



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA

ANÁLISIS DE DISPOSITIVOS MAGNETOHIDRODINÁMICOS  
DE BOMBEO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

ENERGÍA - SISTEMAS ENERGÉTICOS

P R E S E N T A:

MICHEL ALEJANDRO RIVERO CORONA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA

2008





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Tabla de Contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Ecuaciones de la MHD</b>	<b>7</b>
2.1. Ecuaciones de la Mecánica de Fluidos . . . . .	8
2.2. Ecuaciones del Campo Electromagnético . . . . .	9
2.3. Aproximación MHD . . . . .	10
<b>3. Flujos MHD en ductos</b>	<b>13</b>
3.1. Flujo en un Campo Magnético Homogéneo . . . . .	13
3.1.1. Ecuaciones Adimensionales . . . . .	15
3.1.2. Flujo de Hartmann . . . . .	17
3.1.3. Modelación Numérica . . . . .	22
3.2. Flujo en un Campo Magnético Inhomogéneo . . . . .	26
3.2.1. Flujo debido a un Gradiente de Presión . . . . .	30
3.2.2. Flujo debido a una Corriente Inyectada . . . . .	39
<b>4. Modelo Numérico Cuasi-Bidimensional con Fricción</b>	<b>45</b>
4.1. Aproximación cuasi-bidimensional . . . . .	46
4.2. Determinación de la Función $f$ . . . . .	49
4.3. Modelación Numérica . . . . .	53
4.4. Consideraciones para el Diseño de una Bomba MHD . . . . .	57
<b>5. Conclusiones y Trabajo a Futuro</b>	<b>65</b>
<b>A. Tratamiento Numérico de las Ecuaciones</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>

# Resumen

En este trabajo se estudian mediante simulaciones numéricas las características del flujo de un fluido viscoso, eléctricamente conductor, dentro de un ducto de sección transversal rectangular constante de razón de aspecto pequeña en presencia de un campo magnético transversal inhomogéneo. El interés principal en comprender este flujo radica en que tiene lugar en diversas aplicaciones tecnológicas, en particular, en los sistemas de bombeo electromagnéticos. En el Capítulo 1 se presenta una introducción a las características de los sistemas de bombeo, en particular de las bombas electromagnéticas, y se aborda su importancia en aplicaciones industriales. En el Capítulo 2 se establece el sistema de ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) con base en aproximaciones que nos permiten simplificar y acoplar los sistemas de ecuaciones de la mecánica de fluidos convencional y las ecuaciones del campo electromagnético, lo que permite describir la dinámica de los flujos MHD. En el Capítulo 3 se presenta, primeramente, la validación del modelo numérico mediante la comparación de los resultados numéricos con una solución analítica conocida como el flujo de Hartmann. Posteriormente, se analiza numéricamente el flujo de un fluido conductor en presencia de un campo inhomogéneo mediante un modelo bidimensional, con base en la solución de las ecuaciones de la MHD. Se estudian los casos en que el flujo es producido mediante un gradiente de presión externo y mediante una fuerza electromagnética. En el Capítulo 4 se presenta un modelo cuasi-bidimensional que toma en cuenta las capas límite que se forman en las paredes del ducto transversales al campo magnético aplicado, y se analizan los efectos sobre el flujo. Además, se hacen simulaciones más realistas al considerar condiciones de frontera más cercanas a las condiciones experimentales, así como las propiedades físicas de dos fluidos específicos (un electrolito y un metal líquido), distribuciones del campo aplicado que se asemejan más a la realidad y la disposición adecuada de los electrodos dentro del ducto que disminuye las pérdidas terminales. Finalmente, se establecen las conclusiones del trabajo. Los resultados de este estudio pueden ser de utilidad en el diseño de dispositivos de bombeo electromagnético.

# Capítulo 1

## Introducción

La necesidad de transportar fluidos de un lugar a otro existe en una infinidad de aplicaciones tecnológicas. De hecho, la gran variedad de fluidos y condiciones de operación han dado lugar al desarrollo de toda una gama de sistemas de bombeo adaptados para aplicaciones específicas. Ejemplos típicos pueden encontrarse en las industrias petrolera, metalúrgica, nuclear, petroquímica, entre otras, en donde la necesidad de manejar fluidos reológicos, a altas temperaturas o muy corrosivos ha propiciado la búsqueda de métodos de bombeo que logren el objetivo principal de transportar los fluidos de trabajo de una manera eficiente y segura. Adicionalmente a estas características, un buen sistema de bombeo debe permitir un control preciso del fluido bombeado, especialmente en aplicaciones tecnológicas de punta en donde el control adecuado del fluido se vuelve un requisito indispensable.

Muchos de los sistemas convencionales de bombeo utilizan métodos mecánicos para impulsar al fluido, esto se observa en las bombas de desplazamiento positivo reciprocantes (de pistón, diafragma), rotatorias (de engranes, de lóbulos ) y rotodinámicas (centrifuga, de turbina). Una característica común de tales sistemas, es la presencia de partes mecánicas móviles, como pistones, álabes o rotores, que están en contacto directo con el fluido. Esto puede ser una limitante para el manejo de fluidos corrosivos o a alta temperatura debido al desgaste de estas partes de la bomba. Por otro lado, en aplicaciones en las que se requiere preservar la pureza del fluido transportado es conveniente evitar en lo posible el contacto del fluido con materiales extraños, lo que obliga a tener sistemas más sofisticados para evitar la contaminación que se presenta en el fluido al utilizar los sistemas convencionales. Una alternativa a los sistemas mecánicos de bombeo se encuentra en el bombeo electromagnético. Este método utiliza una fuerza electromagnética para impulsar al fluido, el cual necesariamente debe ser conductor de electricidad. Aunque este hecho es una restricción para las aplicaciones del bombeo electromagnético, en la práctica existen un gran número de fluidos conductores tales como los electrolitos, los metales líquidos y las sales fundidas, que se utilizan en diversas aplicaciones industriales y científicas. El hecho de utilizar una fuerza electromagnética (fuerza de volumen) en vez de una fuerza mecánica de contacto (fuerza de superficie) puede tener ciertas ventajas en aplicaciones prácticas.

A grandes rasgos, las bombas electromagnéticas, también conocidas como bombas magnetohidrodinámicas (MHD), pueden clasificarse en dos grupos: bombas de inducción y bombas de conducción.

En las bombas de inducción se inducen corrientes eléctricas en el fluido por medio de un campo magnético que varía en el tiempo (campo viajero). Al interactuar dichas corrientes con el campo magnético instantáneo se produce una fuerza electromagnética, o fuerza de Lorentz, que impulsa al fluido en la dirección en que se mueve el campo magnético. Existen distintas configuraciones de bombas de inducción, en la Fig. 1.1 se muestra una bomba de inducción lineal anular[1].

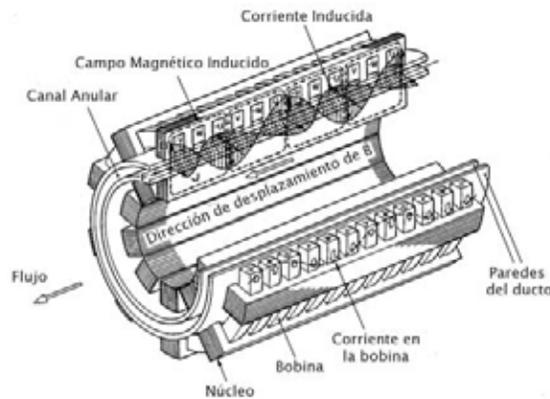


Fig. 1.1: Bomba electromagnética de inducción lineal anular (ALIP)[1].

Por su parte, en una bomba MHD de conducción se inyecta una corriente eléctrica a través de electrodos especialmente dispuestos en un canal. La corriente interactúa con un campo magnético aplicado transversalmente dando lugar a la fuerza de Lorentz que impulsa al fluido en dirección perpendicular tanto a la corriente como al campo. La Fig. 1.2 muestra una bomba MHD de conducción típica. En este trabajo centraremos nuestra atención en este tipo de bombas electromagnéticas.

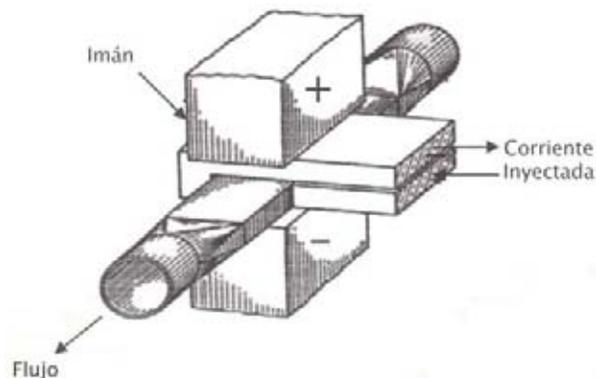


Fig. 1.2: Esquema de una bomba electromagnética por conducción

Una bomba MHD de conducción (Fig. 1.3) consta básicamente de un ducto de sección transversal rectangular inmerso en un campo magnético externo y estático transversal a las paredes superior e inferior del ducto, las cuales son eléctricamente aislantes. Las paredes laterales son electrodos metálicos conectados a una fuente de voltaje. Dentro del ducto se encuentra un fluido conductor que llena completamente el espacio disponible. Al aplicar un voltaje entre los electrodos, fluirá una corriente eléctrica directa aproximadamente uniforme entre éstos, la cual interaccionará con el campo magnético transversal y dará lugar a la fuerza que impulsará al fluido en la dirección axial del ducto. El sentido positivo o negativo de la fuerza dependerá del sentido de la corriente inyectada.

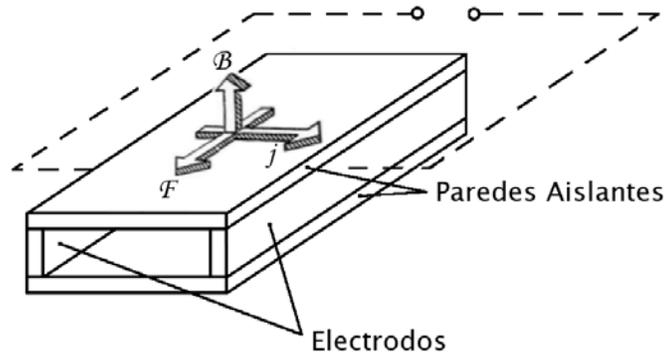


Fig. 1.3: Esquema de una bomba electromagnética de conducción. Se muestran las direcciones del campo aplicado, corriente inyectada y fuerza resultante.

Este tipo de dispositivos tiene su origen en un estudio pionero llevado a cabo por Ritchie[2], publicado en 1832, quien exitosamente bombeó agua, en presencia de un campo magnético, inyectándole una corriente eléctrica. Este dispositivo puede considerarse como el predecesor de las bombas MHD. En los primeros años del siguiente siglo fueron inventados y patentados un buen número de dispositivos MHD, por ejemplo, en 1907 Northrup[3] diseñó y patentó la primera bomba MHD de conducción.

El principio de operación de una bomba MHD es similar al de un motor. Tal motor puede invertirse para obtener un generador, que convierte energía mecánica en energía eléctrica. No es muy sorprendente entonces que la invención del generador MHD siguiera a la de la bomba MHD. En el generador MHD el fluido es movido por un gradiente de presión, la interacción del fluido en movimiento con el campo aplicado producirá una corriente que se extrae a través de los electrodos. En 1923 fue patentado el primer generador MHD por Petersen[4]. En 1931 Einstein y Szilard[5] patentaron la primera bomba MHD de inducción.

En los años treinta fueron hechos los primeros estudios teóricos y experimentales de flujos MHD en tubos y ductos. En 1930 Williams[6] publicó resultados experimentales de electrolitos fluyendo en tubos aislantes. En 1936 y 1937 Hartmann y Lazarus[7] llevaron a cabo experimentos con mercurio, que al tener una conductividad eléctrica mucho más alta que

los electrolitos permite observar de una manera más intensa los efectos MHD. En particular, investigaron los cambios en el arrastre, y la supresión de turbulencia causada por el campo magnético.

Después de los experimentos de Williams, hubo intentos exitosos de aplicar el método MHD en la medición de velocidades de flujos fisiológicos, en particular para monitorear fluctuaciones en el flujo de sangre en las arterias[8]. Esto se logra al medir el voltaje inducido por la interacción del flujo y el campo magnético, ya que éste es proporcional a la velocidad del fluido. El nacimiento oficial de la magnetohidrodinámica, como ahora se conoce a la mecánica de los fluidos eléctricamente conductores en campos magnéticos, se atribuye a Alfvén quien utilizó por primera vez este término en 1942 al estudiar lo que ahora se denomina como “ondas de Alfvén” que son perturbaciones ondulatorias que se propagan en un fluido altamente conductor[9].

En la segunda mitad del siglo XX, el desarrollo de la MHD benefició diversos campos tecnológicos. La tecnología espacial se favoreció con el sistema de propulsión MHD, el cual es básicamente una bomba MHD en la que el fluido de trabajo es expulsado hacia el espacio. La metalurgia también se benefició de las ideas y resultados obtenidos de las investigaciones en MHD. Se encontró que los campos magnéticos pueden usarse no sólo para controlar el flujo de metales líquidos de una manera no intrusiva, sino para modificar la distribución del campo de velocidades, controlar el mezclado y la transferencia de calor, entre otras aplicaciones.

En todas estas aplicaciones el conocimiento del flujo dentro de los dispositivos es de vital importancia, ya que esto permite estar en condiciones de aprovecharlo de una manera más eficiente. En particular, nuestro interés en este trabajo es, por un lado, desarrollar un modelo numérico del flujo dentro de una bomba MHD de conducción, y por otro, estudiar las características físicas de dicho flujo, es decir, del flujo dentro de un ducto de sección transversal rectangular constante en presencia de un campo magnético transversal no homogéneo.

Para lograr esto es necesario establecer las ecuaciones que describen a los flujos MHD. Cuando un fluido eléctricamente conductor se mueve en presencia de un campo electromagnético, la interacción de ambos modifica tanto al flujo como al campo. Entonces para describir el problema se deben utilizar además de las ecuaciones que rigen la mecánica de fluidos, las ecuaciones del campo electromagnético. Utilizando aproximaciones acordes con las condiciones físicas de los flujos de interés, en el Capítulo 2 se presentan las ecuaciones fundamentales de la MHD, que en los siguientes capítulos se resuelven bajo consideraciones específicas.

En general los flujos que tienen lugar en una bomba electromagnética de conducción son muy complejos. La complejidad estriba en diversos factores tales como la existencia de paredes conductoras y aislantes en el ducto, la presencia de un campo magnético aplicado inhomogéneo a la entrada y salida de la bomba, y la generación de corrientes eléctricas inducidas en el fluido que, adicionalmente a las corrientes inyectadas, modifican la dinámica del flujo, entre otros. Lo anterior trae como consecuencia que la distribución de velocidad y de corriente eléctrica en el fluido sean tridimensionales, y generalmente muy difíciles

de determinar de manera completa. En este trabajo se efectuarán algunas suposiciones que simplifican en gran medida el análisis y permiten obtener soluciones analíticas y numéricas. Una de las suposiciones básicas es que la razón de aspecto del ducto es pequeña, de manera que la separación entre las paredes transversales al campo magnético es mucho menor que la separación entre las paredes paralelas al campo lo que permite suponer que el flujo es cuasi-bidimensional. Esta suposición es adecuada, en particular, para el análisis de dispositivos a escalas pequeñas ( $10^{-3} - 10^{-5} m$ ) donde los efectos viscosos son muy importantes. De hecho, una de las motivaciones de este trabajo es la aplicación potencial de métodos electromagnéticos en microbombas.

Con el fin de comprender mejor la estructura de los flujos en una bomba MHD, en el Capítulo 3 se analizan diversos efectos fundamentales para integrarlos posteriormente en un modelo más completo. Así, para comprender el efecto tanto del campo aplicado como de la presencia de las paredes transversales al mismo, se estudia primero el flujo entre dos paredes paralelas infinitas en presencia de un campo magnético transversal uniforme en todo el espacio. Para este flujo, conocido como el flujo de Hartmann y que no considera la existencia de paredes laterales, existen soluciones analíticas que utilizaremos para calibrar el método numérico empleado en este trabajo. Por otra parte, estudiaremos el flujo en un plano limitado por dos paredes laterales bajo un campo magnético no uniforme que apunta en dirección normal al plano de estudio, con la finalidad de destacar algunos aspectos sobre la dinámica del flujo en campos inhomogéneos que son de importancia en el diseño de estos dispositivos. Este estudio es puramente bidimensional ya que despreciamos los efectos viscosos debidos a las paredes transversales al campo.

Para hacer que el modelo propuesto se aproxime más a la realidad, se extiende en el Capítulo 4 al considerar los efectos viscosos debido a las paredes perpendiculares al campo. Ya que los principales efectos tridimensionales provienen de la existencia de capas límite que se forman en dichas paredes del ducto, se propone un modelo de fricción que toma en cuenta las diferencias entre las capas límite dentro y fuera de la región del campo magnético. Promediando espacialmente las ecuaciones de movimiento en la dirección del campo aplicado, se obtienen ecuaciones cuasi-bidimensionales que incluyen términos adicionales de fricción. Este sistema de ecuaciones permite efectuar simulaciones numéricas más realistas, lo que se ilustra analizando diferentes ejemplos.

# Capítulo 2

## Ecuaciones de la MHD

En este capítulo presentaremos las ecuaciones fundamentales de la MHD, es decir, las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido conductor en un campo magnético. Primero presentaremos las ecuaciones de balance de la mecánica de fluidos, seguidas por las ecuaciones del campo electromagnético y, finalmente, estableceremos la aproximación MHD que permite obtener un sistema simplificado de ecuaciones que describen adecuadamente los flujos a estudiar en este trabajo.

La magnetohidrodinámica (MHD) se define comúnmente como el estudio del movimiento de fluidos eléctricamente conductores -líquidos o gases- en campos magnéticos, o bien, como la mecánica de fluidos eléctricamente conductores. Para que la MHD sea aplicable el medio debe considerarse como un continuo, donde un fluido se describe en función de sus propiedades físicas, las cuales representan características promedio de su estructura molecular y en general son funciones de la presión y la temperatura. Ejemplo de estas propiedades son la viscosidad, la tensión superficial, y las conductividades eléctrica y térmica. Adicionalmente, las variables dependientes que describen el comportamiento del fluido tales como la densidad, velocidad, temperatura, esfuerzos mecánicos y electromagnéticos, se caracterizan a través de campos escalares, vectoriales y tensoriales que son funciones continuas del espacio y del tiempo.

En el movimiento de un fluido conductor en presencia de un campo magnético existen dos efectos básicos de acoplamiento. Primero, el movimiento del fluido dentro del campo induce corrientes eléctricas que a su vez generan un campo magnético inducido que modifica al campo existente. Segundo, la presencia de corrientes eléctricas y campos magnéticos producirá una fuerza sobre los elementos del fluido que modificará su estado dinámico. En consecuencia, las ecuaciones ordinarias de la mecánica de fluidos por sí mismas no son suficientes para describir adecuadamente dichos fenómenos, ocasionados por la interacción fluido-campo, y es necesario combinarlas con las ecuaciones del campo electromagnético a fin de obtener el sistema de ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido conductor en presencia de un campo electromagnético.

## 2.1. Ecuaciones de la Mecánica de Fluidos

Los líquidos y los gases se consideran incompresibles en una gran cantidad de aplicaciones prácticas, y por tanto su densidad puede considerarse constante. Bajo la suposición de incompresibilidad, la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad tiene la forma

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.1)$$

donde  $\vec{u}$  es el campo vectorial de velocidad. Por otra parte, los fluidos de interés en este trabajo (metales líquidos y electrolitos), se pueden considerar como fluidos Newtonianos. La ecuación de balance de cantidad de movimiento que describe el comportamiento de fluidos de esta naturaleza es la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{f}, \quad (2.2)$$

donde  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $p$ , y  $\vec{f}$  son la densidad del fluido, la viscosidad cinemática, la presión, y las fuerzas de cuerpo externas, respectivamente. Evidentemente, es necesario dar la forma explícita de las fuerzas externas, que dependerán de las interacciones a las que está sujeto el fluido. En particular, cuando un fluido eléctricamente conductor interactúa con campos electromagnéticos, la fuerza externa relevante es la fuerza de Lorentz, que se presentará posteriormente.

La ecuación de balance de energía o ecuación de transferencia de calor, está desacoplada de las dos anteriores y sólo se presenta aquí para completar el sistema ya que no se considerará la transferencia de calor en la descripción de nuestro problema. Cuando existe interacción electromagnética tiene la forma:

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T \right] = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\vec{j}^2}{\sigma} + \Phi_v, \quad (2.3)$$

donde  $T$  es el campo de temperatura,  $\vec{j}$  es el vector densidad de corriente eléctrica,  $\Phi_v$  denota la disipación viscosa que involucra términos cuadráticos de los gradientes de velocidad,  $c_p$  es el calor específico a presión constante,  $k$  es la conductividad térmica y  $\sigma$  es la conductividad eléctrica del medio. El segundo término del lado derecho denota la disipación de Joule presente en el fluido debido a la circulación de corrientes eléctricas en el medio. Evidentemente las ecuaciones anteriores son insuficientes para describir manera completa el fenómeno si se considera la interacción electromagnética. Por lo tanto, se deben complementar con las ecuaciones del campo electromagnético, que además de las ecuaciones de Maxwell y la ecuación para la fuerza de Lorentz, comprenden a las ecuaciones constitutivas que caracterizan a los campos en distintos medios.

## 2.2. Ecuaciones del Campo Electromagnético

Las leyes experimentales de la electricidad y del magnetismo se resumen en una serie de expresiones conocidas como las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones relacionan los vectores de intensidad de campo eléctrico,  $\vec{E}$ , y de inducción magnética,  $\vec{B}$ , con sus fuentes, que son las cargas y las corrientes eléctricas.

En un medio homogéneo, isotrópico y lineal, las ecuaciones macroscópicas de Maxwell son las siguientes:

La ley de Gauss establece que el flujo de campo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por la superficie. En forma diferencial, dicha ley se expresa como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (2.4)$$

donde  $\rho_e$  es la densidad de carga eléctrica y  $\epsilon$  la permitividad eléctrica del medio.

La ley de Gauss para magnetismo expresa la inexistencia de cargas magnéticas aisladas, o como se conocen habitualmente, monopolos magnéticos. Las distribuciones de fuentes magnéticas son siempre neutras en el sentido de que poseen un polo norte y un polo sur, por lo que su flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo, de modo que en forma diferencial tenemos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.5)$$

La ley de Faraday establece que la fuerza electromotriz inducida en un circuito es directamente proporcional a la rapidez con que cambia el flujo magnético que lo atraviesa. En otras palabras, establece la posibilidad de producir campos eléctricos a partir de campos magnéticos variables en el tiempo. Para cada punto del espacio la ley de Faraday se puede expresar en la forma

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.6)$$

La ley de Ampère-Maxwell o ley de Ampère generalizada, establece que los campos magnéticos pueden producirse por medio de corrientes eléctricas o bien debido a la variación temporal de campos eléctricos. La expresión diferencial de dicha ley toma la forma

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio. El segundo término del lado derecho se denomina la corriente de desplazamiento de Maxwell y es indispensable para la descripción de los fenómenos radiativos.

