



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

GEOMETROTERMODINÁMICA DEL HOYO NEGRO
EN 2+1 DIMENSIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

SELENE CRUZ REYES

DIRECTOR DE TESIS: DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

COMITE TUTORAL: DR. JUAN CARLOS LÓPEZ VIEYRA
DR. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ



MÉXICO, DF.

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Selene Cruz Reyes
Universidad Nacional Autónoma de México

Jurado

Dr. Hernando Quevedo Cubillos

Dr. Jorge Luis Cervantes Cota

Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl

Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero

Dr. Alberto Sánchez Moreno

Geometrotermodinámica del Hoyo Negro en 2+1 Dimensiones.
2008

A MI MADRE.

A MI PADRE.

A MIS HERMANOS.

A GUSTAVO.

Agradecimientos.

A mi madre por su amor incondicional, por escucharme y tener siempre palabras de cariño y aliento hacia mí, sin las cuales me sentiría perdida.

A mi padre por su ejemplo de tenacidad y esfuerzo constante.

A mis hermanos: Leticia, Daniel, Pilar, Alma, Ana, Jose Manuel. Por su apoyo incondicional en los momentos más difíciles y su ejemplo de lucha.

A Gustavo a quien amo y quiero, quien día a día me recuerda lo que es ser feliz llenandome de dicha.

A mis sobrinitos: Daniela, Patricio, Regina, Samantha y Rodrigo por jugar conmigo.

A Sandra por su apoyo y cariño.

Al Dr. Hernando Quevedo Cubillos por tenderme la mano y ayudarme a hacer posible esta tesis.

Al Dr. Michael P. Ryan Allen por aceptarme con los brazos abiertos y por darme siempre su voto de confianza.

Al Dr Alberto Sánchez Moreno por su apoyo en la realización de esta tesis.

A mis sinodales: Dr. Jorge Luis Cervantes Cota, Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl y el Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero por sus consejos para el mejoramiento de esta tesis.

A mis amigos: Gustavo, Julio, Arturo, Edgar, Mercedes, Ana, Karen, Lucia, Leonor, Laura, Baltazar, Liliana y Cristel. A todos ellos por su cariño.

A la Facultad de Ciencias y a la UNAM.

A DIOS POR TODO LO QUE ME HA DADO.

Índice general

1. Introducción	4
2. Fundamentos de Relatividad y Hoyos Negros	7
2.1. Tensor de Einstein	7
2.2. Hoyos negros en cuatro dimensiones	11
2.3. Gravedad en 2+1 dimensiones	14
2.4. El hoyo negro de BTZ	15
3. Termodinámica de hoyos negros	17
3.1. Algo de termodinámica	17
3.2. Termodinámica de hoyos negros	23
3.2.1. Las cuatro leyes de la termodinámica para un hoyo negro	24
3.3. Antecedentes de geometría aplicada en termodinámica	26
3.4. Fundamentos de geometrotermodinámica	28
3.5. Geometrotermodinámica de hoyos negros	30
4. Geometrotermodinámica del hoyo negro BTZ	37
4.1. Resumen del hoyo negro BTZ	37
4.2. Termodinámica de BTZ	38
4.3. Geometría del espacio de estados de equilibrio	40
4.4. Análisis de resultados	47
5. Constante cosmológica como variable termodinámica	53
5.1. Termodinámica con constante cosmológica	53
5.2. Problema de linealidad	57

5.3. Escalar de curvatura	59
5.4. Geometría del espacio de estados de equilibrio	60
5.5. Análisis de resultados	60
6. Conclusiones	67
A. Definición de una variedad	70
A.1. Ejemplos de variedades	72
A.2. Curvas y funciones en una variedad	72
B. Espacios Tangente y Cotangente	74
B.1. Espacio Tangente	74
B.2. Bases Vectoriales	76
B.3. Uno-formas y Espacio Cotangente	76
B.4. El gradiente como uno-forma	77
B.5. Bases de uno-formas y Componentes de uno-formas	78
B.6. Notación de Índices	79
B.7. Transformaciones de Bases	79
B.8. La métrica es un tensor	81
C. Formas Diferenciales	85
C.1. Volumen	85
C.2. Formas diferenciales	86
C.3. Volumen en una variedad	87
D. Conexión	
(Símbolos de Christoffel)	90
D.1. Transporte paralelo	90
D.2. La derivada covariante	92
D.3. Símbolos de Christoffel y la derivada covariante	93
D.4. Derivadas de uno-formas y tensores de más alto rango	94
D.5. Símbolos de Christoffel y la métrica	95
D.6. Podemos calcular los símbolos de Christoffel por medio de la métrica	97

E. Variedades Riemannianas	99
E.1. Diferenciación covariante	100
E.2. Tensor de curvatura	101
E.3. Identidades de Bianchi y escalar de curvatura	105
E.4. Pull-back	116

Capítulo 1

Introducción

Bañados, Teitelboim y Zanelli mostraron que las ecuaciones de campo de Einstein en el espacio-tiempo (2+1) dimensional con constante cosmológica negativa admiten una solución que describe un hoyo negro, el cual es llamado el hoyo negro BTZ. La presente tesis tiene el objetivo de encontrar las propiedades termodinámicas de este hoyo a través de conceptos geométricos asociados a un espacio termodinámico.

Este estudio de las propiedades termodinámicas, esta basado en la construcción geométrica del espacio fase termodinámico τ , el cual está coordinado por los parámetros $\{\Phi, E^a, I^a\}$, donde Φ es la ecuación fundamental del hoyo negro y entonces juega el papel del potencial termodinámico, E^a son las variables extensivas en términos de las cuales está descrito Φ , que en este caso son la entropía S y el momento angular J , por otra parte I^a son las correspondientes variables intensivas duales a las extensivas y son la temperatura T y la velocidad angular Ω .

Este espacio τ tiene ciertas propiedades geométricas, como por ejemplo, el ser un espacio continuo y además es una variedad diferencial, estos y otros conceptos son básicos para el entendimiento de esta tesis. Los apéndices presentan los conceptos base de la geometría diferencial que nos ayudarán a obtener las propiedades geométricas del espacio τ y en particular de un subespacio contenido en este último que es de vital importancia para nuestro estudio, que es el espacio de estados de equilibrio termodinámico ε . Así que para el lector que no este familiarizado con estos conceptos de geometría diferencial es recomendable que comience estudiando desde el apéndice A hasta el apéndice E, en donde son presentados conceptos tales como la definición de variedad, espacios tangente y cotangente en una variedad, el tensor métrica,

la relación entre los vectores y los covectores a través de la métrica, los símbolos de Christoffel, la relación entre los símbolos de Christoffel y la métrica, tensor de curvatura de Riemann, tensor de Ricci, escalar de curvatura, entre muchos otros conceptos. Además damos ejemplos de cómo calcular los símbolos de Christoffel y el escalar de curvatura para una variedad 2-dimensional a partir de una métrica general, lo cual será muy útil en una parte del desarrollo de esta tesis.

Una de las propiedades que más nos importa de la variedad que vamos a estudiar es la curvatura, que nos habla de las interacciones termodinámicas dentro del hoyo negro. Con interacciones termodinámicas nos referimos al hecho de que por ejemplo para el gas ideal donde no se consideran interacciones entre los elementos del gas, la curvatura de la variedad correspondiente es cero, mientras que para el gas de van der Waals donde se consideran interacciones de un cierto tipo, las cuales se ven reflejadas en la ecuación de estado de dicho gas, la curvatura de la correspondiente variedad es distinta de cero. Esta curvatura la obtenemos en términos de la métrica g introducida en el espacio de estados de equilibrio ε y se introduce en base al potencial termodinámico Φ y las demás coordenadas en el espacio fase termodinámico τ , de tal manera que g es invariante de Legendre, es decir, la métrica describe de igual forma las propiedades geométricas del espacio ε sin importar con cual de los potenciales termodinámicos (los cuales tienen la misma información termodinámica del sistema) es construida.

La estructura de la tesis es la siguiente:

En el capítulo 1, revisamos algunos conceptos pertinentes de relatividad general que son útiles en la descripción de los hoyos negros en cuatro dimensiones, para después pasar a una descripción de la gravedad en (2+1)-dimensiones y del hoyo negro BTZ.

En el capítulo 2, recordamos algunos de los principales conceptos de termodinámica clásica y después nos introducimos a la termodinámica de los hoyos negros, en donde se estudian las cuatro leyes de la termodinámica para un hoyo negro. También dedicamos parte de este capítulo a estudiar los antecedentes de la geometría aplicada a la termodinámica y los fundamentos de la geometrotermodinámica de los hoyos negros.

En el capítulo 3, construimos el espacio fase termodinámico del hoyo negro BTZ y encontramos su ecuación termodinámica fundamental. También obtenemos propiedades como la temperatura, la velocidad angular y la ca-

pacidad calorífica, entre otras. Esto en términos del radio del horizonte de eventos del hoyo negro BTZ.

Por otra parte obtenemos la métrica G_{BTZ} del espacio fase termodinámico en base a una métrica presentada en el capítulo 3, además de la uno-forma fundamental, para después inducir el espacio de estados de equilibrio con la correspondiente métrica g .

Como último paso, realizamos un análisis gráfico de todas las variables termodinámicas, para concluir con el cálculo del escalar de curvatura y hacemos el correspondiente análisis general de resultados.

En el capítulo 4, introducimos la constante cosmológica Λ como otra variable extensiva termodinámica y al observar que esto último crea un gran problema en la métrica g del espacio de estados de equilibrio, optamos por introducir el cuadrado del radio de curvatura l^2 como variable extensiva en lugar de Λ , a su vez analizamos el por qué de esta arbitrariedad y hacemos el correspondiente análisis de resultados.

El capítulo 5 presenta las conclusiones obtenidas de esta tesis.

Capítulo 2

Fundamentos de Relatividad y Hoyos Negros

Para entrar al tema de hoyos negros y en particular al de los hoyos negros BTZ (Bañados, Teitelboim y Zanelli), necesitamos introducirnos al contexto de la teoría de gravedad, en particular a las ecuaciones de campo de Einstein, cuyas soluciones adecuadas al problema particular describen ciertos sistemas físicos como por ejemplo la física de un hoyo negro.

2.1. Tensor de Einstein

La relatividad general es una teoría basada en conceptos de geometría diferencial, por medio de los cuales se puede describir las propiedades de un espacio-tiempo como su curvatura, el cual se ve afectado por una fuente de campo gravitacional.

Imaginemos una variedad continua o bien un espacio, el cual tiene una cierta curvatura. A este espacio le podemos asociar una métrica g por medio de la cual medimos la longitud de un elemento de línea de cualquier curva en dicho espacio. Es decir, la métrica nos permite una definición de longitud en la variedad como se estudia en el apéndice B.

Ahora de acuerdo al apéndice E, en un espacio plano existe un sistema de coordenadas en el cual los símbolos de Christoffel son cero, pero en un espacio curvo, no podemos hallar un sistema de coordenadas global en el cual estos símbolos sean en general cero y también se estudia en este apéndice que la diferencia entre una variedad general y un espacio plano se manifiesta en

la derivada de estos símbolos de Christoffel.

Por otra parte de acuerdo al apéndice D, podemos obtener los símbolos de Christoffel en términos de las derivadas parciales de las componentes de g , por medio de la siguiente expresión

$$\frac{1}{2}g^{jm}(g_{j,i,k} + g_{j,k,i} - g_{i,k,j}) = \Gamma^m{}_{ik} \quad (2.1)$$

donde g_{ki} son las componentes de la métrica y $g_{ki,j}$ la derivada de esta componente con respecto a la j -ésima coordenada.

De acuerdo a lo expresado anteriormente, es natural que la curvatura de una variedad general se pueda obtener en términos de las derivadas de los símbolos de Christoffel. Es el tensor de curvatura de Riemann quien precisamente tiene esta función y el cual como vimos en el apéndice E tiene componentes dadas por:

$$R^j{}_{ikl} = \Gamma^j{}_{il,k} - \Gamma^j{}_{ik,l} + \Gamma^j{}_{mk}\Gamma^m{}_{il} - \Gamma^j{}_{ml}\Gamma^m{}_{ik} \quad (2.2)$$

También se estudia en este apéndice, que una variedad plana es aquella en la que un vector puede ser movido paralelamente alrededor de una curva arbitraria cerrada y retornar a su punto inicial sin cambiar, lo que significaba que

$$R^j{}_{ikl} = 0 \Leftrightarrow \text{la variedad es plana} \quad (2.3)$$

Por otra parte como $R_{jikl} \equiv g_{jf}R^f{}_{ikl}$, una propiedad importante respecto a las componentes del tensor curvatura, es la siguiente

$$R_{jikl;n} + R_{jink;l} + R_{jiln;k} = 0 \quad (2.4)$$

También definimos el tensor de Ricci R_{ji} :

$$R_{ji} \equiv R^k{}_{jki} = R_{ij} \quad (2.5)$$

que es la contracción de $R^k{}_{jli}$ en el primer y tercer índices.

Por último el escalar de Ricci o bien el escalar de curvatura es definido de la siguiente forma

$$\mathbf{R} \equiv g^{kl}R_{kl} = g^{kl}g^{ji}R_{jkil} \quad (2.6)$$

En el apéndice E se muestran ejemplos de como calcular, tanto los símbolos de christoffel como el escalar de curvatura para una variedad dos-dimen-

sional y una tres-dimensional, cada una de las cuales tiene asociada una métrica general.

En el caso del ejemplo dado para la variedad dos-dimensional, la expresión obtenida del escalar de curvatura \mathbf{R} (ecuación E.45), será muy útil para nuestro trabajo posterior.

A continuación se dará una motivación intuitiva de la estructura de las ecuaciones de campo de Einstein por medio de una construcción muy sencilla de estas [9].

Partiendo de la ecuación (2.4) tenemos que

$$g^{jk}[R_{jkl;m} + R_{jimk;l} + R_{jilm;k}] = 0 \quad (2.7)$$

si ahora usamos que $g_{ji;k} = 0$ y como g^{jk} es función solo de g_{ji} de aquí se sigue que

$$g^{ji};k = 0 \quad (2.8)$$

de esta última ecuación y de (2.7) podemos ahora obtener la contracción de Ricci a las idéntidades de Bianchi, es decir

$$R_{il;m} - R_{im;l} + R^k{}_{ilm;k} = 0 \quad (2.9)$$

pues g^{jk} y g_{il} pueden ser tomadas dentro y fuera de las derivadas covariantes, esto significa que si consideráramos el bajar y subir índices como un operador, este conmutaría con la diferenciación covariante. Otro hecho que hemos utilizado para obtener el segundo término es que $R_{jimk} = -R_{jikm}$.

Pero hay una ecuación que es más frecuentemente usada y es obtenida contrayendo otra vez en los índices i y l :

$$g^{il}[R_{il;m} - R_{im;l} + R^k{}_{ilm;k}] = 0$$

de lo cual se sigue

$$R_{;m} - R^k{}_{m;k} - R^k{}_{m;k} = 0 \quad (2.10)$$

donde hemos utilizado otra vez la antisimetría del tensor de curvatura. Podemos notar que R es un escalar, así que $R_{;m} \equiv R_{,m}$ en cualquier sistema de coordenadas. Así la ecuación (2.10) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$(2R^k{}_{m} - \delta^k{}_m R)_{;k} = 0 \quad (2.11)$$

estas son las llamadas idéntidades de Bianchi. Por otra parte si definimos el tensor simétrico

$$G^{ji} \equiv R^{ji} - \frac{1}{2}g^{ji}R = G^{ij} \quad (2.12)$$

de la ecuación (2.11) podemos observar que

$$G^{ji}{}_{;i} = 0. \quad (2.13)$$

Es importante resaltar que el tensor G^{ji} depende solamente del tensor curvatura y de la métrica, este tensor es llamado el tensor de Einstein [9].

La descripción de la gravedad y su acción en la materia esta basada en la idea de una variedad curva con una métrica y en que es son las fuentes de este campo las que determinan la métrica asociada a la variedad. El análogo a esto en la teoría de Newton es

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (2.14)$$

donde ρ es la densidad de masa. Su solución para una partícula puntual de masa m es

$$\phi = -\frac{Gm}{r}, \quad (2.15)$$

se podría decir que la fuente del campo gravitacional en la teoría de Newton es la densidad de masa. En la teoría relativista de gravedad, consideramos el tensor \mathbf{T} de energía-momento como la fuente de campo gravitacional. La generalización de la ecuación (2.14) para la relatividad podría tener la forma

$$\mathbf{O}(g) = k\mathbf{T} \quad (2.16)$$

donde k es una constante y \mathbf{O} es un operador diferencial en el tensor métrico g , el cual es la generalización de ϕ y aquí habra 16 ecuaciones diferenciales para cada componente de (2.16) en lugar de una sola, ecuación (2.14). Pero \mathbf{O} esta igualado a un tensor de rango $\binom{2}{0}$, \mathbf{T} . Y al igual que este último también debe estar en términos de combinaciones de $g_{kl,ij}$, $g_{kl,m}$ y g_{kl} . Observamos que el tensor de Ricci satisface todas estas condiciones, así que también las debe satisfacer un tensor de la forma [9]

$$O^{ji} = R^{ji} + \mu g^{ji} R + \Lambda g^{ji} \quad (2.17)$$

con μ y Λ constantes. Localmente \mathbf{T} cumple con

$$T^{ji}{}_{;i} = 0, \quad (2.18)$$

ecuación que es cierta para cualquier tensor métrico, por lo que tenemos que

$$O^{ji}{}_{;i} = 0 \quad (2.19)$$

lo cual también es cierto para cualquier tensor métrico y como $g^{ji};k = 0$ entonces de la ecuación (2.17) se cumple que

$$(R^{ji} + \mu g^{ji} R);i = 0 \quad (2.20)$$

comparando esto con la ecuación (2.12) vemos que $\mu = -\frac{1}{2}$.

En este punto debemos notar que la métrica esta determinada por las fuentes del campo que deseamos describir.

Otra manera de obtener las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío es mediante la acción de Einstein-Hilbert definida como sigue

$$I_{EH} = \int_{M^n} \sqrt{g} R d^n x \quad (2.21)$$

donde M^n es la variedad M de dimensión n y g es el determinante de la métrica definida en esa variedad n -dimensional. Al variar la acción de Einstein-Hilbert con respecto a la métrica y pidiendo que sea cero obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein

$$\frac{\delta I_{EH}}{\delta g^{kl}} = 0 \iff R_{kl} - \frac{1}{2} g_{kl} R = 0 \quad (2.22)$$

la última relación es en realidad un sistema de ecuaciones no lineal y en derivadas parciales para la métrica g_{ij} , cuyo número de ecuaciones depende de la dimensión de M , es decir de la variedad que queremos describir. Las ecuaciones (2.22) son las ecuaciones de campo de Einstein.

2.2. Hoyos negros en cuatro dimensiones

El fenómeno de la formación del horizonte que encierra a un hoyo negro está relacionado con el colapso de una estrella a tan pequeñas dimensiones que el campo gravitacional atrapa cualquier cosa inclusive la luz dentro de una cierta región la cual es llamada el interior del horizonte del hoyo negro.

La clave para entender los hoyos negros y especialmente su conexión con la termodinámica, es apreciar el significado de lo que llamamos el horizonte de eventos. Consideremos una estrella masiva muy compacta, la fuerza de gravedad en su superficie se puede incrementar debido a que esta empiece a colapsarse o al haber un aumento en su masa. De acuerdo a la teoría general de la relatividad, la gravedad afecta las propiedades de la luz, un ejemplo

de esto, es que los rayos de luz dejan la superficie de la estrella viajando radialmente hacia afuera y como la luz tiene que hacer trabajo para vencer a la gravedad superficial y escapar de la estrella, la consecuencia es que su energía y por lo tanto su frecuencia se ven disminuidas. Esto es lo que llaman el corrimiento al rojo debido a la gravedad y ha sido medido para luz dejando objetos masivos de gravedad relativamente baja, como por ejemplo el sol y la tierra. Para objetos más compactos y masivos el corrimiento al rojo llega a ser enorme [16].

De acuerdo a la teoría de gravitación Newtoniana y a la teoría de relatividad, una estrella esférica sin carga puede colapsarse si su radio es menor que $2GM/c^2$, donde M es la masa, c es la velocidad de la luz y G es la constante gravitacional de Newton. Este tamaño es muy pequeño, es de 1km para el sol y de 1cm para la tierra.

Cálculos directos muestran que conforme la estrella se aproxima al radio crítico, la luz de su superficie sufre un corrimiento al rojo sin límite y no lo podemos ver, de ahí el adjetivo. Una forma de visualizar esto es pensar que conforme la estrella se aproxima al radio crítico $2GM/c^2$ ninguno de los eventos que ocurren en su superficie y dentro de la estrella pueden ser vistos después de esto. Así la superficie esférica $r = 2GM/c^2$ actúa como un horizonte de eventos [16].

Una forma de visualizar el horizonte de eventos es imaginar frentes de onda de luz esféricos, los cuales son emitidos radialmente hacia fuera desde diferentes superficies $r = cte$. Aquellas ondas esféricas que no son atrapadas al colapsar la estrella, viajan desde $r > 2GM/c^2$ expandiéndose y escapando gradualmente al infinito. Aquellos rayos de luz emitidos que se encuentran dentro del radio crítico, no logran escapar y son atraídos hacia el centro, aún cuando ellos fueron emitidos hacia fuera del mismo. El horizonte de eventos es la superficie esférica de luz, a partir de la cual los rayos no pueden escapar al darse el colapso. Para observadores distantes este horizonte tiene un tamaño de $r = 2GM/c^2$.

De acuerdo a la teoría de relatividad, la materia y la información no se pueden propagar más rápido que la luz, así la luz no puede escapar de dentro del horizonte ni cualquier otra cosa tampoco. El colapso de la estrella es muy rápido, en una fracción de segundo en tiempo propio de la estrella, la superficie aparentemente desaparece en un sólo punto y la densidad de la estrella tiende a ser infinito [16], pero debido a que la curvatura del espacio tiempo presenta una singularidad sin aparente límite, está singularidad representa un tipo de borde para el espacio-tiempo.

Las soluciones generalmente más conocidas a las ecuaciones de campo de Einstein de relatividad general las cuales describen hoyos negros, son las llamadas Kerr-Newman, que describen materia libre en el espacio-tiempo representando un hoyo negro el cual rota y tiene carga eléctrica. Estas soluciones estan descritas por un conjunto de tres parámetros que son: la masa-energía total M , el momento angular $J = |J|$ y la carga eléctrica Q . Para $J = Q = 0$ la solución, es la descubierta por Schwarzschild en 1916, cuya métrica está dada por [8]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.23)$$

Aquí $d\Omega^2$ representa la métrica sobre una 2-esfera unitaria. La solución Reissner-Nordström describe un hoyo negro con $J = 0$, cuya métrica es [2]

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\varphi^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (2.24)$$

con

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (2.25)$$

donde r_+ y r_- son los radios externo e interno del hoyo negro respectivamente. La métrica Kerr, describe el campo gravitacional de un hoyo negro estacionario, simétricamente axial y rotando pero con $Q = 0$, está métrica es la siguiente [2]

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \text{sen}^2\theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a \text{sen}^2\theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \text{sen}^2\theta \Delta}{\Sigma} \text{sen}^2\theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2.26)$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \quad \Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (2.27)$$

y con $a = J/M$ que se interpreta como el momento angular específico. La solución que describe el hoyo negro de Kerr-Newman es [2]:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \text{sen}^2\theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a \text{sen}^2\theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \text{sen}^2\theta \Delta}{\Sigma} \text{sen}^2\theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2.28)$$

con Σ y Δ dadas por (2.27), pero en este caso $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$.

La forma del horizonte y el comportamiento de los rayos de luz en este caso general son más complicados, pero las características cualitativas esenciales son las mismas que para el hoyo negro de Schwarzschild.

2.3. Gravedad en 2+1 dimensiones

La gravedad en (2+1) dimensiones (dos dimensiones de espacio más una de tiempo) es un modelo que ayuda a abordar de una manera más sencilla problemas relacionados a la teoría cuántica de gravedad [13]. Este modelo tiene la ventaja de ser más simple matemática y físicamente que el modelo real (3+1)-dimensional de relatividad general usado para describir la teoría de gravitación y además tiene los mismos fundamentos conceptuales que este último.

Como ya mencionamos en la sección anterior, Hawking mostró que los hoyos negros son objetos termodinámicos, con temperaturas características y entropías. Aún antes del trabajo de Hawking se ha supuesto que estas propiedades termodinámicas reflejan la mecánica estadística de los estados cuánticos gravitacionales del sistema, pero la naturaleza detallada de estos estados aún no se ha podido decifrar. El hoyo negro (2+1)-dimensional de Bañados, Teitelboim y Zanelli, es decir el hoyo negro BTZ puede tener una entropía arbitrariamente alta [14].

Una de las principales características de la gravedad vista en un espacio (2+1)-dimensional en el vacío es que no hay grados de libertad locales. Esto puede ser mostrado por un simple argumento: el espacio fase consiste de una métrica espacial con la cual hay tres grados de libertad por punto y su momento canónico con el cual hay otros tres grados de libertad por punto, pero la teoría también tiene tres constricciones que restringen los datos iniciales y tres coordenadas arbitrarias elegidas con lo cual tenemos cero grados de libertad locales. Así cuando $n = 3$ es decir en el espacio (2+1)-dimensional no hay grados de libertad físicos; todos los grados de libertad son topológicos [14].

En este espacio-tiempo tridimensional la acción de Einstein-Hilbert es

$$I_{EH\Lambda}^{(3)} = \int \sqrt{g} (R - 2\Lambda) d^3x \quad (2.29)$$

donde Λ es la constante cosmológica y es un grado de libertad topológico. Cuando la constante cosmológica es cero, la solución a las ecuaciones de

campo de Einstein en este espacio-tiempo (2+1) dimensional corresponde a una métrica que describe un espacio necesariamente plano.

Variando esta última ecuación con respecto de la métrica, obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein

$$\frac{\delta I_{EM\Lambda}}{\delta g^{kl}} = R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R + \Lambda g_{kl} = 0 \quad (2.30)$$

donde

$$R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R = -\Lambda g_{kl} \quad (2.31)$$

son las ecuaciones buscadas. Una de las soluciones de (2.31) describe la física relacionada al hoyo negro BTZ, que discutimos en la siguiente sección desde el punto de vista de la relatividad general.

2.4. El hoyo negro de BTZ

Como mencionamos en la sección anterior, cuando la constante cosmológica es cero, una solución en el vacío a las ecuaciones de campo de Einstein en el espacio-tiempo (2+1) dimensional es necesariamente la que describe un espacio plano y puede ser mostrado que no hay soluciones que describan un hoyo negro. Por lo tanto causó una enorme sorpresa cuando Bañados, Teitelboim y Zanelli mostraron que en el vacío, la gravedad (2+1)-dimensional con $\Lambda < 0$ admite una solución que describe un hoyo negro [14]. Es decir hay una solución a (2.31), la cual describe un hoyo negro y este es precisamente el espacio-tiempo BTZ.

El hoyo negro BTZ en coordenadas de Schwarzschild ($x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi$) esta dado por la métrica [13]

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + r^2(d\phi + N^\phi dt)^2 + N^{-2} dr^2 \quad (2.32)$$

con

$$N^2 = -8GM + \frac{r^2}{l^2} + \frac{16G^2 J^2}{r^2}, \quad N^\phi = -\frac{4GJ}{r^2}, \quad (|J| \leq Ml). \quad (2.33)$$

Si elegimos unidades tal que $8G = 1$, entonces

$$N^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad N^\phi = -\frac{J}{2r^2} \quad (2.34)$$

con M la masa, J el momento angular del hoyo negro y $\Lambda = -1/l^2$. Este espacio-tiempo es el hoyo negro BTZ (2+1)-dimensional. De la ecuación (2.32) vemos que la métrica espacial es simplemente

$$g_{esp} = \begin{pmatrix} N^{-2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

observamos que la métrica tiene una singularidad cuando $N^2 = 0$ con lo cual podemos obtener el horizonte de eventos en $r = r_+$ y el horizonte interno en r_- . De esta condición se desprenden las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} N^2 &= 0 \\ \Rightarrow -M &+ \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} = 0 \\ \Rightarrow \frac{r^4}{l^2} &- Mr^2 + \frac{J^2}{4} = 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

con lo que obtenemos los ceros de la función N :

$$r_{\pm}^2 = \frac{l^2}{2} \left[M \pm \left(M^2 - \frac{J^2}{l^2} \right)^{1/2} \right] \tag{2.36}$$

y entonces de una manera sencilla obtenemos de esta última ecuación

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{l^2}, \quad J = \frac{2r_+r_-}{l}. \tag{2.37}$$

La característica más importante de los hoyos negros BTZ es que tienen propiedades termodinámicas cercanamente análogas a los hoyos negros realistas del espacio-tiempo (3+1) dimensional [13].

Capítulo 3

Termodinámica de hoyos negros

En este capítulo, como primer paso recordaremos algunos de los principales conceptos de termodinámica clásica, para después introducirnos a la termodinámica de los hoyos negros, en donde estudiaremos las cuatro leyes de la termodinámica para un hoyo negro. También estudiaremos los antecedentes de la geometría aplicada a la termodinámica y como último paso se estudiarán los fundamentos de la geometría aplicada a la termodinámica de los hoyos negros. Es importante señalar que el estudio de este capítulo, es importante para conocer los conceptos que se manejaran posteriormente.

3.1. Algo de termodinámica

Para describir macroscópicamente un sistema se requiere de un escaso número de parámetros a diferencia del enorme número que requeriríamos para hacer una descripción a nivel atómico. Cuando pasamos de un nivel de descripción atómico a uno macroscópico hay una simplificación enorme y una drástica reducción en el número de variables necesarias. Es decir, las medidas macroscópicas detectan solamente valores medios de las coordenadas atómicas [11].

Del enorme número de coordenadas atómicas, sólo un pequeño grupo de ellas sobrevive al promedio estadístico asociado con la transición a una descripción macroscópica. Algunas de estas coordenadas que sobreviven son de naturaleza mecánica como por ejemplo el volumen. Así la termodinámica es el estudio de las consecuencias macroscópicas de las innumerables coordenadas atómicas que debido al promedio estadístico, no aparecen explícitamente en

la descripción macroscópica de un sistema dado.

