



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PSEUDODISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD
PARA ESTADOS CUÁNTICOS CON ESPÍN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

PRESENTA:

JOSÉ RAÚL GONZÁLEZ ALONSO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA



2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para EEG. y mis padres

*“I think that I can safely say that
nobody understands quantum
mechanics.”*

Richard P. Feynmann, *The
character of physical law*
(Cambridge, EUA, 1967)

Agradecimientos

ESTE TRABAJO NO habría sido posible sin la enorme ayuda que prestaron los que en breve se mencionarán. De antemano se agradece todo el apoyo que brindaron para este proyecto.

- A la UNAM por darme la oportunidad de estudiar la carrera en física y proporcionarme todo lo necesario para ello.
- Al Dr. Octavio Castaños Garza muchas gracias por todas las horas que generosamente invirtió en revisar, corregir y hacer sugerencias. Además desearía agradecer el apoyo económico del proyecto CONACyT no. 46113.
- Agradezco también al Dr. Ramón López Peña por dirigir esta tesis.
- Al Dr. Shahen Hacyan Saleryan, Dr. Eduardo Nahmad Achar, Dr. Enrique López Moreno y al Dr. Jorge Hirsch por las amables sugerencias y correcciones que hicieron en la revisión de este trabajo.
- A mis padres y a Paulina por todo su apoyo.
- A mis amigos de la Facultad de Ciencias por los grandes momentos que vivimos juntos.

Prefacio

LAS PROPIEDADES DE sistemas cuánticos de espines interactuantes han atraído recientemente la atención en teoría de información cuántica y física de materia condensada [19, 25, 37, 45]. En este trabajo de tesis, estudiaremos la descripción cuántica de sistemas de espines interactuantes en el espacio fase.

Comenzaremos con una revisión de la cuantización del campo electromagnético, los estados coherentes, los estados comprimidos y las funciones de distribución de pseudoprobabilidad en el espacio fase: la función de Wigner, la distribución de Husimi-Kano (función Q) y la distribución de Glauber (función P) [23, 46].

Más tarde, procederemos con una revisión de la representación del campo atómico mediante generadores del grupo de rotaciones. Veremos los estados de Dicke, los de Bloch (coherentes atómicos) [14, 34], los estados comprimidos de espín [20] y las funciones de distribución de Wigner [2] y de Husimi-Kano [43] para sistemas con espín.

Índice general

Agradecimientos	IX
Prefacio	XVII
1. Representación del campo electromagnético	1
1.1. Cuantización del campo electromagnético	2
1.2. El oscilador electromagnético	5
1.3. Estados de Fock o de número	9
1.4. Estados coherentes	14
1.4.1. Función de onda de un estado coherente	16
1.4.2. No ortogonalidad y sobre-completez	19
1.5. Estados comprimidos	21
1.5.1. Estados de mínima incertidumbre	21
2. Pseudodistribuciones electromagnéticas	29
2.1. Wigner	30
2.1.1. Propiedades básicas de la distribución de Wigner .	34
2.1.2. Ejemplos de distribuciones de Wigner para dife- rentes estados	37
2.2. Husimi-Kano	42
2.3. Glauber-Sudarshan	45
2.3.1. Más ejemplos de funciones de distribución	47
3. Representación del campo atómico	55
3.1. Estados de Dicke	56

3.2. Estados coherentes atómicos o de Bloch	59
3.2.1. Valores esperados de diferentes operadores	61
3.2.2. Representación de Bloch	63
3.2.3. No ortogonalidad y sobre-completez	63
3.3. Estados comprimidos	67
4. Pseudodistribuciones atómicas	69
4.1. Wigner	69
4.1.1. Definición usando el desarrollo multipolar	69
4.1.2. Ejemplos de funciones de Wigner para diferentes estados del campo atómico	71
4.2. Husimi-Kano	97
4.2.1. Definición	97
4.2.2. Ejemplos de funciones de Husimi para diferentes estados del campo atómico	97
Conclusiones	109
A. Algunos resultados importantes en el cálculo de operadores	113
A.1. El teorema de la expansión de un operador	113
A.2. La fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff	114
A.3. El teorema del desenredamiento de un operador	115
B. Código del programa en Mathematica®	117
Bibliografía	133

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de las funciones de onda para algunos estados de Fock ($n = 0, 1, 2, 3$).	13
1.2. Gráfica de la función de onda irregular para el vacío y de $\psi_{-1}(q)$	14
1.3. Ejemplo de la función de onda de un estado coherente con $q_0 = 1, p_0 = 0$	18
1.4. Ejemplo de la distribución del número de fotones para un estado coherente con $\alpha = 5$	19
1.5. Ejemplos de las funciones de onda de algunos estados de vacío comprimidos y centrados en el origen.	24
1.6. Ejemplo de la estadística de fotones para el estado de vacío comprimido con $\zeta = 3$	28
2.1. Ejemplo de la función de Wigner para el estado de vacío.	38
2.2. Ejemplo de la función de Wigner para un estado comprimido con $\zeta = 0.5$	39
2.3. Ejemplo de la función de Wigner para un estado coherente con $p_0 = 1$ y $q_0 = 1$	40

2.4. Ejemplos de la función de Wigner para un estado de gato de Schrödinger con $q_0 = 1$ (arriba) y $q_0 = 3$ (abajo). Con $q_0 = 1$ no se distinguen claramente las dos amplitudes coherentes, y más bien, pareciera tenerse un efecto de compresión. Sin embargo, al incrementar el valor de q_0 hasta 3 apreciamos claramente cómo aparecen dos amplitudes coherentes y una estructura de interferencia cuántica con una zona de rápida oscilación.	43
2.5. Ejemplos de la función Q de Husimi para un estado de Fock con $n = 1$ y con $n = 4$	48
2.6. Ejemplo de la función de Husimi para un estado térmico con $\beta = 0.1$	50
2.7. Ejemplo de la función de Wigner para un estado térmico con $\beta = 0.1$. Notar la similitud con la función de Husimi.	51
2.8. Ejemplo de la función de Glauber para un estado térmico con $\beta = 0.1$. Notar la similitud con las funciones de Wigner y de Husimi.	52
2.9. Ejemplos de la función de Wigner para un estado de Fock con $n = 1$ y con $n = 4$	54
3.1. Geometría de los estados coherentes del campo atómico.	61
4.1. Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J = 5$	72
4.1. Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J = 5$ (cont.).	73
4.1. Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J=5$ (cont.).	74
4.1. Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J=5$ (cont.).	75
4.1. Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J=5$ (cont.).	76
4.1. Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J=5$ (cont.).	77

4.2. Ejemplo de la función de Wigner para un estado coherente. $\left \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	81
4.3. Ejemplos de funciones de Wigner para diferentes estados comprimidos.	83
4.3. Ejemplos de funciones de Wigner para diferentes estados comprimidos (cont.).	84
4.3. Ejemplos de funciones de Wigner para diferentes estados comprimidos (cont.).	85
4.4. Ejemplo de la función de Wigner para un estado de gato polar con $J = 5$	88
4.5. Ejemplos de funciones de Wigner para estados de gatos no polares con diferentes valores de θ_1	93
4.5. Ejemplos de funciones de Wigner para estados de gatos no polares con diferentes valores de θ_1 (cont.).	94
4.5. Ejemplos de funciones de Wigner para estados de gatos no polares con diferentes valores de θ_1 (cont.).	95
4.5. Ejemplos de funciones de Wigner para estados de gatos no polares con diferentes valores de θ_1 (cont.).	96
4.6. Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$	98
4.6. Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.(cont.)	99
4.6. Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.(cont.)	100
4.6. Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.(cont.)	101
4.6. Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.(cont.)	102
4.6. Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.(cont.)	103
4.7. Ejemplo de la función de Husimi para el estado coherente $\left \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	105
4.8. Ejemplos de funciones de Husimi para estados comprimidos con $J = 5$	106

