5.38. Velocidad relativa (s).	65
5.39. Error de seguimiento para la velocidad relativa (\tilde{s}).	65
5.40. Fricción deseada (μ_d).	66
5.41. Fricción (μ).	66
5.42. Corriente manipulada (i'_a).	67
5.43. Corriente demandada real (i_a).	67
5.44. Variable de error de corriente (\tilde{z}).	68
5.45. Voltaje requerido en la maniobra (V_e).	68

Índice de cuadros

3.1. Ejemplos de parámetros para el modelo dinámico de fricción.	17
4.1. Parámetros utilizados en simulación.	40
5.1. Parámetros para el modelo del vehículo.	42
5.2. Parámetros del motor eléctrico.	43
5.3. Datos mecánicos.	44
5.4. Dimensiones del motor eléctrico.	44

Capítulo 1

Introducción

Durante muchos años la fricción llanta-pavimento ha sido estudiada por su importancia en el comportamiento de los vehículos durante el frenado y la tracción. Esta fricción no sólo depende de factores tales como las condiciones de las llantas y las características del pavimento, sino también de condiciones ambientales tales como la densidad del aire y la humedad, lo que la hace un fenómeno complejo.

En la parte experimental, los distintos estudios a propósito de la fricción llanta-pavimento han hecho énfasis en el uso de modelos pseudoestáticos. En particular, la llamada “*fórmula mágica*” (Bakker, E. et al. 1987), ha sido extensamente utilizada. Se trata de un modelo que reproduce el coeficiente de fricción contra el deslizamiento, definido este como la relación de la velocidad relativa entre vehículo y llanta, dividida por la velocidad del vehículo. Un ejemplo de dicha curva se muestra en la Figura 1.1, (Harned, J. et al. 1969) que representa el comportamiento típico del coeficiente de fricción contra el deslizamiento.

Los modelos pseudoestáticos tienen limitaciones importantes: son muy difíciles de caracterizar y carecen de una base física. Por esta razón, hace varios años se introdujeron los modelos dinámicos de fricción (Canudas de Wit, C. et al. 1995), que se han usado para describir la fricción llanta-pavimento con mayor detalle.

Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P. (1999) utilizan modelos dinámicos para describir la fricción llanta-pavimento. El trabajo es extendido por otros autores (Alvarez, L. et al. 2000) en este contexto. Más sin embargo existe poca evidencia experimental sobre

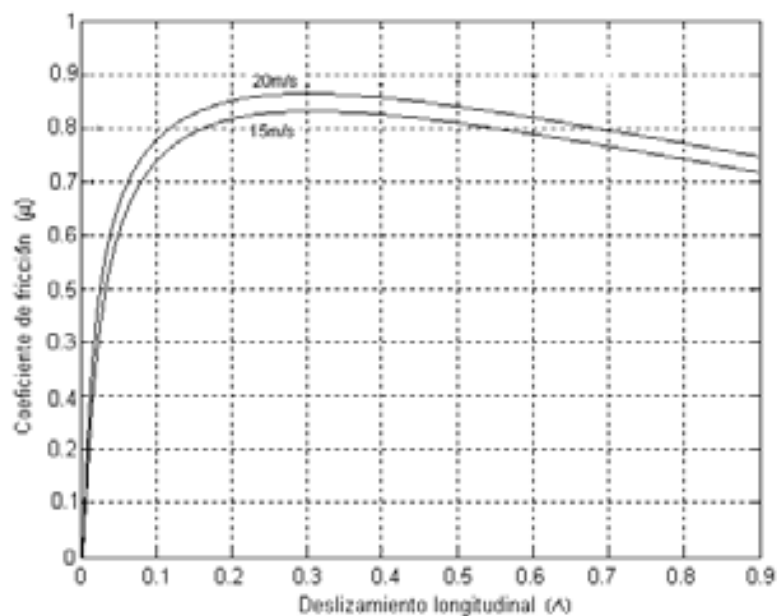


Figura 1.1: Coeficiente de fricción μ vs deslizamiento longitudinal λ a diferentes velocidades del vehículo.

la efectividad de estos nuevos modelos, sobre todo en relación con modelos dinámicos más simples. Este trabajo tiene por objeto diseñar un banco de pruebas para analizar la fricción llanta-pavimento en el contexto de sistemas dinámicos.

La hipótesis básica a comprobar en este trabajo es que es posible obtener una buena descripción del fenómeno de fricción sin tener que recurrir a modelos dinámicos complejos.

1.1. Diferencia entre los modelos de fricción pseudoestáticos y dinámicos

La mayoría de los modelos de fricción para llanta-pavimento están basados en los modelos pseudoestáticos. Estos dan una buena descripción de la fricción pero tienen carencias ya que, por ejemplo, no explican los fenómenos de histéresis cuando se trabaja en un régimen no estacionario de velocidad, las variaciones en la fuerza de ruptura o los pequeños deslizamientos que ocurren en la superficie de contacto cuando se le aplica una cierta fuerza

o cuando se presenta un cambio de signo en la velocidad (Olmos, L. 2001). Los parámetros de estos modelos son difíciles de identificar debido a su compleja estructura analítica. Sin embargo, dan una buena aproximación a los resultados experimentales y son ampliamente usados en áreas de investigación y en la industria. Por estas razones la “*fórmula mágica*” y otros modelos pseudoestáticos de fricción son más usados para simulaciones que para propósitos de control (Armstrong-Hélouvy, B. 1991).

En cambio, los modelos dinámicos de fricción capturan los diversos fenómenos de fricción con más precisión que los pseudoestáticos, estos tienen parámetros que pueden relacionarse con propiedades de los materiales, como rigidez mecánica, amortiguamiento viscoso y por consiguiente estos efectos son más fáciles de analizar.

En este trabajo se utiliza un modelo de fricción dinámico. Por ello es importante comprobar que este abarca y representa todas las características de un pseudoestático.

Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P. (1999) proponen un nuevo modelo dinámico de fricción llanta-pavimento basado en el de LuGre (Canudas de Wit, C. et al. 1995). Supone que las superficies hacen contacto a través de cerdas erizadas elásticas y que cuando se aplica una fuerza tangencial las cerdas se deforman como resortes, lo que hace que la fuerza de fricción aumente (ver Figura 1.2).

En Olmos, L. (2001) se analizan las similitudes entre los modelos de fricción dinámicos y pseudoestáticos. Para ello se utiliza el modelo pseudoestático de Burckhardt (1993), también conocido como la “*fórmula mágica*”.

Dicha expresión representa el coeficiente de fricción (μ) en función del deslizamiento de la llanta (λ), la velocidad y otros parámetros (Harned, J., Johnston, L., y Scharpf, G. 1969).

$$\mu = (C_1(1 - e^{-C_2\lambda_u}) - C_3\lambda_u)e^{-C_4v} \quad (1.1)$$

donde v es la velocidad longitudinal, λ_u el deslizamiento longitudinal y C_1, \dots, C_4 son

constantes.

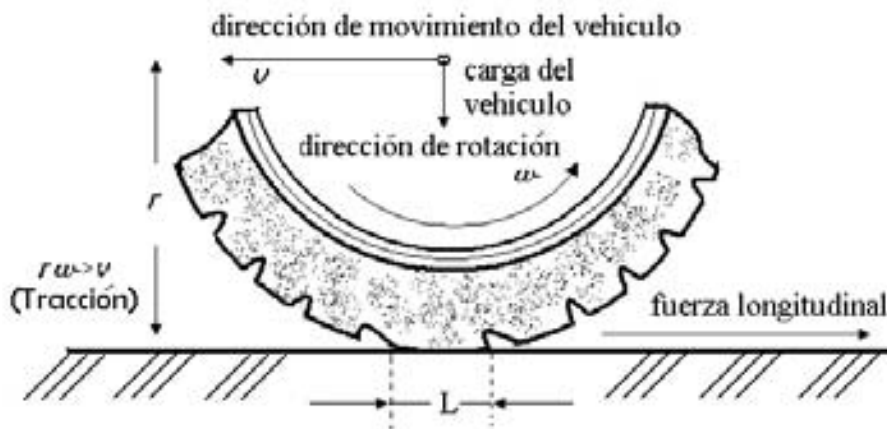


Figura 1.2: Sistema llanta-pavimento.

Al presentar el modelo de Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P. (1999) en condiciones equiparables a los mapas pseudoestáticos se encuentra que este ajusta casi perfectamente al modelo propuesto en la ecuación de Burckhardt (1993) con un error de menos del 1%.

Es por ello, que la fricción llanta-pavimento se analizará con base en el modelo dinámico de LuGre (Canudas de Wit, C. et al. 1995). Se supondrá que los parámetros utilizados son conocidos.

1.2. Objetivos de la tesis

Esta tesis tiene dos objetivos principales:

a) Diseñar una ley de control para tracción y frenado con base en modelos dinámicos de fricción llanta-pavimento y en técnicas de Lyapunov.

b) Diseñar una instalación experimental para investigar la fricción llanta-pavimento.

Para ello se propone un banco de pruebas, conformado por un rodillo, una llanta y un motor de corriente directa (ver Figura 1.3). El rodillo representa el pavimento y a su vez el peso del vehículo, la llanta es un modelo a escala la cual hace contacto tangencialmente con la superficie del rodillo y el motor de corriente directa, que está acoplado a la llanta, proporciona el par para el movimiento. El diseño del banco se realizó en un software de diseño mecánico en 3D (solid Works).

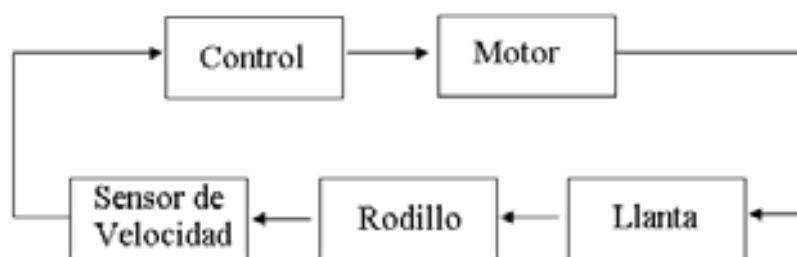


Figura 1.3: Diagrama de bloque del banco de pruebas.

Esta tesis se limita al diseño del banco de pruebas, quedando como parte de un trabajo futuro la construcción del banco de pruebas que servirá para realizar experimentos con la finalidad de estudiar la interacción llanta-pavimento.

1.3. Estructura de la tesis

La presente tesis está dividida en cinco capítulos. En el Capítulo 2 se desarrolla el modelo matemático del vehículo simplificado, que sólo considera la dinámica longitudinal en una sola llanta. En el Capítulo 3 se estudia el modelo dinámico de fricción. En el Capítulo 4 se obtiene el modelo dinámico que representa el sistema electro-mecánico y se obtiene una ley de control para dicho sistema en función de la corriente y voltaje de armadura del motor de corriente directa. En el Capítulo 5 se muestran las simulaciones a partir de las cuales se realizó el diseño del banco de pruebas. Finalmente se presentan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Modelo dinámico del vehículo

En este capítulo se estudia la dinámica longitudinal de un vehículo utilizando un modelo de solo un cuarto de vehículo (ver Figura 2.1). Si bien no es una buena representación de un vehículo completo, si permite obtener resultados para analizar el fenómeno de fricción llanta-pavimento. Este tipo de modelo ha sido ya usado por otros autores como por ejemplo Kiencke, U. (1993), Kiencke, U. y Daiss, A. (1994), Liu, Y. y Sun, J. (1995).

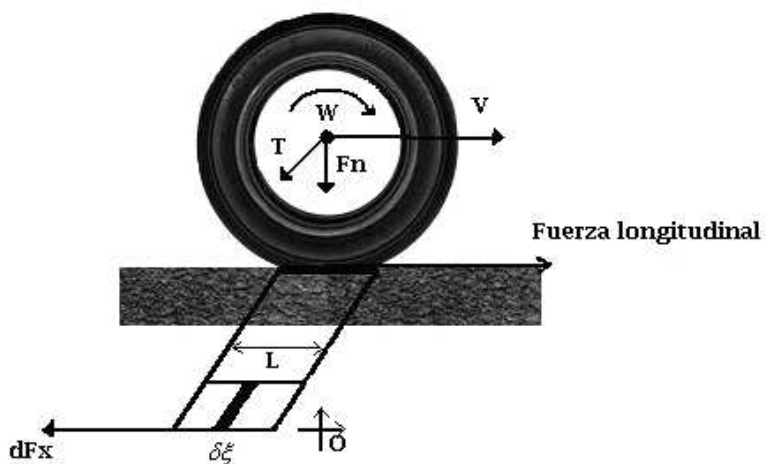


Figura 2.1: Modelo de cuarto de vehículo.

2.1. Modelo matemático de un cuarto de vehículo

Para describir el movimiento longitudinal de un cuarto de vehículo se utiliza la siguiente relación

$$m\dot{v} = 4F_x - F_{ax} \quad (2.1)$$

donde m es la masa del vehículo, v la velocidad longitudinal del vehículo, F_x la fuerza entre la llanta y el pavimento y F_{ax} la fuerza aerodinámica de arrastre. Esta fuerza se opone al avance del vehículo y se asume que está distribuida uniformemente.

La fuerza aerodinámica F_{ax} puede expresarse de la siguiente manera

$$F_{ax} = C_{ax}v^2 \quad (2.2)$$

donde C_{ax} es el coeficiente aerodinámico que depende del área longitudinal efectiva, la densidad del aire y la forma del vehículo. En la mayoría de los vehículos actuales el coeficiente aerodinámico oscila entre 0.26 [1] y 0.40 [1], aunque en algunos vehículos deportivos consiguen un C_{ax} de 0.23 [1] y en prototipos experimentales llegan incluso al 0.19 [1] (Mcbeath, S. 2005).

La fuerza de fricción llanta-pavimento puede expresarse de la siguiente manera

$$F_x = -\mu F_n \quad (2.3)$$

donde μ es el coeficiente de fricción llanta-pavimento y F_n es la fuerza normal en cada neumático, esta fuerza se expresa como $F_n = \frac{mg_t}{4}$, donde g_t es la constante gravitacional.

La dinámica rotacional de la llanta está descrita por

$$I_1\dot{\omega}_1 = \tau_m - \tau_b - F_x R_1 \quad (2.4)$$

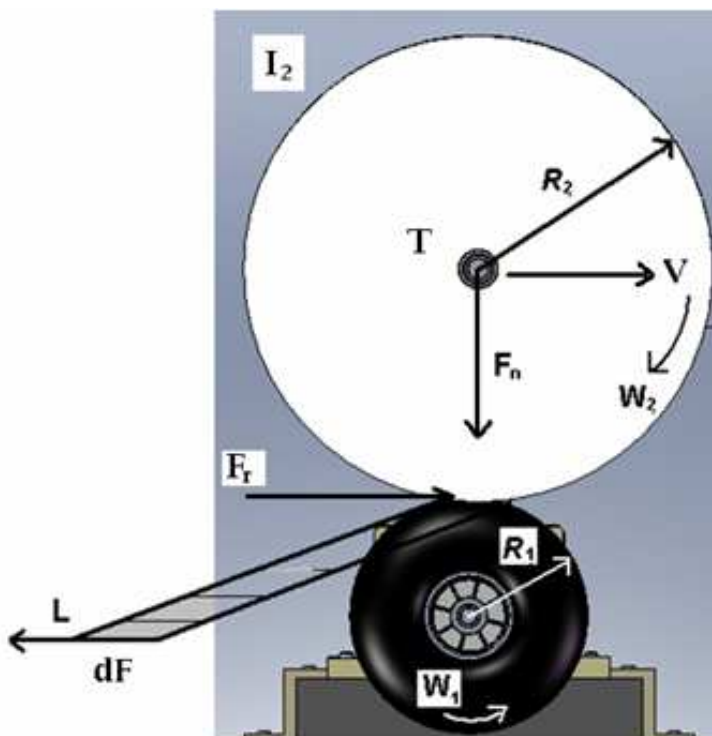


Figura 2.2: Diseño del banco para estudiar la fricción llanta-pavimento (vista frontal)

donde \dot{w}_1 es la aceleración angular, I_1 es la inercia de la llanta, τ_m es el par de impulso, τ_b es el par de frenado y R_1 es el radio efectivo de la llanta. La diferencia de τ_m y τ_b será considerada como τ .

En el diseño que se presenta en esta tesis se estudiará el comportamiento de la fricción llanta-pavimento con un modelo matemático que representa solo un cuarto de vehículo, constituido por un rodillo y una llanta. Se ha supuesto que el rodillo se comportará como el pavimento que también representará la masa del vehículo. La llanta está acoplada al eje de un motor de corriente directa sin transmisión (ver Figuras 2.2 y 2.3). El radio del rodillo está dado por R_2 , ω_2 es la velocidad angular del rodillo e I_2 es la inercia del rodillo.

Si se toma en cuenta que

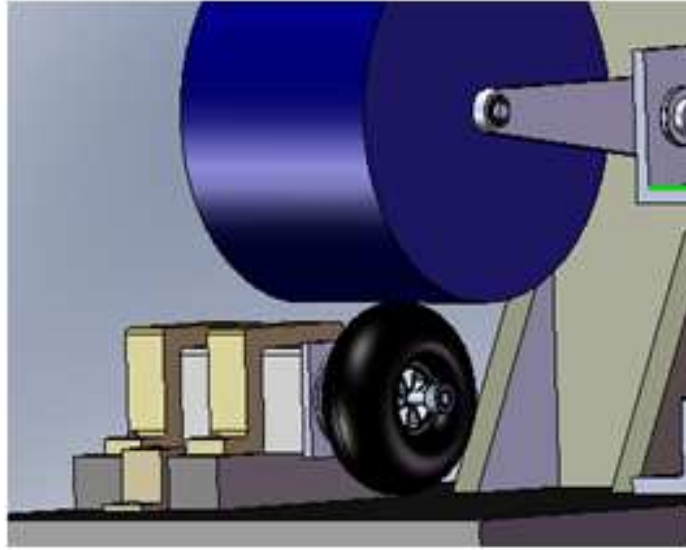


Figura 2.3: Diseño del banco para estudiar la fricción llanta-pavimento (perspectiva)

$$v = R_2\omega_2, \quad (2.5)$$

se deriva la Ec. (2.5) con respecto al tiempo

$$\dot{v} = R_2\dot{\omega}_2 \quad (2.6)$$

y que

$$m = \frac{I_2}{R_2^2} \quad (2.7)$$

se obtiene, al sustituir las Ecs. (2.6) y (2.7) en la Ec. (2.1), que la dinámica rotacional del rodillo que está dada por

$$I_2\dot{\omega}_2 = F_x R_2 - F_{ax} R_2 \quad (2.8)$$

La velocidad angular ω_1 y la velocidad angular ω_2 están relacionadas a través de la velocidad relativa definida como

$$s = R_2\omega_2 - R_1\omega_1 \quad (2.9)$$

Se puede introducir a s como variable de estado, en vez de ω_1 . Si se toma la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (2.9).

$$\dot{s} = R_2\dot{\omega}_2 - R_1\dot{\omega}_1 \quad (2.10)$$

Tomando $\tau = \tau_m - \tau_b$ y la Ec. (2.4) se tiene

$$\dot{\omega}_1 = \mu \frac{mgt R_1}{4 I_1} + \frac{\tau}{I_1} \quad (2.11)$$

y al sustituir (2.3) en la Ec. (2.8) se obtiene

$$\dot{\omega}_2 = -\mu \frac{mgt R_2}{4 I_2} - C_{ax}v^2 \frac{R_2}{I_2} \quad (2.12)$$

Al sustituir las Ecs. (2.11) y (2.12) en la Ec. (2.10) se tiene la siguiente expresión

$$\dot{s} = R_2 \left[-\mu \frac{mgt R_2}{4 I_2} - C_{ax}v^2 \frac{R_2}{I_2} \right] - R_1 \left[\frac{\tau}{I_1} + \mu \frac{mgt R_1}{4 I_1} \right] \quad (2.13)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.2) y (2.3) en las Ecs. (2.1) y (2.7), la dinámica del vehículo se puede expresar como

$$\dot{v} = -a\mu - bv^2 \quad (2.14)$$

$$\dot{s} = -(a + c)\mu - bv^2 - d\tau \quad (2.15)$$

donde $a = \frac{mg_t}{4} \frac{R_2^2}{I_2}$, $b = C_{ax} \frac{R_2^2}{I_2}$, $c = \frac{mg_t}{4} \frac{R_1^2}{I_1}$ y $d = \frac{R_1^2}{I_1}$.