Aplicando el operador divergencia a la ecuación (2.7) y utilizando la ley de Gauss (2.4), obtenemos la ecuación de conservación de la carga eléctrica o ecuación de continuidad, es decir,

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0. \quad (2.8)$$

Las ecuaciones de Maxwell deben complementarse incluyendo una ecuación constitutiva que relacione la densidad de corriente eléctrica en el medio con los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . La ecuación constitutiva más común que se satisface en una gran cantidad de situaciones físicas, en particular al trabajar con metales líquidos y electrolitos, es la ley de Ohm. Dicha ley establece una relación lineal entre la densidad de corriente eléctrica y el campo eléctrico “efectivo” en el medio. Haciendo referencia al sistema de laboratorio respecto al cual el fluido se desplaza con velocidad  $\vec{u}$ , la ley de Ohm toma la forma

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \rho_e \vec{u}. \quad (2.9)$$

El segundo término del lado derecho se conoce como la corriente de convección. Finalmente, debemos considerar la fuerza electromagnética ejercida sobre el medio debido a la presencia de los campos. En un medio continuo con densidad de carga  $\rho_e$  y densidad de corriente eléctrica  $\vec{j}$ , la fuerza electromagnética tiene la forma

$$\vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}. \quad (2.10)$$

### 2.3. Aproximación MHD

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos son ecuaciones no relativistas donde los cambios entre sistemas coordinados se realizan mediante transformaciones galileanas. Por su parte, las ecuaciones del campo electromagnético son ecuaciones relativistas, invariantes ante transformaciones de Lorentz. Para lograr la fusión de estos dos conjuntos de ecuaciones es necesario utilizar ciertas aproximaciones que permitan establecer una naturaleza común para el sistema completo de ecuaciones. Esto se logra mediante la aproximación MHD que se basa en las siguientes suposiciones:

- La velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz ( $c$ ), es decir  $u^2 \ll c^2$ . Por lo que las ecuaciones de Maxwell pierden su invarianza ante las transformaciones de Lorentz (aproximación no relativista), conservando únicamente su invarianza galileana, al igual que las ecuaciones de la mecánica de fluidos.
- Los flujos tienen lugar en campos magnéticos cuasi-estacionarios o a bajas frecuencias.
- Los campos eléctricos son del orden de magnitud de la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida  $\vec{u} \times \vec{B}$ .

Haciendo uso de estas suposiciones es posible simplificar las ecuaciones del campo electromagnético de modo que al unir las con las ecuaciones de balance de la mecánica de fluidos obtenemos el conjunto completo de ecuaciones MHD. Una de las simplificaciones importantes se da al poder despreciar la corriente de desplazamiento de Maxwell, como

ocurre en situaciones donde no existen oscilaciones de alta frecuencia. La aproximación MHD también permite despreciar tanto la corriente de convección en la ley de Ohm como el término eléctrico en la ecuación para la fuerza electromagnética. Puede demostrarse que estos términos son del orden  $u^2/c^2$ , y por tanto son completamente despreciables. De manera similar, la densidad de energía eléctrica resulta despreciable en comparación con la magnética. En los libros de Shercliff[10] y Hughes y Young[11] se realiza un análisis detallado de las simplificaciones que se siguen al aplicar la aproximación MHD. Bajo esta aproximación, las ecuaciones fundamentales de la MHD son:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{j} \times \vec{B}, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.15)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}). \quad (2.16)$$

Estas ecuaciones forman el sistema completo que permite describir el comportamiento de un fluido conductor en movimiento en presencia de un campo electromagnético. En esta aproximación es apropiado ignorar la ley de Gauss (2.4), ya que el campo eléctrico está completamente determinado por la ley de Faraday (2.13) y la ley de Ohm (2.16). Además, por sí misma la distribución de cargas no es de interés en la MHD, sin embargo hay que notar que no se está afirmando que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ . Debemos notar que en (2.14) es correcto decir que la permitividad del medio es igual a la permitividad del vacío,  $\mu = \mu_0$ , lo que es una muy buena aproximación al trabajar con metales líquidos y electrolitos. En el sistema de ecuaciones (2.11) - (2.16) no incluimos a la ecuación de transferencia de calor ya que en este trabajo no determinaremos los campos de temperatura.

A partir de las ecuaciones (2.13)-(2.16) es posible obtener la ecuación de inducción de campo magnético[12] que describe el transporte de campo magnético por convección y difusión. Para obtenerla primero se despeja la corriente de la ecuación de Ampère (2.14) y se sustituye en la Ley de Ohm (2.16); de ésta despejamos el campo eléctrico y lo sustituimos en la Ley de Faraday (2.13). Para simplificar usamos la Ley de Gauss para magnetismo (2.15), quedando la ecuación

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \vec{B} + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}), \quad (2.17)$$

donde  $\nu_m = 1/\mu_0\sigma$  se conoce como la difusividad magnética. En esta ecuación el transporte de campo magnético por convección está dado por el término  $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})$ , mientras que el

transporte por difusión está representado por  $\nu_m \nabla^2 \vec{B}$ . El mecanismo de transporte dominante (convectivo o difusivo) en un problema dado, está determinado básicamente por el valor de la conductividad eléctrica del fluido. Si la conductividad del fluido es alta, dominará el término convectivo, mientras que si la conductividad es baja dominará en término difusivo. En la mayoría de los flujos MHD a escala industrial y de laboratorio, los efectos difusivos de campo magnético son los dominantes. Nótese que las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.17) constituyen un sistema de siete ecuaciones y siete incógnitas, a saber,  $\vec{u}$ ,  $p$  y  $\vec{B}$ . Estas serán las variables dependientes que consideraremos en este trabajo. Sin embargo, ya que la solución de estas ecuaciones no garantiza que el campo magnético sea solenoidal, debe imponerse también la condición (2.15). Una vez determinando  $\vec{B}$ , la densidad de corriente eléctrica puede obtenerse de la ecuación (2.14).

## Capítulo 3

# Flujos MHD Bidimensionales en Ductos Rectangulares

En este capítulo analizaremos los flujos que tienen lugar en un ducto de sección transversal rectangular en presencia de un campo magnético aplicado transversalmente a dos de las paredes del ducto. Esta es la configuración básica de una bomba MHD de conducción o de un generador eléctrico MHD. Como se mencionó anteriormente, se hará uso de ciertas simplificaciones para reducir la complejidad del problema y poder resolver las ecuaciones que gobiernan el flujo. La solución de las ecuaciones se hará básicamente de manera numérica, por lo que primeramente nos avocaremos a resolver un problema que tiene una solución analítica con la cual se validará el método numérico. Dicho problema, conocido como el flujo de Hartmann, es el flujo de un fluido conductor entre dos paredes infinitas, que pueden ser aislantes o eléctricamente conductoras, bajo la acción de un campo magnético perpendicular a dichas paredes y uniforme en todo punto. Posteriormente, utilizando un modelo numérico bidimensional, analizaremos el flujo en un ducto largo bajo la acción de un campo magnético que afecta sólo una cierta sección del ducto, de manera que tanto a la entrada como a la salida del campo éste es inhomogéneo. Este es un flujo que se acerca un poco más a lo que sucede en una bomba MHD. Los flujos aquí tratados nos permitirán comprender algunos efectos característicos de la acción de un campo magnético sobre un fluido conductor en movimiento.

### 3.1. Flujo en un Campo Magnético Homogéneo

La Fig. 3.1 muestra un ducto de sección transversal rectangular constante en presencia de un campo magnético uniforme en todo punto aplicado en la dirección  $z$  perpendicular a las paredes inferior y superior. Las paredes laterales (paralelas al campo) son electrodos que pueden estar conectados a un circuito externo. Supondremos que un fluido conductor fluye dentro del ducto en dirección  $x$  debido a la existencia de un gradiente de presión externo

(en la dirección del flujo) o de una fuerza electromagnética producida por la inyección de una corriente eléctrica en la dirección  $y$ .

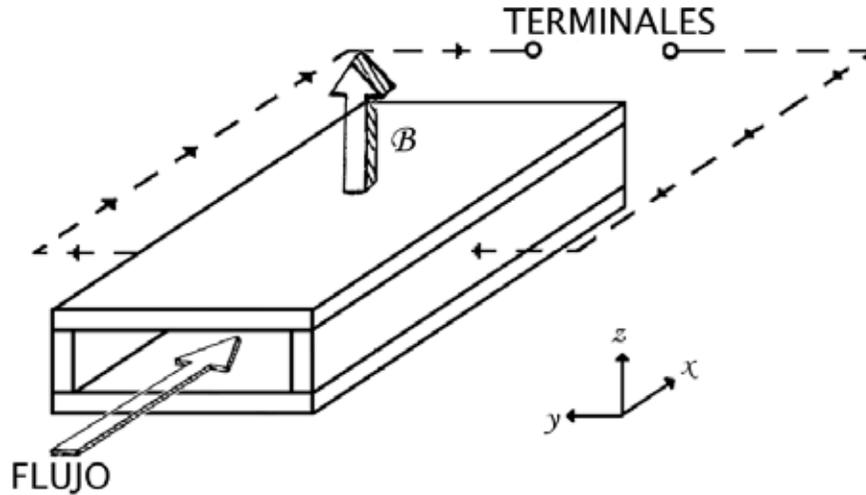


Fig. 3.1: Flujo en un ducto de sección transversal rectangular constante en presencia de un campo magnético uniforme.

Cuando un fluido conductor tiene un movimiento relativo al campo magnético aplicado, de acuerdo a la ley de inducción de Faraday, se genera una fuerza electromotriz (fem) que induce la circulación de una corriente en el medio. Por tanto, en el fluido la densidad de corriente total es la suma de la corriente aplicada ( $\vec{j}_0$ ), que puede o no estar presente, y la inducida ( $\vec{j}_i$ ):

$$\vec{j} = \vec{j}_i + \vec{j}_0 . \quad (3.1)$$

La existencia de corrientes eléctricas tiene a su vez varios efectos físicos. Por un lado, la circulación de corrientes eléctricas en el fluido conductor genera lo que se conoce como disipación de Joule, que manifiesta la transformación irreversible de parte de la energía existente en el sistema en calor. Por otro lado, en concordancia con la ley de Ampère, estas corrientes inducen campos magnéticos, por lo que el campo magnético total será ahora el campo aplicado ( $\vec{B}_0$ ) más el campo inducido por la corriente que circula en el fluido ( $\vec{b}$ ), es decir:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} . \quad (3.2)$$

Se debe tener en cuenta que la corriente inducida,  $\vec{j}_i$ , da lugar a fuerzas electromagnéticas (de Lorentz) que actúan en dirección contraria a las fuerzas aplicadas, ya sean mecánicas o magnéticas, por lo que tienden a inhibir el movimiento del fluido, tratando de llevarlo al equilibrio.

Con el fin de obtener una solución analítica al problema, supondremos que la razón de aspecto del ducto ( $h = a/b$ ) es muy pequeña, es decir, que la separación entre las paredes

superior e inferior es mucho menor que la separación entre las paredes laterales:  $a \ll b$  (ver Fig. 3.2). Podemos entonces suponer que las paredes superior e inferior son infinitas, evitando así considerar los flujos secundarios producidos por las paredes laterales. Supondremos además que el flujo es producido por un gradiente de presión axial y por simplicidad supondremos también que no existe corriente eléctrica inyectada. Antes de dar la solución explícita al problema escribiremos las ecuaciones que gobiernan el flujo en forma adimensional.

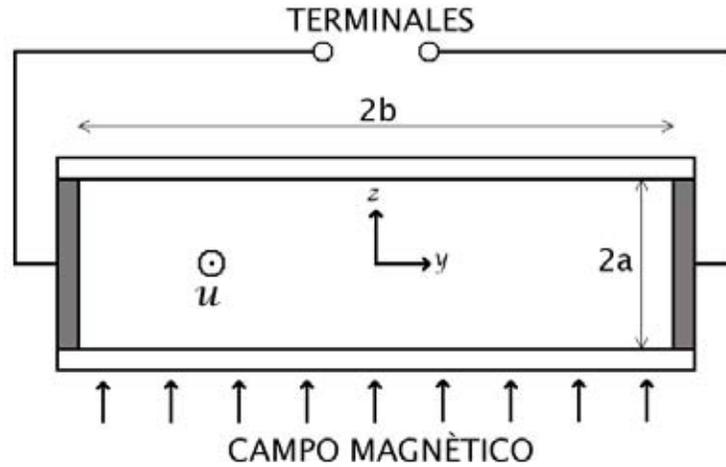


Fig. 3.2: Sección transversal del ducto

### 3.1.1. Ecuaciones Adimensionales

Muchas veces para estudiar un fenómeno experimentalmente es necesario reproducirlo en el laboratorio a una escala diferente. Por ejemplo, para diseñar un avión se construye un modelo a escala y se prueba en un túnel de viento. Las dimensiones de dicho modelo y las condiciones de flujo a las que se somete deben mantener relaciones de similitud con respecto a las del prototipo bajo condiciones reales. Esto se logra manteniendo constante ciertos grupos o parámetros adimensionales, que son el resultado de la combinación de las variables físicas y geométricas del problema a tratar. Es decir, cada grupo adimensional relevante debe mantener el mismo valor tanto en las condiciones bajo las que se explora el modelo a escala como en las condiciones de operación realistas del prototipo. Para realizar este análisis es muy útil expresar las ecuaciones en forma adimensional, donde los parámetros adimensionales relevantes aparecen de manera explícita.

En nuestro caso las ecuaciones que gobiernan el flujo, a saber, (2.11), (2.12), (2.15) y (2.17) se expresan en forma adimensional como

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{Ha^2}{Re} (\vec{j} \times \vec{B}), \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} = \frac{1}{R_m} \nabla^2 \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u}, \quad (3.6)$$

donde se han utilizado las siguientes variables adimensionales (por simplicidad en (3.3), (3.4), (3.5) y (3.6) se han omitido los asteriscos):

$$u^* = \frac{u}{U}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad j^* = \frac{j}{\sigma U B_0}, \quad B^* = \frac{B}{B_0}, \quad t^* = \frac{t}{L/U}, \quad x^* = \frac{x}{L},$$

donde  $U$  es una velocidad característica del flujo, por ejemplo la velocidad promedio,  $B_0$  es el valor máximo del campo magnético aplicado y  $L$  es una longitud característica, que en este caso se toma como la mitad de la separación entre las paredes superior e inferior,  $a$ . En las ecuaciones (3.3)-(3.6) aparecen tres parámetros adimensionales que son de gran importancia en el estudio de flujos MHD, y están definidos como:

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad Ha = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}, \quad R_m = \sigma \mu_0 UL, \quad (3.7)$$

donde  $\mu_f$  es la viscosidad dinámica del fluido.  $Re$  es el número de Reynolds ordinario, que da una estimación de la importancia del transporte de cantidad de movimiento por convección comparado con el transporte por difusión viscosa. El cuadrado del número de Hartmann,  $Ha$ , da una estimación de las fuerzas magnéticas comparadas con las viscosas.  $R_m$  denota el número de Reynolds magnético, que en analogía con el número de Reynolds ordinario de la mecánica de fluidos, nos dice qué tanto domina la convección del campo magnético sobre la difusión del mismo. Otra manera de interpretar  $R_m$ , más adecuada a nuestro problema, es como el cociente del campo magnético inducido y el campo magnético aplicado. Esto se observa al estimar el valor característico del campo inducido por las corrientes, utilizando las ecuaciones (2.14) y (2.16), es decir

$$b \sim L \mu_0 j_i \sim L \mu_0 \sigma U B_0,$$

que al dividirlo entre el valor característico del campo aplicado ( $B_0$ ) nos da la expresión mostrada para  $R_m$ . En la mayoría de los flujos MHD a escala industrial y de laboratorio donde se utilizan metales líquidos o electrolitos,  $R_m$  es muy pequeño, lo que físicamente indica que el campo magnético inducido es mucho menor que el aplicado.

Si ahora suponemos que el campo inducido es de orden  $R_m$ , podemos escribir al campo total como

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + R_m \vec{b}, \quad (3.8)$$

donde el campo aplicado es un campo magnetostático que satisface las ecuaciones

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \nabla \times \vec{B}_0 = 0. \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.8) en la ecuación de inducción (3.6), obtenemos

$$R_m \frac{\partial}{\partial t} \vec{b} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B}_0 + R_m (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{b} = \nabla^2 \vec{b} + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{u} + R_m (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{u}. \quad (3.10)$$

Suponiendo que el campo inducido es mucho menor que el aplicado, es decir  $R_m \ll 1$ , la ecuación de inducción (3.10) se reduce a su forma quasi-estática

$$\nabla^2 \vec{b} + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B}_0 = 0. \quad (3.11)$$

El campo inducido satisface adicionalmente

$$\nabla \cdot \vec{b} = 0, \quad \nabla \times \vec{b} = \vec{j}_i. \quad (3.12)$$

Para la fuerza de Lorentz tenemos:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \vec{j} \times (\vec{B}_0 + R_m \vec{b}) = \vec{j} \times \vec{B}_0 + R_m \vec{j} \times \vec{b}, \quad (3.13)$$

en donde  $\vec{j} = \vec{j}_i$ , ya que supusimos que no hay corriente inyectada. Entonces, utilizando la suposición  $R_m \ll 1$ , la fuerza de Lorentz queda

$$\vec{j} \times \vec{B} = \vec{j}_i \times \vec{B}_0. \quad (3.14)$$

### 3.1.2. Flujo de Hartmann

Una de las primeras soluciones exactas a las ecuaciones de la MHD, e conocida como el *flujo de Hartmann*, en honor a J. Hartmann quien la obtuvo en 1937 cuando realizó los primeros trabajos serios teóricos y experimentales sobre el flujo de metales líquidos en presencia de campos magnéticos[13, 14]. Este flujo es el análogo MHD del flujo de Poiseuille en la mecánica de fluidos ordinaria.

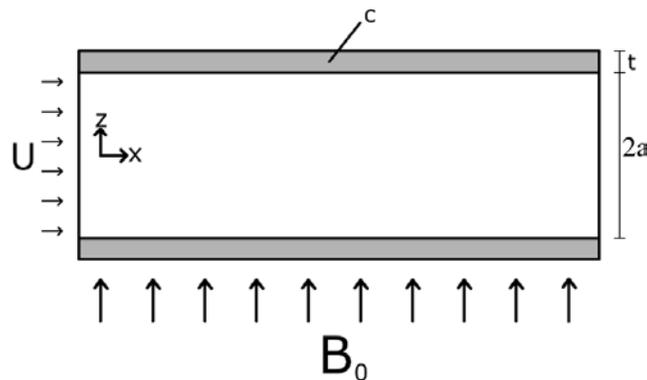


Fig. 3.3: Flujo entre placas paralelas infinitas de espesor  $t$  en presencia de un campo magnético uniforme  $B_0$  aplicado en dirección normal a las placas.

Aquí consideraremos una generalización del flujo de Hartmann obtenida por Chang[15]. El problema consiste en el flujo laminar en estado permanente de un fluido conductor, viscoso e incompresible entre dos paredes paralelas infinitas de espesor  $t$  separadas una distancia  $2a$ , en presencia de un campo magnético uniforme  $B_0$ , aplicado en dirección normal a las paredes (ver Fig. 3.3). Las paredes pueden ser aislantes o eléctricamente conductoras. El flujo está completamente desarrollado, por lo que el problema es unidimensional, existiendo sólo la componente axial de la velocidad ( $u$ ) que depende de la coordenada normal a los planos ( $z$ ). El flujo es producido por un gradiente de presión permanente y constante en la dirección del flujo. Esta situación se considera un caso límite donde las paredes paralelas al campo aplicado están suficientemente separadas de manera que el flujo lejos de éstas no se ve afectado por su presencia.

Si no se impone un campo eléctrico en la dirección del flujo o en dirección normal a las placas, las corrientes inducidas en el fluido fluyen únicamente en la dirección  $\vec{u} \times \vec{B}_0$ . Si estas corrientes se toman de modo que formen circuitos cerrados dentro del fluido en planos normales a la dirección del flujo, cada circuito formará parte de un solenoide infinito compuesto de circuitos similares paralelos, con simetría axial (ver Fig. 3.4a). Por lo tanto el campo que se induce por dichas corrientes sólo tiene una componente en la dirección del flujo.

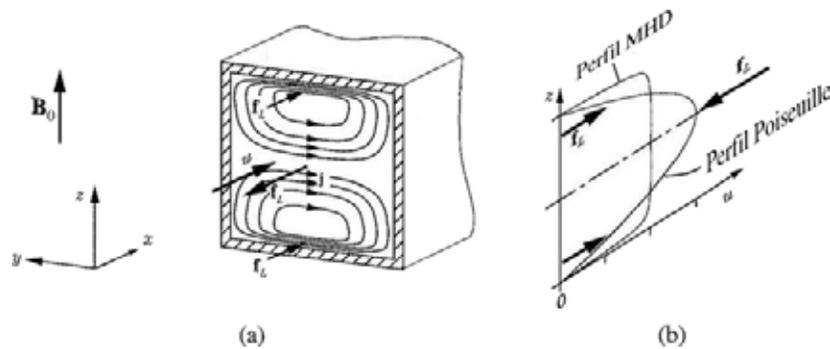


Fig. 3.4: *a*) Circuitos de corriente inducida en un flujo MHD en un ducto rectangular, *b*) perfil de velocidad en un flujo entre placas paralelas en presencia o ausencia de un campo magnético transversal[12].

La densidad de corriente eléctrica, que esencialmente es perpendicular al campo aplicado, produce una fuerza de Lorentz  $\vec{f}_L = \vec{j} \times \vec{B}_0$  al interactuar con el campo. Nótese que si las paredes tienen una conductividad distinta de cero, parte de la corriente puede circular en su interior. En el centro del canal, la fuerza actúa en dirección opuesta a la dirección del flujo y tiende a detenerlo. La magnitud de las corrientes, y por lo tanto la magnitud de la fuerza de Lorentz, dependen linealmente de la velocidad  $u$ . En regiones en donde se tengan velocidades altas, el freno debido a la fuerza de Lorentz será también alto. Como resultado, la fuerza de Lorentz equilibra el flujo en el núcleo (es decir, en la región central alejada de la paredes), en donde el balance principal de fuerzas se da entre la fuerza de Lorentz y el

gradiente de presión que origina el movimiento. La fuerza de Lorentz produce entonces el aplanamiento del perfil parabólico que se tendría en ausencia de campo magnético (ver Fig. 3.4b). Por esto, la fuerza de Lorentz contribuye a la caída de presión, que se superpone a la caída de presión viscosa. Cuando se tienen campos magnéticos intensos la caída de presión electromagnética puede exceder la caída de presión viscosa en órdenes de magnitud.

Cerca de las paredes transversales al campo aplicado los gradientes de velocidad dentro de las capas límite son altos, ya que se tiene que satisfacer la condición de no deslizamiento. Estas capas límite son conocidas como las *capas de Hartmann*. En las regiones en que la velocidad es baja, la dirección de la corriente es opuesta a la dirección de la corriente en el núcleo. En estas zonas la fuerza de Lorentz impulsa al fluido en contra de las fuerzas viscosas. Esto se muestra en la Fig. 3.4b.

