



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

**LA FUNCIÓN DE LUMINOSIDAD DE OBJETOS
A ALTO CORRIMIENTO AL ROJO A TRAVÉS DE
LENTES GRAVITATORIAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

PRESENTA

TOMÁS VERDUGO GONZÁLEZ



instituto de astronomía

unam

DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSÉ ANTONIO DE DIEGO ONSURBE

MÉXICO, D.F.

2008

A MIS PADRES,
A MIS HERMANOS.

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. José Antonio de Diego Onsurbe, director de esta tesis, por invitarme a trabajar en un campo nuevo para ambos y por tener otra vez la confianza de que lo lograríamos. Cuando empezamos este largo y desconocido viaje a través de las lentes gravitatorias imaginamos que sería fácil. Aunque no lo fue, al final salimos victoriosos y amplificados.

Al Dr. Marceau Limousin por compartir su conocimiento en lentes gravitatorias, por enseñarme a utilizar LENSTOOL, por invitarme a Copenhague a trabajar con él, por ser un gran colaborador, un gran amigo y sobre todo porque sin él no hubiera sido posible la realización de esta tesis. A los sinodales de mi tesis, los doctores Michael G. Richer, Vladimir Avila-Reese y William H. Lee Alardín ya que sus comentarios y sugerencias ayudaron a mejorar de manera considerable este trabajo.

A Lucía por su gran amor. Por soportar mis locuras y mis rarezas. Por estar a mi lado en los momentos de mayor estrés durante el doctorado (lo cual incluye ataques de pánico, alergias, y todo tipo de extrañas enfermedades) y porque con ella también viví los ratos más agradables y maravillosos. Por hacerme crecer como persona y por aceptar el reto de estar juntos. Y por sus correcciones a la tesis.

A mis amigos: Los Alenkos (Alenka y Andrés), los Liliarys (Liliana y Ary), los pavos (Vero y Juan), Mario y Lirio. Por las comidas, las cenas, los viajes, bodas, fiestas, reuniones, pavizas y pavizos, etc., por las pláticas, las discusiones y las sobremesas interminables. A la banda del *Té*: Giovanny, Primoz, Russland, Bernardo y otros más que hacían acto de presencia todos los miercoles para degustar unas ricas viandas y escanciar nuestras pobres tazas con un buen té.

A todos los que conocí durante el tiempo que estudié el posgrado dentro del Instituto de Astronomía. Puesto que fueron muchos los compañeros con los que traté durante todos estos años y no queriendo herir susceptibilidades al omitir algún nombre, me abstengo de escribirlos. Sin embargo, va un agradecimiento a todos ellos pues indudablemente de todos aprendí un poco y algo me llevo.

A los maestros e investigadores del IA. Porque gracias a ellos adquirí los conocimientos en astrofísica y astronomía observacional, necesarios para realizar este trabajo. Y porque sus enseñanzas serán parte fundamental de mi trabajo futuro como investigador.

Al personal de computo (Liliana, Alf, Carmelo y Francisco), de la biblioteca (Verónica y Gloria) y de la oficina de posgrado (Bertha y Silvia). A Don Juan, Doña Marce, Doña Lupita, Doña Maru, así como a todo el personal del Instituto de Astronomía.

A mi tia Cuca por todos los años que me dio ascilo en su casa. A Toña por su exquisita sazón.

A CONACyT por las becas 176538 y 54799. A los proyectos DGAPA-UNAM IN113002 y 50296 de CONACyT.

Resumen

Se presentan los primeros modelos detallados de lentes gravitatorias fuertes para los cúmulos de galaxias MS 2053 y MS 0440, realizados con la nueva versión del código LENSTOOL, en cuyo desarrollo hemos participado. Esta versión utiliza un método de optimización Bayesiano con Cadenas de Markov y Montecarlo que evita mínimos locales y permite estudiar los espacios de parámetros y sus errores.

Utilizamos imágenes del HST para construir varios modelos para la lente gravitatoria del cúmulo de galaxias MS 2053, consistente en un doble arco. Estos modelos, que corresponden a distintas funciones de distribución de masa, muestran que esta distribución es bimodal en el espacio XY , confirmando los resultados espectrofotométricos obtenidos por otros autores. Los modelos coinciden en predecir la existencia de una tercera imagen para la galaxia lenteada que, a falta de confirmación espectroscópica, podría tratarse de un objeto que se observa cerca de la posición predicha por los modelos. Este objeto parece una imagen distorsionada de una galaxia, y comparte los colores medidos para los arcos. Los modelos muestran cierta discrepancia para la masa del cúmulo en el interior de los arcos, en comparación con los resultados obtenidos a partir de observaciones en rayos-X, y que atribuimos a que las estimaciones de masa a partir de la emisión en rayos-X se sustentan en suposiciones de equilibrio hidrostático que no se cumplen en MS 2053. Por otra parte, los valores de la concentración para el cúmulo son inferiores a las predicciones en el modelo de Λ CDM, lo cual se explica como consecuencia de la existencia de asimetrías en la distribución de masa y de efectos de proyección.

En el caso del cúmulo MS 0440, construimos dos modelos de lente fuerte para cinco sistemas de imágenes múltiples a partir de imágenes del HST y datos espectroscópicos del KECK. Los dos modelos corresponden a una distribución de masas Navarro-Frenk-White (NFW) y a una distribución elíptica pseudo-isoterma (PIEMD). Para los débiles arcos radiales, de los que no disponemos de corrimientos al rojo espectroscópicos, los estimamos a partir de las propias optimizaciones de los modelos. Al incluir estos arcos radiales en el análisis, se imponen límites más severos a la pendiente del perfil de masas del cúmulo. Como resultado, la evidencia Bayesiana favorece un perfil con $\rho \propto r^{-1}$, como el NFW, sobre uno con $\rho \propto r^{-2}$, como el PIEMD. Además, este resultado es consistente con nuestro cálculo de la masa interior del cúmulo, que coincide con los valores calculados a través de mediciones en rayos-X corregidas para tomar en cuenta la falta de isothermalidad.

Por último, construimos una estadística para fuentes lenteadas a partir de los mejores modelos de los cúmulos MS 0440 y MS 2053. Para ello simulamos seiscientas mil fuentes entre $1 < z < 7$ distribuidas según las funciones de luminosidad para LAES y Ly $_{\alpha}$ -blobs. Encontramos que la función de luminosidad se transmite a la probabilidad de encontrar emisores lenteados con una amplificación mayor a 10, preservándose incluso el corrimiento al rojo para el máximo de las dos funciones. De esta manera resulta posible en principio estudiar ambas poblaciones de objetos y mostrar si existe una asociación entre ambos fenómenos.

Abstract

We present the first detailed models in the strong lensing regime of the clusters of galaxies MS 2053 and MS 0440. These models have been made thanks to the new version of the code that we have developed, which uses a Bayesian Markov chain Monte Carlo optimization that avoids the local minimums in χ^2 . The new code allows us to study the spaces of parameters and the degeneracies, as well as to obtain the associated errors.

Using the HST archive data we studied the mass distribution in the gravitational lens cluster MS 2053, that has one multiply imaged system composed of a double gravitational arc. Our models show that the cluster has a bimodal mass distribution, confirming the previous spectrophotometric results obtained by other authors. Our analysis predicts a third, slightly demagnified image. We found a candidate for this counterimage near the expected position and with the same colors as the gravitational arcs in the cluster. We derived the mass profile that was used to estimate the mass within the arcs, this lensing mass is different from the one obtained from X-ray models, showing that the differences between both estimations are associated to suppositions of hydrostatic equilibrium which they are not fulfilled for MS 2053. In addition we found that the values of concentration are below those predicted in a Λ CDM model, and can be explained by asymmetries in the mass distribution and by projection effects.

In MS 0440, using images of the HST and KECK spectroscopic data, we constructed two strong lensing models based on five multiple image systems. The cluster component was modeled using two different profiles, namely the pseudo-isothermal elliptical mass distribution (PIEMD)

and Navarro-Frenk-White (NFW) mass distribution. We estimate the redshift of the systems for which we did not have spectroscopic data (radial arcs), and we found that the inclusion of these systems allows us to constrain the slope of the mass profile. We found that the Bayesian evidence favored a profile with $\rho \propto r^{-1}$ (NFW) over one with $\rho \propto r^{-2}$ (PIEMD). This result is consistent with our studies of the mass within the arcs since this agrees with the values calculated through X-ray mass models when these are corrected to take into account the lack of isothermality.

Finally, we use our best models of the clusters to make statistics on lensing sources. With a simulation of six hundred thousands sources distributed between $2 < z < 7$ we calculate the probability of amplification for LAES and Ly $_{\alpha}$ -blobs. We found that the behavior of the luminosity function is inherited to the the probability of finding lensed objects with an amplification greater than 10, preserving the redshit for which the function has his maximum. With this one method applied to a great sample of clusters it will be possible to separate both populations of objects and to show if an association between both phenomena exists.

Índice general

Índice de figuras	XI
Nomenclatura	XIII
1. Introducción	1
1.1. Historia	1
1.2. Teoría de las lentes gravitatorias	4
1.2.1. La ecuación de la lente	4
1.2.2. Lentes extendidas	7
1.2.3. Conservación del brillo superficial y amplificación	9
1.2.4. Líneas críticas y caústicas	15
1.2.5. Lentes axialmente simétricas	16
1.3. Modelos de lentes gravitatorias	18
1.3.1. La lente fuerte y los cúmulos de galaxias	19
1.3.2. Modelos paramétricos y no paramétricos	21
1.4. Las lentes gravitatorias como telescopios	22
1.5. Objetivo de la tesis	23
2. LENSTOOL	26
3. MS 2053.7-0449	64
4. MS 0440.5+0204	78
5. LAES	94
5.1. Galaxias primigenias	94

5.2. LAES y Ly $_{\alpha}$ -blobs	96
5.3. Funciones de luminosidad	97
5.4. Estadística de fuentes lenteadas	100
5.4.1. Estadística en MS 2053	102
5.4.2. Estadística en MS 0440	104
5.5. Resultados	107
6. CONCLUSIONES	108
6.1. Conclusiones	108
6.2. Trabajo a futuro	110
A. Valores propios	112
B. Funciones de luminosidad	116
C. Proyecto	119
Referencias	132

Índice de figuras

1.1. <i>La figura muestra cómo se defleca la luz en una cantidad $\hat{\alpha}$ al pasar cerca de una masa M.</i>	2
1.2. <i>Geometría para una masa puntual M actuando como lente gravitatoria.</i>	6
1.3. <i>Configuración para una distribución extendida de masa actuando como lente.</i>	8
1.4. <i>Distorsión del ángulo sólido subtendido por una fuente.</i>	10
1.5. <i>Ilustración del efecto de convergencia y el corte en una fuente circular.</i> <i>a) La fuente original. b) La convergencia magnifica la imagen de manera isotrópica. c) En presencia del corte y la convergencia, la imagen de la fuente se distorsiona en forma elíptica.</i>	14
1.6. <i>Representación de los diferentes regímenes de la lente gravitatoria.</i>	20
5.1. <i>Función de luminosidad acumulada para una emisión Ly_{α} producto de estrellas jóvenes. Nótese el máximo de la función alrededor de $z \approx 3$.</i>	98
5.2. <i>Función de luminosidad acumulada para una emisión Ly_{α} asociada a acreción fría. Aquí el máximo ocurre en $z \approx 2$.</i>	99
5.3. <i>Valores esperados de la amplificación para MS 2053 suponiendo una distribución de fuentes entre $z = 2.0$ y $z = 2.25$.</i>	101
5.4. <i>Valores esperados de la amplificación como función del corrimiento al rojo para MS 2053</i>	102
5.5. <i>Probabilidad de amplificación en MS 2053 como función del corrimiento al rojo para las dos funciones de luminosidad discutidas en el texto. Emisión Ly_{α} producto de fotoionización (línea roja continua) y acreción fría (línea azul discontinua)</i>	104
5.6. <i>Valores esperados de la amplificación como función del corrimiento al rojo para MS 0440</i>	105

5.7. *Probabilidad de amplificación en MS 0440 como función del corrimiento al rojo para las dos funciones de luminosidad discutidas en el texto. Emisión Ly_{α} producto de fotoionización (líneas oblicuas en rojo) y acreción fría (líneas verticales en azul) 106*

A.1. *La figura muestra una imagen elíptica centrada en $\vec{\theta}^*$ y muy próxima a la línea crítica radial. 115*

Nomenclatura

Letras Romanas

- c Velocidad de la luz
- D_{LS} Distancia lente fuente
- D_{OL} Distancia observador lente
- D_{OS} Distancia observador fuente
- G Constante de gravitación

Símbolos griegos

- α Ángulo de deflexión reducido
- β Posición de la fuente en ausencia de la lente
- γ Shear
- κ Convergencia
- Σ_{cr} Densidad superficial crítica
- θ Posición aparente de la imagen
- θ_E Angulo de Einstein

Acrónimos

- LAES* Emisores Ly_α

LBGS Lyman break galaxies

Λ *CDM* Lambda Cold Dark Matter

NFW Navarro Frenk White

OSIRIS Optical System for Imaging and Low Resolution Integrated Spectroscopy

PGS Galaxias primigenias

PIEMD Pseudo-Isothermal Elliptical Mass Distribution

Capítulo 1

Introducción

1.1. Historia

Doscientos años antes de que el comportamiento de la luz en presencia de un campo gravitatorio pudiera ser descrito por la Teoría General de la Relatividad de Albert Einstein, otros científicos estudiaron la posibilidad de que la gravedad pudiera influir en el comportamiento de la luz. A principios de 1700, Newton se cuestionó sobre la posible acción a distancia que los cuerpos podrían ejercer sobre la luz doblando sus rayos. Pero el problema no fue retomado hasta finales del siglo XVIII, cuando Henry Cavendish, influido por las ideas del astrónomo John Michell, calculó la deflexión de la luz por un cuerpo utilizando la ley de gravitación de Newton y suponiendo que la luz era de naturaleza corpuscular. Sin embargo, estos cálculos nunca fueron publicados (ver Will 1988).

En 1804, el astrónomo alemán J. Soldner publica un artículo (ver la traducción al inglés del ensayo original en Jaki 1978) en el cual calcula el ángulo de deflexión causado por el Sol, asumiendo al igual que Cavendish que la luz consistía de partículas materiales (ver Figura 1.1). Si una de estas partículas con velocidad constante c pasa cerca de una masa puntual M con un parámetro de impacto r , entonces para ángulos de deflexión pequeños $\hat{\alpha}$, se tiene que¹:

$$\hat{\alpha} \simeq \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (1.1)$$

¹la notación se explica en la sección Nomenclatura

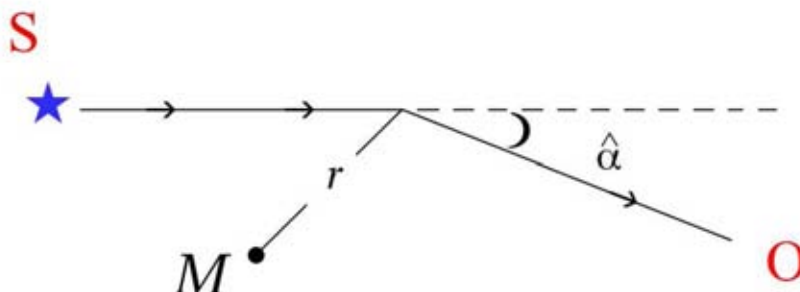


Figura 1.1: La figura muestra cómo se deflexa la luz en una cantidad $\hat{\alpha}$ al pasar cerca de una masa M .

Casi cien años después, Einstein (1911) recalcula la fórmula de Soldner aplicando el principio de equivalencia y utilizando una métrica Euclídea, encontrando el mismo valor para el ángulo de deflexión. Posteriormente el mismo Einstein (1915) aplicando las ecuaciones de campo de la Relatividad General mostraría que el ángulo de deflexión era dos veces el valor de Soldner. Con este factor de dos asociado a la curvatura de la métrica, nuestra ecuación (1.1) se expresa de manera correcta como

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 r}. \quad (1.2)$$

Sustituyendo los valores apropiados en esta expresión se encuentra que un haz de luz que pasa tangencialmente sobre la superficie del Sol es deflectado $1.7''$. Esta predicción de Einstein fue confirmada en 1919 por Frank Dyson y colaboradores (Dyson et al. 1920) quienes midieron el desplazamiento de las estrellas cercanas al Sol durante el eclipse solar del 29 de mayo de 1919. El experimento fue una de las primeras verificaciones hechas a la Teoría General de la Relatividad, demostrando observacionalmente que la trayectoria de la luz es modificada por la presencia de un campo gravitatorio.

Eddington (1920) mostró que al pasar la luz por un objeto estelar esto podría dar origen a imágenes múltiples de una misma fuente. Chwolson (1924) luego establecería que estas imágenes secundarias podrían hacer que las estrellas de fondo aparecieran como estrellas binarias y que en el caso de una alineación perfecta entre el observador, la masa que actúa como deflector (comúnmente llamada lente) y la fuente, la imagen sería un anillo. Sin embargo, Chwolson no discutió sobre las posibilidades de observación de dicho fenómeno. Einstein (1936) retomó el problema calculando el valor de la magnificación de las dos imágenes producidas por la lente, concluyendo que dicho efecto en las estrellas de fondo no era relevante debido a que la separación angular causada por la masa de la lente era demasiado pequeña para ser resuelta por un telescopio óptico, además de que existía baja probabilidad de que ocurriera un evento de gran amplificación.

Pero en 1937 Zwicky mostró que si el objeto lente y el objeto fuente fueran galaxias, el efecto de lente gravitatoria podría generar imágenes resolubles. Este efecto no sólo serviría como una prueba más de la Teoría de la Relatividad de Einstein, si no que también podría ser usado para observar objetos distantes usando a la lente como telescopio además de que proporcionaría una manera alterna para medir la masa de la galaxia lente (Zwicky 1937a). En ese mismo año, Zwicky publicaría un trabajo estimando que la probabilidad de encontrar una lente galaxia-galaxia era del orden del 1% y que por tanto tendría que ser observada (Zwicky 1937b).

Aun cuando Zwicky murió en 1974 sin ver confirmadas observacionalmente todas sus predicciones, a lo largo de esos cuarenta años de búsquedas infructuosas, otros trabajos teóricos sobre lentes gravitatorias fueron publicados. Liebes (1964) propone la posibilidad de que objetos no estelares dentro de nuestra Galaxia puedan actuar como lentes. En este mismo año, Refsdal (1964) presenta un trabajo mostrando que era posible medir la constante de Hubble, H_0 , usando el efecto de lente gravitatoria en una fuente variable. Y el mismo Refsdal sugeriría la posibilidad de usar el efecto de lente para probar modelos cosmológicos (Refsdal 1966). Los estudios teóricos de Gunn (1967a,b) en estadística de lentes mostraron cómo las posiciones, la forma y el brillo de las fuentes lenteadas dependerían de si el Universo es homogéneo o inhomogéneo. Para esta época ya se habían descubierto los cuásares (Schmidt 1963) y estos objetos presentaban las características ideales para estudiar el fenómeno de lente gravitatoria. Los cuásares, siendo objetos a alto corrimiento al rojo, tienen

mayor probabilidad de ser lenteados por galaxias, además son fáciles de identificar como candidatos a lentes ya que encontrar dos o más cuásares separados por unos cuantos segundos de arco, con el mismo corrimiento al rojo y color es poco probable.

El año decisivo para la historia de las lentes gravitatorias llegaría en 1979 cuando Walsh, Carswell y Weymann publican el descubrimiento del primer objeto lenteado gravitatoriamente, el cuásar QSO 0957+561 (Walsh et al. 1979). Esta fuente consiste de dos imágenes, A y B, las cuales están separadas por $6.1''$ y tienen el mismo corrimiento al rojo de $z_s=1.41$, con la galaxia lente a $z_l=0.36$. El descubrimiento de este cuásar no sólo significó el comienzo de la era observacional en las lentes gravitatorias, sino que también transformó su campo de estudio abriendo la posibilidad de corroborar las predicciones hechas por la teoría.

1.2. Teoría de las lentes gravitatorias

En esta sección discutiremos los principios básicos de las lentes gravitatorias y definiremos cantidades comunmente empleadas en este campo. Estableceremos la ecuación de la lente en su forma escalar y en su forma vectorial y explicaremos las características de las lentes axialmente simétricas.

1.2.1. La ecuación de la lente

La Figura 1.2 muestra una masa puntual M localizada a una distancia D_{OL} , que actúa como lente gravitatoria sobre la luz que proviene de una fuente S , situada a una distancia D_{OS} con respecto al observador. El ángulo β es la posición que tendría la fuente con respecto al eje óptico X (eje de simetría) en ausencia de la lente, y θ es el ángulo de la posición aparente de la imagen I producida por la fuente. Como vimos en la sección anterior, debido al campo gravitatorio la trayectoria de la luz se deflecta por un ángulo $\hat{\alpha}$. De la geometría de la figura es fácil ver que

$$\theta D_{OS} = \beta D_{OS} + \hat{\alpha} D_{LS}. \tag{1.3}$$

Definiendo el ángulo de deflexión reducido como

$$\alpha \equiv \hat{\alpha} \frac{D_{LS}}{D_{OS}}, \quad (1.4)$$

la ecuación (1.3) puede ser escrita como

$$\beta = \theta - \alpha. \quad (1.5)$$

Esta es la llamada *ecuación de la lente* o ecuación de trazado de rayos, la cual relaciona la posición real con la posición aparente de la fuente. Las distancias D_{OL} , D_{OS} y D_{LS} son distancias cosmológicas de diámetro angular (ver Longair 1998), y las ecuaciones (1.3) y (1.4) son sólo válidas cuando estas distancias se utilizan. Nótese que en general $D_{LS} \neq D_{OS} - D_{OL}$, y que además estas distancias dependen del modelo cosmológico que se utilice.

De acuerdo a la ecuación (1.2) para un rayo de luz que pasa a una distancia $r = \theta D_{OL}$, podemos reescribir el ángulo de deflexión reducido como

$$\alpha = \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2\theta}. \quad (1.6)$$

Por tanto la ecuación de la lente se puede escribir como

$$\beta(\theta) = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}, \quad (1.7)$$

donde se define el ángulo de Einstein θ_E como

$$\theta_E \equiv \left[\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2} \right]^{1/2}. \quad (1.8)$$

Debido a la simetría de la lente, una fuente que yace exactamente en el eje óptico ($\beta = 0$) produce una imagen en forma de anillo con una radio angular θ_E dado por la ecuación (1.8). Este resultado fue predicho por primera vez por Chwolson (1924) y es aplicable también en el caso de que una lente no puntual con simetría esférica y la fuente estén alineadas con respecto al eje de simetría. En este caso el valor de θ_E depende de la masa total contenida dentro del ángulo de Einstein (ver § 1.2.5). Nótese que θ_E no es una propiedad intrínseca de la lente, sino que depende de las distancias involucradas en el problema.

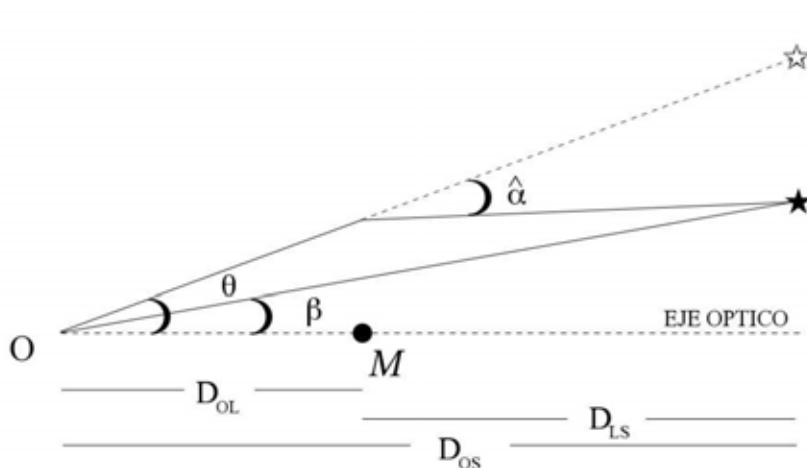


Figura 1.2: Geometría para una masa puntual M actuando como lente gravitatoria.

El ángulo de Einstein define de manera natural una *escala angular* para la lente por varias razones. Ahora discutiremos una de éstas y retomaremos la discusión en la sección § 1.2.5 después de que hayamos estudiado las lentes extendidas. Para nuestra lente puntual, cuando la posición angular de la fuente es pequeña comparada con el ángulo de Einstein, $\beta < \theta_E$, la separación de las imágenes es aproximadamente $2\theta_E$ (ver Mollerach & Roulet 2002). Para una galaxia distante actuando como lente sobre un cuásar, la masa es aproximadamente $M \simeq 10^{12}M_\odot$ y las distancias D_{LS} , D_{OS} y D_{OL} son del orden de 1 gigaparsec. Por lo que el ángulo de Einstein sería del orden de segundos de arco:

$$\theta_E \simeq 3'' \left[\frac{D_{LS}}{D_{OL}} \frac{1Gpc}{D_{OS}} \frac{M}{10^{12}M_\odot} \right]^{1/2}. \quad (1.9)$$

Entonces, si la lente es una galaxia, la separación es suficientemente grande como para ser resuelta por un telescopio. Lo cual como ya habíamos dicho antes, fue señalado por Zwicky (1937a,b). Para el caso particular de QSO 0957+561 este ángulo es de $\theta_E \simeq 2.4''$, valor muy por debajo de los $6.1''$ que separan a las imágenes A y B. La diferencia se explica por el hecho de que la galaxia lente pertenece a un cúmulo y el potencial de éste incrementa la separación de las imágenes (Young et al. 1980, 1981).

1.2.2. Lentes extendidas

En la práctica, los objetos que actúan como lentes gravitatorias son demasiado complejos como para poder ser representados por simples lentes puntuales. Si bien las galaxias y los cúmulos de galaxias son objetos extendidos, la ecuación de la lente, como veremos a continuación sigue siendo válida, lo único que hay que considerar es la naturaleza espacial en la distribución de masa, es decir la ecuación generalizada de la lente adquiere una naturaleza vectorial.

Con esto en mente, consideremos una distribución espacial de masa $\rho(\vec{x})$ que actúa como lente gravitatoria. Si la extensión de la distribución de masa a lo largo de la línea de visión es pequeña comparada con las distancias D_{OL} y D_{LS} (lo cual se cumple en los casos de interés astrofísico), se considera como una buena aproximación utilizar la masa proyectada en un plano (el llamado plano de la lente) perpendicular a la línea de visión y localizado en donde se encuentra la lente. De esta forma la única deflexión ocurre en el plano de la lente. Ésta es la llamada aproximación de lente delgada.

Sea $\Sigma(\vec{\xi})$ la densidad de masa superficial correspondiente a la distribución de masa proyectada en el plano lente,

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz, \quad (1.10)$$

donde z es la coordenada en la dirección ortogonal a la lente y $\vec{\xi}$ es un vector en dos dimensiones que indica la posición en el plano lente (ver Figura 1.3).

Como una generalización a la ecuación (1.2) podemos escribir

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi', \quad (1.11)$$

la cual se obtiene como la superposición de las deflexiones producidas por las masas diferenciales individuales.

