



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

GEOMETROTERMODINÁMICA DE HOYOS NEGROS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JOSÉ LUIS ÁLVAREZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

COMITÉ TUTORAL: DR. MARCELO SALGADO RODRÍGUEZ  
DR. AXEL R. DE LA MACORRA PETERSON



Programa de Ciencias Físicas  
UNAM

MÉXICO, D.F.

2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# **GEOMETROTERMODINÁMICA DE HOYOS NEGROS**

José Luis Álvarez López

Director de Tesis: Dr. Hernando Quevedo Cubillos.

2008

# Convenciones y Notaciones

1. Índices repetidos son sumados al menos que se indique algo diferente.
2. Se utilizaron unidades en las cuales  $G = c = k_B = \hbar = 1$ , excepto en algunas secciones donde sea indicado.
3. GTD abreviación de Geometrotermodinámica.
4.  $\mathcal{T}$  Espacio fase termodinámico.
5.  $\mathcal{E}$  Espacio de estados de equilibrio termodinámico.
6.  $\Phi$  Potencial termodinámico.
7.  $E^a$  Variables termodinámicas extensivas.
8.  $I^a$  Variables termodinámicas intensivas.
9.  $\varphi^*$  Pullback.
10.  $\Theta_G$  1-forma fundamental de Gibbs.

# Índice general

<b>1. Termodinámica de hoyos negros</b>	<b>5</b>
1.1. Hoyos negros en la teoría de Einstein–Maxwell . . . . .	5
1.2. Las leyes de la termodinámica de hoyos negros . . . . .	5
1.3. Transiciones de fase . . . . .	5
<b>2. Fundamentos de GTD</b>	<b>7</b>
2.1. Estructura de contacto . . . . .	7
2.2. Invariancia de Legendre . . . . .	7
2.3. Estructura métrica . . . . .	7
2.4. Potenciales termodinámicos para los hoyos negros . . . . .	7
<b>3. Hoyos negros con 2 grados de libertad termodinámicos</b>	<b>9</b>
3.1. Geometrotermodinámica de Hoyos Negros . . . . .	9
3.2. Hoyo negro de Reissner–Nordström . . . . .	9
3.3. Hoyo negro de Kerr . . . . .	9
<b>4. Hoyos negros con 3 grados de libertad termodinámicos</b>	<b>11</b>
4.1. Hoyo Negro general de Kerr–Newman . . . . .	11
<b>5. Conclusiones</b>	<b>13</b>
<b>A. Publicación del artículo</b>	<b>15</b>

# Introducción

El estudio de la física de agujeros negros se ha intensificado durante las últimas décadas debido a que estos objetos, con su intenso campo gravitacional, podrían servir como laboratorios para llevar a cabo experimentos teóricos relacionados con las características cuánticas del campo gravitacional. Esto a su vez permite explorar lo que hoy en día es llamado el problema de la cuantización de la gravitación, el cual ha sido estudiado por más de 70 años sin que hasta la actualidad se tenga una solución definitiva. Por esta razón es considerado como el reto más grande de la física teórica contemporánea.

Debido al descubrimiento en los años 70 de que el área del horizonte de un agujero negro se puede relacionar en forma directa con su entropía [1], motivó arduamente la investigación en este campo culminando finalmente en lo que actualmente se llama termodinámica de agujeros negros. Con exactitud no se sabe la razón de esta relación entre magnitudes geométricas y físicas, a saber, el área y la entropía. El consenso en la mayoría de los investigadores radica en el problema relacionado a la cuantización del campo gravitacional, siendo éste un campo extenso y poco entendido.

Por otra parte, la aplicación de la termodinámica clásica a sistemas relativistas, tales como los campos gravitacionales, presentan serias dificultades ya que para algunos casos se predicen valores termodinámicos de nuestro universo que no coinciden con las observaciones experimentales. Lo anterior podría indicar la necesidad de modificar el lenguaje empleado en termodinámica para que sea compatible con el lenguaje geométrico de la Relatividad General. Es en este sentido que se ha postulado la Geometrotermodinámica (GTD) [2] como una área de investigación en la cual las propiedades termodinámicas de la materia se pueden expresar en base a conceptos de la geometría diferencial.

Las primeras aplicaciones de este nuevo formalismo se realizaron recientemente con el fin de entender la termodinámica de agujeros negros [3]. El resultado obtenido en el contexto de este formalismo reflejó que los trabajos

hechos con anterioridad presentan grandes contradicciones debido a que en éstos se han utilizados conceptos que no son invariantes con respecto a cambios del potencial termodinámico, es decir, se tienen resultados diferentes si se emplean diversos potenciales. En este sentido, el objetivo del trabajo de tesis fué el de encontrar métricas invariantes en el contexto de la GTD, partiendo del hecho de que la invariancia de Legendre se debe exigir a nivel del espacio fase termodinámico. A la métrica más sencilla encontrada, se le obtuvieron sus propiedades geométricas utilizándola en la termodinámica de agujeros negros con dos y tres grados de libertad termodinámicos de tal forma que los resultados obtenidos fueron invariantes, en el sentido ya mencionado, sin presentar contradicciones. Específicamente, se encontró una métrica cuyas singularidades de curvatura estuvieran relacionadas con las transiciones de fase que se predicen en la termodinámica de hoyos negros.

# Capítulo 1

## Termodinámica de hoyos negros

### 1.1. Hoyos negros en la teoría de Einstein–Maxwell

Un principio de mínima acción es un ingrediente básico para cualquier teoría de campo. Con ello, y una acción, podemos encontrar sistemáticamente cargas y corrientes conservadas, momentos canónicamente conjugados y un Hamiltoniano si es necesaria una cuantización canónica, etcétera. Por otra parte, es más fácil tratar con las acciones que con las ecuaciones de movimiento, es decir, es más sencillo incluir nuevos campos y acoplarlos a la acción, respetando ciertas simetrías, que inventar nuevas ecuaciones de movimiento consistentes para los mismos campos ó modificar las ecuaciones de movimiento de los viejos campos.

Si lo que queremos es encontrar soluciones a los hoyos negros, necesitamos acoplar la acción de Einstein-Hilbert a campos con materia que tienen asociados cargas conservadas. Las cargas deben ser aquellos puntos-partículas u obtendremos soluciones que describan objetos extendidos en vez de hoyos negros. Para ello, consideraremos el campo vectorial más simple: un campo vectorial Abelian  $A_\mu$ .

La acción para la gravedad acoplada a un campo vectorial electromagnético es llamada la acción de Einstein-Maxwell obtenida por,



$$\begin{aligned}
S_{EM}[g_{\mu\nu}, A_\mu] &= S_{EH}[g] + S_M[A] \\
S_{EM}[g_{\mu\nu}, A_\mu] &= \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|g|} R(g) + \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4} F^2\right) \quad (1.1)
\end{aligned}$$

donde  $R(g) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma)$  es el escalar de Ricci de la métrica  $g_{\mu\nu}$ ,  $G$  la constante de Newton y  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(\vec{E}, \vec{B})$  es el campo fuerte (Tensor de Faraday) del campo vectorial (cuadrivector potencial)  $A_\mu$  dado por,

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}, \quad F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

puesto que, en ausencia de torsión,  $\nabla_{[\mu} A_{\nu]} = \partial_{[\mu} A_{\nu]}$ . Las componentes de  $A_\mu$  y  $F_{\mu\nu}$ , en un sistema de coordenadas dado, habitualmente son escritas de la siguiente manera,

$$(A_\mu) = (\phi, -\vec{A}), \quad (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

donde  $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$  y  $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$  son los 3-vectores de los campos eléctrico y magnético en ese sistema de coordenadas y, de esta manera, con  $\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$  obtenemos

$$\begin{aligned}
E_i = F_{0i}, \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \\
B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{kl}, \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.4)
\end{aligned}$$

El campo fuerte, y la acción, son invariantes bajo una transformación de norma Abelianas,

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (1.5)$$

con un parámetro de norma suave  $\Lambda$ . Esto se llama *invariancia de norma* y permite imponer alguna condición adicional sobre los potenciales. En lenguaje de las formas diferenciales podemos escribir,

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad A' = A + \partial\Lambda, \quad F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dA, \quad (1.6)$$

donde la *invariancia de norma* de  $F$  es una consecuencia del Lemma de Poincaré,  $d^2 = 0$ . Usando estas formas diferenciales, la acción de Maxwell puede ser rescrita como,

$$S_M[A] = \frac{1}{8c} \int F \wedge F^*, \quad (1.7)$$

con  $F^*$  el tensor dual de  $F$ . Nótese que no hay materia cargada con respecto a  $A_\mu$  en este sistema (Teoría de un covector potencial sin masa). Esto es análogo a la presencia de campos sin materia en la acción de Einstein-Hilbert. Sin embargo, la acción de Einstein-Hilbert contiene el auto-acoplamiento de la gravedad y por lo tanto la presencia de una constante de acoplamiento en ella tiene sentido, mientras que en la teoría de Maxwell no hay interacción directa entre fotones y en principio, o se tiene una constante de acoplamiento electromagnética o una unidad de carga eléctrica.

Las ecuaciones de movimiento de  $g_{\mu\nu}$  y  $A_\nu$  resultan de extremizar la acción de Einstein-Maxwell, tal que de las variaciones,

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S_{EM}[g_{\mu\nu}, A_\mu] = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\delta}{\delta A^\mu} S_{EM}[g_{\mu\nu}, A_\mu] = 0, \quad (1.9)$$

las ecuaciones de campo que se obtienen, respectivamente, son,

$$G_{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.10)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (1.11)$$

con (1.11) como las ecuaciones de Maxwell, donde el tensor de Einstein (simétrico) y el de energía-momento del campo vectorial (Tensor de Maxwell) en (1.10) vienen dados por,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (1.12)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2c}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M[A]}{\delta g^{\mu\nu}} = F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2, \quad (1.13)$$

cuya traza de este último es nula. La ausencia de traza del tensor electromagnético de energía-momento implica que  $R = 0$  y la ecuación de Einstein

tome la forma simple,

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.14)$$

Una de las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, caso en el cual  $\vec{E} \neq 0$  y  $\vec{B} \neq 0$ , es la que describe al hoyo negro más general: hoyo negro de Kerr-Newman. De acuerdo con el teorema del “No pelo” demostrado por Hawking y cuyo nombre se debe Wheeler, todas las soluciones de los hoyos negros en la teoría de Einstein-Maxwell, son completamente caracterizadas por tres parámetros clásicos: masa  $M$ , carga eléctrica  $Q$  y momento angular  $J$ . El campo gravitacional correspondiente es descrito por la métrica de Kerr-Newman que en coordenadas Boyer-Lindquist [4] puede ser expresada como,

$$ds^2 = - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\varphi \\ + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (1.15)$$

con  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  y  $\Delta = (r - r_+)(r - r_-)$ , siendo  $r_-$  el horizonte de eventos interior y  $r_+$  el exterior situados en,

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \quad (1.16)$$

donde  $a = J/M$  es el momento angular específico.

Bekestein [1] descubrió en 1973 que el área de horizonte  $A$  de un hoyo negro se comporta como la entropía  $S$  de un sistema termodinámico clásico, estos se tratará con detalle en la siguiente sección. Esto fué el comienzo de lo que ahora es llamado la termodinámica de los hoyos negros [5, 6, 7].

## 1.2. Las leyes de la termodinámica de hoyos negros

Las curiosas analogías entre el comportamiento de los hoyos negros y los sistemas termodinámicos en equilibrio fueron notados desde 1973 por Carter [8]. Ingenuamente podemos decir que hay una tendencia general de los sistemas gravitacionales a crecer en vez de contraerse debido a que la gravedad es atractiva. En el caso de los agujeros negros, la incapacidad que

tiene la luz de emerger desde dentro del horizonte de eventos imposibilita el escape de cualquier material, tal que el horizonte actúa como una clase de superficie unidireccional asimétrica: material puede caer dentro del agujero haciéndolo más grande pero no salir y reducirlo en tamaño. Lo anterior es evocado de la Segunda Ley de la Termodinámica, en la cual hay una tendencia asimétrica en el crecimiento de la entropía en una sola dirección. El tamaño del hoyo negro es análogo a la entropía, se mantiene en aumento.

Esta analogía es al menos trivial para un hoyo negro esférico y eléctricamente neutro. En el caso más general de hoyos negros que poseen momento angular  $J$  y carga eléctrica  $Q$ , el tamaño depende de ambos parámetros en una forma complicada. Si el área de la superficie total del horizonte es usada como una medida del tamaño, entonces podemos calcularla fácilmente. Sabemos de geometría clásica que el área de una esfera de radio  $r$  es  $A = 4\pi r^2$  y se ha demostrado que esta fórmula se modifica ligeramente en un espacio curvo,

$$A = 4\pi(r^2 + a^2),$$

con  $a = J/M$ . De esta expresión obtenemos la fórmula de Smarr (1970) [9],

$$\begin{aligned} A &= 4\pi\left(2M^2 - Q^2 + 2\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}\right), \\ A &= 4\pi\left(2M^2 - Q^2 + 2M^2\sqrt{1 - \left(\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4}\right)}\right), \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde  $Q^2 < M^2$  y  $J^2 < M^4$ . De esta manera, no es claro a simple vista que un cambio en los parámetros  $J$ ,  $Q$  y  $M$  harán aumentar siempre el área total.

De hecho, como fué mostrado en un teorema por Hawking en 1972 [10], el área del horizonte no puede decrecer en ningún proceso, inclusive para los hoyos negros más generales. Un ejemplo famoso se debe a Penrose en 1969 [11], el cual se refiere a un método de extracción de masa-energía de un hoyo negro rotante. El mecanismo consiste en propulsar un cuerpo pequeño en la región justo afuera del horizonte de eventos donde (debido a un efecto de fricción sobre el espacio que rodea al agujero negro causado por su rotación) las trayectorias de algunas partículas poseen energías negativas relativas al infinito. Si el cuerpo se fragmenta en dos partes, una de ellas tomará una de estas trayectorias de energía negativa desapareciendo bajo el agujero negro; ello reducirá un poco la masa total  $M$  del agujero y la masa-energía, de algún modo relacionada por esta componente sacrificada, aparece en los fragmentos

remanentes los cuales son eyectados al infinito a altas velocidades. Durante esta transferencia de energía la tasa de rotación del agujero negro disminuye un poco, tal que  $J$  también decrece.

Ahora, inspeccionando la ecuación (1.17) se puede mostrar que cuando  $J$  decrece el área crece, pero cuando  $M$  decrece el área también decrece. De esta manera, los cambios en  $M$  y  $J$  están en cierta competencia aunque un cálculo más detallado mostraría que  $J$  siempre predomina y por consiguiente el área del horizonte va en aumento.

La fuerte analogía entre el área del horizonte de eventos y la entropía conduce al uso del nombre de “Segunda Ley” en conexión con el teorema de área de Hawking el cual es escrito como,

$$dA \geq 0 \quad (1.18)$$

donde la igualdad correspondería a la reversibilidad. También hay analogías para la ley cero, la primera y la tercera ley de la termodinámica. Dado que la ecuación (1.17) es función de  $A = A(M, J, Q)$ , se puede obtener la siguiente relación,

$$dM = (8\pi)^{-1} \kappa dA + \Omega dJ + \phi dQ \quad (1.19)$$

donde  $(8\pi)^{-1} \kappa \equiv \frac{\partial M}{\partial A}$ ,  $\Omega = \frac{\partial M}{\partial J}$  y  $\phi = \frac{\partial M}{\partial Q}$ . La cantidad  $\kappa$  es conocida como la gravedad superficial del hoyo negro. Los términos restantes de la ecuación (1.19) simplemente describen el trabajo realizado (energía extraída) en los cambios del momento angular ( $\Omega dJ$ ) y de la carga eléctrica ( $\phi dQ$ ), los cuales tienen una estructura obvia:  $\Omega$  es la magnitud de la velocidad angular y  $\phi$  es potencial eléctrico en el horizonte de eventos.

Esta última relación es justo la expresión de conservación para la masa-energía que corresponde a la “Primera Ley” en analogía con,

$$dE = TdS + (\text{términos adicionales}).$$

Si  $A$  juega el papel de la entropía, entonces se puede notar de la estructura de (1.19), que  $\kappa$  toma el papel de la *temperatura*,

$$\kappa dA \sim TdS.$$

Lo interesante es que  $\kappa$  es constante a través de la superficie del horizonte de eventos, ésto correspondería a la expresión para la “Ley cero”. Análogo a la termodinámica, uno puede decir que en equilibrio termodinámico existe un parámetro común para el sistema entero: la temperatura.

Finalmente, hay una “Tercera ley”. Para observarla tomemos la fórmula de Smarr (1.17) y realicemos la siguiente derivada parcial,

$$\frac{\partial A}{\partial M} = 8\pi \left( \frac{2M^2 - Q^2 + 2M^2[1 - (\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4})^{1/2}]}{M[1 - (\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4})^{1/2}]} \right),$$

y empleando una propiedad de las funciones inversas  $\frac{\partial M}{\partial A} = (\frac{\partial A}{\partial M})^{-1}$  tenemos,

$$\frac{\partial M}{\partial A} = (8\pi)^{-1} \left( \frac{M[1 - (\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4})^{1/2}]}{2M^2 - Q^2 + 2M^2[1 - (\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4})^{1/2}]} \right) \equiv (8\pi)^{-1} \kappa, \quad (1.20)$$

identificando que la gravedad superficial depende de parámetros constantes,

$$\kappa = \left( \frac{M[1 - (\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4})^{1/2}]}{2M^2 - Q^2 + 2M^2[1 - (\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4})^{1/2}]} \right).$$

Si  $J^2$  ó  $Q^2$  son suficientemente grandes tal que se cumpla la condición de un hoyo extremo,

$$\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4} = 1,$$

ó

$$M^4 = M^2Q^2 + J^2,$$

entonces la gravedad superficial se anula ( $\kappa \rightarrow 0$ ) aunque no así el área del horizonte, expresión de Smarr,

$$A = 4\pi(2M^2 - Q^2) \neq 0.$$

Un hoyo negro con la condición  $M^4 = M^2Q^2 + J^2$  es llamado hoyo negro extremo de Kerr-Newman; caso límite en el que un objeto aún posee un horizonte de eventos, ya que el horizonte interno y externo se han fundido en uno solo. Si la masa del hoyo es tal que  $M^4 < M^2Q^2 + J^2$ , entonces los dos horizontes desaparecen. El análogo a la Tercera Ley de la termodinámica que trata sobre la imposibilidad de alcanzar el cero absoluto, es que la gravedad superficial de un hoyo negro no puede alcanzar el valor cero ( $\kappa = 0$ ). Si esto llegara a ocurrir, se podría, con la más mínima perturbación, destruir el horizonte del hoyo negro y dejar la singularidad desnuda, es decir, la singularidad ya no sería invisible dentro del hoyo negro y podría ser influenciada y observada por el universo exterior.