Las ecuaciones que debe satisfacer este problema son las ecuaciones de balance de masa (3.3) y momento (3.4), donde la fuerza de Lorentz está dada por (3.14). Adicionalmente debe satisfacerse la ecuación (3.5) y la ecuación de transporte de campo magnético (3.11). Suponiendo que el campo de velocidades tiene la forma  $\vec{u} = [u(z), 0, 0]$  y el campo magnético total es  $\vec{B} = [b_x(z), 0, B_0]$ , las ecuaciones (3.3) y (3.5) se satisfacen idénticamente, mientras que las componentes  $x$  de (3.4) y (3.11) quedan

$$-\frac{dp}{dx} + \frac{1}{Re} \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{Ha^2}{Re} \frac{db_x}{dz} = 0. \quad (3.15)$$

$$\frac{du}{dz} + \frac{d^2b_x}{dz^2} = 0, \quad (3.16)$$

Estas ecuaciones pueden desacoplarse fácilmente obteniendo una ecuación para la velocidad independiente del campo, o viceversa. Conocida alguna de las dos, puede encontrarse directamente la otra. Las condiciones de frontera para la velocidad son de no deslizamiento, es decir,

$$u(z) = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm 1. \quad (3.17)$$

En general, satisfacer las condiciones de frontera para el campo inducido puede ser complicado ya que aunque se genera en la región del fluido, debe anularse en infinito. Sin embargo, cuando las paredes que contienen al fluido son conductoras y de un espesor muy delgado, es posible encontrar una condición simplificada haciendo uso de la continuidad en la interfaz fluido-pared tanto de la componente tangencial del campo eléctrico como de la componente normal de la densidad de corriente. La deducción detallada de esta condición de frontera puede encontrarse en [11]. Entonces, suponiendo que  $t/a \ll 1$ , la condición de frontera para el campo magnético es

$$\pm \frac{\partial b_x}{\partial z} + \frac{1}{c} b_x = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm 1, \quad (3.18)$$

donde el parámetro adimensional

$$c = \frac{\sigma_w t}{\sigma a}, \quad (3.19)$$

se conoce como la razón de conductancias fluido-pared. Aquí,  $\sigma_w$  es la conductividad eléctrica de la pared y  $t$  el espesor de las paredes. En la práctica, si tenemos paredes cuya conductividad sea mucho mayor a la del fluido,  $\sigma_w \gg \sigma$ , podremos considerar el caso en que  $c \rightarrow \infty$ , es decir, paredes conductoras perfectas. Si la conductividad del fluido es mucho mayor a la de la pared,  $c \rightarrow 0$ , es decir, paredes aislantes perfectas.

La solución al sistema (3.16)-(3.15) bajo las condiciones (3.17) y (3.18) es

$$u(z) = \frac{dp}{dx} \frac{Re}{Ha} \frac{1+c}{cHa + \tanh Ha} \left[ \frac{\cosh(Haz)}{\cosh Ha} - 1 \right], \quad (3.20)$$

$$b_x(z) = \frac{dp}{dx} \frac{Re}{Ha^2} \left( z - \frac{1+c}{cHa + \tanh Ha} \frac{\sinh(Haz)}{\cosh Ha} \right). \quad (3.21)$$

Se debe destacar que la solución para la velocidad es par, mientras que para el campo inducido es impar[16]. En las Fig. 3.5 y 3.6 se muestran los perfiles de la velocidad y del campo inducido como función de  $z$  para distintos valores de  $Ha$ , en los casos de paredes aislantes y paredes conductoras.

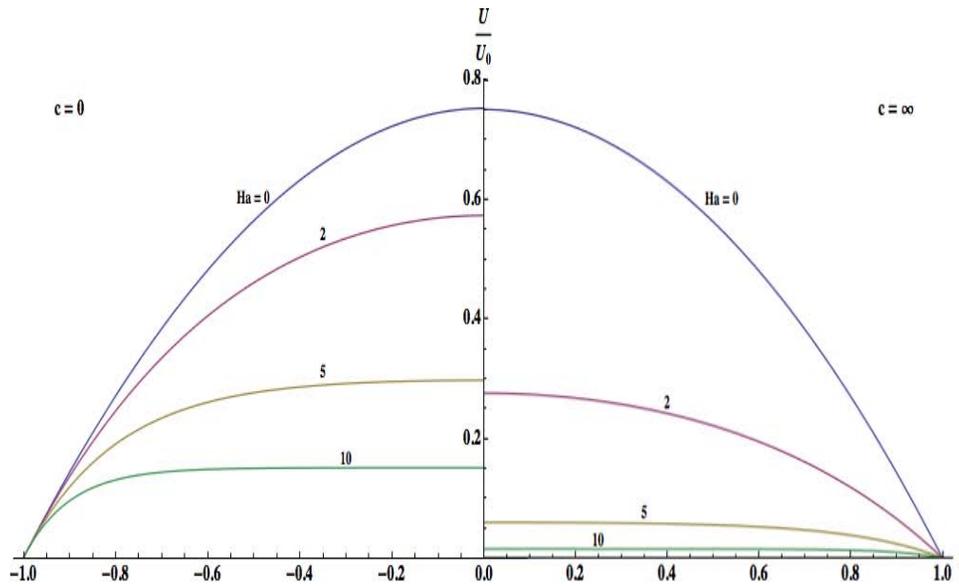


Fig. 3.5: Perfil de la componente axial de la velocidad  $u$  como función de  $z$  para distintos valores de  $Ha$  cuando  $c \rightarrow 0$  (*izq*) y cuando  $c \rightarrow \infty$  (*der*). La velocidad está normalizada con la velocidad promedio del perfil de Poiseuille, es decir,  $u_0 = -\frac{2}{3} \frac{dp}{dx} Re$ .

La conductividad eléctrica de las paredes del ducto afecta la distribución de las corrientes dentro del fluido y determina la estructura del flujo, como se observa en la Fig. 3.5. Cuando se tienen paredes aislantes las corrientes cierran sus trayectorias en las capas de Hartmann, y como estas capas son relativamente delgadas, su resistencia eléctrica es alta y la magnitud de las corrientes pequeña. Por el contrario, cuando se tienen paredes altamente conductoras una porción importante de las corrientes puede cerrar sus trayectorias dentro de éstas,

además de en las capas límite. Esto incrementa la magnitud de las corrientes, comparada con la magnitud de las corrientes cuando se tienen paredes aislantes. Como consecuencia se tienen fuerzas de Lorentz mayores y caídas de presión más altas al incrementar la conductividad de las paredes.

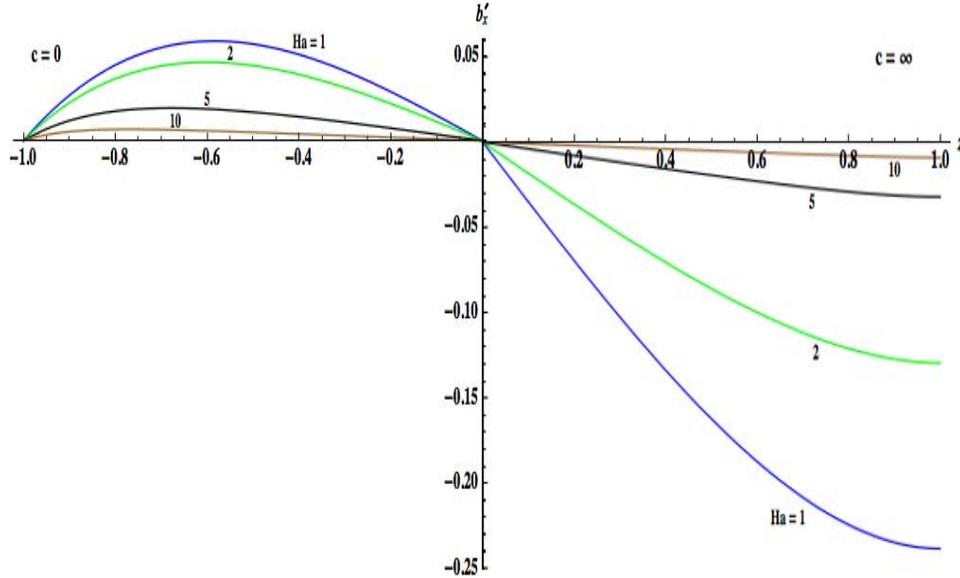


Fig. 3.6: Perfil de la componente axial del campo inducido  $b_x$  como función de  $z$  para distintos valores de  $Ha$  cuando  $c \rightarrow 0$  (*izq*) y cuando  $c \rightarrow \infty$  (*der*), donde  $b'_x = \frac{b_x}{Re \frac{dP}{dx}}$ .

En la Fig. 3.6 se muestran los perfiles del campo inducido como función de  $z$  para distintos valores de  $Ha$  cuando se tienen paredes aislantes ( $c \rightarrow 0$ ) y conductoras perfectas ( $c \rightarrow \infty$ ). Se observa que al aumentar el número de Hartmann el campo disminuye, lo cual se debe a que el campo inducido va como  $Ha^2$  (ver ecuación (3.21)).

Con lo visto hasta ahora se pueden resaltar tres aspectos,

- Para un valor fijo de la conductividad de las paredes, la velocidad disminuye al incrementar el número de Hartmann, es decir, al aumentar la intensidad del campo magnético aplicado.
- Al incrementar el número de Hartmann el perfil de velocidad se “aplana” en el núcleo del ducto y tiene capas de Hartmann más delgadas cerca de las paredes transversales al campo.
- Para un valor dado del número de Hartmann el flujo volumétrico es mayor en ductos con paredes aislantes.

En el límite  $Ha \rightarrow 0$ , el perfil (3.20) recupera la forma del flujo de Poiseuille, es decir,

$$\lim_{Ha \rightarrow 0} u(z) = \frac{Re}{2} \frac{dP}{dx} (z^2 - 1). \quad (3.22)$$

### 3.1.3. Modelación Numérica

Ya que más adelante trataremos con problemas para los que no existen soluciones analíticas, es necesario implementar un método numérico para resolver las ecuaciones que gobiernan los flujos MHD de interés en este trabajo. Primeramente, iniciaremos resolviendo numéricamente el flujo de Hartmann con el fin de poder validar las soluciones numéricas con los resultados analíticos disponibles. Para lograr esto, utilizaremos una formulación que toma la velocidad y la presión como variables primitivas y al campo magnético inducido como variable electromagnética. En el Apéndice A se presentan los detalles de la formulación numérica.

En el flujo de Hartmann se supone un ducto infinito en la dirección del flujo, por lo que en el problema sólo aparece una componente de la velocidad,  $u$ . En otras palabras, se tiene un problema desarrollado espacial y temporalmente. Para modelarlo numéricamente es necesario utilizar un dominio finito, por lo que se debe considerar el desarrollo espacial y temporal del flujo. Esto implica la existencia de la componente de velocidad,  $w$ , transversal al flujo principal; y no sólo eso, sino una dependencia de todas las variables de las coordenadas  $x$ ,  $z$  y del tiempo  $t$ . La velocidad es entonces  $\vec{u} = [u(x, z, t), 0, w(x, z, t)]$ . El flujo se da en presencia de un campo magnético uniforme aplicado en dirección normal a las paredes superior e inferior, y suponemos que sólo existe una componente del campo inducido en la dirección del flujo que depende de  $x$ ,  $z$  y  $t$ , entonces el campo total es  $\vec{B} = [b_x(x, z, t), 0, B_0]$ . Se debe aclarar que este campo no satisface (3.5), pero es una aproximación razonable. Es de esperarse que después de un estado transitorio y a una distancia del inicio del dominio de integración el flujo adquiera su forma completamente desarrollada y coincida con la solución analítica.

El sistema de ecuaciones que debe resolverse numéricamente consta de las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.11) que pueden expresarse en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{Ha^2}{Re} \frac{\partial b_x}{\partial z}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 b_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3.26)$$

Las componentes  $u$  y  $w$  deben satisfacer condiciones de no deslizamiento sobre las paredes  $z \pm 1$ . A la entrada del dominio de integración se utilizó un flujo uniforme, es decir,  $u = 1$  y  $w = 0$ , mientras que a la salida se impusieron condiciones de Neumann,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ .

La condición de frontera para el campo inducido es la condición de paredes conductoras delgadas (3.18). Existen dos casos límite: paredes aislantes perfectas,  $c \rightarrow 0$ , y paredes conductoras perfectas,  $c \rightarrow \infty$ , a saber,

- Paredes aislantes

$$\overline{b} = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm 1 .$$

- Paredes conductoras perfectas

$$\frac{\partial \overline{b}}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm 1 .$$

Como la solución para la velocidad es par y para el campo inducido impar, al igual que las condiciones de aislante o conductor perfecto, es suficiente resolver sólo una mitad del ducto. Entonces las condiciones de frontera en el centro del canal,  $z = 0$ , son

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 , \\ b_x &= 0 . \end{aligned}$$

La solución numérica del sistema de ecuaciones se realizó mediante diferencias finitas, utilizando el método de la Proyección de Chorin[17], en el que a partir de un campo de velocidad supuesto inicialmente se calculan el campo de presión y el campo magnético inducido. Con base en éstos se calcula un nuevo campo de velocidad y se repite el proceso. Se debe mencionar que este método es explícito para la velocidad e implícito para la presión (ver Apéndice A).

A continuación se comparan las soluciones analíticas (3.20) y (3.21) con resultados numéricos del sistema de ecuaciones (3.23) - (3.26). En las Fig. 3.7 y 3.8 se muestran los perfiles de la velocidad y del campo inducido como función de  $z$  cuando las paredes del ducto son aislantes,  $c \rightarrow 0$ , para valores de  $Re = 1$  y  $Ha = 15$ . Cuando las paredes del ducto son perfectamente conductoras,  $c \rightarrow \infty$ , bajo los mismos parámetros, los perfiles se muestran en las Fig. 3.9 y 3.10.

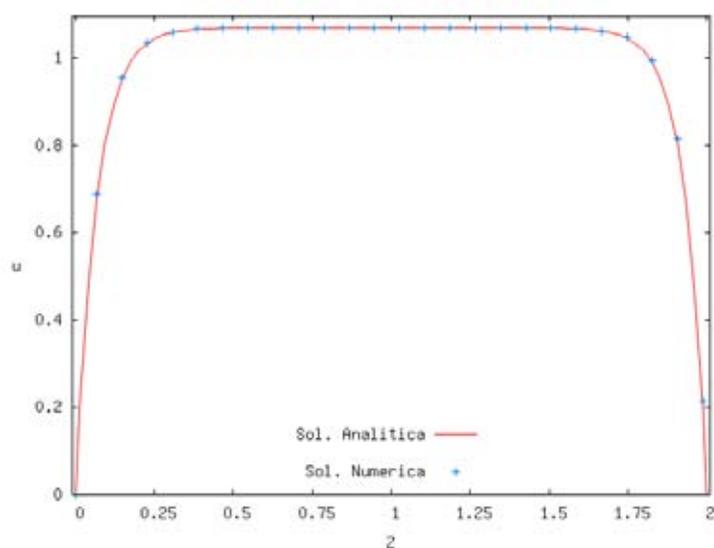


Fig. 3.7: Perfil de la componente axial de la velocidad ( $u$ ) como función de  $z$  cuando se tienen paredes aislantes.  $Re = 1$ ,  $Ha = 15$ ,  $c \rightarrow 0$ .

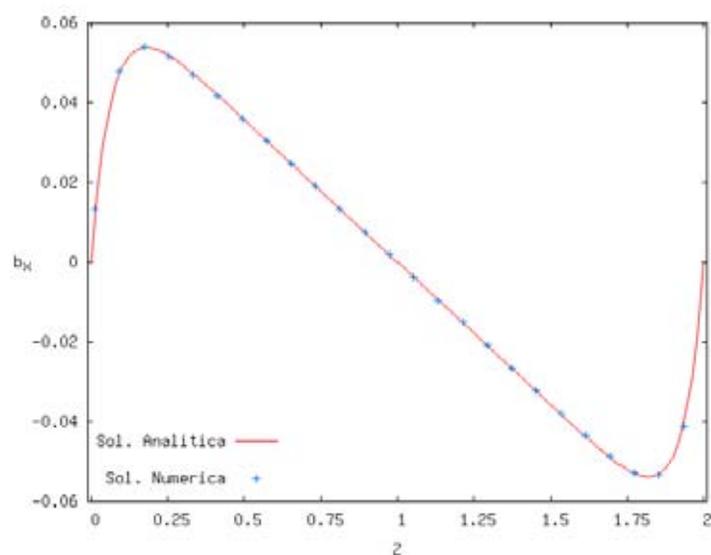


Fig. 3.8: Perfil del campo magnético inducido ( $b_x$ ) como función de  $z$  cuando se tienen paredes aislantes.  $Re = 1$ ,  $Ha = 15$ ,  $c \rightarrow 0$ .

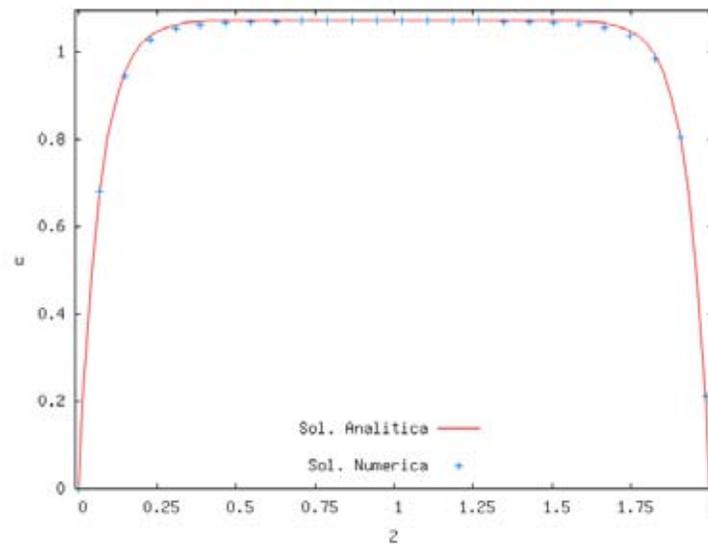


Fig. 3.9: Perfil de la componente axial de la velocidad ( $u$ ) como función de  $z$  cuando se tienen paredes conductoras perfectas.  $Re = 1$ ,  $Ha = 15$ ,  $c \rightarrow \infty$ .

Debemos aclarar que la semejanza existente en los perfiles de velocidad mostrados en las Fig. 3.7 y 3.9 se debe a que en ambos casos estamos normalizando las velocidades con el máximo de cada una de ellas. La diferencia existente entre ambos perfiles se puede deducir de la Fig. 3.5, de donde podemos estimar el valor máximo de la velocidad para cada caso. De manera análoga se han normalizado los perfiles del campo magnético inducido, mostrados en las Fig. 3.8 y 3.10.

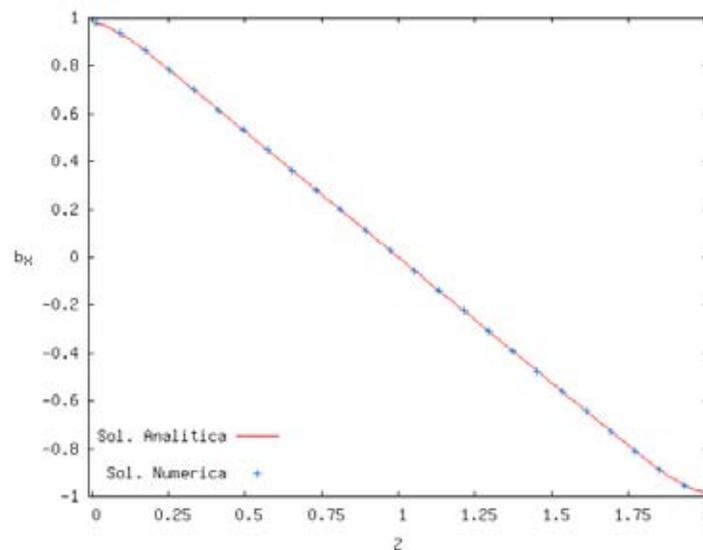


Fig. 3.10: Perfil del campo magnético inducido ( $b_x$ ) como función de  $z$  cuando se tienen paredes conductoras perfectas.  $Re = 1$ ,  $Ha = 15$ ,  $c \rightarrow \infty$ .

Se observa que las soluciones numéricas empatan muy bien con las soluciones analíticas, lo que permite tener una mayor confianza en el método numérico que se utilizará para el estudio del flujo en un campo magnético inhomogéneo.

## 3.2. Flujo en un Campo Magnético Inhomogéneo

Los flujos en campos inhomogéneos son en realidad muy complejos pues presentan una estructura tridimensional, básicamente porque los circuitos de corriente inducida se forman tanto en planos paralelos a la dirección principal del campo magnético como en planos transversales al mismo y, en principio, puede existir intercambio de corriente entre los distintos circuitos. La existencia de tales distribuciones tridimensionales de corriente tiene, por su parte, efectos dinámicos directos que modifican la distribución de velocidades en el flujo. Una solución numérica tridimensional completa del problema está fuera del alcance del presente trabajo. Sin embargo, se atacará el problema utilizando un enfoque cuasibidimensional, para lo cual es necesario primeramente estudiar un flujo bidimensional en un plano normal a la dirección del campo inhomogéneo. El flujo estará limitado por paredes laterales que pueden ser aislantes o conductoras.

Hasta ahora se ha tratado un problema en donde tanto la forma del ducto, como el campo magnético son uniformes. Sin embargo, la mayoría de los flujos de fluidos eléctricamente conductores en condiciones experimentales y prácticas ocurren en campos inhomogéneos, o bien en zonas de campo magnético homogéneo donde se tienen cambios en la forma o tamaño del ducto. Esto se atribuye al tamaño finito de los imanes (electroimanes), existiendo regiones cerca de los bordes de los polos magnéticos en donde la inducción del campo magnético no está uniformemente distribuida. Además de esto, los polos magnéticos en las máquinas MHD algunas veces tienen ranuras o proyecciones en su superficie que también producen una distribución inhomogénea del campo magnético, o bien, debido a consideraciones de diseño y manufactura los polos magnéticos frecuentemente no son continuos o paralelos, o simplemente son más pequeños que la región de fluido. En todos estos casos, la inhomogeneidad del campo magnético está destinada a producir fenómenos específicos en el flujo.

Debe enfatizarse que la aplicación de un campo inhomogéneo implica una transformación más profunda y significativa de las características locales del flujo que en el caso del campo uniforme. El estudio de estas transformaciones no sólo hace posible un análisis más detallado de la operación de distintos dispositivos MHD, sino también habilita al experimentador a obtener una amplia gama de flujos MHD.

### Descripción Preliminar del Flujo

En ésta sección daremos una explicación cualitativa del flujo pasando a través de un campo magnético inhomogéneo, como se observa en la Fig. 3.11. El flujo a través de un ducto en

un campo inhomogéneo pasará de una región de campo magnético despreciable anterior a los imanes, a una región de campo magnético con una intensidad de  $O(1)$ , y nuevamente a una región de campo despreciable posterior a los imanes. La Fig. 3.11 ilustra esquemáticamente varios aspectos característicos del flujo en un ducto bajo un campo magnético inhomogéneo.