Otra manera de escribir el ángulo de deflexión es en términos del potencial gravitatorio proyectado

$$\psi(\vec{\xi}) = \int \varphi(\vec{\xi}, z) dz, \quad (1.12)$$

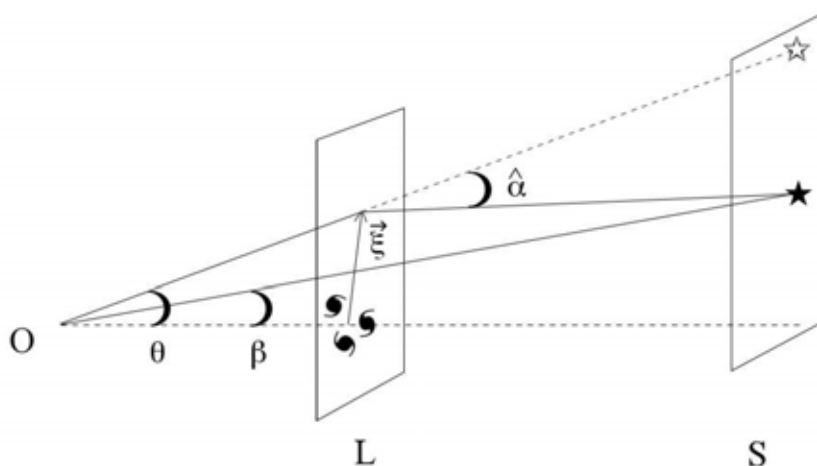


Figura 1.3: Configuración para una distribución extendida de masa actuando como lente.

donde φ es el potencial que produce la masa que actúa como lente. El potencial proyectado puede ser relacionado con la densidad superficial de masa a través de la ecuación de Poisson

$$\nabla_{\vec{\xi}}^2 \psi(\vec{\xi}) = 4\pi G \Sigma(\vec{\xi}). \quad (1.13)$$

Y recordando que la función de Green para el Laplaciano en dos dimensiones está dada por $\ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|$ (ver Arfken & Weber 2001) el potencial se puede escribir como

$$\psi(\vec{\xi}) = 2G \int \Sigma(\vec{\xi}') \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| d^2 \xi'. \quad (1.14)$$

Así podemos escribir de manera alterna la ecuación (1.11) como

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}_{\xi} \psi(\vec{\xi}), \quad (1.15)$$

lo cual muestra que el ángulo de deflexión es proporcional al gradiente del potencial proyectado.

Entonces, si definimos $\vec{\alpha} \equiv \hat{\alpha} D_{LS} / D_{OS}$, con $\hat{\alpha}$ dada por la ecuación (1.11), y $\vec{\theta} \equiv \vec{\xi} / D_{OL}$, podemos escribir nuestra ecuación de la lente en su forma vectorial:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}. \quad (1.16)$$

Y si definimos el potencial gravitatoria escalado

$$\Psi \equiv \frac{2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \psi, \quad (1.17)$$

y utilizamos la ecuación (1.15),

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\nabla}_{\theta} \Psi(\vec{\theta}). \quad (1.18)$$

Nótese que como esta ecuación no es lineal en $\vec{\theta}$, es posible tener múltiples imágenes asociadas a una sola posición de la fuente dada por $\vec{\beta}$.

1.2.3. Conservación del brillo superficial y amplificación

El brillo superficial I_{ν} , es decir, el flujo de energía a una frecuencia dada ν , que pasa una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación, por unidad de tiempo, de ángulo sólido e intervalo de frecuencia, es constante a lo largo de un rayo en el vacío (ver Rybicki & Lightman 1986). De manera más general, si un haz de rayos con frecuencia ν_s es emitido por una fuente a un corrimiento al rojo z_s y con brillo superficial I_{ν_s} , medidos por un observador en reposo en la posición de la fuente, entonces un observador al día de hoy ($z_0=0$) mediría un brillo superficial dado por

$$I_{\nu} = \left(\frac{\nu_0}{\nu_s} \right)^3 I_{\nu_s} = \frac{I_{\nu_s}}{(1+z_s)^3}, \quad (1.19)$$

donde el corrimiento de la frecuencia ν_s dado por $\nu_0 = \nu_s/(1+z_s)$ toma en cuenta la expansión del Universo. De esta manera, I_{ν}/ν^3 es la cantidad que se conserva a lo largo de la trayectoria (ver Misner et al. 1973, para una discusión detallada).

Consideremos ahora una lente gravitatoria entre la fuente y el observador. Sea I_{ν} el brillo superficial de la fuente en ausencia de la lente con ν la frecuencia medida en la Tierra, e I'_{ν} el brillo superficial de una imagen de la fuente en presencia de la lente. Considerando que el factor de escala del Universo cambia de manera despreciable durante el tiempo en que la luz cruza la lente y que además la deflexión causada por la lente no afecta la frecuencia de la luz, se puede demostrar a través de la ecuación (1.19) que $I_{\nu} = I'_{\nu}$ (Petters et al. 2001). O dicho en palabras, el brillo superficial de

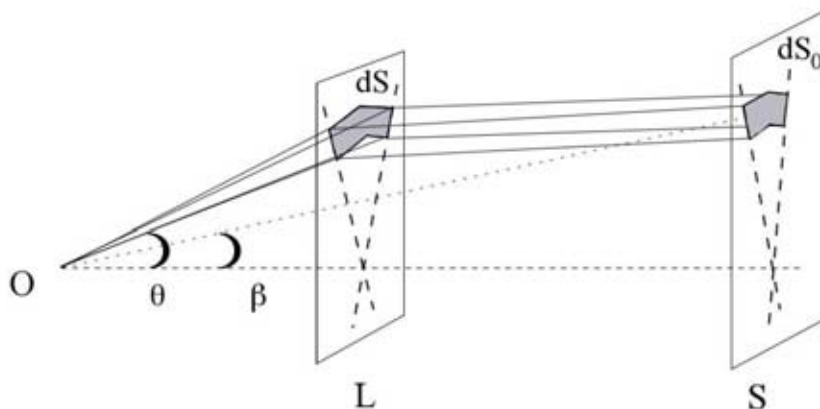


Figura 1.4: *Distorsión del ángulo sólido subtendido por una fuente.*

una imagen lenteada coincide con el brillo superficial de la fuente en ausencia de la lente.

Debido a esta conservación del brillo superficial, el flujo que recibimos de la fuente es amplificado por efecto de la lente gravitatoria. El flujo es obtenido multiplicando el brillo superficial por el ángulo sólido que subtiende la fuente. Pero debido a que la deflexión de los rayos de luz cambian la forma y por tanto el ángulo sólido que la fuente subtiende en el cielo (ver Figura 1.4), el flujo se amplificará en una cantidad dada por

$$A = \frac{d\Omega}{d\Omega_0}, \quad (1.20)$$

donde $d\Omega$ es el ángulo sólido que subtiende la imagen lenteada y $d\Omega_0$ es el ángulo sólido en ausencia de la lente.

Como ya vimos, en el caso de una distribución espacial de masa, la ecuación de la lente adquiere una naturaleza vectorial (ver Ec. 1.16). Esta ecuación puede ser vista como un mapeo en dos dimensiones $\vec{\beta} : L \rightarrow S$, donde L es el plano de la lente y S el plano de la fuente. Así el Jacobiano de la transformación definido como

$$J = \det[\text{Jac}\vec{\beta}](\vec{\theta}) = \det \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}}, \quad (1.21)$$

donde $[\text{Jac}\vec{\beta}](\vec{\theta})$ denota la matriz Jacobiana o *matriz de amplificación*, relaciona un elemento diferencial de ángulo sólido en el plano de la imagen, $d\Omega$, con su correspondiente elemento en el plano fuente, $d\Omega_0$, a través de la ecuación $d\Omega=J^{-1}d\Omega_0$. Y entonces, la magnificación de la imagen, que como se mostró arriba es la razón entre ángulos sólidos, queda expresada como

$$A = J^{-1}. \quad (1.22)$$

Por otra parte, la matriz de amplificación puede ser escrita, con ayuda de la ecuación (1.18) como

$$[\text{Jac}\vec{\beta}]_{ij} = \frac{\partial \vec{\beta}_i}{\partial \vec{\theta}_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}. \quad (1.23)$$

Recordando que el Laplaciano del potencial Ψ se relaciona con la densidad superficial $\Sigma(\vec{\theta})$ a través de la ecuación de Poisson (ver Ec. (1.13)), podemos escribir

$$\nabla_{\vec{\theta}}^2 \Psi(\vec{\theta}) = 2 \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}} \equiv 2\kappa(\vec{\theta}), \quad (1.24)$$

donde se define la densidad crítica como

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2 D_{OS}}{4\pi G D_{OL} D_{LS}}, \quad (1.25)$$

y la densidad superficial medida en unidades de la densidad crítica como

$$\kappa(\vec{\theta}) \equiv \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2^2} \right). \quad (1.26)$$

Esta cantidad se conoce como convergencia. Si se escriben las otras componentes de la ecuación (1.23) como

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2^2} \right), \\ \gamma_2 &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2 \partial \theta_1}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Es entonces posible escribir la matriz de mapeo como (Young 1981)

$$\begin{aligned} [\text{Jac}\vec{\beta}](\vec{\theta}) &= \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa - \gamma_1 \end{pmatrix} \\ &= [1 - \kappa(\vec{\theta})]\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}(\vec{\theta}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad y la matriz de *corte* queda definida como

$$\mathbf{\Gamma}(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Las componentes γ_1 y γ_2 , como veremos a continuación, son responsables de las distorsiones que se producen en la forma de las imágenes. Este corte está asociado a los componentes de materia que se encuentran lejos del haz de luz deflektado por la lente gravitatoria y puede ser debido a asimetrías en la distribución de masa.

Utilizando la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \Theta(\vec{\theta}) &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right], \\ \gamma(\vec{\theta}) &= \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde $\Theta(\vec{\theta})$ y $\gamma(\vec{\theta})$ son el ángulo del corte y la magnitud del corte respectivamente, podemos escribir de manera simple a la amplificación como

$$A = J^{-1} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2}. \quad (1.31)$$

Así la amplificación tiene dos contribuciones importantes, una debida a la densidad local de materia en el plano de la lente dada por κ , y otra relacionada a los efectos que causa sobre el campo gravitatorio cualquier asimetría en la distribución de masa, descrita por γ . Para aclarar con mayor detalle este punto regresemos a la ecuación (1.30). De ésta se sigue que $\gamma_1 = \gamma \cos(2\Theta)$ y $\gamma_2 = \gamma \sin(2\Theta)$ y que en consecuencia la dirección del corte toma los valores $0 \leq \Theta(\theta) \leq \pi$. Consideremos ahora la matriz de rotación dada por

$$\mathbf{R}[\Theta(\vec{\theta})] = \begin{pmatrix} \cos[\Theta(\vec{\theta})] & -\sin[\Theta(\vec{\theta})] \\ \sin[\Theta(\vec{\theta})] & \cos[\Theta(\vec{\theta})] \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Entonces podemos reescribir la matriz de amplificación (Ec. (1.28)) como

$$[\text{Jac}\vec{\beta}](\vec{\theta}) = \mathbf{R}[\Theta] \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} \mathbf{R}[-\Theta]. \quad (1.33)$$

Y utilizando la ecuación (1.31) la inversa de la matriz de amplificación queda expresada como

$$\{[\text{Jac}\vec{\beta}](\vec{\theta})\}^{-1} = \frac{[1 - \kappa]\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma}}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2} \quad (1.34)$$

Por lo tanto

$$\{[\text{Jac}\vec{\beta}](\vec{\theta})\}^{-1} = \mathbf{R}[\Theta] \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \kappa - \gamma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \kappa + \gamma} \end{pmatrix} \mathbf{R}[-\Theta]. \quad (1.35)$$

Consideremos una fuente extendida cuya proyección en el plano fuente es un disco de radio r centrado en $\vec{\beta}$. Si el disco es suficientemente pequeño y si la imagen lenteada está en $\vec{\theta}$, entonces la matriz de amplificación inversa $\{[\text{Jac}\vec{\beta}](\vec{\theta})\}^{-1}$ se aproxima a $\vec{\beta}^{-1}$ y podemos conocer el efecto que causa la lente gravitatoria cuando nuestra fuente es mapeada en la imagen alrededor del punto $\vec{\theta}$. Si no hay corte presente ($\gamma = 0$) y κ es diferente de cero, la ecuación (1.35) muestra que nuestro disco se mapea en un disco de radio $r/|1 - \kappa|$ en el plano lente. Así la densidad superficial de masa, κ , produce un enfocamiento isotrópico de los rayos de luz y es por eso que este término se conoce como *convergencia* (ver Figura 1.5). Por otro lado, si el corte está presente, nuestro disco será mapeado en una elipse centrada en $\vec{\theta}$, cuyo eje mayor estará a un ángulo Θ y tendrá una longitud $2r/|1 - \kappa - \gamma|$, mientras el eje menor tendrá un tamaño $2r/|1 - \kappa + \gamma|$.

Cuando $A > 0$, se dice que la imagen tiene una paridad positiva, y cuando $A < 0$ una paridad negativa. Como acabamos de discutir, en presencia del corte una imagen cambia en un factor $(1 - \kappa - \gamma)^{-1}$ en una dirección y $(1 - \kappa + \gamma)^{-1}$ en la otra. Si uno de estos factores es negativo (paridad parcial negativa) significa que la imagen se invierte en esa dirección. Cuando los dos factores son negativos, la paridad total es positiva y la imagen no estará invertida, aparecerá como girada en 180° . Burke

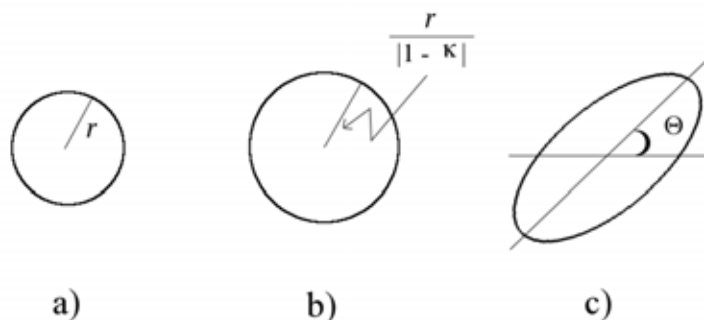


Figura 1.5: Ilustración del efecto de convergencia y el corte en una fuente circular. a) La fuente original. b) La convergencia magnifica la imagen de manera isotrópica. c) En presencia del corte y la convergencia, la imagen de la fuente se distorsiona en forma elíptica.

(1981) mostró que una lente gravitatoria producía siempre un número impar de imágenes, con al menos una imagen con paridad positiva y las imágenes adicionales en pares, una con paridad positiva y la otra con paridad negativa. Y como toda lente delgada produce al menos una imagen con amplificación mayor o igual a uno (Schneider 1984), entonces existe una imagen para la cual ambas paridades parciales son positivas.

Si existe un punto $\vec{\theta}$ de la lente donde la densidad superficial $\Sigma(\vec{\theta})$ excede Σ_{cr} , entonces la lente es capaz de producir imágenes múltiples. Una lente en la cual $\Sigma(\vec{\theta}) > \Sigma_{cr}$ ($\kappa(\vec{\theta}) > 1$) se dice que es *supercrítica*. Esta condición es una condición suficiente mas no necesaria, es decir, si se tiene imágenes múltiples esto no implica que la lente sea supercrítica, ya que depende de la simetría de la lente (Subramanian & Cowling 1986). Para tener una idea de la densidad necesaria para producir imágenes múltiples reescribiremos la ecuación (1.25) como

$$\Sigma_{cr} = 1.7 \times 10^3 M_{\odot} \text{pc}^{-2} \left[\frac{D_{OL}}{1 \text{Gpc}} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right]^{-1}. \quad (1.36)$$

Para una lente con una masa M dentro de un radio R podemos asociar un valor promedio a la densidad superficial de masa

$$\bar{\Sigma} = 1.1 \times 10^4 M_{\odot} \text{ pc}^{-2} \left(\frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right) \left(\frac{R}{10 \text{ kpc}} \right)^{-2}. \quad (1.37)$$

Entonces si consideramos una galaxia ($M \sim 10^{12} M_{\odot}$, $R \sim 10 \text{ kpc}$) a $z = 0.5$ y una fuente a $z = 1.5$ entonces $\bar{\Sigma}/\Sigma_{cr} \approx 4 > 1$ y por tanto es posible la formación de imágenes múltiples. Por otro lado, para un cúmulo de galaxias ($M \sim 10^{15} M_{\odot}$, $R \sim 3 \text{ Mpc}$) se tiene que $\bar{\Sigma}/\Sigma_{cr} \approx 0.02 < 1$, por lo que no se producirían imágenes múltiples. Sin embargo éstas se observan en los cúmulos ya que $\Sigma < \Sigma_{cr}$ es una condición suficiente pero no necesaria.

1.2.4. Líneas críticas y caústicas

Para una distribución de lentes descrita por la ecuación (1.16), las posiciones $\vec{\theta}$ en el plano de la lente para las cuales $J=0$, tendrían formalmente una amplificación infinita. Los lugares geométricos de todos los puntos para los cuales la amplificación diverge son llamadas *líneas críticas*. Las posiciones correspondientes de estas curvas en el plano fuente son llamadas *líneas cáusticas*. Es decir, las imágenes de las líneas cáusticas producto del mapeo de la lente, son las líneas críticas. Sin embargo, cuando una fuente cruza una cáustica su imagen no se vuelve infinitamente brillante. Esto es porque las fuentes reales son objetos extendidos y en estos casos la amplificación total es obtenida por un promedio (pesado por el brillo superficial) de la amplificación a través de su superficie, y esto siempre lleva a magnificaciones finitas (Schneider et al. 1999). Por otra parte, aun cuando las fuentes fueran puntuales, su amplificación no sería infinita ya que este resultado está basado en la aproximación de óptica geométrica que hemos usado para describir las lentes gravitatorias. Para describir una fuente puntual tendríamos que considerar la naturaleza ondulatoria de la luz, la cual se vuelve importante en estos casos (Ohanian 1983).

Las curvas críticas y caústicas que produce una lente gravitatoria son de gran importancia ya que están relacionadas con el número de imágenes y su paridad. Consideremos una fuente lejana con respecto al eje de simetría de una distribución de masa que actúa como lente. Si la lente es no singular, sólo habrá una imagen. Sin embargo, si movemos la fuente hacia eje óptico de la lente, aparecerán dos nuevas

imágenes siempre que la fuente cruce una caústica¹. Las nuevas imágenes que se producen aparecerán en la misma dirección en el cielo en un punto sobre la línea crítica y tendrán una amplificación máxima. Además, una de estas nuevas imágenes tiene paridad positiva mientras la otra tiene paridad negativa. Así, las líneas críticas siempre dividen regiones del cielo donde las imágenes tienen paridades opuestas y por tanto son contornos cerrados. Nótese además, que si conocemos dónde están localizadas las líneas caústicas para una distribución particular de masa, entonces podemos determinar la forma en que depende el número de imágenes con respecto a la posición de la fuente.

1.2.5. Lentes axialmente simétricas

Consideremos ahora una lente con una densidad superficial de masa circularmente simétrica, es decir, $\Sigma(\vec{\xi}) = \Sigma(|\xi|)$. Debido a la simetría del problema, nuestra ecuación se reducirá a una dimensión ya que todos los rayos que parten de la fuente al observador yacen en el plano descrito por la fuente, el centro de la lente y el observador. Recordando que $\vec{\alpha} \equiv \vec{\tilde{\alpha}} D_{LS} / D_{OS}$, podemos escribir la ecuación (1.11) como

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4GD_{LS}}{c^2 D_{OS}} \int \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2 \xi', \quad (1.38)$$

y usando $\vec{\theta} \equiv \vec{\xi} / D_{OL}$ y la ecuación (1.26), tenemos que

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} d^2 \theta'. \quad (1.39)$$

Por conveniencia consideraremos que la deflexión ocurre en $\vec{\theta} = (x, 0)$, con $x \geq 0$. Pasando a coordenadas polares, $\vec{\theta} = \theta'(\cos \zeta, \sin \zeta)$, podemos espresar la ecuación anterior en componentes como

¹Como vimos en § 1.2.3 el número total de imágenes producidas por una lente siempre es impar. Este teorema, conocido como Teorema de Burke, no se cumple si la lente es singular (Burke 1981). Por ejemplo, en una fuente puntual como se puede apreciar de la ecuación 1.7, siempre hay dos imágenes.

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \theta' \kappa(\theta') d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{\theta - \theta' \cos \zeta}{\theta^2 + \theta'^2 - 2\theta\theta' \cos \zeta} d\zeta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \theta' \kappa(\theta') d\theta' \times \begin{cases} 2\pi/\theta & \text{si } \theta' < \theta \\ 0 & \text{si } \theta' > \theta \end{cases}, \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \alpha_2(\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \theta' \kappa(\theta') d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{-\theta' \sin \zeta}{\theta^2 + \theta'^2 - 2\theta\theta' \cos \zeta} d\zeta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \theta' \kappa(\theta') d\theta' \times 0. \quad (1.41)
 \end{aligned}$$

La componente α_2 se anula por simetría y por tanto $\vec{\alpha}$ es paralelo a $\vec{\theta}$. Por otra parte, la componente α_1 muestra que es la materia dentro del disco de radio θ la que produce la deflexión de la luz en el punto $\vec{\theta}$ y que la materia situada a mayor distancia no contribuye. Entonces, de la ecuación (1.40) podemos escribir

$$\alpha(\theta) = \alpha_1(\theta) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \theta' \kappa(\theta') d\theta' \equiv \frac{m(\theta)}{\theta}, \quad (1.42)$$

donde hemos definido la masa adimensional $m(\theta)$ dentro del círculo de radio θ . Por lo tanto, para una distribución de masa circularmente simétrica se tiene que

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) = \theta - \frac{m(\theta)}{\theta}, \quad (1.43)$$

o de manera vectorial

$$\vec{\beta} = \left(1 - \frac{m(\theta)}{\theta^2}\right) \vec{\theta}. \quad (1.44)$$

Nótese que apartir de la ecuación (1.38) y sin hacer la sustitución de $\vec{\theta} \equiv \vec{\xi}/D_{OL}$, podemos repetir los cálculos de arriba para mostrar que la ecuación para una distribución simétrica de masa se puede escribir de manera alterna como

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM(\theta)}{c^2\theta}. \quad (1.45)$$

Debido a la simetría rotacional del sistema, una fuente que se encuentra sobre el eje óptico ($\beta=0$) producirá un anillo de radio

$$\theta_E \equiv \left[\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM(\theta_E)}{c^2} \right]^{1/2}, \quad (1.46)$$

la cual es análoga a la ecuación (1.8) pero donde ahora $M(\theta_E)$ es la masa contenida en el radio de Einstein. Puesto que la ecuación $1 - m(\theta)/\theta^2 = 0$ define a la línea crítica tangencial (véase la ecuación (A.8)), entonces el radio de Einstein para este caso particular coincide con la línea crítica. Así, las fuentes que están más cerca de θ_E con respecto al eje óptico experimentan un efecto de lente fuerte en el sentido de que son magnificadas considerablemente y producen imágenes múltiples, mientras las fuentes alejadas del radio de Einstein son poco magnificadas. Además, si comparamos las ecuaciones (1.46) y (1.25) podemos ver que

$$\Sigma_{cr} = \frac{M(\theta_E)}{\pi(D_{OL}\theta_E)^2}, \quad (1.47)$$

de tal forma que la densidad superficial de masa promedio dentro del radio de Einstein es justamente la densidad Σ_{cr} . Por ejemplo, si tenemos un perfil de densidad no singular, con una densidad que decrece de manera suave desde el centro, la condición suficiente para que se produzca un anillo de Einstein en un potencial circularmente simétrico (y por tanto que se puedan formar imágenes múltiples) es que la densidad en el centro exceda la densidad crítica (Subramanian & Cowling 1986).

1.3. Modelos de lentes gravitatorias

Las lentes gravitatorias debidas a grandes distribuciones de masas como galaxias, cúmulos de galaxias y la estructura a gran escala del Universo, proveen un arma poderosa para estudiar diferentes problemas de interés astrofísico (Blandford & Narayan 1992). El efecto de amplificación nos permite observar objetos muy distantes o muy débiles para ser observados sin una lente gravitatoria. La lente de esta manera actúa como un *telescopio cósmico* permitiéndonos estudiar fuentes que están muy por debajo del límite de resolución de los instrumentos astronómicos (ver § 1.4). Además el efecto de lente gravitatoria depende solamente de la distribución de masa proyectada y no se necesitan hacer suposiciones con respecto al estado

dinámico (relajado o no, en equilibrio hidrostático o no) o la naturaleza (bariónica o no bariónica) de la masa que constituye la lente. Por lo tanto las lentes ofrecen una manera de detectar y estudiar la materia en el Universo (v.g. Massey et al. 2007). Por otra parte, como las lentes dependen de la edad, la escala y la geometría del Universo, entonces se pueden poner límites a la constante de Hubble, la constante cosmológica y la densidad del Universo usando lentes gravitatorias (v.g. Golse et al. 2002; York et al. 2005).

1.3.1. La lente fuerte y los cúmulos de galaxias

El fenómeno de lente gravitatoria se divide comúnmente en *lente fuerte* y *lente débil*. La lente fuerte es debida a lentes muy masivas, las cuales pueden ser una galaxia o un cúmulo de galaxias que producen imágenes múltiples de una fuente y/o distorsionan fuertemente una fuente extendida en un arco gigante (ver Figura 1.6)¹. En la lente débil, el efecto no es lo suficiente fuerte para generar imágenes múltiples o arcos, y solamente distorsiona de manera débil las fuentes extendidas cambiando por ejemplo su elipticidad. Estas lentes pueden ser cúmulos de galaxias o estructuras de mayores escalas. En el caso de los cúmulos de galaxias, ambos regímenes son complementarios cuando se desea hacer un estudio de la distribución total de masa en estos. El régimen de lente fuerte proporciona constricciones en las partes interiores del cúmulo mientras la lente débil impone límites a la forma del perfil de densidad en su parte externa (e.g. Smail & Dickinson 1995; Kneib et al. 1996; Abdelsalam et al. 1998; Gavazzi & Soucail 2007)

Si bien la posibilidad de que los cúmulos de galaxias podrían producir el efecto de lente gravitatoria fue considerado por varios autores (Karoji & Nottale 1976; Dyer & Roeder 1976; Narayan et al. 1984), este fenómeno no fue observado hasta hace poco más de 20 años cuando Lynds & Petrosian (1986) y Soucail et al. (1987) de manera independiente anunciaron la detección de estructuras semejantes a arcos alrededor del cúmulo Abell 370. Pero fue Paczynski (1987) quien lo explicó en términos del efecto de lente gravitatoria. Posteriormente otros arcos se encontraron en diferentes

¹Una clase importante de lente fuerte es la llamada microlente. En ésta, la lente consiste de objetos compactos como estrellas, enanas café, planetas o MACHOS, que son lo suficientemente masivos para producir imágenes múltiples. Estas imágenes múltiples con separaciones angulares de micro-segundos de arco no se pueden resolver pero son estudiadas por las variaciones en su brillo.

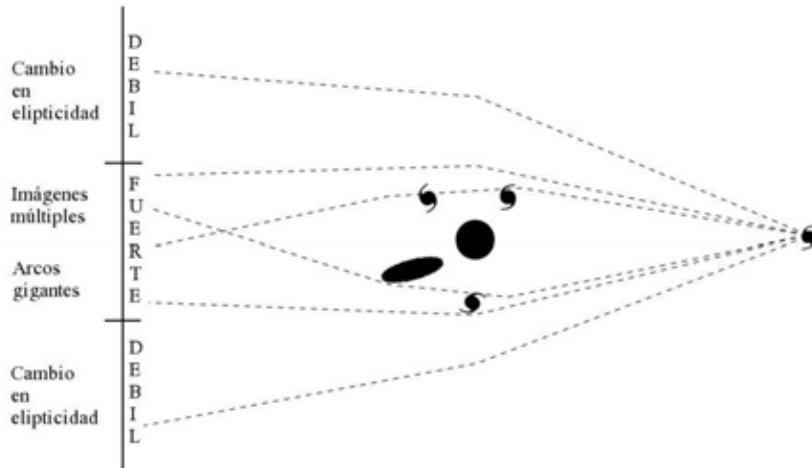


Figura 1.6: Representación de los diferentes regímenes de la lente gravitatoria.

cúmulos: Cl 0500-24 (Giraud 1988), Abell 963 (Lavery & Henry 1988), Cl 0024+17 (Koo & Worthey 1989), Abell 2390 (Pello et al. 1991) y MS 2137-23 (Fort et al. 1992). La primera búsqueda sistemática de arcos gravitatorios en cúmulos de galaxias fue realizada por Le Fevre et al. (1994) quien utilizó el *Einstein Observatory Extended Medium Sensitivity Survey* (EMSS) para buscar arcos en cúmulos emisores en rayos X. Una posterior búsqueda en EMSS mostró que 8 de los 38 cúmulos en su muestra presentaban imágenes atribuibles a lente fuerte (Luppino et al. 1999). Actualmente exploraciones en el óptico, como *Las Campanas Distant Cluster Survey*, han confirmado esta incidencia de arcos gigantes en su muestra (Zaritsky & Gonzalez 2003) y el trabajo de Gladders et al. (2003) en la *Red-Sequence Cluster Survey* muestra que esta incidencia puede ser mayor y que los arcos gigantes son muy comunes en cúmulos de galaxias. Probablemente en un futuro, con la ayuda de nuevas exploraciones como la del *CFHT Legacy Survey* (Cabanac et al. 2007) que busca sistemas de arcos sobre un amplio espectro de masas (galaxias, grupos y cúmulos) se pueda determinar con mayor precisión este grado de incidencia.