Una versión más general de esta Tercera Ley es que ningún proceso físico puede producir una singularidad desnuda. La formación de una singularidad implica, necesariamente, la aparición de un horizonte que esconda esa singularidad de las miradas del exterior. Esta conjetura aún no ha sido demostrada rigurosamente, pero todos los estudios teóricos de la formación de hoyos negros la apoyan; Penrose (1969) ha llamado a esta posible ley natural: “hipótesis de censura cósmica”: “*Singularidades desnudas no pueden ser formadas de un colapso gravitacional*” [11].

Ahora que se han visto las similitudes entre las cuatro leyes de la termodinámica y los agujeros negros, observemos que para el hoyo negro de Schwarzschild ( $J = Q = 0$ ), la expresión de Smarr para el área del horizonte (1.17) se reduce a,

$$A = 16\pi M^2, \quad (1.21)$$

y sencillamente la gravedad superficial es,

$$\kappa \equiv 8\pi \frac{\partial M}{\partial A} = \frac{1}{4M}, \quad (1.22)$$

donde la constante  $(8\pi)^{-1}$  de la ecuación (1.19) ha sido escogida para estar de acuerdo con esto. Por otra parte, si se emplea la relación termodinámica para un hoyo negro,

$$\text{Energía} = 2(\text{temperatura}) \times (\text{entropía}) = 2TS \quad (1.23)$$

(obtenida de la integración  $dM = \kappa dA$  y sustituyendo  $\kappa$  por  $T$  y  $A$  por  $S$ ), y notando que como la energía  $M$  es finita, entonces la temperatura cero implicaría una entropía infinita. En contraste con ello, si reescribimos la ecuación (1.21) en la forma de la ecuación (1.23),

$$M = \frac{A\kappa}{4\pi} \quad (1.24)$$

(recordando que  $A$  juega el papel de la entropía y  $\kappa$  de la temperatura) observamos que el lado derecho de esta ecuación es el producto de dos cantidades finitas, lo que resulta discrepante con la idea anterior. En este momento surge la pregunta de cómo podríamos entender la noción de entropía en un hoyo negro y por qué tendría que ser infinita. Para ello es de gran ayuda emplear la relación entre entropía e *información* debida a P. Davies en 1974 [12]. Si un sistema es altamente ordenado entonces su entropía es baja. Dado que un

sistema requiere un gran manejo de información para ser descrito, alternativamente se puede decir que contiene gran información. Lo anterior va en relación con la indentificación

$$\text{información} \leftrightarrow \text{entropía negativa.}$$

Cuando un sistema se vuelve desordenado, su entropía va en aumento y su estado requiere menos información para ser descrito. En equilibrio termodinámico, solamente un número pequeño de parámetros son necesarios: la temperatura total, el volumen, el número de especies de partículas; este es el estado de máxima entropía y mínima información contenida.

La relevancia de la información para la discusión de la entropía de un hoyo negro es concerniente a la naturaleza del horizonte de eventos. Podría esperarse, en argumentos generales, que un hoyo negro posea entropía (y bastante de ella) en virtud de toda la información que ha “tragado”.

Por consiguiente, es necesario estimar cuanta información se ha ido en el hoyo negro para saber su tamaño. Una estimación a grandes rasgos, tal como lo hizo Hawking (1970), es el de contar el número de grados de libertad internos asignando un *bit* de información a cada uno de ellos. Esto significa calcular cuántas partículas se requieren para la creación de un hoyo negro, digamos, de masa  $M$ . En base a la física clásica este número podría ser arbitrariamente grande, debido a que se pueden escoger partículas de masa arbitrariamente pequeñas: por ejemplo, partículas con cero masa en reposo (fotones o neutrinos) y con energías arbitrariamente bajas. Por consiguiente, parece ser que la información contenida, y por tanto la entropía, asociada al hoyo negro sería de hecho ilimitada, como se ha sospechado.

Si tomamos en cuenta la naturaleza cuántica de la materia, se descubrirá que la entropía de un hoyo negro debería ser también finita. La razón es simple: no se pueden escoger partículas de masas *arbitrariamente* pequeñas para constituir un hoyo negro debido a la relación cuántica entre la energía y la longitud de onda,

$$E = \frac{h}{\lambda}. \quad (1.25)$$

Suponiendo que la longitud de onda  $\lambda$  debe ser, al menos, menor que el tamaño del agujero negro si miramos a la partícula de energía  $E$  localizada dentro del hoyo. Ahora, recordando que el área del horizonte de eventos de Schwarzschild era  $A = 16\pi M^2$  y sabiendo que  $A = 4\pi r^2$ , entonces el radio del horizonte de eventos de este hoyo negro es  $r = 2M$ . Si escogemos  $\lambda \simeq 2M$ ,



esto nos conduce a una energía mínima de la partícula, o masa, del orden de  $E \sim h/M$ . Por lo tanto, el número máximo de tales partículas  $N_p$  que constituirán al hoyo negro, de masa  $M$ , serán cerca de,

$$N_p \sim \frac{M}{h/M} = \frac{M^2}{h}.$$

Un estimado de la entropía, si usamos la relación (1.23), sería,

$$S = \frac{E}{2T} = \xi \frac{N_p k_B T}{T} = \xi k_B \left( \frac{M^2}{h} \right), \quad (1.26)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzman y  $\xi$  es un número de orden unitario que para calcularlo apropiadamente se requiere de la teoría completa de hoyos negros cuánticos. Es obvio de (1.26) que la entropía  $S$  diverge en el límite clásico  $h \rightarrow 0$ .

Es gratificante señalar que, usando  $M^2 = A/16\pi$  de (1.21), la ecuación anterior puede ser escrita en la forma,

$$S = \left( \frac{\xi k_B}{16\pi h} \right) A, \quad (1.27)$$

mostrando que la entropía es proporcional al área del horizonte de eventos, exactamente como se sugirió en las bases de las cuatro leyes termodinámicas de los hoyos negros. Este resultado fue sugerido primeramente por Bekenstein en 1973 [1].

Finalmente, de (1.23) tenemos que  $T = M/2S$  por la equivalencia de la masa-energía, y al sustituir en esta última relación la entropía encontrada en (1.27) con  $A = 16\pi M^2$ , llegamos a una expresión para la temperatura del hoyo negro de Schwarzschild,

$$T = \left( \frac{h}{2\xi k_B} \right) M^{-1}. \quad (1.28)$$

Sobre la base de esta fórmula es que el hoyo de Schwarzschild, sólo en el límite clásico  $h \rightarrow 0$ , tiene temperatura cero ( $T = 0$ ). Por otra parte, pareciera que posee una temperatura si usamos  $M = 1/4\kappa$  de (1.22) y la sustituimos en la ecuación anterior tal que podamos describirla como,

$$T = \left( \frac{2h}{\xi k_B} \right) \kappa, \quad (1.29)$$

que es de hecho proporcional a la gravedad superficial  $\kappa$  tal como se habría esperado. ¿Qué significa físicamente esta temperatura?. Asignarle una temperatura a algo implica que ello puede estar en equilibrio con los alrededores de un baño térmico a la misma temperatura. De ser así, el hoyo negro tendría que emitir energía térmica a la misma tasa de como la absorbe. Pero el horizonte de eventos previene cualquier escape de radiación térmica del hoyo, es decir, el calor puede fluir hacia adentro pero no salir.

Si el concepto de temperatura tiene sentido, entonces debemos ser capaces de asociarle un espectro de radiación de equilibrio térmico. La longitud de onda característica  $\lambda_0$  de esta radiación será,

$$\lambda_0 \simeq \frac{h}{k_B T}, \quad (1.30)$$

usando el valor  $T$  para la temperatura del hoyo negro, ecuación (1.28), se tiene que,

$$\lambda_0 \simeq \frac{h}{k_B} \left( \frac{2\xi k_B}{h} \right) M,$$

y asumiendo  $\xi \simeq 1$ ,

$$\lambda_0 \simeq 2M = \text{radio del hoyo negro}. \quad (1.31)$$

Este resultado no es, claro, inesperado ya que se escogió a la entropía del hoyo negro en primer lugar con esta longitud de onda en mente. No obstante, esto muestra que no es significativo intentar y localizar el origen de la radiación térmica dentro o fuera del hoyo negro. Esto significa que no tenemos que decir realmente que hay radiación térmica que fluya hacia fuera del mismo hoyo negro para ser capaces de asociarla con la temperatura dada por (1.28). Sin embargo, tenemos que asumir que el hoyo es una fuente de radiación térmica en algún sentido. La deducción de la ecuación (1.28) no fué mediante consideraciones árduas si no, mas bien, por argumentos heurísticos acerca de la información y la entropía. La naturaleza precisa de la misteriosa radiación térmica asociada a los hoyos negros puede ser solamente determinada por un tratamiento cuántico apropiado.

La aplicación de la teoría cuántica a los hoyos negros hecho por Hawking en 1975 [13], estableció el resultado que, de hecho, los hoyos negros deben emitir radiación térmica con una temperatura dada por la relación (1.28). El cálculo que Hawking realizó fija el valor de la constante,

$$\xi = 8\pi^2, \quad (1.32)$$

el cual algunas veces los científicos encuentran difícil de entender debido a que depende de los detalles de la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo curvo.

A continuación, describiremos las ecuaciones fundamentales de la termodinámica por lo que es conveniente en esta sección tomar el valor de las siguientes constantes  $k_B = 1/8\pi$  y  $\hbar \equiv h/2\pi = 1$ . El haber establecido el valor de  $\xi$  en la ecuación (1.32), permite la conexión numérica precisa entre el área del horizonte de eventos  $A$  y la entropía  $S$ ,

$$S = \frac{1}{4}A. \quad (1.33)$$

Esta relación es cierta para el caso genérico ( $Q, J \neq 0$ ), tal que de la ecuación (1.17) derivada por Smarr podemos describir la ecuación fundamental de la termodinámica para un hoyo negro en representación de la entropía  $S = S(M, Q, J)$  como,

$$S = \pi \left( 2M^2 - Q^2 + 2\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2} \right). \quad (1.34)$$

Esta ecuación será usada para estudiar los procesos en un hoyo negro sobre la base del equilibrio termodinámico. También podemos escribir la ecuación fundamental en representación de la masa  $M = M(S, Q, J)$  como,

$$M = \left[ \frac{\pi J^2}{S} + \frac{S}{4\pi} \left( 1 + \frac{\pi Q^2}{S} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.35)$$

De esta manera, la Primera Ley de la termodinámica para los hoyos negros, ecuación (1.19), asume la siguiente forma convencional,

$$dM = TdS + \Omega dJ + \phi dQ \quad (1.36)$$

donde

$$T = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{1}{M} \left( \frac{1}{8\pi} - \frac{\pi J^2}{2S^2} - \frac{\pi Q^4}{8S^2} \right), \quad (1.37)$$

$$\Omega = \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{\pi J}{MS}, \quad (1.38)$$

$$\phi = \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{1}{M} \left( \frac{Q}{2} + \frac{\pi Q^3}{2S} \right). \quad (1.39)$$

El Teorema de Euler permite que la ecuación fundamental (1.36) sea integrada obteniendo la identidad ó relación generalizada de Euler,

$$\frac{1}{2}M = TS + \Omega J + \frac{1}{2}\phi Q \quad (1.40)$$

la cual se reduce a (1.23) cuando  $J = Q = 0$ .

En vista de las similitudes entre este conjunto de ecuaciones y aquellas de los sistemas termodinámicos convencionales, hay un número de características peculiares en el caso de los agujeros negros. Una de ellas es que la entropía de un hoyo negro no puede ser realmente visualizada por separado; mas bien es un concepto global. Físicamente, esto significa que no podemos dividir un sistema de hoyos negros en subsistemas constituyentes que difieran solamente por una *escala* como se puede hacer, por ejemplo, con el gas ideal.

### 1.3. Transiciones de fase

Los criterios de estabilidad tienen que ser satisfechos por la ecuación fundamental de todo sistema que deba permanecer homogéneo y estable. Si *no* se satisfacen los criterios de estabilidad, el sistema se separa en dos o más partes. Esta separación recibe el nombre de *transición de fase*. Digamos entonces, que las transiciones de fase son las transformaciones de un sistema termodinámico de una fase a otra. La característica distintiva es un cambio abrupto en una o más propiedades físicas, en particular la capacidad calorífica, con un cambio pequeño en una variable termodinámica tal como es la temperatura. La capacidad calorífica es una medida de la energía en forma de calor requerida para incrementar la temperatura de un objeto por un cierto intervalo de temperatura.

Ahora clasificaremos a las transiciones de fase de acuerdo con la “Energía libre de Gibbs  $G$ ”. Se llaman *transiciones de primer orden* cuando una de las primeras derivadas de la Energía libre con respecto a las variables extensivas es discontinua, por ejemplo,

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T} \Big|_{N,p,\dots} \quad ; \quad V = \frac{\partial G}{\partial p} \Big|_{N,T,\dots} \quad (1.41)$$

con el número de partículas  $N$ , presión  $p$  y temperatura  $T$  constantes. Se llaman *transiciones de segundo orden* cuando las primeras derivadas de la

Energía libre son continuas; sin embargo, segundas derivadas, como el calor específico  $c_p$  a presión constante, son discontinuas o divergentes, digamos,

$$c_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right) \Big|_p = -T \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right) \Big|_p, \quad (1.42)$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right) \Big|_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \right) \Big|_T, \quad (1.43)$$

donde  $\kappa_T$  es la compresibilidad isotérmica a temperatura  $T$  constante.

Es importante señalar que se pueden utilizar otros potenciales termodinámicos para clasificar las transiciones de fase. Por ejemplo, en lugar de la Energía libre de Gibbs se podría utilizar la energía libre de Helmholtz, la Entalpía o algún otro potencial que esté bien definido.

Discutido el concepto de transición de fase, imaginemos ahora a un hoyo negro a cierta temperatura  $T$  en equilibrio con un baño térmico a su alrededor. En general, el hoyo negro tiene momento angular  $J$  y carga eléctrica  $Q$ . Supongamos una transferencia pequeña e irreversible de energía entre el hoyo y su entorno la cual ocurre de cierta manera que  $Q$  y  $J$  permanecen sin cambio. El calor específico correspondiente a esta transferencia con  $Q$  y  $J$  constantes se calcula fácilmente por la siguiente relación,

$$C_{J,Q} \equiv T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right) \Big|_{J,Q} = \frac{T}{\left( \frac{\partial^2 M}{\partial S^2} \right)}, \quad (1.44)$$

donde hemos utilizado  $T = \frac{\partial M}{\partial S}$  de la ecuación (1.40) con  $S = S(M, Q, J)$  como la ecuación fundamental en la representación de la entropía.

Davies [7] arguyó que un hoyo negro experimenta una transición de fase de segundo orden en los puntos donde la capacidad calorífica diverge. Este argumento de los puntos singulares es apoyado por los resultados de los siguientes trabajos [14, 15, 16, 17, 18, 19]. Siguiendo a Davies, asumimos en esta tesis que la estructura de las transiciones de fase del hoyo de Kerr-Newman es determinada por la correspondiente capacidad calorífica,

$$C_{J,Q} = -\frac{4TM^3S^3}{2M^6 - 3M^4Q^2 - 6M^2J^2 + Q^2J^2 + 2(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}}. \quad (1.45)$$

Uno de los propósitos de la aplicación de la geometría en la termodinámica es describir las transiciones de fase en términos de las singularidades de curvatura tal que la curvatura pueda ser interpretada como una medida de la interacción termodinámica. Desde los años setentas conceptos de geometría diferencial han sido aplicados a la termodinámica. Primero, Weinhold [20] introdujo en el espacio de estados de equilibrio termodinámico una métrica cuyas componentes están dadas como el Hessiano de la energía interna,

$$g^W = \frac{\partial^2 M}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b, \quad (1.46)$$

donde  $E^a = \{S, J, Q\}$ . Después Ruppeiner [21] introdujo una métrica la cual estaba definida como menos el Hessiano de la entropía,

$$g^R = -\frac{\partial^2 S}{\partial F^a \partial F^b} dF^a dF^b, \quad (1.47)$$

con  $F^a = \{M, J, Q\}$  siendo equivalente a la métrica de Weinhold mediante una transformación conforme con el inverso de la temperatura como el factor conforme,

$$g^W = T g^R. \quad (1.48)$$

Si la curvatura en el espacio de equilibrio se interpreta como una medida de la interacción termodinámica y se calcula para el caso del gas ideal, se obtendrá que la curvatura es cero [2], lo que indica que no hay interacción termodinámica entre las moléculas que constituyen el gas, lo cual es consistente con la propia definición del gas ideal. Para el caso del gas de van der Waals, la curvatura descrita por la métrica de Weinhold y la de Ruppeiner es singular en aquellos puntos donde las transiciones de fase ocurren. Que la curvatura del gas de van der Waals sea diferente de cero indica que hay interacción termodinámica, lo que coincide con la descripción de este gas en donde se toman en cuenta las desviaciones de un gas real respecto de uno perfecto debido a la interacción de las moléculas que lo constituyen. Este es un valioso resultado que ilustra la aplicabilidad de la geometría en la termodinámica.

Resulta entonces natural, como paso inmediato, tratar de describir las transiciones de fase de los hoyos negros en términos de las singularidades de curvatura en el espacio de estados de equilibrio. Desafortunadamente, los resultados obtenidos son contradictorios. Por ejemplo, para el hoyo negro de Reissner-Nordström ( $M, Q \neq 0$ ) la métrica de Ruppeiner es plana [22],

mientras que la métrica de Weinhold con la masa como el potencial termodinámico presenta una singularidad de curvatura sólo en el límite de un hoyo negro extremo. Ninguno de estos resultados reproduce las transiciones de fase predichas por Davies usando la capacidad calorífica. Sin embargo, un simple cambio en el potencial termodinámico [23] afecta la geometría de Ruppeiner de tal manera que la singularidad de curvatura resultante ahora corresponde a una transición de fase. La situación es similar en el caso del hoyo negro de Kerr ( $M, J \neq 0$ ): la métrica de Weinhold es plana [22], y la métrica original de Ruppeiner no presenta singularidades de curvatura en los puntos de transiciones de fase del hoyo negro de Kerr. Sin embargo, con un cambio en el potencial termodinámico [23], la métrica de Ruppeiner reproduce la estructura de las transiciones de fase de este hoyo. Estos resultados parecen indicar que, en el caso de hoyos negros, geometría y termodinámica son compatibles solamente para un potencial termodinámico muy específico. No obstante, es bien sabido que la termodinámica ordinaria no depende del potencial termodinámico. Creemos que una descripción geométrica de la termodinámica debería preservar esta propiedad, en otras palabras, debería ser invariante respecto a las transformaciones de Legendre.