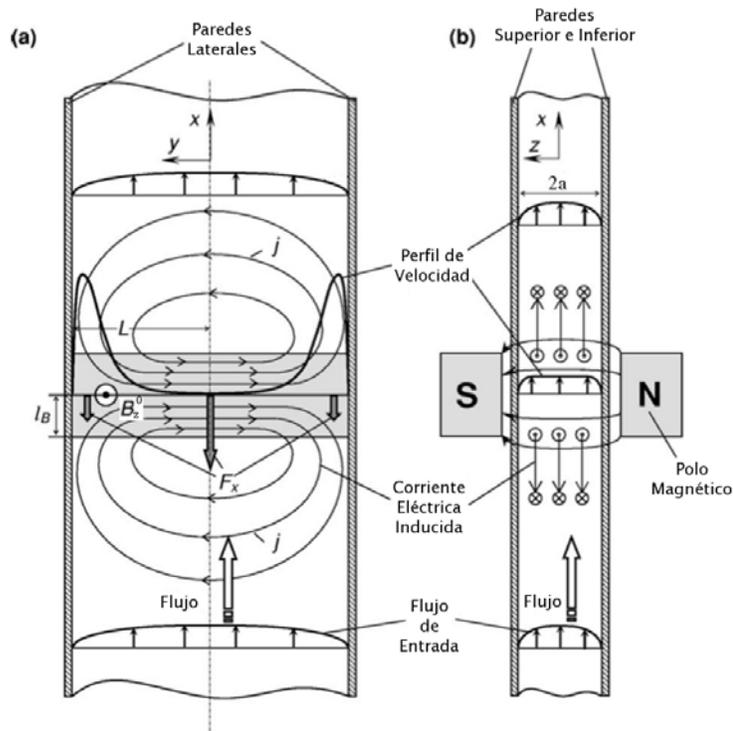


Fig. 3.11: Esquema del problema. El flujo de un fluido eléctricamente conductor a través de un campo magnético inhomogéneo ( $B_z^0$ ) debido a dos imanes permanentes. a) Vista superior del ducto. b) Vista lateral del ducto. [18]

En la cercanía del borde del campo, el flujo pasa de una región de baja intensidad de campo a una de alta intensidad (zona sombreada en la Fig. 3.11). La fuerza electromotriz  $\vec{u} \times \vec{B}_0$ , induce un voltaje menor en la región de baja intensidad y un voltaje mayor en la zona de mayor intensidad de campo magnético. Esta diferencia de voltajes produce una corriente en la dirección del flujo en la mitad izquierda del ducto, y en dirección opuesta en la mitad derecha del ducto. Estas corrientes deben cerrar sus trayectorias, y si consideramos que las paredes del ducto son aislantes, lo hacen en las zonas aguas arriba y aguas abajo del campo magnético. Cuando el fluido se mueve en la salida del campo magnético, la diferencia de voltaje se invierte al igual que la circulación de las corrientes. Entonces al entrar al campo, las corrientes circulan en sentido horario e inducen un campo magnético normal al plano

que apunta hacia abajo, mientras que en la salida del campo las corrientes circulan en sentido antihorario y el campo inducido apunta en dirección normal pero hacia arriba.

En el flujo en un ducto, las paredes confinan las trayectorias de tal manera que se elongan en la dirección del flujo, intensificando las componentes axiales de la densidad de corriente ubicadas en la cercanía de las paredes laterales. Esto es particularmente importante cuando las paredes son aislantes. Las componentes axiales de la densidad de corriente producen fuerzas de Lorentz,  $j_{ix}B_z^0$ , que apuntan hacia el centro del ducto en la entrada al campo, y hacia las paredes en la salida del campo, debido al cambio en el sentido de circulación de las corrientes ya explicado. Aunado a esto, existe una mayor intensidad de la componente transversal de la densidad de corriente en el centro del canal, comparada con la intensidad cerca de las paredes, que provoca una fuerza de Lorentz,  $j_{iy}B_z^0$ , mayor en el centro del ducto y que se opone el movimiento del fluido, como se muestra en la Fig. 3.11a. Esto tiene como efecto la expulsión de parte del fluido hacia la zona exterior al núcleo. Como resultado se obtienen perfiles en forma de M en las zonas de campo inhomogéneo, cuyas características dependerán de los parámetros adimensionales  $Re$  y  $Ha$ . Ya que tenemos dos gradientes de campo, uno a la entrada del imán y otro a la salida, se presenta la formación de dos perfiles en M. En realidad, dependiendo del tiempo de transición entre las dos extremidades del imán, el intercambio de momentum entre los dos máximos y el mínimo central, se puede reducir significativamente la diferencia entre el perfil en M que se forma a la entrada del imán y el que se forma a la salida. Un efecto adicional es que en las zonas en que el campo magnético es inhomogéneo, las componentes transversales de la corriente provocan fuerzas, que en la entrada al campo tienen la misma dirección que el flujo, mientras que en la salida se oponen a éste. Por lo tanto, en la entrada se tiene un incremento de la presión, mientras que en la salida se tiene una caída de presión adicional a la caída por efectos viscosos (ver Fig. 3.20).

La manera más simple de estudiar numéricamente el problema de un flujo en un campo inhomogéneo es analizar el plano  $xy$  ubicado en el plano medio localizado entre las paredes del ducto transversales al campo aplicado, como se observa en la Fig. 3.11b. Además, por el momento, no tomaremos en cuenta el efecto de éstas, lo que nos llevará a obtener resultados aproximados, pero que nos servirán para destacar algunos aspectos de este tipo de flujos. En el Capítulo 4 incorporaremos el efecto de la fricción ocasionada por la presencia de dichas paredes para obtener un modelo numérico más robusto que se aproxime más a la realidad. Otro aspecto no menos importante que debemos destacar y que se considerará en dicho capítulo es que en el plano  $xz$ , Fig. 3.11b, se forma el perfil de Hartman en la zona de campo magnético aproximadamente homogéneo y el perfil de Poiseuille en la zona ausente de campo.

Ahora bien, el flujo que analizaremos aquí se da en presencia de un campo aplicado cuya dirección principal está en dirección normal al plano de flujo y abarca sólo una sección del ducto. Debido a que analizaremos el flujo únicamente en el plano  $xy$ , suponemos que la única componente tanto del campo aplicado como del campo inducido está en dirección normal a éste. El campo magnético total es entonces  $\vec{B} = [0, 0, B_z^0(x, y) + b_z(x, y, t)]$ . Por su

parte, el campo de velocidad tiene sólo dos componentes, es decir,  $\vec{u} = [u(x, y, t), v(x, y, t), 0]$ .

### Campo Magnético Aplicado

Para la simulación numérica, el campo se modela mediante una superficie aislante magnetizada, de geometría rectangular uniformemente polarizada en la dirección normal, para el que existe una expresión analítica[19]. Aunque estrictamente el campo es tridimensional, la contribución dominante del campo aplicado es la componente normal a lo largo de la dirección  $z$ , por lo que será la única que consideraremos en el análisis. Este tipo de suposición para modelar campos magnéticos no uniformes ha dado resultados razonables[20]. En términos dimensionales, poniendo el sistema coordenado en el centro de la superficie rectangular cuyas dimensiones son  $X_0 = 2\alpha$  y  $Y_0 = 2\beta$ , la componente normal del campo producido por la superficie magnetizada situada en el plano  $Z = Z_0$ , está dada por la expresión analítica

$$\begin{aligned}
 B_z^0 = \gamma B_{max} & \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{(x + \alpha)(y + \beta)}{(z - Z_0) [(x + \alpha)^2 + (y + \beta) + (z - Z_0)^2]^{1/2}} \right) \right. \\
 & + \tan^{-1} \left( \frac{(x - \alpha)(y - \beta)}{(z - Z_0) [(x - \alpha)^2 + (y - \beta) + (z - Z_0)^2]^{1/2}} \right) \\
 & - \tan^{-1} \left( \frac{(x + \alpha)(y - \beta)}{(z - Z_0) [(x + \alpha)^2 + (y - \beta) + (z - Z_0)^2]^{1/2}} \right) \\
 & \left. - \tan^{-1} \left( \frac{(x - \alpha)(y + \beta)}{(z - Z_0) [(x - \alpha)^2 + (y + \beta) + (z - Z_0)^2]^{1/2}} \right) \right\} \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

donde  $\gamma$  es una constante de normalización y  $B_{max}$  es la magnitud máxima de la intensidad del campo. Ya que el flujo tiene lugar únicamente en un plano  $z = \text{constante}$ , el campo magnético aplicado no es función de la coordenada  $z$ . Consideraremos además que la longitud de las placas magnetizadas en dirección  $y$  es mucho mayor que la longitud en la dirección  $x$  ( $\beta \gg \alpha$ ) de manera que la dependencia del campo con la coordenada  $y$  es despreciable, es decir,  $B_z^0 = B_z^0(x)$ . En la Fig. 3.12 se muestra la distribución de campo utilizada en las simulaciones numéricas, obtenida a partir de la ecuación (3.27). Con el fin de simular el campo producido por un imán, un polo norte y un polo sur, consideramos la superposición de dos placas rectangulares paralelas magnetizadas con las mismas dimensiones, pero polarizadas de manera opuesta y separadas una distancia  $h$ . El campo se normalizó de tal forma que el valor máximo sea 1. Debe notarse que la expresión tridimensional del campo producido por la superficie magnetizada satisface exactamente las ecuaciones magnetostáticas (3.9). Al conservar sólo la componente normal, el campo ya no es irrotacional.

No obstante, como se verá más adelante, manteniendo sólo esta componente es posible describir la dinámica de flujo de manera razonable. De hecho, las componentes del campo  $B_x^0$  y  $B_y^0$  son mucho menores que  $B_z^0$  por lo que despreciarlas es una buena aproximación.

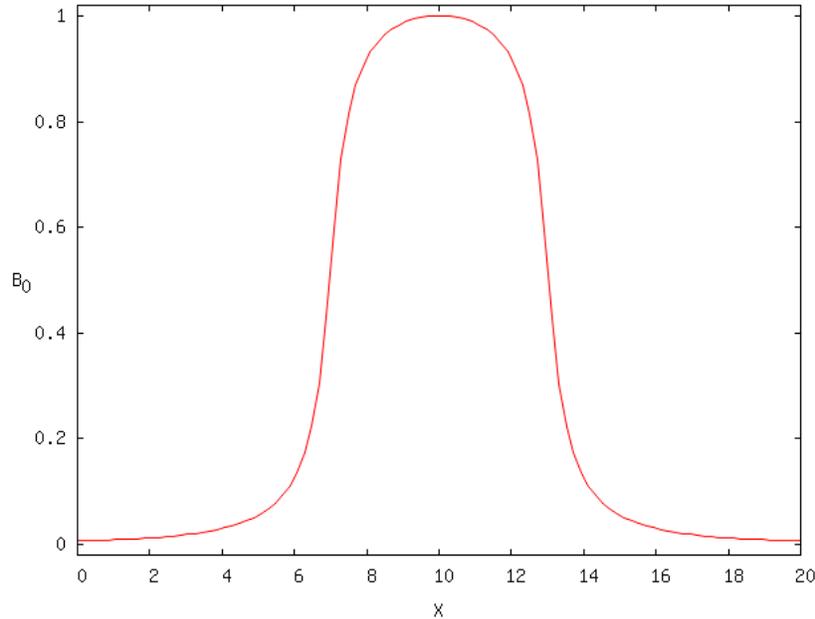


Fig. 3.12: Campo magnético aplicado ( $B_z^0$ ) calculado a partir de (3.27) superponiendo dos placas magnetizadas y polarizadas de manera opuesta separadas una distancia  $h$  con una relación de aspecto  $\beta \gg \alpha$ , por lo que se puede considerar que  $B_z^0$  es función sólo de  $x$ , es decir,  $B^0 = [0, 0, B_z^0(x)]$ .

### 3.2.1. Flujo debido a un Gradiente de Presión

Primeramente consideraremos que el movimiento del fluido se debe únicamente a un gradiente de presión en dirección axial y que no existe corriente inyectada, por lo que las ecuaciones que gobiernan el flujo son (3.3), (3.4) y (3.11). En la Fig. 3.13 se muestra el esquema del dominio de integración considerado, que tiene una relación de aspecto de 1 : 20, donde se observa que la zona afectada directamente por las placas magnetizadas que generan el campo magnético, mostrado en la Fig. 3.12, ocupa aproximadamente 30 % del dominio total de integración, y está delimitado precisamente por la formación de los perfiles en M. Ya que el inicio del dominio se encuentra suficientemente alejado de la zona de campo magnético inhomogéneo, consideramos que el flujo a la entrada del dominio está completamente desarrollado, por lo que se toma el perfil de Poiseuille como condición inicial y de entrada del flujo. En la salida del ducto tendremos condiciones de Neumann para la velocidad.

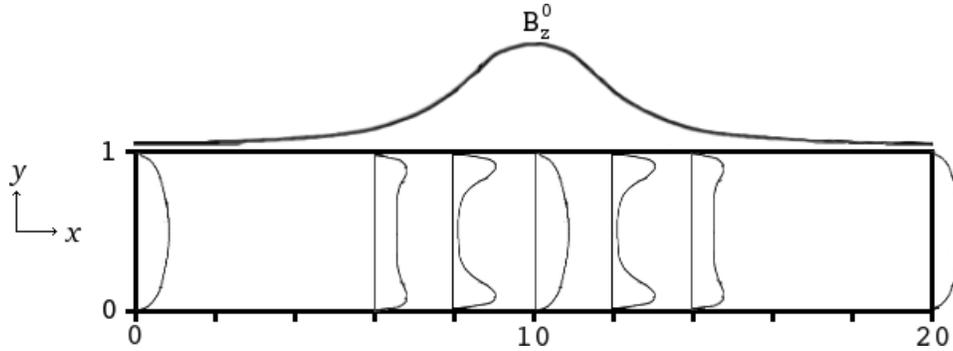


Fig. 3.13: Esquema del dominio de integración utilizado en las simulaciones numéricas, y evolución espacial del perfil de velocidad de la componente axial  $u$ .

Con base en lo anterior, de (3.12) la corriente es

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{b} = \left( \frac{\partial b_z}{\partial y}, -\frac{\partial b_z}{\partial x}, 0 \right), \quad (3.28)$$

y por lo tanto la fuerza de Lorentz

$$\vec{j} \times \vec{B}_z^0 = \left( -B_z^0 \frac{\partial b_z}{\partial x}, -B_z^0 \frac{\partial b_z}{\partial y}, 0 \right). \quad (3.29)$$

La ecuación de inducción (3.11) se reduce a

$$\nabla^2 \vec{b} = (\vec{u} \cdot \nabla) B_z^0(x). \quad (3.30)$$

Desarrollando (3.3), (3.4) y (3.30) obtenemos el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de un flujo MHD bajo las suposiciones mencionadas previamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{Ha^2}{Re} B_z^0 \frac{\partial b_z}{\partial x}, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{Ha^2}{Re} B_z^0 \frac{\partial b_z}{\partial y}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z}{\partial y^2} = u \frac{\partial}{\partial x} B_z^0. \quad (3.34)$$

Se debe aclarar que en el plano de interés ( $xy$ ) la longitud característica con la que se adimensionalizan las ecuaciones no es la mitad de la separación entre las paredes transversales al campo,  $a$ , sino la separación entre las paredes laterales,  $L = 2b$ , lo cual no

cambia la forma de las ecuaciones. Las condiciones de frontera para la velocidad son de no deslizamiento y no penetración en las paredes, es decir,

$$u = v = 0 \quad \text{en} \quad y = 0, 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq 20 \quad , \quad (3.35)$$

en la entrada del ducto se tiene como condición un perfil de parabólico, es decir,

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} Re (y - y^2) \quad , \quad u = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 \quad , \quad (3.36)$$

y condiciones de Neumann a la salida del ducto, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 20 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 \quad . \quad (3.37)$$

Para el campo magnético se tiene la condición de frontera de paredes conductoras delgadas en la interfaz fluido-pared, es decir,

$$\pm \frac{\partial b_z}{\partial y} + \frac{1}{c} b_z = 0 \quad \text{en} \quad y = 0, 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq 20 \quad , \quad (3.38)$$

donde el parámetro adimensional  $c$  está definido por (3.19). En la entrada y salida del ducto se tienen condiciones de Neumann, es decir,

$$\frac{\partial b_z}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, 20 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 \quad . \quad (3.39)$$

A continuación se muestran resultados numéricos del sistema (3.31)-(3.34) con condiciones de frontera (3.35)-(3.39). Se considerará el límite de paredes aislantes perfectas ( $b_z = 0$  en  $y = \pm 1$ ,  $0 \leq x \leq 20$ ) y el de conductoras perfectas ( $\frac{\partial b_z}{\partial y} = 0$  en  $y = \pm 1$ ,  $0 \leq x \leq 20$ ). Los parámetros adimensionales  $Re$  y  $Ha$  utilizados tienen valores de 5 y 100 respectivamente.

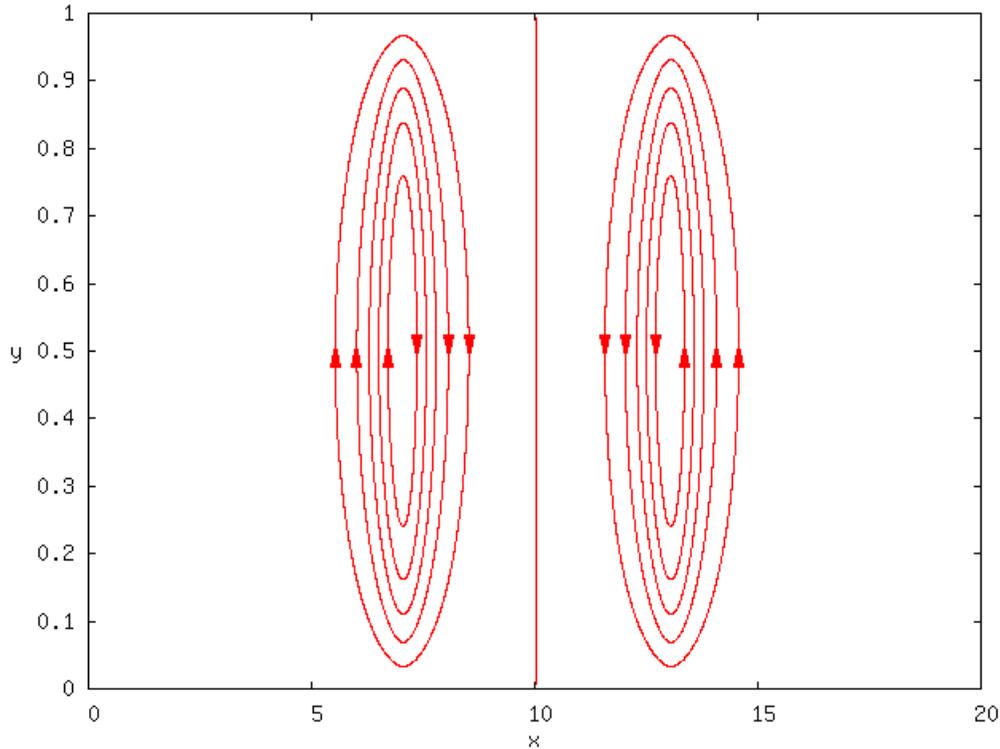


Fig. 3.14: Las isoclinas del campo magnético inducido ( $b_z$ ) representan las trayectorias de las corrientes inducidas ( $j_i$ ), y las flechas la dirección en que fluyen dichas corrientes.  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$  y  $c = 0$ .

En la Fig. 3.14 se observan las trayectorias la corriente inducida para el caso  $c = 0$ , que concuerdan con las mostradas en la Fig. 3.11a y explicadas en esa sección. Se debe mencionar que el valor absoluto de la componente  $x$  de la corriente tiene su máximo cerca de las paredes y el mínimo en el centro del canal. Por otra parte, el máximo del valor absoluto de la componente  $y$  de la corriente, que provoca la fuerza en la dirección de movimiento del fluido, se encuentra en el núcleo del flujo y en la zona de máximos gradientes del campo, que es precisamente en la zona de menor velocidad del perfil en M.

Esta distribución inhomogénea de las corrientes, y por tanto también de la fuerza de Lorentz, provoca una deformación del perfil de la componente axial de velocidad pasando de un perfil parabólico a un perfil en forma de M, a la entrada al campo magnético, el cual retoma la forma parabólica en la zona de máxima intensidad del campo. En la salida ocurre de manera similar pasando de un perfil parabólico al perfil en M y nuevamente al parabólico. En la Fig. 3.15 se muestra la evolución espacial del perfil de la componente axial de la velocidad, en la entrada al campo.

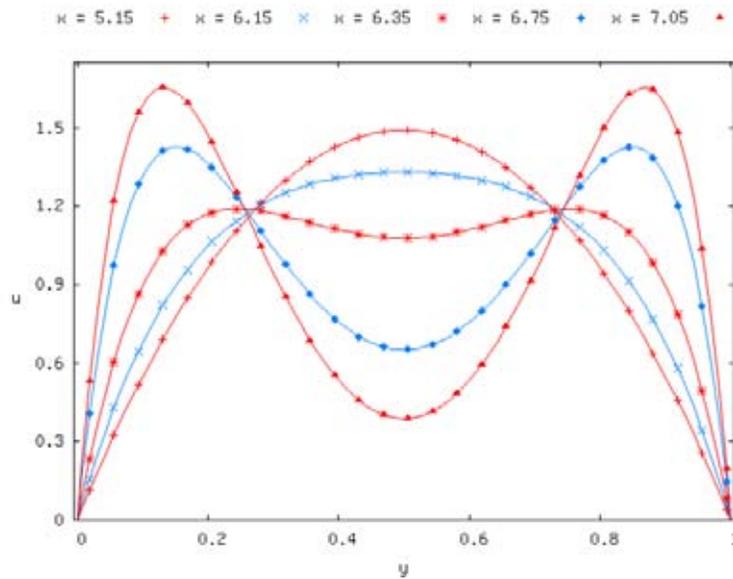


Fig. 3.15: Desarrollo del perfil de velocidad de la componente axial de la velocidad ( $u$ ) en la entrada al imán.  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$  y  $c = 0$ .

Lo anterior queda más claro al observar la componente axial de la velocidad como función de  $x$  y  $y$  en todo el dominio de integración (ver Fig. 3.16). Se puede observar la formación de perfiles parabólicos en las zonas externas a la región de campo magnético, así como en la región donde éste es aproximadamente homogéneo, mientras que en la zona de gradientes del campo se observa la formación de los perfiles en M.

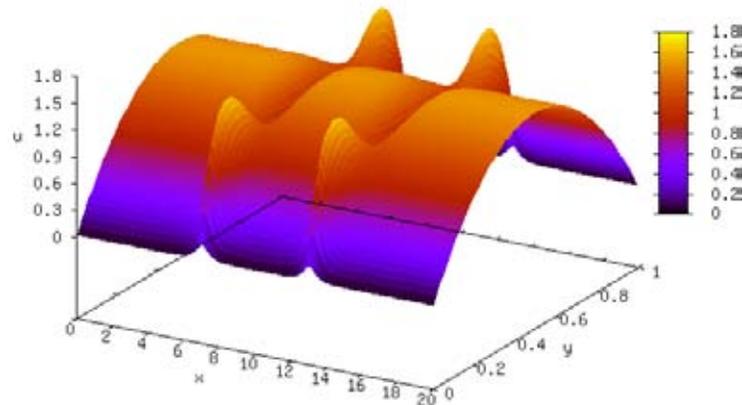


Fig. 3.16: Componente axial de la velocidad ( $u$ ) en el plano  $x - y$ .  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$  y  $c = 0$ .

Por otra parte, la componente transversal de la velocidad,  $v$ , se anula en casi todo el espacio, excepto en las zonas de campo magnético inhomogéneo (ver Fig. 3.17). Es evidente que la magnitud de esta componente es mucho menor que la magnitud de la componente axial de la velocidad, es decir,  $u \gg v$ .

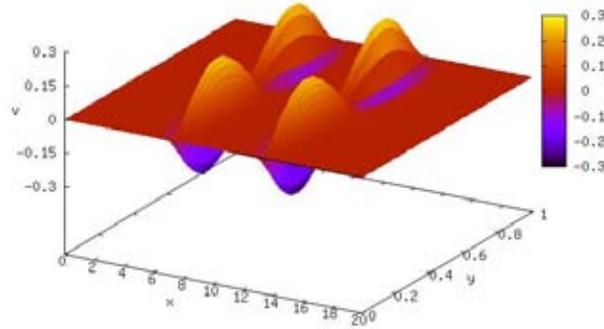


Fig. 3.17: Componente transversal de la velocidad ( $v$ ) en el plano  $x - y$ .  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$  y  $c = 0$ .