La velocidad v y la velocidad relativa s serán consideradas como funciones uniformemente continuas.

Capítulo 3

Modelo dinámico de fricción

Para estudiar la fricción llanta-pavimento, Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P. (1999) proponen modelos dinámicos de fricción basados en la representación de LuGre que se utilizan como base para el presente trabajo. Este modelo supone que las superficies hacen contacto a través de cerdas erizadas elásticas y que cuando se aplica una fuerza tangencial las cerdas se deforman como resortes, lo que hace que la fuerza de fricción aumente, como se muestra en la Figura 3.1.

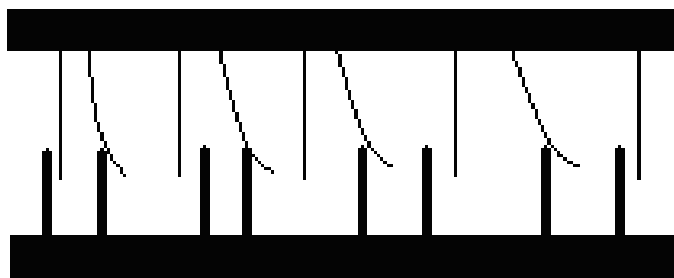


Figura 3.1: Interfaz entre dos superficies de cerdas erizadas elásticas

Si la fuerza es grande, las cerdas se deformarán hasta que ocurra un deslizamiento, que dependerá de la superficie de contacto, en este caso el pavimento. Este fenómeno es bastante impredecible debido a la irregularidad de la superficie.

El modelo propuesto está basado en la deformación promedio de las cerdas z , es similar al utilizado en Canudas de Wit, C. y Horowitz, R. (1999), que está dado por

$$\frac{dz}{dt} = s - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z \quad (3.1)$$

$$\mu = \frac{F_r}{F_n} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 s \quad (3.2)$$

donde s es la velocidad relativa entre las superficies (llanta-pavimento) y z es un estado interno que representa la deformación promedio de las cerdas.

Los parámetros σ_0 , σ_1 y σ_2 representan respectivamente la rigidez, el amortiguamiento y la fricción viscosa entre las superficies, y donde esta es una relación lineal entre la fuerza aplicada y la velocidad, y F_r es la fuerza de fricción llanta pavimento. La función $g(s)$ se describirá más adelante.

La fuerza de fricción F_r depende de varios factores, tales como ciertas características de la llanta, pavimento y velocidad del vehículo. Esta fuerza es una función del coeficiente de deslizamiento λ (o deslizamiento longitudinal). Para efectos de frenado y aceleración, el deslizamiento longitudinal λ se define como

$$\lambda = 1 - \frac{r\omega}{v} \quad \text{si} \quad v > r\omega \quad (\text{Frenado}) \quad (3.3)$$

$$\lambda = 1 - \frac{v}{r\omega} \quad \text{si} \quad v < r\omega \quad (\text{Aceleración}) \quad (3.4)$$

donde v es la velocidad de la llanta, r es el radio efectivo y ω la velocidad angular de la llanta.

Las Figuras 3.2 y 3.3 muestran un ejemplo del coeficiente de fricción contra el deslizamiento longitudinal con diferentes condiciones de superficie (Gustafsson, F., Mathis, S., y Trajković, L. 1996).

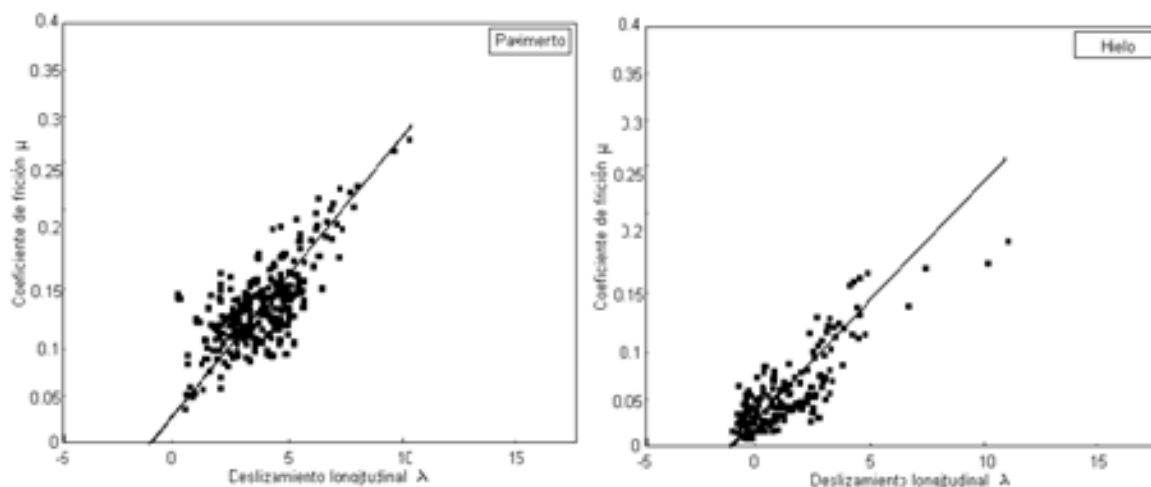


Figura 3.2: Ejemplos de μ contra λ en pavimento y hielo, respectivamente. Los cuadrados muestran medidas y la línea recta es una aproximación lineal.

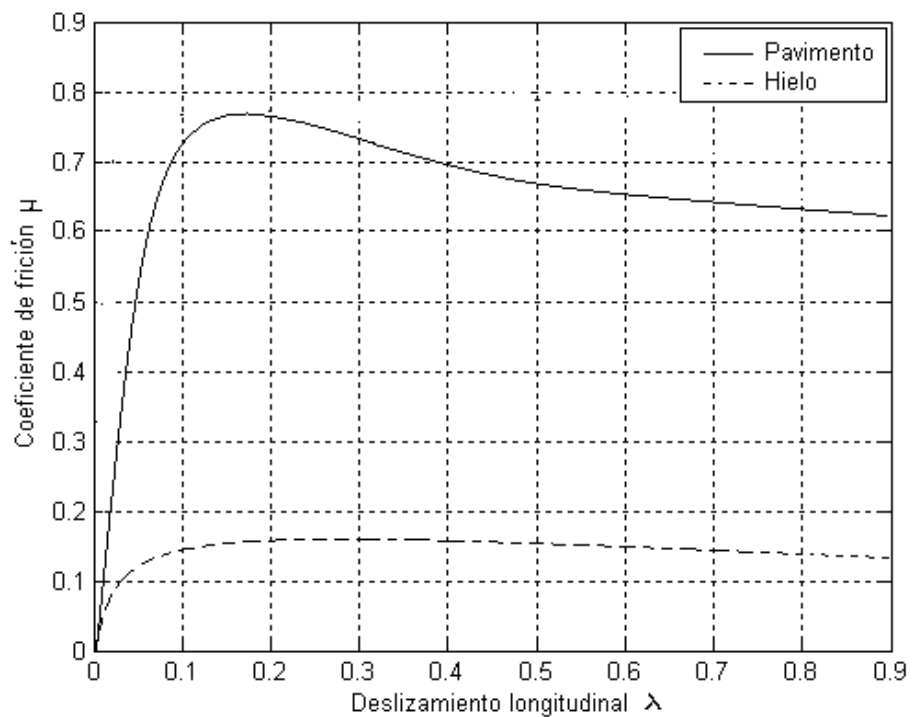


Figura 3.3: μ vs λ para diferentes superficies.

Para modelar y describir el fenómeno “Stribeck” (Armstrong-Hélouvry, B. 1991) y (Canudas de Wit, C. et al. 1995) se utiliza la siguiente fórmula

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c)e^{-\left(\frac{s}{v_s}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.5)$$

donde μ_c es la fuerza de Coulomb, μ_s es el nivel de la fuerza de fricción estática y v_s es la velocidad “Stribeck” (Canudas de Wit, C., Olsson, K., y Lischinsky, P. 1995). Este efecto ha sido incluido principalmente en modelos de fricción no lineales y fundamentalmente consiste en una disminución súbita de fricción al aumentar la velocidad después de que esta ha disminuido o llegado incluso a cero (por ejemplo, cuando la velocidad cambia de signo). La dinámica representada por las Ecs. (3.1), (3.2) y (3.5) es un modelo con parámetros concentrados y tiene como hipótesis que la interfase llanta-pavimento es puntual, como se muestra en la Figura 3.4.

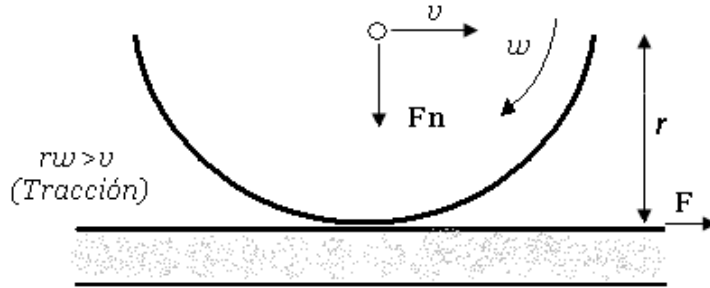


Figura 3.4: Rueda con parámetros concentrados

Por otro lado, existen también modelos de fricción con parámetros distribuidos (ver Figura 3.5). Este tipo de modelos consideran la existencia de un área de contacto o huella entre la llanta y el pavimento y son de la forma

$$\frac{d\delta z(\zeta, t)}{dt} = s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} \delta z(\zeta, t) \quad (3.6)$$

$$\delta F(\zeta, t) = [\sigma_0 \delta z(\zeta, t) + \sigma_1 \delta \dot{z}(\zeta, t) + \sigma_2 s] \delta F_n(\zeta, t) \quad (3.7)$$

$$F = \int_0^L \delta F(\zeta, t) d\zeta \quad (3.8)$$

donde δF es la diferencial de la fuerza de fricción, δF_n es la diferencial de la fuerza normal, s es la velocidad relativa y δz es la diferencial del estado interno de fricción. En este modelo se considera que los parámetros σ_0 , σ_1 y σ_2 se expresan por unidad de longitud y se considera que el ancho de la zona de contacto es constante. La fuerza F_n está uniformemente distribuida a lo largo del área de contacto y la velocidad de cada elemento diferencial δz se supone igual a la velocidad relativa s .

En este trabajo se adopta por sus características de simplicidad el modelo con parámetros concentrados. Por lo tanto el modelo está dado por

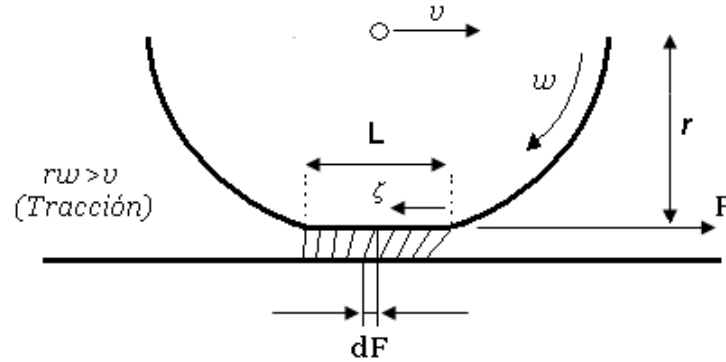


Figura 3.5: Rueda con parámetros distribuidos

$$\frac{dz}{dt} = s - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z \quad (3.9)$$

$$\mu = \frac{F_r}{F_n} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 s \quad (3.10)$$

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-|s/v_s|^{1/2}} \quad (3.11)$$

Un ejemplo de los valores de los parámetros que describen al modelo dinámico de fricción para pavimento, se muestran en la Tabla 3.1, estos valores se utilizan para algunas simulaciones presentadas en el Capítulo 5.

Parámetro	Valor	Unidad
σ_0	40	[1/m]
σ_1	49487×10^{-4}	[s/m]
σ_2	-0,0018	[s/m]
μ_c	0.5	[-]
μ_s	0.9	[-]
v_s	12.5	[s/m]

Tabla 3.1: Ejemplos de parámetros para el modelo dinámico de fricción.

Capítulo 4

Control con base en Lyapunov para el sistema electro-mecánico

En este capítulo se analizan los modelos dinámicos del motor eléctrico con excitación independiente y del sistema electro-mecánico.

Se presenta el diseño de las trayectoria deseadas para la ley de control. También se describe el sistema que consta de un motor de corriente directa (direct drive), un rodillo y una llanta para analizar los efectos fricción llanta-pavimento. Se dan las características de dicho motor y se obtienen las ecuaciones dinámicas que servirán para obtener una ley de control para el sistema en cuestión con el objeto de tomar en cuenta la fricción llanta-pavimento.

4.1. Modelo dinámico del motor de corriente directa

Los motores eléctricos son máquinas eléctricas rotatorias que transforman la energía eléctrica en energía mecánica. Por tanto un motor tiene dos subsistemas: uno eléctrico, donde la energía eléctrica se transforma en fuerza electromotriz, y otro mecánico, donde el par mecánico se materializa en forma de velocidad de giro del eje.

Los motores eléctricos de transmisión directa en lo que respecta a variación de potencia pueden pasar instantáneamente desde la posición de reposo a la de funcionamiento al máximo. Su tamaño es más reducido y pueden desarrollarse sistemas para manejar las ruedas desde un único motor, como es el caso de los

vehículos.

Los dos componentes básicos de todo motor eléctrico son el rotor y el estator. El primero es una pieza giratoria, un electroimán móvil, lleva a su alrededor un bobinado por el que pasa la corriente eléctrica. El estator, situado alrededor del rotor, es un electroimán fijo, tal y como se muestra a continuación.

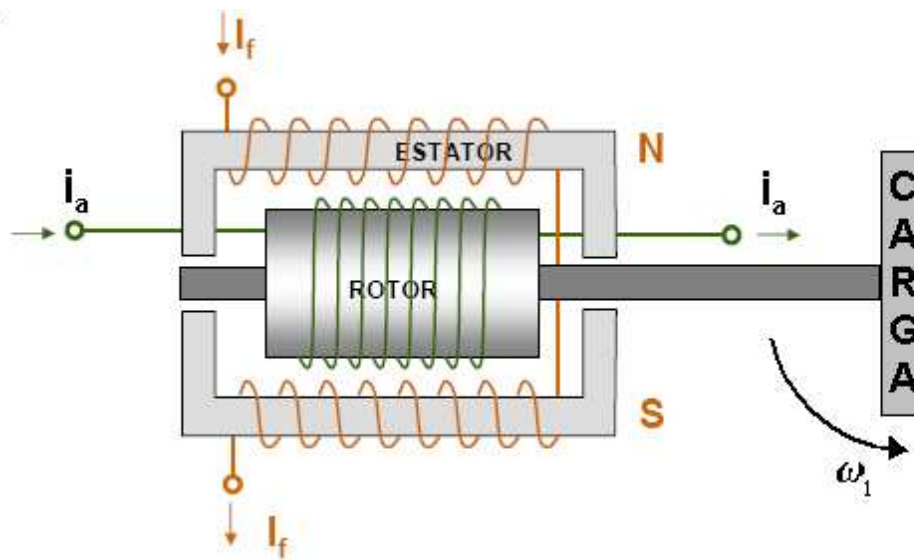


Figura 4.1: Motor de corriente directa.

Al estudiar el sistema, se ve que el eje del motor se acopla a un eje de salida donde va la carga que el motor debe mover (ver Figura 4.1). Ello se hace directamente o a través de un acoplamiento reductor. La velocidad de giro del eje al que se acopla la carga, ω_1 , así como la potencia mecánica en el mismo se relacionan con la velocidad del eje del motor, y la potencia disponible en el mismo.

Para calcular el modelo matemático del motor de corriente directa, se plantean las ecuaciones físicas del sistema. Para ello se recurre al diagrama del circuito eléctrico de armadura y al diagrama de cuerpo libre del rotor como se muestra en la Figura 4.2, donde

$$J_m = \text{momento de inercia}$$

J_o = momento de inercia de la carga

B = factor de amortiguamiento

K_m = constante de la fuerza electromotriz

ω_1 = velocidad angular del eje del motor

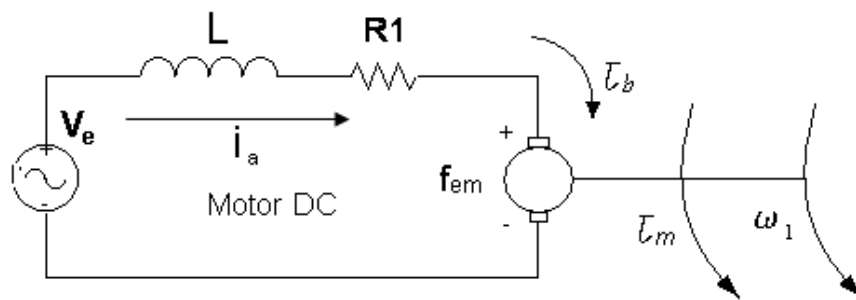


Figura 4.2: Circuito eléctrico de un motor de corriente directa.

El torque del motor τ_m , está relacionado con la corriente de armadura i_a , por un factor K_m , que se genera dentro del motor

$$\tau_m = K_m i_a \quad (4.1)$$

La fuerza electromotriz f_{em} , depende de la velocidad de giro ω_1 por una constante K_f .

$$f_{em} = K_f \omega_1 \quad (4.2)$$

La parte mecánica implica una modificación del par y la velocidad en el eje de salida manteniendo constante la potencia

$$\tau_b = B\omega_1 \quad (4.3)$$

donde τ_b es el par de frenado.

Entonces, las ecuaciones que caracterizan al modelo matemático de un motor de corriente directa son las siguientes

Circuito eléctrico

$$V_e = L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + f_{em} \quad (4.4)$$

Tensión generada

$$f_{em} = K_f \omega_1 \quad (4.5)$$

Equilibrio de pares

$$J_{eq} \dot{\omega}_1 = \tau_m - \tau_b \quad (4.6)$$

donde V_e es el voltaje de entrada, L es la inductancia eléctrica, R la resistencia eléctrica y $J_{eq} = J_0 + J_m$.

4.2. Modelo dinámico del sistema electro-mecánico

Un sistema electro-mecánico, desde la perspectiva del modelado, puede descomponerse esquemáticamente en tres diferentes partes: (i) un subsistema eléctrico, (ii) un subsistema mecánico y (iii) un acoplamiento algebraico del torque.

Los métodos tradicionales de control ignoran la influencia del subsistema eléctrico, lo cual es aceptable en muchos casos; sin embargo, para tareas de mayor exigencia en el desempeño del mecanismo, la no inclusión de su efecto conduce a la degradación del desempeño. Un sistema físico usualmente contiene en sí mismo gran cantidad de información

que puede y debe ser aprovechada en el proceso de modelación (ver Figura 4.3).

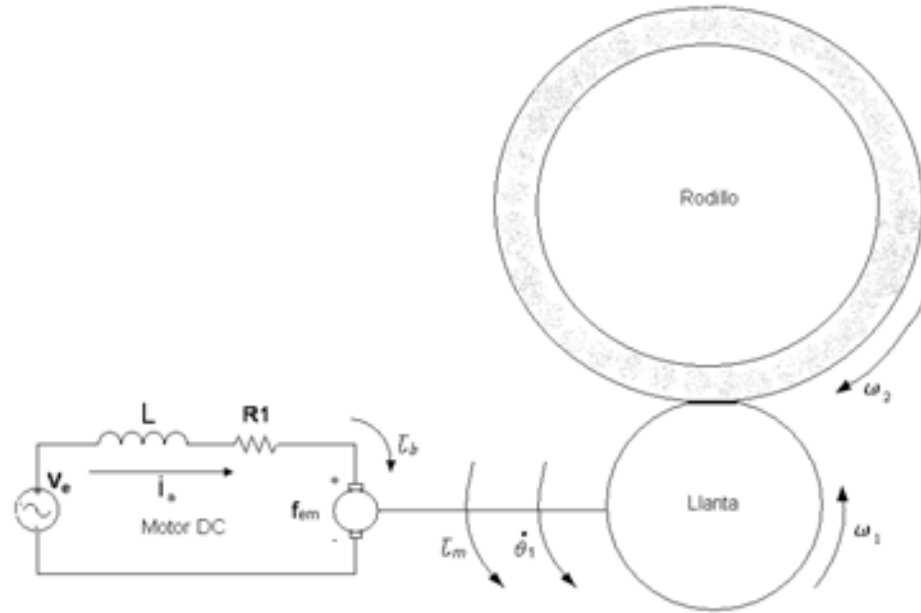


Figura 4.3: Sistema electro-mecánico.

