



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Introducción a la Teoría de núcleos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Claudia Torregrosa Flores

DIRECTOR DE TESIS:

Dra. Hortensia Galeana Sánchez



2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno  
Torregrosa  
Flores  
Claudia  
56350108  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
096406458
2. Datos del tutor  
Dra.  
Hortensia  
Galeana  
Sánchez
3. Datos de sinodal 1  
Dra.  
María del Rocío  
Rojas  
Monroy
4. Datos de sinodal 2  
Mat.  
Laura  
Pastrana  
Ramírez
5. Datos de sinodal 3  
Dr.  
Hugo Alberto  
Rincón  
Mejía
6. Datos de sinodal 4  
M. en C.  
César  
Hernández  
Cruz
7. Datos del trabajo escrito  
Introducción a la Teoría de Núcleos  
77 p  
2008

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1. Principios básicos</b>	<b>4</b>
<b>2. Aplicaciones</b>	<b>19</b>
2.1. Toma de decisiones [13] . . . . .	19
2.2. Base de axiomas de una teoría [3] . . . . .	20
2.3. Contraejemplos [2] . . . . .	21
<b>3. Núcleos</b>	<b>25</b>
3.1. Núcleo imperfecta crítica . . . . .	34
3.2. Cuasi-núcleo . . . . .	42
3.3. $(k, l)$ -núcleo . . . . .	44
3.4. Núcleos por trayectorias monocromáticas .	47
<b>4. Seminúcleos de una digráfica.</b>	<b>52</b>
<b>5. Sobre caminos monocromáticos y 4-ciclos monocromáticos en torneos bipartitos con flechas coloreadas.</b>	<b>59</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>74</b>
Bibliografía . . . . .	75

# Introducción

En este trabajo recopilamos resultados importantes de la Teoría de Núcleos, así como algunos resultados recientes. También veremos algunas aplicaciones que tiene dicha Teoría, las cuales nos muestran por que es útil.

Una gráfica está formada por un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices, junto con una colección de pares no ordenados de vértices distintos, llamados aristas. Si en una gráfica le damos importancia al orden de las aristas, la llamamos digráfica, y en este caso las aristas se llaman flechas.

En digráficas tenemos una teoría muy importante, que es la Teoría de Núcleos. Un núcleo es un subconjunto de vértices de una digráfica que es absorbente e independiente. Decimos que un subconjunto es absorbente si cualquier vértice que no es parte del, pero que si es parte de la digráfica, tiene una flecha que va hacia algún vértice del subconjunto. Un subconjunto se dice que es independiente si no existen flechas entre los vértices de dicha subconjunto.

En el primer capítulo de este trabajo damos las definiciones mas importantes de la Teoría de Gráficas, junto con algunos teoremas de dicha teoría.

El segundo capítulo nos da algunas aplicaciones de la Teoría de Núcleos. A lo largo de este trabajo muchas personas me

preguntaron para qué servía la Teoría de Núcleos, así que en este capítulo pueden encontrar la respuesta.

Las definiciones mas formales de la Teoría de Núcleos las veremos en el tercer capítulo.

Aparte doy los teoremas mas importantes en dicha Teoría. Tambien se incluyen conseptos que generalizan al de núcleo como cuasi-núcleo,  $(k, l)$ -núcleos y núcleos por trayectorias monocromáticas.

El cuarto y quinto capítulo son de artículos un poco más recientes en los que se ha trabajado la Teoría de Núcleos [10][13].

Los núcleos fueron considerados por primera vez por Von Neumann en Teoría de Juegos, lo llamó *solución de un juego de cooperación entre  $n$  personas*. Posteriormente C. Berge [1] vió que esta misma idea era de utilidad en otros contextos, lo llamó *el núcleo de una digráfica* y demostro algunos teoremas importantes sobre la existencia de núcleos.

# Capítulo 1

## Principios básicos

Empezaremos por dar unas definiciones de Teoría de Gráficas, las cuales usaremos ya que son la base para trabajar posteriormente con núcleos.

Daremos algunos teoremas importantes que se obtienen de dichas definiciones.

**Definición 1** [6] *Una gráfica  $G$  consiste en un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices, denotado por  $V(G)$ . Junto con una colección de pares, no ordenados, de distintos vértices llamados las aristas de  $G$ , y denotados por  $A(G)$ .*

Podemos ver la definición de gráfica geoméricamente. En la figura 1.1 vemos un ejemplo de esta representación geométrica.

**Definición 2** [6] *Una digráfica  $D$  consiste en un conjunto finito no vacío de objetos llamados vertices, denotado por  $V(D)$ , junto con una colección de pares ordenados de distintos vértices llamadas flechas, y se denota  $F(D)$ .*

*Decimos que  $(u, v)$  es una flecha de  $D$  que comienza en el vértice  $u$  y termina en el vértice  $v$ .*

*En la figura 1.2 vemos una representación geométrica de*

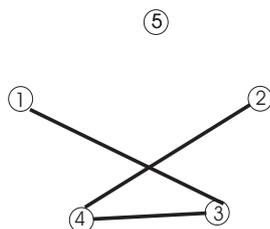


Figura 1.1: En esta figura representamos a  $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , y a  $A(G) = \{(1, 3), (4, 2), (3, 4)\}$ .

una digráfica, donde  $V(D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $F(D) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 2), (4, 5), (5, 6), (6, 4)\}$ .

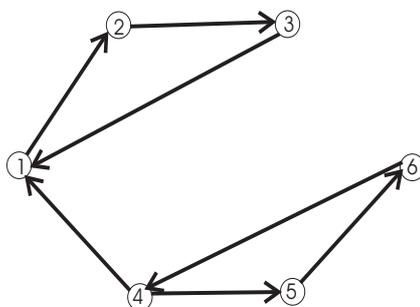


Figura 1.2: Digráfica.

Si  $f = (u, v) \in F(D)$  diremos que  $f$  incide desde  $u$  y que  $f$  incide hacia  $v$ .

**Definición 3** Una digráfica  $D$  es completa si  $D$  tiene todas las flechas que existen entre  $V(D)$ .

La digráfica de la figura 1.3 es un ejemplo de una digráfica completa.

**Definición 4** Decimos que la digráfica  $D^c$  es complemento de la digráfica  $D$  si:

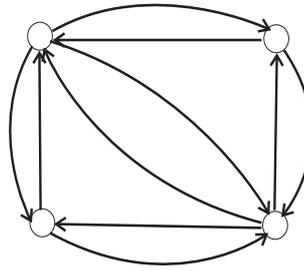


Figura 1.3: Digráfica completa.

1.  $V(D^c) = V(D)$  y
2.  $F(D^c) \cup F(D)$  es la digráfica completa formada por  $V(D)$ .

Para ver un ejemplo, podemos ver la figura 1.4.



Figura 1.4: Ejemplo de complemento de una digráfica.

**Definición 5** Un camino  $C$  de una gráfica  $G$  es una sucesión de vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tal que  $(v_i, v_{i+1}) \in A(C) \subseteq A(G)$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  con  $v_i \in V(G)$ .

**Definición 6** Un paseo  $P$  de una gráfica  $G$  es una sucesión de vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tal que  $(v_i, v_{i+1}) \in A(P) \subseteq A(G)$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  con  $v_i \in V(G)$ . Donde  $(v_i, v_{i+1}) \in A(G)$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y no se repiten aristas. Para ver un ejemplo de paseo, véase la figura 1.5.



El camino de la figura 1.5 no es generador, pero el de la figura 1.7 sí.

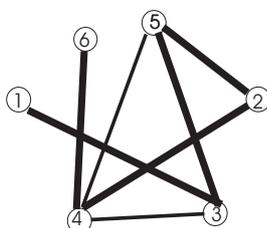


Figura 1.7: Las aristas mas oscuras formas un camino generador en  $G$ .

**Definición 9** Una trayectoria dirigida  $T$  de una digráfica  $D$  es una sucesión de vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  con  $v_i \in V(D)$  para toda  $i = 1, 2, \dots, n$ , tal que  $(v_i, v_{i+1}) \in F(T) \subseteq F(D)$  y  $v_i \neq v_j$  para cada  $i \neq j$ .

El camino dirigido de la figura 1.6 es una trayectoria.

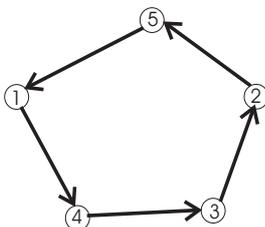
Notemos que todo paseo es un camino, pero no todo camino es un paseo. También toda trayectoria es un paseo, pero no todo paseo es una trayectoria. Así que todo paseo y toda trayectoria son caminos.

La longitud de un camino dirigido se define como el número de flechas que tiene dicha trayectoria.

**Definición 10** Un ciclo dirigido  $C$  de una digráfica  $D$  es una sucesión de vértices de la digráfica  $D$   $(v_1, v_2, \dots, v_n = v_1)$  tal que  $v_i \neq v_j$  para toda  $i \neq j$  (con excepción de  $1 = n$ ), y  $(v_i, v_{i+1}) \in F(C) \subseteq F(D)$ , par cada  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ .

En la figura 1.8 vemos un ejemplo de ciclo dirigido.

Podemos definir la longitud de un ciclo de manera similar a como definimos la longitud de una trayectoria. La longitud de un ciclo es el número de flechas que existen.

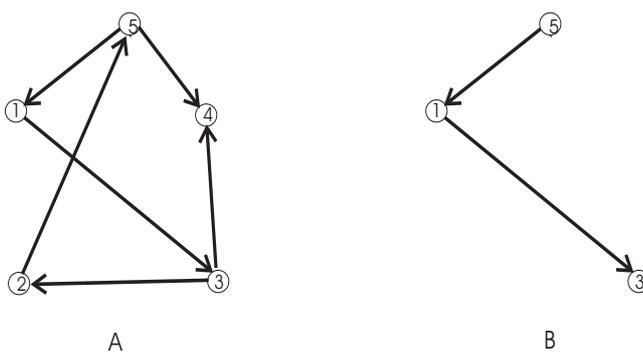
Figura 1.8: Ciclo dirigido,  $C = \{1, 4, 3, 2, 5, 1\}$ .

**Definición 11** Decimos que una digráfica  $D$  es bipartita si podemos partir a  $V(D)$  en dos conjuntos  $V_1, V_2$  tal que todas las flechas de  $D$  van de  $V_1$  a  $V_2$  o de  $V_2$  a  $V_1$ .

Las digráficas bipartitas no tienen ciclos impares.

**Definición 12** Sea  $D$  una digráfica. El conjunto  $S$  es una subdigráfica de  $D$  si cumple que  $V(S) \subseteq V(D)$  y  $F(S) \subseteq V(D)$ .

La subdigráfica generada por  $S$ , donde  $D$  es una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ , denotada por  $D[S]$ , es aquella que tiene como vértices a  $S$  y todas las flechas que en  $D$  hay entre dichos vértices.

Figura 1.9: La digráfica de la figura B es  $D[S]$  con  $S = \{1, 3, 5\}$ , de la digráfica de la figura A.

**Definición 13** Una subdigráfica inducida  $H$  de una digráfica  $D$  es una digráfica que cumple que,  $V(H) \subseteq V(D)$  y para cada  $u, v \in V(H)$ , si  $(u, v)$  y/o  $(v, u) \in F(D)$ , entonces estas flechas también están en  $F(H)$ .

Una subdigráfica inducida propia  $H$  de una digráfica  $D$  es una digráfica que cumple que,  $V(H)$  está contenido propiamente en  $V(D)$  y para cada  $u, v \in V(H)$ , si  $(u, v)$  y/o  $(v, u) \in F(D)$ , entonces estas flechas también están en  $F(H)$ .

Un ejemplo de esto lo podemos ver en la figura 1.10.

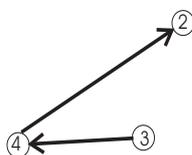


Figura 1.10: Esta es la subdigráfica inducida propia por los vértices 2, 3 y 4 de la digráfica de la figura 1.6.

**Definición 14** Una subdigráfica generadora  $H$  de una digráfica  $D$  cumple que  $V(H) = V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ .

Veamos la figura 1.11 para ver un ejemplo.

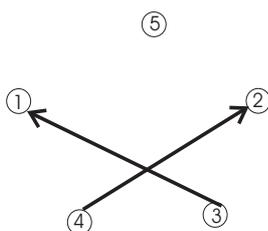


Figura 1.11: Esta es una subdigráfica generadora de la digráfica de la figura 1.6.

En una gráfica  $G$ , el grado de un vértice  $v \in V(G)$  es el número de aristas que inciden en  $v$ .

**Definición 15** Sea  $D$  una digráfica y  $u \in V(D)$ . El *ingrado* (exgrado) de  $u$  es el número de flechas que terminan en (comienzan en)  $u$ . En la figura 1.6 el vértice 4 tiene ingrado 1 y el vértice 3 tiene exgrado 2.

**Definición 16** Sea  $u \in V(D)$ . El *grado* de  $u$  es la suma de su ingrado y su exgrado. El grado del vértice 4 en la figura 1.6 es 2.

Denotamos por  $\delta_D^-(u)$  al ingrado del vértice  $u$ , por  $\delta_D^+(u)$  al exgrado del vértice  $u$  y por  $\delta_D(u)$  al grado de  $u$ .

El siguiente es un teorema que nos brinda una forma de saber cuando una digráfica tiene ciclos dirigidos.

**Teorema 1** Sea  $D$  una digráfica tal que para toda  $z \in V(D)$   $\delta_D^+(z) \geq 1$ , entonces  $D$  tiene algún ciclo dirigido.

**Demostración** Sea  $T$  una trayectoria dirigida en  $D$  de longitud máxima  $T = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ .



Por hipótesis,  $\delta_D^+(z_i) \geq 1$  para toda  $i = 0, \dots, n$ . Sea  $w \in V(D)$  tal que  $(z_n, w) \in F(D)$ . Por la elección de  $T$  se tiene que  $w \in V(T)$ , ya que si no fuera así  $T \cup (z_n, w)$  sería una trayectoria de longitud mayor que  $T$ ,  $w \neq z_n$ , entonces  $w$  es igual a un  $z_i \in V(T)$ . Por lo tanto  $\gamma = (w = z_i, z_{i+1}, \dots, z_n, w)$  es un ciclo dirigido en  $D$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . ■

Ahora daremos un teorema que será importante en la demostración de otros teoremas que veremos en el capítulo 3.

**Teorema 2** Todo camino dirigido cerrado contiene un ciclo dirigido.

**Demostración** Este teorema lo demostraremos por inducción sobre la longitud del camino.

1. Demostraremos para el caso en que el camino cerrado tiene 2 vértices  $(u_1, u_2, u_1)$ . Ya acabamos pues este ya es un ciclo dirigido.
2. Suponemos que el teorema se cumple para todo camino de longitud  $k$ , donde  $k < n$ .
3. Demostraremos para un camino dirigido cerrado  $C = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1} = u_1)$  de longitud  $n$ .
  - a) Si  $C$  no repite vértices, mas que el inicial y el final, entonces  $C$  ya es un ciclo dirigido.
  - b) Supongamos que  $C$  repite algún otro vértice. Sea  $u_i = u_j$  el primer vértice que se repite, supongamos sin pérdida de generalidad  $i < j$ .  
 $C' = (u_1, u_2, \dots, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_n = u_1)$  es un camino dirigido cerrado y  $l(C') < n$  (donde  $l(C')$  denota la longitud de  $C'$ ). Por hipótesis de inducción,  $C'$  tiene un ciclo dirigido, y como  $C' \subset C$ , entonces  $C$  tiene un ciclo dirigido.

■

El siguiente teorema nos va a ser muy útil en las demostraciones de otros teoremas que vamos a ver adelante.

**Teorema 3** *Todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido impar.*

**Demostración** Esta prueba es muy parecida a la del teorema anterior, y también lo demostraremos por inducción sobre la longitud del camino.

1. Demostraremos para el caso en que el camino cerrado tiene 3 vértices  $(u_1, u_2, u_3, u_1)$ . Ya acabamos pues este ya es un ciclo dirigido impar.

