



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

DAMIÁN PITALÚA GARCÍA



TUTOR

DR. LUIS DE LA PEÑA AUERBACH

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Pitalúa
García
Damián
57 61 04 27
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
404082868
2. Datos del tutor
Dr
Luis
de la Peña
Auerbach
3. Datos del sinodal 1
M en C
José Luis
Jiménez
Ramírez
4. Datos del sinodal 2
Dr
Enrique
Yepez
Mulia
5. Datos del sinodal 3
Dr
Shahen
Hacyan
Saleryan
6. Datos del sinodal 4
M en C
Ignacio
Campos
Flores
7. Datos del trabajo escrito
El principio de incertidumbre
127 p
2008

DEDICATORIAS Y AGRADECIMIENTOS

Quiero dedicar esta tesis a quienes han estado conmigo y me han apoyado durante mis estudios de licenciatura:

Al Dr. Luis de la Peña Auerbach. Gracias por orientarme en la realización de este trabajo. Para mi es un gran honor haber trabajado bajo su supervisión.

A mi abuela Tere. Gracias por permitirme vivir en tu casa durante cinco años y de esa forma hacer posible mis estudios en la UNAM, por dar todo por mí.

A mi madre y a mi padre. Gracias por haberme educado con amor y por ayudarme siempre. A ustedes debo la vida y quien soy.

A mi hermana. Gracias por ser una excelente amiga, por alegrar mi vida y la de mis padres.

A mi abuela Sofía, que en paz descanse, y a mi abuelo Pancho. Gracias por motivarme a seguir estudiando.

A mis amigos. Gracias por su amistad.

A mi familia, a mis primos y tíos. Gracias por su apoyo.

A la Facultad de Ciencias y a la UNAM. Gracias por ser una excelente institución de educación superior; por permitir que tantos jóvenes tengamos la posibilidad de prepararnos, aun en condiciones económicas limitadas.

A México. Gracias por ser un país de esperanza donde, a pesar de los problemas, la libertad y las oportunidades existen.

Índice general

Introducción	6
Capítulo 1. El principio de incertidumbre	9
1.1 Deducción formal del principio de incertidumbre	9
1.2 Relaciones de incertidumbre para las variables canónicas conjugadas	13
1.3 Relaciones de incertidumbre para la posición y el momento	14
1.3.1 Momentos canónico y cinético	17
1.4 Relaciones de Incertidumbre para el momento angular y el ángulo	20
1.5 Estados coherentes y estados comprimidos	21
Capítulo 2. Interpretaciones del principio de incertidumbre	27
2.1 La interpretación ortodoxa	29
2.1.1 El microscopio de rayos gamma de Heisenberg	30
2.1.2 Otro experimento pensado de Heisenberg	36
2.1.3 La interpretación de Heisenberg	39
2.1.4 Deducción de las relaciones de incertidumbre en términos de un paquete de onda	40
2.1.5 Complementariedad	43
2.1.5.1 El principio de incertidumbre como manifestación matemática de la complementariedad	47
2.1.5.2 Complementariedad y el principio de incertidumbre en el experimento de la doble rendija	50
2.1.6 Estimación de cantidades físicas usando el principio de incertidumbre	57
2.2 La interpretación de ensemble	58
2.2.1 Argumentos de la interpretación de ensemble contra la interpretación ortodoxa	62
2.2.2 ¿Es posible que el principio de incertidumbre se refiera a un ensemble y también a un sistema individual?	63
2.3 Determinismo y causalidad en la mecánica cuántica	64
2.3.1 La interpretación causal de David Bohm	68
2.3.2 La electrodinámica estocástica lineal	71

2.4	¿Puede violarse el principio de incertidumbre?	74
2.4.1	¿Puede violarse el principio de incertidumbre de la interpretación ortodoxa?	74
2.4.1.1	El argumento de Einstein Podolsky y Rosen	79
2.4.1.1.1	El teorema de Bell	82
2.4.2	¿Pueden violarse las relaciones de incertidumbre?	84
 Capítulo 3. La energía y el tiempo en el principio de incertidumbre		86
3.1	El teorema de Pauli	87
3.2	Argumentos que apoyan la existencia de una relación de incertidumbre para la energía y el tiempo	88
3.3	Interpretaciones del principio de incertidumbre para la energía y el tiempo	91
3.4	¿Permite el principio de incertidumbre que se viole el teorema de conservación de la energía?	92
3.5	Propuestas de relaciones de incertidumbre para la energía y el tiempo	95
3.5.1	Desigualdad de Mandelstam y Tamm	96
3.5.1.1	Generalización del principio de incertidumbre a la Mandelstam-Tamm	98
3.5.2	Desigualdad de Eberly y Singh	98
3.5.3	Desigualdades de Uffink y Hilgevoord	100
3.5.4	Desigualdad de Wigner	105
3.6	Decaimiento de un estado inestable	107
3.6.1	Aplicación de la desigualdad de Mandelstam y Tamm.	111
3.6.2	La desigualdad de Wigner para un estado resonante	112
 Conclusiones		116
 Apéndices		119
	Apéndice A	119
	Apéndice B	121
 Referencias		123

Introducción

El principio de incertidumbre tiene implicaciones muy importantes en la teoría cuántica. Impone un cambio radical en los conceptos físicos de la teoría clásica. Incluso se le atribuyen consecuencias filosóficas muy importantes concernientes a la realidad misma de las cosas. Por tales razones el principio de incertidumbre ha sido tema de gran debate entre físicos. Muy comúnmente se le interpreta como sigue: “no pueden medirse simultáneamente la posición y el momento de una partícula con precisión arbitrariamente grande”; o como: “una partícula no tiene posición ni momento definidos simultáneamente”. Éstas son formas particulares de entender el principio de incertidumbre, que corresponden a la interpretación usual de la mecánica cuántica (llamada ortodoxa o de Copenhague); pero existen otras menos conocidas o aceptadas. Por ejemplo, de acuerdo a la interpretación de ensemble, el principio de incertidumbre no impone ninguna condición sobre la incertidumbre o indeterminación simultánea de una sola partícula; mas bien, éste se refiere a las desviaciones estándar de un ensemble estadístico de partículas que se han preparado similarmente.

En el capítulo 1 presentaremos una deducción del principio de incertidumbre usando únicamente el aparato matemático de la mecánica cuántica. Evitaremos adoptar cualquier postura filosófica respecto a su significado. Veremos que el principio de incertidumbre concierne a cualquier par de variables no conmutativas, donde las variables canónicas conjugadas son un caso particular; profundizaremos en las variables de mayor popularidad en la literatura: la posición y el momento.

En el capítulo 2 presentaremos diversas interpretaciones del significado del principio de incertidumbre. Discutiremos los argumentos de cada una de ellas y las dificultades que presentan. En la sección 2.1 presentaremos la interpretación ortodoxa del principio de incertidumbre. Introduciremos el famoso microscopio de rayos gamma de Heisenberg y otro de sus experimentos pensados; veremos que la filosofía de Heisenberg (y de la interpretación ortodoxa) se basa en las conclusiones que se obtienen de este tipo de experimentos.

Presentaremos también la filosofía de Bohr: la complementariedad, cuya expresión matemática son las relaciones de incertidumbre; según la cual la materia presenta características duales que son excluyentes entre sí y complementarias, cuales se presenten depende del experimento diseñado. Expondremos el experimento de la doble rendija como fue discutido por Einstein y Bohr, como un ejemplo de la aplicación del concepto de complementariedad y del principio de incertidumbre; también presentaremos una forma novedosa de analizar este experimento con conclusiones distintas a las de Bohr. Además vamos a presentar algunas deducciones del principio de incertidumbre que son particulares de la interpretación ortodoxa, pero que carecen de la rigurosidad de la expuesta en el capítulo 1. En la sección 2.2 se estudiará la interpretación de ensemble. Se hará notar que ésta no tiene algunas de las desventajas conceptuales que posee la interpretación ortodoxa. Expondremos los argumentos que tiene la interpretación de ensemble contra la interpretación usual. En la sección 2.3 tratamos el tema de determinismo y causalidad en la mecánica cuántica. Se verá que el principio de incertidumbre implica una modificación en el entendimiento de estos conceptos como se tienen en la mecánica clásica. Presentaremos la interpretación causal de David Bohm y la electrodinámica estocástica lineal; según las cuales, las desigualdades de incertidumbre podrían en principio ser violadas bajo ciertas circunstancias no consideradas por la mecánica cuántica. En la sección 2.4 exponemos algunos experimentos pensados que intentaron superar los límites impuestos por el principio de incertidumbre, entendido en la forma de la interpretación ortodoxa, pero ninguno con resultados satisfactorios.

En el capítulo 3 estudiaremos la relación de incertidumbre para la energía y el tiempo. En la sección 3.1 presentamos una demostración del teorema de Pauli según el cual no hay un operador universal de tiempo en la mecánica cuántica. Este hecho implica que no existe una relación de incertidumbre para la energía y el tiempo en términos de las desviaciones estándar de los operadores de la energía y del tiempo. En la sección 3.2 exponemos algunos argumentos en contra de la conclusión de Pauli. Hay dos posturas respecto a la existencia de la relación de incertidumbre para la energía y el tiempo: unos la niegan, otros la afirman. En la sección 3.3

discutimos algunas de las interpretaciones más comunes de la relación de incertidumbre para la energía y el tiempo. En la sección 3.4 discutimos una afirmación común sobre la relación de incertidumbre para la energía y el tiempo, según la cual la energía no siempre se conserva. Demostramos que tal afirmación es incorrecta, y que renunciar a la validez del principio de conservación de la energía es innecesario. En la sección 3.5 vemos cuatro propuestas de un nuevo tipo de relación de incertidumbre para la energía y el tiempo: la de Mandelstam y Tamm, la de Eberly y Singh, la de Uffink y Hilgevoord, y la de Wigner. En la sección 3.6 estudiamos el decaimiento de un estado inestable y aplicamos los formalismos de Mandelstam y Tamm, y de Wigner a este problema. Concluimos que aunque existe una relación entre el ancho de energía de un estado inestable y su tiempo de vida, ésta no es una relación de incertidumbre.

Capítulo 1. El principio de incertidumbre

1.1 Deducción formal del principio de incertidumbre

Una característica muy importante de la mecánica cuántica, la cual no se presenta en la mecánica clásica, es el carácter no conmutativo de algunos pares de operadores. En particular las variables canónicas conjugadas, como la posición y el momento, se representan por operadores que no conmutan. Este hecho implica que las eigenfunciones de uno no lo sean del otro.

El conmutador $[\hat{A}, \hat{B}]$ se define como

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (1.1)$$

Si dos variables de un sistema físico se representan por los operadores \hat{A} y \hat{B} que no conmutan, es decir,

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0,$$

entonces un vector de estado $|\psi\rangle$ no puede ser eigenvector de ambos operadores. Es decir, no pueden satisfacerse simultáneamente las dos ecuaciones de eigenvalores siguientes:

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle, \quad \hat{B}|\psi\rangle = b|\psi\rangle;$$

pues de satisfacerse ambas condiciones se tendría que $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Por lo tanto, si se obtiene un eigenvalor de \hat{A} para el estado $|\psi\rangle$ no puede obtenerse un eigenvalor de \hat{B} para el mismo estado. La conclusión es que, dado un vector de estado, no pueden obtenerse simultáneamente eigenvalores de dos operadores que no conmutan. Veremos que el principio de incertidumbre se presenta como una manifestación de la imposibilidad expuesta y que su origen matemático es que el conmutador de los operadores no sea nulo.

Presentaremos a continuación una deducción matemática rigurosa y formal del principio de incertidumbre, para lo cual utilizaremos la notación de Dirac. Considere la función (de la Peña, 2006, pp.222-223)

$$J(\alpha) = \left\langle (\alpha\hat{A} + i\hat{B})^\dagger (\alpha\hat{A} + i\hat{B}) \right\rangle, \quad (1.2)$$

donde α es un número complejo. Usando el hecho de que $\langle \hat{C}^\dagger \hat{C} \rangle = \langle \psi | \hat{C}^\dagger \hat{C} | \psi \rangle = \|\hat{C}\psi\|^2 \geq 0$

para cualquier operador \hat{C} y para cualquier vector de estado $|\psi\rangle$ se tiene que

$$J(\alpha) \geq 0. \quad (1.3)$$

Desarrollando la expresión (1.2) y usando el hecho de que los operadores deben ser hermitianos, $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ y $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$, para que representen variables físicas, obtenemos

$$J(\alpha) = |\alpha|^2 \langle \hat{A}^2 \rangle + i\alpha^* \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - i\alpha \langle \hat{B}\hat{A} \rangle + \langle \hat{B}^2 \rangle. \quad (1.4)$$

Expresamos al parámetro en sus partes real e imaginaria $\alpha = a + ib$, con a y b reales

$$J(\alpha) = (a^2 + b^2) \langle \hat{A}^2 \rangle + (b + ia) \langle \hat{A}\hat{B} \rangle + (b - ia) \langle \hat{B}\hat{A} \rangle + \langle \hat{B}^2 \rangle. \quad (1.5)$$

Tomando la derivada con respecto a $\alpha = a + ib$,

$$\frac{d}{d\alpha} = \frac{\partial}{\partial a} + i \frac{\partial}{\partial b}, \quad (1.6)$$

e igualando a cero para calcular el valor α_{\min} que minimiza la función J , tenemos

$$2(a + ib) \langle \hat{A}^2 \rangle + 2i \langle \hat{A}\hat{B} \rangle = 0. \quad (1.7)$$

Por lo que el valor buscado es

$$\alpha_{\min} = -i \frac{\langle \hat{A}\hat{B} \rangle}{\langle \hat{A}^2 \rangle}. \quad (1.8)$$

Sustituyendo este valor en (1.4), después de arreglar los términos, y recordando la desigualdad (1.3), tenemos

$$J(\alpha_{\min}) = \langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{A}\hat{B} \rangle \langle \hat{B}\hat{A} \rangle \geq 0. \quad (1.9)$$

Con lo que obtenemos la siguiente desigualdad, la cual proporciona la cota máxima del lado derecho (ya que en su deducción se obtuvo el mínimo de la función J dada en la expresión (1.9)):

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \langle \hat{A}\hat{B} \rangle \langle \hat{B}\hat{A} \rangle. \quad (1.10)$$

Definimos el anticonmutador $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ como

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (1.11)$$

Utilizamos las siguientes identidades entre los operadores:

$$\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2}\{\hat{A}, \hat{B}\}, \quad (1.12)$$

$$\hat{B}\hat{A} = \frac{1}{2}\{\hat{A}, \hat{B}\} - \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}], \quad (1.13)$$

en la desigualdad (1.10) y utilizando las siguientes propiedades de los conmutadores y anticonmutadores:

$$\langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle^\dagger = \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle, \quad (1.14)$$

$$\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^\dagger = -\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle, \quad (1.15)$$

se obtiene

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 + \frac{1}{4} \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle^2. \quad (1.16)$$

Definimos las desviaciones de los operadores como:

$$\Delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle, \quad (1.17)$$

$$\Delta\hat{B} \equiv \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle.$$

Es fácil ver que

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]. \quad (1.18)$$

También puede comprobarse que la relación entre los valores esperados de los anticonmutadores es la siguiente:

$$\langle \{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\} \rangle = \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle. \quad (1.19)$$

La variancia (o varianza) o dispersión del operador \hat{O} se define como:

$$\langle (\Delta\hat{O})^2 \rangle = \langle (\hat{O} - \langle \hat{O} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2. \quad (1.20)$$

Remplazando los operadores \hat{A} y \hat{B} por sus desviaciones $\Delta\hat{A}$ y $\Delta\hat{B}$ en la expresión (1.16), y sustituyendo en ésta las igualdades (1.18) y (1.19), obtenemos la desigualdad que estábamos buscando

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle|^2. \quad (1.21)$$

La desigualdad anterior proporciona la cota inferior máxima para las dispersiones de los operadores \hat{A} y \hat{B} , respectivamente; ésta fue obtenida primeramente por Schrödinger en 1930. También pueden obtenerse relaciones de incertidumbre para tres (o más) operadores hermitianos; una forma de hacerlo es utilizando tres vectores unitarios en un espacio complejo de Hilbert, representado cada uno en términos de un operador hermitiano (Synge, 1972).

Un análisis como el dado arriba en términos de la función $J(\alpha)$, pero considerando al parámetro α como un número real en vez de uno complejo nos permite obtener la siguiente desigualdad (de la Peña 2006, pp. 222-223):

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2. \quad (1.22)$$

Esta expresión fue obtenida por Robertson (1929).

El principio de incertidumbre se representa matemáticamente por las desigualdades (1.21) o (1.22). La expresión (1.21) nos da una cota inferior mayor o igual que la proporcionada por la (1.22); la primera es de carácter más fuerte que la segunda. Esto es de esperarse, ya que en la deducción de la primera se consideró al parámetro α como un número complejo, mientras que

en la deducción de la segunda α es solo un número real. Sin embargo, ambas son válidas ya que como el segundo término del lado derecho de (1.21) es positivo entonces se satisface que

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 + \frac{1}{4} \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle - 2 \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \geq \frac{1}{4} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle.$$

1.2 Relaciones de incertidumbre para las variables canónicas conjugadas

Consideremos el caso de las variables canónicas conjugadas. Si un par de variables representadas por los operadores \hat{A} y \hat{B} satisfacen la siguiente relación de conmutación:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar,$$

entonces se dice que son canónicas conjugadas. Para las variables canónicas conjugadas, la relación de incertidumbre (en la forma de Robertson) es

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (1.23)$$

Ejemplos de variables canónicas son: la posición \hat{x} y el momento \hat{p} , el ángulo $\hat{\phi}$ en un plano y la proyección de momento angular \hat{L}_z perpendicular a dicho plano; incluso el número de fotones \hat{N} y la fase $\hat{\phi}$ de un campo electromagnético¹, etc. Existe mucha controversia sobre si existe una variable canónica conjugada a la energía, la cual es representada por un operador hamiltoniano; un fuerte candidato parece ser el tiempo, pero la construcción de un operador de tiempo en mecánica cuántica tiene diversas dificultades; discutiremos al respecto en el capítulo 3.

¹ Partiendo de la comúnmente aceptada relación de conmutación $[\hat{N}, \hat{\phi}] = -i$, Louisell (1963) obtuvo que los elementos de matriz de $\hat{\phi}$ tienen valores indefinidos. Solo si el número de fotones es grande la relación de conmutación anterior es válida y se obtiene que

$$\langle (\Delta\hat{N})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{\phi})^2 \rangle \geq 1/4.$$

Louisell (1963) propuso otra forma para la desigualdad anterior con el fin de evitar dichas dificultades.

1.3 Relaciones de incertidumbre para la posición y el momento

Ahora veamos la forma que toma la desigualdad (1.21) para el caso de los operadores de posición y de momento. El conmutador vale

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (1.24)$$

La relación de incertidumbre queda

$$\langle (\Delta\hat{x})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{p})^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} + \frac{1}{4} |\langle \{\hat{x}, \hat{p}\} \rangle - 2\langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle|^2. \quad (1.25)$$

Notemos que

$$\langle \{\hat{x}, \hat{p}\} \rangle - 2\langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle = \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle - 2\langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle = 2\Gamma(\hat{x}, \hat{p}),$$

en donde $\Gamma(\hat{A}, \hat{B})$ es la correlación de \hat{A} y \hat{B} , definida como

$$\Gamma(\hat{A}, \hat{B}) = \frac{1}{2} \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle. \quad (1.26)$$

Por lo tanto, el segundo término del lado derecho de (1.25) es la norma al cuadrado de la correlación de \hat{x} y \hat{p} , $|\Gamma(\hat{x}, \hat{p})|^2$.

De (1.25) se obtiene directamente que

$$\langle (\Delta\hat{x})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{p})^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (1.27)$$

La anterior, es la forma de la desigualdad de Heisenberg en la forma de Robertson (expresión (1.22)), y proporciona un límite al producto de las desviaciones estándar de los operadores de posición y momento². Ésta fue obtenida en primera instancia por Kennard en 1927; el cálculo es reproducido por Heisenberg en sus conferencias de Chicago (Heisenberg, 1930, pp. 15-19).

² Sin embargo, Hilgevoord y Uffink argumentan que la expresión matemática del principio de incertidumbre en términos de desviaciones estándar, o sea en la forma (1.27), es inadecuada porque éstas no representan correctamente el ancho de una función de onda arbitraria en los espacios de posición y de momento. Proponen una forma alternativa de expresar matemáticamente el principio de incertidumbre (Hilgevoord y Uffink, 1983; 1985). En la sección 3.5.3 presentamos esta propuesta.

Heisenberg obtuvo primeramente la igualdad, para el caso particular de la función de onda gaussiana, en el artículo donde introdujo el principio de incertidumbre (Heisenberg, 1927).

Como ya explicamos la desigualdad (1.27) es de carácter menos fuerte que la (1.25), pero es más sencilla y popular, y es válida en general. En lo que sigue del texto nos referiremos a ésta como la relación de incertidumbre para la posición y el momento, tal como aparece generalmente en la literatura.

Puede comprobarse que el segundo término de la desigualdad (1.25) se anula en los estados de mínima dispersión, como en la función de onda gaussiana y el oscilador armónico en su estado base. Esto es de esperarse ya que para estos sistemas la desigualdad (1.27) se convierte en una igualdad, por lo tanto el segundo término del lado derecho de (1.25) se anula en estos casos. El primer término de (1.25) es el que impone la condición de que el producto de las dispersiones del momento y la posición siempre sea mayor que cero; éste es una constante positiva, mientras que el segundo término puede anularse a veces. Como el primer término se debe a que el valor del conmutador $[\hat{x}, \hat{p}]$ es distinto de cero, concluimos que el origen de la relación de incertidumbre entre posición y momento se debe al carácter anticonmutativo de \hat{x} y \hat{p} . Analicemos en detalle por qué $[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0$.

Deduzcamos la relación de conmutación $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Para esto usemos la forma de los operadores en el espacio de configuración (en el espacio de momentos el resultado es el mismo):

$$\hat{x} = x, \tag{1.28}$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}; \tag{1.29}$$

entonces,

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\psi = x\hat{p}\psi - (\psi\hat{p}x + x\hat{p}\psi) = -\psi\hat{p}x = i\hbar\psi \frac{\partial x}{\partial x} = i\hbar\psi. \quad (1.30)$$

Vemos que se obtiene un resultado distinto de cero porque un operador, el operador \hat{p} , deriva con respecto a la variable dinámica que representa el otro operador, el operador \hat{x} (en el espacio momental se invierten los papeles, \hat{x} deriva con respecto a p y \hat{p} solo es p , por lo que se mantiene el resultado). Debido a su forma (1.29), el operador de momento lineal es el generador de traslaciones espaciales infinitesimales³. Si el operador \hat{p} fuera una derivada parcial con respecto a otra variable, por ejemplo el tiempo, y no con respecto a x , entonces fácilmente puede

³Considérese un sistema cuántico representado por la función de onda $\psi(x)$ (trataremos el caso en una dimensión, en más dimensiones el tratamiento es análogo). Sea $\hat{t}(x_0)$ un operador que traslada al sistema en la cantidad x_0 . El sistema trasladado una distancia x_0 se representa por la función de onda $\psi(x - x_0)$; tenemos entonces que

$$\hat{t}(x_0)\psi(x) = \psi(x - x_0).$$

Desarrollando la función $\psi(x - x_0)$ en su serie de Taylor alrededor de x_0 obtenemos

$$\psi(x - x_0) = \psi(x) - x_0 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) + \frac{x_0^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \dots = e^{-x_0 \frac{\partial}{\partial x}} \psi(x),$$

o en términos del operador de momento

$$\psi(x - x_0) = e^{-\frac{ix_0 \hat{p}}{\hbar}} \psi(x);$$

o sea,

$$\hat{t}(x_0) = e^{-\frac{ix_0 \hat{p}}{\hbar}}.$$

Si trasladamos al sistema en una cantidad infinitesimal δx se tiene que

$$\left(1 - i\delta x \frac{\hat{p}}{\hbar}\right) \psi(x) = \psi(x - \delta x).$$

Por lo tanto, \hat{p} es el generador de traslaciones espaciales infinitesimales (Sakurai, 1994, pp. 46-50). Podemos ver también que el operador de posición es el generador de traslaciones infinitesimales en el espacio de momentos. Partiendo de la relación de conmutación $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ se obtiene que en el espacio de momentos, $\hat{p} = p$ y $\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$; entonces, en una traslación infinitesimal δp en el momento se obtiene

$$\left(1 + i\delta p \frac{\hat{x}}{\hbar}\right) \psi(p) = \psi(p - \delta p).$$

comprobarse que se tendría $[\hat{x}, \hat{p}] = 0$. Por lo tanto, es fundamental la forma (1.29) del operador de momento en el origen de la relación de incertidumbre entre posición y momento.

La relación de incertidumbre para momento y posición se debe a que el conmutador $[\hat{x}, \hat{p}]$ es distinto de cero. El conmutador adquiere su forma debido a la expresión que tiene el operador de

momento: $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Ahora nos preguntamos: ¿por qué tiene tal forma el operador de

momento? Para averiguar esto partimos del hecho de que los sistemas cuánticos estacionarios obedecen la ecuación de Schrödinger:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x) = E \psi(x). \quad (1.31)$$

Podemos hallar una analogía con la ecuación de la energía:

$$\frac{p^2}{2m} + V = E, \quad (1.32)$$

de donde asociamos el operador de momento como $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ (tomar el signo positivo

también sería válido; en este caso habría un cambio de signo en el conmutador $[\hat{x}, \hat{p}]$, pero no así en la relación de incertidumbre). Entonces, resolver la pregunta de por qué existe una relación de incertidumbre para la posición y el momento, puede reducirse a responder por qué los sistemas cuánticos se rigen por la ecuación de Schrödinger, pregunta para la cual la física actual no tiene una respuesta de aceptación generalizada. Sin embargo, existen algunas propuestas para explicar el origen de la ecuación de Schrödinger. Por ejemplo, Luis de la Peña presentó una derivación de ésta partiendo de la teoría de los procesos estocásticos (de la Peña, 1967; 1969).

1.3.1 Momentos canónico y cinético

El momento cinético y el momento canónico describen conceptos distintos aunque son iguales bajo ciertas circunstancias. En mecánica cuántica, el momento canónico \hat{p} está expresado por

la ecuación (1.29), es el generador de traslaciones infinitesimales y es el que satisface la relación de conmutación (1.24); por lo tanto, éste es el que satisface la relación de incertidumbre (1.27).

Por otro lado, el momento cinético describe el movimiento de una partícula o de un ensemble de partículas; se define como el producto de la masa y de la velocidad; en el caso cuántico la velocidad toma el papel de la derivada temporal del operador de posición. Aunque en muchas situaciones la distinción entre estos dos tipos de momento carece de importancia puesto que son lo mismo, en otras situaciones su diferencia se hace evidente. Por ejemplo, en el caso de una partícula en un campo magnético, el momento canónico \hat{p} es la suma del momento cinético $m\hat{v}$ y del producto de la carga por el vector potencial $q\hat{A}$ (estamos usando unidades del SI, en unidades electrostáticas se divide entre la velocidad de la luz) que describe al campo magnético,

$$\hat{p} = m\hat{v} + q\hat{A}. \quad (1.33)$$

En este caso, el momento cinético y el momento canónico son distintos. El primero describe el movimiento de la partícula y es invariante ante transformaciones de norma; en el caso electromagnético $A \rightarrow A + \nabla\Lambda$, las cuales describen todas correctamente al campo magnético, y por lo tanto la dinámica de la partícula. Por otro lado, el momento canónico no es invariante ante las transformaciones de norma; sin embargo, es éste y no el momento cinético el que es una constante de movimiento, siempre que se satisfaga la siguiente condición:

$$\nabla[q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})] = 0. \quad (1.34)$$

Esto se debe a que el lagrangiano de una partícula con carga q y velocidad \vec{v} en un campo magnético y en un campo eléctrico, descritos por un vector potencial \vec{A} y un potencial escalar ϕ , es

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}).$$

Entonces, de acuerdo a las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

se obtiene

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v} + q\vec{A}) = -\nabla [q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})].$$

Vemos que si se satisface la condición (1.34) entonces el momento canónico $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$ es una constante de movimiento. Análogamente en mecánica cuántica.

Por tal motivo, el momento canónico \hat{p} se considera como la suma de dos términos: uno el momento cinético $m\hat{v}$ y otro el que es llamado momento potencial, o momento almacenado $q\hat{A}$ (Semon y Taylor, 1996). Al momento canónico se le llama también el momento total, haciendo alusión al caso de la energía total, que es la suma de la energía cinética y de la energía potencial. Tal como en el caso de la energía potencial, el momento potencial tiene cierta arbitrariedad; la energía potencial tiene un cero arbitrario y el momento potencial tiene una transformación de norma arbitraria.

Si consideramos que el campo magnético es el campo físico real, entonces deberíamos tomar al momento cinético como el que representa al sistema físico. Por otro lado, si consideramos que es el vector potencial el campo físico real, entonces el momento canónico es el que representa al momento del sistema. Sin embargo, el flujo de las partículas se describe mediante el momento cinético y este no cambia con una transformación de norma; por lo tanto, son el momento cinético y el campo magnético los que representan al sistema físico.