Partiendo del modelo estándar del motor de corriente directa que ya se ha visto, se tiene:

$$V_e = L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + K_f \omega_1 \quad (4.7)$$

y del modelo dinámico llanta-pavimento que se estudió en el Capítulo 2 se tiene la siguiente ecuación

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \tau_m - \tau_b - F_x R_1 \quad (4.8)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.3) y (4.3) en la ecuación anterior se obtiene:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \tau_m - B\omega_1 + \mu \frac{mgt}{4} R_1 \quad (4.9)$$

La dinámica rotacional en el rodillo está dada por

$$I_2 \dot{\omega}_2 = F_x R_2 - F_{ax} R_2 \quad (4.10)$$

Por otro lado si se sustituyen las Ecs. (2.2) y (2.3) en la dinámica del rodillo se tiene

$$I_2 \dot{\omega}_2 = \mu \frac{mgt}{4} R_2 - C_{ax} v^2 R_2 \quad (4.11)$$

Entonces el modelo dinámico del sistema electro-mecánico está dado por

$$L \frac{d}{dt} i_a = -R i_a - K_f \omega_1 + V_e \quad (4.12)$$

$$I_1 \dot{\omega}_1 = K_m i_a - B\omega_1 + \mu \frac{mgt}{4} R_1 \quad (4.13)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = \mu \frac{mgt}{4} R_2 - C_{ax} v^2 \quad (4.14)$$

Para efectos prácticos, en este modelo se considera $\tau_m = K_m i_a$, $\mu = g(s) \operatorname{sgn}(s) + \sigma_2 s$, donde $g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-|\frac{s}{v_s}|^{\frac{1}{2}}}$; esta última ecuación es una parametrización del efecto “Stribeck” antes mencionado.

Este nuevo modelo pretende capturar fenómenos de fricción a bajas velocidades, así como predecir fenómenos de histéresis.

4.3. Trayectorias deseadas

En esta sección se diseñan las trayectorias deseadas basadas en el modelo dinámico del vehículo, que implementadas en el controlador, servirán para que el proceso de frenado o tracción sea más eficiente. Para conseguir las trayectorias fue necesario fijar una referencia a seguir, en este caso la velocidad deseada v_d^1 (ver Figura 4.4).

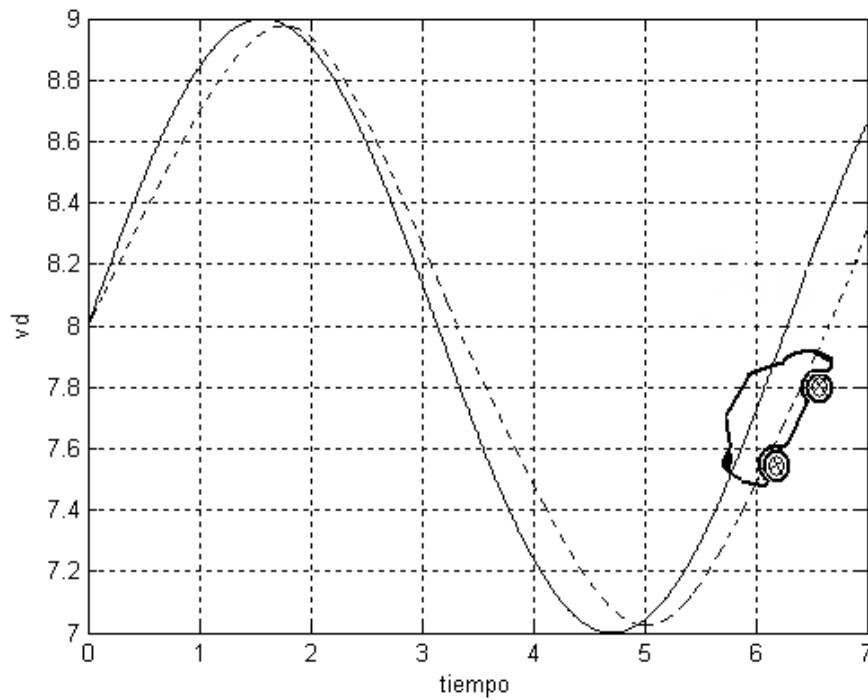


Figura 4.4: Trayectoria deseada del vehículo.

Entonces la velocidad deseada v_d , puede expresarse como

$$v_d = R_2 \omega_{2d} \quad (4.15)$$

donde ω_{2d} es la velocidad angular deseada que se puede conocer a partir de v_d .

¹En las simulaciones se empleará una función senoidal positiva que nunca pasa por cero.

Tomando la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4.15) se tiene

$$\dot{v}_d = R_2 \dot{\omega}_{2d} \quad (4.16)$$

Conociendo v_d y μ_d y al usar la Ec. (2.8), se puede conocer el coeficiente de fricción deseado, que está dado por

$$\mu_d = -\frac{4}{R_2 m g_t} [I_2 \dot{\omega}_{2d} + C_{ax} v_d^2] \quad (4.17)$$

Si se asume que \dot{z} es nula² de la Ec. (3.2), donde $z_d = \frac{g(s_d)}{\sigma_0} \text{sgn}(s_d)$, es el estado interno de equilibrio y representa la deformación promedio de las cerdas.

Entonces se deduce la velocidad relativa deseada s_d entre las superficies llanta-pavimento, dada por

$$s_d = \frac{1}{\sigma_2} [\mu_d - \sigma_0 z_d] \quad (4.18)$$

Si se sustituye la Ec. (4.17) en la Ec. (4.18) se obtiene

$$s_d = \frac{1}{\sigma_2} \left[-\frac{4}{R_2 m g_t} [I_2 \dot{\omega}_{2d} + C_{ax} v_d^2] - \sigma_0 z_d \right] \quad (4.19)$$

La función $g(s_d)$ está descrita como

²Lo que implica suponer que la dinámica de z es más rápida que la de s .

$$g(s_d) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c)e^{-|\frac{s_d}{v_s}|^{\frac{1}{2}}} \quad (4.20)$$

Por otro lado de la Ec. (2.9) se deduce la velocidad relativa deseada

$$\dot{s}_d = R_2\dot{\omega}_{2d} - R_1\dot{\omega}_{1d} \quad (4.21)$$

Despejando $\dot{\omega}_{1d}$ de la ecuación anterior, se tiene

$$\dot{\omega}_{1d} = \frac{R_2}{R_1}\dot{\omega}_{2d} - \frac{1}{R_1}\dot{s}_d \quad (4.22)$$

De la Ec. (2.11), se puede deducir el torque del motor deseado τ_{md} en función de ω_{1d}

$$\tau_{md} = I_1\dot{\omega}_{1d} + \mu_d \frac{mg_t R_1}{4 I_1} \quad (4.23)$$

y con ello la corriente deseada i_{ad} a partir de la Ec. (4.1).

$$i_{ad} = \frac{\tau_{md}}{K_m} = \frac{1}{K_m} \left[I_1\dot{\omega}_{1d} + \mu_d \frac{mg}{4} \frac{R_1}{I_1} \right] \quad (4.24)$$

Finalmente el voltaje deseado V_{ed} se obtiene de la Ec. (4.4) como

$$V_{ed} = L \frac{d}{dt} i_{ad} + R i_{ad} + K_f \omega_{1d} \quad (4.25)$$

Una vez encontradas las trayectorias deseadas que logran que el frenado o tracción sea congruente se puede diseñar un controlador con el modelo dinámico.

4.4. Ley de control para el sistema electro-mecánico

En esta sección se resuelve el problema de control de seguimiento de trayectorias de la velocidad angular del rodillo. Dichas trayectorias para un vehículo pueden incluir tracción o frenado.

Se formula el diseño del controlador basado en la velocidad angular ω_2 , la velocidad relativa s y la corriente i_a del motor eléctrico que deberá representarse en función del voltaje de entrada V_e . Para el diseño del controlador se utiliza teoría de Lyapunov.

Se propone una función candidata de Lyapunov para cada uno de los subsistemas descritos anteriormente. El objetivo principal es comprobar la estabilidad del seguimiento de las trayectorias para el sistema.

Se parte de la Ec. (4.14) rescrita como

$$\dot{\omega}_2 = \mu \frac{mgR_2}{4I_2} - \frac{C_{ax}}{I_2} R_2^2 \omega_2^2 \quad (4.26)$$

Al tomar la Ec. (4.13) y despejando $\dot{\omega}_1$, se tiene

$$\dot{\omega}_1 = \frac{K_m}{I_1} i_a - \frac{B}{I_1} \omega_1 - \mu \frac{mg}{4I_1} R_1 \quad (4.27)$$

A partir de las Ecs. (4.26) y (4.27), se puede obtener la derivada de la velocidad relativa en función de la variable a controlar, i_a , y sustituyendo estas en la Ec. (2.10), se tiene

$$\dot{s} = \mu \frac{mgt}{4} \left[\frac{R_2^2}{I_2} + \frac{R_1^2}{I_1} \right] + \frac{R_1}{I_1} [B\omega_1 - K_m i_a] - \frac{R_2}{I_2} C_{ax} R_2^2 \omega_2^2 \quad (4.28)$$

Por otro lado, al despejar la velocidad angular de la llanta, de la ecuación de la velocidad relativa, Ec. (2.9), ésta se puede escribir como

$$\omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \omega_2 - \frac{1}{R_1} s \quad (4.29)$$

Reacomodando términos de la Ec. (4.28), entonces esta puede expresarse como

$$\dot{s} = \mu \frac{mgt}{4} \left[\frac{R_2^2}{I_2} + \frac{R_1^2}{I_1} \right] - \frac{R_2^3}{I_2} C_{ax} \omega_2^2 + \frac{R_2}{I_1} B \omega_2 - \frac{1}{I_1} B s - \frac{R_1}{I_1} K_m i_a \quad (4.30)$$

Al despejar de la Ec. (4.12) $\frac{d}{dt} i_a$, se tiene

$$\frac{d}{dt} i_a = -\frac{R}{L} i_a - \frac{K_f}{L} \left[\frac{R_1}{R_2} \omega_2 - \frac{1}{R_1} s \right] + \frac{V_e}{L} \quad (4.31)$$

Por lo tanto el sistema sobre el que se diseñará la ley de control está descrito por

$$\dot{\omega}_2 = C_1 \mu - C_2 \omega_2^2 \quad (4.32)$$

$$\dot{s} = C_3 \mu - C_4 \omega_2^2 + C_5 \omega_2 - C_6 s - C_7 i_a \quad (4.33)$$

$$\frac{d}{dt} i_a = -C_9 \omega_2 - C_8 i_a + C_{10} s + C_{11} V_e \quad (4.34)$$

donde $C_1 = \frac{mgR_2}{4I_2}$, $C_2 = \frac{C_{ax}}{I_2} R_2^2$, $C_3 = \frac{mg}{4} \left[\frac{R_2^2}{I_2} + \frac{R_1^2}{I_1} \right]$, $C_4 = \frac{R_2^3}{I_2} C_{ax}$, $C_5 = \frac{R_2}{I_1} B$, $C_6 = \frac{1}{I_1} B$, $C_7 = \frac{R_1}{I_1} K_m$, $C_8 = \frac{R}{L}$, $C_9 = \frac{K_f}{L} \left[\frac{R_1}{R_2} \right]$, $C_{10} = \frac{K_f}{L} \left[\frac{1}{R_1} \right]$ y $C_{11} = \frac{1}{L}$.

Los errores de seguimiento para la velocidad angular ω_2 , velocidad relativa s y corriente i_a están definidos respectivamente como:

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{2d} \quad (4.35)$$

$$\tilde{s} = s - s_d \quad (4.36)$$

$$\tilde{i}_a = i_a - i_{ad} \quad (4.37)$$

donde ω_{2d} , s_d y i_{ad} son los valores deseados para ω_2 , s y i_a .

Sustituyendo $\mu = \sigma_2 s + \text{sgn}(s)g(s)$, en las Ecs. (4.32), (4.33) y (4.34) se obtiene la dinámica del error de seguimiento. Ahora μ depende únicamente de la velocidad relativa s .

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = -C_1[\sigma_2 s + \text{sgn}(s)g(s)] - C_2 \omega_2^2 - \dot{\omega}_{2d} \quad (4.38)$$

$$\dot{\tilde{s}} = -C_3[\sigma_2 s + \text{sgn}(s)g(s)] - C_4 \omega_2^2 + C_5 \omega_2 - C_6 s + C_7 i_a - \dot{s}_d \quad (4.39)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{i}_a = -C_8 i_a - C_9 \omega_2 + C_{10} s + C_{11} V_e - \frac{d}{dt} i_{ad} \quad (4.40)$$

Para la demostración del seguimiento de trayectorias del sistema propuesto se utiliza teoría de Lyapunov y la técnica de Backstepping.

Se define

$$W_2 = \frac{1}{2}\gamma_2\tilde{s}^2 \quad (4.41)$$

Si se toma la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4.41), se tiene

$$\dot{W}_2 = \gamma_2\tilde{s}\dot{\tilde{s}} \quad (4.42)$$

Se inicia con la Ec. (4.42) y se sustituye la Ec. (4.39) en ella para obtener

$$\dot{W}_2 = \gamma_2\tilde{s}[C_3\mu - C_4\omega_2^2 + C_5\omega_2 - C_6s - C_7i_a - \dot{s}_d] \quad (4.43)$$

Se utiliza Backstepping, por ello se asume que i_a actúa por ahora como control.

Por lo tanto seleccionando i_a de la Ec. (4.43), la que se denotará como i'_a

$$i'_a = \frac{1}{C_7}[C_3\mu + C_4\omega_2^2 - C_5\omega_2 + C_6s + \dot{s}_d - f\tilde{s}] \quad (4.44)$$

que incluye un término de corrección de error $f\tilde{s}$.

Al sustituir la Ec. (4.44) en (4.43), se tiene

$$\dot{W}_2 = -\gamma_2f\tilde{s}^2 \quad (4.45)$$

Entonces, $\tilde{s} = 0$, es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{s} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s = \lim_{t \rightarrow \infty} s_d \quad (4.46)$$

Como en realidad i'_a no es el control, entonces se puede definir una variable de error

$$\tilde{z} = i_a - i'_a \quad \rightarrow \quad i_a = \tilde{z} + i'_a \quad (4.47)$$

derivando \tilde{z} con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} \tilde{z} = \dot{i}_a - \frac{d}{dt} i'_a \quad (4.48)$$

Al sustituir $\frac{d}{dt} i_a$ y $\frac{d}{dt} i'_a$ en la Ec. (4.48), se tiene

$$\dot{\tilde{z}} = -C_8 i_a - C_9 \omega_2 + C_{10} s + C_{11} V_e - \frac{d}{dt} i'_a \quad (4.49)$$

Por otro lado se define

$$W_c = W_2 + \frac{1}{2} \tilde{z}^2 \quad (4.50)$$

Derivando (4.50), se obtiene

$$\dot{W}_c = \dot{W}_2 + \tilde{z} \dot{\tilde{z}} = \dot{W}_2 + \tilde{z} [-C_8(\tilde{z} + i'_a) - C_9 \omega_2 + C_{10} s + C_{11} V_e - \frac{d}{dt} i'_a] \quad (4.51)$$

reescribiendo (4.51)

$$\dot{W}_c = \dot{W}_2 + \tilde{z}[-C_8\tilde{z} - C_8i'_a - C_9\omega_2 + C_{10}s + C_{11}V_e - \frac{d}{dt}i'_a] \quad (4.52)$$

Se selecciona V_e de la Ec. (4.52), que es la variable de control, como

$$V_e = \frac{1}{C_{11}}[C_8i'_a + C_9\omega_2 - C_{10}s + \frac{d}{dt}i'_a - \beta\tilde{z}] \quad (4.53)$$

que incluye un término de error de corrección $\beta\tilde{z}$. Introduciendo la ecuación de el voltaje V_e en la Ec. (4.52), se tiene

$$\dot{W}_c = \dot{W}_2 - \beta\tilde{z}^2 - C_8\tilde{z}^2 = -\gamma_2 f \tilde{s}_2 - (C_8 + \beta)\tilde{z}^2 \quad (4.54)$$

Lo que prueba que $\tilde{z} \rightarrow 0$, asintóticamente.

Entonces

$$i_a = i'_a \quad (4.55)$$

Ahora se analiza la estabilidad de $\tilde{\omega}_2 = 0$, derivando la Ec. (4.35), se tiene

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_{2d} \quad (4.56)$$

sustituyendo $\dot{\omega}_2$ y $\dot{\omega}_{2d}$ en (4.38), se obtiene

$$\tilde{\omega}_2 = -C_1\mu - C_2\omega_2^2 - (-C_1\mu_d - C_2\omega_{2d}^2) \quad (4.57)$$

reescribiendo la Ec. (4.57)

$$\tilde{\omega}_2 = -C_1(\mu - \mu_d) - C_2(\omega_2 + \omega_{2d})\tilde{\omega}_2 \quad (4.58)$$

donde $(\omega_2 + \omega_{2d}) > 0$, por diseño.

En la Ec. (4.58) el término $(\mu - \mu_d)$ es acotado y uniformemente continuo, por lo que no hay tiempo de escape finito pues $\mu - \mu_d$ es uniformemente continua, μ y μ_d son acotadas. Además $-C_2(\omega_2 + \omega_{2d})\tilde{\omega}_2$ es Lipschitz en $\tilde{\omega}_2$. Para un tiempo suficientemente grande, se tiene que

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 \approx -C_2(\omega_2 + \omega_{2d})\tilde{\omega}_2 \quad (4.59)$$

entonces

$$\tilde{\omega}_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_2 \rightarrow \omega_{2d} \quad (4.60)$$

Así queda demostrado que se obtiene estabilidad asintótica para $\tilde{i}_a = 0$, $\tilde{s} = 0$ y $\tilde{\omega}_2 = 0$, con la ley de control propuesta *Ve.*

4.5. Análisis dimensional para el diseño del banco de pruebas llanta-pavimento

En esta sección se obtienen los parámetros del diseño llanta-pavimento con la finalidad de lograr los valores más adecuados para el sistema experimental bajo estudio.

Así mismo se analiza la dimensión de los componentes de manera particular y las características de estos.

Considerando un automóvil estándar que pesa aproximadamente entre 700 [kg] y 1200 [kg], tomando el peso mínimo del vehículo dividido entre las 4 llantas, se tiene

$$m = \frac{700}{4} = 175 \text{ [kg]} \quad (4.61)$$

donde m es la masa del vehículo.

Para poder trabajar con el diseño a escala del banco llanta-pavimento, se tomó la decisión que sería una escala 1:10, (ver Figura 4.5), por lo tanto

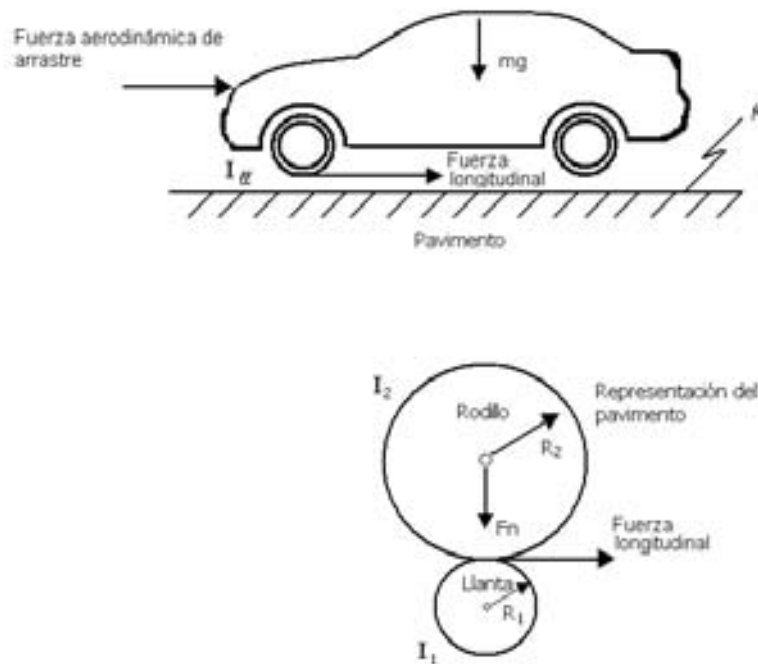


Figura 4.5: Diseño a escala llanta-pavimento.

$$m_{eq} = \frac{175}{10} = 17.5 \text{ [kg]} \quad (4.62)$$

donde m_{eq} es la masa equivalente del modelo reducido.