2. Suponemos que el teorema se cumple para un camino de longitud  $k$ , con  $k$  impar, donde  $k < n$ .
3. Demostraremos para un camino dirigido cerrado impar  $C = (u_1, u_2, \dots, u_n = u_1)$  de longitud  $n$ .

a) Si  $C$  no repite vértices, mas que el inicial y el final, entonces  $C$  ya es un ciclo dirigido de longitud impar.

b) Supongamos que  $C$  repite algún otro vértice. Sea  $u_i = u_j$  el primer vértice que se repite, supongamos in pérdida de generalidad que  $i < j$ .

Tenemos que  $C' = (u_1, u_2, \dots, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_n = u_1)$  es un camino dirigido cerrado y  $l(C') = p < n$ .

Si  $C'$  es de longitud impar, por la hipótesis de inducción  $C'$  tiene un ciclo dirigido de longitud impar, como  $C' \subset C$  entonces  $C$  también contiene a dicho ciclo dirigido de longitud impar.

Si  $C'$  es de longitud par, entonces  $C - C' = C'' = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_j = u_i)$  con  $l(C'') = q < n$  es un camino dirigido cerrado. Como  $l(C) = n$  es impar y  $n = p + q$ , entonces  $q$  es impar, ya que  $p$  es par. Por hipótesis de inducción  $C''$  tiene un ciclo dirigido de longitud impar, y como  $C'' \subset C$ , entonces dicho ciclo también esta en  $C$ .

■

**Definición 17** Sea  $D$  una digráfica, la gráfica subyacente de  $D$  (denotada por  $G_D$ ) esta definida por:

$$V(G_D) = V(D)$$

$$(u, v) \in A(G_D) \Leftrightarrow (u, v) \in F(D) \text{ ó } (v, u) \in F(D).$$

La gráfica subyacente de la digráfica de la figura 1.6 es la gráfica de la figura 1.12.

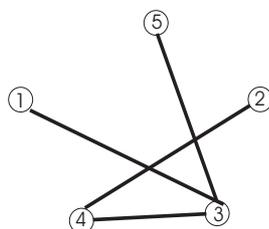


Figura 1.12: Esta es una gráfica subyacente de la digráfica de la figura 1.6.

Decimos que una gráfica  $G$  es *conexa* si para cualquier par de vértices de  $G$   $u$  y  $v$  existe un  $uv$ -camino. La gráfica de la figura 1.1 no es conexa.

Para digráficas tenemos definiciones semejantes, solo que en este caso podemos analizar 3 distintos tipos de conexidades.

**Definición 18** Sea  $D$  una digráfica. Se dice que  $D$  es conexa si  $G_D$  es conexa. La digráfica de la figura ?? si es conexa.

**Definición 19** Sea  $D$  una digráfica. Decimos que  $D$  es débilmente conexa si para cualesquiera dos puntos  $u, v \in V(D)$  existe un  $uv$ -camino dirigido ó un  $vu$ -camino dirigido. Un ejemplo de digráfica débilmente conexa lo podemos ver en la figura 1.13.

**Definición 20** Sea  $D$  una digráfica. Decimos que  $D$  es fuertemente conexa si para cualesquiera dos vértices  $u, v \in V(D)$  existe un  $uv$ -camino dirigido y un  $vu$ -camino dirigido (ver figura 1.8).

A continuación revisaremos algunas condiciones para saber algo mas sobre la conexidad de una digráfica (gráfica).

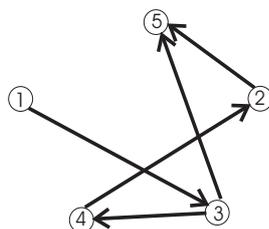
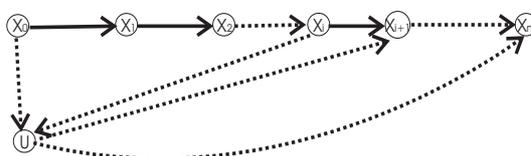


Figura 1.13: Esta digráfica es debilmente conexas.

**Teorema 4** *Una digráfica  $D$  es débilmente conexas si y sólo si  $D$  tiene un camino dirigido generador.*

**Demostración**  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $D$  es débilmente conexas. Sea  $C$  un camino dirigido que tiene al máximo número posible de vértices de  $D$ .  $C = (x_0, \dots, x_n)$

1. Si  $V(D) = V(C)$  ya terminamos, pues es lo que queremos.
2. Supongamos que existe  $u \in V(D) - V(C)$ .  
Por hipótesis existe un camino dirigido entre  $x_0$  y  $u$ ,  $C_0$ .



Si  $C_0$  va de  $u$  a  $x_0$  es una contradicción pues  $C_0 \cup C$  es un camino dirigido que tiene más vértices que  $C$ , por lo tanto  $C_0$  va de  $x_0$  a  $u$ . Análogamente podemos suponer que existe un camino dirigido  $C_n$  de  $u$  a  $x_n$ , ya que si  $C_n$  fuera de  $x_n$  a  $u$  entonces  $C \cup C_n$  seria un camino dirigido que tienes mas vértices que  $C$ . Por lo tanto existe un camino dirigido  $C'_1$  de  $x_i$  a  $u$  y existe un camino dirigido  $C'_2$  de  $u$  a  $x_{i+1}$  para alguna  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  (dicha

$i$  debe de existir ya que si no fuera así no existiría un camino de  $u$  a  $x_j$  para toda  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

$$(x_0, C, x_i) \cup C'_1 \cup C'_2 \cup (x_{i+1}, C, x_n) = C'$$

es un camino dirigido que tiene mas vértices de  $D$  que  $C$  y esto es una contradicción. Por lo tanto  $V(D) = V(C)$ .

$\Leftrightarrow$ ) Sea  $C$  un camino dirigido generador de  $D$ ,  $C = (x_0, \dots, x_n)$ . Sean  $u, v \in V(C)$ , ya que  $C$  es generadora se tiene, sin pérdida de generalidad,  $u = x_i, v = x_j$  con  $i < j$  ( $x_i, C, x_j$ ) es un  $uv$ - camino dirigido. ■

**Teorema 5** *Una digráfica  $D$  es fuertemente conexa si y sólo si  $D$  tiene un camino dirigido cerrado generador.*

**Demostración**  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $D$  es fuertemente conexa.

Sea  $C$  un camino dirigido cerrado de  $D$  que pasa por el mayor número de vértices de  $D$ .

Probaremos que  $V(D) \subseteq V(C)$  por reducción al absurdo.

Supongamos que existe  $z \in V(D) - V(C)$ , sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$ . Existe  $C_1$  un  $x_0z$ -camino dirigido en  $D$  y existe  $C_2$  un  $zx_0$ -camino dirigido.

Consideremos  $C' = C_1 \cup C_2 \cup C$  es un camino dirigido cerrado tal que  $|V(C')| > |V(C)|$ , esto es una contradicción pues supusimos que  $C$  era el camino dirigido cerrado que más vértices tenía, por lo tanto  $V(C) = V(D)$ .

$\Leftrightarrow$ ) Existe un camino dirigido cerrado generador  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$ .

Sean  $u, v \in V(D)$  por lo tanto  $u = x_i$  y  $v = x_j$  sin pérdida de generalidad tomamos  $i < j$ , ( $x_i, C, x_j$ ) es un  $uv$ -camino dirigido en  $D$ , y  $(x_j, C, x_n = x_0) \cup (x_0, C, x_i)$  es un  $vu$ -camino dirigido. ■

**Teorema 6** *Sea  $D$  una digráfica,  $D$  es fuertemente conexa si y sólo si para toda partición de  $V(D)$  en dos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  existen  $V_1V_2$ -flecha y  $V_2V_1$ -flecha.*

**Demostración**  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $D$  es fuertemente conexa.

Sea  $(V_1, V_2)$  una partición de  $V(D)$ .

Sean  $x_1 \in V_1$  y  $x_2 \in V_2$ , como  $D$  es fuertemente conexa entonces existe una trayectoria dirigida de  $x_1$  a  $x_2$   $T = (x_1 = z_0, z_1, \dots, z_n = x_2)$ . Sea  $z_i$  el último vértice de  $T$  que esta en  $V_1$ . Por lo tanto  $z_i \in V_1$  y  $z_{i+1} \in V_2$ . Por lo tanto  $(z_i, z_{i+1})$  es una  $V_1V_2$ -flecha.

También por ser  $D$  fuertemente conexa, existe una trayectoria dirigida de  $x_2$  a  $x_1$   $T' = (x_2 = z'_0, \dots, z'_n = x_1)$ . Sea  $z'_j$  el último vértice de  $T'$  que esta en  $V_2$ , ésto quiere decir que  $z'_{j+1} \in V_1$ . Por lo tanto,  $(z'_j, z'_{j+1})$  es una  $V_2V_1$ -flecha.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que para toda partición de  $V(D)$  existe  $V_1V_2$ -flecha y también existe  $V_2V_1$ -flecha.

Por demostrar que  $D$  es fuertemente conexa. Sean  $u, v \in V(D)$ , vamos a demostrar que existe un  $uv$ -camino dirigido.

Sea  $V_1 = \{z \in V(D) | \exists uz\text{-camino dirigido en } D\}$

1. Si  $v \in V_1$  ya terminamos, pues ya tenemos lo que queremos.
2. Si  $v \notin V_1$ , sea  $V_2 = V(D) - V_1$ .  $V_1, V_2$  es una partición de  $V(D)$ , por hipótesis existe  $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$  y  $(x_1, x_2) \in F(D)$ , como  $x_1 \in V_1 \exists C$  un  $ux_1$ -camino dirigido, entonces  $C \cup (x_1, x_2)$  es un  $ux_2$ -camino dirigido en  $D$  por lo tanto  $x_2 \in V_1$  y esto es una contradicción. Por lo tanto  $v \in V_1$ .

Con esto demostramos que  $D$  es débilmente conexa, para terminar la demostración tenemos que demostrar que también existe un  $vu$ -camino dirigido.

Sea  $V'_1 = \{z' \in V(D) \mid \exists v z' \text{-camino dirigido en } D\}$

1. Si  $u \in V'_1$  ya terminamos.
2. Si  $u \notin V'_1$ , consideramos  $V'_2 = V(D) - V'_1$ .  $V'_1, V'_2$  es una partición de  $V(D)$ , por hipótesis existe  $x'_1 \in V'_1$  y  $x'_2 \in V'_2$  tales que  $(x'_1, x'_2) \in F(D)$ , como  $x'_1 \in V'_1$  existe  $C'$  un  $vx'_1$ -camino dirigido, entonces  $C' \cup (x'_1, x'_2)$  es un  $vx'_2$ -camino dirigido en  $D$  por lo tanto  $x'_2 \in V'_1$  y esto es una contradicción. Por lo tanto  $u \in V'_1$ .

Por lo tanto  $D$  es fuertemente conexa. ■

## Capítulo 2

# Aplicaciones

En este capítulo veremos algunas aplicaciones importantes que existen de la Teoría de Núcleos.

### 2.1. Toma de decisiones [13]

Ésta es una aplicación muy importante.

Supongamos que  $m$  personas se reúnen para tomar una decisión. Tienen que elegir de  $n$  posibilidades la mejor.

Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  donde  $x_i$  es una posibilidad, para toda  $i$ .

Para resolver esto tenemos que definir una forma de decir cuando una posibilidad es preferible a otra. No podemos tomar en cuenta cada una de las preferencias de cada persona, porque a menos que todas las personas tengan preferencia por la misma posibilidad, este método no nos da una solución al problema. Así que tomaremos el siguiente criterio.

La posibilidad  $x_i$  es efectivamente preferible a la posibilidad  $x_j$  si existe un grupo capaz de imponer la preferencia de  $x_i$  sobre  $x_j$ .

Ponemos una flecha de  $x_i$  a  $x_j$  si la opción  $x_j$  es efectivamente preferible a la opción  $x_i$ .

Formamos una digráfica  $D$  donde  $V(D) = X$  y  $(x_i, x_j) \in F(D)$  si  $x_j$  es efectivamente preferible a la posibilidad  $x_i$ . Si podemos encontrar un conjunto de vértices en  $V(D)$  el cual no tenga flechas entre los vertices de dicho conjunto y que además de cualquier otro vértice de  $V(D)$ , que no este en él conjunto, salga una flecha hacia algún vértice del conjunto, entonces el problema se nos reduce a escoger un vértice del conjunto que encontramos. Ésto pasa ya que si no hay flechas entre los vértices del conjunto entonces quiere decir que entre estos vértices, ninguna posibilidad es efectivamente preferible a otra, aparte que del hecho de que de cualquier otro vértice que no esta en el conjunto salga una flecha hacia uno del conjunto, nos deice que todas las posibilidades del conjunto son efectivamente preferibles que cualquiera que no este en el conjunto.

## 2.2. Base de axiomas de una teoría [3]

Siempre es muy útil tener una base de axiomas para toda teoría, ya que con esto sabemos cuales son las proposiciones mas importantes y necesarias para una teoría. Este es un problema que podemos solucionar con Teoría de Núcleos de una manera muy sencilla.

Dada una teoría  $T$  formada por un conjunto finito de proposiciones  $p_1, p_2,$

$p_3, \dots,$  podemos encontrar una base de axiomas formada por sus proposiciones.

Esto se modela tomando una digráfica  $D$  de la siguiente for-

ma. Tomamos un vértice por cada proposición y ponemos una flecha de  $p_i$  a  $p_j$  si la proposición  $p_j$  es implicada por la proposición  $p_i$ . Lo que queremos es encontrar un conjunto de los vértices de  $D$  que cumpla que entre los vértices de dicho conjunto no haya flechas y que para cualquier otro vértice que no este en el conjunto salga una flecha hacia el conjunto. El hecho de que entre vértices de este conjunto no haya flechas nos indica que ninguna de la proposiciones de dicho conjunto se sigue de ninguna, y la otra condición nos indica que todas la proposiciones que no esten en el conjunto son implicadas por alguna proposición del conjunto. Si lo gramos encontrar un conjunto así, lo s vértices de este conjunto nos dan una base de axiomas para el teorema.

Esta digráfica es transitiva (ya que si  $p_i$  es implicada por  $p_j$  y  $p_j$  es implicada por  $p_k$  entonces  $p_i$  es implicada por  $p_k$ ) por lo tanto siempre vamos a poder encontrar un conjunto con las características que necesitamos. Este es un resultado que demostraremos en el capítulo 3.

### 2.3. Contraejemplos [2]

Sean  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  un conjunto de proposiciones y  $T$  una teoría (de la forma proposición  $p_i$  implica proposición  $p_j$ ).

Queremos ver que esta teoría es completa, o sea, queremos demostrar que todas las implicaciones representadas por las flechas de una digráfica  $D$  (donde  $V(D) = P$  y  $(p_i, p_j) \in F(D)$  si) son todas las que son verdaderas, o sea que todas las flechas de  $D^c$  (donde  $D^c$  es el complemento de la digráfica  $D$ ) son falsas. Para ver ésto de un modo más rápido lo que

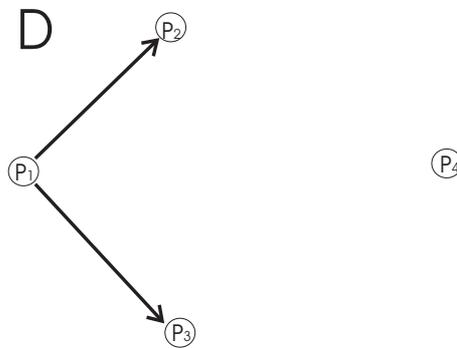
queremos es encontrar el mínimo número de contraejemplos para probar la completitud de la teoría.

Consideramos la digráfica  $D^c$ . Definimos la digráfica  $\tilde{D}$  como sigue:

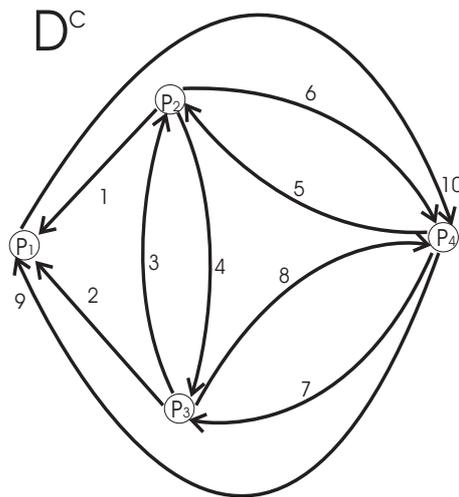
1. Tomamos un vértice por cada flecha de  $D^c$ , los llamamos  $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$
2. Ponemos una flecha de  $y_r$  a  $y_s$  cuando pasa que si la implicación  $y_r$  es verdadera entonces la implicación  $y_s$  es verdadera.