Recientemente, el formalismo de la Geometrotermodinámica (GTD)[2] fué propuesto como una aproximación geométrica que incorpora la invariancia de Legendre en una manera natural y permite derivar métricas invariantes de Legendre en el espacio de estados de equilibrio. Dado que las métricas de Weinhold y Ruppeiner no son invariantes de Legendre, uno de los primeros resultados en el contexto de la GTD fué la derivación de una simple generalización invariante de Legendre de estas métricas y su aplicación a la termodinámica de hoyos negros [3]. Resulta que la termodinámica del hoyo negro de Reissner-Nordström es compatible con la estructura métrica generalizada de Weinhold y la de Ruppeiner. Sin embargo, en el caso del hoyo negro de Kerr ambas geometrías generalizadas son planas y, por lo tanto, no pueden reproducir su comportamiento termodinámico. Lo anterior fué considerado un resultado negativo para el uso de la geometría en la termodinámica de hoyos negros.

En los capítulos siguientes se usará la GTD para derivar una métrica invariante de Legendre que complete y reproduzca consistentemente el comportamiento termodinámico de los hoyos negros, incluyendo al hoyo de Kerr-Newman. Este resultado termina la controversia respecto a la aplicación de estructuras geométricas en termodinámica de hoyos negros.

# Bibliografía

- [1] J. D. Bekenstein, *Black Holes and entropy*, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).
- [2] H. Quevedo, *Geometrothermodynamics*, J. Math. Phys. **48**, 013506 (2007).
- [3] H. Quevedo, *Geometrothermodynamics of black holes*, Gen. Rel. Grav. (2008) in press.
- [4] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003).
- [5] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *The four laws of black hole mechanics*, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [6] S. W. Hawking, *Particle creation by black Holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [7] P. C. Davies, *Thermodynamics of black Holes*, Rep. Prog. Phys. **41**, 1313 (1978).
- [8] B. Carter, *Black holes* ed. DeWitt and DeWitt (London: Gordon and Breach).
- [9] L. Smarr, *Mass formula for Kerr black holes*, Phys. Rev. Lett. **70**, 71 (1973).
- [10] S. W. Hawking, *Black Holes*, ed. DeWitt and DeWitt (London: Gordon and Breach) pp1-56.
- [11] R. Penrose, *Nuovo Cim.* **1** *Special No 252*.



- [12] PCW Davies, *The physics of Time Asymmetry* (Surrey University Press/University of California Press), 1974.
- [13] SW Hawking Commun. Math. Phys. **43** 199, 1975.
- [14] L. M, Sokolowski and P. Mazur, *Second-order phase transitions in black-hole thermodynamics*, J. Phys. A **13**, 1113 (1980).
- [15] Y. K. Lau, *On the second-order phase transition of a Reissner-Nordstrom black hole*, Phys. Lett. A **186**, 41 (1994).
- [16] Y. K. Lau, *Thermodynamics critical fluctuation ok Kerr-Newman black hole*, Phys. Rev. Lett. A **188**, 245 (1994).
- [17] J. P Muniain and D. Piriz, *Critical behavior of dimensionally continued black holes*, Phys. Rev. D **53**, 816 (1996).
- [18] C. O. Lousto, *The fourth law of black hole thermodynamics*, Nuc. Phys. B **410**, 155 (1993).
- [19] C. O. Lousto, *Emergence of an effective two-dimentional quantum description from the study of critical phenomena in black holes*, Phys. Rev. D **51**, 1733 (1995).
- [20] F. Weinhold, *Metric Geometry of equilibrium thermodynamics I, II, III, IV, V*, J. Chem. Phys. **63**, 2479, 2484, 2488, 2496 (1975); **65**, 558 (1976).
- [21] G. Ruppeiner, *Thermodynamics: A Riemannian geometric model*, Phys. Rev. A **20**, 1608 (1979).
- [22] J. Aman, I. Bengtsson, and N. Pidokrajt, *Geometry of black hole thermodynamics*, Gen. Rel. Grav. **35**, 1733 (2003).
- [23] J. Shen, R. Cai, B. Wang, and R. Su, *Thermodynamics geometry and critical behavior of black holes*, (2005) arXiv: gr-qc/0512035.
- [24] Gibbs, *Thermodynamics* (Yale University Press, New Haven, CT, 1948), Vol. 1.
- [25] Charatheodory, *Gesammelte Mathematische Werke* (Teubner Verlag, Munich, 1995), Vol 2.

- [26] R. Hermann, *Geometry, Physics and Systems* (Dekker, New York, 1973).
- [27] R. Mrugala, Rep. Math. Phys. **14**, 419 (1978).
- [28] R. Mrugala, Rep. Math. Phys. **21**, 197 (1985).
- [29] T. Feldman, B. Andersen, A. Qui, and P. Salamon, Chem. Phys. **83**, 5849 (1985).
- [30] R. Gilmore, J. Chem. Phys. **75**, 5964 (1981).
- [31] J. Nulton and P. Salamon, J. Phys. Rev. A **31**, 2520 (1985).
- [32] M. Santoro, J. Chem. Phys. **121**, 2932 (2004).
- [33] M. Santoro, Chem. Phys. **310**, 269 (2005).
- [34] M. Santoro, Chem. Phys. **313**, 331 (2005).
- [35] M. Santoro and S. Preston, e-print math-ph/0505010.
- [36] G. Ruppeiner, Phys. Rev. A **20**, 1608 (1979).
- [37] G. F. Torres del Castillo and M. Montesinos-Velasquez, Rev. Mex. Fis. **39**, 194 (1993).
- [38] G. Hernandez and E. A. Lacomba, Diff. Geo. Applic. **8**, 205 (1998).
- [39] H. Quevedo and R. D. Zárate, Rev. Mex. Fis. **49**, 125 (2003).
- [40] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostat-ic*(Wiley, New York, 1985).
- [41] W. L. Burke, *Applied differential Geometry* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1979).
- [42] R. B. Israel, *Convexity in the Theory of Lattice Gases*(Princeton University Press, Princeton, NJ, 1979).
- [43] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of classical Mechanics*(Springer, New York, 1980).
- [44] G. Ruppeiner, *Riemannian geometry in thermodynamics fluctuation theory*, Rev. Mod. Phys. **67**, 605 (1995); **68**, 313 (1996).

- [45] A. Curir, *General Relativity Gravity*, **13**, 417 (1981).
- [46] D. Pavón, *Phys. Rev. D* **43**, 2495 (1991).
- [47] J. Katz, I. Okamoto and O. Kaburaki, *Classical Quantum Gravity*, **10**, 1323 (1993).
- [48] O. Kaburaki, I. Okamoto and J. Katz, *Phys. Rev. D* **47**, 2234 (1993).

# Capítulo 2

## Fundamentos de GTD

Una de las primeras aplicaciones de la geometría diferencial a la termodinámica se debe a Gibbs [24] y a Caratheodory [25]. Esos estudios fueron posteriormente desarrollados en los años 70 por Hermann [26] y después por Mrugala [27, 28] conduciendo a una primera aproximación geométrica en la cual el espacio fase termodinámico y su estructura natural de contacto son los elementos básicos de la construcción. Weinhold propuso una segunda aproximación con una métrica definida *ad hoc* como el Hessiano de la energía interna. Esta aproximación ha sido usada intensamente para estudiar las propiedades del espacio generado por la métrica de Weinhold [29, 30], las propiedades físicas de varios sistemas termodinámicos bidimensionales [31, 32, 33, 34, 35], y la estructura Riemanniana asociada [36, 37, 38]. Recordemos que Ruppeiner introdujo una métrica la cual es equivalente a la de Weinhold mediante una transformación conforme. Ambas aproximaciones han sido materia de análisis separados desde 1970 aunque la pregunta sobre su relación permanece abierta.

Existe un nuevo enfoque el cual muestra que las dos aproximaciones anteriores pueden ser unificadas en una sola usando simplemente consideraciones matemáticas; ésta es llamada *Geometrotermodinámica*. La idea es simple. En el espacio fase primero se considera una métrica arbitraria la cual, por definición del *pullback*, induce una métrica sobre el espacio de estados de equilibrio. Después se derivan las condiciones para que estas métricas sean invariantes con respecto a transformaciones de Legendre arbitrarias (parciales y totales), haciendo que la estructura de contacto sea compatible con la estructura Riemanniana. La Geometrotermodinámica es una aproximación unificadora la

cual permite tratar a la termodinámica en un lenguaje geométrico ya sea a nivel del espacio fase o en el espacio de estados de equilibrio. El primer intento hacia una formulación de la Geometrotermodinámica fue presentada por Quevedo [39] donde la conexión, torsión, y curvatura de la 1-forma fundamental de Gibbs fueron usadas para construir una geometría para estados de equilibrio.

## 2.1. Estructura de contacto

En esta sección se presenta la estructura geométrica principal, la cual es necesaria para la formulación de la Geometrotermodinámica. El primer paso para introducir el lenguaje de la geometría diferencial en termodinámica es la definición del *espacio fase termodinámico*  $\mathcal{T}$  de dimensión  $(2n + 1)$ . A éste se le puede asignar coordenadas dadas por el conjunto  $Z^A = \{\Phi, E^a, I^a\}$ , donde  $\Phi$  es el potencial termodinámico,  $I^a$  y  $E^a$  denotan las variables intensivas y extensivas, respectivamente. Aquí se adopta la convención  $A = 0, \dots, 2n$  y  $a = 1, \dots, n$  tal que  $\Phi = Z^0$ ,  $E^a = Z^a$  y  $I^a = Z^{n+a}$ . Además, se introduce la 1-forma fundamental de Gibbs,

$$\Theta_G = d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b, \quad \delta_{ab} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1). \quad (1)$$

El par  $(\mathcal{T}, \Theta_G)$  es llamada una variedad de contacto [26] si  $\mathcal{T}$  es diferenciable y  $\Theta_G$  satisface la condición  $\Theta_G \wedge (d\Theta_G)^n \neq 0$  que establece que se pueden definir elementos de volumen diferentes de cero. Considere ahora el espacio  $n$ -dimensional  $\mathcal{E}$  cuyas coordenadas son  $E^a$ . Ésto puede ser realizado mediante la definición del mapeo suave  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$ ,

$$\varphi : (E^a) \mapsto (\Phi, E^a, I^a), \quad (2)$$

con  $\Phi = \Phi(E^a)$ . Definimos el *espacio de estados de equilibrio termodinámico*  $\mathcal{E}$  como el subespacio de  $\mathcal{T}$  dado por el mapeo  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$  para el cual la condición,

$$\varphi^*(\Theta_G) = \varphi^*(d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b) = 0, \quad (3)$$

se mantiene, donde  $\varphi^*$  representa el pullback. Esto implica la relación,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E^a} = \delta_{ab} I^b, \quad (4)$$

que es la condición estandar de equilibrio termodinámico o condición de dualidad. Nótese que las variables intensivas son duales a las extensivas. Consecuentemente, sobre el espacio de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$ , la condición (3) implica a la *Primera ley de la termodinámica*,

$$d\Phi - \delta_{ab}I^a dE^b = 0. \quad (5)$$

Para distinguir un sistema termodinámico de otro en el espacio de estados de equilibrio, uno puede especificar la ecuación fundamental [40] la cual, en la representación usada aquí, es contenida en el mapeo (2) mediante la relación  $\Phi = \Phi(E^a)$ . Esta construcción debe ser complementada con la *Segunda ley de la termodinámica*,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^a \partial E^b} \geq 0, \quad (6)$$

que es también conocida como la condición de convexidad [41, 42]. El potencial termodinámico debe satisfacer la condición de homogeneidad  $\Phi(\lambda E^a) = \lambda^\beta \Phi(E^a)$  para parámetros constantes  $\lambda$  y  $\beta$ . Diferenciando esta condición de homogeneidad respecto de  $\lambda$  tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial(\lambda E^a)} \frac{\partial(\lambda E^a)}{\partial \lambda} &= \beta \lambda^{\beta-1} \Phi(E^a), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial(\lambda E^a)} E^a &= \beta \lambda^{\beta-1} \Phi(E^a), \end{aligned}$$

si evaluamos el resultado en  $\lambda = 1$  y utilizamos la condición de equilibrio termodinámico (4), se obtiene una expresión que se transforma en la identidad de Euler,

$$\beta \Phi(E^a) = \delta_{ab} I^b E^a. \quad (7)$$

Calculando la derivada exterior de la identidad de Euler,

$$\beta d \wedge \Phi = \delta_{ab} (d \wedge I^b E^a + I^b d \wedge E^a),$$

y usando (5),

$$\beta \delta_{ab} I^a dE^b = \delta_{ab} dI^b E^a + \delta_{ab} I^b dE^a,$$

se obtiene la relación generalizada Gibbs-Duhem,

$$(1 - \beta) \delta_{ab} I^a dE^b + \delta_{ab} E^a dI^b = 0. \quad (8)$$

La expresión clásica para la identidad de Euler y para la relación de Gibbs-Duhem son obtenidas de esta última ecuación fijando el valor  $\beta = 1$ .

## 2.2. Invariancia de Legendre

Las transformaciones de Legendre son un caso especial de las transformaciones de contacto que deja invariante la estructura de contacto de  $\mathcal{T}$ . En términos físicos, la invariancia de Legendre significa que las propiedades termodinámicas de un sistema son independientes del potencial termodinámico usado para describirlo. Si nos permitimos considerar una transformación parcial de Legendre [43],

$$\{Z^A\} \rightarrow \{\tilde{Z}^A\} = \{\tilde{\Phi}, \tilde{E}^a, \tilde{I}^a\}, \quad (9)$$

$$\Phi = \tilde{\Phi} - \delta_{kl} \tilde{E}^k \tilde{I}^l, \quad E^i = -\tilde{I}^i, \quad E^j = \tilde{E}^j, \quad I^i = \tilde{E}^i, \quad I^j = \tilde{I}^j, \quad (10)$$

donde  $i \cup j$  es cualquier descomposición disjunta del conjunto de índices  $\{1, \dots, n\}$ , y  $k, l = 1, \dots, i$ . En particular, para  $i = \{1, \dots, n\}$  y  $i = \emptyset$  obtenemos la transformación total de Legendre y la identidad, respectivamente. Por simplicidad, en las discusiones posteriores se considerará únicamente la transformación total de Legendre. Los resultados principales no serán afectados por esta simplificación.

La invariancia de la estructura de contacto introducida anteriormente se vuelve evidente por el hecho de que en las nuevas coordenadas  $\{\tilde{Z}^a\}$  la 1-forma de Gibbs, ecuación (1), tiene la misma estructura,

$$\begin{aligned} \Theta_G &= d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b \\ &= d(\tilde{\Phi} - \delta_{kl} \tilde{E}^k \tilde{I}^l) - I_i dE^i - I_j dE^j \\ &= d\tilde{\Phi} - \delta_{kl} d\tilde{E}^k \tilde{I}^l - \delta_{kl} \tilde{E}^k d\tilde{I}^l - \delta_{ik} I^k dE^i - \delta_{jk} I^k dE^j \\ &= d\tilde{\Phi} - \delta_{kl} d\tilde{E}^k \tilde{I}^l - \delta_{kl} \tilde{E}^k d\tilde{I}^l - \delta_{ik} \tilde{E}^k (-d\tilde{I}^i) - \delta_{jk} \tilde{I}^k d\tilde{E}^j \\ &= d\tilde{\Phi} - \delta_{kl} d\tilde{E}^k \tilde{I}^l - \delta_{jk} \tilde{I}^k d\tilde{E}^j \\ &= d\tilde{\Phi} - \delta_{ab} \tilde{I}^a d\tilde{E}^b \\ &= \tilde{\Theta}_G \end{aligned}$$

Un cálculo directo prueba también la invariancia de la condición de dualidad (4), la de la primera y segunda ley de la termodinámica, ecuaciones (5) y (6), respectivamente. Nótese que la transformación de Legendre intercambia el carácter de las variables extensivas e intensivas. Por esta razón, para

establecer la validez de la identidad de Euler y, consecuentemente, la relación de Gibbs-Duhem en las nuevas variables, es necesario identificar primero las variables extensivas  $\tilde{E}^a$  y la ecuación fundamental  $\Phi = \Phi(\tilde{E}^a)$ . Luego, la invariancia de Legendre se sigue del hecho de que la condición de dualidad (4) y la primera ley, ecuación (5), son invariantes.

## 2.2. Estructura métrica

Consideremos una métrica  $G$  no degenerada, es decir, una métrica invertible con  $\det(G) \neq 0$  y que induce una estructura Riemanniana en el espacio fase termodiámico  $\mathcal{T}$ . Ahora es posible formular el enunciado principal de la Geometrotermodinámica. Un sistema termodinámico es descrito por una métrica  $G$  que es llamada *métrica termodinámica* si satisface las condiciones siguientes:

1.  $G$  es invariante respecto a transformaciones que no modifican la estructura de contacto de  $\mathcal{T}$ .
2.  $G$  induce en el espacio de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$  una métrica invariante  $g$  por definición del mapeo,

$$\varphi^*(G) = g. \quad (11)$$

La idea detrás de la primera condición es que una métrica termodinámica debe describir un sistema termodinámico, independientemente de las coordenadas usadas en  $\mathcal{T}$ . Esta condición es necesaria a fin de que la geometrotermodinámica sea capaz de describir propiedades termodinámicas en términos de conceptos geométricos en una manera tal que deba ser invariante con respecto a cambios del potencial termodinámico. La segunda condición establece la relación entre las geometrías en  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{E}$ , aplicando las mismas herramientas que son usadas para definir estados de equilibrio en la aproximación de la estructura de contacto.

Es claro que la invariancia de Legendre de  $g$  se sigue de la invariancia de  $G$ , si ellas están relacionadas por la ecuación (11). De hecho, si se denota por  $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{Z}^A)$  la métrica obtenida de  $G$  por la aplicación de la transformación de Legendre, ecuación (10), y se define  $G'(\tilde{Z}^A) = G(Z^A = \tilde{Z}^A)$ , entonces la invariancia de Legendre de  $G$  puede ser alcanzada demandando que  $\tilde{G}(\tilde{Z}^A) = G'(\tilde{Z}^A)$ . Además, dado que  $g = \varphi^*(G)$  y  $g' = \tilde{\varphi}^*(G')$  con  $\tilde{\varphi}$  definida como en



la ecuación (2) con  $Z^A = \tilde{Z}^A$ , entonces se tiene que  $\tilde{g} = \tilde{\varphi}^*(\tilde{G}) = \tilde{\varphi}^*(G') = g'$ , es decir,  $g$  es una métrica invariante.