Por otra parte los parámetros macroscópicos V, N_1, N_2, \dots, N_r , donde N_k es el número de moles del k -ésimo componente químico del sistema, tienen una propiedad común que es importante la cual se llama extensividad. Supongamos que tenemos un sistema compuesto por varios subsistemas, los parámetros de este sistema cuyos valores son iguales a la suma del mismo parámetro en cada uno de los subsistemas se llaman parámetros extensivos. Los parámetros extensivos tienen un papel fundamental en toda la teoría termodinámica.

Los sistemas macroscópicos poseen energías definidas y precisas, que están sometidas a un principio de conservación determinado. Es decir en todo sistema termodinámico hablaremos de una energía perfectamente definida. Únicamente las diferencias de energía y no los valores absolutos de las mismas tienen un significado físico. Por eso se acostumbra adoptar algún estado particular del sistema como estado de referencia cuya energía se considera como cero. La energía del sistema en cualquier otro estado referida al estado de referencia, se conoce como energía interna termodinámica del sistema en dicho estado. Al igual que el volumen y el número de moles, la energía interna es un parámetro extensivo.

Los estados a los que se aplica la termodinámica macroscópica se denominan estados de equilibrio, donde, un sistema se encuentra en equilibrio si las cantidades físicas aditivas de los subsistemas son con un alto grado de precisión iguales a su promedio. En este sentido hay un postulado que establece la existencia de estados particulares denominados estados de equilibrio de los sistemas que desde un punto de vista macroscópico están caracterizados completamente por la energía interna U , el volumen V y los números molares N_1, \dots, N_r de los componentes químicos. Como el estado queda caracterizado completamente por los parámetros extensivos $U, V, N_1, N_2, \dots, N_r$ se sigue que las propiedades del sistema tiene que ser independientes de su historia [11].

La descripción de un sistema termodinámico requiere que especifiquemos las fronteras que lo separan de los alrededores y que proporcionan sus condiciones de contorno y es mediante la manipulación de estas fronteras o paredes como se alterarán los parámetros extensivos del sistema y se inician los procesos.

En general se dice que una pared que constriñe un parámetro extensivo de un sistema a un valor definido y particular es restrictiva con respecto a dicho parámetro, diciéndose en cambio que una pared que permite al parámetro variar libremente es no restrictiva con respecto al mismo. Un sistema confi-

nado por una pared que es restrictiva con respecto a la energía, al volumen y a la totalidad de los números de moles se conoce como un sistema aislado.

Ahora considerando las definiciones anteriores deseamos abordar el problema principal de la termodinámica.

Consideremos dos sistemas que están contenidos en el interior de un cilindro cerrado, separados por un pistón interno. Supongamos que el pistón y las paredes del cilindro son rígidos, impermeables a la materia y adiabáticos, es decir no permiten la transferencia de calor, y que la posición del pistón está fijada firmemente. Ambos sistemas están aislados. Ahora si dejamos el pistón en libertad, en general este se moverá en busca de una nueva posición. De forma análoga si hacemos que por el pistón pueda fluir el calor entre los dos sistemas, se producirá una redistribución de energía entre ambos. Y así mismo si hacemos que el pistón sea permeable a las partículas se producirá una redistribución de materia entre los dos sistemas. Es decir la eliminación de una ligadura da como resultado en cada caso el comienzo de algún proceso espontáneo y cuando al final los sistemas se estabilizan en nuevos estados de equilibrio lo hacen con nuevos valores de U , V y N ; el problema básico de la termodinámica es calcular estos nuevos valores de equilibrio [11].

De forma más general, consideremos un sistema aislado, es decir rodeado por una pared que es restrictiva respecto a la energía total, al volumen total y al número de moles totales, el cual dividimos en subsistemas. Los subsistemas contenidos en el sistema aislado no necesitan ser sistemas aislados a su vez. Las ligaduras que impiden el intercambio de energía de volumen o de materia entre los subsistemas que constituyen el sistema compuesto aislado se conocen como ligaduras internas. Si un sistema compuesto aislado está en equilibrio respecto a ciertas ligaduras internas y se eliminan algunas de ellas, el sistema buscará con el tiempo un nuevo estado de equilibrio. El problema básico de la termodinámica es la determinación del estado de equilibrio final que se alcanza después de eliminar las ligaduras internas de un sistema compuesto aislado.

Podríamos intentar obtener la solución de este problema termodinámico a partir de la teoría estadística y cuántica, pero en termodinámica clásica lo que se hace es adoptar postulados que proporcionan la solución formal más simple que puede concebirse para este problema básico.

Es de esperar que la forma más simple de expresar el criterio de equilibrio sea en términos de un principio extremal. Es decir que los valores de los parámetros extensivos en el estado de equilibrio final fueran simplemente aquellos que maximizan una cierta función. Y se podría esperar que

esta función hipotética tuviera diversas propiedades matemáticas simples y particulares que garantizan la sencillez de la teoría derivada. Los siguientes postulados desarrollan la teoría propuesta.

El primer postulado establece que existe una función S de los parámetros extensivos de cualquier sistema compuesto, la cual llamamos entropía, definida para todos los estados de equilibrio y que tiene la siguiente propiedad: los valores que toman los parámetros extensivos, en ausencia de ligaduras internas, son aquellos que maximizan la entropía respecto al conjunto de los estados de equilibrio ligados [11].

Se debe enfatizar en que la entropía está definida únicamente para los estados de equilibrio, y que el postulado no hace ninguna referencia a los estados de no equilibrio. La entropía de cada uno de estos estados de equilibrio ligados está definida y la entropía es máxima en algún estado particular del conjunto. En ausencia de ligaduras, es este estado de entropía máxima el que resulta seleccionado por el sistema.

Consideremos el caso de dos sistemas separados por una pared adiabática y con valores particulares de energía U^1 y U^2 tal que $U^1 + U^2 = U$, donde U es la energía total del sistema. Para cada uno de esos estados de equilibrio ligados existe una entropía del sistema compuesto y para ciertos valores particulares de U^1 y U^2 esta entropía es máxima. Si ahora separamos los dos sistemas por una pared diatérmica habrá una redistribución de la energía U entre ambos sistemas y se distribuirá en aquel estado en el que la entropía es máxima [11].

La relación en la cual la entropía es función de los parámetros extensivos se denomina relación fundamental. Por tanto, si se conoce la relación fundamental de un sistema particular, toda la información termodinámica imaginable concerniente al sistema puede deducirse a partir de ella.

La información contenida en la relación fundamental es completa: es equivalente a todos los tipos imaginables de descripciones de propiedades termodinámicas. Si se conoce la relación fundamental de un sistema, no queda un solo atributo termodinámico que no esté determinado completa y precisamente.

El segundo postulado establece que la entropía de un sistema compuesto es aditiva respecto a la de los subsistemas constituyentes. La entropía es continua y diferenciable y es una función monótonamente creciente de la energía.

De aquí se siguen varias consecuencias matemáticas. La propiedad de aditividad establece que la entropía S del sistema compuesto es simplemente

la suma de las entropías S^α de los subsistemas constituyentes [11]:

$$S = \sum_{\alpha} S^{\alpha}. \quad (3.1)$$

La entropía de cada subsistema es función exclusivamente de los parámetros extensivos del subsistema considerado:

$$S^{\alpha} = S^{\alpha}(U^{\alpha}, V^{\alpha}, N^{\alpha}) \quad (3.2)$$

La propiedad monótonica postulada implica que la derivada parcial $(\partial S/\partial U)_{V,N}$ es una cantidad positiva:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} > 0 \quad (3.3)$$

el recíproco de esta derivada, es decir a $(\partial U/\partial S)$ es definido como la temperatura del sistema.

La continuidad, la diferenciabilidad y la propiedad monótonica implican que la función entropía puede invertirse con respecto a la energía y que la energía es una función uniforme, continua y diferenciable de S, V, N . De la función

$$S = S(U, V, N) \quad (3.4)$$

puede obtenerse unívocamente U en la forma

$$U = U(S, V, N) \quad (3.5)$$

Las dos últimas ecuaciones son formas alternativas de la relación fundamental y cada una de ellas contiene toda la información termodinámica acerca del sistema.

El siguiente postulado establece que la entropía de cualquier sistema se anula en el estado para el cual

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} = 0 \quad (3.6)$$

es decir, en el cero de la temperatura. Este postulado es una ampliación debida a Planck del postulado de Nernst del tercer principio de la termodinámica.

Los postulados anteriores constituyen las bases del desarrollo de la termodinámica.

En condiciones apropiadas puede minimizarse la energía $U(S, V, N)$ en lugar de maximizarse la entropía $S(U, V, N)$ y estos dos procedimientos determinan el mismo estado final. La inversión de la ecuación fundamental y la exposición alternativa del principio extremal básico en términos de un mínimo de energía en lugar de un máximo de entropía, sugiere otro punto de vista desde el cual parece razonable el postulado extremal [11].

De acuerdo con la ecuación fundamental invertida, la energía es función de los parámetros mecánicos y de un parámetro adicional (la entropía). Por la introducción de este parámetro adicional, la forma del principio de energía mínima se extiende al dominio de los efectos térmicos tanto como a los fenómenos mecánicos puros. De este modo se llega a una especie de principio de correspondencia entre la termodinámica y la mecánica, por el cual el principio de equilibrio termodinámico se reduce al principio de equilibrio mecánico cuando pueden despreciarse los efectos térmicos.

La condición matemática para que un máximo de $S(U, V, N)$ implique un mínimo de $U(S, V, N)$ es que la derivada $(\partial S/\partial U)_{V,N}$ sea positiva. El motivo para la introducción de esta condición en el segundo postulado puede comprenderse teniendo en cuenta el deseo de asegurar que el principio de entropía máxima llegara a convertirse en un principio de energía mínima al invertir la ecuación fundamental.

Debido al interés en los procesos y en los cambios asociados de los parámetros extensivos, estamos interesados en la forma diferencial de la ecuación fundamental en la forma

$$U = U(S, E^a) \quad (3.7)$$

donde al igual que S tenemos que $E^a, a = 1, 2 \dots n$ son los demás parámetros extensivos de los que depende la ecuación fundamental y n es el número de estos parámetros. Calculando la diferencial de U tenemos

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{E^a} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial E^a} \right)_{S, E^b} dE^a \quad (3.8)$$

las diversas derivadas parciales que aparecen en la ecuación anterior tienen un significado físico el cual depende de los parámetros extensivos en función de los que esta la ecuación fundamental y tienen el nombre de parámetros intensivos. En este caso sabemos que la ecuación fundamental es una función de la energía que depende de la entropía y los demás parámetros extensivos

o viceversa. Así el parámetro intensivo

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{J,H} \equiv T \quad (3.9)$$

lo conocemos como la temperatura, es decir sabemos que la derivada parcial de la energía con respecto de la entropía es la temperatura [11].

3.2. Termodinámica de hoyos negros

Anteriormente hemos hablado de los hoyos negros y algunos conceptos básicos relacionados a un sistema termodinámico clásico como lo es la ecuación fundamental de tal sistema. Ahora relacionaremos estas ideas al estudiar primero la termodinámica de los hoyos negros para después pasar a su descripción geometrotermodinámica en una sección posterior.

En 1973 Bekenstein descubrió que el área A del horizonte de un hoyo negro se comporta como la entropía S de un sistema termodinámico clásico, además los hoyos negros poseen propiedades termodinámicas reflejadas a través de la temperatura de Hawking T , la cual es proporcional a la gravedad superficial en el horizonte [9]. Así comenzó lo que ahora es llamado la termodinámica de los hoyos negros. Este tema ha sido estudiado en los últimos treinta años debido a su posible conexión con la teoría cuántica de la gravedad.

Como vimos en la sección 2.2, en general un hoyo negro estacionario en cuatro dimensiones en el vacío, es caracterizado por tres números: su masa total M , su momento angular J y su carga eléctrica Q . También vimos en esa sección que el interior del hoyo es invisible e inaccesible a el exterior del universo, de esto se concluye que nosotros no podemos diferenciar entre dos hoyos con la misma masa M , el mismo momento angular J y la misma carga Q , si la estrella implorando esta hecha de antimateria, neutrinos, piones o queso verde el estado final del hoyo se ve igual [16]. Sólo estos tres parámetros globales (los cuales pueden ser medidos por experimentos lejos del hoyo) tienen significancia física. Sabemos que un enorme número de microestados pueden formar el mismo macroestado (M, J, Q) , esto sugiere que los hoyos negros deben tener una entropía muy alta y representan en algún sentido la entropía máxima en su estado final de equilibrio después del colapso gravitacional.

Es instructivo considerar que conforme la estrella implota se acerca al equilibrio, para ver como la información acerca de los microestados es borrada

fuera por el colapso.

Puede ser mostrado [16] que en el último estado del colapso, conforme el equilibrio se aproxima todos los parámetros los cuales caracterizan los estados internos de la estrella, son inmedibles fuera del hoyo negro.

En resumén, el colapso de una estrella a un hoyo negro es un tipo de degeneración irreversible de información y organización en un gas. La apariencia del sistema cambia de un estado estructurado ordenado a un estado desordenado con pocos parámetros los cuales no tienen memoria del sistema inicial. Entre más grande es el hoyo, más información ha sido borrada y más grande es el número de microestados internos que pueden producir este. Se diría que una medida de la entropía es provista por el tamaño del hoyo.

3.2.1. Las cuatro leyes de la termodinámica para un hoyo negro

Una curiosa analogía entre el comportamiento de los hoyos negros y los sistemas termodinámicos en equilibrio fue notada en los años setenta. A groso modo, debido a que la fuerza de gravedad es siempre atractiva, hay una tendencia general de los sistemas a crecer más que a achicarse. En el caso del hoyo negro, al ser la luz incapaz de salir de dentro del horizonte de eventos excluye el escape de cualquier material [16]. Así el horizonte actúa en cierta manera como una superficie antisimétrica: cosas caen dentro y hacen el hoyo más grande pero no pueden salir y hacer el hoyo más pequeño. Esto es de algún modo parecido a la segunda ley de la termodinámica, en la cual hay una tendencia asimétrica para que la entropía se incremente. El tamaño del hoyo actúa en forma análoga a la entropía, ambos crecen.

En el caso más general de los hoyos negros que poseen momento angular J y carga eléctrica Q , el tamaño del hoyo depende de ambos J y Q de una manera complicada. Si el área total de la superficie del horizonte es usada como una medida del tamaño, luego de la fórmula derivada por Smarr [16]:

$$A = 4\pi \left[2M^2 - Q^2 + 2M^2 \left(1 - \frac{Q^2}{M^2} - \frac{J^2}{M^4} \right)^{1/2} \right] \quad (3.10)$$

(donde $Q^2 < M^2$ y $J^2 < M^4$) no es claro que la cambiar J y Q así como también M , el área total se incrementa.

De hecho en 1972 Hawking mostró que en cualquier proceso, el área del horizonte no puede disminuir, aún para los hoyos negros más generales.

Esta fuerte analogía entre el área del horizonte de eventos y la entropía da al teorema de Hawking el nombre de segunda ley de la termodinámica para los hoyos negros y es escrita así:

$$dA \geq 0 \quad (3.11)$$

donde la igualdad corresponde a la reversibilidad.

Hay también análogos para las leyes cero, primera y tercera de la termodinámica. De la ecuación (3.10) obtenemos:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \phi dQ \quad (3.12)$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{8\pi} &= \frac{\partial M}{\partial A} \\ \Omega &= \frac{\partial M}{\partial J} \\ \phi &= \frac{\partial M}{\partial Q} \end{aligned}$$

el término $(8\pi)^{-1}\kappa = \partial M/\partial A$ es la expresión de la conservación de masa-energía y corresponde a la primera ley. De la ecuación (3.12) observamos que si A juega el papel de la entropía entonces κ es la correspondiente temperatura, algo interesante del comportamiento de κ es que es constante en toda la superficie del horizonte de eventos [16]. Ahora tenemos una expresión análoga a la ley cero de la termodinámica que establece que en equilibrio termodinámico el parámetro denominado temperatura es el mismo en todo el sistema.

Los dos últimos términos a la derecha de la ecuación (3.12) describen el trabajo hecho debido a los cambios en el momento angular (ΩdJ) y la carga eléctrica (ϕdQ), donde Ω es la velocidad angular y ϕ el potencial eléctrico.

Finalmente, también hay una tercera ley que establece que si J y Q son lo suficientemente grandes para que

$$\frac{J^2}{M^4} + \frac{Q^2}{M^2} = 1 \quad (3.13)$$

entonces κ se hace cero (aunque A no) [16]. Esto corresponde al cero absoluto. Un hoyo negro que cumple con la condición (3.13) se denomina extremo.

3.3. Antecedentes de geometría aplicada en termodinámica

La geometría de la termodinámica ha sufrido varios cambios desde los trabajos originales de Gibbs [18] y Caratheodory [19]. Los conceptos de geometría diferencial han sido aplicados a la termodinámica clásica desde los años setenta [20, 21]. Un concepto base para la geometrotermodinámica es considerar el espacio fase termodinámico τ el cual es de dimensión $(2n + 1)$. Dentro de esta variedad $(2n + 1)$ -dimensional hay un subespacio n -dimensional muy importante $\varepsilon \subset \tau$ que es el llamado espacio de equilibrio termodinámico [1]; de estos dos espacios hablaremos con detenimiento más adelante.

Primero Weinhold [20] introdujo en el espacio de estados de equilibrio termodinámico una métrica en la que las componentes estan dadas por el Hessiano de la energía termodinámica interna

$$g^W = \frac{\partial^2 M}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b. \quad (3.14)$$

donde $E^a = \{S, J, Q\}$. Después Ruppeiner [21] introdujo una métrica definida como el Hessiano de la entropía con signo menos,

$$g^R = -\frac{\partial^2 S}{\partial F^a \partial F^b} dF^a dF^b \quad (3.15)$$

con $F^a = \{M, J, Q\}$. la cual es conformalmente equivalente a la métrica de Weinhold, donde la inversa de la temperatura es el factor conforme, es decir $g^W = Tg^R$ [1].

Uno de los objetivos de la aplicación de geometría en termodinámica es describir las transiciones de fase en términos de singularidades de curvatura, así la curvatura del espacio de equilibrio juega un papel muy importante pues puede ser interpretada como una medida de la interacción termodinámica. Se mostró que esto último era cierto en el caso del gas ideal [2, 7] cuya curvatura del espacio de estados de equilibrio es cero, lo que nos indica que no hay interacciones termodinámicas entre las moléculas que constituyen el gas, lo cual concuerda con la definición de gas ideal. Para el caso del gas de van der Waals, la curvatura del espacio de equilibrio descrita por la métrica de Weinhold y Ruppeiner es singular en aquellos puntos donde las transiciones de fase ocurren, que la curvatura para el espacio de equilibrio termodinámico del gas de van der Waals no sea cero nos indica que hay interacciones

termodinámicas, lo que coincide con la descripción de este gas en donde se están teniendo en cuenta las desviaciones de un gas real respecto de un gas perfecto debidas a la interacción de las moléculas que lo constituyen [3]. Estos resultados ilustran la aplicabilidad de la geometría en la termodinámica. Como paso inmediato se intentó describir las transiciones de fase de los hoyos negros en términos de las singularidades de la curvatura en el espacio de estados de equilibrio pero los resultados obtenidos eran contradictorios. Por ejemplo para el hoyo negro Reissner-Nordström, un hoyo negro con masa M y carga eléctrica Q , la métrica de Ruppeiner es plana, mientras que la métrica de Weinhold con la masa como potencial termodinámico, presenta una singularidad en la curvatura sólo en el límite extremo del hoyo negro. Observamos que ninguno de estos resultados describen las transiciones de fase como las predichas por Davies [16] usando la capacidad calorífica. Sin embargo si construimos la métrica de Ruppeiner cambiando sólo un poco el potencial termodinámico [4] hay un cambio en la geometría de tal manera que la singularidad en la curvatura resultante ahora corresponde a una transición de fase. La situación es parecida en el caso del hoyo negro de Kerr, el cual describe el campo gravitacional de un hoyo negro rotando con masa M y momento angular J . En este caso la métrica de Weinhold es plana [5] y la métrica original de Ruppeiner no presenta singularidades en la curvatura en los puntos de transiciones de fase del hoyo negro Kerr. Sin embargo, si cambiamos el potencial termodinámico, la métrica de Ruppeiner reproduce la estructura de las transiciones de fase del hoyo negro Kerr. De estos resultados vemos que en el caso de la descripción termodinámica para un mismo hoyo negro se obtienen diferentes resultados que varían de acuerdo a el potencial con el que se construyó la métrica [2].

Pero en la termodinámica clásica de equilibrio sabemos que cualquiera de los potenciales termodinámicos tiene la información necesaria para describir al sistema, tal que es equivalente la descripción con cualquiera de ellos. Es decir, podemos pasar de un potencial a otro por medio de una transformación de Legendre y cada uno de ellos tendrá la misma información acerca del sistema termodinámico que están describiendo.

Es muy factible pensar que una descripción geométrica de la termodinámica del sistema tendría que tener esta propiedad y entonces la métrica que nos ayuda a describir la propiedades geométricas del espacio de estados de equilibrio tiene que ser invariante de Legendre.

En trabajos recientes [1, 2, 7], se ha incorporado en el formalismo de la geometrotermodinámica (GTD) la propuesta de hacer que la métrica G que

construimos en el espacio fase termodinámico τ sea invariante de Legendre, es decir que la geometría que describa esta métrica no dependa del potencial con el cual fue construida. Así, al calcular por medio de la métrica g inducida en el espacio de estados de equilibrio ε el escalar de curvatura, obtendremos el mismo resultado independientemente de la representación usada para la ecuación fundamental o bien del potencial termodinámico. Cabe señalar que la forma en que G induce a g , es de manera tal que g será también invariante de Legendre en el sentido explicado anteriormente.

En este sentido, debido a que las métricas de Weinhold y Ruppeiner no son invariantes de Legendre uno de los principales resultados dentro de la GTD fue la derivación de una generalización simple que es invariante de Legendre de estas métricas, lo que tiene una importante aplicación a la termodinámica de los hoyos negros [1].

3.4. Fundamentos de geometrotermodinámica

Consideremos el espacio fase termodinámico τ de dimensión $(2n + 1)$ coordinado por el potencial termodinámico Φ , las variables extensivas E^a y las variables intensivas I^a ($a = 1, \dots, n$). Ahora consideramos en τ una métrica no degenerada $G = G(Z^A)$, con $Z^A = \{\Phi, E^a, I^a\}$, y la uno-forma de Gibbs

$$\Theta = d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b \quad (3.16)$$

con δ_{ab} los elementos de la matriz diagonal cuyas entradas son solo unos. El conjunto (τ, Θ, G) constituye una variedad Riemanniana de contacto si la condición $\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0$ se satisface, esta última condición establece que podemos definir elementos de volumen distintos de cero. La uno-forma de Gibbs también es invariante con respecto a las transformaciones de Legendre [6, 7]. La invariancia de Legendre garantiza que las propiedades geométricas de G no dependan del potencial termodinámico usado en su construcción.

Pero en termodinámica nosotros siempre trabajamos con sistemas que estan en equilibrio. Así en GTD hay un subespacio muy importante contenido en el espacio fase τ , y es el subespacio fase que forma sistema en equilibrio termodinámico. Sea el subespacio $\varepsilon \subset \tau$ de dimensión n determinado por el mapeo suave $\varphi : \varepsilon \rightarrow \tau$, que en términos de coordenadas escribimos como $\varphi : (E^a) \rightarrow (\Phi, E^a, I^a)$ con $\Phi = \Phi(E^a)$. ε es llamado el espacio de estados de

equilibrio termodinámico cuando se cumple que

$$\varphi^*(\Theta) = 0 \quad (3.17)$$

al cumplirse esta última condición tenemos que $\Theta = 0$ en ε , con lo que obtenemos la primera ley de la termodinámica

$$d\Phi = \delta_{ab} I^a dE^b, \quad (3.18)$$

y de esta última relación observamos que se tiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E^a} = \delta_{ab} I^b. \quad (3.19)$$

Esta ecuación es conocida como la condición de equilibrio termodinámico y también significa que las variables termodinámicas intensivas son duales a las extensivas. Es necesario mencionar que el mapeo φ anteriormente definido requiere conocer de forma explícita la ecuación $\Phi = \Phi(E^a)$ y esta es la ecuación fundamental del sistema de la cual como ya mencionamos, todas las ecuaciones de estado pueden ser derivadas.

La ecuación Φ es el potencial termodinámico y satisface la condición de homogeneidad $\Phi(\lambda E^a) = \lambda^\beta \Phi(E^a)$ para parámetros constantes λ y β . De esta ecuación y usando la primera ley de la termodinámica vamos a obtener dos identidades importantes :

Derivando la condición de homogeneidad $\Phi(\lambda E^a) = \lambda^\beta \Phi(E^a)$ con respecto de λ tenemos

$$\frac{\partial \Phi(\lambda E^a)}{\partial (\lambda E^a)} E^a = \beta \lambda^{\beta-1} \Phi(E^a)$$

pero

$$\frac{\partial \Phi(\lambda E^a)}{\partial (\lambda E^a)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi(\lambda E^a)}{\partial (E^a)}$$

y

$$\frac{\partial \Phi(\lambda E^a)}{\partial (E^a)} = \frac{\partial \lambda^\beta \Phi(E^a)}{\partial (E^a)} = \lambda^\beta \frac{\partial \Phi(E^a)}{\partial (E^a)}$$

esto implica que

$$\frac{\lambda^\beta \partial \Phi(E^a)}{\lambda \partial (E^a)} E^a = \beta \lambda^{\beta-1} \Phi(E^a)$$

y usando la condición de equilibrio termodinámico $\frac{\partial \Phi}{\partial E^a} = \delta_{ab} I^b$ obtenemos

$$\beta \Phi(E^a) = \delta_{ab} I^b E^a \quad (3.20)$$

de está última relación, al diferenciar de ambos lados se tiene

$$\beta d\Phi(E^a) = \delta_{ab} I^b dE^a + \delta_{ab} E^a dI^b$$

y usando la primera ley se sigue que

$$\beta \delta_{ab} I^b dE^a = \delta_{ab} I^b dE^a + \delta_{ab} E^a dI^b$$

o bien

$$(1 - \beta) \delta_{ab} I^a dE^b + \delta_{ab} E^a dI^b = 0 \quad (3.21)$$

las ecuaciones (3.20) y (3.21) son conocidas como la identidad de Euler y la relación de Gibbs-Duhem respectivamente.

Ahora, como lo que queremos es trabajar en el espacio de estados de equilibrio termodinámico ε , deseamos crear una estructura métrica g no degenerada en este espacio, la cual pedimos que sea compatible con la métrica G en τ . Esto puede ser obtenido por medio del pullback φ^* de tal forma que g sea naturalmente inducida por G de la siguiente manera $g = \varphi^*(G)$. Se puede demostrar [7] que una métrica G invariante de Legendre induce una métrica g también invariante de Legendre y viceversa, una métrica g en ε es invariante de Legendre sólo si es inducida por una métrica G invariante de Legendre en τ . Pero hay un gran número de métricas en τ que satisfacen la condición de invariancia de Legendre. Sin embargo nosotros vamos a trabajar con una métrica la cual ha demostrado tener resultados muy satisfactorios en la descripción de hoyos negros como el Reissner-Nordström, el hoyo negro Kerr-Newman, el hoyo negro Kerr y el de Schwarzschild.

3.5. Geometrotermodinámica de hoyos negros

Un hoyo negro es visto como un sistema termodinámico el cual podemos describir completamente por medio de una ecuación fundamental que relaciona los parámetros extensivos. Supongamos que conocemos la relación $M = M(S, J, Q)$ de forma tal que M es el potencial termodinámico, podemos diferenciar esta ecuación para así obtener la primera ley de la termodinámica para hoyos negros:

$$dM = TdS + \Omega dJ + \phi dQ \quad (3.22)$$

donde Ω es la velocidad angular, ϕ es el potencial eléctrico, y T es la temperatura de Hawking. Además la entropía es $S = A/4$. De (3.22) tenemos las

siguientes condiciones para el equilibrio termodinámico

$$T = \frac{\partial M}{\partial S}, \quad \Omega = \frac{\partial M}{\partial J}, \quad \phi = \frac{\partial M}{\partial Q}. \quad (3.23)$$

Las relaciones anteriores son válidas en relatividad general, donde el campo gravitacional del hoyo negro más general es descrito por la solución Kerr-Newman que corresponde a un hoyo negro rotando y con carga.

Ahora, para pasar a la descripción en el contexto de la GTD de los hoyos negros más generales, consideremos τ un espacio 7-dimensional con coordenadas $Z^A = \{M, S, Q, J, T, \phi, \Omega\}$, $A = 0, \dots, 6$. En el espacio cotangente τ^* , introducimos la siguiente uno-forma [1]

$$\Theta_M = dM - TdS - \phi dQ - \Omega dJ, \quad (3.24)$$

la cual satisface la condición $\Theta_M \wedge (d\Theta_M)^3 \neq 0$. En τ introducimos una métrica no degenerada G

$$G = (d\Phi - \delta_{ab}I^a dE^b)^2 + (\delta_{ab}E^a I^b)(\eta_{cd}dE^c dI^d), \quad \eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \quad (3.25)$$

donde η_{ab} es una métrica pseudo-Euclidiana en ε .

En el caso en que nuestro sistema termodinámico son los hoyos negros, G toma la siguiente forma

$$G = (dM - TdS - \phi dQ - \Omega dJ)^2 + (ST + \phi Q + \Omega J)(-dSdT + dQd\phi + dJd\Omega) \quad (3.26)$$

está métrica es no degenerada pues $\det(G) = (ST + \Omega J + \phi Q)^4/16$. Así el triplete (τ, Θ_M, G) es nuestra variedad Riemanniana de contacto. Pero ¿por qué estamos considerando esta métrica?. Nosotros queremos describir un sistema termodinámico por medio de la métrica G la cual es llamada métrica termodinámica, para que esto suceda G debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. G debe ser invariante con respecto a las transformaciones que no modifiquen la estructura de contacto de τ . En particular G debe ser invariante con respecto a las transformaciones de Legendre.
2. G debe inducir en el espacio de estados de equilibrio ε una métrica g invariante, por medio del mapeo

$$\varphi^*(G) = g \quad (3.27)$$

Tras estas condiciones, está la idea de crear una estructura métrica que describa un sistema termodinámico independientemente de las coordenadas usadas en τ en términos de conceptos geométricos, de tal forma que esta descripción sea invariante con respecto a los cambios en el potencial termodinámico y también esta la idea de establecer una relación entre g y G tal que g sea también invariante en el espacio de equilibrio termodinámico ante estas transformaciones y que sea compatible con la métrica G en τ .

