



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTINUOS $1/n$ -HOMOGÉNEOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

IGNACIO VÍCTOR GONZÁLEZ RODRÍGUEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. ISABEL PUGA ESPINOSA
2008**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos:

A Dios, porque me has permitido estar en este tiempo, en este lugar, rodeado de las personas que me rodean, y por dejarme vivir lo que he vivido.

A mi mamá, por todo el apoyo incondicional que me has brindado, por tus cuidados, tus ánimos, tu paciencia, tus desvelos. Porque de una manera callada y constante siempre has estado ahí para ayudarme.

A mi papá, porque me hiciste ver que las matemáticas eran manejables aquella ocasión cuando reprobé un examen en tercero de primaria. Quien iba a pensar que esa experiencia marcaría mi futuro.

A mis tres hermosas hermanas Ivonne, Nelida y Fabiola. Gracias por aguantarme, por darme consejos, por elogiarme cuando hago las cosas bien y regañarme cuando lo amerita.

A mis cuñados y sobrinos por hacer felices a mis hermanas.

A mi asesora Isabel Puga, porque tu bien sabes Bety que sin ti nada de este trabajo se hubiera realizado. Gracias por creer en mi, y gracias por todo el apoyo.

A mis sinodales por darse el tiempo de leer este trabajo.

Y también a todas aquellas personas que se han cruzado por mi camino, porque cada uno de ellos ha dejado una huella muy grande en mi corazón, y soy el resultado de haber estado alguna vez a su lado. Los nombraría uno por uno, pero son demasiados y no quiero que se ofendan aquellos a quienes por falta de espacio no mencione.

Y sobre todo a la máxima casa de estudios, la UNAM, porque me has dado alas para volar, porque por mi raza seguirá hablando el Espíritu.

Ignacio González
Agosto del 2008

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Definiciones y Teoremas básicos	4
2.1.1. Espacios Métricos	4
2.1.2. Conexidad y compacidad	6
2.1.3. Productos	8
3. Generalidades y Ejemplos	11
3.1. Definiciones	11
3.2. Ejemplos	12
3.2.1. Espacios homogéneos	12
3.2.2. Continuos homogéneos	13
3.2.3. Continuos 1/2-homogéneos.	13
3.2.4. Continuos 1/3-homogéneos	15
3.2.5. Continuos 1/n-homogéneos para $n \geq 4$	20
3.3. Producto Cartesiano.	24
4. Gráficas	30
4.1. Introducción	30
4.2. Árboles	31
4.3. Gráficas 1/2-homogéneas	33
4.3.1. Gráficas 1/2-homogéneas con puntos de corte	33
4.3.2. Gráficas 1/2-homogéneas sin puntos de corte	35
4.4. Gráficas 1/3-homogéneas sin puntos de corte	53
5. Dendritas	62
5.1. Definición y ejemplos	62

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
5.2. Dendritas 1/3-homóneas	64
5.3. Dendrita de Gehman G_3	66

Capítulo 1

Introducción

La definición original, dada en 1883, por G. Cantor (1845-1918) establece que un continuo es un subconjunto perfecto (es decir cerrado y denso en sí mismo) y conexo de un espacio euclidiano.

Uno de los conceptos básicos de la topología es la conexidad. La definición actual de este concepto fue introducida en 1893 por C. Jordan (1838-1922) para la clase de los subconjuntos compactos del plano. El estudio sistemático de la conexidad fue iniciado por F. Hausdorff (1868-1942), B. Knaster (1893-1980) y Kuratowski (1896-1980) en 1914 aproximadamente. En cuanto a la conexidad local, en 1913 H. Hahn (1879-1934) y S. Mazurkiewicz (1888-1945) obtuvieron (independientemente) un resultado que caracteriza a los continuos localmente conexos: Un continuo métrico es localmente conexo si y sólo si es imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$. En 1913, S. Mazurkiewicz y en 1916, R. L. Moore demostraron que un continuo localmente conexo es conexo por arcos. La conexidad por arcos de los continuos localmente conexos está relacionada con el concepto de orden de un punto por medio del teorema n -arco de Menger (1927): Si un continuo localmente conexo X contiene un punto de orden al menos n (donde n es un número natural), entonces existen n arcos en X los cuales, sin el punto p , son mutuamente disjuntos. Se ha puesto especial interés en los continuos localmente conexos que no contienen curvas cerradas simples, es decir en las dendritas. Wazewski (1896-1972) construyó para cada número natural $n \geq 3$, una dendrita universal para la clase de las dendritas cuyos puntos tienen orden a lo más n .

Actualmente se define continuo como espacio métrico, compacto y conexo.

El origen del concepto de compacidad está vinculado con un teorema demostrado en 1895 por É. Borel (1871-1956), que establece que toda cubierta

abierta numerable de un intervalo cerrado tiene una subcubierta finita. En 1903 Borel generalizó este resultado para todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio euclidiano. La definición actual se debe a P. S. Alexandrov (1896-1982) y a P. S. Urysohn (1898-1924).

El concepto de espacio homogéneo fue introducido en 1920 por W. Sierpiński. En ese mismo año, Knaster y Kuratowski preguntaron si todo continuo homogéneo no degenerado contenido en el plano es una curva cerrada simple. En 1922 el mismo Knaster descubrió el Pseudo-arco, un continuo homogéneo y hereditariamente indescomponible. En 1924, Mazurkiewicz demostró que la pregunta planteada por Knaster y Kuratowski tiene respuesta afirmativa siempre que el continuo sea localmente conexo. Este resultado fue ligeramente generalizado, en 1949, por F. B. Jones, para los continuos homogéneos planos. Los continuos homogéneos fueron el tema principal del artículo de Van Dantzig de 1930, quien demostró que todo solenoide n -ádico es homogéneo. Pero dado que los solenoides no están contenidos en el plano, este resultado no respondió la pregunta de Knaster y Kuratowski. En 1959, R. H. Bing demostró que todo continuo encadenable, homogéneo no degenerado es un pseudo-arco. Este resultado fue un paso hacia la solución del problema de encontrar todos los continuos homogéneos del plano ya que se sabía que todo continuo encadenable es encajable en el plano. Un poco antes, en 1951, F. B. Jones demostró que todo continuo homogéneo del plano que no separa al plano debe ser indescomponible y en 1955 clasificó los continuos homogéneos del plano de la siguiente manera: (a) los que no separan al plano (y por tanto, son indescomponibles), (b) los que separan al plano y son descomponibles, y (c) los que separan al plano y son indescomponibles. Desde que F. B. Jones dió su clasificación, los únicos ejemplos conocidos del tipo (a) son el punto y el pseudoarco. La curva cerrada simple y un ejemplo descubierto simultáneamente, en 1959, por Bing y Jones llamado el círculo de pseudo-arcos, son los únicos ejemplos del tipo (b). En 1981 J. T. Rogers, Jr., probó que no hay continuos de tipo (c). C. E. Burges en 1969, probó que un continuo no degenerado circularmente encadenable en el plano es homogéneo si y solamente si es una curva cerrada simple o un pseudo-arco o un círculo de pseudo-arcos. En 1960, Bing demostró que el círculo es el único continuo homogéneo que contiene un arco.

En resumen, se conocen tres continuos homogéneos planos no degenerados: la curva cerrada simple, el pseudo-arco y el círculo de pseudoarcs. No se sabe si existe otro.

Algunos datos en esta introducción histórica de los continuos homogéneos se obtuvieron de un artículo escrito por Janusz J. Charatonik [3, pág. 245-247]

llamado Bosquejo de la historia de la teoría de continuos. La Teoría de los Continuos es una rama de las matemáticas que está floreciendo en México, y esta tesis es uno de sus frutos.

El concepto de continuo $1/n$ -homogéneo generaliza al de continuo homogéneo y fue introducido por Hanna Patkowska en 1989 [12, pág. 25-28] y trabajado recientemente por S. B. Nadler, V. Neuman, Patricia Pellicer e Isabel Puga [9, 10, 11].

El objetivo de esta tesis es estudiar el concepto $1/n$ -homogeneidad en los continuos, principalmente en las gráficas y las dendritas para los casos $n = 2, 3$.

Siempre estaremos trabajando con espacios métricos.

La tesis está organizada como sigue: En la parte de Preliminares daremos algunas definiciones y teoremas que utilizaremos en el resto de la tesis. En la segunda parte daremos algunas generalidades y ejemplos. En la tercera parte veremos algunas propiedades de las gráficas $1/2$ -homogéneas, después veremos algunos resultados con gráficas $1/3$ -homogéneas, y terminaremos dando algunos resultados y ejemplos de dendritas $1/3$ -homogéneas.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Definiciones y Teoremas básicos

En esta sección daremos algunas definiciones y teoremas que ocuparemos en el desarrollo de este trabajo. La mayor parte de estos resultados no se probarán en esta tesis pero se dan las referencias para que el lector pueda ver las demostraciones.

2.1.1. Espacios Métricos

Definición 2.1 *Un espacio métrico es un conjunto no vacío X junto con una función $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, que satisface las siguientes condiciones:*

- 1) *Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.*
- 2) *Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.*
- 3) *Para cada $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, se cumple la desigualdad del triángulo.*

A la función d se le llama métrica.

Definición 2.2 *Sea X un conjunto. Una topología τ definida en X es una familia de subconjuntos de X que cumple las siguientes propiedades:*

- 1) *\emptyset y X son elementos de τ .*
- 2) *Sea A y B elementos de τ , entonces $A \cap B \in \tau$.*
- 3) *Sea $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de elementos de τ , entonces $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$.*

A los elementos de τ se les llaman abiertos y a la pareja (X, τ) se le llama espacio topológico. En otras palabras, la propiedad 2) la expresamos diciendo que

intersección finita de abiertos es abierta y la propiedad 3) que unión arbitraria de abiertos es abierta. Diremos que un subconjunto C de X es cerrado si $X \setminus C \in \tau$.

Definición 2.3 Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $Y \subset X$ es abierto si dado $y \in Y$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) = \{x \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq Y$.

Observación 2.4 Es fácil ver que la familia de conjuntos abiertos de un espacio métrico es una topología.

Definición 2.5 Un espacio X es Hausdorff si para cualesquiera dos puntos $p, q \in X$, existen abiertos U y V de tal manera que $p \in U$, $q \in V$ y además $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 2.6 Todos los espacios métricos son Hausdorff.

Demostración. Es claro que si p y q son elementos de un espacio métrico X , entonces $B_\varepsilon(p) \cap B_\varepsilon(q) = \emptyset$ si $\varepsilon < \frac{d(p,q)}{2}$. Por lo tanto los espacio métricos son Hausdorff. ■

Definición 2.7 Sea X un conjunto. Sea $\tau = P(X)^1$. A esta topología se le llama la Topología Discreta, y se caracteriza porque cada subconjunto de X , es un abierto de la topología. En particular, cada elemento $\{x\}$ de el conjunto X es un abierto.

Definición 2.8 Sean X un espacio topológico y V un subespacio de X . Definimos la cerradura de V como el cerrado más pequeño que contiene a V , es decir la intersección de todos los subespacios que contienen a V . Denotamos la cerradura de V por $ce(V)$.

Definición 2.9 Sean X un espacio topológico y V un subespacio de X . Definimos la frontera de V como $fr(V) = ce(V) \cap ce(X \setminus V)$.

Notación 2.10 El conjunto \mathbb{N} denota a los números naturales. El símbolo $|X|$ denota el número de elementos que tiene el espacio X , en particular tenemos que $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

¹ $U \in P(X)$ si U es un subconjunto de X . Al conjunto $P(X)$ se le conoce como el conjunto potencia de X .

2.1.2. Conexidad y compacidad

Definición 2.11 Sea X un espacio métrico.

- 1) Diremos que X es *disconexo* si existen dos abiertos, ajenos, no vacíos U y V de X cuya unión es X .
- 2) Si X no es *disconexo* entonces X es *conexo*.
- 3) Si $Y \subset X$ entonces Y es *disconexo* (o *conexo*), si lo es como subespacio con la topología relativa.

Definición 2.12 Sea X un espacio topológico.

- 1) X es *localmente conexo* en p , si para cada abierto U de X que contiene a p , existe un abierto V de X conexo de tal manera que $p \in V \subseteq U$.
- 2) X es *localmente conexo* si es *localmente conexo* en p , para cada $p \in X$.
- 3) X es *hereditariamente localmente conexo* (h.l.c.) si cualquiera de sus subespacios es *localmente conexo*.

Definición 2.13 Sea X un espacio métrico.

- 1) Se dice que una familia \tilde{U} de conjuntos abiertos es una *cubierta abierta* para un conjunto X si cada punto de X pertenece al menos a un $U \in \tilde{U}$. Es decir $X \subseteq \bigcup \{U : U \in \tilde{U}\}$.
- 2) Una *subcubierta* de \tilde{U} es cualquier subfamilia de \tilde{U} que también cubre a X .
- 3) Una *cubierta* o *subcubierta* es *finita* si contiene únicamente un número finito de elementos.

Definición 2.14 Un espacio X es *compacto* si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita de X .

Teorema 2.15 Si X es un espacio métrico y compacto entonces cualquier sucesión en X tiene una subsucesión convergente. [4, Teorema 2.102, pág. 102]

Definición 2.16 Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo.

Una gran cantidad de ejemplos y resultados acerca de continuos se encuentran en los libros [3] y [8].

Definición 2.17 Una función $f : X \rightarrow Y$ de un espacio X en un espacio Y se llama *homeomorfismo*, si f es una biyección tal que f y f^{-1} son continuas. Dos espacios topológicos X y Y se dicen *homeomorfos* o *equivalentes* si existe un homeomorfismo de X sobre Y . Lo denotamos como $X \cong Y$.

Definición 2.18 Una función $f : X \rightarrow Y$ es llamada *cerrada* si la imagen de cada conjunto cerrado en X es cerrada en Y .

Teorema 2.19 Sean X un espacio compacto y Y un espacio Hausdorff. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua, entonces f es una función cerrada.

Demostración. Sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado. Entonces A es compacto, ya que está contenido en un espacio compacto. Luego como f es una función continua entonces $f(A)$ es compacto, y como los compactos en espacios Hausdorff son cerrados, entonces $f(A)$ es un cerrado. ■

Corolario 2.20 Si X y Y son continuos y $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces f es cerrada.

Corolario 2.21 Sean X y Y continuos. Una función $h : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo si y sólo si h es biyectiva y continua.

Definición 2.22 Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un arco si X es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Definición 2.23 Un espacio topológico X es arco-conexo si para todo $x, y \in X$ existe un arco $A \subseteq X$ con puntos extremos x y y .

Teorema 2.24 Todo continuo localmente conexo no degenerado es arco-conexo. Véase [8, Teorema 8.23, pág. 130-131].

Teorema 2.25 Todo subconjunto abierto y conexo de un espacio localmente conexo es arcoconexo [8, Teorema 8.26, pág. 132].

Definiremos ahora una relación (como en la Definición 3.1).

Definición 2.26 Sea X un espacio topológico, y sean $x, y \in X$. Decimos que x está relacionado con y (denotado $x \sim y$) si $x = y$, o si existe un arco con puntos extremos x y y .

Proposición 2.27 \sim es una relación de equivalencia.

Demostración. i) $x \sim x$. Es inmediato.

ii) Si $x \sim y$ entonces $y \sim x$. Si $x \sim y$ entonces existe un arco $A \subseteq X$ con puntos extremos x y y , el mismo arco nos sirve para ver que $y \sim x$.

iii) Si $x \sim y$ y $y \sim z$ entonces $x \sim z$. Como $x \sim y$ entonces existe un arco $A \subseteq X$ con puntos extremos x y y . De la misma manera como $y \sim z$ existe un arco $B \subseteq X$ con puntos extremos y y z . Si consideramos $A \cup B$, nos damos cuenta que contiene un arco con extremos x y z . Entonces $x \sim z$. ■

Definición 2.28 Sea X un espacio topológico, definimos la arco-componente de x como el conjunto $C_x = \{y \in X \mid x \sim y\}$.

Definición 2.29 Sea $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$. Se dice que X es una curva cerrada simple si $X \cong S^1$.

2.1.3. Productos

En esta tesis sólo nos preocuparemos de productos cartesianos finitos y numerables, aún así la definición la damos en general para una familia arbitraria de espacios topológicos.

Definición 2.30 Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos. El producto cartesiano $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es el conjunto de todas las funciones continuas $c : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ que tienen la propiedad de que para toda $\alpha \in \Lambda$, se tiene que $c(\alpha) \in X_\alpha$.

Observación 2.31 1) $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es un conjunto. [2, l, 8.5 y 8.9, pág. 19 y 20].

2) Un elemento $c \in \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ generalmente lo escribiremos $\{a_\alpha\}$, indicando que $c(\alpha) = a_\alpha$ para cada α . Con esta notación, $a_\alpha \in X_\alpha$ es llamada la α -ésima coordenada. El conjunto X_α es llamado el α -ésimo factor de $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

3) Para cada $\beta \in \Lambda$, el mapeo $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ dado por $\pi_\beta(\{a_\alpha\}) = a_\beta$ es llamado la proyección sobre el β -ésimo factor.

4) Dado un $\alpha \in \Lambda$ y $C_\alpha \subseteq X_\alpha$, denotaremos $\pi_\alpha^{-1}(C_\alpha)$ por $\langle C_\alpha \rangle$. Éste es el subconjunto de $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ donde cada factor es X_α excepto el α -ésimo, el cual es C_α .

Productos finitos

Definición 2.32 Sean $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$ espacios topológicos con sus respectivas topologías y sea $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Definimos la topología producto P en X como aquella que tiene como base a la colección $B = \left\{ \prod_{i=1}^n U_i \mid U_i \in \tau_i \right\}$.

En otras palabras $A \in P$ si dado $(x_1, \dots, x_n) \in A$, existe $U_i \in \tau_i$, con $i = \{1, \dots, n\}$, de tal manera que $(x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times \dots \times U_n \subseteq A$.

Definición 2.33 Para cada j , la proyección natural $\pi_j : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X_j$ está definida por $\pi_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = x_j$.

Teorema 2.34 La topología producto en $\left(\prod_{i=1}^n X_i, P \right)$ es la mínima para la cual π_j es continua para toda j .

Demostración. Sea τ una topología para $\prod_{i=1}^n X_i$, de tal manera que $\pi_j : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X_j$ es continua. Es decir si $U_j \in \tau_j$ entonces $\pi_j^{-1}(U_j) = \prod_{i \neq j} X_i \times U_j \in \tau$. Queremos probar que $P \subseteq \tau$. Consideremos un abierto $A \in P$ y $(a_1, \dots, a_n) \in A$, entonces $(a_1, \dots, a_n) \in U_1 \times \dots \times U_n = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_n^{-1}(U_n) \subseteq A$. Por lo cual $A \in \tau$. ■

Productos infinitos

Definición 2.35 Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea τ_α la topología para X_α . La topología producto en $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es aquella que tiene como subbase todos los conjuntos de la forma $\langle U_\beta \rangle = \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, donde U_β varía sobre todos los abiertos de τ_β y β varía sobre todos los elementos de Λ .