Inmediatamente después del descubrimiento del fenómeno de lente gravitatoria en cúmulos de galaxias empezaron a surgir modelos teóricos tratando de explicar no sólo las imágenes observadas, sino también tratando de describir el perfil de masa

asociado a la lente (Hammer & Rigaut 1989; Grossman & Narayan 1989; Tyson et al. 1990; Hammer 1991). Sin embargo estos primeros modelos no explicaban la forma del potencial del cúmulo o presentaban demasiada degeneración en el sentido de que diferentes modelos podían explicar la misma configuración de arcos. Al mejorar los datos observacionales, se pudieron mejorar los modelos permitiendo construir mejores mapas de masa (Mellier et al. 1993; Kneib et al. 1993; Fahlman et al. 1994; Kneib et al. 1994). Pero no fue hasta la llegada del *Hubble Space Telescope* (HST), que se tuvo la resolución necesaria para identificar las pequeñas contraimágenes presentes en las regiones internas de los cúmulos ricos, cuando los modelos de lentes adquirieron una mejora significativa (e.g. Kneib et al. 1996; Smail et al. 1996).

Recientemente, con la nueva *Advanced Camera for Surveys* (ACS) instalada en el HST y con datos espectroscópicos tomados desde tierra, algunos cúmulos han podido ser modelados con un detalle sin precedentes (Broadhurst et al. 2005; Elíasdóttir et al. 2007; Richard et al. 2007; Limousin et al. 2007).

1.3.2. Modelos paramétricos y no paramétricos

Existen dos maneras de modelar lentes gravitatorias: paramétrica y no paramétrica. La primera ha sido ampliamente utilizada desde los primeros modelos de lentes, ya que proporciona fórmulas simples y da, en la mayoría de los casos, expresiones analíticas de todas las cantidades involucradas en la lente. Dado un modelo para la distribución de masa, que puede ser una esfera isoterma singular, un perfil de King, un elipsoide truncado, etc. (ver Keeton 2001, para una descripción detallada de los perfiles de masa comúnmente empleados en modelos de lentes), los parámetros del modelo (radio de escala, velocidad de dispersión, etc.) son determinados optimizando el ajuste entre los datos observacionales y los correspondientes valores predichos por el modelo. Los modelos paramétricos dependen de manera importante de suposiciones o *priors* sobre la distribución de masa (e.g. Kneib et al. 1993, 1995, 2003; Broadhurst et al. 2000; Sand et al. 2002). Por ejemplo, un prior común es suponer que toda la materia (bariónica o no bariónica) sigue a la distribución de luz, y que por tanto el centro de la distribución de masa coincide con el centro de la galaxia o el cúmulo que se esté modelando. A pesar de esta limitante, los modelos paramétricos son muy utilizados ya que sus expresiones son fáciles, tiene un enorme poder

predictivo y además están basados generalmente en leyes físicas (Kneib 2002).

Los modelos no paramétricos permiten estimar la distribución de masa independientemente del modelo, sin imponer ningún conocimiento a priori sobre la distribución de masa en el plano de la lente. En general, la distribución de masa se representa en un arreglo de píxeles o celdas en el plano de la masa o del potencial y la ecuación de la lente es resuelta para cada una de las celdas usando como constricciones las imágenes lenteadas. Este método ha sido utilizado con éxito por muchos autores (Saha & Williams 1997; Abdelsalam et al. 1998; Trotter et al. 2000; Warren & Dye 2003; Diego et al. 2005), sin embargo sus soluciones son poco predictivas (Kneib 2002) y pueden llegar a sugerir asociaciones inexistentes entre imágenes (Limousin et al. 2007).

En la presente tesis los modelos se realizaron usando un método paramétrico.

1.4. Las lentes gravitatorias como telescopios

Si bien Zwicky (1937a) propuso utilizar galaxias lente como telescopios para observar objetos muy distantes, la técnica de utilizar la magnificación natural proporcionada por objetos extragalácticos no fue retomada hasta el descubrimiento del fenómeno de lente en cúmulos. Y no fue utilizada con éxito hasta la llegada del HST, que hizo posible obtener modelos detallados de estas lentes. En los cúmulos de galaxias se pueden alcanzar teóricamente magnificaciones entre ≈ 10 -50 en las regiones cercanas a las líneas críticas. Y estas pueden ser localizadas con precisión para fuentes entre $2 < z < 7$ sólo en cúmulos bien modelados (Ellis et al. 2001).

La primera galaxia a alto corrimiento al rojo descubierta con esta técnica fue encontrada en el cúmulo CL 1358+62 (Franx et al. 1997). La galaxia lenteada tiene un corrimiento al rojo $z = 4.92$ y se observa en el plano de la lente como cuatro imágenes. Usando un simple modelo isoterma para el cúmulo Franx et al. (1997) fueron capaces de reproducir con éxito la geometría de los arcos. Cuatro años después Ellis et al. (2001) haciendo una exploración en búsqueda de objetos a alto corrimiento al rojo, encontraron un par de emisores Ly $_{\alpha}$ (LAES, ver Capítulo 5) que de acuerdo a su modelo de lente debía tratarse de una fuente lenteada gravitatoriamente y con gran amplificación. El estudio espectroscópico confirmaría la hipótesis de que se trataba de un objeto lenteado a un corrimiento al rojo $z = 5.6$ (Ellis et al. 2001).

En otra exploración realizada por Hu et al. (2002) con el fin de encontrar LAES en cúmulos de galaxias masivos hallaron un objeto a $z = 6.56$, y un posible candidato a $z \approx 7$ fue encontrado en el cúmulo A2218 (Kneib et al. 2004).

Santos et al. (2004) realizaron una exploración espectroscópica en nueve cúmulos de galaxias previamente modelados en el régimen de lente fuerte. Estos autores encontraron once candidatos a emisores Ly_α localizados en un rango de $2.2 < z < 5.6$, pudiendo constreñir la función de luminosidad de estos objetos hasta $10^{40} \text{ erg s}^{-1}$. Y buscando estudiar la abundancia de galaxias a muy alto corrimiento al rojo, $6 \lesssim z \lesssim 10$, Richard et al. (2006) realizaron una exploración profunda en el infrarojo de los cúmulos AC114 y A1835, encontrando 18 objetos con magnificaciones entre 1.5 y 10. De acuerdo a sus simulaciones y a sus observaciones, el uso de cúmulos como telescopios mejora de manera significativa la eficiencia de exploración cuando se compara con campos desprovistos de galaxias cercanas que actúen como lentes.

Si bien es cierto que el efecto de lente gravitatoria incrementa el número de fuentes débiles y por tanto el número total de fuentes que pueden ser observadas, por otro lado el volumen que se prueba es mucho más pequeño que en otra clase de exploraciones como las que se realizan en banda angosta (ver Capítulo 5) y las basadas en el color (v.g. Bouwens et al. 2003; Yan et al. 2003; Stanway et al. 2003). Sin embargo ofrece la posibilidad de estudiar objetos de baja luminosidad que de otra manera no podrían ser detectados.

1.5. Objetivo de la tesis

El objetivo principal de la presente tesis es el estudio de la función de luminosidad de objetos a alto corrimiento al rojo ($2 \leq z \leq 7$) utilizando el efecto de amplificación de lente gravitatoria producido por cúmulos de galaxias. En este contexto, nuestro trabajo se divide en dos partes: Modelaje de cúmulos de galaxias en el régimen de lente fuerte y el estudio de la función de luminosidad de los LAES.

Los modelos de cúmulos de galaxias son importantes porque nos permiten probar la forma de la distribución de masa a estas escalas (independientemente del estado dinámico de la materia), así como probar predicciones teóricas sobre formación de estructuras. En este sentido, buscamos caracterizar a dos cúmulos de galaxias (MS 2053 y MS 0440), los cuales nunca habían sido estudiados con tanto detalle en

el régimen de lente fuerte, para hacer una descripción de su distribución de masa y de los parámetros de sus perfiles de densidad; así como comparar los resultados con los predichos por el modelo Λ CDM.

La importancia de la segunda parte de nuestro trabajo radica en que, aun cuando ya se han utilizado cúmulos de galaxias y el efecto de amplificación para encontrar LAES de baja luminosidad para estudiar su función de luminosidad (v.g. Santos et al. 2004; Richard et al. 2007), existe controversia sobre cuál es el mecanismo que origina la emisión en esta clase de objetos. La mayoría de los LAES a alto corrimiento al rojo detectados hasta el día de hoy son compactos y parecen ser galaxias individuales en las cuales la emisión Ly_α es generada por fotoionización del gas. Sin embargo las exploraciones de Ly_α también han encontrado otra clase de emisores, los llamados Ly_α -blobs, en los cuales la emisión es extendida y se cree que es producto de la acreción del gas en un halo de materia que está colapsando para formar una galaxia (ver Capítulo 5).

Los modelos de la distribución de masa de nuestros cúmulos, obtenidos a partir de las constricciones observacionales (número de imágenes y su corrimiento al rojo), nos permiten fijar los parámetros para obtener las curvas críticas y cóusticas. Para ello se hace uso del código LENSTOOL (ver Capítulo 2). Estos modelos permiten hacer estadística sobre las imágenes lenteadas y las magnificaciones, colocando diferentes distribuciones de objetos atrás de la lente (distintas funciones de luminosidad). Dicha estadística pretende caracterizar las diferencias que existen entre las funciones de luminosidad y mostrar si es posible de manera observacional separar los diferentes tipos de emisores (LAES y Ly_α -blobs) de acuerdo al corrimiento al rojo donde ocurre la máxima amplificación.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 2 presentamos la nueva versión del código LENSTOOL con la cual se realizaron los modelos de lente fuerte en los dos cúmulos estudiados en este trabajo. En el Capítulo 3 mostramos el modelo del cúmulo MS 2053 para el cual confirmamos su bimodalidad utilizando lente fuerte. En el Capítulo 4 presentamos el estudio de MS 0440 donde hemos extendido el trabajo de Jullo et al. (2007) a un cúmulo real, discriminando entre dos perfiles de masa diferentes. En el Capítulo 5 se muestra el estudio estadístico de los LAES y en el Capítulo 6 las conclusiones. Por último presentaremos el trabajo a futuro que permitirá comprobar nuestras predicciones teóricas, utilizando el instrumento

OSIRIS en el Gran Telescopio de Canarias. En la presente tesis hemos adoptado un modelo cosmológico dominado por materia oscura fría y constante cosmológica. Hemos utilizado $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ y $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Capítulo 2

LENSTOOL

La ecuación de la lente (1.18) permite determinar las posiciones de las imágenes asociadas a una fuente si se conoce el potencial asociado a la lente así como los corrimientos al rojo de la lente y de la fuente. Pero también permite resolver el problema inverso: conocidas las distancias de la lente y de la fuente, la solución de esta ecuación para los diferentes sistemas de imágenes observadas constriñe el potencial, y por tanto la distribución de masa de la lente. Esta forma inversa de análisis es la que comúnmente se emplea cuando se hacen modelos de lentes gravitatorias. Dadas las posiciones, la formas de las imágenes múltiples así como las posiciones de las líneas críticas (constricciones)¹ se busca determinar cuales son los parámetros asociados a determinado perfil de masa (potencial) que mejor reproduzcan los datos observacionales; esto se conoce como *optimización* del modelo.

A orden cero, el modelo más simple que podemos contruir es el de un cúmulo representado por un halo de materia oscura esféricamente simétrico. Pero como los arcos gigantes nunca tienen contra-imágenes de igual brillo superficial, esto significa que la lente no puede ser esférica (Grossman & Narayan 1988; Kovner 1989). Lo cual nos lleva, como primer orden a considerar un halo elíptico. Sin embargo, Kneib et al. (1996) demostró que era necesario incluir subestructura (halos a escala de galaxias) para poder reproducir con precisión las imágenes múltiples observadas cerca de los cúmulos de galaxias. Este segundo orden de complejidad en los modelos es el que utilizamos en el presente trabajo. Consideramos que los cúmulos de galaxias están

¹Algunos códigos permiten usar como constricción el flujo de las fuentes (por ejemplo Keeton 2001).

constituidos por dos componentes: los halos a escala del cúmulo que incluyen la materia oscura y el gas intra-cúmulo; y halos a escala de galaxias hechos de estrellas y materia oscura¹. El potencial gravitacional total del cúmulo puede ser expresado de la siguiente manera

$$\Psi_{Total} = \sum_i \Psi_c^i + \sum_j \Psi_p^j, \quad (2.1)$$

donde Ψ_c^i son los potenciales asociados a los halos a escala del cúmulo y Ψ_p^j los relacionados con los halos a escala de galaxias. Esta forma de expresar el potencial total como la suma de una componente asociada al halo del cúmulo, más pequeñas perturbaciones al potencial ha probado ser muy eficiente para modelar cúmulos de galaxias en el sentido de que no sólo permite reproducir los sistemas de imágenes múltiples observados (ver por ejemplo Smith et al. 2005; Limousin et al. 2007) sino también ha demostrado ser de gran utilidad para estudiar el tamaño de estos sub-halos dentro de los cúmulos (ver por ejemplo Natarajan et al. 2007). Nótese como el potencial total depende de todos los parámetros que son parte de los potenciales individuales, y que siendo éste un modelo multiparamétrico puede dar origen a degeneraciones. Donde por degeneración entendemos que diferentes valores en los parámetros (es decir, diferentes modelos) pueden reproducir de manera adecuada las observaciones.

La optimización del modelo puede efectuarse en el plano fuente o en el plano imagen, siendo ambas matemáticamente equivalentes. Comúnmente se elige la primera porque las soluciones son numéricamente más fáciles de calcular. El ajuste del modelo se optimiza mapeando las posiciones de las imágenes múltiples hacia el plano fuente, exigiendo que las posiciones de éstas tengan una dispersión mínima; en la optimización en el plano imagen ocurre algo análogo pero en la otra dirección.

¹El siguiente paso natural para obtener un modelo detallado de los cúmulos de galaxias sería modelar el halo a escala del cúmulo separando sus componentes bariónica y no bariónica. Es decir, considerar un potencial asociado a la materia oscura más uno adicional que tomara en cuenta la distribución de gas y su efecto sobre la materia oscura. Este no es un problema trivial ya que algunos trabajos han mostrado que el gas que se enfría en los centros de los halos de materia oscura produce distribuciones de materia oscura más concentradas que no necesariamente tienen un perfil que se pueda representar de manera analítica (ver por ejemplo Gnedin et al. 2004, para una discusión sobre el modelo de *Contracción Adiabática*).

Para cuantificar la bondad del ajuste en cada modelo de la lente, se construye un estimador χ^2 de la siguiente manera

$$\chi^2 = \sum_k \chi_{critica}^2(k) + \sum_j \chi_{posicion}^2(j) + \sum_l \chi_{forma}^2(l). \quad (2.2)$$

Cada término se construye de la siguiente manera: dado un modelo (es decir las constricciones observacionales más el potencial definido por la ecuación (2.1)) para cada sistema múltiple o cada línea crítica, LENSTOOL calcula χ^2 comparando el valor obtenido al resolver la ecuación de la lente (1.18) con los datos observacionales.

En la versión anterior de LENSTOOL (Kneib 1993) el código optimizaba buscando los mejores parámetros del ajuste minimizando la ecuación (2.2) mediante un proceso parabólico. Este método tenía la desventaja de que no permitía obtener los errores en los parámetros del modelo, además de ser susceptible a los mínimos locales y a los parámetros de entrada. En la presente versión de LENSTOOL se implementó un nuevo método de optimización, el método Bayesiano con Cadenas de Markov y Monte Carlo (MCMC). Este paquete permite obtener los errores en los parámetros y evitar los mínimos locales en χ^2 . De acuerdo a un espacio de parámetros definido por el usuario, el algoritmo MCMC genera modelos aleatorios y calcula su χ^2 . Progresivamente, este converge al espacio de parámetros más probable y da como resultado la mejor solución.

Para ilustrar el método MCMC Bayesiano se estudiaron las degeneraciones en tres cúmulos de galaxias simulados (con perfiles PIEMD, NFW y Sérsic) en tres diferentes configuraciones y utilizando halos a escala de galaxias como perturbaciones al potencial del cúmulo. Los resultados de este trabajo pueden ser resumidos de la siguiente manera:

- Las degeneraciones aparecen en los tres potenciales estudiados, y estas son debidas a las definiciones matemáticas de los potenciales o las configuraciones de las imágenes múltiples.
- Es importante identificar imágenes radiales (o centrales) en los cúmulos ya que los sistemas radiales combinados con los arcos tangenciales permiten constreñir de manera más exacta la pendiente del perfil de masa. Este punto, así como

el siguiente resultarán de gran importancia cuando apliquemos los resultados de este trabajo a MS 0440 (ver Capítulo 4).

- Es posible discriminar entre diferentes perfiles (PIEMD, Sérsic y NFW) usando la *evidencia* Bayesiana.
- El radio de corte del PIEMD, el radio efectivo del perfil de Sérsic y el radio de escala en el NFW son pobremente constreñidos usando lente fuerte.
- Los parámetros de los sub-halos galácticos están degenerados con los del halo a escala del cúmulo. Obteniéndose mejores constricciones en los parámetros de los sub-halos cuando se combinan imágenes tangenciales y radiales.

A Bayesian approach to strong lensing modelling of galaxy clusters

E Jullo^{1,2,6}, J-P Kneib², M Limousin³, Á Elíasdóttir³,
P J Marshall⁴ and T Verdugo⁵

¹ European Southern Observatory, Alonso de Cordova,
Santiago, Chile

² OAMP, Laboratoire d'Astrophysique de Marseille - UMR 6110 -
Traverse du siphon, 13012 Marseille, France

³ Dark Cosmology Centre, Niels Bohr Institute,
University of Copenhagen, Juliane Maries Vej 30,
2100 Copenhagen, Denmark

⁴ Physics Department, University of California, Santa Barbara,
CA 93106-9530, USA

⁵ Instituto de Astronomía, UNAM, AP 70-264,
04510 DF, Mexico

E-mail: ejullo@eso.org

New Journal of Physics **9** (2007) 447

Received 1 June 2007

Published 17 December 2007

Online at <http://www.njp.org/>

doi:10.1088/1367-2630/9/12/447

Abstract. In this paper, we describe a procedure for modelling strong lensing galaxy clusters with parametric methods, and to rank models quantitatively using the Bayesian evidence. We use a publicly available Markov chain Monte-Carlo (MCMC) sampler ('BAYESYS'), allowing us to avoid local minima in the likelihood functions. To illustrate the power of the MCMC technique, we simulate three clusters of galaxies, each composed of a cluster-scale halo and a set of perturbing galaxy-scale subhalos. We ray-trace three light beams through each model to produce a catalogue of multiple images, and then use the MCMC sampler to recover the model parameters in the three different lensing configurations. We find that, for typical Hubble Space Telescope (HST)-quality imaging data, the total mass in the Einstein radius is recovered with ~ 1 –5% error according to the considered lensing configuration. However, we find that the mass of the galaxies is strongly degenerated with the cluster mass when

⁶ Author to whom any correspondence should be addressed.

no multiple images appear in the cluster centre. The mass of the galaxies is generally recovered with a 20% error, largely due to the poorly constrained cut-off radius. Finally, we describe how to rank models quantitatively using the Bayesian evidence. We confirm the ability of strong lensing to constrain the mass profile in the central region of galaxy clusters in this way. Ultimately, such a method applied to strong lensing clusters with a very large number of multiple images may provide unique geometrical constraints on cosmology. The implementation of the MCMC sampler used in this paper has been done within the framework of the LENSTOOL software package, which is publicly available⁷.

Contents

1. Introduction	2
2. Definitions and methodology	4
2.1. Definition	4
2.2. Modelling the different cluster mass components	5
2.3. Constraints	8
2.4. The multiple images' likelihood	11
3. A Bayesian MCMC method	12
3.1. MCMC output	15
4. Lens potential parameter degeneracies	16
4.1. Description of the simulation	16
4.2. PIEMD posterior PDF analysis	18
4.3. NFW posteriors distribution analysis	21
4.4. Sérsic posterior distribution analysis	22
5. Model inference	24
6. Conclusion	28
Acknowledgments	30
Appendix A. Critical lines computation with marching squares	30
Appendix B. Pseudo-elliptical Sérsic potential	30

1. Introduction

Strong gravitational lensing is produced when a distant object (such as a galaxy or a quasar) is serendipitously aligned with a critical foreground mass concentration. Such a phenomenon was first observed by Walsh *et al* (1979) who discovered a double quasar strongly lensed by a distant galaxy. In the 1980s, with the advent of CCD imaging and its application to astronomy, giant gravitational arcs in galaxy cluster cores were discovered by two independent teams (Lynds and Petrosian 1986; Soucail *et al* 1987). The lensing explanation proposed by Paczynski (1987) was soon confirmed by Soucail *et al* (1988), who measured the redshift for the giant arc in Abell 370 as being roughly twice that of the cluster redshift. Together with the multiply-imaged quasars, giant arcs in galaxy clusters turned strong gravitational lensing from a theoretical curiosity into a powerful tool to probe the mass distributions of galaxies and galaxy cluster cores. Although

⁷ <http://www.oamp.fr/cosmology/lenstool>.

one can easily see that for a given source position β , multiple images (at different θ) can solve the lensing equation. When this is happening it corresponds to the strong lensing regime.

The lens potential is the product of angular diameter distances ratio: $D_{\text{LS}}/D_{\text{OS}}$ (lens–source distance over observer–source distance) and the projected Newtonian potential $\phi(\theta)$ at the image position:

$$\varphi(\theta) = \frac{2}{c^2} \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{OS}}} \phi(\theta). \quad (2)$$

Hence, once the distance of the lens and the source are known, solving the lensing equation for different multiple images, allows to directly constrain the Newtonian potential, or equivalently the mass distribution of the lens.

2.2. Modelling the different cluster mass components

Observations of clusters of galaxies reveal two components: cluster-scale halos (which includes both DM and the baryonic intra cluster gas) and galaxy-scale halos (made of stars and DM). Similarly, N -body simulations of clusters show that the mass distribution of subhalos inside a cluster halo follows a Schechter function (e.g. [Shaw et al 2006](#)).

Thus, cluster gravitational potential can be decomposed in the following manner:

$$\phi_{\text{tot}} = \sum_i \phi_{c_i} + \sum_j \phi_{p_j}, \quad (3)$$

where we distinguish the cluster-scale smooth and large potentials ϕ_{c_i} , and the subhalo potentials ϕ_{p_j} providing small perturbations ([Natarajan and Kneib 1997](#)). In the following, we consider a subhalo as a clump of matter containing a galaxy: we assume that there are no dark galaxies in clusters. This decomposition has been successful in reproducing the observed systems of multiple images and in constraining the size of the subhalos in clusters (e.g. [Natarajan et al 2006](#); [Smith et al 2005](#)). We now describe in more detail how we model the cluster-scale halos and galaxy-scale subhalos.

2.2.1. Smooth cluster-scale halos. The smooth cluster-scale halos represent both the DM and the intra-cluster gas. With enough constraints, each of these two components could in principle be modelled separately, but in this work they are modelled together as a single mass component. The number of such halos is not easy to evaluate; generally one starts with a single halo—except when x-ray observations or the distribution of the galaxies clearly show a multi-modal distribution—and increases the complexity of the model from there.

In the case of a multi-modal distribution or a clearly bad fit to the data with a single halo, additional halos can be included to the model until a good fit is reached. In the `LENSTOOL` literature to date no more than two cluster-scale halos have been needed to achieve a good model (e.g. Abell 2218 and Abell 1689), but this may change in the near future with the expected improvement of the strong lensing data (in particular with more spectroscopic redshifts) or when properly taking into account external constraints.

Each halo in a model (both the cluster-scale and the galaxy-scale described below) is parametrized by a position on the sky (x_c, y_c), a projected ellipticity of the mass distribution (ϵ_{Σ}) (see also appendix B for the pseudo-elliptical developments of the Sérsic potential), a position angle (PA), and a set of parameters specific to the choice of potential profile used to describe the halo. In this paper, we consider either the elliptical singular isothermal sphere (SIE), NFW, PIEMD, or Sérsic profiles, described by either 1, 2, 3, or 3 parameters respectively (see table 1

Table 1. LENSTOOL most used potentials.

SIE	
$\epsilon_\varphi = \epsilon_\Sigma/3$	$(\epsilon_\Sigma < 0.4)^a$
$\rho = \rho_0/\tilde{R}$	
$\rho_0 = \frac{\sigma^2}{2\pi G}$	
PIEMD	
$\epsilon_\varphi = \frac{1 - \sqrt{1 - \epsilon_\Sigma^2}}{\epsilon_\Sigma}$	
$\rho = \frac{\rho_0}{(1 + (\tilde{R}^2/r_c^2))(1 + \tilde{R}^2/r_{\text{cut}}^2)}$	
$\rho_0 = \frac{\sigma_\infty^2}{2\pi G r_c^2}$	$(\sigma_0 \simeq \sigma_\infty/1.46)^b$
NFW	
$\epsilon_\varphi = \epsilon_\Sigma/2.27$	$(\epsilon_\varphi < 0.25)^c$
$\rho = \frac{\delta_c \rho_c}{(R/r_s)(1 + (R/r_s))^2}$	
$\delta_c = \frac{200}{3} \frac{c^3}{\ln(1+c) - c/(1+c)}$	$r_s = \frac{r_{\text{vir}}}{c}$
Sérsic	
$\epsilon_\varphi = \epsilon_\Sigma/3.55$	$(\epsilon_\varphi < 0.25)$
$\ln\left(\frac{\Sigma}{\Sigma_e}\right) = -b_n \left[\left(\frac{\tilde{R}}{R_e}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$	
$b_n \simeq 2n - \frac{1}{3} + \frac{4}{405n} + \frac{46}{25515n^2}$	^d

^aKneib *et al* (1993).^bGolse (2002).^cGolse and Kneib (2002).^dCiotta and Bertin (1999).

for the analytic description of each potential. See also Limousin *et al* (2005) for the surface density definitions of the PIEMD and NFW potentials.

In figure 1, we compare the surface density of the singular isothermal sphere (SIS), the Sérsic, the NFW and the PIEMD profiles both in the very central and in the very outer regions. These regions are accessible either to strong or weak lensing. These profiles are the best fit to the set of plotted multiple images. We clearly note the flat core of the PIEMD profile up to 10 kpc and in contrast the monotonically increasing slope of the NFW and the Sérsic profiles. The SIS profile slope is constant and hardly follows the other profiles.

Given the data (e.g. strong lensing or dynamics data), the cluster brightest galaxy—also called the cD galaxy in the following—can either be included in the cluster-scale halo or modelled separately. However, Smith *et al* (2005) showed that the centre-of-mass of the cluster-scale halo can be different from the cD galaxy centre. Therefore, it is generally justified to model the cD galaxy as an additional subhalo.