Por otra parte, el espacio de estados de equilibrio termodinámico ε es un subespacio 3-dimensional de τ con coordenadas $E^a = \{S, Q, J\}$, $a = 1, 2, 3$, y es definido por medio del mapeo

$$\varphi : \{S, Q, J\} \longmapsto \left\{ M(S, J, Q), S, J, Q, \frac{\partial M}{\partial S}, \frac{\partial M}{\partial J}, \frac{\partial M}{\partial Q} \right\} \quad (3.28)$$

para que ε sea en verdad el espacio de estados de equilibrio se tiene que cumplir la siguiente condición $\varphi_M^*(\Theta_M) = 0$, donde φ_M^* es el pull-back inducido por φ_M . Como ya mencionamos, podemos inducir una métrica g en ε aplicando el pull-back en la métrica G de τ , es decir $g = \varphi_M^*(G)$.

Aplicando la condición $\varphi_M^*(\Theta_M) = 0$ tenemos la primera ley de la termodinámica para hoyos negros dada por la ecuación (3.22).

$$dM = TdS + \Omega dJ + \phi dQ$$

Esto también implica la existencia de la ecuación fundamental $M = M(S, Q, J)$ y las condiciones de equilibrio termodinámico, ecuación (3.23).

La invariancia de Legendre juega un papel fundamental para nuestro trabajo en GTD, pues esto nos permite cambiar el potencial termodinámico sin afectar los resultados. Si denotamos las variables termodinámicas intensivas como $I^a = \{T, \phi, \Omega\}$, entonces una transformación de Legendre esta definida por

$$\begin{aligned} \{Z^A\} = M, E^a, I^a &\longrightarrow \{\tilde{Z}^A\} = \{\tilde{M}, \tilde{E}^a, \tilde{I}^a\} \\ M = \tilde{M} - \delta_{ab} \tilde{E}^a \tilde{I}^b, \quad E^a = -\tilde{I}^a, \quad I^a = \tilde{E}^a. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Como ya mencionamos si pedimos que G sea invariante de Legendre entonces la métrica g inducida también lo será. Para garantizar que la métrica G en τ es invariante de Legendre, es suficiente pedir que cada una de sus componentes preserve su dependencia funcional después de la transformación de Legendre. Es decir si $\tilde{G}_{AB}(\tilde{Z}^C) = G_{AB}(Z^C \rightarrow \tilde{Z}^C)$ representa las componentes de la métrica \tilde{G} obtenidas después de la transformación de Legendre de la métrica

G , y sea $G'_{AB}(\tilde{Z}^C) = G_{AB}(Z^C = \tilde{Z}^C)$ son las componentes de la métrica G' obtenidas reemplazando cada coordenada Z^C por su contraparte \tilde{Z}^C en la métrica G (no fue aplicada una transformación de Legendre). Así si nosotros pedimos que la condición:

$$\tilde{G}_{AB}(\tilde{Z}^C) = G'_{AB}(\tilde{Z}^C) \quad (3.30)$$

sea cierta para cada valor de A y B , se garantiza que la métrica G en τ así como también g en ε son invariantes de Legendre.

A continuación demostraremos que la métrica G dada por la ecuación (3.26) cumple con la invariación de Legendre.

$$G = (dM - TdS - \Omega dJ - \phi dQ)^2 + (ST + \Omega J + \phi Q)(-\phi dT dS + d\Omega dJ + d\phi dQ) \quad (3.31)$$

en donde $\phi = M$, $E^a = \{S, J, Q\}$, $I^a = \{T, \Omega, \phi\}$. Utilizando (3.29) tenemos

$$\begin{aligned} M &= \tilde{M} - \tilde{E}^1 \tilde{I}^1 - \tilde{E}^2 \tilde{I}^2 - \tilde{E}^3 \tilde{I}^3 \\ &= \tilde{M} - \tilde{S} \tilde{T} - \tilde{J} \tilde{\Omega} - \tilde{Q} \tilde{\phi} \end{aligned}$$

esto implica que

$$dM = d\tilde{M} - \tilde{S}d\tilde{T} - \tilde{T}d\tilde{S} - \tilde{J}d\tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}d\tilde{J} - \tilde{Q}d\tilde{\phi} - \tilde{\phi}d\tilde{Q}$$

pero tenemos que

$$\begin{aligned} E^1 = -\tilde{I}^1 &\Rightarrow S = -\tilde{T} \Rightarrow dS = -d\tilde{T} \\ E^2 = -\tilde{I}^2 &\Rightarrow J = -\tilde{\Omega} \Rightarrow dJ = -d\tilde{\Omega} \\ E^3 = -\tilde{I}^3 &\Rightarrow Q = -\tilde{\phi} \Rightarrow dQ = -d\tilde{\phi} \end{aligned}$$

y por otra parte también es cierto que

$$\begin{aligned} I^1 = \tilde{E}^1 &\Rightarrow T = \tilde{S} \Rightarrow dT = d\tilde{S} \\ I^2 = \tilde{E}^2 &\Rightarrow \Omega = \tilde{J} \Rightarrow d\Omega = d\tilde{J} \\ I^3 = \tilde{E}^3 &\Rightarrow \phi = \tilde{Q} \Rightarrow d\phi = d\tilde{Q} \end{aligned}$$

sustituyendo esto en (3.26) se sigue que

$$\begin{aligned} G &= [d\tilde{M} - \tilde{S}d\tilde{T} - \tilde{T}d\tilde{S} - \tilde{J}d\tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}d\tilde{J} - \tilde{Q}d\tilde{\phi} - \tilde{\phi}d\tilde{Q} + \tilde{S}d\tilde{T} + \tilde{J}d\tilde{\Omega} + \tilde{Q}d\tilde{\phi}]^2 \\ &+ [-\tilde{T}\tilde{S} - \tilde{\Omega}\tilde{J} - \tilde{Q}\tilde{\phi}][d\tilde{S}d\tilde{T} - d\tilde{J}d\tilde{\Omega} - d\tilde{Q}d\tilde{\phi}] \\ &= [d\tilde{M} - \tilde{T}d\tilde{S} - \tilde{\Omega}d\tilde{J} - \tilde{\phi}d\tilde{Q}]^2 + [\tilde{T}\tilde{S} + \tilde{\Omega}\tilde{J} + \tilde{Q}\tilde{\phi}][-d\tilde{S}d\tilde{T} + d\tilde{J}d\tilde{\Omega} + d\tilde{Q}d\tilde{\phi}] \\ &= \tilde{G}(\tilde{Z}^C) = G'(\tilde{Z}^C) \end{aligned}$$

También es fácil mostrar que la uno-forma fundamental Θ_M es invariante con respecto a las transformaciones de Legendre pues

$$\begin{aligned}
\Theta &= dM - TdS - \Omega dJ - \phi dQ \\
&= [d\widetilde{M} - \widetilde{S}d\widetilde{T} - \widetilde{T}d\widetilde{S} - \widetilde{J}d\widetilde{\Omega} - \widetilde{\Omega}d\widetilde{J} - \widetilde{Q}d\widetilde{\phi} - \widetilde{\phi}d\widetilde{Q}] + \widetilde{S}d\widetilde{T} + \widetilde{J}d\widetilde{\Omega} + \widetilde{Q}d\widetilde{\phi} \\
&= d\widetilde{M} - \widetilde{T}d\widetilde{S} - \widetilde{\Omega}d\widetilde{J} - \widetilde{\phi}d\widetilde{Q} = \widetilde{\Theta}
\end{aligned}$$

Otra ventaja del uso de la GTD es que nos permite implementar fácilmente diferentes representaciones termodinámicas del potencial [1]. La descripción dada anteriormente es llamada la representación de masa debido a que la ecuación fundamental es dada como $M = M(S, Q, J)$, pero uno podría escribir esta ecuación como $S = S(M, Q, J)$, $Q = Q(S, M, J)$ o $J = J(S, M, Q)$ y redefinir las coordenadas en τ y el mapeo suave φ de tal forma que la condición $\varphi^*(\Theta) = 0$ genera en ε la correspondiente ecuación fundamental en la representación de S, Q ó J respectivamente.

En la descripción dada arriba, la masa M juega el papel de potencial termodinámico que depende de las variables extensivas S, J y Q . Pero las transformaciones de Legendre nos permiten introducir un conjunto de siete potenciales termodinámicos adicionales los cuales dependen de diferentes combinaciones de variables extensivas e intensivas. El conjunto completo de potenciales termodinámicos es el siguiente [1]

$$\begin{aligned}
M &= M(S, J, Q), \\
M_1 &= M_1(T, J, Q) = M - TS, \\
M_2 &= M_2(S, \Omega, Q) = M - \Omega J, \\
M_3 &= M_3(S, J, \phi) = M - \phi Q, \\
M_4 &= M_4(T, \Omega, Q) = M - TS - \Omega J, \\
M_5 &= M_5(T, J, \phi) = M - TS - \phi Q, \\
M_6 &= M_6(S, \Omega, \phi) = M - \Omega J - \phi Q, \\
M_7 &= M_7(T, \Omega, \phi) = M - TS - \Omega J - \phi Q, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Y desde luego el mapeo φ puede ser definido en cada caso, independientemente de la elección del potencial termodinámico. Además como estamos considerando solo métricas invariantes de Legendre en τ y en ε , entonces las características geométricas del espacio fase termodinámico y por tanto del de equilibrio para un sistema serán independientes del potencial termodinámico. Así en la representación de masa del potencial usado para coordinar τ ,

podemos elegir cualquiera de los potenciales dados arriba M, M_1, \dots, M_7 sin afectar las propiedades del espacio fase termodinámico.

Debe ser enfatizado, que los resultados obtenidos con diferentes representaciones de la misma ecuación fundamental son completamente equivalentes. En este contexto, también es posible considerar la representación de entropía. En este caso la uno-forma del espacio fase es elegida de la siguiente manera

$$\Theta_S = dS - \frac{1}{T}dM + \frac{\Omega}{T}dJ + \frac{\phi}{T}dQ \quad (3.33)$$

Así que las coordenadas de τ son:

$$Z^A = \{S, E^a, I^a\} = \{S, M, Q, J, 1/T, -\phi/T, -\Omega/T\}$$

El espacio de estados de equilibrio ε pueden ser introducidos con el mapeo suave

$$\varphi_S : \{M, J, Q\} \mapsto \{M, S(M, J, Q), J, Q, T(M, J, Q), \Omega(M, J, Q), \phi(M, J, Q)\} \quad (3.34)$$

con

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad \frac{\Omega}{T} = -\frac{\partial S}{\partial J}, \quad \frac{\phi}{T} = -\frac{\partial S}{\partial Q} \quad (3.35)$$

tal que $\varphi_S^*(\Theta_S) = 0$ implica la primera ley. En la representación de entropía, la ecuación fundamental es ahora dada por $S = S(M, J, Q)$, y la segunda ley de la termodinámica corresponde a la condición de concavidad de la función de entropía $\partial^2 S / \partial E^a \partial E^b \geq 0$. Otras representaciones pueden también ser analizadas dentro de la GTD, donde en cada caso solo es necesario un mapeo suave φ que garantice la existencia de un espacio de estados de equilibrio bien definido.

Observamos que el espacio fase construido para la descripción GTD de los hoyos negros es de dimensión $2n + 1$, donde n es el número de grados de libertad termodinámicos, el cual coincide con la dimensión del subespacio ε . El caso $n = 1$ corresponde al hoyo negro de Schwarzschild con masa M como el único grado de libertad distinto de cero. En este caso la estructura Riemanniana de ε es trivial. Para $n = 2$ la estructura geométrica de ε es más complicada y corresponde al hoyo negro Reissner-Nordstrom ($J=0$) ó el hoyo negro Kerr ($Q=0$). En estos dos casos la métrica g en ε es diagonal y simplifica mucho los calculos [2]. A continuación mostramos las métricas

termodinámicas de los hoyos negros Reissner-Nordstrom y Kerr, respectivamente

$$g_{ab}^{RN} = \frac{8\pi^2 r_+^3}{(r_+ - r_-)^3} = \begin{pmatrix} 2r_+(r_+ - 3r_-) & 0 \\ 0 & r_+^2 + 3r_-^2 \end{pmatrix}$$

$$g_{ab}^K = \frac{16\pi^2 r_+^2 (r_+ + r_-)}{(r_+ - r_-)^4} = \begin{pmatrix} r_+(r_+^2 - 6r_+r_- - 3r_-^2) & 0 \\ 0 & r_+ + r_- \end{pmatrix}$$

donde r_+ y r_- son los radios interno y externo respectivamente de los hoyos negros. El hoyo negro más general es el de Kerr-Newman que corresponde a una variedad ε de dimensión 3 con una métrica g no diagonal, la cual no escribiremos aquí [2].

Capítulo 4

Geometrotermodinámica del hoyo negro BTZ

En este capítulo construiremos el espacio fase termodinámico del hoyo negro BTZ y obtendremos su ecuación fundamental termodinámica. También encontraremos por medio de la primera ley de la termodinámica para hoyos negros, propiedades como la temperatura, la velocidad angular y la capacidad calorífica entre otras, esto, en términos de las dimensiones.

Por otra parte obtendremos la métrica del espacio fase termodinámico G_{BTZ} en base a la métrica presentada en el capítulo anterior, además de la uno-forma fundamental, para después inducir el espacio de estados de equilibrio con la correspondiente métrica g .

Como siguiente y último paso, realizaremos un análisis gráfico de todas las variables termodinámicas, para concluir con el cálculo del escalar de curvatura y hacer el correspondiente análisis general de resultados.

4.1. Resumen del hoyo negro BTZ

En este capítulo ya estamos listos para estudiar las propiedades del espacio de estados de equilibrio termodinámico para el hoyo negro BTZ. Como ya habíamos mencionado en la sección 2.4, el hoyo negro BTZ vive en el espacio-tiempo de dimensión (2+1), también vimos que una de las principales características del campo gravitacional en este espacio es que no hay grados de libertad físicos todos los grados de libertad son topológicos y que Bañados, Teitelboim y Zanelli mostraron que en el vacío la gravedad (2+1)-

dimensional con $\Lambda < 0$ admite una solución que describe un hoyo negro, el BTZ [13]. Λ es la constante cosmológica y es un grado de libertad adicional introducido en la acción de Einstein-Hilbert para tener una solución a las ecuaciones de campo distinta de la que nos describe un espacio plano.

El espacio tiempo BTZ no tiene singularidades en su curvatura. Pero aún así todas las características de los hoyos negros, como lo es el horizonte de eventos y la radiación de Hawking se ven presentes en este modelo, por lo que es considerado un verdadero hoyo negro [13]. Este modelo es muy importante en la teoría de cuerdas y se considera que puede ayudar en la construcción de una teoría cuántica de gravedad.

En la sección 2.4 mencionamos que en coordenadas esféricas la métrica del hoyo negro BTZ puede ser escrita como

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + r^2(d\phi + N^\phi dt)^2 + N^{-2} dr^2 \quad (4.1)$$

donde

$$N^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad N^\phi = -\frac{J}{2r^2} \quad (4.2)$$

con M , J y l^2 constantes. Para la métrica BTZ vimos que Λ es negativa y es $\Lambda = -1/l^2$. En la métrica, M y J son la masa y el momento angular de un hoyo negro en 3 dimensiones el cual está rotando.

También en esa sección obtuvimos los radios con los que obtenemos el área de horizonte de eventos

$$r_{\pm}^2 = \frac{l^2}{2} \left[M \pm \left(M^2 - \frac{J^2}{l^2} \right)^{1/2} \right] \quad (4.3)$$

La hipersuperficie $r = r_+$ corresponde a el horizonte de eventos de un hoyo negro extremo, r_+ es el radio externo del horizonte y r_- es radio interno.

4.2. Termodinámica de BTZ

Ahora, para realizar la descripción termodinámica del hoyo negro BTZ necesitamos conocer la ecuación fundamental, la cual obtenemos usando que la entropía es $S = A/4$, donde A es el área del horizonte de eventos y está dada por

$$A = \frac{2\pi r_+}{G} \quad (4.4)$$

por otra parte como estamos utilizando unidades en las cuales $8G = 1$, obtenemos

$$S = \frac{2\pi r_+}{4G} = 4\pi r_+ \quad (4.5)$$

es decir

$$S = 4\pi \frac{l}{\sqrt{2}} \left[M + \left(M^2 - \frac{J^2}{l^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (4.6)$$

Ahora podemos invertir esta última expresión para obtener el potencial termodinámico en la representación de masa

$$M = \frac{S^2}{16\pi^2 l^2} + \frac{4\pi^2 J^2}{S^2} \quad (4.7)$$

Esta ecuación relaciona todas las variables extensivas de la métrica BTZ en la forma $M = M(S, J)$ y como ya sabemos al diferenciar esta ecuación obtenemos la primera ley de la termodinámica

$$dM = TdS + \Omega dJ \quad (4.8)$$

Podemos ahora deducir las expresiones para la temperatura y la velocidad angular por medio de la relación (4.7), pues $T = \partial M / \partial S$, $\Omega = \partial M / \partial J$. Entonces

$$\begin{aligned} T &= \frac{S}{8\pi^2 l^2} - \frac{8\pi^2 J^2}{S^3} \\ \Omega &= \frac{8\pi^2 J}{S^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

recordando las expresiones (2.37), es conveniente escribir estos resultados en términos de r_+ y r_-

$$T = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi l^2 r_+}, \quad \Omega = \frac{r_-}{l r_+} \quad (4.10)$$

Observamos que la temperatura es siempre positiva pues $r_+^2 \geq r_-^2$, lo cual podemos corroborar de las ecuaciones (4.3). Además $T = 0$ sólo en el caso extremo del hoyo negro, es decir cuando $r_+ = r_-$, pero en este caso como ya sabemos es el hoyo negro extremo.

Otra cantidad muy importante que caracteriza a cualquier sistema termodinámico y que podemos calcular ahora, es la capacidad calorífica, donde

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1}. \quad (4.11)$$

Así utilizando la expresión (4.9) para la temperatura tenemos

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{S^4 + (8\pi^2 l^2)(24\pi^2 J^2)}{8\pi^2 l^2 S^4}.$$

De aquí se sigue que

$$C = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-1} = T \frac{8\pi^2 l^2 S^4}{S^4 + (8\pi^2 l^2)(24\pi^2 J^2)} \quad (4.12)$$

y en términos de r_+ y r_-

$$C = \frac{4\pi r_+(r_+^2 - r_-^2)}{r_+^2 + 3r_-^2} \quad (4.13)$$

De aquí vemos que la capacidad calorífica es siempre positiva y se hace cero solamente en el caso extremo $r_+ = r_-$. En termodinámica clásica este hecho es considerado usualmente como una indicación de que el sistema correspondiente es estable.

4.3. Geometría del espacio de estados de equilibrio

Hasta aquí hemos visto que las variables extensivas con las cuales describiremos la termodinámica del hoyo negro BTZ, son la masa M , la entropía S y el momento angular J . En la sección anterior obtuvimos las correspondientes variables intensivas que son la temperatura T y la velocidad angular Ω . En este caso $M = M(S, J)$ juega el papel del potencial termodinámico. La ecuación (4.7) es nuestra ecuación fundamental en la representación de la masa.

Para el hoyo negro BTZ, el espacio fase termodinámico τ está coordinado por $Z^A = \{M, S, J, T, \Omega\}$, $A = 0, \dots, 4$.

Ahora en el espacio cotangente τ^* , consideramos la uno-forma fundamental

$$\Theta_M = dM - TdS - \Omega dJ \quad (4.14)$$

la cual como es requerido satisface la condición $\Theta_M \wedge (d\Theta_M)^3 \neq 0$.

Introducimos el espacio de estados de equilibrio por medio del mapeo suave

$$\varphi_M : \{S, J\} \mapsto \{M(S, J), S, J, T(S, J), \Omega(S, J)\} \quad (4.15)$$

con el cual, de la condición $\varphi_M^*(\Theta_M) = 0$, se genera la primera ley de la termodinámica para el hoyo negro BTZ que es la ecuación (4.8) y las condiciones de equilibrio con las que obtuvimos T y Ω .

Las graficas de la temperatura y la velocidad angular en términos de los radios del hoyo negro BTZ se muestran en las figuras 4.1 y 4.4.

Para la gráfica de la temperatura, observamos que la superficie tiene un comportamiento suave y no hay puntos singulares, además, $T = 0$ solo cuando $r_+ = r_-$, caso que corresponde al hoyo negro extremo.

En el caso de la velocidad angular, esta grafica muestra la velocidad característica con la que rota el hoyo negro en términos de las dimensiones de sus radios.

Consideremos ahora la siguiente métrica G_{BTZ} que es un caso particular de (3.26) en el espacio fase τ y entonces es invariante de Legendre

$$G_{BTZ} = (dM - TdS - \Omega dJ)^2 + (ST + \Omega J)(-dTdS + d\Omega dJ), \quad (4.16)$$

o bien

$$G_{BTZ} = \Theta_M^2 + (ST + \Omega J)(-dTdS + d\Omega dJ), \quad (4.17)$$

con Θ_M la uno-forma de Gibbs la cual es invariante de Legendre. Estamos considerando esta métrica debido a que ya es conocida en el contexto de GTD de hoyos negros y ha servido para analizar sus propiedades termodinámicas. Con G_{BTZ} podemos inducir la métrica g en el espacio de estados de equilibrio ε de la siguiente forma.

Cuando le aplicamos el pull-back a G_{BTZ} obtenemos

$$g = \varphi^*(G_{BTZ}), \quad \text{donde } \varphi^*(\Theta_M) = 0$$

así que tenemos

$$\begin{aligned} g &= \varphi^*(\Theta_M^2) + (ST + \Omega J)\varphi^*(-dTdS + d\Omega dJ) \\ &= \varphi^*(\Theta_M \otimes \Theta_M) + (ST + \Omega J)\{-\varphi^*(dT) \wedge \varphi^*(dS) + \varphi^*(d\Omega) \wedge \varphi^*(dJ)\} \\ &= \varphi^*(\Theta_M) \otimes \varphi^*(\Theta_M) + (ST + \Omega J)\{-\varphi^*(dT) \wedge \varphi^*(dS) + \varphi^*(d\Omega) \wedge \varphi^*(dJ)\} \end{aligned}$$

pero el primer término de esta última ecuación es cero, y por otra parte tenemos

$$dT = \frac{\partial T}{\partial S}dS + \frac{\partial T}{\partial J}dJ$$

pero

$$T = \frac{\partial M}{\partial S}$$

esto implica que

$$dT = \frac{\partial^2 M}{\partial S^2} dS + \frac{\partial^2 M}{\partial J \partial S} dJ \quad (4.18)$$

es decir

$$dT = M_{SS} dS + M_{JS} dJ$$

donde hemos usado la notación $M_Z = \partial M / \partial Z$ y también $M_{ZZ'} = \partial^2 M / \partial Z' \partial Z$

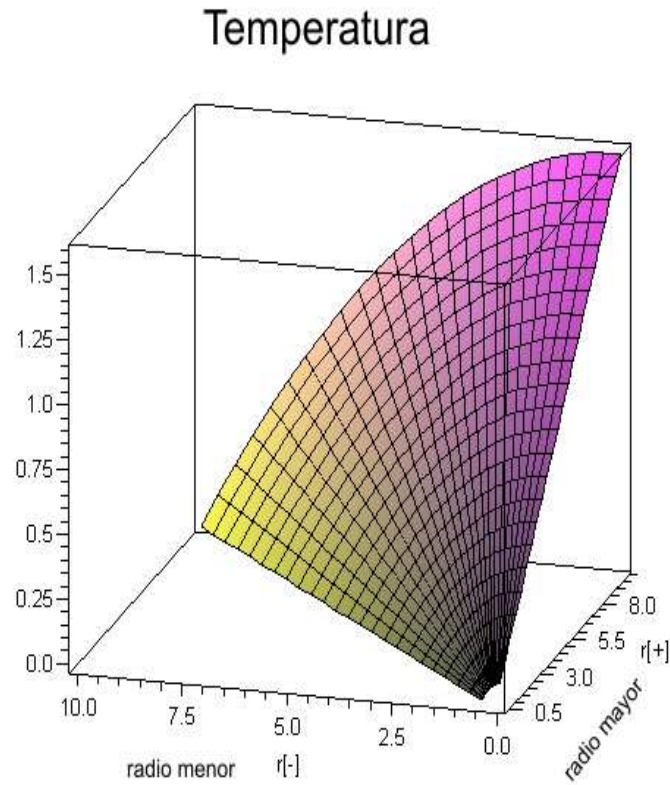


Figura 4.1: Gráfica de la temperatura del hoyo negro BTZ en términos de los radios mayor y menor. Observamos que el comportamiento es suave y no hay singularidades.

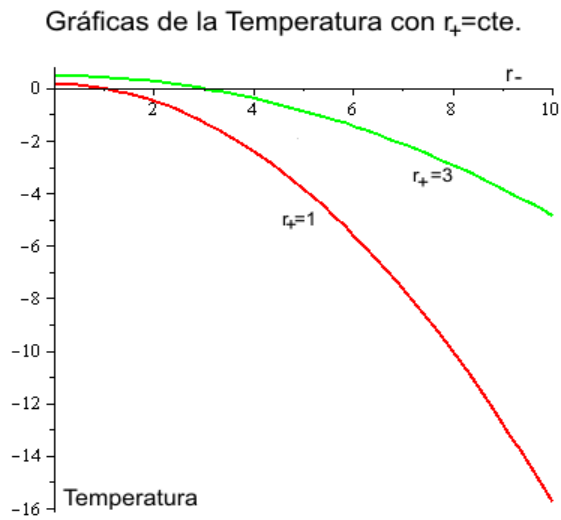


Figura 4.2: La figura muestra la gráfica de la temperatura para dos distintos valores de r_- .

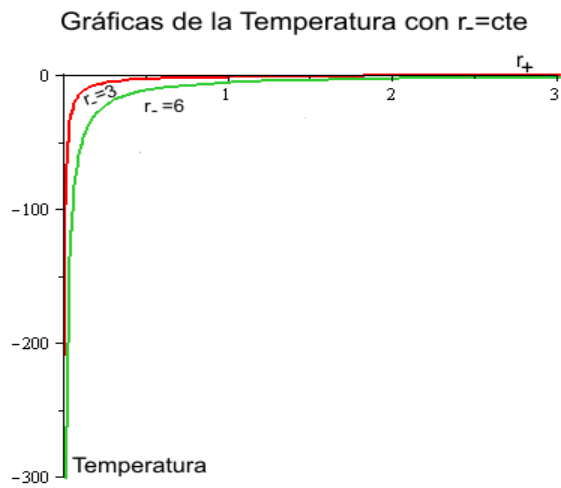


Figura 4.3: La figura muestra la gráfica de la temperatura para dos distintos valores de r_+ .

Velocidad Angular

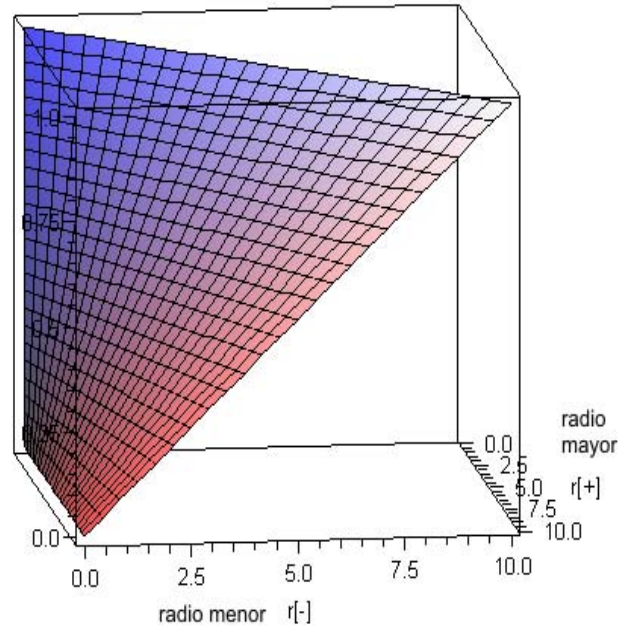


Figura 4.4: Gráfica de la velocidad angular con la que rota el hoyo negro BTZ en términos de el radio menor y el radio mayor.

con $Z, Z' = S, J$. De forma análoga

$$d\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial S}dS + \frac{\partial\Omega}{\partial J}dJ, \quad \Omega = \frac{\partial M}{\partial J}$$

entonces

$$d\Omega = \frac{\partial^2 M}{\partial S \partial J}dS + \frac{\partial^2 M}{\partial J^2}dJ$$

o bien

$$d\Omega = M_{SJ}dS + M_{JJ}dJ$$

Gráficas de la velocidad angular con $r = \text{cte}$

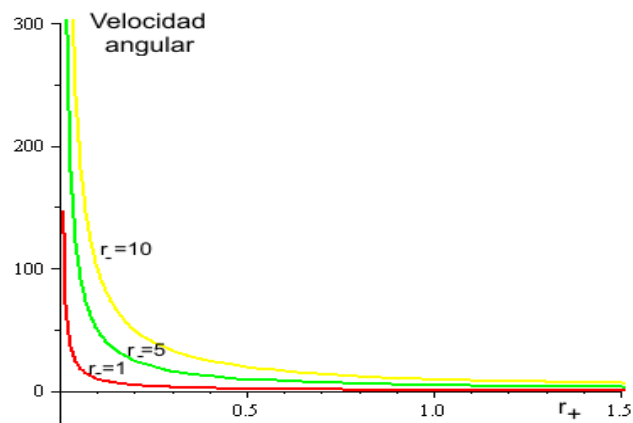


Figura 4.5: La figura muestra la gráfica de la velocidad angular para tres distintos valores de r_- .