Una de las imperfecciones del modelo bidimensional, como ya se mencionó, es la formación de perfiles parabólicos dentro de la zona donde el campo magnético es aproximadamente homogéneo e intenso. Esto se puede observar de la magnitud de la componente axial de la velocidad en el centro del canal, Fig. 3.18. Esto se debe a que se desprecian los efectos de las paredes del ducto transversales al campo, efecto que se considera en el modelo propuesto en el Capítulo 4.

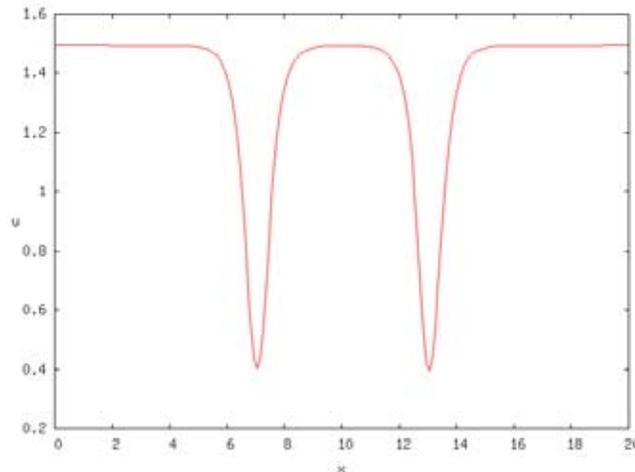


Fig. 3.18: Componente axial de la velocidad ( $u$ ) en el centro del canal.  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$  y  $c = 0$ .

Ahora bien, para analizar la influencia de las fuerzas electromagnéticas en la generación de vorticidad, definida como  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ , es conveniente utilizar la ecuación de transporte de vorticidad que se obtiene tomando el rotacional de la ecuación 2.12. Para el caso estacionario queda

$$\rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} = \rho(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla \times (\vec{j} \times \vec{B}) + \nu \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (3.40)$$

en donde el término  $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$  da la generación de vorticidad debida a efectos viscosos, mientras que para un flujo bidimensional el término  $\rho(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u}$  se anula.

Por su parte, el término  $\nabla \times (\vec{j} \times \vec{B})$  representa una fuente de vorticidad debida a la presencia de fuerzas magnética[21]. Tomando en cuenta la conservación de la carga eléctrica y que el campo magnético es solenoidal, podemos expresar

$$\nabla \times (\vec{j} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{j} - (\vec{j} \cdot \nabla) \vec{B}. \quad (3.41)$$

Esta ecuación muestra, a través del primer término del lado derecho, que es posible generar vorticidad mediante gradientes de la densidad de corriente en la dirección del campo aplicado. Esto sucede en flujos en ductos donde existe una expansión o contracción de la sección transversal bajo un campo magnético homogéneo, en tal caso el segundo término del lado derecho es cero. Pero en el caso del flujo en un ducto de sección transversal uniforme bajo un campo magnético inhomogéneo en general los dos términos del lado derecho de la ecuación (3.41) son responsables de la generación de vorticidad.

Puesto que en nuestro caso el campo aplicado está sólo en la dirección normal al plano de estudio, y nada depende de esta coordenada, el primer término del lado derecho de (3.41) no genera vorticidad. En cambio, si desarrollamos el segundo término tenemos que la única componente que genera vorticidad es  $j_{ix} \frac{\partial B_z^0}{\partial x}$ , ya que el campo aplicado sólo depende de  $x$ . La máxima vorticidad debida a la fuerza de Lorentz la tendremos entonces en donde tanto  $j_{ix}$  como  $\frac{\partial B_z^0}{\partial x}$  sean máximos, es decir, en las zonas de campo magnético inhomogéneo cerca de las paredes, como se mencionó anteriormente. Esto se muestra claramente en la Fig. 3.19.

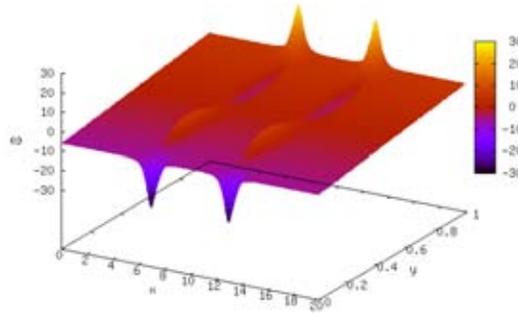


Fig. 3.19: Vorticidad en el plano  $x - y$ .  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$  y  $c = 0$ .

La evolución de la distribución de velocidad está acompañada por una variación característica de la presión, como se observa en la Fig. 3.20. El gradiente de presión debe compensar, a primer orden, la componente longitudinal de las fuerzas electromagnéticas  $-j_y B_z$ . Es decir, en la entrada del imán primero es positiva y luego negativa, mientras que en la salida ocurre de manera inversa debido a que los circuitos de corriente tienen dirección opuesta (ver Fig. 3.14). Entonces la presión tiene un máximo relativo cerca de donde se tiene el mayor gradiente del campo magnético en la sección de entrada y un mínimo relativo en la sección de salida. Cuando se tienen paredes conductoras existe una mayor caída de presión en el centro de canal debido a que  $j_y \gg j_x$ , y por tanto la fuerza de Lorentz en dirección  $x$  es mucho mayor que la fuerza en dirección  $y$ . Esto puede observarse en la Fig. 3.21. En el caso de paredes aislantes ambas componentes de la fuerza son del mismo orden de magnitud.

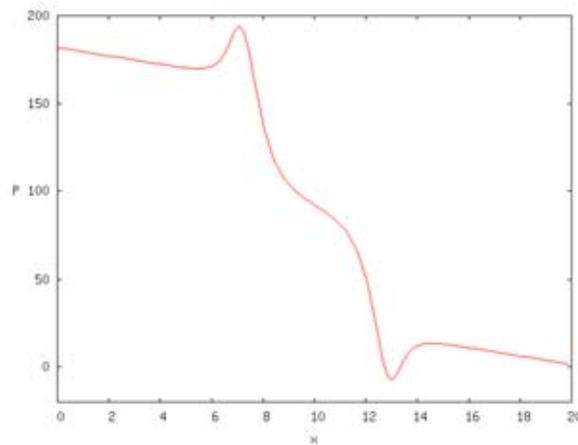


Fig. 3.20: Presión en el centro del canal como función de  $x$ .  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$  y  $c = 0$ .

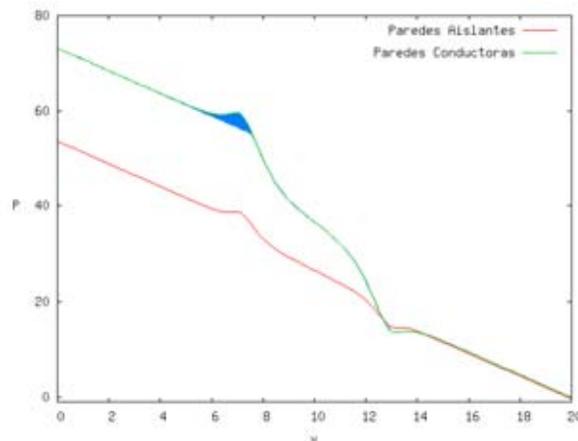


Fig. 3.21: Presión en el centro del canal cuando se tienen paredes conductoras perfectas y aislantes como función de  $x$ .  $Re = 5$ ,  $Ha = 20$ .

El flujo en ausencia de campo tendría una caída de presión lineal, como se observa en las secciones anterior y posterior al campo en ambos casos. La diferencia que existe entre el flujo en presencia y en ausencia de campo, en la entrada del ducto, se representa mediante el área sombreada (de manera análoga pasa en la salida). Esta diferencia aumenta al incrementar el número de Hartmann.

Ahora bien, a primer orden la ecuación para la vorticidad en el núcleo del flujo, suponiendo sólo dependencia de la coordenada en la que hay flujo,  $x$ , es

$$\rho u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \approx -j_x \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (3.42)$$

Parece entonces que la componente  $j_x$  tiene una mayor influencia. Si las paredes son conductoras las líneas de corriente pueden completar el circuito en ellas, tal que  $j_x$  permanece relativamente débil en el fluido. Entonces la deformación de las líneas de corriente y la no uniformidad en el perfil de velocidad serán moderados, como se observa en la Fig. 3.22. Por otra parte, cuando las paredes son aislantes, el efecto puede ser muy intenso debido a que las líneas de corriente se compactan cerca de las paredes y se separan en la región central. El perfil de velocidad que se desarrolla es entonces un perfil en forma de M. En la salida del imán los signos de  $j_x$  y  $\frac{\partial B_z^0}{\partial x}$  se invierten, pero se encuentra el mismo fenómeno.

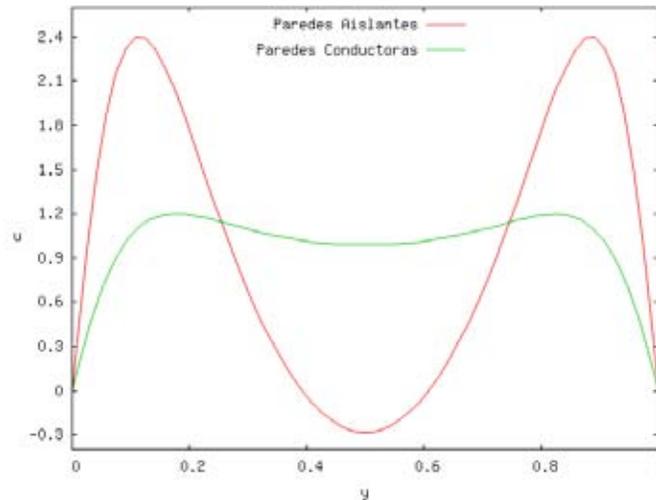


Fig. 3.22: Comparación de los máximos de la componente axial de la velocidad cuando se tienen paredes conductoras y aislantes.  $Re = 100$ ,  $Ha = 250$ .

Las figuras 3.23 muestran la componente axial de la velocidad en el centro del ducto como función de  $x$  para distintos valores de  $Ha$  y  $Re$ , en un ducto con paredes aislantes.

En la Fig. 3.23a se observa que al incrementar el número de Hartmann la velocidad disminuye en la zona de campo inhomogéneo. Por conservación de masa, esto indica que los picos de los perfiles en M en la región cercana a las paredes se incrementan. Es decir, al

aumentar el número de Hartmann se incrementa la intensidad del campo magnético y por tanto sus efectos en la distribución de velocidad. También se puede observar que para valores de  $Ha \approx 250$  se presenta la formación de vórtices en la zona central del canal donde el campo es inhomogéneo, ya que se tienen velocidades negativas. Si se mantiene  $Ha$  constante (ver Fig. 3.23b) e incrementamos el valor de  $Re$ , lo que equivale e incrementar la inercia del flujo, se observa que el valor mínimo de la velocidad axial se incrementa, mientras que los perfiles muestran una clara asimetría en la dirección del flujo.

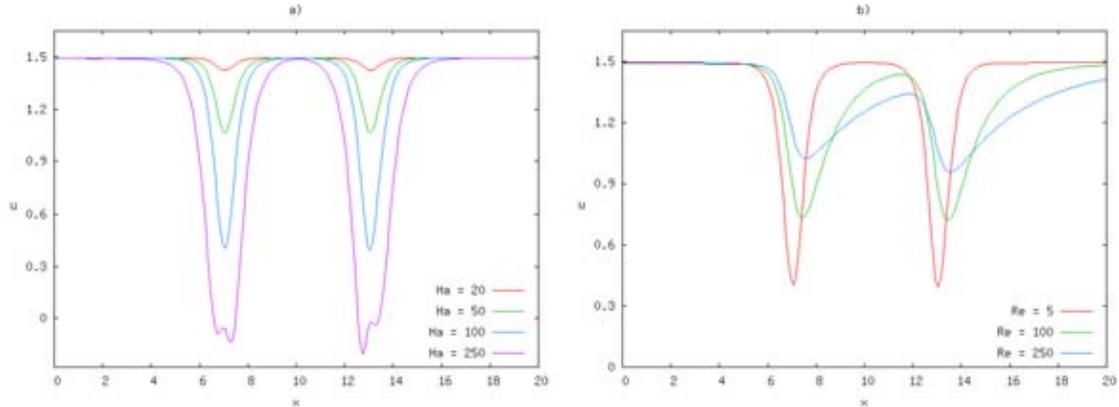


Fig. 3.23: Componente axial de la velocidad en el centro del canal con paredes aislantes como función de  $x$  cuando a)  $Re = 5$  para distintos valores de  $Ha$ , y b)  $Ha = 100$  para distintos valores de  $Re$ .

### 3.2.2. Flujo debido a una Corriente Inyectada

Ahora consideraremos el caso en que el flujo es producido por la inyección de una corriente, es decir, el gradiente de presión axial es producido por una fuerza magnética como sucede en una bomba MHD. La corriente aplicada como función de la coordenada axial se muestra en la Fig. 3.24. El campo aplicado es el utilizado en la sección anterior (ver Fig. 3.12).

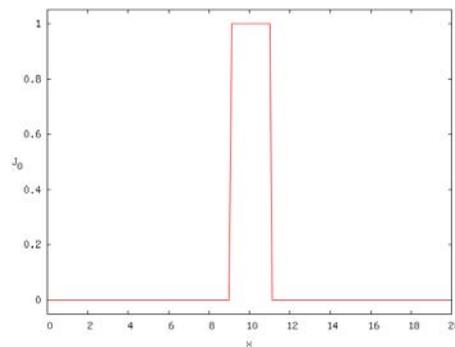


Fig. 3.24: Corriente eléctrica aplicada,  $j_0$ , como función de  $x$ .

Como se observa, la corriente se inyecta en la zona en la que el campo es aproximadamente uniforme. Esto, como se verá más adelante en la sección 4.4, con la finalidad de minimizar las pérdidas terminales (que se definirán posteriormente) que se incrementan cuando los extremos de los electrodos están en zonas de campo inhomogéneo.

Ya que en este problema existen condiciones físicas diferentes al anterior, es conveniente utilizar una adimensionalización distinta.

### Adimensionalización

En este caso, desarrollando las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.30), suponiendo que el campo inducido es de orden  $R_m$ , y además que  $R_m \ll 1$ , obtenemos el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento del flujo MHD bajo las suposiciones hechas, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ReB_z^0 \left(1 - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right), \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - ReB_z^0 \frac{\partial b_z}{\partial y}, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z}{\partial y^2} = u \frac{\partial}{\partial x} B_z^0. \quad (3.46)$$

Las condiciones de frontera, al igual que en el caso anterior, son (3.35)-(3.39), excepto la condición de entrada (3.36), en la que ahora se tienen condiciones de Neumann ( $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ). El campo inducido satisface también las ecuaciones

$$\frac{\partial b_z}{\partial y} = \frac{Re}{Ha^2} j_x, \quad \frac{\partial b_z}{\partial x} = -\frac{Re}{Ha^2} j_y. \quad (3.47)$$

Nótese además, que la densidad de corriente se normaliza con la magnitud de la corriente inyectada. El término  $ReB_z^0$  en la ecuación (3.44) corresponde precisamente a la fuerza de Lorentz debida a esta corriente. En este caso hemos utilizado las siguientes variables adimensionales (por simplicidad en (3.43)-(3.46) se han omitido los asteriscos):

$$u^* = \frac{u}{U} \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2} \quad j^* = \frac{j}{j_0} \quad B^* = \frac{B}{B_{max}} \quad t^* = \frac{t}{L/U} \quad x^* = \frac{x}{L}.$$

En este caso, la velocidad característica corresponde a una velocidad “viscosa”, es decir,  $U = \nu/L$ . Por su parte, la longitud característica se toma como la separación entre las paredes laterales,  $L = 2b$ . Se esta forma el tiempo característico corresponde al tiempo de

difusión viscosa,  $L/U = L^2/\nu$ . En las ecuaciones (3.44) y (3.45) aparece el número de Reynolds definido como

$$Re = \frac{U_L L}{\nu},$$

donde  $U_L$  es una velocidad característica basada en el balance de las fuerzas magnéticas y viscosas,  $U_L$ , es decir,

$$|\nu \nabla^2 \vec{u}| \sim \left| \frac{1}{\rho} \vec{j} \times \vec{B} \right|,$$

de donde

$$U_L = \frac{j_0 B_{max} L^2}{\rho \nu}.$$

Nótese que con estas definiciones, el número de Reynolds es el cociente de la velocidad  $U_L$  entre la velocidad viscosa, es decir,  $Re = U_L/U$ . Por tanto, cuando  $Re \gg 1$ , las fuerzas electromagnéticas son mucho mayores a las viscosas y viceversa. Esta forma de adimensionalizar las ecuaciones resulta conveniente para analizar flujos producidos por la inyección de una corriente, ya que cuando la corriente inyectada es cero,  $Re = 0$  y el fluido se mantiene en reposo, siempre que no exista un gradiente de presión externo. Por otro lado, el utilizar la velocidad y el tiempo característicos viscosos es adecuado para aplicaciones a escalas geométricas reducidas donde los efectos viscosos son importantes.

Para las simulaciones se considera que el fluido está inicialmente en reposo. Se debe mencionar que la condición de frontera para el campo inducido no es muy realista debido a que en el caso de paredes aislantes perfectas no se podría inyectar corriente, y en el caso de conductoras perfectas no se podría confinar la corriente inyectada a la región establecida. De cualquier forma, se utilizarán con la finalidad de destacar algunos aspectos, pero aclarando que para la simulación que se estudiará en el Capítulo 4 se utilizarán condiciones más realistas, es decir, paredes aislantes para las paredes del ducto y la condición de paredes conductoras perfectas en la zona en que se inyecta la corriente (electrodos). La fenomenología del flujo es muy similar al caso en que el flujo es debido a un gradiente de presión, pero existen algunas diferencias que se explicarán en seguida, y en las cuales se centrarán los resultados numéricos.

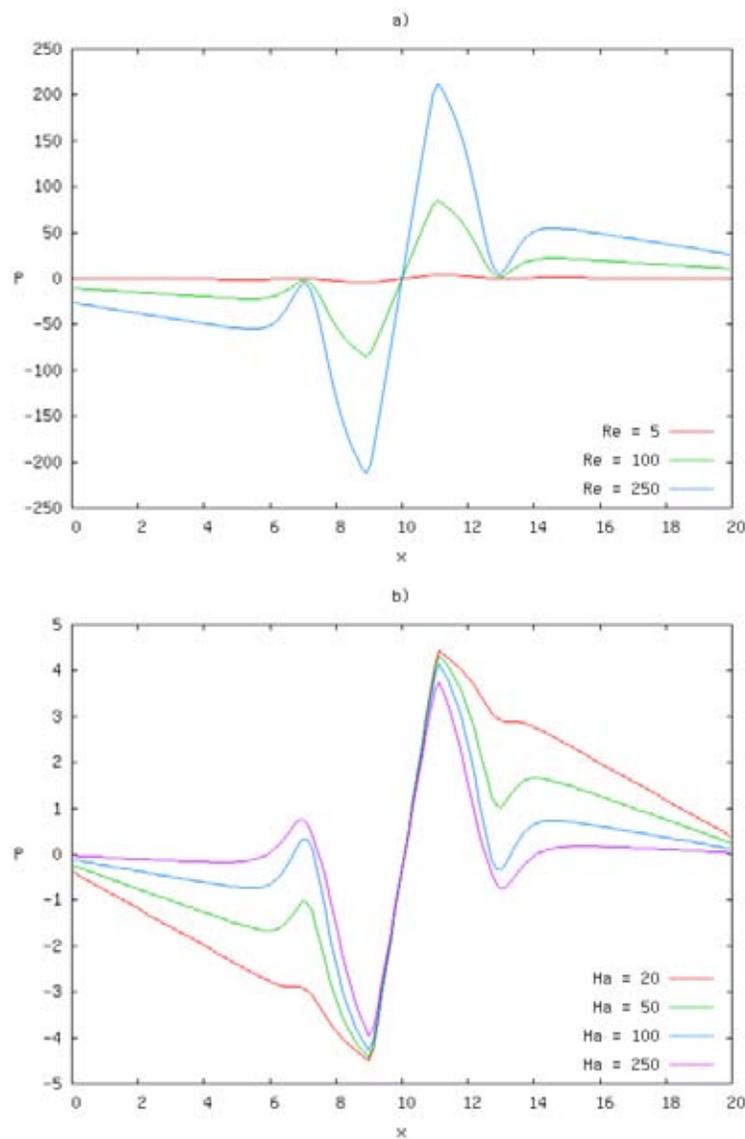


Fig. 3.25: Presión en el centro del canal como función de  $x$  cuando se tienen paredes aislantes, a) para distintos  $Re$ ,  $Ha = 100$  b) para distintos  $Ha$ ,  $Re = 100$ .

La Fig. 3.25 muestra la presión en el centro del ducto como función de  $x$  para distintos valores de  $Re$  y  $Ha$ . Nótese que en este caso la “caída” de presión es inversa a la que se presenta cuando el flujo lo produce un gradiente de presión externo, puesto que ahora en la región de campo magnético es donde se genera el gradiente de presión que mueve al fluido. En la Fig. 3.25a se observa que el aumento de presión es mayor al incrementar  $Re$ . Esto se debe a que un aumento de  $Re$  corresponde a una fuerza magnética más intensa. Por otra parte, si aumentamos  $Ha$  manteniendo  $Re$  constante observamos que disminuye la presión (ver

Fig. 3.25b). En este caso, como la corriente va como  $Ha^2$  (Ec. (3.47)) se tienen corrientes inducidas de mayor magnitud y por tanto un mayor freno en la región del imán.

En las Fig. 3.25 se observa que en la zona en que se inyecta la corriente, donde el campo magnético es aproximadamente homogéneo, existe un aumento notable en la presión. Esto se debe a que la fuerza, producto de la interacción de la corriente inyectada y el campo aplicado, es la que origina el movimiento del fluido. Independientemente de la magnitud del gradiente de presión, originado por la fuerza de Lorentz, existirán caídas de presión, esencialmente de dos tipos: viscosas y electromagnéticas. Las primeras existen en cualquier flujo de un fluido viscoso. Las segundas son producto de la interacción de las corriente inducidas y el campo aplicado, por lo que indiscutiblemente dependerán del número de Hartmann como se ha mencionado.

En la Fig. 3.26 se muestra la distribución de presión en el centro del ducto como función de  $x$  para los casos de paredes aislantes y conductoras perfectas.

Si las paredes son conductoras, las componentes de la corriente son del mismo orden de magnitud, por lo que tanto la fuerza impulsora como las pérdidas debidas a las corriente inducidas son menores comparadas con resultados obtenidos para paredes aislantes (ver Fig. 3.26). También se puede observar que en las zonas de campo magnético inhomogéneo, en el caso de paredes conductoras, no se presentan máximos o mínimos relativos, a diferencia del caso de paredes aislantes.