Para obtener el radio de la llanta, este se consiguió a partir de la adquisición de la llanta con características específicas tales como:

Elevada adherencia sobre suelo seco y mojado, tanto longitudinal como transversal.

- Baja resistencia a la rodadura.
- Capacidad para resistir los esfuerzos dinámicos exteriores.
- Resistencia a la fatiga, al desgaste, a la deformación de las grietas, etc.
- Adecuada flexibilidad radial, circunferencial y transversal.

Otra de las características buscadas fue que el neumático tuviese dibujo. Un neumático liso puede ofrecer mayor adherencia que otro neumático con dibujo cuando rueda sobre superficies duras y secas, en cambio disminuirá rápidamente la adherencia al aumentar la velocidad o si lo hace sobre superficie mojada. El dibujo también modifica la relación entre la adherencia lateral y longitudinal del neumático, de ahí que los diseños se deben adaptar a las prestaciones deseables. Es por ello que se eligió una llanta que presenta las características anteriores con dibujo (ver Figura 4.6).

Entonces el radio que presenta la llanta es de

$$R_1 = 0.12 \text{ [m]} \quad (4.63)$$

La elección del diámetro del rodillo, donde este representa el peso del vehículo y a su vez el pavimento, se hizo a través de la elección del neumático.



Figura 4.6: Llanta para el banco de pruebas.

Por lo tanto se eligió el radio del rodillo convenientemente para que este alcance la máxima superficie de contacto con la llanta,

$$R_2 = 0.36 [m] \quad (4.64)$$

La masa de la llanta se midió experimentalmente, pesando

$$m_1 = 1 [kg] \quad (4.65)$$

Para obtener la masa del rodillo, se consideraron varios aspectos tales como, material, diámetro, y longitud del rodillo (ver Figura 4.7). De manera experimental se tiene

$$m_2 = 6 [kg] \quad (4.66)$$

Para calcular las inercias, que más adelante serán utilizadas, se utilizó la fórmula del momento de inercia respecto al eje de revolución de un cilindro.



Figura 4.7: Rodillo para el banco de pruebas.

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2 \quad (4.67)$$

Sustituyendo los valores de m_1 y R_1 , se obtiene la inercia en la llanta I_1

$$I_1 = \frac{1}{2}(1)(0.12)^2 = 0.0072 \text{ [Nm]} \quad (4.68)$$

Por otro lado, calculando la inercia del rodillo con la sustitución de los valores m_2 y R_2 , se tiene la inercia en el rodillo (vehículo)

$$I_2 = \frac{1}{2}(6)(0.389)^2 = 0.4539 \text{ [Nm]} \quad (4.69)$$

Si se fija que la velocidad maxima longitudinal de la llanta v_1 en el banco de pruebas como

$$v_1 = 13 \text{ [m/s]} \quad (4.70)$$

y como la relación entre rodillo-llanta es de 3:1, por lo tanto la velocidad del rodillo v_2 es de

$$v_2 = 4.3[m/s] \quad (4.71)$$

Para el caso de las velocidades angulares, se tiene que la velocidad angular en la llanta ω_1 , está dada por

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R_1} \quad (4.72)$$

sustituyendo valores,

$$\omega_1 = \frac{13}{0.12} = 108 [rad/seg] \quad (4.73)$$

la velocidad angular en el rodillo ω_2 , está dada por

$$\omega_2 = \frac{4.3}{0.36} = 11.94 [rad/seg] \quad (4.74)$$

Para obtener el torque requerido que moverá al sistema completo, se requiere hacer un análisis entre los radios R_1 y R_2 , las velocidades angulares ω_1 y ω_2 , así como de los torques τ_1 y τ_2 .

Se sabe que

$$r = \frac{R_2}{R_1} > 1 \quad (4.75)$$

Recordando la Ec. (2.5) y relacionándola con la siguiente ecuación

$$v = \omega_1 R_1 \quad (4.76)$$

se tiene

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad (4.77)$$

haciendo una relación de radios en la ecuación anterior, se genera

$$\omega_1 = r\omega_2 \quad (4.78)$$

Con la segunda derivada de la Ec.(4.78), se obtiene

$$\ddot{\alpha}_1 = r\ddot{\alpha}_2 \quad (4.79)$$

donde α_1 y α_2 son las aceleraciones angulares. Con respecto a los torques se pueden relacionar a través de las siguientes ecuaciones

$$F = \tau_1 R_1 \quad (4.80)$$

$$F = \tau_2 R_2 \quad (4.81)$$

igualando las ecuaciones anteriores

$$\frac{\tau_1}{R_1} = \frac{\tau_2}{R_2} \quad (4.82)$$

despejando τ_2 y sustituyendo la relación de radios

$$\tau_2 = \frac{R_2}{R_1} \tau_1 = r\tau_1 \quad (4.83)$$

se pueden relacionar los torques τ_1 y τ_2 a través de las inercias I_1 y I_2 , y de las aceleraciones angulares $\ddot{\alpha}$ y $\ddot{\alpha}$ de la siguiente manera

$$\tau_1 = I_2 \ddot{\alpha}_1 \quad (4.84)$$

$$\tau_2 = I_2 \ddot{\alpha}_2 \quad (4.85)$$

Entonces la fórmula del torque que moverá al sistema llanta-pavimento está dada por

$$\tau_1 = \left[I_1 + \frac{I_2}{r^2} \right] \ddot{\alpha}_1 \quad (4.86)$$

Haciendo una relación de las aceleraciones, se tiene

$$\ddot{\alpha} = \frac{a_T}{R_1} = \frac{4.3}{0.12} = 35.83 \text{ [rad/seg}^2\text{]} \quad (4.87)$$

donde $\ddot{\alpha}$ es la aceleración tangencial del vehículo, entonces se tiene

$$\tau_1 = \left[0.0072 + \frac{0.389}{3^2} \right] (35.83) = 4.12 \text{ [Nm]} \quad (4.88)$$

Por lo tanto, los parámetros a utilizar en las simulaciones se resumen en la Tabla 4.1.

Parámetro	Valor	Unidad
m_1	1	[kg]
m_2	6	[kg]
m_{eq}	17.5	[kg]
R_1	0.12	[m]
R_2	0.36	[m]
I_1	0.0072	[N/m]
I_2	0.389	[N/m]
v_1	13	[m/s]
v_2	4.3	[m/s]
τ_1	2.1	[N/m]

Tabla 4.1: Parámetros utilizados en simulación.

Una vez que se tienen todos los parámetros geométricos y datos necesarios para el diseño del banco de pruebas, se procede a elaborar el diseño óptimo de las partes del sistema mecánico, se realiza a través de la transferencia de los cálculos y parámetros obtenidos de Powersim³ y con esto se realiza el diseño automático de partes utilizando el método de modelación de sólidos para la estructura mecánica llanta-pavimento, como se muestra en la Figura 4.8.

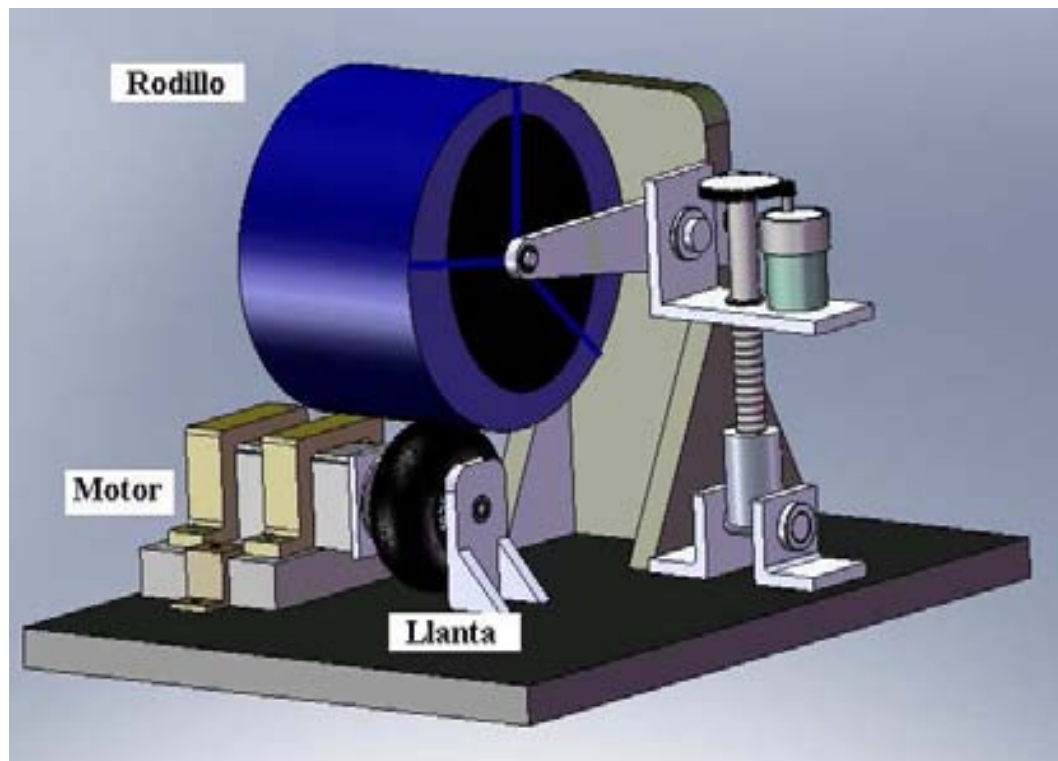


Figura 4.8: Banco de pruebas.

³Studio de Powersim Software es un ambiente integrado para la construcción y la utilización de modelos de simulación de negocios en la plataforma de Microsoft Windows a un sistema de CAD (en este caso a Solid Works).

Capítulo 5

Resultados de las simulaciones

En este último capítulo se presentan los resultados de las simulaciones de los modelos matemáticos vistos en capítulos anteriores del diseño llanta-pavimento y se interpretan los datos mostrados de dichas gráficas. Los resultados describen el comportamiento del vehículo cuando éste realiza varias maniobras. Las simulaciones se realizan con base en un juego de parámetros conocidos, que se muestran en la Tabla 5.1.

Parámetro	Valor	Unidad
σ_0	40	[1/m]
σ_1	49487×10^{-4}	[s/m]
σ_2	-0.0018	[s/m]
μ_c	0.5	[-]
μ_s	0.9	[-]
v_s	12.5	[s/m]
R_1	0.12	[m]
R_2	0.36	[m]
I_1	0.0072	[N/m]
I_2	0.389	[N/m]
m_{eq}	17.5	[kg]
g	9.81	[-]
t_b	100	[N/m]
t_d	0	[N/m]
C_{ax}	1.5	[-]
P_b	1	[-]
k_b	0.9	[s/m]

Tabla 5.1: Parámetros para el modelo del vehículo.

A continuación se presentan las características y parámetros del motor eléctrico (ver Figura 5.12) que se empleará en la instalación experimental. Dichos parámetros se emplearon para las simulaciones del modelo dinámico del sistema electro-mecánico descrito en el Capítulo 4, así como para el diseño del controlador.



Figura 5.1: Servomotor convencional sin escobillas (brushless) utilizado en el diseño.

En la Tabla 5.2 se muestran las especificaciones de los datos del embobinado del servomotor sin escobillas ilustrado en la figura anterior.

Parámetro	Valor	Unidad
R	9.57	$[\Omega]$
L	20.1	$[\text{mH}]$
K_f	$1.4589e - 004$	$[\text{V}]$
V_e	24	$[\text{VDC}]$
K_m	0.92	$[\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}]$

Tabla 5.2: Parámetros del motor eléctrico.

Se tiene:

R es la resistencia del motor.

L la inductancia del motor.

K_f es la constante electromotriz.

K_m la constante de torque.

V_e es el voltaje de entrada.

La Tabla 5.3 muestra los datos mecánicos del motor.

Parámetro	Valor	Unidad
I	0.000059	$[kg - m^2]$
W_m	2.23	[kg]

Tabla 5.3: Datos mecánicos.

Donde:

I es la inercia del eje del motor.

W_m es el peso del motor.

Por último se presentan las dimensiones en la Tabla 5.4 del motor utilizado, de acuerdo con la Figura 5.13, en el diseño del banco de pruebas.

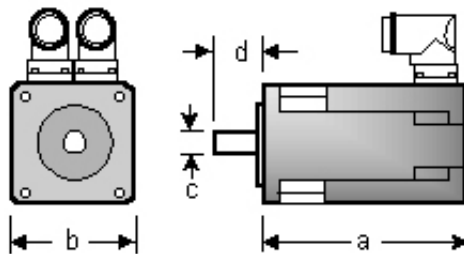


Figura 5.2: Dimensiones del motor.

Parámetro	Valor	Unidad
a	140.8	[mm]
b	70	[mm]
c	14	[mm]
d	30	[mm]

Tabla 5.4: Dimensiones del motor eléctrico.

En la primera simulación se aprecia una velocidad deseada constante 8 [m/s] (ver Figura 5.3), claro esta que la aceleración para este primer caso es nula como se muestra en la Figura 5.4.

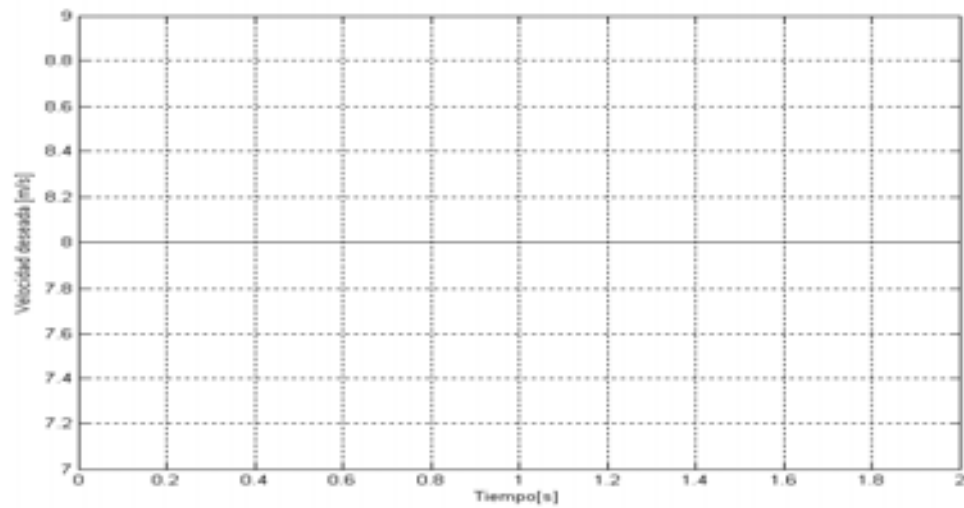


Figura 5.3: Velocidad longitudinal deseada alcanzada en la maniobra (v_d).

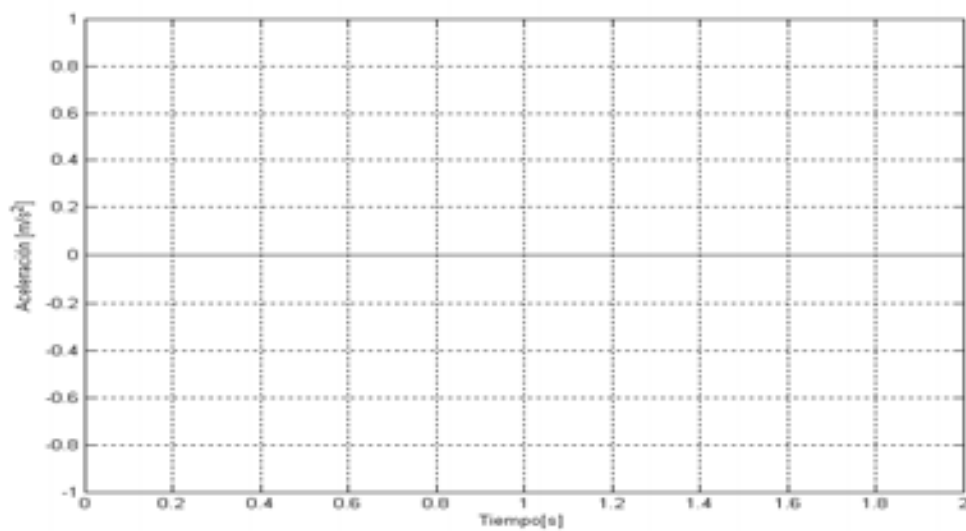


Figura 5.4: Aceleración longitudinal deseada (\dot{v}_d).

La Figura 5.5 muestra la velocidad angular deseada (ω_{2d}) y la Figura 5.6 la velocidad angular alcanzada (ω_2). El error de seguimiento para la velocidad angular ($\tilde{\omega}_2$) se aprecia en la Figura 5.7, como se puede ver en esta imagen el controlador propuesto en el Capítulo anterior lleva en 0.03 [seg] aproximadamente la velocidad angular a la trayectoria deseada.

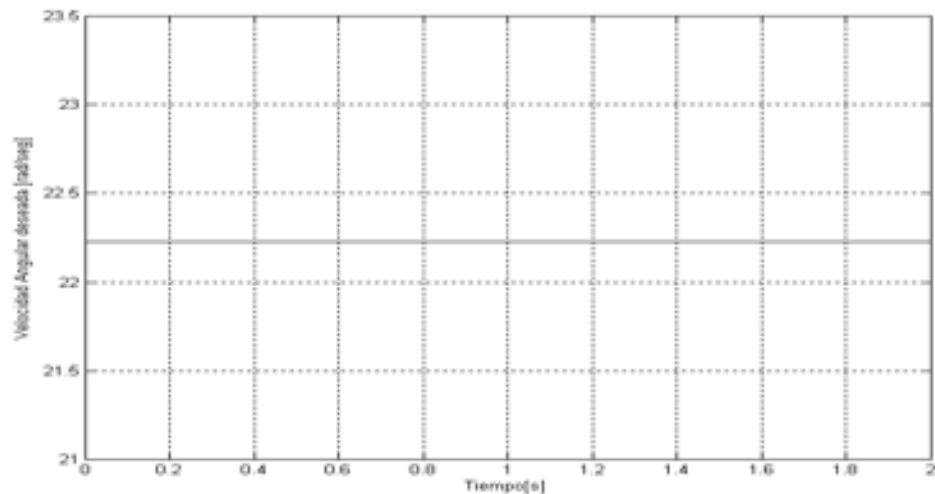


Figura 5.5: Velocidad deseada alcanzada en la maniobra (ω_{2d}).

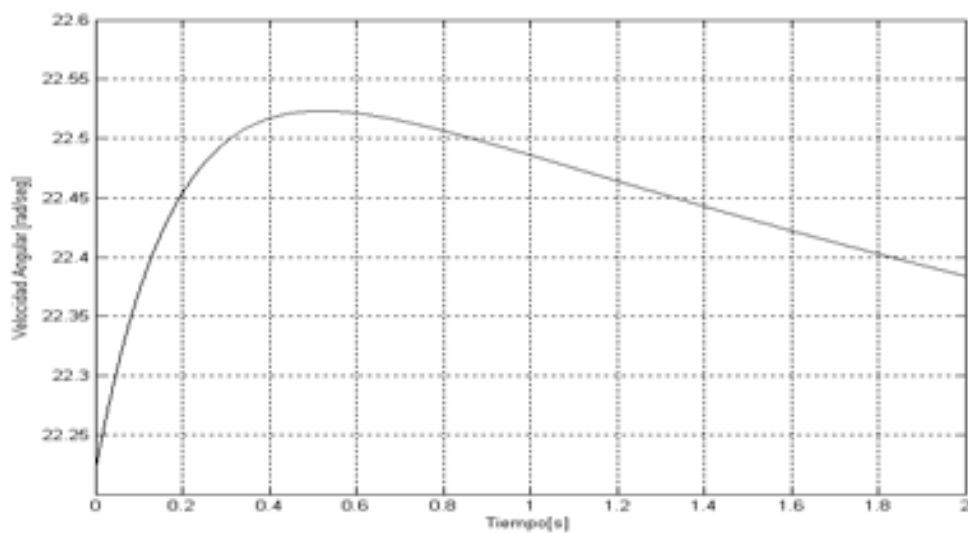


Figura 5.6: Velocidad Angular (ω_2).