2.2.2. Galaxy-scale components. Kneib *et al* (1996) first demonstrated that the inclusion of galaxy-scale subhalos was necessary to reproduce the observed systems of multiple images,

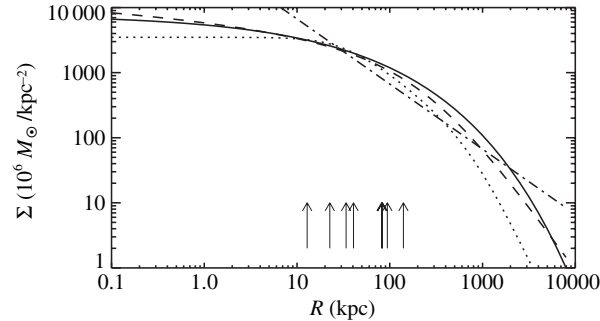


Figure 1. Surface density comparison between the Sérsic (solid line), the NFW (dashed line), the PIEMD (dotted line) and the SIS profiles (dot-dashed line). The surface densities correspond to the fit performed in section 5 and extended to very small and large radii. The arrows mark the multiple images positions used as constraints.

particularly those appearing near cluster galaxies. These galaxy-scale subhalos or perturbers can be probed in a direct way using weak galaxy–galaxy lensing techniques (Natarajan and Kneib 1997; Natarajan *et al* 2002), however in this paper, we will concentrate only on the strong lensing aspects.

The number of subhalos to include in a model needs to be quantified. To date, a conservative attitude has been adopted: all the massive cluster member galaxies with cluster-centric radii out to approximately two times the limits of the strong lensing region are included. This is generally achieved by selecting galaxies within the cluster red sequence and selecting them brighter than a given luminosity limit. Moreover, the subhalos shape (ellipticity and orientation) is usually taken to be the same as its galaxy.

Recently, Wambsganss *et al* (2005) and King and Corless (2007) have raised the issue of multiple halos/subhalos along the line of sight that increase the projected surface density and thus affect the lensing strength. While not large, this effect is a systematic, and so lensing models must consider the possibility of such gravitational perturbations. In practice, the mass distribution along the line of sight can be understood from spectroscopic and photometric measurements in the field of view.

Here, we propose a set of criteria for including perturbing subhalos in a model. The basic idea is to measure their strong lensing deviation angle and compare it to the spatial resolution δ of the lensing observations ($\delta \sim 0.1''$ for HST). A subhalo is included in the model if it can increase significantly the deflection angle at its associated galaxy position. For a cluster member galaxy if its Einstein radius $R_{\text{Einstein}} > \delta/\mu$ (where μ is the magnification of the cluster-scale halo at the position of the galaxy) then it is included, otherwise its lensing contribution is not important and it is disregarded. For galaxies not part of the cluster, if $R_{\text{Einstein}} > \delta/\mu$ and the associated galaxy is in projection out of the strong lensing region, we include it in the model at the cluster redshift by rescaling its mass so that the global lensing effect is preserved. Finally, if the galaxy is in the strong lensing region and its lensing effect is detectable then the associated subhalo must be included with a proper multi-plane lensing technique (we will not discuss such a case here as it is beyond the scope of this paper).

Accounting for all the subhalos in a galaxy cluster as individually optimizable potentials would lead to an under-constrained problem. Assumptions must be made in order to make the number of parameters commensurate with the number of constraints. Koopmans *et al* (2006) have shown that a strong correlation exists between the light and the mass profiles of elliptical galaxies in the field. Consequently, in a first approximation, the subhalos position, ellipticity and orientation are matched to their luminous counterpart.

As we will show in the second part of this paper, apart from a few subhalos perturbing multiple images close to them, the vast majority of subhalos act merely to increase the total mass enclosed in the Einstein radius. Strong lensing provides few constraints on the mass profile parameters of most individual subhalos.

We therefore reduce the number of subhalo parameters by asserting exact scaling relations between the subhalo masses and their associated galaxy luminosities. Following the work of Brainerd *et al* (1996), we model cluster subhalos with PIEMD potentials. The mass profile parameters in this model are the core radius (r_{core}), cut-off radius (r_{cut}), and velocity dispersion (σ_0), which we take to scale with the galaxy luminosity L in the following way:

$$\begin{cases} \sigma_0 = \sigma_0^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^{1/4}, \\ r_{\text{core}} = r_{\text{core}}^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^{1/2}, \\ r_{\text{cut}} = r_{\text{cut}}^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha. \end{cases} \quad (4)$$

The total mass of a subhalo scales then as:

$$M = (\pi/G)(\sigma_0^*)^2 r_{\text{cut}}^* (L/L^*)^{1/2+\alpha}, \quad (5)$$

where L^* is the typical luminosity of a galaxy at the cluster redshift, and r_{cut}^* , r_{core}^* and σ_0^* are its PIEMD parameters. When r_{core}^* vanishes, the potential becomes a singular isothermal potential truncated at the cut-off radius. This is generally the type of potential used in weak galaxy–galaxy lensing studies to measure the tidal radius of galaxy-scale subhalos in clusters or in the field (see Limousin *et al* 2005, 2006).

In these scaling relations, the velocity dispersion scales with the total luminosity in agreement with the Tully–Fisher and the Faber–Jackson relations for spiral and elliptical galaxies respectively. The r_{cut} relation is more hypothetical. If $\alpha = 0.5$, it assumes a constant mass-to-light ratio independent of the galaxy luminosity. If $\alpha = 0.8$, the mass-to-light ratio scales with $L^{0.3}$ similar to the scaling of the fundamental plane (Halkola *et al* 2006; Jørgensen *et al* 1996; Natarajan and Kneib 1997).

2.3. Constraints

2.3.1. Multiple images. In the strong lensing regime, the light coming from a background galaxy (the source) passes through a high density region and is lensed into multiple images. The position, shape and flux of each multiple image depend on the properties of the lens and the redshift of the source. The precise measurement of the source redshift and of the image properties (such as position, ellipticity and orientation) provides strong constraints on the lens model.

In general, image properties can be inferred from their light distributions. Indeed, the first-order moment provides the image position, and the second-order moment corrected for the effects of the point-spread-function (PSF) gives the ellipticity and the PA of the image. Note however, that the ellipticity of a curved arc is somewhat ill-defined, so this information can only be used if the images are relatively compact. In this paper, we only consider the multiple image's position as a constraint, and we discuss the associated likelihood in the next section.

Sometimes, the background galaxy presents several bright regions that can be individually identified in each multiple image. Matching these bright regions in each image brings even tighter constraints to the lensing model.

The images flux can also be considered as a constraint. However, the amplification can vary strongly across highly extended images, and properly computing the amplification to measure the total flux in each image is usually not straightforward.

Finally, the redshift of the source is a strong constraint on the lens model. A spectroscopic determination is best, but a photometric redshift (e.g. [Ilbert *et al* 2006](#)) can be sufficient if accurate enough (e.g. $\sigma_z < 0.05$ introduces a 2% error on the D_{LS}/D_{OS} ratio for a lens and a source at redshifts $z_L = 0.2$ and $z_S = 1$ respectively) and with no multiple peak in its probability distribution (no catastrophic redshift).

For well-defined photometric redshifts, LENSTOOL provides a way of introducing accurately the redshift likelihood as a prior for the model.

Including an uncertain source redshift as a free parameter to be inferred from the data gives the model more freedom, albeit at some extra computational cost. However, due to the other available constraints, it may lead to a more accurate redshift for that image system. This procedure may also raise questions about a photometric or spectroscopic measured redshift if the model favours a different range of values.

The correct identification of multiple images is probably the most complex task in strong lensing modelling.

Initially, we consider (as a guide) only generic geometrical lensing configurations—cusp, fold and saddle ([Blandford and Narayan 1986](#))—for a single cluster-scale halo. Having found a basic model that satisfies the most obvious or most straightforward multiple image system, the perturbations due to galaxy-scale subhalos can be taken into account. Generally, subhalos do not create strong lensing events by themselves, but affect the multiple images produced by the cluster-scale halo. They can deflect their position or occasionally further divide a multiple image.

Comparing the colours of multiple images is another straightforward technique. As lensing is achromatic, multiple images must have similar colours unless the images' fluxes are strongly contaminated with or reddened by nearby galaxies.

It is important to realize that the identification process of multiple images is both iterative and strongly linked to the determination of the mass profile, starting from the most obvious systems close to the cluster centre and progressively adding perturbations and new systems. New multiple images can be predicted before they are observationally confirmed.

2.3.2. Other lensing constraints.

Single images. Single images with known redshift lying close to the strong lensing region (typically when $R_{\text{Einstein}} < r < 2R_{\text{Einstein}}$) can also be included in the lens model. Indeed, they

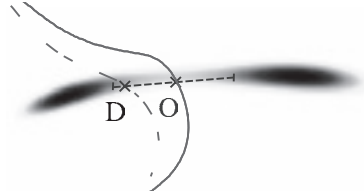


Figure 2. Merging of two multiple images and determination of the distance between the true critical line (*solid line*, showing the surface brightness saddle point) and a predicted critical line (*dashed line*). The dashed segment represents the prior that would be set on the critical line location.

can help in constraining the parts of the model where no multiple image system is detected. Such constraints have been neglected up to now. We propose here an efficient way to include them in the χ^2 determination.

In essence, we add a penalizing term to the likelihood if an observed single image is predicted to be multiple, and if at least one of the counter-images could effectively be detected in the observed data image. The penalizing term is a function of n_k , the number of predicted images above the detection limit (defined to be three times the sky noise flux in the object detection aperture).

The penalizing term is implemented in the following way:

$$\chi_{\text{single}}^2 = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{[x_{\text{single}} - x^j(\boldsymbol{\theta})]^2}{\sigma_{\text{single}}^2}. \quad (6)$$

Here, x_{single} is the position of the observed single image and $x^j(\boldsymbol{\theta})$ is the position of a detectable image predicted by the current model, whose parameters are $\boldsymbol{\theta}$ and σ_{single} is the position error of the observed single image.

This implementation provides a smooth way of converging to the best χ_{single}^2 . Once $\chi_{\text{single}}^2 = 0$ (as it must be if truly single), the single image is no more a constraint. Consequently, this definition only imposes an upper limit on the enclosed mass at the single image position. The truly singly-imaged systems do not add to the overall number of degrees of freedom, nor to the final global chi-squared value. However, they do accelerate the convergence on the best-fitting parameter region.

This penalizing term must be used with some care; in particular, instances where $\chi_{\text{single}}^2 > 0$ have to be flagged and investigated, as they indicate either a failure of the model or that the single image identification was incorrect. Indeed, this is one way in which new multiple images may be found.

Location of critical lines. In the case of fold images, the position of the critical line passing in between the two images can sometimes be observed as a saddle point in the surface brightness of the images. We can use this information to put a constraint on the lens model by minimizing the distance between the position where the image isophotes cross and the critical line predicted by a model, as shown in figure 2.

The prior segment for the critical line position can be defined by a centroid \mathbf{O} , a PA and a Gaussian error size on the position σ_{cl} , hence, the corresponding χ^2 can be given as:

$$\chi_{\text{cl}}^2 = \frac{\|\mathbf{O} - \mathbf{D}\|^2}{\sigma_{\text{cl}}^2}, \quad (7)$$

where \mathbf{D} is the intersection of the predicted critical line and the defined prior segment.

This constraint merely reinforces the weight of the considered system of multiple images in the model.

By focusing on the crossing isophote, it makes use of more of the imaging information than just the centroids of the multiple images. As such, it is a low-cost constraint in terms of computation time and definitely accelerates the convergence on the best-fit region. Of course, since constraints must be independent observations, this constraint must be observable and not computed from the image positions.

At the end of the optimization, we check that $\chi_{\text{cl}}^2 < 1$. If this is not satisfied, then either the critical constraint was wrongly identified or the model has not yet fully converged.

Weak shear signal. Outside the strong lensing region, the weak shear signal can be used to constrain the model on larger angular scales. Considering a catalogue of background galaxies with PSF-corrected shape measurements, one can minimize the difference between the ellipticity of each galaxy and the reduced shear predicted by a mock model at the galaxy location (see, e.g. [Marshall et al 2002](#), and references therein). We will discuss the weak lensing implementation in a forthcoming paper.

2.4. The multiple images' likelihood

We assume that the noises associated with the measurement of the images position are Gaussian and uncorrelated from one image to another. The noise covariance matrix for all the considered systems of multiple images is therefore diagonal. Hence, the usual definition of the likelihood function applies and becomes, in this case,

$$\mathcal{L} = \Pr(D|x(\boldsymbol{\theta})) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\prod_j \sigma_{ij} \sqrt{2\pi}} \exp^{-\chi_i^2/2}, \quad (8)$$

where N is the number of sources, and n_i is the number of multiple images for source i . The contribution to the overall χ^2 from multiple images system i is

$$\chi_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{[x_{\text{obs}}^j - x^j(\boldsymbol{\theta})]^2}{\sigma_{ij}^2}, \quad (9)$$

where $x^j(\boldsymbol{\theta})$ is the position of image j predicted by the current model, whose parameters are $\boldsymbol{\theta}$ and σ_{ij} is the error on the position of image j .

The accurate determination of σ_{ij} depends on the image S/N ratio. For extended images, a pixellated approach is the only accurate method which takes the S/N ratio of each pixel into account ([Dye and Warren 2005](#); [Suyu et al 2006](#)). However, this method is very time consuming. Therefore, in a first approximation, the image position error can be determined by fitting a two-dimensional (2D) Gaussian profile to the image surface brightness. In this case, the fit error contains implicitly the S/N ratio of each pixel. However, this assumes that the background galaxy is compact and its surface brightness profile is smooth so that the brightest point in the

source plane match the brightest point in the image plane. In this paper, for simplicity, the image positions are determined by inverting the lens equation for a given source position. Therefore, the images are point-like. We assign them identical σ_{ij} so that they have the same weight in the likelihood computation. Of course, this procedure is valid only in simulations where the source positions are known *a priori* and could not be applied to real cases.

A major issue of the χ^2 computation is of how to match the predicted and observed images one by one. Many techniques have been proposed so far to find the roots of the lens equation (see, e.g. Dominik 1995). Unfortunately, the matching of the predicted to the observed images one by one becomes problematic when their respective positions do not match closely. This always happens during the first steps of the optimization. We have found no algorithm that performs this matching automatically.

In contrast, the algorithm implemented in LENSTOOL is a simplex method (Press *et al* 1986) of image transport (Schneider *et al* 1992). By definition, the observed image is coupled to the predicted image all along the iterative refinement of the predicted position. The χ^2 is therefore easy to compute. However, in models producing different configurations of multiple images (e.g. a radial system instead of a tangential system), the method fails and that particular model is then rejected. This usually happens when the model is not yet well determined, and it can slow the convergence of the model significantly.

To get around this complexity, we can compute the χ^2 in the source plane (by computing difference of the source position for a given parameter sample θ) instead of the image plane. The source plane χ^2 is written as

$$\chi_{S_i}^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{[x_S^j(\theta) - \langle x_S^j(\theta) \rangle]^2}{\mu_j^{-2} \sigma_{ij}^2}, \quad (10)$$

where $x_S^j(\theta)$ is the source position of the observed image j , $\langle x_S^j(\theta) \rangle$ is the barycentre position of all the n_i source positions, and μ_j is the magnification for image j . Written in this way, there is no need to solve the lensing equation and so calculation of the χ^2 is very fast.

The MCMC method we have implemented in LENSTOOL supports both the source and the image plane χ^2 methods. However, with the image plane method many models have to be tested and eventually rejected before the Bayesian sampler (see below) focuses on the best-fit region. This unnecessarily increases the computation time. In this paper, we first ‘size up’ the best-fit region with the source plane method, and then refine the models with the image plane method.

Figure 3 shows that the posterior probability density function (PDF) are similar when computed with the image plane method alone or with the successive source plane + image plane method. However, this latter method is about eight times faster than the image method alone.

3. A Bayesian MCMC method

We have implemented the Bayesian MCMC package BAYESYS (Skilling 2004) to perform the lens model fitting. By model, we mean a multiple-component (and hence multi-scale) mass distribution as described above, with a set of priors for its parameters.

Theoretically, the Bayesian approach is better suited than regression techniques in situations where the data by themselves do not sufficiently constrain the model. In this case, prior knowledge about the parameter PDF helps to reduce the model’s degeneracies. The

Figure 3. 2D marginalized posterior PDF of a simulated cluster of galaxies. The left, middle and right columns are respectively obtained by computing the likelihood with the source plane method, with the image plane method and successively with the source plane and the image plane methods. In terms of computation time, the combined method source plane—image plane is about eight times faster than the image plane method alone.

Bayesian approach is well suited to strong lens modelling, given the few constraints generally available to optimize a model.

The Bayesian approach provides two levels of inference: parameter space exploration and model comparison. The first level can be achieved using the unnormalized posterior PDF (equal to the product of the likelihood and the prior); the second requires the calculation of the normalization of the posterior, known as the evidence. All these quantities are related by Bayes theorem,

$$\Pr(\theta|D, M) = \frac{\Pr(D|\theta, M)\Pr(\theta|M)}{\Pr(D|M)}, \quad (11)$$

where $\Pr(\theta|D, M)$ is the posterior PDF, $\Pr(D|\theta, M)$ is the likelihood of getting the observed data D given the parameters θ of the model M , $\Pr(\theta|M)$ is the prior PDF for the parameters, and $\Pr(D|M)$ is the evidence.

The posterior PDF will be the highest for the set of parameters θ which gives the best fit and is consistent with the prior PDF, regardless of the complexity of the model M . Meanwhile, the evidence $\Pr(D|M)$ is the probability of getting the data D given the assumed model M . It measures the complexity of model M , and, when used as in model selection, it acts as Occam's razor: 'All things being equal, the simplest solution tends to be the best one'. Here, the simplest

solution tends to be the model with the smallest number of parameters and with the prior PDF the closest to the posterior PDF. In contrast, the commonly-used reduced χ^2 analysis is only a rough approximation to the evidence analysis, although it does provide an absolute estimator of goodness-of-fit (provided the error estimates on the data are accurate).

In information theory, the evidence combines the likelihood and the information I , or negative entropy:

$$I = \int \Pr(\theta|D, M) \log(\Pr(\theta|D, M)/\Pr(\theta|M)) d\theta, \quad (12)$$

where the sum is performed over the whole parameter space and $\Pr(\theta|D, M)$ is the posterior PDF and $\Pr(\theta|M)$ is the prior PDF.

The negative entropy measures the information we have obtained in computing the posterior PDF from the input prior PDF. It represents a ‘distance’ between the prior PDF and the posterior PDF. It can also be understood as the volume of the prior PDF over the posterior PDF, which can be very large for high signal to noise data. [In this case the task of parameter space exploration is like searching for a ‘a needle in a haystack’, and the entropy measures the ratio of the needle’s volume (the posterior PDF) to the haystack’s volume (the prior PDF)].

In general, the information is much bigger than unity because the ‘distance’ between the prior PDF and the posterior PDF is large. For this reason, we use annealed Markov Chains to converge progressively from the prior PDF to the posterior PDF.

Technically, we run ten interlinked Markov chains at the same time to prevent any Markov chain from falling in a local minimum. The MCMC convergence to the posterior PDF is performed with a variant of the ‘thermodynamic integration’ technique (O Ruanaidh and Fitzgerald 1996) called *selective annealing*.

‘Selective’ stands for the following process. At each step, ten new samples (one per Markov chain) are drawn randomly from the current posterior PDF (which corresponds to the prior PDF at the beginning). These samples are weighted according to their likelihood raised to the power of δ_λ (see below) and selected with a variant of the Metropolis–Hasting algorithm (Hastings 1970; Metropolis *et al* 1953). Roughly, the samples with the worst likelihood are deleted and the ones with the best likelihood are duplicated so that we always keep ten Markov chains running at the same time. Then, BAYESYS provides eight exploration algorithms to randomly move the new samples in the parameter space and keep the ten Markov chains uncorrelated (see Skilling 2004, for more details). This new set of randomly mixed samples is appended to the Markov chains and used as a new seed for the next step.

The BAYESYS production of new samples is fast but the likelihood computation by LENSTOOL is slow. For each observed image, we must compute the gradient of every potential and sum them to compute the deviation angle and determine the source position. Therefore, the optimization process takes longer with more images and/or more potentials. However, if the r_{cut}^* or σ_0^* parameters are fixed, the luminosity-scaled subhalo gradients can be computed just once (at the first iteration), thus reducing drastically the computation time.

The ‘annealing’ term of the ‘selective annealing’ technique controls the convergence speed. The slower and smoother the convergence, the more accurate is the evidence and the better characterized is the posterior. The annealing process is best seen by rewriting Bayes theorem:

$$\Pr(\theta|D, M) = \frac{\Pr(D|\theta, M)^\lambda \Pr(\theta|M)}{\Pr(D|M)}. \quad (13)$$

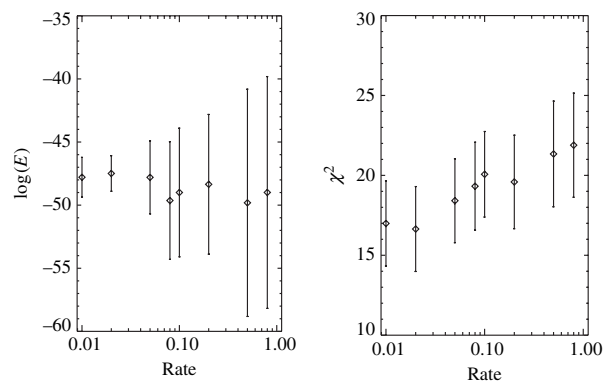


Figure 4. Evidence and χ^2 evolution in function of the convergence speed parameter ‘Rate’.

Here, λ is the cooling factor for the annealing. During a so-called ‘burn-in’ phase, the likelihood influence is raised progressively from $\lambda = 0$ to 1 by step of $\delta_\lambda \sim \text{Rate}/(\log \mathcal{L}_{\max} - \log \bar{\mathcal{L}})$ where $\bar{\mathcal{L}}$ is the mean likelihood value of the ten samples and Rate is an arbitrary constant set by the user. At the beginning of the optimization, δ_λ is small because the likelihood dispersion of the ten samples is large.

As seen above, the samples are weighted and selected according to their likelihood raised to the power of δ_λ . Thus, whatever the likelihoods are widely separated, δ_λ decreases and the convergence automatically slows in proportion to compensate.

In the small-convergence speed limit, the relative information between the beginning and end of a MCMC step is approximately constant and equal to Rate^2 (Skilling 2004).

By decreasing Rate, the user decreases the information rate per MCMC step and thus the evidence error (see left panel of figure 4) but at the price of slower convergence.

The right panel of figure 4 shows that, within the error bars, the median χ^2 is stable when Rate decreases. A lower Rate implies a slower convergence speed. The chains will contain more samples and hence better explore the parameter space towards the best-fit region. This explains the slight decrease of the median χ^2 when Rate decreases. Alternatively, the spread of χ^2 is similar for all Rate values, indicating that the convergence speed does not affect the parameter space exploration around the median χ^2 .

From our experience, we have found that a value between 0.1 and 0.5 gives evidence values that are accurate enough for our purposes, while returning the posterior PDF in a reasonable amount of computation time. From figure 4, we can see that the uncertainty on the logarithm of the evidence is approximately 4 units: this corresponds to an odds ratio of 50 to 1, a sufficiently convincing value. In the rest of this paper, we will use a Rate of 0.1 unless otherwise specified.

3.1. MCMC output

Contrary to maximum likelihood methods (like the downhill method used by Kneib *et al* 1993), the Bayesian MCMC sampler does not look for the best sample of parameters. Instead, it samples the posterior PDF, drawing more samples where the posterior PDF is higher.

The more samples we collect after the burn-in phase, the better the resolution of the posterior PDF. This is of particular interest given that we use 1D and 2D histograms to represent the marginalized posterior PDFs $\Pr(\theta_i|M)$ and $\Pr(\theta_i, \theta_j|M)$. The number of histogram bins is limited by the number of samples. To determine the bin sizes, we use the Freedman and Diaconis rule (Freedman and Diaconis 1981). They have shown that in order to get the best-fit between a PDF and the corresponding histogram, the bin size should be:

$$\text{bin size} = 2\text{IQR}(\theta_i)N^{-1/3}, \quad (14)$$

where IQR is the interquartile range of the θ_i samples and N is the number of samples.

The produced 2D posterior histograms in the rest of this paper show that the parameters are not independent, and that their PDFs are certainly not Gaussian. Techniques based on the assumption of Gaussian errors, with correlation matrix measured around the best fit, are not accurate and likely underestimate some errors. Therefore, uncertainties must be estimated with care, and eventually asymmetric errors must be adopted in case of large asymmetries observed in the posterior PDF.

To compress the posterior PDFs and provide a convenient way of comparing them, we use the median and the standard deviation estimators. It has been shown (Simard 1996) that the median is the most robust estimator for unimodal asymmetric distributions—which is usually the kind of distribution we have for our parameters—whereas the mean estimator is valid only if the distribution is close to Gaussian. The more samples we have, the less we are affected by outliers.

4. Lens potential parameter degeneracies

In this section, we present and interpret the degeneracies observed in galaxy cluster strong lensing models. Degeneracies will always appear in strong lensing modelling because the lensing only constrains the mass inside an Einstein radius. Unfortunately in parametric models, the parameters involved in the computation of the mass inside the Einstein radius are rarely orthogonal and strongly degenerate.

In the literature, we have found several papers presenting parameters degeneracies (see, e.g. Meneghetti *et al* 2007; Rzepecki *et al* 2007; Zekser *et al* 2006) for illustrations of the NFW r_s — ρ_s degeneracy). We are finding similar results, although we are going beyond most of the previous study by exploring many more parameters.

In this section, we use the same potential to simulate and recover the cluster-scale halo, respectively a PIEMD, a NFW and a Sérsic potential. Fitting the data by the true model never happens in practice. However, the presented degeneracies always appear and simple models are required for a proper understanding.

In section 5, we will use different models for the simulation and the recovery in order to compare the limits of each model given the data.

4.1. Description of the simulation

4.1.1. The mass models. We simulate a cluster of galaxies comprising a cluster-scale halo, and 78 galaxy-scale subhalos that perturb the lensing signal. The cluster-scale halo is modelled successively by a PIEMD, a NFW and a Sérsic potential whose input parameters are reported in table 2. The galaxy-scale subhalos are modelled by PIEMD potentials with vanishing core

Figure 5. Left panel: image plane for the PIEMD simulated cluster, showing the image positions of the systems A , B and C at redshifts $z_A = 0.6$, $z_B = 1.0$ and $z_C = 4.0$ in the configurations 1, 2 and 3. The black circles mark the image positions. The critical curves of systems B and C are shown in red. Right panel: The corresponding source plane. The blue crosses mark the source positions; the caustic curves are plotted in black. The plotted caustics for systems B and C are radial and tangential, tangential and tangential, and radial and radial, respectively for configurations 1, 2 and 3. North is up and East is left in both panels.

Figure 6. 2D marginalized posterior PDFs for the parameters of the cluster-scale halo modelled with a PIEMD potential obtained, from left to right, with multiple image configurations 1, 2 and 3 respectively. The three contours stand for the 68, 95 and 99% CL. The input values to the simulation are marked by the stars. The mass of an L^* galaxy is the total mass for a circular profile. The plotted contours in the $r_{\text{cut}}^* - \sigma_0^*$ plot are iso-density contours. The cluster mass M_{eins} is the inferred total enclosed mass (i.e. galaxy subhalos and cluster-scale halo) within the Einstein radius ($30''$).

New Journal of Physics **9** (2007) 447 (<http://www.njp.org/>)

assume uniform priors for the parameters, with a width of 50% centred on the input values; the cD galaxy subhalo parameters are again fixed. We constrain six free parameters with eight constraints.

The obtained posterior PDF is marginalized and plotted in figure 7. The (median) estimated parameters are given in table 4 as well.