4.8. Ejemplos de funciones de Husimi para estados comprimidos con $J = 5$ (cont.).	107
4.8. Ejemplos de funciones de Husimi para estados comprimidos con $J = 5$ (cont.).	108

CAPÍTULO 1

Representación del campo electromagnético (grupo de Weyl-Heisenberg)

LA LUZ ES uno de los objetos más fascinantes la naturaleza. A través de su estudio, la física ha obtenido notables progresos y ha descubierto nuevos e interesantes fenómenos. Uno de los ejemplos más sobresalientes es el de las investigaciones de Max Planck sobre la radiación de cuerpo negro en 1900. Planck descubrió que si postulaba que la energía de los osciladores del campo electromagnético se encuentra cuantizada, entonces podía explicar de manera sensata la distribución espectral de la radiación térmica de una cavidad de cuerpo negro. Este simple postulado marcó un hito en la historia de la ciencia pues fue a partir de él que se podría decir que nació un área completamente novedosa de la física: *la Mecánica Cuántica*. Sin duda alguna, los argumentos para deducir la cuantización del campo electromagnético son hoy bastante más refinados que los que ofreció Planck. En este trabajo, nuestro principal interés radica en estudiar propiedades *cuánticas* de la luz. Para tal efecto, es indispensable empezar con el estudio de la cuantización del campo electromagnético y las consecuencias que se derivan de ello.

1.1. Cuantización del campo electromagnético

Empecemos por la descripción clásica del campo electromagnético en el vacío. Como es bien sabido, dicha descripción está dada por las ecuaciones de Maxwell sin fuentes ni corrientes, es decir [46]

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1.1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.1.1d)$$

en donde $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ y μ_0 y ε_0 representan la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del vacío respectivamente. Adicionalmente, se cumple que $\mu_0 \varepsilon_0 = c^{-2}$ y hemos usado las unidades del *Sistema Internacional de Unidades*. Las ecuaciones de Maxwell son invariantes de norma bajo la ausencia de fuentes. En óptica cuántica, una elección de norma que resulta conveniente es la llamada *norma de Coulomb*. En la norma de Coulomb, tanto el campo magnético \mathbf{B} como el campo eléctrico \mathbf{E} pueden ser determinados a partir de un potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ como sigue

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.1.2a)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.1.2b)$$

con la condición de norma de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.1.3)$$

Al sustituir (1.1.2a) en la ecuación (1.1.1d), observamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

en donde hemos usado la condición de la norma de Coulomb y la conocida identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$. Así, el potencial \mathbf{A} satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (1.1.4)$$

Lo que ahora haremos, será escribir al potencial como la suma de dos términos complejos [46]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (1.1.5)$$

en donde $\mathbf{A}^{(+)}$ contiene todas las amplitudes complejas que varían como $e^{-i\omega t}$ con $\omega > 0$ y $\mathbf{A}^{(-)}$ contiene todas las amplitudes que varían como $e^{i\omega t}$. Además, se cumple que $\mathbf{A}^{(-)} = (\mathbf{A}^{(+)})^*$. Resulta ahora más conveniente asumir que existe un espectro discreto de frecuencias más que un espectro continuo. Así, vamos a restringir nuestra descripción del potencial a un cierto volumen del espacio y a un cierto conjunto ortonormal de funciones para cada modo de oscilación [46]. Es decir, escribimos

$$\mathbf{A}^{(+)} = \sum_k c_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} \quad (1.1.6)$$

Lo que hemos hecho ha sido simplemente desarrollar al potencial \mathbf{A} en serie de Fourier. Los coeficientes de Fourier c_k serán constantes para un campo en el vacío. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{(+)} + \mathbf{A}^{(-)} \\ \Rightarrow \mathbf{A} &= \sum_k c_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \sum_k c_k^* \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}. \end{aligned}$$

Si sustituimos lo anterior en la ecuación (1.1.3), vemos que

$$\sum_k c_k \nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \sum_k c_k^* \nabla \cdot \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} = 0.$$

Debido a que las funciones $e^{-i\omega_k t}$ y $e^{i\omega_k t}$ son ortogonales entre sí forman un conjunto linealmente independiente, lo cual quiere decir que para

cada valor del índice k se debe de cumplir que $c_k \nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0$. Como en general los coeficientes de Fourier $c_k \neq 0$, entonces, vemos que la función del k -ésimo modo de oscilación satisface que

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0.} \quad (1.1.7)$$

Repitamos este procedimiento para la ecuación de onda que satisface el potencial \mathbf{A} . Así, vemos que

$$\begin{aligned} & \sum_k c_k \nabla^2 \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \sum_k c_k^* \nabla^2 \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} = \\ & -\frac{1}{c^2} \left(\sum_k c_k \omega_k^2 \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} \right) - \frac{1}{c^2} \left(\sum_k c_k^* \omega_k^2 \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} \right) \end{aligned}$$

al agrupar términos, esto nos permite afirmar que

$$\begin{aligned} \sum_k c_k \left(\nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2} \right) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \sum_k c_k^* \left(\nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2} \right) \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} \\ = 0 \end{aligned}$$

que bajo el mismo argumento que nos llevó a la ecuación (1.1.7), nos conduce ahora a que para cada modo de oscilación se debe de cumplir que

$$\boxed{\left(\nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2} \right) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0.} \quad (1.1.8)$$

La forma particular que adoptan las funciones \mathbf{u}_k depende de las características geométricas del volumen físico que se analice en cada problema.

Regresando al desarrollo de potencial vectorial en términos de las funciones \mathbf{u}_k podemos escribir que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a_k \mathbf{u}_k(x) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(x) e^{i\omega_k t} \right). \quad (1.1.9)$$

Con esto, el campo eléctrico correspondiente es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a_k \mathbf{u}_k(x) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(x) e^{i\omega_k t} \right). \quad (1.1.10)$$

Los factores de normalización se han escogido de manera tal que las amplitudes a_k y a_k^\dagger no tengan dimensiones físicas, es decir, para que carezcan de unidades.

En el caso de la teoría electromagnética clásica, las amplitudes a_k y a_k^\dagger son en general números complejos, sin embargo, para el caso de la cuantización del campo deben de ser operadores que satisfagan relaciones de conmutación específicas. Como los fotones son bosones, estas relaciones son

$$\boxed{[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0, [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}} \quad (1.1.11)$$

Esto quiere decir que podemos describir el comportamiento dinámico de las amplitudes del campo como osciladores armónicos que obedecen las relaciones de conmutación antes listadas. Exploraremos esto con más detalle en la siguiente sección. Para finalizar esta obtendremos el Hamiltoniano del sistema. En la teoría electromagnética clásica el Hamiltoniano del campo se encuentra dado por

$$H = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) \, d\mathbf{r}.$$

Si sustituimos la expresión para el campo \mathbf{E} (ver (1.1.10)) y la correspondiente para \mathbf{H} (mediante el generoso uso de las expresiones (1.1.2a) y (1.1.9)) encontramos finalmente que

$$\boxed{\hat{H} = \sum_k \hbar \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right)} \quad (1.1.12)$$

1.2. El oscilador electromagnético

Ya hemos discutido sobre la cuantización de los modos normales de oscilación del campo magnético y hemos visto las condiciones que

cumple cada modo normal de oscilación. En lo que sigue, centraremos nuestra atención en un campo que sólo tenga un único modo de oscilación, es decir que sea monocromático. Esto se debe a que en un capítulo posterior estudiaremos las interacciones del campo electromagnético con átomos de dos niveles, y para nuestros propósitos no será necesario considerar más de una frecuencia. Así mismo, por simplicidad, eliminaremos la dependencia temporal del campo. Por tanto, tenemos que el campo eléctrico está dado por

$$\hat{\mathbf{E}} = \left(\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a}\mathbf{u}(\mathbf{r}) + a^\dagger\mathbf{u}^*(\mathbf{r})). \quad (1.2.1)$$

Primero, debemos de hablar de los *operadores de creación y aniquilación bosónicos* \hat{a}, \hat{a}^\dagger respectivamente. Como ya vimos en (1.1.11), este par de operadores satisface la relación de conmutación

$$\boxed{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.} \quad (1.2.2)$$

Por comodidad, en todo el desarrollo posterior tomaremos $\hbar = 1 = \omega$.