Observación 2.36 Los abiertos básicos son los conjuntos de la forma $U_{\alpha_1} \times \dots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\beta \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n} X_\beta = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, donde n es un número natural y cada U_{α_i} es un conjunto abierto en X_{α_i} . Denotaremos este conjunto por

$\langle U_{\alpha_1} \times \cdots \times U_{\alpha_n} \rangle$. Entonces cuando $|\Lambda| = n < \aleph_0$, una base para la topología es simplemente la familia de todas las cajas $\prod_{i=1}^n U_i$, donde cada U_i es un abierto en X_i . Sin embargo cuando $|\Lambda| \geq \aleph_0$, esto no es verdadero: De hecho, un conjunto de la forma $\prod U_\alpha$, donde cada $U_\alpha \neq X_\alpha$ y U_α es abierto en X_α , nunca es un abierto en el producto cartesiano, y esto por que cada abierto básico está restringido únicamente en un número finito de coordenadas; como ningún abierto básico puede estar contenido en $\prod_{\alpha} U_\alpha$, entonces $\prod_{\alpha} U_\alpha$ no es abierto [2, III, 2.3. pág. 65].

Capítulo 3

Generalidades y Ejemplos

En este capítulo daremos la definición de espacio 1/n-homogéneo, veremos algunos ejemplos y mencionaremos algunas generalidades. Muchos de los ejemplos mencionados en este capítulo se usarán en el resto de esta tesis.

3.1. Definiciones

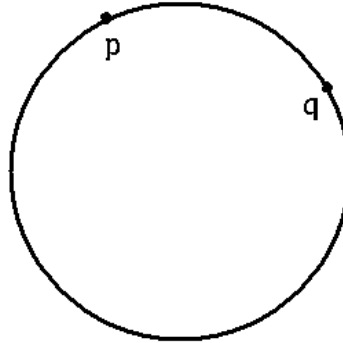
Definición 3.1 Sean X un espacio y $a, b \in X$. Consideremos la siguiente relación: $a \approx b$ si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ de tal manera que $h(a) = b$.

Proposición 3.2 Sea X un continuo, entonces \approx es una relación de equivalencia.

Demostración. i) Veamos primero que $a \approx a$. La función identidad $i : X \rightarrow X$ definida por $i(a) = a$, para toda $a \in X$. La función identidad es un homeomorfismo.

ii) Si $a \approx b$ entonces $b \approx a$. Si $a \approx b$ entonces existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ de tal manera que $h(a) = b$. Como h es homeomorfismo, entonces $h^{-1} : X \rightarrow X$ es también un homeomorfismo de tal manera que $h^{-1}(b) = a$. Por lo tanto $b \approx a$.

iii) Si $a \approx b$ y $b \approx c$, entonces $a \approx c$. Existen homeomorfismos $g, h : X \rightarrow X$ de tal manera que $g(a) = b$ y $h(b) = c$. Consideremos la composición $h \circ g : X \rightarrow X$, donde $h \circ g(x) = h(g(x))$. Esta nueva función es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos, y además $h \circ g(a) = h(g(a)) = h(b) = c$. Por lo tanto $a \approx c$. ■

Figura 3.1: S^1

Sabemos que una relación de equivalencia induce una partición. En este caso, a cada elemento de la partición le llamaremos una órbita.

Definición 3.3 Se dice que un espacio X es $1/n$ -homogéneo si el número de órbitas inducidas por la relación de equivalencia \approx es igual a $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cuando $n = 1$ se tienen a los ya conocidos espacios homogéneos.

3.2. Ejemplos

3.2.1. Espacios homogéneos

Ejemplo 3.4 1) S^1 es un espacio homogéneo (véase Figura 3.1).

Es fácil ver que para cualquier par de puntos $p, q \in S^1$ existe una rotación $r : S^1 \rightarrow S^1$ de tal manera que $r(p) = q$, y claramente r es un homeomorfismo.

2) \mathbb{R} es homogéneo, usando una función traslación.

3) \mathbb{R}^n es homogéneo, usando una función traslación.

4) El conjunto de Cantor [8, Definición 7.5, pág. 105-106] es homogéneo, esto se probará más adelante en el Teorema 3.19.

5) Un espacio discreto es homogéneo. Sea X un espacio discreto y sean $x,$

$y \in X$. Consideremos la función definida como $h(z) = \begin{cases} x & \text{si } z = y \\ y & \text{si } z = x \\ z & \text{si } x \neq z \neq y \end{cases}$,

con $h : X \rightarrow X$. La función h es biyectiva y continua, y por lo tanto X es homogéneo.



Figura 3.2: Intervalo

3.2.2. Continuos homogéneos

Ejemplo 3.5 1) S^1 , véase Fig 3.1.

2) La esfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$.

3) El toro, véase Teorema 3.20.

4) El pseudo-arco. Véase [7].

3.2.3. Continuos 1/2-homogéneos.

Ejemplo 3.6 1) El intervalo $[a, b]$ (véase la Figura 3.2), es un continuo 1/2-homogéneo, donde las órbitas son $O_1 = \{a, b\}$ y $O_2 = (a, b)$.

2) El continuo que consta de n curvas cerradas simples unidas por un punto (flores finitas), también es un continuo 1/2-homogéneo, véase Figura 3.3. Una órbita es $O_1 = \{p\}$ donde p es el punto en el que se intersectan las curvas cerradas simples y la otra es $O_2 = X \setminus \{p\}$.

3) Sea X el arete Hawaiano, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, donde C_i es el círculo en \mathbb{R}^2 con centro en $(0, 1 - 2^{-i})$ y radio 2^{-i} . Véase la Figura 3.4. El arete Hawaiano X es un continuo 1/2-homogéneo donde $O_1 = \{p\}$ es el punto donde se intersectan todos los círculos, y $O_2 = X \setminus \{p\}$.

4) El continuo que consta de n arcos que unen a dos puntos distintos a y b es un continuo 1/2-homogéneo, véase la Figura 3.5. Una de las órbitas es $O_1 = \{a, b\}$, y la otra órbita es $O_2 = X \setminus \{a, b\}$.

5) La suspensión del conjunto de Cantor, denotada por $Sus(C)$, es el continuo que consta de todos los segmentos que unen a los puntos del conjun-

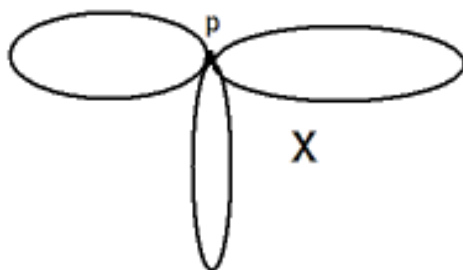


Figura 3.3: Flores finitas

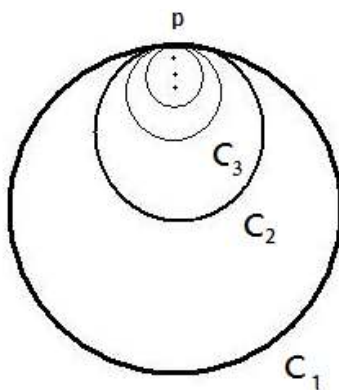


Figura 3.4: Arete Hawaiano

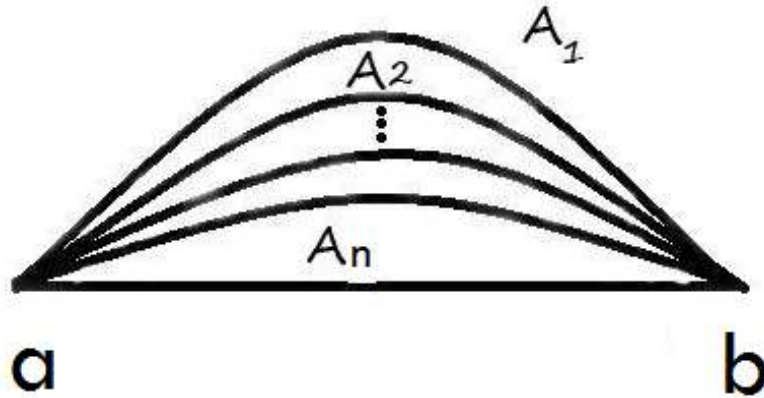


Figura 3.5: n arcos con extremos a y b

to de Cantor C , con los puntos $(1/2,1)$ y $(1/2,-1)$, véase la Figura 3.6. Ya que el conjunto de Cantor es homogéneo (véase el Teorema 3.19), la suspensión del conjunto de Cantor es un continuo $1/2$ -homogéneo. Las órbitas son $O_1 = \{(1/2, 1), (1/2, -1)\}$, $O_2 = Sus(C) \setminus \{(1/2, 1), (1/2, -1)\}$.

3.2.4. Continuos $1/3$ -homogéneos

Para describir las órbitas, en los siguientes ejemplos utilizaremos la siguiente notación: Sea ab un arco con extremos a y b , entonces denotaremos por $(ab) = ab \setminus \{a, b\}$ al arco sin sus puntos extremos.

Ejemplo 3.7 1) Consideremos n arcos rt_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tales que $rt_i \cap rt_j = \{r\}$ si $i \neq j$. Este continuo, al que llamamos n -odo simple, es $1/3$ -homogéneo, véase Figura 3.7. Las órbitas son $O_1 = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ (los puntos extremos), $O_2 = \{r\}$ donde r es el punto en el cual se unen los arcos, y $O_3 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (rt_i)$.

2) Como caso particular, un 3-odo simple X (o triodo simple) es un continuo $1/3$ -homogéneo, véase Figura 3.8. Tiene tres órbitas, en una de ellas están los tres puntos extremos $O_1 = \{a, b, c\}$, otra órbita es $O_2 = \{d\}$, y finalmente $O_3 = X \setminus \{O_1 \cup O_2\}$.

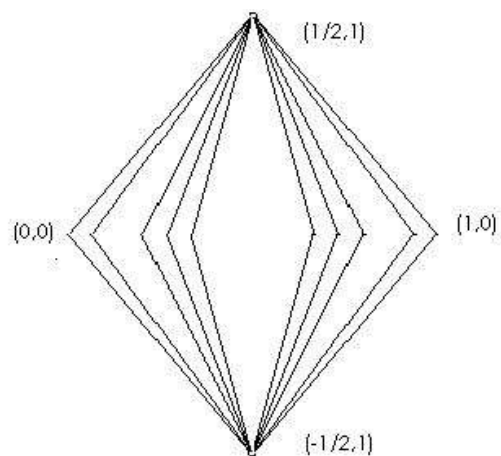


Figura 3.6: Suspensión del conjunto de Cantor

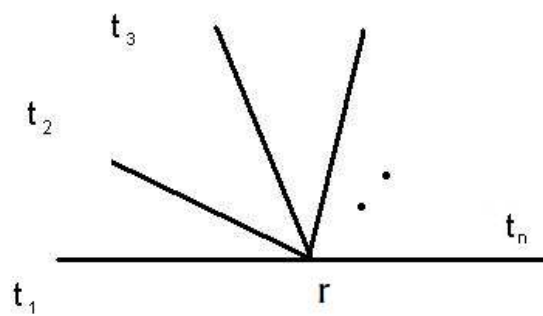


Figura 3.7: n -odo simple

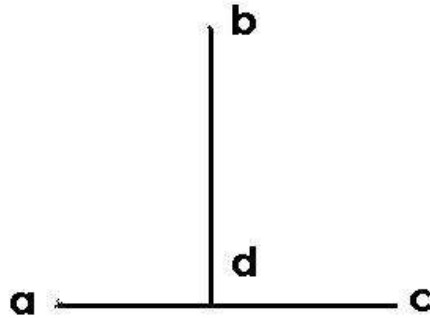


Figura 3.8: Triodo simple

3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n el arco con extremos v y t_n , donde $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám} A_n = 0$ y además $A_n \cap A_m = \{v\}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces $F_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es un continuo 1/3-homogéneo, véase la Figura 3.9. Las órbitas son $O_1 = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$, $O_2 = \{v\}$ y $O_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (vt_n)$.

4) Sea C el conjunto de Cantor, y v el punto $(1/2, 1) \in \mathbb{R}^2$. El cono del conjunto de Cantor, denotado como $\text{cono}(C) = \bigcup_{x \in C} vx$ (véase la Figura 3.10), es un continuo 1/3-homogéneo, $O_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in C\}$, $O_2 = \bigcup_{x \in C} (vx)$ y $O_3 = \{v\}$ son las órbitas. Esto se sigue de que el conjunto de Cantor es homogéneo (véase el Teorema 3.19).

5) Consideremos un intervalo $[a, b]$ y en cada punto extremo le unimos las circunferencias C_1 y C_2 respectivamente, de tal manera que $[a, b] \cap C_1 = \{a\}$ y $[a, b] \cap C_2 = \{b\}$. A este espacio le llamaremos las pesas. Las pesas X es un continuo 1/3-homogéneo, véase Figura 3.11. Las órbitas son $O_1 = \{a, b\}$ (el conjunto que contiene a los dos puntos donde se intersectan los círculos con el intervalo); $O_2 = (ab)$ el intervalo abierto, y $O_3 = X \setminus ab$ (el conjunto de puntos que están en los círculos exceptuando a y b).

6) Sea S el rayo enrollado en S^1 . Entonces $X = S \cup S^1$ es un continuo 1/3-homogéneo y no es localmente conexo (véase Figura 3.12). Las órbitas son $O_1 = E(X) = \{x\}$, $O_2 = S \setminus \{x\}$ y $O_3 = S^1$.

7) Continuo 1/3-homogéneo con un punto de ramificación y no es localmente conexo (véase Figura 3.13). Se puede ver como $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, donde X_i es un

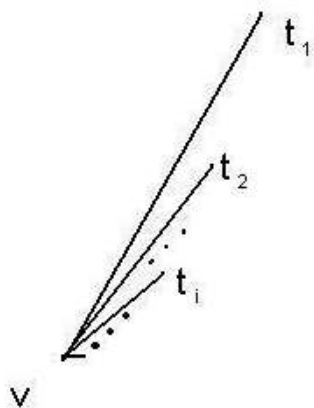


Figura 3.9: F_ω

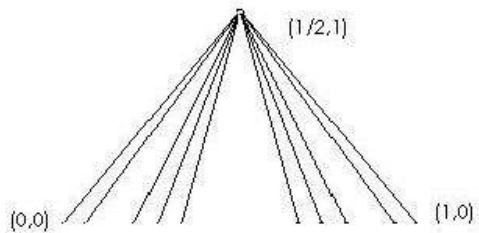


Figura 3.10: Cono del conjunto de Cantor

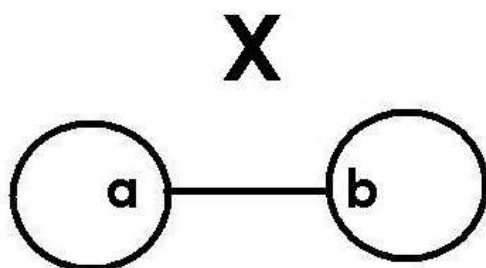


Figura 3.11: Las pesas

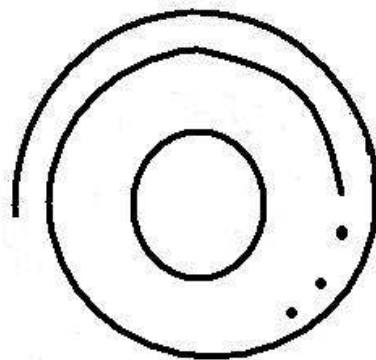


Figura 3.12: Semirayo enrollado en S^1

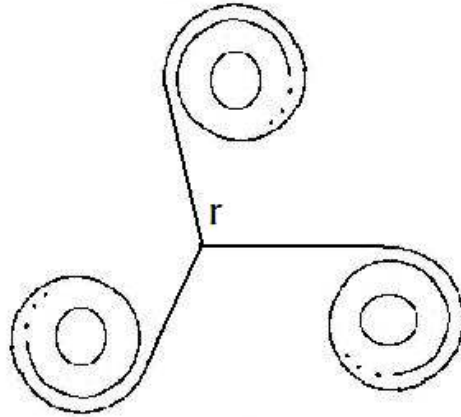


Figura 3.13: Continuo 1/3-homogéneo que no es localmente conexo

continuo como el de la Figura 3.12, para $i = \{1, 2, 3\}$, y además $X_i \cap X_j = \{r\}$, donde r es el punto extremo de cada X_i . Las órbitas son $O_1 = \{r\}$, $O_2 = \bigcup_{i=1}^3 S_i$ donde S_i es el rayo enrollado menos el punto extremo r en las circunferencias S_i^1 , y $O_3 = \bigcup_{i=1}^3 S_i^1$.

8) Sea X un triángulo con tres circunferencias pegados. X es un continuo 1/3-homogéneo con tres puntos de corte (véase Figura 3.14). Las órbitas son $O_1 = \{p, q, r\}$, $O_2 = (S_1^1 \setminus \{p\}) \cup (S_2^1 \setminus \{q\}) \cup (S_3^1 \setminus \{r\})$ y $O_3 = X \setminus (O_1 \cup O_2)$.

9) El continuo X en la Figura 3.15 es un continuo 1/3-homogéneo. Las órbitas son $O_1 = \{a, b, c, d\}$, $O_2 = (ab) \cup (cd)$, $O_3 = X \setminus (ab \cup cd)$.

3.2.5. Continuos 1/n-homogéneos para $n \geq 4$

Ejemplo 3.8 Sean T un triodo simple, consideremos los puntos extremos $\{b, c, d\}$, y para $i \in \{b, c, d\}$ sean S_i^1 círculos de tal manera que $T \cap S_i^1 = \{i\}$. Sea $X = T \cup S_b^1 \cup S_c^1 \cup S_d^1$. El continuo X es 1/4-homogéneo (véase Figura 3.16). Las órbitas son $O_1 = \{a\}$, $O_2 = T \setminus \{a, b, c, d\}$, $O_3 = \{b, c, d\}$ y $O_4 = \left(\bigcup_{i=\{b,c,d\}} S_i^1 \right) \setminus \{b, c, d\}$.