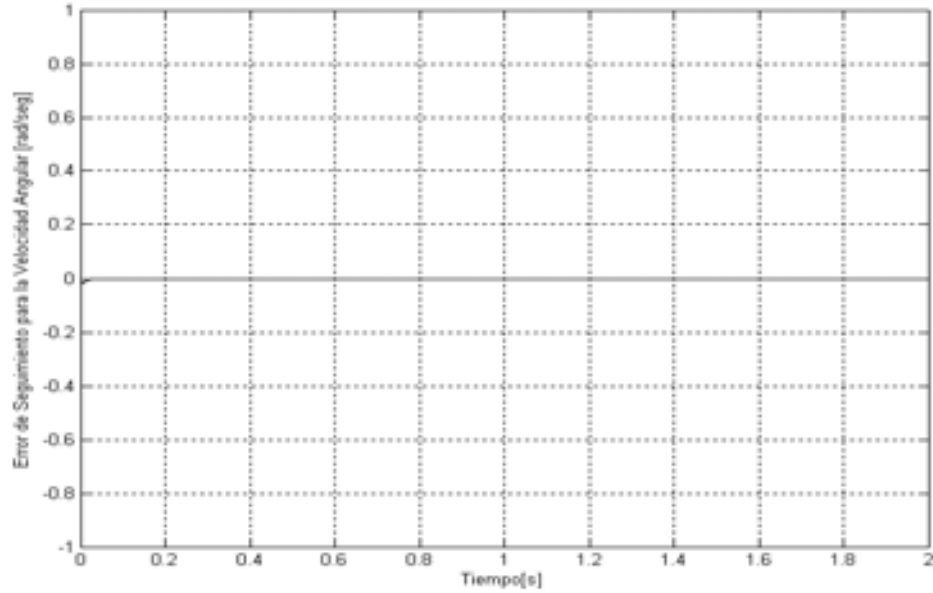


Figura 5.7: Error de seguimiento para la velocidad angular ($\tilde{\omega}_2$).

La Figura 5.8 muestra la velocidad relativa deseada (s_d), esta gráfica comienza con valores negativos puesto que describe la diferencia de velocidades angulares multiplicada por los radios, como se mostró en la Ec. (2.9).

La Figura 5.9 se observa el comportamiento de la velocidad relativa alcanzada (s), y en la Figura 5.10 el error de seguimiento para estas velocidades (\tilde{s}), lo que comprueba nuevamente que el controlador funciona bien.

La Figura 5.11 se observa la fricción deseada para esta maniobra y en la Figura 5.12 el coeficiente de fricción real (μ) se observa en ésta, como se va decrementando y alrededor de 1 [seg] se mantiene constante. Esta gráfica es una buena representación del fenómeno de fricción.

En la Figura 5.13 se presenta la gráfica de fricción μ contra el deslizamiento λ , donde se puede apreciar que el coeficiente de fricción comienza a aumentar a medida que el deslizamiento crece hasta llegar al máximo, de donde disminuye cuando el deslizamiento aumenta y se inicia el derrapamiento de la llanta.

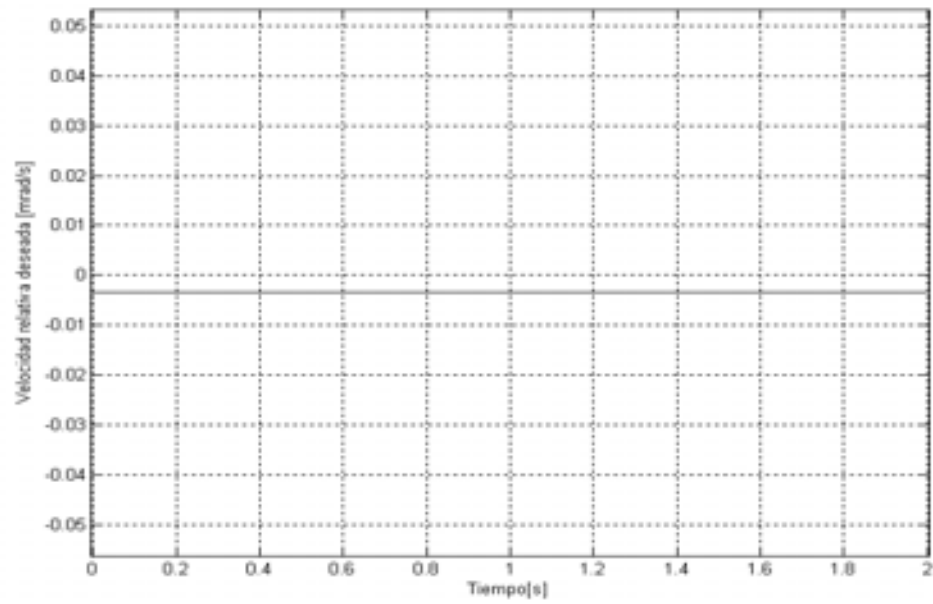


Figura 5.8: Velocidad relativa deseada (s_d).

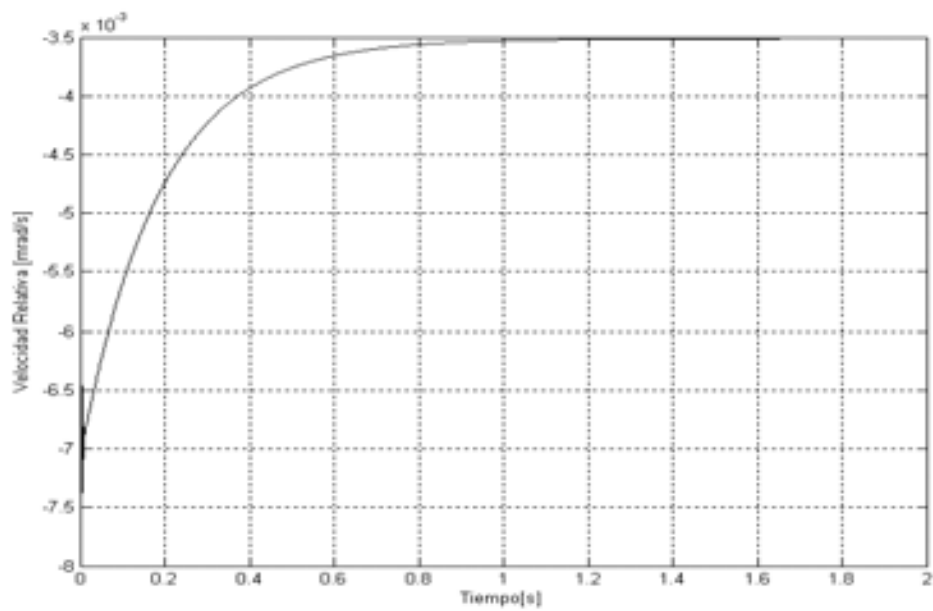


Figura 5.9: Velocidad relativa alcanzada (s).

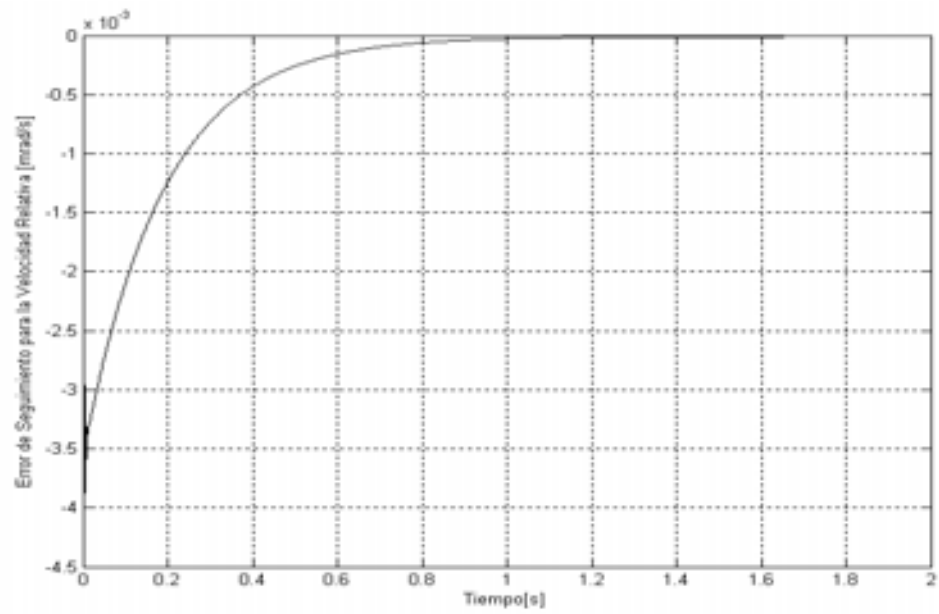


Figura 5.10: Error de seguimiento para la velocidad relativa (\tilde{s}).

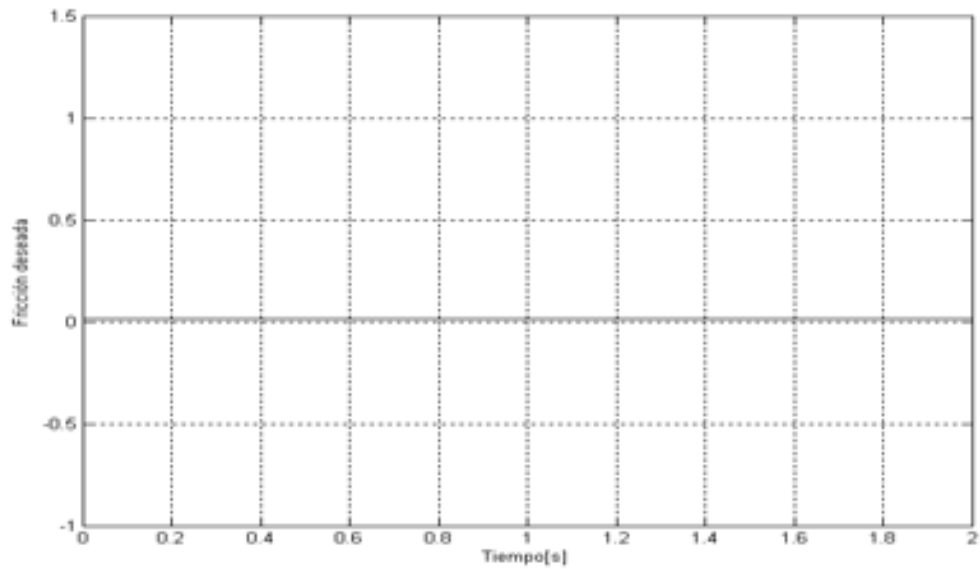
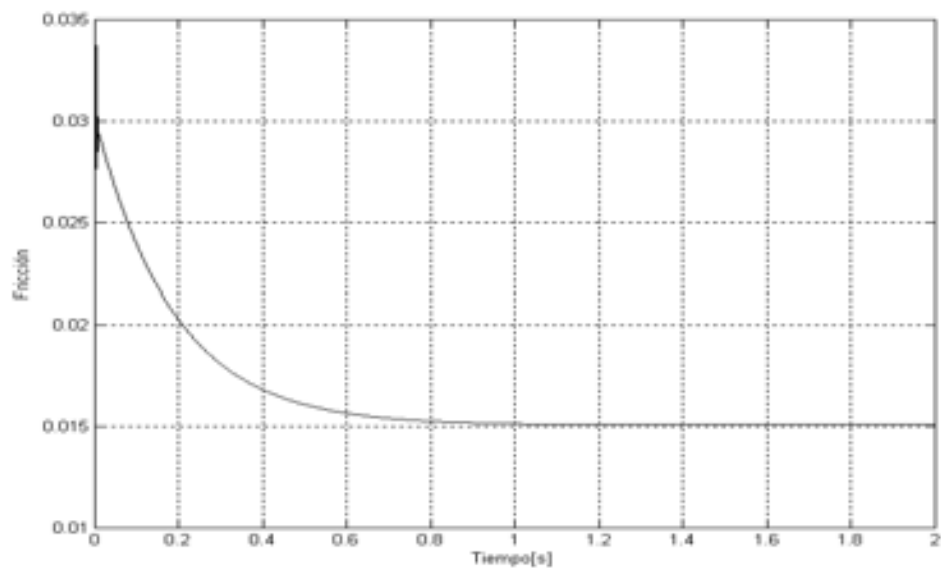
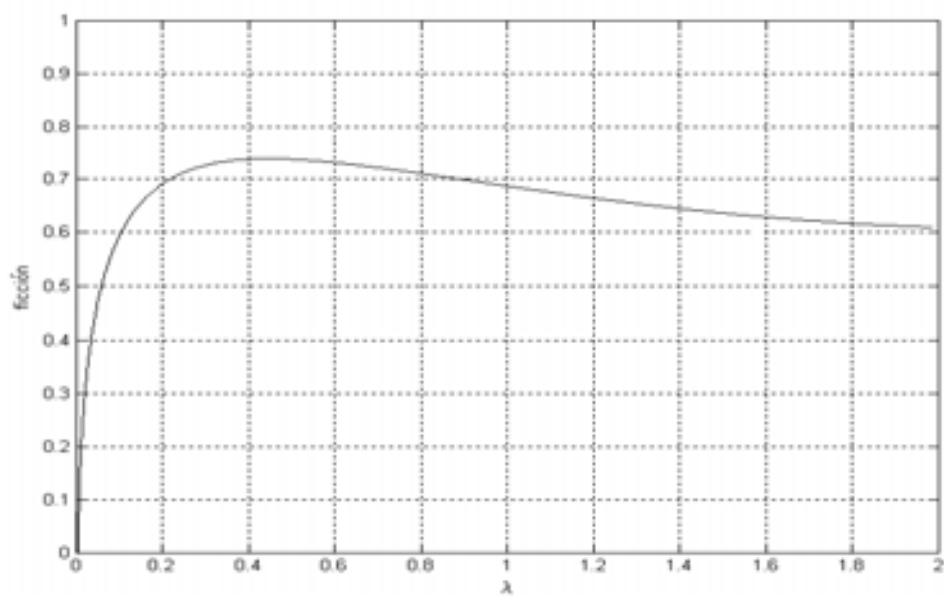


Figura 5.11: Fricción deseada (μ_d).

Figura 5.12: Fricción (μ).Figura 5.13: Coeficiente de fricción μ en función del deslizamiento λ .

La corriente manipulada (i'_a) propuesta en la Ec. (4.44) tiene un valor de 0.752 [A], como se puede observar en la Figura 5.14, en esta simulación se ve que a medida que transcurre el tiempo la corriente disminuye hasta permanecer constante.

La Figura 5.15 muestra la corriente real (i_a) y en la Figura 5.16 se observa la variable de error para la corriente (\tilde{z}) definida en la Ec. (4.47).

Por último para esta primera maniobra se presenta en la Figura 5.17 el Voltaje requerido por el motor (V_e), donde este actúa como controlador.

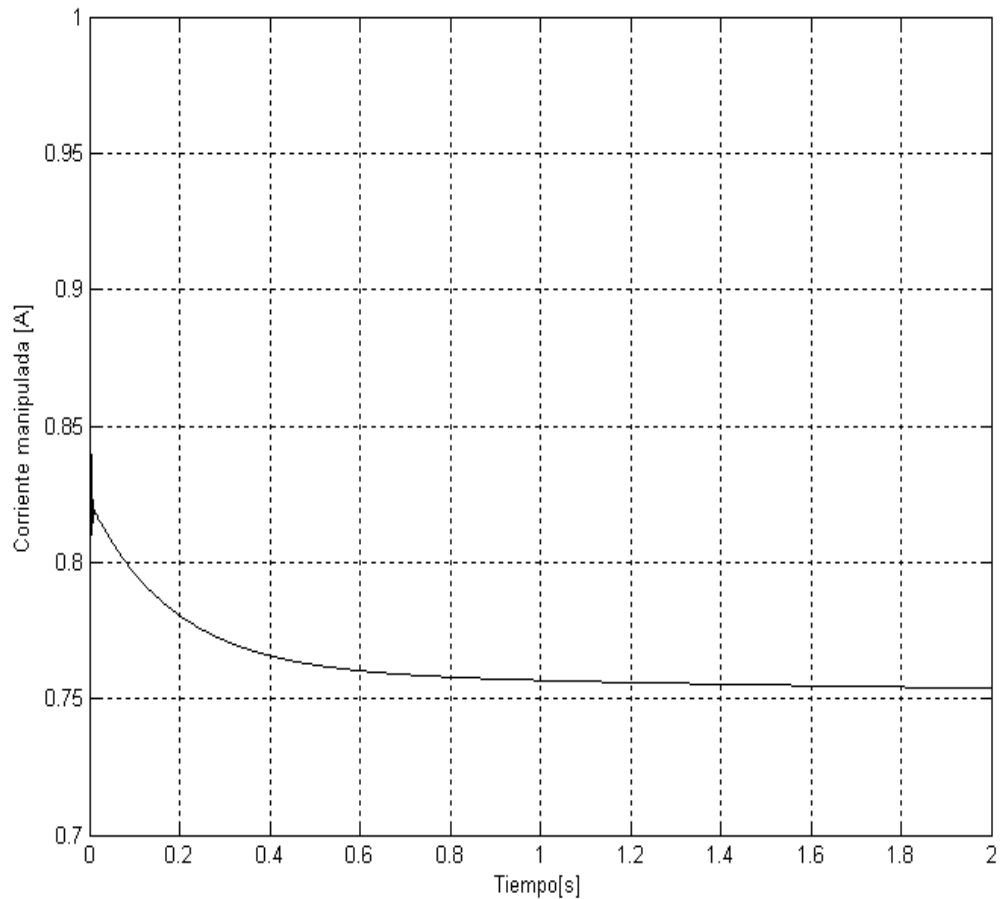


Figura 5.14: Corriente manipulada (i'_a).

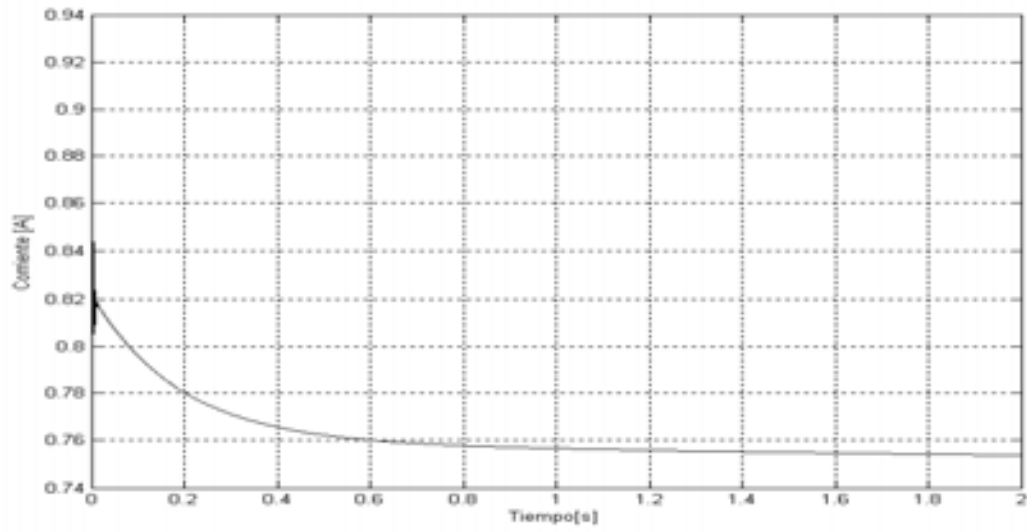


Figura 5.15: Corriente real demandada (i_a).

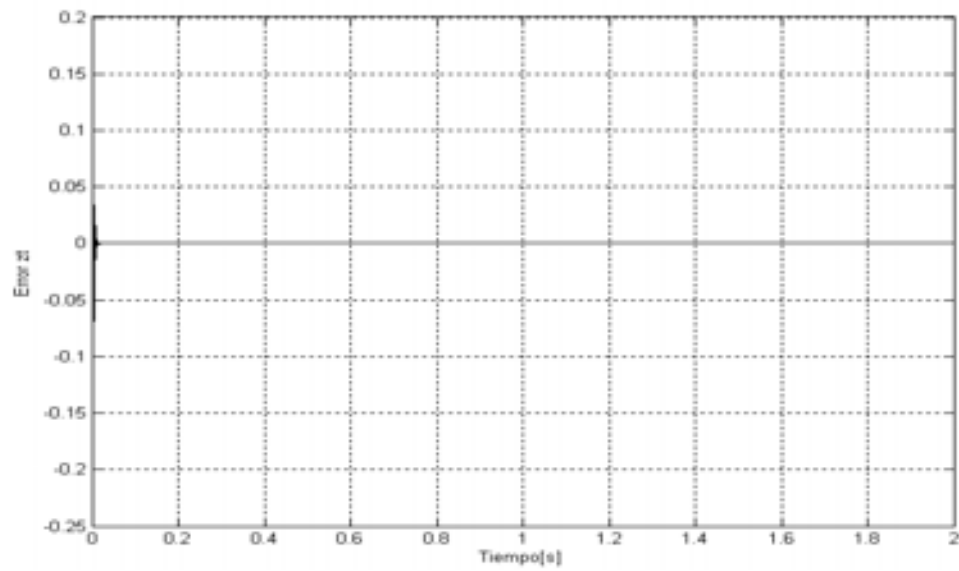


Figura 5.16: Variable de error de corriente (\tilde{z}).