A partir de los operadores de creación y aniquilación bosónicos definimos el *operador de número* [12, 23] como sigue

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (1.2.3)$$

Como se probará más adelante, el operador de número cuenta el número de fotones o quanta de energía presentes en el modo espacio-temporal escogido del campo electromagnético.

Introducimos también, el operador de corrimiento de fase [23]

$$\hat{U}(\theta) = e^{-i\theta\hat{n}}. \quad (1.2.4)$$

Tal y como su nombre sugiere, el operador de corrimiento de fase provee una fase θ a la amplitud \hat{a} cuando actúa sobre ella, es decir,

$$\boxed{\hat{U}^\dagger(\theta)\hat{a}\hat{U}(\theta) = \hat{a}e^{-i\theta}.} \quad (1.2.5)$$

Comprobar (1.2.5) no es muy complicado: basta tomar la derivada de $\hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U}$ con respecto a θ .

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U}}{d\theta} &= i\hat{n}\hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U} - i\hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U} \hat{n} \\
 &= i[\hat{n}, \hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U}] \\
 &= \hat{U}^\dagger i[\hat{n}, \hat{a}] \hat{U} \\
 &= -i\hat{U}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} \hat{U} \\
 &= -i\hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U}.
 \end{aligned}$$

Notemos que el lado derecho de (1.2.5) obedece el mismo tipo de ecuación diferencial, con el operador inicial \hat{a} para $\theta = 0$, y por tanto, ambos lados son efectivamente iguales.

Finalmente, introducimos un par de operadores \hat{q}, \hat{p} llamados las cuadraturas del campo [12, 23]. Quedan definidos por el siguiente par de ecuaciones

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (1.2.6a)$$

$$\hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (1.2.6b)$$

De esta manera, es fácil ver que

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q} + i\hat{p}) \quad (1.2.7a)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q} - i\hat{p}). \quad (1.2.7b)$$

y en virtud de (1.2.3) vemos que

$$\begin{aligned}
 1 &= [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \\
 \iff 1 &= \frac{1}{2} [\hat{q} + i\hat{p}, \hat{q} - i\hat{p}] \\
 \iff 2 &= -i[\hat{q}, \hat{p}] + i[\hat{p}, \hat{q}] \\
 \iff 2 &= -2i[\hat{q}, \hat{p}]
 \end{aligned}$$

concluyendo así que

$$\boxed{[\hat{q}, \hat{p}] = i.} \quad (1.2.8)$$

Podemos preguntarnos sobre la acción del operador de corrimiento de fase sobre las cuadraturas. Empecemos con el caso de la cuadratura \hat{q} . A partir de (1.2.5) es claro que

$$\begin{aligned} \hat{q}_\theta &:= \hat{U}^\dagger(\theta)\hat{q}\hat{U}(\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{U}^\dagger(\theta)\hat{a}^\dagger\hat{U}(\theta) + \hat{U}^\dagger(\theta)\hat{a}\hat{U}(\theta) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}^\dagger e^{i\theta} + \hat{a} e^{-i\theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \hat{q} + \frac{1}{i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \hat{p} \right), \end{aligned}$$

concluyendo así que

$$\boxed{\hat{q}_\theta = \hat{q} \cos \theta + \hat{p} \operatorname{sen} \theta.} \quad (1.2.9)$$

De forma completamente análoga, se prueba que

$$\boxed{\hat{p}_\theta = -\hat{q} \operatorname{sen} \theta + \hat{p} \cos \theta.} \quad (1.2.10)$$

Así, vemos que la acción del operador de corrimiento de fase sobre las cuadraturas es rotarlas por un ángulo θ .

Expresamos ahora el operador de número en términos de las cuadraturas. Esto es fácil a partir de las relaciones dadas en (1.2.7) y la relación de conmutación en (1.2.8). Es decir,

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{q} - i\hat{p}) (\hat{q} + i\hat{p}) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{q}^2 + i[\hat{q}, \hat{p}] + \hat{p}^2). \end{aligned}$$

Así pues, vemos que

$$\boxed{\hat{n} = \frac{1}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2 - 1).} \quad (1.2.11)$$

Ya que en el tratamiento cuántico de la luz estamos modelando a los fotones como osciladores armónicos, tenemos que a partir de la relación (1.2.11), el Hamiltoniano del sistema está dado por

$$\hat{H} = \hat{n} + \frac{1}{2} = \frac{\hat{q}^2}{2} + \frac{\hat{p}^2}{2}. \quad (1.2.12)$$

1.3. Estados de Fock o de número

Introducimos ahora a los *estado de Fock o de número* como eigenestados del operador \hat{n} [12, 23]. Estamos en todo nuestro derecho de realizar esto pues este operador es claramente hermitiano y por tanto es diagonalizable y sus valores propios son reales.

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (1.3.1)$$

La propiedad distintiva de estos estados es que poseen un número fijo de fotones, es decir de quanta de energía electromagnética. Esto es fácil de ver de la ecuación (1.2.12) pues los estados de Fock también son eigenestados del operador Hamiltoniano. Así,

$$\begin{aligned} E |n\rangle = \hat{H} |n\rangle &= \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\ \therefore E &= n + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

es decir, el espectro de energía se encuentra indexado por los eigenvalores del operador \hat{n} .

Notemos que si $|n\rangle$ es un eigenestado de \hat{n} , entonces $\hat{a} |n\rangle$ también lo es pero con el eigenvalor $n - 1$. Para esto basta notar que como consecuencia de (1.2.3)

$$\hat{n} \hat{a} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 |n\rangle \quad (1.3.2)$$

$$= (\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}) |n\rangle \quad (1.3.3)$$

$$= \hat{a} \hat{n} |n\rangle - \hat{a} |n\rangle \quad (1.3.4)$$

$$= (n - 1) \hat{a} |n\rangle. \quad (1.3.5)$$

Por un procedimiento completamente análogo, obtenemos que

$$\hat{n}\hat{a}^\dagger |n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger |n\rangle. \quad (1.3.6)$$

esto nos indica que $\hat{a}|n\rangle$ y $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ son proporcionales a los estados $|n-1\rangle$ y $|n+1\rangle$ respectivamente. Entonces, de la condición de normalización de estados es muy fácil ver las siguientes relaciones fundamentales

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (1.3.7a)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (1.3.7b)$$

Estas relaciones justifican los nombres de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger como de aniquilación y creación de fotones.