Ejemplo 3.9 1) Sea X la gráfica de la función $\text{sen}(\frac{1}{x})$ en el intervalo $(0, 1]$,

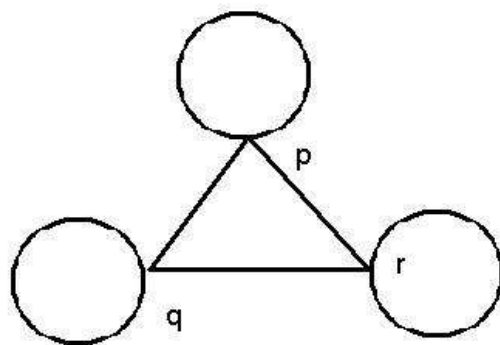


Figura 3.14: Continuo 1/3-homogéneo con 3 puntos de corte

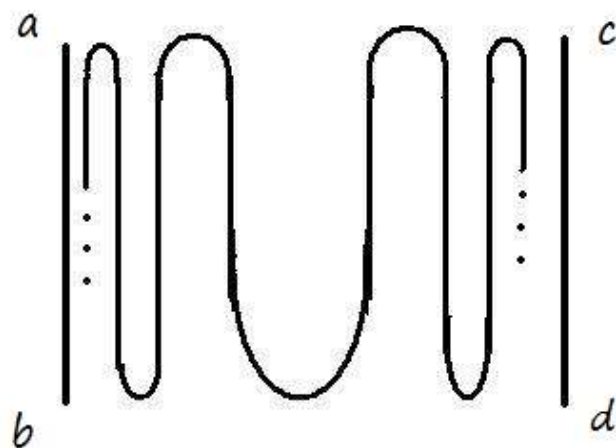


Figura 3.15:

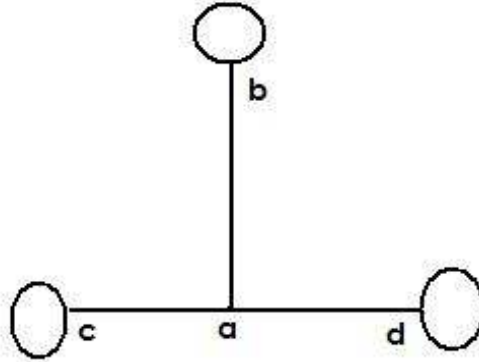


Figura 3.16: Continuo 1/4-homogéneo.

le unimos además la barra límite $(0 \times [0, 1])$. Entonces X es un continuo 1/4-homogéneo (véase la Figura 3.17). Sean $a = (0, 1)$, $b = (0, -1)$ y $c = (1, \text{sen}(1))$, entonces las órbitas son $O_1 = \{a, b\}$, $O_2 = (ab)$, $O_3 = \{c\}$, y $O_4 = X \setminus (ab \cup c)$.

2) Consideremos la cerradura de la gráfica de la función $\text{sen}(1/x)$, donde $x \in (0, 1]$, le unimos además un semicírculo del punto $(0, -1)$, al punto $(1, \text{sen}(1))$, (véase Figura 3.18). A este continuo le llamamos el Círculo de Varsovia y es 1/4-homogéneo. Sean X el Círculo de Varsovia, $a = (0, 1)$, y $b = (0, -1)$. Las órbitas son $O_1 = \{a\}$, $O_2 = \{x \in X \mid x \in ab \setminus \{a, b\}\}$, $O_3 = \{b\}$, y $O_4 = X \setminus ab$.

Ejemplo 3.10 Continuo 1/5-homogéneo. Véase Figura 3.19.

Para ver ejemplos de continuos 1/n-homogéneos localmente conexos, véase el Ejemplo 4.6.

Ejemplo 3.11 Veamos continuos 1/n-homogéneos no localmente conexos para $n \geq 2$.

1) La suspensión del conjunto de Cantor es un continuo 1/2-homogéneo no localmente conexo, véase el Ejemplo 3.6.

2) El Cono de Cantor es 1/3-homogéneo, vease el Ejemplo 3.10.

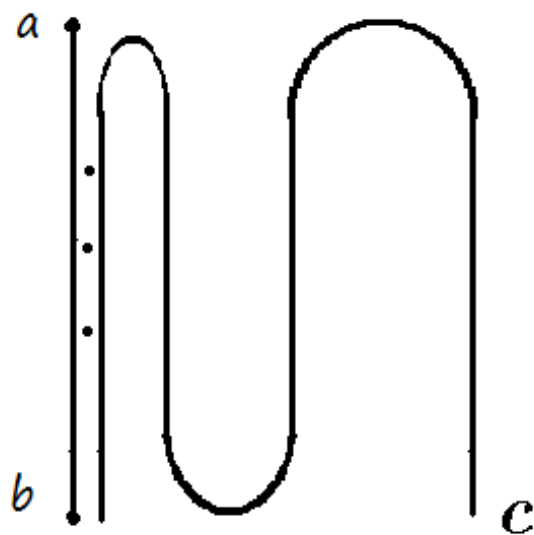


Figura 3.17: Continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$

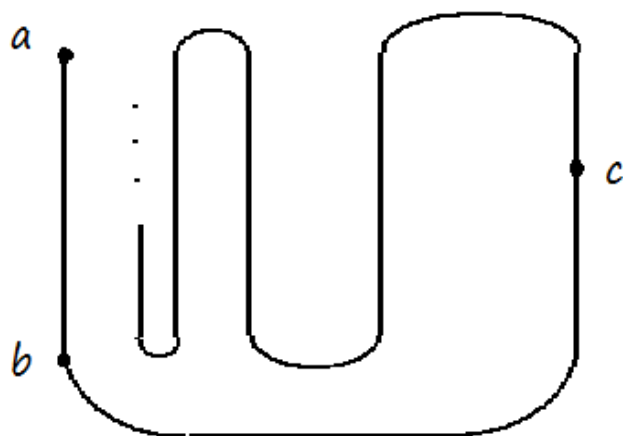


Figura 3.18: Círculo de Varsovia

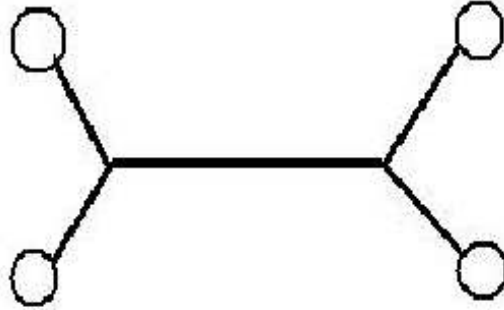


Figura 3.19: Continuo 1/5-homogéneo.

3) Si queremos un continuo X que sea $1/n$ -homogéneo para $n \geq 4$, consideremos primero un continuo $\frac{1}{n-2}$ -homogéneo como en el Ejemplo 4.6, y en cada punto extremo le pegamos un cono del conjunto de Cantor desde su vértice, véase la Figura 3.20 para el caso $n = 4$. Entonces X es un continuo $1/4$ -homogéneo y no es localmente conexo. Las órbitas son $O_1 = (ab)$, $O_2 = \{a, b\}$, $O_3 = E(X)$, y $O_4 = (ae) \cup (be)$, donde $e \in E(X)$.

Ejemplo 3.12 Para ver continuos localmente conexos $1/n$ -homogéneos, para $n \geq 3$, véase los ejemplos del siguiente capítulo en la sección de árboles.

3.3. Producto Cartesiano.

Veamos ahora dos ejemplos de productos cartesianos entre continuos $1/2$ -homogéneos y calculemos su grado de homogeneidad.

Ejemplo 3.13 Sea A el arete hawaiano (véase Figura 3.4) y sea I el intervalo $[0, 1]$, entonces $X = A \times I$ es $1/4$ -homogéneo. Notemos que las órbitas de A son O_1^A y O_2^A y las órbitas de I son O_1^I y O_2^I . Entonces las órbitas de X son

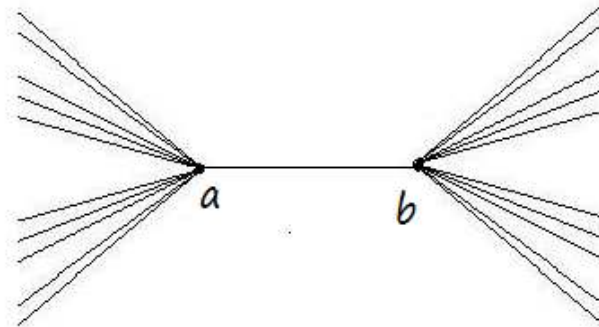


Figura 3.20: Continuo 1/4-homogéneo no localmente conexo.

$O_1^X = O_1^A \times O_1^I$, $O_2^X = O_1^A \times O_2^I$, $O_3^X = O_2^A \times O_1^I$ y $O_4^X = O_2^A \times O_2^I$ (véase Figura 3.21).

Ejemplo 3.14 $X = [0, 1] \times [0, 1]$ es 1/2-homogéneo. Ya vimos en los ejemplos anteriores que las órbitas del intervalo unitario son $O_1^I = \{0, 1\}$ y $O_2^I = (0, 1)$. Notemos que $O_1^I \times O_1^I$, $O_1^I \times O_2^I$, $O_2^I \times O_1^I$ están en la misma órbita, es decir en la frontera de X , y $O_2^I \times O_2^I$ es una órbita diferente en el interior de X , pues en el cuadrado unitario sólo hay 2 órbitas, los puntos frontera y los puntos interiores. Véase Figura 3.22.

Teorema 3.15 Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Si X_i es $1/m_i$ -homogéneo, entonces $X = X_1 \times \dots \times X_n$ es $1/m$ -homogéneo para alguna $m \leq m_1 \cdot \dots \cdot m_n$.

Demostración. Sea $O \subseteq P(X)$ una órbita en el conjunto potencia de X , definida como sigue: $W \in O$ si $W = O_1 \times \dots \times O_n$ donde O_i es una órbita de X_i .

- 1) $X = \bigcup_{W \in O} W$. Esto se sigue de que cada X_i es la unión de sus órbitas.
- 2) Si $a, b \in W \in O$, entonces existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que $h(a) = b$.

Sean $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, \dots, b_n) \in W$. Entonces existen homeomorfismos $h_i : X_i \rightarrow X_i$ de tal manera que $h_i(a_i) = b_i$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, ya

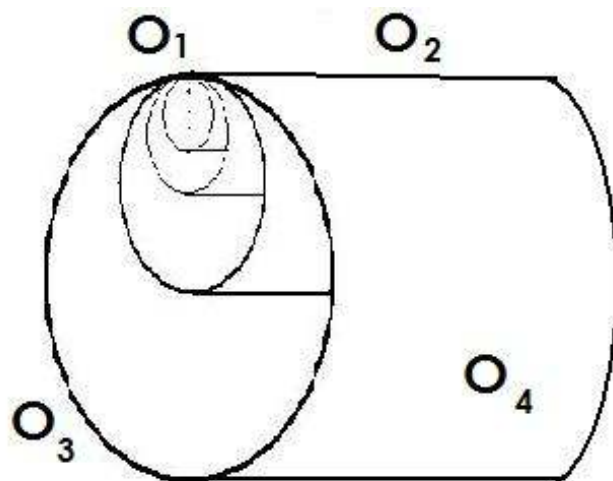


Figura 3.21: $X = A \times I$

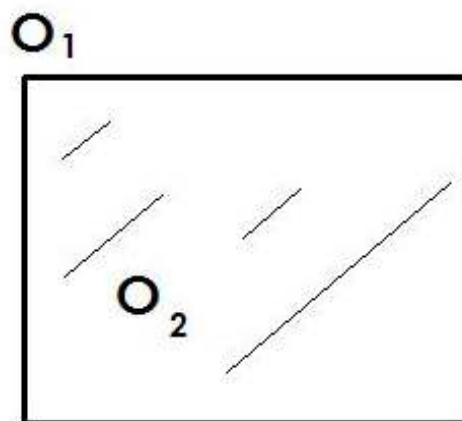


Figura 3.22: $X = [0, 1] \times [0, 1]$

que a_i y b_i están en la misma órbita de X_i . Definamos la función $h : X \rightarrow X$ como sigue $h(x_1, \dots, x_n) = (h_1(x_1), \dots, h_n(x_n))$. La función h es continua, pues h_i es continua para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Es suprayectiva puesto que para cada y_i , existe x_i de tal manera que $h_i(x_i) = y_i$ y entonces para cada $y \in X$, existe $x \in X$ de tal manera que $h(x) = y$. Si $a, c \in X$, y $a \neq c$, existe una coordenada donde $a_i \neq c_i$, y como h_i es inyectiva entonces $h_i(a_i) \neq h_i(c_i)$, y por lo tanto $h(a) \neq h(c)$. En consecuencia, h es un homeomorfismo.

De 1) y 2) se sigue el resultado. ■

Corolario 3.16 Si X_1, \dots, X_n son espacios homogéneos, entonces el producto $\prod_{i=1}^n X_i$ es homogéneo.

Demostración. Usando el Teorema 3.15 en el caso cuando cada $m_i = 1$, se tiene que $\prod_{i=1}^n X_i$ es homogéneo. ■

Teorema 3.17 Si X_α es homogéneo para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es homogéneo.

Demostración. Sean $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ y $(b_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in X$, entonces para cada $\alpha \in \Lambda$ existe un homeomorfismo $h_\alpha : X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ de tal manera que $h_\alpha(a_\alpha) = b_\alpha$. Definimos entonces la función $h : X \rightarrow X$ como sigue $h((x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}) = (h_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$. La función h así definida es biyectiva y continua y por lo tanto es un homeomorfismo. Luego entonces X es homogéneo. ■

Corolario 3.18 Si X_n es homogéneo para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es homogéneo.

Demostración. Usando el Teorema 3.17 para el caso cuando $\Lambda = \mathbb{N}$, se tiene el corolario. ■

Teorema 3.19 El conjunto de Cantor es homogéneo.

Demostración. Sea $A_i \in \{0, 2\}$ con la topología discreta (véase la Definición 2.7), para cada $i \in \mathbb{Z}^+$; entonces $\prod_{n \in \mathbb{Z}^+} A_n$ es el conjunto de todas las sucesiones de 0's y 2's; escrito de otra manera $\prod_{n \in \mathbb{Z}^+} A_n = \{\{n_i\} \mid n_i = 0 \text{ o } 2; i = 1, 2, \dots\}$.

La función continua $f : \prod_{n \in \mathbb{Z}^+} A_n \rightarrow [0, 1]$ definido por $f(\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{3^i}$ es inyectivo, y además su imagen, contenida en el intervalo $[0, 1]$, es el conjunto de

Cantor [8, Definición 7.5, pág 105-106]. El conjunto de Cantor puede ser descrito geoméricamente como sigue: Dividimos el intervalo $[0, 1]$ en tres partes iguales y quitamos el tercio medio, es decir el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; con esto quitamos todos los números reales en $[0, 1]$ que requieren $n_1 = 1$ en la primera cifra de su expansión triádica. En el segundo paso quitamos el tercio medio a cada uno de los dos intervalos que permanecen, es decir a los intervalos $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$, y de esta manera eliminamos todos los números en $[0, 1]$ que requieren $n_2 = 1$ en la segunda cifra de su expansión triádica. Procediendo de una manera inductiva, removemos en el n -ésimo paso la unión M_n de los tercios medios de los 2^{n-1} intervalos presentes y $C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ es el conjunto de Cantor. Dicho de otra manera, el conjunto de Cantor consiste de todos los números reales en el intervalo $[0, 1]$ que no requieren el uso del número uno en su expansión triádica. Como la expansión (sin usar 1's) de cada miembro del conjunto de Cantor es única, entonces f es una biyección de $\prod_{n \in \mathbb{Z}^+} A_n$ en el conjunto de Cantor. Luego el conjunto de Cantor es homeomorfo a $\{0, 2\}^{\aleph_0}$. Sabemos que $\{0, 2\}$ es un espacio discreto y por lo tanto homogéneo, y usando el Corolario 3.18, se tiene que $\{0, 2\}^{\aleph_0}$ es homogéneo. ■

Teorema 3.20 $S^1 \times S^1$ (el toro) es homogéneo.

Demostración. Como S^1 es homogéneo (véase Ejemplo 3.4) y usando el Corolario 3.16, se tiene que $S^1 \times S^1$ es homogéneo. Véase la Figura 3.23. ■

Usando el Teorema 3.20 podemos crear una infinidad de continuos $1/n$ -homogéneos con diferentes dimensiones.

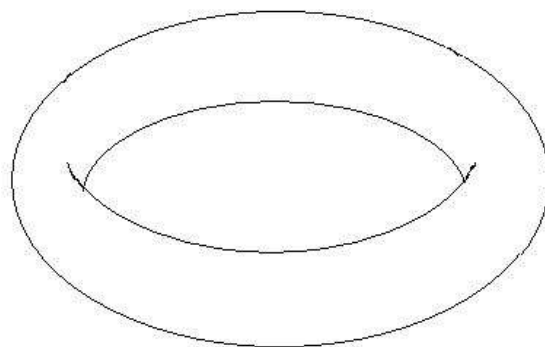


Figura 3.23: Toro, $S^1 \times S^1$

Capítulo 4

Gráficas

4.1. Introducción

Comenzaremos este capítulo dando la definición de gráfica y algunos ejemplos. Después veremos algunas propiedades de gráficas $1/2$ y $1/3$ -homogéneas.

Definición 4.1 *Una gráfica es un continuo que es unión finita de arcos, de tal manera que dos arcos o bien son ajenos, o se intersectan en un punto extremo, o en ambos puntos extremos.*

Definición 4.2 *Definimos un árbol como una gráfica que no contiene curvas cerradas simples.*

Observación 4.3 1) *Toda gráfica es hereditariamente localmente conexa. Véase [8, 9.4, pág. 142].*

2) *Si X es un árbol y $a, b \in X$, entonces existe un único arco $ab \subseteq X$, véase [8, 10.9, pág. 169].*

Recordemos que $(ab) = ab \setminus \{a, b\}$.

Definición 4.4 *Sean X una gráfica y $x \in X$. Sea $m \in \mathbb{N}$.*

1) *Decimos que x es de orden m en X , escrito $\text{ord}_X(x) = m$, si para cualquier abierto U que contiene a x , existe un abierto V de tal manera que $x \in V \subset U$ y que cumpla que $|fr(V)| = m^1$, y además que m sea mínimo con esa propiedad.*

¹ $fr(V) = ce(V) \cap ce(X \setminus V)$

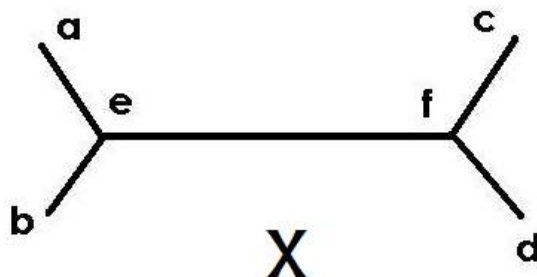


Figura 4.1: Árbol 1/4-homogéneo.

2) $O(X) = \{p \in X : \text{ord}_X(p) = 2\}$ es el conjunto de puntos de orden dos de X , conocido como el conjunto de puntos ordinarios de X .