Firstly, similarly to the PIEMD case, we note that the degeneracies are more compact in configuration 3 than in configurations 1 and 2 for which the central region of the cluster is less constrained.

Secondly, we note a strong degeneracy between c and the r_s . It can be fitted by a power law $r_s \propto c^\alpha$ where $\alpha = -1.7$, -1.5 and -1.4 for configurations 1, 2 and 3, respectively. To confirm the mathematical origin of this degeneracy, we consider the NFW definition of the aperture mass. By solving numerically for r_s given c at constant aperture mass, we manage to reproduce the observed degeneracy and measure $\alpha = -1.1$, in relatively good agreement with the measured slopes given the uncertainty on the aperture mass.

Thirdly, the ellipticity, the PA, the M_{eins} and the L^* mass parameters are degenerate in the same manner as in the previous section, when the cluster-scale halo was modelled by a PIEMD potential. This confirms that these degeneracies are independent of the cluster model, and just depend on the lensed image configuration.

Finally, in table 4, we note that the L^* cut-off radius error is recovered with nearly the same accuracy when the cluster-scale halo is modelled by a NFW potential than when modelled by a PIEMD potential. This suggests that the scaling relation parameters accuracy is model-independent. Similarly, the uncertainty on the enclosed mass measured at the Einstein radius is similar to that found when the cluster-scale halo is modelled by a PIEMD potential.

4.4. Sérsic posterior distribution analysis

Finally, we fit the Sérsic model with a Sérsic potential for the cluster-scale halo. We perform the recovery of the cluster-scale halo parameters (ϵ , PA, R_e , Σ_e and n), as well as the galaxy-scale subhalo scaling parameters σ_0^* and r_{cut}^* , given the same three configurations of multiple images as before.

Again, we assume uniform priors for the parameters, with widths of 50% centred on the input values. The cD galaxy subhalo parameters are fixed. We constrain seven free parameters with eight constraints.

The obtained posterior PDF is marginalized and plotted in figure 8. The estimated parameters are given in table 5.

Firstly, we note that for the same lensing configuration, the parameters of a cluster-scale halo modelled by a Sérsic potential are more difficult to constrain than those of a PIEMD or a NFW potential. We understand this to be a result of the effective radius R_e and index parameter n mainly impacting the outer region of the mass distribution, which is not probed by strong lensing.

Secondly, the ellipticity, the PA, the M_{eins} and the L^* mass parameters are degenerate in the same manner as in the previous sections, confirming that these degeneracies are dependent on the lensing configuration alone.

Finally, in table 5, we note that the L^* cut-off radius is recovered with nearly the same accuracy as in the case where the cluster-scale halo is modelled with the NFW potential. We suggest therefore that the scaling parameters r_{cut}^* and σ_0^* accuracies cannot be lower than

Figure 7. 2D marginalized posterior PDF of the parameters of the cluster-scale halo modelled with an NFW potential, obtained, from left to right, with multiple-image configurations 1, 2 and 3 respectively. The three contours stand for the 68, 95 and 99% CL. The fiducial values are marked by the stars. The mass of a L^* galaxy is the total mass for a circular profile. The plotted contours in the $r_{\text{cut}}^* - \sigma_0^*$ plot are the iso-density contours. The cluster mass M_{eins} is the total enclosed mass (i.e. galaxy subhalos and cluster-scale halo) in the Einstein radius ($30''$).

Table 4. Parameter recovery results for a cluster-scale halo modelled by a NFW potential, given three different strong lensing configurations. The errors are given at 68% CL. The L^* masses are given for a circular mass component with identical dynamical parameters.

	Input	Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3
ϵ	0.2	0.21 ± 0.02	0.18 ± 0.03	0.21 ± 0.01
PA (degree)	127	127.4 ± 1.0	126.6 ± 4.0	126.6 ± 0.6
c	6	6.5 ± 0.9	6.4 ± 0.8	5.9 ± 0.3
Scale radius (kpc)	300	269.3 ± 54.6	367.9 ± 149.9	284.7 ± 22.5
r_{cut}^* (kpc)	18	21.6 ± 4.8	16.3 ± 3.9	20.6 ± 10.1
σ_0^* (km s $^{-1}$)	200	191.5 ± 15.4	205.6 ± 13.4	169.6 ± 27.8
M_{L^*} ($10^{11} M_{\odot}$)	5.26	5.56 ± 1.7	4.2 ± 1.1	4.9 ± 0.9
M_{eins} ($10^{12} M_{\odot}$)	67.8	66.9 ± 1.8	69.5 ± 2.9	67.4 ± 0.8

about 20 and 7%, respectively. This result is independent of both the model and the lensing configuration.

Figure 9 sums up the results found in this section concerning the accuracy obtained on the mass profile in each configuration for each potential. Although the accuracy depends on the lensing configuration, it is usually better than 5% in the region of multiple images with no obvious bias. The accuracy is model independent, and is just the noise on the image positions (0.1 arcsec) translated into the uncertainty on the parameters.

5. Model inference

In this section, we use the Bayesian evidence to rank models. As an example, we consider the controversial inner slope of the density profile in clusters of galaxies. In Sand *et al* 2004 have used a sample of six galaxy clusters to show that the slope of the central density profile was shallower than r^{-1} as predicted by CDM simulations. In their modelling they were using axisymmetric potentials. The same year, Bartelmann and Meneghetti (2004) reconsider these results and conclude that an NFW profile with a r^{-1} inner slope could not be ruled out by strong lensing once effects of asymmetry and shear were taken into account.

In order to illustrate the model inference with the Bayesian evidence, we assume here that galaxy clusters actually present an inner slope shallower than r^{-1} . Then, we show that even when accounting for asymmetry and shear, the Bayesian evidence is still able to rank models and eventually rule them out.

To do so, as an input model, we use the PIEMD model from section 4.2, i.e. the inner slope is shallower than r^{-1} . In order to observe the limits of Bayesian inference with the evidence, we simulate six models in which we change the size of the cluster-scale halo core radius. We scale the velocity dispersion accordingly so that the enclosed mass at the Einstein radius is maintained.

The three background galaxies of the previous section are lensed through each model. We have to slightly move the sources in the source plane so that in every simulation, we always end up with one tangential system, one radial system and one singly imaged system. For models with $r_{\text{core}} < 30$ kpc, we remove the images predicted at the very centre of the galaxy cluster

Figure 8. 2D marginalized posterior PDF of the parameters of the cluster-scale halo modelled with an Sérsic potential obtained from left to right with configurations 1, 2 and 3 of multiple images respectively. The three contours stand for the 68, 95 and 99% CL. The fiducial values are marked by the stars. The mass of a L^* galaxy is the total mass for a circular profile. The plotted contours in the $r_{\text{cut}}^* - \sigma_0^*$ plot are the iso-mass contours. The cluster mass M_{eins} is the total enclosed mass (i.e. galaxy subhalos and cluster-scale halo) in the Einstein radius ($30''$).

New Journal of Physics **9** (2007) 447 (<http://www.njp.org/>)

Figure 9. Relative mass profile recovery in the three configurations for the three potentials PIEMD (*vertically hatched region*), NFW (-45° *hatched region*) and Sérsic (45° *hatched region*). The arrows below each plot mark the positions of the multiple images used as constraints. The error bars are given at 68% CL.

core radius (see figure 10) as expected from flat core models. Here, the Sérsic model evidence is generally better than the NFW model evidence although the Sérsic model contains an additional free parameter. In the $r_{\text{core}} = 30$ kpc case, the NFW and the Sérsic models evidences are very low because of the stringent constraints imposed by the distribution of multiple images (a triplet of tangential images at $R = 81$ kpc and a set of uniformly distributed images below 40 kpc).

Finally, we conclude that the Bayesian evidence can effectively rank strong lensing models even when accounting for asymmetry and shear. However, this result strongly depends on the presence of images in the cluster centre.

As we are submitting this paper, some of us are already using LENSTOOL and the evidence inference to study the inner slope of the DM profile with real data. Their results will be published in a forthcoming paper.

Table 6. Comparison of the log(Evidence) produced by the fit of the NFW, SIE and Sérsic potentials to a core radius varying PIEMD potential. The values come from fits performed with sets of multiple images described in the text and a Rate equal to 0.1

Core radius (kpc)	E_{NFW}	E_{Sersic}	E_{SIE}	E_{PIEMD}
0	-27	-25	-28	-20
10	-25	-23	-33	-19
20	-27	-24	-146	-19
30	-198	-204	-1391	-25
40	-81	-70	-2795	-19
50	-86	-73	-3260	-22

6. Conclusion

In this study, we have described how to build a gravitational lensing model of galaxy clusters and a set of constraints with multiply and singly imaged systems. Then, we have presented a new Bayesian method for efficiently exploring its parameter space without falling into local maxima of the likelihood PDF. The Bayesian method also gives an estimate of the errors and includes prior knowledge. We have illustrated the Bayesian posterior PDF analysis by studying the degeneracies in the PIEMD, the NFW and the Sérsic potentials in three different configurations of multiple images. We draw the following conclusions.

1. Strong degeneracies appear in both the PIEMD, the NFW and the Sérsic potentials. The parameters are clearly dependent and compensate in order to produce a constant enclosed mass at the images location. The degeneracies are either due to the mathematical definitions of the potentials (σ_0-r_{core} , σ_0-r_{cut} for PIEMD, $c-r_s$ for NFW, $R_e-\Sigma_e$, R_e-n and Σ_e-n for Sérsic) or to the configuration of multiple images ($\epsilon-PA$, $\epsilon-L^*$ galaxy mass and $M_{\text{eins}}-L^*$ galaxy mass). The latter degeneracies are easily identified by looking at the degeneracies between the shape and the dynamical parameters. They are model-independent. In every case, the enclosed mass in the Einstein radius decreases with the model ellipticity.
2. Radial systems of multiple images combined to tangential arcs provide unique constraints on the slope of the mass profile. It is therefore important to identify radial (or central) images in the cluster cores.
3. The PIEMD cut-off radius, the Sérsic effective radius and the NFW scale radius are poorly constrained by strong lensing only. Hopefully, future parametric methods combining weak and strong lensing will provide tighter constraints.
4. Galaxy-scale subhalos degenerate with the cluster-scale halo. The best constraints were obtained in lensing configurations combining radial and tangential multiple images systems. In this case, we barely manage a 20% accuracy on the cut-off radius of subhalos scaled with scaling relations. As shown by (Natarajan *et al* 1998, 2006) weak and strong lensing combination can improve this result.

We have also illustrated how to rank models with the Bayesian evidence. We fit a NFW, a Sérsic and a SIE potential to six PIEMD simulated clusters with different core radius. We have shown that the NFW and the Sérsic potentials can actually fit systems of multiple images

Figure 10. Aperture mass profile errors relative to the input PIEMD mass profile for the fitted potentials SIE (*vertically hatched region*), NFW (-45° hatched region) and Sérsic (45° hatched region) as a function of the aperture radius. The hatched width represents the 3σ error estimated from the posterior PDF. The arrows mark the positions of the multiple images used as constraints.

produced by clusters with core radius *provided no images lie inside the core radius*. For large core radius, central images appear at the very centre of the cluster and provide enough constraints to disentangle PIEMD, NFW or Sérsic-based models.

Although strong lensing is a wonderful tool to infer surface densities, it becomes rapidly limited by the models and the observed lensing configuration. For instance, it is not possible to constrain the central density slope without radial images. Actually, the presence of radial images strongly suggests the presence of a flat core.

In a forthcoming paper, we will expand this method to constrain cosmological parameters with strong lensing. With a large number of multiple images with known redshift, one should be able to compare the strong lensing cosmography constraints (similarly to the early work of Golse *et al* (2002) and Soucail *et al* (2004)) with other methods such as the CMB/WMAP results, or supernovae or cosmic shear results.

Acknowledgments

We acknowledge B Fort and A Smette for their support and useful comments. We acknowledge the referees for their useful comments. We thank J Skilling for allowing us to use his BAYESYS MCMC sampler. JPK acknowledges support from CNRS and CNES. This work was supported in part by the European Community's Sixth Framework Marie Curie Research Training Network Programme, contract no. MRTN-CT-2004-505183 'ANGLES'. The Dark Cosmology Centre is funded by the Danish National Research Foundation.

Appendix A. Critical lines computation with marching squares

A multiscale marching squares technique has been implemented in LENSTOOL to compute the critical lines. Marching squares is a computer graphics algorithm that generates contour lines for a 2D scalar field. It is similar to the marching cubes algorithm (Lorensen and Cline 1987). The algorithm proceeds through a scalar field taking four neighbour locations at a time (thus forming an imaginary square), then determining the line needed to represent the part of the contour that passes through this square. The individual lines are then fused into the desired contour.

This is done by creating an index to a precalculated array of 16 ($2^4 = 16$) possible line configurations within the square (see figure A1), by treating each of the four scalar values as a bit in a 4-bit integer. If the scalar's value is higher than the iso-value (i.e. it is inside the contour) then the appropriate bit is set to one, while if it is lower (outside), it is set to zero. The final value after all four scalars are checked, is the actual index to the line configuration array.

In the critical lines case, the scalar field is not known *a priori*. Therefore, we adopt a multiscale algorithm to focus towards the critical lines. As illustrated in figure A2, the field is split in two recursively until we reach a higher limit for the size of a rectangle. Then, if a critical line is detected in a rectangle, it is split further. The rectangles with no critical line detected are left aside. Once the size of the rectangle has reached a lower limit, a line is kept in memory for this rectangle according to the marching squares configurations. The individual lines are then fused into the critical lines contour.

The previous technique was a line following algorithm called SNAKE. It starts from the centre of a clump and picks amplification samples along its way outwards. When an amplification sign change is encountered, it precises the infinite amplification position and circles the clump until it comes back to its starting point along the critical line.

In complex environment, the SNAKE algorithm sometimes gets lost and produces incomplete critical lines. Conversely, the multiscale marching square algorithm never gets lost and identifies all the critical lines in the field. However, it can miss a part of critical line if the higher limit is too large.

Appendix B. Pseudo-elliptical Sérsic potential

As another addition to LENSTOOL, we have incorporated the Sérsic density profile (Sérsic 1968) as an alternative description of the matter density. The motivation for including it is that as the Sérsic profile describes the 2D luminosity profile of elliptical galaxies (Ciotti 1991; Caon *et al* 1993; Sérsic 1968), it can be used to separately model the baryonic matter component (which should be traced by the light) and the DM component, given enough lensing constraints. In addition, Merritt *et al* (2005, 2006), found that a deprojected Sérsic profile gives a better fit

Figure A1. Sixteen square configurations. The empty and filled circles are points with positive and negative amplification respectively. The dashed lines are the inferred critical lines.

Figure A2. Multiscale marching square field splitting. The boxes represent the splitting squares and the red lines, the critical curve contour. The imposed upper and lower limits for the boxes sizes are $10''$ and $1''$ respectively. The $1''$ boxes are not plotted for clarity.

than an NFW profile to the 3D density profile of DM halos from simulations. Elíasdóttir and Möller (2007) found that given that the surface density distribution is indeed given by a Sérsic profile, but fitted by an NFW using lensing constraints, it can lead to unrealistic estimates of the parameters (e.g. the predicted weak lensing signal and the concentration parameter), making the Sérsic profile an interesting alternative for modelling the DM halos themselves. Finally, the

References

- Abdelsalam H M, Saha P and Williams L L R 1998 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **294** 734
- Bardeau S, Kneib J P, Czoske O, Soucail G, Smail I, Ebeling H and Smith G P 2005 *Astron. Astrophys.* **434** 433–48
- Bartelmann M and Meneghetti M 2004 *Astron. Astrophys.* **418** 413–8
- Blandford R and Narayan R 1986 *Astrophys. J.* **310** 568–82
- Bradać M, Schneider P, Lombardi M and Erben T 2005 *Astron. Astrophys.* **437** 39–48
- Brainerd T G, Blandford R D and Smail I 1996 *Astrophys. J.* **466** 623
- Broadhurst T *et al* 2005 *Astrophys. J.* **621** 53–88
- Cabanac R A *et al* 2007 *Astron. Astrophys.* **461** 813–21
- Caon N, Capaccioli M and D’Onofrio M 1993 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **265** 1013
- Ciotti L 1991 *Astron. Astrophys.* **249** 99–106
- Ciotti L and Bertin G 1999 *Astron. Astrophys.* **352** 447–51
- Clowe D and Schneider P 2001 *Astron. Astrophys.* **379** 384–92
- Comerford J M and Natarajan P 2007 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **379** 190–200
- Corless V and King L 2007 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **380** 149–61
- de Propriis R, Stanford S A, Eisenhardt P R, Dickinson M and Elston R 1999 *Astron. J.* **118** 719–29
- Diego J M, Sandvik H B, Protopapas P, Tegmark M, Benítez N and Broadhurst T 2005 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **362** 1247–58
- Dominik M 1995 *Astron. Astrophys. Suppl.* **109** 597
- Dye S and Warren S J 2005 *Astrophys. J.* **623** 31–41
- Elíasdóttir Á and Möller O 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **JCAP07(2007)006**
- Freedman D and Diaconis P 1981 *Probab. Theor. Relat. Fields* **57** 453–76
- Gavazzi R, Fort B, Mellier Y, Pelló R and Dantel-Fort M 2003 *Astron. Astrophys.* **403** 11–27
- Golse G 2002 Strong lensing *PhD thesis* Université Paul Sabatier, Toulouse III, France
- Golse G and Kneib J P 2002 *Astron. Astrophys.* **390** 821–7
- Golse G, Kneib J P and Soucail G 2002 *Astron. Astrophys.* **387** 788–803
- Halkola A, Seitz S and Pannella M 2006 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **372** 1425–62
- Hastings W 1970 *Biometrika* **57** 97–109
- Ilbert O *et al* 2006 *Astron. Astrophys.* **457** 841–56
- Jeffreys H 1961 *Theory of Probability* 3rd edn (Oxford: Oxford University Press)
- Jorgensen I, Franx M and Kjaergaard P 1996 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **280** 167–85
- Jullo E *et al* 2008 in preparation
- Kassiola A and Kovner I 1993 *Astrophys. J.* **417** 450
- King L and Corless V 2007 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **374** L37–41
- King L J, Clowe D I and Schneider P 2002 *Astron. Astrophys.* **383** 118–24
- Kneib J, Hudelot P, Ellis R S, Treu T, Smith G P, Marshall P, Czoske O, Smail I and Natarajan P 2003 *Astrophys. J.* **598** 804–17
- Kneib J P, Ellis R S, Smail I, Couch W J and Sharples R M 1996 *Astrophys. J.* **471** 643
- Kneib J P, Mellier Y, Fort B and Mathez G 1993 *Astron. Astrophys.* **273** 367
- Kochanek C S 2006 *Saas-Fee Advanced Course 33: Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro* ed G Meylan, P Jetzer, P North, P Schneider, C S Kochanek and J Wambsganss (Berlin: Springer Verlag) pp 91–268
- Koopmans L V E 2005 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **363** 1136–44
- Koopmans L V E, Treu T, Bolton A S, Burles S and Moustakas L A 2006 *Astrophys. J.* **649** 599–615
- Limousin M, Kneib J P and Natarajan P 2005 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **356** 309–22
- Limousin M, Kneib J P and Natarajan P 2006 *Preprint astro-ph/0606447*
- Limousin M *et al* 2007 *Astrophys. J.* **668** 643–66
- Lorensen W E and Cline H E 1987 *Proc. SIGGRAPH 87 Comput. Graphics Q.* **21** 163–9
- Lynds R and Petrosian V 1986 *Bull. Am. Astron. Soc.* **18** 1014

Capítulo 3

MS 2053.7-0449

MS2053 tiene un corrimiento al rojo de $z=0.583$. No es un cúmulo ópticamente rico cuando se compara con otros cúmulos del EMSS con $z > 0.5$ (Luppino et al. 1999), y de estos cúmulos a alto corrimiento al rojo, éste tiene la menor luminosidad en rayos-X. Luppino & Gioia (1992) descubrieron la presencia de un arco en las imágenes de MS2053, localizado a $\sim 16''$ en la dirección Norte con respecto a la galaxia más brillante del cúmulo. El arco de $\sim 11''$ de largo se divide en dos componentes, los arcos A y B. Hasta la fecha sólo el arco A tiene un corrimiento al rojo medido. Éste fue obtenido usando datos espectroscópicos del Keck por Tran et al. (2005) quienes determinaron que dicha imagen correspondía a una fuente con un $z = 3.146$.

Este cúmulo es un objeto poco estudiado. Sólo existen en la literatura algunos trabajos sobre MS2053: el estudio de lente débil hecho por Hoekstra et al. (2002) y los estudios sobre las poblaciones de galaxias de Wuyts et al. (2004) y de Tran et al. (2005). Hoekstra et al. (2002) analizaron la señal de lente débil producida por este cúmulo de galaxias usando imágenes del HST Wide Field and Planetary Camera 2 (WFPC2). Ajustando una esfera isoterma singular estimaron la velocidad de dispersión del cúmulo en $\sigma = 886 \text{ km s}^{-1}$. Estos autores también ajustaron un perfil NFW y determinaron un parámetro de concentración del cúmulo (ver sección 3.1 del artículo) que coincidía con el predicho por un modelo CDM sin constante cosmológica. Wuyts et al. (2004) midieron las velocidades de dispersión de muchas de las galaxias elípticas y lenticulares en este cúmulo y Tran et al. (2005) combinando imágenes del HST WFPC2 con datos espectroscópicos del Keck Low

Resolution Imager Spectrograph (LRIS) encontraron que este cúmulo está formado por dos componentes ligadas gravitacionalmente, un cúmulo principal (MS 2053-A) y otro de menor tamaño que está cayendo hacia el primero (MS 2053-B). De los 149 miembros confirmados del cúmulo, 113 pertenecen a MS 2053-A y 36 a MS 2053-B

El único intento para describir el efecto de lente fuerte en este cúmulo fue hecho también por Hoekstra et al. (2002). Suponiendo un corrimiento al rojo de $z=2$ para el arco y utilizando una esfera isoterma singular, estos autores encontraron una velocidad de dispersión de 1030 km s^{-1} , la cual era consistente con sus estimaciones de lente débil. Como la masa que estimaron a través de la lente fuerte estaba por encima del valor de la calculada con lente débil, atribuyeron este efecto a que la distribución de masa estaba elongada en la dirección del arco, ya que dicha elongación podía apreciarse en la distribución de luz. Esta elongación en la distribución de los miembros del cúmulo también fue reportada por Tran et al. (2005).

La motivación de este trabajo es realizar el primer modelo detallado del cúmulo bimodal MS 2053. El hecho de que dicho cúmulo presente dos estructuras, aunado a la falta de sistemas de arcos necesarios para constreñir el modelo, hacen que el describir el perfil de densidad y la distribución de masa en MS 2053 sea todo un reto. En este sentido el código LENSTOOL desarrollado por Kneib et al. (1993) y al cual se le ha incluido el método Bayesiano MCMC (Jullo et al. 2007), ha hecho posible realizar el estudio del espacio de parámetros y encontrar el mejor modelo de la distribución de masa para este cúmulo. Los ajustes fueron hechos considerando un solo perfil NFW (suponiendo que el cúmulo esta formado por un solo halo) y dos perfiles NFW (tomando en cuenta la bimodalidad del cúmulo), así como 23 componentes a escala galáctica como perturbaciones al potencial del cúmulo. Las galaxias fueron modeladas utilizando esferas elípticas singulares isotérmicas, constriñendo sus parámetros con datos observacionales. Se midieron las posiciones y las formas de los arcos, así como las posiciones de las galaxias usando imágenes del HST. Los resultados de este trabajo se pueden resumir de la siguiente manera:

- Encontramos que el espacio de parámetros definido por las posiciones XY del centro del cúmulo tiene una distribución bimodal que sugiere que el cúmulo está en un proceso de fusión. Además, la calidad de los ajustes medidos a través de χ^2 también favorecen el modelo bimodal.

-
- Nuestros modelos de manera consistente predecían una tercera imagen demagnificada como contra-imagen del sistema AB.
 - Encontramos un candidato para esta contra-imagen cerca de la posición predicha. El candidato muestra una estructura que puede ser la imagen distorsionada de una galaxia por el efecto de la lente. Además de que tiene el mismo color F702W-F814W que los arcos A y B.
 - Utilizando el efecto de lente fuerte confirmamos la asimetría y la elongación en la distribución de masa de MS 2053 reportada por otros autores (Hoekstra et al. 2002; Tran et al. 2005), y estimamos una masa total dentro de los arcos de $4.7 \times 10^{13} M_{\odot}$. Encontramos una discrepancia muy importante entre esta masa y la estimada en rayos-X que puede ser atribuida al hecho de que MS 2053 no está en equilibrio hidrodinámico.
 - Las concentraciones encontradas para el modelo bimodal y para el no bimodal están por debajo de los valores esperados en un modelo Λ CDM. Estas diferencias pueden ser explicadas por asimetrías en la distribución de masa y por efectos de proyección.



- Le Fèvre, O., Hammer, F., Angonin, M., Gioia, I. M., & Luppino, G. A. 1994, *ApJ*, 422, L5
- Limousin, M., et al. 2006, *ApJ*, submitted (astro-ph/0612165)
- Luppino, G. A., & Gioia, I. M. 1992, *A&A*, 265, L9
- Luppino, G. A., Gioia, I. M., Hammer, F., Le Fèvre, O., & Annis, J. A. 1999, *A&AS*, 136, 117
- Lynds, R., & Petrosian, V. 1986, *BAAS*, 18, 1014
- Meneghetti, M., Bartelmann, M., & Moscardini, L. 2003, *MNRAS*, 340, 105
- Moore, B., Governato, F., Quinn, T., Stadel, J., & Lake, G. 1998, *ApJ*, 499, L5
- Narayan, R., Blandford, R., & Nityananda, R. 1984, *Nature*, 310, 112
- Navarro, J. F., Frenk, C. S., & White, S. D. M. 1997, *ApJ*, 490, 493
- Oguri, M., Takada, M., Umetsu, K., & Broadhurst, T. 2005, *ApJ*, 632, 841
- Oguri, M., et al. 2004, *ApJ*, 605, 78
- Paczynski, B. 1987, *Nature*, 325, 572
- Rasia, E., et al. 2006, *MNRAS*, 369, 2013
- Sand, D. J., Treu, T., Ellis, R. S., & Smith, G. P. 2005, *ApJ*, 627, 32
- Sand, D. J., Treu, T., Smith, G. P., & Ellis, R. S. 2004, *ApJ*, 604, 88
- Smith, G. P., Kneib, J.-P., Ebeling, H., Czoske, O., & Smail, I. 2001, *ApJ*, 552, 493
- Smith, G. P., Kneib, J.-P., Smail, I., Mazzotta, P., Ebeling, H., & Czoske, O. 2005, *MNRAS*, 359, 417
- Soucail, G., Fort, B., Mellier, Y., & Picat, J. P. 1987, *A&A*, 172, L14
- Soucail, G., Kneib, J.-P., & Golse, G. 2004, *A&A*, 417, L33
- Torri, E., Meneghetti, M., Bartelmann, M., Moscardini, L., Rasia, E., & Tormen, G. 2004, *MNRAS*, 349, 476
- Tran, K. V. 2002, Ph.D. thesis, Univ. California (Santa Cruz)
- Tran, K. V., Franx, M., Illingworth, G., Kelson, D. D., & van Dokkum, P. 2003, *ApJ*, 599, 865
- Tran, K. V., van Dokkum, P. G., Illingworth, G. D., Kelson, D., Gonzalez, A., & Franx, M. 2005, *ApJ*, 619, 134
- Turner, E. L., Ostriker, J. P., & Gott, J. R., III. 1984, *ApJ*, 284, 1
- Vikhlinin, A., VanSpeybroeck, L., Markevitch, M., Forman, W. R., & Grego, L. 2002, *ApJ*, 578, L107
- Wright, C. O., & Brainerd, T. G. 2000, *ApJ*, 534, 34
- Wuyts, S., van Dokkum, P. G., Kelson, D. D., Franx, M., & Illingworth, G. D. 2004, *ApJ*, 605, 677
- Zaritsky, D., & Gonzalez, A. H. 2003, *ApJ*, 584, 691

Capítulo 4

MS 0440.5+0204

MS0440 es un cúmulo que forma parte de la muestra del EMSS y fue descubierto por Gioia et al. (1990). Éste es un cúmulo ópticamente pobre localizado a un corrimiento al rojo de $z = 0.19$. Tiene un núcleo múltiple y compacto formado por varias galaxias cD el cual es rodeado por un numeroso grupo de galaxias muy débiles. El cúmulo muestra al menos 15 estructuras en forma de arco (Luppino et al. 1993). MS0440 es uno de los cúmulos más espectaculares en la muestra EMSS ya que posee un gran número de arcos muy elongados y claramente simétricos. El único modelo de lente fuerte reportado en la literatura para este cúmulo fue realizado por Gioia et al. (1998), quienes pusieron un límite a la masa del cúmulo y calcularon el rango posible de corrimientos al rojo para los diferentes sistemas de arcos. Estos autores derivaron una distribución de masa proyectada de $6.6 - 9.5 \times 10^{13} M_{\odot}$ para la región dentro de los arcos. Su modelo fue construido suponiendo que las imágenes múltiples provenían de cinco fuentes diferentes. Por otro lado muchos autores han estudiado las propiedades dinámicas de MS0440 y han medido la velocidad de dispersión de este cúmulo encontrando valores análogos (Carlberg et al. 1996; Gioia et al. 1998; Borgani et al. 1999; Girardi & Mezzetti 2001).