Surge ahora la cuestión de si existen valores fraccionarios y negativos para n . De la relación de \hat{n} con las cuadraturas vemos que se cumple para el valor esperado $\langle \hat{n} \rangle$ que

$$n = \langle n | \hat{n} | n \rangle = \langle \hat{n} \rangle = \left\langle \frac{\hat{q}^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{\hat{p}^2}{2} \right\rangle - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}. \quad (1.3.8)$$

Es decir, de existir valores fraccionarios de n , después de la aplicación de un número suficiente de veces del operador de aniquilación podríamos llegar fácilmente a un valor estrictamente menor a $-\frac{1}{2}$, pues el espectro del campo no se encontraría acotado por abajo (veáse la ecuación (1.3.7a)) contradiciendo a (1.3.8). Sin embargo para el caso de valores enteros y no negativos vemos que esto no ocurre pues para el estado $|0\rangle$, al aplicar el operador de aniquilación alcanzamos el cero del espacio de Hilbert en el cual se encuentran los estados de Fock, y sucesivas aplicaciones de este operador no alteran esto. De esta manera, de nuestra discusión anterior, y de la desigualdad (1.3.8) concluimos que no existen valores fraccionarios para el número de fotones.

Notemos adicionalmente que el mínimo valor que puede tomar n y que cumple con la desigualdad en (1.3.8) es $n = 0$. Así, cabe preguntarse qué sucede cuando alcanzamos el cero después de reducir el valor de n en pasos enteros. Ya que se debe de cumplir que

$$\hat{n}|0\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0,$$

entonces tenemos dos opciones:

1. Se cumple que $\hat{a}|0\rangle = 0$
2. Sucede que $\hat{a}|0\rangle \neq 0$ pero $\hat{n}|0\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|0\rangle = 0$.

Analizaremos ambas opciones con cuidado. Empecemos con el análisis de la opción $\hat{a}|0\rangle = 0$. Usando la descomposición (1.2.7a) y que $\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial q}$ en la representación q , tenemos entonces que la función de onda del estado de vacío debe de cumplir la ecuación diferencial siguiente

$$0 = \hat{a}\psi_0(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi_0(q), \quad (1.3.9)$$

en donde hemos cometido un abuso de notación al usar un operador del espacio de los estados de Fock (un espacio de Hilbert) sobre una función de onda (la proyección del estado de vacío sobre el espacio de la representación q). Lo que queremos decir con esto es justo lo que se indica en la igualdad siguiente, esto es, que dicho operador se sustituye por la forma correspondiente para la representación que se esté utilizando. **De ahora en adelante, se sobrentenderá el significado de tal abuso de notación.**

La solución a la ecuación (1.3.9) es

$$\boxed{\psi_0(q) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}}}, \quad (1.3.10)$$

la cual ha sido normalizada para que cumpla que $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0|^2 dq = 1$. De forma análoga, obtenemos para la función de onda en la representación de momentos

$$\psi_0(p) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{p^2}{2}}. \quad (1.3.11)$$

Así, vemos que existe un estado bien definido con cero fotones llamado el *estado de vacío*.

A partir de lo anterior podemos entonces construir las funciones de onda de los estados excitados, es decir, si recordamos (1.3.7b), entonces es claro que

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (1.3.12)$$

entonces podemos mediante el uso de la relación (1.3.7b) con $n = m-1$, en la representación de Schrödinger, concluir para las funciones de onda que

$$\sqrt{m}\psi_m(q) = \hat{a}^\dagger \psi_{m-1}(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi_{m-1}(q).$$

O bien, al resolver la relación de recurrencia, concluimos que

$$\psi_m(q) = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} \left(q - \frac{\partial}{\partial q} \right)^m \psi_0(q),$$

que al sustituir la forma de $\psi_0(q)$ (1.3.10) se vuelve

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2^m m!} \sqrt{\pi}} \left(q - \frac{\partial}{\partial q} \right)^m e^{-\frac{q^2}{2}}.$$

esto se resuelve fácilmente si recordamos que los polinomios de Hermite satisfacen $H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(x - \frac{\partial}{\partial x} \right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ [1], y en consecuencia,

$$\boxed{\psi_n(q) = \frac{H_n(q)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}}.} \quad (1.3.13)$$

Sabemos que la función de onda del vacío queda dada por la expresión en (1.3.11) y por tanto las expresiones que dedujimos para las demás funciones en (1.3.13) se encuentran bien determinadas y son únicas.

En la figura 1.1 se pueden apreciar algunas de las funciones de onda para diferentes valores de n . Como se puede observar tienen la forma de ondas estacionarias de Schrödinger.

Regresemos ahora a la segunda posibilidad, a saber, que $\hat{a}|0\rangle \neq 0$ pero $\hat{n}|0\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|0\rangle = 0$. Esto quiere decir que la función de onda

$$\psi_{-1}(q) := \hat{a}\psi_0(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi_0(q)$$

satisface la ecuación

$$\hat{a}^\dagger \psi_{-1}(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi_{-1}(q) = 0.$$

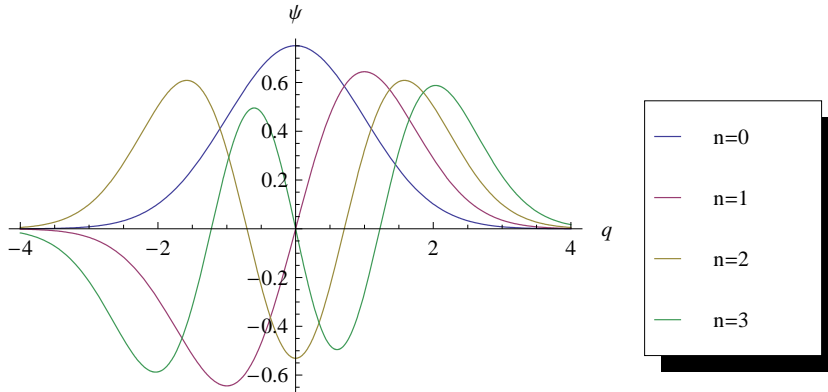


Figura 1.1: Ejemplos de las funciones de onda para algunos estados de Fock ($n = 0, 1, 2, 3$).

La solución a esto es la función

$$\psi_{-1}(q) = ce^{q^2/2}. \quad (1.3.14)$$

Sin embargo, dicha función no es normalizable y de la misma forma, la función de onda del estado de vacío asociada tampoco lo es. Se le conoce como la *función de onda irregular* del estado de vacío y está dada por la expresión

$$\psi_0(q) = c\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{q^2}{2}}\operatorname{erfi}(q), \quad (1.3.15)$$

donde la función erfi es la *función de error imaginaria* y queda definida por la expresión

$$\operatorname{erfi}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt.$$

Ya que la función de onda del vacío no es normalizable, se le debe descartar como un estado de relevancia física. No obstante, la figura 1.2 muestra gráficas para $\psi_{-1}(q)$ y para la función de onda irregular del vacío.

Hemos encontrado que existe un estado físico para el vacío que es normalizable y por tanto que tiene relevancia física. A partir de ello,

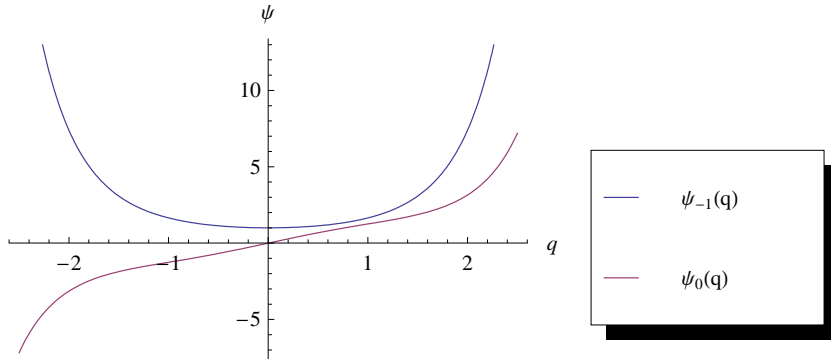


Figura 1.2: Gráfica de la función de onda irregular para el vacío y de $\psi_{-1}(q)$.

hemos visto que los demás estados del oscilador electromagnético son simplemente excitaciones del vacío. Así, ya que los estados de Fock son eigenestados del Hamiltoniano¹, deben de ser completos, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1,$$

ya que cubren todo el espacio de Hilbert de los modos de oscilación del oscilador electromagnético. Los estados de Fock son pues una base ortonormal conocida como la *base de Fock*.