Bajo una transformación total de Legendre,  $Z^A \rightarrow \tilde{Z}^A$ , como la dada por la ecuación (10), las componentes de la métrica  $G$  se transforman como [2],

$$G_{AB} \rightarrow \tilde{G}_{AB} = \frac{\partial Z^C}{\partial \tilde{Z}^A} \frac{\partial Z^D}{\partial \tilde{Z}^B} G_{CD}, \quad (12)$$

con la matriz de transformación,

$$\frac{\partial Z^A}{\partial \tilde{Z}^B} = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z}^{n+1} & -\tilde{Z}^{n+2} & \dots & -\tilde{Z}^{2n} & -\tilde{Z}^1 & -\tilde{Z}^2 & \dots & -\tilde{Z}^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

donde los índices  $A$  y  $B$  representan filas y columnas, respectivamente. Dado que el determinante de esta matriz es igual a 1, la transformación inversa existe, y determina el difeomorfismo correspondiente a la transformación total de Legendre.

Para garantizar que la métrica  $G$  en  $\mathcal{T}$  es invariante de Legendre, es suficiente demandar que cada una de sus componentes preserve su dependencia funcional después de una transformación de Legendre. Sea  $\tilde{G}_{AB}(\tilde{Z}^C) = G_{AB}(Z^C \rightarrow \tilde{Z}^C)$  que representa las componentes de la métrica  $\tilde{G}$  obtenida después de una transformación de Legendre (10) de la métrica  $G$ , y sea  $G'_{AB}(\tilde{Z}^C) = G_{AB}(Z^C = \tilde{Z}^C)$  las componentes de la métrica  $G'$  obtenida por el remplazo de cada coordenada  $Z^C$  por su contraparte  $\tilde{Z}^C$  en la métrica  $G$  (no se ha aplicado transformación de Legendre). Entonces, si se demanda que la condición,

$$\tilde{G}_{AB}(\tilde{Z}^C) = G'_{AB}(\tilde{Z}^C) \quad (14)$$

se mantenga para cada valor de  $A$  y  $B$ , se garantiza que la métrica  $G$  en  $\mathcal{T}$  así como  $g$  en  $\mathcal{E}$  sean invariantes de Legendre.

Una cuestión importante a tratar cuando se imponen condiciones de invariancia en métricas es una relacionada a la existencia de soluciones. En

nuestro caso, el punto es que sí existen métricas que satisfacen la condición de invariancia bajo la transformación de Legendre como ha sido dada, por el momento, en la ecuación (14). De hecho, es fácil construir una métrica invariante  $(2n + 1)$ -dimensional definiendo la métrica de Gibbs como el “cuadrado” de la 1-forma de Gibbs, ecuación (1), es decir,

$$G = \Theta_G \otimes \Theta_G = \Theta_G^2 = d\Phi^2 - 2\delta_{ab}I^a dE^b d\Phi + \delta_{ab}\delta_{cd}I^a I^c dE^b dE^d. \quad (15)$$

La invariancia de esta métrica se sigue de la invariancia de la 1-forma de Gibbs mostrada en la sección “2.2”. Dado que la métrica de Gibbs no posee componentes proporcionales a  $dI^a$ , su determinante es cero. Sin embargo, contiene una métrica  $(n + 1)$ -dimensional en el sector  $\{d\Phi, dE^a\}$  con determinante distinto de cero. A pesar de su degeneración, más adelante se usará la métrica de Gibbs para construir ejemplos explícitos de métricas 5-dimensionales no degeneradas que satisfacen la condición de invariancia de Legendre.

Recapitulando, decimos que el ingrediente principal de la GTD es una estructura métrica no degenerada  $g$  en  $\mathcal{E}$  de donde se demanda ser compatible con la métrica  $G$  en  $\mathcal{T}$ . Como se mencionó anteriormente, esto se obtiene aplicando el pullback  $\varphi^*$  en tal forma que  $g$  es inducida de manera natural por  $G$  mediante  $\varphi^*(G) = g$ . Como se ha demostrado con anterioridad, una métrica  $G$  invariante de Legendre induce una métrica  $g$  invariante de Legendre. De forma inversa, una métrica  $g$  en  $\mathcal{E}$  es invariante de Legendre solamente si es inducida por una métrica  $G$  invariante de Legendre en  $\mathcal{T}$ . Es en este sentido que se puede mostrar que las métricas de Weinhold y Ruppeiner, que están definidas en  $\mathcal{E}$ , no son invariantes de Legendre. Sin embargo, hay un vasto número de métricas en  $\mathcal{T}$  que satisfacen la condición de invariancia de Legendre. En particular, la estructura métrica,

$$G = \Theta_G^2 + (\delta_{ab}E^a I^b)(\delta_{cd}dE^c dI^d), \quad (16)$$

donde  $\delta_{ij}$  son los elementos de la matriz diagonal con entradas unitarias y  $\Theta_G$  es la 1-forma de Gibbs. Esta métrica es invariante de Legendre e induce sobre  $\mathcal{E}$  la métrica,

$$g = \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b. \quad (17)$$

Una importante característica de la métrica  $g$  es que para el gas ideal la curvatura es cero (geometría plana) aunque no lo es para el gas de van

der Waals, ya que las singularidades de curvatura se encuentran en los puntos críticos termodinámicos [2]. Esta es una indicación de que la curvatura pueden ser usada como una medida, invariante de Legendre, de la interacción termodinámica. Aunque esta propiedad es compartida por otras métricas en  $\mathcal{E}$ , la característica principal de (14) es su simplicidad.

Finalmente, mencionaremos que la geometría de la métrica  $g = \varphi^*(G)$  es invariante con respecto a un difeomorfismo arbitrario realizado en  $\mathcal{E}$ . Esto puede ser mostrado considerando explícitamente las componente de  $g$  en términos de las componentes de  $G$ ,

$$g_{ab} = \frac{\partial Z^A}{\partial E^b} \frac{\partial Z^B}{\partial E^b} G_{AD} = Z^A_{,a} Z^B_{,b} G_{AB}.$$

Si denotamos por  $\{\tilde{Z}^A\}$  las coordenadas transformadas en  $\mathcal{T}$ , y aplicamos una transformación arbitraria en  $G$ ,

$$\tilde{G}_{AB} = \frac{\partial Z^C}{\partial \tilde{Z}^A} \frac{\partial Z^D}{\partial \tilde{Z}^B} G_{CD},$$

se induce en  $\mathcal{E}$  la métrica,

$$\tilde{g}_{ab} = \frac{\partial \tilde{Z}^A}{\partial \tilde{E}^a} \frac{\partial \tilde{Z}^B}{\partial \tilde{E}^b} \tilde{G}_{CD},$$

que corresponde a una transformación de coordenadas de  $g$ . Es fácil observar que estas métricas están relacionadas por la ley de transformación estándar,

$$\tilde{g}_{ab} = \frac{\partial E^c}{\partial \tilde{E}^a} \frac{\partial E^d}{\partial \tilde{E}^b} g_{CD}.$$

Esta importante propiedad permite considerar principios variacionales en GTD que imponen condiciones sobre las estructuras métricas.

## 2.3. Potenciales termodinámicos para los hoyos negros

En los capítulos “3” y “4” estudiaremos de forma detallada la GTD de hoyos negros. De forma preliminar, en esta sección resumimos algunas propiedades de la termodinámica de hoyos negros y su conexión con GTD.

Los hoyos negros en la teoría de Einstein-Maxwell son completamente caracterizados por la masa  $M$ , el momento angular  $J$  y la carga eléctrica  $Q$ . Como se trató en la sección “1.2”, los hoyos negros poseen propiedades termodinámicas especificadas por la temperatura de Hawking  $T$ , proporcional a la gravedad superficial en el horizonte, y por la entropía  $S$  que es proporcional al área de horizonte [1, 6]. Todos estos parámetros son relacionados por la Primera Ley de la Termodinámica de hoyos negros,

$$dM = TdS + \Omega_H dJ + \phi dQ \quad (18)$$

donde  $\Omega_H$  es la velocidad angular en el horizonte y  $\phi$  el potencial eléctrico. Para una ecuación fundamental dada,  $M = M(S, J, Q)$ , se tienen las condiciones para el equilibrio termodinámico,

$$T = \frac{\partial M}{\partial S} \quad , \quad \Omega_H = \frac{\partial M}{\partial J} \quad , \quad \phi = \frac{\partial M}{\partial Q}. \quad (19)$$

De esta manera, el espacio fase  $\mathcal{T}$  para la termodinámica de hoyos negros es 7-dimensional con coordenadas  $Z^A = \{M, S, J, Q, T, \Omega_H, \phi\}$ . La 1-forma fundamental de Gibbs está dada por,

$$\Theta_M = dM - TdS - \Omega_H dJ - \phi dQ. \quad (20)$$

El espacio de estados de equilibrio termodinámico  $\mathcal{E}$  es 3-dimensional con coordenadas  $E^a = \{S, J, Q\}$  y está definido por el mapeo,

$$\varphi : \{S, J, Q\} \longmapsto \left\{ M(S, J, Q), S, J, Q, \frac{\partial M}{\partial S}, \frac{\partial M}{\partial J}, \frac{\partial M}{\partial Q} \right\} \quad (21)$$

la masa  $M$  toma el papel del potencial termodinámico que depende de las variables extensivas  $S$ ,  $J$  y  $Q$ . Sin embargo, las transformaciones de Legendre (10) nos permiten introducir un conjunto adicional de siete potenciales termodinámicos los cuales dependen de las diferentes combinaciones de las variables intensivas y extensivas. Quitándo las tildes a las nuevas variables,

el conjunto completo de dichos potenciales pueden ser escritos como [3],

$$\begin{aligned}
M &= M(S, J, Q), \\
M_1 &= M_1(T, J, Q) = M - TS, \\
M_2 &= M_2(S, \Omega_H, Q) = M - \Omega_H J, \\
M_3 &= M_3(S, J, \phi) = M - \phi Q, \\
M_4 &= M_4(T, \Omega_H, Q) = M - TS - \Omega_H J, \\
M_5 &= M_5(T, J, \phi) = M - TS - \phi Q, \\
M_6 &= M_6(S, \Omega_H, \phi) = M - \Omega_H J - \phi Q, \\
M_7 &= M_7(T, \Omega_H, \phi) = M - TS - \Omega_H J - \phi Q.
\end{aligned} \tag{22}$$

Hay que tener en cuenta que el mapeo  $\varphi$  puede ser definido en cada caso, independientemente del potencial termodinámico que se escoja. Por otra parte, puesto que hemos considerado solamente estructuras invariantes de Legendre en  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{E}$ , las características de la geometría fundamental para un sistema termodinámico dado será independiente del potencial termodinámico, lo cual está de acuerdo con la termodinámica clásica. Consecuentemente, en la representación de la masa de la termodinámica de los hoyos negros descrita anteriormente, se tiene la libertad de elegir cualquiera de los potenciales  $M, M_1, \dots, M_7$ , sin afectar las propiedades termodinámicas de los hoyos negros.

Se debe enfatizar que en el contexto de la GTD, es también posible considerar la representación de la entropía. En este caso, la 1-forma de Gibbs del espacio fase puede escogerse como,

$$\Theta_S = dS - \frac{1}{T}dM + \frac{\Omega_H}{T}dJ + \frac{\phi}{T}dQ. \tag{23}$$

El espacio de estados de equilibrio es entonces definido por el mapeo suave,

$$\varphi_S : \{M, J, Q\} \mapsto \{S(M, J, Q), M, J, Q, T(M, J, Q), \Omega_H(M, J, Q), \phi(M, J, Q)\} \tag{24}$$

con

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad \frac{\Omega_H}{T} = -\frac{\partial S}{\partial J}, \quad \frac{\phi}{T} = -\frac{\partial S}{\partial Q} \tag{25}$$

tal que  $\varphi_S^*(\Theta_S) = 0$  conduce a la primera ley. En la representación de la entropía la ecuación fundamental es ahora dada por  $S = S(M, J, Q)$ , y la segunda ley de la termodinámica corresponde a la condición de concavidad de

la función entrópica. Notemos que representaciones adicionales pueden ser fácilmente analizadas en el contexto de la GTD siendo el mapeo suave  $\varphi$  el único objeto necesario en cada caso, el cual garantiza la existencia de un espacio de estados de equilibrio bien definido. Claramente, las propiedades termodinámicas de los hoyos negros deben ser independientes de la representación.

Ahora consideremos estructuras métricas en  $\mathcal{E}$ . Para los hoyos negros, la métrica de Weinhold  $g^W$  está definida como el Hessiano en la representación de la masa mientras que la métrica de Ruppeiner  $g^R$  está dada como Hessiano en la representación de la entropía relacionándose mediante  $g^W = Tg^R$ . Como ha mostrado el trabajo realizado por Quevedo [2], el problema principal de las métricas de Weinhold y Ruppeiner es que no son invariantes de Legendre. En GTD es posible derivar, en principio, un número infinito de métricas que preserven la invariancia de Legendre; no obstante, de acuerdo con la ecuación (17) de los fundamentos de la GTD, la manera más simple de alcanzar la invariancia de Legendre para  $g^W$  es aplicando una transformación conforme, con el potencial termodinámico como el factor conforme. En consecuencia, la generalización más simple de la invariancia de Legendre para la métrica de Weinhold puede ser escrita en componentes como,

$$g = Mg^W = M \frac{\partial^2 M}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b, \quad (26)$$

donde  $E^a = \{S, J, Q\}$ . Un procedimiento similar puede ser aplicado para generalizar la métrica de Ruppeiner,

$$g = Mg^W = MTg^R = -M \left( \frac{\partial S}{\partial M} \right)^{-1} \frac{\partial^2 S}{\partial F^a \partial F^b} dF^a dF^b, \quad (27)$$

con  $F^a = \{M, J, Q\}$ . Usando la representación de la masa en el espacio fase  $\mathcal{T}$ , la estructura métrica correspondiente generada puede ser escrita, utilizando la ecuación (16), como,

$$\begin{aligned} G &= \Theta_G^2 + (\delta_{ab} E^a I^b)(\delta_{cd} dE^c dI^d), \\ G &= (dM - TdS - \Omega_H dJ - \phi dQ)^2 \\ &+ (TS + \Omega_H J + \phi Q)(dTdS + d\Omega_H dJ + d\phi dQ). \end{aligned} \quad (28)$$

Nótese que para obtener (26) es necesario utilizar la identidad de Euler para el factor conforme frente del segundo término en (28), i.e.,  $\beta M =$

$TS + \Omega_H J + \phi Q$ . De esta manera,  $g$  como es dada en (26) está determinada solamente hasta una constante multiplicativa  $\beta$  que, obviamente, no afecta su geometría.

Aunque estas estructuras métricas son generalizaciones invariantes de Legendre de las métricas de Weinhold y Ruppeiner, se demostró [3] que no sirven para describir geoméricamente la termodinámica de hoyos negros debido a que en el caso del hoyo negro de Kerr la curvatura termodinámica es cero y, por ende, no reproduce la estructura de transiciones de fase de este hoyo negro.

En los siguientes capítulos analizaremos una ligera generalización de (16) que genera métricas invariantes de Legendre que pueden describir correctamente la termodinámica de todos los hoyos negros conocidos en la teoría de Einstein-Maxwell.

# Bibliografía

- [1] J. D. Bekenstein, *Black Holes and entropy*, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).
- [2] H. Quevedo, *Geometrothermodynamics*, J. Math. Phys. **48**, 013506 (2007).
- [3] H. Quevedo, *Geometrothermodynamics of black holes*, Gen. Rel. Grav. (2008) in press.
- [4] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003).
- [5] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *The four laws of black hole mechanics*, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [6] S. W. Hawking, *Particle creation by black Holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [7] P. C. Davies, *Thermodynamics of black Holes*, Rep. Prog. Phys. **41**, 1313 (1978).
- [8] B. Carter, *Black holes* ed. DeWitt and DeWitt (London: Gordon and Breach).
- [9] L. Smarr, *Mass formula for Kerr black holes*, Phys. Rev. Lett. **70**, 71 (1973).
- [10] S. W. Hawking, *Black Holes*, ed. DeWitt and DeWitt (London: Gordon and Breach) pp1-56.
- [11] R. Penrose, *Nuovo Cim.* **1** *Special No 252*.



- [12] PCW Davies, *The physics of Time Asymmetry* (Surrey University Press/University of California Press), 1974.
- [13] SW Hawking Commun. Math. Phys. **43** 199, 1975.
- [14] L. M, Sokolowski and P. Mazur, *Second-order phase transitions in black-hole thermodynamics*, J. Phys. A **13**, 1113 (1980).
- [15] Y. K. Lau, *On the second-order phase transition of a Reissner-Nordstrom black hole*, Phys. Lett. A **186**, 41 (1994).
- [16] Y. K. Lau, *Thermodynamics critical fluctuation ok Kerr-Newman black hole*, Phys. Rev. Lett. A **188**, 245 (1994).
- [17] J. P Muniain and D. Piriz, *Critical behavior of dimensionally continued black holes*, Phys. Rev. D **53**, 816 (1996).
- [18] C. O. Lousto, *The fourth law of black hole thermodynamics*, Nuc. Phys. B **410**, 155 (1993).
- [19] C. O. Lousto, *Emergence of an effective two-dimensional quantum description from the study of critical phenomena in black holes*, Phys. Rev. D **51**, 1733 (1995).
- [20] F. Weinhold, *Metric Geometry of equilibrium thermodynamics I, II, III, IV, V*, J. Chem. Phys. **63**, 2479, 2484, 2488, 2496 (1975); **65**, 558 (1976).
- [21] G. Ruppeiner, *Thermodynamics: A Riemannian geometric model*, Phys. Rev. A **20**, 1608 (1979).
- [22] J. Aman, I. Bengtsson, and N. Pidokrajt, *Geometry of black hole thermodynamics*, Gen. Rel. Grav. **35**, 1733 (2003).
- [23] J. Shen, R. Cai, B. Wang, and R. Su, *Thermodynamics geometry and critical behavior of black holes*, (2005) arXiv: gr-qc/0512035.
- [24] Gibbs, *Thermodynamics* (Yale University Press, New Haven, CT, 1948), Vol. 1.
- [25] Charatheodory, *Gesammelte Mathematische Werke* (Teubner Verlag, Munich, 1995), Vol 2.