Gráficas de la velocidad angular con $r_+ = \text{cte}$

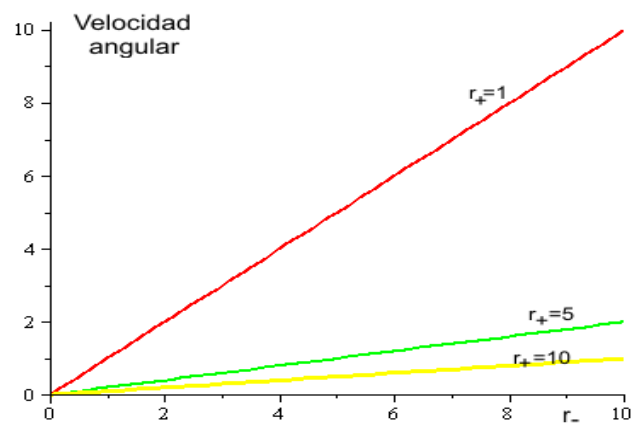


Figura 4.6: La figura muestra la gráfica de la velocidad angular para tres distintos valores de r_+ .

una vez hecho esto podemos ver que

$$\begin{aligned} -\varphi^*(dT) \wedge \varphi^*(dS) &= -M_{SS}dS^2 - M_{JS}dJdS \\ \varphi^*(d\Omega) \wedge \varphi^*(dJ) &= M_{SJ}dSdJ + M_{JJ}dJ^2 \end{aligned}$$

usando esto último, tenemos en la expresión para g

$$g^{BTZ} = (ST + \Omega J)\{-M_{SS}dS^2 - M_{JS}dJdS + M_{SJ}dSdJ + M_{JJ}dJ^2\}$$

para obtener finalmente

$$g^{BTZ} = (SM_S + JM_J)\{-M_{SS}dS^2 + M_{JJ}dJ^2\} \quad (4.19)$$

Por otra parte

$$SM_S + JM_J = \frac{S^2}{8\pi^2 l^2} - \frac{8\pi^2 J^2}{S^2} + \frac{8\pi^2 J^2}{S^2} = \frac{S^2}{8\pi^2 l^2}$$

y también tenemos que

$$\begin{aligned} M_{SS} &= \frac{1}{8\pi^2 l^2} + \frac{24\pi^2 J^2}{S^4} \\ M_{JJ} &= \frac{8\pi^2}{S^2} \end{aligned}$$

así podemos escribir g de la siguiente forma

$$g = \frac{S^2}{8\pi^2 l^2} \begin{pmatrix} -M_{SS} & 0 \\ 0 & M_{JJ} \end{pmatrix}$$

donde podemos observar que

$$g_{SS} = -\left(\frac{S^2}{(8\pi^2 l^2)^2} + \frac{3J^2}{l^2 S^2}\right)$$

o bien en términos de r_+ y r_-

$$g_{SS} = -\left(\frac{\pi^2 r_+^2 + 3r_-^2}{4\pi^2 l^4}\right)$$

y también se tiene que

$$g_{JJ} = \frac{1}{l^2}$$

Ahora podemos calcular el escalar de curvatura por medio de la siguiente ecuación [7]

$$R = -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \left[\left(\frac{g_{11,2} - g_{12,1}}{\sqrt{\det(g)}} \right)_{,2} + \left(\frac{g_{22,1} - g_{12,2}}{\sqrt{\det(g)}} \right)_{,1} \right] - \frac{\det(H)}{2(\det(g))^2} \quad (4.20)$$

donde

$$H = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ g_{11,1} & g_{12,1} & g_{22,1} \\ g_{11,2} & g_{12,2} & g_{22,2} \end{pmatrix}$$

en nuestro caso

$$\det H = \det \begin{pmatrix} g_{SS} & 0 & g_{JJ} \\ g_{SS,S} & 0 & g_{JJ,S} \\ g_{SS,J} & 0 & g_{JJ,J} \end{pmatrix} = 0$$

esto implica que

$$R = -\frac{1}{\sqrt{g_{SS}g_{JJ}}} \left[\left(\frac{g_{SS,J}}{\sqrt{g_{SS}g_{JJ}}} \right)_{,J} + \left(\frac{g_{JJ,S}}{\sqrt{g_{SS}g_{JJ}}} \right)_{,S} \right]$$

sustituyendo cada uno de los términos obtenemos

$$R = -\left(\frac{6}{S^2}\right) \frac{1}{\frac{S^2}{(8\pi^2 l^2)^2} + \frac{3J^2}{l^2 S^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{6J}{S^2}\right)^2 \frac{1}{l^2 \left(\frac{S^2}{(8\pi^2 l^2)^2} + \frac{3J^2}{l^2 S^2}\right)^2}$$

sustituyendo J y S en términos de r_+ y r_- el escalar de curvatura es

$$R = -\frac{3}{2} \frac{l^4}{(r_+^2 + 3r_-^2)^2} \quad (4.21)$$

4.4. Análisis de resultados

De la ecuación (4.21) observamos que el escalar de curvatura es distinto de cero, lo que nos indica que sí hay interacción termodinámica en el hoyo negro BTZ como esperabamos. Esta ecuación debe reproducir la estructura de las transiciones de fase dictadas por la capacidad calorífica (4.13). En el trabajo hecho por Davies [16] se argumenta que en los hoyos negros hay transiciones de fase a segundo orden en los puntos donde la capacidad calorífica diverge.

Así nosotros asumiremos en este trabajo que la estructura de transiciones de fase del hoyo negro BTZ esta determinada por su capacidad calorífica.

De la expresión para la capacidad calorífica (4.13), observamos que al no haber puntos singulares, ni maximos y tampoco mínimos quiere decir que en el hoyo negro BTZ no hay transiciones de fase, pues no hay puntos de inestabilidad termodinámica. Esto se muestra en la figura 4.7.

Por otra parte también mostramos la grafica de R en términos de r_+ y r_- , donde observamos que sólo hay una singularidad para radios mayor y menor iguales a cero, pero en este último caso no hay hoyo negro que describir. También observamos en la ecuación para el escalar de curvatura que su denominador es multiplo del denominador que aparece en la relación de la capacidad calorífica, por lo que si hubiera transiciones de fase, también estarían reflejadas en la curvatura del espacio de estados de equilibrio.

Capacidad Calorífica

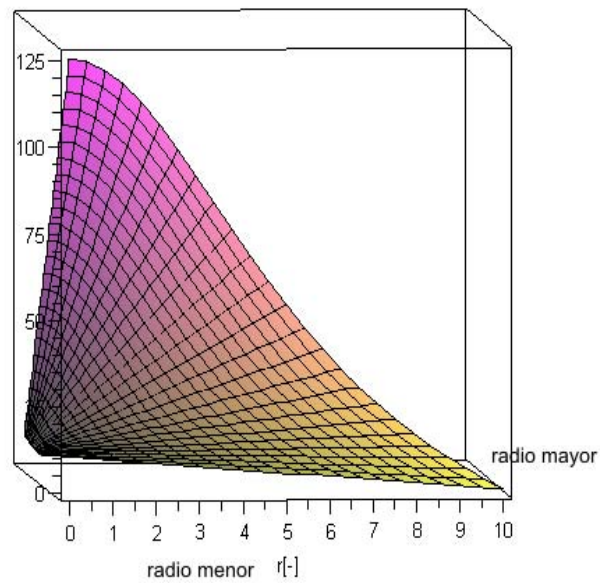


Figura 4.7: La figura muestra la gráfica de la capacidad calorífica en términos de los radios del hoyo negro. Como se observa, la superficie se comporta de manera suave, tampoco hay máximos ni mínimos lo que quiere decir que no hay transiciones de fase en el hoyo negro BTZ .

Gráficas de la capacidad calorífica con $r_- = \text{cte.}$

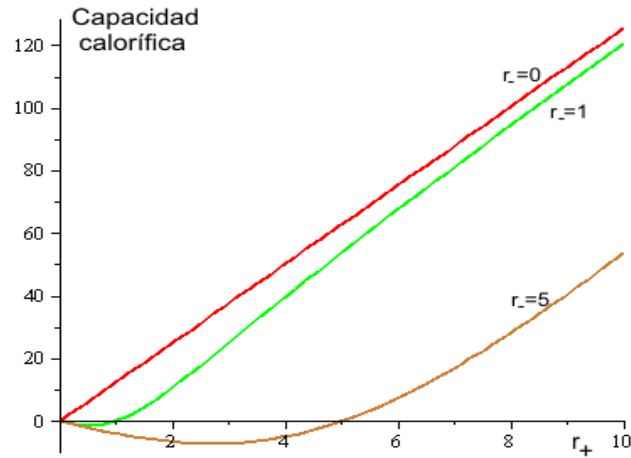


Figura 4.8: La figura muestra la gráfica de la capacidad calorífica para tres distintos valores de r_- .

Gráficas de la capacidad calorífica con $r_+ = \text{cte.}$

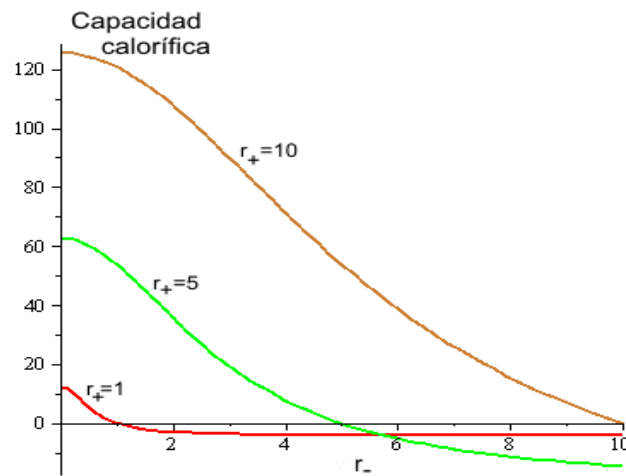


Figura 4.9: La figura muestra la gráfica de la capacidad calorífica para tres distintos valores de r_+ .

Escalar de Curvatura

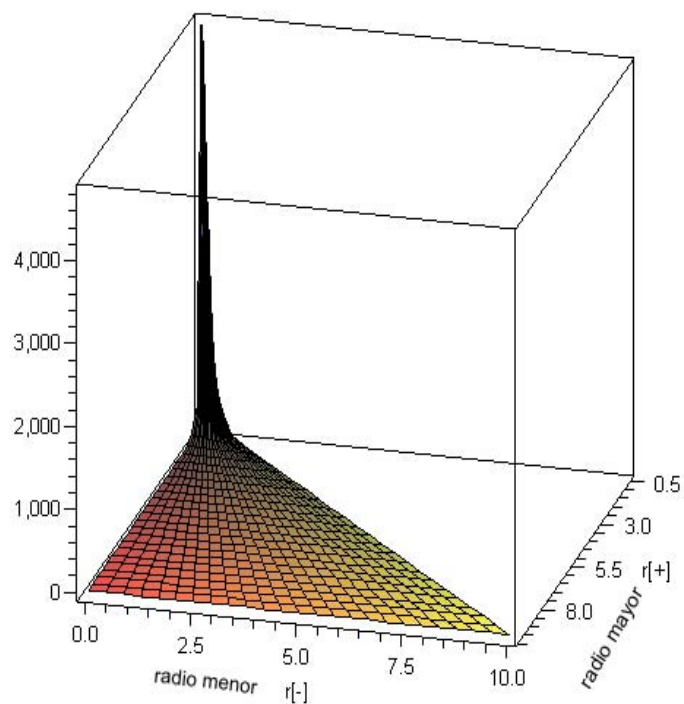


Figura 4.10: Gráfica del escalar de curvatura también en términos de los radios, la superficie se comporta perfectamente, solo es singular para radios iguales a cero, pero en este último caso no hay hoyo negro.

Gráficas del escalar de curvatura con $r_- = \text{cte.}$

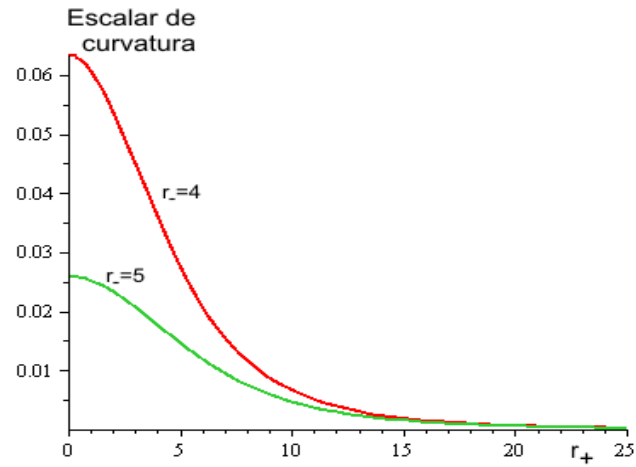


Figura 4.11: La figura muestra la gráfica de el escalar de curvatura para dos distintos valores de r_- .

Gráficas del escalar de curvatura con $r_+ = \text{cte.}$

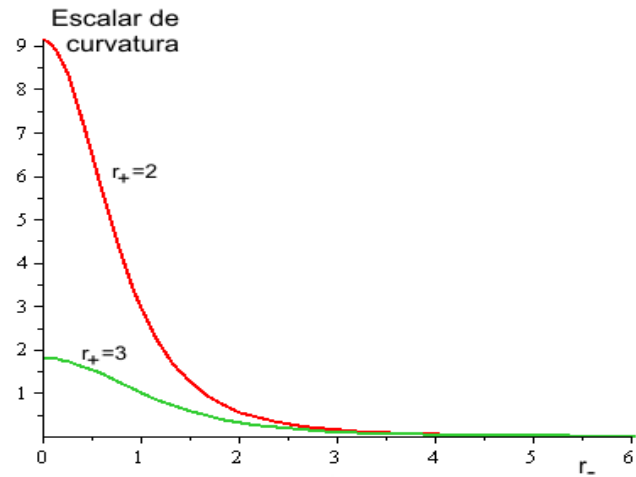


Figura 4.12: La figura muestra la gráfica de el escalar de curvatura para dos distintos valores de r_+ .

Capítulo 5

Constante cosmológica como variable termodinámica

En el capítulo anterior, estudiamos el espacio de estados de equilibrio termodinámico, en donde la entropía S y el momento angular J eran las únicas variables extensivas que formaban parte de las coordenadas de ε . En este capítulo, introducimos primero la constante cosmológica Λ como otra variable extensiva, pero observamos que esto último crea un gran problema en la métrica g del espacio de estados de equilibrio, por lo que optamos por introducir el cuadrado del radio de curvatura l^2 como variable extensiva en lugar de Λ y hacemos el correspondiente análisis de resultados.

5.1. Termodinámica con constante cosmológica

En esta sección construiremos el espacio fase termodinámico τ en el caso en que consideramos la constante cosmológica como una variable. En este caso las coordenadas del espacio fase son $Z^A = \{M, S, J, \Lambda, T, \Omega, L\}$, $A = 0, \dots, 6$. La uno-forma fundamental de Gibbs es ahora dada por

$$\Theta = dM - TdS - \Omega dJ - Ld\Lambda \quad (5.1)$$

donde L es la variable dual a Λ y nuestro potencial termodinámico en la representación de masa es tal que $M = M(S, J, \Lambda)$. El espacio de estados de equilibrio ε es 3-dimensional con coordenadas $E^a = \{S, J, \Lambda\}$ y es definido

por medio del mapeo

$$\varphi : \{S, J, \Lambda\} \mapsto \left\{ M(S, J, \Lambda), S, J, \Lambda, \frac{\partial M}{\partial S}, \frac{\partial M}{\partial J}, \frac{\partial M}{\partial \Lambda} \right\} \quad (5.2)$$

En este caso el potencial termodinámico sigue siendo el de la ecuación 4.7, es decir

$$M = -\frac{S^2\Lambda}{16\pi^2} + \frac{4\pi^2 J^2}{S^2} \quad (5.3)$$

pidiendo que $\varphi^*(\Theta) = 0$, obtenemos la primera ley de la termodinámica

$$dM = TdS + \Omega dJ + Ld\Lambda \quad (5.4)$$

de la cual se siguen las condiciones de equilibrio termodinámico.

La temperatura y la velocidad angular estan dadas por las ecuaciones

$$T = \frac{\partial M(S, J, \Lambda)}{\partial S} = \frac{-\Lambda(r_+^2 - r_-^2)}{2\pi r_+}, \quad (5.5)$$

$$\Omega = \frac{\partial M(S, J, \Lambda)}{\partial J} = \frac{r_-}{lr_+}. \quad (5.6)$$

las cuales son identicas a las obtenidas en la sección 4.2, ecuación (4.10). Por otra parte

$$L = \frac{\partial M(S, J, \Lambda)}{\partial \Lambda}$$

es una variable física intensiva de la cual debemos descubrir su significado. Tenemos que

$$\frac{\partial M}{\partial \Lambda} = -\frac{S^2}{16\pi^2}$$

esto implica que en términos de r_+ , L es

$$L = -r_+^2. \quad (5.7)$$

La métrica G_Λ es un caso particular de (3.25) y tiene la siguiente forma

$$G_\Lambda = \Theta^2 + (ST + \Omega J + L\Lambda)(-dTdS + d\Omega dJ + dLd\Lambda) \quad (5.8)$$

cuando le aplicamos el pull-back a G_Λ , obtenemos $g = \varphi^*(G_\Lambda)$

$$\begin{aligned} g &= \varphi^*(\Theta^2) + \varphi^*((ST + \Omega J + L\Lambda)(-dTdS + d\Omega dJ + dLd\Lambda)) \\ &= \varphi^*(\Theta) \otimes \varphi^*(\Theta) + (ST + \Omega J + L\Lambda)\varphi^*(-dTdS + d\Omega dJ + dLd\Lambda) \\ &= (ST + \Omega J + L\Lambda)\varphi^*(-dTdS + d\Omega dJ + dLd\Lambda) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado $\varphi^*(\Theta) = 0$. Por otra parte

$$T = \frac{\partial M(S, J, \Lambda)}{\partial S}$$

así tenemos que

$$dT = \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial M}{\partial S} dS + \frac{\partial}{\partial J} \frac{\partial M}{\partial S} dJ + \frac{\partial}{\partial \Lambda} \frac{\partial M}{\partial S} d\Lambda$$

es decir

$$dT = M_{SS}dS + M_{JS}dJ + M_{\Lambda S}d\Lambda$$

de igual forma

$$d\Omega = \frac{\partial^2 M}{\partial S \partial J} dS + \frac{\partial^2 M}{\partial J^2} dJ + \frac{\partial^2 M}{\partial \Lambda \partial J} d\Lambda$$

o bien

$$d\Omega = M_{SJ}dS + M_{JJ}dJ + M_{\Lambda J}d\Lambda$$

pero también tenemos

$$dL = \frac{\partial^2 M}{\partial S \partial \Lambda} dS + \frac{\partial^2 M}{\partial J \partial \Lambda} dJ + \frac{\partial^2 M}{\partial \Lambda^2} d\Lambda$$

es decir

$$dL = M_{S\Lambda} + M_{J\Lambda}dJ + M_{\Lambda\Lambda}d\Lambda$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi^*(dT) \wedge \varphi^*(dS) &= M_{SS}dS^2 + M_{JS}dJdS + M_{\Lambda S}d\Lambda dS \\ \varphi^*(d\Omega) \wedge \varphi^*(dJ) &= M_{SJ}dSdJ + M_{JJ}dJ^2 + M_{\Lambda J}d\Lambda dJ \\ \varphi^*(dL) \wedge \varphi^*(d\Lambda) &= M_{S\Lambda}dSd\Lambda + M_{J\Lambda}dJd\Lambda + M_{\Lambda\Lambda}d\Lambda^2 \end{aligned}$$

así obtenemos que

$$\varphi^*(-dTdS + d\Omega dJ + dLd\Lambda) = (-M_{SS}dS^2 + M_{JJ}dJ^2 + M_{\Lambda\Lambda}d\Lambda^2 + M_{J\Lambda}dJd\Lambda + M_{\Lambda J}d\Lambda dJ)$$

por lo que la métrica g inducida en el espacio de estados de equilibrio termodinámico ε es

$$g = (SM_S + JM_J + \Lambda M_\Lambda)(-M_{SS}dS^2 + M_{JJ}dJ^2 + M_{\Lambda\Lambda}d\Lambda^2 + 2M_{J\Lambda}dJd\Lambda)$$

que podemos escribir de la siguiente forma matricial

$$g = (SM_S + JM_J + \Lambda M_\Lambda) \begin{pmatrix} -M_{SS} & 0 & 0 \\ 0 & M_{JJ} & M_{J\Lambda} \\ 0 & M_{J\Lambda} & M_{\Lambda\Lambda} \end{pmatrix}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial S} &= -\left(\frac{S\Lambda}{8\pi^2} + \frac{8\pi^2 J^2}{S^3}\right), \\ \frac{\partial M}{\partial J} &= \frac{8\pi^2 J^2}{S^2}, \\ \frac{\partial M}{\partial \Lambda} &= -\frac{S^2}{16\pi^2} \end{aligned}$$

de aqui se sigue que

$$SM_S + JM_J + \Lambda M_\Lambda = -\frac{3S^2\Lambda}{16\pi^2}$$

y además

$$\begin{aligned} M_{SS} &= \frac{24\pi^2 J^2}{S^4} - \frac{\Lambda}{8\pi^2}, \\ M_{JJ} &= \frac{8\pi^2}{S^2}, \\ M_{J\Lambda} &= 0, \\ M_{\Lambda\Lambda} &= 0. \end{aligned}$$

con todo esto tenemos finalmente que la métrica es

$$g = -\frac{3S^2\Lambda}{16\pi^2} \begin{pmatrix} -M_{SS} & 0 & 0 \\ 0 & M_{JJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que el determinante de esta matriz es cero, lo que implica que g es una métrica degenerada y por lo tanto no cumple con los requerimientos para ser propiamente un métrica. Así que debemos descartarla.

5.2. Problema de linealidad

En la sección anterior vimos que al tomar la constante cosmológica como variable termodinámica y obtener la métrica en el correspondiente espacio de equilibrio, esta última es degenerada ($\det g = 0$), por lo cual no es propiamente una métrica. Uno de los problemas con Λ es que el potencial termodinámico M depende linealmente de esta variable así que $M_{\Lambda\Lambda} = 0$ y no contiene término de interacción entre Λ y J , por lo que $M_{\Lambda J} = 0$. Este resultado nos lleva a la conclusión de que Λ no es una variable termodinámica. De hecho, la variable dual L también presenta un comportamiento extraño. Puesto que $L = -r_+^2$ podemos cambiar el radio interno r_- de forma arbitraria sin cambiar el valor de L , a diferencia de T y Ω que dependen explícitamente de r_- , pues mientras T y Ω toman un valor extremo al hacer $r_+ = r_-$, a la variable dual L no le afecta en lo más mínimo, es decir parece no depender de la estructura interna del hoyo negro, lo cual es un comportamiento poco intuitivo. El siguiente problema con Λ , el cual tal vez es el problema de fondo es que al analizar sus unidades se sospecha que esta variable no es extensiva.

Pero supongamos que en vez de tomar $\Lambda = -1/l^2$ como variable termodinámica la cual no es extensiva, usamos simplemente l^2 como nuestra variable, que de acuerdo a las unidades sí puede ser tratada como una variable termodinámica extensiva. Es decir escribimos la primera ley de la termodinámica como

$$dM(S, J, l^2) = \frac{\partial M}{\partial S} dS + \frac{\partial M}{\partial J} dJ + \frac{\partial M}{\partial(l^2)} d(l^2) \quad (5.9)$$

usando el cambio de variable $\gamma = l^2$, entonces la ecuación para el potencial termodinámico en términos de γ es

$$M = \frac{S^2}{16\pi^2\gamma} + \frac{4\pi^2 J^2}{S^2} \quad (5.10)$$

en donde

$$\begin{aligned} T &= \frac{\partial M(S, J, \gamma)}{\partial S} = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi\gamma r_+}, \\ \Omega &= \frac{\partial M(S, J, \gamma)}{\partial J} = \frac{r_-}{\sqrt{\gamma} r_+} \\ \Upsilon &= \frac{\partial M(S, J, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{-S^2}{16\pi^2\gamma^2} = -\frac{r_+^2}{\gamma^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

La expresión para la capacidad calorífica sigue siendo

$$C = \frac{S(S^4 - 64\pi^4 l^2 J^2)}{S^4 + 192\pi^4 \gamma J^2} = \frac{4\pi r_+(r_+^2 - r_-^2)}{r_+^2 + 3r_-^2} \quad (5.12)$$

por lo que observamos que sigue sin haber transiciones de fase, es decir la variable termodinámica introducida no afecta la descripción de la estructura interna del hoyo negro.

Ahora en base a (3.25) escribimos la métrica en el espacio fase τ como

$$G = \Theta^2 + (ST + J\Omega + \gamma\Upsilon)(-dTdS + d\Omega dJ + d\Upsilon d\gamma) \quad (5.13)$$

y la métrica $g = \varphi^*(G)$ inducida en el espacio de estados de equilibrio termodinámico es completamente análoga a la obtenida para Λ

$$g = (SM_S + JM_J + \gamma M_\gamma) \begin{pmatrix} -M_{SS} & 0 & 0 \\ 0 & M_{JJ} & M_{J\gamma} \\ 0 & M_{J\gamma} & M_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}$$

en donde

$$\begin{aligned} SM_S + JM_J + \gamma M_\gamma &= \frac{S^2}{8\pi^2\gamma} - \frac{S^2}{16\pi^2\gamma} \\ &= \frac{S^2}{16\pi\gamma} \end{aligned} \quad (5.14)$$

y también

$$\begin{aligned} M_{SS} &= \frac{1}{8\pi^2\gamma} + \frac{24\pi^2 J^2}{S^4}, \\ M_{JJ} &= \frac{8\pi^2}{S^2}, \\ M_{\gamma\gamma} &= \frac{S^2}{8\pi^2\gamma^3}, \\ M_{J\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Así la métrica obtenida es

$$g = \begin{pmatrix} -\frac{S^2}{128\pi^4\gamma^2} - \frac{3J^2}{16S^2\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S^4}{128\pi^4\gamma^4} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es distinto de cero. De esta manera vemos que el hecho de tomar el radio de curvatura como variable termodinámica nos permite obtener una métrica no degenerada, la cual describe el espacio de estados de equilibrio. Pero también observamos que la variable dual $\Upsilon = -r_+^2/\gamma^2$ nuevamente presenta un comportamiento inusual en el sentido en que no depende del radio interno r_- del hoyo negro. Se necesita un análisis más minucioso para ver que tan viable es interpretar el radio de curvatura como una variable termodinámica.

5.3. Escalar de curvatura

Una vez que ya tenemos la métrica podemos calcular el escalar de curvatura, esto lo hicimos por medio del programa REDUCE 3.8 y lo que obtuvimos es lo siguiente

$$\begin{aligned}
R = & (226492416\pi^{12}J^6\gamma^7 + 2949120\pi^8J^4\gamma^6S^4 + 331776\pi^8J^4\gamma^2S^8 \\
& - 18874368\pi^{12}J^2\gamma^7S^4 + 12288\pi^4J^2\gamma^5S^8 + 4416\pi^4J^2\gamma S^{12} + 49152\pi^8\gamma^6S^8 \\
& + 16\gamma^4S^{12} + \gamma S^{16})/256\pi^4\gamma^6S^4(36864\pi^8J^4\gamma^2 + 384\pi^4J^2\gamma S^4 + S^8)
\end{aligned}$$

esto también se puede escribir en la forma

$$R = \frac{f(S, J, \gamma)}{256\pi^4\gamma^6S^4(S^4 + 192\pi^4\gamma J^2)^2} \quad (5.16)$$

donde

$$\begin{aligned}
f(S, J, \gamma) = & 226492416\pi^{12}J^6\gamma^7 + 2949120\pi^8J^4\gamma^6S^4 \\
& + 331776\pi^8J^4\gamma^2S^8 - 18874368\pi^{12}J^2\gamma^7S^4 \\
& + 12288\pi^4J^2\gamma^5S^8 + 4416\pi^4J^2\gamma S^{12} + 49152\pi^8\gamma^6S^8 \\
& + 16\gamma^4S^{12} + \gamma S^{16}
\end{aligned}$$

observamos que el denominador en (5.16) es múltiplo del denominador en (5.12), es decir también esta ecuación reproduce la estructura de las transiciones de fase que nos indica la capacidad calorífica y como era de esperarse al no haber puntos singulares, quiere decir de nuevo que no hay transiciones de fase.

5.4. Geometría del espacio de estados de equilibrio

A continuación vamos a mostrar las gráficas del escalar de curvatura en términos de las variables S, J y l . La gráfica 5.1 muestra el escalar de curvatura en términos de la entropía y el momento angular, poniendo el radio de curvatura $l = 1$, como observamos no hay singularidades y la curvatura va creciendo si la entropía y el momento angular crecen, es decir entre mayor entropía o mayor momento angular tenga el hoyo negro, sus interacciones termodinámicas dentro de él crecen sin seguir teniendo transiciones de fase. También se muestran secciones transversales de esta gráfica con $S = cte.$ y después con $J = cte.$

Seguido de esto mostramos en la figura 5.4 la gráfica de R , pero ahora en términos de las variables J y l con $S = 1$. También mostramos las secciones transversales de esta gráfica cuando hacemos cortes con los planos $J = cte.$ y $l = cte.$ Observamos que R muestra un comportamiento singular cuando el momento angular J es muy cercano a cero, lo que nos indica que para ese valor de momento angular puede haber una transición de fase si la entropía es igual a la unidad, por otra parte entre más se acerca J a cero hay un crecimiento extremadamente alto en la curvatura, lo que nos indica interacciones cada vez más altas entre las partículas que conforman el hoyo negro.

Por último, se muestra la misma gráfica de R pero ahora en términos de S y l , en donde el momento angular es $J = 1$ y también observamos las respectivas gráficas de las secciones transversales. Aquí vemos que la curva es suave y presenta sólo una singularidad para el caso en que $S = l = 0$, pero si el radio de curvatura l es igual a cero quiere decir que no hay hoyo negro, por otra parte la entropía sólo es cero cuando $r_+ = 0$ y en este caso tampoco hay hoyo negro, por lo que esta singularidad pertenece a un caso de hoyo negro que no existe.

5.5. Análisis de resultados

Como vimos en las secciones anteriores, cuando introducimos la constante cosmológica $\Lambda = -1/l^2$ como variable termodinámica, obtenemos una métrica singular, la cual no nos sirve para describir las propiedades geométricas del espacio de estados de equilibrio termodinámico en el cual Λ sería una de las variables extensivas, pero tal vez este es precisamente el problema pues

5.4. Geometría del espacio de estados de equilibrio

A continuación vamos a mostrar las gráficas del escalar de curvatura en términos de las variables S, J y l . La gráfica 5.1 muestra el escalar de curvatura en términos de la entropía y el momento angular, poniendo el radio de curvatura $l = 1$, como observamos no hay singularidades y la curvatura va creciendo si la entropía y el momento angular crecen, es decir entre mayor entropía o mayor momento angular tenga el hoyo negro, sus interacciones termodinámicas dentro de él crecen sin seguir teniendo transiciones de fase. También se muestran secciones transversales de esta gráfica con $S = cte.$ y después con $J = cte.$

Seguido de esto mostramos en la figura 5.4 la gráfica de R , pero ahora en términos de las variables J y l con $S = 1$. También mostramos las secciones transversales de esta gráfica cuando hacemos cortes con los planos $J = cte.$ y $l = cte.$ Observamos que R muestra un comportamiento singular cuando el momento angular J es muy cercano a cero, lo que nos indica que para ese valor de momento angular puede haber una transición de fase si la entropía es igual a la unidad, por otra parte entre más se acerca J a cero hay un crecimiento extremadamente alto en la curvatura, lo que nos indica interacciones cada vez más altas entre las partículas que conforman el hoyo negro.