Como momento canónico y cinético no son lo mismo, nos preguntamos: ¿cómo cambian los conmutadores colocando los momentos cinéticos en lugar de los momentos canónicos?, y

¿cómo cambia la desigualdad de Heisenberg? La respuesta resulta sumamente sencilla si hacemos una suposición sobre el vector potencial. Tenemos que

$$[\hat{x}, m\hat{v}] = [\hat{x}, \hat{p} - q\hat{A}] = [\hat{x}, \hat{p}] - q[\hat{x}, \hat{A}].$$

En el caso particular en el que el vector potencial depende únicamente de las coordenadas, se tiene que

$$[\hat{x}, \hat{A}(\hat{x})] = 0; \quad (1.35)$$

por lo tanto,

$$[\hat{x}, m\hat{v}] = [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Concluimos que en este caso se sigue satisfaciendo la desigualdad (1.27) ya sea para el momento canónico o para el momento cinético. Aunque como $\hat{A} = \hat{A}(\hat{x})$, es de esperarse que \hat{A} y \hat{x} estén correlacionados; por lo tanto, en general no se cumple que

$$\Gamma(\hat{x}, \hat{A}) \equiv \langle \{\hat{x}, \hat{A}\} \rangle - 2\langle \hat{x} \rangle \langle \hat{A} \rangle = 0.$$

Entonces, la relación de incertidumbre en la forma de Schrödinger, expresión (1.25), no es necesariamente la misma.

1.4 Relaciones de incertidumbre para el momento angular y el ángulo

Aunque el momento angular y el ángulo son variables canónicas conjugadas porque satisfacen que $[\hat{\phi}, \hat{L}_z] = i\hbar$, la relación de incertidumbre :

$$\langle (\Delta \hat{L}_z)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{\phi})^2 \rangle \geq \hbar^2 / 4 \quad (1.36)$$

no es aplicable en este caso. La razón es la siguiente. Como la variable angular se restringe a valores en el intervalo finito: $[0, 2\pi]$, entonces $\langle (\Delta \hat{\phi})^2 \rangle$ tiene un valor máximo finito; éste es igual a $\pi^2 / 3$ y corresponde a una distribución uniforme en $\hat{\phi}$ (Judge, 1963). Si $\langle (\Delta \hat{L}_z)^2 \rangle$ es cero,

entonces (como $\langle(\Delta\phi)^2\rangle$ se mantiene finito) el lado izquierdo de la desigualdad anterior es cero; por lo tanto ésta no se satisface. Judge y Lewis (1963) dedujeron una forma consistente de la relación de incertidumbre entre posición angular y momento angular, ésta es:

$$\langle(\Delta\hat{L}_z)^2\rangle \frac{\langle(\Delta\phi)^2\rangle}{1 - \frac{3}{\pi^2}\langle(\Delta\phi)^2\rangle^2} \geq 0.15\hbar. \quad (1.37)$$

Vemos que si $\langle(\Delta\hat{L}_z)^2\rangle = 0$ entonces la varianza de ϕ adquiere su valor máximo:

$$\langle(\Delta\phi)^2\rangle = \frac{\pi}{\sqrt{3}}; \text{ entonces, } \frac{\langle(\Delta\phi)^2\rangle}{1 - \frac{3}{\pi^2}\langle(\Delta\phi)^2\rangle^2} \rightarrow \infty \text{ por lo tanto se satisface la desigualdad}$$

propuesta.

1.5 Estados coherentes y estados comprimidos

Una aplicación importante del principio de incertidumbre es en los estados de mínima dispersión, es decir en los que se cumple la igualdad en (1.23).

Un ejemplo de sistema con mínima dispersión es un paquete de osciladores armónicos con una distribución gaussiana, estos son los llamados estados coherentes del oscilador armónico. En este caso, las variables conjugadas son la posición \hat{x} y el momento \hat{p} de las partículas sometidas al potencial del oscilador armónico:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega x^2, \quad (1.38)$$

el cual consideramos unidimensional para simplificar la exposición, donde m es la masa de las partículas y ω la frecuencia de oscilación. La distribución inicial gaussiana de partículas centrada en x_0 corresponde a la función de onda

$$\psi(x,0) = A \exp\left[-a(x-x_0)^2\right]. \quad (1.39)$$

Si la dispersión inicial de x es la adecuada, el paquete se mantendrá oscilando alrededor de su centro sin modificar su forma, y la dispersión de la distribución se mantendrá constante. Esta condición se satisface si

$$a = \frac{m\omega}{2\hbar}. \quad (1.40)$$

La función de onda que se obtiene al resolver la ecuación de Schrödinger es

$$\psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0 \cos \omega t)^2 - i\left(\frac{1}{2}\omega t + \frac{m\omega}{\hbar}x_0 x \sin \omega t - \frac{m\omega}{4\hbar}x_0^2 \sin 2\omega t\right)\right] \quad (1.41)$$

La densidad de partículas es

$$\rho(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}(x-x_0 \cos \omega t)^2\right]. \quad (1.42)$$

Ésta corresponde a una distribución gaussiana cuyo centro oscila con amplitud x_0 y frecuencia ω , de tal forma que

$$\langle \hat{x} \rangle = x_0 \cos \omega t. \quad (1.43)$$

Puede comprobarse que las oscilaciones del paquete siguen en promedio un movimiento clásico como se aprecia en el siguiente resultado:

$$\langle \dot{\hat{x}} \rangle + \omega^2 \langle \hat{x} \rangle = 0. \quad (1.44)$$

Este paquete tiene la propiedad de que tiene la mínima dispersión, pues se tiene que

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{1}{2}\hbar m\omega, \quad (1.45)$$

resultando así la mínima dispersión que permite el principio de incertidumbre:

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (1.46)$$

Además, las dispersiones de \hat{x} y \hat{p} no varían en el tiempo. Los estados coherentes de un oscilador armónico tienen la propiedad de que tienen la mínima dispersión, pues satisfacen la igualdad (1.46), además de que sus dispersiones no varían en el tiempo. Los estados del oscilador armónico que tienen mínima dispersión, pero sus dispersiones varían en el tiempo se llaman estados comprimidos o prensados ('squeezed states' en inglés) de mínima dispersión.

La energía media del paquete es

$$\langle \hat{E} \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2. \quad (1.47)$$

El segundo término equivale a la energía de un oscilador armónico clásico con amplitud x_0 la cual se anula cuando la amplitud tiende a cero. El primer término corresponde a la energía del punto cero y es la energía mínima del sistema, ésta se mantiene aun cuando la amplitud de oscilación es cero. Vemos que debido a la energía del punto cero es imposible reducir arbitrariamente la energía de los osciladores aun cuando se detengan las oscilaciones en todos los modos de vibración (a todas las frecuencias). Esto es una manifestación del principio de incertidumbre que impide que los osciladores puedan tener reposo absoluto.

Ahora daremos una breve exposición sobre los estados coherentes en la electrodinámica cuántica. Para esto introducimos la base del número de fotones $|n\rangle$ y los operadores de aniquilación \hat{a} y creación \hat{a}^\dagger , definidos como

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega x + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega x - i\hat{p}), \quad (1.48)$$

y que satisfacen las siguientes relaciones

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.49)$$

De las expresiones anteriores se puede entender porque el nombre de estos operadores, pues \hat{a} aplicado a un estado de n fotones produce un estado de $n-1$ fotones, y \hat{a}^\dagger aplicado a un

estado de n fotones produce un estado de $n+1$ fotones; es decir, \hat{a} aniquila un fotón y \hat{a}^\dagger crea un fotón.

En la electrodinámica cuántica el campo cuantizado tiene la forma $\hat{G} = f\hat{a}(\omega) + f^*\hat{a}^\dagger(\omega)$, donde en general f depende de x y t . Estamos considerando únicamente la componente de Fourier de frecuencia ω del campo \hat{G} , el cual puede ser un campo eléctrico o magnético.

Una forma de definir los estados coherentes $|\alpha\rangle$ es la siguiente:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (1.50)$$

es decir, los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación. Los estados definidos de esta forma se llaman estados coherentes de Glauber.

En la base de número, el estado coherente tiene la siguiente expresión:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.51)$$

Otra forma de definir el estado coherente $|\alpha\rangle$ es como sigue

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})|0\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2 + \alpha\hat{a}^\dagger)|0\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (1.52)$$

donde se ha introducido el operador de desplazamiento $\hat{D}(\alpha)$ definido como

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) = \exp(-|\alpha|^2/2 + \alpha\hat{a}^\dagger). \quad (1.53)$$

Vemos que el estado coherente $|\alpha\rangle$ surge a partir del estado de cero fotones, el estado del vacío, a partir de aplicar el operador de desplazamiento.

Otra forma de definir a los estados coherentes es como lo hicimos al inicio de esta sección: los estados coherentes son los que tienen mínima dispersión, y que además tienen dispersión

independiente del tiempo, si su dispersión varía en el tiempo hablamos de los estados comprimidos de mínima dispersión (de la Peña, 2007, capítulo 11; Howard y Roy, 1987).

El estado base del oscilador armónico $|0\rangle$ con energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$ y cualquier estado coherente $|\alpha\rangle$ tienen mínimas dispersiones que valen lo siguiente:

$$\Delta x_0 = \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \Delta p_0 = \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}. \quad (1.54)$$

En términos de las variables adimensionales $\hat{X} = (m\omega/\hbar)^{1/2} \hat{x}$ y $\hat{Y} = (1/m\omega\hbar)^{1/2} \hat{p}$, llamadas las variables de cuadratura del oscilador, se tiene que las dispersiones de cuadratura para el estado base del oscilador y para los estados coherentes son iguales: $\Delta X_0 = \Delta Y_0 = \frac{1}{2}$.

Los estados comprimidos se definen como estados del oscilador armónico que cumplen que uno de sus operadores canónicos tiene una dispersión menor que la de un estado coherente, mientras que el otro operador canónico tiene una dispersión mayor. No es una característica esencial que el producto de ambas dispersiones sea la mínima permitida por el principio de incertidumbre, aunque una clase de estados comprimidos satisface esta condición extra, es decir, que son de mínima dispersión. Los estados comprimidos de mínima dispersión son los más discutidos en la literatura (Ekert y Knight, 1989).

Las dispersiones de posición Δx_s y de momento Δp_s de los estados comprimidos son distintas, y si son de mínima dispersión pueden expresarse como

$$\Delta x_s = e^{-r} \Delta x_0, \quad \Delta p_s = e^r \Delta p_0. \quad (1.55)$$

Vemos que el producto de ambas dispersiones es el mismo que para el estado base del oscilador, es decir, el mínimo valor que permite el principio de incertidumbre. Sin embargo una de las dispersiones es menor que la otra si el parámetro r es distinto de la unidad.

Los estados comprimidos se discuten usualmente en el contexto de los campos cuantizados de luz. Se espera que los estados comprimidos puedan usarse en comunicación óptica para producir una forma más eficiente de transmitir información. También pueden ser muy importantes en experimentos de detección de ondas gravitacionales usando interferómetros ópticos (Muñoz-Tapia, 1993).

Capítulo 2. Interpretaciones del principio de incertidumbre.

Existen diversas interpretaciones de la mecánica cuántica y particularmente del principio de incertidumbre. Hay varias formas de clasificarlas. Una clasificación general es la dada por Mario Bunge (Bunge, 1956), de acuerdo a la respuesta que se da a la pregunta: “¿cuál es la naturaleza y origen de las relaciones de incertidumbre de Heisenberg?”. Obtiene dos grupos principales, que responden de la siguiente manera:

1. Las relaciones de Heisenberg son indeterminaciones, es decir, son propias al sistema observado.
2. Las relaciones de Heisenberg son incertidumbres; se deben a un conocimiento imperfecto de las cosas, no a su naturaleza propia.

Como reconoce Schrödinger (1949): según la interpretación 1, es la naturaleza del sistema no tener valores definidos hasta que se midan; según la interpretación 2, el sistema puede tener valores definidos pero no los conocemos.

Otra clasificación se refiere al tipo de limitación que impone el principio de incertidumbre (Jammer, 1974, pp. 79). Según este criterio, el principio de Heisenberg se interpreta como:

1. Un principio de imposibilidad de acuerdo al cual es imposible medir simultáneamente variables conjugadas.
2. Un principio de limitaciones en la precisión de mediciones, de acuerdo al cual la certidumbre de una variable previamente conocida disminuye al medir su conjugada.
3. Un principio estadístico que relaciona las dispersiones de una secuencia de mediciones de las variables conjugadas.

4. Un principio matemático que expresa la dualidad o complementariedad de los fenómenos cuánticos.

La clasificación más general es quizá en términos de las dos grandes interpretaciones de la mecánica cuántica:

1. La interpretación ortodoxa, también llamada interpretación de Copenhague.
2. La interpretación de ensemble.

Su diferencia radica en el grado de conocimiento que se le atribuye al vector de estado (o función de onda). Según la interpretación ortodoxa, el vector de estado provee la descripción más completa de un sistema individual (una partícula). Además postula que en el proceso de medición éste se colapsa a un valor único y definido. Por otro lado, la interpretación de ensemble considera que el vector de estado representa el conocimiento que se tiene de un ensemble estadístico, pero no de un sistema individual. En el proceso de medición, el colapso del vector de estado significa que nuestro conocimiento de él ha cambiado, mas no que el propio sistema ha sufrido tal cambio discontinuo e inmediato.

En el proceso de medición radica una de las dificultades de interpretación en la mecánica cuántica. Según la interpretación ortodoxa, antes de la medición la propiedad a medir del sistema físico se encuentra distribuida en su conjunto de eigenvalores; después de la medición la propiedad medida se colapsa a un único eigenvalor. El observador juega entonces un papel activo muy importante en la mecánica cuántica, ya que con su observación ha alterado el estado del sistema observado. Las anteriores dificultades son evitadas por la interpretación de ensemble. Según ésta, el sistema a medir se encuentra en un estado definido antes de la medición; y el colapso del vector de estado únicamente representa un cambio en el conocimiento que se tiene de él. En esta interpretación el observador ya no juega un papel central como lo hace en la interpretación ortodoxa.

Según la interpretación de ensemble, el principio de incertidumbre se refiere a desviaciones estándar (definidas en alguna forma apropiada) de las variables conjugadas en la preparación de un ensemble estadístico. Pero cada sistema individual tiene valores definidos de estas variables, tal como afirman las interpretaciones de variables ocultas y las interpretaciones causales de la mecánica cuántica; por tal motivo, la interpretación de ensemble es consistente con dichas interpretaciones, aunque también es consistente con interpretaciones acausales y con interpretaciones que no incluyen variables ocultas. Por otro lado, la interpretación ortodoxa no es consistente con las interpretaciones de variables ocultas ni con las interpretaciones causales.

En lo que sigue de éste capítulo estudiaremos las diversas interpretaciones del principio de incertidumbre. Trataremos en la sección 2.1 la interpretación ortodoxa. En la sección 2.2 presentaremos la interpretación de ensemble; discutiremos las diferencias entre ésta y la interpretación ortodoxa y los argumentos a favor de una y de otra. Algunas interpretaciones causales, como la de Bohm y la electrodinámica estocástica lineal, serán discutidas en la sección 2.3. Concluiremos el capítulo con la sección 2.4, donde presentaremos algunos puntos de vista sobre si el principio de incertidumbre puede ser violado.

2.1 La interpretación ortodoxa

La interpretación ortodoxa, o también llamada interpretación de Copenhague, es la interpretación usual de la mecánica cuántica. Sus fundadores fueron Bohr, Heisenberg, Pauli, Born, entre otros. Aunque existen amplias variaciones de interpretación dependiendo del autor, comparten los principales elementos. La interpretación ortodoxa se basa en dos postulados (Bohm, 1952):

- (1) La función de onda con su interpretación probabilística provee la especificación más completa posible del estado de un sistema individual.
- (2) El proceso de transferencia de un solo cuanto entre sistema observado y aparato de medición es impredecible, incontrolable e inanalizable.

Una versión más actual y ortodoxa es (Laloë, 2001):

- (1) El vector de estado $|\psi\rangle$ provee la descripción más completa de un sistema individual y su evolución está dada por la ecuación de Schrödinger.
- (2) En el proceso de medición el vector de estado se colapsa a un valor único y definido. Tal colapso es impredecible, incontrolable e inanalizable.

Aunque el postulado (2) se expresó arriba de dos formas distintas, ambas afirman que existe un cambio discontinuo en el estado del sistema al efectuarse una medición sobre él, el cual no está descrito por la ecuación de Schrödinger.

Según la interpretación ortodoxa, las relaciones de Heisenberg son indeterminaciones y no incertidumbres, ya que el límite impuesto en el conocimiento simultáneo de las variables canónicas no puede superarse de ninguna forma. Como reconoce Bunge, se refiere a un indeterminismo empírico y no ontológico porque fuera del plano experimental no puede afirmarse la existencia de las cosas (Bunge, 1956).

2.1.1 El microscopio de rayos gamma de Heisenberg

Heisenberg narra (Wheeler y Zurek 1983, pp. 56-57) como surgió su principio de incertidumbre y su artículo "El contenido físico de la cinemática y la mecánica cuántica" (Heisenberg, 1927):

Aunque en 1926 el formalismo matemático de la mecánica cuántica estaba prácticamente completo, existían aun problemas en la forma de aplicar el formalismo a problemas específicos, pues no había una relación clara entre los elementos matemáticos de la teoría y los elementos físicos de la realidad que pretendía describir. Los resultados eran aparentemente contradictorios; algunas veces debía usarse un modelo de partículas y otras uno de ondas. Heisenberg no estaba de acuerdo con la formulación ondulatoria de Schrödinger pues creía que impediría se comprendiera correctamente la teoría cuántica. En las discusiones que Heisenberg sostenía

noche tras noche en Copenhague con Bohr durante los primeros meses de 1927 se pretendía aclarar las ideas que debían aplicarse en la nueva teoría. Tras no obtener resultados positivos Bohr decidió irse de vacaciones a las montañas nevadas de Noruega. En ausencia de Bohr, Heisenberg aclaró sus ideas y escribió una larga carta a su amigo Pauli exponiéndole su trabajo sobre el principio de incertidumbre. Para Heisenberg ésta era la herramienta que permitiría entender las paradojas que existían sobre la teoría cuántica. A su relación de incertidumbre le atribuyó, en el contexto de la teoría cuántica, un papel análogo al concepto de simultaneidad de Einstein en su teoría de la relatividad; ambas son ideas que modificaron radicalmente la forma de entender los conceptos clásicos. Pauli apoyo entusiastamente las ideas de Heisenberg y lo motivó a que presentara su artículo. A su regreso, Bohr discutió con Heisenberg el significado de sus ideas. Bohr estaba de acuerdo en que la relación de Heisenberg permitiría resolver los problemas conceptuales de la teoría cuántica, pero quiso darle un significado que iba más allá del dado por Heisenberg. Para Bohr, las relaciones de incertidumbre de Heisenberg eran una manifestación matemática de su concepto de complementariedad, en el cual había pensado desde hacía algún tiempo y que logró aclarar durante sus vacaciones en Noruega. Bohr creía que la deducción de la relación de incertidumbre en el experimento pensado de Heisenberg no era suficientemente rigurosa, ya que no estaba considerando la apertura angular de su microscopio de rayos gamma. Tras intensa discusión entre Bohr y Heisenberg, mediada por Pauli, Heisenberg accedió a añadirle una nota al final de su artículo donde decía que Bohr daría una deducción más formal en su microscopio de rayos gamma; en dicho artículo Bohr introduciría su concepto de complementariedad.

Heisenberg describió en su artículo un experimento pensado para determinar la posición de un electrón. Su conclusión fue que no pueden medirse simultáneamente la posición y el momento del electrón con incertidumbres arbitrariamente pequeñas. Éste fue el primer enunciado del principio de incertidumbre.

En el experimento de Heisenberg se utiliza un microscopio que funciona con rayos gamma, debido a que éstos tienen la energía necesaria (longitud de onda suficientemente pequeña) para poder distinguir el electrón. Se manda un fotón a través del microscopio; la posición del electrón queda determinada como la intersección entre las trayectorias del fotón antes y después de chocar con el electrón. En las palabras de Heisenberg: “en el instante en el que la posición es determinada -por lo tanto, en el momento en que el fotón es dispersado por el electrón - el electrón sufre un cambio discontinuo de momento. Este cambio es mayor mientras menor sea la longitud de onda de la luz empleada - es decir, mientras más exacta sea la determinación de la posición” (Heisenberg, 1927, p. 64).

Heisenberg utiliza en su deducción la relación entre el momento lineal p y la longitud de onda λ , como lo propuso por primera vez Louis de Broglie:

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (2.1)$$

donde h es la constante de Planck. La incertidumbre δx en la posición del electrón es aproximadamente igual a la longitud de onda λ del fotón. Por otro lado, la incertidumbre δp en el momento del electrón es aproximadamente igual al momento p que tiene el fotón. Usando la ecuación (2.1), Heisenberg obtuvo:

$$\delta x \delta p \sim h \quad (2.2)$$

lo cual atribuyó a la relación de operadores canónicos conjugados de posición, q , y de momento, p , en la mecánica cuántica:

$$pq - qp = -i\hbar \quad (2.3)$$

Enunció también las expresiones:

$$\delta J \delta w \sim h \quad (2.4)$$

$$\delta E \delta t \sim h \quad (2.5)$$

debido a las relaciones de conmutación:

$$Jw - wJ = -i\hbar \quad (2.6)$$

$$Et - tE = -i\hbar \quad (2.7)$$

donde J , w , E y t son respectivamente la acción (o momento angular), el ángulo correspondiente a dicha acción, la energía y el tiempo. La relación de incertidumbre entre la energía y el tiempo es, a diferencia de las otras dos, causa de mayor polémica debido que no hay común acuerdo entre la comunidad física sobre si puede construirse un operador de tiempo con significado físico real que pueda satisfacer la relación de conmutación (2.7); sobre esto discutiremos en el capítulo 3.

Bohr analizó el artículo de Heisenberg y su deducción de la relación de incertidumbre (2.2) con el experimento pensado en el que usa el microscopio de rayos gamma, y advirtió que hay un efecto de dispersión angular que Heisenberg no tomó en cuenta y que permite una deducción más clara y acertada de la relación (2.2). A continuación se describe dicho análisis, el cual está incluido en las conferencias de Chicago de Heisenberg (Heisenberg, 1930, pp. 21).

Considere un microscopio con el cual se medirá la posición de un electrón. El electrón se está moviendo a una distancia del objetivo del microscopio, de tal forma que los rayos dispersados por el electrón forman un ángulo de apertura ε como se observa en la figura 2.1. Existe una incertidumbre δx en la posición del electrón debido a la difracción de los rayos gamma, ésta depende de la longitud de onda λ de los rayos gamma y del ángulo ε ,

$$\delta x \sim \frac{\lambda}{\text{sen}\varepsilon}.$$

El resultado anterior puede comprenderse más fácilmente si consideramos una rendija de ancho δx por la cual pasa luz de longitud de onda λ . El primer mínimo de intensidad en la pantalla está a un ángulo ε que satisface la expresión anterior. Vemos que el ancho de la rendija es el rango de posibles posiciones que tiene el electrón, porque la luz gamma es dispersada desde ese intervalo; por tal motivo δx corresponde a la incertidumbre de la posición del electrón. La luz

dispersada por el electrón incide sobre el área del objetivo; el ancho del primer máximo de difracción corresponde en una buena aproximación al diámetro del objetivo del microscopio.

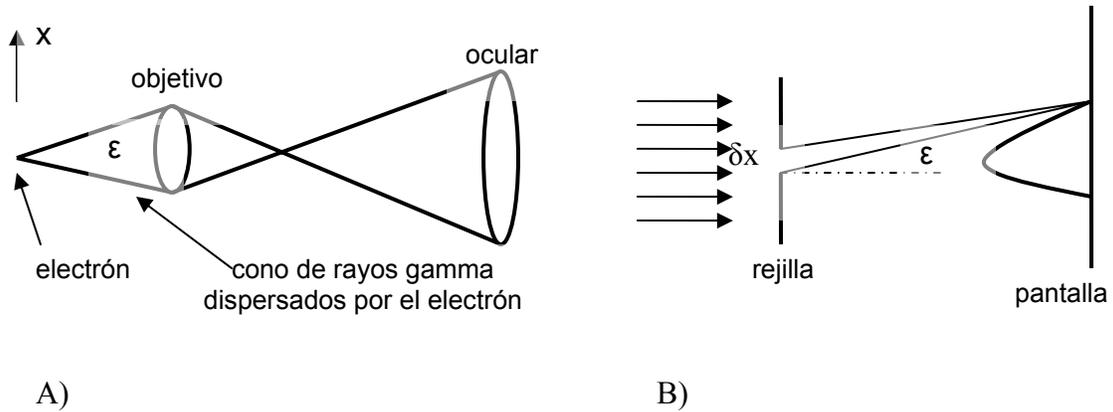


Figura 2.1. A) Microscopio de rayos gamma para medir la posición de un electrón. B) Analogía con una rejilla de difracción que produce la dispersión de los rayos.

Para lograr una medición, al menos un fotón debe ser dispersado por el electrón y pasar por el microscopio hasta el ojo del observador. Este fotón transferirá al electrón un momento de orden de magnitud h/λ ; la cantidad de momento transferido en la dirección x depende de la trayectoria seguida por el fotón; como ésta no es completamente conocida, salvo por la apertura angular ϵ , entonces existe una incertidumbre en el momento transferido al electrón en la dirección x , de magnitud

$$\delta p_x \sim \frac{h}{\lambda} \text{sen} \epsilon .$$

Por lo tanto, el producto de las incertidumbres de la posición y del momento del electrón en la dirección x es la relación (2.2):

$$\delta x \delta p_x \sim h .$$

Observamos del análisis anterior que para alterar en menor magnitud el momento del electrón podemos mandar un fotón con menor momento, es decir, con mayor longitud de onda; pero al chocar éste con el electrón su posición se medirá con mayor incertidumbre ya que no sabemos

con exactitud donde chocó el fotón con el electrón, mas que con una imprecisión de tamaño aproximado a la longitud de onda. De esta manera, mientras más grande sea la longitud de onda del fotón enviado, menor será su momento y por lo tanto menor será el momento transferido al electrón; pero mayor será la incertidumbre en su posición. Vemos que en el caso límite en que la longitud de onda del fotón sea infinita su momento será nulo, por lo que no se transmitirá momento al electrón; pero la incertidumbre en su posición será infinita, es decir, no sabremos en lo absoluto donde se produjo la colisión. De hecho no hubo ninguna colisión; ya que un fotón con longitud de onda infinita no tiene energía en lo absoluto y por lo tanto no existe, es decir, no se produjo ninguna colisión; consecuentemente no se midió la posición del electrón y nuestro conocimiento de ella es nulo. En el extremo opuesto en el que enviamos un fotón de longitud de onda cero, lograremos conocer su posición con precisión perfecta; pero el momento transferido será infinito, por lo que nuestro desconocimiento de su momento será total.

Notamos que la relación inversa entre la longitud de onda y el momento, dada por la ecuación (2.1), es la razón de que no podamos medir simultáneamente posición y momento con incertidumbres arbitrariamente pequeñas. Si en lugar de tener la ecuación (2.1) tuviéramos una en la cual el momento fuera proporcional a la longitud de onda, entonces podríamos disminuir arbitrariamente el momento y la longitud de onda de la partícula incidente, y por lo tanto conocer con precisión arbitrariamente grande la posición y el momento de la partícula medida.

Veremos en la sección 2.2 que la interpretación de ensemble considera que la relación (2.1) es válida para un ensemble de partículas, pero no para una partícula individual. Por lo tanto, de acuerdo a esta interpretación, la relación (2.2) no es válida para una sola partícula.

En esta deducción del principio de incertidumbre el fenómeno de observación juega un papel muy importante porque la luz emitida para observar al electrón es responsable de la alteración de su posición y momento. La relación de incertidumbre se manifiesta al alterarse el estado del electrón con un proceso físico mediante el cual se le pretende observar. Entonces, es natural

preguntarse si la relación incertidumbre existe aun sin un proceso de observación con el cual se modifique el estado del electrón. Según la postura de Heisenberg, la física trata únicamente con cantidades observadas en algún experimento, por lo tanto está fuera del papel de la física responder a esta pregunta.

2.1.2 Otro experimento pensado de Heisenberg

En la sección anterior se describió un experimento para medir la posición de una partícula. A continuación se presentará uno de los varios experimentos pensados para medir la velocidad de una partícula, expuestos por Heisenberg en sus conferencias de Chicago (Heisenberg, 1930, pp. 28-30).

En la figura 2.2 se muestra el esquema del experimento. A través de una rejilla A con ancho d se hace incidir un haz de partículas libres. El haz pasa por una región de ancho a donde hay un campo magnético constante y uniforme de magnitud B apuntando en la dirección $-\hat{z}$ (hacia el interior del papel). Las partículas han sido deflectadas un ángulo α al salir de la región del campo magnético, y después recorren libremente una distancia l hasta incidir sobre la rejilla C.

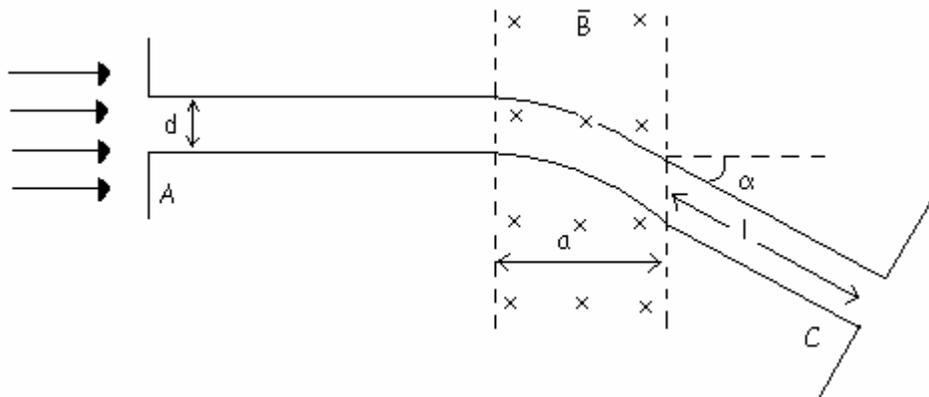


Figura 2.2. Diagrama del dispositivo para medir la velocidad de un haz de partículas.