- [26] R. Hermann, *Geometry, Physics and Systems* (Dekker, New York, 1973).
- [27] R. Mrugala, Rep. Math. Phys. **14**, 419 (1978).
- [28] R. Mrugala, Rep. Math. Phys. **21**, 197 (1985).
- [29] T. Feldman, B. Andersen, A. Qui, and P. Salamon, Chem. Phys. **83**, 5849 (1985).
- [30] R. Gilmore, J. Chem. Phys. **75**, 5964 (1981).
- [31] J. Nulton and P. Salamon, J. Phys. Rev. A **31**, 2520 (1985).
- [32] M. Santoro, J. Chem. Phys. **121**, 2932 (2004).
- [33] M. Santoro, Chem. Phys. **310**, 269 (2005).
- [34] M. Santoro, Chem. Phys. **313**, 331 (2005).
- [35] M. Santoro and S. Preston, e-print math-ph/0505010.
- [36] G. Ruppeiner, Phys. Rev. A **20**, 1608 (1979).
- [37] G. F. Torres del Castillo and M. Montesinos-Velasquez, Rev. Mex. Fis. **39**, 194 (1993).
- [38] G. Hernandez and E. A. Lacomba, Diff. Geo. Applic. **8**, 205 (1998).
- [39] H. Quevedo and R. D. Zárate, Rev. Mex. Fis. **49**, 125 (2003).
- [40] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostat-ic*(Wiley, New York, 1985).
- [41] W. L. Burke, *Applied differential Geometry* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1979).
- [42] R. B. Israel, *Convexity in the Theory of Lattice Gases*(Princeton University Press, Princeton, NJ, 1979).
- [43] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of classical Mechanics*(Springer, New York, 1980).
- [44] G. Ruppeiner, *Riemannian geometry in thermodynamics fluctuation theory*, Rev. Mod. Phys. **67**, 605 (1995); **68**, 313 (1996).

- [45] A. Curir, *General Relativity Gravity*, **13**, 417 (1981).
- [46] D. Pavón, *Phys. Rev. D* **43**, 2495 (1991).
- [47] J. Katz, I. Okamoto and O. Kaburaki, *Classical Quantum Gravity*, **10**, 1323 (1993).
- [48] O. Kaburaki, I. Okamoto and J. Katz, *Phys. Rev. D* **47**, 2234 (1993).

# Capítulo 3

## Hoyos negros con 2 grados de libertad termodinámicos

Los resultados obtenidos en las investigaciones de la geometría aplicada a la termodinámica han sido en dos diferentes aproximaciones. La primera de ellas consiste en introducir estructuras métricas en el espacio de estados de equilibrio termodinámico  $\mathcal{E}$ , mientras que la segunda usa la estructura de contacto del llamado espacio fase termodinámico  $\mathcal{T}$ .

Respecto de la primera aproximación, en 1979 George Ruppeiner propuso una manera geométrica de estudiar termodinámica de sistemas en equilibrio. En su teoría ciertos aspectos de la termodinámica y de la mecánica estadística del sistema a considerar están ligados a un simple objeto geométrico: la métrica que describe su espacio de estado termodinámico. Matemáticamente, la geometría de Ruppeiner es un tipo particular de información geométrica.

No obstante, Weinhold introduce *ad hoc* en  $\mathcal{E}$  una métrica originalmente definida como el Hessiano de la energía termodinámica interna (masa). Aunque la geometría de Weinhold no tiene el mismo significado físico que la geometría de Ruppeiner, se puede utilizar para simplificar cálculos si esta última se dificulta en el manejo.

La geometría de Ruppeiner ha sido investigada para varios sistemas termodinámicos tales como el gas ideal (clásico y cuántico), el modelo unidimensional de Ising, el gas ideal multicomponente, el gas de van der Waals, etc. Se ha mostrado que la métrica de Ruppeiner contiene información importante sobre la estructura de transición de fase de sistemas termodinámicos, indicando la localización de puntos críticos y transiciones de fase en aque-

llas superficies particulares donde la curvatura escalar diverge. En el caso de sistemas sin interacción del tipo mecánico estadístico (gas ideal), no hay curvatura escalar y consecuentemente la geometría de espacio bidimensional asociado es plana. Estos resultados han sido revisados en [44]. Debido a la equivalencia conforme, en algunos casos la métrica de Weinhold contiene información similar acerca de la estructura de las transiciones de fase.

Esta primera aproximación ha encontrado también aplicación en el contexto de termodinámica de hoyos negros. La siguiente tabla es un resumen de los resultados obtenidos en estos trabajos. De ahí se deriva claramente la incompatibilidad de los resultados debido a que se obtienen geometrías completamente diferentes para un mismo sistema termodinámico.

Hoyo Negro	Geometría Ruppeiner	Geometría Weinhold
Reissner-Nordström	Plana	Curvada
Reissner-Nordström AdS	Curvada	Curvada
Kerr	Curvada	Plana
Kerr AdS	Curvada	Curvada
Kerr-Newman	Curvada	Curvada

**Tabla 1.** La geometría termodinámica en el espacio-tiempo de 4 dimensiones.

La segunda aproximación desarrollada especialmente por Hermann y Mrugała usa la estructura de contacto natural del espacio fase  $\mathcal{T}$ . Las variables termodinámicas intensivas y extensivas son tomadas junto con el potencial termodinámico para constituir coordenadas en  $\mathcal{T}$ . Un subespacio de  $\mathcal{T}$  es el espacio de estados de equilibrio termodinámico  $\mathcal{E}$ , definido por el mapeo suave  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$  el cual, en particular, requiere la especificación de la ecuación fundamental del correspondiente sistema termodinámico. Esto significa que cada sistema posee su propio espacio  $\mathcal{E}$ . Por otra parte, en  $\mathcal{T}$  siempre es posible introducir la 1-forma fundamental de Gibbs la cual, cuando es proyectada en  $\mathcal{E}$  por el pullback de  $\varphi$ , genera la primera ley de la termodinámica y las condiciones para el equilibrio termodinámico en el lenguaje de las formas diferenciales. Además de la estructura de contacto, es también posible considerar estructuras Riemannianas sobre el espacio fase termodinámico.

La GTD fué recientemente desarrollada como un formalismo que unifica la estructura de contacto en  $\mathcal{T}$  con la estructura métrica en  $\mathcal{E}$  de una manera consistente considerando solamente la estructura métrica invariante de Legendre sobre  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{E}$ . Esta última propiedad es importante para garantizar

que las características termodinámicas de un sistema no dependan del potencial termodinámico empleado para su descripción. La primera aplicación de GTD fué reproducir geoméricamente los comportamientos críticos del gas de van der Waals y los comportamientos no críticos del gas ideal al emplear una simple métrica en el contexto de este formalismo dejando resultados concretos invariantes con respecto a las transformaciones de Legendre.

En las secciones siguientes se presenta una nueva aplicación de GTD en la relatividad general, a saber, se reformula la termodinámica de los hoyos negros y se trata de reproducir la estructura de la transición de fase de los hoyos negros usando una de las estructuras métricas más simples, ecuación (2.16). Esta elección ha permitido encontrar una generalización de las métricas de Weinhold y Ruppeiner en (2.26) y (2.27) respectivamente. En el caso de GTD en 2-dimensiones, se aplicaron estas métricas invariantes de Legendre a los hoyos negros obteniendo resultados consistentes.

### 3.1. Geometrotermodinámica de Hoyos Negros

El punto de partida de la GTD, como se trato en el capítulo 2, es el espacio fase termodinámico  $\mathcal{T}$  que en el caso de los hoyos negros de Einstein-Maxwell puede ser definido como un espacio 7-dimensional con coordenadas  $Z^A = \{M, S, Q, J, T, \phi, \Omega_H\}$ ,  $A = 0, \dots, 6$ . En el espacio cotangente  $\mathcal{T}^*$ , se introdujo la 1-forma fundamental (2.20),

$$\Theta_M = dM - TdS - \phi dQ - \Omega_H dJ$$

que satisface la condición  $\Theta_M \wedge (d\Theta_M)^3 \neq 0$ . Además, en  $\mathcal{T}$  introdujimos una métrica  $G$  no degenerada. El triplete  $(\mathcal{T}, \Theta_M, G)$  se dice formar una variedad de contacto Riemanniana. Sea  $\mathcal{E}$  un espacio 3-dimensional de  $\mathcal{T}$  con coordenadas  $E^a = \{S, Q, J\}$ ,  $a = 1, 2, 3$ , definido por el mapeo suave  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$ . El subespacio  $\mathcal{E}$  es llamado el espacio de estados de equilibrio si  $\varphi_M^*(\Theta_M) = 0$ , donde  $\varphi_M^*$  es el pullback inducido por  $\varphi_M$ . Además, una estructura métrica  $g$  es naturalmente inducida sobre  $\mathcal{E}$  mediante la aplicación del pullback sobre la métrica  $G$  de  $\mathcal{T}$ , es decir,  $g = \varphi_M^*(G)$ . Es claro que la condición  $\varphi_M^*(\Theta_M) = 0$  conduce inmediatamente a la Primera Ley de la termodinámica de los hoyos negros dada en (2.18). Ello también implica la

existencia de la ecuación fundamental  $M = M(S, Q, J)$  y las condiciones del equilibrio termodinámico dadas en (2.19).

La invariancia de Legendre es un ingrediente importante de la GTD. Nos permite cambiar el potencial termodinámico sin afectar los resultados. Si denotamos las variables termodinámicas intensivas como  $I^a = \{T, \phi, \Omega_H\}$ , entonces una transformación total está definida por [43],

$$\{M, E^a, I^a\} \rightarrow \{\tilde{M}, \tilde{E}^a, \tilde{I}^a\} \quad (1)$$

$$M = \tilde{M} - \delta_{ab} \tilde{E}^a \tilde{I}^b, \quad E^a = -\tilde{I}^a, \quad I^a = \tilde{E}^a. \quad (2)$$

Es fácil ver que la 1-forma fundamental  $\Theta_M$  es invariante con respecto a las transformaciones de Legendre. Para mostrarlo utilizemos la ecuación anterior y escribamos,

$$M = \tilde{M} - \tilde{E}^1 \tilde{I}^1 - \tilde{E}^2 \tilde{I}^2 - \tilde{E}^3 \tilde{I}^3 = \tilde{M} - \tilde{S} \tilde{T} - \tilde{Q} \tilde{\phi} - \tilde{J} \tilde{\Omega}_H.$$

con

$$dM = d\tilde{M} - \tilde{S} d\tilde{T} - \tilde{T} d\tilde{S} - \tilde{Q} d\tilde{\phi} - \tilde{\phi} d\tilde{Q} - \tilde{J} d\tilde{\Omega}_H - \tilde{\Omega}_H d\tilde{J}$$

y teniendo que,

$$E^1 = -\tilde{I}^1 \quad \Rightarrow \quad S = -\tilde{T} \quad \Rightarrow \quad dS = -d\tilde{T}$$

$$E^2 = -\tilde{I}^2 \quad \Rightarrow \quad Q = -\tilde{\phi} \quad \Rightarrow \quad dQ = -d\tilde{\phi}$$

$$E^3 = -\tilde{I}^3 \quad \Rightarrow \quad J = -\tilde{\Omega} \quad \Rightarrow \quad dJ = -d\tilde{\Omega}$$

además,

$$\tilde{I}^1 = \tilde{E}^1 \quad \Rightarrow \quad T = \tilde{S} \quad \Rightarrow \quad dT = d\tilde{S}$$

$$\tilde{I}^2 = \tilde{E}^2 \quad \Rightarrow \quad \phi = \tilde{Q} \quad \Rightarrow \quad d\phi = d\tilde{Q}$$

$$\tilde{I}^3 = \tilde{E}^3 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \tilde{J} \quad \Rightarrow \quad d\Omega = d\tilde{J}$$

Finalmente tenemos que,

$$\begin{aligned} \Theta_M &= dM - TdS - \phi dQ - \Omega_H dJ \\ &= [d\tilde{M} - \tilde{S}d\tilde{T} - \tilde{T}d\tilde{S} - \tilde{Q}d\tilde{\phi} - \tilde{\phi}d\tilde{Q} - \tilde{J}d\tilde{\Omega}_H - \tilde{\Omega}_H d\tilde{J}] \\ &\quad + \tilde{S}d\tilde{T} + \tilde{Q}d\tilde{\phi} + \tilde{J}d\tilde{\Omega}_H \\ &= d\tilde{M} - \tilde{T}d\tilde{S} - \tilde{\phi}d\tilde{Q} - \tilde{\Omega}_H d\tilde{J} \\ &= \tilde{\Theta}_M. \end{aligned} \quad (3)$$

Además, si demandamos que la métrica  $G$  sea invariante de Legendre, se muestra que la métrica inducida  $g = \varphi_M^*(G)$  es también invariante de Legendre. Para mostrar esta condición en la aplicación de la GTD a los hoyos negros, debemos considerar en  $\mathcal{T}$  una generalización de la métrica (2.16) de la forma,

$$G = \Theta_G^2 + (\delta_{ab}E^aI^b)(\eta_{cd}dE^c dI^d), \quad \eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1), \quad (4)$$

tal que en representación de la masa la escribimos como,

$$G = (dM - TdS - \phi dQ - \Omega_H dJ)^2 + (ST + \phi Q + \Omega J)(-dS dT + dQ d\phi + dJ d\Omega_H), \quad (5)$$

y sustituyendo las transformaciones de Legendre en esta última,

$$\begin{aligned} G &= (d\tilde{M} - \tilde{S}d\tilde{T} - \tilde{T}d\tilde{S} - \tilde{J}d\tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}d\tilde{J} - \tilde{Q}d\tilde{\phi} - \tilde{\phi}d\tilde{Q} + \tilde{S}d\tilde{T} + \tilde{J}d\tilde{\Omega} + \tilde{Q}d\tilde{\phi})^2 \\ &+ (-\tilde{T}\tilde{S} - \tilde{\Omega}\tilde{J} - \tilde{Q}d\tilde{\phi})(d\tilde{S}d\tilde{T} - d\tilde{J}d\tilde{\Omega} - d\tilde{Q}d\tilde{\phi}) \\ &= (d\tilde{M} - \tilde{T}d\tilde{S} - \tilde{\phi}d\tilde{Q} - \tilde{\Omega}d\tilde{J})^2 \\ &+ (\tilde{S}\tilde{T} + \tilde{\phi}\tilde{Q} + \tilde{\Omega}\tilde{J})(-d\tilde{S}d\tilde{T} + d\tilde{Q}d\tilde{\phi} + d\tilde{J}d\tilde{\Omega}) \\ &= \tilde{G}. \end{aligned} \quad (6)$$

Otra ventaja del uso de la GTD es que nos permite implementar fácilmente diferentes representaciones termodinámicas. La descripción anterior es llamada la representación- $M$  debido a que la ecuación fundamental está dada como  $M = M(S, Q, J)$ . No obstante, uno puede describir esta ecuación como  $S = S(M, Q, J)$ ,  $Q = Q(S, M, J)$  ó  $J = J(S, M, Q)$ , y redefinir las coordenadas en  $\mathcal{T}$  y el mapeo suave  $\varphi$  de tal manera que la condición  $\varphi^*(\Theta) = 0$  genere sobre  $\mathcal{E}$  la correspondiente ecuación fundamental en la representación- $S$ ,  $Q$  ó  $J$ , respectivamente. Se debe enfatizar, además, que los resultados obtenidos con diferentes representaciones de la misma ecuación fundamental son completamente equivalentes.

Para nuestro estudio, la representación- $S$  resulta ser la más apropiada para la descripción de la termodinámica de agujeros negros. Consideremos la 1-forma fundamental (2.23),

$$\Theta_S = dS - \frac{1}{T}dM + \frac{\phi}{T}dQ + \frac{\Omega_H}{T}dJ,$$

tal que las coordenadas de  $\mathcal{T}$  son  $Z^a = \{S, E^a, I^a\} = \{S, M, Q, J, 1/T, -\phi/T, -\Omega_H/T\}$ . El espacio de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$  se introduce con el mapeo



suave (2.24) que, de la condición  $\varphi_S^*(\Theta_S) = 0$ , genera la Primera Ley de la termodinámica para los hoyos negros (2.18) y las condiciones de equilibrio dadas en (2.25).

Entonces, en la representación de la entropía escribimos a  $G$  en el espacio fase  $\mathcal{T}$  como,

$$\begin{aligned} G &= (dS - \frac{1}{T}dM + \frac{\phi}{T}dQ + \frac{\Omega_H}{T}dJ)^2 \\ &+ (\frac{M}{T} - \frac{Q\phi}{T} - \frac{J\Omega_H}{T}) \left[ dM d(\frac{1}{T}) + dQ d(\frac{\phi}{T}) + dJ d(\frac{\Omega_H}{T}) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Es fácil demostrar que esta métrica es también invariante respecto de las transformaciones de Legendre como se vio anteriormente. El primer término de esta métrica puede ser escrito en la forma  $\Theta_S \otimes \Theta_S$  tal que su proyección sobre  $\mathcal{E}$  es cero en relación a la condición  $\varphi_S^*(\Theta_S) = 0$ . Sin embargo, este término es necesario a fin de que la métrica  $G$  no sea degenerada. Para la métrica inducida sobre  $\mathcal{E}$  por definición de  $g = \varphi_S^*(G)$  solamente el segundo término de  $G$  es relevante. Un cálculo directo muestra que,

$$\begin{aligned} g &= \varphi^*(\Theta_S \otimes \Theta_S) \\ &+ (\frac{M}{T} - \frac{Q\phi}{T} - \frac{J\Omega_H}{T}) \varphi^* \left[ dM d(\frac{1}{T}) + dQ d(\frac{\phi}{T}) + dJ d(\frac{\Omega_H}{T}) \right] \\ &= \varphi^*(\Theta_S) \otimes \varphi^*(\Theta_S) \\ &+ (\frac{M}{T} - \frac{Q\phi}{T} - \frac{J\Omega_H}{T}) \left[ \varphi^*(dM) \wedge \varphi^* d(\frac{1}{T}) + \varphi^*(dQ) \wedge \varphi^* d(\frac{\phi}{T}) \right. \\ &+ \left. \varphi^*(dJ) \wedge \varphi^* d(\frac{\Omega_H}{T}) \right] \\ &= (M \frac{\partial S}{\partial M} + Q \frac{\partial S}{\partial Q} + J \frac{\partial S}{\partial J}) \left[ \varphi^*(dM) \wedge \varphi^* d(\frac{1}{T}) + \varphi^*(dQ) \wedge \varphi^* d(\frac{\phi}{T}) \right. \\ &+ \left. \varphi^*(dJ) \wedge \varphi^* d(\frac{\Omega_H}{T}) \right] \end{aligned}$$

y recordando que las condiciones de equilibrio vienen dadas por (2.25),

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad \frac{\Omega_H}{T} = -\frac{\partial S}{\partial J}, \quad \frac{\phi}{T} = -\frac{\partial S}{\partial Q}$$

con  $S = S(M, Q, J)$  como el potencial termodinámico que depende de la variables extensivas  $E^a = \{M, Q, J\}$ . Entonces, si

$$dS = \frac{\partial S}{\partial M}dM + \frac{\partial S}{\partial Q}dQ + \frac{\partial S}{\partial J}dJ$$