1.4. Estados coherentes

Introducimos ahora a los *estados coherentes* como eigenestados del operador de aniquilación \hat{a} [12, 23]

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle.$$

Los estados coherentes también se conocen como estados de Glauber en honor al físico que los introdujo R.J. Glauber [12, 23]. Observemos que

¹Nótese que el Hamiltoniano del campo electromagnético no es degenerado y por tanto lo que afirmamos es válido para todo el espacio.

como el operador \hat{a} no es Hermitiano, entonces los eigenvalores α en general serán complejos.

Notemos que el estado de vacío también es un estado coherente con $\alpha = 0$. Así, el estado de vacío se vuelve un estado coherente con cero amplitud. Sin tener que esforzarnos mucho podemos notar que la energía promedio de los estados coherentes está dada por

$$\langle \hat{H} \rangle = \left\langle \alpha \left| \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \right| \alpha \right\rangle = |\alpha|^2 + \frac{1}{2},$$

o en palabras, como la suma de la energía de vacío y de la norma de amplitud del estado $|\alpha|^2$. Notemos también de la definición de estado coherente que el operador de corrimiento de fase simplemente rota a α por θ . Para una demostración de esto baste recordar de (1.2.5) que $\hat{U}^\dagger(\theta)\hat{a}\hat{U}(\theta) = \hat{a}e^{-i\theta}$, es decir, $\hat{U}(\theta)\hat{a}\hat{U}^\dagger(\theta) = \hat{a}e^{i\theta}$, de donde,

$$\begin{aligned} \hat{a}|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle \\ \Leftrightarrow \hat{U}(\theta)\hat{a}\hat{U}^\dagger(\theta)\hat{U}(\theta)|\alpha\rangle &= \alpha\hat{U}(\theta)|\alpha\rangle \\ \Leftrightarrow e^{i\theta}\hat{a}\hat{U}(\theta)|\alpha\rangle &= \alpha\hat{U}(\theta)|\alpha\rangle \\ \Leftrightarrow \hat{a}\hat{U}(\theta)|\alpha\rangle &= \alpha e^{-i\theta}\hat{U}(\theta)|\alpha\rangle \\ \therefore \hat{U}(\theta)|\alpha\rangle &= |e^{-i\theta}\alpha\rangle. \end{aligned}$$

Para realizar un estudio más cuidadoso de los estados coherentes introducimos al *operador desplazamiento*

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \quad (1.4.1)$$

Ya que $i(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ es Hermitiano, \hat{D} tiene que ser unitario. Este operador debe su nombre a que desplaza la amplitud del campo \hat{a} por el número complejo α . Es decir,

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha. \quad (1.4.2)$$

Para probar esta aseveración, requerimos de un resultado auxiliar conocido como el **teorema de la expansión de un operador** (ver el apéndice A, en particular, (A.1.1)).

Utilizando el teorema de la expansión de un operador con $x = \alpha^*$, $\hat{A} = \hat{a} - \frac{\alpha}{\alpha^*} \hat{a}^\dagger$, $\hat{B} = \hat{a}$ y $[\hat{A}, \hat{B}] = \frac{\alpha}{\alpha^*} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \frac{\alpha}{\alpha^*}$ vemos que el resultado (1.4.2) es inmediato. La propiedad (1.4.2) nos permite deducir algo aún más importante: *los estados coherentes son el resultado de aplicar el operador desplazamiento sobre el estado de vacío*. Para ver esto, notemos que

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{D}(-\alpha)|\alpha\rangle &= \hat{D}(-\alpha)\hat{D}^\dagger(-\alpha)\hat{a}\hat{D}(-\alpha)|\alpha\rangle \\ &= \hat{D}(-\alpha)(\hat{a} - \alpha)|\alpha\rangle \\ &= 0 \\ \therefore \hat{D}(-\alpha)|\alpha\rangle &= |0\rangle \\ \therefore |\alpha\rangle &= \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \end{aligned}$$

1.4.1. Función de onda de un estado coherente

Para poder estudiar a los estados coherentes con mayor detenimiento, necesitamos de un resultado muy importante conocido como *la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff* (ver el apéndice A).

Descompongamos a α en sus partes real e imaginaria.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 + ip_0)$$

y representemos al operador desplazamiento en términos de las cuadraturas \hat{p} y \hat{q} , i.e.,

$$\hat{D}(\alpha) = e^{ip_0\hat{q} - iq_0\hat{p}}.$$

Mediante el uso de (A.2.2) con $x = i$, $\hat{A} = p_0\hat{q}$ y $\hat{B} = -q_0\hat{p}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) &= e^{-\frac{ip_0q_0}{2}} e^{ip_0\hat{q}} e^{-iq_0\hat{p}} \\ &= e^{\frac{ip_0q_0}{2}} e^{-iq_0\hat{p}} e^{ip_0\hat{q}}. \end{aligned}$$

En la representación de posición, el operador \hat{p} es igual a $-i\frac{\partial}{\partial q}$ y la exponencial $e^{-q_0i\frac{\partial}{\partial q}}$ se vuelve simplemente un desplazamiento. esto es,

$$e^{-q_0i\frac{\partial}{\partial q}} \psi(q) = \psi(q - q_0).$$

Así pues, nos damos cuenta de que el operador desplazamiento tiene una acción en tres pasos sobre una función de onda de posición. Primero, la desplaza, luego, la multiplica por e^{ip_0q} y finalmente le agrega la fase $e^{-\frac{ip_0q_0}{2}}$. Ya que los estados coherentes son estados de vacío desplazados, entonces esto nos ayuda a concluir que sus funciones de onda son simplemente (recordar la ecuación (1.3.10))

$$\psi_\alpha(q) = \psi_0(q - q_0) e^{ip_0q - i\frac{p_0q_0}{2}}, \quad (1.4.3)$$

i.e.,

$$\psi_\alpha(q) = \frac{e^{-\frac{(q-q_0)^2}{2} + ip_0q - i\frac{p_0q_0}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}. \quad (1.4.4)$$

De una forma completamente análoga podemos obtener para la representación de momentos a la función de onda

$$\tilde{\psi}_\alpha = \frac{e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2} + iq_0p - i\frac{p_0q_0}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}. \quad (1.4.5)$$

Estas ecuaciones muestran que las funciones de onda de los estados coherentes son Gaussianas de la misma varianza que la del estado de vacío pero con la única diferencia de que se encuentran desplazadas con respecto de ésta. La figura 1.3 muestra un ejemplo.