3) $E(X) = \{p \in X : \text{ord}_X(p) = 1\}$ es el conjunto de puntos extremos de X .

4) $R(X) = \{p \in X : \text{ord}_X(p) \geq 3\}$ es el conjunto de puntos de ramificación de X .

Ejemplo 4.5 Gráficas que no son árboles:

1) S_1 (véase Figura 3.1) es una gráfica homogénea.

2) Las flores finitas (véase el Ejemplo 3.6, 2)) son gráficas 1/2-homogéneas.

3) La gráfica que consta de n arcos con extremos a y b (véase la Figura 3.5), es una gráfica 1/2-homogénea.

4) Las pesas (véase la Figura 3.11), es una gráfica 1/3-homogénea.

5) La gráfica de la Figura 3.16, es una gráfica 1/4-homogénea.

4.2. Árboles

Ejemplo 4.6 1) El intervalo (Figura 3.2) es un árbol 1/2-homogéneo.

2) El n -odo de la Figura 3.7 es un árbol 1/3-homogéneo.

3) El árbol X en la Figura 4.1 es 1/4-homogéneo. Es fácil ver que las órbitas son $O_1 = E(X)$, $O_2 = (ae) \cup (be) \cup (cf) \cup (df)$, $O_3 = R(X)$ y $O_4 = (ef)$.

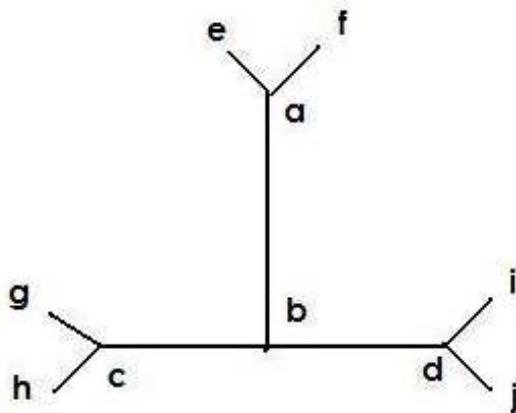


Figura 4.2: Árbol 1/5 homogéneo.

4) Mostramos X un árbol 1/5-homogéneo en la Figura 4.2. Las órbitas son $O_1 = \{b\}$, $O_2 = (ba) \cup (bc) \cup (bd)$, $O_3 = \{a, c, d\}$, $O_4 = E(X)$ y $O_5 = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^4 O_i \right)$.

Este árbol se construyó de la siguiente manera: Consideramos el 3-odo simple de la Figura 3.8, el cual es un árbol 1/3-homogéneo. En cada punto extremo se añadieron dos arcos. En el caso del ejemplo del inciso 4) sólo pegamos en cada punto extremo del 3-odo dos arcos. Siguiendo este mismo proceso podemos construir árboles 1/n-homogéneos cuando n es impar y $n \geq 3$

5) Un árbol X que es 1/6-homogéneo (véase Figura 4.3). Las órbitas son $O_1 = (ab)$, $O_2 = \{a, b\}$, $O_3 = (ac) \cup (ae) \cup (bd) \cup (bf)$, $O_4 = \{c, d, e, f\}$, $O_5 = E(X)$ y $O_6 = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^5 O_i \right)$.

Esta gráfica se construyó a partir del árbol 1/4-homogéneo de la Figura 4.1. En cada punto extremo le añadimos el mismo número de arcos. De la misma manera se pueden construir árboles 1/n-homogéneos si n es par y $n \geq 2$.

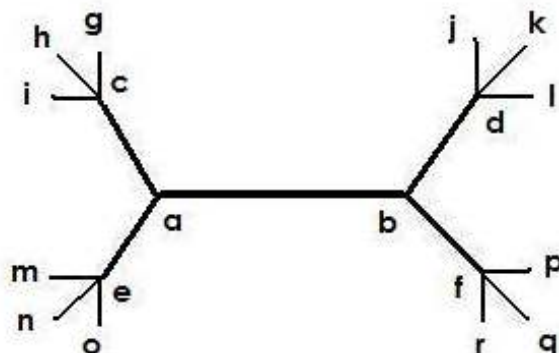


Figura 4.3: Árbol 1/6-homogéneo.

4.3. Gráficas 1/2-homogéneas

4.3.1. Gráficas 1/2-homogéneas con puntos de corte

Definición 4.7 Sean X un continuo y $p \in X$.

- 1) Decimos que p es un punto de corte si $X \setminus \{p\}$ no es conexo.
- 2) $Cut(X) = \{p \in X \mid p \text{ es punto de corte}\}$ denota al conjunto de puntos de corte del continuo X .

Teorema 4.8 Si X es un continuo 1/2-homogéneo y $Cut(X) \neq \emptyset$ entonces:

- 1) $|Cut(X)| = 1$ o
 - 2) $Cut(X) \cong \mathbb{R}$
- Véase [10, pág. 2160].

Teorema 4.9 Si X es un continuo 1/2-homogéneo, localmente conexo y $|Cut(X)| > 1$ entonces $X \cong [0, 1]$. Véase [10, pág. 2163].

Corolario 4.10 Si X es una gráfica 1/2-homogénea y si $|Cut(X)| > 1$ entonces $X \cong [0, 1]$.

Definición 4.11 Sea X una gráfica. Decimos que A es una arista de X en cualquiera de los siguientes casos:

1) si existen $a, b \in R(X)$ y un arco A , de tal manera que a, b son los puntos extremos de A y $A \cap R(X) = \{a, b\}$;

2) si existe $a \in R(X)$ y A una curva cerrada simple de tal manera que $a \in A$, y $A \cap R(X) = \{a\}$ (en ese caso decimos que A es un lazo).

3) si existen $a \in R(X)$, $b \in E(X)$ y un arco A de tal manera que a y b son los puntos extremos de A , $R(X) \cap A = \{a\}$ y $E(X) \cap A = \{b\}$.

Observación 4.12 Observemos que si A es arista de X , entonces $ord_X(x) = 2$ si $x \in A \setminus \{a, b\}$ donde a y b son los puntos extremos de A .

Teorema 4.13 Sea X una gráfica $1/2$ -homogénea. Si $|Cut(X)| = 1$ entonces X es una flor finita (véase el Ejemplo 3.6).

Demostración. Notemos que X es unión finita de arcos y $X \neq [0, 1]$, pues $|Cut(X)| = 1$ (véase el Teorema 4.9). Sea $Cut(X) = \{p\}$. Ya que X es gráfica sabemos que es localmente conexa (véase la Observación 4.3), entonces por el Teorema 2.24 sabemos que X es arcoconexa. Luego hay una arista A que contiene al punto p . Las órbitas son $O_1 = \{p\}$ y $O_2 = X \setminus \{p\}$, los puntos que no son de corte. La arista A no contiene puntos extremos de X , ya que X es $1/2$ -homogénea. Entonces A es un lazo. Notemos que si $x \in A \setminus \{p\}$, entonces por la Observación 4.12 se tiene que $ord_X(x) = 2$. Como $X \neq S_1$, pues $|Cut(X)| = 1$, entonces hay otro lazo $B \neq A$ que contiene al punto p . Solo puede haber un número finito de lazos que contienen al punto p , puesto que X es unión finita de arcos, por lo tanto X es una flor finita. ■

Es fácil ver que se cumple el siguiente lema.

Lema 4.14 Sea X una gráfica sin puntos de corte y q el número total de aristas, entonces
$$\sum_{x \in R(X) \cup E(X)} ord_X(x) = 2q.$$

El siguiente teorema se sigue del lema anterior.

Teorema 4.15 No hay gráficas sin puntos de corte, de tal manera que $|R(X)|$ es impar y $ord_X(p)$ es impar para cada $p \in R(X)$.

4.3.2. Gráficas 1/2-homogéneas sin puntos de corte

Teorema 4.16 *Si X es una gráfica sin puntos de corte, entonces:*

- 1) $E(X) = \emptyset$, y
- 2) X no contiene lazos, excepto S^1 .

Demostración. 1) Supongamos que existe $a \in E(X)$. Sea A una arista de X que tiene a a como uno de sus puntos extremos. Sea b el otro extremo de A . Sea $p \in A \setminus \{a, b\}$ y sea $B = [p, a] \subseteq A$ el arco con extremos p y a . Entonces es claro que $X \setminus \{p\} = (B \setminus \{p\}) \cup (X \setminus B)$ y además $(B \setminus \{p\}) \cap (X \setminus B) = \emptyset$ y esto es una contradicción puesto que X no tiene puntos de corte. Por lo tanto $E(X) = \emptyset$

2) Supongamos que A es un arista de X , y suponga que los puntos extremos de A son los puntos a y b . Supongamos que A es un lazo, es decir $a = b$. Entonces a es un punto de corte y por lo tanto $X \setminus \{a\}$ es disconexo, pues $X \setminus \{a\} = (A \setminus \{a\}) \cup (X \setminus A)$. Como $X \neq S^1$, $X \setminus A \neq \emptyset$. Esto contradice que X no tiene puntos de corte. Por lo tanto no hay lazos. ■

Corolario 4.17 *Si X es una gráfica 1/2-homogénea, sin puntos de corte, entonces $X = S^1$ ó X tiene al menos dos puntos de ramificación.*

Demostración. Supongamos que X es una gráfica sin puntos de corte. Si $R(X) = \emptyset$, entonces $X = S^1$; supongamos entonces que X tiene un solo punto de ramificación. Sea A una arista, sean a y b los puntos extremos de A . Como $E(X) = \emptyset$ y además $R(X) = \{r\}$ los extremos de A son $a = r = b$. Entonces A es un lazo lo que contradice el Teorema 4.16. ■

Definición 4.18 1) *Decimos que una gráfica G es regular si todos sus puntos de ramificación tienen el mismo orden.*

2) *Diremos que una gráfica G es regular de orden m ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$) si $\text{ord}(x)_G = m$ para toda $x \in R(X)$.*

Teorema 4.19 *Si X es una gráfica 1/2-homogénea, entonces:*

- 1) X es regular, y
- 2) Si $X \neq [0, 1]$ entonces $E(X) = \emptyset$.

Demostración. 1) Sea X una gráfica 1/2-homogénea. Veamos dos casos, cuando i) $\text{Cut}(X) \neq \emptyset$ y ii) $\text{Cut}(X) = \emptyset$.

i) Si X tiene puntos de corte entonces $X \cong [0, 1]$ ó X es una flor finita (veamos los Teoremas 4.13 y 4.9), las cuales evidentemente son gráficas regulares, pues todos sus puntos de ramificación tienen el mismo orden.

ii) Si X no tiene puntos de corte entonces por el Teorema 4.16, se tiene que $E(X) = \emptyset$, y sabemos que solo hay dos órbitas, la de los puntos ordinarios y los puntos de ramificación. Los puntos de ramificación tienen el mismo orden, de lo contrario estarían en órbitas diferentes.

2) Sea X gráfica 1/2-homogénea y $X \neq [0, 1]$. Entonces por los Teoremas 4.8 y 4.9, tenemos que X tiene uno o ningún punto de corte.

i) Si X tiene un punto de corte entonces por el Teorema 4.13 tenemos que X es una flor finita y por lo tanto $E(X) = \emptyset$.

ii) Si X no tiene puntos de corte, entonces por el Teorema 4.16 tenemos que $E(X) = \emptyset$. ■

Definición 4.20 Sea X una gráfica regular 1/2-homogénea sin puntos de corte, diremos que X es una gráfica tipo (n, p) si X tiene n puntos de ramificación de orden p . Se pueden ver ejemplos desde la Figura 4.4 a la Figura 4.25.

Observación 4.21 Sea X una gráfica. Sean r_1, r_2, r_3 y r_4 puntos de ramificación arbitrarios. Sean A_1, \dots, A_u todas las aristas con extremos r_1 y r_2 , y sean B_1, \dots, B_v todas las aristas con extremos r_3 y r_4 . Si $u \neq v$ y si $a \in A_i$ para algún $i \in \{1, \dots, u\}$ y $b \in B_j$ para alguna $j \in \{1, \dots, v\}$, entonces a y b están en órbitas distintas.

Definición 4.22 Para cada $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 3$ definimos al continuo H_p como la gráfica en la Figura 4.4.

Definición 4.23 Decimos que una gráfica regular X es de orden p , si para todo $r \in R(X)$ punto de ramificación $\text{ord}_X(r) = p$.

Proposición 4.24 Sea X una gráfica regular de orden $p \geq 3$ sin puntos de corte y tal que $|R(X)| = 2$. Entonces X es homeomorfa a H_p .

Demostración. Sea $p \geq 3$ fijo, y $R(X) = \{r_1, r_2\}$. Debido a que X no tiene puntos de corte, $E(X) = \emptyset$ y X no tiene lazos por el Teorema 4.16. Se sigue de esto que si A es una arista de X , entonces A tiene como extremos a r_1 y r_2 . De aquí se sigue fácilmente que $X \cong H_p$. ■

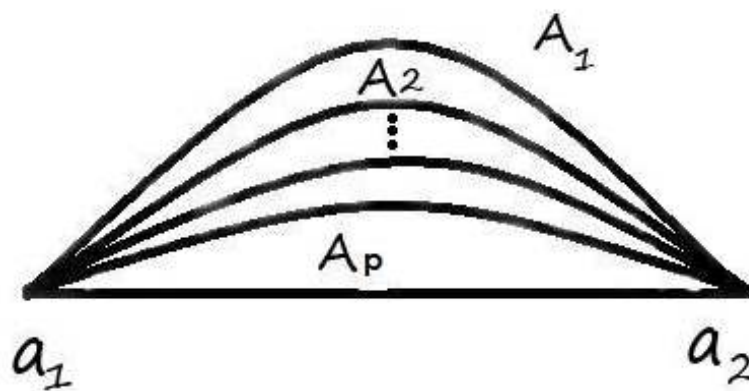


Figura 4.4: H_p , gráfica tipo $(2, p)$.

Teorema 4.25 Sea $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 3$. Existe una gráfica tipo $(2, p)$ y es única.

Demostración. Esto se sigue de la Proposición 4.24 y de que H_p es $1/2$ -homogénea. ■

Ejemplo 4.26 La gráfica X en la Figura 4.5 es regular con tres puntos de ramificación de orden cuatro.

Observación 4.27 Notemos que la gráfica en la Figura 4.5 es $1/2$ -homogénea.

Teorema 4.28 La gráfica X de la Figura 4.5 es la única sin puntos de corte, del tipo $(3, 4)$.

Demostración. Sean X una gráfica sin puntos de corte con $|R(X)| = 3$ tal que si $r \in R(X)$ entonces $\text{ord}_X(r) = 4$. Consideremos $a, b, c \in R(X)$, entonces existe al menos una arista A con extremos a y b . Veamos cómo pueden ser las gráficas con tres puntos de ramificación de orden cuatro.

i) Si hay cuatro aristas con extremos a y b , entonces X no es un continuo, pues no es conexo ya que hay tres puntos de ramificación.

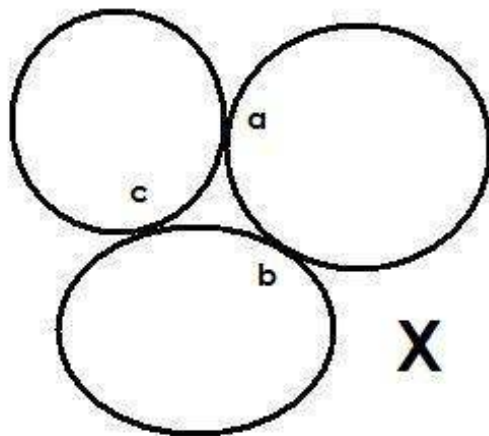


Figura 4.5: Gráfica regular con tres puntos de ramificación de orden cuatro.

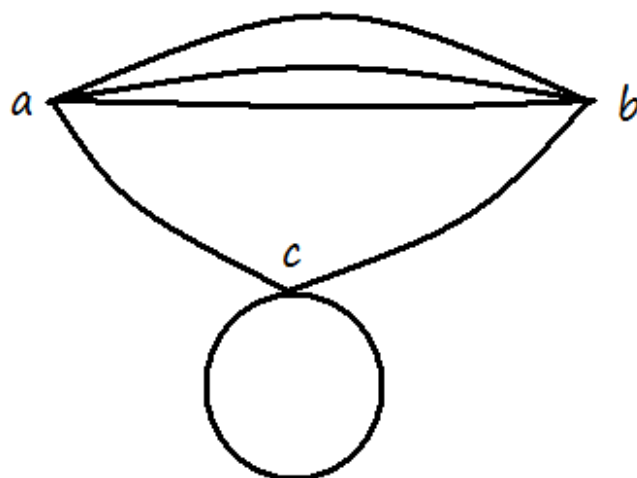


Figura 4.6: Gráfica con tres puntos de ramificación de orden cuatro con un punto de corte.

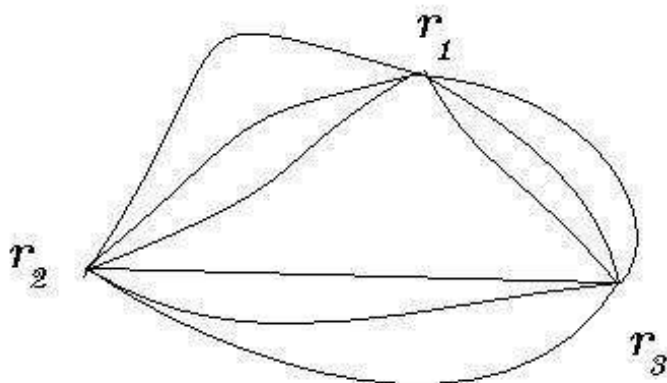


Figura 4.7: Gráfica regular con tres puntos de ramificación de orden seis.

ii) Si hay tres aristas con extremos a y b , entonces hay un lazo con extremos en c , lo cual no puede pasar por el Teorema 4.16 (véase la Figura 4.6).

iii) Si hay dos aristas con extremos a y b , entonces hay dos aristas con extremos b y c , y dos aristas con extremos a y c , y por lo tanto X es la gráfica de la Figura anterior 4.6.

iv) Si hay una arista con extremos a y b , entonces hay lazos y por el Teorema 4.16 no puede pasar.

Por lo tanto sólo hay una gráfica sin puntos de corte con tres puntos de ramificación de orden cuatro. ■

Ejemplo 4.29 La gráfica X sin puntos de corte de la Figura 4.7 es regular y es tipo $(3, 6)$.

Teorema 4.30 La gráfica X de la Figura 4.7 es la única sin puntos de corte con tres puntos de ramificación de orden seis.

Demostración. Sea X una gráfica tal que $R(X) = \{a, b, c\}$ y $ord_X(a) = ord_X(b) = ord_X(c) = 6$.