Igualando la fuerza de Lorentz con la fuerza centrípeta obtenemos:

$$evB = \frac{mv^2}{r}$$

El radio r de las órbitas en la región con campo magnético es

$$r = \frac{mv}{eB}$$

Por otro lado, de un análisis geométrico de la figura 2.2, se obtiene que

$$r \operatorname{sen} \alpha = a$$

Haciendo la aproximación $\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha$ para ángulos pequeños obtenemos que

$$\alpha = \frac{aeB}{mv} \quad (2.8)$$

de donde calculamos la incertidumbre de α en términos de la incertidumbre de v :

$$\delta\alpha = \frac{aeB}{mv^2} \delta v$$

La anchura finita del haz produce una incertidumbre en el ángulo α . Suponemos que α es pequeño, entonces la distancia entre la región donde comienza el campo magnético y la rendija C es aproximadamente $l + a$. La incertidumbre $\delta\alpha$ es un ángulo pequeño formado aproximadamente por un arco de longitud d con radio $l + a$; en general, $\delta\alpha$ es mayor o igual que el ángulo mostrado en la figura 2.3. Se tiene entonces que

$$\delta\alpha \geq \frac{d}{l + a}.$$

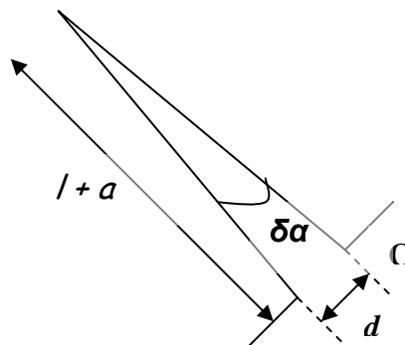


Figura 2.3. Esquema de la incertidumbre $\delta\alpha$ del ángulo de deflexión de los electrones.

Por otro lado, la difracción de las ondas de de Broglie (asociadas al haz de electrones) en la rendija A producen una incertidumbre extra en el ángulo de deflexión, por lo que se tiene

$$\delta\alpha \geq \frac{\lambda}{d}.$$

Multiplicando las desigualdades anteriores resulta

$$(\delta\alpha)^2 \geq \frac{\lambda}{l+a}.$$

La incertidumbre en la posición de un electrón en el rayo seguido de A a C después del experimento es igual al producto del tiempo que le tomó pasar por la región del campo magnético y alcanzar la segunda rendija, y la incertidumbre en su velocidad, es decir

$$\delta q \sim \frac{l+a}{v} \delta v,$$

entonces,

$$\delta q \delta v \sim \frac{l+a}{v} (\delta v)^2,$$

$$\delta q \delta v \sim \frac{l+a}{v} \left(\frac{mv^2}{aeB} \right)^2 (\delta\alpha)^2,$$

por lo tanto,

$$\delta q \delta v \geq \frac{\lambda}{v} \left(\frac{mv^2}{aeB} \right)^2,$$

sustituyendo v de la ecuación (2.8) en la anterior y utilizando la relación de de Broglie (2.1) con $p = mv$, tenemos que

$$m \delta q \delta v \geq \frac{h}{\alpha^2} \geq h,$$

por lo que se obtiene la desigualdad de Heisenberg:

$$\delta q \delta p \geq h.$$

Hay que tomar en cuenta que el resultado anterior es válido para ángulos de deflexión α pequeños.

Vemos que en los dos experimentos descritos por Heisenberg, para medir posición el primero, y para medir momento el segundo, se obtiene la relación de incertidumbre anterior (estrictamente hablando no se obtuvo lo mismo; en el primer experimento se obtuvo una igualdad aproximada, mientras que en el segundo se obtuvo una desigualdad). Como en el microscopio de rayos gamma, el paso fundamental para obtener la relación de incertidumbre es la aplicación de la relación de de Broglie entre momento y longitud de onda para una partícula. Como ya mencionamos, esto no es válido según la interpretación de ensemble.

2.1.3 La Interpretación de Heisenberg

En su microscopio de rayos gamma Heisenberg deduce la relación de incertidumbre para un electrón. Atribuye que el cambio discontinuo del momento del electrón debido a la dispersión del fotón gamma es el responsable de la existencia de una relación de incertidumbre entre su posición y su momento. El límite implicado en las incertidumbres se debe a la relación recíproca existente entre la longitud de onda y el momento del fotón. Se pregunta entonces sobre la definición de los conceptos clásicos tales como 'posición', 'velocidad', etc. en el marco de la teoría cuántica; éstos pueden definirse si se especifican experimentos con los cuales uno pueda medir 'la posición' y 'la velocidad'; de otra forma los conceptos carecen de sentido. Habla también de la 'trayectoria' de una partícula, definiéndola como el conjunto continuo de posiciones que adquiere en el tiempo. Refiriéndose al caso particular de un electrón en el estado base del átomo de Hidrógeno, dice que no es posible definir su trayectoria ya que para medir su posición se requiere iluminar el átomo con luz de longitud de onda suficientemente pequeña (y por lo tanto energía suficientemente grande) que arrancaría al electrón de su órbita; por lo tanto se conocería un solo punto de su trayectoria, impidiendo así su definición. Concluye que en ese ejemplo la palabra 'trayectoria' no tiene significado definible. Sin embargo, reconoce que existe una función de probabilidad para la localización del electrón en el átomo, la cual se obtiene al

medir la posición del electrón en muchos átomos. Heisenberg concluye que: “todos los conceptos que pueden usarse en la teoría clásica para describir un sistema mecánico pueden también definirse exactamente para procesos atómicos en analogía a los conceptos clásicos. Los experimentos que proveen tales definiciones sufren una indeterminación introducida únicamente por procedimientos de observación que usamos cuando pedimos la determinación simultánea de dos cantidades canónicas” (Heisenberg, 1927).

Heisenberg interpreta el principio de incertidumbre como un límite al conocimiento simultáneo que puede adquirirse de varias cantidades físicas, como la posición y el momento; y establece que impone restricciones al conocimiento del comportamiento de un sistema después de una medición: “...la observación de la posición de un electrón libre alterará el momento por una cantidad desconocida e indeterminada tal que después de realizar el experimento nuestro conocimiento del movimiento electrónico está restringido por las relaciones de incertidumbre”. Aclara que no se limita el conocimiento del pasado, sino del futuro: “...la relación de incertidumbre no se refiere al pasado; si primero se conoce la velocidad del electrón y después se mide con exactitud su posición, la posición para tiempos previos a la medición puede calcularse. Entonces para estos tiempos pasados $\delta p \delta q$ es más pequeño que el valor del límite usual, pero este conocimiento del pasado es de un carácter puramente especulativo, ya que nunca (debido al cambio desconocido en el momento causado por la medición de la posición) puede ser usado como una condición inicial en ningún cálculo del futuro del electrón y por lo tanto no puede ser sujeto a verificación experimental” (Heisenberg, 1930, p.20).

2.1.4 Deducción de las relaciones de incertidumbre en términos de un paquete de onda

Como vimos en la sección 1.1, el principio de incertidumbre tiene una deducción formal y rigurosa. Muchos experimentos pensados como el microscopio de rayos gamma, los presentados en las conferencias de Chicago de Heisenberg (Heisenberg, 1930), el experimento

de la doble rendija, etc. no son deducciones del principio de incertidumbre; pero son característicos de la interpretación ortodoxa. Richard Feynman, refiriéndose a éstos experimentos pensados y al principio de incertidumbre, dijo: “el principio de incertidumbre no es ‘probado’ al considerar unos pocos de estos experimentos. Solo es ilustrado. Su evidencia es de dos tipos. Primero, nadie ha encontrado aun alguna forma experimental para superar las limitaciones que implica en las mediciones. Segundo, las leyes de la mecánica cuántica parecen requerirlo para que se mantenga su consistencia, y las predicciones de estas leyes se han confirmado una y otra vez con gran precisión” (Feynman, 1965, p.13).

Presentaremos a continuación una deducción de carácter más formal que los experimentos pensados, la cual es muy común en los libros que siguen la interpretación ortodoxa¹ (Bohr sigue el mismo razonamiento en su artículo de 1927, aunque su deducción no es tan rigurosa). Ésta se basa en la idea de que una partícula es representada por un paquete de onda, y en una desigualdad aplicable a cualquier paquete de onda.

Es un resultado matemático que un paquete de onda con dimensión aproximadamente igual a Δx tenga componentes de Fourier con números de onda en un intervalo aproximadamente igual a Δk tal que se satisfaga la siguiente desigualdad aproximada:

$$\Delta x \Delta k \geq (\sim 1) \quad (2.9)$$

Aclaremos que en este caso Δx y Δk no representan desviaciones estándar, ni tampoco incertidumbres; representan la dimensión del paquete y el intervalo de frecuencias con los que se le construye. Este es un resultado matemático aplicable a cualquier paquete de onda. La conexión con el principio de incertidumbre de la mecánica cuántica se hace al afirmar lo siguiente:

¹ Veanse por ejemplos los libros de Bohm (Bohm, 1951, pp. 99-100), de Broglie (de Broglie, 1960, pp. 33-35), Laloë (Laloë, Cohen-Tannoudji y Diu, 1977, pp. 23-28). Nosotros seguimos principalmente la deducción presentada en el libro de Bohm.

- (1) La ecuación de de Broglie: $p = \hbar k$ relaciona el momento de una partícula con una longitud de onda que se le asocia.
- (2) Cuando se miden el momento y la posición del electrón, el resultado es siempre un número definido. Por el contrario, un paquete de onda tiene una dimensión espacial y un rango de números de onda.
- (3) La función de onda $\psi(x)$ determina la probabilidad de una posición dada, mientras que su componente de Fourier $\phi(k)$ determina la probabilidad de un momento dado.

Asumiendo válidas las ideas anteriores y usando la relación de de Broglie para expresar el número de onda en términos del momento se obtiene:

$$\Delta x \Delta p \geq (\sim \hbar) \quad (2.10)$$

Como (2.10) se dedujo de (2.9) sus significados son análogos: a una partícula se le asocia un paquete de onda con una dimensión espacial finita y con un rango de valores de momento, cuyo producto es mayor que un límite impuesto por la desigualdad anterior. En este sentido algunos autores interpretan que la posición y el momento de una partícula no pueden existir simultáneamente con valores perfectamente definidos. Por ejemplo, Bohm expreso que: “momento y posición ni siquiera pueden existir con valores perfectamente definidos simultáneamente. El ‘principio de incertidumbre’ es, por lo tanto, un nombre incorrecto. Un mejor término sería ‘el principio de determinismo limitado de la estructura de la materia’” (Bohm, 1951, pp. 100-101).

Las afirmaciones (2) y (3) son generalmente aceptadas como válidas por las diversas interpretaciones de la mecánica cuántica. Sin embargo, el punto (1) requiere mayor atención; ésta es una suposición que no es aceptada como válida por la interpretación de ensemble. Según dicha interpretación, la función de onda representa un ensemble de sistemas individuales; no presenta una descripción de un sistema individual. En otras palabras, la onda cuya longitud

de onda está dada por la ecuación de de Broglie debe asociarse a un ensemble de partículas y no a una sola partícula.

2.1.5 Complementariedad

Bohr introdujo el concepto de complementariedad en su artículo: "The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory" (Bohr, 1928). En sus años finales de vida, Bohr expresó que nadie había entendido lo que para él significaba la complementariedad, tal como dijo en una entrevista realizada por Thomas Kuhn en 1962: "creo que sería razonable decir que ningún hombre que sea llamado un filósofo realmente entiende lo que quiere decirse con las descripciones complementarias" (citado en: Folse, 1985, p. 9). Por lo tanto, sería arrogante de nuestra parte decir que comprendemos perfectamente lo que Bohr quiso decir con su complementariedad. Sin embargo, intentaremos en la medida de lo posible dar las ideas básicas de su filosofía, principalmente en su relación con la mecánica cuántica². Veremos que para Bohr las relaciones de incertidumbre de Heisenberg son una manifestación matemática de la complementariedad.

En mecánica clásica el lenguaje usado es el cotidiano; podemos hablar sin mayor problema de conceptos como: partículas, ondas, posición, velocidad, etc. porque éstos están definidos y entendidos en términos de los experimentos. Los resultados experimentales resultan intuitivos pues son de la vida cotidiana y podemos observarlos directamente. Por consiguiente, tenemos una imagen pictórica clara de los hechos que describen lo que sucede en mecánica clásica. Por otro lado, los resultados experimentales en mecánica cuántica no nos permiten hacer una imagen que nos permita entender con claridad lo que ocurre; dicha imagen tendría que regirse por leyes clásicas para que fuera común a nuestra experiencia. Según Bohr, debemos crear el lenguaje apropiado para una correcta descripción de los fenómenos cuánticos basándonos

² Bohr considera que la complementariedad es aplicable a diversas áreas del conocimiento, tales como la biología, psicología, sociología, etc., aparte de la física; para un estudio detallado de la filosofía de Bohr vea el libro: "The philosophy of Niels Bohr. The framework of complementarity" de Henry Folse (Folse, 1985).

puramente en los resultados experimentales y no en una descripción intuitiva en términos clásicos. No debemos apegarnos a términos clásicos que puedan crear contradicciones en su entendimiento, por ejemplo, intentando llamar partículas u ondas a la materia.

Bohr dice que la naturaleza aparentemente contradictoria de la materia en los fenómenos cuánticos, respecto a que en ciertos experimentos se describe con una teoría corpuscular, mientras que en otros es explicada con una teoría ondulatoria, se debe a que nuestro pensamiento en términos clásicos nos impide entender correctamente los fenómenos a niveles cuánticos. Inventó el concepto de complementariedad con la intención de describir la naturaleza dual que presenta la materia. Según su complementariedad, el experimentador puede establecer las condiciones del experimento de acuerdo a dos configuraciones excluyentes entre sí: la de coordenadas espacio temporal o la de variables dinámicas. En la primera el experimentador renuncia a conocer la energía y momento del sistema para conocer su posición espacial y temporal; en la otra abandona el conocimiento de su posición en el espacio y tiempo con tal de conocer su energía y momento. El término complementariedad no es una explicación de la razón del comportamiento de la materia; mas bien es un nombre que Bohr le dio a su principio con una filosofía implícita basada en las características de la teoría cuántica (Bohr, 1961).

Para comprender mejor el concepto de complementariedad pensemos en el siguiente ejemplo. Piense en un flujo de electrones pasando por una rendija (o varias rendijas). Dicho flujo puede considerarse como una onda; de esta forma se describe correctamente el patrón de máximos y mínimos de intensidad que se observa en la pantalla. Pero cada electrón marca un punto en la pantalla, es decir, en este caso se describen correctamente con el modelo de partículas. Por lo tanto, las descripciones ondulatoria y corpuscular son complementarias, pues ambas son necesarias para la correcta descripción del fenómeno. Para el caso de la luz existe también la descripción en término de ondas y de fotones; ambas son complementarias, es decir, se cumple una u otra dependiendo del experimento realizado.

De acuerdo a Bohr, la indivisibilidad del cuanto de acción es la responsable de que:

- I. No exista una descripción causal del comportamiento de átomos individuales en el espacio y el tiempo, pues sólo puede asignarse una probabilidad a éste; el átomo tiene la “libertad” de “escoger” entre varias posibilidades.
- II. Sea imposible distinguir entre fenómeno y observación (Wick, 1996).

Por lo tanto, de acuerdo a Bohr, debido a la indivisibilidad del cuanto de acción debemos cambiar nuestra concepción sobre el principio de causalidad y el concepto de observación.

Ilustraremos los puntos anteriores con el ejemplo de un ensemble de electrones que pasan por una rendija. Si el ancho a de la rendija es comparable a la longitud de onda de de Broglie λ de los electrones entonces se producirá un patrón de máximos y mínimos de intensidad en una pantalla opuesta a la rendija, como se observa en la figura 2.4a). El primer mínimo se producirá para un ángulo θ que satisfaga:

$$\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{2a} = \frac{h}{2ap},$$

donde p es el momento de los electrones, y h es la constante de Planck, la cual proporciona la magnitud del cuanto de acción. Si el cuanto de acción fuera divisible, entonces podríamos considerar que h se hace arbitrariamente pequeña, es decir, se podría tener que

$$h \rightarrow 0,$$

implicando que

$$\theta \rightarrow 0,$$

lo anterior corresponde a un patrón de intensidad como el que se observa en la figura 2.4b).

Observamos que en la figura 2.4a) el electrón “tiene” la “posibilidad” de “escoger” cualquier punto de la pantalla para chocar (a excepción de los mínimos de intensidad), siendo algunos puntos más probables que otros. En este sentido la descripción es indeterminista, pues carece de la facultad de predecir con certeza donde arribará el electrón. Además, según la interpretación ortodoxa, no existe causa alguna para que el electrón alcance alguna región particular de la pantalla y no otra, por lo tanto la descripción no es causal.

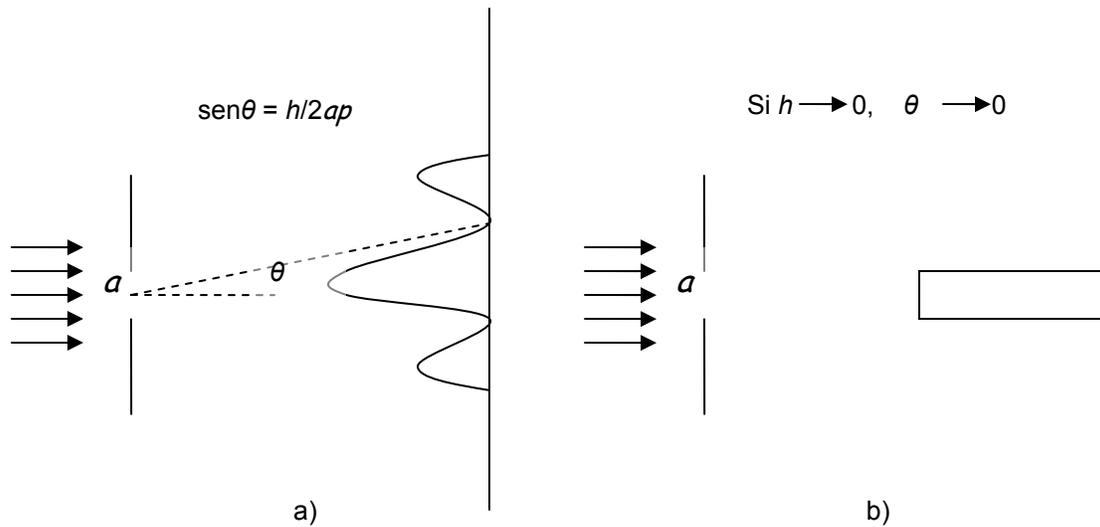


Figura 2.4. Patrón de intensidad observado en una pantalla debido a un flujo de electrones que inciden sobre una rendija. a) Resultado observado. b) Resultado que se observaría si la magnitud del cuanto de acción fuera cero.

Bohr toma una postura filosófica en la que no puede afirmarse la existencia de algo sin que sea observado. Dice que los fenómenos son observaciones, i.e., mediciones de propiedades de sistemas físicos. Por tal motivo, según Bohr, no podemos hablar del fenómeno correspondiente a la trayectoria seguida por un electrón al pasar por una rendija porque ésta no se observa. Sin embargo, sí podemos hablar del fenómeno de la posición que toma el electrón en la pantalla al pasar por una rendija porque éste corresponde a una medición de su posición (es una observación); es en este sentido que no es posible distinguir entre el fenómeno de trayectoria y

su observación. Para Bohr, fenómenos y observaciones son lo mismo; si no hay observaciones no hay fenómenos.

Por otro lado, si el cuanto de acción fuera divisible la descripción sería determinista y causal. Ya que como se observa en la figura 2.4b) se podría predecir con absoluta certeza (salvo por el ancho finito de la rendija) la posición de la pantalla a donde llegará el electrón. Además podríamos asignarle una causa a este resultado: los electrones se desplazan sobre una línea recta. Ahora sí, aunque no observemos la trayectoria de los electrones punto a punto mientras se desplazan, es evidente (observando la figura 2.4b)) que la trayectoria debe ser una línea recta; por lo tanto, puede hablarse del fenómeno de la trayectoria seguida por los electrones sin que se hable necesariamente de su observación; es decir, en este caso observación y fenómeno serían conceptos independientes y válidos. De esta forma, Bohr entiende que la indivisibilidad del cuanto de acción impide tener una descripción causal, y distinguir entre fenómeno y observación.

Observamos que si el cuanto de acción fuera divisible, no habría ningún límite en el conocimiento simultáneo de posición y momento de un electrón, pues de acuerdo a la relación (2.2) si la constante de Planck fuera cero, no existiría el principio de incertidumbre. Por lo tanto, las relaciones de incertidumbre de Heisenberg están íntimamente relacionadas con los planteamientos de Bohr, de que la mecánica cuántica no sea una teoría causal, y de que fenómeno y observación sea el mismo concepto, a través del hecho de que el cuanto de acción es indivisible.

2.1.5.1 El principio de incertidumbre como manifestación matemática de la complementariedad

Bohr (1928) expuso una interpretación de las relaciones de incertidumbre de Heisenberg como manifestación matemática de la complementariedad presente en la mecánica cuántica. Utilizó un análisis mediante transformadas de Fourier para describir una partícula, ya sea en la descripción de posición con cierto rango de componentes de momento, o en la descripción de momento con

cierto rango de componentes de posición. Es decir, Bohr dio un significado de paquete de onda a una partícula. Puesto que la partícula debe estar en una región limitada del espacio, el paquete de onda que le corresponde debe tener una extensión finita y en consecuencia un rango de componentes de momento también finito. Por lo tanto, con el análisis de Fourier introducido por Bohr el principio de incertidumbre surge de manera natural.

Veamos la deducción de las relaciones de Heisenberg presentada por Bohr. Partió de la siguiente relación para una onda armónica, que de acuerdo a su interpretación representa a una partícula libre:

$$E\tau = p\lambda = h \quad (2.11)$$

donde E y p son la energía y el momento de la partícula; τ y λ son el periodo de vibración y la longitud de onda.

Por un lado, una partícula se representa como un cuerpo que tiene una posición definida en un punto espacial en un tiempo dado. Entonces, requiere el uso de coordenadas de espacio- tiempo para su correcta descripción. Por lo tanto es necesario conocer con absoluta precisión la posición de la partícula en el espacio y en el tiempo. Con lo anterior se renuncia a conocer en lo absoluto su momento y energía, tal como lo indican las relaciones de incertidumbre. Por otro lado, una onda armónica se caracteriza por tener una longitud de onda y un periodo temporal bien definidos, cantidades que en la descripción cuántica se asocian directamente al momento y a la energía respectivamente. Por tal motivo, como se expresa en las relaciones de incertidumbre, dicha onda se extiende infinitamente en el espacio y en el tiempo. Sólo usando el principio de superposición puede superarse esta dificultad; pues para tener una onda limitada en el espacio y en el tiempo (un paquete de onda) es necesario considerar la interferencia de un grupo de ondas armónicas, tal como se obtiene con un análisis de Fourier. El orden de magnitud de la diferencia promedio de la frecuencia ν y del recíproco de la longitud de onda λ , en un grupo de onda está dado por la siguiente condición:

$$\delta t \delta \nu \approx \delta x \delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \approx 1,$$

donde δt y δx denotan la extensión en el tiempo y en el espacio del paquete de onda.

Utilizando la ecuación de de Broglie para una partícula libre: $\lambda = h / p$, y la ecuación de Einstein para un fotón: $E = h \nu$, junto con la ecuación anterior, se obtiene lo siguiente:

$$\delta t \delta E \approx \delta x \delta p \approx h \tag{2.12}$$

Vemos en la expresión anterior que según Bohr (y muchos seguidores de la interpretación ortodoxa), las relaciones de incertidumbre entre posición y momento, y entre energía y tiempo, están en el mismo nivel conceptual y ambas son válidas. En el siguiente capítulo discutiremos la validez de la relación de incertidumbre para la energía y el tiempo.

Bohr dice que: “estrictamente hablando, la idea de observación pertenece a la forma de descripción causal en el espacio-tiempo. Sin embargo, debido a la relación (2.12), esta idea puede ser utilizada consistentemente también en la teoría cuántica, sólo si la incertidumbre expresada a través de esta relación es tomada en cuenta” (Bohr, 1928). De esta forma, Bohr afirma que puede usarse el concepto clásico de observación, pero con un límite en el conocimiento de las cantidades complementarias para un sistema físico; las cuales son energía y tiempo por un lado, y momento y posición por el otro; y dice que este límite está impuesto en el principio de incertidumbre. Notemos que en el caso clásico no existe ningún límite en cuanto al conocimiento simultáneo de dichas cantidades, este caso corresponde al límite en el que la magnitud del cuanto de acción sea nulo, es decir, cuando $h \rightarrow 0$. De esta manera, las relaciones de Heisenberg exhiben un carácter complementario que previene el uso simultáneo de los conceptos de espacio-tiempo y de leyes de conservación (de energía y momento), salvo el límite que imponen.

2.1.5.2 Complementariedad y el principio de incertidumbre en el experimento de la doble rendija

Dentro de las muchas discusiones entre Bohr y Einstein sobre la interpretación de la mecánica cuántica existe una referente a la indeterminación que establece el principio de incertidumbre en el experimento de la doble rendija. La discusión es narrada por Bohr (1949) y se presenta enseguida. Ilustraremos cómo es que Bohr utiliza el concepto de complementariedad para explicar los fenómenos cuánticos. Notaremos cómo es que el principio de incertidumbre es la manifestación matemática de la complementariedad, imponiendo un límite en el conocimiento simultáneo de posición y momento, evitando así un resultado experimental contradictorio en el que se observe a la materia como partícula y como onda a la vez. El diseño experimental decide cual de estas propiedades se manifiesta.

El esquema del experimento se presenta en la figura 2.5. Se colocan alineadas: una rendija simple, una doble rendija y una pantalla en este orden (marcadas en la figura como A, B y C, respectivamente). Se hace incidir un haz colimado de electrones (o fotones) sobre la primera rendija. Los electrones son difractados en todas direcciones frontales. La doble rendija se coloca suficientemente lejos de la rendija simple; se obtiene así en buena aproximación, un haz de electrones viajando en la dirección x con momento \vec{P} incidiendo sobre la doble rendija. Consideremos que la longitud de onda asociada al momento lineal del haz es del orden de magnitud del ancho de la doble rendija; por lo tanto, en la pantalla se observa un patrón de interferencia. Un electrón identificado en la pantalla pudo haber pasado por la rendija de arriba o por la de abajo, con momentos \vec{P}_1 o \vec{P}_2 respectivamente, como se ilustra en la figura 2.5 (estamos haciendo la suposición, no obvia en la interpretación ortodoxa, de que los electrones tienen trayectorias definidas y de que éstas son líneas rectas); cada una de las dos posibilidades se identifica con una componente distinta de momento paralelo a la pantalla (en la dirección y). Con base en esto, Einstein sugirió que controlando suficientemente el momento transferido y haciendo un análisis detallado podría determinarse por cual rendija había pasado cada electrón.

Sin embargo, Bohr argumentó que su principio de complementariedad impide que se conozca la rendija por la que ha pasado cada electrón y además pueda observarse el patrón de interferencia; porque de este modo se estarían manifestando ambas naturalezas de los electrones: la ondulatoria (al observar la interferencia) y la corpuscular (al conocer por cuál rendija pasó cada electrón), pero esto no es posible como lo indica su principio de complementariedad.

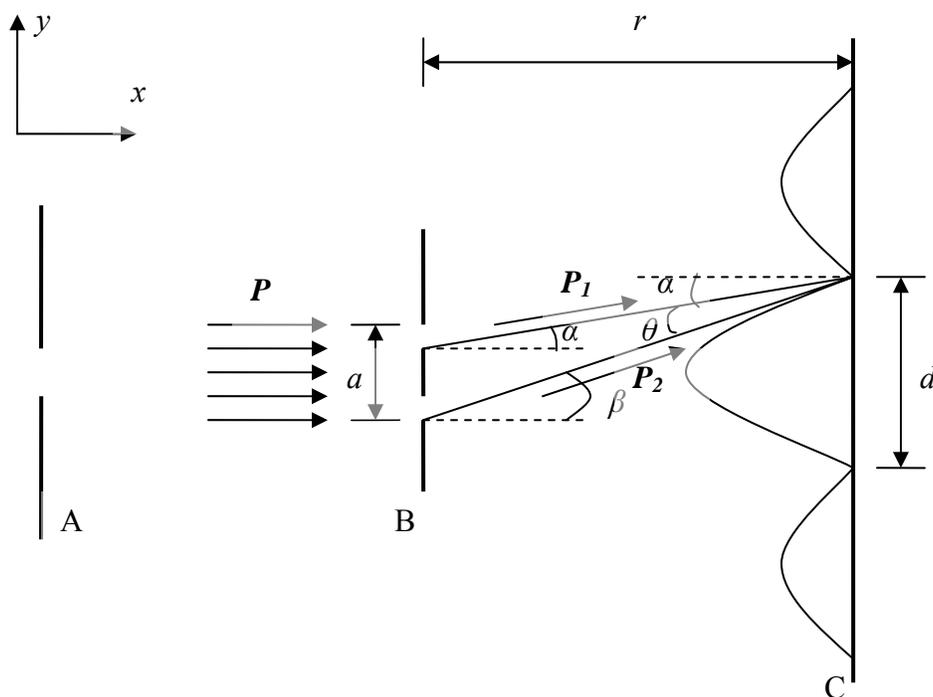


Figura 2.5. Esquema del experimento de la doble rendija.