Si  $\tilde{D}$  tiene un conjunto  $\tilde{N}$  que no tenga flechas entre los vértices de  $\tilde{N}$  y que aparte para cualquier vértice que no pertenezca a los vértices de  $\tilde{N}$  exista una flecha hacia uno de  $\tilde{N}$ , entonces el problema se reduce a probar la falsedad de cada implicación de  $\tilde{N}$ .

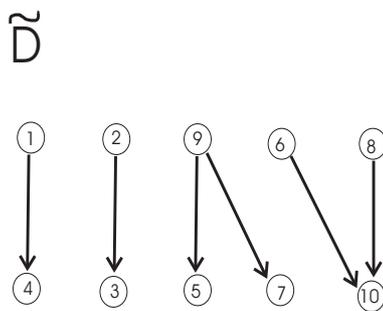
Para ilustrar mejor esto voy a considerar la siguiente digráfica como  $D$ :



Entonces  $D^c$  queda de la forma que sigue:



Por lo tanto, la gráfica  $\tilde{D}$  nos queda de la siguiente manera:



En este caso  $\tilde{N} = \{3, 4, 5, 7, 10\}$  es un conjunto que cumple con las condiciones que necesitamos. Por ser  $\tilde{N}$  absorbente, tenemos que si las implicaciones 3, 4, 5, 7 y 10 son falsas, entonces todas las implicaciones de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 10 son falsas. Como  $\tilde{N}$  es independiente, entonces este conjunto es mínimo con las propiedades anteriores. Con esto podemos ver que con que demos cinco contraejemplos podemos demostrar que todas las implicaciones de  $D$  son falsas.

## Capítulo 3

### Núcleos

En este capítulo veremos la definición de unas digráficas que son muy importantes ya que con base en ellas podemos resolver muchos problemas de la vida matemática diaria, como son los ejemplos que ya vimos en el capítulo 2.

**Definición 21** Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ ,  $S \neq \emptyset$ . Decimos que  $S$  es un conjunto independiente si para cualesquiera dos puntos  $u, v \in S$  no existe  $uv$ -flecha ni  $vu$ -flecha. En la figura 3.1 podemos ver un ejemplo de un conjunto independiente.

**Definición 22** Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ ,  $S \neq \emptyset$ . Decimos que  $S$  es absorbente si para cada  $x \in (V(D) - S)$  existe  $xS$ -flecha.

Veamos la figura 3.1 para ver un ejemplo.

**Definición 23** [13] Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ ,  $S \neq \emptyset$ . Se dice que  $S$  es núcleo de  $D$  si  $S$  es un conjunto independiente y es absorbente.

Un ejemplo de núcleo lo podemos ver en la figura 3.2.

No todas las digráficas tienen núcleo pues se necesitan cumplir dos condiciones muy fuertes para que esto suceda. Un

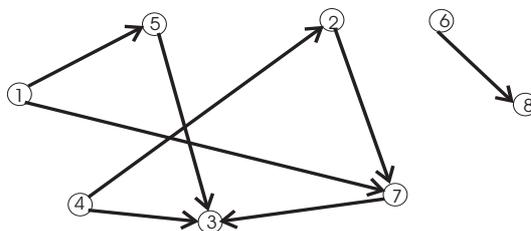


Figura 3.1: En esta digráfica el conjunto  $S = (3, 7, 8)$  es un conjunto absorbente, y el conjunto  $S' = (4, 5, 7, 8)$  es un conjunto independiente.

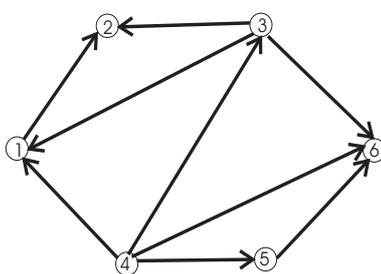


Figura 3.2: En esta digráfica el conjunto  $S = (2, 6)$  es un núcleo.

ejemplo de digráficas que no tienen núcleo son los ciclos de longitud impar. En estas digráficas siempre se va a quedar un vértice que no pueda ser absorbido por algún vértice de un subconjunto independiente máximo, o podemos encontrar un subconjunto que absorba a todos los vértices que no estén en dicho subconjunto pero que no pueda ser extendido a un conjunto independiente. También existen digráficas que con núcleo como es el caso de los ciclos de longitud par, estas digráficas tienen núcleo y de hecho no es único.

En la figura 3.3 podemos encontrar un ejemplo de lo antes mencionado.

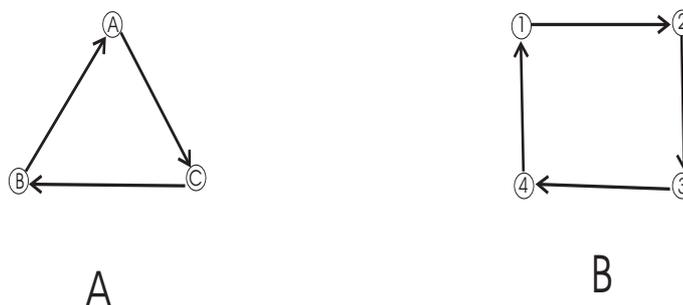


Figura 3.3: La figura A es un ciclo de longitud impar, por lo cual no tiene núcleo. La otra figura, la B, es un ciclo de longitud par que tiene dos núcleos,  $S = (1, 3)$  y  $S' = (2, 4)$ .

En lo que sigue de este capítulo veremos algunos teoremas que sirven para identificar cuando una digráfica tiene núcleo.

**Teorema 7** *Sea  $D$  una digráfica.  $N \subseteq V(D)$  es núcleo de  $D$  si y sólo si  $N$  es independiente máximo de  $D$  y  $N$  es absorbente mínimo de  $D$ .*

**Demostración**  $\Rightarrow$ ) Sea  $N$  un núcleo de  $D$ , por definición  $N$  es independiente y para cada  $x \in V(D) - N$  existe  $xN$ -flecha por lo tanto  $N$  es independiente máximo.

Por definición de núcleo  $N$  es absorbente y como para cada  $x \in N$  no existe  $xN$ -flecha se tiene que es absorbente mínimo.

$\Leftarrow$ ) Esto se tiene por definición de núcleo. ■

**Definición 24** *Las componentes fuertemente conexas de una digráfica  $D$  son las subdigráficas inducidas de  $D$  que son fuertemente conexas y son máximas por contención. Para entender más claramente esta definición podemos ver un ejemplo en la figura 3.4.*

**Definición 25** *La digráfica de condensación de una digráfica  $D$ ,  $D^*$ , se define de la siguiente forma:  $V(D^*) = \{C \subseteq D \mid C$*

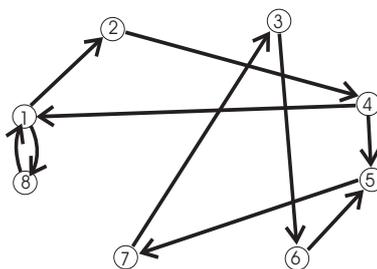


Figura 3.4: Esta digráfica tiene dos componentes fuertemente conexas, una esta formada por la digráfica inducida por los vértices 1, 2, 4, 8, y la otra esta formada por la digráfica inducida por los vertices 3, 5, 6, 7.

es componente fuertemente conexa de  $D$  y  $(C_i, C_j) \in F(D^*)$  si y solo si en  $D$  existe flecha de  $C_i$  a  $C_j$ . Para ver un ejemplo veamos la figura 3.6.

Decimos que una componente fuertemente conexa es terminal si en la digráfica de condensación de la digráfica, el vértice que corresponde a dicha componente conexa tiene ingrado 1.

**Teorema 8**  $D^*$  es acíclica.

**Demostración** Supongamos por contradicción que  $D^*$  tiene un ciclo  $C = (X_0, X_1, \dots, X_n = X_0)$  donde  $X_i \in V(D^*)$ . La digráfica generada por  $(X_0, X_1, \dots, X_n = X_0)$  es fuertemente conexa, ya que forman un ciclo. Si existe  $(X_i, X_j)$ -flecha en  $D^*$  esto quiere decir que en  $D$  existe una flecha de  $X_i$  a  $X_j$  para todo  $i, j \in V(D^*)$ , esto nos dice que en  $D$  existe un ciclo que une a todos los vértices, como todo ciclo es fuertemente conexo y cada  $X_i$  es fuertemente conexa, entonces  $D$  es fuertemente conexa y solo tiene una componente fuertemente conexa, entonces  $D^*$  solo sería un punto. Por lo tanto  $D^*$  no puede tener ciclos. ■

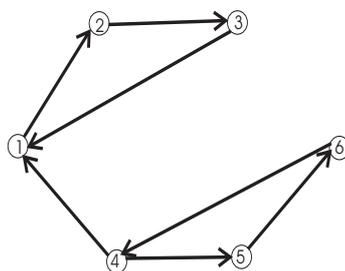


Figura 3.5: Digráfica.



Figura 3.6: Digráfica de condensación de la digráfica de la figura 3.5, donde  $C_1$  es la componente conexa inducida por los vértices  $\{1, 2, 3\}$  y  $C_2$  la componente fuertemente conexa inducida por  $\{4, 5, 6\}$ .

**Definición 26** Sea  $D$  una digráfica y  $f = (u, v) \in F(D)$ ,  $f$  es simétrica si  $(v, u) \in F(D)$  (ver figura 3.7).

**Definición 27** Sea  $D$  una digráfica y  $f = (u, v) \in F(D)$ ,  $f$  es asimétrica si  $(v, u)$  no es flecha de  $D$  (ver figura 3.7).

La parte asimétrica (parte simétrica) de una digráfica  $D$ , denotada por  $Asim(D)$  ( $Sim(D)$ ), es la subdigráfica generadora de  $D$  cuyas flechas son las flechas asimétricas (simétricas) de  $D$ . En la digráfica de la figura 3.8 vemos la parte asimétrica

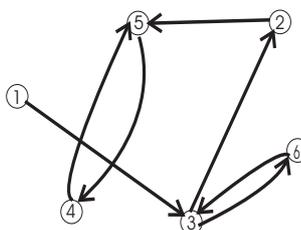


Figura 3.7: En esta digráfica  $f = (4, 5)$  y  $f' = (3, 6)$  son flecha simétricas, y todas las demás son asimétricas.

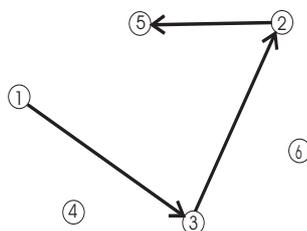


Figura 3.8: Esta es la digráfica de la parte asimétrica de la digráfica de la figura 3.7.

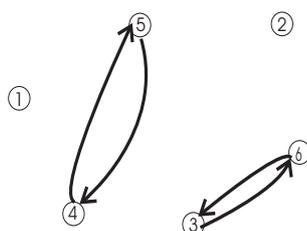


Figura 3.9: Esta es la digráfica de la parte simétrica de la digráfica de la figura 3.7.

de la digráfica de la figura 3.7, y en la digráfica de la figura 3.9 podemos ver la parte simétrica de la misma digráfica, la de la figura 3.7. Una digráfica  $D$  es *simétrica* si cada flecha de  $D$  es simétrica.

**Teorema 9** *Sea  $D$  una digráfica. Si  $D$  es simétrica, entonces cada conjunto de vértices independiente máximo es núcleo de  $D$ .*

**Demostración** Sea  $N \subseteq V(D)$  un conjunto independiente máximo, vamos a demostrar que  $N$  es absorbente.

Supongamos por contradicción que  $N$  no es absorbente, entonces existe  $x \in V(D) - N$  tal que no existe  $xN$ -flecha, como  $D$  es simétrica tampoco existe  $Nx$ -flecha.  $N \cup \{x\}$  es un conjunto independiente mayor que  $N$  y esto es una contradicción ya que a  $N$  lo tomamos independiente máximo, por lo tanto  $N$  es absorbente. ■

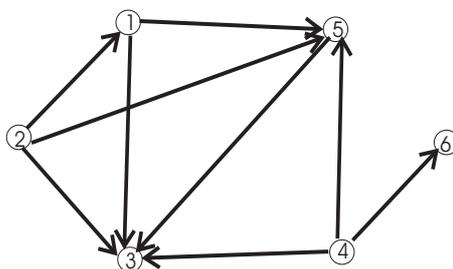


Figura 3.10: Esta es una digráfica transitiva.

**Definición 28** Sea  $D$  una digráfica, diremos que  $D$  es transitiva si dadas  $(u, v), (v, w) \in F(D)$ , entonces también  $(u, w) \in F(D)$ . Un ejemplo de una digráfica transitiva lo podemos ver en la figura 3.10.

Esta definición nos será de utilidad para encontrar otra manera de saber cuando una digráfica tiene núcleo.

**Observación 1** Cada componente fuertemente conexa de una digráfica transitiva induce en  $D$  una subdigráfica completa simétrica.

**Observación 2** Si  $D$  es transitiva y fuertemente conexa, entonces cada vértice de  $D$  es núcleo.

**Teorema 10** Toda digráfica  $D$  transitiva tiene núcleo, y todos sus núcleos tienen la misma cardinalidad.

**Demostración** Sea  $D$  una digráfica transitiva y  $D^*$  su digráfica de condensación. Por el Teorema 8  $D^*$  es acíclica, por lo tanto tiene vértices de exgrado cero, por el Teorema 1.

Sea  $N = \{z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*\} = \{z^* \in V(D^*) \mid \delta_{D^*}^+(z^*) = 0\}$ . Elegimos un punto  $z_i \in V(D)$  para cada  $z_i^*$ . Afirmando que  $Z = \{z_i \mid i = 1, 2, \dots$

,  $n$ ) es núcleo de  $D$ . Es fácil ver que  $Z$  es independiente (ya que en  $D^*$  no hay flechas de  $z_i^*$  a  $z_j^*$ , ni de  $z_i^*$  a  $z_j^*$ ).

Por demostrar que  $Z$  es absorbente. Sea  $x \in V(D) - Z$ , si  $\delta_D^+(x) = 0$ , entonces  $\{x\}$  es una componente fuertemente conexa de  $D$  que tiene exgrado cero en  $D^*$ , por lo tanto  $x \in Z$  y esto es una contradicción, por lo tanto  $\delta_D^+(x) > 0$ .

Sea  $C_x$  la componente fuertemente conexa que contiene a  $x$  y sea  $T^* = (C_x = C_{x_0}, C_{x_1}, \dots, C_{x_n})$  una trayectoria dirigida de longitud máxima en  $D^*$  que empieza en  $C_x$ . Como  $D^*$  es acíclica y  $T^*$  de longitud máxima, entonces  $\delta_{D^*}^+(C_{x_n}) = 0$ .

Como  $D$  es transitiva, entonces  $D^*$  también es transitiva por lo tanto existe  $(C_x, C_{x_n}) \in F(D^*)$ . Como  $D$  es transitiva,  $C_x$  es fuertemente conexa y  $C_{x_n}$  también es fuertemente conexa, entonces para cada  $a \in V(C_x)$  y  $b \in V(C_{x_n})$   $(a, b) \in F(D)$ , en particular,  $(x, z_k) \in F(D)$  en donde  $z_k \in V(C_{x_k})$  para toda  $k = 1, \dots, n$  y  $z_k$  es el punto elegido de  $C_{x_k}$ . Por lo tanto,  $Z$  es un núcleo.

Ahora veremos que todos los núcleos tienen la misma cardinalidad:

1. Si  $D$  es fuertemente conexa, entonces  $D$  es completa simétrica y todo núcleo tiene cardinalidad 1.
2. Si  $D$  no es fuertemente conexa, cada núcleo de  $D$  debe tener al menos un punto de cada componente terminal (componente fuertemente conexa de exgrado cero en  $D^*$ ) y debe tener a lo más un punto de cada componente terminal (si tuviera dos ya no sería independiente).