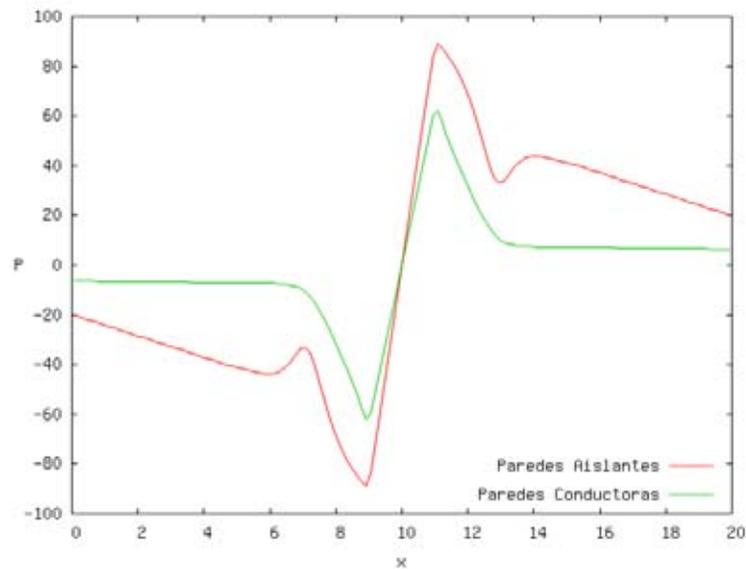


Fig. 3.26: Presión en el centro del canal en función de  $x$  cuando se tienen paredes aislantes y conductoras.  $Ha = 50$ ,  $Re = 100$ .

Se debe mencionar que independientemente de la causa del movimiento del fluido conductor (corriente inyectada o gradiente de presión externo) la fenomenología es similar, por lo que en este caso también se forman perfiles en forma de M en la zona de campo magnético no

homogéneo, más pronunciados en el caso de paredes aislantes.

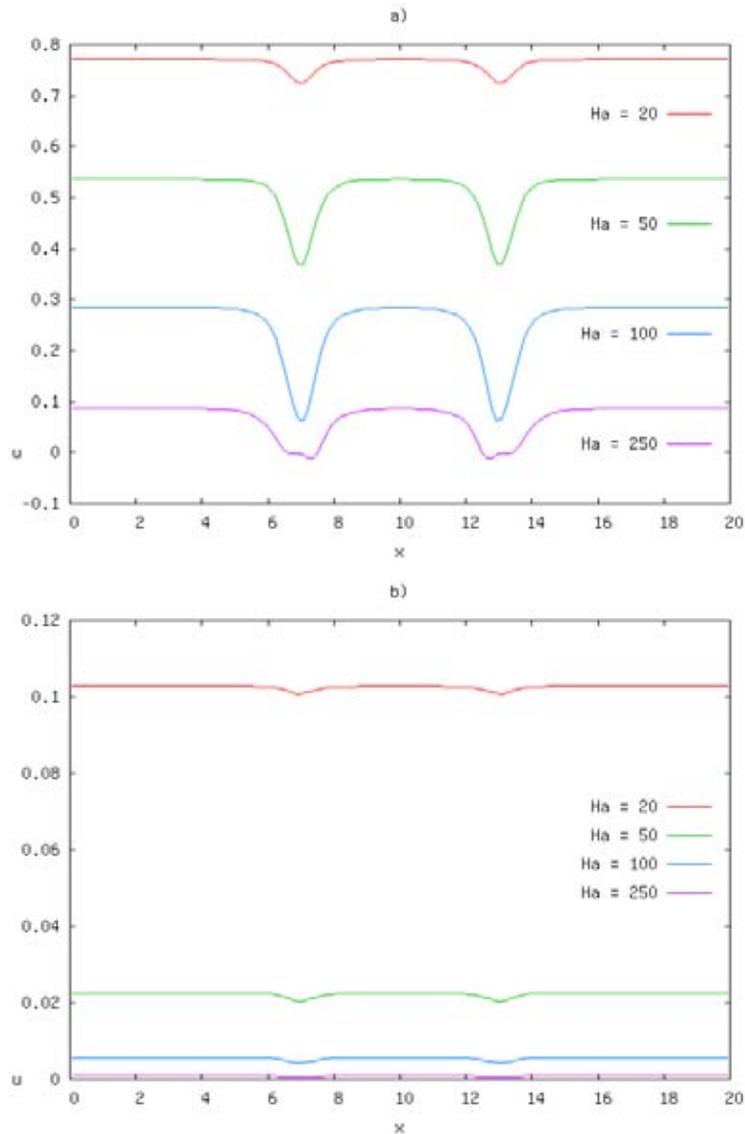


Fig. 3.27: Velocidad de la componente axial ( $u$ ) en función de  $x$  en el centro del canal con paredes: a) aislantes, y b) conductoras.  $Re = 100$ .

En la Fig. 3.27 se muestra la velocidad axial como función de  $x$  en el centro del ducto en los casos de paredes aislantes y conductoras, para distintos números de Hartmann. En ambos casos, la tendencia es la disminución de la velocidad al aumentar  $Ha$ , sin embargo la disminución es mucho más pronunciada en el caso de paredes conductoras.

Con base en los resultados obtenidos podemos concluir algunos resultados importantes. Al incrementar la conductividad de las paredes la caída de presión debida a efectos electro-

magnéticos es menor. Adicionalmente no se presentan máximos ni mínimos locales de la presión, mientras que la formación de perfiles en forma de M es menos pronunciada. Por otro lado, se observa que al disminuir la conductividad de las paredes la velocidad tiende a incrementarse.

## Capítulo 4

# Modelo Numérico Cuasi-Bidimensional con Fricción

El modelo completamente bidimensional analizado en el capítulo anterior captura razonablemente bien muchos de los aspectos importantes de la dinámica del flujo en un campo magnético inhomogéneo. Sin embargo, es evidente que las paredes del ducto transversales al campo magnético aplicado deben influir en el flujo, de manera que el campo de velocidad muestre una dependencia en la coordenada transversal  $z$  que permita satisfacer las condiciones de no deslizamiento sobre las paredes. De hecho, los principales efectos tridimensionales provienen de la existencia de capas límite que se forman en dichas paredes del ducto. Con el fin de mejorar la descripción del fenómeno, se optó por desarrollar un modelo cuasi-bidimensional que toma en cuenta la fricción del fluido con tales paredes.

Como veremos, en el modelo cuasi-bidimensional el efecto de las capas límite se modela a través de términos adicionales en la ecuación de balance de cantidad de movimiento que toman en cuenta la fricción con las paredes del ducto transversales al campo aplicado. Debemos hacer notar que en la cercanía de éstas existen dos tipos diferentes de capas límite: la capa de Hartmann dentro de la zona del campo magnético y la capa límite viscosa en el dominio donde el campo magnético es despreciable. En campos magnéticos transversales intensos, las capas de Hartmann son muy delgadas ( $O(Ha^{-1})$ ), y las variables presentan una variación leve a lo largo de las líneas de campo magnético. Bajo éstas condiciones es razonable reducir el esfuerzo computacional al considerar un comportamiento cuasi-bidimensional del flujo que modela los ligeros efectos tridimensionales en vez de resolverlos explícitamente. Esta aproximación, originalmente establecida por Sommeria y Moreau[22], ha sido exitosamente aplicada a flujos MHD en canales bajo campos uniformes, al promediar las ecuaciones a lo largo de las líneas de campo[23, 24], obteniendo un término (la fricción de Hartmann) que modela el efecto de las capas límite dentro de la zona del campo magnético.

Una aproximación similar para campos magnéticos no uniformes fue utilizada por primera vez por Lavrent'ev et al.[25], en donde los efectos tridimensionales debidos a la pre-

sencia de capas de Hartmann fueron introducidos a través de un perfil de velocidad de Hartmann local a lo largo de la dirección del flujo. Esta suposición fue justificada de manera experimental[26] y teórica[27], demostrando que aún con números de Hartmann y parámetros de interacción pequeños la velocidad longitudinal se aproxima a un perfil de Hartmann local. El enfoque cuasi-bidimensional también se ha utilizado en flujos en capas delgadas de fluido (aguas someras) en ausencia de campos magnéticos. En tal caso, las perturbaciones tridimensionales son inhibidas por el confinamiento geométrico. Bajo estas condiciones se puede aplicar el mismo procedimiento de promediado, llegando a ecuaciones cuasi-bidimensionales para las variables del flujo. Este es el enfoque seguido por Satijn et al.[28] y Clercx et al.[29] al modelar flujos en aguas someras, donde la fricción del fondo es parametrizada a través de un término lineal adicional conocido como la fricción de Rayleigh.

En este trabajo utilizaremos un enfoque que permite modelar de manera continua tanto la fricción de Hartmann en la región de campo magnético como la fricción de Rayleigh, puramente viscosa. Este enfoque se ha utilizado en el análisis de flujos sobre campos magnéticos localizados[20].

## 4.1. Aproximación cuasi-bidimensional

En la aproximación cuasi-bidimensional, suponemos que el transporte de cantidad de movimiento en la dirección normal es principalmente difusivo, por tanto, las componentes de la velocidad pueden ser expresadas en la forma

$$\vec{u} = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), 0] , \quad (4.1)$$

donde, al igual que las coordenadas  $x$  y  $y$ , la coordenada  $z$  se normaliza con la separación entre las paredes laterales,  $2b$ . Ya que este trabajo se enfoca principalmente al análisis de flujos MHD en ductos angostos, el despreciar la componente de velocidad en dirección  $z$  es una suposición razonable ya que, en la práctica, la magnitud de ésta es mucho menor que la de las componentes  $u$  y  $v$ .

Como es de interés analizar el flujo dentro una bomba MHD, consideraremos que el fluido será impulsado por una fuerza electromagnética, de modo que las ecuaciones adimensionales que usaremos son (3.43)-(3.46), que reescritas quedan como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + ReF_x , \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + ReF_y , \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z}{\partial y^2} = u \frac{\partial}{\partial x} B_z^0, \quad (4.5)$$

donde  $F_x$  y  $F_y$  son las componentes de la fuerza de Lorentz. Si derivamos (4.3) respecto a  $y$  y (4.4) respecto a  $x$ , y posteriormente las restamos obtenemos la ecuación para la componente  $z$  de la vorticidad

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} + Re \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \quad (4.6)$$

en donde

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \\ F_x &= (1 + j_{iy}) B_z^0, \\ F_y &= -j_{ix} B_z^0, \\ j_{ix} &= \frac{Ha^2}{Re} \frac{\partial b_z}{\partial y}, \\ j_{iy} &= -\frac{Ha^2}{Re} \frac{\partial b_z}{\partial x}. \end{aligned}$$

Entonces el último término del lado derecho de la ecuación (4.6) tiene la forma

$$\begin{aligned} Re \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) &= Re \left( \frac{\partial (-j_{ix} B_z^0)}{\partial x} - \frac{\partial ((1 + j_{iy}) B_z^0)}{\partial y} \right) \\ &= -Re \left( j_{ix} \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - B_z^0 \frac{\partial j_{iz}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

en donde hemos utilizado  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ , de lo que resulta la componente  $j_{iz}$  de la densidad de corriente, además de que el campo aplicado  $B_z^0$  sólo depende de  $x$ . La ecuación (4.6) es entonces

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} - Re \left( j_{ix} \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - B_z^0 \frac{\partial j_{iz}}{\partial z} \right). \quad (4.8)$$

Ahora definimos el promedio en la capa de fluido contenida entre las paredes transversales al campo para una función arbitraria  $g$

$$\bar{g}(x, t) = \frac{1}{h} \int_0^h g(x, z, t) dz, \quad (4.9)$$

donde  $h = a/b$  es el espesor adimensional de dicha capa. Nótese que  $h$  es precisamente la razón de aspecto de la sección transversal del ducto. Además suponemos que las variables

están dadas como la variable promediada en el espesor de la capa de fluido multiplicada por una función  $f$  que les da la dependencia en  $z$ , es decir,

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, t) f(x, z) , \quad (4.10a)$$

$$v(x, y, z, t) = \bar{v}(x, y, t) f(x, z) , \quad (4.10b)$$

$$\omega_z(x, y, z, t) = \bar{\omega}_z(x, y, t) f(x, z) , \quad (4.10c)$$

Las ecuaciones (4.10) expresan una suposición fuerte, pero razonable cuando el campo magnético es intenso o la capa de fluido muy delgada, como suponemos que sucede en nuestro caso. Suponemos además que tanto  $j_{ix}$  como  $j_{iy}$  no dependen de  $z$ .

La función  $f$  nos da la variación de la velocidad en la dirección normal a las paredes superior e inferior, por lo que debe modelar el flujo de Hartmann en la región en donde exista un campo magnético intenso, y el perfil de Poiseuille en regiones en las que el campo magnético es débil o nulo. Como veremos más adelante, la dependencia en  $x$  de la función  $f$  se da a través del campo magnético inhomogéneo. Además, ésta función debe satisfacer la condición de normalización

$$\frac{1}{h} \int_0^h f dz = 1 . \quad (4.11)$$

Si sustituimos (4.10) en (4.8) podemos reducirla a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial t} + \left[ \bar{u} \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial y} \right] \frac{1}{h} \int_0^h f^2 dz + \frac{\bar{u} \bar{\omega}_z}{2h} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h f^2 dz = \\ \frac{\partial^2 \bar{\omega}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_z}{\partial y^2} + \frac{\bar{\omega}_z}{h} \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_0^h - Re \left( j_{ix} \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - \frac{B_0^z}{h} j_{iz} \right) \Big|_0^h , \end{aligned} \quad (4.12)$$

en donde hemos utilizado (4.11). Si además suponemos que la variación de la función  $f$  en la dirección  $x$  es muy pequeña comparada con la variación en la dirección  $z$  y que las paredes ubicadas en  $z = 0$  y  $z = h$  son aislantes, tanto el tercer término del lado derecho de la ecuación (4.12) como la integral de la componente normal de la densidad de corriente se anulan. Con estas suposiciones la ecuación (4.12) se reduce a

$$\frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial t} + \left[ \bar{u} \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial y} \right] K = \frac{\partial^2 \bar{\omega}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_z}{\partial y^2} + \frac{\bar{\omega}_z}{\tau} - Re \bar{j}_{ix} \frac{\partial B_z^0}{\partial x} , \quad (4.13)$$

donde definimos los parámetros

$$K = \frac{1}{h} \int_0^h f^2 dz , \quad (4.14)$$

$$\tau^{-1} = \frac{1}{h} \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_0^h . \quad (4.15)$$

Observamos que la ecuación (4.13) contiene un término lineal que toma en cuenta la fricción con las paredes transversales al campo magnético aplicado y que el parámetro  $K$  multiplica al término convectivo. Tomando en cuenta lo anterior, las ecuaciones (4.2)-(4.4) en términos de las variables promediadas (por simplicidad hemos quitado las barras) toman la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] K = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{u}{\tau} + Re \left( 1 + j_{iy} \right) B_z^0, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] K = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{v}{\tau} - Re j_{ix} B_z^0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z}{\partial y^2} = u \frac{\partial}{\partial x} B_z^0. \quad (4.19)$$

Las condiciones de frontera son (3.35)-(3.39), excepto la condición de entrada (3.36), en la que ahora se tienen condiciones de Neumann ( $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ).

Al haber promediado las ecuaciones en la dirección  $z$ , se elimina completamente la dependencia en esta coordenada. Sin embargo, los efectos principales ocasionados por la presencia de las paredes transversales al campo ya han sido incluidos. Debemos enfatizar que el cuarto término del lado derecho de las ecuaciones (4.17) y (4.18) modela la fricción magnética en regiones donde el campo magnético es intenso y la fricción viscosa en regiones donde el campo magnético es despreciable. De hecho, la fricción magnética es mayor que la viscosa y aumenta con el número de Hartmann, ya que los gradientes de velocidad en la dirección  $z$  son más pronunciados cuando existe campo magnético. A su vez, el parámetro  $K$  modula el término convectivo. Los parámetros  $\tau$  y  $K$  dependen de la función  $f$  que se determinará a continuación.

## 4.2. Determinación de la Función $f$

Físicamente la función  $f$  puede entenderse como el perfil de la componente axial de la velocidad en la dirección normal al plano de flujo. La determinación se hace de manera aproximada, con las siguientes suposiciones:

1. Se considera un flujo completamente desarrollado de manera que la única componente de la velocidad está en la dirección  $x$ , y depende sólo de  $z$  ( $u(z) = f(z)$ ).
2. La presión es sólo función de  $x$  y su gradiente es constante.
3. La única componente de la fuerza de Lorentz está en dirección  $x$ .

Bajo estas suposiciones la ecuación de balance que resulta es

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Re(1 + j_{iy})B_z^0, \quad (4.20)$$

o bien

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + Re(1 + j_{iy})B_z^0. \quad (4.21)$$

La densidad de corriente inducida  $j_{iy}$  está dada por la Ley de Ohm (2.16), en donde el campo eléctrico  $\vec{E}$  está dado por el gradiente de potencial eléctrico  $-\nabla\phi$ . Por lo tanto la Ley de Ohm puede escribirse como

$$\vec{j} = N(-\nabla\phi + \vec{u} \times \vec{B}_z^0). \quad (4.22)$$

Ya que la corriente inducida aparece en respuesta al movimiento del fluido dentro del campo aplicado y no por la presencia de campos eléctricos, podemos suponer que el gradiente de potencial eléctrico es cero. Por tanto, la corriente inducida es  $j_{iy} = \frac{Ha^2}{Re} f B_z^0$ . Entonces la ecuación de movimiento queda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - Ha^2 B_z^0{}^2 f = \frac{\partial p}{\partial x} - Re B_z^0, \quad (4.23)$$

con condiciones de frontera

$$f(0) = f(h) = 0. \quad (4.24)$$

La solución a (4.23) con condiciones de frontera (4.24) es

$$f(z) = \frac{2\left(B_z^0 Re - \frac{\partial p}{\partial x}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{h B_z^0 Ha}{2}\right) \sinh\left(\frac{B_z^0 Ha}{2}(h-z)\right) \sinh\left(\frac{B_z^0 Haz}{2}\right)}{B_z^0{}^2 Ha^2}. \quad (4.25)$$

La función normalizada  $f_N$  que satisface la condición (4.11) es

$$f_N(z) = \frac{f(z)}{P}, \quad (4.26)$$

donde  $P$  es la constante de normalización dada por

$$P = \frac{1}{h} \int_0^h f(z) dz = \frac{\left(B_z^0 Re - \frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(h B_z^0 Ha - 2 \tanh\left(\frac{h B_z^0 Ha}{2}\right)\right)}{h B_z^0{}^3 Ha^3}, \quad (4.27)$$

por lo que la función normalizada es:

$$f_N(z) = \frac{hB_z^0 Ha \sinh\left(\frac{B_z^0 Ha}{2}(h-z)\right) \sinh\left(\frac{B_z^0 Haz}{2}\right)}{hB_z^0 Ha \cosh\left(\frac{hB_z^0 Ha}{2}\right) - \sinh\left(\frac{hB_z^0 Ha}{2}\right)}. \quad (4.28)$$

La dependencia de  $f_N$  respecto a  $x$  la obtiene a través del campo magnético aplicado. En la Fig. 4.1 se muestra el perfil de velocidad,  $f_N$ , en distintos puntos a lo largo del eje de simetría del ducto en dirección  $x$ , para la distribución de campo magnético mostrada en la Fig. 3.12. Se observa que en la zona de campo magnético intenso ( $x = 7, 10$ ) los perfiles son de tipo Hartmann (aplanados) mientras que al alejarse de esta región ( $x \leq 6.5$ ), los perfiles se vuelven parabólicos, tipo Poiseuille.

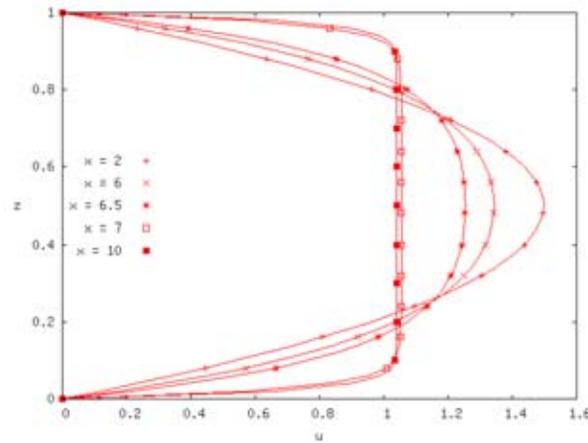


Fig. 4.1: Perfil de la componente axial de la velocidad,  $f_N$ , como función de  $z$  para distintas  $x$ .  $Re = 100$ ,  $Ha = 50$ .

Encontrada  $f_N$  se puede obtener explícitamente el parámetro  $K$  a partir de la ecuación (4.14)

$$K = \frac{hB_z^0 Ha \left[ hB_z^0 Ha \left( 2 + \cosh\left(hB_z^0 Ha\right) \right) - 3 \sinh\left(hB_z^0 Ha\right) \right]}{2 \left[ hB_z^0 Ha \cosh\left(\frac{hB_z^0 Ha}{2}\right) - 2 \sinh\left(\frac{hB_z^0 Ha}{2}\right) \right]^2} \quad (4.29)$$

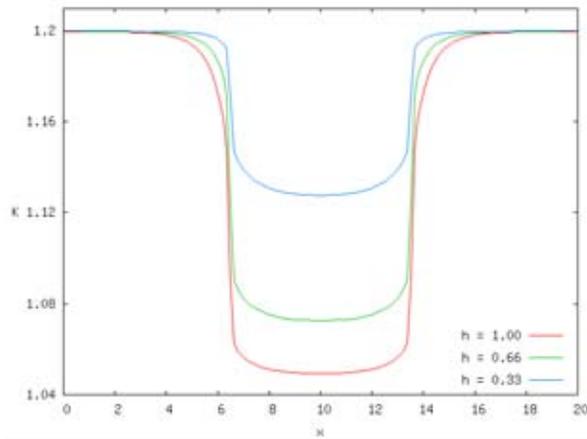


Fig. 4.2: Parámetro  $K$  como función de  $x$  en  $y = 0.5$  para distintos valores de la razón de aspecto  $h$  (es decir, espesor adimensional de la capa de fluido).  $Re = 5$ ,  $Ha = 20$ .

En la Fig. 4.2 se muestra la variación de  $K$  con la coordenada  $x$  para distintas razones de aspecto,  $h$ , para valores fijos de  $Ha$  y  $Re$ . Hay que notar que los valores de  $K$  varían entre 1.02 y 1.20, y que dicha variación se da únicamente en la zona de campo magnético intenso. Por tanto, el factor  $K$  afecta de manera débil los términos convectivos en la ecuación de balance de cantidad de movimiento. En el límite  $Ha \rightarrow 0$  la gráfica es una línea horizontal, lo cual implica que los efectos convectivos no se ven afectados por la fricción magnética. Por su parte, el parámetro  $\tau^{-1}$  definido a través de la ecuación (4.15) toma la forma

$$\tau^{-1} = \frac{2B_z^0{}^2 (1 - e^{hB_z^0 Ha}) Ha^2}{2 + hB_z^0 Ha + e^{hB_z^0 Ha} (hB_z^0 Ha - 2)} \quad (4.30)$$

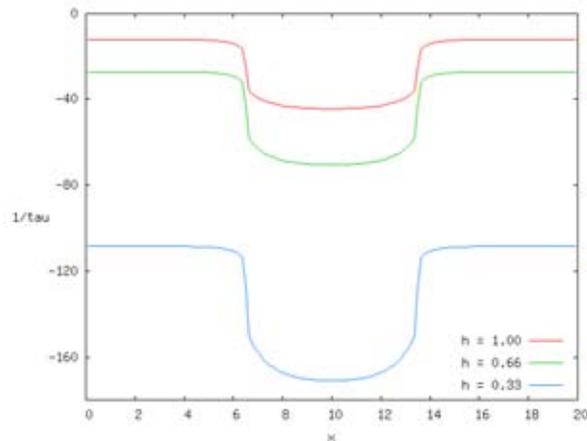


Fig. 4.3: Parámetro  $\tau^{-1}$  como función de  $x$  en  $y = 0.5$  para distintos valores de la razón de aspecto  $h$ .  $Re = 5$ ,  $Ha = 20$ .