El análisis que apoya la conclusión anterior de Bohr es como sigue. Un electrón pasa por un agujero de la doble rendija y se observa su impacto en la pantalla. θ es un ángulo pequeño entre las dos posibles trayectorias del electrón. Se observa en la figura que se cumple la siguiente relación entre los ángulos:

$$\beta = \alpha + \theta.$$

Si el electrón ha pasado por la rendija de arriba, su momento transversal al incidir en la pantalla es

$$P_{1y} = P \operatorname{sen} \alpha ,$$

mientras que, si el electrón ha pasado por la rendija de abajo, su momento transversal es

$$P_{2y} = P \operatorname{sen} \beta .$$

Al sustituir la relación entre los ángulos en la anterior ecuación, y desarrollar se obtiene

$$P_{2y} = P \operatorname{sen} \beta = P \operatorname{sen}(\alpha + \theta) = P(\operatorname{sen} \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \alpha) .$$

θ es un ángulo pequeño si la distancia r entre la doble rendija y la pantalla es grande a comparación del tamaño a de la doble rendija; haciendo esta consideración, las siguientes aproximaciones son válidas:

$$\cos \theta \cong 1 , \quad \operatorname{sen} \theta \cong \theta ,$$

sustituyendo las expresiones anteriores obtenemos

$$P_{2y} \cong P \operatorname{sen} \alpha + P \theta \cos \alpha = P_{1y} + P \theta \cos \alpha .$$

Por lo tanto, la diferencia de los dos posibles momentos transversales del electrón al incidir en la pantalla es

$$P_{2y} - P_{1y} \cong P \theta \cos \alpha .$$

Observamos que la diferencia anterior depende de la posición en la pantalla a través del ángulo α . Sin embargo, estamos interesados en el valor de esta diferencia para cualquier punto de la pantalla; por tal motivo consideraremos su valor máximo, el cual se alcanza con $\alpha = 0$, éste es

$$(P_{2y} - P_{1y})_{\max} \cong P \theta .$$

Utilizando la relación de de Broglie $P = h / \lambda$, entre la magnitud del momento del electrón y su longitud de onda asociada, la expresión anterior queda

$$(P_{2y} - P_{1y})_{\max} \cong \frac{h \theta}{\lambda} \quad (2.13)$$

Por otro lado, el primer mínimo de interferencia ocurre si se cumple la siguiente condición:

$$a \sin \alpha = \frac{\lambda}{2}.$$

Entonces, la distancia d entre dos franjas de interferencia consecutivas en la pantalla es

$$d \cong 2r \sin \alpha = \frac{r\lambda}{a}.$$

En la región de la primera franja brillante en la pantalla, el ángulo θ puede aproximarse como

$$\theta \cong \frac{a}{r}.$$

Por lo tanto, la distancia entre las franjas es

$$d \cong \frac{\lambda}{\theta}. \quad (2.14)$$

Como indica la expresión (2.13), la máxima diferencia entre los dos posibles momentos transversales del electrón al incidir en la pantalla es aproximadamente $h\theta/\lambda$. Por lo tanto, para distinguir el agujero por el que pasó el electrón es necesario medir el momento transferido a la doble rendija con una precisión mínima de este valor. Pero de acuerdo a la relación de incertidumbre de Heisenberg, $\delta x \delta p \sim h$, una imprecisión de magnitud $h\theta/\lambda$ en el momento transversal de la doble rendija implica una imprecisión mínima en su posición transversal de tamaño λ/θ ; éste es el valor de la distancia entre dos franjas consecutivas de interferencia en la pantalla, como expresa la relación (2.14). En consecuencia, el patrón de interferencia no se observaría. Con este resultado dice Bohr: “este punto es de gran consecuencia lógica, puesto que es únicamente la circunstancia de que nos presentamos con la opción de trazar la trayectoria de una partícula o de observar los efectos de interferencia, lo que nos permite escapar de la necesidad paradójica de concluir que el comportamiento de un electrón o un fotón debería depender de la presencia de una rendija en el diafragma a través de la cual podría ser probado que no ha pasado” (Bohr, 1949). De esta forma, el principio de incertidumbre apoya las ideas complementarias que plantea Bohr; las relaciones de incertidumbre impiden en este experimento que pueda observarse el patrón de interferencia y al mismo tiempo conocer la

rendija por la que ha pasado cada electrón; es decir, la naturaleza ondulatoria de los electrones no puede manifestarse al mismo tiempo que se manifieste su naturaleza corpuscular, pues éstas son complementarias.

En el análisis anterior se ha considerado que la pantalla está fija, y que la doble rendija tiene la libertad de moverse transversalmente; de esta manera puede medirse el momento transferido a ésta por el electrón. Si por el contrario, la doble rendija se deja fija y a la pantalla se le da libertad de movimiento el resultado es el mismo (vea Marsh 1975). En este caso, el momento transversal de la pantalla debe ajustarse con una precisión mínima para que al medir el momento transferido por el electrón se pueda distinguir por cual rendija ha pasado; pero al lograrse tal precisión, debido a la relación de incertidumbre, la imprecisión en la posición transversal de la pantalla será suficientemente grande para ser comparable con la distancia entre las franjas de interferencia; en consecuencia, el patrón de interferencia no se observará.

Vimos arriba, que Einstein pretendía conocer con exactitud la rendija por la que había pasado cada uno de los electrones y observar al mismo tiempo el patrón de interferencia. Sin embargo, como ya se vio, Bohr refutó esta sugerencia diciendo que si se conociera la rendija por la que había pasado cada electrón entonces el patrón de interferencia no se observaría. En un artículo presentado por Wootters y Zurek (1979) se analizan los casos intermedios entre los extremos discutidos por Einstein y Bohr. En éstos se conoce la probabilidad de que los electrones han pasado por cierta rendija, sin que sea ésta del 100%, aunque sí cercana a ella; y a pesar de que se atenúa el patrón de interferencia, éste se puede observar.

Los autores proponen una forma de cuantificar la información que puede tenerse de las propiedades ondulatorias de los electrones en el experimento de la doble rendija; ésta consiste en medir la razón R entre las intensidades máxima y mínima en el patrón de interferencia obtenido. En un caso extremo en el que se conoce con precisión absoluta la trayectoria de los electrones el patrón de interferencia se anula completamente; entonces, las propiedades de

partícula se manifiestan cabalmente, mientras que las propiedades ondulatorias no se presentan en lo absoluto; esto corresponde a $R = 1$. En el otro extremo, en el que el patrón de interferencia es perfecto se tiene que $R = \infty$; en este caso no se tiene ninguna información sobre la trayectoria de los electrones, por lo que la naturaleza que presentan los electrones es completamente ondulatoria y sus propiedades corpusculares no se observan en absoluto. En una situación intermedia, en la cual pueda distinguirse el patrón de interferencia, aunque atenuado, y se tenga algo de información sobre la trayectoria de las partículas, entonces se tendrá cierta información de las propiedades tanto ondulatorias como corpusculares de los electrones. En el ejemplo presentado en su artículo, dan una función de onda particular (la de un oscilador armónico) para la placa que tiene la rendija simple. Con tal consideración, obtienen la función de onda del ensemble de electrones que pasa por la doble rendija. Aunque no conocen con precisión absoluta por cuál rendija han pasado los electrones, sí obtienen una probabilidad muy alta (por ejemplo del 99%) de que hayan pasado por ejemplo, por la rendija de arriba. Obtienen un patrón de interferencia atenuado, pero con la razón R suficientemente grande ($R = 3/2$ en el ejemplo dado) para poder distinguirlo.

Wooters y Zurek proponen en consecuencia una forma de cuantificar el principio de complementariedad de Bohr en el experimento de la doble rendija; y afirman que a diferencia del caso extremo discutido por Einstein y Bohr, en casos intermedios puede tenerse cierto conocimiento de las propiedades tanto de partícula como de onda de los electrones. Es claro que la cuantificación propuesta, en términos de onda o de partícula, se refiere a un ensemble de electrones, no a un electrón individual (aunque el ensemble puede referirse a un conjunto grande de electrones que pasan de uno en uno); pues con un solo evento no puede observarse el patrón de interferencia, tampoco puede calcularse una probabilidad de que el electrón haya pasado por alguna rendija en particular.

Otra forma de investigar la complementariedad en casos intermedios entre los extremos que corresponden a la observación o no del patrón de interferencia se presenta en un experimento

reciente (Bertet et al. 2001) en el cual se hace interferir un ensemble de átomos que pasan uno a la vez a través del interferómetro. El interferómetro usado en el experimento puede ilustrarse como si fuera uno de Mach-Zender aunque en realidad es más complicado (uno de Ramsey de doble pulso). La peculiaridad del interferómetro es que uno de sus divisores de haz tiene la propiedad de que puede ser modificado continuamente de un estado microscópico hasta uno macroscópico. Cuando el divisor de haz es microscópico éste puede guardar la información de la trayectoria seguida por la partícula, en este caso no se observa el patrón de interferencia. Cuando el divisor es macroscópico éste es insensible a la interacción con la partícula y se observa el patrón de interferencia. Los divisores de haz corresponden a pulsos de microondas. Uno de los pulsos es un campo coherente almacenado en una cavidad, que corresponde a un número promedio pequeño y ajustable de fotones. La transición del divisor de haz de cuántico a clásico se produce cuando se incrementa este número de fotones, produciendo como resultado el incremento de la visibilidad de las franjas de interferencia de los átomos.

Se han realizado experimentos de la doble rendija con electrones (Tonomura et al. 1989) y con átomos (Carnal y Mlynek 1991; Shimizu et al. 1992) en los cuales el flujo de materia a través de las rendijas es tan débil que nunca hay más de una partícula recorriendo el camino hacia la pantalla. En la pantalla se marca un punto cada vez que llega una partícula, pero después de suficiente tiempo se observan las líneas de interferencia. Entonces, al interactuar con la pantalla, la materia se comporta como partículas, pero el resultado global es el de una onda. ¿Cómo puede interpretarse esto? Una interpretación común es que una partícula pasa a través de ambas rendijas al mismo tiempo, produciéndose así la interferencia. Si experimentalmente hacemos la pregunta de por que rendija ha pasado cada una de las partícula, la respuesta es que ha pasado a través de una sola, pero entonces se destruye el patrón de interferencia, tal como lo indica el principio de complementariedad. Otra interpretación es que la posición de la partícula cuando pasa a través de las rendijas carece de realidad física si no la medimos, y por lo tanto no puede decirse si ha pasado por una, por la otra o por ambas. Solo podemos decir que cada partícula cruza el aparato con una superposición lineal de dos estados, cada uno

correspondiendo a un paquete de onda que pasa a través de una de las rendijas. La partícula no es la que interfiere, sino su amplitud de probabilidad.

2.1.6 Estimación de cantidades físicas usando el principio de incertidumbre

Puede usarse el principio de incertidumbre para estimar cantidades de la mecánica cuántica; por ejemplo, para obtener el orden de magnitud del radio de Bohr; una deducción es como sigue (Bohm, 1951). Un electrón se encuentra limitado a una región del espacio de dimensión aproximadamente igual al radio de Bohr. Por otro lado, el electrón consiste en un paquete de onda de extensión Δx ; entonces, asociaremos ésta con el tamaño del radio buscado. El momento promedio es del orden del tamaño del intervalo de momentos

$$p \cong \hbar / \Delta x ,$$

mientras que la energía total del electrón es su energía cinética más su energía potencial

$$E \cong \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} - \frac{e^2}{\Delta x} .$$

El radio de Bohr corresponde al radio de la órbita de equilibrio, es decir, el radio que minimice la energía. Entonces, derivamos la expresión anterior y la igualamos a cero:

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta x} \cong -\frac{\hbar^2}{m(\Delta x)^3} + \frac{e^2}{(\Delta x)^2} \cong 0 .$$

Al resolver la ecuación anterior se obtiene un valor aproximado del radio de Bohr:

$$\Delta x \cong \frac{\hbar^2}{me^2} .$$

El procedimiento anterior está basado en la interpretación ortodoxa, ya que a Δx le hemos dado el significado del radio de un átomo. Ciertamente, la aproximación anterior es buena, pero no es necesario usar el principio de incertidumbre para obtenerla. De un análisis dimensional habríamos llegado al mismo resultado. Sabemos que las cantidades físicas involucradas son la

masa y carga del electrón, y que en los fenómenos cuánticos la constante de Planck debe considerarse. Por lo tanto, usando las cantidades anteriores se logra el mismo resultado.

2.2 *La interpretación de ensemble*

De acuerdo a la interpretación de ensemble, un estado cuántico representa un ensemble de sistemas preparados similarmente; y conocerlo no proporciona una descripción completa de alguno de sus sistemas individuales. Esto difiere de manera esencial de la interpretación ortodoxa que afirma que un estado puro³ provee una descripción completa y exhaustiva de un sistema individual.

Margenau (1963) sugiere la existencia de dos tipos de ensembles: (1) el ensemble espacial que consiste en un conjunto (hipotético) de muchos sistemas individuales, los cuales no interactúan entre sí; cada uno de ellos se encuentra en el mismo estado cuántico. (2) El ensemble temporal, en el cual un único sistema es preparado y medido una y otra vez por el mismo aparato bajo condiciones similares. Cuando el sistema físico es una partícula individual no debe confundirse un haz de partículas con el ensemble. Si las partículas del haz no interactúan entre sí, entonces hablamos de una realización aproximada del ensemble espacial. De otra forma, un haz puede simular un ensemble si la intensidad del haz es suficientemente baja para que solo una partícula esté presente en un tiempo dado; éste es un ejemplo de ensemble temporal.

Según la interpretación de ensemble, existe una diferencia entre un proceso de medición y uno de preparación de estado. Una preparación de estado es un proceso en el cual un ensemble se

³ Un estado puro $|\psi\rangle$ es el que puede expresarse como

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\varphi_n\rangle,$$

donde los vectores $|\varphi_n\rangle$ forman un conjunto completo y ortonormal de estados que satisfacen la ecuación de Schrödinger. Es decir, un estado puro es una superposición coherente de estados. En cambio, los estados que requieren de la matriz de densidad para su descripción se llaman mezclas (son una superposición incoherente). En la sección 3.5.2 se dará la definición de un estado puro y de una mezcla en términos de la matriz de densidad.

hace interactuar con un aparato con el fin de que inmediatamente después de la interacción alguna (o algunas) de las propiedades físicas del ensemble adquiera un valor específico conocido. Una medición es un proceso mediante el cual un ensemble interactúa con un aparato de medición modificando alguna de las propiedades físicas del aparato; al observar el valor que ésta adquirió se logra inferir el valor que tenía alguna propiedad física del ensemble justo antes de llevarse a cabo la interacción. La diferencia esencial entre los procesos de medición y de preparación de estado es que el primero se refiere a un tiempo inmediatamente previo a una interacción, mientras que el segundo se refiere a un tiempo inmediatamente posterior a una interacción. El principio de incertidumbre no se refiere a mediciones sino a preparaciones de estado (Ballentine, 1969). En efecto, como reconoció Heisenberg, el principio de incertidumbre no se refiere al pasado, sino a tiempos inmediatamente posteriores a una interacción.

Considere el ejemplo en el que el sistema individual sea un solo electrón. El ensemble correspondiente sería el conjunto de todos los electrones individuales que no interactúan entre sí (por ejemplo, despreciando su interacción electromagnética si la densidad de electrones es suficientemente baja), y que hayan sido sujetos a una misma preparación de estado. Entonces, un eigenestado de momento consistiría en el conjunto (conceptualmente infinito) de electrones con el mismo valor de momento, pero distribuidos uniformemente en todo el espacio. Sistemas físicos que hayan sido sujetos a la misma preparación de estado tendrán iguales algunas de sus propiedades pero no todas; por ejemplo, los electrones del eigenestado de momento tienen el mismo momento pero distintas posiciones. Debido al principio de incertidumbre es imposible preparar un ensemble que esté formado por sistemas individuales con todas sus propiedades iguales (Ballentine, 1970).

Un fuerte argumento que apoya a la interpretación de ensemble del principio de incertidumbre consiste en que la formulación matemática de éste impone un límite al producto de las desviaciones estándar de dos variables conjugadas, como se indica en la desigualdad (1.23); no se hace referencia a un sistema individual sino a un conjunto grande de sistemas preparados

similarmente, es decir, a un estado cuántico representado por un ensemble. Según esta interpretación, las relaciones de incertidumbre no dicen nada acerca de los resultados que se obtendrían al hacer una sola medición, pues en este caso la desviación estándar carece de sentido. Por ejemplo, si realizamos una medición de la posición de un electrón, no puede inferirse nada sobre los probables resultados que se obtendrían al medir su momento (Margenau, 1950, pp. 375-377).

Las desviaciones estándar de la posición y momento de un estado cuántico se definen como sigue:

$$\Delta_{\psi} x = \sqrt{\langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle}, \quad \Delta_{\psi} p = \sqrt{\langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle}$$

(donde se ha usado la notación convencional $\Delta_{\psi} A = \sqrt{\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle}$). Entonces, de acuerdo a la relación de incertidumbre de Heisenberg obtenemos que el producto de las desviaciones estándar es mayor que el límite impuesto:

$$\Delta_{\psi} x \Delta_{\psi} p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Debe aclararse que para calcular correctamente las desviaciones estándar, las mediciones deben realizarse sobre un ensemble de sistemas que se han preparado en el mismo estado. En el formalismo matemático de la mecánica cuántica esto significa que para calcular las cantidades $\Delta_{\psi} x$ y $\Delta_{\psi} p$ es necesario aplicar los operadores de posición y de momento sobre el estado cuántico $|\psi\rangle$ en el que se encuentra el ensemble; de tal forma que los valores esperados se calculan como sigue:

$$\langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle = \langle \psi | (\hat{x} - \langle \hat{x} | \psi \rangle)^2 | \psi \rangle, \quad \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \langle \psi | (\hat{p} - \langle \hat{p} | \psi \rangle)^2 | \psi \rangle.$$

Experimentalmente, el ensemble puede representarse por un conjunto de electrones que no interactúan entre si, y que a un tiempo t se hacen interactuar con un aparato, por ejemplo, con una rendija. Inmediatamente después de pasar por la rendija se ha preparado el estado. Cada

electrón tiene al tiempo t , posición y momento bien definidos con valores q_k y p_k , respectivamente (el subíndice k representa al k -ésimo electrón del ensemble). El producto de las desviaciones estándar de la posición y del momento será mayor que el límite inferior impuesto por el principio de incertidumbre. Al tiempo $t + \tau$ se hacen las mediciones de la posición q_i para cada electrón de un subconjunto S del ensemble y del momento p_j (con $i \neq j$) para cada electrón de otro subconjunto S'. El aparato para medir posición podría ser una pantalla fija en la cual se marque un punto (que tendría naturalmente un área finita) cuando incida un electrón sobre ella; la pantalla podría servir para medir simultáneamente la posición de N electrones. Si la pantalla no está fija sino que tiene la posibilidad de desplazarse sobre un eje, entonces midiendo el momento que adquiriera al incidir un electrón, por conservación de momento, podría calcularse el momento del electrón. Los subconjuntos S y S' contienen cada uno N electrones, pero son distintos y ningún electrón pertenece a ambos conjuntos. Por lo tanto, se han hecho N mediciones de momento y N de posición; a cada electrón se le ha medido solo una propiedad: su posición o su momento, no ambas. La medición realizada sobre cada electrón tendrá asociada una incertidumbre δq_k o δp_k , pero el principio de incertidumbre no impone ninguna condición sobre éstas (naturalmente, son los valores medidos, con sus incertidumbres asociadas, con los que se calculan las desviaciones estándar). De hecho, como se ha explicado arriba, para calcular las desviaciones estándar $\Delta_\psi x$ y $\Delta_\psi p$ solo se midió posición o momento de cada uno de los electrones (sólo se midió q_k o p_k del k -ésimo electrón). Por lo tanto, la afirmación de la interpretación ortodoxa de que el principio de incertidumbre impone una limitación a la medición simultánea de posición y momento de un sistema individual no es necesariamente correcta (vea la sección 2.2.2).

2.2.1 Argumentos de la interpretación de ensemble contra la interpretación ortodoxa

La interpretación ortodoxa se apoya en experimentos pensados que involucran a una sola partícula, como el microscopio de rayos gamma de Heisenberg. En estos experimentos pensados siempre es necesario usar la relación entre momento y longitud de onda, de de Broglie en el caso de partículas, y de Einstein en el caso de la luz, para obtener la relación de incertidumbre de Heisenberg. Los seguidores de la interpretación de ensemble argumentan contra estas deducciones, que en los experimentos las propiedades ondulatorias se aprecian únicamente cuando se tiene un conjunto grande de partículas; por lo tanto, la longitud de onda de de Broglie es aplicable a un ensemble y no a una sola partícula. Por ejemplo, al mandar un haz de electrones sobre una rendija se observa en una pantalla que los electrones inciden sobre ella formando un patrón de intensidad correspondiente a una onda, con longitud de onda dada por la relación de de Broglie en términos del momento lineal de los electrones. Pero si se manda un solo electrón, en la pantalla solo se observa un punto; no se observa ningún patrón de difracción correspondiente a una onda. Por otro lado, al mandar un electrón a la vez a través de la rendija y repetir este proceso muchas veces se observará en la pantalla el patrón de difracción; con base en esto, los seguidores de la interpretación ortodoxa argumentan que cada electrón ha interferido consigo mismo como si fuera una onda con longitud de onda de de Broglie; la misma conclusión se obtiene en el experimento de la doble rendija. Pero según la interpretación de ensemble, es el ensemble el que presenta interferencia y difracción como una onda. Según la interpretación de ensemble, existe una onda de probabilidad asociada a un ensemble. Mientras que de acuerdo a la interpretación ortodoxa, se puede asociar una onda a una sola partícula.

Otra dificultad que presenta la interpretación ortodoxa se debe a que una partícula se representa por un paquete de onda. Puede demostrarse que un paquete de onda que en un instante inicial tiene una extensión espacial finita se dispersará conforme avance el tiempo pudiendo adquirir una dimensión arbitrariamente grande. Entonces, esto significaría que la posición de la partícula es cada vez más indeterminada. Por el contrario, la interpretación de ensemble no presenta esta

dificultad; si inicialmente muchas partículas se restringen a una pequeña región del espacio, es natural que éstas se dispersen; tal como sucede con las partículas de un gas, éstas se dispersan produciendo que se expanda.

2.2.2 ¿Es posible que el principio de incertidumbre se refiera a un ensemble y también a un sistema individual?

Nos preguntamos si es posible que las interpretaciones ortodoxa y de ensemble del principio de incertidumbre, respecto a si éste se refiere a una sola partícula o a un ensemble, sean ambas válidas; es decir, ¿es posible que exista un límite al conocimiento simultáneo de dos variables conjugadas para un sistema individual y que también lo exista para el producto de las desviaciones estándar de dichas variables correspondientes a un ensemble? Existe una respuesta parcial a esta pregunta. Si se supone correcta la interpretación de ensemble del principio de incertidumbre y además se asume que las mediciones cumplen la propiedad de que al repetirse inmediatamente, los resultados son los mismos que los obtenidos originalmente (es decir, si las mediciones son del primer tipo en la terminología de Pauli), entonces la interpretación ortodoxa del principio de incertidumbre también es válida.

La prueba a la afirmación anterior es como sigue (Jammer, 1974, pp. 487-488). Supongamos que la interpretación ortodoxa del principio de incertidumbre es incorrecta. Entonces, es posible medir simultáneamente en un sistema individual dos variables canónicas conjugadas con precisión arbitraria. Luego, podríamos construir un ensemble de sistemas con valores de las variables conjugadas en un intervalo arbitrariamente pequeño. En consecuencia, el producto de sus desviaciones estándar podría ser más pequeño que el límite impuesto por el principio de incertidumbre. Es decir, la interpretación de ensemble del principio de incertidumbre también es incorrecta. Concluimos que si la interpretación ortodoxa del principio de incertidumbre es incorrecta también lo es la interpretación de ensemble. Por lo tanto, si la interpretación de ensemble del principio de incertidumbre es correcta también lo es la interpretación ortodoxa.

Esto significa que si las mediciones son del tipo requerido, el principio de incertidumbre impone un límite mínimo al producto de las desviaciones estándar de las variables conjugadas de un ensemble, y además, implica que no pueden conocerse simultáneamente con precisión arbitraria las variables conjugadas de un sistema individual. Vemos que para obtener la conclusión anterior debe hacerse una suposición sobre la naturaleza de las mediciones; esto concierne a la teoría de la medida, sobre la cual existe gran controversia (vea por ejemplo: Jammer, 1974, capítulo 11).

2.3 *Determinismo y causalidad en la mecánica cuántica*

Algunos de los conceptos más importantes de la física clásica que han requerido una reconsideración en la física cuántica debido al principio de incertidumbre son los de causalidad y determinismo. Ambos conceptos están íntimamente relacionados, y se refieren a la existencia de leyes naturales que permiten predecir la evolución temporal de un sistema físico si se conocen sus condiciones iniciales. En general, se considera que la mecánica clásica es determinista y causal; sin embargo, no lo es la mecánica cuántica, al menos en el mismo sentido que la mecánica clásica. El cambio que implica el principio de incertidumbre en estos conceptos es quizá el de mayor disgusto para muchos físicos, pues modifica la creencia de que todos los fenómenos en la física se rigen por leyes deterministas. Einstein fue uno de los más fuertes creyentes en que la física es determinista y que por lo tanto la mecánica cuántica es una teoría incompleta. En algunas de sus cartas dirigidas a Born, Einstein expresa su inconformidad con la teoría cuántica y su esperanza en que ésta sea remplazada por una teoría determinista. En una carta con fecha del 7 de noviembre de 1944 dice (citado en Born, 1949, p. 122):

"En nuestras esperanzas científicas hemos avanzado hacia posiciones opuestas. Tú crees en el dios que juega a los dados, y yo en la ley perfecta en un mundo de algo existente objetivamente que trato de entender en una forma especulativa. Espero que alguien encuentre una forma más realista, o un fundamento más tangible para tal concepción que la que se me ha dado. El gran

éxito inicial de la teoría cuántica no puede convertirme en creyente del juego fundamental de dados.”

En otra carta, con fecha de 3 de diciembre de 1947 expresa lo siguiente (citado en Born, 1949, pp. 122-123):

“...estoy absolutamente convencido de que eventualmente alguien llegará a una teoría en la cual los objetos conectados por leyes no son probabilidades, sino hechos concebidos, como uno tomaba por garantizado hace poco tiempo. Sin embargo, no puedo proveer argumentos lógicos para mi convicción, pero puedo únicamente llamar a mi pequeño dedo como testigo, el cual no puede reclamar ninguna autoridad para ser respetado fuera de mi propia piel.”

En las cartas anteriores, Einstein expresa sus esperanzas de que se encuentre una teoría que no sea probabilística, y que sea determinista en el sentido estricto de la mecánica clásica. Veremos a continuación que diversos autores interpretan distintas formas de determinismo y causalidad, pero todos se desvían de la forma exacta de éstos conceptos en la mecánica clásica, que es la forma esperada por Einstein.

Vimos en la sección 2.1.3 que en la idea de Heisenberg, el principio de incertidumbre modifica la idea clásica de que la física es determinista y causal; pues según él, no es posible conocer con total precisión el comportamiento futuro de un sistema debido a la imposibilidad de conocer exactamente, en un tiempo dado, cantidades como el momento y la posición. Puede refutarse la afirmación de Heisenberg diciendo que sus relaciones de incertidumbre implican que el principio de causalidad no es aplicable en mecánica cuántica, mas no que éste no se cumpla. Debido a que en el enunciado lógico: “si A se satisface entonces B se cumple”, no puede negarse la validez de B si no existe la hipótesis A; en el caso que nos atañe, no puede negarse que exista la ley de causalidad sin que exista la condición de que en un tiempo dado se conocen exactamente todos los datos del sistema físico. En otras palabras, las relaciones de

incertidumbre impiden comprobar si se cumple el principio de causalidad, pero no prueban su inexistencia.

Sin embargo Heisenberg dice que como la física se limita a estudiar las relaciones entre cantidades que pueden ser medidas mediante algún experimento, carece de sentido dar la posibilidad de la existencia de algo que no puede observarse. Con este argumento concluye que como las relaciones de incertidumbre impiden que pueda observarse la ley de causalidad, entonces ésta como es entendida en el sentido clásico no existe en la teoría cuántica. Sin embargo propone una forma distinta de expresar el principio de causalidad: “si en un tiempo dado todos los datos de un sistema físico son conocidos entonces existen en un tiempo posterior, experimentos cuyos resultados pueden ser exactamente predichos, siempre que el sistema no esté sujeto mas que a las perturbaciones necesarias para la realización del experimento”. Heisenberg reconoce el significado y la validez del principio de causalidad pero en una forma restringida (Jammer, 1974, pp.75-78).