Ya observamos que para cada punto  $z$  que no está en una componente terminal existe una componente terminal  $C_n$  tal que hay flecha en  $D$  de  $z$  a cada punto de  $C_x$ . Por lo que  $z$  no puede estar en un núcleo. Por lo tanto

la cardinalidad de cada núcleo es el número de vértices terminales de la digráfica  $D^*$ .

Por lo tanto todos los núcleos tienen la misma cardinalidad. ■  
Si aplicamos el proceso de esta demostración a la digráfica de la figura 3.10, claramente las componentes conexas son los mismos vértices de la digráfica. En este caso los vértices de exgrado cero son el 3 y el 6, los cuales son independientes y absorben a todos los demás vértices.

**Teorema 11** [13] *Toda digráfica sin ciclos dirigidos tiene un único núcleo.*

**Demostración** Sea  $D$  una digráfica sin ciclos dirigidos, y sea  $X_0 = \{z \in V(D) \mid \delta_D^+(z) = 0\}$ , entonces  $X_0 \neq \emptyset$ , pues si no fuera así  $D$  tendría un ciclo dirigido, esto pasa por el Teorema 1.

Sea  $Y_0 = \{z \in V(D) \mid \exists z X_0\text{-flecha en } D\}$ .

$X_1 = \{z \in V(D) - (X_0 \cup Y_0) \mid \delta_{D - (X_0 \cup Y_0)}^+(z) = 0\}$ .

$Y_1 = \{z \in V(D) - (X_0 \cup Y_0) \mid \exists z X_1\text{-flecha en } D - (X_0 \cup Y_0)\}$ .

Y así nos seguimos, si  $X_i$  y  $Y_i$  están definidos, entonces  $X_{i+1} = \{z \in V(D) - (\bigcup_{j=0}^i X_j \cup \bigcup_{j=0}^i Y_j) \mid \delta_{D_{i+1}}^+(z) = 0\}$  y  $Y_{i+1} = \{z \in V(D) - (\bigcup_{i=0}^j X_i \cup \bigcup_{i=0}^j Y_i) \mid \exists z X_{i+1}\text{-flecha en } D_{i+1}\}$ . Donde tenemos que  $D_n = D - \bigcup_{i=0}^{n-1} X_i \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} Y_i$

Sea  $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_{n+1} = \emptyset\}$ . Sea  $N = \bigcup_{k=0}^{n_0} X_k$ . Por demostrar que  $N$  es núcleo de  $D$ .

1. Supongamos que  $N$  no es independiente, entonces existe  $(u, v) \in F(D)$  ó  $(v, u) \in F(D)$  con  $u \in X_i$  y  $v \in X_j$   $i, j = 0, \dots, n_0$ , sin pérdida de generalidad suponemos que  $i < j$ . No puede existir  $(u, v) \in F(D)$  ya que  $\delta_{D_i}^+(u) = 0$  y  $i < j$ . Entonces existe  $(v, u) \in F(D)$ , esto quiere decir que  $v \in Y_i \therefore v$  no puede estar en  $X_j$ .  $\therefore N$  es independiente.

2.  $N$  es absorbente ya que cada  $X_k$  absorbe a los vértices de cada  $Y_k$  para toda  $k = 0, \dots, n_0$ . No existen vértices en  $Y_{n_0+1}$  ya que si existiera al menos uno esto implicaría que  $X_{n_0+1} \neq \emptyset$ , y esto es una contradicción.

La forma de obtener el núcleo fue única, por lo tanto el núcleo es único. ■

Esta demostración es bastante clara ya que la fuimos construyendo el núcleo.

### 3.1. Núcleo imperfecta crítica

**Definición 29** [8][14] *Una digráfica  $D$  es núcleo perfecta si toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.*

**Definición 30** [4] *Una digráfica  $D$  es núcleo imperfecta crítica si  $D$  no tiene núcleo, pero toda subdigráfica inducida propia sí tiene núcleo.*

**Lema 1** *Si  $D$  es una digráfica que no tiene núcleo, entonces  $D$  contiene una subdigráfica inducida que es núcleo imperfecta crítica.*

#### Demostración

1. Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica ya acabamos.
2. Si  $D$  no es núcleo imperfecta crítica, entonces existe  $S_0$  una subdigráfica inducida de  $D$  que no tiene núcleo. Si  $S_0$  es núcleo imperfecta crítica ya terminamos, de otro modo existe  $S_1$  subdigráfica inducida de  $S_0$  que no tiene núcleo. Si  $S_1$  es núcleo imperfecta crítica ya terminamos dado que  $S_1$  también es subdigráfica de  $D$ ; si

$S_1$  no es núcleo imperfecta crítica existe  $S_2$  subdigráfica inducida de  $S_1$ , así seguimos el proceso. Este procedimiento es finito ya que la digráfica es finita y toda digráfica de a lo más 2 vértices es núcleo perfecta, sea  $S_n$  la última digráfica del proceso, esto quiere que  $S_n$  ya es núcleo imperfecta crítica pues ya no existe  $S_{n+1}$  subdigráfica de  $S_n$  que no tenga núcleo. Como  $S_n \subset S_{n-1} \subset \dots \subset S_0 \subset D$ , entonces  $S_n$  es una subdigráfica de  $D$  que es núcleo imperfecta crítica.

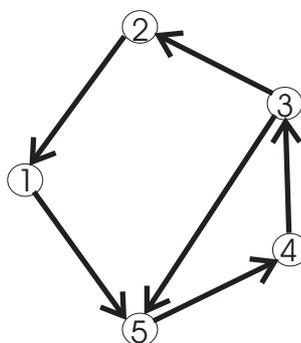


Figura 3.11: Esta digráfica no tiene núcleo, y tampoco es núcleo imperfecta crítica. Tomamos  $S_0 = \{3, 4, 5\}$ .  $D[S_0]$  no tiene núcleo, pero si es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto  $D$  contiene una subdigráfica inducida que es núcleo imperfecta crítica. ■

**Teorema 12** *Sea  $D$  una digráfica. Si  $D$  es fuertemente conexa, entonces contiene ciclos dirigidos.*

**Demostración** Como  $D$  es fuertemente conexa para cada  $u, v \in V(D)$  existen  $T_1$  una trayectoria dirigida en  $D$  de  $u$  a  $v$  y  $T_2$  una trayectoria dirigida en  $D$  de  $v$  a  $u$ .  $T_1 \cup T_2$  es un camino dirigido cerrado, y todo camino dirigido cerrado contiene un ciclo dirigido. ■

**Teorema 13** *Sea  $D$  una digráfica. Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces  $Asim(D)$  tiene ciclos dirigidos.*

**Demostración** Sabemos que  $Asim(D)$  es fuertemente conexa, y por el teorema anterior tenemos que tiene ciclos dirigidos. ■

**Teorema 14** *Sea  $D$  una digráfica,  $D$  es núcleo perfecta si y sólo si la digráfica inducida por cada componente fuertemente conexa de  $Asim(D)$  es núcleo perfecta.*

**Demostración**  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $D$  es núcleo perfecta y sea  $C$  una componente fuertemente conexa de  $Asim(D)$ , entonces  $D[V(C)]$  es una subdigráfica inducida de  $D$  y como  $D$  es núcleo perfecta se tiene que  $D[V(C)]$  es núcleo perfecta.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que para cada componente fuertemente conexa  $C$  de  $Asim(D)$  se tiene que  $D[V(C)]$  es núcleo perfecta. Vamos a demostrar por reducción al absurdo que  $D$  es núcleo perfecta.

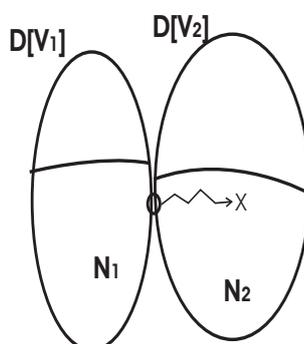
Supongamos que  $D$  no es núcleo perfecta, entonces  $D$  contiene una subdigráfica inducida  $H$ ,  $H \subset D$  tal que  $H$  es núcleo imperfecta crítica. Ya demostramos que  $Asim(H)$  es fuertemente conexa, por lo tanto  $Asim(H) \subseteq C'$ ,  $C'$  componente fuertemente conexa de  $D$  (ya que  $Asim(H) \subset Asim(D)$ ). Por hipótesis  $D[V(C')]$  es núcleo perfecta,  $H \subset D[V(C')]$  y  $H$  es núcleo imperfecta crítica, esto es una contradicción. Entonces se sigue que  $D$  es núcleo perfecta. ■

**Teorema 15** *Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces  $G_D$  (gráfica subyacente a  $D$ ) no tiene puntos de corte.*

**Demostración** Supongamos por contradicción que  $D$  es núcleo imperfecta crítica y que  $G_D$  tiene un punto de corte

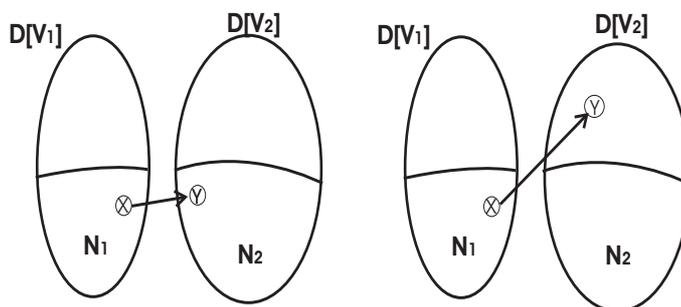
$x \in V(G_D) = V(D)$ ). Como  $G_D$  tiene un vértice de corte, entonces podemos partir a  $V(G_D) - \{x\}$  en dos conjuntos,  $V_1$  y  $V_2$  tales que no existe arista de  $V_1$  a  $V_2$  en  $G_D - \{x\}$ . Dado que  $D$  es núcleo imperfecta crítica,  $D[V_1]$  y  $D[V_2]$  tienen núcleos,  $N_1$  y  $N_2$  respectivamente. Vamos a ver los siguientes casos:

1. Si  $x \in N_1 \cap N_2$ , entonces  $N_1 \cup N_2$  es un núcleo de  $D$  y esto es una contradicción.



2. Si  $x \notin N_1$  o  $x \notin N_2$ , sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $x \notin N_1$  pero  $x \in V_1$ :

Como  $x \notin N_1$  existe  $xN_1$ -flecha en  $D[V_1]$ , y tomando  $N'_2$  núcleo de  $D[V_2] - \{x\}$ , tenemos que  $N_1 \cup N'_2$  es un núcleo de  $D$ .



Por lo tanto  $G_D$  no tiene puntos de corte. ■

**Observación 3** Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces  $Asim(D)$  tiene al menos un ciclo dirigido.

**Demostración** Como  $Asim(D)$  es fuertemente conexa se tiene que  $Asim(D)$  tiene un camino dirigido cerrado generador, por el Teorema 2.

$Asim(D)$  tiene un ciclo dirigido (todo camino dirigido cerrado contiene un ciclo dirigido).

Es decir, toda digráfica núcleo imperfecta crítica contiene al menos un ciclo dirigido asimétrico. ■

**Teorema 16** Si  $D$  es una digráfica tal que cada ciclo dirigido posee al menos una flecha simétrica, entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración** Supongamos por contradicción que  $D$  no es núcleo perfecta, por lo tanto existe  $H \subseteq D$  tal que  $H$  es núcleo imperfecta crítica. Por la observación anterior,  $H$  contiene un ciclo dirigido asimétrico  $\gamma$  y como  $H$  es subdigráfica inducida de  $D$  se tiene que  $\gamma$  es un ciclo asimétrico en  $D$ . ■

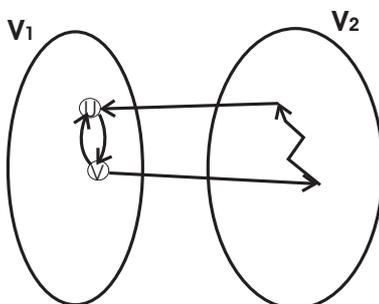
**Teorema 17** Si cada ciclo dirigido impar de  $D$  posee al menos dos flechas simétricas, entonces  $D$  tiene núcleo.

**Demostración** Sea  $C$  una componente fuertemente conexa de  $Asim(D)$ , como  $C$  no posee ciclos dirigidos impares entonces  $C$  es bipartita y por lo tanto es núcleo perfecta. Probaremos que  $D[V(C)]$  es núcleo perfecta. Sabemos que  $C$  es bipartita, entonces existe una bipartición de  $V(C)$  en dos conjuntos,  $V_1$  y  $V_2$ , tal que toda flecha de  $C$  une un vértice de  $V_1$  con algún vértice de  $V_2$ .

Afirmamos que  $V_1, V_2$  es una bipartición de  $V(D[V(C)])$  que

hace a  $D[V(C)]$  bipartita.

Supongamos que existe una flecha de  $D[V(C)]$  con ambos extremos en  $V_1$ . Por la elección de  $V_1$  y  $V_2$  esta flecha debe ser una flecha simétrica de  $D$ ; sea  $f = (u, v)$  dicha flecha. Como  $C$  es fuertemente conexa y bipartita con bipartición  $V_1$  y  $V_2$  se tiene que  $\exists uv$ -trayectoria dirigida  $T$  en  $C$  con  $l(T)$  par. Por lo tanto  $\gamma = (u, v) \cup T$  es un ciclo dirigido impar con exactamente una flecha simétrica, lo cual resulta en una contradicción. (Nótese que  $T \subseteq C \subseteq Asim(D)$ ). ■

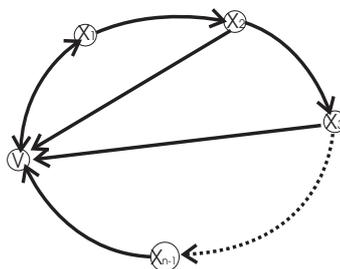


**Teorema 18** [9] *Sea  $D$  una digráfica completa,  $D$  es núcleo perfecta si y sólo si todo ciclo dirigido tiene un flecha simétrica.*

**Demostración**  $\Rightarrow$ ) Supongamos, por contradicción, que  $\Gamma \subseteq Asim(D)$  es un ciclo dirigido de  $D$  que no tiene flechas simétricas.

Consideremos  $D' = D[V(\Gamma)]$ . Tenemos que  $D'$  es completa y por hipótesis  $D'$  tiene un núcleo, que consiste de un único vértice  $\{v\}$ . Si  $\Gamma = (x_0 = v, x_1, \dots, x_n = v)$  entonces claramente  $(v, x_1)$  es una flecha simétrica de  $\Gamma$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $D$  no es núcleo perfecta, entonces  $D$  contiene un núcleo imperfecta crítica tal que contiene un ciclo dirigido en  $Asim(D)$ . ■



**Definición 31** *Dados una digráfica  $D$  y un ciclo dirigido impar  $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_{2n}, z_0)$  en  $D$ , una pseudodiagonal de  $\gamma$  es una flecha  $f = (x, y) \in F(D) - F(\gamma)$  tal que  $x = z_i$  y  $y = z_j$  con  $i \neq j$ .*

**Definición 32** *Una diagonal de un ciclo  $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_{2n}, z_0)$  de una digráfica  $D$  es una flecha  $f = (x, y) \in F(D) - F(\gamma)$ ,  $x, y \in V(\gamma)$ , y  $(y, x) \notin F(\gamma)$ .*

**Teorema 19** [10] *Si  $D$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica  $x \in V(D)$ ,  $(x, y) \in F(D)$  entonces existe un ciclo impar  $C_x = (x_0 = x, x_1 = y, x_2, \dots, x_{2n}, x)$  que no tiene pseudodiagonales que terminen en  $\{x_i | 2 \leq i \leq 2n \text{ con } i \text{ par}\}$ .*

La demostración de este teorema es muy extensa y complicada, así que no la veremos en este trabajo. Solo pondré un dibujo ilustrando las flechas que no pueden estar.