La principal motivación para realizar este trabajo es la de construir el primer modelo detallado de lente fuerte de MS0440 usando imágenes observadas con el HST junto con datos espectroscópicos. La segunda y no menos importante, es discriminar entre dos perfiles de masa diferentes. Para esto hemos ajustado dos perfiles diferentes a los datos observacionales y hemos comparado cuál es el mejor ajuste. Los perfiles utilizados fueron el NFW y el PIEMD (ver sección 4.1 del artículo) los cuales son

comúnmente empleados para modelar cúmulos de galaxias. Aunque el PIEMD ha sido usado con éxito por varios autores para modelar cúmulos (Kneib et al. 1996; Smith et al. 2005; Covone et al. 2006; Limousin et al. 2007) y otros autores han encontrado también buenos ajustes con perfiles NFW (Kneib et al. 2003; Oguri et al. 2004; Gavazzi 2005; Comerford et al. 2006), no existe un estudio comparativo de ambos perfiles utilizando cúmulos de galaxias reales. El trabajo de Jullo et al. (2007) fue un primer paso en esa dirección ya que mostró que era posible comparar modelos cuantitativamente utilizando la Evidencia Bayesiana, sin embargo sus resultados fueron obtenidos usando cúmulos de galaxias simulados.

MS 0440 resulta un buen candidato para realizar este tipo de comparaciones entre perfiles ya que se puede apreciar de sus imágenes que es un cúmulo *circular*, es decir un cúmulo que no posee una segunda componente como MS 2053 y puede ser modelado con un simple halo de materia oscura. Además este cúmulo posee arcos radiales y tangenciales. Los arcos radiales son muy importantes ya que constriñen la forma del perfil de masa. Para una lente axialmente simétrica, la matriz Jacobiana tiene dos valores propios (vease Apéndice A): uno relaciona las líneas críticas tangenciales con la masa total encerrada y el otro la posición de los arcos radiales con la derivada de la masa (Schneider et al. 1999). Y como el NFW y el PIEMD son perfiles con diferentes pendientes logarítmicas, los arcos radiales son muy importantes para poder discriminar entre ambos modelos en un cúmulo circular como lo es MS 0440.

Los resultados de este trabajo pueden ser resumidos de la siguiente manera:

- Encontramos que ambos perfiles, el PIEMD y el NFW, reproducen de manera aproximada las imágenes observadas en MS 0440 y predicen un corrimiento al rojo de $z \approx 0.7$ para los arcos radiales. Sin embargo el modelo NFW se ajusta marginalmente mejor a los datos sobre el PIEMD ya que $\chi^2_{DOF} = 0.5$ para el primero y $\chi^2_{DOF} = 0.9$ para el último.
- En la zona donde tenemos constricciones observacionales, la evidencia Bayesiana apoya al perfil NFW ($\rho \propto r^{-1}$) comparado con el perfil PIEMD ($\rho \propto r^{-2}$). Si bien este resultado puede ser considerado como un acierto para las simulaciones en un modelo Λ CDM, hay que hacer notar que el perfil no fue probado para radios menores a la posición donde tenemos nuestro primer arco radial.

Por lo que el perfil podría tener una pendiente más pronunciada o menos pronunciada.

- Los arcos radiales combinados con los arcos tangenciales proveen una forma de constreñir la pendiente del perfil de masa. En este trabajo hemos mostrado cómo la inclusión de los sistemas radiales nos permite discriminar entre el perfil PIEMD y el NFW.
- Estimamos la masa total dentro de los arcos y encontramos que ésta es igual a $7.7 \times 10^{13} M_{\odot}$. Valor que coincide con el obtenido a través de mediciones en rayos-X corregido de acuerdo al trabajo de Rasia et al. (2006). Este resultado es consistente con nuestros resultados de lente fuerte ya que un perfil isoterma ($\rho \propto r^{-2}$) es menos favorecido que un NFW por la evidencia Bayesiana.
- El parámetro de concentración encontrado para el modelo NFW está por encima del valor promedio predicho por las simulaciones de N-cuerpos de cúmulos en una cosmogonía Λ CDM. Sin embargo dicha diferencia puede ser explicada a través de diversos mecanismos (ver la discusión en Limousin et al. 2007, y las referencias ahí mostradas) y los trabajos de Neto et al. (2007) usando las Simulaciones del Milenio muestran que pueden existir halos con concentraciones que exceden $c_{200} = 7.5$.

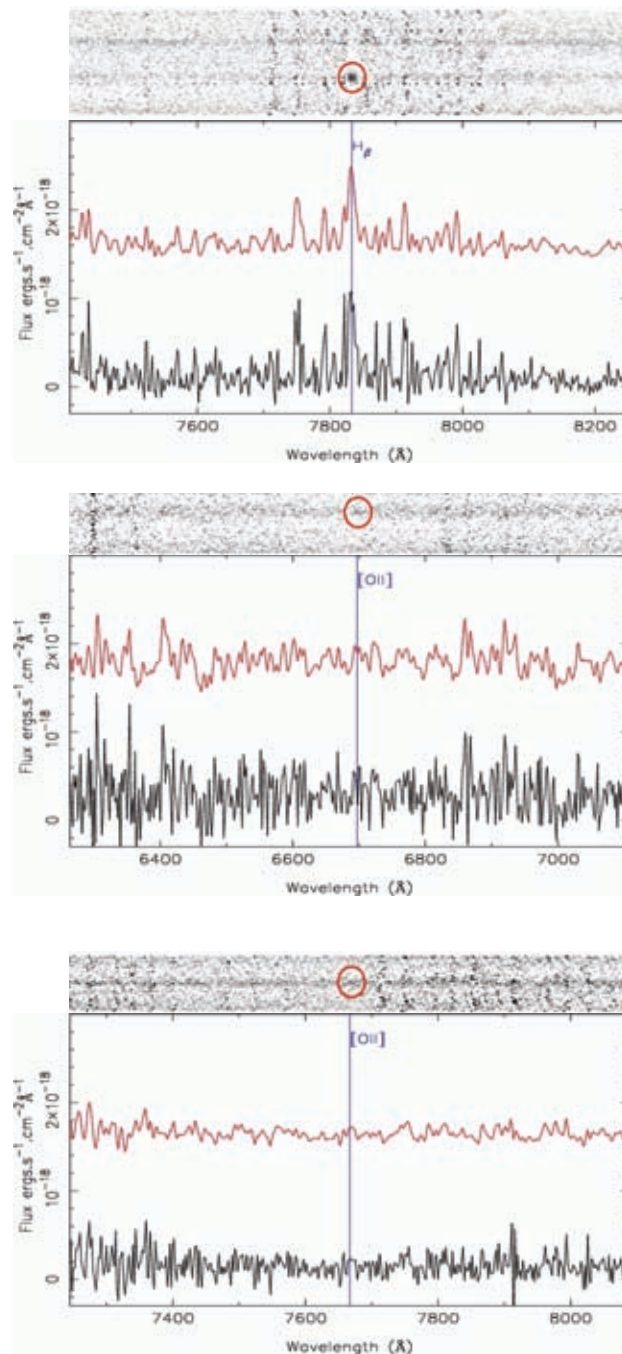


Fig. 2. 1D and 2D spectra of the arcs. Top panel: M1.2. Middle panel: M2.1. Bottom panel: M3.2. In red the spectra smoothed with a 1 pixel Gaussian filter.

Table 4. Best-fitting parameters. The first two columns identifies the model and the different scale components; in both models the galaxy-scale mass component (denoted with L^*) are modeled using PIEMD. Columns 3 and 4 list the position in arcseconds relative to the BCG. Columns 5 and 6 the geometric parameters. From columns 7 to 11 the different profiles parameters. In the last two columns the reduced χ^2 and the evidence of each model, respectively.

Model	Comp.	X ["]	Y ["]	ϵ	θ [$^\circ$]	r_{core} [kpc]	r_s [kpc]	r_{cut} [kpc]	σ_0 [km s $^{-1}$]	σ_s [km s $^{-1}$]	χ^2_{DOF}	log(E)
PIEMD	Cluster	-0.9 ± 0.7	0.4 ± 0.4	0.13 ± 0.04	168 ± 13	45 ± 6		2262 ± 575	1078 ± 52		0.9	-31.3 ± 0.2
	L^*	—	—	—	—	0.15		6 ± 10	284 ± 40			
NFW	Cluster	-0.5 ± 0.4	1.2 ± 0.3	0.08 ± 0.02	166 ± 2		397 ± 65	—		1284 ± 64	0.5	-30.3 ± 0.2
	L^*	—	—	—	—	0.15		17 ± 12	161 ± 35			

Capítulo 5

LAES

5.1. Galaxias primigenias

Las galaxias se formaron cuando las perturbaciones de densidad en la materia oscura colapsaron debido a inestabilidades gravitacionales y cuando el gas se condensó y se enfrió en el fondo de los pozos de potencial, dando origen a las estrellas (White & Rees 1978). Estas galaxias (ancestros de las galaxias al día de hoy) son comúnmente llamadas galaxias primigenias (PGS por sus siglas en inglés). El estudio de estos objetos, a través de su función de luminosidad, es importante ya que puede proporcionar información sobre la época de formación de las galaxias en el Universo temprano. Además, las propiedades de las PGS proveen constricciones a la evolución de las galaxias y a la formación de la secuencia de Hubble (Giavalisco 2002).

El medio interestelar de las PGS no contiene una gran cantidad de polvo (algo esperado en sistemas muy jóvenes), lo cual implica que su espectro UV debe estar caracterizado por muy poco, si no es que nada de enrojecimiento y por una emisión intensa en la línea Ly_α . Este espectro además tendrá una discontinuidad muy pronunciada en 912\AA , en el continuo de Lyman (Lyman break); producto de las atmósferas estelares de estrellas masivas y por la absorción del HI en el medio interestelar. Basado en este último punto, Steidel & Hamilton (1992) introducen una técnica para buscar galaxias a alto corrimiento al rojo. La técnica consiste en utilizar tres filtros de banda ancha con longitudes centrales $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ y con sus rangos espectrales no sobrepuestos. Si $\lambda_1 \lesssim (1+z)912\text{\AA} \lesssim \lambda_2$, donde z es el

corrimiento al rojo de la galaxia, entonces si ésta contiene estrellas jóvenes, aparecerá relativamente azul al medirla con los filtros λ_2 y λ_3 y será invisible en el filtro λ_1 . El uso de esta técnica ha permitido encontrar cientos de galaxias, las cuales han sido confirmadas espectroscópicamente como galaxias de población estelar joven a $z \approx 3$ (Steidel et al. 1996).

Si bien las LBGS (Lyman break galaxies) son galaxias que están formando estrellas jóvenes, éstas no muestran las propiedades que uno esperaría en las PGS. El espectro UV de las LBGS presenta fuertes líneas de absorción interestelar de C, O, Si y Al y también líneas estelares de alto grado de ionización de HeII, CIV, SiIV y NV (Giavalisco 2002). Esto indica que el estado actual de formación estelar fue precedido por un brote estelar más temprano. Además, la pendiente en el continuo UV y las líneas de Balmer sugieren que las LBGS contienen polvo (Pettini et al. 1998).

Por otra parte, todas las galaxias conocidas a $z > 5$ exhiben una línea en emisión Ly_α muy fuerte que domina sobre el continuo, y es lo que se esperaría durante los primeros cientos de millones de años después de iniciado un violento brote de formación estelar (Thommes & Meisenheimer 2005); antes de que los nuevos metales puedan ser reciclados en el medio interestelar y formen el polvo. De ahí que se denominen LAES. A $z = 3$, existen también esta clase de objetos (Shapley et al. 2003; Kudritzki et al. 2000). Debido a sus bajas tasas de formación estelar, se cree que son galaxias pequeñas en las cuales el primer brote de formación ha ocurrido mucho después que en las LBGS.

Las primeras exploraciones para buscar LAES no tuvieron buenos resultados ya que no se detectaron PGS con emisión Ly_α (Pritchett 1994). Pero las exploraciones más recientes, utilizando imágenes de banda angosta han mostrado ser efectivas (Cowie & Hu 1998; Hu et al. 1998; Rhoads et al. 2003; Maier et al. 2003). Para hacer esto, se utilizan filtros angostos ($\sim 100\text{\AA}$) que se colocan en una región espectral donde el brillo del cielo es bajo. Hasta hace un par de años el número de LAES a $z > 5$ encontrados en estas exploraciones no era suficientemente grande como para poder obtener conclusiones acerca de la época en que se formaron las galaxias (Thommes & Meisenheimer 2005), además de que existían grandes incertidumbres en las funciones de luminosidad inferidas para esta clase de objetos (Hu et al. 2004). Sin embargo en fechas recientes el número de LAES identificados fotométricamente

y espectroscópicamente ha aumentado considerablemente (Shimasaku et al. 2006; Kashikawa et al. 2006; Venemans et al. 2007) y el número aumentará aún más con las exploraciones como MUSYC (Gawiser et al. 2006) y SUBARU (ver por ejemplo Ouchi et al. 2007). Este incremento en los datos observacionales ha hecho posible incluso hacer predicciones sobre el número de LAES a muy alto corrimiento al rojo (ver por ejemplo Nilsson et al. 2007) y su posibilidad de observación en futuras exploraciones.

5.2. LAES y Ly α -blobs

Se han sugerido muchos mecanismos como posibles fuentes de energía de la emisión Ly α en objetos a alto corrimiento al rojo:

1. Fotoionización del gas en las galaxias por estrellas jóvenes (Partridge & Peebles 1967).
2. Gas ionizado por radiación de núcleos activos de galaxias (ver por ejemplo Haiman & Rees 2001)
3. El gas dentro de halos de materia oscura que se está enfriando y colapsando para formar una galaxia puede radiar su energía gravitacional mediante emisión Ly α producto de excitaciones colisionales. Ésta es llamada acreción fría (ver por ejemplo Haiman et al. 2000; Fardal et al. 2001).
4. Vientos galácticos o jets en radio galaxias que chocan y calientan el gas produciendo la emisión (ver por ejemplo McCarthy et al. 1987).

La mayoría de los LAES a alto corrimiento al rojo detectados hasta la fecha son compactos y parecen ser galaxias individuales en las cuales la emisión Ly α se origina por fotoionización del gas por estrellas jóvenes, favoreciendo el escenario 1. Sin embargo, las exploraciones de LAES han encontrado otra clase de emisores, los llamados Ly α -blobs (Fynbo et al. 1999; Keel et al. 1999; Steidel et al. 2000; Francis et al. 2001; Villar-Martín et al. 2005), en los cuales la emisión Ly α es mucho más extendida (desde varias decenas de kpc hasta más de 150 kpc) y existe evidencia de que puede ser producida por acreción fría (Nilsson et al. 2006). Algunos Ly α -blobs

se encuentran en regiones con muy alta densidad de LBGs (Matsuda et al. 2004; Dey et al. 2005) y otros en campos desprovistos de estos (Nilsson et al. 2006; Saito et al. 2006), algunos muestran evidencia de actividad AGN (Dey et al. 2005) y otros no (Matsuda et al. 2004; Saito et al. 2006). Como los modelos teóricos muestran que los Ly_α -blobs pueden estar asociados a proto-galaxias que se están colapsando (Dijkstra et al. 2006a,b) y a galaxias de población III (Schaerer 2003), el estudio de ambas clases de objetos (LAES y Ly_α -blobs) son importantes no sólo para entender el proceso de formación de las galaxias jóvenes sino también para comprender su evolución.

En este sentido, la motivación de esta segunda parte de la tesis es estudiar las funciones de luminosidad de ambas clases de objetos a través del efecto de lente gravitacional y su probabilidad de amplificación. Si las funciones de luminosidad son diferentes para LAES y para Ly_α -blobs, donde por diferentes entendemos que difieren no sólo en el número de objetos esperados sino también en el corrimiento al rojo al cual ocurre el máximo, se esperaría que la forma de la distribución de probabilidad reflejara estas diferencias. Para hacer el estudio de las funciones usaremos los modelos de los cúmulos MS 0440 y MS 2053. Es importante hacer notar que MS 0440 está mejor constreñido que MS 2053 y que la definición de sus líneas críticas es superior, por lo que es un candidato más conveniente para realizar la estadística y comprobar nuestros resultados con futuras observaciones (ver Capítulo 6). Sin embargo, con el fin de ejemplificar nuestro método de estudio, también presentaremos la estadística en MS 2053 (Verdugo & de Diego 2007). Hay que señalar que cuando tengamos nuevos datos observacionales de éste cúmulo que nos permitan obtener un mejor modelo de la lente, haremos un estudio semejante al que planeamos hacer en MS 0440.

5.3. Funciones de luminosidad

Consideremos el número de LAES por unidad de volumen comóvil con luminosidades en el rango $(L, L + dL)$ dado por $\Phi(z, L)dL$ (ver Apéndice B). Entonces, el número de LAES por unidad de volumen comóvil, con una luminosidad más brillante que L_{Ly_α} se obtiene a partir de

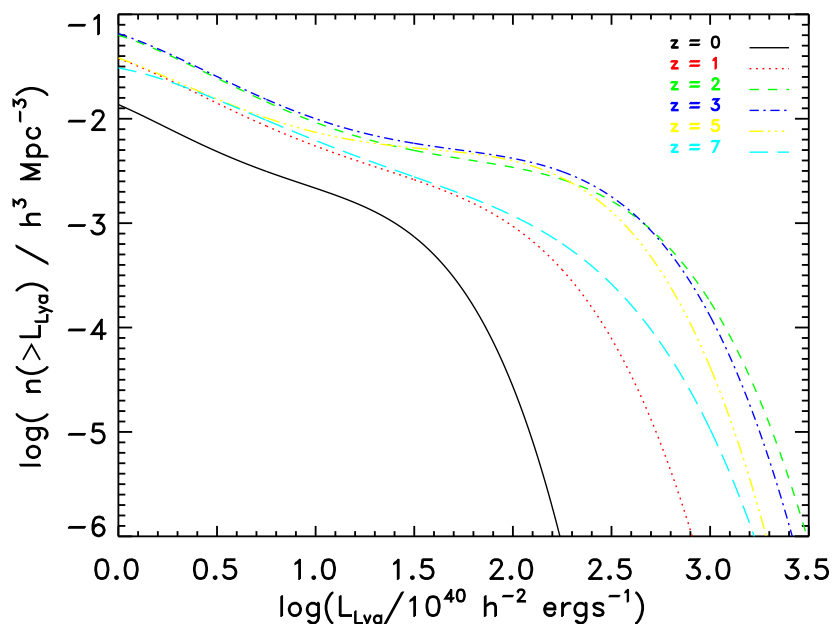


Figura 5.1: *Función de luminosidad acumulada para una emisión Ly_α producto de estrellas jóvenes. Nótese el máximo de la función alrededor de $z \approx 3$.*

$$n(> L_{Ly_\alpha}, z) = \int_{L_{Ly_\alpha}}^{\infty} \Phi(z, L) dL \quad (5.1)$$

En la Figura 5.1 se muestra la función de luminosidad acumulada para emisión por fotoionización. Esta función asociada a un proceso de emisión Ly_α producto de estrellas jóvenes ha sido calculada a partir de la función de luminosidad de Le Delliou et al. (2006). Estos autores utilizan un modelo semi-analítico de formación de galaxias (GALFORM; Cole et al. 2000) basado en el paradigma Λ CDM. GALFORM calcula la formación de galaxias a través del colapso y la fusión de halos de materia oscura y el ensamblado de la materia bariónica a través del enfriamiento radiativo dentro de los halos. GALFORM incluye formación estelar y feedback proveniente de explosiones de supernovas y de fotoionización del medio intergaláctico, evolución química del gas y las estrellas, así como síntesis de población estelar. La emisión Ly_α en estos modelos se calcula a partir de la radiación ionizante del continuo estelar, suponiendo que todos los fotones ionizantes del continuo de Lyman son absorbidos por el gas neutro de la galaxias. Asumiendo un equilibrio de fotoionización en todas

las galaxias, esto produce fotones $\text{Ly}\alpha$ por medio de recombinaciones tipo B (ver Osterbrock 1989). Nótese cómo la función de luminosidad tiene un máximo en $z \approx 3$.

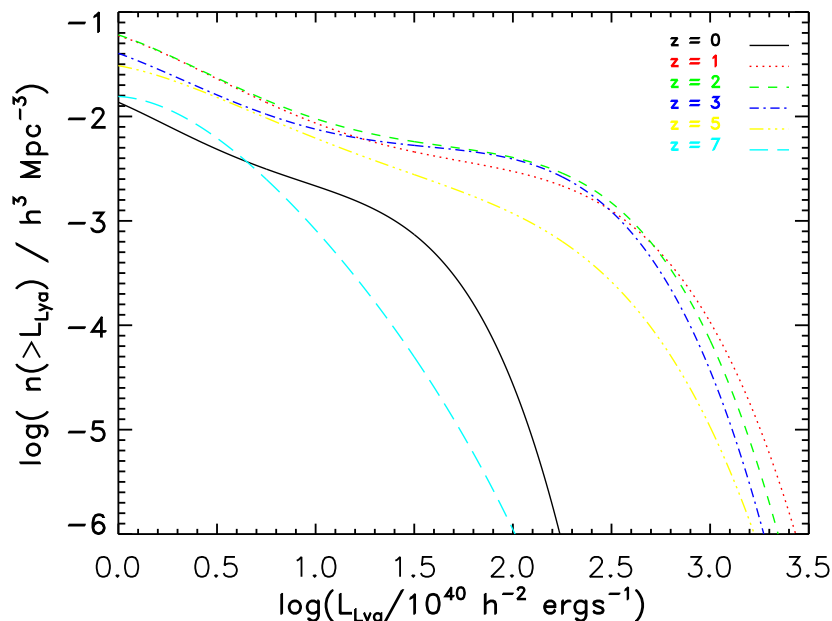


Figura 5.2: *Función de luminosidad acumulada para una emisión $\text{Ly}\alpha$ asociada a acreción fría. Aquí el máximo ocurre en $z \approx 2$.*

La Figura 5.2 muestra la función de luminosidad acumulada para emisión $\text{Ly}\alpha$ originada a través de acreción fría. Esta fue construida buscando que coincidiera con la función de Fardal et al. (2001), quienes estudiaron el enfriamiento radiativo de las galaxias en formación en simulaciones hidrodinámicas en un modelo ΛCDM . Estos autores incluyeron tres fuentes de energía radiativa en sus simulaciones, las cuales podían producir la emisión $\text{Ly}\alpha$: enfriamiento gravitacional, retroalimentación producto de supernovas y fotoionización de estrellas calientes. Sin embargo, al estudiar los diferentes procesos por separado, encontraron que la radiación producto del colapso gravitacional podía explicar no sólo las luminosidades $\text{Ly}\alpha$ observadas en los $\text{Ly}\alpha$ -blobs, sino también su extensión. En estos modelos los procesos de enfriamiento incluyen excitación colisional, recombinación radiativa y dielectrónica, ionización colisional y Bremsstrahlung; se asume también un equilibrio de ionización. Sus simulaciones también predicen que el máximo en la función de luminosidad ocurre a un corrimiento al rojo de $z \approx 2$.

Por otro lado, consideremos un elemento de volumen comóvil dado por la expresión

$$dV_{com} = \frac{c}{H(z)} \left[\int_0^z \frac{cdz'}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_0(1+z')^3}} \right]^2 d\Omega dz, \quad (5.2)$$

donde $H(z) = 100h[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_\Lambda]^{1/2}$. Entonces, podemos calcular el número esperado de LAES para cada una de las funciones de luminosidad discutidas anteriormente a través de la ecuación:

$$N(> L_{Ly\alpha}) = \int_{\Omega} \int_0^{\tilde{z}} \int_{L_{Ly\alpha}}^{\infty} \frac{\Phi(z, L)c}{H(z)} \left[\int_0^z \frac{cdz'}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_0(1+z')^3}} \right]^2 dL dz d\Omega. \quad (5.3)$$

Esta expresión determina el número de LAES con una luminosidad más brillante que $L_{Ly\alpha}$ a un corrimiento al rojo \tilde{z} .

5.4. Estadística de fuentes lenteadas

Realizamos una simulación de 600,000 fuentes extendidas detrás de los dos cúmulos estudiados en el presente trabajo. Las fuentes fueron distribuidas en un rango de $1 < z < 7$ y dentro de una circunferencia de radio 15" alrededor de las líneas caústicas generadas a partir de nuestros mejores modelos ¹ (modelo bimodal para MS 2053 y modelo con perfil NFW para MS 0440). En la Figura 5.3 se muestra el resultado de la simulación en MS 2053 para objetos dentro de un intervalo de corrimiento al rojo de $[2.0, 2.25]$. El histograma muestra las frecuencias para cada bin de amplificación, donde cada bin tiene una amplitud de 2.5 en amplificación. La línea continua muestra la función acumulada normalizada para las amplificaciones, o dicho en otras palabras, los valores esperados de $P(A >, 2.0 < z < 2.5)$. Se puede observar que alrededor del 70 % de los objetos tienen amplificaciones menores a 10, o de manera equivalente que el 30 % de los objetos tienen amplificaciones mayores a

¹Si bien un corrimiento al rojo menor a uno está por debajo de nuestro límite de observación con OSIRIS (ver apéndice C), hemos extendido nuestro análisis hasta este valor con el fin de poder estudiar con mayor detalle el comportamiento de las funciones de probabilidad.

10. Una gráfica análoga, pero con diferentes $P(A >, 2.0 < z < 2.5)$, se puede obtener de MS 0440 como discutiremos más adelante.