Como se ha mencionado anteriormente, el parámetro  $\tau^{-1}$  tiene que ver con la fricción de Hartmann-Rayleigh ocasionada por la existencia de capas límite en las paredes transversales al campo. Claramente se observa en la Fig. 4.3 que la fricción se incrementa en la vecindad del campo magnético inhomogéneo, mientras que lejos de él toma un valor constante correspondiente a la fricción viscosa. Asimismo, observamos que la fricción se incrementa al disminuir la razón de aspecto, es decir, el espesor adimensional de la capa de fluido  $h$ . El carácter simétrico de  $K$  y de  $\tau^{-1}$  se debe a que ambas dependen de la expresión del campo aplicado,  $B_x^0$ , que es claramente simétrica.

### 4.3. Modelación Numérica

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos utilizando el modelo cuasi-bidimensional expuesto anteriormente, que considera los efectos introducidos en el flujo debido a la presencia de las capas límite adheridas a las paredes del ducto transversales al campo aplicado. El tomar en cuenta la fricción ocasionada por la existencia de capas límite, tiene como consecuencia una mayor estabilidad del flujo debido a la inclusión de un efecto disipativo adicional. En la práctica, el disminuir la razón de aspecto  $h$  trae como consecuencia la atenuación de las distintas variables de flujo, en particular, de las componentes de velocidad. Evidentemente, el efecto de la fricción será mayor mientras menor sea el grosor de la capa de líquido, y viceversa. De hecho, si tomamos el límite cuando  $h \rightarrow \infty$ , tenemos que  $K = 1$  y  $\tau^{-1} = 0$ , por lo que este efecto disipativo desaparece. Con esto podemos afirmar que en un límite idealizado, el modelo puramente bidimensional correspondería al caso de una capa de fluido de grosor infinito, suponiendo que la dependencia con la coordenada  $z$  es inexistente. Cabe mencionar que estrictamente el modelo cuasi-bidimensional arroja resultados significativos cuando la altura de la capa de fluido (separación entre las paredes transversales al campo) es mucho menor a la separación entre las paredes laterales del ducto, conservando con ello el confinamiento geométrico, es decir, cuando la razón de aspecto es pequeña,  $h \ll 1$ . Con fines ilustrativos, a continuación se mostrarán resultados para espesores de la capa de fluido menores o iguales a 1.

Con la finalidad de hacer más intensos los efectos magnetohidrodinámicos en el flujo, utilizamos condiciones de frontera de paredes aislantes para el campo. Para la velocidad condiciones de no penetración y no deslizamiento sobre las paredes; y en la entrada y salida del ducto condiciones de Neumann para el campo y las velocidades.

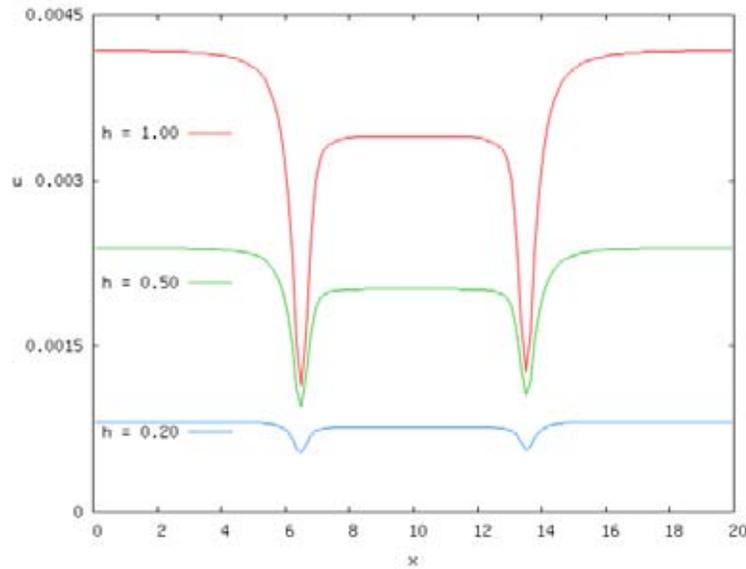


Fig. 4.4: Perfil de la componente axial de la velocidad  $u$  como función de  $x$  en  $y = 0.5$  para distintos valores de la razón de aspecto  $h$ .  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$ .

En la Fig. 4.4 se muestra la componente axial de la velocidad como función de la coordenada  $x$  en  $y = 0$  para distintos valores de la razón de aspecto para valores de  $Re = 5$  y  $Ha = 100$ . Debe notarse que, a diferencia de los resultados del capítulo 3 (ver por ejemplo las Fig. 3.27), la velocidad en la zona donde el campo es aproximadamente uniforme es menor que en las zonas donde el campo es despreciable. Este es un efecto directo de haber considerado la fricción de Hartmann-Rayleigh en el modelo numérico, ya que la fricción dentro del campo es mayor que fuera de él. Por otro lado, como es de esperarse, el disminuir el valor de  $h$  trae consigo una disminución general de la velocidad al intensificarse los efectos de fricción.

La Fig. 4.5 muestra el perfil de la componente axial de la velocidad como función de  $y$  en distintas posiciones axiales, fuera del campo magnético y dentro de él. Estos perfiles muestran entonces el desarrollo espacial de la velocidad axial al entrar el campo magnético. Observamos que fuera del campo ( $x = 4$ ) el perfil es parabólico mientras que en la zona de campo inhomogéneo ( $x = 6.5$ ) se forma un perfil en M. A su vez, en la zona de campo aproximadamente homogéneo ( $x = 10$ ) se obtiene un perfil aplanado, producto del efecto de la fricción de Hartmann. Nótese que este caso corresponde a  $h = 1$ , lo que indica que aún cuando no se tiene una relación de aspecto pequeña, los efectos de la fricción son evidentes. Recordemos que en el caso puramente bidimensional el perfil en esta zona recuperaba la forma parabólica. Resultados similares a los representados aquí se han encontrado experimentalmente[30].

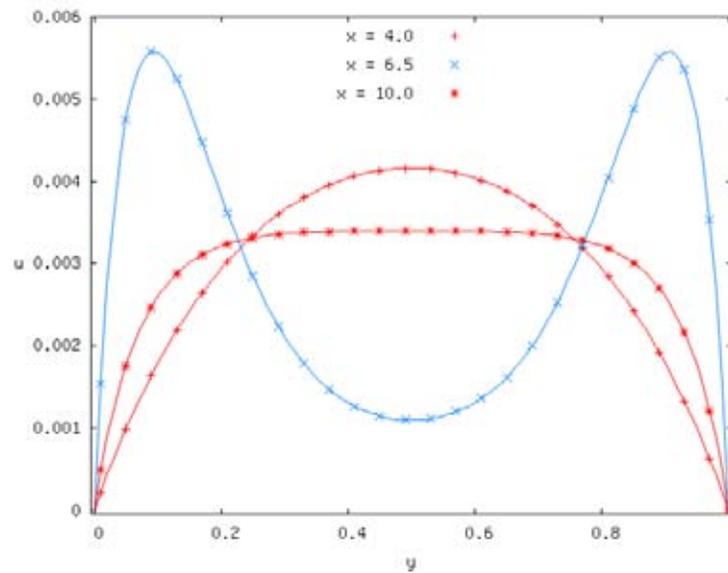


Fig. 4.5: Perfil de la componente axial de velocidad  $u$  para distintos valores de  $x$ .  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$ ,  $h = 1.0$ .

Encontramos entonces que al disminuir la distancia entre las paredes transversales al campo, el parámetro  $\tau^{-1}$  (fricción Hartmann-Rayleigh) aumenta (ver Fig. 4.3), disminuyendo la velocidad, mayormente en la zona de campo magnético intenso. Con base en esto, podemos afirmar que cuando esta separación es grande, obtenemos un perfil parabólico en la zona de campo despreciable y un perfil de aplanado en de la zona de campo intenso sólo por la fricción de Hartmann. Aunado a este efecto, la disminución de dicha distancia aumenta de forma considerable los efectos viscosos, llegando a ser éstos lo suficientemente intensos para evitar la formación de perfiles parabólicos en la zona de campo magnéticos despreciables o nulos. Esta disminución general de la magnitud de la velocidad en el centro del canal implica un menor gasto volumétrico, y por lo tanto la formación de perfiles en M con menores magnitudes de los picos o bien la supresión de estos, según sea el caso.

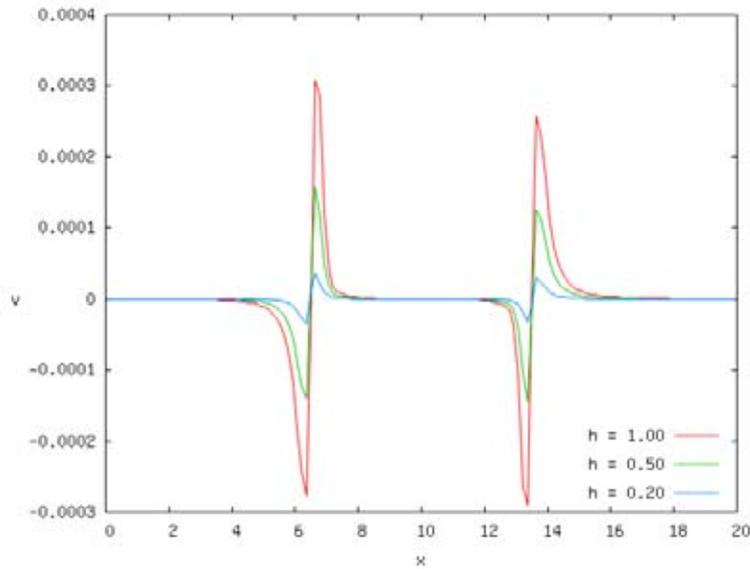


Fig. 4.6: Perfil de la componente transversal de la velocidad  $v$  como función de  $x$  para distintas razones de aspecto.  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$ .

En la Fig. 4.6 se muestra la componente transversal de la velocidad como función de  $x$  para distintas razones de aspecto. Nuevamente la magnitud de las componentes transversal de la velocidad es cero en las zonas de campo magnético aproximadamente homogéneo, mientras que en las zonas de campo inhomogéneo su magnitud es un orden de magnitud menor que la magnitud de componente axial, es decir,  $v \ll u$ .

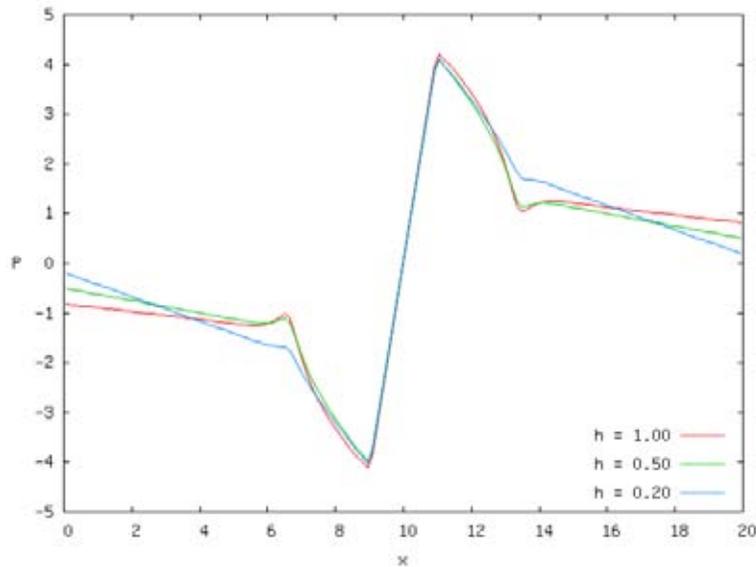


Fig. 4.7: Perfil de presión como función de  $x$  en  $y = 0.5$  para distintas razones de aspecto.  $Re = 5$ ,  $Ha = 100$ .

En la Fig. 4.7 se muestra la presión como función de  $x$  en  $y = 0.5$  para distintas razones de aspecto. Se observa que al disminuir la distancia entre las paredes transversales al campo, la caída de presión en las zonas de campo magnético despreciable aumenta debido principalmente a los efectos viscosos. Además se puede afirmar que para separaciones de dichas paredes mayores a 1 la caída de presión es aproximadamente igual, lo que indica que los efectos viscosos son importantes para separaciones menores a 1. En la zona de campo inhomogéneo ( $x = 7 - 9$  y  $11 - 13$ ) la caída de presión es mayor para separaciones mayores, lo cual se debe a que a mayores separaciones se tienen mayores velocidades y por tanto componentes axiales de la fuerza de Lorentz mayores que, como se explicó en el capítulo anterior, están directamente vinculadas con las caídas de presión. Por otra parte, la caída de presión debida a las fuerzas electromagnéticas aumenta al incrementar el número de Hartmann.

#### 4.4. Consideraciones para el Diseño de una Bomba MHD

Hasta ahora se han presentado resultados de flujos en ductos bajo los campos magnéticos inhomogéneos utilizando diversas aproximaciones y condiciones físicas, lo que ha permitido ofrecer una descripción general de las principales características físicas de dichos flujos. En esta última sección se presentarán resultados numéricos que pretenden simular de una manera más realista el flujo en una bomba MHD con una razón de aspecto pequeña. Para tal efecto, se considerarán, primeramente, las propiedades físicas de dos fluidos de trabajo específicos, a saber, una solución electrolítica de bicarbonato de sodio ( $NaHCO_3$ ) y una aleación eutéctica de metal líquido ( $Ga^{68\%}In^{20\%}Sn^{12\%}$ ). La solución electrolítica de bicarbonato de sodio a 8.8 % en masa bajo condiciones de temperatura ambiente ( $25^\circ C$ ) tiene una densidad de  $1086 kg/m^3$ , una viscosidad cinemática de  $10^6 m^2/s$  y una conductividad eléctrica de aproximadamente  $4 mho/m$ . Por otra parte, la aleación eutéctica tiene una temperatura de fusión de  $10.5^\circ C$ , estable a temperatura ambiente, posee una densidad de  $6360 kg/m^3$ , una viscosidad cinemática de  $3.4 \times 10^{-7} m^2/s$  y una conductividad eléctrica de aproximadamente  $3.46 \times 10^6 mho/m$ . En el Laboratorio del Departamento de Termociencias del CIE se cuenta con ambos fluidos con los que se espera realizar experimentos en un futuro. Por otra parte, se utilizarán dos distribuciones de campo magnético aplicado. La primera es la misma que se ha utilizado en simulaciones anteriores (ver Fig. 3.12) que corresponde al campo existente entre dos imanes permanentes separados una distancia  $H$ , donde el plano de estudio se encuentra en el plano medio ubicado a la mitad de la distancia que los separa,  $H/2$ , que presenta aproximadamente una distribución gaussiana. La segunda distribución corresponde al campo producido por un sólo imán permanente que puede colocarse en la pared inferior del ducto. Mediciones experimentales realizadas con un imán permanente de Neodim-Fierro-Boro de sección cuadrada de 2 pulgadas de lado y 1 pulgada de espesor, muestran que el campo cambia de signo cerca de los bordes del imán y tiene un mínimo absoluto de aproximadamente 20 % del valor máximo del campo,

como se observa en la Fig. 4.8. En dicha figura se muestra también la distribución axial de la corriente inyectada que se explicará posteriormente. Cabe mencionar que la intensidad máxima de campo magnético medida es  $0.42T$ . Esta distribución de campo es interesante pues podría pensarse en un experimento donde sólo exista el imán inferior de modo que pueda visualizarse el flujo dentro del campo magnético. Debemos aclarar que para fines de la simulación ambas distribuciones de campo se obtuvieron utilizando la ecuación 3.27.

Ya que existe el interés de analizar los flujos MHD a escalas pequeñas, consideraremos que las paredes transversales al campo están separadas  $3mm$  y que los electrodos (paredes paralelas al campo) están separados  $15mm$ , por lo tanto tendremos una relación de aspecto  $h = a/b = 0.2$ .

Tomando en cuenta las propiedades físicas de los fluidos de trabajo, la intensidad máxima del imán analizado y las dimensiones geométricas propuestas para el ducto, se encontró que para el electrolito el número de Hartmann tiene un valor de  $0.075$ , mientras que para el metal líquido este parámetro tiene un valor de  $39.6$ .

Otra modificación importante que se introduce en esta sección es relativa a las condiciones de frontera impuestas sobre el campo magnético inducido en las paredes laterales. Con el fin de utilizar condiciones más realistas se impusieron condiciones de paredes eléctricamente aislantes en todos los lados ( $c = 0$ ), excepto en las regiones donde se inyecta la corriente eléctrica que se consideraron como electrodos perfectos ( $c \rightarrow \infty$ ). Un factor importante es determinar el tamaño de los electrodos y su posición relativa a la distribución del campo magnético aplicado. Estos aspectos pueden influir de manera directa en el desempeño de una bomba MHD ya que puede presentarse lo que se conoce como pérdidas terminales.

Las pérdidas terminales[31] se deben a los efectos de corto circuito de las trayectorias de las corrientes inyectadas en los bordes de los electrodos. Es decir, idealmente la corriente inyectada en un electrodo atraviesa el fluido conductor, es captada por el otro electrodo y después circula por el circuito externo. Sin embargo, en la práctica parte de la corriente cercana a los bordes de los electrodos regresa a través del mismo fluido, ocasionando un corto circuito. Estas corrientes de corto circuito al interactuar con el campo, provocan una fuerza de Lorentz que ocasiona una caída de presión extra y que en ciertas condiciones puede ser importante. Estas pérdidas se ven afectadas por las inhomogeneidades de los campos magnético, eléctrico y de la distribución de corriente, particularmente cerca de los extremos de los electrodos. Las pérdidas terminales dependen de varios parámetros, entre los que se encuentran la razón de aspecto y la distribución del campo magnético aplicado, entre otros. Aunque no se analizarán detalladamente, se mencionarán algunos aspectos generales de dichas pérdidas.

Estudios previos han sugerido de manera empírica y mediante simulaciones numéricas[32], que para obtener pérdidas menores el campo debe tener un decaimiento exponencial y la longitud de los electrodos debe ser mayor que la distancia entre ellos. La longitud de los electrodos puede incrementarse artificialmente mediante aletas aislantes en las regiones terminales de los electrodos, sirviendo éstas como obstáculos a las corrientes de corto circuito, aunque evidentemente modifican la dinámica del flujo. Además, la máxima longitud

del electrodo debe ser menor que 1.5 veces las longitudes de las respectivas regiones terminales (definidas como la distancia entre el borde del electrodo y el punto donde el campo es despreciable). Entre menor sea dicha razón, menor es el requerimiento en la razón de la longitud de los electrodos entre la distancia que los separa.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, se estableció que el punto medio de la longitud de los electrodos coincida con el punto medio de los imanes. Consideraremos que los electrodos tienen una longitud de  $20\text{mm}$ , por lo que los extremos de los electrodos están a una distancia de  $15.4\text{mm}$  de los bordes de los imanes, es decir, están en la zona de campo magnético aproximadamente homogéneo y lo suficientemente lejos del campo inhomogéneo para considerar que las pérdidas terminales son mínimas. En la Fig. 4.9 se muestra un esquema del ducto estudiado donde se observa la disposición de los electrodos y la distribución del campo magnético.

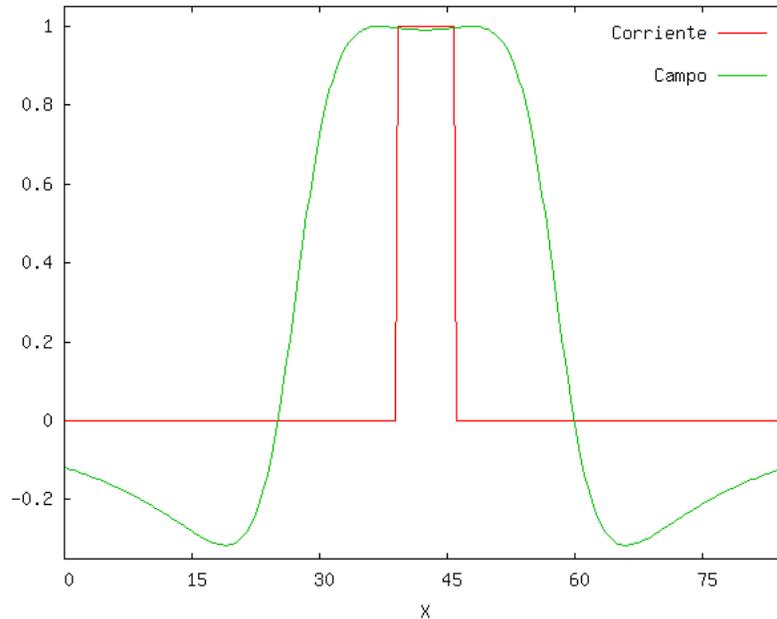


Fig. 4.8: Distribución del campo magnético aplicado  $B_z^0(x)$  y corriente aplicada  $j_0$  an las simulaciones.

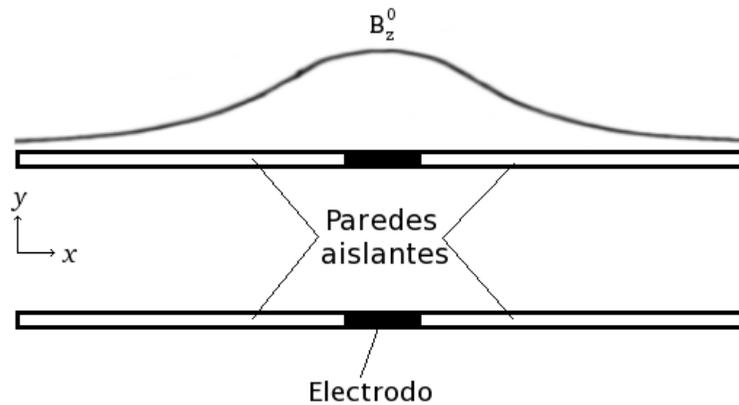


Fig. 4.9: Esquema de la ubicación de los electrodos (área sombreada), las paredes laterales aislantes (área sin sombreada) y distribución de campo magnético (parte superior). Los electrodos están ubicados en la zona central de campo magnético aproximadamente homogéneo. Las condiciones de frontera para los electrodos son de conductores perfectos ( $c \rightarrow \infty$ ) y para el resto de las paredes laterales de aislantes perfectas ( $c \rightarrow 0$ ).

En la Fig. 4.10 se muestra el parámetro de fricción de Hartmann-Rayleigh  $\tau^{-1}$  como función de la coordenada  $x$  para  $Ha = 0.075$  y  $Ha = 39.6$ , correspondientes al electrolito y al metal líquido, respectivamente. Se observa que la fricción de Hartmann-Rayleigh es mucho mayor para el metal líquido que para el electrolito, y que para el primero, los efectos MHD son mucho más importantes. Para el electrolito la fricción tiene una distribución homogénea, lo que indica el predominio de los efectos viscosos, mientras que para el metal líquido su forma está muy relacionada con la del campo aplicado. En las zonas en las que el campo es cero, tiene el mismo valor que para el electrolito. Otro aspecto importante es que el freno existe en todo el dominio en que el campo no es despreciable, independientemente del signo del campo.

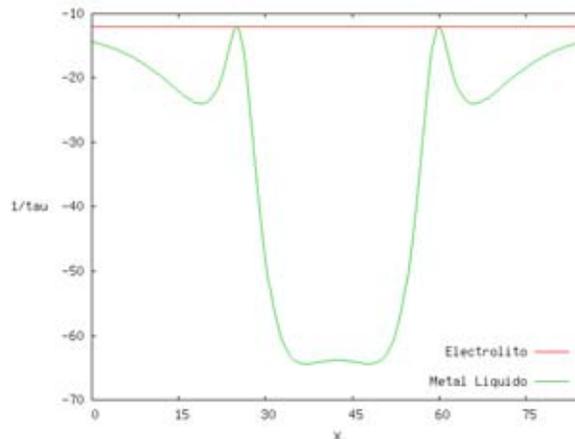


Fig. 4.10: Fricción de Hartmann-Rayleigh  $\tau^{-1}$  como función de la coordenada  $x$  para la solución electrolítica y el metal líquido.  $Re = 50$ .