Por último, se muestra la misma gráfica de R pero ahora en términos de S y l , en donde el momento angular es $J = 1$ y también observamos las respectivas gráficas de las secciones transversales. Aquí vemos que la curva es suave y presenta sólo una singularidad para el caso en que $S = l = 0$, pero si el radio de curvatura l es igual a cero quiere decir que no hay hoyo negro, por otra parte la entropía sólo es cero cuando $r_+ = 0$ y en este caso tampoco hay hoyo negro, por lo que esta singularidad pertenece a un caso de hoyo negro que no existe.

5.5. Análisis de resultados

Como vimos en las secciones anteriores, cuando introducimos la constante cosmológica $\Lambda = -1/l^2$ como variable termodinámica, obtenemos una métrica singular, la cual no nos sirve para describir las propiedades geométricas del espacio de estados de equilibrio termodinámico en el cual Λ sería una de las variables extensivas, pero tal vez este es precisamente el problema pues

Gráfica del escalar de curvatura con $l=1$

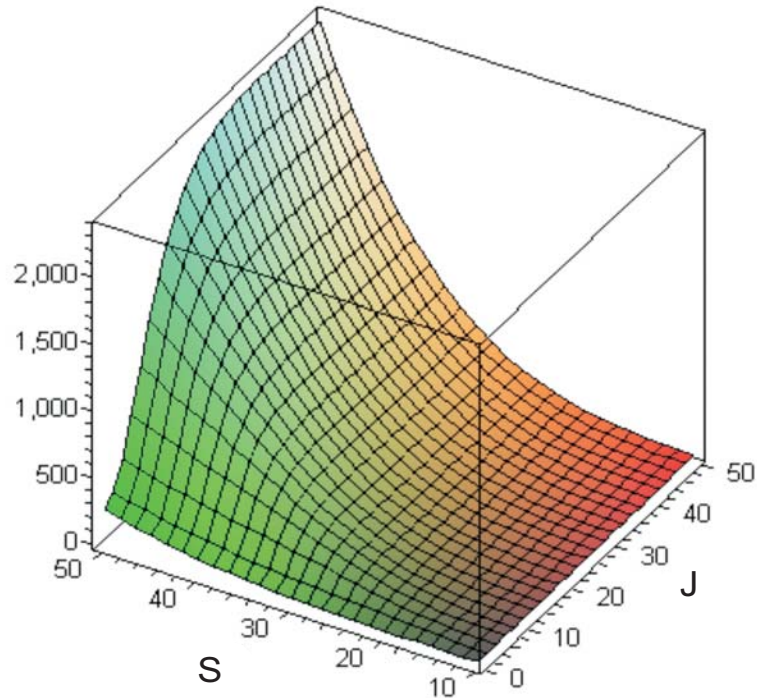


Figura 5.1: Gráfica del escalar de curvatura en términos de la entropía S y el momento angular J , en este caso el radio de curvatura $l = 1$.

analizando Λ ésta parece no ser una variable extensiva. Sin embargo cuando introducimos explícitamente el cuadrado del radio de curvatura l^2 como variable termodinámica, obtenemos una métrica diagonal, pero como ya mencionamos, la variable dual $\Upsilon = -r_+^2/l^4$ a l^2 presenta un comportamiento un tanto inusual respecto a las otras variables intensivas, pues observamos que no depende del radio interno r_- . Aunque por otra parte, el denominador en la expresión para el radio de curvatura es múltiplo del denominador en la expresión para la capacidad calorífica, es decir reproduce la estructura que nos indica si hay o no transiciones de fase. Por estos hechos aún queda abier-

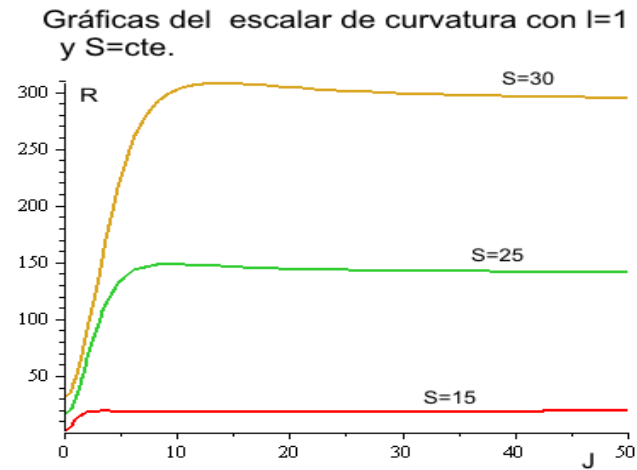


Figura 5.2: Gráfica del escalar de curvatura para tres distintos valores de S con el radio de curvatura $l = 1$.

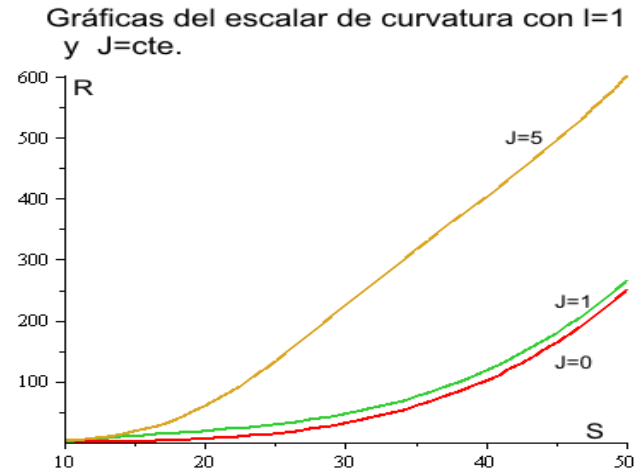


Figura 5.3: Gráfica del escalar de curvatura para tres distintos valores de J con el radio de curvatura $l = 1$.

Gráfica del escalar de curvatura con $S=1$

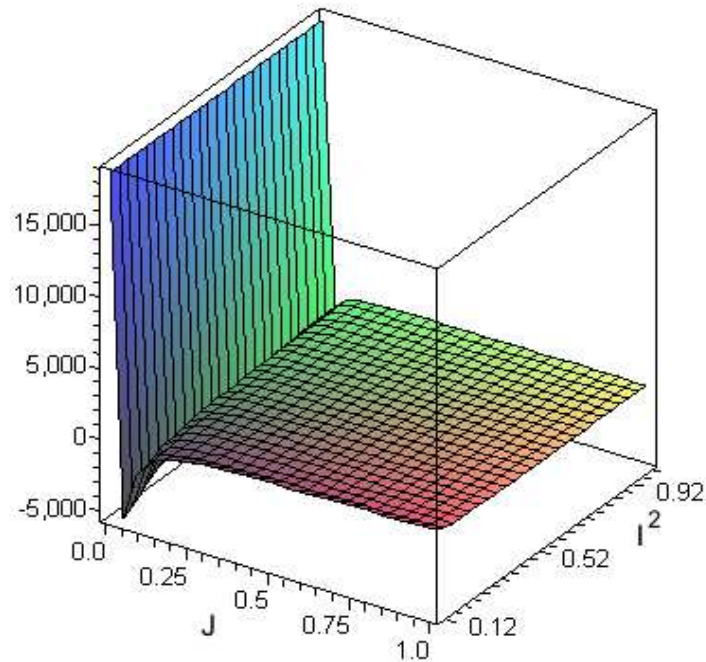


Figura 5.4: Gráfica del escalar de curvatura en términos del momento angular J y el radio de curvatura l , en este caso tomamos la entropía como $S = 1$.

ta la pregunta de cuán viable es interpretar al radio de curvatura como una variable extensiva del espacio ε .

Así mismo aunque en las gráficas de R (5.1, 5.4, 5.7) observamos un comportamiento suave, queda abierta la pregunta de si ellas representan o no geoméricamente la estructura termodinámica del sistema. Por esta razón será necesario un estudio más detallado de si l^2 podría ser la variable termodinámica que necesita ser introducida al espacio de estados de equilibrio para obtener una generalización del hoyo negro BTZ, tal que ε sea de dimensión 3.

Gráficas del escalar de curvatura con $S=1$
y $J=\text{cte.}$

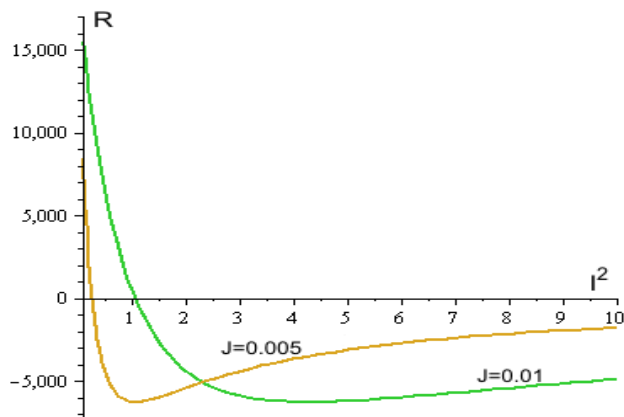


Figura 5.5: Gráficas del escalar de curvatura para dos distintos valores de J con la entropía $S = 1$.

Gráficas del escalar de curvatura con $S=1$
y $l^2=\text{cte.}$

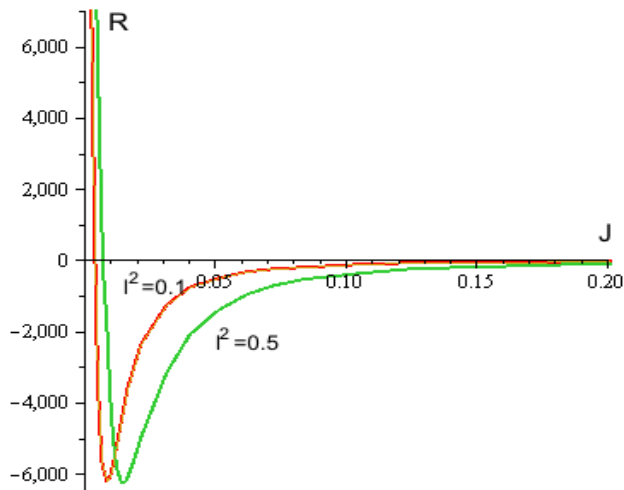


Figura 5.6: Gráficas del escalar de curvatura para dos distintos valores de l con la entropía $S = 1$.

Gráfica del escalar de curvatura con $J=1$

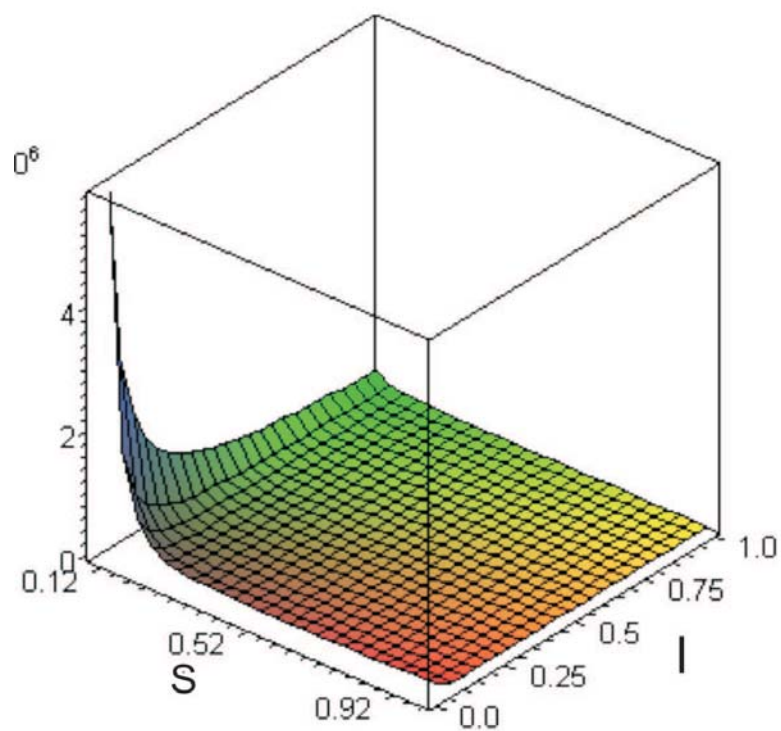


Figura 5.7: Gráfica del escalar de curvatura en términos de la entropía S y del radio de curvatura l , en este caso $J = 1$.

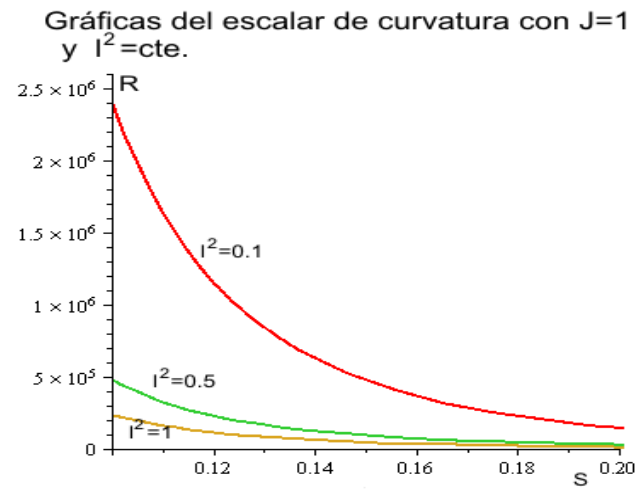


Figura 5.8: Gráficas del escalar de curvatura para tres distintos valores de l con el momento angular $J = 1$.

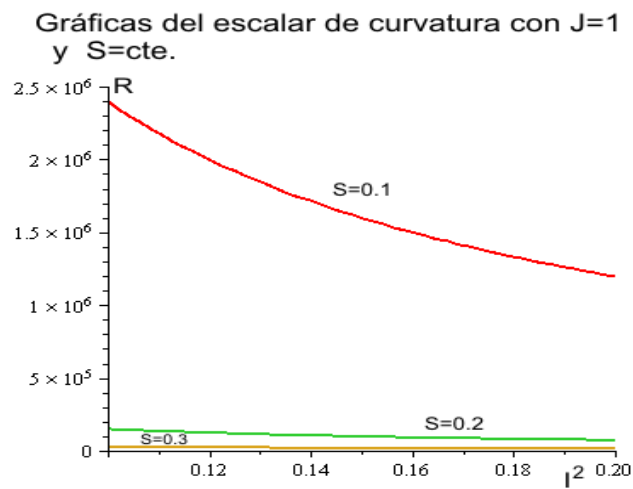


Figura 5.9: Gráficas del escalar de curvatura para tres distintos valores de S con el momento angular $J = 1$.

Capítulo 6

Conclusiones

Se realizó un estudio acerca de la termodinámica del hoyo negro de Bañados, Teitelboim y Zanelli (BTZ), que es una solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el espacio (2+1) dimensional con constante cosmológica menor que cero. Este espacio-tiempo del hoyo negro en (2+1)-dimensiones es un modelo que ayuda a abordar de una manera más simple problemas relacionados a conceptos de relatividad general en (3+1) dimensiones, pues tiene la ventaja de ser más simple matemáticamente pero teniendo los mismos fundamentos conceptuales que este último.

Este estudio de la termodinámica del hoyo negro BTZ esta basado en el formalismo de la geometrotermodinámica. A partir de la obtención de la ecuación termodinámica fundamental del hoyo negro en términos de la variables extensivas, construimos el espacio fase termodinámico cuyas coordenadas están dadas por el potencial termodinámico Φ , las variables extensivas, que en este caso son la entropía S y el momento angular J y las correspondientes variables intensivas, que son la temperatura T y la velocidad angular Ω . Hay que mencionar que todo esto se obtuvo en unidades geométricas, es decir en unidades en las que $c = \hbar = 1$, donde c es la velocidad de la luz y \hbar es la constante de Boltzman.

Una vez construido este espacio fase τ , introducimos en él una métrica G , la cual tiene la propiedad de ser invariante de Legendre. Esta métrica se introdujo en base a trabajos anteriores [1, 2, 6, 7, 15], en ellos se ha estudiado las propiedades que debe cumplir G y hay una construcción detallada que nosotros no ofrecemos en este trabajo, pero es importante señalar que G ha demostrado ser adecuada en las descripciones hechas sobre sistemas termodinámicos a través de la GTD en los trabajos anteriores .

Una vez obtenido τ , abrimos paso a un subsistema muy importante, contenido en éste último, que es el espacio de estados de equilibrio termodinámico ε , el cual nos dicta todos los posibles estados del sistema cuando este se encuentra en equilibrio termodinámico. En ε inducimos la métrica g invariante de Legendre con la cual realmente trabajamos y que es por supuesto compatible con la métrica G en τ .

En los trabajos hechos por Weinhold y Ruppeiner en el estudio de otros sistemas termodinámicos en equilibrio a través de la geometrotermodinámica, se introducían en el espacio de estados de equilibrio ε , métricas las cuales no son invariantes de Legendre, esto hace que al obtener propiedades geométricas de ε tales como puntos singulares y la curvatura, obtengamos distintos resultados dependiendo del potencial Φ utilizado para la construcción de la métrica g .

En los trabajos que ya hemos mencionado [1, 2, 6, 7, 15], se incorporó al formalismo de la geometrotermodinámica, la construcción de métricas que fueran invariantes de Legendre. Así al estudiar sistemas en equilibrio termodinámico tales como el gas ideal, el gas de van der Waals y los hoyos negros en (3+1)dimensiones desde el hoyo negro de Reissner-Nordström hasta el de Kerr-Newman, se encontraron resultados que describen las propiedades geométricas del espacio ε (el cual es por supuesto diferente, dependiendo en cada caso del sistema termodinámico que se desea describir) y son los mismos sin importar cual de los potenciales termodinámicos del sistema o que elección de las variables extensivas se uso para la construcción de la métrica g . Los resultados en las propiedades geométricas de ε para cada sistema coinciden con sus propiedades termodinámicas en el sentido en que por ejemplo, si hay curvatura distinta de cero en la variedad, esto indica interacciones termodinámicas entre las componentes del sistema o por ejemplo cuando presenta puntos singulares, de acuerdo a los trabajos hechos por Davies [16], estos puntos indican transiciones de fase en el sistema.

Este trabajo es una extensión al hecho de probar que el formalismo de la geometrotermodinámica sirve para estudiar las propiedades de un sistema en equilibrio termodinámico, siempre y cuando sea incorporada la noción de invariancia de Legendre en la métrica que forma parte de nuestra variedad Riemanniana. En este caso el sistema estudiado a través de esta técnica, fue el hoyo negro BTZ, que a pesar de no ser un hoyo negro real, por estar en el espacio-tiempo (2+1) dimensional, presenta todas las características propias de los hoyos negros, tal como el horizonte de eventos y la radiación de Hawking, lo que es suficiente para nuestro estudio.

Por otra parte obtuvimos que la curvatura del hoyo negro BTZ es distinta de cero, lo que indica interacciones termodinámicas dentro de éste último, además de la obtención de resultados, en los que hay que destacar expresiones explícitas para la curvatura del hoyo negro y para otros parámetros característicos, tales como su temperatura, la entropía, el momento angular, la velocidad angular y la capacidad calorífica, todo esto en términos de sus dimensiones. Otro resultado importante es el hecho de que al no haber singularidades en la curvatura, quiere decir que no hay transiciones de fase lo cual coincide con la estructura dictada en la expresión para la capacidad calorífica.

Por último, se intento una generalización de este espacio-tiempo BTZ, tal que ε fuera de dimensión 3. Esto se hizo introduciendo el cuadrado del radio de curvatura l^2 como una variable termodinámica más, pero aún queda la pregunta de cuán viable es interpretar al radio de curvatura como una variable extensiva más que caracterice la ecuación de estado de hoyo negro BTZ en una dimensión mayor. Así pues, se requiere un análisis más extensivo para determinar si se puede dar o no dicha generalización.

El alcance de la geometrotermodinámica para el estudio de sistemas termodinámicos en equilibrio se seguira dictando por los resultados en los siguientes trabajos, pero no cabe duda que lo que se ha logrado hasta ahora, al seguir conservando el concepto de invariancia de Legendre cuando tratamos de presentar la termodinámica del sistema en términos de conceptos geométricos, igual que como es tratado en la termodinámica clásica, es un paso clave en el avance de este tema.

Apéndice A

Definición de una variedad

Para entender lo que es una variedad consideremos primero el espacio R^n , el cual denotamos por el conjunto de n -tuplas de números reales de la forma (x_1, x_2, \dots, x_n) . Un conjunto M (el cual puede ser un conjunto de puntos), se dice que es una variedad si cada punto de M puede ser cubierto por una vecindad abierta en la cual se puede definir un mapeo uno a uno de esta vecindad hacia un conjunto abierto de R^n , para una n . Esto último significa que M es localmente como R^n y entonces la dimensión de M es n .

El mapeo asocia con un punto P de M una n -tupla $(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P))$. Estos números $x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P)$ son llamados coordenadas de P bajo este mapeo. Una forma en que podemos considerar una variedad M n -dimensional es pensarla como un conjunto al cual se le pueden asociar n coordenadas independientes en alguna vecindad de cualquier punto de M , donde estas coordenadas están refiriendo el mapeo requerido a R^n . De aquí en adelante adoptaremos la notación convencional escribiendo el índice de cada coordenada como un superíndice: $x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P)$ que indican las n coordenadas asociadas a P [8].

Supongamos que f es un mapeo uno a uno de una vecindad U alrededor de un punto P de M a un conjunto abierto $f(U)$ de R^n . De la definición dada arriba sabemos que U no necesariamente cubre todo M , por lo que se requeriran otras vecindades con sus propios mapeos tal que cada punto de M pertenezca a una de estas vecindades. Como estas vecindades cubren todos los puntos de M y son abiertas, algunas de ellas se deben intersectar, esto nos da la oportunidad de dar una caracterización adicional a la variedad. Supongamos que V es una vecindad que se intersecta con U y que V tiene un mapeo g a una región abierta de R^n . Esta región abierta puede ser completa-

mente distinta a la región obtenida por el mapeo de f definido en U . Entonces bien, la intersección de V y U es abierta y dan dos diferentes sistemas de coordenadas asociados a los mapeos, pero hay una relación entre estos sistemas de coordenadas. Para hallar esta relación fijémonos en un punto de la intersección bajo f (el cual es un punto en R^n) y llamémosle (x^1, x^2, \dots, x^n) , ver figura (A.1) .

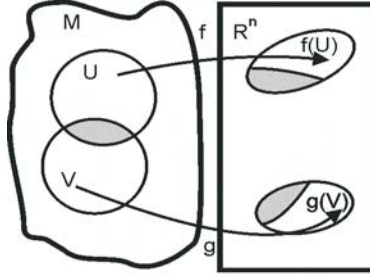


Figura A.1: Las vecindades U y V en M se intersectan. Sus respectivos mapeos a R^n los cuales son f y g van a dar a diferentes regiones.

El mapeo f tiene asociado un mapeo inverso f^{-1} , entonces hay un único punto S en la intersección el cual tiene estas coordenadas bajo f . Ahora a S le aplicamos g y obtenemos otro punto en R^n el cual llamamos (y^1, y^2, \dots, y^n) , lo que hemos hecho es construir un mapeo de $R^n \rightarrow R^n$ el cual es la composición $g \circ f^{-1}$. De esta forma obtenemos una relación funcional, es decir una transformación de coordenadas [8].

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ y^2 &= y^2(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ &\vdots \\ y^n &= y^n(x^1, x^2, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Si las derivadas parciales de orden k o mayor de todas estas funciones y^i con respecto a todas las x^i existen y son continuas, entonces se dice que los mapeos f y g están C^k -relacionados. Por otra parte el par consistente de una vecindad y su mapeo es llamado una carta. Así, si es posible construir un sistema de cartas que cubra totalmente M y tal que cada carta esté C^k -relacionada una con otra cuando sus respectivas vecindades se intersectan,

se dice que la variedad M es una C^k variedad. Una variedad de clase C^1 es una variedad diferenciable. La diferencialidad de la variedad le proporciona una mayor estructura: la posibilidad de definir tensores, formas diferenciales, etc.

A.1. Ejemplos de variedades

El concepto de variedad diferencial es realmente útil debido a su generalidad. Y es que una variedad abarca conjuntos los cuales ordinariamente no consideraríamos como espacios [8]. De acuerdo a la definición dada anteriormente, cualquier conjunto M que pueda ser parametrizado continuamente es una variedad cuya dimensión es el número de parámetros independientes. Por ejemplo:

(i) Consideremos N partículas, si consideramos todas sus posiciones ($3N$ números) y todas sus velocidades ($3N$ números), podemos definir la variedad $6N$ -dimensional la cual es llamada espacio fase y cada punto de esta variedad indica un estado del sistema.

(ii) Una variedad muy particular y común es un espacio vectorial, supongamos que el espacio vectorial V es n -dimensional y elegimos cualquier base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$. Entonces cualquier vector puede ser representado como una combinación lineal

$$\bar{y} = a^1 \bar{e}_1 + \dots + a^n \bar{e}_n. \quad (\text{A.1})$$

Pero \bar{y} es un punto en V por lo que hemos establecido un mapeo de V a R^n , $\bar{y} \rightarrow (a^1, \dots, a^n)$. De hecho a cada punto de R^n corresponde un único vector en V bajo este mapeo, entonces V es una variedad idéntica con R^n pues V está cubierto por un solo sistema de coordenadas.

Por último mencionaremos que dos variedades de la misma dimensión pueden ser localmente indistinguibles pero tener una estructura global totalmente diferente [8].

A.2. Curvas y funciones en una variedad

En una variedad consideramos una curva como un mapeo diferenciable de un conjunto abierto de R^1 a M , entonces asociamos cada punto de R^1 el cual es un número real λ , con un punto en M , el cual es llamado el punto imagen

de λ . El conjunto de todos estos puntos imagen es la curva y se dice que la curva está parametrizada con el parámetro λ . Así aunque dos curvas puedan tener la misma imagen en M pero estén parametrizadas de manera diferente se dirá que son distintas. Por mapeo diferenciable entendemos que las coordenadas del punto imagen $\{x^i(\lambda), i = 1, \dots, n\}$ son funciones diferenciables de λ .

De forma análoga una función en M es una regla que asocia un número real (el valor de la función) a cada punto de M . Es decir, la función puede ser escrita como $f(P)$, donde P es un punto de M . Por otra parte como P tiene coordenadas podemos expresar el valor de la función como $f(x^1, \dots, x^n)$. Si esta función es diferenciable en sus argumentos se dice que es diferenciable.

De ahora en adelante siempre asumiremos que podemos poner coordenadas $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$ en la variedad y que cualquier conjunto de ecuaciones suficientemente diferenciable $y^i = y^i(x^j)$, que sea localmente invertible (es decir cuyo Jacobiano es distinto de cero) constituye una aceptable transformación de coordenadas a las nuevas coordenadas $\{y^i, i = 1, \dots, n\}$ [8].

Apéndice B

Espacios Tangente y Cotangente

B.1. Espacio Tangente

Para introducir la noción de espacio tangente comencemos por describir los vectores y los campos vectoriales.

Consideremos una curva que pasa a través de un punto P de M , descrita por las ecuaciones $\{x^i = x^i(\lambda), i = 1, \dots, n\}$, consideremos también una función diferenciable $f(x^1, \dots, x^n)$ en M . Entoces a lo largo de la curva hay una función $g(\lambda) = f(x^1(\lambda), \dots, x^n(\lambda))$. Diferenciando esta función tenemos

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (\text{B.1})$$

Esto es verdad para cualquier función g , por lo que podemos escribir

$$\frac{d}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{B.2})$$

desde el punto de vista de vectores en el espacio Euclidiano, podríamos decir que el conjunto de números $\{dx^i/d\lambda\}$ son las componentes de un vector tangente a la curva $x^i(\lambda)$. Esto se puede visualizar considerando que $\{dx^i\}$ son desplazamientos infinitesimales a lo largo de la curva y al dividirlos por $d\lambda$ solamente cambia la escala pero no así la dirección de este desplazamiento. De hecho, como una curva tiene un único parámetro, para cada curva hay

un único conjunto $\{ dx^i/d\lambda \}$ el cual decimos que son las componentes de el vector tangente a la curva. Entonces de la definición de curva, vemos que cada curva tiene un único vector tangente en cada punto [8].

El término *vector* trae conceptos del espacio Euclidiano, pues los vectores son definidos por analogía con desplazamientos Δx^i . Sin embargo en una variedad no necesariamente hay una relación de distancia entre puntos, por lo que necesitamos una definición de vector que no necesariamente ocupe esta noción.

Supongamos que a y b son dos números y $x^i = x^i(\mu)$ es otra curva a través de P . Entonces tenemos

$$\frac{d}{d\mu} = \sum_i \frac{dx^i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{B.3})$$

y

$$a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\mu} = \sum_i \left(a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{B.4})$$

Pero los números $\{ a dx^i/d\lambda + b dx^i/d\mu \}$ son las componentes de un nuevo vector el cual es tangente a alguna curva en P . Así debe existir una curva con parámetro ϕ tal que en P

$$\frac{d}{d\phi} = \sum_i \left(a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{B.5})$$

De estos últimos resultados obtenemos que en P ,

$$a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\mu} = \frac{d}{d\phi}. \quad (\text{B.6})$$

Por lo tanto, las derivadas direccionales $d/d\lambda$ a lo largo de la curva, forman un espacio vectorial en P . La ecuación (B.2) muestra que cualquier $d/d\lambda$ puede ser escrita como combinación lineal de el conjunto de derivadas $\partial/\partial x^i$. De aqui se sigue que $\{ \partial/\partial x^i \}$ son las bases de este espacio vectorial. Así también (B.2) muestra que $d/d\lambda$ tiene componentes $\{ dx^i/d\lambda \}$ en estas bases. Entonces tenemos el siguiente resultado importante: el espacio de todos los vectores tangentes en P y el espacio de todas las derivadas a lo largo de la curva en P tienen una correspondencia uno a uno, por esta razón se dice que $d/d\lambda$ es el vector tangente a la curva $x^i(\lambda)$ [8].

Es importante indicar que sólo vectores en el mismo punto P pueden ser sumados. Vectores en distintos puntos no tienen relación uno con el otro. Estos vectores tangentes no viven en M , viven en el espacio tangente a M en P , el cual denotamos con T_P . Una variedad como la superficie de una esfera tiene como espacio tangente en un punto P un plano.