Ahora, estudiemos a los estados coherentes representados en la base de Fock. En este caso, utilizamos al operador desplazamiento en términos de los operadores de ascenso y descenso (ver (1.4.1)). Al aplicar nuevamente el resultado (A.2.2) vemos que

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}.$$

Notar que $e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = |0\rangle$ pues en la serie de la exponencial, todas las potencias del operador de aniquilación anulan al vacío salvo por la potencia de orden cero, es decir la identidad, que lo deja intacto. De esta

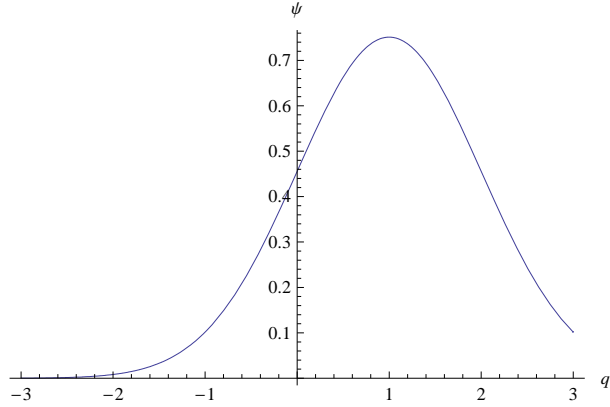


Figura 1.3: Ejemplo de la función de onda de un estado coherente con $q_0 = 1, p_0 = 0$.

manera, al recordar (1.3.12), se sigue de inmediato que

$$\begin{aligned}
 \hat{D}(\alpha)|0\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle \\
 &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\
 &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \hat{a}^{\dagger n}}{n!} |0\rangle,
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\boxed{\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.} \quad (1.4.6)$$

De esta manera, vemos que un estado coherente sigue la estadística de una distribución del tipo Poisson para el número de fotones, es decir,

$$\boxed{p_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}$$

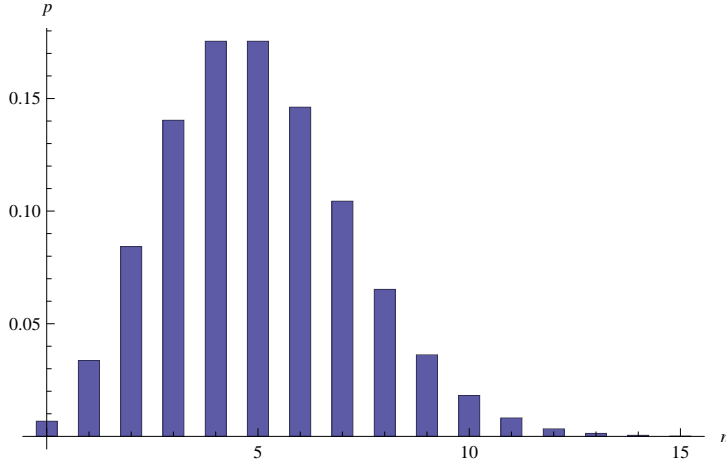


Figura 1.4: Ejemplo de la distribución del número de fotones para un estado coherente con $\alpha = 5$.

1.4.2. No ortogonalidad y sobre-completez

Ahora, calculemos el traslape entre estados coherentes. A partir de la representación en la base de Fock resulta inmediato que

$$\begin{aligned} \langle \alpha' | \alpha \rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\alpha'|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha'^* \alpha)^n}{n!} \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\alpha'|^2}{2} + \alpha'^* \alpha}, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\boxed{|\langle \alpha' | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \alpha'|^2}}. \quad (1.4.7)$$

Por último, observemos que los estados coherentes forman un conjunto completo. Es decir,

$$\boxed{\iint_{\mathbb{R}^2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2 \alpha}{\pi} = 1}. \quad (1.4.8)$$

Los estados coherentes heredan la completéz a partir de la completéz de los estados de Fock. Para probarlo, basta con utilizar la representación

de los estados coherentes en términos de los estados de Fock, es decir, de la ecuación (1.4.6), y cambiando a coordenadas polares, resulta inmediato que

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle m|}{\pi \sqrt{n!m!}} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|\alpha|^2} \alpha^{*m} \alpha^n d^2\alpha \\
 &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle m|}{\pi \sqrt{n!m!}} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} r^{m+n} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\
 &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle m|}{\pi \sqrt{n!m!}} \int_0^{\infty} 2\pi \delta_{m,n} r e^{-r^2} r^{m+n} dr,
 \end{aligned}$$

de tal suerte que al sustituir m por n y realizar el cambio de variable $u = r^2$ vemos que

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^{\infty} 2r e^{-r^2} r^{2n} dr \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^n du \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \Gamma(n+1) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

tal y como se afirmó.

En la referencia [32] se pueden encontrar más propiedades de los estados coherentes así como generalizaciones de estos objetos a casos más complicados que el del campo electromagnético o el atómico que posteriormente analizaremos.

1.5. Estados comprimidos

Hemos hablado de los estados de Fock y de los estados coherentes. Ahora, introducimos los estados comprimidos y estudiamos varias de sus propiedades [23].

1.5.1. Estados de mínima incertidumbre

Ya hemos visto cómo las amplitudes en las cuadraturas de los estados coherentes varían de acuerdo a ciertas distribuciones de probabilidad. Más aún, como los estados coherentes son simplemente estados de vacío desplazados, esto los caracteriza como estados que tienen tanta incertidumbre estadística en sus cuadraturas como el vacío. Surge entonces la pregunta, ¿es éste el límite cuántico óptimo?, o bien, ¿cuáles son los estados de mínima incertidumbre? Para responder a esta pregunta, consideremos la amplitud compleja promedio α de los estados candidatos $|\psi\rangle$. De esta manera,

$$\langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle = \alpha = \frac{q_0 + ip_0}{\sqrt{2}}.$$

Apliquemos el operador desplazamiento a lo anterior para remover la amplitud compleja α y formar un nuevo estado $|\varphi\rangle$, esto es,

$$|\varphi\rangle = \hat{D}(-\alpha)|\psi\rangle.$$

Observemos que el estado φ contiene el mismo ruido en las cuadraturas que el estado ψ . En símbolos, esto quiere decir que

$$\Delta^2 q = \langle \psi | (\hat{q} - q_0)^2 | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{q}^2 | \varphi \rangle,$$

y que,

$$\Delta^2 p = \langle \psi | (\hat{p} - p_0)^2 | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{p}^2 | \varphi \rangle.$$

Definimos pues, para la función de onda $\varphi(q)$ en el espacio de posiciones del estado $|\varphi\rangle$ a la cantidad

$$\delta := \left| \frac{q}{2\Delta^2 q} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right|^2.$$

Notemos que por la forma en que la hemos definido, $\delta \geq 0$. Por otra parte, al desarrollar,

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{4} \left(\frac{q}{\Delta^2 q} \right)^2 \varphi^* \varphi + \frac{q}{2\Delta^2 q} \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial q} + \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) + \frac{\partial \varphi^*}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{q}{\Delta^2 q} \right)^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{q}{\Delta^2 q} \varphi^* \varphi \right) - \frac{\varphi^* \varphi}{2\Delta^2 q} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ &= \frac{1}{4(\Delta^2 q)^2} (q^2 - 2\Delta^2 q) \varphi^* \varphi + \frac{\partial \varphi^*}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{q}{\Delta^2 q} \varphi^* \varphi \right).\end{aligned}$$

Si integramos la última línea y recordamos que $\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial q}$, entonces al usar que $\delta \geq 0$, obtenemos que

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \, dq = -\frac{1}{4\Delta^2 q} + \Delta^2 p$$

o bien, para el caso de Δp y Δq ,

$$\boxed{\Delta q \Delta p \geq \frac{1}{2}}. \quad (1.5.1)$$

Con igualdad si y sólo si $\delta = 0$, o bien si y sólo si

$$\frac{q}{2\Delta^2 q} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0.$$

La solución normalizada a esta ecuación diferencial es

$$\varphi(q) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\Delta^2 q}} e^{-\frac{q^2}{2\Delta^2 q}}.$$

Por lo tanto, vemos que además del desplazamiento, los estados de mínima incertidumbre tienen funciones de onda Gaussianas. ¡Justo como los estados coherentes! Sin embargo, a diferencia de los estados coherentes, la varianza $\Delta^2 q$ ya no necesariamente tiene que valer exactamente $\frac{1}{2}$. En otros términos, esto quiere decir que no se requiere que las dos

varianzas $\Delta^2 p$ y $\Delta^2 q$ sean iguales entre sí para minimizar la relación de incertidumbre en (1.5.1). Así, la incertidumbre estadística de la primera cuadratura puede ser *comprimada* por debajo del límite $\frac{1}{2}$ del vacío, con el costo de que en la segunda cuadratura p la incertidumbre aumente y viceversa.