**Teorema 20** [10] *Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica y  $x \in V(D)$ . Existe  $f = (x, y) \in F(D)$  y un ciclo dirigido impar  $C'_x = (x_0 = x, x_1 = y, x_2, \dots, x_{2n}, x)$  que no tiene pseudodiagonales que terminan en  $\{x_{2i+1} | 1 \leq 2i + 1 \leq 2n - 1\} \cup \{x\}$ .*

Igual que el Teorema anterior, la demostración de este Teorema también es muy compleja y larga, así que tampoco la veremos aquí. Solo ilustraré un poco esta idea.

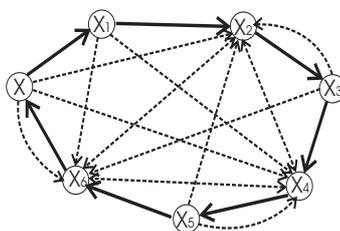


Figura 3.12: En esta figura las flechas oscuras son las flechas del ciclo, y las flechas punteadas son las pseudodiagonales que no tiene.

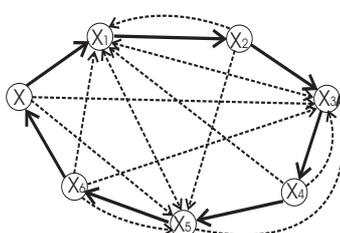


Figura 3.13: En esta figura vemos un ciclo formado por las flechas mas oscuras, y las flechas punteadas son las pseudodiagonales que no deben de estar.

**Teorema 21** [10] *Si  $D$  es una digráfica tal que cada ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos dos pseudodiagonales con puntas consecutivas en el ciclo, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

Esto tampoco lo demostraremos aquí ya que es una demostración muy extensa que ya correspondería a otro trabajo de tesis.

**Teorema 22 (C. Berge).** *Una gráfica  $G$  es perfecta si y sólo si no contiene como subgráfica inducida, ningún ciclo impar  $(C_{2n+1})$  ni su complemento  $(\overline{C}_{2n+1})$ ,  $n \geq 2$ .*

**Definición 33** *Una orientación por pozos es una orientación en la cual cada digráfica completa tiene un núcleo.*

**Conjetura (C. Berge-P. Duchet).** Una gráfica  $G$  es perfecta si y sólo si toda orientación por pozos es núcleo perfecta.

### 3.2. Cuasi-núcleo

**Definición 34** Sea  $D$  una digráfica, un conjunto  $Q \subseteq V(D)$  es un cuasi-núcleo de  $D$  si  $Q$  es independiente y para cada  $x \in V(D) - Q$  se cumple al menos alguna de las dos condiciones siguientes:

1. Existe  $xQ$ -flecha.
2. Existe  $xQ$ -trayectoria dirigida de longitud dos.

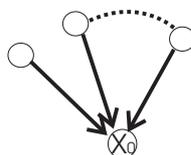
**Teorema 23** Toda digráfica posee un cuasi-núcleo.

**Demostración** Este teorema lo demostraremos por inducción sobre  $|V(D)|$ .

- 1° Si  $|V(D)| = 1$  entonces este mismo vértice es el cuasi-núcleo de la digráfica.
- 2° Supongamos que si  $D'$  es una digráfica con  $p'$  vértices,  $p' < n$ , entonces  $D'$  tiene cuasi-núcleo.
- 3° Sea  $D$  una digráfica con  $p = n$  vértices. Sea  $x_0 \in V(D)$ . Tomamos  $D'$  como sigue:

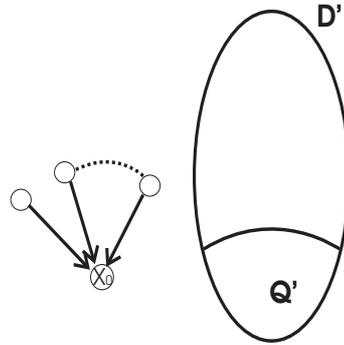
$$D' = D - (\{x_0\} \cup \{z \in V(D) \mid (z, x_0) \in F(D)\})$$

- a) Si  $D' = \emptyset$ , entonces  $\{x_0\}$  es núcleo de  $D$ .

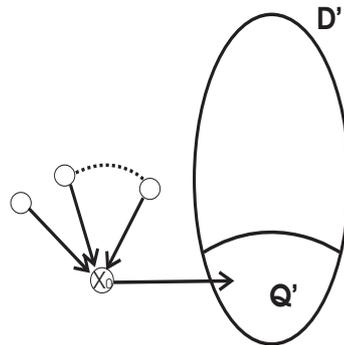


b) Si  $D' \neq \emptyset$ , entonces por hipótesis de inducción  $D'$  tiene un cuasi-núcleo distinto del vacío,  $Q'$ .

Si  $Q' \cup \{x_0\}$  es independiente, entonces  $Q' \cup \{x_0\}$  es



cuasi-núcleo de  $D$ . Si  $Q' \cup \{x_0\}$  no es independiente entonces existe  $x_0Q'$ -flecha y por lo tanto  $Q'$  es un cuasi-núcleo de  $D$ .



■

### 3.3. $(k, l)$ -núcleo

**Definición 35** Sea  $D$  una digráfica y  $x, y \in V(D)$  la distancia de  $x$  a  $y$  ( $d_D(x, y)$ ) se define como sigue:

$$d_D(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{si } \nexists \text{ } xy\text{-trayectoria dirigida de } x \text{ a } y \text{ en } \\ & D. \\ n = \min\{l(T) \mid T \text{ es una } xy\text{-trayectoria dirigida} \\ & \text{de } D\} & \text{Si existe } xy\text{-trayectoria dirigida de } x \text{ a} \\ & y \text{ en } D. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Definición 36** Sea  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ .

- i) El conjunto  $N$  es  $k$ -independiente si para cualesquiera  $x, y \in N$ ,  $d_D(x, y) \geq l$  y  $d_D(y, x) \geq l$ .
- ii) Decimos que  $N$  es  $l$ -absorbente si para cada  $x \in (V(D) - N)$ ,  $d_D(x, N) \leq k$ .
- iii)  $N$  es  $(k, l)$ -núcleo si  $N$  es  $k$ -independiente y  $l$ -absorbente.

**Definición 37** Un  $(h - 1, h)$ -núcleo se llama un  $h$ -núcleo.

**Definición 38** Una digráfica  $D$  se llama  $h$ -partita cíclica ( $h \geq 2$ ) si existe una partición de  $V(D) = V_0 + V_1 + \dots + V_{h-1}$  tal que si  $(u, v)$  es una flecha de  $D$  entonces  $u \in V_i$ ,  $v \in V_{i+1}$  (notación mod  $h$ ).

Podemos observar que si en la definición 38  $h = 2$  obtenemos una digráfica bipartita.

**Lema 2** Todo camino dirigido cerrado de longitud  $\not\equiv 0 \pmod{h}$ ,  $h \geq 2$ , contiene un ciclo de longitud  $\not\equiv 0 \pmod{h}$ .

**Teorema 24** [9] Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa,  $D$  es una digráfica  $h$ -partita cíclica si y sólo si existe una

subdigráfica fuertemente conexa  $H \subseteq D$  tal que todo ciclo de longitud  $\not\equiv 0 \pmod{h}$  tiene al menos dos flechas en  $F(D) - F(H)$ .

**Demostración** Es claro por la definición 38 que si  $D$  es una digráfica  $h$ -partita entonces todo ciclo de  $D$  tiene longitud  $\equiv 0 \pmod{h}$ . Cuando  $D$  es una digráfica fuertemente conexa  $h$ -partita cíclica, la subdigráfica  $H = D$  satisface lo requerido.

Supongamos que existe una subdigráfica fuertemente conexa  $H \subseteq D$  tal que todo ciclo de longitud  $\not\equiv 0 \pmod{h}$  tiene al menos dos flechas en  $F(D) - F(H)$ .

Sea  $m_0 \in V(D)$  y para cada  $0 \leq i \leq h$  sea  $N_i \subseteq V(D)$  definido como sigue:  $N_i = \{z \in V(D) \mid \text{existe un } m_0z\text{-camino dirigido contenido en } H \text{ de longitud } \equiv i \pmod{h}\}$ .

(i) Afirmamos que  $N_i \cap N_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, h-1\}$ . Si  $z \in N_i \cap N_j$  entonces existe un  $m_0z$ -camino dirigido  $T_1$  contenido en  $H$ , tal que  $l(T_1) \equiv i \pmod{h}$  y existe un  $m_0z$ -camino dirigido  $T_2$  contenido en  $H$  con  $l(T_2) \equiv j \pmod{h}$ . Ya que  $H$  es fuertemente conexa existe un  $zm_0$ -camino dirigido  $T_3$  contenido en  $H$ ;  $T_1 \cup T_3$  y  $T_2 \cup T_3$  son caminos dirigidos cerrados contenidos en  $H$ , entonces se sigue del Lema 2 y de la hipótesis que  $l(T_1 \cup T_3) \equiv l(T_2 \cup T_3) \equiv 0 \pmod{h}$  lo cual es imposible.

(ii) Afirmamos que cada  $N_i$  es un conjunto independiente de  $D$ .

Sean  $x, y \in N_i$  y supongamos que  $(x, y) \in A(D)$ . Sean  $T_x$  un  $m_0x$ -camino dirigido contenido en  $H$ ,  $T_y$  un  $m_0y$ -camino dirigido contenido en  $H$  tales que  $l(T_x) \equiv l(T_y) \equiv i \pmod{h}$  y  $T$  un  $ym_0$ -camino dirigido contenido en  $H$ . Como  $T_y \cup T$  es un camino dirigido cerrado contenido

en  $H$  y  $T_x \cup (x, y) \cup T$  es un camino dirigido cerrado con a lo mas una flecha en  $A(D) - A(H)$  se sigue del Lema 2 y de la hipótesis que  $l(T_x \cup T) \equiv l(T_y \cup T) \equiv 0 \pmod{h}$  y  $l(T_x \cup (x, y) \cup T) \equiv 0 \pmod{h}$  y entonces  $l(T_x \cup (x, y) \cup T) \equiv l(T_x \cup T) + 1 \equiv 1 \pmod{h}$  lo que es imposible.

- (iii) Toda flecha que empiece en un vértice terminal en  $N_i$  termina en un vértice terminal de  $N_{i+1}$  (notación mod  $h$ ) y  $V(D) = \bigcup_0^{h-1} N_i$ . Sea  $(x, y)$  una flecha que empieza en un vértice terminal en  $N_i$  se sigue por (ii) que  $y \in N_j$  para alguna  $j \in \{0, 1, \dots, h-1\} - \{i\}$ . Sea  $T_x$  un  $m_0x$ -camino dirigido contenido en  $H$  con  $l(T_x) \equiv i \pmod{h}$ ,  $T_y$  un  $m_0y$ -camino dirigido contenido en  $H$  con  $l(T_y) \equiv j \pmod{h}$  y  $T$  un  $ym_0$ -camino dirigido contenido en  $H$ . Tenemos  $T_x \cup (x, y) \cup T$  es un camino dirigido cerrado con a lo mas una flecha en  $V(D) - V(H)$  se sigue por el Lema 2 y la hipótesis que  $l(T_x \cup (x, y) \cup T) \equiv 0 \pmod{h}$  además tenemos  $l(T_y \cup T) \equiv 0 \pmod{h}$  entonces  $l(T_x) + 1 \equiv l(T_y) \pmod{h}$  y  $j \equiv i + 1 \pmod{h}$  y ya que  $j \in \{0, \dots, h-1\}$  se sigue que  $j = i + 1$ .

Concluimos por (i), (ii), (iii) y la definición 38 que  $D$  es una  $h$ -partita cíclica. ■

**Teorema 25** [9] *Sea  $D$  una digráfica. Si existe una subdigráfica fuertemente conexa  $H \subseteq D$  tal que todo ciclo de longitud  $\not\equiv 0 \pmod{h}$  tiene al menos dos flechas en  $F(D) - F(H)$  entonces  $D$  tiene un  $h$ -núcleo.*

**Demostración** Se sigue del Teorema 24 que si  $D$  es una digráfica  $h$ -partita cíclica fuertemente conexa, y si  $V(D) = N_0 + \dots + N_{h-1}$  es una  $h$ -partición de  $V(D)$  que toda  $N_i$  es un  $h$ -núcleo de  $D$ . ■

### 3.4. Núcleos por trayectorias monocromáticas

**Definición 39** Una  $k$ -coloración por vértices (por aristas) de una digráfica  $D$  es una asignación de  $k$  colores distintos a  $V(D)$  (a  $A(D)$ ).

Si a una digráfica  $D$  la damos una  $k$ -coloración decimos que  $D$  esta  $k$ -coloreada.

Una coloración por vértices (por aristas) es propia si dos vertices (aristas) adyacentes tienen distinto color.

**Definición 40** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, una trayectoria dirigida monocromática en una trayectoria dirigida con el mismo color en todas sus flechas.

**Definición 41** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada por flechas,  $N \subseteq V(D)$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si cumple que:

1.  $N$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas (para cualesquiera  $x, y \in N$  no existe una  $xy$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ )
2.  $N$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas (para todo  $v \in V(D) - N$  existe una  $vN$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

**Definición 42** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada. La cerradura de  $D$ , denotada por  $C(D)$ , se define como sigue:

1.  $V(C(D)) = V(D)$
2.  $F(C(D)) = \bigcup_{i=1}^m \{uv \text{ de color } i \text{ si existe } uv\text{-trayectoria dirigida de color } i \text{ en } D\}$

**Teorema 26**  $N \subseteq V(D)$  es un núcleo por trayectorias monocromáticas en  $D$  si y sólo si es un núcleo de  $C(D)$ .

### Demostración

1.  $N \subseteq V(C(D))$  es absorbente en  $C(D)$  si y sólo si existe una  $xN$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (por definición de cerradura) si y sólo si  $N$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ .
2.  $N \subseteq V(C(D))$  no es independiente en  $C(D)$  si y sólo si existen  $n_1, n_2 \in N$  tal que existe una  $n_1n_2$ -flecha en  $C(D)$  si y sólo si existe una  $n_1n_2$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  si y sólo si  $N$  no es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ .

■

**Definición 43** Una orientación de una gráfica completa se llama torneo.

**Teorema 27** [12] Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado que no contiene  $C_3$  (ciclo dirigido de longitud 3 con sus tres flechas de distintos colores) ni  $T_3$  (torneo transitivo de longitud 3 con las flechas de tres distintos colores). Entonces existe un vértice  $v$  de  $T$  tal que para todo vértice  $x$  de  $T$  existe un trayectoria dirigida monocromático de  $x$  a  $v$ .

**Demostración** Probaremos esto por inducción sobre el orden de  $T$ ,  $n$ .

1º Para los casos  $n = 1$  y  $n = 2$  es claro.

En el caso en que  $n = 1$  el Teorema se cumple ya que el torneo consta de tan sólo un vértice  $x$ , y este es el vértice que buscamos.

Cuando  $n = 2$  tenemos dos vértices,  $x_1$  y  $x_2$ , como lo que tenemos es un torneo, entonces  $(x_1, x_2) \in F(T)$  ó  $(x_2, x_1) \in F(T)$ , en el primer caso  $x_2$  sería el vértice que buscamos; en el segundo caso el vértice sería  $x_1$ .



2° Supongamos que el resultado se cumple para todo torneo  $m$ -coloreado  $T$  de orden menor que  $n$ , donde  $n > 2$ .

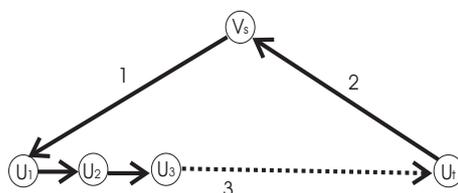
3° Desmostraremos que el teorema se cumple para  $n$ .

Por hipótesis de inducción tenemos que para cada vértice  $v$  de  $T$  existe un vértice de  $T$ , lo llamaremos  $f(v)$ , tal que para todo  $x$  de  $T - \{v\}$  existe una trayectoria dirigida monocromática de  $x$  a  $f(v)$ . Definimos  $f : V(D) \rightarrow V(D)$ . Si  $f(u) = f(v)$ ,  $u \neq v$ , o si para alguna  $v$  existe una trayectoria dirigida monocromática de  $v$  a  $f(v)$ , entonces para cada vértice  $x$  de  $T$  existe una trayectoria dirigida monocromática de  $x$  a  $f(v)$ , y obtenemos el resultado.