Debemos usar el término vector para referirnos a un vector en un punto P de M . El término campo vectorial se refiere a la regla que asigna un vector a cada punto de M .

B.2. Bases Vectoriales

En cualquier punto P de M el espacio T_P es un espacio vectorial con la misma dimensión n que M . Cualquier colección de n vectores linealmente independientes en T_P forman una base de T_P . Si nosotros tenemos un sistema de coordenadas $\{x^i\}$ en una vecindad U de P , entonces estas coordenadas definen la base coordenada $\{\partial/\partial x^i\}$ en todos los puntos en U . Pero no necesariamente tenemos que usar esa base coordenada, podemos escribir los vectores en cualquier base arbitraria $\{\bar{e}_i\}$. En un punto P un vector \bar{V} cualquiera puede ser escrito como

$$\bar{V} = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j V^{j'} \bar{e}_j \quad (\text{B.7})$$

Los números $\{V^i\}$ son las componentes de \bar{V} en la base $\{\partial/\partial x^i\}$ y los números $\{V^{j'}\}$ son las componentes de \bar{V} en $\{\bar{e}_j\}$ que están relacionadas con $\{V^i\}$ por una transformación vectorial [8].

B.3. Uno-formas y Espacio Cotangente

Como ya mencionamos T_P es el espacio de todos los vectores tangentes en P . Definimos una uno-forma como una función lineal de vectores que nos da un valor real. Es decir, una uno-forma $\tilde{\omega}$ en P asocia con un vector \bar{V} en P un número real, el cual llamamos $\tilde{\omega}(\bar{V})$. Esta notación expresa la idea de que $\tilde{\omega}$ es una función con argumentos vectoriales. El conjunto de uno-formas en el punto P satisfacen los axiomas de un espacio vectorial, por lo tanto el espacio de estas uno-formas es el llamado espacio dual a T_P o bien el espacio cotangente en P y es denotado por T^*_P .

La formación del número $\tilde{\omega}(\bar{V})$ es frecuentemente llamada la contracción de $\tilde{\omega}$ con \bar{V} [8].

B.4. El gradiente como uno-forma

De manera análoga al concepto de campo vectorial, un campo de uno-formas, es una regla que da una uno-forma a cada punto de M .

El campo de uno-formas más común es el gradiente de una función f , el cual denotamos por $\tilde{d}f$. Así el gradiente $\tilde{d}f$ es definido por

$$\tilde{d}f(d/d\lambda) = df/d\lambda, \quad (\text{B.8})$$

donde $d/d\lambda$ es un vector tangente arbitrario. Es decir, el gradiente de f en cualquier punto P es el elemento de T_P^* cuyo valor en un elemento \bar{V} de T_P es la derivada direccional de f a lo largo de la curva cuya tangente es \bar{V} .

El valor de f en P es irrelevante para obtener $df/d\lambda$. Para calcular $df/d\lambda$ en P necesitamos conocer $\partial f/\partial x^i$ en P , las cuales debemos ver como las componentes del gradiente de f . Así el gradiente es una uno-forma [8].

Por ejemplo, consideremos el espacio Euclidiano R^3 en el cual hay un campo escalar $\phi(\vec{x})$ en cada punto \vec{x} y una curva definida por un parámetro $t \in R$, entonces cada punto de la curva tiene coordenadas

$$[x = x(t), y = y(t), z = z(t)].$$

El vector tangente \vec{U} tiene componentes

$$\vec{U} \rightarrow \left(\frac{dx}{dt}, \dots \right).$$

Como ϕ es una función de x, y y z entonces esta es una función de t en la curva:

$$\phi(t) = \phi[x(t), y(t), z(t)],$$

entonces la derivada tangencial de la curva es

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} U^x + \frac{\partial\phi}{\partial y} U^y + \frac{\partial\phi}{\partial z} U^z. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

De la última ecuación observamos que con el vector \vec{U} hemos producido el número $d\phi/dt$ que representa la derivada tangencial de ϕ en una curva en la cual \vec{U} es el vector tangente. Y también observamos que la uno-forma, es decir el gradiente de ϕ tiene componentes $(\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z)$ [9].

B.5. Bases de uno-formas y Componentes de uno-formas

En el espacio cotangente en P , el cual está formado por uno-formas, cualquier conjunto linealmente independiente de uno-formas constituye una base. Sin embargo la base $\{\bar{e}_i, i = 1, \dots, n\}$ del espacio vectorial T_P en P induce una base preferida en el espacio cotangente que es llamada la base dual $\{\tilde{\omega}^i, i = 1, \dots, n\}$ y se define como sigue [8]. Si \vec{V} es un vector en T_P , entonces $\tilde{\omega}^i$ produce la i -ésima componente de \vec{V}

$$\tilde{\omega}^i(\vec{V}) = V^i \quad (\text{B.10})$$

En particular, como las bases vectoriales \bar{e}_j tienen solo la i -ésima componente, todas las otras desaparecen teniendo

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_j) = \delta_j^i \quad (\text{B.11})$$

Una forma de probar que $\{\tilde{\omega}^i\}$ es una base del espacio cotangente en P es la siguiente. Consideremos cualquier uno-forma \tilde{q} actuando en un vector arbitrario \vec{V}

$$\begin{aligned} \tilde{q}(\vec{V}) &= \tilde{q}\left(\sum_j V^j \bar{e}_j\right) \\ &= \sum_j V^j \tilde{q}(\bar{e}_j) \\ &= \tilde{\omega}^j(\vec{V}) \tilde{q}(\bar{e}_j) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Los números

$$q_j = \tilde{q}(\bar{e}_j) \quad (\text{B.13})$$

son llamados las componentes de \tilde{q} en la base dual a $\{\bar{e}_j\}$. Para ver esto escribimos la ecuación (B.12) como

$$\tilde{q}(\vec{V}) = \sum_j q_j \tilde{\omega}^j(\vec{V}). \quad (\text{B.14})$$

Esto muestra que el conjunto $\{\tilde{\omega}^j\}$ es una base, pues podemos escribir cualquier \tilde{q} como combinación lineal de ella y también muestra que los números $\{q_j\}$ son las componentes de \tilde{q} en esta base [8].

Un sistema de coordenadas $\{x^i\}$ en U , define una base natural para el espacio tangente $\{\partial/\partial x^i\}$ y también define un conjunto de n uno-formas, los gradientes $\{\tilde{d}x^i\}$, estas uno-formas son la base dual a la base vectorial de coordenadas.

De la ecuación (B.8) y (B.11) tenemos

$$\tilde{d}x^i(\partial/\partial x^j) \equiv \partial x^i/\partial x^j = \delta_j^i \quad (\text{B.15})$$

B.6. Notación de Índices

Adoptaremos las siguientes convenciones para el uso de índices. Por ejemplo las componentes de vectores las escribimos como V^i , es decir, el índice escrito como un superíndice. Componentes de uno-formas como ω_j las escribimos con el índice como subíndice. Por ejemplo las bases de un vector son nombradas con subíndices (\bar{e}_j) y las bases de una uno-forma se denotan con superíndices ($\tilde{\omega}^j$). Consideremos la contracción

$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = \sum_j V^j \omega_j \quad (\text{B.16})$$

la cual es una suma de productos de componentes con índice arriba y componentes con índice abajo. Nosotros adoptaremos la convención de suma de Einstein: cuando una expresión contiene índices repetidos como un superíndice y un subíndice, se entiende que es una suma sobre los índices. Así las expresiones

$$\tilde{\omega} = \omega_j \tilde{d}x^j, \quad \bar{V} = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \tilde{\omega}(\bar{V}) = V^j \omega_j \quad (\text{B.17})$$

son entendidas como sumas [8].

B.7. Transformaciones de Bases

Consideremos vectores y tensores definidos en algún punto P de M . Supongamos que tenemos una base vectorial $\{\bar{e}_i, i = 1, \dots, n\}$ pero preferimos usar la base $\{\bar{e}'_j, j' = 1, \dots, n\}$. En T_P hay una transformación lineal Λ de

la vieja base a la nueva:

$$\bar{e}_{j'} = \Lambda_{j'}^i \bar{e}_i \quad (\text{B.18})$$

La matriz $\Lambda_{j'}^i$ es no singular y es llamada la matriz de transformación. La vieja base de uno-formas satisface (B.11):

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_k) = \delta_k^i \quad (\text{B.19})$$

Multiplicando por $\Lambda_{j'}^k$ y usando (B.18) y linealizando tenemos

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_{j'}) = \delta_k^i \Lambda_{j'}^k = \Lambda_{j'}^i, \quad (\text{B.20})$$

Ahora bien, la matriz $\Lambda_{j'}^i$ tiene inversa, la cual denotamos por $\Lambda_j^{k'}$ tal que:

$$\Lambda_j^{k'} \Lambda_{j'}^j = \delta_{j'}^{k'}, \quad \Lambda_j^{k'} \Lambda_{k'}^i = \delta_j^i \quad (\text{B.21})$$

Multiplicando (B.20) por $\Lambda_j^{k'}$ obtenemos

$$\Lambda_j^{k'} \tilde{\omega}^i(\bar{e}_{j'}) = \delta^{k' j'} \quad (\text{B.22})$$

y comparando con (B.11) obtenemos finalmente

$$\tilde{\omega}^{k'} = \Lambda_j^{k'} \tilde{\omega}^j. \quad (\text{B.23})$$

Esta es la contraparte de (B.18): bases de uno-formas se transforman opuestamente a las bases vectoriales (y entonces utilizando la matriz de transformación inversa).

Ahora podemos obtener como se transforman las componentes:

$$V^{i'} = \tilde{\omega}^{i'}(\bar{V}) = \Lambda_j^{i'} \tilde{\omega}^j(\bar{V}) = \Lambda_j^{i'} V^j, \quad (\text{B.24})$$

$$q_{k'} = \tilde{q}(\bar{e}_{k'}) = \tilde{q}(\Lambda_{k'}^j \bar{e}_j) = \Lambda_{k'}^j \tilde{q}(\bar{e}_j) = \Lambda_{k'}^j q_j. \quad (\text{B.25})$$

Estas leyes de transformación muestran que las componentes de vectores y las bases de uno-formas se transforman de la misma manera, la cual es la forma opuesta de como se transforman las bases vectoriales y las componentes de uno-formas.

La posición de un índice automáticamente da su ley de transformación. Por ejemplo, V^j y $\tilde{\omega}^j$ obedecen la misma ley, la cual es

$$V^{i'} = \Lambda_j^{i'} V^j$$

Supongamos que una región U de una variedad M tiene el sistema de coordenadas $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$ y que queremos introducir unas nuevas coordenadas $\{y^{i'}, i' = 1, \dots, n\}$ dadas por las ecuaciones

$$y^{i'} = f^{i'}(x^1, \dots, x^n), \quad i' = 1, \dots, n \quad (\text{B.26})$$

Estas ecuaciones constituyen una transformación de coordenadas si el Jacobiano de la matriz de las derivadas parciales $\partial y^{i'} / \partial x^j$ tienen determinante distinto de cero en U . Entonces un punto P en U puede ser descrito por estos dos diferentes conjuntos de coordenadas, $\{x^i\}$ o $\{y^{j'}\}$. En P tenemos dos diferentes bases de coordenadas, las cuales están relacionadas por

$$\frac{\partial}{\partial y^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial y^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (\text{B.27})$$

Comparando esto con (B.18) podemos ver que

$$\Lambda_{j'}^i = \frac{\partial x^j}{\partial y^{i'}} \quad (\text{B.28})$$

De esta forma la matriz inversa es

$$\Lambda_j^{k'} = \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^j} \quad (\text{B.29})$$

Lo cual se puede probar fácilmente de la siguiente forma

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}} \frac{\partial y^{j'}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_k^i.$$

Es importante observar que (B.29) define solamente una clase de transformaciones $\Lambda_j^{k'}$ en U [8].

B.8. La métrica es un tensor

Consideremos un punto P de M . Un tensor de tipo $(\frac{N}{N'})$ en P , es una función lineal que toma como argumentos N uno-formas y N' vectores y cuyo valor nos da un número real. Por lineal entendemos la linealidad en cada argumento.

Por ejemplo, si \mathbf{F} es un $\binom{2}{2}$ tensor, su valor en las uno-formas $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\sigma}$ y los vectores \bar{V} y \bar{W} es

$$\mathbf{F}(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W})$$

es una función lineal que nos da un número.

El producto punto es una regla la cual asocia un número a dos vectores, es decir es una función lineal de ambos vectores, por la tanto esta función es un tensor $\binom{0}{2}$, el cual es llamado el tensor métrico g y se define

$$g(\bar{V}, \bar{U}) = g(\bar{U}, \bar{V}) = \bar{U} \cdot \bar{V} \quad (\text{B.30})$$

La primera igualdad en esta ecuación establece que $\bar{U} \cdot \bar{V}$ no debe depender del orden de \bar{U} y \bar{V} . Entonces decimos que g es un tensor simétrico. Sus componentes en una base $\{\bar{e}_i\}$ son

$$g_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j \quad (\text{B.31})$$

Estas componentes forman una matriz simétrica de $n \times n$ y además la matriz es unitaria si

$$g_{ij} = \delta_{ij}.$$

Si esto sucede decimos que el tensor g es la métrica Euclidiana y el espacio vectorial es el llamado espacio Euclidiano. Pero si g_{ij} no es tan simple podemos tratar de elegir una nueva base $\{\bar{e}_{j'}\}$ en la cual las nuevas componentes de la métrica son mas simples

$$g_{i'j'} = \Lambda_{i'}^k \Lambda_{j'}^l g_{kl} \quad (\text{B.32})$$

considerando esta última como una ecuación matricial podemos escribirla como

$$g_{i'j'} = \Lambda_{i'}^k g_{kl} \Lambda_{j'}^l$$

pero esta es la ecuación matricial

$$g' = \Lambda^T g \Lambda, \quad (\text{B.33})$$

donde Λ^T es la transpuesta de la matriz Λ cuyas entradas son $\Lambda_{i'}^k$.

De aquí se puede derivar con un procedimiento no muy tedioso [8], que cualquier espacio vectorial con un tensor métrico tiene una base en la cual este tensor tiene una forma canónica $\text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ y surge el importante teorema que establece que en un espacio vectorial hay pocos tipos de tensores métricos diferentes.

Desde el punto de vista del algebra tensorial, con el tensor métrico podemos mapear vectores en uno-formas de una manera uno a uno. Consideremos un vector \bar{V} , para este vector fijo, podemos construir la función lineal de vectores a números reales, es decir una uno-forma, la cual denotamos por

$$\tilde{V} = g(\bar{V}, \quad). \quad (\text{B.34})$$

El hecho de que la matriz g_{ij} tenga inversa hace que este mapeo sea uno a uno: hay solamente un vector \bar{V} que es mapeado a \tilde{V} , para tener más claro esto podemos escribir la ecuación anterior en términos de sus componentes. Denotamos las componentes de \tilde{V} por V_i :

$$V_i = \tilde{V}(\bar{e}_i) = g(\bar{V}, \bar{e}_i) = g(V^j \bar{e}_j, \bar{e}_i) \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned} &= V^j g(\bar{e}_j, \bar{e}_i) = V^j g_{ji} \quad (\text{B.36}) \\ &= g_{ij} V^j, \end{aligned}$$

la última igualdad es debido a la simetría de g . Por otra parte la matriz inversa de g_{ij} será denotada por g^{ij} :

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \quad (\text{B.37})$$

Entonces tenemos

$$g^{ki} V_i = g^{ki} g_{ji} V^j = \delta_j^k V^j = V^k \quad (\text{B.38})$$

Esto muestra que el mapeo es invertible y entonces la métrica proporciona una única relación entre vectores y uno-formas

$$V_i = g_{ij} V^j, \quad (\text{B.39})$$

$$V^j = g^{jk} V_k. \quad (\text{B.40})$$

De la misma forma, la métrica puede mapear un tensor \mathbf{A} $\binom{2}{0}$ en un tensor $\binom{1}{1}$:

$$A_j^i = g_{jk} A^{ik} \quad (\text{B.41})$$

y a su vez este último puede ser mapeado en un tensor $\binom{0}{2}$

$$A_{lj} = g_{lm} A_j^m = g_{lm} g_{jk} A^{mk} \quad (\text{B.42})$$

el cual puede ser mapeado de regreso al tensor original

$$A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm} \quad (\text{B.43})$$

con estos mapeos se dice que estamos subiendo y bajando índices. Así los vectores se distinguen entre ellos por la posición de sus índices [8].

En un espacio vectorial Euclidiano una base Cartesiana tiene $g_{ij} = \delta_{ij}$, por lo que $g^{ij} = \delta^{ij}$ y $U^i = U_i$: no hay diferencia entre las componentes de un vector y su asociada uno-forma en este caso.

Un campo tensorial métrico en una variedad es un campo tensorial $\binom{0}{2}$ simétrico que debe tener una inversa en cada punto.

La definición de un cierto tensor $\binom{0}{2}$ en una variedad M , como la métrica de la variedad dota a M con una estructura muy rica, en donde uno puede definir nociones como distancia y curvatura entre otras.

Como se mencionó en el párrafo anterior una importante propiedad de la métrica es que permite una definición de longitud en la variedad. Si una curva tiene tangente $\bar{V} = d\bar{x}/d\lambda$, entonces un desplazamiento $d\lambda$ tiene longitud cuadrada

$$dl^2 = d\bar{x} \cdot d\bar{x} = (\bar{V}d\lambda) \cdot (\bar{V}d\lambda) = \bar{V} \cdot \bar{V}(d\lambda)^2 = g(\bar{V}, \bar{V})d\lambda^2 \quad (\text{B.44})$$

Si una métrica es positiva definida, entonces $g(\bar{V}, \bar{V}) > 0$ para toda $\bar{V} \neq 0$. En ese caso dl^2 es positivo y tenemos

$$dl = (g(\bar{V}, \bar{V}))^{1/2}d\lambda \quad (\text{B.45})$$

como longitud de un elemento de la curva. Así definimos el número real

$$dl = |g(\bar{V}, \bar{V})|^{1/2}d\lambda \quad (\text{B.46})$$

como la distancia propia si g es positiva definida.

Apéndice C

Formas Diferenciales

C.1. Volumen

Hay una clase particular de tensores muy frecuentemente usados, los cuales sirven para definir elementos de volumen en una variedad.

Primero consideremos la noción de volumen en dos dimensiones, el cual es llamado área. Cualquier par de vectores en el espacio Euclidiano define un área (ver figura C.1): los vectores en la figura definen el área encerrada por el paralelogramo.

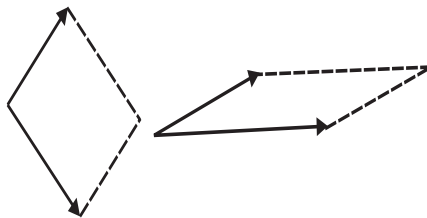


Figura C.1: Área definida por dos diferentes pares de vectores.

Por otra parte un área puede ser definida por muchos diferentes pares de vectores, así que la noción de área es menos restrictiva que la noción de métrica. Por ejemplo en el espacio Euclidiano la métrica define la longitud de vectores y el ángulo entre ellos, mientras que el área da solo un número asociado a estos vectores [8].

Pero es posible definir un área para una variedad de dimensión dos ó bien un volumen en una arbitraria variedad sin tener que definir una métrica en

la variedad.

En una variedad dos-dimensional el área es un tensor, bilineal en sus argumentos. Como el área es un número este es un tensor $\binom{0}{2}$ sin embargo si los vectores \bar{a} y \bar{b} que definen el área son paralelos ésta debe ser cero y como una consecuencia de esto el tensor debe cambiar de signo si \bar{a} y \bar{b} son cambiados.

En la siguiente figura los dos vectores dibujados definen un paralelogramo de una cierta área, en términos de componentes el área es el determinante

$$\text{área} = \begin{vmatrix} V^x & V^y \\ W^x & W^y \end{vmatrix}$$

Aquí se manifiesta la antisimetría bajo el intercambio de V y W .

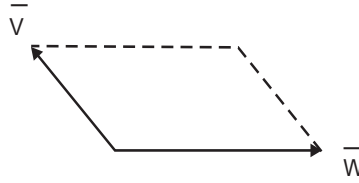


Figura C.2: Área definida por \bar{V} y \bar{W}

Por otra parte decimos que un tensor $\binom{0}{2}$ es antisimétrico si su valor cambia de signo cuando intercambiamos sus argumentos:

$$\tilde{\omega}(\bar{U}, \bar{V}) = -\tilde{\omega}(\bar{V}, \bar{U}) \text{ para todo } \bar{U}, \bar{V} \Leftrightarrow \tilde{\omega} \text{ antisimétrico} \quad (\text{C.1})$$

C.2. Formas diferenciales

Una p -forma, $p \geq 3$ se define como un tensor de tipo $\binom{0}{p}$ completamente antisimétrico. Igual que antes una uno-forma es un $\binom{0}{1}$ tensor. Una función escalar es una cero-forma. El número p es el grado de la forma.

Los tensores $\binom{0}{2}$ pueden ser formados por tensores $\binom{0}{1}$ usando la operación \otimes . Definimos la operación \wedge llamada producto cuña para construir dos-formas de uno-formas: si \tilde{p} y \tilde{q} son uno-formas entonces

$$\tilde{p} \wedge \tilde{q} = \tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p} \quad (\text{C.2})$$

es el producto cuña.

Se puede demostrar que si $\{\bar{e}_i, i = 1, \dots, n\}$ es la base de un espacio vectorial y $\{\omega^j\}$ es la base dual para uno-formas, entonces $\{\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k, j, k = 1, \dots, n\}$ es una base para el espacio de las dos-formas.

La regla para el producto cuña se extiende naturalmente a tres formas [8]:

$$\tilde{p} \wedge (\tilde{q} \wedge \tilde{r}) = (\tilde{p} \wedge \tilde{q}) \wedge \tilde{r} \quad (\text{C.3})$$

$$= \tilde{p} \wedge \tilde{q} \wedge \tilde{r} = \tilde{p} \otimes \tilde{q} \otimes \tilde{r} + \tilde{q} \otimes \tilde{r} \otimes \tilde{p} + \dots \quad (\text{C.4})$$

Esta expresión puede ser generalizada a altos números de uno-formas y esto permite definir productos cuña de \tilde{p} y \tilde{q} -formas arbitrarias, pues cualquier p -forma puede ser escrita como cualquier combinación lineal de productos cuña de p uno-formas (las bases uno-formas).

Una operación frecuentemente usada es la contracción de un vector con una forma. Una p -forma requiere p argumentos vectoriales para dar un número real, si esta es suplida con un argumento entonces se convierte en una $(p-1)$ -forma

$$\tilde{\alpha}(\bar{\xi}) = \tilde{\alpha} \left(\underbrace{(\bar{\xi}, \quad , \quad , \dots, \quad)}_{p-1 \text{ argumentos vacios}} \right) = \alpha_{ij\dots k} \xi^i \quad (\text{C.5})$$

es decir la $(p-1)$ -forma obtenida al contraer $\tilde{\alpha}$ con $\bar{\xi}$. Notamos que poniendo $\bar{\xi}$ en cualquier espacio vacío, podríamos solamente afectar el signo de $\tilde{\alpha}(\bar{\xi})$. Como ejemplo consideremos $\tilde{\alpha} = \tilde{p} \wedge \tilde{q}$ donde \tilde{p} y \tilde{q} son uno-formas:

$$\begin{aligned} (\tilde{p} \wedge \tilde{q})(\bar{\xi}) &= (\tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p})(\bar{\xi}) \\ &= \tilde{p}(\bar{\xi})\tilde{q} - \tilde{q}(\bar{\xi})\tilde{p}. \end{aligned}$$

Así aunque $\bar{\xi}$ es contraído en el primer argumento de \tilde{p} y \tilde{q} , la operación implícita de el producto cuña asegura que $\bar{\xi}$ es contraído con cada uno-forma en el producto \wedge [8].

C.3. Volumen en una variedad

En una variedad n -dimensional hay sólo un espacio unidimensional de n -formas en cualquier punto. Esto se debe a que el espacio de todas las p -formas en cualquier punto en una variedad n -dimensional es de dimensión C_p^n . Entonces si $\tilde{\omega}'$ es cualquier n -forma en P , luego existe un número $f \neq 0$ tal que $\tilde{\omega}' = f\tilde{\omega}$ [8].

Ahora podemos regresar al punto de vista en el cual las formas estan relacionadas con elementos de volumen. En una variedad n -dimensional, un conjunto de n vectores linealmente independientes definen una región de volumen diferente de cero, un paralelepipedo n -dimensional. El volumen de esta región es el valor de una n -forma. Uno es libre de elegir cualquier n -forma como el volumen, elegimos la n -forma determinada por el problema que queremos resolver.

Supongamos que $\tilde{\omega}$ es una n -forma en una región U de una variedad n -dimensional cuyas coordenadas son $\{x^1, \dots, x^n\}$. Entonces, como todas las n -formas en un punto forman un espacio vectorial unidimensional, existe alguna $f(x^1, \dots, x^n)$ tal que

$$\tilde{\omega} = f \tilde{d}x^1 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^n$$

Consideremos una región U , dividimos esta en regiones delgadas separadas por n -tuplas de vectores $\{\Delta x^1 \partial / \partial x^1, \Delta x^2 \partial / \partial x^2, \dots, \Delta x^n \partial / \partial x^n\}$ donde $\{\Delta x^i\}$ son números muy pequeños. Así el valor de la pequeña parte de volumen es

$$\Delta x^1 \Delta x^2 \dots \Delta x^n = \tilde{d}x^1 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^n (\Delta x^1 \partial / \partial x^1, \Delta x^2 \partial / \partial x^2, \dots, \Delta x^n \partial / \partial x^n)$$

Ahora veamos como se transforman los elementos de volumen de un sistema de coordenadas a otro, en el caso particular de una región U en una variedad dos-dimensional.

Coonsideremos primero las coordenadas λ y μ , cuando cambiamos a las coordenadas x y y , de la regla de cambio de bases obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{d}\lambda &= \tilde{d}\lambda(x, y) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \tilde{d}x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \tilde{d}y \\ \tilde{d}\mu &= \frac{\partial \mu}{\partial x} \tilde{d}x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \tilde{d}y \end{aligned}$$

Recordando que $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}x = 0$, por ser antisimétrico.

$$\begin{aligned} \tilde{d}\lambda \wedge \tilde{d}\mu &= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \tilde{d}x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \tilde{d}y \right) \wedge \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \tilde{d}x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \tilde{d}y \right) \\ &= \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial x} \tilde{d}y \wedge \tilde{d}x \\ &= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y. \end{aligned} \tag{C.6}$$

El factor al lado de $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y$ es el Jacobiano de la transformación de coordenadas $\partial(\lambda, \mu)/\partial(x, y)$. La ecuación (C.6) nos dice como se transforma el volumen [8].

Pero hay una manera de determinar el Jacobiano usando la métrica.

Si una variedad tiene una métrica g y sea $\{\tilde{\omega}^i\}$ una base ortonormal para uno-formas, definimos $\tilde{\omega}$ como el volumen en este sistema

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2 \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^n \quad (\text{C.7})$$

ahora, si $\{x^{k'}\}$ es un sistema de coordenadas arbitrario, en términos matriciales, la transformación de la métrica de un sistema de coordenadas a otro es

$$g_{i'j'} = \Lambda_{i'}^k g_{kl} \Lambda_{j'}^l \quad (\text{C.8})$$

es decir

$$g' = \Lambda^T g \Lambda \quad (\text{C.9})$$

donde Λ^T es la transpuesta de la matriz de transformación cuyas entradas son $\Lambda_{i'}^k$. Si obtenemos el determinante de esta última ecuación tenemos

$$\det(g') = \det(\Lambda^T) \det(g) \det(\Lambda) \quad (\text{C.10})$$

pero para cualquier matriz

$$\det(\Lambda) = \det(\Lambda^T) \quad (\text{C.11})$$

Pero en una base ortonormal, g_{ij} es una matriz que tiene ± 1 en la diagonal y cero donde quiera, entonces el determinante de g_{ij} es ± 1 . Por lo tanto obtenemos

$$\det(g') = \pm [\det(\Lambda)]^2 \quad (\text{C.12})$$

ahora introduciendo la notación

$$g' = \det(g_{j'j'}) \quad (\text{C.13})$$

entonces de la ecuación (C.12) concluimos que

$$\det(\Lambda_{i'}^k) = (\pm g')^{1/2} \quad (\text{C.14})$$

Así de la ecuación (C.6) generalizada a un volumen n -dimensional obtenemos

$$\tilde{\omega} = |g|^{1/2} \tilde{d}x^{1'} \wedge \tilde{d}x^{2'} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{n'}. \quad (\text{C.15})$$

Apéndice D

Conexión (Símbolos de Christoffel)

D.1. Transporte paralelo

En una variedad diferenciable no hay una noción intrínseca de paralelismo entre vectores definida en diferentes puntos.

Consideremos la noción de paralelismo de una ordinaria curva en la superficie de una esfera. En la figura D.1 el vector \bar{V} es tangente al círculo mayor ABC en el polo norte, en el punto A . Supongamos que transportamos \bar{V} a lo largo de ABC al polo sur a C . Si nosotros no rotamos el vector, este permanecerá paralelo a la curva ABC y llegará como \bar{V}' en C y observamos que apuntará en la dirección antiparalela a \bar{V} [8].

Ahora observemos la figura D.2 donde ADC es otro círculo mayor intersectando ABC en un ángulo recto en ambos polos.

\bar{V} comienza perpendicular a ADC , y lo movemos mateniendolo perpendicular a ADC y tangente a la esfera. Esto produce el vector \bar{V}'' en C y para nosotros llega paralelo a \bar{V} . Pero \bar{V}' y \bar{V}'' ambos vectores en C son antiparalelos. Si nosotros simplemente consideramos las propiedades intrínsecas de la esfera ninguno de los vectores puede ser llamado paralelo a \bar{V} . No hay una noción global de paralelismo, lo único que podemos hacer es definir la noción de transporte paralelo, lo cual significa mover el vector a lo largo de una curva sin cambiar su dirección. La conexión afin es una regla para el transporte paralelo. La conexión afin es una regla por medio de la cual alguna definición de paralelismo puede ser definida.