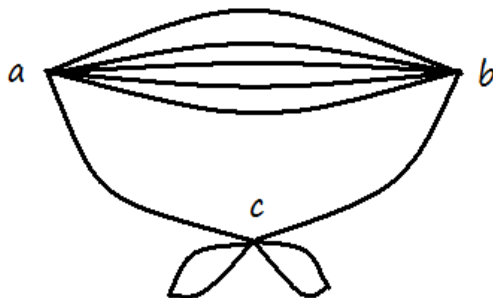


Figura 4.8: Gráfica con tres puntos de ramificación de orden seis.

- i) Si hay cinco aristas con extremos a y b , entonces c es un punto de corte y hay dos lazos con extremos en c y eso no puede pasar, véase la Figura 4.8.
- ii) Si hay cuatro aristas con extremos a y b , entonces hay un lazo con extremos en c y no puede haber lazos, véase la Figura 4.9.
- iii) Si hay tres aristas con extremos a y b , entonces X es como la Figura 4.7.
- iv) Si hay dos aristas con extremos a y b , entonces las otras cuatro aristas que tienen como extremo al punto a también tienen como extremo al punto c y estamos en el caso ii). ■

Observación 4.31 La gráfica X de la Figura 4.7 es $1/2$ -homogénea, las órbitas son $O_1 = R(X)$ y $O_2 = X \setminus R(X)$.

Corolario 4.32 La gráfica de la Figura 4.7 es la única del tipo $(3, 6)$ sin puntos de corte.

Ejemplo 4.33 En general podemos construir una gráfica regular con tres puntos de ramificación de orden p , donde p es par y $p \geq 4$. Véase las Figuras 4.5, 4.7, y 4.10, para los pasos $p = 4, 6$ y 8 , respectivamente.

Observación 4.34 Las gráficas sin puntos de corte con tres puntos de ramificación de orden p , donde p es par y $p \geq 4$ son gráficas $1/2$ -homogéneas.

Teorema 4.35 Las gráficas $1/2$ -homogéneas sin puntos de corte con tres puntos de ramificación de orden p , donde p es par y $p \geq 4$ son únicas.

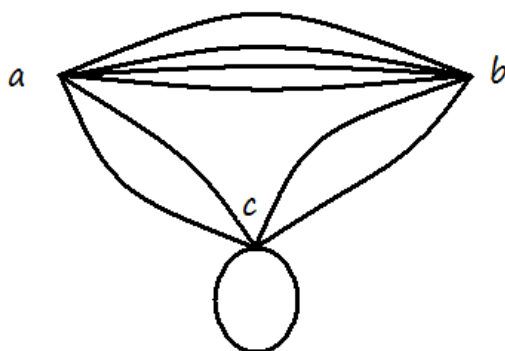


Figura 4.9: Gráfica con tres puntos de ramificación de orden seis, con un lazo en un vértice.

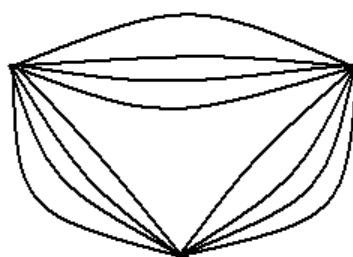


Figura 4.10: Gráfica con tres puntos de ramificación de orden ocho.

Demostración. Por el Teorema 4.19 sabemos que estas gráficas son regulares. Como estas graficas son $1/2$ -homogéneas entonces entre cualesquiera dos puntos de ramificación debe haber el mismo número de aristas. Sean $r_1, r_2,$ y r_3 los puntos de ramificación y consideremos las aristas que tienen como extremos al punto r_1 . Sabemos que no hay lazos ni puntos extremos. En otras palabras todas esas aristas tienen en el otro extremo a $r_2,$ o r_3 . Si el número de aristas con extremos r_1 y r_2 es mayor que el número de aristas con extremos r_1 y r_3 entonces la gráfica no es $1/2$ -homogénea. Por lo tanto el número de aristas debe ser el mismo. Como p es par entonces hay $p/2$ aristas con extremos r_1 y $r_2,$ y además $p/2$ aristas con extremos r_1 y r_3 . ■

Observación 4.36 Usando el Teorema 4.15 vemos que no hay gráficas regulares $1/2$ -homogéneas sin puntos de corte con tres puntos de ramificación de orden $p,$ donde p es impar y $p \geq 3$.

Corolario 4.37 Sea p par, y $p \geq 4$. Las gráficas sin puntos de corte tipo $(3, p)$ son únicas.

Ejemplo 4.38 La gráfica regular X de la Figura 4.11 tiene cuatro puntos de ramificación de orden tres y además es $1/2$ -homogénea. Las órbitas son $O_1 = R(X)$ (los puntos de ramificación) y $O_2 = X \setminus R(X)$.

Teorema 4.39 La gráfica regular de la Figura 4.11 es la única sin puntos de corte del tipo $(4, 3)$.

Demostración. Sea X la gráfica de la Figura 4.11. Supongamos que Y es otra gráfica con cuatro puntos de ramificación de orden tres, y que X no es homeomorfo a Y . Sean a, b, c y d los puntos de ramificación de Y . No puede haber tres aristas con extremos a y $b,$ pues en ese caso X no sería conexo. Supongamos que hay dos aristas con extremos a y b . Como $ord_X(a) = 3$ entonces sin pérdida de generalidad hay otra arista A_{ac} que tiene como extremos al punto a y al punto c . Ahora veamos que hay una arista B con extremos el punto b y el punto $y,$ donde y es punto de ramificación. Veamos que opciones tenemos para el punto y . Si $y = c$ entonces d es extremo, véase la Figura 4.12, y eso no puede pasar, entonces $y \neq c$. Supongamos entonces que $y = d$ entonces como no hay lazos, hay dos aristas con extremos c y $d,$ entonces tenemos una gráfica como la de la Figura 4.28, y notemos que esta gráfica es $1/3$ -homogénea (véase el Ejemplo 4.61), y eso tampoco puede pasar. Por lo tanto la gráfica tipo $(4, 3)$ es única. ■

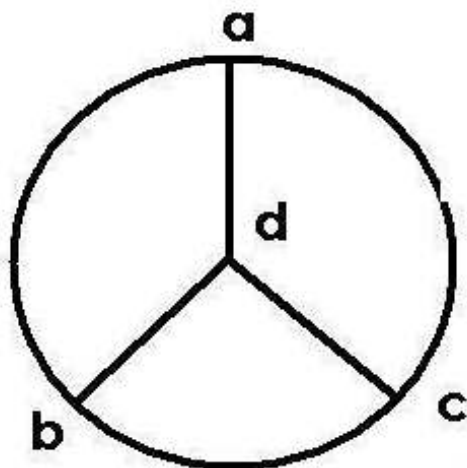


Figura 4.11: Gráfica regular con cuatro puntos de ramificación de orden tres.

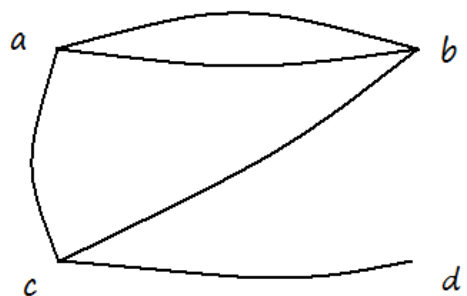


Figura 4.12: Gráfica con cuatro puntos de ramificación de orden tres.

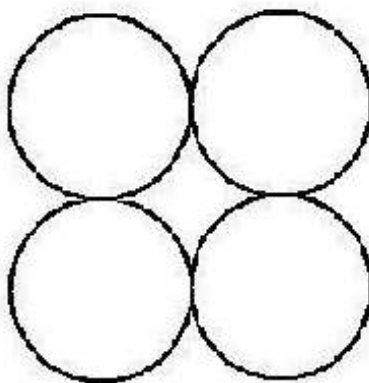


Figura 4.13: Gráfica regular con cuatro puntos de ramificación de orden 4.

Ejemplo 4.40 *La gráfica regular en la Figura 4.13 tiene cuatro puntos de ramificación de orden cuatro.*

Observación 4.41 *La gráfica X de la Figura 4.13 es 1/2-homogénea. Las órbitas son $O_1 = R(X)$, $O_2 = X \setminus R(X)$.*

Teorema 4.42 *La gráfica regular de la Figura 4.13 es la única sin puntos de corte tipo $(4, 4)$.*

Demostración. Sea X una gráfica con cuatro puntos de ramificación $R(X) = \{a, b, c, d\}$ y si $r \in R(X)$ entonces $\text{ord}_X(r) = 4$. Fijemos los puntos a y b .

i) Consideremos el caso en que sólo hay una arista con extremos a y b , hay entonces al menos dos aristas que tienen como extremos al punto a y al punto c , entonces por la Observación 4.21, hay puntos ordinarios en órbitas diferentes, lo que implica que habría más de dos órbitas. Véase la Figura 4.14.

ii) Veamos cuando sólo hay dos aristas con extremos en los puntos a y b . Si las otras dos aristas que tienen como extremo el punto a , tienen como extremo un punto común, por ejemplo c , la gráfica que obtenemos es la de la Figura 4.13. Si las otras dos aristas que tienen como punto extremo al punto a tienen como

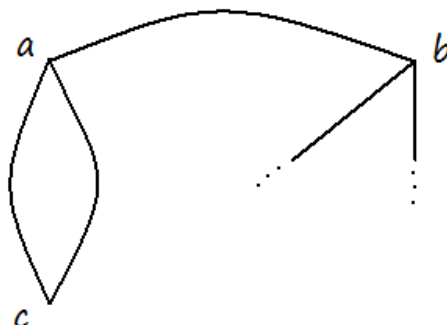


Figura 4.14: Gráfica con cuatro puntos de ramificación de orden cuatro, con sólo una arista entre los vertices a y b .

extremos al punto c y al punto d respectivamente, nuevamente por la Observación 4.21 sabemos que hay más de dos órbitas, por lo tanto eso no puede pasar. Véase la Figura 4.15.

iii) Por último veamos el caso cuando hay tres aristas con extremos los puntos a y b . Entonces hay otra arista que tiene como extremos al punto a y al punto c . Entonces por la Observación 4.21 hay más de dos órbitas y eso no puede pasar. Véase la Figura 4.16. Por lo tanto la Gráfica es única. ■

Corolario 4.43 *La gráfica de la Figura 4.13 es la única del tipo $(4, 4)$.*

Teorema 4.44 *No hay gráficas sin puntos de corte tipo $(4, 5)$. En general no hay gráficas tipo $(4, p)$ donde p es impar y $p \geq 5$.*

Demostración. Supongamos que X es una gráfica con $R(X) = \{a, b, c, d\}$. Suponga que hay sólo un arista entre dos puntos de ramificación, es fácil ver entonces que hay dos aristas entre dos puntos de ramificación, entonces hay más de dos órbitas. Si suponemos que hay dos aristas entre dos puntos de ramificación, se puede ver que hay dos puntos de ramificación que comparten sólo una arista, entonces hay más de dos órbitas. Lo mismo pasará si hay tres aristas entre dos puntos de ramificación. ■

Ejemplo 4.45 *Hay gráficas regulares con cuatro puntos de ramificación de orden p , donde p es par y $p \geq 4$. En la Figura 4.17 se muestra la de orden ocho.*

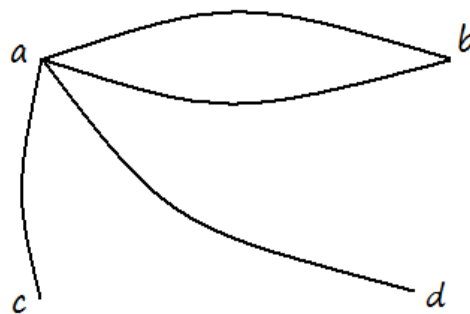


Figura 4.15: Gráfica con cuatro puntos de ramificación de orden cuatro, con dos aristas entre los vértices a y b .

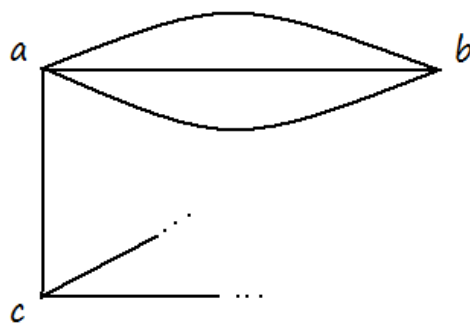


Figura 4.16: Gráfica con cuatro puntos de ramificación de orden cuatro, con tres aristas entre los vértices a y b .

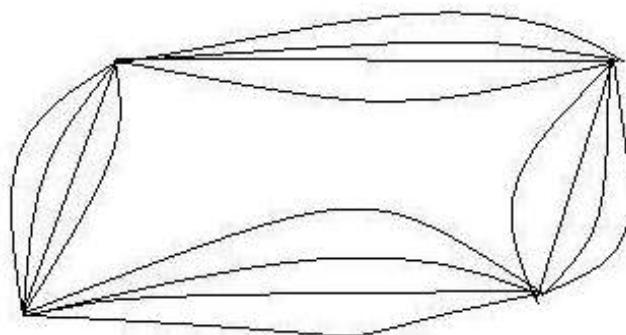


Figura 4.17: Gráfica regular con cuatro puntos de ramificación de orden ocho.

Ejemplo 4.46 Hay gráficas regulares con cuatro puntos de ramificación de orden p , donde $p = 3u$, $u \in \mathbb{N}$, $u \geq 1$. En la Figura 4.18 se muestra la de orden $p = 9$.

Teorema 4.47 Sea $p = 6u$, $u \in \mathbb{N}$. Las gráficas con cuatro puntos de ramificación de orden p , no son únicas.

Demostración. Hay dos gráficas con cuatro puntos de ramificación de orden cuatro. La primera es la gráfica que tiene $6u/3$ aristas entre cualesquiera dos puntos de ramificación (véase la Figura 4.19 para el caso $u = 1$). La segunda gráfica es la que tiene $6u/2$ aristas entre puntos de ramificación que comparten las mismas aristas (véase la Figura 4.20 para el caso $u = 1$). Evidentemente estas gráficas no son homeomorfas pues el número de aristas que unen puntos de ramificación son diferentes. ■

Teorema 4.48 Sean X una gráfica sin puntos de corte, $p = 6u - 3$, $u \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$. Las gráficas $1/2$ -homogéneas con cuatro puntos de ramificación de orden p , son únicas.

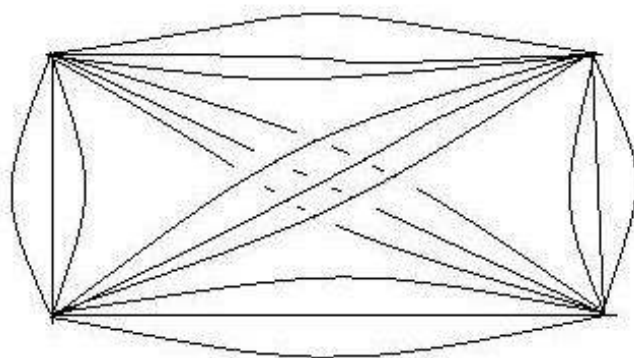


Figura 4.18: Gráfica con cuatro puntos de ramificación de orden nueve.

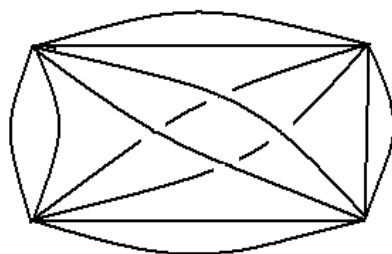


Figura 4.19: Gráfica regular con cuatro puntos de ramificación de orden seis.

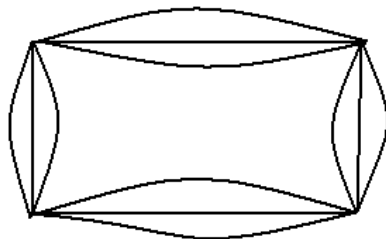


Figura 4.20: Gráfica regular con cuatro puntos de ramificación de orden seis.

Demostración. Para el caso $u = 1$ tenemos que $p = 3$ y la gráfica es única por el Teorema 4.39. En general si $p = 6u - 3$, entonces para cualesquiera dos puntos de ramificación hay $\frac{p}{3} = \frac{6u-3}{3} = 2u - 1$ aristas que los unen (véase Figura 4.18, para el caso $u = 2$). La gráfica es 1/2-homogénea, las órbitas son $O_1 = R(X)$, y $O_2 = X \setminus R(X)$. Si entre dos puntos de ramificación hubiera más aristas o menos, entonces por el Teorema 4.21 la gráfica tendría más de dos órbitas y no sería 1/2-homogénea. ■

Teorema 4.49 *Si $p = 6u \pm 1$, entonces no hay gráficas con cuatro puntos de ramificación de orden p que sean 1/2-homogéneas.*

Demostración. Para que la gráfica sea 1/2-homogénea todos los puntos de ramificación deben estar en la misma órbita, es decir, si entre dos puntos de ramificación hay n aristas, entonces debe de haber n aristas entre cualesquiera dos puntos de ramificación que compartan aristas. Como sólo hay 4 puntos de ramificación sólo tenemos dos opciones, la primera si cada punto de ramificación comparte aristas con los otros tres puntos de ramificación, y la segunda si cada punto de ramificación comparte aristas sólo con dos puntos de ramificación. Como $p = 6u \pm 1$ no es divisible entre tres el primer caso no puede pasar. De la misma manera como $p = 6u \pm 1$ no es divisible entre dos el segundo caso no puede pasar. ■

Ejemplo 4.50 *La gráfica regular de la Figura 4.21 tiene cinco puntos de ramificación de orden cuatro, y es 1/2-homogénea.*

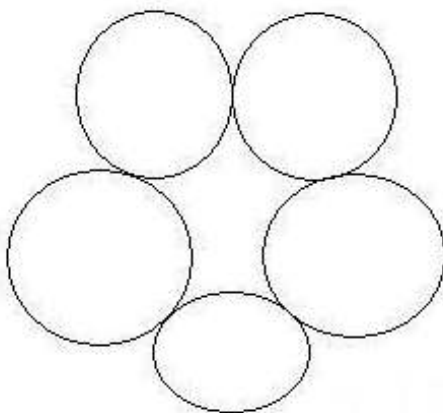


Figura 4.21: Gráfica regular con cinco puntos de ramificación de orden cuatro.