tenemos que,

$$d\left(\frac{1}{T}\right) = d\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial M^2}dM + \frac{\partial^2 S}{\partial M\partial J}dJ + \frac{\partial^2 S}{\partial M\partial Q}dQ$$

$$d\left(\frac{\phi}{T}\right) = d\left(\frac{-\partial S}{\partial Q}\right) = -\frac{\partial^2 S}{\partial Q\partial M}dM - \frac{\partial^2 S}{\partial Q\partial J}dJ - \frac{\partial^2 S}{\partial Q^2}dQ$$

$$d\left(\frac{\Omega_H}{T}\right) = d\left(\frac{-\partial S}{\partial J}\right) = -\frac{\partial^2 S}{\partial J\partial M}dM - \frac{\partial^2 S}{\partial J^2}dJ - \frac{\partial^2 S}{\partial J\partial Q}dQ$$

tal que el pullback aplicado a las variables intensivas (independientes) es,

$$\varphi^*(dM) = dM$$

$$\varphi^*(dQ) = dQ$$

$$\varphi^*(dJ) = dJ$$

entonces,

$$\varphi^*(dM) \wedge \varphi^*d\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial M^2}dM^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial M\partial J}dMdJ + \frac{\partial^2 S}{\partial M\partial Q}dMdQ$$

$$\varphi^*(dQ) \wedge \varphi^*d\left(\frac{\phi}{T}\right) = -\frac{\partial^2 S}{\partial Q\partial M}dQdM - \frac{\partial^2 S}{\partial Q\partial J}dQdJ - \frac{\partial^2 S}{\partial Q^2}dQ^2$$

$$\varphi^*(dJ) \wedge \varphi^*d\left(\frac{\Omega_H}{T}\right) = -\frac{\partial^2 S}{\partial J\partial M}dJdM - \frac{\partial^2 S}{\partial J^2}dJ^2 - \frac{\partial^2 S}{\partial J\partial Q}dJdQ$$

escribiendo finalmente la métrica inducida como,

$$g = (MS_M + QS_Q + JS_J)(S_{MM}dM^2 - S_{QQ}dQ^2 - S_{JJ}dJ^2 - 2S_{QJ}dQdJ)$$

o en forma matricial,

$$g = (MS_M + QS_Q + JS_J) \begin{pmatrix} S_{MM} & 0 & 0 \\ 0 & -S_{QQ} & -S_{QJ} \\ 0 & -S_{QJ} & -S_{JJ} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

donde por simplicidad se introdujo la notación de que el subíndice representa la derivada parcial con respecto a la correspondiente coordenada. Utilizando la ecuación fundamental (1.34),

$$S = \pi \left( 2M^2 - Q^2 + 2\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2} \right)$$

las derivadas parciales son,

$$\begin{aligned} S_M &= \pi \left[ 4M + \frac{4M^3 - 2MQ^2}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} \right], \\ S_Q &= -2\pi Q \left[ 1 + \frac{M^2}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} \right], \\ S_J &= -\frac{2\pi J}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}}, \\ S_{JQ} &= S_{QJ} = -\frac{2\pi QJM^2}{(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}}, \\ S_{MM} &= \pi \left[ 4 + \frac{12M^2 - 2Q^2}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} - \frac{(4M^3 - 2MQ^2)^2}{2(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} \right], \\ S_{QQ} &= -2\pi \left[ 1 + \frac{M^2}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} + \frac{Q^2M^4}{(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} \right], \\ S_{JJ} &= -2\pi \left[ \frac{1}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} + \frac{J^2}{(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

La métrica encontrada, ecuación (3.8), es invariante de Legendre y no degenerada por lo que puede ser usada para introducir una estructura métrica Riemanniana invariante de Legendre en el espacio de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$ . Esto transforma a  $\mathcal{E}$  en una subvariedad Riemanniana bien definida del espacio fase termodinámico  $\mathcal{T}$ .

En la siguiente sección se mostrará que esta métrica reproduce correctamente el comportamiento termodinámico de los hoyos negros de la teoría de Einstein-Maxwell.

## 3.2. Hoyo negro de Reissner–Nordström

La solución de Reissner-Nordström describe a un hoyo negro cargado, estático y esféricamente simétrico cuya métrica puede ser escrita como,

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (9)$$

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = \frac{1}{r^2}(r - r_+)(r - r_-), \quad r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (10)$$

donde la masa y la carga total son denotadas por  $M$  y  $Q$ , respectivamente. El horizonte de eventos interior y exterior están situados en  $r_-$  y  $r_+$  tal que el área de horizonte exterior es  $A = 4\pi r_+^2$ . El hoyo negro extremo corresponde al valor  $r_+ = r_-$  y suponemos que  $M^2 > Q^2$  ó  $M \geq |Q|$  con el fin de evitar singularidades desnudas. La información termodinámica de este hoyo negro es contenida en la ecuación fundamental que en la representación de la entropía y de acuerdo con la ley del área de horizonte es,

$$S = \frac{1}{4}A = \pi \left( M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right)^2, \quad (11)$$

una expresión que puede ser rescrita en representación de la masa como,

$$M = \frac{1}{2\sqrt{\pi S}}(\pi Q^2 + S). \quad (12)$$

De acuerdo con Davies, la estructura de la transición de fase del hoyo negro de Reissner-Nordström puede ser derivada de la expresión para la capacidad calorífica escrita en términos de los radios del horizonte,

$$C_Q = \frac{4TM^3S^3}{-2M^6 + 3M^4Q^2 - 2(M^4 - M^2Q^2)^{3/2}} = -\frac{2\pi^2 r_+^2 (r_+ - r_-)}{r_+ - 3r_-}. \quad (13)$$

Para nuestra aproximación geométrica de la termodinámica de hoyos negros, todo lo que se necesita es la ecuación fundamental dada en (3.11) para poder calcular la métrica termodinámica dada por (3.8) en la sección “3.1”,

$$\begin{aligned} g_{ab}^{RN} &= (MS_M + QS_Q) \begin{pmatrix} S_{MM} & 0 \\ 0 & -S_{QQ} \end{pmatrix} \\ &= \frac{8\pi r_+^3}{(r_+ - r_-)^3} \begin{pmatrix} 2r_+(r_+ - 3r_-) & 0 \\ 0 & r_+^2 + 3r_-^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Note que esta métrica es singular en el límite extremo  $r_+ = r_-$ . Ello podría indicar un rompimiento de nuestra aproximación geométrica. No obstante, el análisis del escalar de curvatura correspondiente,

$$R^{RN} = \frac{(r_+^2 - 3r_-r_+ + 6r_-^2)(r_+ - 3r_-)(r_+ - r_-)^2}{\pi^2 r_+^3 (r_+^2 + 3r_-^2)(r_+ - 3r_-)^2}, \quad (15)$$

muestra que en el límite extremo el espacio de estados de equilibrio se vuelve plano. Esto significa que debe existir un sistema diferente de coordenadas en el cual la métrica (3.14) no diverja en este límite extremo. Además, vemos que de la expresión del escalar de curvatura el único punto singular corresponde al valor  $r_+ = 3r_-$  que es exactamente el punto donde ocurre la transición de fase en la capacidad calorífica, ecuación (3.13).

Las figuras 3.1 y 3.2 muestran que las singularidades del escalar de curvatura  $R^{RN}$  coinciden con los puntos de transición de fase, representados por los puntos de divergencia de la capacidad calorífica  $C_Q$ .

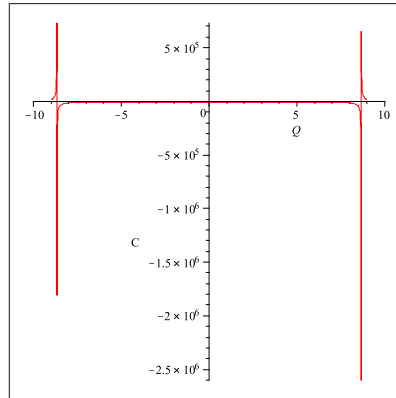


Figura 1: Comportamiento de la capacidad calorífica  $C_Q$  en términos de la carga  $Q$ , con  $M = 10$ . Las divergencias indican los puntos donde hay transiciones de fase.

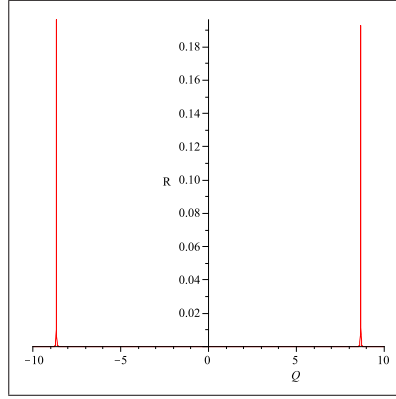


Figura 2: Escalar de curvatura termodinámico  $R^{RN}$  en términos de la carga  $Q$ , con  $M = 10$ . Las singularidades están localizadas en los puntos de transiciones de fase.

### 3.3. Hoyo negro de Kerr

La métrica de Kerr corresponde al límite  $Q = 0$  de la métrica de Kerr-Newman (1.15). Describe el campo gravitacional de un hoyo negro rotante, axialmente simétrico con dos horizontes situados a distancias radiales,

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - J^2/M^2}. \quad (16)$$

La correspondiente ecuación fundamental en la representación de la entropía es,

$$S = \frac{1}{4}A = 2\pi \left( M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right), \quad (17)$$

que en la representación de la masa se escribe como,

$$M = \sqrt{\frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S}}. \quad (18)$$

Además, la transición de fase de segundo orden ocurre en los puntos donde la capacidad calorífica diverge,

$$C_J = \frac{4TM^3S^3}{6M^2J^2 - 2M^6 - 2(M^4 - J^2)^{3/2}} = \frac{2\pi^2r_+^2(r_+ + r_-)^2(r_+ - r_-)}{r_+^2 - 6r_+r_- - 3r_-^2}. \quad (19)$$

Asumimos valores de la masa en el rango  $M^2 \geq J$ , la igualdad es el límite extremo del hoyo negro de Kerr en el cual los dos horizontes coinciden. La métrica invariante de Legendre en este caso es,

$$\begin{aligned} g_{ab}^K &= (MS_M + JS_J) \begin{pmatrix} S_{MM} & 0 \\ 0 & -S_{JJ} \end{pmatrix} \\ &= \frac{16\pi^2 r_+^2 (r_+ + r_-)}{(r_+ - r_-)^4} \begin{pmatrix} r_+(r_+^2 - 6r_+r_- - 3r_-^2) & 0 \\ 0 & r_+ + r_- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Se obtiene nuevamente una métrica que se vuelve singular en el límite extremo  $r_+ = r_-$ . El escalar de curvatura para la métrica termodinámica del hoyo negro de Kerr puede ser expresado como,

$$R^K = \frac{(3r_+^3 + 3r_+^2r_- + 17r_+r_-^2 + 9r_-^3)(r_+ - r_-)^3}{2\pi^2 r_+^2 (r_+ + r_-)^4 (r_+^2 - 6r_+r_- - 3r_-^2)^2}. \quad (21)$$

Esto muestra que la singularidad métrica en  $r_+ = r_-$  es solamente una singularidad coordenada. Por otra parte, las singularidades de curvatura están situadas en las raíces de la ecuación polinomial  $r_+^2 - 6r_+r_- - 3r_-^2 = 0$ . De acuerdo con la expresión (3.19), la capacidad calorífica contiene la misma expresión polinomial, cuyas raíces determinan los puntos críticos donde la transición de fase toma lugar.

Las gráficas 3.3 y 3.4 muestran la coincidencia de los puntos singulares del escalar de curvatura  $R^K$  y de los puntos de la transición de fase de capacidad calorífica  $C_J$ .

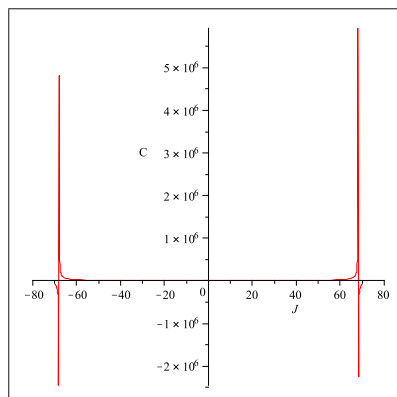


Figura 3: Comportamiento de la capacidad calorífica  $C_J$  en términos del momento angular  $J$ , con  $M = 10$ . Las divergencias indican los puntos donde hay transiciones de fase.

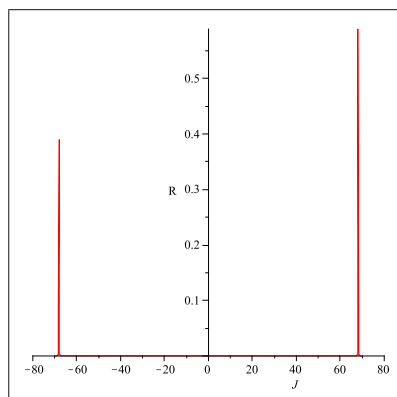


Figura 4: Escalar de curvatura termodinámico  $R^K$  en términos del momento angular  $J$ , con  $M = 10$ . Las singularidades están localizadas en los puntos de transiciones de fase.



# Capítulo 4

## Hoyos negros con 3 grados de libertad termodinámicos

De la descripción anterior de la GTD, se sigue que la dimensión del espacio fase es  $2n + 1$ , donde  $n$  es el número de grados de libertad termodinámico que coincide con la dimensión del subespacio  $\mathcal{E}$ . El caso  $n = 1$  corresponde al hoyo negro de Schwarzschild con la masa  $M$  como el único grado de libertad termodinámico que prevalece. En este caso la estructura Riemanianna de  $\mathcal{E}$  es trivial. Para  $n = 2$  la estructura geométrica de  $\mathcal{E}$  no es trivial y corresponde ya sea al hoyo negro de Reissner-Nordström ( $J = 0$ ) o al de Kerr ( $Q = 0$ ). Note que en este caso la métrica  $g$  en  $\mathcal{E}$  es diagonal lo que simplifica drásticamente los cálculos. Tal como se vio en el capítulo anterior, el hoyo negro general de Kerr-Newman corresponde a una variedad 3-dimensional  $\mathcal{E}$  con una métrica  $g$  no diagonal. Esto requiere un análisis separado expuesto en la siguiente sección.

### 4.1. Hoyo Negro general de Kerr-Newman

La métrica de Kerr-Newman (1.15) describe el campo gravitacional del hoyo negro cargado y rotante, el más general, con dos horizontes dados por  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - (J/M)^2}$ . De acuerdo con los resultados de la sección 3.1 de la GTD de hoyos negros, el espacio de estados de equilibrio termodinámico es 3-dimensional y la correspondiente métrica invariante de Legendre puede ser escrita como,

$$g_{ab}^{KN} = (MS_M + QS_Q + JS_J) \begin{pmatrix} S_{MM} & 0 & 0 \\ 0 & -S_{QQ} & -S_{QJ} \\ 0 & -S_{QJ} & -S_{JJ} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Escribiendo explícitamente las derivadas parciales obtenemos una métrica bastante voluminosa que no puede ser escrita en una forma compacta,

$$\begin{aligned} g &= (MS_M + QS_Q + JS_J)(S_{MM}dM^2 - S_{QQ}dQ^2 - S_{JJ}dJ^2 - 2S_{QJ}dQdJ), \\ &= 2\pi \left( 2M^2 - Q^2 + \frac{2M^4 - 2M^2Q^2 - J^2}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} \right) \\ &\quad \times \left[ \pi \left( 4 + \frac{12M^2 - 2Q^2}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} - \frac{(4M^3 - 2MQ^2)^2}{2(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} \right) dM^2 \right. \\ &\quad + 2\pi \left( 1 + \frac{M^2}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} + \frac{Q^2M^4}{(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} \right) dQ^2 \\ &\quad + 2\pi \left( \frac{1}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} + \frac{J^2}{(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} \right) dJ^2 \\ &\quad \left. + \frac{4\pi QJM^2}{(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} dQdJ \right], \\ &= 4\pi^2 \left( 2M^2 - Q^2 + \frac{2M^4 - 2M^2Q^2 - J^2}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} \right) \\ &\quad \times \left[ \left( 2 + \frac{6M^2 - Q^2}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} - \frac{(4M^3 - 2MQ^2)^2}{4(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} \right) dM^2 \right. \\ &\quad + \left( 1 + \frac{M^2}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} + \frac{Q^2M^4}{(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} \right) dQ^2 \\ &\quad + \left( \frac{1}{\sqrt{M^4 - M^2Q^2 - J^2}} + \frac{J^2}{(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} \right) dJ^2 \\ &\quad \left. + \frac{2QJM^2}{(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}} dQdJ \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Además, se puede mostrar que el escalar de curvatura tiene la forma,

$$R^{KN} = \frac{N}{D}, \quad D = 4(MS_M + QS_Q + JS_J)^3 (S_{QJ}^2 - S_{QQ}S_{JJ})^3 S_{MM}^2 \quad (3)$$

donde el numerador, denotado por  $N$ , es una función complicada que no es necesario escribir ya que nos interesan los puntos singulares en el denominador  $D$ . Si se rempazan las correspondientes derivadas, el denominador es proporcional a la siguiente expresión,

$$\begin{aligned}
D &\propto \left[ 2M^4 - 2M^2Q^2 - J^2 + (2M^2 - Q^2)(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{1/2} \right]^3 \\
&\times \left[ M^4 + (M^2 - Q^2)(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{1/2} \right]^3 \\
&\times \left[ 2M^6 - 3M^4Q^2 - 6M^2J^2 + Q^2J^2 + 2(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2} \right]^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

En los primeros dos términos de los paréntesis cuadrados se puede mostrar que son siempre positivos en el rango  $M^4 \geq M^2Q^2 + J^2$ , la cual es una condición que garantiza la no existencia de singularidades desnudas. El tercer término en paréntesis cuadrados es exactamente el denominador de la capacidad calorífica, ecuación (1.45),

$$C_{J,Q} = -\frac{4TM^3S^3}{2M^6 - 3M^4Q^2 - 6M^2J^2 + Q^2J^2 + 2(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}}.$$

Esto prueba que las singularidades de curvatura de la métrica termodinámica  $g^{KN}$  están situados en aquellos puntos donde la transición de fase ocurre. Además, se puede mostrar que la curvatura desaparece en el caso de un hoyo extremo,  $M^4 = M^2Q^2 + J^2$ , equivalente a  $r_+ = r_-$ . Esto se parece al comportamiento de la curvatura de las métricas termodinámicas de los hoyos negros de Reissner-Nordström y Kerr presentadas en las secciones anteriores.

Algunos ejemplos de este comportamiento se muestra en las figuras 4.1–4.4, donde se puede observar claramente que las singularidades del escalar de curvatura  $R^{KN}$  coinciden con las transiciones de fase en la capacidad calorífica  $C_{J,Q}$ .