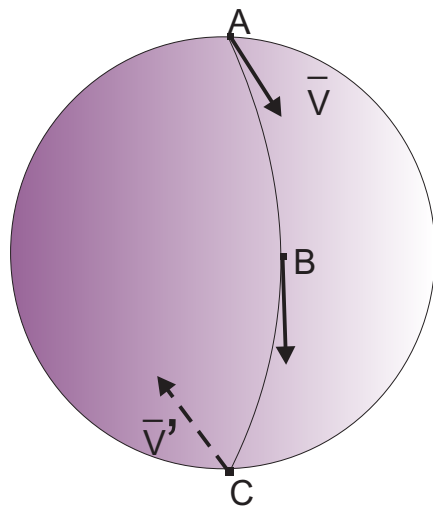


Figura D.1: Transporte paralelo de un vector \vec{V} a lo largo de un círculo mayor de la esfera.

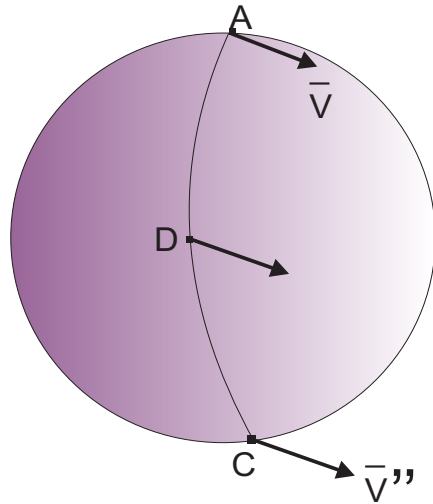


Figura D.2: Un camino alternativo para transporte paralelo, con resultados diferentes

D.2. La derivada covariante

La definición de derivada de un campo vectorial envuelve la diferencia de vectores en dos diferentes puntos en el límite en que ellos llegan a estar juntos.

Supongamos que tenemos una curva C y una conexión, una regla para el transporte paralelo. Entonces la tangente a C es $\bar{U} = d/d\lambda$. En un punto P , tenemos un vector arbitrario \bar{V} de T_P . La conexión nos permite definir un campo vectorial \bar{V} a lo largo de la curva C , el cual es obtenido transportando paralelamente \bar{V} (ver figura D.3).

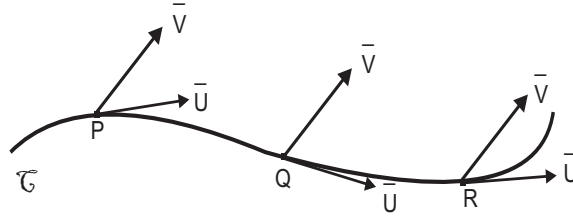


Figura D.3: La conexión afin nos permite definir un campo vectorial en cualquier punto de la curva C

Ahora podemos decir que \bar{V} no cambia a lo largo de C , nosotros podemos definir una derivada con respecto a la cual \bar{V} tiene razón de cambio cero. Esta es llamada la derivada covariante a lo largo de \bar{U} , $\nabla_{\bar{U}}$ y escribimos esto como

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{V} = 0 \Leftrightarrow \bar{V} \text{ es transportado paralelo a lo largo de } C \quad (\text{D.1})$$

Si \bar{W} es un campo vectorial definido para cualquier punto en C , podemos definir su derivada covariante a lo largo de C . Para definir $\nabla_{\bar{U}}\bar{W}$ en P será conveniente expresar todos los vectores en términos de λ . Si P tiene valor de parámetro λ_0 , definimos el campo $\bar{W}^*_{\lambda_0+\epsilon}(\lambda)$ para ser el campo transportado paralelamente ($\nabla_{\bar{U}}\bar{W}^* = 0$) el cual es igual a \bar{W} en $\lambda_0 + \epsilon$. El vector $\bar{W}^*_{\lambda_0+\epsilon}(\lambda)$ es el vector $\bar{W}(\lambda_0 + \epsilon)$ transportado paralelamente de regreso a λ_0 . Entonces la derivada puede ser evaluada en el espacio vectorial T_P [8]:

$$(\nabla_{\bar{U}}\bar{W})_P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{W}^*_{\lambda_0+\epsilon}(\lambda) - \bar{W}(\lambda_0)}{\epsilon} \quad (\text{D.2})$$

D.3. Símbolos de Christoffel y la derivada covariante

Consideremos un vector \bar{V} en el espacio T_P de dimensión n , escrito en términos de la base $\{\bar{e}_i\}$, este vector tiene componentes (V^1, \dots, V^n) , su derivada con respecto a la coordenada x^i es

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x^i} = \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \bar{e}_j + V^j \frac{\partial \bar{e}_j}{\partial x^i} \quad (\text{D.3})$$

Como $\partial \bar{e}_j / \partial x^i$ es un vector, puede ser escrito como una combinación lineal de las bases vectoriales; introducimos el símbolo Γ_{ji}^k para denotar los coeficientes en esta combinación:

$$\frac{\partial \bar{e}_j}{\partial x^i} = \Gamma_{ji}^k \bar{e}_k \quad (\text{D.4})$$

Aquí Γ_{ji}^k es la k -ésima componente de $\partial \bar{e}_j / \partial x^i$. Este símbolo necesita tres índices: j da el vector base que será diferenciado, i da la coordenada con respecto a la cual se está diferenciando y k denota la componente del vector resultante derivado. Γ_{ji}^k son llamados los símbolos de Christoffel.

Usando la definición de los símbolos de Christoffel, la derivada en la ecuación (D.3) es escrita como:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x^i} = \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \bar{e}_j + V^j \Gamma_{ji}^k \bar{e}_k \quad (\text{D.5})$$

En el último término hay dos sumas j y k . Renombrando índices: cambiamos k a j y j a k para obtener

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x^i} = \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \bar{e}_j + V^k \Gamma_{ki}^j \bar{e}_j \quad (\text{D.6})$$

Ahora \bar{e}_j puede ser factorizado fuera de ambos términos

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i} + V^k \Gamma_{ki}^j \right) \bar{e}_j \quad (\text{D.7})$$

Así el campo vectorial $\partial \bar{V} / \partial x^i$ tiene componentes

$$\frac{\partial V^j}{\partial x^i} + V^k \Gamma_{ki}^j \quad (\text{D.8})$$

Por otra parte la notación para las derivadas parciales es $\partial V^j / \partial x^i = V^j_{,i}$. Ahora utilizando esta notación definimos el nuevo símbolo:

$$V^j_{;i} = V^j_{,i} + V^k \Gamma^j_{ki} \quad (\text{D.9})$$

Entonces con esta notación de punto y coma tenemos:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x^i} = V^j_{;i} \bar{e}_j \quad (\text{D.10})$$

que es una forma muy compacta de escribir la ecuación (D.5) y es lo que llamamos derivada covariante en términos de los símbolos de Christoffel.

D.4. Derivadas de uno-formas y tensores de más alto rango

La derivada covariante con respecto a las coordenadas difiere de la derivada parcial solamente debido a que las bases vectoriales cambian, pero un escalar no depende de las bases vectoriales así que su derivada covariante es lo mismo que su derivada parcial, el cual es su gradiente:

$$\nabla_i f = \partial f / \partial x^i; \quad \nabla f = \tilde{d}f \quad (\text{D.11})$$

Si \tilde{p} es una uno-forma y \bar{V} es un vector arbitrario, entonces para i fijo, $\nabla_i \tilde{p}$, es una uno-forma, $\nabla_i \bar{V}$ es un vector y $\langle \tilde{p}, \bar{V} \rangle = f$ es un escalar [9]. En cualquier sistema de coordenadas arbitrario este escalar es

$$f = p_i V^i \quad (\text{D.12})$$

Por lo tanto $\nabla_i f$ es por la regla del producto para derivadas

$$\nabla_i f = f_{,i} = \frac{\partial p_j}{\partial x^i} V^j + p_j \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \quad (\text{D.13})$$

pero podemos usar la ecuación (D.9) para reemplazar $\partial V^j / \partial x^i$ en términos de $V^j_{;i}$ con lo cual obtenemos

$$\nabla_i f = \frac{\partial p_j}{\partial x^i} V^j + p_j V^j_{;i} - p_j V^k \Gamma^j_{ki} \quad (\text{D.14})$$

Rearreglando términos y renombrando índices tenemos

$$\nabla_i f = \left(\frac{\partial p_j}{\partial x^i} - p_k \Gamma^k_{ji} \right) V^j + p_j V^j_{;i} \quad (\text{D.15})$$

Como esta es una ecuación tensorial debe ser cierto que el término en paréntesis debe ser la componente de un tensor. Vemos que este es la derivada covariante de \tilde{p} :

$$(\nabla_i \tilde{p})_j = (\nabla \tilde{p})_{ji} = p_{j;i} = p_{j,i} - p_k \Gamma^k_{ji} \quad (\text{D.16})$$

Entonces de la ecuación (D.15) obtenemos

$$\nabla_i (p_j V^j) = p_{j;i} V^j + p_j V^j_{;i} \quad (\text{D.17})$$

Ahora tenemos las siguientes dos fórmulas [9]

$$V^j_{;i} = V^j_{,i} + V^k \Gamma^j_{ki}, \quad (\text{D.18})$$

$$p_{j;i} = p_{j,i} - p_k \Gamma^k_{ji} \quad (\text{D.19})$$

Γ^j_{ki} está relacionado a las derivadas de las bases vectoriales, por lo tanto es razonable que $-\Gamma^k_{ji}$ este relacionado con las derivadas de las bases de uno-formas. El cambio de signo significa que las bases de uno-formas cambian opuestamente a las bases vectoriales.

De forma análoga se pueden obtener las siguientes relaciones [9]:

$$\nabla_i T_{kl} = T_{kl,i} - T_{jl} \Gamma^j_{ki} - T_{kj} \Gamma^j_{li} \quad (\text{D.20})$$

$$\nabla_i A^{kl} = A^{kl}_{,i} - A^{jl} \Gamma^k_{ji} - A^{kj} \Gamma^l_{ji} \quad (\text{D.21})$$

$$\nabla_i B^k_l = B^k_{l,i} + B^j_l \Gamma^k_{ji} - B^k_j \Gamma^j_{li} \quad (\text{D.22})$$

El significado de la ecuación (D.20) es que $\nabla_i T_{kl}$ es una componente del tensor $\binom{0}{3} \nabla \mathbf{T}$, donde \mathbf{T} es un tensor $\binom{0}{2}$. Similarmente en la ecuación (D.21), \mathbf{A} es un $\binom{2}{0}$ tensor y $\nabla \mathbf{A}$ es un $\binom{2}{1}$ tensor con componentes $\nabla_i A^{kl}$.

D.5. Símbolos de Christoffel y la métrica

Debido a que por medio de la métrica podemos expresar las componentes de vectores en términos de las componentes de uno-formas y viceversa, también debe existir una relación entre sus derivadas covariantes. En particular en coordenadas cartesianas las componentes de la uno-forma y su vector

asociado son iguales y como ∇ es la diferenciación de componentes, las componentes de las derivadas covariantes de la uno-forma y del vector deben ser iguales. Esto significa que si \bar{V} es un vector arbitrario y $\tilde{V} = g(\bar{V}, \cdot)$ es la uno-forma asociada, entonces en coordenadas cartesianas [9]

$$\nabla_i \tilde{V} = g(\nabla_i \bar{V}, \cdot) \quad (\text{D.23})$$

Pero esta última ecuación es una ecuación tensorial, así que debe ser válida en todas las coordenadas, por lo que se concluye

$$V_{j ; i} = g_{jk} V^k_{ ; i} \quad (\text{D.24})$$

la cual es la representación en componentes de la ecuación (D.23).

Si los índices i, j, k, \dots denotan coordenadas Cartesianas y los índices primados i', j', k', \dots denotan coordenadas arbitrarias, podemos comenzar con la siguiente ecuación que es válida en cualquier sistema de coordenadas

$$V_{j'} = g_{j'k'} V^{k'} \quad (\text{D.25})$$

Pero en coordenadas Cartesianas

$$g_{jk} = \delta_{jk}, \quad V_j = V^j$$

Ahora, también en coordenadas Cartesianas, los símbolos de Christoffel desaparecen y

$$V_{j ; i} = V_{j, i} \quad \text{y} \quad V^j_{ ; i} = V^j_{, i}$$

Por lo tanto concluimos que

$$V_{j ; i} = V^j_{ ; i}$$

en coordenadas Cartesianas solamente. Para convertir esto en una ecuación válida en todos los sistemas de coordenadas, notamos que en coordenadas Cartesianas

$$V^j_{ ; i} = g_{jk} V^k_{ ; i}$$

y otra vez en coordenadas Cartesianas tenemos

$$V_{j ; i} = g_{jk} V^k_{ ; i}$$

Pero esta ecuación es una ecuación tensorial y su validez en un sistema de coordenadas implica su validez en todos los sistemas. Esto justifica la ecuación (D.24):

$$V_{j' ; i'} = g_{j'k'} V^{k'}_{ ; i'} \quad (\text{D.26})$$

Este resultado tiene otras implicaciones. Si tomamos la derivada covariante con respecto a i' de la ecuación (D.25), hallamos que

$$V_{j' ; i'} = g_{j'k' ; i'} V^{k'} + g_{j'k'} V^{k' ; i'} \quad (\text{D.27})$$

Comparando esto con la ecuación (D.26) vemos que se debe cumplir

$$g_{j'k' ; i'} = 0 \quad (\text{D.28})$$

en todos los sistemas de coordenadas. En coordenadas Cartesianas

$$g_{jk ; i} = g_{jk , i} = \delta_{jk ; i} = 0$$

Usando la ecuación (D.20) obtenemos (para cualquier sistema de coordenadas)

$$g_{j i ; k} = g_{j i , k} - \Gamma^l_{jk} g_{li} - \Gamma^l_{ik} g_{jl} \quad (\text{D.29})$$

Para espacios curvos Riemannianos, la ecuación (D.28) también será cierta y por tanto sus consecuencias [9].

D.6. Podemos calcular los símbolos de Christoffel por medio de la métrica

El que la ecuación (D.29) sea cero da un muy importante resultado. La ecuación (D.29) puede ser usada para determinar $g_{j i ; k}$ en términos de Γ^k_{ji} . Esto quiere decir que el reverso también es cierto, que Γ^k_{ji} puede ser expresado en términos de $g_{j i , k}$. Para probar esto primero tenemos que demostrar el siguiente resultado: en cualquier sistema de coordenadas $\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$. Para probar esta simetría consideremos un campo escalar arbitrario ϕ . Su primera derivada $\nabla\phi$ es una uno-forma con componentes $\phi_{,i}$, su segunda derivada covariante $\nabla\nabla\phi$ tiene componentes $\phi_{,i ; j}$ y es un tensor $\binom{0}{2}$. En coordenadas Cartesianas estas componentes son

$$\phi_{,i ; j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \phi$$

y estas derivadas son simétricas en j e i , pues las derivadas parciales conmutan. Pero si un tensor es simétrico en una base este es simétrico en todas las bases [9] y por tanto en cualquier base

$$\phi_{,i ; j} = \phi_{,j ; i} \quad (\text{D.30})$$

Usando la ecuación (D.16) obtenemos en cualquier sistema de coordenadas

$$\phi_{,i,j} - \phi_{,k}\Gamma^k_{ij} = \phi_{,j,i} - \phi_{,k}\Gamma^k_{ji} \quad (\text{D.31})$$

Pero otra vez tenemos

$$\phi_{,j,i} = \phi_{,i,j}$$

en cualquier sistema de coordenadas, con lo cual obtenemos para ϕ arbitrario

$$\Gamma^k_{ji}\phi_{,k} = \Gamma^k_{ij}\phi_{,k} \quad (\text{D.32})$$

Esto prueba la siguiente igualdad válida en cualquier sistema de coordenadas

$$\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij} \quad (\text{D.33})$$

utilizando esta relación y la ecuación (D.29), podemos obtener las siguientes relaciones en donde se permutan los índices

$$\begin{aligned} g_{ji,k} &= \Gamma^l_{jk}g_{li} + \Gamma^l_{ik}g_{jl} \\ g_{jk,i} &= \Gamma^l_{ji}g_{lk} + \Gamma^l_{ki}g_{jl} \\ -g_{ik,j} &= -\Gamma^l_{ij}g_{lk} - \Gamma^l_{kj}g_{il} \end{aligned}$$

Si sumamos estas ecuaciones y agrupamos términos, usando la simetría de g , $g_{il} = g_{li}$:

$$g_{ji,k} + g_{jk,i} - g_{ik,j} = (\Gamma^l_{jk} - \Gamma^l_{kj})g_{li} + (\Gamma^l_{ji} - \Gamma^l_{ij})g_{lk} + (\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ki})g_{jl}$$

en esta última ecuación los dos primeros términos del lado derecho de la igualdad desaparecen por (D.33) y obtenemos

$$g_{ji,k} + g_{jk,i} - g_{ik,j} = 2g_{jl}\Gamma^l_{ik}$$

Ahora si dividimos por 2 y multiplicamos por g^{jm} , usando

$$g^{jm}g_{jl} = \delta^m_l$$

obtenemos

$$\frac{1}{2}g^{jm}(g_{ji,k} + g_{jk,i} - g_{ik,j}) = \Gamma^m_{ik} \quad (\text{D.34})$$

Esta es la expresión para obtener los símbolos de Christoffel en términos de las derivadas parciales de las componentes de g .

Apéndice E

Variedades Riemannianas

En este apéndice se estudiará el concepto de variedad Riemanniana, basados en la definición de variedad, la cual se puede estudiar en el apéndice A y su entendimiento estará basado en los conceptos presentados principalmente en el apéndice B.

En nuestro estudio sólo consideraremos variedades diferenciales. Estos son espacios que son continuos y diferenciables. A groso modo esto significa que es posible definir un campo escalar ϕ en cada punto de la variedad y estar seguros de que este puede ser diferenciable donde quiera. El que la variedad sea diferenciable significa inmediatamente que podemos definir uno-formas y vectores. Es decir en un cierto sistema de coordenadas en la variedad, los miembros del conjunto $\{\phi_{,i}\}$ son las componentes de la uno-forma $\tilde{d}\phi$ y cualquier conjunto de la forma $\{a\phi_{,i} + b\psi_{,i}\}$, donde a y b son funciones es también un campo de uno-formas; de aquí en adelante la notación será la usada en el apéndice B. Similarmente cada curva parametrizada (por ejemplo con parámetro λ) tiene un vector tangente \bar{V} definido como la función lineal que toma la uno-forma $\tilde{d}\phi$ en la derivada de ϕ ($d\phi/d\lambda$) a lo largo de la curva:

$$\langle \tilde{d}\phi, \bar{V} \rangle = \bar{V}(\tilde{d}\phi) = \nabla_{\bar{V}}\phi = d\phi/d\lambda$$

Decimos que una variedad es Riemanniana si es diferenciable y un campo tensorial $\binom{0}{2}$ simétrico ha sido definido de manera única, el cual actúa como la métrica en cada punto. Estrictamente hablando sólo si la métrica es positiva definida, esto es, $g(\bar{V}, \bar{V}) > 0$ para todo $\bar{V} \neq 0$ la variedad es llamada Riemanniana.

Es importante entender que la métrica se está sumando a la estructura de la variedad, veremos más adelante que la métrica define la curvatura de la

variedad. Así, por nuestra elección de la métrica g , la variedad obtendrá una cierta curvatura, mientras que una diferente g' podría dar una diferente curvatura.

Nosotros sólo trataremos con variedades Riemannianas en las cuales una métrica g se ha definido en cada punto. Antes se debe enfatizar que es posible definir una curvatura en una variedad sin introducir una métrica, pero este tipo de estructuras no serán tratadas aquí.

E.1. Diferenciación covariante

Aquí enfatizaremos lo que es la definición de derivada covariante, donde una primera noción es dada en el apéndice B de esta tesis. La justificación esta en las nociones físicas: En una región U alrededor de un punto P de la variedad, que podemos mirar localmente como un espacio Euclidiano, las derivadas de las bases vectoriales son cero. Esta definición es inmediata del hecho de que en estas coordenadas en este punto, la derivada covariante de un vector tiene componentes dadas por las derivadas parciales de las componentes, es decir los símbolos de Christoffel desaparecen :

$$V^j{}_{;i} = V^j{}_{,i} \quad \text{en } P \text{ en esta región } U \quad (\text{E.1})$$

En el apéndice D hacemos referencia que para la métrica g en una región como U se cumple

$$g_{j i;l} = g_{j i,l} = 0 \quad \text{en } P$$

La ecuación $g_{j i;l} = 0$ es válida en la región U que miramos como Euclidiana y es una ecuación tensorial que es cierta en cualquier sistema de coordenadas.

$$g_{j i;l} = 0 \quad \text{en cualquier sistema de coordenadas} \quad (\text{E.2})$$

También se vio en el apéndice anterior que al cumplirse la ecuación anterior, entonces también se cumple que para cualquier métrica

$$\Gamma^j{}_{kl} = \frac{1}{2} g^{ji} (g_{ik,l} + g_{il,k} - g_{kl,i}) \quad (\text{E.3})$$

como $\Gamma^k{}_{ij}$ es simétrico en cualquier sistema de coordenadas, la ecuación anterior es correcta en cualquier sistema de coordenadas. Nosotros asumimos en el comienzo que en P , en una región que se mira como Euclidiana, los

símbolos de Christoffel son cero $\Gamma^j_{kl} = 0$. Pero lo importante es que las derivadas de Γ^j_{kl} en P en esta región no son todas cero, pues ellas están en términos de $g_{ji;l k}$. Esto significa que aunque pueden ser halladas coordenadas en las cuales $\Gamma^j_{kl} = 0$ en un punto, estos símbolos generalmente no desaparecen donde quiera. Esto difiere el espacio plano, donde existe un sistema de coordenadas en el cual $\Gamma^j_{kl} = 0$ donde quiera. Así podemos ver que en un punto dado, la diferencia entre una variedad general y un espacio plano se manifiesta en las derivadas de los símbolos de Christoffel [9].

E.2. Tensor de curvatura

Para estudiar este concepto imaginemos que en nuestra variedad tenemos un pequeño lazo cerrado (ver siguiente figura E.1), los cuatro lados del lazo son las líneas coordenadas $x^1 = a, x^1 = a + \delta a, x^2 = b$ y $x^2 = b + \delta b$ [9].

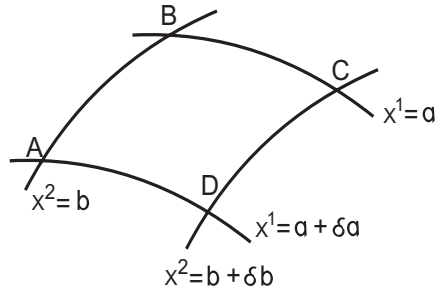


Figura E.1: Pequeño lazo cerrado por el cual transportamos paralelamente a \vec{V} .

Un vector \vec{V} en el punto A es transportado paralelamente a B . De la ley de transporte paralelo $\nabla_{\vec{e}_1} \vec{V} = 0$ tenemos que

$$\frac{\partial V^j}{\partial x^1} = -\Gamma^j_{k1} V^k \quad (\text{E.4})$$

Entonces en B el vector tiene componentes

$$\begin{aligned} V^j(B) &= V^j(A) + \int_A^B \frac{\partial V^j}{\partial x^1} dx^1 \\ &= V^j(A) - \int_{x^2=b} \Gamma^j_{k1} V^k dx^1 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Ahora transportamos el vector de B a C y de C a D con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} V^j(C) &= V^j(B) - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma^j_{k2} V^k dx^2 \\ V^j(D) &= V^j(C) + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma^j_{k1} V^k dx^1 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

La última integral tiene signo positivo debido a que al transportar el vector de C a D vamos en la dirección x^1 negativa. De manera análoga al transportar de D a A obtenemos

$$V^j(A_{final}) = V^j(D) + \int_{x^1=a} \Gamma^j_{k2} V^k dx^2 \quad (\text{E.7})$$

Así el cambio en $V^j(A)$ es el vector δV^j que podemos hallar sumando las ecuaciones (E.5) a (E.7)

$$\begin{aligned} \delta V^j &= V^j(A_{final}) - V^j(A_{inicial}) \\ &= \int_{x^1=a} \Gamma^j_{k2} V^k dx^2 - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma^j_{k2} V^k dx^2 \\ &\quad + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma^j_{k1} V^k dx^1 - \int_{x^2=b} \Gamma^j_{k1} V^k dx^1 \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Ahora obtenemos al más bajo orden, usando el teorema del valor medio de calculo

$$\begin{aligned} \delta V^j &\simeq - \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma^j_{k2} V^k) dx^2 + \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma^j_{k1} V^k) dx^1 \\ &\approx \delta a \delta b \left[- \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma^j_{k2} V^k) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma^j_{k1} V^k) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Usando la ecuación (E.4) para escribir las ecuaciones de V^j en términos de los símbolos de Christoffel, obtenemos

$$\delta V^j = \delta a \delta b [\Gamma^j_{k1,2} - \Gamma^j_{k2,1} + \Gamma^j_{l2} \Gamma^l_{k1} - \Gamma^j_{l1} \Gamma^l_{k2}] V^k \quad (\text{E.10})$$

Los índices 1 y 2 aparecen debido a que el camino fue elegido a lo largo de estas coordenadas. Si usamos para las líneas en el dibujo anterior, coordenadas generales x^i y x^m , obtenemos para la ecuación anterior

$$\delta V^j = \delta a \delta b [\Gamma^j_{ki,m} - \Gamma^j_{km,i} + \Gamma^j_{lm} \Gamma^l_{ki} - \Gamma^j_{li} \Gamma^l_{km}] V^k \quad (\text{E.11})$$

De esta última relación se puede inferir que δV^j depende linealmente de $\delta a \bar{e}_i$ y $\delta b \bar{e}_m$, pero en esta última ecuación vemos que también depende linealmente de V^j y de $\tilde{\omega}^j$, la cual es la base uno-forma que da δV^j de el vector $\delta \bar{V}$. Por lo que tenemos el siguiente resultado: si definimos [9]

$$R^j{}_{ikl} = \Gamma^j{}_{il,k} - \Gamma^j{}_{ik,l} + \Gamma^j{}_{mk} \Gamma^m{}_{il} - \Gamma^j{}_{ml} \Gamma^m{}_{ik} \quad (\text{E.12})$$

entonces $R^j{}_{ikl}$ debe tener componentes de un tensor ($\frac{1}{3}$) al cual cuando evaluamos con argumentos $\tilde{\omega}^j, \bar{V}, \delta a \bar{e}_k, \delta b \bar{e}_l$, da δV^j , que es la componente del cambio en \bar{V} en el transporte paralelo alrededor del lazo dado por $\delta a \bar{e}_k$ y $\delta b \bar{e}_l$. Este tensor es llamado el tensor de curvatura de Riemann \mathbf{R} .

Podemos ver cuales son las componentes de \mathbf{R} , en una región U que localmente se mira como Euclidiana, en un punto P . Tenemos que $\Gamma^j{}_{kl} = 0$ en P , pero de la ecuación (E.3) tenemos

$$\Gamma^j{}_{kl,m} = \frac{1}{2} g^{ji} (g_{ik,lm} + g_{il,km} - g_{kl,im}) \quad (\text{E.13})$$

pues las segundas derivadas de g_{ji} no desaparecen, obtenemos que en P

$$R^j{}_{ikl} = \frac{1}{2} g^{jm} (g_{mi,lk} + g_{ml,ik} - g_{il,mk} - g_{mi,kl} - g_{mk,il} + g_{ik,ml}) \quad (\text{E.14})$$

usando que g_{ji} es simétrico y que las derivadas parciales conmutan $g_{ji,kl} = g_{ji,lk}$, hallamos que

$$R^j{}_{ikl} = \frac{1}{2} g^{jm} (g_{ml,ik} - g_{mk,il} + g_{ik,ml} - g_{il,mk}). \quad (\text{E.15})$$

Si bajamos el índice de coordenadas j , obtenemos (en este sistema de coordenadas en P)

$$R_{jikl} \equiv g_{jf} R^f{}_{ikl} = \frac{1}{2} (g_{jl,ik} - g_{jk,il} + g_{ik,jl} - g_{il,jk}). \quad (\text{E.16})$$

De esta última ecuación se pueden verificar las siguientes identidades:

$$R_{jikl} = -R_{ijkl} = -R_{jilk} = R_{klji} \quad (\text{E.17})$$

$$R_{jikl} + R_{jlik} + R_{jkli} = 0 \quad (\text{E.18})$$

Es decir R_{jikl} es antisimétrico en el primer par y en el segundo par de sus índices y simétrico en el cambio de dos pares. Las ecuaciones (E.17) y (E.18)

son ecuaciones tensoriales que son válidas en cualquier sistema de coordenadas, es decir son válidas en todas las bases. La ecuación (E.15) no es una ecuación tensorial pues envuelve derivadas parciales más no covariantes y es válida sólo en el sistema de coordenadas que fue derivada [9].

Una variedad plana es aquella la cual tiene una definición global de paralelismo: un vector puede ser movido paralelamente alrededor de una curva cerrada y retornar a su punto inicial sin cambiar. Esto significa que

$$R^j{}_{ikl} = 0 \Leftrightarrow \text{la variedad es plana} \quad (\text{E.19})$$

Un importante uso del tensor de curvatura viene cuando examinamos las consecuencias de tomar dos derivadas covariantes de un campo vectorial \bar{V}

$$\nabla_j \nabla_i V^k = \nabla_j (V^k{}_{;i}) \quad (\text{E.20})$$

$$= (V^k{}_{;i})_{;j} + \Gamma^k{}_{mj} V^m{}_{;i} - \Gamma^m{}_{ij} V^k{}_{;m} \quad (\text{E.21})$$

En coordenadas en las cuales podemos ver una región alrededor de P como Euclidiana, todas las Γ 's son cero, pero sus derivadas parciales no. Por lo tanto tenemos en P

$$\nabla_j \nabla_i V^k = V^k{}_{;ij} + \Gamma^k{}_{li,j} V^l \quad (\text{E.22})$$

en estas coordenadas solamente. Considerando la misma fórmula con j e i cambiados:

$$\nabla_i \nabla_j V^k = V^k{}_{;ji} + \Gamma^k{}_{lj,i} V^l \quad (\text{E.23})$$

si restamos estas dos últimas ecuaciones, obtenemos el conmutador de los operadores de derivadas covariantes ∇_j y ∇_i , escribiendo en la misma notación de mecánica cuántica:

$$[\nabla_j, \nabla_i] V^k \equiv \nabla_j \nabla_i V^k - \nabla_i \nabla_j V^k \quad (\text{E.24})$$

$$= (\Gamma^k{}_{li,j} - \Gamma^k{}_{lj,i}) V^l \quad (\text{E.25})$$

donde se ha utilizado $V^k{}_{;ji} = V^k{}_{;ij}$. Ahora en este marco ($\Gamma^k{}_{ji} = 0$), podemos comparar las ecuaciones (E.25) y (E.12) y vemos que en P

$$[\nabla_j, \nabla_i] V^k = R^k{}_{lji} V^l \quad (\text{E.26})$$

Como esta es una ecuación tensorial es válida en cualquier sistema de coordenadas.