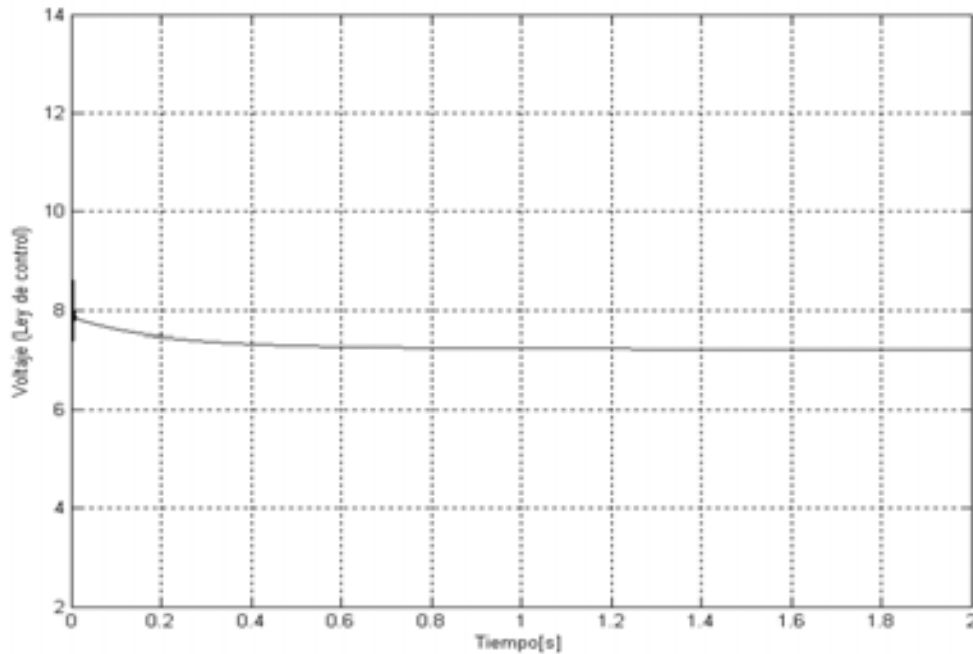


Figura 5.17: Voltaje requerido en la maniobra (V_e).

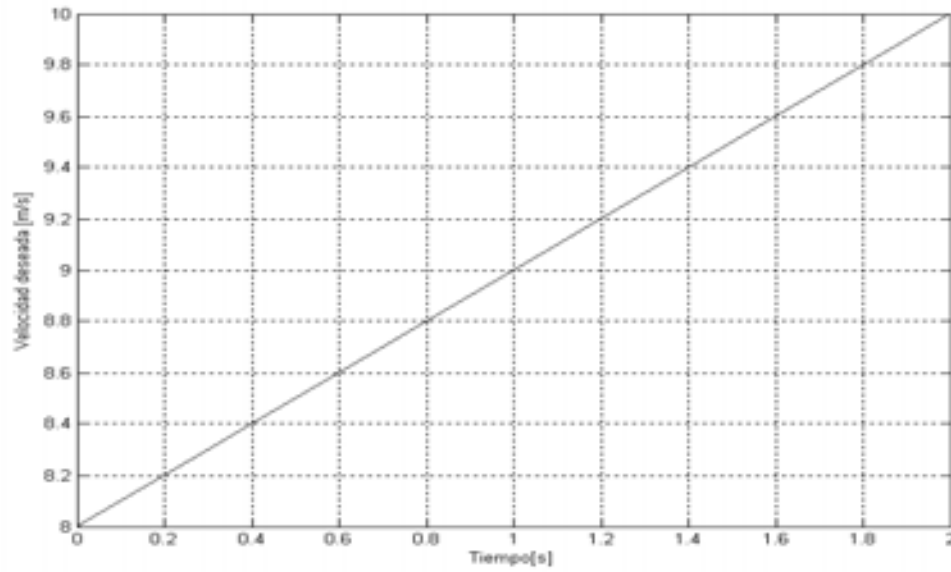
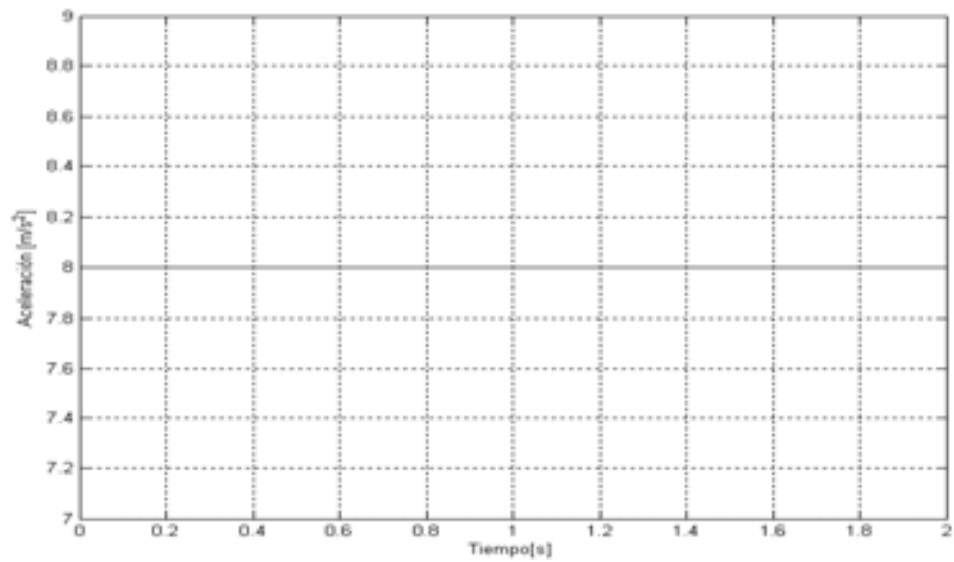
La siguiente simulación muestra ahora un ejemplo de una función rampa, al igual que en la maniobra anterior el controlador tiene como objetivo seguir las trayectorias deseadas durante todo el proceso. Los resultados son buenos, aunque se debe tener en cuenta la selección de los parámetros pueden mejorar.

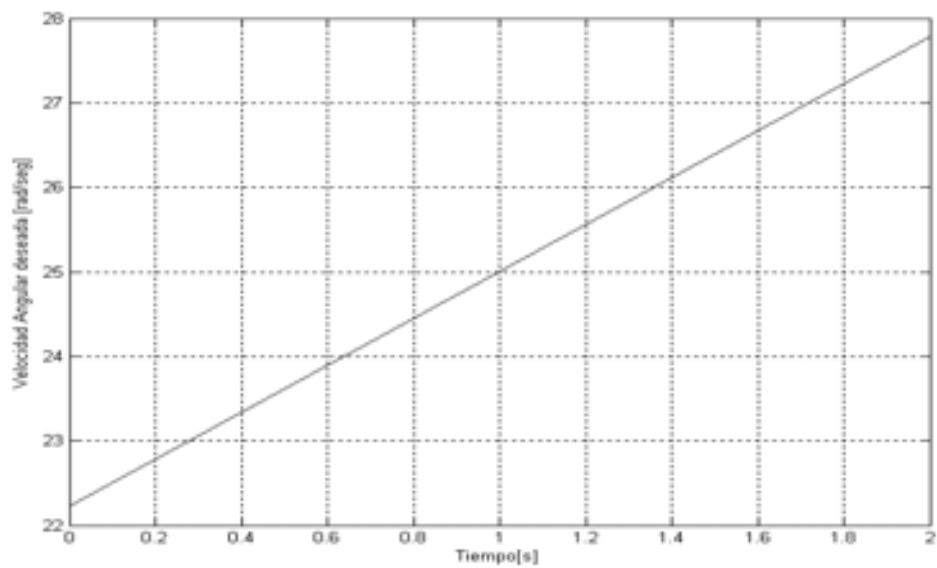
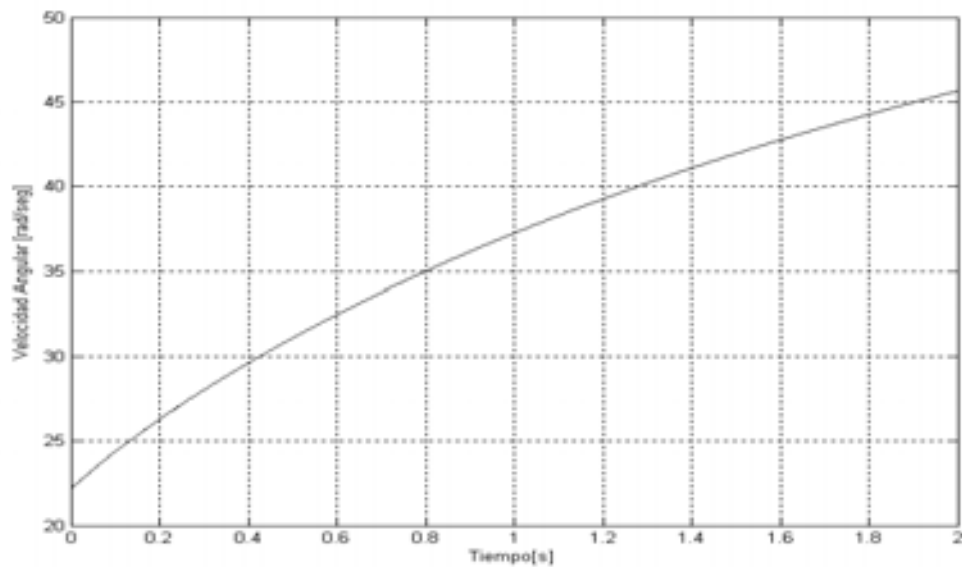
La Figura 5.18 muestra la trayectoria de la velocidad deseada (v_d) y la Figura 5.19 se aprecia la aceleración deseada (\dot{v}_d).

En la Figura 5.20 se puede ver velocidad angular deseada (ω_{2d}).

La Figura 5.21 muestra la velocidad angular alcanzada (ω_{2d}) y el error de seguimiento para la velocidad angular ($\tilde{\omega}_2$) se aprecia en la Figura 5.22, en esta gráfica se ve claramente como el controlador lleva la velocidad angular a la trayectoria deseada.

La Figura 5.23 se ve la velocidad relativa deseada (s_d), y en la Figura 5.24 se observa la evolución de la velocidad relativa alcanzada (s).

Figura 5.18: Velocidad deseada (v_d).Figura 5.19: Aceleración deseada (\dot{v}_d).

Figura 5.20: Velocidad angular deseada ($\tilde{\omega}_{2d}$).Figura 5.21: Velocidad Angular alcanzada (ω_2).

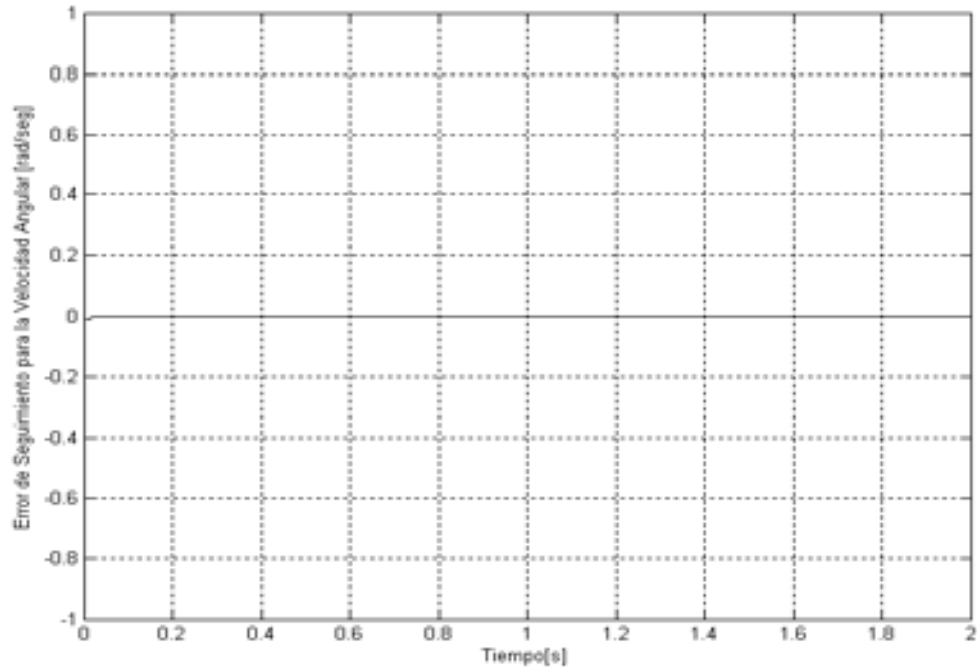


Figura 5.22: Error de seguimiento para la velocidad angular ($\tilde{\omega}_2$).

En la Figura 5.25 se tiene el error de seguimiento para estas velocidades (\tilde{s}), en este caso la estabilidad es alcanzada en 1.95 [seg].

En la Figura 5.26 se ve como la fricción real (μ) se va decrementando conforme transcurre el tiempo y aproximadamente en 2 [seg] permanece constante. La Figura 5.27 se muestra la fricción deseada (μ_d) para esta maniobra.

En la Figura 5.28 se observa la corriente que demanda el motor (i_a), se ve que en 0.2 [seg] empieza a aumentar y en 2 [seg] se mantiene constante. La Figura 5.29 muestra la corriente manipulada (i'_a) y en la Figura 5.30 se observa el error para la corriente \tilde{z} .

Por último para esta segunda maniobra se presenta en la Figura 5.31 el Voltaje que requiere el motor eléctrico (V_e).

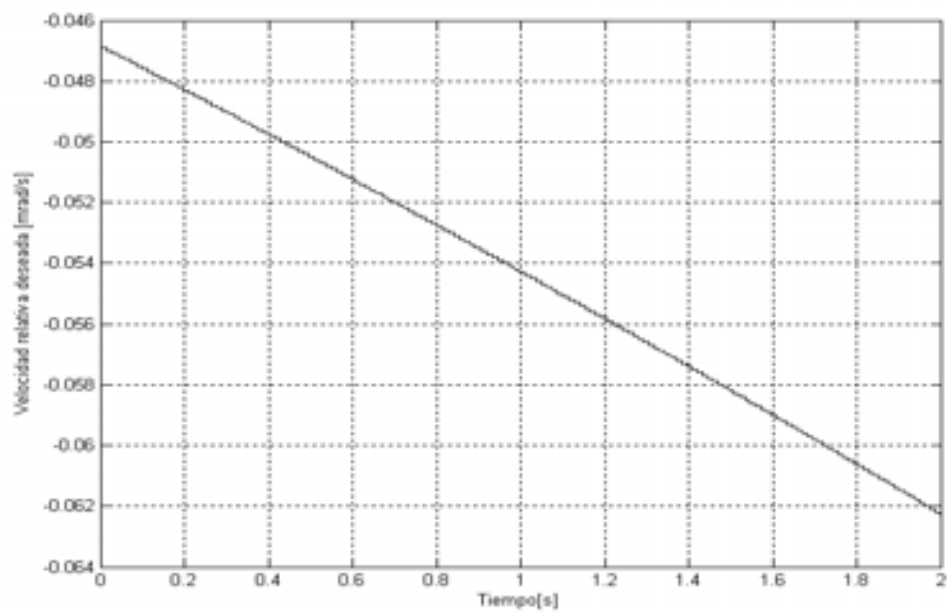


Figura 5.23: Velocidad relativa deseada (s_d).

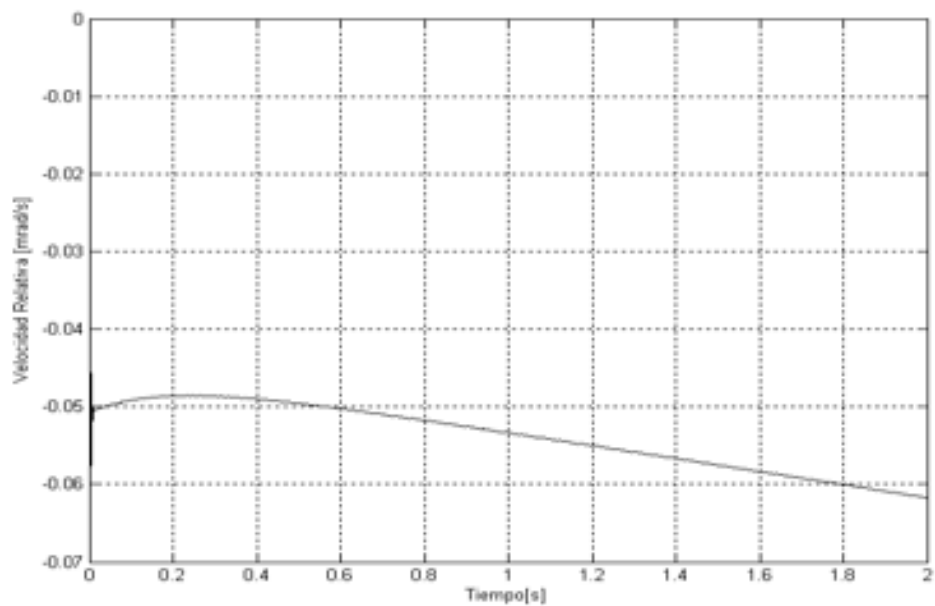


Figura 5.24: Velocidad relativa alcanzada (s).

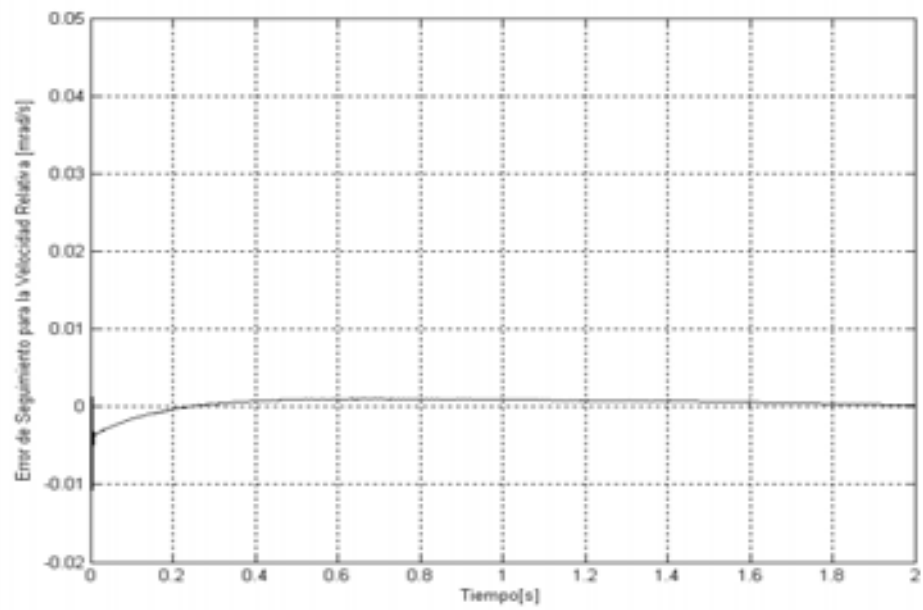


Figura 5.25: Error de seguimiento para la velocidad relativa (\tilde{s}).