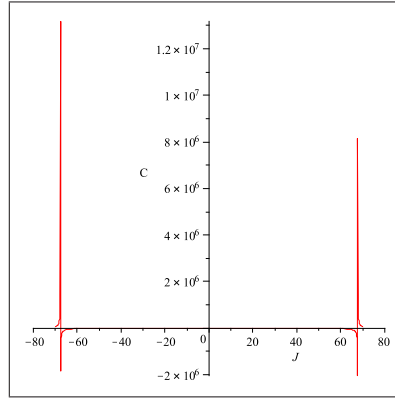


Figura 1: Comportamiento de la capacidad calorífica  $C_{J,Q}$  en términos del momento angular  $J$ , considerando  $M = 10$  y  $Q = 1$ . Las divergencias indican los puntos donde hay transiciones de fase.

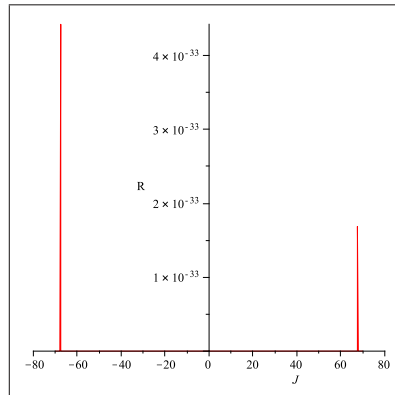


Figura 2: Escalar de curvatura termodinámico  $R^{KN}$  en términos del momento angular  $J$ , con  $M = 10$  y  $Q = 1$ . Las singularidades están localizadas en los puntos de transiciones de fase.

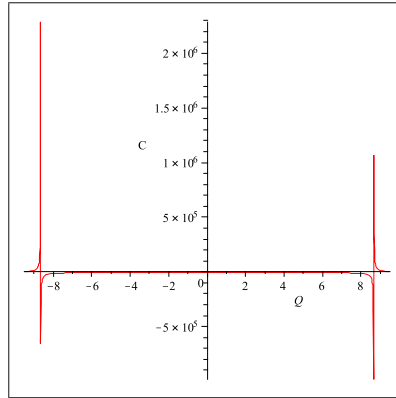


Figura 3: Comportamiento de la capacidad calorífica  $C_{J,Q}$  en términos de la carga  $Q$ , considerando  $M = 10$  y  $J = 1$ . Las divergencias indican los puntos donde hay transiciones de fase.

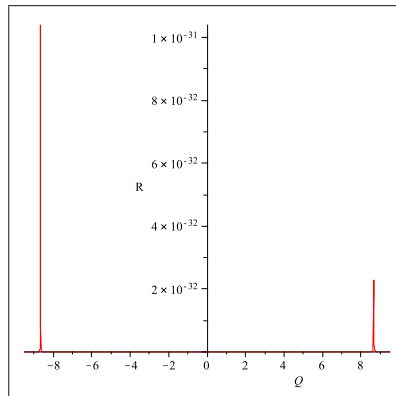


Figura 4: Escalar de curvatura termodinámico  $R^{KN}$  en términos la carga  $Q$ , con  $M = 10$  y  $J = 1$ . Las singularidades están localizadas en los puntos de transiciones de fase.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Usando el formalismo de la GTD, en esta tesis se derivó una métrica para el espacio de estados de equilibrio de hoyos negros que reprodujo el comportamiento termodinámico de los hoyos de Reissner-Nordström, Kerr y Kerr-Newman. La métrica termodinámica se derivó de la métrica invariante de Legendre que se introdujo en el espacio fase termodinámico. En contraste con otras métricas usadas previamente en la literatura, las singularidades de curvatura de la métrica encontrada reproduce en una manera unificada la transición de fase de los hoyos negros, si asumimos que dicha transición corresponde a la divergencia de la capacidad calorífica. Este resultado muestra que la curvatura de esta métrica termodinámica puede ser usada como una medida de la interacción termodinámica para los hoyos negros.

Para todos los hoyos negros de la teoría de Einstein-Maxwell, el espacio de estados de equilibrio, equipado con esta métrica termodinámica, se vuelve singular en aquellos puntos donde la transición de fase ocurre, y es plana en el límite de hoyos negros extremos, es decir, cuando los dos horizontes coinciden,  $r_+ = r_-$ . Esto indica que la métrica termodinámica está bien definida en la región  $M^4 - M^2Q^2 - J^2 \geq 0$ , excepto en los puntos de transición de fase donde se vuelve singular. Fuera de esta región, la métrica termodinámica encontrada no está bien definida debido a que la ecuación fundamental, en la representación de la entropía, se vuelve compleja y no puede ser usada para generar la estructura geométrica Riemanniana del espacio de estados de equilibrio. Esto es una indicación que la descripción termodinámica de hoyos negros no puede ser extendida en la región de singularidades desnudas. Es también otra indicación de que la termodinámica clásica no puede ser

usada para los hoyos negros del tamaño de la longitud de Planck, que es el límite extremo de aplicabilidad que uno esperaría para la termodinámica clásica.

En esta tesis se asumió la formulación de Davies de la transición de fase para los hoyos negros. Sin embargo, la interpretación de las divergencias en el calor específico como transiciones de fase no está definitivamente establecida y es todavía tema de debate [45, 46, 47, 48]. De hecho, lo que realmente se necesita es una descripción microscópica que se acople a la termodinámica macroscópica de los hoyos negros. Además, tal descripción macroscópica debe estar relacionada a una teoría de la gravedad cuántica que está todavía distante de ser formulada en una manera consistente. Mientras tanto, podemos solamente usar la interpretación intuitiva de la transición de fase como es conocida en termodinámica clásica.

La métrica termodinámica propuesta en la tesis es intuitivamente simple, no puede ser escrita de forma compacta y satisface las condiciones de compatibilidad matemática de la GTD. Además, no tenemos en absoluto ninguna interpretación de sus componentes en términos de alguna teoría física. Sería interesante investigar la estabilidad de la métrica derivada en la tesis, especialmente los diferentes escenarios disponibles en la termodinámica de agujeros negros.

Finalmente, la importancia de esta tesis generó un artículo de publicación que se anexa en el apéndice A. El sistema computacional algebraico REDUCE 3.8 fuésado en la mayoría de los cálculos reportados en la tesis.

# Apéndice A

## Publicación del artículo



# Unified geometric description of black hole thermodynamics

José L. Álvarez,<sup>\*</sup> Hernando Quevedo,<sup>†</sup> and Alberto Sánchez<sup>‡</sup>

*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, A.P. 70-543, 04510 México D.F., Mexico*

(Received 15 January 2008; published 7 April 2008)

In the space of thermodynamic equilibrium states we introduce a Legendre invariant metric which contains all the information about the thermodynamics of black holes. The curvature of this thermodynamic metric becomes singular at those points where, according to the analysis of the heat capacities, phase transitions occur. This result is valid for the Kerr-Newman black hole and all its special cases and, therefore, provides a unified description of black hole phase transitions in terms of curvature singularities.

DOI: [10.1103/PhysRevD.77.084004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.084004)

PACS numbers: 04.70.Dy, 02.40.Ky

## I. INTRODUCTION

According to the no-hair theorems of Einstein-Maxwell theory, electro-vacuum black holes are completely described by three parameters only: mass  $M$ , angular momentum  $J$ , and electric charge  $Q$ . The corresponding gravitational field is described by the Kerr-Newman metric which in Boyer-Lindquist coordinates can be expressed as [1]

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, & \Delta &= (r - r_+)(r - r_-), \\ r_{\pm} &= M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

where  $a = J/M$  is the specific angular momentum. Bekenstein [2] discovered in 1973 that the horizon area  $A$  of a black hole behaves as the entropy  $S$  of a classical thermodynamic system. This was the beginning of what is now called thermodynamics of black holes [3–5]. Although its statistical origin is still very unclear, black hole thermodynamics has been the subject of intensive research for the past three decades, due in part to its possible connection to a hypothetical theory of quantum gravity.

It has been established that the physical parameters of the Kerr-Newman black hole satisfy the first law of black hole thermodynamics [3]

$$dM = T dS + \phi dQ + \Omega_H dJ, \quad (3)$$

where  $T$  is the Hawking temperature which is proportional to the surface gravity on the horizon,  $S = A/4$  is the entropy,  $\Omega_H$  is the angular velocity on the horizon, and  $\phi$  is the electric potential. As in ordinary thermodynamics, all the thermodynamic information is contained in the fundamental equation which was first derived by Smarr [6]

$$M = \left[ \frac{\pi J^2}{S} + \frac{S}{4\pi} \left( 1 + \frac{\pi Q^2}{S} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4)$$

In the entropy representation, this fundamental equation can be rewritten as

$$S = \pi(2M^2 - Q^2 + 2\sqrt{M^4 - M^2 Q^2 - J^2}). \quad (5)$$

Davies [5] argued that black holes undergo a second order phase transition at the points where the heat capacity diverges. This argument is supported by the result that some critical exponents related to the singular points obey scaling laws [7–12]. Following Davies, we assume in this work that the structure of the phase transitions of the Kerr-Newman black hole is determined by the corresponding heat capacity  $C = T(\partial S/\partial T)$ :

$$C_{Q,J} = -\frac{4TM^3 S^3}{2M^6 - 3M^4 Q^2 - 6M^2 J^2 + Q^2 J^2 + 2(M^4 - M^2 Q^2 - J^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

On the other hand, differential geometric concepts have been applied in ordinary thermodynamics since the seventies. First, Weinhold [13] introduced on the space of equilibrium states a metric whose components are given as the

Hessian of the internal thermodynamic energy. Later, Ruppeiner [14,15] introduced a metric which is defined as minus the Hessian of the entropy, and is conformally equivalent to Weinhold's metric, with the inverse of the temperature as the conformal factor. One of the aims of the application of geometry in thermodynamics is to describe phase transitions in terms of curvature singularities so that the curvature can be interpreted as a measure of thermody-

<sup>\*</sup>jose.alvarez@nucleares.unam.mx

<sup>†</sup>quevedo@nucleares.unam.mx

<sup>‡</sup>asanchez@nucleares.unam.mx

namic interaction. This turns out to be true in the case of the ideal gas, whose curvature vanishes, and the van der Waals gas for which the curvature of Weinhold's and Ruppeiner's metric becomes singular at those points where phase transitions occur. This is an encouraging result that illustrates the applicability of geometry in thermodynamics. It is then natural to try to describe the phase transitions of black holes in terms of curvature singularities in the space of equilibrium states. Unfortunately, the obtained results are contradictory. For instance, for the Reissner-Nordström black hole the Ruppeiner metric is flat [16], whereas the Weinhold metric with the mass as thermodynamic potential presents a curvature singularity only in the limit of an extremal black hole. None of these results reproduces the phase transitions as predicted by Davies using the heat capacity. Nevertheless, a simple change of the thermodynamic potential [17] affects Ruppeiner's geometry in such a way that the resulting curvature singularity now corresponds to a phase transition. A dimensional reduction of Ruppeiner's curvature seems to affect its properties too [18]. The situation is similar in the case of the Kerr black hole: Weinhold's metric is flat [16], and the original Ruppeiner metric does not present curvature singularities at the points of phase transitions of the Kerr black hole. Nevertheless, with a change of thermodynamic potential [17], Ruppeiner's metric reproduces the structure of the phase transitions of the Kerr black hole. These results seem to indicate that, in the case of black holes, geometry and thermodynamics are compatible only for a very specific thermodynamic potential. However, it is well known that ordinary thermodynamics does not depend on the thermodynamic potential. We believe that a geometric description of thermodynamics should preserve this property, i.e., it should be invariant with respect to Legendre transformations.

Recently [19], the formalism of geometrothermodynamics (GTD) was proposed as a geometric approach that incorporates Legendre invariance in a natural way, and allows us to derive Legendre invariant metrics in the space of equilibrium states. Since Weinhold and Ruppeiner metrics are not Legendre invariant, one of the first results in the context of GTD was the derivation of simple Legendre invariant generalizations of these metrics and their application to black hole thermodynamics. It turned out [20] that the thermodynamics of the Reissner-Nordström black hole is compatible with both Weinhold and Ruppeiner generalized metric structures. However, in the case of the Kerr black hole both generalized geometries are flat and, therefore, cannot reproduce its thermodynamic behavior. This was considered as a negative result for the use of geometry in black hole thermodynamics.

In the present work we use GTD to derive a Legendre invariant metric which completely and consistently reproduces the thermodynamic behavior of black holes, including the Kerr-Newman black hole. This result finishes the

controversy regarding the application of geometric structures in black hole thermodynamics. The phase transition structure contained in the heat capacity of black holes becomes completely integrated in the scalar curvature of the Legendre invariant metric so that a curvature singularity corresponds to a phase transition.

This paper is organized as follows. In Sec. II we introduce the general formalism of GTD for black holes. A particular Legendre invariant metric is given in the thermodynamic phase space which is the starting point of our analysis. In Sec. III we apply 2-dimensional GTD in its entropy representation to the Reissner-Nordström and Kerr black holes. The analysis of the Kerr-Newman black hole requires 3-dimensional GTD and it is presented in Sec. IV. Finally, Sec. V is devoted to discussions of our results and suggestions for further research. Throughout this paper we use units in which  $G = c = k_B = \hbar = 1$ .

## II. GEOMETROTHERMODYNAMICS OF BLACK HOLES

The starting point of GTD is the thermodynamic phase space  $\mathcal{T}$  which in the case of Einstein-Maxwell black holes can be defined as a 7-dimensional space with coordinates  $Z^A = \{M, S, Q, J, T, \phi, \Omega_H\}$ ,  $A = 0, \dots, 6$ . In the cotangent space  $\mathcal{T}^*$ , we introduce the fundamental one-form

$$\Theta_M = dM - TdS - \phi dQ - \Omega_H dJ, \quad (7)$$

which satisfies the condition  $\Theta_M \wedge (d\Theta_M)^3 \neq 0$ . Furthermore, in  $\mathcal{T}$  we introduce a nondegenerate metric  $G$ . The triplet  $(\mathcal{T}, \Theta_M, G)$  is said to form a Riemannian contact manifold. Let  $\mathcal{E}$  be a 3-dimensional subspace of  $\mathcal{T}$  with coordinates  $E^a = \{S, Q, J\}$ ,  $a = 1, 2, 3$ , defined by means of a smooth mapping  $\varphi_M: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$ . The subspace  $\mathcal{E}$  is called the space of equilibrium states if  $\varphi_M^*(\Theta_M) = 0$ , where  $\varphi_M^*$  is the pullback induced by  $\varphi_M$ . Furthermore, a metric structure  $g$  is naturally induced on  $\mathcal{E}$  by applying the pullback on the metric  $G$  of  $\mathcal{T}$ , i.e.,  $g = \varphi_M^*(G)$ . It is clear that the condition  $\varphi_M^*(\Theta_M) = 0$  leads immediately to the first law of thermodynamics of black holes as given in Eq. (3). It also implies the existence of the fundamental equation  $M = M(S, Q, J)$  and the conditions of thermodynamic equilibrium

$$T = \frac{\partial M}{\partial S}, \quad \phi = \frac{\partial M}{\partial Q}, \quad \Omega_H = \frac{\partial M}{\partial J}. \quad (8)$$

Legendre invariance is an important ingredient of GTD. It allows us to change the thermodynamic potential without affecting the results. If we denote the intensive thermodynamic variables as  $I^a = \{T, \phi, \Omega_H\}$ , then a Legendre transformation is defined by [21]

$$\{M, E^a, I^a\} \rightarrow \{\tilde{M}, \tilde{E}^a, \tilde{I}^a\}, \quad (9)$$

$$M = \tilde{M} - \delta_{ab} \tilde{E}^a \tilde{I}^b, \quad E^a = -\tilde{I}^a, \quad I^a = \tilde{E}^a. \quad (10)$$

It is easy to see that the fundamental one-form  $\Theta_M$  is

invariant with respect to Legendre transformations. Furthermore, if we demand that the metric  $G$  be Legendre invariant, it can be shown [19] that the induced metric  $g = \varphi_M^*(G)$  is also Legendre invariant.

Another advantage of the use of GTD is that it allows us to easily implement different thermodynamic representations. The above description is called the  $M$ -representation because the fundamental equation is given as  $M = M(S, Q, J)$ . However, one can rewrite this equation as  $S = S(M, Q, J)$ ,  $Q = Q(S, M, J)$  or  $J = J(S, M, Q)$ , and redefine the coordinates in  $\mathcal{T}$  and the smooth mapping  $\varphi$  in such a way that the condition  $\varphi^*(\Theta) = 0$  generates on  $\mathcal{E}$  the corresponding fundamental equation in the  $S$ -,  $Q$ -, or the  $J$ -representation, respectively. As an example of this procedure we will present the  $S$ -representation which turned out to be the most appropriate for the description of black hole thermodynamics. It must be emphasized, however, that the results obtained with different representations of the same fundamental equation are completely equivalent.

For the  $S$ -representation we consider the fundamental one-form

$$\Theta_S = dS - \frac{1}{T}dM + \frac{\phi}{T}dQ + \frac{\Omega_H}{T}dJ, \quad (11)$$

so that the coordinates of  $\mathcal{T}$  are  $Z^A = \{S, E^a, I^a\} = \{S, M, Q, J, 1/T, -\phi/T, -\Omega_H/T\}$ . The space of equilibrium states  $\mathcal{E}$  can then be introduced with the smooth mapping

$$\varphi_S: \{M, Q, J\} \mapsto \{M, S(M, Q, J), Q, J, I^a(M, Q, J)\}, \quad (12)$$

which, from the condition  $\varphi_S^*(\Theta_S) = 0$ , generates the first law of thermodynamics of black holes (3) and the equilibrium conditions

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad \frac{\phi}{T} = -\frac{\partial S}{\partial Q}, \quad \frac{\Omega_H}{T} = -\frac{\partial S}{\partial J}. \quad (13)$$

In this representation the fundamental equation is given as in Eq. (5).