Entonces vemos que el tensor de Riemann da el conmutador de las derivadas covariantes. Esto significa que en espacios curvos, uno debe ser cuidadoso con el orden de las derivadas covariantes al ser tomadas, pues ellas no conmutan [9].

E.3. Identidades de Bianchi y escalar de curvatura

La ecuación (E.12) nos da las componentes del tensor de Riemann. Si nosotros diferenciamos esta ecuación con respecto de x^n (solamente la derivada parcial) y evaluamos el resultado en coordenadas en el que podemos ver el sistema localmente como Euclidiano, tenemos [9]

$$R_{jikl;n} = \frac{1}{2}(g_{jl,ikn} - g_{jk,iln} + g_{ik,jln} - g_{il,jkn}) \quad (\text{E.27})$$

De esta ecuación y de la simetría $g_{ji} = g_{ij}$ y el hecho de que las derivadas parciales conmutan, se puede mostrar que

$$R_{jikl;n} + R_{jink;l} + R_{jiln;k} = 0 \quad (\text{E.28})$$

donde en nuestras coordenadas tenemos $\Gamma^k_{ji} = 0$ en este punto, esta ecuación es equivalente a la siguiente

$$R_{jikl;n} + R_{jink;l} + R_{jiln;k} = 0 \quad (\text{E.29})$$

Pero esta es una ecuación tensorial y es válida en cualquier sistema. La ecuación anterior es llamada la identidad de Bianchi.

Antes de proseguir hay que definir [9] el tensor de Ricci R_{ji} :

$$R_{ji} \equiv R^k_{jki} = R_{ij} \quad (\text{E.30})$$

esta es la contracción de R^k_{jli} en el primer y tercer índices.

Similarmente, el escalar de Ricci es definido como [9]

$$R \equiv g^{kl} R_{kl} = g^{kl} g^{ji} R_{jkil} \quad (\text{E.31})$$

Para ilustrar un poco lo visto en las dos últimas secciones, consideremos una variedad de dimensión 3, en la cual esta definido el campo tensorial métrico $g(x^1, x^2, x^3)$, las componentes del tensor g en una base dada en una región U de la variedad son:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{E.32})$$

donde hemos usado $g_{ij} = g_{ji}$. Ahora la inversa de la matriz g es

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{B} \begin{pmatrix} g_{22}g_{33} - g_{23}^2 & g_{13}g_{23} - g_{12}g_{33} & g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22} \\ g_{13}g_{23} - g_{12}g_{33} & g_{11}g_{33} - g_{13}^2 & g_{12}g_{13} - g_{11}g_{23} \\ g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22} & g_{12}g_{13} - g_{11}g_{23} & g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

donde

$$B = -g_{13}^2 g_{22} + 2g_{12}g_{13}g_{23} - g_{11}g_{23}^2 - g_{12}^2 g_{33} + g_{11}g_{22}g_{33}$$

Ahora usando la ecuación (D.34) vamos a calcular los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^m{}_{ik} = \frac{1}{2} g^{jm} (g_{ji,k} + g_{jk,i} + g_{ik,j}) \quad (\text{E.34})$$

donde $g_{ji,k}$ es la derivada de g_{ij} con respecto de la coordenada x^k definida en la región U de la variedad, pues $g_{ij} = g_{ij}(x^i, x^j, x^k)$ con $i, j, k = 1, 2, 3$. Entonces tenemos que

$$\Gamma^1{}_{ik} = \frac{1}{2} g^{j1} (g_{ji,k} + g_{jk,i} + g_{ik,j}) \quad (\text{E.35})$$

y de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} \Gamma^1{}_{11} &= \frac{1}{2} g^{j1} (g_{j1,1} + g_{j1,1} + g_{11,j}) \\ &= \frac{1}{2} g^{11} (2g_{11,1} - g_{11,1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{21} (2g_{21,1} - g_{11,2}) + \frac{1}{2} g^{31} (2g_{31,1} - g_{11,3}) \end{aligned}$$

es decir

$$\Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2} [g^{11} g_{11,1} + g^{21} (2g_{21,1} - g_{11,2}) + g^{31} (2g_{31,1} - g_{11,3})]. \quad (\text{E.36})$$

Calculando de manera análoga por medio de la métrica los demás símbolos

de Christoffel, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}[g^{11}g_{11,2} + g^{21}g_{22,1} + g^{31}(g_{31,2} + g_{32,1} - g_{12,3})] \\
\Gamma^1_{13} &= \frac{1}{2}[g^{11}g_{11,3} + g^{21}(g_{21,3} + g_{23,1} - g_{13,2}) + g^{31}g_{33,1}] \\
\Gamma^1_{21} &= \Gamma^1_{12} \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}[g^{11}(2g_{12,2} - g_{22,1}) + g^{21}g_{22,2} + g^{31}(2g_{32,2} - g_{22,3})] \\
\Gamma^1_{23} &= \frac{1}{2}[g^{11}(g_{12,3} + g_{13,2} - g_{23,1}) + g^{21}g_{22,3} + g^{31}g_{33,2}] \\
\Gamma^1_{31} &= \Gamma^1_{13} \\
\Gamma^1_{32} &= \Gamma^1_{23} \\
\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}[g^{11}(2g_{13,3} - g_{33,1}) + g^{21}(2g_{23,3} - g_{33,2}) + g^{31}g_{33,3}] \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}[g^{12}g_{11,1} + g^{22}(2g_{21,1} - g_{11,2}) + g^{32}(2g_{32,1} - g_{11,3})] \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}[g^{12}g_{11,2} + g^{22}g_{22,1} + g^{32}(g_{31,2} + g_{32,1} - g_{12,3})] \\
\Gamma^2_{13} &= \frac{1}{2}[g^{12}g_{11,3} + g^{22}(g_{21,3} + g_{23,1} - g_{13,2}) + g^{32}g_{33,1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{21} &= \Gamma^2_{12} \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}[g^{12}(2g_{12,2} - g_{22,1}) + g^{22}g_{22,2} + g^{32}(2g_{32,2} - g_{22,3})] \\
\Gamma^2_{23} &= \frac{1}{2}[g^{12}(g_{12,3} + g_{13,3} - g_{23,1}) + g^{22}g_{22,3} + g^{32}g_{33,2}] \\
\Gamma^2_{31} &= \Gamma^2_{13} \\
\Gamma^2_{32} &= \Gamma^2_{23} \\
\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}[g^{12}(2g_{13,3} - g_{33,1}) + g^{22}(2g_{23,3} - g_{33,2}) + g^{32}g_{33,3}] \\
\Gamma^3_{11} &= \frac{1}{2}[g^{13}g_{11,1} + g^{23}(2g_{21,1} - g_{11,2}) + g^{33}(2g_{31,1} - g_{11,3})] \\
\Gamma^3_{12} &= \frac{1}{2}[g^{13}g_{11,2} + g^{23}g_{22,1} + g^{33}(g_{31,2} + g_{32,1} - g_{12,3})] \\
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}[g^{13}g_{11,3} + g^{23}(g_{21,3} + g_{23,1} - g_{13,2}) + g^{33}g_{33,1}] \\
\Gamma^3_{21} &= \Gamma^3_{12} \\
\Gamma^3_{22} &= \frac{1}{2}[g^{13}(2g_{12,2} - g_{22,1}) + g^{23}g_{22,2} + g^{33}(2g_{32,2} - g_{22,3})] \\
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2}[g^{13}(g_{12,3} + g_{13,2} - g_{23,1}) + g^{23}g_{22,3} + g^{33}g_{33,2}] \\
\Gamma^3_{31} &= \Gamma^3_{13} \\
\Gamma^3_{32} &= \Gamma^3_{23} \\
\Gamma^3_{33} &= \frac{1}{2}[g^{13}(2g_{13,3} - g_{33,1}) + g^{23}(2g_{23,3} - g_{33,2}) + g^{33}g_{33,3}]
\end{aligned} \tag{E.37}$$

Ahora, como parte también del ejemplo, vamos a calcular las componentes del tensor curvatura, esto se calcula de una manera muy general con la ecuación (E.12), pero como ya habíamos mencionado es muy frecuente calcular las componentes de este tensor para una región U tal que se cumpla la ecuación (E.15) y por tanto que se cumpla la ecuación (E.16)

$$R_{j\ i\ kl} = \frac{1}{2}(g_{jl,ik} - g_{jk,il} + g_{ik,jl} - g_{il,jk}).$$

Entonces tenemos

$$R_{11\ kl} = \frac{1}{2}(g_{1l,1k} - g_{1k,1l} + g_{1k,1l} - g_{1l,1k}) = 0$$

esto implica que

$$\begin{aligned} R_{1111} &= R_{1112} = R_{1113} = 0 \\ R_{1121} &= R_{1122} = R_{1123} = 0 \\ R_{1131} &= R_{1132} = R_{1133} = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$R_{12kl} = \frac{1}{2}(g_{1l,2k} - g_{1k,2l} + g_{2k,1l} - g_{2l,1k})$$

con lo que calculamos las siguientes componentes del tensor

$$\begin{aligned} R_{1211} &= 0 \\ R_{1212} &= -\frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{22,11} - 2g_{12,21}) \\ R_{1213} &= \frac{1}{2}(g_{13,21} - g_{11,23} + g_{21,13} - g_{23,11}) \\ R_{1221} &= \frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{22,11} - 2g_{12,21}) = -R_{1212} \\ R_{1222} &= 0 \\ R_{1223} &= \frac{1}{2}(g_{13,22} - g_{12,23} + g_{22,13} - g_{23,12}) \\ R_{1231} &= \frac{1}{2}(g_{11,23} - g_{13,21} + g_{23,11} - g_{21,13}) = -R_{1213} \\ R_{1232} &= \frac{1}{2}(g_{12,23} - g_{13,22} + g_{23,12} - g_{22,13}) = -R_{1223} \\ R_{1233} &= 0 \end{aligned}$$

como observamos R_{jikl} cumple las identidades dadas por (E.17). Sigamos calculando las siguientes componentes.

$$R_{13kl} = \frac{1}{2}(g_{1l,3k} - g_{1k,3l} + g_{3k,1l} - g_{3l,1k})$$

calculando las componentes para distintas k y l tenemos

$$\begin{aligned}
R_{1311} &= R_{1113} \\
R_{1312} &= R_{1213} \\
R_{1313} &= -\frac{1}{2}(2g_{13,31} + g_{11,33} + g_{33,11}) \\
R_{1321} &= \frac{1}{2}(g_{11,32} - g_{12,31} + g_{32,11} - g_{31,12}) = -R_{1213} \\
R_{1322} &= 0 \\
R_{1331} &= \frac{1}{2}(g_{11,33} + g_{33,11} - 2g_{13,31}) = -R_{1313} \\
R_{1333} &= 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte $R_{21kl} = -R_{12kl}$, así que

$$\begin{aligned}
R_{2111} &= -R_{1211} \\
R_{2112} &= -R_{1212} \\
R_{2113} &= -R_{1213} \\
R_{2121} &= -R_{1221} \\
R_{2122} &= -R_{1222} \\
R_{2123} &= -R_{1223} \\
R_{2131} &= -R_{1231} \\
R_{2132} &= -R_{1232} \\
R_{2133} &= -R_{1233}
\end{aligned}$$

también tenemos, $R_{22kl} = \frac{1}{2}(g_{2l,2k} - g_{2k,2l} + g_{2k,2l} - g_{2l,2k}) = 0$ por lo que

$$\begin{aligned}
R_{2211} &= R_{2212} = R_{2213} = 0 \\
R_{2221} &= R_{2222} = R_{2223} = 0 \\
R_{2231} &= R_{2232} = R_{2233} = 0
\end{aligned}$$

Escribiendo ahora $R_{23kl} = \frac{1}{2}(g_{2l,3k} - g_{2k,3l} + g_{3k,2l} - g_{3l,2k})$, tenemos

$$\begin{aligned}
R_{2311} &= 0 \\
R_{2312} &= R_{1223} \\
R_{2313} &= R_{1323} \\
R_{2321} &= \frac{1}{2}(g_{21,32} - g_{22,31} + g_{32,21} - g_{31,22}) = R_{2123} \\
R_{2322} &= R_{2223} \\
R_{2323} &= -\frac{1}{2}(g_{22,33} + g_{33,22} + g_{23,32}) \\
R_{2331} &= -R_{1323} \\
R_{2332} &= -R_{2323} \\
R_{2333} &= 0
\end{aligned}$$

Por otra parte $R_{31,kl} = -R_{13kl}$, es decir

$$\begin{aligned}
R_{3111} &= -R_{1311} \\
R_{3112} &= -R_{1312} \\
R_{3113} &= -R_{1313} \\
R_{3121} &= -R_{1321} \\
R_{3122} &= -R_{1322} \\
R_{3123} &= -R_{1323} \\
R_{3131} &= -R_{1331} \\
R_{3132} &= -R_{1332} \\
R_{3133} &= -R_{1333}.
\end{aligned}$$

De forma análoga $R_{32kl} = -R_{23kl}$, por lo que

$$\begin{aligned}
R_{3211} &= -R_{2311} \\
R_{3212} &= -R_{2312} \\
R_{3213} &= -R_{2313} \\
R_{3221} &= -R_{2321} \\
R_{3222} &= -R_{2322} \\
R_{3223} &= -R_{2323} \\
R_{3231} &= -R_{2331} \\
R_{3232} &= -R_{2332} \\
R_{3233} &= -R_{2333}.
\end{aligned}$$

Para terminar de calcular las componentes, tenemos que $R_{33kl} = \frac{1}{2}(g_{3l,3k} - g_{3k,3l} + g_{3k,3l} - g_{3l,3k}) = 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} R_{3311} &= R_{3312} = R_{3313} = 0 \\ R_{3321} &= R_{3322} = R_{3323} = 0 \\ R_{3331} &= R_{3332} = R_{3333} = 0. \end{aligned}$$

Ahora, vamos por último a calcular el escalar de curvatura R . Sabemos que el escalar de curvatura o bien el escalar de Ricci esta dado por $R = g^{kl} R_{kl}$ y también tenemos que $R_{kl} = g^{ji} R_{jkil}$, es decir

$$R_{11} = g^{ji} R_{j1i1} = g^{1i} R_{11i1} + g^{2i} R_{21i1} + g^{3i} R_{31i1}$$

es decir:

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{21} R_{2111} + g^{22} R_{2121} + g^{23} R_{2131} \\ &+ g^{31} R_{3111} + g^{32} R_{3121} + g^{33} R_{3131} \end{aligned}$$

de forma análoga calculamos lo siguiente

$$R_{12} = g^{ji} R_{j1i2} = g^{1i} R_{11i2} + g^{2i} R_{21i2} + g^{3i} R_{31i2}$$

y entonces

$$R_{12} = g^{21} R_{2112} + g^{23} R_{2132} + g^{31} R_{3112} + g^{33} R_{3132}$$

continuando así, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} R_{13} &= g^{21} R_{2113} + g^{22} R_{2123} + g^{31} R_{3113} + g^{32} R_{3123} \\ R_{21} &= R_{12} \\ R_{22} &= g^{11} R_{1212} + g^{13} R_{1232} + g^{31} R_{3212} + g^{33} R_{3232} \\ R_{23} &= g^{11} R_{1213} + g^{12} R_{1223} + g^{31} R_{3213} + g^{32} R_{3223} \\ R_{31} &= R_{13} \\ R_{32} &= R_{23} \\ R_{33} &= g^{11} R_{1313} + g^{12} R_{1323} + g^{21} R_{2313} + g^{22} R_{2323} \end{aligned}$$

Pero sabemos que

$$\begin{aligned} R = g^{kl} R_{kl} &= g^{1l} R_{1l} + g^{2l} R_{2l} + g^{3l} R_{3l} \\ &= g^{11} R_{11} + 2g^{12} R_{12} + 2g^{13} R_{13} \\ &+ g^{22} R_{22} + 2g^{23} R_{23} + g^{33} R_{33} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado $g^{ij}R_{ij} = g^{ji}R_{ji}$, de aquí obtenemos

$$\begin{aligned}
R &= g^{11}(g^{22}R_{2121} + 2g^{23}R_{2131} + g^{33}R_{3131}) \\
&+ 2g^{12}(g^{21}R_{2112} + g^{23}R_{2132} + g^{31}R_{3112} + g^{33}R_{3132}) \\
&+ 2g^{13}(g^{21}R_{2113} + g^{22}R_{2123} + g^{31}R_{3113} + g^{32}R_{3123}) \\
&+ g^{22}(g^{11}R_{1212} + 2g^{13}R_{1232} + g^{33}R_{3232}) \\
&+ 2g^{23}(g^{11}R_{1213} + g^{12}R_{1223} + g^{31}R_{3213} + g^{32}R_{3223}) \\
&+ g^{33}(g^{11}R_{1313} + 2g^{12}R_{1323} + g^{22}R_{2323})
\end{aligned}$$

pero simplificando aún más

$$\begin{aligned}
R &= (g^{11}g^{22} - 2(g^{12})^2 + g^{22}g^{21})R_{2121} \\
&+ (2g^{11}g^{23} - 2g^{12}g^{31} - 2g^{13}g^{21} + 2g^{23}g^{11})R_{2131} \\
&+ (g^{11}g^{33} - 2(g^{13})^2 + g^{33}g^{11})R_{3131} \\
&+ (2g^{12}g^{23} - 2g^{13}g^{22} - 2g^{22}g^{13} + 2g^{23}g^{12})R_{2132} \\
&+ (2g^{12}g^{33} - 2g^{13}g^{32} - 2g^{32}g^{31} + 2g^{33}g^{12})R_{3132} \\
&+ (g^{22}g^{33} + 2(g^{32})^2 + g^{33}g^{22})R_{3232}
\end{aligned}$$

donde g^{ij} esta en términos de las componentes g_{kl} , al igual que $R_{mni,j}$, las cuales ya encontramos anteriormente.

Ahora, consideremos una variedad de dimensión 2, en la cual esta definido el campo tensorial métrico $g(x^1, x^2)$, las componentes del tensor g en una base dada en un punto P de la variedad son:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \tag{E.38}$$

donde hemos usado $g_{ij} = g_{ji}$. Ahora la inversa de la matriz g es

$$\begin{aligned}
g^{-1} &= \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{E.39}$$

Ahora usando la ecuación (D.34) vamos a calcular los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^m{}_{ik} = \frac{1}{2}g^{jm}(g_{ji,k} + g_{jk,i} - g_{ik,j}) \tag{E.40}$$

donde $g_{ji,k}$ es la derivada de g_{ij} con respecto de la coordenada x^k definida en el punto P de la variedad, pues $g_{ij} = g_{ij}(x^i, x^j)$ con $i, j, k = 1, 2$. Entonces tenemos que

$$\Gamma^1{}_{ik} = \frac{1}{2}g^{j1}(g_{ji,k} + g_{jk,i} - g_{ik,j}) \quad (\text{E.41})$$

y de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} \Gamma^1{}_{11} &= \frac{1}{2}g^{j1}(g_{j1,1} + g_{j1,1} - g_{11,j}) \\ &= \frac{1}{2}g^{11}(2g_{11,1} - g_{11,1}) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{21}(2g_{21,1} - g_{11,2}) \end{aligned}$$

es decir

$$\Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2}[g^{11}g_{11,1} + g^{21}(2g_{21,1} - g_{11,2})]. \quad (\text{E.42})$$

Calculando de manera análoga por medio de la métrica los demás símbolos de Christoffel, obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma^1{}_{12} &= \frac{1}{2}[g^{11}g_{11,2} + g^{21}g_{22,1}] \\ \Gamma^1{}_{21} &= \Gamma^1{}_{12} \\ \Gamma^1{}_{22} &= \frac{1}{2}[g^{11}(2g_{12,2} - g_{22,1}) + g^{21}g_{22,2}] \\ \Gamma^2{}_{11} &= \frac{1}{2}[g^{12}g_{11,1} + g^{22}(2g_{21,1} - g_{11,2})] \\ \Gamma^2{}_{12} &= \frac{1}{2}[g^{12}g_{11,2} + g^{22}g_{22,1}] \\ \Gamma^2{}_{21} &= \Gamma^2{}_{12} \\ \Gamma^2{}_{22} &= \frac{1}{2}[g^{12}(2g_{12,2} - g_{22,1}) + g^{22}g_{22,2}] \end{aligned}$$

Ahora, como parte también del ejemplo, vamos a calcular las componentes del tensor curvatura, esto se calcula de una manera muy general con la ecuación (E.12), pero debido a las relaciones de simetría ecuación (E.17) observamos que la única componente que es distinta de cero del tensor curvatura es

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$$

así que vamos a calcularla, usando que $R_{jkl} = g_{jm}R_{ikl}^m$ y de (E.12), obtenemos

$$R_{jkl} = g_{jm}\Gamma_{il,k}^m - g_{jm}\Gamma_{ik,l}^m + g_{jm}\Gamma_{nk}^m\Gamma_{il}^n - g_{jm}\Gamma_{nl}^m\Gamma_{ik}^n \quad (\text{E.43})$$

y por tanto tenemos

$$\begin{aligned} R_{1212} &= g_{11}\Gamma_{22,1}^1 + g_{12}\Gamma_{22,1}^2 - g_{11}\Gamma_{21,2}^1 - g_{12}\Gamma_{21,2}^2 \\ &+ g_{11}\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1 + g_{11}\Gamma_{21}^1\Gamma_{22}^2 + g_{12}\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 \\ &- g_{11}\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 - g_{11}\Gamma_{22}^1\Gamma_{12}^2 - g_{12}\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

Con lo que se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{2}g_{11}[g^{11},_1(2g_{12,2} - g_{22,1}) + g^{11}(2g_{12,21} - g_{22,11}) + g^{12},_1g_{22,2} + g^{12}g_{22,21}] \\ &+ \frac{1}{2}g_{12}[g^{12},_1(2g_{12,2} - g_{22,1}) + g^{12}(2g_{12,21} - g_{22,11}) + g^{22},_1g_{22,2} + g^{22}g_{22,21}] \\ &- \frac{1}{2}g_{11}[g^{11},_2g_{11,2} + g^{11}g_{11,22} + g^{12},_2g_{22,1} + g^{12}g_{22,12}] \\ &- \frac{1}{2}g_{12}[g^{12},_2g_{11,2} + g^{12}g_{11,22} + g^{22},_2g_{22,1} + g^{22}g_{22,12}] \\ &+ \frac{1}{4}\left(g_{11}(g^{11}g_{11,1} + 2g^{12}g_{12,1} - g^{12}g_{11,2})(2g^{11}g_{12,2} - g^{11}g_{22,1} + g^{12}g_{22,2})\right. \\ &+ g_{11}(g^{11}g_{11,2} + g^{12}g_{22,1})(2g^{12}g_{12,2} - g^{12}g_{22,1} + g^{22}g_{22,2}) \\ &\left.+ g_{12}(g^{12}g_{11,1} + 2g^{22}g_{12,1} - g^{22}g_{11,2})(2g^{11}g_{12,2} - g^{11}g_{22,1} + g^{12}g_{22,2})\right) \\ &- \frac{1}{4}\left(g_{11}(g^{11}g_{11,2} + g^{12}g_{22,1})^2 + g_{11}(2g^{11}g_{12,2} - g^{11}g_{22,1} + g^{12}g_{22,2})(g^{12}g_{11,2} + g^{22}g_{22,1})\right. \\ &\left.+ g_{12}(g^{12}g_{11,2} + g^{22}g_{22,1})(g^{11}g_{11,2} + g^{12}g_{22,1})\right) \end{aligned}$$

Ahora para calcular el escalar de curvatura, primero consideramos lo siguiente

$R_{kl} = g^{ji}R_{jkil}$ con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{22}R_{2121} \\ R_{12} &= g^{12}R_{2112} \\ R_{21} &= g^{12}R_{1221} \\ R_{22} &= g^{11}R_{1212} \end{aligned}$$

por otra parte sabemos que el escalar de curvatura esta dado por $R = g^{kl}R_{kl}$, es decir

$$R = g^{11}R_{11} + g^{12}R_{12} + g^{21}R_{21} + g^{22}R_{22}$$

sustituyendo cada uno de estos términos, obtenemos para el escalar de curvatura

$$R = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \left[\left(\frac{g_{11,2} - g_{12,1}}{\sqrt{\det g}} \right)_{,2} + \left(\frac{g_{22,1} - g_{12,2}}{\sqrt{\det g}} \right)_{,1} \right] - \frac{\det(H)}{2(\det g)^2} \quad (\text{E.45})$$

con

$$H = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ g_{11,1} & g_{12,1} & g_{22,1} \\ g_{11,2} & g_{12,2} & g_{22,2} \end{pmatrix}$$

E.4. Pull-back

Consideremos dos variedades diferenciales M y N y sea $\phi : M \rightarrow N$ un mapeo continuo de M a N y entonces un mapeo en que las funciones sean continuas para todas las cartas coordenadas. Así si x^α son coordenadas locales para M y y^β son coordenadas locales para N , entonces ϕ toma un punto p y lo manda a un punto $q = \phi(p)$, si p esta coordinado por x^α con $\alpha = 1, 2, \dots, m$ y q tiene coordenadas y^β con $\beta = 1, 2, \dots, n$, entonces $y^\beta = y^\beta(x^\alpha)$.

Ahora vamos a mostrar algunas propiedades de ϕ [10]. Definimos el siguiente mapeo inducido por ϕ ,

$$\phi_* : T_P(M) \rightarrow T_q(N) \quad (\text{E.46})$$

donde T es el espacio tangente. Este mapeo es llamado el *push-forward* y actúa sobre curvas, vectores y tensores contravariantes.

Ejemplo: consideremos una curva en la variedad M , $c : R \rightarrow M$ parametrizada por λ . El *push-forward* de la curva c_* lo obtenemos mediante la composición

$$c_* : \phi \circ c \quad (\text{E.47})$$

o bien

$$y^\beta(\lambda) = y^\beta(x^\alpha(\lambda)) \quad (\text{E.48})$$

ahora por ejemplo, si queremos calcular el *push-forward* del vector tangente $v \in T$ lo hacemos por medio de la regla de la cadena

$$\frac{dy^\beta}{d\lambda} = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad (\text{E.49})$$

o en términos de la notación $\phi_*v = v_*$, obtenemos

$$v_*^\beta(q) = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} v^\alpha(p) \quad (\text{E.50})$$

también podemos asociar un segundo mapeo $\phi^* : T_q^*(N) \rightarrow T_p^*(M)$, que es llamado el *pull-back* de ϕ . El *pull-back* actúa sobre funciones, covectores, p -formas y tensores covariantes. Como ejemplo, consideremos la función en la variedad N , es decir un mapeo $f : N \rightarrow R$. El *pull-back* de f lo denotamos por f^* en M es obtenido por la composición:

$$f^* = \phi^* f = f \circ \phi \quad (\text{E.51})$$

o bien

$$f^*(x^\alpha) = f(y^\beta(x^\alpha)) \quad (\text{E.52})$$

por otra parte, podemos calcular el *pull-back* del co-vector gradiente $\omega = df$ por medio de la regla de la cadena

$$\frac{\partial f^*}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^\beta} \quad (\text{E.53})$$

considerando la notación $\phi^*\omega = \omega^*$ tenemos

$$\omega_\alpha^*(p) = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \omega_\beta(q). \quad (\text{E.54})$$

Bibliografía

- [1] H. Quevedo, *Geometrothermodynamics of black holes*, Gen. Rel. Grav. **40**, 971 (2008).
- [2] J.L. Álvarez, H. Quevedo y A. Sánchez, *Unified geometric description of black hole thermodynamics*, Phys. Rev. D **77**, 084004 (2008)
- [3] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Física Estadística* Volumen 5 del curso de Física Teórica, Editorial Reverté 1988.
- [4] J. Shen, R. Cai, B. Wang, and R. Su, *Thermodynamic geometry and critical behavior of black holes*, (2005) arXiv: gr-qc/0512035.
- [5] J. Aman, I. Bengtsson, and N. Pidokrajt, *Geometry of black hole thermodynamics*, Gen. Rel. Grav. **35**, 1733 (2003)
- [6] H. Quevedo y R. D. Zárata, *Differential geometry and thermodynamics*, Rev. Mex. Fís. **49S2**, 125 (2003).
- [7] H. Quevedo, *Geometrothermodynamics*, J. Math. Phys. **48**, 013506 (2007)
- [8] Bernard F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics* Cambridge University Press 1980, Primera Edición.
- [9] Bernard F. Schutz, *A first course in general relativity* Cambridge University Press 1985, Primera Edición.
- [10] D. Lovelock y H. Rund, *Tensors, Differential Forms, and variational principles* Publicaciones Dover, Primera Edición (1989).
- [11] H. B. Callen, *Termodinámica* Editorial AC, Primera Edición (1981).

- [12] G. Carmona, *Termodinámica clásica*, Publicaciones Prensas de Ciencias, Primera Edición, (2007).
- [13] S. Carlip, *Quantum gravity in 2+1 dimensions*, Cambridge University Press (1998).
- [14] S. Carlip, *Quantum Gravity: a Progress Report*, University of California Davis, 0108040 (2001).
- [15] H. Quevedo y A. Sánchez, *Geometric description of BTZ black hole thermodynamics*,(2008), en preparación.
- [16] P. C. W. Davies, *Thermodynamics of black holes*, Rep. Prog. Phys. **41**, 1313 (1978).
- [17] L. Smarr, *Mass formula for kerr black holes*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987.
- [18] J. Gibbs, *The collected works*, Vol.1, Thermodynamics (Yale University Press, 1948). Citado en [7].
- [19] C. Charateodory, *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik*, Gesammelte Mathematische Werke, Band 2 (Munich, 1995). Citado en [7].
- [20] F. Weinhold, *Metric Geometry of equilibrium thermodynamics I, II, III, IV, V, VI*, J. Chem. Phys. **63**, 2479, 2484, 2488, 2496 (1975); **65**, 558 (1976).
- [21] G. Ruppeiner, *Thermodynamics: A Riemannian geometric model*, Phys. Rev. A **20**, 1608 (1979).
- [22] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Black Hole in Three-Dimensional Spacetime*, Phys. Rev. Letters **13**, (1992).
- [23] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Geometry of the Black Hole*, Phys. Rev. D **4**, (1993).