Introducimos ahora el **parámetro de compresión**, el número real ζ . Esto es,

$$\Delta^2 q = \frac{1}{2} e^{-2\zeta}, \quad (1.5.2a)$$

$$\Delta^2 p = \frac{1}{2} e^{2\zeta}. \quad (1.5.2b)$$

Evidentemente, con estas definiciones el producto $\Delta q \Delta p = \frac{1}{2}$. Surge ahora la pregunta: ¿cómo redistribuir las fluctuaciones cuánticas del estado de vacío? En términos matemáticos, lo que hacemos es reescalar la función de onda para el vacío

$$\varphi(q) = e^{\frac{\zeta}{2}} \psi_0(e^\zeta q). \quad (1.5.3)$$

El factor $e^{\frac{\zeta}{2}}$ sirve para mantener la normalización de la función de onda. La función de onda en el espacio de momentos es simplemente la transformada de Fourier de la función de onda en el espacio de posiciones, es decir,

$$\tilde{\varphi}(p) = e^{-\frac{\zeta}{2}} \tilde{\psi}_0(e^{-\zeta} p). \quad (1.5.4)$$

La fórmula anterior implica que mientras que la función de onda en el espacio de posiciones se encuentra comprimada, la del espacio de momentos se encuentra estirada y viceversa. Derivemos ahora a (1.5.3) con respecto al parámetro de compresión para obtener que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(q \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} q \right) \varphi = \frac{1}{2} (i\hat{q}\hat{p} + i\hat{p}\hat{q}) \varphi.$$

En virtud de que $i\hat{q}\hat{p} + i\hat{p}\hat{q} = \hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}$, podemos expresar la solución de esta ecuación diferencial en términos del *operador de compresión*

$$\hat{\mathcal{S}} = e^{\frac{\zeta}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})},$$

para obtener el estado de vacío comprimido

$$|\varphi\rangle = \hat{S}(\zeta)|0\rangle.$$

De acuerdo a la prueba que se hizo con antelación, los estados de mínima incertidumbre son estados Gaussianos desplazados, es decir, tienen funciones de onda como las del estado de vacío sólo que desplazadas y reescaladas. En consecuencia, *todos los estados de mínima incertidumbre, son estados de vacío comprimidos y desplazados.*

$$|\psi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle, \quad (1.5.5)$$

y por tanto, tienen una función de onda dada por

$$\psi(q) = \frac{e^{\frac{\zeta}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}} \exp \left[-e^{2\zeta} \frac{(q - q_0)^2}{2} + ip_0q - \frac{ip_0q_0}{2} \right]. \quad (1.5.6)$$

En la figura 1.5 se pueden apreciar algunos ejemplos.

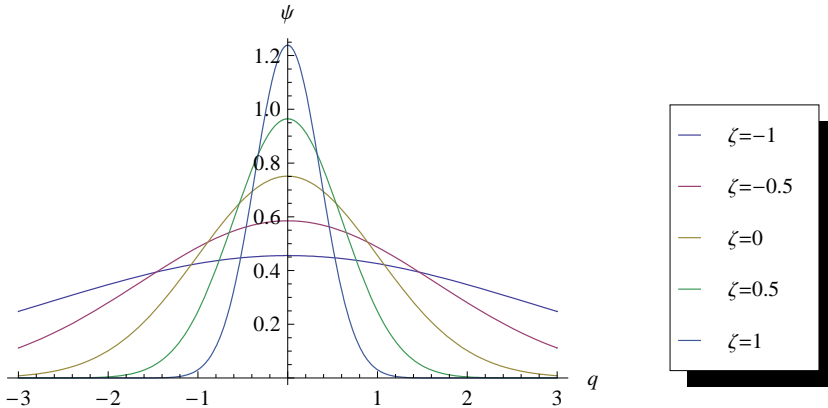


Figura 1.5: Ejemplos de las funciones de onda de algunos estados de vacío comprimidos y centrados en el origen.

Estudiemos ahora, la energía de un estado comprimido. Para tal fin, se vuelve necesario determinar cuál es la acción del operador compresión sobre las cuadraturas. Veamos el caso de \hat{q} . Si recordamos (A.1.1),

requerimos sustituir $x = \frac{\zeta}{2}$, $\hat{A} = \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2$, $\hat{B} = \hat{q}$ para conocer la acción del operador de compresión sobre \hat{q} . También, necesitamos conocer el conmutador $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, \hat{q}]$. Después de obtener los conmutadores requeridos, vamos a usarlos para obtener la acción del operador de compresión sobre las cuadraturas y con esto conocer la acción del operador de compresión sobre \hat{a} y \hat{a}^{\dagger} . Recordemos la definición de las cuadraturas en la ecuación (1.2.6) para obtener

$$\begin{aligned} [\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, \hat{q}] &= \left[\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger} + \hat{a}], \end{aligned}$$

o bien, al separar y simplificar,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ([\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}] - [\hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger}]) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-2\hat{a}^{\dagger} - 2\hat{a}) \\ &= -2\hat{q}. \end{aligned}$$

Mediante inducción es fácil ver que

$$\underbrace{[\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, [[[\dots [\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, \hat{q}]]]]]}_{k \text{ veces}} = (-2)^k \hat{q}.$$

Y por tanto, la generosa aplicación de (A.1.1) nos otorga que

$$\begin{aligned} \hat{S}^{\dagger}(\zeta) \hat{q} \hat{S}(\zeta) &= \hat{q} + \frac{\zeta}{2} (-2\hat{q}) + \dots + \frac{\zeta^k}{2^k k!} ((-2)^k \hat{q}) + \dots \\ &= \hat{q} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\zeta)^k}{k!} \right) \\ &= \hat{q} e^{-\zeta}. \end{aligned}$$

De forma completamente análoga se deduce que

$$\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{p}\hat{S}(\zeta) = \hat{p}e^\zeta.$$

Por lo tanto de las relaciones (1.2.6) y (1.2.7), resulta claro que

$$\begin{aligned} \hat{a} \cosh(\zeta) - \hat{a}^\dagger \sinh(\zeta) &= \hat{a} \left(\frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{2} \right) - \hat{a}^\dagger \left(\frac{e^\zeta - e^{-\zeta}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{-\zeta}}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - \frac{e^\zeta}{2} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}e^{-\zeta + i\hat{p}e^\zeta}) \\ &= \hat{S}^\dagger(\zeta) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q} + i\hat{p}) \right) \hat{S}(\zeta) \\ &= \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta). \end{aligned}$$

De esto, vemos que

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\zeta) &= (\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta))^\dagger \\ &= (\hat{a} \cosh(\zeta) - \hat{a}^\dagger \sinh(\zeta))^\dagger \\ &= -\hat{a} \sinh(\zeta) + \hat{a}^\dagger \cosh(\zeta). \end{aligned}$$