Así que suponemos que  $f$  es biyectiva y no hay trayectoria dirigida monocromática de  $v$  a  $f(v)$ . Por lo visto y sin pérdida de generalidad,  $f(v_i) = v_{i+1}$ , los vértices de  $T$  se pueden separar en ciclos  $(v_1, v_2, \dots, v_{n_1})$ ,  $(v_{n_1+1}, \dots, v_{n_2})$ , donde  $f(v_1) = v_2, \dots, f(v_{n_1}) = v_1, f(v_{n_1+1}) = v_{n_1+2}, \dots, f(v_{n_2}) = v_{n_1+1}$ .

Si existen más de un ciclo, entonces por hipótesis de inducción existe un vértice  $v$  en el subconjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$  tal que para todo vértice  $x$  en dicho subconjunto existe una trayectoria dirigida monocromática de  $x$  a  $v$ . Esto contradice la hipótesis, ya que  $v = f(w) = w + 1$  para alguna  $w \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$ .

Concluimos que sólo existe un ciclo  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Como no hay trayectoria dirigida monocromática de  $v_i$  a  $v_{i+1}$ , entonces existen las flechas  $(v_2, v_1), (v_3, v_2), \dots, (v_1, v_n)$ . Coloreadas con colores  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , respectivamente. Si  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$ , entonces  $v_n$  puede llegar a  $v_1$  por una trayectoria dirigida monocromática  $v_n v_{n-1} \dots v_2 v_1$  con color  $a_1$ . Esto contradice la hipótesis. Por lo tanto  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  no pueden ser todos iguales. Deben de existir  $a_{s-1}$  y  $a_s$  con  $a_{s-1} \neq a_s$ . Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $a_{s-1} = 1$  y  $a_s = 2$ . Existe una trayectoria dirigida monocromática de  $v_{s-1}$  a  $v_{s+1}$ , con color  $b$ . Claramente  $b \neq 1$  y  $b \neq 2$ , ya que si  $b = 1$  existiría una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de  $v_s$  a  $v_{s+1}$ , y si  $b = 2$  existiría una trayectoria dirigida monocromática de color 2 de  $v_{s-1}$  a  $v_s$ . Supongamos que  $b = 3$ . Sea  $u_1, u_2, \dots, u_t$  la trayectoria dirigida monocromática mas corta de  $v_{s-1}$  a  $v_{s+1}$  de color 3,  $u_1 = v_{s-1}$  y  $u_t = v_{s+1}$ .



Consideremos el color de la flecha entre  $v_s$  y  $u_i$ , para  $1 < i < t$ . No puede ser de color 3 ya que si dicha flecha fuera de color 3 y fuera de  $v_s$  a  $u_i$ , entonces existiría una trayectoria dirigida monocromática de  $v_s$  a  $v_{s+1}$  de color 3; en el caso en que la flecha fuera de  $u_i$  a  $v_s$  existiría una trayectoria monocromática de  $v_{s-1}$  a  $v_s$  de color 3. Existen flechas en  $\{v_s, u_i\}$  y  $\{v_s, u_{i+1}\}$  con distintos col-

ores entre ellos, esto pasa ya que  $(v_s, u_1)$  y  $(u_t, v_s)$  tienen distinto color. Entonces  $v_s u_i u_{i+1}$  es un triángulo con sus tres flechas de distinto color, el cual es un  $T_3$  ó un  $C_3$ . Esto es una contradicción a las hipótesis del Teorema.

■

## Capítulo 4

# Seminúcleos de una digráfica.

En este capítulo veremos unas definiciones que nos sirven para encontrar condiciones adicionales para la existencia de núcleos en una digráfica.

**Definición 44** [14] *Sea  $D$  una digráfica. Diremos que  $S \subseteq V(D)$  es un seminúcleo de  $D$  si  $S$  es independiente y siempre que exista  $S$   $x$ -flecha en  $D$  se cumple que también existe  $xS$ -flecha en  $D$ , claramente  $x \in V(D) - S$  ya que  $S$  es independiente.*

*Podemos ver un ejemplo de seminúcleo en la figura 4.1.*

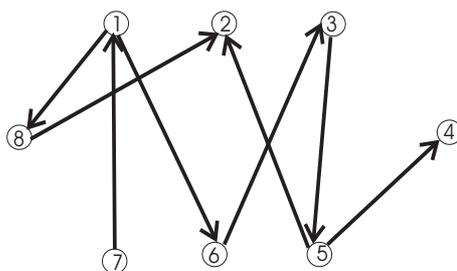
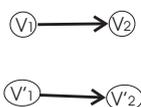


Figura 4.1: En esta digráfica el conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  es un seminúcleo.

**Definición 45** *Si  $D_1$  y  $D_2$  son digráficas, el producto  $D_1 \times D_2$  se define por  $V(D_1 \times D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$ ,  $F(D_1 \times D_2) =$*

$$\{((v_1, v_2), (v'_1, v'_2)) | (v_1, v'_1) \in F(D_1) \text{ y } (v_2, v'_2) \in F(D_2)\}.$$


**Definición 46** [14] Diremos que  $D$  es una  $R$ -digráfica, si toda subdigráfica inducida de  $D$  posee un seminúcleo no trivial (es decir, no vacío).

**Teorema 28** [14] Todo seminúcleo está incluido en un seminúcleo máximo.

**Demostración** Si la digráfica es finitas, el resultado es inmediato. ■

**Lema 3** El conjunto de seminúcleos de  $D$ , ordenado por inclusión, tiene cota superior.

**Demostración** Sea  $\mathcal{C}$  una cadena de seminúcleos de  $D$ , es decir, una colección de seminúcleos tal que si  $S_1, S_2 \in \mathcal{C}$ , se tiene  $S_1 \subseteq S_2$  ó  $S_2 \subseteq S_1$ . Pongamos  $\mathcal{U} = \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S$ .

- a)  $\mathcal{U}$  es independiente, pues si existiera una flecha  $f = (v_1, v_2)$  con sus dos extremos en  $\mathcal{U}$ , se tendría  $v_1 \in S_1 \in \mathcal{C}$  para algún  $S_1$  y  $v_2 \in S_2 \in \mathcal{C}$  para algún  $S_2$ . Luego  $v_1, v_2 \in \text{máx}(S_1, S_2) \in \mathcal{C}$  lo que es imposible.
- b) Si  $f$  es una flecha que va de  $\mathcal{U}$  a  $x$ , existen  $s$  y  $S$  tales que  $f = (s, x)$  y  $s \in S \in \mathcal{C}$ . como  $S$  es seminúcleo, existe una flecha  $f'$  que va de  $x$  a  $S$  y por consiguiente a  $\mathcal{U}$ .

■

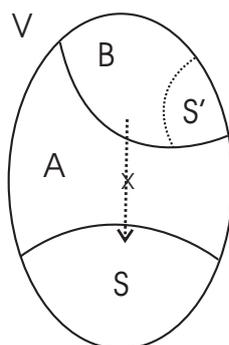
**Lema 4** [14] *Sea  $S$  un seminúcleo de  $D$ ,  $B = \{v \in V(D) - S \mid \text{no existe flecha de } v \text{ a } S\}$  y  $S'$  un seminúcleo de la subdigráfica  $\overline{B}$  de  $D$  inducida por  $B$ . Entonces  $S \cup S'$  es un seminúcleo de  $D$ .*

**Demostración** Sea  $f$  una flecha de  $u$  a  $v$ , consideremos los siguientes casos

- i)  $u \in S, v \in S$ .
- ii)  $u \in S', v \in S'$ .
- iii)  $u \in S', v \in S$ .
- iv)  $u \in S, v \in S'$ .

Los casos i) e ii) no pueden cumplirse por ser  $S$  y  $S'$  independientes (pues son seminúcleos). El caso iii) es imposible ya que  $S' \subseteq B$ . Finalmente, si iv) se cumpliera, existiría otra flecha de  $S'$  a  $S$ , por ser  $S$  seminúcleo, la cual satisfecería iii). Luego  $S \cup S'$  es independiente.

Pongamos  $A = V - (S \cup B)$ . Sea  $f$  una flecha de  $S \cup S'$  a  $x$ . Si  $x \in A$ , obviamente existe una flecha de  $x$  a  $S$  y por consiguiente, a  $S \cup S'$ . Si  $x \notin A$ ,  $f$  necesariamente sale de



$S'$  y llega a  $B - S'$  y, por ser  $S'$  seminúcleo de  $\overline{B}$ , existe  $f'$  de  $x$  a  $S'$  y, por consiguiente, a  $S \cup S'$ . ■

**Teorema 29** [14] *Toda  $R$ -digráfica posee al menos un núcleo.*

**Demostración** Sea  $D$  una  $R$ -digráfica,  $S$  un seminúcleo máximo de  $D$ , y  $B = \{v \in V - S \mid \text{no existe flecha de } v \text{ a } S\}$ .  $B = \emptyset$  pues si  $B \neq \emptyset$ , existiría un seminúcleo  $S' \neq \emptyset$  de la subdigráfica  $\bar{B}$  de  $D$  inducida por  $B$ .  $S \cup S'$  sería un seminúcleo de  $D$  por el Lema 4 y contendría propiamente a  $S$ , pero esto sería una contradicción pues  $S$  era máximo. ■

**Teorema 30** [14] *Si  $D$  es una digráfica que no tiene ciclos dirigidos impares, entonces  $D$  contiene un seminúcleo no vacío.*

**Demostración** Definamos en  $D$  las relaciones  $\sim$  y  $\lesssim$  poniendo:

- a)  $v' \lesssim v$  si y solo si existe en  $D$  un camino de  $v$  a  $v'$ .
- b)  $v \sim v'$  si y solo si  $v \lesssim v'$  y  $v' \lesssim v$ .

Es fácil ver que  $\lesssim$  es un preorden (relación binaria transitiva y reflexiva) y  $\sim$  es una equivalencia.

Sea  $m_0 \in V$  un elemento mínimo con respecto a  $\lesssim$  (es decir, tal que  $m \lesssim m_0$ ) y  $M = \{m \in V \mid m \sim m_0\}$ . Si se toman  $S = \{m \in M \mid \text{existe un camino de longitud par de } m_0 \text{ a } m\}$  e  $I = \{m \in M \mid \text{existe un camino de longitud impar de } m_0 \text{ a } m\}$  se tiene:

- i)  $m_0 \in S$ .
- ii)  $S \cap I = \emptyset$  pues si existiera  $s \in S \cap I$ , habría un camino de  $m_0$  a  $s$  de longitud par y otro de longitud impar y además otro de  $s$  a  $m_0$  por ser  $m_0 \sim s$ . Luego existiría en  $D$  un camino cerrado de longitud impar y, por lo tanto, un ciclo impar, en contra de la hipótesis.

Es fácil ver que todas las flechas de  $D$  que salen de elementos de  $S$  llegan a  $I$  y que de cada vértice de  $I$  sale alguna flecha hacia  $S$ . De aquí se sigue sin más que  $S$  es un seminúcleo de  $D$ . ■

**Corolario 1** (Teorema de Richardson)[14]. Si  $D$  es finita y no posee ciclos impares, entonces  $D$  es  $R$ -digráfica y, por consiguiente, posee un núcleo.

Se demuestra que toda digráfica bipartita contiene un núcleo. Damos aquí una demostración simple de que las digráficas bipartitas son  $R$ -digráficas. Como toda subdigráfica de una digráfica bipartita es bipartita, basta probar que cada digráfica bipartita contiene al menos un seminúcleo no vacío. La demostración es como sigue:

**Demostración** Si existe algún vértice  $v$  del cual no salen flechas,  $\{v\}$  es un seminúcleo. Si no es ese el caso, sea  $(V_1, V_2)$  una descomposición de  $V$  en conjuntos independientes ajenos.  $V_1$  y  $V_2$  son, claramente, núcleos de  $D$ .

Sean  $N_1$  y  $N_2$  núcleos de  $D_1$  y  $D_2$  respectivamente. Pongamos  $N'_1 = V(D_1) - N_1$  y  $N'_2 = V(D_2) - N_2$ . Se tiene:  $S = N_1 \times N_2$  es seminúcleo de  $D_1 \times D_2$ . Usando la notación del Lema 4,  $B = (N_1 \times N'_2) \cup (N'_1 \times N_2)$ . Ahora bien, como  $N_1 \times N'_2$  y  $N'_1 \times N_2$  son independientes,  $\overline{B}$  es bipartita y por consiguiente contiene un núcleo  $N$ . Es inmediato que  $S \cup N$  es un núcleo de  $D_1 \times D_2$ . ■

**Teorema 31** Si  $D$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica, entonces  $D$  no tiene seminúcleo no vacío.

**Demostración** Supongamos por contradicción que  $D$  es núcleo imperfecta crítica y que  $D$  contiene un seminúcleo no vacío  $S$ .

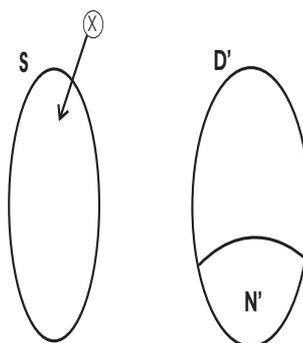


Figura 4.2: Esta gráfica es un bosquejo de la demostración del Teorema 15. En esta gráfica  $x \in V(D - S - D')$ .

Sea  $B_S = \{z \in V(D) - S \mid \nexists zS\text{-flecha en } D\}$ .

$B_S$  no puede ser igual al vacío porque si lo fuera  $S$  sería núcleo, por lo tanto  $B_S \neq \emptyset$ . Sea  $D' = D[B_S]$ .  $D'$  es subdigráfica inducida propia de  $D$  pues  $S \neq \emptyset$ . Por lo tanto  $D'$  posee un núcleo  $N'$ . No existen flechas entre  $S$  y  $N'$ . No puede existir  $N'S$ -flecha ya que los vértices de  $N'$  son vértices de  $D'$ . Si existiera una  $S N'$ -flecha por definición de seminúcleo existiría una  $N'S$ -flecha y esto no puede ser. Por lo tanto  $S \cup N'$  es independiente.

Sea  $x \in V(D) - S \cup N'$ . Si  $x \in D'$  entonces existe una  $xN'$ -flecha. Si  $x \notin D'$  entonces existe una  $xS$ -flecha. Por lo tanto  $S \cup N'$  es un núcleo de  $D$ , y esto es una contradicción.

Por lo tanto  $D$  no tiene seminúcleo no vacío. ■

De este teorema obtenemos algunas consecuencias.

**Consecuencia 1** Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces  $D$  no tiene vértices de exgrado cero (es decir,  $\delta_D^+(z) \geq 1$  para toda  $z \in V(D)$ ).

**Consecuencia 2** Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces  $D$  tiene al menos un ciclo dirigido impar.

**Teorema 32** *Sea  $D$  una digráfica. Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces  $Asim(D)$  es fuertemente conexa (de hecho, todo  $D$  lo es).*

**Demostración** Supongo que  $Asim(D)$  no es fuertemente conexa, entonces existe una partición de  $V(D)$  en dos conjuntos  $V_1, V_2$  tales que no hay  $V_1V_2$ -flecha en  $Asim(D)$  (es decir, toda  $V_1V_2$ -flecha en  $D$  es simétrica, esto por el Teorema 6).

Como  $D$  es núcleo imperfecta crítica se tiene que  $D[V_1]$  tiene núcleo  $N_1$ . Como  $N_1$  es seminúcleo de  $D[V_1]$  entonces es independiente. Si existe una  $xy$ -flecha con  $x \in N_1 \subseteq V_1$  y  $y \in V_2$ , dicha flecha es simétrica, por lo que señalamos antes. Por lo tanto  $N_1$  es un seminúcleo de  $D$  distinto del vacío y esto contradice el Teorema 31.

Por lo tanto  $Asim(D)$  es fuertemente conexa. ■

## Capítulo 5

# Sobre caminos monocromáticos y 4-ciclos monocromáticos en torneos bipartitos con flechas coloreadas.

Para demostrar el teorema principal de este capítulo necesitaremos de otros resultados.