La idea de Bohr respecto a la causalidad en la mecánica cuántica es muy parecida a la de Heisenberg. Como vimos en la sección 2.1.5, para Bohr, la indivisibilidad del cuanto de acción es la responsable de que no exista una descripción causal del comportamiento de átomos individuales en el espacio y el tiempo; pues sólo puede asignarse una probabilidad a éste, teniendo el átomo la libertad de escoger entre varias posibilidades. La complementariedad de Bohr dice que el experimentador escoge una descripción del fenómeno observado en términos de coordenadas de espacio y tiempo, o una descripción causal en términos de leyes de conservación. Según Bohr, para tener una descripción causal es necesario poder conocer el momento y la energía de una partícula, de acuerdo a las relaciones de incertidumbre, esto impide una descripción en términos de las coordenadas de espacio y tiempo.

Mientras que Bohr se refiere a la causalidad como aplicable al comportamiento de una partícula; Born reclama una causalidad distinta, aplicable a las probabilidades del comportamiento de una

partícula y no a su comportamiento en si (Born, 1949, capítulo 9). Born explica el concepto de causalidad y lo compara con el de determinismo, afirmando que existe una relación entre éstos, pero haciendo notar que no son equivalentes pues existe una diferencia entre ellos:

“Causalidad postula que existen leyes mediante las cuales, la ocurrencia de una entidad B de cierta clase depende de la ocurrencia de una entidad A de otra clase, donde la palabra ‘entidad’ significa cualquier objeto físico, fenómeno, situación o evento. A es llamada la causa y B el efecto.

Determinismo postula que eventos a tiempos diferentes son conectados por leyes, de tal forma que pueden realizarse predicciones de situaciones desconocidas” (Born, 1949, p. 9).

Vemos que de acuerdo a Born, para que exista determinismo es necesaria la causalidad; pero para tener determinismo debe agregarse a la causalidad, la posibilidad de hacer predicciones, además de una relación temporal que determina los eventos. Es decir, el determinismo se refiere a la causalidad de eventos que permite hacer predicciones.

Según la interpretación ortodoxa, la mecánica cuántica no puede hacer predicciones como lo hace la mecánica clásica. Pues como indica su principio de incertidumbre, en un instante dado es imposible conocer con precisión absoluta los valores de las variables canónicas conjugadas, en particular la posición y el momento. Es decir, las condiciones iniciales en términos clásicos no se conocen con absoluta certeza, por lo tanto no podrá predecirse el comportamiento futuro, salvo en términos de probabilidades. Es en este sentido que la teoría cuántica es indeterminista, según la definición de determinismo dada por Born.

Una característica de la física clásica es que supone situaciones objetivas que pueden siempre ser observadas, y que existen procesos de medición en los cuales éstas no se alteran. A diferencia de en física cuántica, donde según la interpretación ortodoxa, medición implica

necesariamente una alteración al estado del sistema observado. Pero Born argumenta que tal suposición en la física clásica no es correcta, ya que existe siempre alguna interacción con los medios de observación que impide una medición en la que no se altere el objeto observado. Por lo tanto, en la física ya sea clásica o cuántica, observar sin alterar al sistema es imposible.

Born dice que aunque la mecánica cuántica es una teoría probabilística, cumple el principio de causalidad. Según su definición de causalidad, la mecánica cuántica es causal porque los elementos descritos tienen una causa, dichos elementos son las probabilidades de eventos aislados y no los eventos en sí. En mecánica clásica la causa de los efectos observados es la fuerza aplicada al sistema físico, o en otras palabras el potencial que la genera; mientras que en mecánica cuántica, es el hamiltoniano quien contiene la causa, pues éste incluye el potencial. Las probabilidades cumplen leyes descritas por la teoría porque la función de onda satisface la ecuación de Schrödinger. El principio de causalidad se cumple en la mecánica cuántica si nos referimos a la descripción de probabilidades. Vemos aquí una clara diferencia con el concepto de causalidad de Bohr, porque éste se refiere a la descripción de un solo evento, por ejemplo a un átomo, no a un ensemble de ellos. En la siguiente frase, Born expresa claramente su postura respecto a la causalidad y el determinismo en mecánica cuántica: “tenemos la situación paradójica de que los eventos observables obedecen leyes de azar, pero que la probabilidad de estos eventos se propaga de acuerdo a leyes que son en todas las características esenciales leyes causales” (Born, 1949, p. 103).

2.3.1 La interpretación causal de David Bohm

John von Neumann parecía haber demostrado que las probabilidades en la mecánica cuántica no se deben a nuestra ignorancia de ciertas variables ocultas⁴. Si éste fuera el caso, el

⁴ Las variables ocultas son supuestos parámetros no contemplados por la mecánica cuántica que permitirían un conocimiento preciso de los sistemas cuánticos. Si existen variables ocultas entonces la mecánica cuántica es una teoría incompleta. El debate sobre la existencia de las variables ocultas está activo y aun no hay un resultado claro, se estudia en relación con los temas de 'realismo' y 'localidad' a partir de ciertos teoremas como el de Bell. Para el lector interesado sugerimos una introducción al tema de

determinismo estaría perdido en la mecánica cuántica. Sin embargo, David Bohm construyó una interpretación de la mecánica cuántica en término de variables ocultas (éstas son los momentos y posiciones de las partículas, que en la interpretación usual no tienen valores definidos simultáneamente) que da las mismas predicciones que la mecánica cuántica (Bohm, 1952a); demostrando así la invalidez de las conclusiones de von Neumann.

En la interpretación propuesta por Bohm cada sistema individual se encuentra en un estado precisamente definible, cuyo cambio en el tiempo es determinado por leyes definidas. Propone un nuevo potencial que llama 'potencial cuántico' y que está dado en términos de la función de onda, a la cual le atribuye un significado físico real y le llama campo- ψ . Concluye que puede hacer una descripción causal de la dinámica de las partículas, que es análoga a la descripción clásica. Según su interpretación, las partículas tienen posiciones y velocidades completamente definidas simultáneamente. Existe una imposibilidad de medir simultáneamente dos variables conjugadas de un sistema, pero ésta es una imposibilidad práctica debido a la interacción entre aparato de medición y sistema observado, mas no una imposibilidad concerniente al sistema en sí.

Concluye que siguiendo su interpretación se obtienen todos los resultados de la interpretación usual si se asumen tres puntos mutuamente consistentes:

- (1) Que el campo- ψ satisface la ecuación de Schrödinger.
- (2) Que el momento de la partícula se restringe a $\vec{P} = \nabla S(\vec{x})$, donde $\psi = |\psi| e^{iS/\hbar}$.
- (3) Que no se predice o controla la posición precisa de la partícula, pero se tiene en la práctica un ensemble estadístico con densidad de probabilidad $P(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2$. Sin embargo, el uso de estadísticas no es inherente a la estructura conceptual, simplemente es consecuencia de la ignorancia de las condiciones iniciales precisas de la partícula.

las variables ocultas en el artículo de Bell (1966) y una exposición más moderna en el artículo de Laloë (2001).

La anterior es la llamada ‘interpretación causal’ de Bohm. Ésta se refiere a una sola partícula. Una extensión de dicha interpretación se hace en el contexto estocástico al describir a un ensemble de partículas (Bohm y Hiley, 1993). La consideración extra que se hace es que la velocidad $v_i(t)$ de cada partícula consta de dos términos: una velocidad promedio dada por $\frac{\nabla S(\bar{x}_i)}{m}$ y un término azaroso adicional $\xi_i(t)$ con promedio cero debido a un proceso estocástico; de tal forma que

$$v_i(t) = \frac{\nabla S(\bar{x}_i)}{m} + \xi_i(t). \quad (2.15)$$

De acuerdo a la interpretación de Bohm, podrían existir modificaciones a la formulación matemática actual de la mecánica cuántica renunciando a las tres condiciones mencionadas arriba, cuyas predicciones a escalas suficientemente pequeñas serían distintas a las de la teoría actual. En principio, tales modificaciones permitirían medir simultáneamente la posición y el momento de una partícula con precisiones arbitrariamente grandes (Bohm, 1952b). Con dicha modificación, la función de onda no representaría una amplitud de probabilidad; consecuentemente, un experimento que midiera la densidad de probabilidad ρ y que distinguiera una diferencia con la norma al cuadrado de la función de onda podría verificar que la interpretación probabilística de la función de onda es inadecuada. Bohm prueba que si inicialmente la densidad de probabilidad de un ensemble de partículas fuera distinta a la norma al cuadrado de la función de onda, entonces por un proceso de colisiones entre las partículas, la primera se igualaría finalmente a la segunda y a partir de ese momento se mantendrían iguales (Bohm, 1953). Por lo tanto, la modificación propuesta es consistente con la mecánica cuántica una vez que ρ se ha igualado con $|\psi|^2$.

Un modelo particular con dichas modificaciones que es consistente con la interpretación causal de Bohm es el que propuso junto con Jean-Pierre Vigiér (Bohm y Vigiér, 1954). En éste, el

potencial cuántico se asocia con la tensión interna de un fluido, y las partículas toman la forma de inhomogeneidades que se mueven con la velocidad local del fluido. En un fluido real las ecuaciones hidrodinámicas solo describen el movimiento promedio, mientras que el movimiento real tiene componentes extra debido a fluctuaciones muy irregulares. Análogamente, en el modelo propuesto, la ecuación de Schrödinger sólo describe el movimiento promedio de las partículas, pero no las fluctuaciones cuánticas irregulares. Por lo tanto, en este modelo el principio de incertidumbre se debe a las fluctuaciones cuánticas, las cuales tienen como origen el movimiento irregular del campo- ψ . Esto a diferencia de la interpretación ortodoxa, según la cual, dichas fluctuaciones son elementos fundamentales de realidad que no pueden ser analizadas en mayor detalle.

2.3.2 La electrodinámica estocástica lineal

La electrodinámica estocástica (EDE) es una teoría que se ha desarrollado durante las últimas décadas y que pretende sentar las bases fundamentales de la mecánica cuántica. Una versión actual de esta teoría es la electrodinámica estocástica lineal (EDEL), la cual tiene mayores predicciones que su sucesora, a continuación daremos una breve descripción de ésta.

El postulado fundamental que comparten la EDE y la EDEL es que el campo de radiación correspondiente al vacío (a cero fotones en el lenguaje cuántico) es real y fluctuante, con energía promedio por modo normal de frecuencia ω de valor $\hbar\omega/2$ y densidad espectral $\rho(\omega) = \hbar\omega^3 / 2\pi^2 c^3$. Además tienen como conjetura fundamental que a través de su interacción con este campo, la materia adquiere propiedades estocásticas y dinámicas, incluidas las propiedades ondulatorias, que eventualmente la guían a su comportamiento cuántico. La EDE, como se le desarrolló, resultó limitada al estudio de problemas lineales. Sin embargo, tales limitaciones no las presenta la EDEL.

La EDEL es una teoría causal; el movimiento de una partícula cargada se describe por la ecuación de Abraham-Lorentz:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) + m\ddot{\vec{x}} + e\vec{E}(t). \quad (2.16)$$

La cantidad $\tau = 2e^2 / 3mc^3$ depende de los valores de masa y carga de la partícula. El término $m\ddot{\vec{x}}$ es la fuerza de reacción debido a la radiación, mientras que el término $e\vec{E}(t)$ corresponde a la fuerza eléctrica ejercida por el campo de fondo. El campo \vec{E} no tiene dependencia espacial pues la longitud de onda de los modos relevantes se supone mucho mayor que la amplitud del movimiento de la partícula.

Las premisas en las que se basa la EDEL son las siguientes:

1. El sistema bajo estudio alcanza un estado de equilibrio, en el cual la tasa promedio de energía radiada por la partícula iguala a la tasa promedio de energía que absorbe del campo. Cuando se cumple esta condición de equilibrio para cada frecuencia se dice que el sistema ha alcanzado el 'régimen cuántico'.
2. Cuando se ha alcanzado el régimen cuántico el campo de fondo ha adquirido control sobre el movimiento de la parte material del sistema.
3. Se cumple el principio de ergodicidad. Es decir, el promedio temporal de la posición de una partícula es igual al promedio espacial de las posiciones de las partículas de un ensemble a un tiempo dado.

Partiendo de los tres puntos anteriores, la EDEL predice los mismos resultados que la mecánica cuántica. Tiene además la ventaja de dar explicaciones físicas a preguntas que la mecánica cuántica solo da respuestas formales. Por ejemplo, la estabilidad de los átomos es explicada por esta teoría como resultado del equilibrio de la potencia radiada por el electrón debido a su aceleración, y la potencia que absorbe del campo de fondo.

De acuerdo a la EDEL (y a la EDE), la mecánica cuántica describe el comportamiento promedio de un ensemble estadístico; los principios presentados no se cumplen para una partícula individual. Por lo tanto, la EDEL apoya la interpretación de ensemble de la mecánica cuántica.

En esta teoría las trayectorias existen tal como se expresa en la ecuación (2.16), a diferencia de en la interpretación usual de la mecánica cuántica. Sin embargo, éstas no pueden conocerse debido a que la realización específica del campo de fondo es desconocida. En este sentido la descripción final es indeterminista, aunque es causal y realista.

Las fluctuaciones cuánticas, representadas por la relación de incertidumbre

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4},$$

se consideran irreducibles en la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica. De acuerdo a esta interpretación, las relaciones de incertidumbre son intrínsecas a la materia. Por otro lado, de acuerdo a la EDEL, las fluctuaciones cuánticas tienen como origen el comportamiento estocástico del campo de fondo con el cual la materia interactúa alcanzando el equilibrio. Desde esta perspectiva, las relaciones de incertidumbre son propiedades que adquiere la materia cuando se alcanza el régimen cuántico, mas no son propiedades intrínsecas a ella. Antes de alcanzarse el régimen cuántico, para tiempos suficientemente pequeños después de que las partículas son conectadas con el vacío, las relaciones de incertidumbre pueden ser violadas (de la Peña y Cetto, 2001; 2005; 2007; de la Peña, 2006, capítulo 23).

2.4 ¿Puede violarse el principio de incertidumbre?

2.4.1 ¿Puede violarse el principio de incertidumbre de la interpretación ortodoxa?

Hasta el momento no se han realizado experimentos que violen el principio de incertidumbre como lo entiende la interpretación ortodoxa. En un artículo de 1973 (Albergotti, 1973) se estima el producto de las incertidumbres de las variables conjugadas en algunos experimentos históricos del siglo 20. Los experimentos cuyo producto de incertidumbre dan un menor valor son: el microscopio de electrones con $\delta x \delta p \sim 20\hbar$ y el efecto Mössbauer con $\delta E \delta t \sim 20\hbar$. Los otros experimentos analizados dan un valor al producto de incertidumbres con varios órdenes de magnitud mayor a la constante de Planck.

También se han presentado diversos intentos por diseñar experimentos pensados en los cuales se viole el principio de incertidumbre de la interpretación ortodoxa; pero ninguno de ellos es concluyente. Por ejemplo, Ruark (1928a) propuso un experimento pensado en el que aparentemente se violaría el principio de incertidumbre. El dispositivo propuesto consiste en dos rendijas separadas una distancia d , que se abren por un tiempo t pequeño. Una partícula se hace pasar a través de las rendijas. Haciendo d suficientemente grande y t suficientemente pequeño podría pensarse que puede medirse la velocidad de la partícula con precisión tan grande como se quiera. Argumenta que el error en el razonamiento anterior consiste en que los aparatos de medición son agregados de átomos sujetos a fluctuaciones; por lo tanto el principio de incertidumbre se aplica a ellos y sigue siendo válido en el experimento. Kennard (1928) critica el razonamiento anterior. Dice que Ruark interpreta incorrectamente la medición de la velocidad; argumenta que en realidad mide la velocidad promedio y no la velocidad instantánea de una partícula como es requerido para aplicar el principio de incertidumbre. Posteriormente Ruark corrigió su razonamiento (Ruark, 1928b), diciendo que la verdadera razón de que se satisfaga el principio de incertidumbre en su experimento pensado es que ocurren cambios en la velocidad de la partícula cuando ésta pasa por las rendijas.

Otro ejemplo es el experimento pensado presentado por Robinson (1968), en el cual supuestamente se viola el principio de incertidumbre. En el experimento, una fuente de baja intensidad emite partículas cargadas sobre el extremo de un tubo largo y delgado inmerso en campos eléctrico E y magnético B , estáticos, uniformes y perpendiculares entre si. En el extremo cercano a la fuente se encuentra el detector de partículas D_1 , en el otro extremo del tubo se encuentra el detector D_2 . Solo las partículas con velocidad

$$v = E / B$$

pueden atravesar el tubo sin ser deflectadas y logran llegar a D_2 . Si una partícula es detectada en D_1 al tiempo t_1 y en D_2 al tiempo t_2 , entonces su posición dentro del tubo al tiempo t , con $t_1 < t < t_2$, es

$$x = x_1 + v(t - t_1) = x_1 + E(t - t_1) / B .$$

Midiendo el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ y las magnitudes de los campos E y B con precisiones suficientemente grandes, la posición x y la velocidad v pueden conocerse simultáneamente con incertidumbres arbitrariamente pequeñas. Robinson concluye que se viola así el principio de incertidumbre de Heisenberg. Sin embargo, la conclusión de Robinson es criticada por varios autores (Billete et al. 1969; Ballentine, 1969), y se demuestra que es falsa. El error en el razonamiento de Robinson es que la posición x de la partícula dentro del tubo se refiere al pasado. Para calcular x es necesario que la partícula sea detectada en D_2 al final del tubo, entonces puede conocerse cual era su velocidad mientras viajaba por el tubo. Pero en el momento de interactuar con D_2 su velocidad cambia y ya no puede utilizarse como una condición inicial que permita hacer cálculos de su posición en el futuro. Como dijo Heisenberg, el principio de incertidumbre no se refiere al pasado; por lo tanto, el principio de incertidumbre no se viola en el experimento de Robinson.

Un ejemplo más que muestra esencialmente el mismo razonamiento de Robinson, aunque las condiciones del experimento son distintas, es uno presentado por Ballentine (1970) en el cual

concluye que puede medirse simultáneamente la posición y el momento de una partícula con incertidumbres arbitrariamente pequeñas. Sin embargo, veremos que esto no significa que en este caso se viole el principio de incertidumbre de la interpretación ortodoxa. La aparente contradicción se debe a que, de acuerdo a Ballentine, el principio de incertidumbre se refiere a la preparación de estado y no a la medición; mientras que la interpretación ortodoxa llama medición al proceso que la interpretación de ensemble reconoce como preparación de estado.

A continuación analizaremos el experimento propuesto por Ballentine. El experimento se basa en el microcopio de rayos gamma de Heisenberg. Como vimos en la sección 2.1.1, la conclusión de Heisenberg es que debido a la difracción del fotón, se produce una incertidumbre en el momento y posición transversales del electrón, cuyo producto tiene orden de magnitud igual a la constante de Planck. El argumento de Ballentine es como sigue. Consideremos el caso análogo en que un fotón es dispersado al pasar por una rendija, y que éste hace impacto sobre una pantalla a una distancia L de la rendija. La medición de la posición y del momento transversal del fotón se hace cuando éste produce una marca sobre la pantalla. La incertidumbre δy en la posición sobre la pantalla será igual al ancho de la marca. El experimento se esquematiza en la figura 2.6.

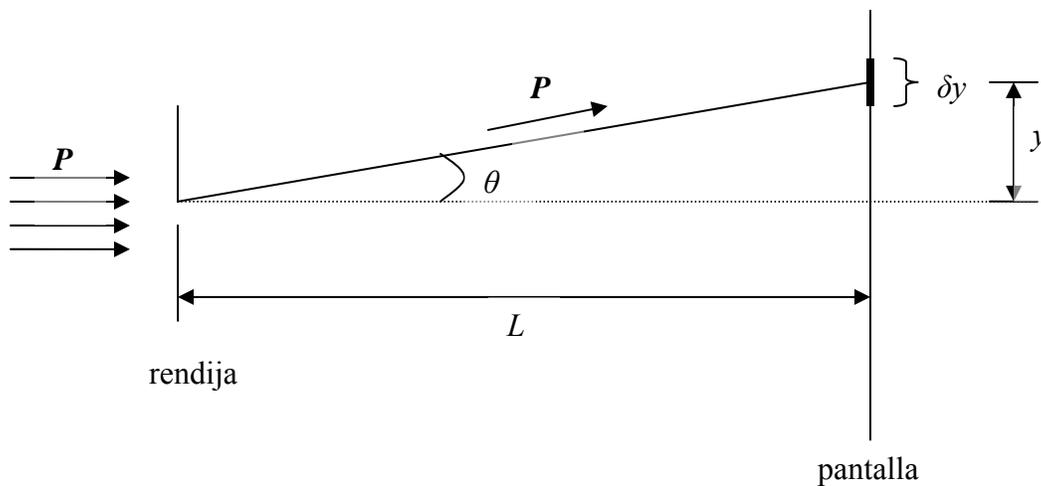


Figura 2.6. Esquema del experimento pensado de Ballentine.

El momento transversal medido es

$$P_y = P \text{sen } \theta,$$

donde θ es el ángulo que se dispersa el fotón, y P es la magnitud del momento del fotón.

Haciendo L muy grande, la incertidumbre δP_y del momento transversal puede hacerse arbitrariamente pequeña, como se muestra a continuación.

Consideremos un fotón que es dispersado por la rendija con un ángulo θ pequeño. Entonces, la incertidumbre δP_y es

$$\delta P_y = P \delta \theta + \theta \delta P \quad (2.17)$$

Como θ es pequeño, podemos aproximararlo con la siguiente expresión:

$$\theta \cong \frac{y}{L}.$$

La distancia L entre la rendija y la pantalla puede hacerse tan grande como se quiera, pero la altura y a la que incide el fotón en la pantalla está determinada por θ y L . Por tal motivo, debemos expresar δP_y en términos de θ y L ; haciendo esto obtenemos que

$$\delta \theta = \frac{1}{L} \delta y + \frac{\theta}{L} \delta L \quad (2.18)$$

Por otro lado, el momento del haz de fotones tiene una incertidumbre δP debido a la relación de incertidumbre. Si δP fuera cero significaría que la posición de los fotones es completamente desconocida; sin embargo, su posición debe ser conocida con una incertidumbre que a lo sumo es del orden de magnitud de la distancia entre la rendija y la pantalla, es decir,

$$\delta x \approx L.$$

Entonces, de acuerdo a la interpretación ortodoxa del principio de incertidumbre, debemos tener que

$$\delta P \approx \frac{h}{L} \quad (2.19)$$

Sustituyendo las expresiones (2.18) y (2.19) en la ecuación (2.17), y multiplicándola por δy se obtiene

$$\delta P_y \delta y \approx P \left(\frac{1}{L} \delta y + \frac{\theta}{L} \delta L \right) \delta y + \frac{h\theta}{L} \delta y \quad (2.20)$$

Si hacemos L suficientemente grande, entonces el producto de las incertidumbres de momento y posición transversal del fotón puede hacerse arbitrariamente pequeño, violándose así el principio de incertidumbre. Sin embargo, el razonamiento anterior no es consistente con la interpretación ortodoxa; por tal motivo, no puede concluirse que en este ejemplo no se cumple el principio de incertidumbre como lo entiende esta interpretación.

Analicemos qué argumentos expuestos arriba son inválidos según la interpretación ortodoxa. En primer lugar, considere que el fotón atraviesa la rendija al tiempo t_0 y choca con la pantalla al tiempo t . Entonces, al tiempo t se ha medido la posición transversal del fotón. Del análisis geométrico presentado en la figura 2.6 podría concluirse erróneamente que se ha medido el momento transversal del fotón al tiempo t ; pero en realidad se ha medido para tiempos menores a t y mayores a t_0 ; pues al tiempo t , el momento del fotón se ha modificado al impedirle su libre propagación (de hecho, el fotón ha sido absorbido por la pantalla). Por lo tanto, la afirmación de que se midieron ambas: la posición y el momento que tiene el fotón al tiempo t es incorrecta. En otras palabras, el momento se midió para tiempos pasados al instante en que se midió la posición; en este caso el principio de incertidumbre no es aplicable; recordemos las palabras de Heisenberg (que citamos en la sección 2.1.3) donde hace manifiesta la consideración anterior: "...la relación de incertidumbre no se refiere al pasado...para tiempos pasados $\delta p \delta q$ es más pequeño que el valor del límite usual, pero este conocimiento del pasado es de un carácter

puramente especulativo, ya que nunca (debido al cambio desconocido en el momento causado por la medición de la posición) puede ser usado como una condición inicial en ningún cálculo del futuro... y por lo tanto no puede ser sujeto a verificación experimental” (Heisenberg 1930, p.20).

Notamos que la diferencia con el concepto de medición de Heisenberg, es que para éste, la posición del fotón se mide al pasar por la rendija y no al incidir en la pantalla. De esta forma el producto de las incertidumbres no supera el límite dado. Ballentine distingue el concepto de medición de Heisenberg mas bien como una preparación de estado. La preparación de estado se refiere al acto posterior a la interacción con un aparato (en este caso la rendija); mientras que la medición consiste en el acto previo a la interacción (en este caso la interacción es con la pantalla al incidir sobre ella).

2.4.1.1 El argumento de Einstein Podolsky y Rosen

Aunque Einstein Podolsky y Rosen (1935) no trataron específicamente el principio de incertidumbre en su famoso artículo, presentaron un análisis novedoso al tratar con partículas correlacionadas. Haciendo un análisis parecido al de ellos, y si las suposiciones que hicieron fueran válidas, podría violarse el principio de incertidumbre como lo entiende la interpretación ortodoxa. Trataremos primero el argumento de Einstein Podolsky y Rosen (EPR) y posteriormente daremos una versión distinta para observar la conexión con el principio de incertidumbre.

EPR dieron un argumento con el cual concluyeron que la mecánica cuántica es una teoría incompleta. Sin embargo, para obtener dicha conclusión tuvieron que hacer una suposición (la de localidad) que aunque es intuitiva no necesariamente es correcta. En su artículo presentaron un criterio razonable de realidad física que dice lo siguiente “si, de ninguna forma se perturba a un sistema, podemos predecir con certeza (i.e. con probabilidad igual a uno) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física que corresponde a esta cantidad física”.

Partiendo del criterio anterior, EPR propusieron como un ejemplo ilustrativo un par de partículas que interactúan en una pequeña región del espacio durante cierto intervalo de tiempo T . Después de este tiempo las partículas se alejan suficientemente y dejan de interactuar. Antes de la interacción se conoce el estado cuántico de cada partícula. Con ayuda de la ecuación de Schrödinger se puede calcular el estado del sistema compuesto por las dos partículas a cualquier tiempo, sin embargo no puede conocerse el estado de una partícula por separado. A un tiempo $t > T$ se mide la posición de la partícula 1, entonces puede predecirse la posición de la partícula 2. Si en lugar de esto, se mide el momento de la partícula 1, entonces puede predecirse el momento de la partícula 2. Como suponen EPR que al tiempo t las partículas ya no interactúan, entonces puede predecirse la posición y el momento de la partícula 2 sin de ninguna manera haberla perturbado. Esto significa que existen elementos de realidad física asociados a la posición y al momento de la partícula 2. Pero, como la posición y momento son cantidades conjugadas que no conmutan, la mecánica cuántica no predice los valores simultáneos de éstos. Por lo tanto, EPR concluyen que la mecánica cuántica es una teoría incompleta. Bohr (1935) respondió al artículo de EPR diciendo que las condiciones experimentales impiden que pueda llevarse a cabo la suposición de EPR de que “de ninguna manera se perturba” a la partícula 2. Bohr muestra un posible arreglo experimental con el cual podría medirse la posición o el momento de la partícula 1, y conocer la posición o el momento de la partícula 2. Si se elige medir la posición, el sistema se altera inevitablemente perdiéndose la posibilidad de medir el momento. De otra forma, si se elige medir el momento ya no puede medirse la posición. Bohr dice que la suposición de EPR de que pueda medirse posición o momento de la partícula 1 sin “de ninguna manera perturbar” a la partícula 2 es ambigua, y que esto no puede aplicarse en la mecánica cuántica, como lo explica con su complementariedad. Por lo tanto, concluye que la afirmación de EPR de que la mecánica cuántica es una teoría incompleta es injustificada.

Nosotros daremos un enfoque distinto al dado por EPR para que se observe la relación con el principio de incertidumbre. De acuerdo a EPR las partículas ya no interactúan al tiempo t , por lo tanto la medición que se realice sobre una partícula no altera el estado de la otra. Supongamos que al tiempo t se mide la posición de la partícula 1 y el momento de la partícula 2. Como se conoce el estado del sistema compuesto, las mediciones efectuadas no solo permiten conocer la posición de la partícula 1 y el momento de la partícula 2, sino también la posición de la partícula 2 y el momento de la partícula 1. En otras palabras, con este experimento se podría conocer posición y momento de una partícula con precisión tan grande como se quiera, violándose así el principio de incertidumbre.

Sin embargo, en el argumento de EPR se hace la suposición de que para un tiempo $t > T$ las partículas dejan de interactuar porque se encuentran suficientemente alejadas, y que por consiguiente la medición sobre una partícula no produce una alteración instantánea del estado de la otra; este es el principio de localidad. Este principio es intuitivo y parece razonable, pero no necesariamente es cierto. Otra posibilidad es que las partículas nunca dejen de interactuar cuando se han correlacionado previamente, aunque se encuentren alejadas por una distancia muy grande, y que al realizar una medición sobre una partícula la otra sufre un cambio instantáneo en su estado. Si este es el caso, entonces la medición de la posición o del momento de una de las partículas produce una alteración instantánea en la posición o momento de la otra. De tal forma que no puede violarse el principio de incertidumbre.