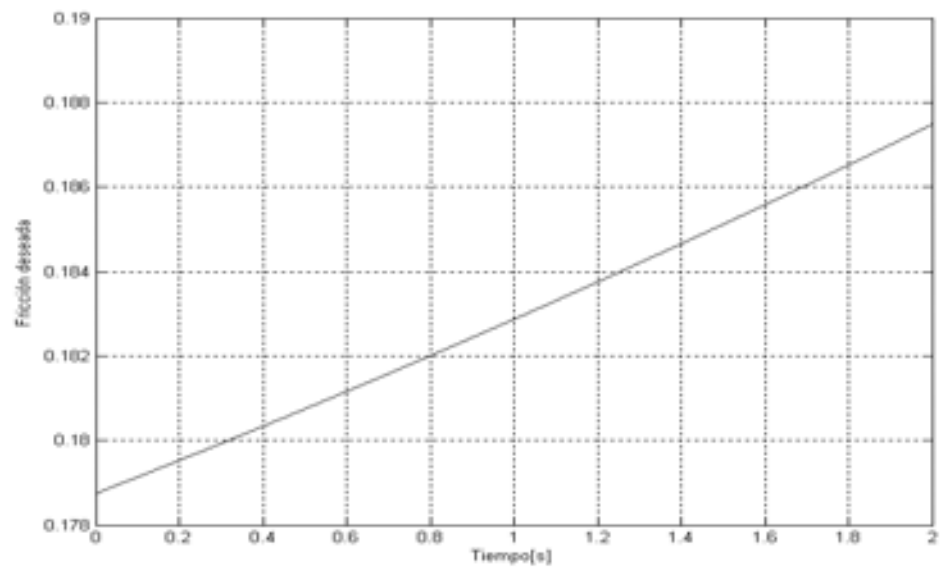
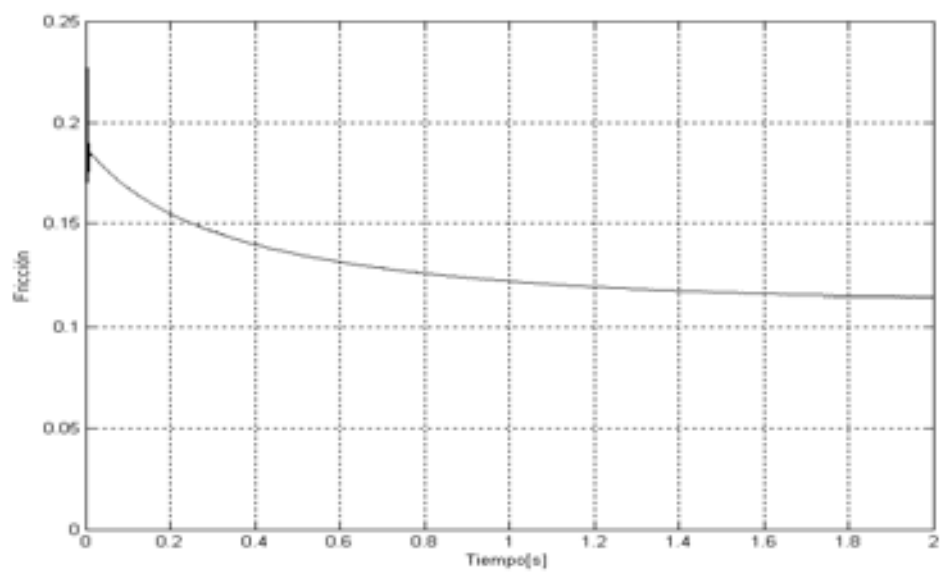
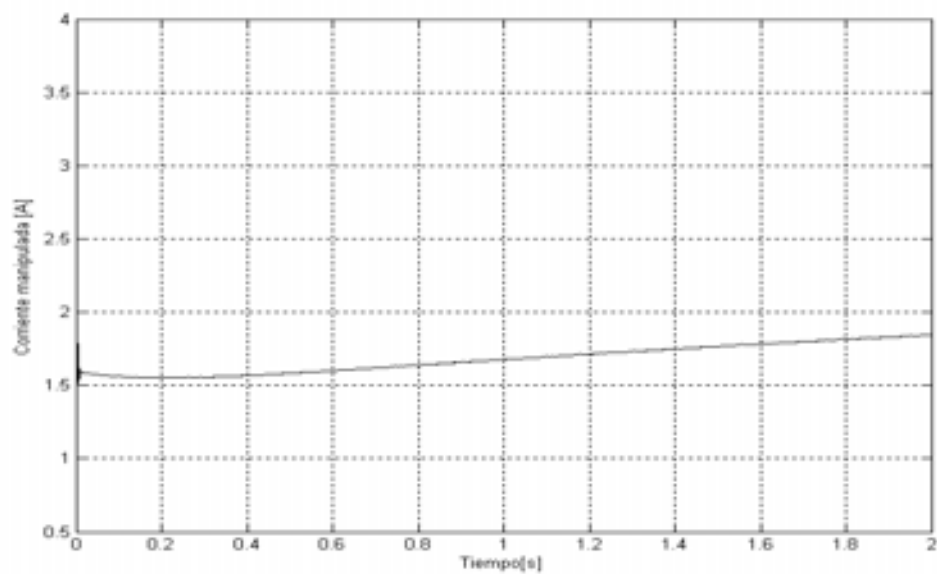


Figura 5.26: Fricción deseada (μ_d).

Figura 5.27: Fricción (μ).Figura 5.28: Corriente manipulada (i'_a).

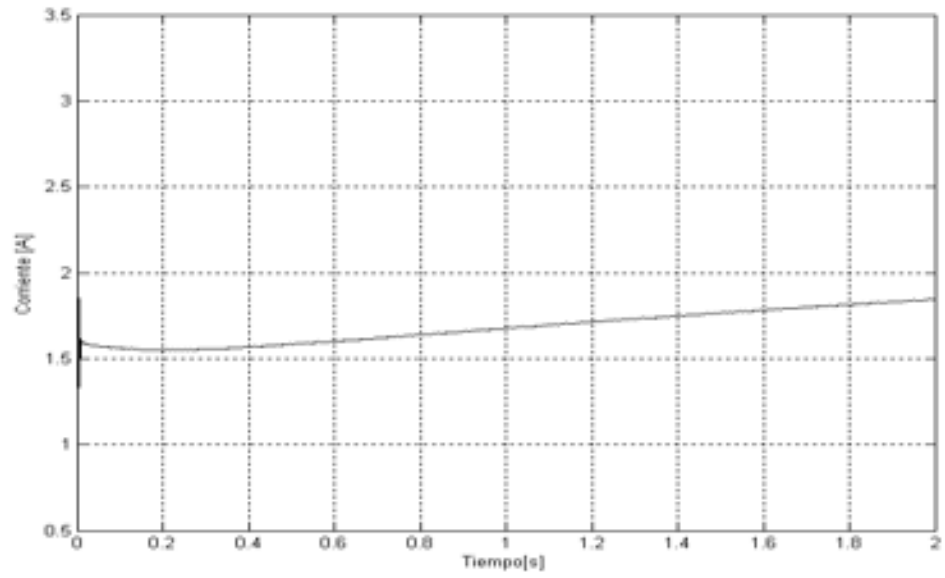


Figura 5.29: Corrente demandada real (i_a).

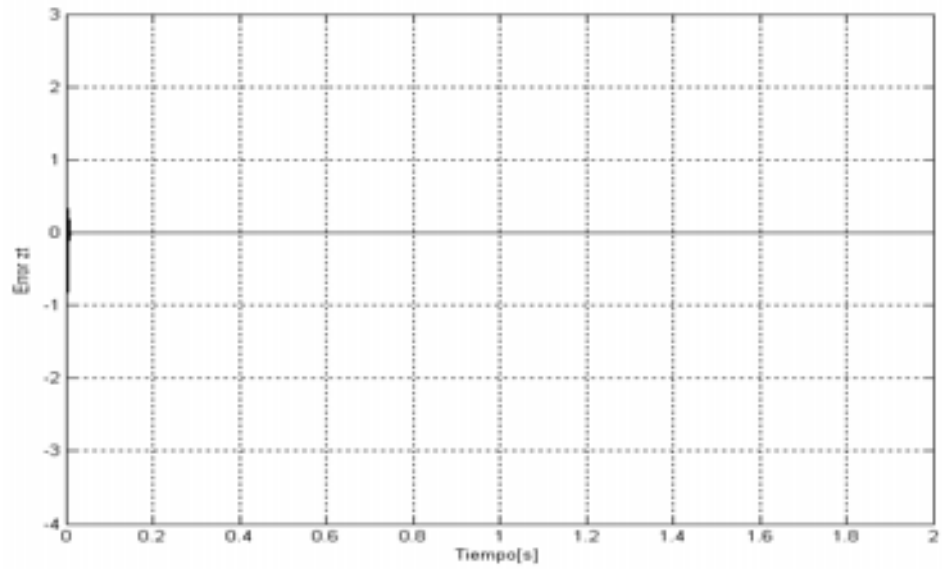


Figura 5.30: Variável de erro de corrente (\hat{z}).

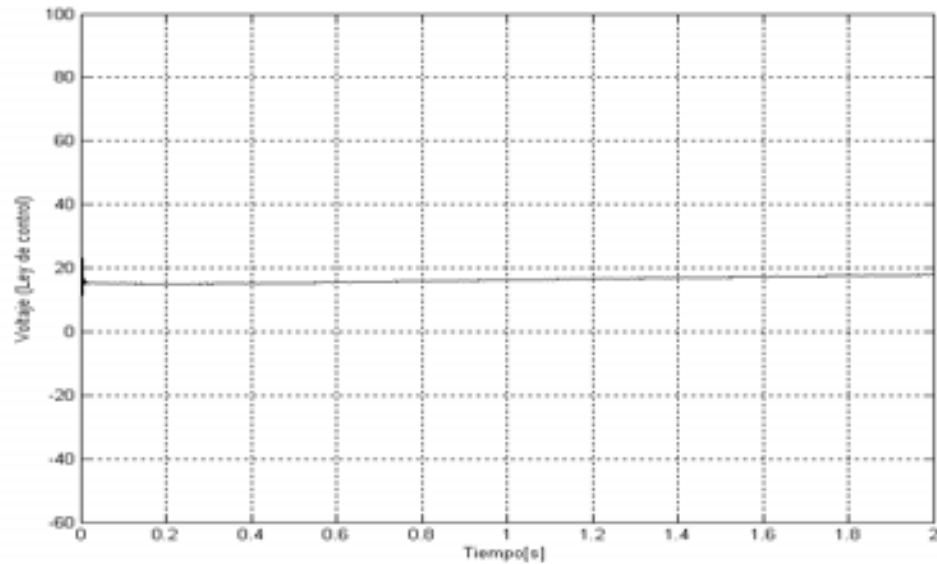


Figura 5.31: Voltaje requerido en la maniobra (V_e).

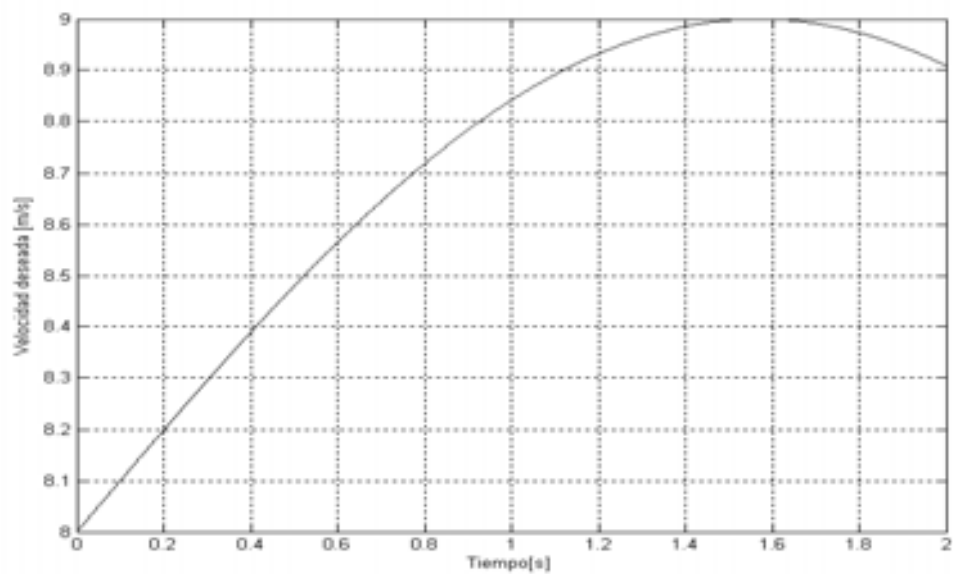
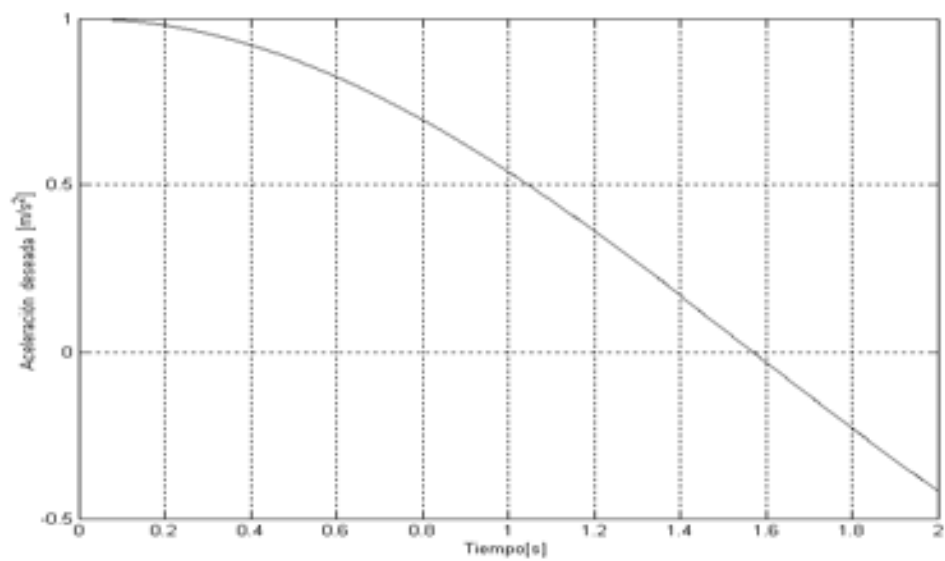
Finalmente, en el último ejemplo se eligió como señal de referencia, la velocidad deseada (v_d), una función seno que nunca toma valores negativos (ver Figura 5.32). La Figura 5.33 muestra la aceleración deseada (\dot{v}_d).

La Figura 5.34 muestra la velocidad angular deseada (w_{2d}) y la Figura 5.35 la velocidad angular real (w_2). El error de seguimiento (\tilde{w}_2) para estas velocidades se observa en la Figura 5.36, lo que comprueba la estabilidad asintótica.

La Figura 5.37 muestra la velocidad relativa deseada (s_d), al igual que en los ejemplos anteriores esta gráfica comienza con valores negativos, lo cual comprueba la Ec. (2.9)

La Figura 5.38 se observa el comportamiento de la velocidad relativa real (s), y en la Figura 5.39 el error de seguimiento para estas velocidades (\tilde{s}), aquí el controlador se estabiliza alrededor de 1.8 [seg].

La Figura 5.40 se observa la fricción deseada (μ_d) para esta maniobra y la Figura 5.41 muestra el fenómeno de fricción (μ).

Figura 5.32: Velocidad deseada (v_d).Figura 5.33: Aceleración deseada (\dot{v}_d).

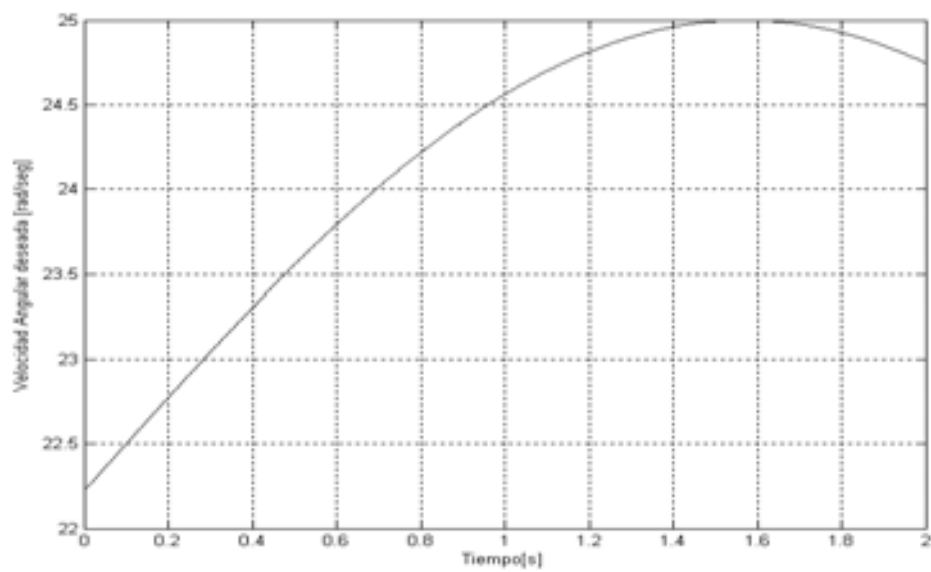


Figura 5.34: Velocidad deseada alcanzada (ω_{2d}).

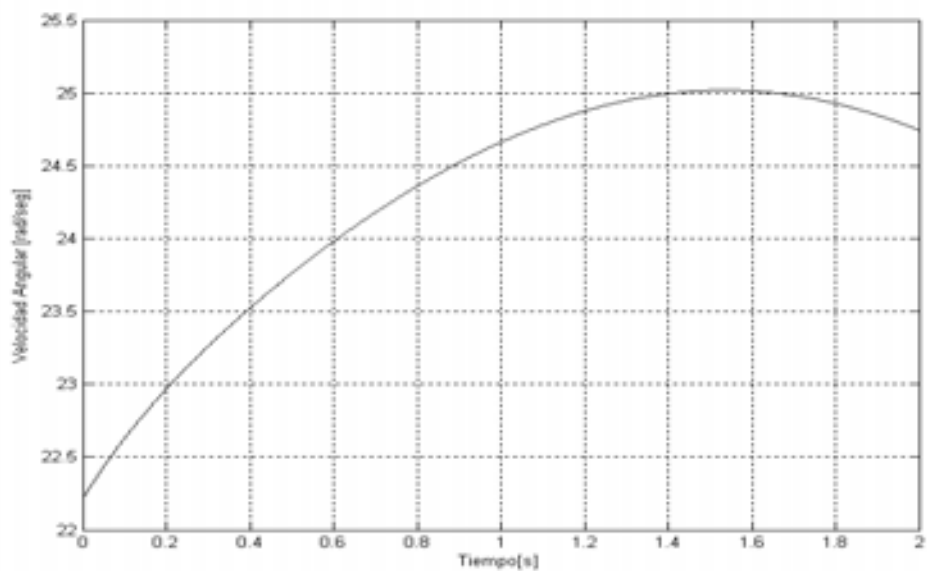


Figura 5.35: Velocidad Angular real (ω_2).

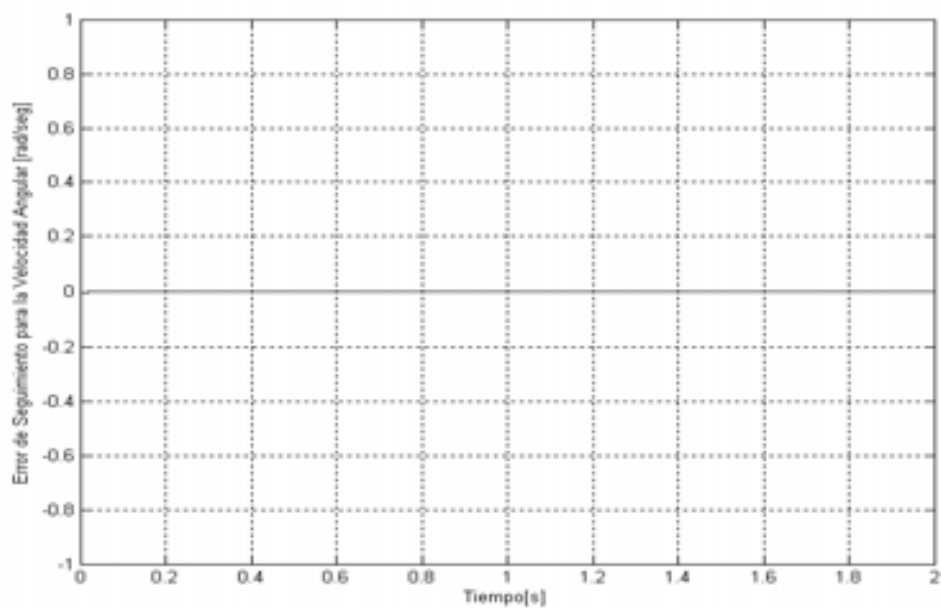


Figura 5.36: Error de seguimento para la velocidad angular ($\tilde{\omega}$).