Ejemplo 4.51 *La gráfica de la Figura 4.22 tiene cinco puntos de ramificación de orden cuatro, y es 1/2-homogénea.*

Teorema 4.52 *Las gráficas tipo $(5, 4)$ no son únicas.*

Demostración. Véanse las Figuras 4.21 y 4.22. Claramente las gráficas de las Figuras 4.21 y 4.22 no son homeomorfas ya que en la primera gráfica, cualesquiera dos vértices comparten dos aristas o bien no comparten ninguna, en la segunda gráfica cualesquiera dos vértices comparten sólo una arista (véase la Observación 4.21). ■

Definición 4.53 *Sea $n \geq 4$. Definimos la gráfica K_n como aquella que tiene n vértices, y para cualesquiera dos vértices existe una y sólo una arista que los une. La Figura 4.22 representa a la gráfica K_5 .*

Observación 4.54 *Para toda $n \geq 4$. La gráfica K_n es 1/2-homogénea. Fácilmente vemos que $R(X)$ es una órbita y $O(X)$ es la otra órbita.*

Teorema 4.55 *Si $n \geq 2$ y $p \geq 4$, con p par, entonces existen gráficas regulares con n puntos de ramificación de orden p , y además son 1/2-homogéneas.*

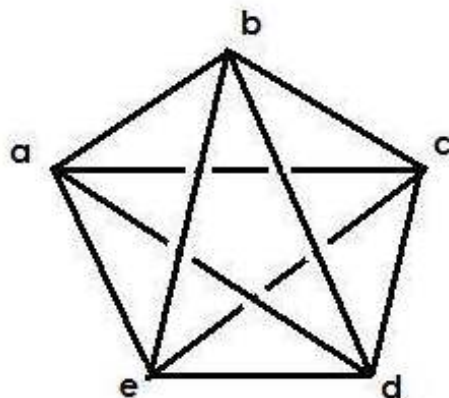


Figura 4.22: Gráfica regular con cinco puntos de ramificación de orden cuatro.

Ejemplo 4.56 *La Figura 4.23 muestra la gráfica regular con n puntos de ramificación de orden cuatro.*

Ejemplo 4.57 *Las gráficas regulares $1/2$ -homogéneas con seis puntos de ramificación de orden cuatro no son únicas, véase Figuras 4.24 y 4.25. En la primera si dos puntos de ramificación comparten una arista, entonces comparten dos aristas. En la segunda gráfica eso no pasa.*

Las gráficas $1/2$ -homogéneas sin puntos de corte se han estudiado muy poco. Con este capítulo mostramos que hay mucho aún para estudiar, y así poder clasificarlas en cuanto al número de puntos de ramificación, y el orden de cada punto de ramificación.

En la siguiente sección haremos algo similar pero con las gráficas $1/3$ -homogéneas sin puntos de corte.

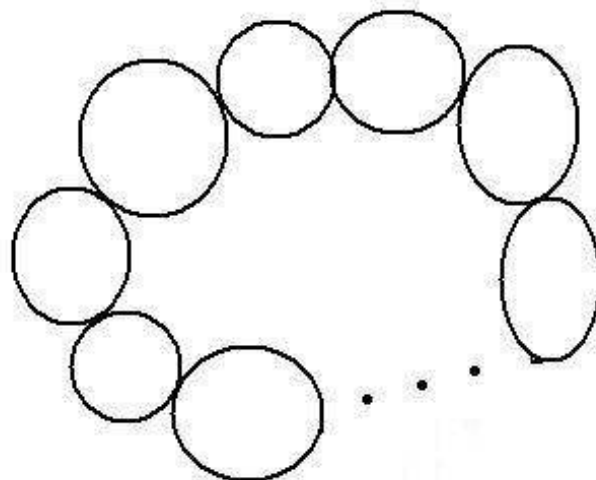


Figura 4.23: Gráfica regular con n puntos de ramificación de orden cuatro.

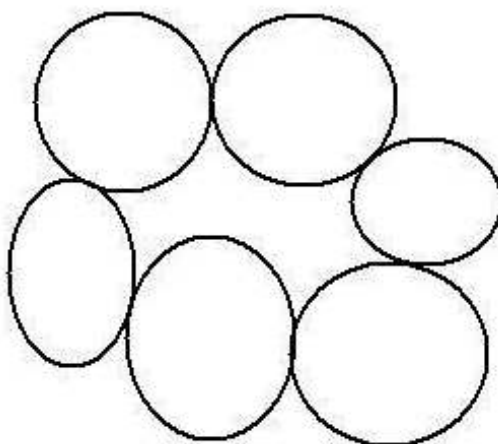


Figura 4.24: Gráfica con seis puntos de ramificación de orden cuatro.

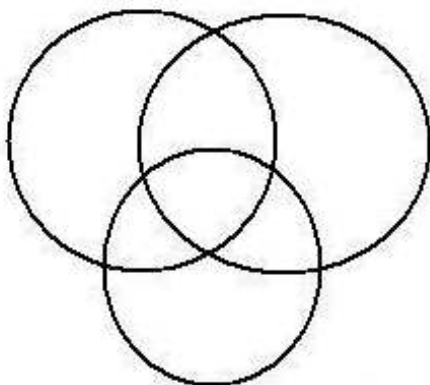


Figura 4.25: Gráfica con seis puntos de ramificación de orden cuatro.

4.4. Gráficas $1/3$ -homogéneas sin puntos de corte

En esta sección daremos ejemplos de gráficas $1/3$ -homogéneas sin puntos de corte a partir del número de vértices (en el caso de las gráficas los vertices son los puntos de ramificación). Veremos también algunos casos donde dado el número de vértices, no hay gráficas $1/3$ -homogéneas sin puntos de corte.

Teorema 4.58 *Si X es una gráfica sin puntos de corte con 3 vértices entonces X es $1/2$ -homogénea, $1/4$ -homogénea, o $1/6$ -homogénea.*

Demostración. Sea X una gráfica sin puntos de corte, $R(X) = \{a, b, c\}$ los vértices de X , y u (v , w respectivamente), el número de aristas que tienen en sus extremos los vértices a y b (b y c , c y a respectivamente). Consideremos los siguientes casos:

i) Si $u = v = w$, entonces la gráfica es $1/2$ -homogénea, véase las Figuras 4.5 y 4.7.

ii) Si $u = v \neq w$, entonces X es una gráfica $1/4$ -homogénea, véase la Figura 4.26. Las órbitas son $O_1 = \{a, c\}$, $O_2 = \{b\}$, $O_3 = ac \setminus \{a, c\}$ y $O_4 =$

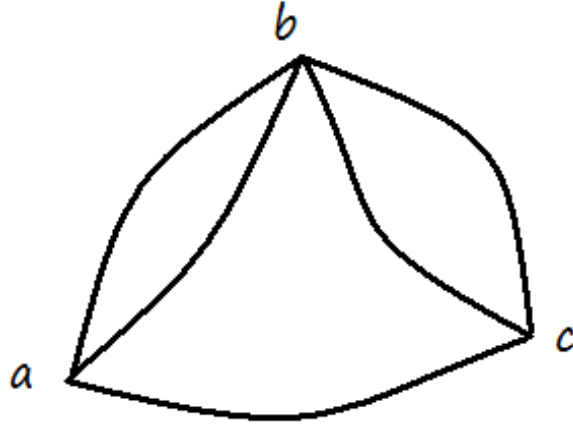


Figura 4.26: Gráfica 1/4-homogénea sin puntos de corte, con tres vértices.

$$X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^3 O_i \right).$$

iii) Si $u \neq v$, $v \neq w$, y $w \neq u$, entonces la gráfica es 1/6-homogénea, véase la Figura 4.27. Las órbitas son $O_1 = \{a\}$, $O_2 = \{b\}$, $O_3 = \{c\}$, $O_4 = ab \setminus \{a, b\}$, $O_5 = (ac)_1 \cup (ac)_2$ donde $(ac)_1$ y $(ac)_2$ son las aristas con extremos los vértices a y c ; y $O_6 = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^5 O_i \right)$. ■

Teorema 4.59 Si X es una gráfica 1/3-homogénea sin puntos de corte, entonces X tiene al menos cuatro vértices.

Demostración. Si X es una gráfica con sólo un vértice p , entonces p es un punto de corte, véase el Corolario 4.17. Si X tiene solamente dos vértices entonces, por el Teorema 4.25, tenemos que X es 1/2-homogénea. X no puede tener tres vértices, véase Teorema 4.58. Entonces X tiene al menos cuatro vértices, véase Figura 4.28. ■

Corolario 4.60 No hay gráficas regulares 1/3-homogéneas con tres vértices de orden p , para toda $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 3$.

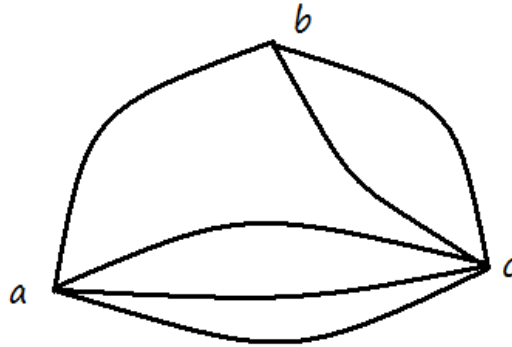


Figura 4.27: Gráfica 1/6-homogénea sin puntos de corte con tres vértices.

Este resultado se puede generalizar para gráficas 1/n-homogéneas sin puntos de corte, con $n \geq 3$.

Ejemplo 4.61 La gráfica de la Figura 4.28 es 1/3-homogénea y tiene cuatro vértices de orden tres. Las órbitas son $O_1 = R(X) = \{a, b, c, d\}$, $O_2 = (ab) \cup (cd)$ y $O_3 = X \setminus (O_1 \cup O_2)$.

Teorema 4.62 La gráfica de la Figura 4.28 es la única 1/3-homogénea con cuatro puntos de ramificación de orden tres.

Demostración. Si para cualesquiera vértices tenemos exactamente una arista que los una, entonces la gráfica es 1/2-homogénea (véase la Figura 4.11). Supongamos que hay dos aristas A y B que unan a los vértices a y c , entonces hay otra arista C que sale del vértice a , y sin pérdida de generalidad el otro extremo es el vértice b . Sea D otra arista que sale del vértice c , si el otro extremo de la arista D es el vértice b , entonces en el vértice d hay un lazo, y eso es una contradicción, ya que no hay puntos de corte. Entonces el otro extremo de la arista D es el vértice d , y entonces hay dos aristas que unen a los vértices b y d . Por lo tanto la gráfica de la Figura 4.28 es única. ■

Ejemplo 4.63 Gráfica 1/3-homogénea sin puntos de corte con cuatro vértices de orden cuatro, véase Figura 4.29. Las órbitas son $O_1 = \{a, b, c, d\}$, $O_2 = (ab) \cup (cd)$, donde ab (respectivamente cd) es cualquier arista con extremos los vértices a y b (respectivamente los vértices c y d). Y $O_3 = X \setminus (O_1 \cup O_2)$.

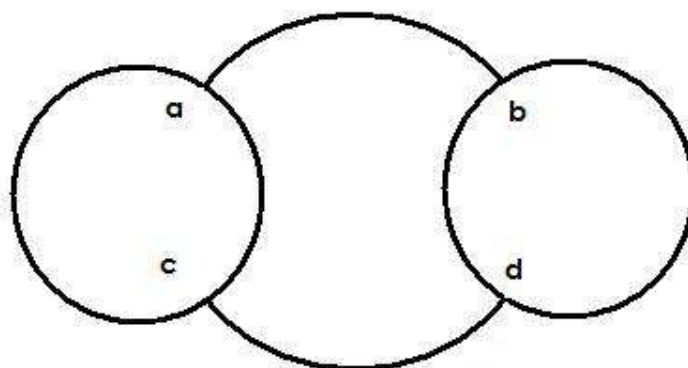


Figura 4.28: Gráfica 1/3-homogénea sin puntos de corte, con cuatro vértices de orden tres.

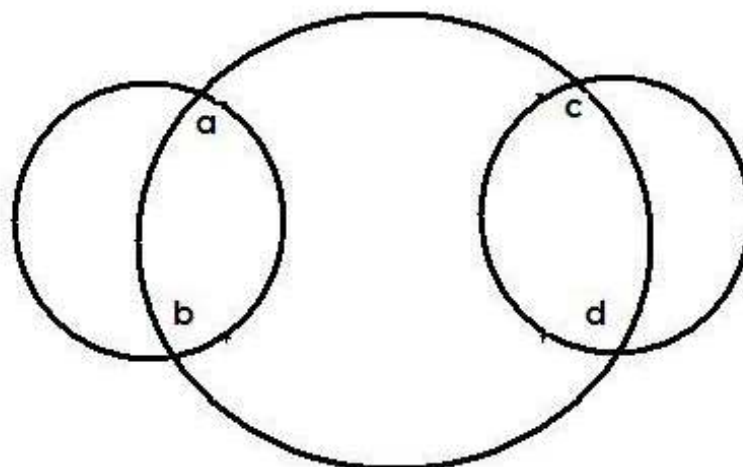


Figura 4.29: Gráfica 1/3-homogénea sin puntos de corte, con cuatro vértices de orden cuatro.

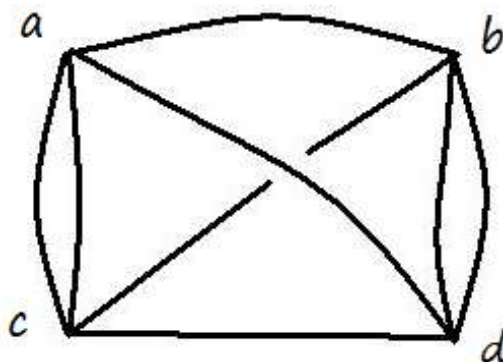


Figura 4.30: Gráfica 1/3-homogénea sin puntos de corte, con cuatro vértices de orden cuatro.

Ejemplo 4.64 La gráfica de la Figura 4.30 es 1/3-homogénea con cuatro vértices de orden cuatro.

Las órbitas son $O_1 = R(X)$, $O_2 = (ab) \cup (ad) \cup (cb) \cup (cd)$, $O_3 = X \setminus (O_1 \cup O_2)$.

La gráfica de la Figura 4.30 tiene dos aristas entre los vértices a y c .

Teorema 4.65 La gráfica de la Figura 4.30 no es homeomorfa a la gráfica de la Figura 4.29.

Demostración. En la gráfica de la Figura 4.30 para cualesquiera dos vértices existe al menos una arista que los une. En la gráfica de la Figura 4.29 no es así, pues entre los vértices a y d (b y c respectivamente) no hay una arista que los una. ■

Ejemplo 4.66 Gráficas 1/3-homogéneas con cuatro vértices de orden cinco. En general con cuatro vértices de orden p para toda $p \geq 4$, véase Figura 4.31. Las órbitas son $O_1 = R(X)$, $O_2 = (ac) \cup (bd)$, y $O_3 = (ab) \cup (cd)$, donde ab (respectivamente cd) es cualquier arista con extremos los vértices a y b (respectivamente los vértices c y d).

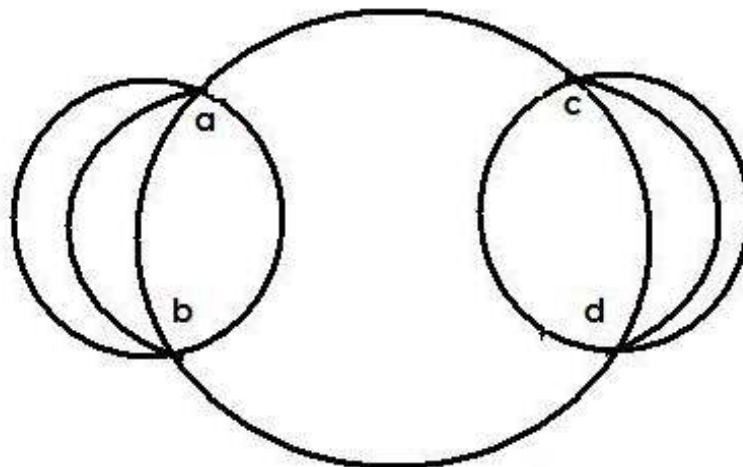


Figura 4.31: Gráfica 1/3-homogénea con cuatro vértices de orden cinco.

Ejemplo 4.67 La gráfica de la Figura 4.32 es 1/3-homogénea, con cuatro vértices de orden cinco. Las órbitas son $O_1 = R(X)$, $O_2 = (ad) \cup (bc)$, y $O_3 = X \setminus (O_1 \cup O_2)$.

Observación 4.68 Hay más de una gráfica con las propiedades de ser 1/3-homogénea, no tener puntos de corte, y cuatro vértices de orden cinco. Véanse las Figuras 4.31 y 4.32.

Ejemplo 4.69 Gráfica sin puntos de corte 1/3-homogénea, con cinco vértices de orden seis, y en general gráficas sin puntos de corte 1/3-homogéneas, con cinco vértices de orden p , para toda p par y $p \geq 6$. Véase Figura 4.33.

Ejemplo 4.70 Gráfica sin puntos de corte 1/3-homogénea, con seis vértices de orden tres, y en general gráficas sin puntos de corte 1/3-homogéneas con seis vértices de orden p para toda $p \geq 3$, véase Figura 4.34.

Ejemplo 4.71 Gráfica 1/3-homogénea con siete vértices de orden 4, véase Figura 4.35.

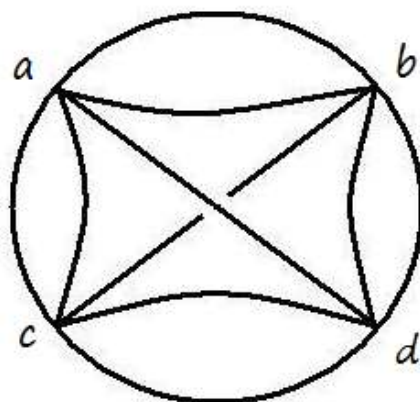


Figura 4.32: Gráfica 1/3-homogénea con cuatro vértices de orden cinco.

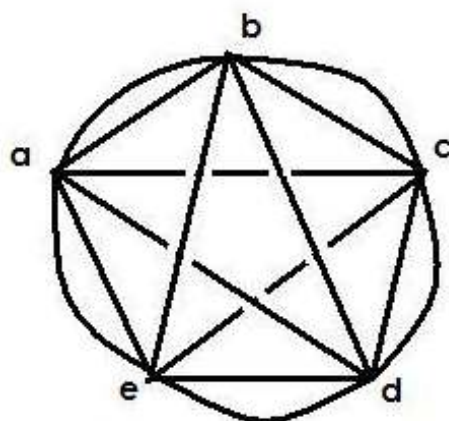


Figura 4.33: Gráfica 1/3-homogénea con cinco vértices de orden seis.

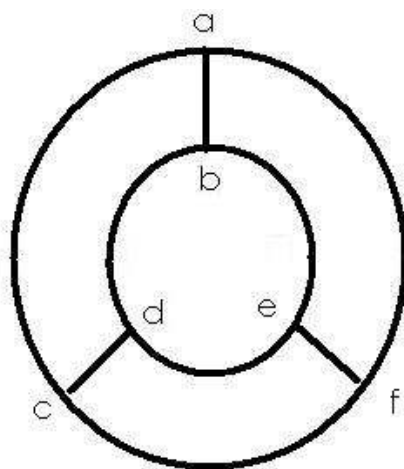


Figura 4.34: Gráfica 1/3-homogénea con seis vértices de orden tres.