Podemos resumir el argumento de EPR con el siguiente teorema: “si las predicciones de la mecánica cuántica son correctas (aun para sistemas compuestos de partículas correlacionadas remotamente) y si la realidad física puede describirse en una forma local (o separable), entonces la mecánica cuántica es necesariamente incompleta: algunos ‘elemento de realidad’ existen en la naturaleza que son ignorados por esta teoría.” (Laloë, 2001)

Respecto al principio de incertidumbre podemos decir que: si las predicciones de la mecánica cuántica son correctas (aun para sistemas compuestos de partículas correlacionadas remotamente) y si la realidad física puede describirse en una forma local (o separable), entonces puede violarse el principio de incertidumbre.

2.4.1.1.1 El teorema de Bell

El artículo de EPR inició un tema intenso de investigación en los fundamentos de la mecánica cuántica, el de realismo y localidad. El siguiente gran paso fue dado por Bell (1964), quien siguió el razonamiento de EPR para probar si una teoría local y realista en la que nuevos parámetros, llamados 'variables ocultas', que pudieran representar los elementos de realidad física tratados por EPR tiene predicciones compatibles con la mecánica cuántica. El resultado que obtuvo se presenta en el llamado teorema de Bell que implica lo siguiente: una teoría local en la cual sea válida la noción de los 'elementos de realidad' como los definieron EPR es incompatible con los resultados de la mecánica cuántica (Laloë, 2001). Dicho de otra forma, realismo y localidad no pueden ser ambos válidos si todas las predicciones de la mecánica cuántica son correctas. Las teorías de variables ocultas que tienen las mismas predicciones que la mecánica cuántica tienen un carácter no local, tal como la interpretación causal de Bohm (1952). Si insistimos en que la teoría sea local y tenga predicciones compatibles con la mecánica cuántica, entonces debemos renunciar al realismo, es decir, la teoría no puede incluir variables ocultas que permitan una descripción del estado cuántico mejor que la de la mecánica cuántica.

La demostración de Bell (1964) tiene el siguiente razonamiento. Suponga un sistema formado por un par de partículas con espín $\frac{1}{2}$ formadas a partir del estado singulete que se mueven libremente en direcciones opuestas. Con aparatos de Stern-Gerlach pueden medirse las componentes de los espines $\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_2$ de las partículas 1 y 2, respectivamente. El espín de la partícula 1 se mide en la dirección de un vector unitario \vec{a} y el espín de la partícula 2 en la dirección de un vector unitario \vec{b} , obteniéndose los resultados A y B , respectivamente, los

cuales pueden tomar los valores ± 1 . Supongamos que existen variables ocultas que permiten especificar los valores de las mediciones A y B , y que se denotan con el parámetro λ . Supongamos también que la teoría es local, es decir, la medición del espín de una de las partículas no produce ninguna alteración en el estado de la otra partícula ni en el resultado de la medición de su espín. Tomando en cuenta ambas suposiciones se obtiene que los resultados A y B son funciones del vector unitario sobre el cual se proyecta el espín y de las variables ocultas, es decir,

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1.$$

La localidad se manifiesta en el hecho de que A no depende de \vec{b} y B no depende de \vec{a} . El valor promedio del producto de las proyecciones de los dos espines $\hat{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ y $\hat{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ es

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda), \quad (2.21)$$

donde $\rho(\lambda)$ es la distribución de probabilidad de λ . Por otro lado, la predicción de la mecánica cuántica es

$$\langle \hat{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \hat{\sigma}_2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (2.22)$$

Si una teoría local de variables ocultas fuera compatible con la mecánica cuántica, entonces (2.21) y (2.22) deberían dar el mismo resultado. Sin embargo, Bell mostró que esto no sucede. Por lo tanto, las teorías locales de variables ocultas son incompatibles con la mecánica cuántica, o en las palabras de Bell (1964): “En una teoría en la cual se agregan parámetros a la mecánica cuántica para determinar los resultados de mediciones individuales, sin cambiar las predicciones estadísticas, debe haber un mecanismo por el cual la utilización de un aparato de medición puede influenciar la lectura de otro instrumento, aunque sea remoto. Además, la señal involucrada debe propagarse instantáneamente...”.

Existe una forma de probar experimentalmente si la naturaleza se comporta de acuerdo a un realismo local, o si por el contrario las predicciones de la mecánica cuántica son correctas. Estos son los llamados ‘experimentos tipo Bell’ en los cuales se miden propiedades de pares de

partículas correlacionadas. Suponiendo que el estado de las partículas puede describirse con una teoría realista y local, se calculan las probabilidades de distintos resultados de las mediciones. Posteriormente, se calcula un número M (el cual mide el grado de correlación entre las partículas) como la suma de estas probabilidades. El modelo utilizado en los cálculos anteriores predice que M debe satisfacer una desigualdad, normalmente que $M \leq 2$. Se lleva a cabo el experimento y se miden las probabilidades relevantes, entonces se calcula M . Bajo ciertas condiciones del experimento se obtiene un valor de $M > 2$, de acuerdo a las predicciones de la mecánica cuántica. Los resultados de los experimentos realizados hasta ahora han sido siempre consistentes con la mecánica cuántica, violando las desigualdades de Bell. El primero de estos experimentos fue realizado en 1981 (Aspect et al, 1981) y le han seguido muchos más (uno más reciente es el de Rowe et al, 2001). La aparente conclusión es que no existen teorías realistas locales que describan correctamente los resultados experimentales, y que la mecánica cuántica sigue prediciendo los resultados correctos. Sin embargo, el debate respecto a tal conclusión sigue en pie; pues se argumenta que en los experimentos que tienen como objetivo violar las desigualdades de Bell existen deficiencias de los arreglos experimentales, llamados 'loopholes', que permiten una interpretación realista y local de los resultados (Laloë, 2001).

2.4.2 ¿Pueden violarse las relaciones de incertidumbre?

Como expusimos en la sección 2.4.1, han habido varios intentos por diseñar experimentos pensados donde no se cumpla el principio de incertidumbre como lo expresa la interpretación ortodoxa, pero todos han sido fallidos.

Sin embargo, existen interpretaciones de la mecánica cuántica que afirman que las relaciones de incertidumbre, como son expresadas formalmente por el aparato matemático de la mecánica cuántica (desigualdad (1.27)), podrían en principio ser violadas. Estas son principalmente las

interpretaciones causales de la mecánica cuántica. Por ejemplo la interpretación de Bohm, la electrodinámica estocástica, etc.

Como se expuso anteriormente, la interpretación de Bohm es consistente con nuevas teorías que tengan un formalismo matemático distinto al de la mecánica cuántica; y con el nuevo formalismo podrían, en principio, violarse las relaciones de incertidumbre. También vimos que de acuerdo a la electrodinámica estocástica lineal, las relaciones de incertidumbre no se satisfacen bajo condiciones muy particulares en las cuales el formalismo de la mecánica cuántica no es aplicable, es decir, cuando no se ha llegado al régimen cuántico.

Concluimos que si en un futuro se logra realizar un experimento en el cual se observe que se violan las relaciones de incertidumbre, entonces se demostraría que el formalismo matemático de la mecánica cuántica no siempre es válido; y una nueva teoría debería remplazar a la mecánica cuántica.

Capítulo 3. La energía y el tiempo en el principio de incertidumbre

Heisenberg (1927) enunció una relación de incertidumbre entre la energía y el tiempo análoga a la de posición y momento, basándose en una supuesta anticonmutación entre el tiempo y la energía. Aunque mostró con un experimento pensado dicha relación, no la dedujo; fue Bohr (1928) el primero en hacerlo. Como vimos en la sección 2.1.5.1 Bohr le atribuyó el significado de paquete de onda a una partícula. Mediante la ecuación de Einstein para la energía de un fotón, Bohr estableció una relación entre la frecuencia del paquete de onda y su energía. Entonces, pudo aplicar un análisis de Fourier entre la distribución de energías del paquete y su coordenada temporal; obtuvo que

$$\delta t \delta E \approx \delta x \delta p \approx h. \quad (3.1)$$

La deducción de Bohr no es rigurosa; sin embargo, como vimos en la sección 1.3, sí existe una deducción formal para la relación de incertidumbre entre la posición y el momento; ésta es

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}; \quad (3.2)$$

y vimos que se debe a la relación de conmutación

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Vimos en la sección 1.1 que en general las relaciones de incertidumbre se obtienen para dos variables representadas por operadores que no conmutan. Un fuerte argumento contra la existencia de una relación de incertidumbre para la energía del tiempo análoga a la (3.2) de la forma

$$\langle (\Delta t)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{H})^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (3.3)$$

es un teorema de Pauli en el cual concluyó que no existe un operador de tiempo en la mecánica cuántica. Por lo tanto, el tiempo juega el papel de un parámetro y no de una variable dinámica. Entonces, el tiempo conmuta con cualquier operador y en particular con el hamiltoniano:

$$[t, \hat{H}] = 0. \quad (3.4)$$

En consecuencia, nada impide que el estado $|\psi\rangle$ sea un eigenestado de \hat{H} para un valor definido de t (Nikolić, 2007). Como el tiempo no es un operador su dispersión es nula:

$$\langle (\Delta t)^2 \rangle = 0. \quad (3.5)$$

Esto significa que el tiempo no presenta fluctuaciones cuánticas análogas a las de la posición, el momento y la energía (Bunge, 1970). Sustituyendo las expresiones (3.1) y (3.2) en la desigualdad de Robertson (1.22) no obtenemos ninguna relación de incertidumbre de la forma (3.3).

3.1 El teorema de Pauli

Como ya mencionamos, Pauli presentó un teorema que le permitió concluir que no es posible construir un operador de tiempo en la mecánica cuántica. Dos requerimientos físicos asumidos en el teorema de Pauli son los siguientes (Nikolić, 2007):

1. El espectro del hamiltoniano \hat{H} debe ser acotado inferiormente. Esto se debe a que la energía no puede ser arbitrariamente negativa, pues de otra forma tal sistema no sería físicamente estable.
2. Solamente los operadores autoadjuntos tienen eigenvalores reales correspondientes a cantidades físicas. Por tal motivo, un operador de tiempo debe ser autoadjunto al igual que el hamiltoniano.

La prueba de Pauli es como sigue (Galapon, 2002). Sea \hat{H} un hamiltoniano autoadjunto. Suponga que existe un operador de tiempo, \hat{T} , autoadjunto, canónicamente conjugado a \hat{H} , es decir,

$$[\hat{T}, \hat{H}] = i\hbar. \quad (3.6)$$

Como \hat{T} es autoadjunto, entonces para toda $\beta \in \mathfrak{R}$, $\hat{U}_\beta = \exp(-i\beta\hat{T}/\hbar)$ es unitario.

Expresando a \hat{U}_β en una serie de potencias y usando la relación de conmutación (3.6)

obtenemos

$$[\hat{U}_\beta, \hat{H}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\beta/\hbar)^k}{k!} [\hat{T}^k, \hat{H}] = -\beta\hat{U}_\beta. \quad (3.7)$$

Sea $|\varphi_E\rangle$ un eigenestado de \hat{H} con eigenvalor E . De la relación de conmutación (3.7) resulta que

$$\hat{H}\hat{U}_\beta|\varphi_E\rangle = (E + \beta)\hat{U}_\beta|\varphi_E\rangle. \quad (3.8)$$

Entonces, $\hat{U}_\beta|\varphi_E\rangle$ es un eigenvector de \hat{H} con eigenvalor $(E + \beta)$. Como β puede adquirir cualquier valor real, entonces \hat{H} tiene un espectro continuo de eigenvalores que cubre todo el eje real.

De la prueba anterior se obtiene que no puede existir un operador de tiempo autoadjunto que sea canónicamente conjugado al hamiltoniano de la mecánica cuántica con espectro generalmente discreto y acotado inferiormente. Por tal motivo, Pauli concluyó que "...la introducción de un operador \hat{T} debe ser abandonada fundamentalmente y que el tiempo t en la mecánica cuántica tiene que ser considerado como un número ordinario" (citado en Galapon, 2002). El teorema de Pauli implica que no puede existir una relación de conmutación como (3.6), por lo tanto tampoco puede existir una relación de incertidumbre como (3.3).

3.2 Argumentos que apoyan la existencia de una relación de incertidumbre para la energía y el tiempo

A pesar de que las conclusiones de Pauli parecen ser muy claras, existen objeciones contra éstas. Por ejemplo, Galapon (2002) muestra que es consistente asumir la existencia de un

operador de tiempo acotado, autoadjunto y canónicamente conjugado a un hamiltoniano con espectro discreto, semiacotado o no acotado. Contra esta afirmación puede argumentarse que un operador de tiempo universal no puede ser acotado, ya que debe correr continuamente desde $-\infty$ hasta ∞ . Sin embargo, como señala Galapon, la duración de cualquier experimento es finita; por lo tanto, la introducción de un operador de tiempo no acotado es innecesaria en el plano experimental real.

Por otro lado, Hilgevoord (2002) afirma que el problema del tiempo en la mecánica cuántica se debe a una confusión que existe entre las coordenadas espaciales x y las variables de posición q de una partícula puntual. Su argumento es como sigue. La posición de una partícula puntual puede asociarse directamente con la coordenada espacial que ocupa:

$$q = x,$$

pero la ecuación anterior no debe entenderse como una identidad sino como una igualdad. Notamos que no existe un operador de coordenada espacial, al igual que no existe un operador de coordenada temporal. Ciertamente, existe el operador de posición de una partícula puntual porque ésta es una variable dinámica. Por el contrario, el tiempo es una coordenada universal del espacio-tiempo; no es una variable dinámica; por lo tanto, no se representa por un operador.

Sin embargo, al igual que una partícula puntual es un sistema físico que permite una asociación directa de su variable dinámica de posición q con la coordenada espacial x que ocupa, existen sistemas físicos que poseen una variable dinámica que tiene una relación directa con su coordenada temporal; éstos son los relojes. Los relojes pueden tener una función lineal del tiempo, como en el caso de un campo de fuerza constante donde la diferencia de momentos de una partícula es proporcional al tiempo transcurrido; o pueden ser cíclicos, en éstos el tiempo se mide con variables angulares representadas por el operador de momento angular. Hilgevoord argumenta que si se busca un operador de tiempo en mecánica cuántica, éste no debe corresponder a la coordenada universal de tiempo, la cual corre continuamente desde $-\infty$ hasta ∞ ; deben considerarse las variables dinámicas de tiempo (también llamadas variables de

reloj) asociadas a sistemas físicos específicos, es decir, a relojes cuánticos. De la misma forma que el operador de posición corresponde a la variable dinámica de posición de una partícula puntual y no a la coordenada espacial.

Otros argumentos a favor de la existencia de una relación de incertidumbre para la energía y el tiempo se basan en que la teoría de la relatividad sugiere que la posición y el tiempo deberían tratarse igualmente en una teoría cuántica relativista y que por consiguiente debería existir una cuarta relación de incertidumbre, entre la energía y el tiempo, aparte de las tres correspondientes a la posición y al momento. Particularmente, se afirma que el operador de energía está a la par con el operador de momento y que por lo tanto una cuarta relación de incertidumbre surge de manera natural. Sin embargo, debemos notar que el operador de energía en mecánica cuántica relativista no es $i\hbar\partial/\partial x^0$ sino \hat{H}/c , donde \hat{H} es el hamiltoniano del sistema. Por lo tanto, los operadores de energía y de momento no tienen expresiones análogas. El error consiste en tratar a la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle,$$

como una identidad, en lugar de una igualdad, como debe ser tratada si se considera que ésta es una ley física y no una convención (Bunge, 1970; Shalitin, 1984).

Un argumento muy común a favor de la existencia de un principio de incertidumbre para la energía y el tiempo es que éste se aplica muy bien en el análisis de resonancias: partículas compuestas de vida muy breve con una aparente relación de incertidumbre entre el ancho de la distribución de energías del estado resonante y su vida media (Wigner, 1972; Rayski y Raisky Jr., 1977; Busch, 1990a). Con el fin de evaluar la validez del argumento anterior dedicaremos la sección 3.6 a estudiar el proceso de decaimiento de un estado inestable, que puede ser por ejemplo, una resonancia o un conjunto de núcleos radiactivos; expondremos el caso de los núcleos radiactivos.

3.3 Interpretaciones del principio de incertidumbre para la energía y el tiempo

La comunidad física está dividida en dos posturas generales respecto a la existencia de una relación de incertidumbre para la energía y el tiempo: unos afirman su existencia, otros la niegan rotundamente. Entre los que apoyan su existencia hay aún más divisiones en cuanto a las distintas interpretaciones que se le asigna: algunos creen en una relación del tipo (3.3) que requiere la existencia de un operador de tiempo; otros basan sus argumentos en experimentos pensados como los de Bohr y Heisenberg; otros más se apoyan en una relación de incertidumbre distinta a la (3.3) que no requiere un operador de tiempo.

Entre los que afirman la existencia del principio de incertidumbre para la energía y el tiempo se sostienen diversas interpretaciones de su significado. Presentamos las más comunes:

1. En el proceso de medición de la energía de un sistema, el tiempo t requerido para obtener una medición con precisión δE satisface $t\delta E \geq \hbar$ (Heisenberg, 1927).
2. La duración t de la medición de la energía de un sistema implica una incertidumbre $\delta(E_f - E_0)$ en la energía de interacción entre sistema y aparato (donde E_0 y E_f son la energía del sistema antes y después de la interacción con el aparato, y $E_f - E_0$ es la energía de interacción entre el sistema y el aparato de medición), de tal forma que $t\delta(E_f - E_0) \geq \hbar$. Conforme evoluciona el sistema partícula-aparato, el aparato y la partícula interaccionan más débilmente, decreciendo así la incertidumbre de la energía (Landau y Peierls, 1931).
3. Hay una relación de incertidumbre entre el tiempo de ocurrencia de un evento cuántico individual y la energía del sistema. Las cantidades relacionadas son por ejemplo: el ancho de la distribución de energías de un estado inestable (incluyendo las resonancias, un conjunto de núcleos radiactivos, etc.) y su vida media, o la energía medida de una partícula que pasa a través de una región del espacio y la medición del instante en que esto ocurre (Wigner, 1972; Raysky y Raysky Jr., 1977; Busch, 1990a).

4. Existe una relación de incertidumbre entre la dispersión de la energía de un sistema cuántico y el tiempo de evolución de sus propiedades dinámicas. Esta interpretación es adquirida con la desigualdad de Mandelstam y Tamm.

Las interpretaciones 1 y 2 surgen como generalizaciones injustificadas de experimentos pensados particulares. Un contraejemplo fue presentado por Aharonov y Bohm (1961), en el cual presentan un proceso de medición de energía cuya duración puede ser tan pequeña como se quiera, y con incertidumbre de la energía arbitrariamente pequeña; demostrando así la invalidez de estas interpretaciones. Sin embargo, su procedimiento es muy discutido; existen argumentos en contra y a favor (Busch, 1990b). La interpretación 3 será analizada en la sección 3.6 para el caso del decaimiento de un estado inestable. La interpretación 4 es quizá la de mayor aceptación porque se basa en la desigualdad de Mandelstam y Tamm, la cual es deducida rigurosamente y de forma muy sencilla con el formalismo de la mecánica cuántica; la presentaremos en la sección 3.5.1. Además, ésta permite una generalización del principio de incertidumbre en la cual se trata de forma equivalente a las relaciones de incertidumbre para la energía y el tiempo, y para la posición y el momento. Adicionalmente, se obtiene que las relaciones de incertidumbre de Heisenberg son un caso particular de esta generalización.

3.4 ¿Permite el principio de incertidumbre que se viole el teorema de conservación de la energía?

La validez del teorema de conservación de la energía ha estado en controversia debido al principio de incertidumbre de Heisenberg. Siguiendo la interpretación 1 de la sección anterior, se afirma que la conservación de la energía puede ser violada en una cantidad δE siempre que sea durante un intervalo de tiempo $t \leq \hbar / \delta E$. Se argumenta que como el principio de incertidumbre limita nuestro conocimiento de la energía en una cantidad δE durante un intervalo de tiempo t , de acuerdo a $t\delta E \geq \hbar$, entonces la energía no puede medirse con precisión tal que

se reconozca la violación de la energía. Parece más adecuada la interpretación 2, de Landau y Peierls (1931), en la cual dicen que la energía se conserva siempre, pero debe tomarse en cuenta la energía de interacción entre sistema medido y aparato de medición, y debe reconocerse que la energía del sistema y la de interacción se desconocen ambas debido al principio de incertidumbre.

Hidekei Yukawa predijo la existencia de partículas responsables de la fuerza nuclear fuerte y el orden de magnitud de su masa. Estas partículas son los mesones pi, o piones. Yukawa construyó un modelo teórico que explica la fuerza de atracción entre los nucleones que mantienen unido al núcleo, según el cual, los nucleones intercambian piones a cortas distancias. En los libros de física nuclear y de partículas elementales se adopta la interpretación 1 del principio de incertidumbre para la energía y el tiempo para llegar a la conclusión de Yukawa. Sabiendo que la fuerza nuclear se limita a un alcance dentro del núcleo, cuyo diámetro es aproximadamente d , y que su velocidad está limitada a ser menor a la de la luz c , entonces la energía de los piones con masa m , que es aproximadamente igual a mc^2 , debe satisfacer la desigualdad $t \leq \hbar/mc^2$, donde t es el tiempo que viajan los piones entre su emisión por un nucleón y su captura por otro. Puesto que durante el tiempo t , entre la emisión de un nucleón y la captura de otro, los nucleones tienen una energía menor en una cantidad mc^2 , t tiene que ser menor que \hbar/mc^2 para que el principio de incertidumbre evite que pueda observarse experimentalmente una violación a la conservación de la energía. El tiempo que le toma a un pión viajando a la velocidad de la luz atravesar el núcleo es $t = d/c$; por lo tanto, debe satisfacerse $d/c \leq \hbar/mc^2$, obteniéndose así que $m \sim \hbar/dc$. Sustituyendo los valores de \hbar , c y $d \sim 1\text{fm}$, se obtiene que $m \sim 200\text{MeV}/c^2$. En 1947 Powell y sus colaboradores mostraron evidencia del pión de Yukawa con una masa cercana a la que predijo, con valor aproximado a $150\text{MeV}/c^2$. Siguiendo el razonamiento anterior, se establece una relación entre el alcance de las fuerzas fundamentales y la masa de las partículas intercambiadas para producir

dicha fuerza. De manera similar, los fotones son las partículas intercambiada en la interacción electromagnética; al ser su masa nula, el rango de alcance de la fuerza electromagnética es infinito. De manera análoga, como el rango de la fuerza gravitacional es infinito, se deduce que los gravitones deben tener masa nula (Krane, 1988).

Aunque el razonamiento anterior es consistente con la predicción del valor de la masa de los piones, no es necesario renunciar a la validez de la conservación de la energía para explicar dicho resultado. Podemos decir que la energía siempre está conservada, incluso durante los pequeños intervalos de tiempo t en los que existen los piones dentro del núcleo. Para apoyar nuestro punto de vista consideremos un sistema de dos nucleones. Sea E la energía que tiene cada nucleón dentro del núcleo. Supongamos que el par de nucleones está intercambiando continuamente un par de piones que tienen energía E_0 cada uno. Podemos decir que durante el intervalo de tiempo t , entre el instante en que un nucleón emite un pión y el instante en que absorbe otro, el nucleón tiene energía $E - E_0$. De tal forma que la energía total E_T , que es la energía de los nucleones $E_n = 2(E - E_0)$ más la de los piones $E_p = 2E_0$, es

$$E_T = E_n + E_p = 2(E - E_0) + 2E_0 = 2E .$$

Entonces, la energía total es la misma cuando los piones están presentes o cuando no lo están. Por lo tanto, se conserva la energía. Un argumento contra este razonamiento podría ser que la energía observada de los nucleones es E y que en consecuencia debe ser la misma cuando están presentes los piones. Sin embargo, adoptando la interpretación 1 de la sección anterior, podemos decir que durante el intervalo de tiempo t en el cual existen los piones, la energía de los nucleones no puede medirse con incertidumbre menor a E_0 , ya que debido al principio de incertidumbre

$$tE_0 \geq \hbar .$$

Por lo tanto, mientras existan los piones no puede asegurarse que la energía de los nucleones tenga valor E y no $E - E_0$. Vemos que adoptando la interpretación 1 del principio de incertidumbre para la energía y el tiempo, es común que se diga que durante pequeños intervalos de tiempo la conservación de la energía es violada, pero que dicha violación no puede verificarse mediante una medición debido al principio de incertidumbre. Por el contrario, nosotros decimos que la energía siempre está conservada, y que durante pequeños intervalos de tiempo la energía de los nucleones disminuye en una cantidad pequeña que no puede verificarse experimentalmente debido al principio de incertidumbre. Por lo tanto, si se adopta la interpretación 1 del principio de incertidumbre para la energía y el tiempo, es innecesario renunciar al teorema de conservación de la energía.

3.5 Propuestas de relación de incertidumbre para la energía y el tiempo

Hay varias propuestas para relaciones de incertidumbre entre la energía y el tiempo distintas a la (3.3); aquí expondremos tres y discutiremos su validez y significado:

1. La desigualdad de Mandelstam y Tamm. Ésta es quizá la de mayor aceptación. Presenta la ventaja de que su deducción es muy sencilla y es completamente consistente con el formalismo de la mecánica cuántica. Permite una generalización del principio de incertidumbre en la cual se tratan de forma equivalente las relaciones de incertidumbre para energía y tiempo, y para posición y momento.
2. La desigualdad de Eberly y Singh. Parecida a la desigualdad de Mandelstam y Tamm pero de carácter más general.
3. La formulación de Hilgevoord y Uffink. Es consistente con el formalismo de la mecánica cuántica; pero se deduce a partir de la desigualdad de Mandelstam y Tamm; por lo tanto, no es tan fundamental como ésta. Sin embargo, permite una generalización del principio de incertidumbre que consiste en relaciones de incertidumbre análogas para la posición y el momento, y para la energía y el tiempo. Tiene la ventaja de que propone conceptos

de incertidumbre distintos a desviaciones estándar, que siempre son finitos aun cuando las desviaciones estándar sean infinitas.

4. La relación de Wigner. Aunque en ésta el tiempo no juega el papel de un operador, es muy parecida a las relaciones de Heisenberg, pues intervienen las desviaciones estándar del tiempo y la energía de un estado particular. Presenta algunas dificultades: el significado de las cantidades que involucra no es muy claro, su deducción es muy complicada y requiere asumir algunas condiciones que no son siempre válidas.

3.5.1 Desigualdad de Mandelstam y Tamm

Mandelstam y Tamm presentaron en 1945 una desigualdad entre la dispersión de energía de un estado y el tiempo de evolución característico de sus propiedades dinámicas; seguiremos una deducción presentada comúnmente en la literatura.

Sea \hat{A} un operador hermitiano que representa una observable que no depende explícitamente del tiempo. Entonces, en la representación de Heisenberg la evolución temporal del operador está dada por

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (3.9)$$

De acuerdo a la desigualdad de Robertson (1.22):

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle [[\hat{A}, \hat{B}]]^2 \rangle, \quad (3.10)$$

y a la ecuación (3.9) tenemos que

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{H})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle [[\hat{A}, \hat{H}]]^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \left\langle \left(\frac{d\hat{A}}{dt} \right)^2 \right\rangle.$$

A partir de ahora usaremos la siguiente notación común para referirnos a la desviación estándar de un operador:

$$\Delta C \equiv \sqrt{\langle (\Delta\hat{C})^2 \rangle}. \quad (3.11)$$

Definiendo la cantidad

$$\Delta_A t \equiv \Delta A / \left| \left\langle \frac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle \right|, \quad (3.12)$$

obtenemos la desigualdad de Mandelstam y Tamm:

$$\Delta_A t \Delta H \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.13)$$

Notemos que como \hat{A} no depende explícitamente del tiempo, la siguiente igualdad es válida

$$\left\langle \frac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle.$$

Entonces $\Delta_A t$ también puede escribirse como

$$\Delta_A t = \Delta A / \left| \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle \right|. \quad (3.14)$$

Observamos de la expresión anterior que $\Delta_A t$ es el tiempo medio que la propiedad A requiere para cambiar por una cantidad del orden de su desviación estándar y se le llama tiempo de evolución de \hat{A} .

Cuando el sistema cuántico no se encuentra en un eigenestado del hamiltoniano, el tiempo de evolución de sus variables dinámicas no es arbitrariamente pequeño y queda acotado inferiormente por la desviación estándar de su espectro energético:

$$\Delta_A t \geq \frac{\hbar}{2\Delta H}.$$

Por el contrario, si el sistema se encuentra en un eigenestado de \hat{H} , el tiempo de evolución de sus variables dinámicas es infinito. En otras palabras, las variables dinámicas no cambian en lo absoluto. Es decir, en este caso el sistema se encuentra en un estado estacionario (de la Peña, 2006, pp. 250).

3.5.1.1 Generalización del principio de incertidumbre a la Mandelstam-Tamm

Luis de la Peña propuso una forma de generalizar las desigualdades de Heisenberg utilizando la forma de Mandelstam y Tamm (de la Peña, 1980). Partiendo de la desigualdad (3.10) y sustituyendo \hat{B} por \hat{p} obtenemos

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{p}] \rangle|^2.$$

Como

$$[\hat{A}, \hat{p}] = i\hbar \frac{\partial \hat{A}}{\partial x};$$

usando la notación (3.11) y definiendo $\Delta_A x$ como

$$\Delta_A x \equiv \Delta A / \left| \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} \right\rangle \right|, \quad (3.15)$$

obtenemos

$$\Delta_A x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.16)$$

$\Delta_A x$ es una distancia promedio en la cual A cambia por una cantidad del orden de su desviación estándar. En particular, si escogemos $\hat{A} = \hat{x}$, tenemos que

$$\Delta_x x = \Delta x$$

y llegamos a la relación de incertidumbre de Heisenberg (1.28)

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.17)$$

Las desigualdades (3.13) y (3.16) representan una generalización del principio de incertidumbre, que como puede apreciarse, tratan de forma equivalente a x y t .