Consider now the following metric on  $\mathcal{T}$ :

$$\begin{aligned} G = & \left( dS - \frac{1}{T}dM + \frac{\phi}{T}dQ + \frac{\Omega_H}{T}dJ \right)^2 \\ & + \left( \frac{M}{T} - \frac{Q\phi}{T} - \frac{J\Omega_H}{T} \right) \\ & \times \left[ dM d\left(\frac{1}{T}\right) + dQ d\left(\frac{\phi}{T}\right) + dJ d\left(\frac{\Omega_H}{T}\right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

It is easy to show that this metric is invariant with respect to Legendre transformations (10). The first term of this metric can be written in the form  $\Theta_S \otimes \Theta_S$  so that its projection on  $\mathcal{E}$  vanishes, due to the condition  $\varphi_S^*(\Theta_S) = 0$ . Nevertheless, this term is necessary in order for the metric  $G$  to be nondegenerate. For the metric induced on  $\mathcal{E}$  by means of  $g = \varphi_S^*(G)$ , only the second term of  $G$  is relevant. A

straightforward computation leads to

$$\begin{aligned} g = & (MS_M + QS_Q + JS_J)(S_{MM}dM^2 - S_{QQ}dQ^2 \\ & - S_{JJ}dJ^2 - 2S_{QJ}dQdJ), \end{aligned} \quad (15)$$

where for simplicity we introduced the notation that a subindex represents partial derivative with respect to the corresponding coordinate. This metric is Legendre invariant and nondegenerate and therefore can be used to introduce a Legendre invariant, Riemannian metric structure in the space of equilibrium states  $\mathcal{E}$ . This turns  $\mathcal{E}$  into a well-defined Riemannian submanifold of the thermodynamic phase space  $\mathcal{T}$ . In the next sections we will show that metric (15) correctly reproduces the thermodynamic behavior of Einstein-Maxwell black holes.

### III. BLACK HOLES WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

From the above description of GTD, it follows that the dimension of the phase space is  $2n + 1$ , where  $n$  is the number of thermodynamic degrees of freedom which coincides with the dimension of the subspace  $\mathcal{E}$ . The case  $n = 1$  corresponds to the Schwarzschild black hole with the mass  $M$  as the only nonvanishing thermodynamic degree of freedom. In this case the Riemannian structure of  $\mathcal{E}$  is trivial. For  $n = 2$  the geometric structure of  $\mathcal{E}$  is nontrivial and corresponds to the Reissner-Nordström black hole ( $J = 0$ ) or to the Kerr black hole ( $Q = 0$ ). Notice that in this case the metric  $g$  on  $\mathcal{E}$  becomes diagonal and that drastically simplifies the calculations. The general Kerr-Newman black hole corresponds to a 3-dimensional manifold  $\mathcal{E}$  with a nondiagonal metric  $g$ . It requires a separate analysis that will be performed in Sec. IV.

#### A. The Reissner-Nordström black hole

The Reissner-Nordström metric can be obtained from Eq. (1) by imposing the condition  $J = 0$ . It describes a static, spherically symmetric black hole with two horizons situated at

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (16)$$

We assume that  $Q \leq M$  in order to avoid naked singularities. The thermodynamic information of this black hole is contained in the fundamental equation which, in the entropy representation we are using in this work, becomes

$$S = \pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2. \quad (17)$$

According to Davies [5], the phase transition structure of the Reissner-Nordström black hole can be derived from the heat capacity

$$\begin{aligned}
 C_Q &= \frac{4TM^3S^3}{-2M^6 + 3M^4Q^2 - 2(M^4 - M^2Q^2)^{3/2}} \\
 &= -\frac{2\pi^2r_+^2(r_+ - r_-)}{r_+ - 3r_-}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

For our geometric approach to black hole thermodynamics all that is needed is the fundamental equation as given in (17) from which we can calculate the thermodynamic metric

$$\begin{aligned}
 g_{ab}^{\text{RN}} &= (MS_M + QS_Q) \begin{pmatrix} S_{MM} & 0 \\ 0 & -S_{QQ} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{8\pi^2r_+^3}{(r_+ - r_-)^3} \begin{pmatrix} 2r_+(r_+ - 3r_-) & 0 \\ 0 & r_+^2 + 3r_-^2 \end{pmatrix}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Notice that this metric is singular in the extremal limit  $r_+ = r_-$ . It could indicate a breakdown of our geometric approach. However, the analysis of the corresponding scalar curvature

$$R^{\text{RN}} = \frac{(r_+^2 - 3r_-r_+ + 6r_-^2)(r_+ + 3r_-)(r_+ - r_-)^2}{\pi^2r_+^3(r_+^2 + 3r_-^2)^2(r_+ - 3r_-)^2} \quad (20)$$

shows that in the extremal limit the space of equilibrium states becomes flat. This means that there must exist a different coordinate system in which the metric (19) does not diverge in the extremal limit. Moreover, we see from the expression for the scalar curvature that the only singular point corresponds to the value  $r_+ = 3r_-$  which is exactly the point where a phase transition occurs in the heat capacity (18).

### B. The Kerr black hole

The Kerr metric corresponds to the limit  $Q = 0$  of the Kerr-Newman metric (1). It describes the gravitational field of a stationary, axially symmetric, rotating black hole with two horizons situated at the radial distances

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - J^2/M^2}. \quad (21)$$

The corresponding thermodynamic fundamental equation in the entropy representation becomes

$$S = 2\pi(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}). \quad (22)$$

Furthermore, second order phase transitions occur at the points where the heat capacity

$$\begin{aligned}
 C_J &= \frac{4TM^3S^3}{6M^2J^2 - 2M^6 - 2(M^4 - J^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{2\pi^2r_+(r_+ + r_-)^2(r_+ - r_-)}{r_+^2 - 6r_+r_- - 3r_-^2} \quad (23)
 \end{aligned}$$

diverges. We assume values of the mass in the range  $M^2 \geq J$ , the equality being the extremal limit of the Kerr black hole in which the two horizons coincide.

The Legendre invariant metric reduces in this case to

$$\begin{aligned}
 g_{ab}^K &= (MS_M + JS_J) \begin{pmatrix} S_{MM} & 0 \\ 0 & -S_{JJ} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{16\pi^2r_+^2(r_+ + r_-)}{(r_+ - r_-)^4} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} r_+(r_+^2 - 6r_+r_- - 3r_-^2) & 0 \\ 0 & r_+ + r_- \end{pmatrix}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

We obtain again a metric that becomes singular at the extremal limit  $r_+ = r_-$ . The scalar curvature for the thermodynamic metric of the Kerr black hole can be expressed as

$$R^K = \frac{(3r_+^3 + 3r_+^2r_- + 17r_+r_-^2 + 9r_-^3)(r_+ - r_-)^3}{2\pi^2r_+^2(r_+ + r_-)^4(r_+^2 - 6r_+r_- - 3r_-^2)^2}. \quad (25)$$

This shows that the metric singularity at  $r_+ = r_-$  is only a coordinate singularity. On the other hand, the curvature singularities are situated at the roots of the polynomial equation  $r_+^2 - 6r_+r_- - 3r_-^2 = 0$ . According to the expression for the heat capacity (23), these are exactly the roots that determine the critical points where phase transitions take place.

## IV. THE GENERAL KERR-NEWMAN BLACK HOLE

The Kerr-Newman metric (1) describes the gravitational field of the most general rotating, charged black hole. It possesses an outer horizon at  $r_+$  and an inner horizon at  $r_-$ , with  $r_{\pm}$  given as in Eq. (2). According to our results of Sec. II, the space of thermodynamic equilibrium states is 3-dimensional and the corresponding Legendre invariant metric can be written as

$$g_{ab}^{\text{KN}} = (MS_M + QS_Q + JS_J) \begin{pmatrix} S_{MM} & 0 & 0 \\ 0 & -S_{QQ} & -S_{QJ} \\ 0 & -S_{QJ} & -S_{JJ} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Inserting here the expression for the entropy (5) we obtain a rather cumbersome metric which cannot be written in a compact form. Moreover, the scalar curvature can be shown to have the form

$$R^{\text{KN}} = \frac{N}{D}, \quad (27)$$

$$D = 4(MS_M + QS_Q + JS_J)^3(S_{QJ}^2 - S_{QQ}S_{JJ})^3S_{MM}^2$$

so that replacing the entropy formula we obtain

$$\begin{aligned}
D \propto & [2M^4 - 2M^2Q^2 - J^2 + (2M^2 - Q^2) \\
& \times (M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{1/2}]^3 [M^4 + (M^2 - Q^2) \\
& \times (M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{1/2}]^3 [2M^6 - 3M^4Q^2 - 6M^2J^2 \\
& + Q^2J^2 + 2(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{3/2}]^2. \quad (28)
\end{aligned}$$

The first two terms in squared brackets can be shown to be always positive in the range  $M^4 \geq M^2Q^2 + J^2$ , which is a condition that guarantees the nonexistence of naked singularities. The third term in squared brackets is exactly the denominator of the heat capacity (6). This proves that the curvature singularities of the thermodynamic metric  $g^{\text{KN}}$  are situated at those points where phase transitions can occur. Moreover, it can be shown that the curvature vanishes in the case of an extremal black hole,  $M^4 = M^2Q^2 + J^2$ . This resembles the behavior of the curvature of the thermodynamic metrics of the Reissner-Nordström and Kerr black holes presented in the last section.

## V. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

Using the formalism of GTD, in this work we derived a metric for the space of equilibrium states of black holes which reproduces the thermodynamic behavior of Reissner-Nordström, Kerr, and Kerr-Newman black holes. The thermodynamic metric is derived from a Legendre invariant metric which is introduced in the thermodynamic phase space. In contrast to other metrics used previously in the literature, the curvature singularities of our metric reproduce in a unified manner the phase transitions of black holes, if we assume that phase transitions correspond to divergences of the heat capacity. This result shows that the curvature of our thermodynamic metric can be used as a measure of thermodynamic interaction for black holes.

For all black holes of Einstein-Maxwell theory, the space of equilibrium states, equipped with our thermodynamic metric, becomes singular at those points where phase transitions occur, and it is flat in the limit of extreme black holes, i.e. when the two horizons coincide. This indicates that our thermodynamic metric is well defined in the region  $M^4 - M^2Q^2 - J^2 \geq 0$ , except at the phase

transition points where it becomes singular. Outside this region, our thermodynamic metric is not well defined because the fundamental equation becomes complex and cannot be used to generate the geometric Riemannian structure of the space of equilibrium states. This is an indication that the thermodynamic description of black holes cannot be extended into the region of naked singularities. This is also an indication that classical thermodynamics cannot be used for black holes of the size of the Planck length, which is the extremal limit of applicability one would expect for classical thermodynamics.

We assumed in this work Davies' formulation of phase transitions for black holes. However, the interpretation of divergences in specific heats as phase transitions is not definitely settled and is still a subject of debate [22–25]. In fact, what is really needed is a microscopic description which would couple to the macroscopic thermodynamics of black holes. However, such a macroscopic description must be related to a theory of quantum gravity which is still far from being formulated in a consistent manner. In the meantime, we can only use the intuitive interpretation of phase transitions as it is known in classical thermodynamics.

The thermodynamic metric we propose in this work is intuitively simple, it can be written in a compact form, and it satisfies the mathematical compatibility conditions of GTD. However, we do not have whatsoever any interpretation of its components in terms of any physical theory. We believe that Ruppeiner's metric is the only known thermodynamic metric with a specific physical interpretation in the context of thermodynamic fluctuation theory. It would be interesting to investigate the stability of the metric derived in this work, especially the different scenarios available in black hole thermodynamics [26].

The computer algebra system REDUCE 3.8 was used for most of the calculations reported in this work.

## ACKNOWLEDGMENTS

One of us (H. Q.) would like to thank G. Ruppeiner for helpful correspondence and literature hints. This work was supported in part by Conacyt, México, Grant No. 48601.

- 
- [1] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2003).
  - [2] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
  - [3] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
  - [4] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
  - [5] P. C. W. Davies, *Rep. Prog. Phys.* **41**, 1313 (1978).
  - [6] L. Smarr, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 71 (1973).
  - [7] L. M. Sokolowski and P. Mazur, *J. Phys. A* **13**, 1113 (1980).
  - [8] Y. K. Lau, *Phys. Lett. A* **186**, 41 (1994).
  - [9] Y. K. Lau, *Phys. Lett. A* **188**, 245 (1994).
  - [10] J. P. Muniain and D. Piriz, *Phys. Rev. D* **53**, 816 (1996).
  - [11] C. O. Lousto, *Nucl. Phys.* **B410**, 155 (1993).
  - [12] C. O. Lousto, *Phys. Rev. D* **51**, 1733 (1995).
  - [13] F. Weinhold, *J. Chem. Phys.* **63**, 2479 (1975); **63**, 2484 (1975); **63**, 2488 (1975); **63**, 2496 (1975); **65**, 559 (1976).

- [14] G. Ruppeiner, Phys. Rev. A **20**, 1608 (1979).
- [15] G. Ruppeiner, Rev. Mod. Phys. **67**, 605 (1995); **68**, 313 (1996).
- [16] J. Åman, I. Bengtsson, and N. Pidokrajt, Gen. Relativ. Gravit. **35**, 1733 (2003).
- [17] J. Shen, R. Cai, B. Wang, and R. Su, Int. J. Mod. Phys. A **22**, 11 (2007).
- [18] B. Mirza and M. Zamaninasab, J. High Energy Phys. **06** (2007) 059.
- [19] H. Quevedo, J. Math. Phys. (N.Y.) **48**, 013506 (2007).
- [20] H. Quevedo, arXiv:gr-qc/0704.3102.
- [21] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer Verlag, New York, 1980).
- [22] A. Curir, Gen. Relativ. Gravit. **13**, 417 (1981).
- [23] D. Pavón, Phys. Rev. D **43**, 2495 (1991).
- [24] J. Katz, I. Okamoto, and O. Kaburaki, Classical Quantum Gravity **10**, 1323 (1993).
- [25] O. Kaburaki, I. Okamoto, and J. Katz, Phys. Rev. D **47**, 2234 (1993).
- [26] G. Ruppeiner, Phys. Rev. D **75**, 024037 (2007).

# Bibliografía

- [1] J. D. Bekenstein, *Black Holes and entropy*, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).
- [2] H. Quevedo, *Geometrothermodynamics*, J. Math. Phys. **48**, 013506 (2007).
- [3] H. Quevedo, *Geometrothermodynamics of black holes*, Gen. Rel. Grav. (2008) in press.
- [4] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003).
- [5] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *The four laws of black hole mechanics*, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [6] S. W. Hawking, *Particle creation by black Holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [7] P. C. Davies, *Thermodynamics of black Holes*, Rep. Prog. Phys. **41**, 1313 (1978).
- [8] B. Carter, *Black holes* ed. DeWitt and DeWitt (London: Gordon and Breach).
- [9] L. Smarr, *Mass formula for Kerr black holes*, Phys. Rev. Lett. **70**, 71 (1973).
- [10] S. W. Hawking, *Black Holes*, ed. DeWitt and DeWitt (London: Gordon and Breach) pp1-56.
- [11] R. Penrose, *Nuovo Cim.* **1 Special No 252**.

- [12] PCW Davies, *The physics of Time Asymmetry* (Surrey University Press/University of California Press), 1974.
- [13] SW Hawking Commun. Math. Phys. **43** 199, 1975.
- [14] L. M, Sokolowski and P. Mazur, *Second-order phase transitions in black-hole thermodynamics*, J. Phys. A **13**, 1113 (1980).
- [15] Y. K. Lau, *On the second-order phase transition of a Reissner-Nordstrom black hole*, Phys. Lett. A **186**, 41 (1994).
- [16] Y. K. Lau, *Thermodynamics critical fluctuation ok Kerr-Newman black hole*, Phys. Rev. Lett. A **188**, 245 (1994).
- [17] J. P Muniain and D. Piriz, *Critical behavior of dimensionally continued black holes*, Phys. Rev. D **53**, 816 (1996).
- [18] C. O. Lousto, *The fourth law of black hole thermodynamics*, Nuc. Phys. B **410**, 155 (1993).
- [19] C. O. Lousto, *Emergence of an effective two-dimentional quantum description from the study of critical phenomena in black holes*, Phys. Rev. D **51**, 1733 (1995).
- [20] F. Weinhold, *Metric Geometry of equilibrium thermodynamics I, II, III, IV, V*, J. Chem. Phys. **63**, 2479, 2484, 2488, 2496 (1975); **65**, 558 (1976).
- [21] G. Ruppeiner, *Thermodynamics: A Riemannian geometric model*, Phys. Rev. A **20**, 1608 (1979).
- [22] J. Aman, I. Bengtsson, and N. Pidokrajt, *Geometry of black hole thermodynamics*, Gen. Rel. Grav. **35**, 1733 (2003).
- [23] J. Shen, R. Cai, B. Wang, and R. Su, *Thermodynamics geometry and critical behavior of black holes*, (2005) arXiv: gr-qc/0512035.
- [24] Gibbs, *Thermodynamics* (Yale University Press, New Haven, CT, 1948), Vol. 1.
- [25] Charatheodory, *Gesammelte Mathematische Werke* (Teubner Verlag, Munich, 1995), Vol 2.



- [26] R. Hermann, *Geometry, Physics and Systems* (Dekker, New York, 1973).
- [27] R. Mrugala, Rep. Math. Phys. **14**, 419 (1978).
- [28] R. Mrugala, Rep. Math. Phys. **21**, 197 (1985).
- [29] T. Feldman, B. Andersen, A. Qui, and P. Salamon, Chem. Phys. **83**, 5849 (1985).
- [30] R. Gilmore, J. Chem. Phys. **75**, 5964 (1981).
- [31] J. Nulton and P. Salamon, J. Phys. Rev. A **31**, 2520 (1985).
- [32] M. Santoro, J. Chem. Phys. **121**, 2932 (2004).
- [33] M. Santoro, Chem. Phys. **310**, 269 (2005).
- [34] M. Santoro, Chem. Phys. **313**, 331 (2005).
- [35] M. Santoro and S. Preston, e-print math-ph/0505010.
- [36] G. Ruppeiner, Phys. Rev. A **20**, 1608 (1979).
- [37] G. F. Torres del Castillo and M. Montesinos-Velasquez, Rev. Mex. Fis. **39**, 194 (1993).
- [38] G. Hernandez and E. A. Lacomba, Diff. Geo. Applic. **8**, 205 (1998).
- [39] H. Quevedo and R. D. Zárate, Rev. Mex. Fis. **49**, 125 (2003).
- [40] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostat-ic*(Wiley, New York, 1985).
- [41] W. L. Burke, *Applied differential Geometry* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1979).
- [42] R. B. Israel, *Convexity in the Theory of Lattice Gases*(Princeton University Press, Princeton, NJ, 1979).
- [43] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of classical Mechanics*(Springer, New York, 1980).
- [44] G. Ruppeiner, *Riemannian geometry in thermodynamics fluctuation theory*, Rev. Mod. Phys. **67**, 605 (1995); **68**, 313 (1996).

- [45] A. Curir, *General Relativity Gravity*, **13**, 417 (1981).
- [46] D. Pavón, *Phys. Rev. D* **43**, 2495 (1991).
- [47] J. Katz, I. Okamoto and O. Kaburaki, *Classical Quantum Gravity*, **10**, 1323 (1993).
- [48] O. Kaburaki, I. Okamoto and J. Katz, *Phys. Rev. D* **47**, 2234 (1993).