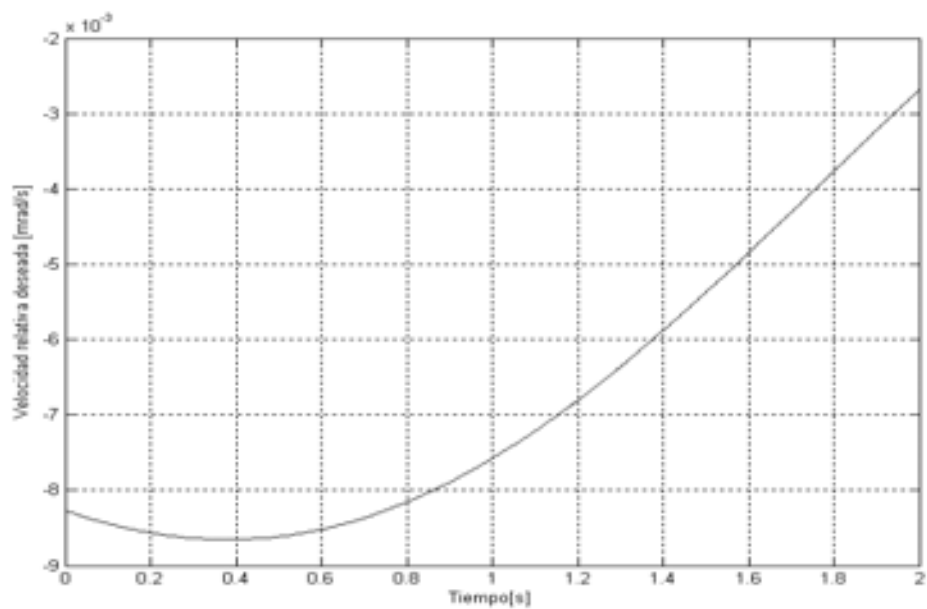


Figura 5.37: Velocidad relativa deseada (s_d).

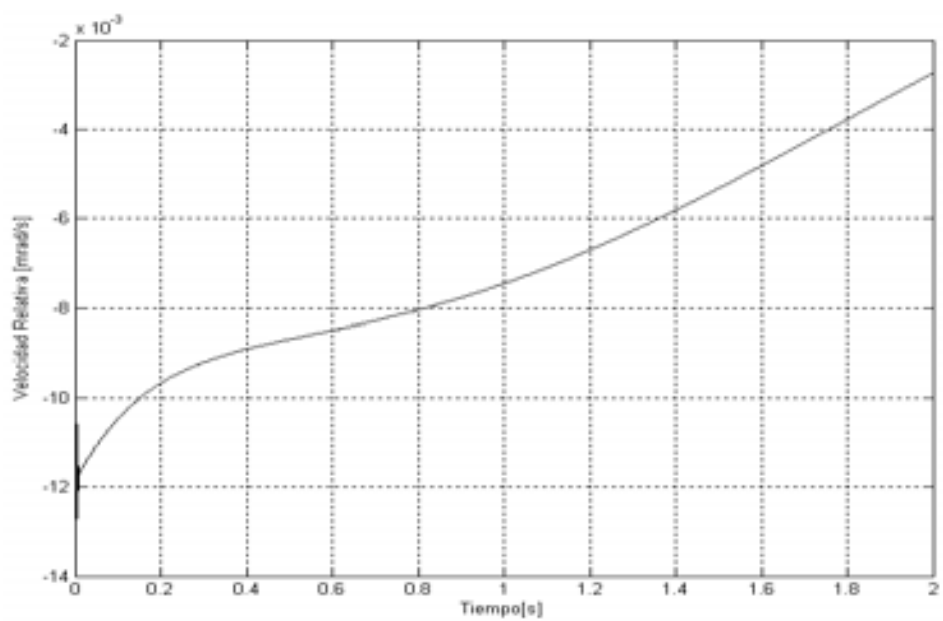


Figura 5.38: Velocidad relativa (\dot{s}).

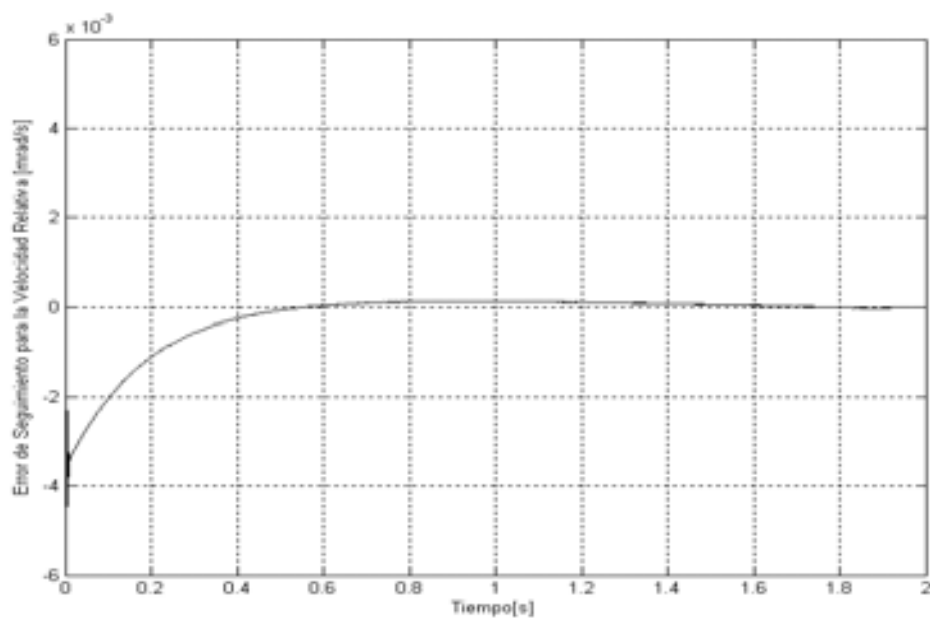
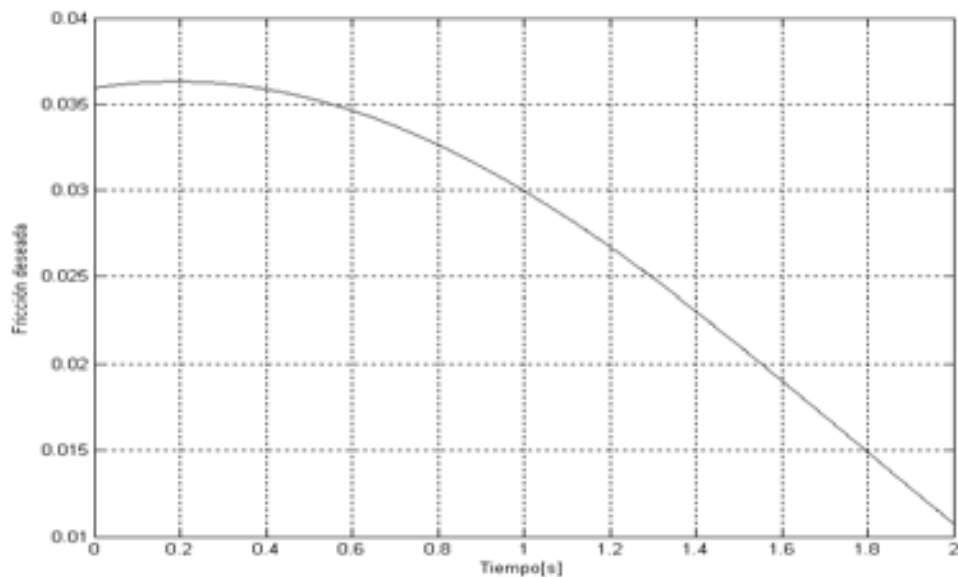
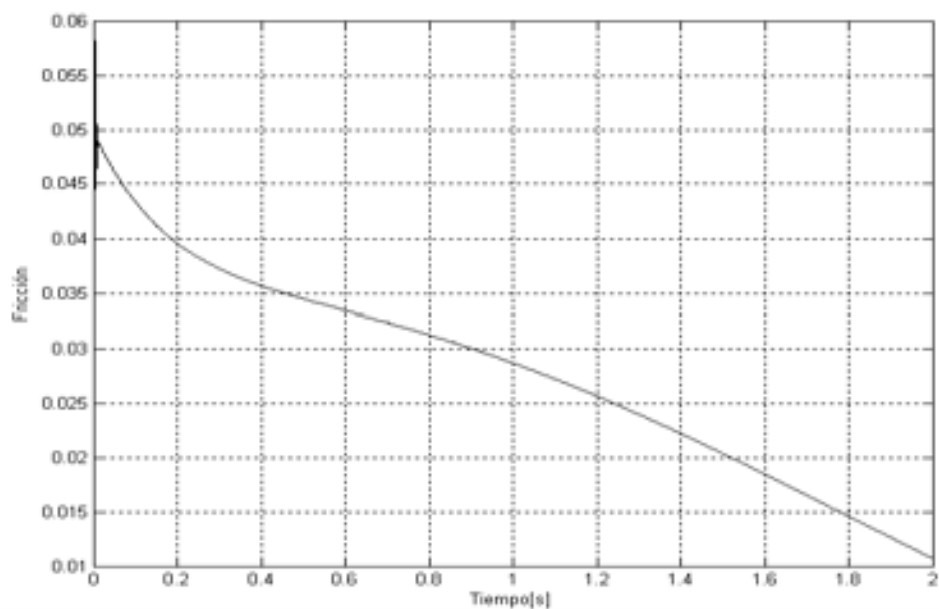


Figura 5.39: Error de seguimiento para la velocidad relativa ($\dot{\tilde{s}}$).

Figura 5.40: Fricción deseada (μ_d).Figura 5.41: Fricción (μ).

La Figura 5.42 muestra la corriente manipulada (i'_a) y en la Figura 5.43 se aprecia la corriente real (i_a) demandada por el motor. En la Figura 5.44 se observa el error para la corriente \tilde{z} . Por último para última maniobra se presenta en la Figura 5.45 el Voltaje requerido por el motor (V_e).

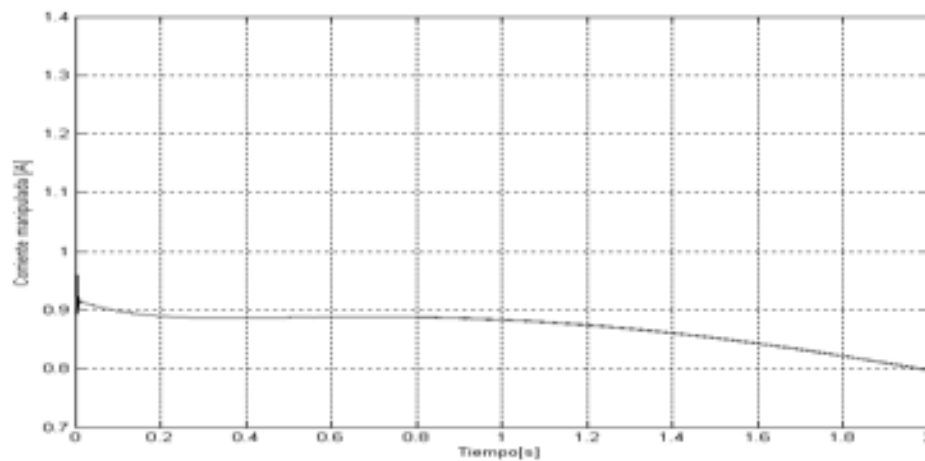


Figura 5.42: Corriente manipulada (i'_a).

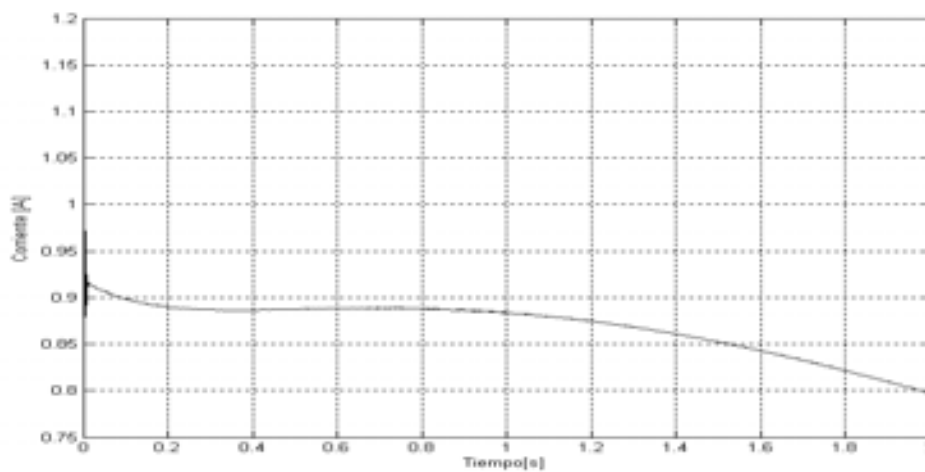


Figura 5.43: Corriente demandada real (i_a).

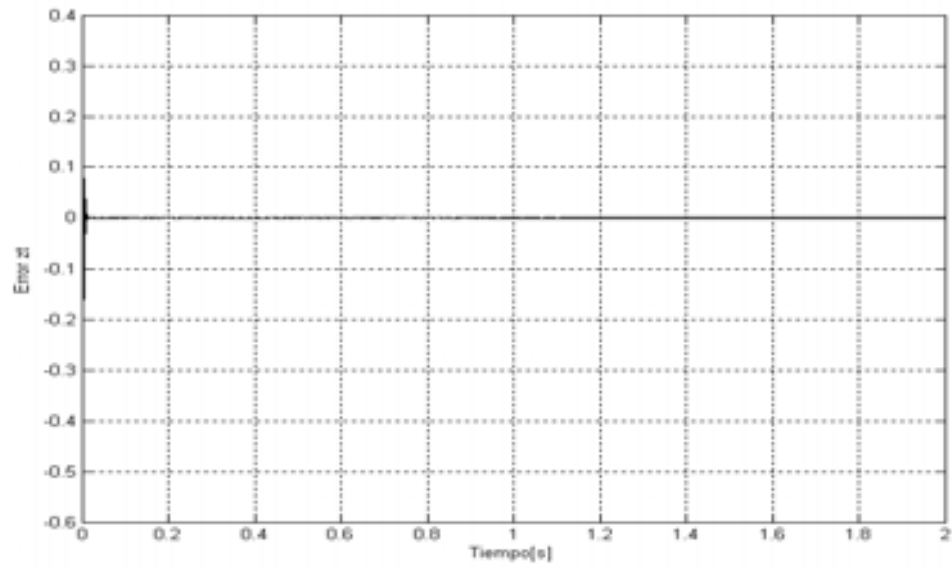


Figura 5.44: Variable de error de corriente (\hat{z}).

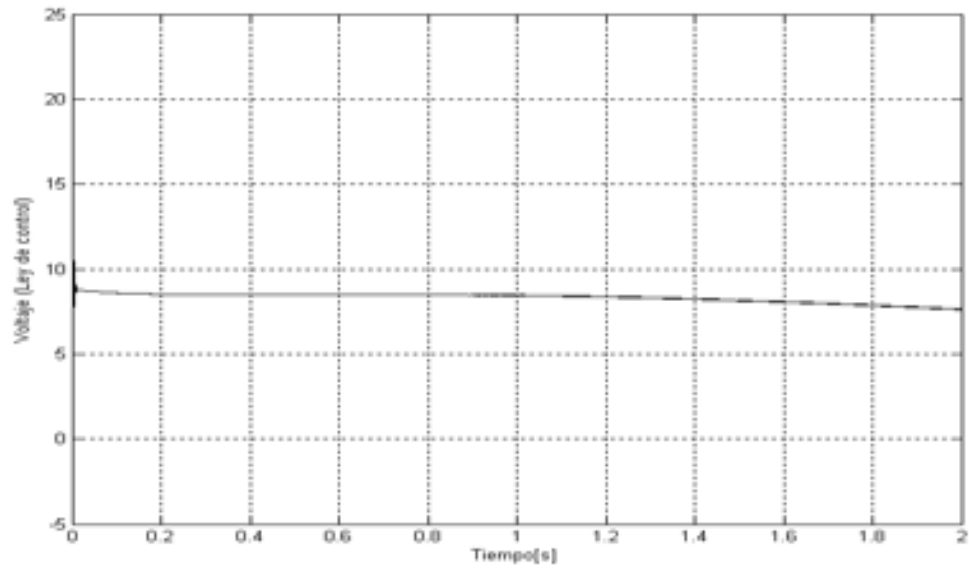


Figura 5.45: Voltaje requerido en la maniobra (V_e).

Capítulo 6

Conclusiones

Se obtuvieron modelos matemáticos a partir de modelos dinámicos de fricción para la interacción llanta-pavimento. Con estos modelos se pueden diseñar leyes de tracción y frenado, para poder controlar las aceleraciones y desaceleraciones que producen el deslizamiento en la superficie de contacto.

Se diseñó una instalación experimental para estudiar el fenómeno de fricción entre llanta y pavimento. Se dimensionaron los elementos base del banco de pruebas (rodillo, llanta y motor de corriente directa) y se obtuvieron los parámetros geométricos y datos necesarios para el diseño del banco.

Se obtuvo el modelo dinámico del motor eléctrico con excitación independiente y del sistema electro-mecánico con la finalidad de obtener una ley de control para el sistema en cuestión.

Se obtuvieron las trayectorias deseadas basadas en el modelo dinámico del vehículo que implementadas en el controlador fueron de utilidad para que el proceso de frenado y tracción fuera eficaz.

Dentro de las aportaciones de este trabajo también está la obtención de la ley de control para el sistema electro-mecánico con base en técnicas de Lyapunov, dicha ley resuelve el problema de control de seguimiento de trayectorias deseadas para un vehículo que puede incluir tracción y frenado. El controlador diseñado está basado en velocidad angular w_2 , velocidad relativa s y la corriente i_a . Se obtuvo estabilidad práctica en el seguimiento

de trayectorias.

Finalmente se presentaron los resultados de simulación que muestran un buen desempeño de los modelos dinámicos y del controlador.

Parte del trabajo futuro es verificar experimentalmente los modelos dinámicos propuestos, enfocándose en modelos con parámetros concentrados, y la construcción de la instalación experimental para caracterizar el fenómeno de fricción entre llanta y pavimento, donde se ocuparán los elementos diseñados y dimensionados en el banco de pruebas de esta tesis.

Referencias

- Alvarez, L., Yi, J., Horowitz, R., y Olmos, L. (2000, June). Emergency braking in automated highway systems with underestimation of the friction coefficient. En *Proceedings of the American Control Conference, Chicago Illinois.*, pp. 574–579.
- Armstrong-Hélouvry, B. (1991). *Control of machines with friction*. USA: Kluwer Academic Publishers.
- Bakker, E., Nyborg, L., y Pacejka, H. (1987). Tyre modeling for use in vehicle dynamic studies. *SAE*, Paper # 870421.
- Burckhardt, M. (1993). *Fahrwerktechnik: Radschlupfregelsysteme*. Germany: Vogel-Verlag.
- Canudas de Wit, C. y Horowitz, R. (1999, Dec). Observers for tire/road contact friction using only wheel angular velocity information. En *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix Arizona*.
- Canudas de Wit, C., A. Olsson, K., y Lischinsky, P. (1995, Mar). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*@(3), 419–425.
- Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P. (1999, Dec). Dynamic tire friction models for vehicle traction control. En *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix Arizona USA*.
- Gustafsson, F., Mathis, S., y Trajković, L. (1996, Sep). Estimation and Change Detection of Tire–Road Friction Using the Wheel Slip. En *Proceedings of the 1996 IEEE International Symposium, Sweden*.
- Harned, J., Johnston, L., y Scharpf, G. (1969). Measurement of tire brake force characteristics as related to wheel slip (antilock) control system design. *SAE Transactions*@(690214), 909–925.

- Kiencke, U. (1993). Realtime estimation of adhesion characteristic between tyres and road. En *Proceedings of the IFAC World Congress*, Volume 1, pp. 15–18.
- Kiencke, U. y Daiss, A. (1994). Estimation of tyre friction for enhanced ABS-systems. En *In Proceedings of the AVEG'94*.
- Liu, Y. y Sun, J. (1995, Jun). Target slip tracking using gain-scheduling for antilock braking systems. En *In The American Control Conference, Seattle, Washington*, pp. 1178–82.
- Mcbeath, S. (2005). *Aerodinámica del automóvil de competición*. Barcelona: CEAC S.A. EDICIONES.
- Olmos, L. (2001). Control de frenado de emergencia con base en modelos de fricción llanta-pavimento. Master's thesis, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.