3.5.2 Desigualdad de Eberly y Singh

Existe una desigualdad parecida a la de Mandelstam y Tamm, pero que define una cantidad temporal de forma distinta, usando la matriz de densidad $\hat{\rho}$, por lo que su carácter es más general. Esta es la desigualdad de Eberly y Singh (1973). Antes de presentarla daremos una

descripción breve del papel de la matriz de densidad en la mecánica cuántica y de algunas de sus características (Blanchard, 1982).

La matriz de densidad se define como

$$\hat{\rho} = \sum_n P_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|, \quad (3.18)$$

donde los vectores $|\psi_n\rangle$ forman un conjunto completo (y ortonormal) de estados, y P_n es la probabilidad de que el sistema descrito por $\hat{\rho}$ esté en el estado $|\psi_n\rangle$. Si un sistema es un estado puro $|p\rangle$ la matriz de densidad puede expresarse como un proyector: $\hat{\rho} = |p\rangle\langle p|$, de tal forma que $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. Ésta es la propiedad que se utiliza para definir un estado puro (de la Peña, 2006, pp.796). Si por el contrario, $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$, entonces el sistema es una mezcla de estados.

La matriz de densidad resulta muy útil para calcular el promedio de una observable \hat{A} en el sistema representado:

$$\langle\hat{A}\rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{A}) = \sum_m \langle\psi_m|\hat{\rho}\hat{A}|\psi_m\rangle. \quad (3.19)$$

Habiendo introducido a la matriz de densidad, procedemos a presentar la desigualdad requerida. Para esto, primero haremos algunas observaciones. Partiendo de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle,$$

y de la ecuación (3.18) se obtiene que

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (3.20)$$

Notemos que

$$\left\langle \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{i\hbar} Tr(\hat{\rho} [\hat{H}, \hat{\rho}]) = \frac{1}{i\hbar} Tr(\hat{\rho} \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H} \hat{\rho}) = \frac{1}{i\hbar} Tr(\hat{\rho} \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H} \hat{\rho}).$$

En la última igualdad se utilizó el hecho de que $Tr(\hat{A}\hat{B}) = Tr(\hat{B}\hat{A})$. En lo que sigue usaremos la

notación $\hat{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, entonces

$$\langle \hat{\rho} \rangle = 0. \quad (3.21)$$

Aunque para un sistema no estacionario, $\hat{\rho} \neq 0$, para cualquier sistema (estacionario o no) se cumple que $\langle \hat{\rho} \rangle = 0$. Por lo tanto, la desviación estándar de $\hat{\rho}$ puede ser una buena medida del grado de estacionaridad del sistema. Particularmente, si $\Delta \rho = 0$ (note que estamos usando la convención dada en (3.11)), entonces el sistema es estacionario. Por el contrario, si $\Delta \rho \neq 0$ el sistema no es estacionario. Un sistema con mayor valor de $\Delta \rho$ tiene menor grado de estacionaridad. Ahora definimos el “tiempo de estacionaridad” T_s como

$$T_s = \frac{1}{\Delta \rho}. \quad (3.22)$$

Entonces, para un sistema estacionario T_s es infinito, para un sistema no estacionario T_s es finito y su valor disminuye conforme disminuya el grado de estacionaridad. Eberly y Singh (1973) demostraron la siguiente desigualdad:

$$T_s \Delta H \geq \hbar. \quad (3.23)$$

Observamos que esta desigualdad es parecida a la de Mandelstam y Tamm (3.13). Pero mientras que la de Mandelstam y Tamm hace referencia al tiempo de evolución de una variable dinámica particular, la de Eberly y Singh goza de un carácter más general ya que la cantidad usada para definir el tiempo de estacionaridad es la matriz de densidad, la cual describe totalmente al sistema. Si la matriz de densidad describe a un sistema excitado que decae, el tiempo de estacionaridad es igual al tiempo de vida (Eberly y Singh, 1973).

3.5.3 Desigualdades de Uffink y Hilgevoord

Uffink y Hilgevoord (1985) dedujeron una relación de incertidumbre para posición y momento que no está en términos de desviaciones estándar como la desigualdad (1.28). Según los autores, la

forma matemática del principio de incertidumbre debe presentarse en términos de conceptos que llaman ancho total W y ancho máximo promedio w de un estado (en inglés: ‘overall width’ y ‘mean peak width’, respectivamente), y no en términos de desviaciones estándar. Argumentan que en algunos casos las desviaciones estándar de la posición y del momento son muy grandes aunque las densidades de probabilidad se encuentren contenidas en pequeñas regiones. Por lo tanto, la desviación estándar no es una buena medida de incertidumbre; mientras que sí lo son W y w .

La desigualdad que proponen es

$$w_M W_N(P) \geq 2\hbar \arccos\left(\frac{M+1-N}{N}\right), \quad \text{si y solo si } M \leq 2N-1. \quad (3.24)$$

Las definiciones de $W_N(P)$, w_M , M y N en la forma presentada por Hilgevoord (1998) son las siguientes. $W_N(P)$ es el intervalo más pequeño para el cual

$$\int_w |\langle P|\psi\rangle|^2 dP = N, \quad (3.25)$$

donde N es un número entre 0 y 1, pero cercano a 1. Mientras que w_M es el número más pequeño para el cual

$$\langle \psi | \hat{U}_x(w_M) | \psi \rangle = M, \quad (3.26)$$

donde M es un número entre 0 y 1, pero cercano a 1; $\hat{U}_x(w_M) = \exp(-iw_M \hat{P}/\hbar)$ es el operador unitario de traslación espacial y \hat{P} es el operador correspondiente al momento total del sistema.

$W_N(P)$ es la longitud del intervalo más pequeño donde está situada la mayor parte de la probabilidad del momento; es una medida del ancho de la distribución de momentos. w_M es la longitud de un desplazamiento para el cual la probabilidad de que el estado $|\psi\rangle$ se encuentre en

el estado desplazado $\hat{U}_x(w_M)|\psi\rangle$ sea apreciable; un nombre adecuado es: ancho de traslación espacial del estado.

Para ilustrar el significado de w_M y $W_N(P)$, consideremos el ejemplo de un ensemble de partículas que pasa a través de una doble rendija (Uffink y Hilgevoord, 1985). Si el ancho de cada rendija es $2a$ y el espaciamento entre ellas es $2A$, un buen modelo para la función de onda $\psi(q)$ en la pantalla donde inciden las partículas que previamente pasaron a través de las rendijas es:

$$\psi(q) = C \left\{ \exp \left[- \left(\frac{q+A}{2a} \right)^2 \right] + \exp \left[- \left(\frac{q-A}{2a} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.27)$$

donde C es una constante de normalización. La amplitud de probabilidad en el espacio de momentos está dada por la transformada de Fourier $\phi(p)$:

$$\phi(p) = 2Ca \sqrt{\frac{2}{\hbar}} \exp \left(- \frac{a^2 p^2}{\hbar^2} \right) \cos \left(\frac{Ap}{\hbar} \right). \quad (3.28)$$

Asignamos valores a M y a N , tales que satisfagan la restricción dada en (3.24) y que sean cercanos a 1. Damos los valores $M = 0.8$ y $N = 0.95$, los cuales cumplen las condiciones requeridas. Usando la aproximación $A \gg a$ el cálculo se simplifica considerablemente y se obtiene

$$w_M = 1.34a \text{ y } W_N(P) = 1.96\hbar/a;$$

mientras que las desviaciones estándar son

$$\Delta q = A \text{ y } \Delta p = \hbar/2a.$$

En la figura 3.1 se ilustra cualitativamente la distribución de probabilidad de posición y de momento para este ejemplo.

Debido a que $A \gg a$, se tiene que $\Delta q \gg w_M$; por el contrario $\Delta p \approx W_N(P)$. En la figura 3.1 se observa que aunque la desviación estándar de q es muy grande, la densidad de probabilidad $|\psi(q)|^2$ está contenida en dos intervalos pequeños de tamaño con orden de magnitud w_M . Entonces, puede apreciarse con claridad el argumento de Uffink y Hilgevoord: en algunos casos la desviación estándar no es una medida adecuada de la incertidumbre, ya que ésta puede tener un valor muy grande aunque la densidad de probabilidad se encuentre contenida en pequeñas regiones; sin embargo, el ancho de pico promedio w_M y el ancho total $W_N(P)$ son representaciones adecuadas de las incertidumbres de la densidad de probabilidad de posición y de momento, respectivamente.

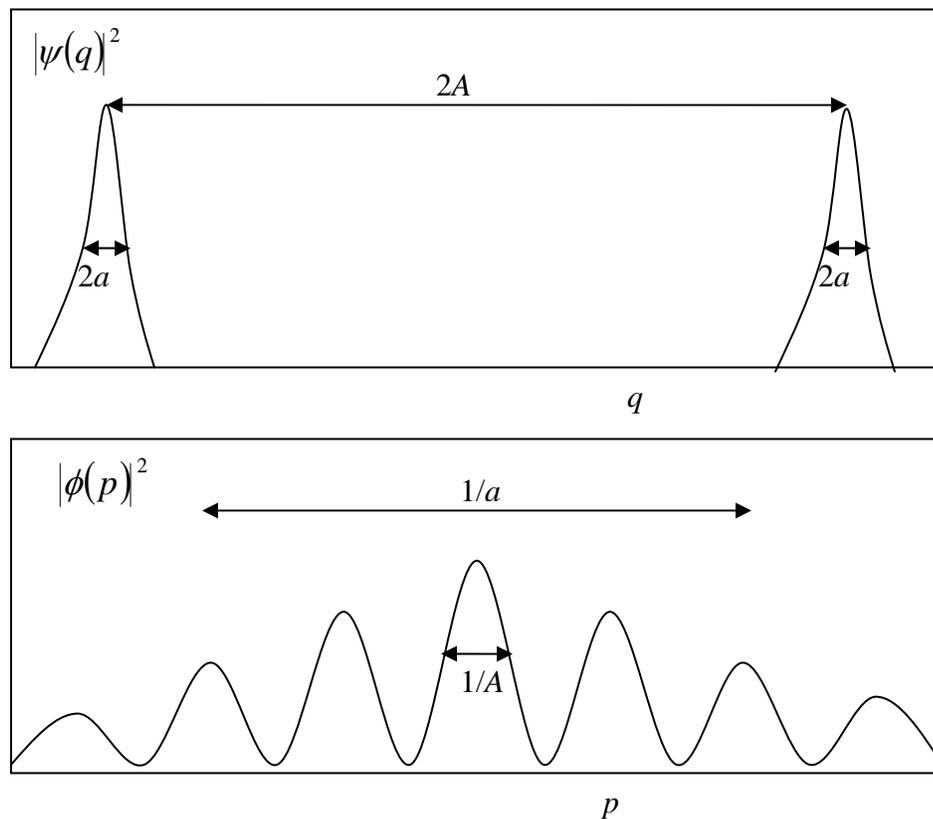


Figura 3.1. Densidad de probabilidad de posición y de momento en la pantalla para el experimento de la doble rendija (Uffink y Hilgevoord, 1985).

Existe una desigualdad análoga a la (3.24) para la energía y el tiempo (Uffink, 1993; Hilgevoord, 1996, 1998). Se define $W_\alpha(E)$ como el tamaño del intervalo más pequeño que cumple

$$\int_W |\langle E | \psi(0) \rangle|^2 dE = \alpha. \quad (3.29)$$

Si α es un número entre 0 y 1 pero cercano a 1, entonces $W_\alpha(E)$ es una buena medida de la dispersión de energía del estado $|\psi(0)\rangle$. Por ejemplo, si $\alpha = 0.9$ entonces $W_\alpha(E)$ es el intervalo más pequeño en el cual se encuentra distribuida el 90% de la energía. τ_β se define como el tiempo mínimo que le toma a $|\psi(0)\rangle$ evolucionar al estado $|\psi(\tau_\beta)\rangle = \hat{U}_t(\tau_\beta)\psi(0)\rangle$ que cumple

$$\langle \psi(0) | \hat{U}_t(\tau_\beta) \psi(0) \rangle = \beta, \quad (3.30)$$

donde $\hat{U}_t(\tau_\beta) = \exp(i\tau_\beta \hat{H} / \hbar)$ es el operador de traslación temporal y \hat{H} es el hamiltoniano del sistema.

A partir de su desigualdad más general (3.13), Mandelstam y Tamm obtuvieron la siguiente (vea la deducción en el apéndice A):

$$\cos^2\left(\frac{\Delta H}{\hbar} t\right) \leq |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi\hbar}{2\Delta H}. \quad (3.31)$$

Ésta es utilizada por Uffink (1993) para deducir la desigualdad (vea el apéndice B):

$$\tau_\beta W_\alpha(E) \geq 2\hbar \arccos\left(\frac{\beta + 1 - \alpha}{\alpha}\right), \quad \text{si y solo si } \beta \leq 2\alpha - 1. \quad (3.32)$$

Vemos que las definiciones de $W_N(P)$, w_M , N y M son análogas a las de $W_\alpha(E)$, τ_β , α y β , respectivamente. Por lo tanto, las desigualdades (3.24) y (3.32) representan una propuesta de generalización del principio de incertidumbre, que incluye, además de la posición y el momento, a la energía y al tiempo.

3.5.4 Desigualdad de Wigner

Wigner (1972) presentó una relación de incertidumbre entre la energía y el tiempo. Definió las siguientes cantidades

$$\tau^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\langle u | \psi(t) \rangle|^2 (t - t_m)^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\langle u | \psi(t) \rangle|^2 dt}, \quad (3.33)$$

$$\varepsilon^2 = \frac{\int_0^{\infty} |\langle u | \phi(E) \rangle|^2 (E - E_m)^2 dE}{\int_0^{\infty} |\langle u | \phi(E) \rangle|^2 dE}, \quad (3.34)$$

donde

$$|\phi(E)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)\rangle e^{iEt/\hbar} dt \quad (3.35)$$

es la transformada de Fourier del estado $|\psi(t)\rangle$.

Interpretemos las definiciones anteriores. Consideremos un sistema que al tiempo inicial se ha preparado en el estado $|\psi(0)\rangle$. Éste evoluciona temporalmente, y en el tiempo t se encuentra en el estado $|\psi(t)\rangle$. $|u\rangle$ es un estado particular que nuestro sistema puede adquirir a cierto tiempo t_U , y con el cual queremos compararlo; es decir,

$$|u\rangle = |\psi(t_U)\rangle.$$

La probabilidad por unidad de tiempo $P_U(t)$ de que al tiempo t el sistema se encuentre en el estado $|u\rangle$ es

$$P_U(t) = \frac{|\langle u | \psi(t) \rangle|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\langle u | \psi(t) \rangle|^2 dt}, \quad (3.36)$$

donde el denominador $\int_{-\infty}^{\infty} |\langle u | \psi(t) \rangle|^2 dt$ permite que la probabilidad esté normalizada. En otras palabras, $P_U(t)$ es la probabilidad por unidad de tiempo de que $|u\rangle$ sea el estado $|\psi(t)\rangle$.

Dada la definición de $P_U(t)$, el valor promedio $\langle f(t) \rangle$ que una función del tiempo $f(t)$ adquiere en el estado $|u\rangle$ es

$$\langle f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_U(t) f(t) dt = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\langle u | \psi(t) \rangle|^2 f(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\langle u | \psi(t) \rangle|^2 dt}. \quad (3.37)$$

t_m se define como el promedio del tiempo al cual ψ se encuentra en el estado $|u\rangle$:

$$t_m = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\langle u | \psi(t) \rangle|^2 t dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\langle u | \psi(t) \rangle|^2 dt}. \quad (3.38)$$

Ahora podemos interpretar correctamente el significado de τ : es la desviación estándar de los tiempos para los cuales el sistema ψ se encuentra en el estado $|u\rangle$. De forma análoga, ε es la desviación estándar de la energía de $|u\rangle$.

Wigner deduce la desigualdad

$$\tau \varepsilon > \frac{\hbar}{2}, \quad (3.39)$$

haciendo algunas suposiciones sobre el estado $|u\rangle$ que no son siempre válidas; sin embargo, como afirma Wigner, son correctas para el caso particular en el que $|u\rangle$ representa un estado resonante. El hecho de que la igualdad no se alcance en (3.39) se debe a que el espectro de energía está acotado inferiormente como se observa en las integrales de (3.34).

3.6 Decaimiento de un estado inestable

Como ya dijimos en la sección 3.2, comúnmente se argumenta que la relación entre el tiempo de vida, o vida media, y la anchura (también llamada ancho) de la distribución de energía de un estado inestable es una aplicación del principio de incertidumbre para la energía y el tiempo; particularmente si el estado inestable representa una resonancia (Wigner, 1972; Rayski y Raisy Jr., 1977; Busch, 1990a). Por ejemplo, Wigner dijo que “solo existe una aplicación bien conocida para la relación de incertidumbre entre la energía y el tiempo: la conexión entre el tiempo de vida y el ancho de energía de los estados resonantes” (Wigner, 1972). En esta sección estudiaremos el proceso de decaimiento de un estado inestable con el propósito de analizar la validez de la afirmación anterior. Consideraremos el ejemplo particular de un conjunto de núcleos atómicos que decaen a un estado de menor energía. Presentaremos las definiciones de tiempo de vida, vida media y anchura; y deduciremos la relación entre anchura y tiempo de vida.

Se observa experimentalmente que la tasa de decaimiento de sustancias radiactivas puras decrece exponencialmente con el tiempo. Si N núcleos radiactivos están presentes al tiempo t y si no se introducen nuevos núcleos a la muestra, se tiene que (Krane, 1988)

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}. \quad (3.40)$$

La probabilidad $P(t)$ de que al tiempo t un núcleo se haya mantenido sin decaer es

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (3.41)$$

La vida media ('half life' en inglés) $\tau_{1/2}$ se define como el tiempo necesario para que la mitad de los núcleos decaiga, o equivalentemente, para que la probabilidad de que un núcleo decaiga sea $\frac{1}{2}$; de la ecuación (3.41) obtenemos que

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}. \quad (3.42)$$

El tiempo de vida promedio τ_p ('mean lifetime' en inglés), también llamado tiempo de vida ('lifetime' en inglés), se define como el promedio del tiempo que un núcleo se mantiene sin decaer; entonces,

$$\tau_p = \frac{\int_0^{\infty} tP(t)dt}{\int_0^{\infty} P(t)dt}; \quad (3.43)$$

sustituyendo (3.41) en (3.43) e integrando se obtiene

$$\tau_p = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.44)$$

Las observaciones experimentales correspondientes a estados inestables que decaen en el tiempo pueden explicarse teóricamente con la mecánica cuántica. Como ejemplo, consideraremos el caso en el que el sistema a describir es un ensemble de núcleos radiactivos.

Notemos que un eigenestado del hamiltoniano \hat{H} es un estado estacionario: no evoluciona en el tiempo; por lo tanto no puede describir un sistema de núcleos que decaen en el tiempo. Por lo tanto, requerimos que el estado $|\psi(t)\rangle$ que describa a dicho sistema sea una combinación de los eigenestados de \hat{H} . Supongamos por simplicidad, que el hamiltoniano tiene únicamente dos eigenestados: $|\psi_0\rangle$ que representa a los núcleos sin decaer, y $|\psi_f\rangle$ que representa a los núcleos que han decaído. Entonces, $|\psi(t)\rangle = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|\psi(t)\rangle + |\psi_f\rangle\langle\psi_f|\psi(t)\rangle$, es decir,

$$|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|\psi(t)\rangle|\psi_0\rangle + \langle\psi_f|\psi(t)\rangle|\psi_f\rangle, \quad (3.45)$$

donde $\langle\psi_0|\psi(t)\rangle$ y $\langle\psi_f|\psi(t)\rangle$ son las amplitudes de probabilidad de que un núcleo se mantenga sin decaer, o de que haya decaído, respectivamente. Para que las probabilidades $|\langle\psi_0|\psi(t)\rangle|^2$ y $|\langle\psi_f|\psi(t)\rangle|^2$ varíen en el tiempo como se observa experimentalmente es necesario que el hamiltoniano tenga un potencial con dependencia temporal. Consideremos un potencial $V + V'$, donde V es independiente del tiempo y nos permite calcular los eigenestados

de \hat{H} , y V' es un potencial muy débil dependiente del tiempo que puede causar transiciones entre los estados $|\psi_0\rangle$ y $|\psi_f\rangle$. La probabilidad de transición es la constante de decaimiento λ y se calcula usando la regla de oro de Fermi:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \hat{V}' | \psi_0 \rangle|^2 \rho(E_f), \quad (3.46)$$

donde $\rho(E_f)$ es la densidad de estados finales (número de estados finales accesibles al sistema por unidad de energía).

El vector de estado $|\psi_a(\vec{x}, t)\rangle$ para un estado estacionario con energía E_a es

$$|\psi_a(\vec{x}, t)\rangle = |\psi_a(\vec{x})\rangle e^{-iE_a t/\hbar}, \quad (3.47)$$

donde $|\psi_a(\vec{x})\rangle$ es solución a la ecuación estacionaria de Schrödinger. La probabilidad de encontrar al estado es independiente del tiempo. En el caso del estado $|\psi(t)\rangle$ requerimos que la probabilidad $|\langle \psi_0 | \psi(t) \rangle|^2$ sea igual a $P(t)$ dada por (3.41); entonces, su parte temporal debe incluir el término $e^{-\lambda t/2}$. De acuerdo a la observación anterior y a la expresión (3.47), tenemos que

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_0\rangle \exp\left(-\frac{t\lambda}{2} - \frac{iE_0 t}{\hbar}\right). \quad (3.48)$$

La amplitud de probabilidad de que un núcleo se encuentre en el estado inicial sin haber decaído es

$$f(t) = \langle \psi_0 | \psi(t) \rangle = \exp\left(-\frac{t\lambda}{2} - \frac{iE_0 t}{\hbar}\right). \quad (3.49)$$

La expresión anterior describe un sistema de núcleos radiactivos, tal que en un tiempo inicial, al cual le hemos dado el valor de cero, todos los núcleos se encuentran en el estado $|\psi_0\rangle$; por lo

tanto, ésta es válida para tiempos $t \geq 0$. Para obtener la distribución de energía $P(E)$ de los estados, requerimos calcular la transformada de Fourier de (3.49), obtenemos

$$\tilde{f}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^{\infty} e^{iEt/\hbar} f(t) dt = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} \frac{1}{(\hbar\lambda/2) - i(E - E_0)}. \quad (3.50)$$

El límite inferior de la integral anterior es 0 y no $-\infty$ porque, como ya explicamos, la función $f(t)$ sólo está definida para $t \geq 0$. La densidad de probabilidad de que un núcleo tenga energía entre E y $E + dE$ es $P(E)dE$, donde

$$P(E) = \frac{|\tilde{f}(E)|^2}{\int_0^{\infty} |\tilde{f}(E)|^2 dE} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda\hbar/2}{(\lambda\hbar/2)^2 + (E - E_0)^2}, \quad (3.51)$$

y donde se ha hecho la aproximación $E_0 \gg \lambda\hbar$. La expresión (3.51) describe una distribución lorentziana, cuyo máximo valor se encuentra en E_0 y con anchura (ancho a la mitad de la altura) $\lambda\hbar$. A la anchura se le asigna comúnmente la letra Γ , tenemos entonces que

$$\Gamma = \lambda\hbar. \quad (3.52)$$

Rescribimos la ecuación (3.51) en términos de Γ y obtenemos

$$P(E) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(\Gamma/2)^2 + (E - E_0)^2}. \quad (3.53)$$

La figura 3.2 muestra la forma de la distribución lorentziana descrita por la ecuación anterior.

De las expresiones (3.44) y (3.52) tenemos que la relación entre el tiempo de vida τ_p y la anchura Γ es

$$\tau_p = \frac{\hbar}{\Gamma}; \quad (3.54)$$

o usando la expresión (3.42) se tiene que la relación entre la vida media $\tau_{1/2}$ y la anchura es

$$\tau_{1/2} = \ln(2) \frac{\hbar}{\Gamma}. \quad (3.55)$$

Para obtener las dos expresiones anteriores no fue requerido usar ninguna relación de incertidumbre entre energía y tiempo; por lo tanto, éstas no apoyan la existencia de un principio de incertidumbre para la energía y el tiempo.

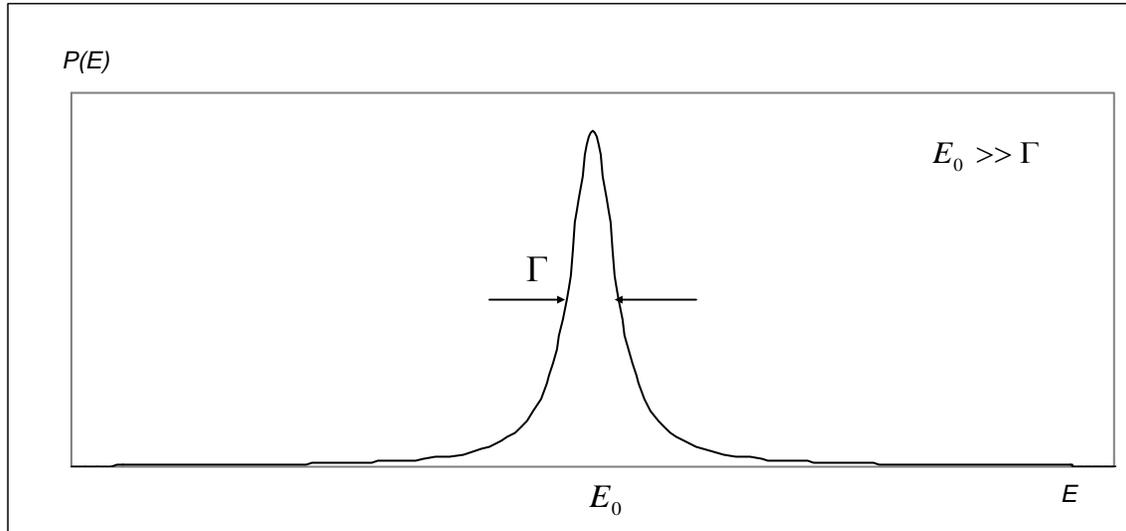


Figura 3.2. Distribución lorentziana que representa la ecuación (3.53).

3.6.1 Aplicación de la desigualdad de Mandelstam y Tamm

Aplicaremos la desigualdad (3.31):

$$\cos^2\left(\frac{\Delta H}{\hbar} t\right) \leq |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi \hbar}{2\Delta H}, \quad (3.31)$$

a la vida media de un estado excitado. La vida media es el tiempo $\tau_{1/2}$ que debe transcurrir para que la probabilidad de no decaimiento $|\langle \psi(0) | \psi(\tau) \rangle|^2$ sea $\frac{1}{2}$. De (3.31) obtenemos que

$$\cos^2\left(\frac{\Delta H}{\hbar} \tau_{1/2}\right) \leq \frac{1}{2}, \quad \text{para } 0 \leq \tau_{1/2} \leq \frac{\pi \hbar}{2\Delta H}. \quad (3.56)$$

lo cual implica que

$$\frac{\Delta H}{\hbar} \tau_{1/2} \geq \frac{\pi}{4}, \quad \text{para } 0 \leq \tau_{1/2} \leq \frac{\pi\hbar}{2\Delta H}. \quad (3.57)$$

La restricción en el dominio de t para la cual se dedujo la desigualdad (3.31) implica que si la vida media $\tau_{1/2}$ de un estado es suficientemente pequeña, tal que satisface $\tau_{1/2} \leq \pi\hbar/2\Delta H$, entonces se cumple la siguiente relación

$$\Delta H \tau_{1/2} \geq \frac{\pi\hbar}{4}. \quad (3.58)$$

Sin embargo, (3.58) no apoya la interpretación de un principio de incertidumbre entre energía y tiempo, en el cual se relacione la vida media de un estado inestable y su dispersión de energía, porque su aplicación está limitada a que se satisfaga la condición $\tau_{1/2} \leq \pi\hbar/2\Delta H$; es decir, la desigualdad (3.58) no es de carácter general.

3.6.2 La desigualdad de Wigner para un estado resonante

A continuación aplicaremos la desigualdad (3.39):

$$\tau\varepsilon > \frac{\hbar}{2}, \quad (3.39)$$

para un estado resonante (o resonancia). Veremos que en este caso τ y ε son aproximadamente el tiempo de vida y la anchura de la resonancia.

Un sistema que decae es un estado no estacionario. La ley de decaimiento exponencial (3.41) para dicho sistema es una buena aproximación para grandes intervalos de tiempo, pero no es así para tiempos muy pequeños o muy grandes (Busch, 1990a). Consideraremos válida dicha aproximación y la utilizaremos para describir al sistema inestable.

Sea $|u\rangle$ el estado al tiempo cero:

$$|u\rangle = |\psi(0)\rangle. \quad (3.59)$$

De acuerdo a (3.35) tenemos que

$$\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^{\infty} e^{-iEt/\hbar} \langle \psi(0) | \phi(E) \rangle dE. \quad (3.60)$$

El límite inferior de la integral anterior es cero y no $-\infty$ porque el espectro de energías está acotado inferiormente, y hemos dado el valor de cero a la mínima energía. Por otro lado, $|\psi(t)\rangle$ se obtiene aplicando el operador de traslación temporal $e^{-it\hat{H}/\hbar}$ al estado inicial $|\psi(0)\rangle$.