**Lema 5** Sea  $D = (V_1, V_2)$  un torneo bipartito, y sea  $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  un camino dirigido en  $D$ . Para  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ,  $(u_i, u_j) \in F(D)$  o  $(u_j, u_i) \in F(D)$  si y sólo si  $j - i \equiv 1 \pmod{2}$

**Demostración** Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $u_0 \in V_1$ , entonces claramente tenemos  $u_i \in V_1$  si y sólo si  $i \equiv 0 \pmod{2}$  ... (1) .

$u_j \in V_2$  si y sólo si  $j \equiv 1 \pmod{2}$  ... (2), por (1) y (2)  $j - i \equiv 1 \pmod{2}$  si y sólo si  $u_i \in V_1$  y  $u_j \in V_2 \Leftrightarrow (u_i, u_j) \in A(D)$  o  $(u_j, u_i) \in A(D)$ . ■

**Lema 6** Para un torneo bipartito  $D = (V_1, V_2)$ , todo camino dirigido cerrado de longitud a lo más 6 en  $D$  es un ciclo dirigido de  $D$ .

**Demostración** Sea  $C$  un camino dirigido cerrado con  $l(C) \leq 6$  (donde  $l(C)$  representa la longitud de  $C$ ). Por demostrar que  $C$  es un ciclo dirigido. Ya que  $D$  es bipartita  $l(C)$  es par (ya que todo camino dirigido cerrado impar contiene un ciclo dirigido impar);  $l(C) = 2$  es imposible ya que un torneo bipartito es una digráfica asimétrica. Supongamos que  $l(C) = 4$ , y sea  $C = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_0)$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $u_i \in V_1$ , para  $i \in \{0, 2\}$  y  $u_j \in V_2$  para  $j \in \{1, 3\}$  esto implica que  $u_i \neq u_j$ . Ya que  $(u_1, u_2) \in A(D)$  y  $(u_2, u_3) \in A(D)$  tenemos que  $u_1 \neq u_3$  (pues es una digráfica asimétrica) y análogamente  $u_0 \neq u_2$ ; entonces  $C$  es un ciclo dirigido. Finalmente supongamos  $l(C) = 6$  y sea  $C = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_0)$ . podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $u_i \in V_1$  para  $i \in \{0, 2, 4\}$  y  $u_j \in V_2$  para  $j \in \{1, 3, 5\}$ , entonces tenemos que  $u_i \neq u_j$ .

Ya que  $\{(u_i, u_{i+1}), (u_{i+1}, u_{i+2})\} \in A(D)$  para  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  (notación (mod 6)) y  $D$  es asimétrica tenemos  $u_i \neq u_{i+2}$  para  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . ■

**Lema 7** *Sea  $D$  un torneo bipartito  $m$ -coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 4 es monocromático y  $u, v \in V(D)$ . Si existe un  $uv$ -camino dirigido monocromático y no existe  $vu$ -camino dirigido monocromático (en  $D$ ), entonces al menos una de las siguientes condiciones se cumple:*

1.  $(u, v) \in A(D)$ .
2. Existe (en  $D$ ) un  $uv$ -camino dirigido de longitud 2.

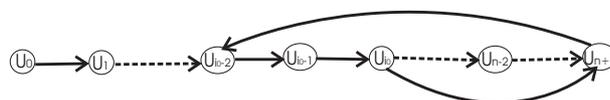
**Demostración** Sean  $D, u, v \in A(D)$  como en las hipótesis. Procederemos por inducción sobre la longitud  $l$  de un  $uv$ -camino dirigido monocromático.

- 1º Claramente el lema 7 se cumple cuando existe un  $uv$ -camino dirigido monocromático de longitud a lo más 2.
- 2º Supongamos que el lema 7 se cumple cuando existe un  $uv$ -camino dirigido monocromático de longitud  $l$  con  $2 \leq l \leq n$ .
- 3º Ahora supongamos que existe un  $uv$ -camino dirigido monocromático  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_{n+1} = v)$  con  $l(T) = n + 1$ ; podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $T$  es de color uno.

**Afirmación 1** Si  $(u_i, v) \in A(D)$  para alguna  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 2\}$ , entonces  $(u, v) \in A(D)$  o existe un  $uv$ -camino dirigido de longitud 2.

Supongamos que  $(u_i, v) \in A(D)$  para alguna  $i \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$  y sea  $i_0 = \min\{i \in \{0, 1, \dots, n - 2\} \mid (u_i, v) \in A(D)\}$ . Si  $i_0 = 0$ , entonces  $(u, v) \in A(D)$  y si  $i_0 = 1$  entonces  $(u, u_1, v)$  es un  $uv$ -camino dirigido de longitud 2, podemos suponer que  $i_0 = \{2, 3, \dots, n - 2\}$ .

Ya que  $i_0 \equiv i_0 - 2 \pmod{2}$  y  $i_0 \not\equiv n + 1 \pmod{2}$  (ya que  $(u_{i_0}, v) \in A(D)$ ), tenemos que  $i_0 - 2 \not\equiv n + 1 \pmod{2}$  y se sigue por el Lema 5 que  $(u_{i_0-2}, v) \in A(D)$  o  $(v, u_{i_0-2}) \in A(D)$ . La elección de  $i_0$  implica que  $(v, u_{i_0-2}) \in A(D)$  y tenemos  $C_4 = (u_{i_0-2}, u_{i_0-1}, u_{i_0}, v, u_{i_0-2})$  un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es monocromático.  $(u_{i_0-1}, u_{i_0})$  es de color 1 (ya que es una flecha de  $T$ ),



por lo tanto  $C_4$  es de color 1. Entonces tenemos que

$T' = (u, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, v)$  es un  $uv$ -camino dirigido monocromático con  $l(T')$

$< n + 1$ ; y por hipótesis de inducción se cumple el Lema 7.

Ahora se sigue por el Lema 5 que para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$   $(u_i, u_{i+3}) \in A(D)$  ó  $(u_{i+3}, u_i) \in A(D)$  (ya que  $i \not\equiv i+3 \pmod{2}$ ).

Analizaremos dos posibles casos.

a) Existe  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$  tal que  $(u_i, u_{i+3}) \in A(D)$ .  
Sea  $j_0 = \max\{j \in \{i+3, i+4, \dots, n+1\} \mid (u_i, u_j) \in A(D)\}$ . (Notemos que el Lema 5 implica que  $i \not\equiv j_0 \pmod{2}$ ).

a.1)  $j_0 = n + 1$ .

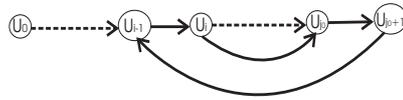
En este caso el resultado se sigue de la afirmación 1.

a.2)  $j_0 = n$  e  $i = 0$ .

Tenemos  $(u_0 = u_i, u_{j_0} = u_n, u_{n+1})$  es un  $uv$ -camino dirigido de longitud 2.

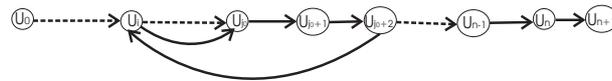
a.3)  $j_0 = n$  e  $i \geq 1$ .

Ya que  $i \not\equiv j_0 \pmod{2}$ , tenemos que  $i - 1 \not\equiv j_0 + 1 = n + 1 \pmod{2}$  y se sigue del Lema 5 que  $(u_{i-1}, u_{n+1} = v) \in A(D)$  ó  $(v, u_{i-1}) \in A(D)$ . Si  $(u_{i-1}, v) \in A(D)$  el Lema 7 se cumple, se sigue de la afirmación 1. Si  $(v, u_{i-1}) \in A(D)$  obtenemos  $C_4 = (u_{i-1}, u_i, u_{j_0} = u_n, v, u_{i-1})$  un ciclo dirigido de longitud 4, el cual por hipótesis es monocromático, de hecho  $C_4$  es de color 1 (ya que  $(u_{i-1}, u_i) \in A(T) \cap A(C_4)$ ) y entonces  $T' = (u, T, u_i) \cup (u_i, u_{j_0} = u_n, u_{n+1} = v)$  es un  $uv$ -camino dirigido monocromático con  $l(T') \leq n$ . Se sigue de la hipótesis de inducción que  $(u, v) \in A(D)$  ó existe un  $uv$ -camino dirigido de longitud 2.



a.4)  $j_0 \leq n - 1$  e  $i \not\equiv j_0 + 2 \pmod{2}$ .

Se sigue del Lema 5 que  $(u_i, u_{j_0+2}) \in A(D)$  ó  $(u_{j_0+2}, u_i) \in A(D)$ , por la elección de  $j_0$  tenemos que  $(u_{j_0+2}, u_i) \in A(D)$ . Por lo tanto  $C_4 = (u_i, u_{j_0}, u_{j_0+1}, u_{j_0+2}, u_i)$  es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es monocromático y es de color 1 (ya que  $(u_{j_0}, u_{j_0+1}) \in A(T) \cap A(C_4)$ ), en particular  $(u_i, u_{j_0})$  es de color 1 y entonces  $T' = (u, T, u_i) \cup (u_i, u_{j_0}) \cup (u_{j_0}, T, v)$  es un  $uv$ -camino dirigido monocromático con  $l(T') \leq n$  y por las hipótesis de inducción se cumple el Lema 7.



b) Para cualquier  $i \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$ ,  $(u_{i+3}, u_i) \in A(D)$ .  $C_4^i = (u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_i)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 y por hipótesis de inducción es monocromático,  $C_4^i$  es de color 1 pues  $(u_i, u_{i+1} \in A(T) \cap A(C_4^i))$ , para cualquier  $i \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$  Sea  $k \in \{1, 2, 3\} \ni k \equiv n + 1 \pmod{3}$ , entonces  $(v = u_{n+1}, u_{n-2}, u_{n-5}, \dots, u_k) \cup (u_k, T, u_3) \cup (u_3, u_0)$  es un  $vu$ -camino dirigido monocromático. Esto es una



contradicción a la hipótesis, por lo tanto este caso es imposible.

■

**Teorema 33** *Sea  $D$  un torneo bipartito  $m$ -coloreado. Si todo ciclo dirigido de longitud 4 en  $D$  es monocromático, entonces  $C(D)$  (la cerradura de  $D$ ) es núcleo perfecta.*

**Demostración** Durante esta demostración usaremos el Lema 6 con más explicación.

Por el Teorema 29 es suficiente probar que cada ciclo dirigido de  $C(D)$  tiene una flecha simétrica.

Vamos a proceder por contradicción. Supongamos que existe un ciclo dirigido de  $C$ ,  $C = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ , con  $C \subseteq C(D)$ .

**Afirmación 2** *Para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $(u_i, u_{i+1}) \in A(D)$  ó existe un  $u_i u_{i+1}$ -camino dirigido de longitud  $2 \pmod{n+1}$ .*

Sea  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Ya que  $(u_i, u_{i+1}) \in A(C(D))$  tenemos que existe un  $u_i u_{i+1}$ -camino dirigido monocromático en  $D$ , ya que  $C$  no tiene flechas simétricas, entonces no existe un  $u_{i+1} u_i$ -camino dirigido monocromático en  $D$ , la afirmación 2 se sigue del Lema 7.

Vamos a considerar 2 posibles casos:

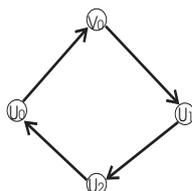
a)  $n = 2$ .

Ya que  $D$  no tiene ciclos dirigidos impares (puesto que  $D$  es bipartita), tenemos que para alguna  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,  $(u_i, u_{i+1}) \notin A(D) \pmod{3}$ , sin pérdida de generalidad asumimos que  $(u_0, u_1) \notin A(D)$ , entonces se sigue por la afirmación 2 que existe un  $u_0 u_1$ -camino dirigido de longitud 2 en  $D$ ,  $(u_0, v_0, u_1)$ .

a.1)  $\{(u_1, u_2), (u_2, u_0)\} \subseteq A(D)$ .

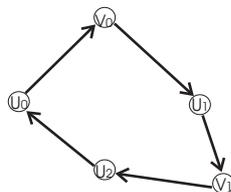
En este caso  $(u_0, v_0, u_1, u_2, u_0)$  es un ciclo dirigido de

longitud 4 en  $D$ , por hipótesis es monocromático; entonces  $(u_1, u_2, u_0)$  es un  $u_1u_0$ -camino dirigido monocromático en  $D$  y por lo tanto  $(u_0, u_1)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ .



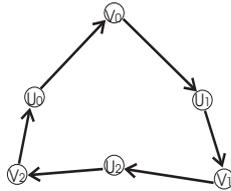
a.2)  $\{(u_1, u_2), (u_2, u_0)\} \not\subseteq A(D)$ .

**Afirmación 3** Vamos a suponer que  $\{(u_1, u_2), (u_2, u_0)\} \cap A(D) = \emptyset$



Si  $(u_1, u_2) \notin A(D)$ , entonces  $(u_2, u_0) \notin A(D)$ , ya que  $(u_1, u_2) \notin A(D)$  se sigue de la afirmación 2 que existe un  $u_1u_2$ -camino dirigido de longitud 2,  $(u_1, v_1, u_2)$ , cuando  $(u_2, u_0) \in A(D)$  obtenemos  $(u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, u_0)$  un ciclo dirigido de longitud 5 contenido en  $D$ , lo cual es imposible. Análogamente si  $(u_2, u_0) \notin A(D)$  entonces  $(u_1, u_2) \notin A(D)$ . Se sigue de la afirmación 2 que existe un  $u_1u_2$ -camino dirigido de longitud 2 en  $D$ ,  $(u_1, v_1, u_2)$  y un  $u_2u_0$ -camino dirigido de longitud 2 en  $D$ ,  $(u_2, v_2, u_0)$ . Por lo tanto  $(u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_0)$  es un ciclo dirigido de

longitud 6 en  $D$ , y se sigue del Lema 5 que  $(u_0, v_1) \in A(D)$  ó  $(v_1, u_0) \in A(D)$ . Cuando  $(u_0, v_1) \in A(D)$  obtenemos  $(u_0, v_1, u_2, v_2, u_0)$  que es un ciclo dirigido de longitud 4 en  $D$  y por hipótesis es monocromático, en particular  $(u_0, v_1, u_2)$  es un camino dirigido monocromático en  $D$  lo cual implica que  $(u_2, u_0)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , lo que es una contradicción. Cuando  $(v_1, u_0) \in A(D)$  tenemos  $(u_0, v_0, u_1, v_1, u_0)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 en  $D$  y por hipótesis es monocromático, por lo tanto  $(u_1, v_1, u_0)$  es un  $u_1u_0$ -camino dirigido monocromático en  $D$  y entonces  $(u_0, u_1)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , esto también es una contradicción.



b)  $n \geq 3$ .

En lo que sigue, la notación es tomada (mod  $n + 1$ ).

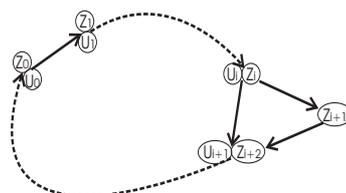
Por la afirmación 2, para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  podemos tomar un  $u_iu_{i+1}$ -camino dirigido como sigue:

$$T_i = \begin{cases} (u_i, u_{i+1}) & \text{cuando } (u_i, u_{i+1}) \in A(D) \text{ y} \\ u_iu_{i+1}\text{-camino dirigido de longitud 2 cuando} \\ (u_i, u_{i+1}) \notin A(D) \end{cases} \tag{5.1}$$

Sea  $C' = \bigcup_{i=1}^n T_i$ . Entonces  $C'$  es un paseo dirigido cerrado en  $D$ , sea  $C' = (z_0, z_1, \dots, z_k, z_0)$ , definimos la función  $\varphi : \{0, 1, \dots, k\} \rightarrow V(C)$  como sigue: para cada

$i \in \{0, 1, \dots, n\}$  si  $T_i = (u_i = z_{i_0}, z_{i_0+1} = u_{i+1})$  entonces  $\varphi(i_0) = z_{i_0} = u_i$ , y si  $T_i = (u_i = z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2} = u_{i+1})$  entonces  $\varphi(i_0) = \varphi(i_0 + 1) = z_{i_0} = u_i$ .