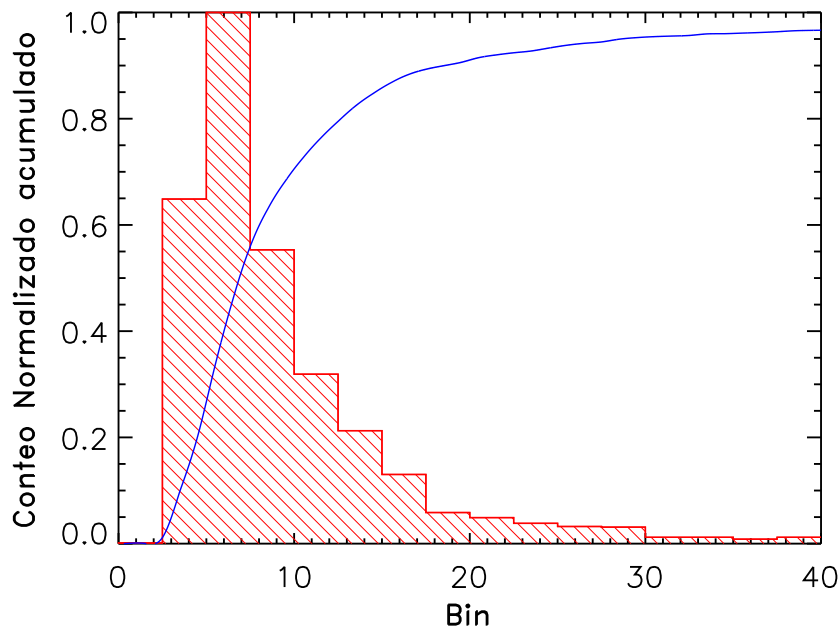


Figura 5.3: Valores esperados de la amplificación para MS 2053 suponiendo una distribución de fuentes entre $z = 2.0$ y $z = 2.25$.

Es importante notar que los valores esperados de amplificación son igualmente aplicables a nuestras dos clases de objetos en estudio. Si bien los Ly_α -blobs son objetos con una extensión más grande, hacer una simulación con fuentes de mayor tamaño afecta de manera poco significativa ($< 1\%$) a la función $P(A >, z)$ puesto que la amplificación en cada imagen se conserva y además, la probabilidad de que una fuente al aumentar su tamaño angular pase a través de una línea caústica, generando un mayor número de imágenes, es pequeña. Así pues, nuestras fuentes son elipses con elipticidades entre 0 y 0.7 y siguen una distribución uniforme. El tamaño del eje mayor de las fuentes fue establecido en $0.16''$ lo cual corresponde a ≈ 1.1 kpc para la cosmología que hemos adoptado. Este valor es motivado por los resultados de Le Delliou et al. (2006) quienes encontraron que para una luminosidad fija de $10^{42.5} h^{-2} \text{ erg s}^{-1}$ el radio a la mitad de la masa variaba de $\sim 1 h^{-1} \text{ kpc}$ a $z=3$ a $\sim 0.5 h^{-1} \text{ kpc}$ a $z=7$.

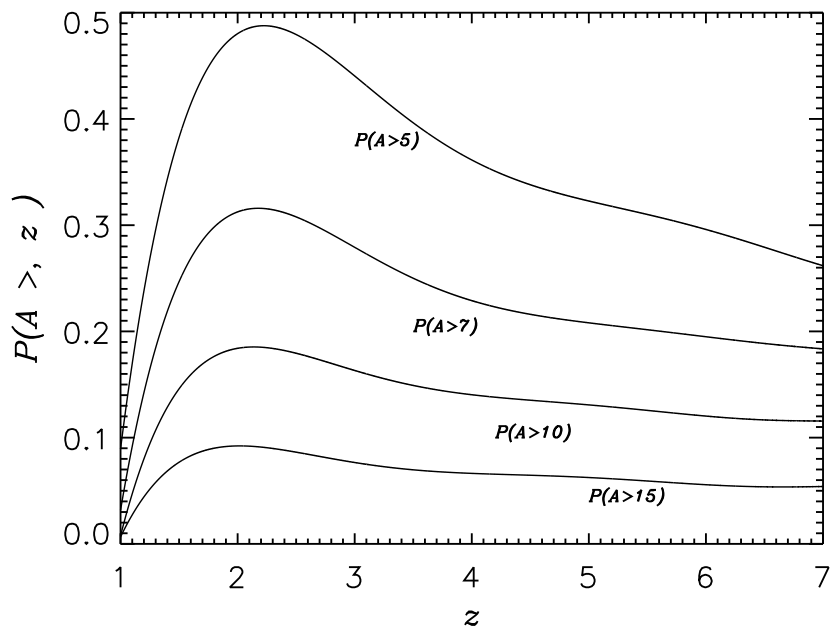


Figura 5.4: Valores esperados de la amplificación como función del corrimiento al rojo para MS 2053

5.4.1. Estadística en MS 2053

Dado que la forma de las líneas caústicas es función de los corrimientos al rojo de la lente y de la fuente, las simulaciones para diferentes corrimientos al rojo de las fuentes muestran que los valores esperados de amplificación también dependen de z . Por ejemplo, el rango de probabilidades de amplificación mayor que 10, $P(A > 10, z)$ varía de aproximadamente 1 % para $z = 1$ hasta 6 % para $z = 7$ (ver Figura 5.4). Nótese cómo la dependencia con z tiene un máximo alrededor de dos. Esto está asociado al hecho de que MS 2053 se encuentra a un corrimiento al rojo de $z = 0.583$ y la probabilidad de que un objeto sea magnificado es máxima cuando la lente se encuentra aproximadamente a una distancia comóvil que es la mitad de la distancia entre el observador y la fuente (Turner et al. 1984). Como veremos más adelante, la forma y los valores de la función $P(A >, z)$ pueden variar de modelo a modelo ya que no sólo dependen del corrimiento al rojo sino también de las formas de las líneas críticas, es decir, están asociados a la distribución de masa que es diferente en cada modelo.

Por lo anterior, para un modelo en particular, podemos expresar la probabilidad de encontrar objetos dentro de un determinado rango de corrimiento al rojo con una amplificación $A > \tilde{A}$ y con una luminosidad más brillante que $L_{Ly\alpha}$ como

$$\begin{aligned}
 P(> \tilde{A}, > L_{Ly\alpha}) \Big|_{z_i}^{z_f} &= \\
 &= \int_{\Omega} \int_{z_i}^{z_f} \int_{L_{Ly\alpha}}^{\infty} \frac{P(> \tilde{A}, z) \Phi(z, L) c}{H(z)} \\
 &\times \left[\int_0^z \frac{cdz'}{H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda} + \Omega_0(1+z')^3}} \right]^2 dL dz d\Omega. \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

En la Figura 5.5 se muestra $P(A > 10, L > 10^{40} \text{ erg s}^{-1})$ para nuestras dos funciones de luminosidad. Hemos seleccionado un valor conservador de $\tilde{A}=10$ ya que esto significa una diferencia de 2.5 en magnitud entre una fuente lenteada y una no lenteada. Se han reportado amplificaciones cercanas o mayores a 10 en LAES en algunos cúmulos (Santos et al. 2004). Nótese cómo el comportamiento de la función de luminosidad es heredado a $P(A > 10, L > 10^{40} \text{ erg s}^{-1})$ preservando el corrimiento al rojo al cual ocurre el máximo. Si bien esto era evidente dada la forma de la función $P(A >, z)$ mostrada en la Figura 5.4, esta conclusión no será inmediata cuando veamos la forma de esta función para MS 0440. Nuevamente debemos señalar que el comportamiento de $P(A >, z)$ y por tanto de $P(A > 10, L > 10^{40} \text{ erg s}^{-1})$ son función del corrimiento al rojo de la lente y del modelo de la distribución de masa. El hecho de que para MS 2053 se preserve el corrimiento al rojo al cual ocurre el máximo no significa que en otro cúmulo al mismo z pero de diferentes características, se preserve también.

Por otro lado, como se recordará del Capítulo 3, MS 2053 es un cúmulo doble con un único sistema de arcos (tres imágenes) para el cual solo se ha podido medir el corrimiento al rojo en una imagen. Los modelos ahí discutidos se encuentran degenerados, y hubo que limitar los valores posibles del radio de escala r_s tomando en cuenta los efectos de proyección. Así, al no estar nuestros modelos para MS 2053 bien constreñidos, la estadística para éste cúmulo no es del todo confiable. Si lo que deseamos es encontrar un método para estudiar las funciones de luminosidad

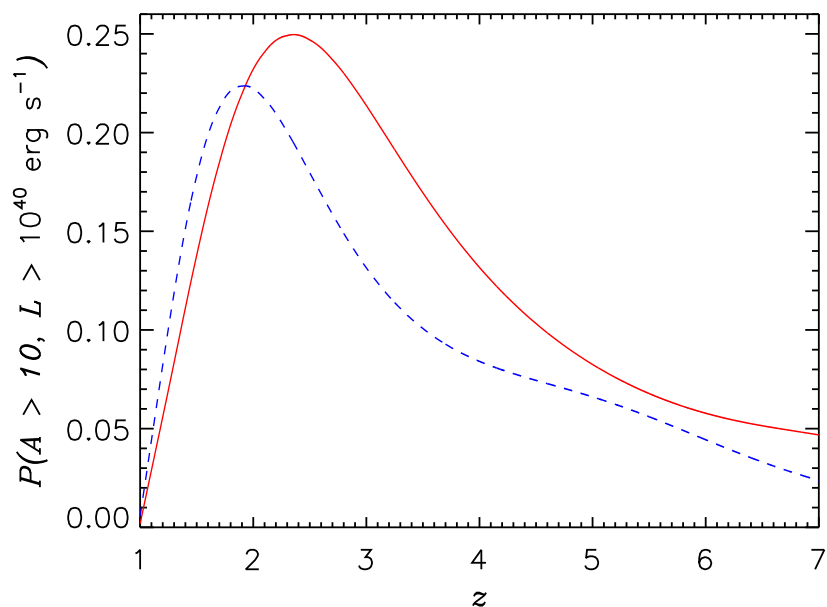


Figura 5.5: Probabilidad de amplificación en MS 2053 como función del corrimiento al rojo para las dos funciones de luminosidad discutidas en el texto. Emisión Ly_{α} producto de fotoionización (línea roja continua) y acreción fría (línea azul discontinua)

de LAES y Ly_{α} -blobs a través del efecto de lente gravitacional y su probabilidad de amplificación, necesitamos modelos de lentes que estén bien constreñidos.

5.4.2. Estadística en MS 0440

MS 0440 es un excelente candidato para estudiar las funciones de luminosidad ya que es un cúmulo circular con un gran número de arcos muy elongados y simétricos, que no posee una segunda componente como MS 2053 (ver Capítulo 4). Éste fue modelado con seis sistemas de arcos (quince imágenes de las cuales cuatro tienen un corrimiento al rojo confirmado), cuatro tangenciales y dos radiales. Los modelos bien constreñidos en MS 0440 mostraron que las líneas críticas son similares cuando se utiliza un perfil NFW o un PIEMD. Por lo tanto, la función $P(A >, z)$ mostrada en la Figura 5.6 es mucho más confiable que la correspondiente a MS 2053 mostrada en la Figura 5.4. En este caso $P(A >, z)$ no posee un máximo entre $1 < z < 7$ ya que el corrimiento al rojo al que se encuentra MS 0440 es $z = 0.19$.

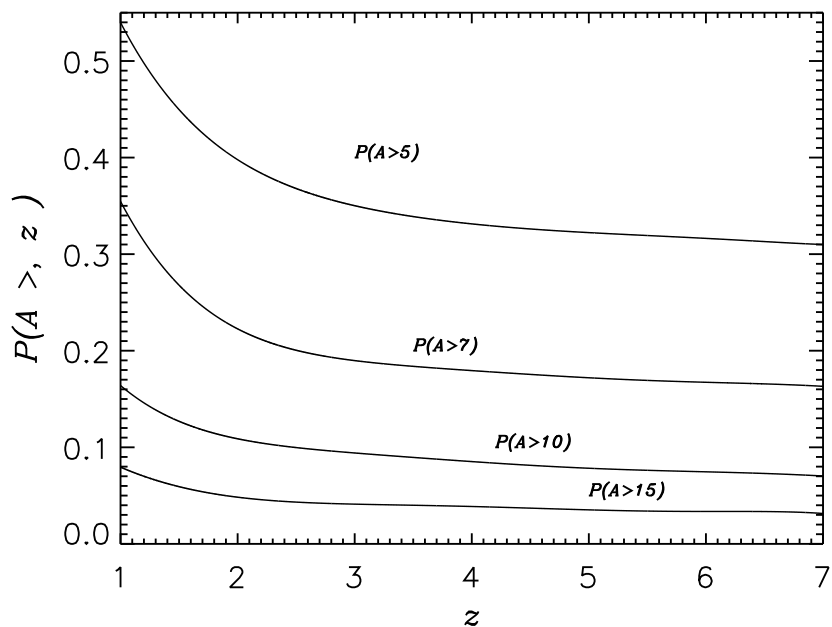


Figura 5.6: Valores esperados de la amplificación como función del corrimiento al rojo para MS 0440

Aplicando nuevamente la ecuación (5.4) determinamos para MS 0440 el valor de $P(A > 10, L > 10^{40} \text{ erg s}^{-1})$. Ya que ahora tenemos un cúmulo con sus parámetros bien constreñidos, nos preguntamos qué tanto pueden influir los errores en cada uno de los parámetros libres en nuestra función de probabilidad. Con el fin de estimar este error, hemos permitido variar cada uno de estos parámetros en $1\text{-}\sigma$. Las regiones sombreadas en la Figura 5.7 muestran este efecto para cada una de las dos funciones de luminosidad discutidas en este trabajo. Nótese nuevamente cómo $P(A > 10, L > 10^{40} \text{ erg s}^{-1})$ hereda el comportamiento de la función de luminosidad, preservando el corrimiento al rojo al cual ocurre el máximo.

Dado el número de LAES y de Ly_α -blobs esperados entre $2 < z < 7$ (21 en el primer caso y 15 en el segundo, calculados a partir de nuestra ecuación (5.3)) con $L_{\text{Ly}_\alpha} > 10^{40} \text{ erg s}^{-1}$, podemos estimar cuantos cúmulos son necesarios para poder estudiar ambas funciones de luminosidad. Consideremos la probabilidad para la función de luminosidad de objetos cuya emisión es producto de la fotoionización, ya que de ésta esperamos menos objetos. Si integramos esta función en dicho rango de

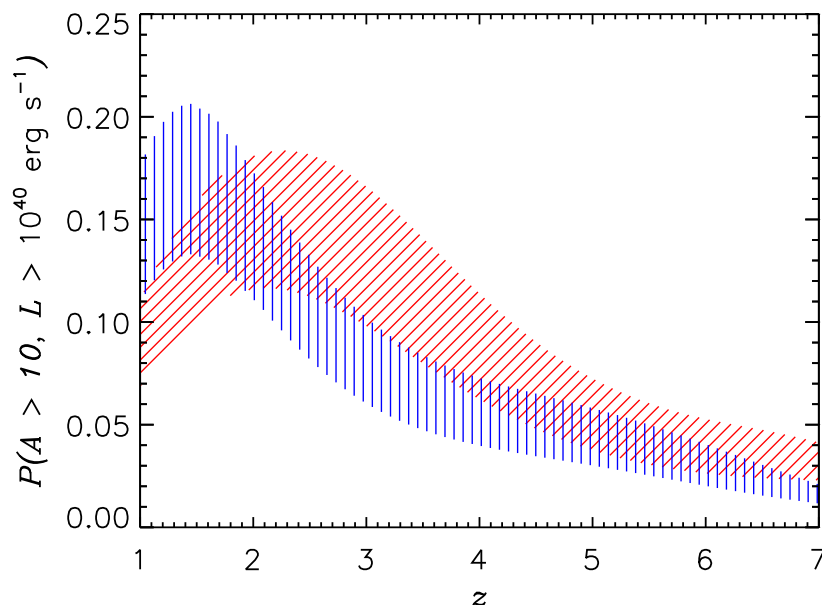


Figura 5.7: Probabilidad de amplificación en MS0440 como función del corrimiento al rojo para las dos funciones de luminosidad discutidas en el texto. Emisión Ly_α producto de fotoionización (líneas oblicuas en rojo) y acreción fría (líneas verticales en azul)

corrimiento al rojo obtenemos una probabilidad acumulada de 0.41 lo cual significa ≈ 6 objetos con amplificación mayor a 10. Entonces, con 10 cúmulos aumentaríamos a 60 objetos con una señal a ruido de ≈ 8 .

Es importante señalar que éste es un resultado general en el cual no se ha incluido ningún instrumento en particular (ver Capítulo 6) y que igualmente puede ser aplicado a otros objetos con diferentes funciones de luminosidad. Este método presenta una manera alternativa de estudiar las funciones de luminosidad de los LAES y los Ly_α -blobs, y de una manera indirecta los procesos asociados a la emisión Ly_α . Es importante notar que ambos procesos fueron estudiados de manera independiente, utilizando dos funciones de luminosidad no correlacionadas. De existir una conexión entre el gas que se está colapsando para formar la galaxia y las estrellas más jóvenes, por ejemplo, si al encenderse la formación de estrellas jóvenes desapareciera el proceso de colapso, entonces se esperaría una respuesta correlacionada entre las probabilidades de amplificación como función del corrimiento al rojo.

5.5. Resultados

Los resultados de esta segunda parte de la tesis pueden ser resumidos de la siguiente manera:

- Realizamos una simulación de 600,000 fuentes extendidas detrás de los cúmulos MS 2053 y MS 0440. A partir de estas se calcularon las probabilidades de amplificación entre $1 < z < 7$ para dos clases de objetos (LAES y Ly_α -blobs) con emisión Ly_α originada a partir de dos mecanismos diferentes.
- Encontramos que el comportamiento de la función de luminosidad es heredado a $P(A > 10, L > 10^{40} \text{ erg s}^{-1})$ preservando el corrimiento al rojo al cual ocurre el máximo; siendo necesario el modelado y la observación de al menos 10 cúmulos para poder estudiar ambas funciones de luminosidad.
- Hemos propuesto un nuevo método para estudiar las funciones de luminosidad a través de las probabilidades de amplificación.
- Nuestro resultado es general y puede ser utilizado para estudiar funciones de luminosidad de otra clase de objetos.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

6.1. Conclusiones

El desarrollo de la nueva versión de LENSTOOL (Jullo et al. 2007) nos permitió realizar los primeros modelos detallados de lente fuerte para los cúmulos de galaxias MS 2053 y MS 0440, así como estudiar su distribución de masa. LENSTOOL nos permite ahora estudiar los espacios de parámetros, hacer estadística con estos y determinar sus errores. Pero además nos provee de un nuevo estimador de la confiabilidad de nuestros modelos a parte de la χ^2 , la evidencia Bayesiana. Es importante hacer notar que ninguno de los dos estudios hubiera podido efectuarse con las versiones anteriores del código. Para nuestro primer cúmulo, el estudio del espacio de parámetros XY mostró que el mejor modelo era uno formado por dos cúmulos de galaxias, confirmando la bimodalidad reportada por otros autores a partir de datos fotométricos (Tran et al. 2005). En el segundo, la evidencia Bayesiana hizo posible no sólo determinar que el perfil NFW provee un mejor ajuste cuando se compara con un PIEMD, también mostró en un cúmulo real que los arcos radiales son necesarios para discernir entre dos perfiles de densidad diferentes, aplicando a un cúmulo real el trabajo de Jullo et al. (2007).

En MS 2053 nuestros modelos predijeron una contra-imagen la cual pudimos asociar a una imagen distorsionada de una galaxia con un color F702W-F814W semejante al de los arcos. Construimos el mapa de masa y calculamos la masa interior a los arcos, comparándola con la que se obtiene de modelos en rayos-X. Concluimos

que las diferencias encontradas entre ambas estimaciones están asociadas a las suposiciones de equilibrio hidrostático que se hacen cuando se estiman las masas en rayos-X y que no se cumplen para MS 2053. Corroborando estas afirmaciones determinamos que los valores de concentración están por debajo de los valores esperados en un modelo Λ CDM, pudiendo estas diferencias ser explicadas por asimetrías en la distribución de masa y por efectos de proyección. Por todo esto, nuestro trabajo en MS 2053 es el modelo de lente fuerte más detallado que se haya publicado.

Usando imágenes y datos espectroscópicos, construimos dos modelos de lente fuerte para MS 0440 basados en cinco sistemas de imágenes múltiples, de los cuales tres tienen corrimientos al rojo medidos espectroscópicamente. Estimamos el corrimiento al rojo de los sistemas para los cuales no poseíamos datos espectroscópicos (arcos radiales) y encontramos que los arcos radiales combinados con los arcos tangenciales permiten constreñir la pendiente del perfil de masa. Los perfiles PIEMD y NFW reproducen de manera muy aproximada las imágenes observadas en este cúmulo, aunque la χ^2_{DOF} favorece marginalmente al NFW sobre el PIEMD. En este sentido, el resultado más importante de este trabajo fue demostrar que la evidencia Bayesiana favorece un perfil NFW con $\rho \propto r^{-1}$ sobre un PIEMD con $\rho \propto r^{-2}$. Este resultado es consistente con nuestros estudios de la masa interior a los arcos, pues se encontró que ésta es igual a $7.7 \times 10^{13} M_{\odot}$. Este valor coincide con el obtenido a través de mediciones en rayos-X corregido de acuerdo al trabajo de Rasia et al. (2006); es decir, la suposición de isothermalidad no es correcta. Nuestros modelos de lente fuerte para MS 0440 también son los más completos que se hayan realizado para éste cúmulo.

Nuevos y mejores datos observacionales tanto en espectroscopía como en fotometría pueden dar mayores y más fuertes constricciones a nuestros modelos. Aunado a esto, el desarrollo de nuevas rutinas y programas más eficientes pueden perfeccionar los códigos ya existentes dando origen a modelos más detallados y precisos. Por ejemplo modelos que nos permitan probar la distribución de masa real y no sólo la proyectada. Aun cuando hoy en día no existen modelos 3D de lentes gravitacionales capaces de estudiar halos triaxiales como los predichos en los modelos CDM (ver Jing & Suto 2002), sí se han realizado investigaciones en el régimen de lente fuerte de

cúmulos en interacción y su efecto sobre las formas de las líneas críticas y caústicas (Torri et al. 2004; Fedeli et al. 2006). Así pues, queda mucho por hacer en el campo del modelaje de lentes.

Utilizamos nuestros mejores modelos de los cúmulos MS 0440 y MS 2053 para hacer estadística de fuentes lenteadas. Haciendo una simulación de 500 mil fuentes distribuidas entre $2 < z < 7$ se calcularon las probabilidades de amplificación para dos clases de objetos (dos funciones de luminosidad), LAES y Ly $_{\alpha}$ -blobs. Los primeros con una emisión Ly $_{\alpha}$ producido por fotoionización del gas en las galaxias por estrellas jóvenes (Partridge & Peebles 1967) y los segundos con una emisión asociada al gas que se enfría dentro de los halos de materia oscura que colapsan para formar las galaxias (Haiman et al. 2000; Fardal et al. 2001). En este trabajo encontramos que el comportamiento de la función de luminosidad es heredado a la probabilidad de encontrar emisores lenteados con una amplificación mayor a 10, preservando el corrimiento al rojo al cual ocurre el máximo. Siendo necesario el modelado y la observación de al menos 10 cúmulos para poder estudiar ambas funciones de luminosidad. Como los modelos teóricos (Dijkstra et al. 2006a,b) y las observaciones (Nilsson et al. 2006) muestran que los Ly $_{\alpha}$ -blobs pueden estar asociados a proto-galaxias que se están colapsando, el estudio de ambas clases de objetos (LAES y Ly $_{\alpha}$ -blobs) son importantes para entender el proceso de formación de las galaxias jóvenes y comprender su evolución. El método que presentamos aquí permitiría estudiar ambas poblaciones y mostrar si existe una asociación entre ambos procesos, en el sentido de que al encenderse la formación de estrellas jóvenes y desaparecer el proceso de colapso se reflejaría directamente en nuestras probabilidades de amplificación.

6.2. Trabajo a futuro

Usando el instrumento OSIRIS en el Gran Telescopio de Canarias pretendemos realizar una exploración para buscar LAES y Ly $_{\alpha}$ -blobs así como otras objetos que presenten líneas de emisión, en los campos de MS 2053 y MS 0440 (ver apéndice C). OSIRIS y sus filtros sintonizables permitirán obtener imágenes de alto contraste. A

diferencia de otros trabajos fotométricos de banda angosta, OSIRIS permite no sólo escoger el centro de la banda, sino también el ancho del filtro. Esto hace que sea un instrumento ideal para la búsqueda de objetos con líneas de emisión (Castañeda & Cepa 2003). Por ejemplo, comparando con el trabajo de Santos et al. (2004), quienes realizaron una exploración espectroscópica de rendija larga colocando el área de la rendija de tal manera que coincidiera parcialmente con las líneas críticas, una exploración fotométrica de banda-angosta con OSIRIS nos permitirá explorar un área mayor, es decir, cubrir toda la región de líneas críticas.

Nuestro trabajo a futuro sugiere varias direcciones de investigación que esperamos explorar:

- Estudiar las características de la línea espectral de los Ly_α para explorar las propiedades físicas y dinámicas de los LAES así como el medio interestelar a lo largo de la línea de visión.
- Poner constricciones a las funciones de luminosidad de los LAES y Ly_α -blobs, y comparar las funciones con las predicciones teóricas en el contexto del paradigma Λ CDM. Este punto está relacionado con el trabajo de nuestras simulaciones presentadas en esta tesis.
- Estudiar la función de luminosidad y la distribución espectral de energía, de galaxias en el cúmulo, para AGN y para galaxias normales.

Paralelo a esto, los nuevos datos espectroscópicos y fotométricos nos permitirán mejorar los modelos de MS 2053 y MS 0440 ampliando nuestros estudios al régimen de lente débil. Además incorporaremos un estudio de las velocidades internas de dispersión de los miembros del cúmulo para eliminar las relaciones de escala y obtener un modelo más detallado de la distribución de masa.

Apéndice A

Valores propios

Como se recordará del Capítulo 1, la ecuación para una lente axialmente simétrica podía escribirse como (ecuación 1.44):

$$\vec{\beta} = \left(1 - \frac{m(\theta)}{\theta^2}\right) \vec{\theta}. \quad (\text{A.1})$$

Si definimos las componentes del vector $\vec{\theta}$ de tal manera que $\vec{\theta} \equiv (\theta_1, \theta_2)$, entonces podemos expresar a la ecuación (A.1) en sus componentes como

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \theta_1 \left(1 - \frac{m}{\theta_1^2 + \theta_2^2}\right), \\ \beta_2 &= \theta_2 \left(1 - \frac{m}{\theta_1^2 + \theta_2^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A partir de las cuales podemos expresar la matriz de mapeo para una lente axialmente simétrica como (ecuación 1.23):

$$\begin{aligned} [\text{Jac}\vec{\beta}](\vec{\theta}) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{m(\theta_2^2 - \theta_1^2)}{\theta^4} - \frac{\theta_1^2}{\theta^3} \frac{dm}{d\theta} & \frac{2m\theta_1\theta_2}{\theta^4} - \frac{\theta_1\theta_2}{\theta^3} \frac{dm}{d\theta} \\ \frac{2m\theta_1\theta_2}{\theta^4} - \frac{\theta_1\theta_2}{\theta^3} \frac{dm}{d\theta} & 1 - \frac{m(\theta_1^2 - \theta_2^2)}{\theta^4} - \frac{\theta_2^2}{\theta^3} \frac{dm}{d\theta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Donde θ representa la norma de $\vec{\theta}$. De las ecuaciones (1.28) y (A.3) es fácil ver que la segunda componente del corte es

$$\gamma_2 = \theta_1 \theta_2 \left(\frac{1}{\theta^3} \frac{dm}{d\theta} - \frac{2m}{\theta^4} \right). \quad (\text{A.4})$$

Por otro lado, si reescribimos la ecuación (1.42) para la convergencia como

$$\kappa = \frac{1}{2\theta} \frac{dm}{d\theta}, \quad (\text{A.5})$$

y empleamos de nuevo la ecuación (A.3), se tiene que la otra componente del corte queda expresada como

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\theta_2^2 - \theta_1^2) \left(\frac{2m}{\theta^4} - \frac{1}{\theta^3} \frac{dm}{d\theta} \right). \quad (\text{A.6})$$

Por tanto, combinando las ecuaciones (A.4) y (A.6) obtenemos el corte total (ecuación (1.30)):

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \left(\frac{m^2}{\theta^4} - \frac{m}{\theta^3} \frac{dm}{d\theta} + \frac{1}{4\theta^2} \left(\frac{dm}{d\theta} \right)^2 \right) \\ &= \left(\frac{m}{\theta^2} - \kappa \right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Así, de (A.5) y (A.7) el determinante de la matriz de amplificación para una lente axialmente simétrica queda expresado como

$$\begin{aligned} J &= \left(1 - \frac{m}{\theta^2} \right) \left(1 + \frac{m}{\theta^2} - 2\kappa \right) \\ &= \left(1 - \frac{m}{\theta^2} \right) \left(1 + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{m}{\theta} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$= \lambda_t \lambda_r. \quad (\text{A.9})$$

Cada uno de estos factores λ_t y λ_r representa un valor propio (Zhang 1999). El primero está relacionado con la masa interior al radio θ y el otro con la derivada de la masa. Por la simetría del problema las líneas críticas en el plano de la lente son círculos y están determinadas por las ecuaciones $\lambda_t = 0$ o $\lambda_r = 0$. Las que satisfacen

$\lambda_t = 0$ ($m/\theta^2=1$) son llamadas líneas críticas tangenciales y aquellas en las cuales $\lambda_r = 0$ ($\frac{d}{d\theta}(\frac{m}{\theta}) = 1$) líneas críticas radiales.