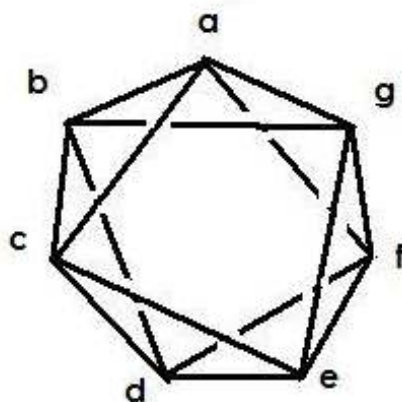


Figura 4.35: Gráfica 1/3-homogénea con siete vértices de orden cuatro.

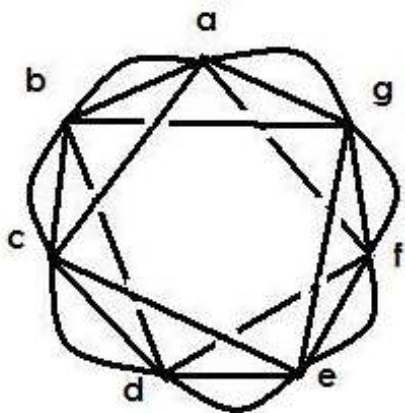


Figura 4.36: Gráfica 1/3-homogénea con siete vértices de orden seis.

Ejemplo 4.72 *Gráfica 1/3-homogénea con siete vértices de orden seis, y en general gráficas 1/3-homogéneas con siete vértices de orden p , donde p es par y $p \geq 4$, véase Figura 4.36.*

Capítulo 5

Dendritas

5.1. Definición y ejemplos

Definición 5.1 *Una dendrita es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

Ejemplo 5.2 Mostramos ejemplos de dendritas: Intervalo (Figura 3.2), n -odo (Figura 3.7), F_ω (véase Figura 3.9), también los árboles de la Figura 4.1 a la Figura 4.3.

Definición 5.3 Sean X una dendrita y $p \in X$.

1) Definimos el orden del punto p en X como el número de arco-componentes de $X \setminus \{p\}$ y lo denotamos como $ord_X(p)$.

A partir de esta definición definiremos tres conjuntos.

2) El conjunto de puntos de orden dos, conocido como el conjunto de puntos ordinarios denotado como $O(X) = \{x \in X : ord_X(x) = 2\}$.

3) El conjunto de puntos extremos denotado como:

$$E(X) = \{x \in X : ord_X(x) = 1\}.$$

4) El conjunto de puntos de ramificación denotado como:

$$R(X) = \{x \in X : ord_X(x) \geq 3\}.$$

A continuación enunciaremos algunos teoremas relacionados con las dendritas.

Teorema 5.4 *Todo punto de una dendrita X es de orden $\leq \aleph_0$ [8, Corolario 10.20.1, pág. 173].*

Observación 5.5 Considerando la dendrita F_ω y su vertice v , notemos que $\text{ord}_{F_\omega}(v) = \omega$ (véase la Figura 3.9).

Lema 5.6 Las dendritas son arco-conexas.

Demostración. Como las dendritas son continuos localmente conexos, entonces son arco-conexas [8, Teorema 8.23, pág. 130-131]. ■

Teorema 5.7 Si X es una dendrita y los puntos $u, v \in X$, entonces existe un único arco uv que une u con v .

Demostración. Supongamos que hay dos arcos distintos, A y B , que unen a los puntos u y v . Como $A \neq B$ entonces existe un punto $a \in A$ de tal manera que $a \notin B$, entonces existe un arco $A_0 \subset A$ de tal manera que $A_0 \cap B \neq \emptyset$. De la misma manera podemos encontrar $B_0 \subset B$ de tal manera que $B_0 \cap A \neq \emptyset$. Ahora notemos que A_0 y B_0 están contenidos en una curva cerrada simple, contradiciendo el hecho de que X sea una dendrita. Por lo tanto se cumple el Teorema. ■

Notación 5.8 Denotaremos por ab al arco que une los puntos a y b en una dendrita X .

Lema 5.9 Los subcontinuos de dendritas son dendritas [8, Corolario 10.6, pág. 167-168].

Teorema 5.10 Si X es una dendrita, entonces $E(X)$ es totalmente desconexo.

Demostración. Sea C una componente de $E(X)$. Entonces por [8, Proposición 10.9, pág. 169], C es arco-conexo. Si C tiene más de un punto entonces elegimos dos de ellos, sean a y $b \in C$, entonces el arco ab está contenido en la componente C , consideremos $p \in (ab)$, $p \in C$. Es claro que $p \notin E(X)$. Esto contradice que C tenga más de un punto. Por lo tanto la cardinalidad de C es uno. Entonces $E(X)$ es totalmente desconexo. ■

Teorema 5.11 La dendrita F_ω es la única dendrita con sólo un punto de ramificación v y tal que $\text{ord}_X(v)$ es infinito.

Demostración. Sea X una dendrita tal que $R(X) = \{p\}$ y $ord_X(p)$ es infinito, entonces por [8, Corolario 10.20.1, pág. 173], el conjunto $E(X)$ es numerable. Sean $E(X) = \{e_1, e_2, \dots\}$ y $E(F_\omega) = \{t_1, t_2, \dots\}$ los conjuntos de puntos extremos de X y F_ω respectivamente. Sea v el punto de ramificación de F_ω . Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos un homeomorfismo $h_i : vt_i \rightarrow pe_i$ de tal manera que $h_i(v) = p$ y $h_i(t_i) = e_i$. Sea $h : F_\omega \rightarrow X$ definida como $h(x) = h_i(x)$ si $x \in vt_i$.

Demostraremos que h es homeomorfismo.

Para demostrar que h es una función inyectiva, consideremos dos puntos $x_1, x_2 \in F_\omega$, $x_1 \neq x_2$. Veamos primero el caso en que $x_1, x_2 \in vt_i$. Entonces $h_i(x_1) \neq h_i(x_2)$ y eso implica que $h(x_1) \neq h(x_2)$. Ahora supongamos que $x_1 \in vt_i \setminus \{v\}$, $x_2 \in vt_j \setminus \{v\}$, $i \neq j$, entonces $h(x_1) \in pe_i \setminus \{p\}$, $h(x_2) \in pe_j \setminus \{p\}$. Ya que $i \neq j$ se tiene que $h(x_1) \neq h(x_2)$, por lo tanto h es inyectiva.

Veamos ahora que h es una función suprayectiva. Sea $y \in X$. Entonces $y \in pe_k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Como $h_k : vt_k \rightarrow pe_k$ es un homeomorfismo, entonces existe $x \in vt_k$ de tal manera que $h(x) = h_k(x) = y$.

Ahora para ver que h es una función continua, consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en F_ω que converge al punto x . Consideremos dos casos:

i) Primer caso: Existe $i \in \mathbb{N}$ de tal manera que $x_n \in vt_i$ para casi toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $x \in vt_i$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_i(x_n) = h_i(x) = h(x)$ y por lo tanto h es continua en x .

ii) Segundo caso: Cuando no existe la i del primer caso. De la misma manera no existe $i \in \mathbb{N}$ de tal manera que $h(x_n) \in pe_i$ para toda $n \in \mathbb{N}$ para los arcos pe_i . Entonces $\lim x_n = v$ y $\lim h(x_n) = p = h(v)$.

Por lo tanto h es continua. Luego h es un homeomorfismo. Véase Figura 5.1.

■

5.2. Dendritas 1/3-homógeneas

Estudiaremos la propiedad de ser 1/3-homogéneo en las dendritas.

Observación 5.12 Si X es una dendrita distinta del $[0, 1]$, entonces $X = E(X) \cup O(X) \cup R(X)$ (véase [8, 10.7, pág 168]), además $E(X) \neq \emptyset$, $O(X) \neq \emptyset$ y $R(X) \neq \emptyset$. Notemos que si $h : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo y $x \in E(X)$, entonces $h(x) \in E(X)$, de la misma manera si $q \in O(X)$ entonces $h(q) \in O(X)$, y si $r \in R(X)$ entonces $h(r) \in R(X)$, además si $ord_X(r) = m$, entonces $ord_X(h(r)) = m$.

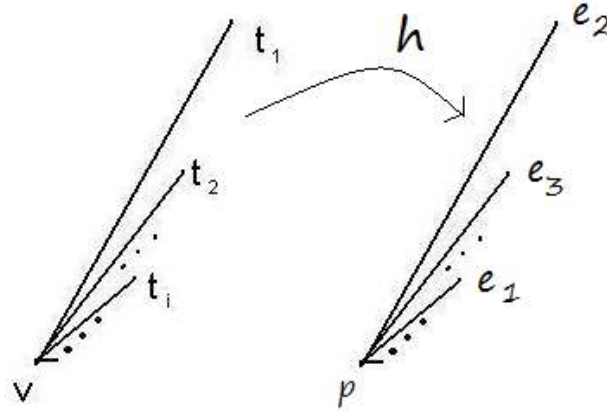


Figura 5.1: $h : F_\omega \rightarrow X$

De lo anterior se tiene que si X es una dendrita, entonces $X \cong [0, 1]$ ó X es $1/n$ -homogénea para alguna $n \geq 3$.

Por otra parte, si X es una dendrita $1/3$ -homogénea entonces las órbitas son $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$, además para alguna $m \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ se tiene que $\text{ord}_X(r) = m$, para toda $r \in R(X)$.

Teorema 5.13 Sea X una dendrita $1/3$ -homogénea. Si $R(X)$ es finito, entonces $|R(X)| = 1$.

Demostración. Supongamos que $1 < |R(X)|$. Como $R(X)$ es finito existen $u, v \in R(X)$ y $e \in E(X)$ que cumplen lo siguiente: i) $u \neq v$, ii) $v \in ue$, iii) $uv \cap R(X) = \{u, v\}$, iv) $ve \cap R(X) = \{v\}$. Véase Figura 5.2. Sea $x \in uv \cap O(X)$ y $y \in ve \cap O(X)$, como X es $1/3$ -homogéneo, existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ de tal manera que $h(x) = y$. Sabemos que bajo un homeomorfismo los puntos de ramificación son mandados a puntos de ramificación, entonces $h(xv) = yv$ debido a que $xv \cap R(X) = \{v\}$ y en el arco ve solo el punto v es punto de ramificación. Por lo tanto $h(xu) \subseteq ye$ pero $ye \cap R(X) = \emptyset$ y $h(u) \in R(X)$. Esto es una contradicción. Por lo tanto $|R(X)| = 1$. ■

Proposición 5.14 Una dendrita X es $1/3$ -homogénea con exactamente un punto de ramificación si y sólo si $X \cong n$ -odo o $X \cong F_\omega$.

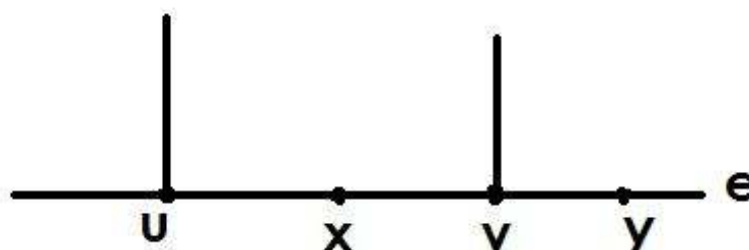


Figura 5.2: Dendrita con 2 puntos de ramificación

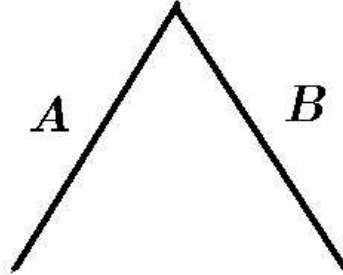
Demostración. Sea $R(X) = \{p\}$ el único punto de ramificación. Si $\text{ord}_X(p) = n$, entonces p es el vértice de un n -odo [8, Lema 9.9, pág. 144], y en ese caso $|E(X)| = n$, con $n \in \mathbb{N}$. Si $\text{ord}_X(p)$ es infinito entonces por el Teorema 5.11 tenemos que $X \cong F_\omega$. La demostración del regreso es inmediata, pues el n -odo y F_ω son $1/3$ -homogéneas con un punto de ramificación. ■

Corolario 5.15 *Toda dendrita con sólo un punto de ramificación es $1/3$ -homogénea.*

5.3. Dendrita de Gehman G_3

Ejemplo 5.16 *La dendrita siguiente se conoce como dendrita de Gehman y la denotamos por G_3 . Véase [3, 5.1, pág 77-78]. Mostraremos los primeros tres pasos de la construcción de G_3 :*

Paso 1) D_1 es la unión de los dos segmentos de recta A y B , donde A tiene como extremos los puntos $(1/2, 1)$ y $(0, 0)$, y el segmento B tiene como extremos los puntos $(1/2, 1)$ y $(1, 0)$. Donde las abscisas de los puntos $(1/2, 1)$ y $(1, 0)$ están en el conjunto de Cantor. Véase la Figura 5.3.

Figura 5.3: Paso 1) en la construcción de G_3

Paso 2) Para construir D_2 , llamemos a y b a los puntos medios de los dos segmentos rectilíneos A y B en D_1 , y unamos a D_1 los segmentos rectilíneos A_2 y B_1 , donde A_2 tiene como extremos los puntos a y $(1/3, 0)$, y B_1 tiene extremos los puntos b y $(2/3, 0)$, donde las abscisas de los puntos $(1/3, 0)$ y $(2/3, 0)$ están en el conjunto de Cantor. Llamemos A_1 al segmento rectilíneo con extremos los puntos a y $(0, 0)$, y B_2 al segmento rectilíneo con extremos los puntos b y $(1, 0)$. Véase Figura 5.4.

Paso 3) Para construir D_3 , llamemos a_1 y a_2 a los puntos medios de los dos segmentos rectilíneos A_1 y A_2 , respectivamente. Llamemos b_1 y b_2 a los puntos medios de los segmentos rectilíneos B_1 y B_2 , respectivamente. Finalmente unimos a D_2 los segmentos rectilíneos A_{12} , A_{21} , B_{12} , B_{21} , que tienen como extremos los puntos a_1 y $(1/9, 0)$, a_2 y $(2/9, 0)$, b_1 y $(7/9, 0)$, y los puntos b_2 y $(8/9, 0)$, respectivamente, donde las abscisas de los puntos $(1/9, 0)$, $(2/9, 0)$, $(7/9, 0)$ y $(8/9, 0)$ están en el conjunto de Cantor. Véase Figura 5.5.

El árbol D_n se construye a partir de D_{n-1} en forma similar siempre agregando los arcos que tienen en un extremo los puntos medios de los arcos agregados en el paso anterior y en el otro extremo los puntos de la forma $(c, 0)$ donde c está en el conjunto de Cantor. Es claro además que $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots$

Finalmente $G_3 = \text{ce} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right)$. Véase Figura 5.6.

Observación 5.17 $G_3 = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right) \cup C$ donde C es el conjunto de Cantor en el intervalo $[0, 1] \times \{0\}$, y $E(X) = C$.

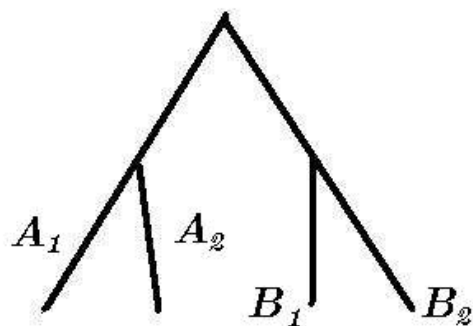


Figura 5.4: Paso 2) en la construcción de G_3

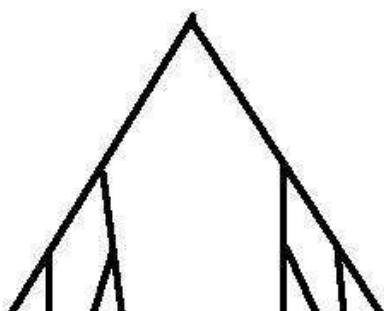


Figura 5.5: Paso 3) en la construcción de G_3

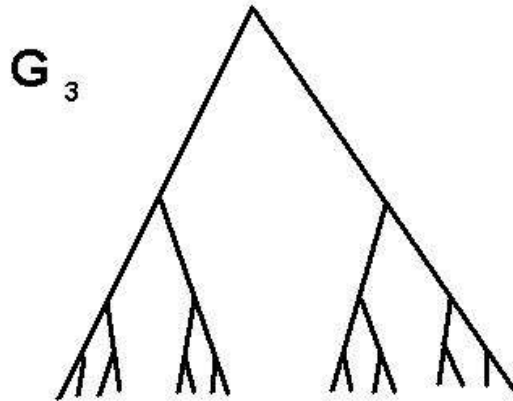


Figura 5.6: Paso 4) en la construcción de G_3

Observación 5.18 Existen dendritas similares cuando cada punto de ramificación tiene orden n si $n \geq 4$, y son únicas. Las denotamos por G_n , y las llamamos dendritas de Gehman de orden n . Véase [3, 5.1, pág. 77-78].

Observación 5.19 1) Caracterización de G_3 : Si X es una dendrita y se cumplen las 2 propiedades siguientes:

- i) $ord_X(r) = 3$ para toda $r \in R(X)$ y
- ii) $E(X)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor, entonces $X \cong G_3$. Véase [3, 5.1, pág. 77].

2) Caracterización del conjunto de Cantor: Un espacio Y es homeomorfo al conjunto de Cantor si y sólo si Y cumple las 4 propiedades siguientes:

- i) Y es métrico.
- ii) Y es compacto,
- iii) Y es totalmente desconexo,
- iv) Y es perfecto (Y es perfecto si es cerrado y todos sus puntos son puntos de acumulación), véase [8, Teorema 7.14, pág. 109-111].

Lema 5.20 Sea X una dendrita $1/3$ -homogénea tal que para cada $r \in R(X)$ existe U abierto tal que $U \cap R(X) = \{r\}$. Entonces para cada $p \in O(X)$ existe W abierto de tal manera que $p \in W$ y $W \cap R(X) = \emptyset$.