Diremos que un índice  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$  es un índice



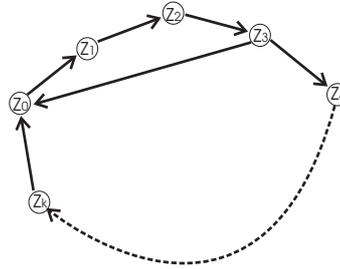
principal cuando  $\varphi(j) = z_j$ ; y denotaremos por  $I_p$  al conjunto de índices principales. Notemos que en  $C'$  los índices son todos diferentes y también notemos que un vértice  $u_j$  puede corresponder a un índice principal  $l$  y también a un índice no principal  $p$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $u_0 = z_0$ . Ya que  $D$  es un torneo bipartito tenemos que  $k \equiv 1 \pmod{2}$  y por el Lema 5, para cada  $i \in \{1, \dots, \frac{k-3}{2}\}$   $(z_0, z_{2i+1}) \in A(D)$  ó  $(z_{2i+1}, z_0) \in A(D)$ . Consideramos los siguientes casos:

b.1)  $(z_3, z_0) \in A(D)$ .

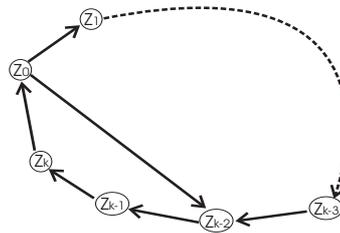
En este caso tenemos  $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_0)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 y por hipótesis es monocromático. La definición de  $C'$  implica que  $z_1 = u_1$  ó  $z_2 = u_1$ . Si  $z_1 = u_1$  entonces  $(u_1 = z_1, z_2, z_3, z_0 = u_0)$  es un  $u_1 u_0$ -camino dirigido monocromático en  $D$  lo que implica que  $(u_0, u_1)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , esto es una contradicción a lo supuesto en  $C$ . Entonces  $z_1 \neq u_1$ , por consecuencia  $z_2 = u_1$  y entonces  $(u_1 = z_2, z_3, z_0 = u_0)$  es un camino dirigido monocromático en  $D$ , por lo tanto  $(u_0, u_1)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , lo que es

una contradicción.



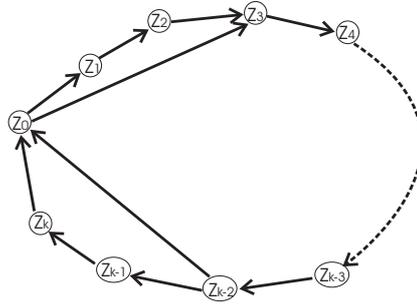
b.2)  $(z_0, z_{k-2}) \in A(D)$ .

Lo supuesto en el subcaso b.2) implica que  $(z_0, z_{k-2}, z_{k-1}, z_k, z_0)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 que por hipótesis es monocromático. La construcción de  $C'$  implica que  $z_k = u_n$  ó  $z_{k-1} = u_n$ . Cuando  $z_k = u_n$  tenemos que  $(u_0 = z_0, z_{k-2}, z_{k-1}, z_k = u_n)$  es un  $u_0u_n$ -camino dirigido monocromático en  $D$  lo cual implica que  $(u_n, u_0)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$  lo cual es una contradicción a nuestras suposiciones. Tenemos que  $z_k \neq u_n$ , entonces  $z_{k-1} = u_n$ ; ahora tenemos que  $(u_0 = z_0, z_{k-2}, z_{k-1} = u_n)$  es un  $u_0u_n$ -camino dirigido monocromático en  $D$  lo que implica que  $(u_n, u_0)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , lo que también es una contradicción.



b.3)  $(z_0, z_3) \in A(D)$  y  $(z_{k-2}, z_0) \in A(D)$ .

Ya que  $\{(z_0, z_1), (z_0, z_3), (z_{k-2}, z_0)\} \subseteq A(D)$  tenemos que  $k - 2 \geq 5$  y existe  $j \in \{1, \dots, \frac{k-5}{2}\}$  tal que  $(z_0, z_{2j+1}) \in A(D)$  y  $(z_{2j+3}, z_0) \in A(D)$ . Sea  $i_0 = \min\{j \in \{1, \dots, \frac{k-5}{2}\} \mid \{(z_0, z_{2j+1}), (z_{2j+3}, z_0)\} \subseteq A(D)\}$ . Sea  $\tilde{C} = (z_0, z_{2i_0+1}, z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_0)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 en  $D$  el cual por hipótesis es monocromático. Ahora vamos a considerar 2 posibles casos:

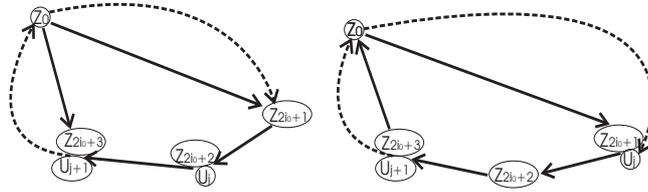


b.3.1)  $2i_0 + 1 \in I_p$ .

En este caso  $z_{2i_0+1} = u_j$  para alguna  $j \in \{2, \dots, n - 2\}$  ( con  $3 \leq 2i_0 + 1 \leq k - 4$ ). Por la construcción de  $C'$  tenemos que  $z_{2i_0+2} = u_{j+1}$  ó  $z_{2i_0+3} = u_{j+1}$ . Si  $z_{2i_0+2} = u_{j+1}$ , entonces  $(u_{j+1} = z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_0, z_{2i_0+1} = u_j)$  es un  $u_{j+1}u_j$ -camino dirigido monocromático en  $D$  lo cual implica que  $(u_j, u_{j+1})$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$  contradiciendo nuestras suposiciones. Entonces  $z_{2i_0+2} \neq u_{j+1}$  y consecuentemente  $z_{2i_0+3} = u_{j+1}$ , por lo tanto  $(u_{j+1} = z_{2i_0+3}, z_0, z_{2i_0+1} = u_j)$  es un  $u_{j+1}u_j$ -camino dirigido monocromático en  $D$ , lo que implica que  $(u_j, u_{j+1})$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , y esto también es una contradicción.

b.3.2)  $2i_0 + 1 \notin I_p$

Por construcción de  $C'$  tenemos que  $\{2i_0, 2i_0 + 2\} \subseteq I_p$

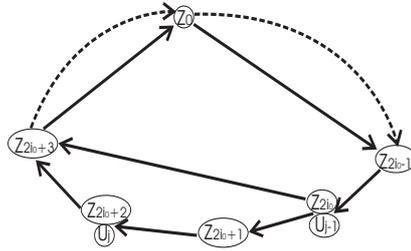


es decir que  $z_{2i_0} = u_{j-1}$  y  $z_{2i_0+2} = u_j$  para alguna  $j \in \{2, \dots, n-1\}$ . El Lema 5 implica que  $(z_{2i_0}, z_{2i_0+3}) \in A(D)$  ó  $(z_{2i_0+3}, z_{2i_0}) \in A(D)$ . Cuando  $(z_{2i_0+3}, z_{2i_0}) \in A(D)$  obtenemos  $(z_{2i_0}, z_{2i_0+1}, z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_{2i_0})$  es un ciclo dirigido de longitud 4 y por hipótesis es monocromático; por lo tanto  $(u_j = z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_{2i_0} = u_{j-1})$  es un  $u_{j-1}u_j$ -camino dirigido monocromático y por lo tanto  $(u_{j-1}, u_j)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$ , lo cual es una contradicción. Entonces tenemos que  $(z_{2i_0}, z_{2i_0+3}) \in A(D)$ , la elección de  $i_0$  implica que  $(z_0, z_{2i_0-1}) \in A(D)$  (ya que si  $(z_{2i_0-1}, z_0) \in A(D)$  el hecho de que  $(z_0, z_1) \in A(D)$  implica que existe  $j \leq i_0 - 2$  tal que  $(z_0, z_{2j+1}) \in A(D)$  y  $(z_{2j+3}, z_0) \in A(D)$  y esto es una contradicción a la elección de  $i_0$ ), por lo tanto  $C'' = (z_0, z_{2i_0-1}, z_{2i_0}, z_{2i_0+3}, z_0)$  es un ciclo dirigido de longitud 4, el cual por hipótesis es monocromático; ya que  $(z_{2i_0+3}, z_0) \in A(\tilde{C}) \cap A(C'')$  tenemos que  $\tilde{C}$  y  $C''$  son del mismo color; entonces  $(u_j = z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_0, z_{2i_0-1}, z_{2i_0} = u_{j-1})$  es un  $u_j u_{j-1}$ -camino dirigido monocromático en  $D$  y  $(u_{j-1}, u_j)$  es una flecha simétrica de  $C$  en  $C(D)$

■

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 33.

**Teorema 34** *Sea  $D$  un torneo bipartito  $m$ -coloreado . Si to-*



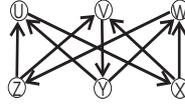
do ciclo dirigido de longitud 4 en  $D$  es monocromático, entonces  $D$  tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

**Observación 4** La hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud 4 es monocromático en el Teorema 34 es indispensable.

Sea  $D$  un torneo bipartito 3-coloreado como sigue  $V(D) = \{u, v, w, x, y, z\}$  y  $A(D) = \{(u, x), (x, v), (v, y), (y, w), (w, z), (z, u), (x, w), (y, u), (z, v)\}$ ; las flechas  $(x, w), (w, z)$  y  $(z, u)$  son de color 1; las flechas  $(y, u), (u, x)$  y  $(x, v)$  son de color 2; y las flechas  $(z, v), (v, y)$  y  $(y, w)$  son de color 3. Los únicos ciclos de longitud 4 de  $D$  son  $(u, x, w, z, u)$ ,  $(v, y, u, x, v)$  y  $(w, z, v, y, w)$  los cuales son cuasi-monocromáticos y la digráfica  $C(D)$  es una digráfica completa que no tiene núcleos; entonces  $D$  no tiene núcleos por trayectorias monocromáticas.

Además, podemos construir una familia infinita de digráficas cuyos ciclos de longitud 4 son todos cuasi-monocromáticos y las cuales no tienen núcleos por trayectorias monocromáticas, como sigue: sea  $D_n$  la digráfica obtenida de  $D$  añadiendo vértices  $z_1, z_2, \dots, z_n$  y flechas 3 coloreadas por cada uno de dichos vértices a  $u, v$  y  $w$ , respectivamente.

**Observación 5** El supuesto de que todo ciclo dirigido de



longitud 4 en un torneo bipartito  $D$  es monocromático, no implica que todo ciclo dirigido de longitud 6 en  $D$  es monocromático.

**Observación 6** Para cada  $m$  existe un torneo bipartito Hamiltoniano  $m$ -coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 4 es monocromático.

**Demostración** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada definida como sigue:

$V(D) = X \cup Y \cup Z \cup W$  donde;  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ ,  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ ,  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ .

$A(D) = X_Y \cup Y_Z \cup Z_W \cup W_X \cup Z_Y \cup W_Z \cup X_W$  donde:

$X_Y = \{(x_i, y_j) | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ ,

$Y_Z = \{(y_i, z_i) | i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ ,

$Z_W = \{(z_i, w_i) | i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ ,

$W_X = \{(w_i, x_{i+1}) | i \in \{1, 2, \dots, m-1\}\} \cup \{(w_m, x_1)\}$ ,

$Z_Y = \{(z_i, y_j) | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j\}$ ,

$W_Z = \{(w_i, z_j) | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j\}$ ,

$X_W = \{(x_i, w_j) | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j+1\}$ ,  
(notación mod  $m$ ).

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  la flecha  $(x_i, y_i)$  es de color  $i$  y cualquier otra flecha es de color 1. Claramente  $D$  es un torneo bipartito  $m$ -coloreado. ■

**Afirmación 4** Sea  $D$  Hamiltoniana. Se sigue de la definición de  $D$  que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  tenemos el camino dirigido  $T_i = (x_i, y_i, z_i, w_i, x_{i+1})$  y claramente  $V(T_i) \cap V(T_j) =$

$\emptyset$  para  $j \neq i + 1$ , y  $V(T_i) \cap V(T_{i+1}) = \{x_{i+1}\}$ . Entonces  $C = \bigcup_{i=1}^m T_i$  es un ciclo dirigido Hamiltoniano de  $D$ .

**Afirmación 5** *Todo ciclo dirigido de longitud 4 de  $D$  es monocromático.*

*Procediendo por contradicción, supongamos que  $C_4 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_1)$  es un ciclo dirigido de  $D$  no monocromático, entonces  $C_4$  debe contener al menos una flecha de color  $i$  para alguna  $i \in \{2, \dots, m\}$ , entonces podemos suponer que  $u_1 = x_2$  y  $u_2 = y_2$ . Se sigue de la definición de  $D$  que  $u_3 = z_2$  y ( $u_4 = w_2$  ó  $u_4 = y_i$  para alguna  $i \neq 2$ ). Cuando  $u_4 = w_2$  obtenemos que  $(x_2, w_2) \in A(D)$  y entonces  $(w_2, x_2) \notin A(D)$ , contradicción. Cuando  $u_4 = y_i$  para alguna  $i \neq 2$  obtenemos que  $(x_2, y_i) \in A(D)$  contradiciendo que  $(u_4 = y_i, u_1 = x_2) \in A(D)$ .*

## Conclusiones

Este trabajo, como su nombre lo indica, es una introducción a la Teoría de Núcleos para todos aquellos que estén interesados en aprender algo de esta teoría y de sus aplicaciones, así como para los que interesados en lo que se está trabajando en la actualidad en relación a dicha teoría.

En el primer capítulo se mostramos las definiciones y teoremas más importantes de la Teoría de Gráficas que son la base del trabajo posterior. Por eso le llamé *principios básicos*.

En el segundo capítulo se ven algunas de las aplicaciones más famosas de la Teoría de núcleos. En este capítulo vemos como dicha teoría nos puede facilitar la solución de ciertos problemas.

En el tercer capítulo recopilamos lo mas importante de la Teoría de Núcleos. Mostramos muchos teoremas importantes para saber si una digráfica tiene o no tiene núcleo.

Los dos últimos capítulos muestran algunos de los resultados que se han obtenido más recientemente. Esto sirve para que aquellas personas interesadas en el tema se den una idea de lo que se hace actualmente.

## Bibliografía

- [1] C. Berge, *Theory of Graphs*. Chapter 3. Methven-Wiley, 1962.
- [2] C. Berge, *A Combinatorial Problem in Logic*. *Discrete Mathematics*, 17, 1977, 23-26.
- [3] C. Berge, *Graphs*. North Holland Amsterdam, 1985, second revised edition.
- [4] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*. North Holland Amsterdam, 1976.
- [5] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*. North-Holland, University of Waterloo, Ontario, 1976.
- [6] Gary Chartrand, *Introductory Graph Theory*, Dover, Western Michigan University, New York, 1985.
- [7] P. Duchet, *Représentation; noyaux en théorie des graphes et hypergraphes*. Thèse, Univ. Paris IV, 1979.
- [8] P. Duchet, *Graphes Noyau-parfaits*. *Annals of Discrete Mathematics*, 9, 1980, 93-101.
- [9] Hortensia Galeana-Sánchez, *On The existence of kernels and h-kernels in directed graphs*. *Discrete Mathematics* 110, 251-255, 1992.

- [10] Hortensia Galeana-Sánchez y Victor Neuman-Lara, *On kernels and semikernels of digraphs*. Discrete Mathematics 48, 67-76,1984.
- [11] Hortensia Galeana-Sánchez y Rocío Rojas-Monroy *On monochromatic paths and monochromatic 4-cycles in edge coloured bipartite tournaments*. Discrete Mathematics Volume 285, 2004, 313-318.
- [12] Shen Minggang, *On monochromatic paths in m-coloured tournaments*. Departament of Mathematics, Shanghai, China,1986.
- [13] J. Von Neumann y O. Morgensten, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [14] V. Neumann-Lara, *Seminúcleos de una digráfica*, An. Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.,II(1971)
- [15] M. Richardson, *Extension theorems for solutions of irreflexive relations*. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 1953, 649.
- [16] M. Richardson, *On weakly ordered systems*. Bull. Amer. Math. Soc., 52, 1946, 113.
- [17] M. Richardson, *Solutions of irreflexive relations*. Ann. Math. (2), 58,1953, 573.