Consideremos un punto $\vec{\theta}^* = (\theta^*, 0)$ cercano a la línea crítica radial. Es decir, un punto cercano a la curva $1 + m/\theta^2 - (dm/d\theta)(1/\theta) = 0$. Este punto satisface

$$\frac{1}{\theta} \frac{dm}{d\theta} - \frac{m}{\theta^2} = 1 - \varepsilon, \quad (\text{A.10})$$

con $\varepsilon \ll 1$. La matriz Jacobiana en este punto $\vec{\theta}^*$ es, de acuerdo con la ecuación (A.3):

$$\begin{aligned} [\text{Jac}\vec{\beta}](\vec{\theta}^*) &= \\ &= \left(\begin{array}{cc} 1 - \frac{m}{\theta^2} - \frac{1}{\theta} \frac{dm}{d\theta} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{m}{\theta^2} \end{array} \right) \Big|_{\theta=\theta^*} \\ &\approx \left(\begin{array}{cc} \varepsilon & 0 \\ 0 & 2 - \frac{1}{\theta^*} \frac{dm}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta^*} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Consideremos ahora una elipse (ver Figura A.1) con centro en $\vec{\theta}^*$ y con un tamaño menor a la distancia de $\vec{\theta}^*$ con respecto a la línea crítica. Dicha elipse estará descrita por la ecuación

$$\vec{I}(\vartheta) = \vec{\theta}^* + \begin{pmatrix} a_1 \cos \vartheta \\ b_1 \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Aplicando la matriz de mapeo dada por la ecuación (A.11), nuestra elipse se transformará en una nueva elipse en el plano fuente expresada como

$$[\text{Jac}\vec{\beta}]\vec{I}(\vartheta) = \vec{S} = \vec{\beta}^* + \begin{pmatrix} \varepsilon a_1 \cos \vartheta \\ \left(2 - \frac{1}{\theta^*} \frac{dm}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta^*}\right) b_1 \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Supongamos ahora que la fuente es un círculo, es decir que

$$|a_1| = \frac{\left(2 - \frac{1}{\theta^*} \frac{dm}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta^*}\right)}{\varepsilon} |b_1|, \quad (\text{A.14})$$

Esto quiere decir que $|a_1| \gg |b_1|$ y que la imagen \vec{I} de la fuente circular \vec{S} estará elongada en la dirección θ_1 , es decir radialmente con respecto a la línea crítica. Por eso

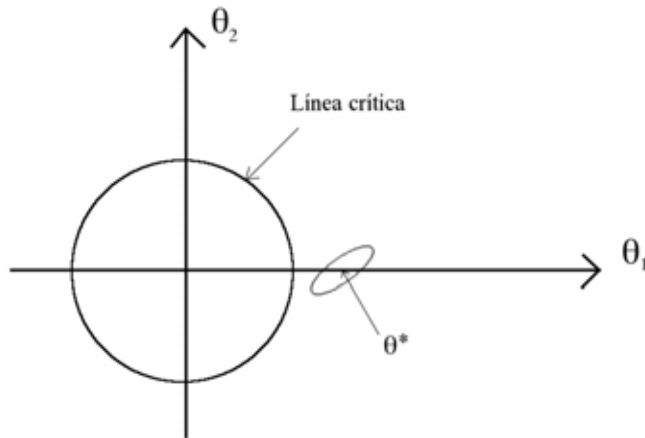


Figura A.1: *La figura muestra una imagen elíptica centrada en $\vec{\theta}^*$ y muy próxima a la línea crítica radial.*

recibe el nombre de línea crítica radial la curva descrita por $\lambda_r = 0$. Un razonamiento análogo demuestra que cerca de una línea crítica tangencial la imagen de una fuente circular es elongada fuertemente en la dirección tangencial.

Apéndice B

Funciones de luminosidad

El número de LAES por unidad de volumen comóvil con luminosidades en el rango $(L, L + dL)$ está dado por $\Phi(z, L)dL$ donde hemos definido nuestra función de luminosidad de la siguiente manera

$$\Phi(z, L)dL \equiv \frac{10^{a_0+a_1L+a_2L^2+a_3L^3+a_4L^4}}{\log e} [a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2 + 4a_4L^3] dL. \quad (\text{B.1})$$

Donde la dependencia con el corrimiento al rojo está dada por los coeficientes a_i y L está en unidades de $10^{40} \text{ erg s}^{-1}$. Entonces la función de luminosidad acumulada para todo z , es decir el número de LAES por unidad de volumen comóvil, con una luminosidad más brillante que $L_{Ly\alpha}$ está dado por

$$\begin{aligned} n(> L_{Ly\alpha}, z) &= \int \Phi(z, L) + Cte. \\ &= 10^{a_0+a_1L+a_2L^2+a_3L^3+a_4L^4} + Cte. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Nótese que la constante de integración puede hacerse igual a cero, ya que siempre la podemos incluir en el coeficiente a_0 y redefinir éste. Para determinar los coeficientes ajustamos polinomios de la forma $a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 + a_4L^4$ a la función acumulada de Le Delliou et al. (2006), donde a su vez los coeficientes son funciones polinomiales en z . Así para nuestra primera función de luminosidad estos tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -1.86439 + 0.52314z - 0.05631z^2 - 0.03304z^3 + 0.00764z^4 - 0.00045z^5, \\
a_1 &= -0.81904 + 0.12843z + 0.05184z^2 - 0.04425z^3 + 0.00824z^4 - 0.00045z^5, \\
a_2 &= -0.55466 + 0.00348z - 0.1618z^2 + 0.07409z^3 - 0.01054z^4 + 0.00045z^5, \\
a_3 &= 1 - 0.59854z + 0.35731z^2 - 0.08995z^3 + 0.00978z^4 - 0.00038z^5, \\
a_4 &= -0.42775 + 0.38743z - 0.18905z^2 + 0.04013z^3 - 0.00379z^4 + 0.00013z^5.
\end{aligned}
\tag{B.3}$$

Para nuestra segunda función, asociada a acreción fría los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned}
a_0 &= -1.86439 + 0.99396z - 0.25559z^2 - 0.20522z^3 + 0.13478z^4 - 0.03398z^5 \\
&\quad + 0.00462z^6 - 0.00036z^7, \\
a_1 &= -0.81904 + 0.24401z + 0.17429z^2 - 0.32321z^3 + 0.15582z^4 - 0.03627z^5 \\
&\quad + 0.00476z^6 - 0.00037z^7, \\
a_2 &= -0.55466 + 0.00661z - 0.58444z^2 + 0.55966z^3 - 0.21921z^4 + 0.04428z^5 \\
&\quad - 0.00529z^6 - 0.00038z^7, \\
a_3 &= 1 - 1.13722z + 1.34974z^2 - 0.75274z^3 + 0.22844z^4 - 0.04136z^5 \\
&\quad + 0.00468z^6 - 0.00033z^7, \\
a_4 &= -0.42775 + 0.73611z - 0.72121z^2 + 0.34709z^3 - 0.09474z^4 + 0.01590z^5 \\
&\quad - 0.00171z^6 + 0.00012z^7.
\end{aligned}
\tag{B.4}$$

Como se puede observar, los coeficientes para esta segunda función tienen un grado mayor en z , sin embargo coinciden en ambas funciones para un corrimiento al rojo $z = 0$. Para esta función de luminosidad no realizamos un ajuste con polinomios dada la poca información de los gráficos de Fardal et al. (2001), además de que sus simulaciones no llegan a $z = 7$. Como método alternativo modificamos los coeficientes

definidos por (B.3) haciendo que el máximo de la función acumulada se desplazara hacia un valor más pequeño (ver Figura 5.2) de acuerdo a las predicciones de Fardal et al. (2001). Además, buscamos que nuestra función polinómica coincidiera aproximadamente con la función de Fardal et al. en el intervalo donde dicha función acumulada está definida ($0 < z < 5$).

Apéndice C

Proyecto

Nuestro proyecto busca estudiar la función de luminosidad de galaxias a alto corrimiento al rojo, así como LAES. Planeamos usar los filtros sintonizables de OSIRIS-GTC para detectar galaxias con líneas de emisión entre 4750 y 5000 Å. Este rango en longitudes de onda cubre a los LAES aproximadamente entre $2.9 < z < 3.1$, es decir cerca del máximo de la función de luminosidad. Los campos de observación serán centrados en los cúmulos de galaxias modelados y discutidos en la presente tesis, para aprovechar el efecto de amplificación de la lente e investigar la cola de la función de luminosidad de los LAES. Los datos obtenidos en este proyecto serán utilizados para estudiar evolución de galaxias, la distribución de materia oscura y materia bariónica en el cúmulo, así como para mejorar los modelos de lente en MS 2053 y MS 0440.

El objetivo principal es observar LAES de baja luminosidad, es decir, alcanzar límites de detección de $\sim 10^{-17}$ erg s⁻¹ cm⁻², lo cual corresponde a una luminosidad de $\sim 10^{42}$ erg s⁻¹ para un objeto a $z \sim 3$. Para lograr este objetivo haremos un barrido de la region espectral arriba mencionada con pasos de 6 Å (es decir, 43 exposiciones), un pasabandas de 12 Å y un binning de 2×2. Como los tiempos de exposición son función de la longitud de onda, estos varían de 450s para $\lambda = 4750$ Å, a 275s para $\lambda = 5000$ Å. Tomando esto en cuenta, hemos calculado un tiempo total de observación de 10.6h para considerar ambos objetos.

Referencias

- Abdelsalam, H. M., Saha, P., & Williams, L. L. R. 1998, *AJ*, 116, 1541 19, 22
- Arfken, G. B. & Weber, H. J. 2001, *Mathematical methods for physicists* 5th Edition. Harcourt Academic Press 8
- Blandford, R. D. & Narayan, R. 1992, *ARA&A*, 30, 311 18
- Borgani, S., Girardi, M., Carlberg, R. G., Yee, H. K. C., & Ellingson, E. 1999, *ApJ*, 527, 561 78
- Bouwens, R. J., Illingworth, G. D., Rosati, P., et al. 2003, *ApJ*, 595, 589 23
- Broadhurst, T., Benítez, N., Coe, D., et al. 2005, *ApJ*, 621, 53 21
- Broadhurst, T., Huang, X., Frye, B., & Ellis, R. 2000, *ApJ*, 534, L15 21
- Burke, W. L. 1981, *ApJ*, 244, L1 13, 16
- Cabanac, R. A., Alard, C., Dantel-Fort, M., et al. 2007, *A&A*, 461, 813 20
- Carlberg, R. G., Yee, H. K. C., Ellingson, E., et al. 1996, *ApJ*, 462, 32 78
- Castañeda, H. O. & Cepa, J. 2003, *RMxAC*, 16, 60 111
- Chwolson, O. 1924, *Astronomische Nachrichten*, 221, 329 3, 5
- Cole, S., Lacey, C. G., Baugh, C. M., & Frenk, C. S. 2000, *MNRAS*, 319, 168 98
- Comerford, J. M., Meneghetti, M., Bartelmann, M., & Schirmer, M. 2006, *ApJ*, 642, 39 79

- Covone, G., Kneib, J.-P., Soucail, G., et al. 2006, *A&A*, 456, 409 79
- Cowie, L. L. & Hu, E. M. 1998, *AJ*, 115, 1319 95
- Dey, A., Bian, C., Soifer, B. T., et al. 2005, *ApJ*, 629, 654 97
- Diego, J. M., Protopapas, P., Sandvik, H. B., & Tegmark, M. 2005, *MNRAS*, 360, 477 22
- Dijkstra, M., Haiman, Z., & Spaans, M. 2006a, *ApJ*, 649, 14 97, 110
- Dijkstra, M., Haiman, Z., & Spaans, M. 2006b, *ApJ*, 649, 37 97, 110
- Dyer, C. C. & Roeder, R. C. 1976, *Nature*, 260, 764 19
- Dyson, Sir, F. W., Eddington, A. S., & Davidson, C. R. 1920, *MmRAS*, 62, 291 2
- Eddington, A. S. 1920, *Space, time and gravitation. An outline of the general relativity theory*. Cambridge Science Classics, Cambridge: University Press 2
- Einstein, A. 1911, *Annalen der Physik*, 35, 898 2
- Einstein, A. 1915, *Sitzungsber. preuss.Akad. Wiss.*, 47, 831 2
- Einstein, A. 1936, *Science*, 84, 506 3
- Elíasdóttir, Á., Limousin, M., Richard, J., et al. 2007, *ArXiv e-prints*, 710 21
- Ellis, R., Santos, M. R., Kneib, J.-P., & Kuijken, K. 2001, *ApJ*, 560, L119 22
- Fahlman, G., Kaiser, N., Squires, G., & Woods, D. 1994, *ApJ*, 437, 56 21
- Fardal, M. A., Katz, N., Gardner, J. P., et al. 2001, *ApJ*, 562, 605 96, 99, 110, 117, 118
- Fedeli, C., Meneghetti, M., Bartelmann, M., Dolag, K., & Moscardini, L. 2006, *A&A*, 447, 419 110
- Fort, B., Le Fevre, O., Hammer, F., & Cailloux, M. 1992, *ApJ*, 399, L125 20
- Francis, P. J., Williger, G. M., Collins, N. R., et al. 2001, *ApJ*, 554, 1001 96

- Franx, M., Illingworth, G. D., Kelson, D. D., van Dokkum, P. G., & Tran, K.-V. 1997, *ApJ*, 486, L75 22
- Fynbo, J. U., Møller, P., & Warren, S. J. 1999, *MNRAS*, 305, 849 96
- Gavazzi, R. 2005, *A&A*, 443, 793 79
- Gavazzi, R. & Soucail, G. 2007, *A&A*, 462, 459 19
- Gawiser, E., van Dokkum, P. G., Gronwall, C., et al. 2006, *ApJ*, 642, L13 96
- Giavalisco, M. 2002, *ARA&A*, 40, 579 94, 95
- Gioia, I. M., Maccacaro, T., Schild, R. E., et al. 1990, *ApJS*, 72, 567 78
- Gioia, I. M., Shaya, E. J., Le Fevre, O., et al. 1998, *ApJ*, 497, 573 78
- Girardi, M. & Mezzetti, M. 2001, *ApJ*, 548, 79 78
- Giraud, E. 1988, *ApJ*, 334, L69 20
- Gladders, M. D., Hoekstra, H., Yee, H. K. C., Hall, P. B., & Barrientos, L. F. 2003, *ApJ*, 593, 48 20
- Gnedin, O. Y., Kravtsov, A. V., Klypin, A. A., & Nagai, D. 2004, *ApJ*, 616, 16 27
- Golse, G., Kneib, J.-P., & Soucail, G. 2002, *A&A*, 387, 788 19
- Grossman, S. A. & Narayan, R. 1988, *ApJ*, 324, L37 26
- Grossman, S. A. & Narayan, R. 1989, *ApJ*, 344, 637 21
- Gunn, J. E. 1967a, *ApJ*, 147, 61 3
- Gunn, J. E. 1967b, *ApJ*, 150, 737 3
- Haiman, Z. & Rees, M. J. 2001, *ApJ*, 556, 87 96
- Haiman, Z., Spaans, M., & Quataert, E. 2000, *ApJ*, 537, L5 96, 110
- Hammer, F. 1991, *ApJ*, 383, 66 21

- Hammer, F. & Rigaut, F. 1989, *A&A*, 226, 45–21
- Hoekstra, H., Franx, M., Kuijken, K., & van Dokkum, P. G. 2002, *MNRAS*, 333, 911–64, 65, 66
- Hu, E. M., Cowie, L. L., Capak, P., et al. 2004, *AJ*, 127, 563–95
- Hu, E. M., Cowie, L. L., & McMahon, R. G. 1998, *ApJ*, 502, L99+–95
- Hu, E. M., Cowie, L. L., McMahon, R. G., et al. 2002, *ApJ*, 568, L75–23
- Jaki, S. L. 1978, *Foundations of Physics*, 8, 927–1
- Jing, Y. P. & Suto, Y. 2002, *ApJ*, 574, 538–109
- Jullo, E., Kneib, J.-P., Limousin, M., et al. 2007, *New Journal of Physics*, 9, 447–24, 65, 79, 108
- Karoji, H. & Nottale, L. 1976, *Nature*, 259, 31–19
- Kashikawa, N., Shimasaku, K., Malkan, M. A., et al. 2006, *ApJ*, 648, 7–96
- Keel, W. C., Cohen, S. H., Windhorst, R. A., & Waddington, I. 1999, *AJ*, 118, 2547–96
- Keeton, C. R. 2001, *ArXiv Astrophysics e-prints* 21, 26
- Kneib, J.-P. 1993, PhD thesis, Ph. D. thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse 28
- Kneib, J.-P. 2002, Strong and weak lensing constraints on galaxy mass distribution (in *The shapes of galaxies and their dark halos*, Proceedings of the Yale Cosmology Workshop. Edited by Priyamvada Natarajan) 22
- Kneib, J.-P., Ellis, R. S., Santos, M. R., & Richard, J. 2004, *ApJ*, 607, 697–23
- Kneib, J.-P., Ellis, R. S., Smail, I., Couch, W. J., & Sharples, R. M. 1996, *ApJ*, 471, 643–19, 21, 26, 79
- Kneib, J.-P., Hudelot, P., Ellis, R. S., et al. 2003, *ApJ*, 598, 804–21, 79
- Kneib, J.-P., Mathez, G., Fort, B., et al. 1994, *A&A*, 286, 701–21

- Kneib, J. P., Mellier, Y., Fort, B., & Mathez, G. 1993, *A&A*, 273, 367 21, 65
- Kneib, J. P., Mellier, Y., Pello, R., et al. 1995, *A&A*, 303, 27 21
- Koo, D. C. & Worthey, G. 1989, *BASS*, 21, 1170 20
- Kovner, I. 1989, *ApJ*, 337, 621 26
- Kudritzki, R.-P., Méndez, R. H., Feldmeier, J. J., et al. 2000, *ApJ*, 536, 19 95
- Lavery, R. J. & Henry, J. P. 1988, *ApJ*, 329, L21 20
- Le Delliou, M., Lacey, C. G., Baugh, C. M., & Morris, S. L. 2006, *MNRAS*, 365, 712 98, 101, 116
- Le Fevre, O., Hammer, F., Angonin, M. C., Gioia, I. M., & Luppino, G. A. 1994, *ApJ*, 422, L5 20
- Liebes, S. 1964, *Physical Review*, 133, 835 3
- Limousin, M., Richard, J., Jullo, E., et al. 2007, *ApJ*, 668, 643 21, 22, 27, 79, 80
- Longair, M. S. 1998, *Galaxy formation*. Springer, 1998 5
- Luppino, G. A. & Gioia, I. M. 1992, *A&A*, 265, L9 64
- Luppino, G. A., Gioia, I. M., Annis, J., Le Fevre, O., & Hammer, F. 1993, *ApJ*, 416, 444 78
- Luppino, G. A., Gioia, I. M., Hammer, F., Le Fèvre, O., & Annis, J. A. 1999, *A&AS*, 136, 117 20, 64
- Lynds, R. & Petrosian, V. 1986, *BASS*, 18, 1014 19
- Maier, C., Meisenheimer, K., Thommes, E., et al. 2003, *A&A*, 402, 79 95
- Massey, R., Rhodes, J., Ellis, R., et al. 2007, *Nature*, 445, 286 19
- Matsuda, Y., Yamada, T., Hayashino, T., et al. 2004, *AJ*, 128, 569 97
- McCarthy, P. J., Spinrad, H., Djorgovski, S., et al. 1987, *ApJ*, 319, L39 96

- Mellier, Y., Fort, B., & Kneib, J.-P. 1993, *ApJ*, 407, 33 21
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. 1973, *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman and Co. 9
- Mollerach, S. & Roulet, E. 2002, *Gravitational lensing and microlensing*. World Scientific 6
- Narayan, R., Blandford, R., & Nityananda, R. 1984, *Nature*, 310, 112 19
- Natarajan, P., De Lucia, G., & Springel, V. 2007, *MNRAS*, 376, 180 27
- Neto, A. F., Gao, L., Bett, P., et al. 2007, *MNRAS*, 381, 1450 80
- Nilsson, K. K., Fynbo, J. P. U., Møller, P., Sommer-Larsen, J., & Ledoux, C. 2006, *A&A*, 452, L23 96, 97, 110
- Nilsson, K. K., Orsi, A., Lacey, C. G., Baugh, C. M., & Thommes, E. 2007, *A&A*, 474, 385 96
- Oguri, M., Inada, N., Keeton, C. R., et al. 2004, *ApJ*, 605, 78 79
- Ohanian, H. C. 1983, *ApJ*, 271, 551 15
- Osterbrock, D. E. 1989, *Astrophysics of gaseous nebulae and active galactic nuclei*. University Science Books 99
- Ouchi, M., Shimasaku, K., Akiyama, M., et al. 2007, *ArXiv e-prints*, 707 96
- Paczynski, B. 1987, *Nature*, 325, 572 19
- Partridge, R. B. & Peebles, P. J. E. 1967, *ApJ*, 147, 868 96, 110
- Pello, R., Sanahuja, B., Le Borgne, J.-F., Soucail, G., & Mellier, Y. 1991, *ApJ*, 366, 405 20
- Petters, A. O., Levine, H., & Wambsganss, J. 2001, *Singularity theory and gravitational lensing*. Progress in mathematical physics ; v. 21; Boston : Birkhäuser 9

- Pettini, M., Kellogg, M., Steidel, C. C., et al. 1998, *ApJ*, 508, 539 95
- Pritchett, C. J. 1994, *PASP*, 106, 1052 95
- Rasia, E., Ettori, S., Moscardini, L., et al. 2006, *MNRAS*, 369, 2013 80, 109
- Refsdal, S. 1964, *MNRAS*, 128, 307 3
- Refsdal, S. 1966, *MNRAS*, 132, 101 3
- Rhoads, J. E., Dey, A., Malhotra, S., et al. 2003, *AJ*, 125, 1006 95
- Richard, J., Kneib, J.-P., Jullo, E., et al. 2007, *ApJ*, 662, 781 21, 24
- Richard, J., Pelló, R., Schaerer, D., Le Borgne, J.-F., & Kneib, J.-P. 2006, *A&A*, 456, 861 23
- Rybicki, G. B. & Lightman, A. P. 1986, *Radiative Processes in Astrophysics*. J. Wiley & Sons 9
- Saha, P. & Williams, L. L. R. 1997, *MNRAS*, 292, 148 22
- Saito, T., Shimasaku, K., Okamura, S., et al. 2006, *ApJ*, 648, 54 97
- Sand, D. J., Treu, T., & Ellis, R. S. 2002, *ApJ*, 574, L129 21
- Santos, M. R., Ellis, R. S., Kneib, J.-P., Richard, J., & Kuijken, K. 2004, *ApJ*, 606, 683 23, 24, 103, 111
- Schaerer, D. 2003, *A&A*, 397, 527 97
- Schmidt, M. 1963, *Nature*, 197, 1040 3
- Schneider, P. 1984, *A&A*, 140, 119 14
- Schneider, P., Ehlers, J., & Falco, E. E. 1999, *Gravitational Lenses*. Springer-Verlag 15, 79
- Shapley, A. E., Steidel, C. C., Pettini, M., & Adelberger, K. L. 2003, *ApJ*, 588, 65 95

- Shimasaku, K., Kashikawa, N., Doi, M., et al. 2006, PASJ, 58, 313 96
- Smail, I. & Dickinson, M. 1995, ApJ, 455, L99 19
- Smail, I., Dressler, A., Kneib, J.-P., et al. 1996, ApJ, 469, 508 21
- Smith, G. P., Kneib, J.-P., Smail, I., et al. 2005, MNRAS, 359, 417 27, 79
- Soucail, G., Fort, B., Mellier, Y., & Picat, J. P. 1987, A&A, 172, L14 19
- Stanway, E., Bunker, A., McMahon, R., et al. 2003, ArXiv Astrophysics e-prints 23
- Steidel, C. C., Adelberger, K. L., Shapley, A. E., et al. 2000, ApJ, 532, 170 96
- Steidel, C. C., Giavalisco, M., Pettini, M., Dickinson, M., & Adelberger, K. L. 1996, ApJ, 462, L17 95
- Steidel, C. C. & Hamilton, D. 1992, AJ, 104, 941 94
- Subramanian, K. & Cowling, S. A. 1986, MNRAS, 219, 333 14, 18
- Thommes, E. & Meisenheimer, K. 2005, A&A, 430, 877 95
- Torri, E., Meneghetti, M., Bartelmann, M., et al. 2004, MNRAS, 349, 476 110
- Tran, K.-V. H., van Dokkum, P., Illingworth, G. D., et al. 2005, ApJ, 619, 134 64, 65, 66, 108
- Trotter, C. S., Winn, J.Ñ., & Hewitt, J.Ñ. 2000, ApJ, 535, 671 22
- Turner, E. L., Ostriker, J. P., & Gott, III, J. R. 1984, ApJ, 284, 1 102
- Tyson, J. A., Wenk, R. A., & Valdes, F. 1990, ApJ, 349, L1 21
- Venemans, B. P., Röttgering, H. J. A., Miley, G. K., et al. 2007, A&A, 461, 823 96
- Verdugo, T. & de Diego, J. A. 2007, ASPC, 379, 354 97
- Villar-Martín, M., Tadhunter, C., Morganti, R., & Holt, J. 2005, MNRAS, 359, L5 96
- Walsh, D., Carswell, R. F., & Weymann, R. J. 1979, Nature, 279, 381 4

- Warren, S. J. & Dye, S. 2003, ApJ, 590, 673 22
- White, S. D. M. & Rees, M. J. 1978, MNRAS, 183, 341 94
- Will, C. M. 1988, American Journal of Physics, 56, 413 1
- Wuyts, S., van Dokkum, P. G., Kelson, D. D., Franx, M., & Illingworth, G. D. 2004, ApJ, 605, 677 64
- Yan, H., Windhorst, R. A., & Cohen, S. H. 2003, ApJ, 585, L93 23
- York, T., Jackson, N., Browne, I. W. A., Wucknitz, O., & Skelton, J. E. 2005, MNRAS, 357, 124 19
- Young, P. 1981, ApJ, 244, 756 12
- Young, P., Gunn, J. E., Oke, J. B., Westphal, J. A., & Kristian, J. 1980, ApJ, 241, 507 6
- Young, P., Gunn, J. E., Oke, J. B., Westphal, J. A., & Kristian, J. 1981, ApJ, 244, 736 6
- Zaritsky, D. & Gonzalez, A. H. 2003, ApJ, 584, 691 20
- Zhang, F. 1999, Matrix Theory (Springer-Verlag New York.) 113
- Zwicky, F. 1937a, Physical Review, 51, 290 3, 6, 22
- Zwicky, F. 1937b, Physical Review, 51, 679 3, 6