Demostración. Si para algún $p \in O(X)$, se tiene que $W \cap R(X) \neq \emptyset$ para todo abierto W de tal manera que $p \in W$, entonces $p \in ce(R(X))$. Como X es

1/3-homogénea entonces $O(X) \subseteq ce(R(X))$ y se sigue de aquí que $E(X) \subseteq ce(R(X))$ pues cada $x \in E(X)$ es el límite de una sucesión de puntos ordinarios ya que X es una dendrita. Entonces $R(X)$ es denso en X contradiciendo el hecho que $U \cap R(X) = \{r\}$. Consideremos $p \in O(X)$, sabemos que $X \setminus \{p\}$ tiene dos arco-componentes, y llamemos X_1 y X_2 a estas arco-componentes. Ahora llamemos r_1 y r_2 a los puntos de ramificación mas cercanos al punto p en las arco-componentes X_1 y X_2 respectivamente. Ahora consideremos a los abiertos U_1 y U_2 que contienen a los puntos r_1 y r_2 respectivamente de tal manera que $U_1 \cap R(X) = \{r_1\}$ y $U_2 \cap R(X) = \{r_2\}$. Ahora consideremos un abierto A conexo de X que contenga al punto p , y consideremos $W = A \setminus ((A \cap U_1) \cup (A \cap U_2))$ el cual es abierto. Por la manera en que se construyo W tenemos que $p \in W$ y $W \cap R(X) = \emptyset$. ■

Proposición 5.21 *Sea X una dendrita 1/3-homogénea tal que $R(X)$ es infinito y sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Supongamos que:*

1) *Para cada $r \in R(X)$ existe U abierto de X de tal manera que $U \cap R(X) = \{r\}$*

2) *el $ord_X(r) = n$, para algún $r \in R(X)$ ($n \geq 3$)*

entonces X es homeomorfa a G_n (véase la Observación 5.18).

Demostración. Utilizando la Observación 5.19, queremos probar $ord_X(r) = n$ para toda $r \in R(X)$, lo cual se sigue de que X es 1/3-homogénea. Sólo nos resta probar que $E(X)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor, para lo cual utilizaremos la parte 2) de la Observación 5.19:

i) $E(X)$ es métrico, pues lo hereda de X .

ii) Para ver que $E(X)$ es compacto, es suficiente probar que es cerrado. Supongamos que $E(X)$ no es cerrado, es decir, consideremos una sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos extremos de tal manera que $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = r$. Supongamos que $r \in R(X)$. Sabemos por hipótesis que existe U abierto de X de tal manera que $r \in U$ y $U \cap R(X) = \{r\}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = r$, existe $m \in \mathbb{N}$ de tal manera que para cada $n \geq m$ se tiene $e_n \in U$. Sabemos que X es conexo por trayectorias y por el Lema 5.9 sabemos que sus subcontinuos son dendritas, entonces $re_{k_1} \cap re_{k_2} = \{r\}$ si $k_1 \neq k_2$, con k_1, k_2 mayores que m , esto lo podemos afirmar por que la dendrita X es 1/3-homogénea y las órbitas son $E(X)$, $R(X)$ y $O(X)$. Pero esto implica que $ord_X(r) = \omega$ y esto es una contradicción. Ahora suponga que $r \in O(X)$. Puesto que X es 1/3-homogénea sabemos que todos los puntos ordinarios están en la misma órbita, entonces tenemos que $O(X) \subseteq ce(R(X))$, y por el Lema 5.20 vemos que es una contradicción ya que

X es $1/3$ -homogénea y sus tres órbitas son $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$. Por lo tanto $O(X) \cap Ce(R(X)) = \emptyset$. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$ donde e es un punto extremo. Por lo tanto $E(X)$ es compacto.

iii) Para verificar que $E(X)$ es totalmente desconexo, véase Teorema 5.10.

iv) Para ver que $E(X)$ es perfecto necesitamos ver que es cerrado y que todos sus puntos son puntos de acumulación. $E(X)$ es cerrado (se demostró en ii)). Veamos que cada punto de $E(X)$ es punto de acumulación. Notemos primeramente que $E(X)$ es infinito, véase [8, Ejemplo 10.39, pág. 186]. Ya que $E(X)$ es compacto, entonces existe un punto de acumulación $p \in E(X)$, pero como X es dendrita $1/3$ -homogénea, entonces $E(X)$ es una sola órbita y por lo tanto todos los puntos de $E(X)$ son puntos de acumulación. Por lo tanto $E(X)$ es perfecto.

De todo lo anterior concluimos que $E(X) \cong C$. ■

El siguiente objetivo es probar que G_3 es una dendrita $1/3$ -homogénea, pero antes de hacerlo introduciremos una notación que nos ayudará a probar que si $p, q \in E(G_3)$ entonces p, q están en la misma órbita.

Observación 5.22 *A cada punto de ramificación en G_3 le llamaremos como en la Figura 5.7.*

Observación 5.23 *Para cada $p \in R(G_3)$ existe una n -ada de ceros y unos con la cual podemos identificarlo de manera única. Ahora notemos que con esta misma notación a cada punto en $E(G_3)$ se le puede representar con una infiniteada de ceros y unos, por ejemplo al origen $(0, 0)$ se le puede representar con $e_{000\dots}$, al punto $(0, 1)$ se le representa con $e_{111\dots}$, al punto $(0, 1/3)$ se le representa con $e_{011\dots}$, y al punto $(0, 2/3)$ se le representa con $e_{100\dots}$.*

Sea $[a, b] \times [c, d]$ el producto cartesiano de los intervalos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$ en \mathbb{R}^2 . Definimos $A_0 = G_3 \cap [0, 1/3] \times [0, 1/2]$ y $A_1 = G_3 \cap [1/3, 1] \times [0, 1/2]$. Véase Figura 5.8.

Observación 5.24 *De manera análoga se construye para cada punto de ramificación el conjunto A correspondiente. En la Figura 5.9 hacemos notar los puntos de ramificación r_{00} , r_{01} , r_{10} y r_{11} , y sus correspondientes A_{00} , A_{01} , A_{10} y A_{11} .*

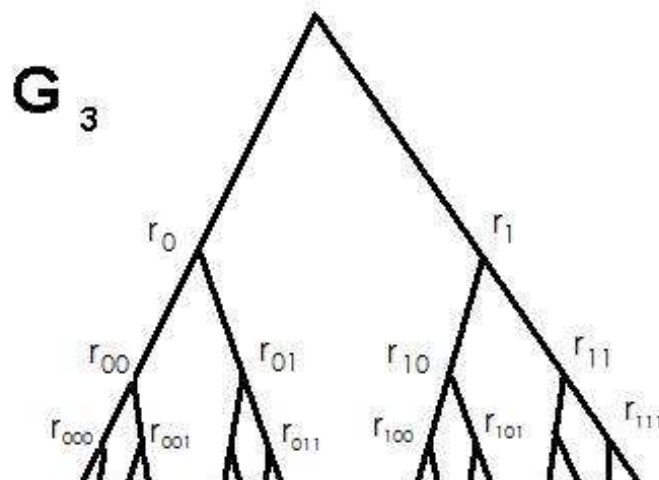


Figura 5.7: Notación para los puntos de ramificación en G_3

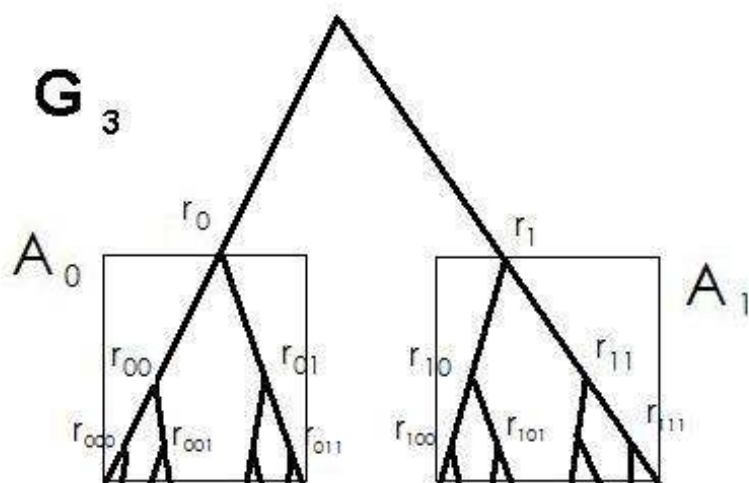


Figura 5.8: Definiciones de A_0 y A_1

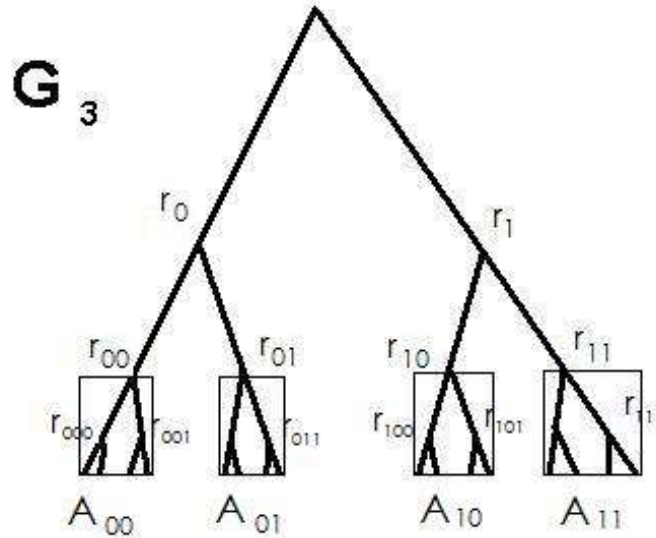


Figura 5.9: Definiciones de A_{00} , A_{01} , A_{10} y A_{11}

Observación 5.25 Consideremos el punto $(0, 0) = e_{000\dots}$ y los siguientes conjuntos que no contienen al punto $e_{000\dots}$ y son: $B_1 = A_1 \cup r_0 r_1$, $B_2 = A_{01} \cup r_{00} r_{01}$, $B_3 = A_{001} \cup r_{000} r_{001}, \dots$, $B_n = A_{0\dots,01} \cup r_{0\dots,0} r_{0\dots,01}$ y notemos que $G_3 = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \cup \{e_{000\dots}\}$. Lo mismo que hemos hecho con el punto $(0, 0) = e_{000\dots}$ hacemos con cada punto extremo. Antes de hacerlo para cualquier infinitada de ceros y unos hagámoslo para un caso particular. Consideremos el punto $e_{101100\dots,00\dots}$. Consideremos entonces los siguientes conjuntos que no contienen al punto $e_{101100\dots,00\dots}$: $C_1 = A_0 \cup r_0 r_1$, $C_2 = A_{11} \cup r_{10} r_{11}$, $C_3 = A_{100} \cup r_{100} r_{101}$, $C_4 = A_{10111} \cup r_{10111} r_{10110}$. Para construir C_5 consideramos primero los primeros 5 subíndices del punto $e_{101100\dots,00\dots}$, es decir 10110, y al seleccionar A , le ponemos esos cinco subíndices, y como, en este caso, el quinto subíndice es el número 0, entonces el sexto subíndice en A será 1, entonces nos queda A_{101101} , y le uniremos el arco que va de los puntos de ramificación con esos mismos seis subíndices, pero el sexto número tendrá los dos dígitos 0 y 1, es decir le uniremos el arco $r_{101100} r_{101101}$. Siguiendo de esta manera, tenemos que $G_3 = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) \cup \{r_{101100\dots,00\dots}\}$. Lo hemos hecho de esta manera para poder generalizarlo, hacemos esto a continuación.

Lema 5.26 *Los puntos extremos de la dendrita G_3 , $E(G_3)$, es una órbita.*

Demostración. Consideremos el punto $(0, 0) = e_{000\dots}$ y a los conjuntos respectivos $B_1 = A_1 \cup r_0 r_1$, $B_2 = A_{01} \cup r_{00} r_{01}$, $B_3 = A_{001} \cup r_{000} r_{001}, \dots$, $B_n = A_{0\dots,01} \cup r_{0\dots,0} r_{0\dots,01}$ que no contienen al punto $e_{000\dots}$. Entonces $G_3 = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \cup \{e_{000\dots}\}$. Tomemos otro punto extremo arbitrario, representado con una infinitada $e_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n \dots}$, donde $i_n \in \{0, 1\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, además si $i_n = 0$ denotemos $j_n = 1$ y de manera análoga si $i_n = 1$, entonces $j_n = 0$. Ahora construiremos los conjuntos que no contienen al punto de ramificación $e_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n \dots}$, y nos quedan de esta manera: $D_1 = A_{j_1} \cup r_0 r_1$, $D_2 = A_{i_1 j_2} \cup r_{i_1 0} r_{i_1 1}$, $D_3 = A_{i_1 i_2 j_3} \cup r_{i_1 i_2 0} r_{i_1 i_2 1}, \dots$, $D_n = A_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n} \cup r_{i_1 i_2 \dots i_n 0} r_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$, entonces $G_3 = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right) \cup \{e_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n \dots}\}$. Con esta construcción que acabamos de realizar y notando que existen homeomorfismos $h_i : B_i \rightarrow D_i$ definiremos una función $h : G_3 \rightarrow G_3$ o escrito de otra manera, $h : \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \cup \{e_{000\dots}\} \rightarrow \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right) \cup \{e_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n \dots}\}$ de tal manera que $h(e_{000\dots}) = e_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n \dots}$. Definimos la función de la siguiente manera
$$h(x) = \begin{cases} e_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n \dots} & \text{si } x = e_{000\dots} \\ h_i(x) & \text{si } x \in B_i \text{ para toda } i \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Entonces h es un homeomorfismo, pues h es continua, inyectiva y suprayectiva, pues cada h_i lo es. Y además h manda al punto $e_{000\dots}$ en $e_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n \dots}$. Con esto probamos que si $p, q \in E(G_3)$, entonces existe un homeomorfismo h , de tal manera que $h(p) = (q)$, es decir $E(G_3)$ es una órbita. ■

Lema 5.27 *Los puntos ordinarios de la dendrita G_3 , $O(G_3)$, es una órbita.*

Demostración. Sea $p \in O(G_3)$ y A una arco-componente de $G_3 \setminus \{p\}$. Luego $A \cup \{p\}$ es un subcontinuo y $A \cup \{p\} = K \cup rp$ donde $K \cong G_3$, y el arco rp donde $r \in R(G_3)$ es el punto de ramificación mas cercano a p que está en la arco-componente, véase la Figura 5.10. Existe un homeomorfismo $h : G_3 \rightarrow K$ tal que $h(v) = r$ donde v es el punto $(1/2, 1)$ de G_3 . Esto pasa con cualquier arco-componente. Consideremos ahora $p, q \in O(G_3)$, y sean $A_1(p), A_2(p)$ las arco-componentes de $G_3 \setminus \{p\}$ y $A_1(q), A_2(q)$ las arco-componentes de $G_3 \setminus \{q\}$, entonces $A_1(p) \cong A_2(p) \cong A_1(q) \cong A_2(q)$. Más aún si $h_i : A_i(p) \rightarrow A_i(q)$ es un homeomorfismo, entonces la función
$$h(x) = \begin{cases} q & \text{si } x = p \\ h_i(x) & \text{si } x \in A_i(p), i = \{1, 2\} \end{cases}$$
 es conyina, inyectiva y suprayectiva, puesto que cada h_i es un homeomorfismo. ■

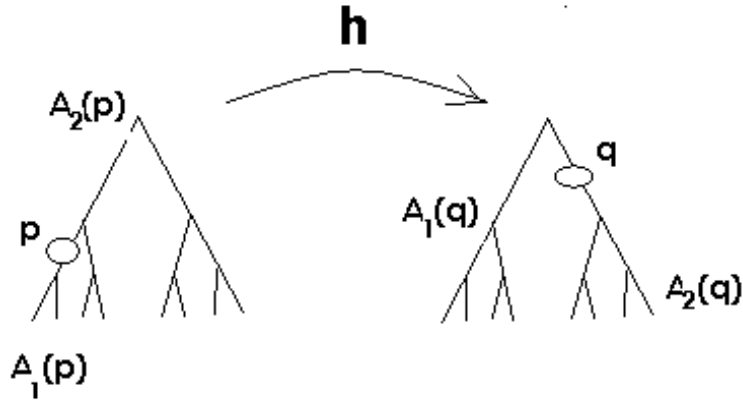


Figura 5.10: $O(G_3)$ es una órbita.

Lema 5.28 *Los puntos de ramificación de la dendrita G_3 , $R(G_3)$, es una órbita.*

Demostración. Sea $p \in R(G_3)$ y A una arco-componente de $G_3 \setminus \{p\}$. Entonces $A \cup \{p\}$ es un subcontinuo, y $A \cup \{p\} = K \cup rp$ donde $K \cong G_3$, y el arco rp donde $r \in R(G_3)$ es el punto de ramificación más cercano al punto p que está en la arco-componente. De esta manera se puede ver que si A_1, A_2, A_3 son las arco-componentes de $G_3 \setminus \{r\}$, entonces $A_1 \cong A_2 \cong A_3$. Si $q \in R(G_3)$, consideremos el homeomorfismo $h_i : A_i(p) \rightarrow A_i(q)$ entonces la función $h : G_3 \rightarrow G_3$ definida como $h(x) = \begin{cases} q & \text{si } x = p \\ h_i(x) & \text{si } x \in A_i(p), i = \{1, 2, 3\} \end{cases}$ es una función continua, inyectiva y suprayectiva, pues cada h_i es un homeomorfismo. ■

Teorema 5.29 *La dendrita G_3 es 1/3-homogénea.*

Demostración. Se sigue de los Lemas 5.26, 5.27 y 5.28. ■

Bibliografía

- [1] Daniel Arevalo, Włodzimierz J. Charatonik, Patricia Pellicer, *Dendrites with a closed set of end points*, Topology Appl. 115 (2001), no. 1, 1–17.
- [2] James Dugunji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. Boston, London, Sydney, Toronto., 1976
- [3] Raúl Escobedo, Sergio Macías, Héctor Méndez, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, Aportaciones Matemáticas, Serie textos, Nivel Medio, 31, 2006.
- [4] John G Hocking and Gail S. Young, *Topology*; Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1988.
- [5] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York, N. Y., 1966
- [6] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N. Y., 1968
- [7] Wayne Lewis, *The Pseudo-arc*; Bol. Soc. Mat. Mexicana, (3), 5, 1999, no. 1, 25-77 (Revisado por: James T. Rogers, Jr.)
- [8] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [9] S. B. Nadler, Jr., Patricia Pellicer-Covarrubias, *Cones that are 1/2-homogeneous*, Houston J. Math. 33 (2007), no. 1, 229–247.
- [10] Sam B. Nadler, Patricia Pellicer-Covarrubias, Isabel Puga, *1/2-homogeneous continua with cut points*, Topology Appl. 154 (2007), no. 1, 2154-2166.

- [11] Victor Neumann-Lara, Patricia Pellicer-Covarrubias, Isabel Puga, *On 1/2-homogeneous continua*. *Topology Appl.* 153 (2006), no. 14, 2518-2527.
- [12] Hanna Patkowska, *On 1/2-homogeneous ANR-spaces*, *Fund. Math.* 132 (1989), 25-58.