En la Fig. 4.11 se muestra la presión como función de la coordenada axial para el electrolito y el metal líquido, utilizando la distribución de un sólo imán. Ya que el número de Reynolds es el mismo en ambos casos ( $Re = 50$ ) se observa que el gradiente de presión es muy similar. Las diferencias existentes se deben a que las interacciones electromagnéticas son más intensas en el metal líquido, ya que el número de Hartmann es mayor, por lo que el perfil para este tiene perturbaciones en la zona de campo inhomogéneo.

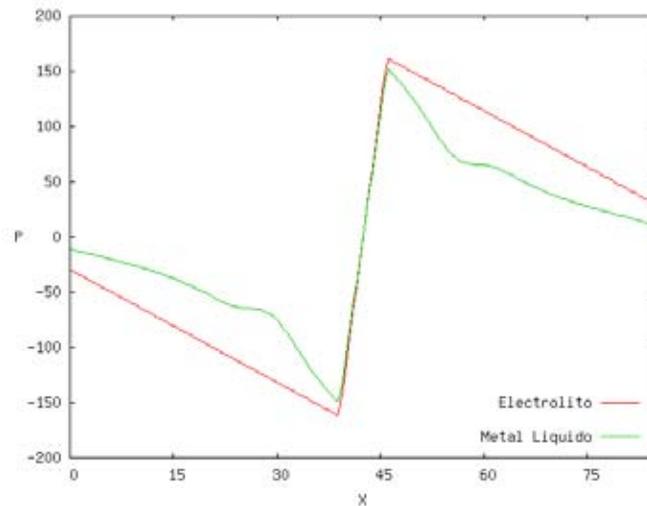


Fig. 4.11: Distribución de la presión como función de la coordenada  $x$  para la solución electrolítica y el metal líquido.  $Re = 50$ .

En la Fig. 4.12 se muestra la velocidad axial como función de la coordenada  $x$  para ambos fluidos de trabajo y para  $Re = 50$ , con la distribución de campo de un único imán. Se observa que las velocidades obtenidas son menores en el caso del metal líquido, donde los efectos MHD son más intensos. De hecho se tiene la formación de perfiles en forma de M en el flujo del metal líquido, mientras que en el caso del electrolito en todo el dominio se tiene un perfil aplanado. Nuevamente encontramos que para el electrolito los efectos dominantes son los viscosos.

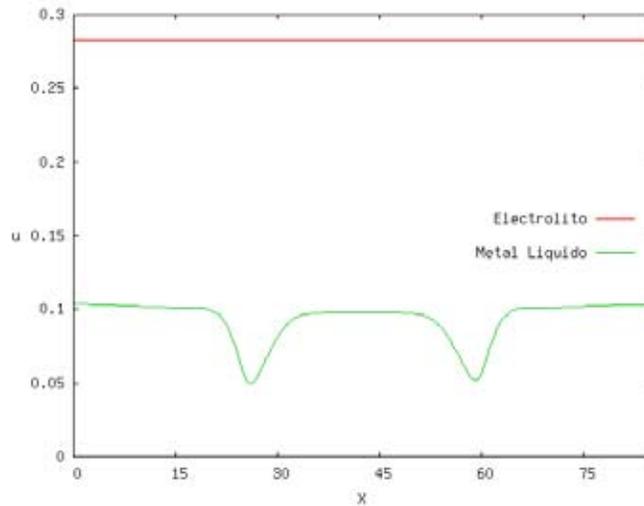


Fig. 4.12: Componente axial de la velocidad como función de la coordenada  $x$  para la solución electrolítica y el metal líquido.  $Re = 50$ .

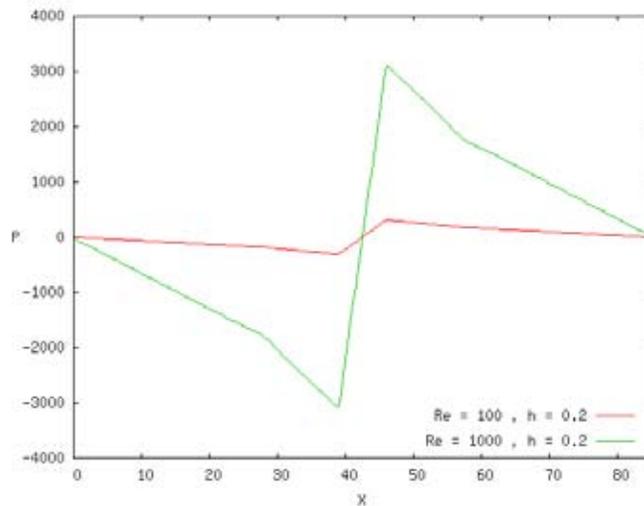


Fig. 4.13: Distribución de la presión como función de  $x$  para el metal líquido en los casos de  $Re = 100$  y  $Re = 1000$ , utilizando la distribución de campo de dos imanes y razón de aspecto  $h = 0.2$ .

En la Fig. 4.13 se muestra la presión como función de  $x$  para el metal líquido en los casos de  $Re = 100$  y  $Re = 1000$ , utilizando la distribución de campo de dos imanes. Se observa que al aumentar el valor del número de Reynolds que equivale a intensificar la fuerza magnética, se incrementa el gradiente de presión generado. Los resultados para el electrolito son muy similares.

Finalmente en las Fig. 4.14, 4.15 y 4.16 se muestran los perfiles de presión, velocidad axial y velocidad transversal, respectivamente, para el metal líquido utilizando la distribución

del campo aplicado de uno y dos imanes. Todos los casos corresponden a un  $Re = 100$ .

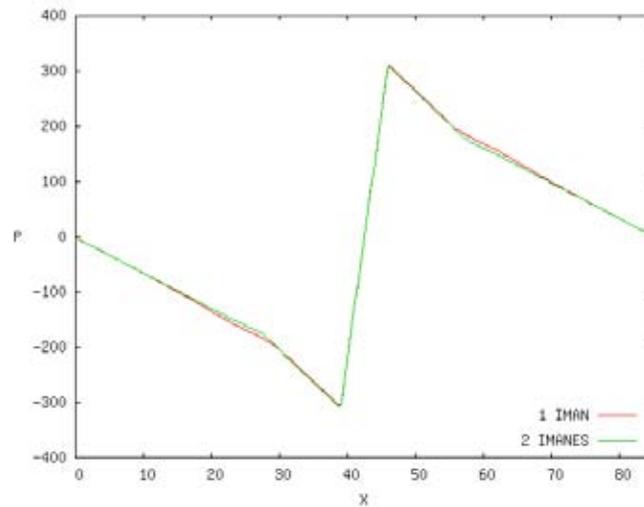


Fig. 4.14: Presión como función de  $x$  para metal líquido utilizando la distribución del campo aplicado de uno y dos imanes.  $Re = 100$ .

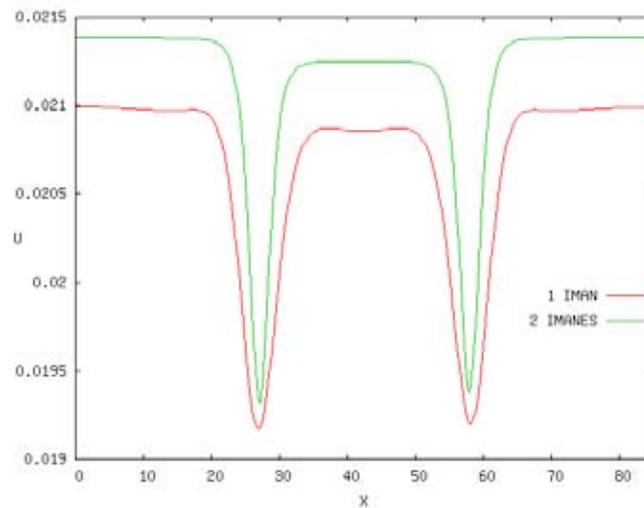


Fig. 4.15: Perfil de la componente axial de la velocidad como función de  $x$  para metal líquido utilizando la distribución del campo aplicado de uno y dos imanes.  $Re = 100$ .

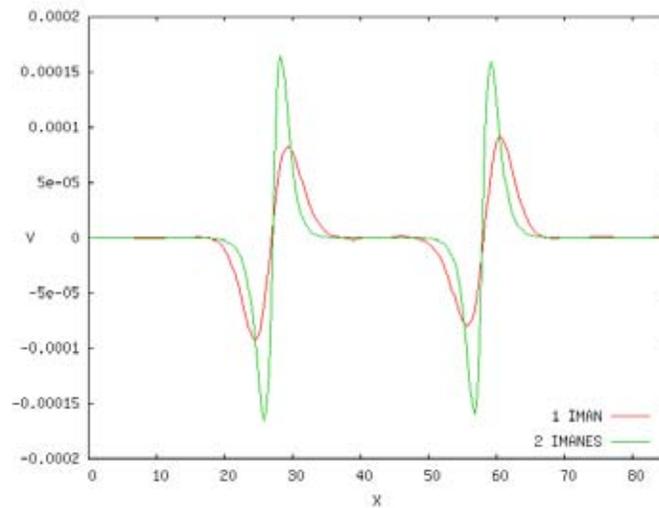


Fig. 4.16: Perfil de la componente transversal de la velocidad como función de  $x$  para metal líquido utilizando la distribución del campo aplicado de uno y dos imanes.  $Re = 100$ .

En la Fig. 4.14 observamos que los perfiles de presión son prácticamente los mismo en ambos casos, mientras que en las Fig. 4.15 y 4.16 observamos que se alcanzan velocidades más altas en el caso de dos imanes, ya que los efectos electromagnéticos son más intensos. Podemos concluir que en ductos de razón de aspecto pequeña y campo magnéticos generados por imanes permanentes (condiciones que pueden ser logradas en laboratorio), al utilizar electrolitos los efectos viscosos dominan sobre los MHD, observando distribuciones de velocidad planas que son insensibles a la distribución de campo magnético. Por su parte, al utilizar metales líquidos los efectos MHD son dominantes y dependientes de la distribución del campo aplicado.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajo a Futuro

En el presente trabajo se estudió numéricamente la dinámica de un flujo MHD en un ducto de sección transversal rectangular y razón de aspecto pequeña, en presencia de un campo magnético localizado en una sección del ducto, en el que la interacción de una corriente eléctrica directa inyectada en esta zona y dicho campo induce el movimiento de un fluido conductor. El objetivo principal del estudio fue, por una parte, desarrollar un modelo numérico cuasi-bidimensional capaz de describir la dinámica de flujos MHD en ductos en campos magnéticos inhomogéneos, y por otra, analizar las características físicas de dichos flujos. La motivación principal del estudio fue contar con una herramienta numérica que permita simular los flujos dentro de una bomba MHD de conducción y pueda ayudar en el diseño de este dispositivo. Para lograr esto, se establecieron las ecuaciones que describen el fenómeno y posteriormente se utilizó una solución analítica para validar el método numérico, con el cual se simularon los flujos en campos inhomogéneos. Dicho método numérico es capaz de analizar el comportamiento del flujo en un amplio rango de valores de los número de Reynolds y Hartmann, lo que permite explorar comportamientos no lineales, así como la variación temporal de las variables. Primeramente, se utilizó un modelo puramente bidimensional que ignora la presencia de las paredes del ducto transversales al campo magnético aplicado. Los resultados obtenidos nos ayudaron a comprender mejor las características de la dinámica del flujo, que como una primera aproximación nos da resultados cuantitativos y cualitativos importantes.

El flujo de un fluido conductor confinado por paredes laterales dentro de un campo magnético inhomogéneo que varía sólo en la dirección axial, induce corrientes que completan sus trayectorias en el propio fluido, o en las paredes, si son conductoras. La interacción de las corrientes inducidas con el campo magnético inhomogéneo, provoca la formación de perfiles de forma de M, los cuales son más pronunciados mientras mayor es el número de Hartmann, manteniendo constante  $Re$ . La expulsión del fluido del núcleo hacia la región cercana a las paredes laterales ocasiona la disminución de la velocidad en el centro del ducto, existiendo un valor de  $Ha$  para el cual se observa la formación de vórtices. Por otra parte, la existencia de dos zonas de campo magnético inhomogéneo, ocasiona la formación

de perfiles en  $M$  tanto a la entrada como a la salida del campo magnético. En este contexto, sería interesante explorar condiciones que puedan llegar a desestabilizar el flujo y eventualmente producir un régimen turbulento. El análisis de la turbulencia puede requerir modificaciones al modelo e incluso el desarrollo de una técnica computacional diferente. El efecto de la conductividad de las paredes es otro aspecto muy importante en el diseño de dispositivos MHD. El hecho de utilizar paredes aislantes implica que las corrientes completan sus trayectorias dentro del propio fluido, por lo cual necesariamente existe una mayor densidad de corriente intensificando, en particular, la componente axial de la corriente que es la que impulsa al fluido hacia las paredes o el centro del ducto. En resumen, las paredes aislantes intensifican los efectos MHD al incrementar el valor de las corrientes inducidas, por lo que se obtienen perfiles en  $M$  más pronunciados que en el caso de paredes conductoras, para los mismos parámetros. También se utilizó un modelo cuasi-bidimensional que introduce el efecto de las capas límite de las paredes del ducto transversales al campo a través de un término que modula los efectos convectivos y otro más importante que modela la fricción de Hartmann-Rayleigh. Este último, modela la fricción de Hartmann en la zona de campo magnético y la fricción de Rayleigh, puramente viscosa, donde el campo es despreciable. En los resultados observamos que el efecto de la fricción se intensifica cuando el espesor de la capa de fluido disminuye, es decir, para razones de aspecto pequeñas. Como es de esperar, la inclusión de estos términos juega un papel disipativo, ya que atenúan las variables de flujo y producen un efecto estabilizador. El modelo cuasi-bidimensional logra capturar las características fundamentales del flujo en un campo inhomogéneo observado experimentalmente[30], aunque un modelo tridimensional puede ser una tarea a futuro.

Por otra parte, con el fin de realizar simulaciones más realistas que puedan ofrecer una caracterización preliminar de los flujos que tienen lugar en una bomba electromagnética a pequeñas escalas, se estudió el flujo en un ducto con una razón de aspecto pequeña utilizando como fluidos de trabajo tanto un electrolito como un metal líquido. Se utilizaron dos distribuciones de campo magnético, una producto de un sólo imán y otra de dos imanes. La primera, es una distribución en la que cambia de signo el campo cerca de los bordes del imán mientras que la segunda es una distribución aproximadamente gaussiana. Los resultados muestran que el uso de dos imanes incrementa ligeramente la velocidad del fluido. Asimismo, se encontró que en el caso del electrolito los efectos dominantes son los viscosos, mientras que para el metal líquido dominan los efectos MHD, observándose incluso las formación de perfiles en  $M$ .

Existen muchas tareas a futuro en el presente estudio. En particular es necesario afinar el modelo numérico para hacer posible una comparación cuantitativa con resultados experimentales. Las herramientas computacionales utilizadas aquí se pueden tomar como base para el diseño de dispositivos MHD de bombeo. En particular, es de interés la construcción de una bomba MHD utilizando los métodos propuestos en el trabajo. El tratamiento teórico y experimental del problema aportará un enfoque complementario que permitirá obtener un conocimiento más profundo del fenómeno estudiado.

# Apéndice A

## Tratamiento Numérico de las Ecuaciones

La solución numérica fue llevada a cabo bajo una formulación basada en las variables primitivas, la velocidad y la presión, y el campo magnético inducido como variable electromagnética. Se usó el método de diferencias finitas en una malla equidistante ortogonal para resolver las ecuaciones de balance de la MHD. Una discretización de segundo orden fue hecha sobre un arreglo desfasado de mallas, mientras que para la discretización temporal se usó el método de Euler. La precisión en el tiempo de integración se hizo a partir de la elección de un paso de tiempo suficientemente pequeño que cumpliera con el criterio de *Courant*. Las componentes de la velocidad  $u$  y  $v$  fueron definidas en los puntos medios de los bordes vertical y horizontal de la celda computacional, respectivamente, mientras que la presión y el campo magnético inducido se definieron en el centro de dicha celda. Los términos difusivos fueron discretizados usando diferencias centrales, mientras que para los términos convectivos se utilizó una mezcla de diferencias centrales y el esquema *donnor-cell*. Para la solución de las ecuaciones de balance, se utilizó el procedimiento propuesto por Griebel, Dornseifer y Neunhoffer [17], el cual se extendió para incluir los efectos MHD. La discretización temporal de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento fue explícito para la velocidad e implícito para la presión,

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x}, \quad v^{(n+1)} = G^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y}, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\begin{aligned} F^{(n)} &= u^{(n)} + \delta t \left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{u}{\tau} + \frac{Ha^2}{Re} j_y B_z^0 \right], \\ G^{(n)} &= v^{(n)} + \delta t \left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{v}{\tau} - \frac{Ha^2}{Re} j_x B_z^0 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

La ecuación de continuidad se satisface resolviendo una ecuación de Poisson para la presión  $p^{(n+1)}$  al tiempo  $t_{(n+1)}$ . Este algoritmo corresponde al método de la proyección de Cho-

rin. La ecuación de Poisson fue resuelta bajo condiciones de frontera homogénea de tipo Neumann y Dirichlet. Para la solución de esta ecuación, ecuación de Poisson, se utilizó el método de Gauss-Seidel, la cual fue iterada hasta obtener la divergencia del campo de velocidades deseada. La ecuación para el campo magnético inducido fue resuelta usando el mismo método. Las componentes de la corriente eléctrica se calcularon apartir de la Ley de Ampère.

# Bibliografía

- [1] Hideo Araseki, Igor R. Kirillov, Gennady V. Preslitsky, and Anatoly P. Ogorodnikov. Double-supply-frequency pressure pulsation in annular linear induction pump: Part 1: Measurement and numerical analysis. *Nuclear Engineering and Design*, 195(1):Pages 85–100, January 2000.
- [2] William Ritchie. Experimental researches in voltaic electricity and electromagnetism. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1832.
- [3] Edwin F. Northrup. Some newly observed manifestations of forces in the interior of an electric conductor. *Phys. Rev. (Series I)*, 24(6):474–497, Jun 1907.
- [4] Christian Petersen. Method for transforming the kinetic energy in gases into electrical energy and manner for utilizing the latter for carrying out gas reaction. U.S. Patent 1443091, January 1923.
- [5] Albert Einstein and Leo Szillard. Pump, especially for refrigerating machine. British Patent 344881, 1931.
- [6] E. J. Williams. The induction of electromotive forces in a moving liquid by a magnetic field, and its application to an investigation of the flow of liquids. *Proceedings of the Physical Society*, 42(5):466–478, 1930.
- [7] Julius Hartman and Freimut Lazarus. Hg-dynamics II - theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field. *Mathematisk-Fysiske Meddelelser*, 15(7), 1937.
- [8] P. Fabre. Utilisation des forces electromotrices denregistrement des variations de vitesse des liquids conducteurs: un nouvel hemodromograph sans palette dans le sang. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 194:1097–1098, 1932.
- [9] Hannes Alfvén. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, 150:405–406, 1942.
- [10] J. A. Shercliff. *A Textbook of Magnetohydrodynamics*. Pergamon Press, 1965.

- [11] W. F. Hughes and F. J. Young. *Electromagnetodynamics of Fluids*. Krieger Publishing Company, 1989.
- [12] U. Müller and L. Bühler. *Magnetofluidynamics in channels and containers*. Springer, 2001.
- [13] J. Hartmann. Hg-dynamics I. theory of the laminar flow an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field. *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.*, 15(1), 1937.
- [14] J. Hartmann and F. Lazarus. Hg-dynamics II. experimental investigations on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field. *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.*, 15(7), 1937.
- [15] Chieh C. Chang and Thomas S. Lundgren. Duct flow in magnetohydrodynamics. *Z. Angew. Math. Phys.*, 12:100–114, 1961.
- [16] M. Tezer-Sezgin and S. Dost. Boundary element method for MHD channel flow with arbitrary wall conductivity. *Applied Mathematical Modelling*, 18, August 1994.
- [17] T. Griebel, M. Dornseifer and T. Neunhoeffler. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A practical Introduction*. SIAM, 1998.
- [18] O. Andreev, Yu. Kolesnikov, and A. Thess. Experimental study of liquid metal channel flow under the influence of a nonuniform magnetic field. *Physics of Fluids*, 18, 2006.
- [19] M. McCaig. *Permanent magnets in theory and practice*. Wiley, 1977.
- [20] Sergio Cuevas, Sergey Smolentsev, and Mohamed A. Abdou. On the flow past a magnetic obstacle. *Journal of Fluid Mechanics*, 553:227–252, 2006.
- [21] C. C. Sellers and J. S. Walker. Liquid-metal flow in an electrically insulated rectangular duct with a non-uniform magnetic field. *International Journal of Engineering Science*, 37:541–552, 1999.
- [22] J. Sommeria and R. Moreau. Why, how and when, MHD turbulence becomes two-dimensional. *Journal of Fluid Mechanics*, 118:507–518, 1982.
- [23] L. Bühler. Instabilities in quasi-two-dimensional magnetohydrodynamic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 326:125–150, 1996.
- [24] S. Smolentsev. Averaged model in MHD duct flow calculations. *Magnetohydrodynamics*, 33(1):42–47, 1997.

- [25] I. V. Lavrent'ev, S. Yu. Molokov, S. I. Sidorenkov, and A. R. Shishko. Stokes flow in a rectangular magnetohydrodynamic channel with nonconducting walls within a nonuniform magnetic field at large hartmann numbers. *Magnetohydrodynamics*, 26(3):328–338, 1990.
- [26] V. P. Bocheninskii, G. G. Branover, A. V. Tananaev, and Yu. P. Cheryaev. An experimental study of the resistance to the flow of an electroconductive fluid in plane insulated channels in the presence of a transverse magnetic field, with consideration given to the end effect and the roughness of the walls. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza*, 4:10–21, 1971.
- [27] A. I. Kalyutic, I. V. Lavrent'ev, and V. V. Serebryakov. The development of flow for an electroconductive fluid in a magnetic field. *Magnetohydrodynamics*, 2:11–14, 1986.
- [28] M. P. Satijn, A. W. Cense, R. Verzicco, H. J. H. Clercx, and G. J. F. Van Heijst. Three-dimensional structure and decay properties of vortices in shallow fluid layers. *Physics of Fluids*, 13(7):1932–1945, 2001.
- [29] H. J. H. Clercx, G. J. F. Van Heijst, and M. L. Zoetewij. Quasi-two-dimensional turbulence in shallow fluid layers: The role of bottom friction and fluid layer depth. *Physical Review E*, 67, 2003.
- [30] H. Branover. *Magnetohydrodynamic Flow in Ducts*. Wiley & Sons, 1979.
- [31] *Effects of fringing magnetic fields on mhd seawater thruster performance*, 28th Joint Propulsion Conference, Nashville, Tennessee, July 6-9 1992.
- [32] Leif Blumenau. *Metallurgical Technologies, Energy Conversion, and Magnetohydrodynamic Flows*, volume 148 of *Progress in Astronautics and Aeronautics*, chapter Theoretical Magnetic Field Distributions Eliminating End Losses in Linear High Magnetic Reynolds Number MHD Channels. AIAA, 1993.