Entonces, expresando el hamiltoniano en la base de sus eigenestados $|E\rangle$, tenemos

$$|\psi(t)\rangle = e^{-it\hat{H}/\hbar} |\psi(0)\rangle = \int_0^{\infty} e^{-itE/\hbar} |E\rangle \langle E | \psi(0) \rangle dE. \quad (3.61)$$

Aplicando el bra $\langle \psi(0) |$ a (3.61) y comparando con (3.60) se concluye que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \langle \psi(0) | \phi(E) \rangle = |\langle E | \psi(0) \rangle|^2. \quad (3.62)$$

Notemos que el modelo de decaimiento exponencial está dado por la ecuación (3.49) que nos da la amplitud de probabilidad de que un núcleo se encuentre en el estado inicial sin haber decaído; sin embargo, ésta está definida solo para $t \geq 0$. Pero en el caso de la formulación de Wigner, para calcular τ es necesario calcular las integrales de (3.33) desde $-\infty$ y no desde cero. Lo que se hace en este caso es sustituir el término $\exp(-t\Gamma/2\hbar)$ por $\exp(-|t|\Gamma/2\hbar)$, de tal forma que el límite de integración pueda ser $-\infty$ (Busch, 1990a). Entonces tenemos que

$$\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = \exp\left(-\frac{|t|\Gamma}{2\hbar} - \frac{iE_0 t}{\hbar}\right), \quad (3.63)$$

y su transformada de Fourier es

$$\langle \psi(0) | \phi(E) \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(E - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (3.64)$$

La razón de que (3.49) esté definida únicamente para tiempos positivos es que a un tiempo inicial, que llamamos cero, se tienen $N(0)$ núcleos radiactivos en su estado excitado. ¿Qué significa ahora que (3.63) esté definida también para tiempos negativos? Para responder esta

pregunta consideremos que al tiempo cero tenemos N_0 núcleos, los cuales están excitados. Llamemos $N_e(t)$ al número de núcleos que al tiempo t se encuentran en su estado excitado y $N_b(t)$ al número de núcleos en su estado base al mismo tiempo t . Entonces, se tiene que a cualquier tiempo se cumple que

$$N_0 = N_e(t) + N_b(t). \quad (3.65)$$

$N_e(t)$ está dado por la norma al cuadrado de (3.63):

$$N_e(t) = N_0 \exp\left(-\frac{|t|\Gamma}{\hbar}\right); \quad (3.66)$$

Evaluando (3.65) y (3.66) en $t = -\infty$ tenemos que

$$N_e(-\infty) = 0 \text{ y } N_b(-\infty) = N_0.$$

Por lo tanto, (3.63) representa un conjunto de núcleos que inicialmente (en $t = -\infty$) se encontraban en su estado base; conforme avanzaba el tiempo se excitaron a un estado de mayor energía con una tasa creciente de forma exponencial; a partir de que todos los núcleos llegaron a su estado excitado, o sea, a partir de $t = 0$, los núcleos decaen a su estado base con una forma que decrece exponencialmente con el tiempo. Aunque esta interpretación es razonable y parece adecuada, presenta la dificultad de que para tiempos negativos, es necesario un agente externo que esté suministrando energía al sistema para excitar los núcleos, hecho que complica el problema. Nosotros no consideraremos a dicho agente externo en nuestro análisis.

Usando las ecuaciones (3.33) y (3.34):

$$\tau^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 (t - t_m)^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 dt}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\int_0^{\infty} |\langle \psi(0) | \phi(E) \rangle|^2 (E - E_m)^2 dE}{\int_0^{\infty} |\langle \psi(0) | \phi(E) \rangle|^2 dE},$$

y usando la aproximación $\Gamma/E_0 \ll 1$ generalmente válida para los estados resonantes, obtenemos que $\tau = \sqrt{2\hbar}/\Gamma = \sqrt{2}\tau_p$ y $\varepsilon = \Gamma/2$. Es decir, τ y ε son aproximadamente, el tiempo de vida y la anchura. Vemos que se satisface la desigualdad de Wigner

$$\tau\varepsilon > \hbar/2.$$

De acuerdo al resultado anterior, el formalismo de Wigner parece apoyar la interpretación del principio de incertidumbre para la energía y el tiempo según la cual existe una relación de incertidumbre entre el ancho de energía de un estado inestable y su tiempo de vida. Sin embargo, para llegar al resultado anterior, tuvimos que realizar integrales en el tiempo cuyo límite inferior es $-\infty$. Este hecho, como hemos indicado, tiene como significado físico en el caso estudiado de núcleos radiactivos, que debe existir un proceso mediante el cual se exciten a los núcleos de su estado base a un nivel de mayor energía. Este proceso no está descrito en el formalismo de Wigner, y por lo tanto, el significado de τ resulta obscuro.

Concluimos esta sección diciendo que ciertamente existe una relación entre el ancho de la distribución de energía de un estado inestable y su tiempo de vida, como se indica en (3.54). Pero ésta no es una relación de incertidumbre. Vimos que del formalismo de Mandelstam y Tamm se obtiene la desigualdad (3.58) que relaciona la dispersión de energía del estado inestable y su vida media, pero la validez de tal desigualdad está limitada para pequeños valores de la vida media. Por otro lado, siguiendo el formalismo de Wigner se obtiene una desigualdad entre tiempo de vida y el ancho de energía del estado inestable, pero como explicamos, el significado físico de las cantidades involucradas no es claro.

Conclusiones

La expresión matemática formal del principio de incertidumbre tiene una aceptación generalizada. Consiste en desigualdades que imponen un límite al producto de las desviaciones estándar de pares de operadores no conmutativos. La controversia surge al interpretar el significado de tales desigualdades. En el caso más tratado, es decir, el de la posición y el momento se dicen muchas cosas distintas respecto al significado del principio de incertidumbre.

Las dos principales interpretaciones de la mecánica cuántica son la ortodoxa y la de ensemble. La interpretación ortodoxa atribuye distintos significados al principio de incertidumbre dependiendo del autor. Puede concluirse de los experimentos pensados de Heisenberg que el principio de incertidumbre implica un límite en la medición simultánea de la posición y el momento de una partícula. Otro punto de vista consiste en que una partícula no tiene posición y momento definidos simultáneamente con absoluta precisión. Un enfoque más es el de la complementariedad, según la cual, el principio de incertidumbre impide que en los experimentos se manifiesten simultáneamente la naturaleza corpuscular y ondulatoria de la materia, pues éstas son características excluyentes pero complementarias. Según la interpretación ortodoxa, el principio de incertidumbre impone un límite en el conocimiento de la materia que es intrínseco a ella.

Por otro lado, la interpretación de ensemble considera que el principio de incertidumbre impone un límite a las desviaciones estándar de las variables no conmutativas de un ensemble constituido por muchas partículas que se han preparado similarmente. El límite impuesto no es sobre una sola partícula sino sobre un conjunto grande de ellas. Esta interpretación no dice que una partícula no tenga definidos simultáneamente con absoluta precisión su posición y su momento. Tampoco dice que sea imposible medirlas simultáneamente con incertidumbres

arbitrariamente pequeñas. Mucho menos atribuye características ondulatorias a una partícula individual, pero reconoce el carácter ondulatorio de un ensemble.

Cuál interpretación se considere correcta es cuestión de gustos. Ambas tienen el mismo formalismo matemático y son consistentes con los resultados experimentales. Las dos interpretaciones son válidas. Pero a mi parecer, la interpretación de ensemble es más adecuada porque a diferencia de la interpretación ortodoxa no presenta tantos problemas para el pensamiento intuitivo, resuelve paradojas importantes y hace menos afirmaciones de carácter filosófico que son improbables experimentalmente. Además, la interpretación de ensemble de la mecánica cuántica es consistente con nuevas teorías que en algún momento pudieran reemplazar a la actual. De tal forma, que al adoptar esta interpretación uno tiene la libertad de buscar nuevos formalismos matemáticos que en algún momento pudieran requerirse para explicar resultados experimentales que no coincidan con los predichos por la mecánica cuántica. Por ejemplo, la violación del principio de incertidumbre en algún experimento futuro sería un indicador de que la mecánica cuántica tiene límites de aplicación y que es necesario construir una nueva teoría más general. En cambio, si se abraza la interpretación ortodoxa, uno está destinado a creer que la mecánica cuántica es una teoría completa y que por lo tanto nunca será necesario reemplazarla.

Respecto al principio de incertidumbre para la energía y el tiempo vimos que el teorema de Pauli implica que no existe un operador universal de tiempo en la mecánica cuántica, hecho que impide la existencia de una relación de incertidumbre para la energía y el tiempo análoga a las de posición y momento. Sin embargo, existen posturas distintas a ésta, que afirman la existencia de un principio de incertidumbre entre energía y tiempo. Hay varias interpretaciones de la relación de incertidumbre para la energía y el tiempo. Vimos que la interpretación según la cual la duración de un proceso de medición de la energía implica una incertidumbre mínima en la energía medida, o en la energía de interacción entre sistema medido y aparato de medición, es incorrecta como muestra el contraejemplo de Aharonov y Bohm en el cual se mide la energía de

un sistema con precisión arbitraria en un tiempo tan pequeño como se quiera. Y aunque esta interpretación se considerara correcta, demostramos que ésta no implicaría que se viola el principio de conservación de la energía, contrariamente a lo comúnmente dicho. También vimos que la interpretación según la cual la relación de incertidumbre se aplica al ancho de la distribución de energía de un estado inestable y a su tiempo de vida tampoco es adecuada; aunque existe una relación entre ancho de energía y tiempo de vida, ésta no es una relación de incertidumbre. Sí existe un tipo de relación de incertidumbre para la energía y el tiempo, que se deduce sencilla y rigurosamente con el formalismo de la mecánica cuántica; ésta es la desigualdad de Mandelstam y Tamm. Según ésta, el producto del tiempo de evolución de las propiedades dinámicas de un sistema cuántico y la desviación estándar de su espectro energético no puede ser menor que $\hbar/2$. Además, esta desigualdad permite una generalización del principio de incertidumbre en la cual se trata en forma análoga a las relaciones de incertidumbre para la energía y el tiempo, y para la posición y el momento.

Apéndices

Apéndice A

Seguiremos el procedimiento presentado por Uffink (1993) para deducir la desigualdad (3.31) obtenida por Mandelstam y Tamm:

$$\cos^2\left(\frac{\Delta H}{\hbar}t\right) \leq |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi\hbar}{2\Delta H}, \quad (\text{A1})$$

a partir de su desigualdad más general (3.13):

$$\Delta_A t \Delta H \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{A2})$$

De acuerdo a la definición (3.12):

$$\Delta_A t \equiv \Delta A / \left| \left\langle \frac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle \right|, \quad (\text{A3})$$

expresamos (A2) como

$$\Delta H \Delta A \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} \right|. \quad (\text{A4})$$

Consideremos el operador \hat{A} como el proyector en el estado $|\psi(0)\rangle$ al tiempo inicial, es decir,

$$\hat{A} = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|. \quad (\text{A5})$$

Como

$$\hat{A}^2 = \hat{A},$$

la desviación estándar de \hat{A} es

$$\Delta A = \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} = \sqrt{\langle \hat{A} \rangle (1 - \langle \hat{A} \rangle)}. \quad (\text{A6})$$

El valor esperado de \hat{A} al tiempo t es

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2. \quad (\text{A7})$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$\cos^2 \phi(t) \equiv |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 = \langle \hat{A} \rangle, \quad (\text{A8})$$

tenemos que

$$\left| \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} \right| = \left| 2\cos\phi(t)\text{sen}\phi(t) \frac{d\phi(t)}{dt} \right|, \quad (\text{A9})$$

y que

$$\Delta A = \sqrt{\cos^2 \phi(t)(1 - \cos^2 \phi(t))} = \cos\phi(t)\text{sen}\phi(t). \quad (\text{A10})$$

Sustituyendo las expresiones (A9) y (A10) en la desigualdad (A4) se obtiene

$$\frac{\Delta H}{\hbar} \geq \left| \frac{d\phi(t)}{dt} \right|. \quad (\text{A11})$$

Integramos con respecto al tiempo y obtenemos

$$\frac{\Delta H}{\hbar} t = \int_0^t \frac{\Delta H}{\hbar} ds \geq \int_0^t \left| \frac{d\phi(s)}{ds} \right| ds \geq \left| \int_0^t \frac{d\phi(s)}{ds} ds \right| = |\phi(t) - \phi(0)|. \quad (\text{A12})$$

De (A8) vemos que

$$1 = |\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle|^2 = \cos^2 \phi(0). \quad (\text{A13})$$

Limitando el dominio de ϕ al intervalo $(-\pi, \pi)$ que da todos los valores posibles, de 0 a 1, para la

probabilidad $|\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2$, obtenemos que

$$\phi(0) = 0.$$

Entonces, de (A12) resulta

$$\frac{\Delta H}{\hbar} t \geq |\phi(t)|. \quad (\text{A14})$$

De la desigualdad anterior y de la definición (A8) de $\phi(t)$ se obtiene (A1).

Apéndice B

Seguiremos a Uffink (1993) para demostrar la desigualdad (3.32):

$$\tau_\beta W_\alpha(E) \geq 2\hbar \arccos\left(\frac{\beta+1-\alpha}{\alpha}\right), \quad \text{si y solo si } \beta \leq 2\alpha - 1. \quad (\text{B1})$$

Para hacer esto utilizaremos la desigualdad (3.32) (cuya deducción se presenta en el apéndice A y se llamó (A1)):

$$\cos^2\left(\frac{\Delta H}{\hbar} t\right) \leq |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi\hbar}{2\Delta H}. \quad (\text{B2})$$

Primero expresemos al estado $|\psi(t)\rangle$ como una combinación lineal de dos estados, uno $|\psi_w(t)\rangle$ cuya energía está en el intervalo $W_\alpha(E)$, y otro $|\psi_{w^c}(t)\rangle$ con energía fuera de este intervalo:

$$|\psi(t)\rangle = \langle \psi_w(t) | \psi(t) \rangle |\psi_w(t)\rangle + \langle \psi_{w^c}(t) | \psi(t) \rangle |\psi_{w^c}(t)\rangle. \quad (\text{B3})$$

De acuerdo a la expresión (3.29):

$$\int_w |\langle E | \psi(0) \rangle|^2 dE = \alpha. \quad (\text{B4})$$

Las amplitudes de probabilidad son

$$\langle \psi_w(t) | \psi(t) \rangle = \sqrt{\alpha} \quad \text{y} \quad \langle \psi_{w^c}(t) | \psi(t) \rangle = \sqrt{1-\alpha}.$$

Como los estados $|\psi_w(t)\rangle$ y $|\psi_{w^c}(t)\rangle$ son ortonormales se tiene que

$$\langle \psi_w | \psi_w \rangle = \langle \psi_{w^c} | \psi_{w^c} \rangle = 1 \quad \text{y} \quad \langle \psi_{w^c} | \psi_w \rangle = 0.$$

Desarrollando $\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle$ y usando las expresiones anteriores obtenemos

$$\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = \alpha \langle \psi_w(0) | \psi_w(t) \rangle + (1-\alpha) \langle \psi_{w^c}(0) | \psi_{w^c}(t) \rangle. \quad (\text{B5})$$

De acuerdo a la desigualdad (B2)

$$\alpha \langle \psi_w(0) | \psi_w(t) \rangle \geq \alpha \cos\left(t \frac{\Delta_w H}{\hbar}\right),$$

donde $\Delta_w H$ es la desviación estándar correspondiente al estado $|\psi_w(t)\rangle$. Como el término

$\langle \psi_{w^c}(0) | \psi_{w^c}(t) \rangle$ en (B5) no es menor que -1, resulta

$$\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle \geq \alpha \cos\left(\frac{\Delta_w H}{\hbar} t\right) - (1 - \alpha). \quad (\text{B6})$$

Debido a la forma en la que se construyó el estado $|\psi_w(t)\rangle$, el intervalo de energías $W_\alpha(E)$

incluye toda su distribución energética, por lo que la desviación estándar $\Delta_w H$ está contenida en $W_\alpha(E)$, es decir,

$$\Delta_w H \leq \frac{W_\alpha(E)}{2}.$$

Como se indica en (B2),

$$0 \leq \frac{\Delta H}{\hbar} t \leq \frac{\pi}{2},$$

entonces

$$\cos\left(\frac{\Delta_w H}{\hbar} t\right) \geq \cos\left(\frac{W_\alpha(E)}{2\hbar} t\right).$$

Sustituyendo la expresión anterior en (B6) obtenemos

$$\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle \geq \alpha \cos\left(\frac{W_\alpha(E)}{2\hbar} t\right) - (1 - \alpha). \quad (\text{B7})$$

Sustituyendo t por τ_β en la expresión anterior y utilizando (3.30):

$$\langle \psi(0) | \hat{U}_t(\tau_\beta) \psi(0) \rangle = \beta, \quad (\text{B8})$$

se obtiene (B1).

Referencias

- Aharonov, Y. y Bohm, D., (1961), "Time in the quantum theory and the uncertainty relation for time and energy", *Physical Review* **122** 1649-1658. Reimpreso en Wheeler y Zurek (1983) pp. 715-724.
- Albergotti, J. C., (1973), "Uncertainty principle. Limited experiments", *The Physics Teacher* **11** 19-23.
- Aspect, A., Grangier, P. y Roger, G., (1981), "Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem", *Physical Review Letters* **47** 460-463.
- Ballentine, L.E., (1969), "The uncertainty principle and the statistical interpretation of quantum mechanics", *Canadian Journal of Physics* **47** 2417-2419.
- Ballentine, L. E., (1970), "Statistical Interpretation of Quantum Mechanics", *Review of Modern Physics* **42** 358-381.
- Bell, J.S., (1964), "On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", *Physics* **1** 195-200. Reimpreso en Bell (1987).
- Bell, J.S., (1966), "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics" *Reviews of Modern Physics* **38** 447-452. Reimpreso en Bell (1987).
- Bell, J.S., (1987), *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: collected papers in quantum mechanics* (Cambridge University Press, Gran Bretaña).
- Bertet, P., Osnaghi, S., Rauschenbeutel, A., Nogues, G., Auffeves, A., Brune, M., Raimond, J.M. y Haroche, S., (2001), "A complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary", *Nature* **411** 166-170.
- Billette, J.J., Campillo, C., Lee, C., McConnell, R.D., Pariseau, G.P. y Fischer, G., (1969), "Concerning 'A thought experiment violating Heisenberg's uncertainty principle'", *Canadian Journal of Physics* **47** 2415-2416.
- Blanchard, C. H., (1982), "Density matrix and energy-time uncertainty", *American Journal of Physics* **50** 642-645.
- Bohm, D., (1951), *Quantum Theory* (Prentice Hall, Inc. New York).
- Bohm, D., (1952a), "A suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of 'Hidden' Variables. I", *Physical Review* **85** 166-179.
- Bohm, D., (1952b), "A suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of 'Hidden' Variables. II", *Physical Review* **85** 180-193.
- Bohm, D., (1953), "Proof That Probability Density Approaches $|\psi|^2$ in Causal Interpretation of the Quantum Theory", *Physical Review* **89** 458-466.
- Bohm, D. y Vigier, J. P., (1954), "Model of the Causal Interpretation of Quantum Theory in Terms of a Fluid with Irregular Fluctuations", *Physical Review* **96** 208-217.
- Bohm, D. y Hiley, B. J., (1993), *The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory* (Routledge, Londres).

Bohr, N., (1928), "The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory", *Nature* **121** 580-590. Reimpreso en Wheeler y Zurek (1983) pp. 87-126, y en Bohr (1961) pp. 52-91.

Bohr, N., (1935), "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?", *Physical Review* **48** 696-702.

Bohr, N., (1949), "Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics", originalmente publicado en *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, P.A. Schilpp, ed., (The Library of Living Philosophers, Evanston) pp. 200-241. También en Wheeler y Zurek (1983) pp. 9-49.

Bohr, N., (1961), *Atomic Theory and the Description of Nature*, 2.a ed. (Cambridge University Press).

Born, M., (1949), *Natural Philosophy of Cause and Chance* (Clarendon Press, Oxford).

Bunge, M., (1956), "Survey of the Interpretations of Quantum Mechanics", *American Journal of Physics* **24** 272-286.

Bunge, M., (1969), "The so-called fourth indeterminacy relation", *Canadian Journal of Physics* **48** 1410-1411.

Busch, P., (1990a), "On the Energy-Time Uncertainty Relations. Part I: Dynamical Time and Time Indeterminacy", *Foundations of Physics* **20** 1-32.

Busch, P., (1990b), "On the Energy-Time Uncertainty Relations. Part II: Pragmatic Time Versus Energy Indeterminacy", *Foundations of Physics* **20** 33-43.

Carnal, O. y Mlynek, J., (1991), "Young's double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer", *Physical Review Letters* **66** 2689-2692.

de Broglie, L., (1960), *Non-linear wave mechanics. A causal interpretation* (Elsevier, Amsterdam) pp. 33-35.

de la Peña, L., (1967), "A simple derivation of the Schroedinger equation from the theory of Markoff processes", *Physics Letters* **24A** 603-604.

de la Peña, L., (1969), "New Formulation of Stochastic Theory and Quantum Mechanics", *Journal of Mathematical Physics* **10** 1620-1630.

de la Peña, L., (1980), "Conceptually interesting generalized Heisenberg inequality", *American Journal of Physics* **48** 775-776.

de la Peña, L. y Cetto, A. M., (2001), "Quantum Theory and Linear Stochastic Electrodynamics", *Foundations of Physics* **31** 1703-1731.

de la Peña, L. y Cetto, A. M., (2005), "Contribution from stochastic electrodynamics to the understanding of quantum mechanics", arxiv:quant-ph/0501011v2.

de la Peña, L., (2006), *Introducción a la Mecánica Cuántica* (Fondo de Cultura Económica-UNAM, México).

de la Peña, L. y Cetto, A. M., (2007), "On the ergodic behaviour of atomic systems under the action of the zero-point radiation field", en *Beyond the Quantum*, T.M. Nieuwenhuizen, V. Špička,

B. Mehmani, M.J. Aghdami, A.Y. Khrennikov, editores, (World Scientific, New Jersey) pp. 271-283.

Eberly, J. H. y Singh L. P. S., (1973) "Time Operators, Partial Stationarity, and the Energy-Time Uncertainty Relation" *Physical Review D* **7** 359-362.

Einstein, A., Podolsky, B. y Rosen, N., (1935), "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", *Physical Review* **47** 777-780.

Ekert, A.K. y Knight, P.L., (1989), "Correlations and squeezing of two-mode oscillations", *American Journal of Physics* **57** 692-697.

Feynman, R. P., (1965), *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill; International Series in Pure and Applied Physics) pp. 9-13.

Folse, H. J., (1985), *The Philosophy of Niels Bohr. The Framework of Complementarity* (North-Holland, Amsterdam).

Galapon, E. A., (2002), "Pauli's Theorem and quantum Canonical Pairs: The Consistency Of a Bounded, Self-Adjoint Time Operator Canonically Conjugate to a Hamiltonian with Non-empty Point Spectrum", arXiv: quant-ph/9908033v4.

Heisenberg, W., (1927), "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik," *Zeitschrift für Physik* **43** 172-198; reimpresso en *Dokumente der Naturwissenschaft*, Vol. 4 (1963), pp. 9-35; traducción al inglés en Wheeler y Zurek (1983), pp. 62-84.

Heisenberg, W., (1930), *Die Physikalischen Prinzipien der Quantenmechanik* (Hirzel, Leipzig). Traducción al inglés *The Physical Principles of Quantum Theory* (University of Chicago Press, Chicago).

Hilgevoord, J. y Uffink J. B. M., (1983), "Overall width, mean peak width and the uncertainty principle", *Physics Letters* **95A** 474-476.

Hilgevoord, J. y Uffink J. B. M., (1985), "Uncertainty Principle and Uncertainty Relations", *Foundations of Physics* **15** 925-944.

Hilgevoord, J., (1996), "The uncertainty principle for energy and time", *American Journal of Physics* **64** 1451-1456.

Hilgevoord, J., (1998), "The uncertainty principle for energy and time. II", *American Journal of Physics* **66** 396-402.

Hilgevoord, J., (2002), "Time in quantum mechanics", *American Journal of Physics* **70** 301-306.

Howard, S. y Roy, S.K., (1987), "Coherent states of a harmonic oscillator", *American Journal of Physics* **55** 1109-1117.

Jammer, M., (1974), *The Philosophy of Quantum Mechanics. The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective* (John Wiley & Sons, New York).

Judge, D., (1963) "On the Uncertainty Relation for L_z and φ ", *Physics Letters* **5** 189.

Judge, D. y Lewis, J. T., (1963) "On the Commutator $[L_z, \varphi]_-$ ", *Physics Letters* **5** 190.

Kennard, E.H., (1928), "Note on Heisenberg's Indetermination Principle", *Physical Review* **31** 344-348.

Krane, K. S., (1988), *Introductory Nuclear Physics* (John Wiley & Sons).

Laloë, F., Cohen-Tannoudji, C. y Diu, B., (1977) *Quantum Mechanics* (Wiley, New York) pp. 23-28.

Laloë, F., (2001), "Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems", *American Journal of Physics* **69** 655-701.

Landau, L. D. y Peierls, R., (1931), "Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie", *Zeitschrift für Physik* **69** 56. Traducción original al inglés en ter Haar *Collected Papers of Landau* (Gordon and Breach, Nueva York, 1965), pp. 40-51; traducción al inglés reimpressa en Wheeler y Zurek (1983), pp. 465-476.

Louisell, W.H., (1963), "Amplitude and Phase Uncertainty Relations", *Physics Letters* **7** 60-61.

Margenau, H., (1950), *The Nature of Physical Reality* (McGraw-Hill, New York).

Margenau, H., (1963), "Measurements in Quantum Mechanics", *Annals of Physics* **23** 469-485.

Marsh, J.S., (1975) "A Note on the Uncertainty Principle," *American Journal of Physics* **43** 97-98.

Muñoz-Tapia, R., (1993), "Quantum mechanical squeezed state", *American Journal of Physics* **61** 1005-1008.

Nikolić, H., (2007), "Quantum Mechanics: Myths and Facts", *Foundations of Physics* **37** 1563-1611.

Rayski, J. y Rayski, J. M. Jr., (1977), "On the Meaning of the Time-Energy Uncertainty Relation", en *The Uncertainty Principle and Foundations of Quantum Mechanics. A Fifty Year's Survey*, W. C. Price y S. S. Chissick, editores (John Wiley & Sons, Londres), pp. 13-20.

Robertson, H.P., (1929), "The Uncertainty Principle" *Physical Review* **34** 573-574. Reimpreso en Wheeler y Zurek (1983) pp. 127-128.

Robinson, M.C., (1968), "A thought experiment violating Heisenberg's uncertainty principle", *Canadian Journal of Physics* **47** 963.

Rowe, M.A., Kielpinski, D., Meyer, V., Sackett, C.A., Itano, W.M., Monroe, C. y Wineland, D.J., (2001), "Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection", *Nature* **409** 791-794.

Ruark, A.E., (1928a), "Heisenberg's indetermination principle and the motion of free particles", *Physical Review* **31** 311-312.

Ruark, A.E., (1928b), "Heisenberg's uncertainty relation and the motion of free particles", *Physical Review* **31** 709.

Sakurai, J.J., (1994), *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Massachusetts), pp. 46-50

Schrödinger, E., (1949), publicado en *The Interpretation of Quantum Mechanics: Dublin seminars (1949-1955) and other unpublished essays* editado por Michel Bitbol (Ox Bow Press, Woodbridge, Connecticut, 1995) pp. 104-107.

- Semon, M.D. y Taylor, J.R. (1996), "Thoughts on the magnetic vector potential," American Journal of Physics **64** 1361-1369.
- Shalitin, D., (1984), "On the time-energy uncertainty relation", American Journal of Physics **52** 1111-1113.
- Shimizu, F., Shimizu, K. y Takuma, H., (1992), "Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms", Physical Review A **46** R17-R20.
- Synge, J. L., (1971), "Geometrical approach to the Heisenberg uncertainty relation and its generalization", Proceeding of the Royal Society of London A **325** 151-156.
- Tonomura, A., Endo, J., Matsuda, T., Kawasaki, T. y Ezawa, H., (1989), "Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern", American Journal of Physics **57** 117-120.
- Uffink, J. B. M. y Hilgevoord, J., (1985), "Uncertainty Principle and Uncertainty Relations", Foundations of Physics **15** 925-944.
- Uffink, J., (1993), "The rate of evolution of a quantum state", American Journal of Physics **61** 935-936.
- Wheeler, J.A. y Zurek, W.H., (1983), *Measurement and Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, N.J.).
- Wick, D. (1996), *The Infamous Boundary: Seven Decades of Heresy in Quantum Physics* (Copernicus, New York).
- Wigner, E. P., (1972), "On the Time-Energy Uncertainty Relation", en *Aspects of Quantum Theory*, A. Salam y E. P. Wigner, editores (Cambridge University Press, Cambridge, Massachusetts), pp. 237-247.
- Wootters, W.K. y Zurek, W.H. (1979), "Complementarity in the Double-Slit Experiment: Quantum Nonseparability and Quantitative Statement of Bohr's Principle," Physical Review **D19** 473-484. Reimpreso en Wheeler y Zurek (1983) pp. 443-454.