Ahora, al recordar la expresión (1.2.12) y con lo recién probado, vemos que para la energía promedio de un estado de comprimido de mínima incertidumbre (ver (1.5.5)) podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &= \langle 0 | \hat{S}^\dagger \hat{D}^\dagger \hat{H} \hat{D} \hat{S} | 0 \rangle \\ &= \left\langle 0 \left| \hat{S}^\dagger \hat{D}^\dagger \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hat{D} \hat{S} \right| 0 \right\rangle \\ &= \langle 0 | \hat{S}^\dagger (\hat{D}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{D} \hat{D}^\dagger \hat{a} \hat{D}) \hat{S} | 0 \rangle + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si usamos la ecuación (1.4.2), entonces,

$$\begin{aligned}
&= \langle 0 | \hat{S}^\dagger (\hat{a}^\dagger + \alpha^*) (\hat{a} + \alpha) \hat{S} | 0 \rangle + \frac{1}{2} \\
&= \langle 0 | \hat{S}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a} + |\alpha|^2) \hat{S} | 0 \rangle + \frac{1}{2} \\
&= \langle 0 | \hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S} \hat{S}^\dagger \hat{a} \hat{S} + \alpha \hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S} + \alpha^* \hat{S}^\dagger \hat{a} \hat{S} | 0 \rangle + |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \\
&= \langle 0 | (-\hat{a} \sinh(\zeta) + \hat{a}^\dagger \cosh(\zeta)) (\hat{a} \cosh(\zeta) - \hat{a}^\dagger \sinh(\zeta)) | 0 \rangle \\
&\quad + |\alpha|^2 + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Al recordar la ortogonalidad de los estados $|n\rangle$ y usando la acción de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger sobre estos estados, concluimos que en la ecuación anterior todos los términos cuadráticos en \hat{a} o en \hat{a}^\dagger o bien que involucren a $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ serán cero. Por lo tanto lo anterior se vuelve

$$\begin{aligned}
&= \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger \sinh^2(\zeta) | 0 \rangle + |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \\
&= \sinh^2(\zeta) + |\alpha|^2 + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, calculemos la estadística de fotones para un estado comprimido. Es decir, evaluemos el producto interno

$$p_n = \left| \langle n | \hat{S} | 0 \rangle \right|^2.$$

Expresemos el producto interno en la representación de posiciones, es decir,

$$\langle n | \hat{S} | 0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(q) e^{\frac{\zeta}{2}} \psi_0(e^\zeta q) dq.$$

Notemos que la integral se debe anular para número de fotones impares, pues el integrando es una función par si n es par y es una función impar si n es impar. Esto se debe a que las funciones de onda ψ_n son pares si n es par e impares si n es impar. Con ayuda de la referencia [16] evaluamos la integral y obtenemos que

$$p_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \\ \binom{n}{n/2} \frac{1}{\cosh(\zeta)} \left(\frac{\tanh(\zeta)}{2} \right)^n & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

La figura 1.6 muestra un ejemplo de lo anterior.

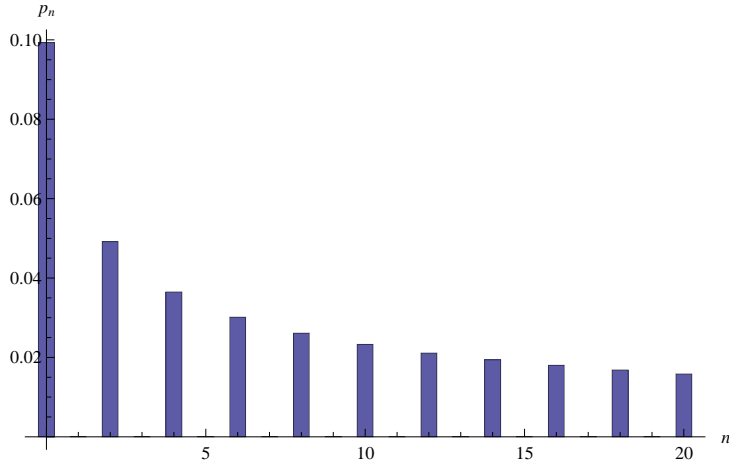


Figura 1.6: Ejemplo de la estadística de fotones para el estado de vacío comprimido con $\zeta = 3$.

Pseudodistribuciones de probabilidad para el campo electromagnético

SABEMOS POR EL principio de incertidumbre de Heisenberg (1.5.1) que no es posible medir de manera simultánea y precisa posición y momento. Por tanto, *a priori*, podría resultar absurdo tratar de construir una función que *imitase* este comportamiento. No resulta ser así *a posteriori*. Es decir, lo que se busca es expresar valores esperados cuánticos en términos de funciones de distribución sobre el espacio fase, pues así convertimos la expresión cuántica

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(q) \hat{A} \left(q, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi(q) dq$$

en una expresión estadística

$$\langle A \rangle = \int a(q, p) f(q, p) dq dp,$$

en donde $f(q, p)$ es la función de distribución y $a(q, p)$ es una función que representa al operador \hat{A} en el espacio fase.

2.1. Wigner

El primero en introducir funciones de distribución en el espacio fase fue Wigner en 1932. Él utilizó una función que hoy conocemos como **función de distribución de Wigner** y que más abajo definiremos a partir de sus propiedades. De hecho, con sólo un postulado es suficiente para definir a la función de Wigner $W(q, p)$ [6, 23]. Supongamos por un momento que la distribución $W(q, p)$ se comportase como una distribución de probabilidad conjunta. Esto querría decir que a partir de ella podemos recuperar las distribuciones marginales tanto para q como para p . Más precisamente, $\int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp$ ó $\int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq$ deben de otorgarnos las distribuciones de probabilidad de posición y momento respectivamente. De manera adicional, si desplazamos por una fase θ todas las amplitudes complejas deben de desplazarse en el espacio, lo cual quiere decir que tanto q como p deben de rotar en el espacio fase, y por tanto, la distribución también debe de rotar. Postulamos pues, que la distribución de probabilidad de posición $\text{pr}(q, \theta)$ después de un desplazamiento de fase θ , debe de ser

$$\begin{aligned} \text{pr}(q, \theta) &= \langle q | \hat{U}(\theta) \hat{\rho} \hat{U}^\dagger(\theta) | q \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(q \cos(\theta) - p \text{sen}(\theta), q \text{sen}(\theta) + p \cos(\theta)) dp, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

en donde $\hat{\rho}$ es el operador densidad.

Usando la fórmula (2.1.1) podemos relacionar a la pseudodistribución (o cuasidistribución) de probabilidad con los estados y la medición de observables. Veamos algunos casos especiales. Si $\theta = 0$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle,$$

Mientras que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ se obtiene que, al recordar las ecuaciones (1.2.9) y (1.2.10) que describen la acción del operador de corrimiento de fase sobre las cuadraturas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(-p, q) dp.$$

Las integrales como la presentada en la fórmula (2.1.1) se conocen como transformadas de Radon [16]. Su inversa se utiliza principalmente en la reconstrucción tomográfica de imágenes y para el caso de la mecánica cuántica permite una reconstrucción tomográfica de estados [23].

¿Por qué es suficiente con usar el postulado (2.1.1)? Para entenderlo requerimos introducir el concepto de **función característica**. La función característica es simplemente la transformada de Fourier de la función de una distribución, esto es, para el caso de la función W de Wigner, lo siguiente

$$\tilde{W}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} W(q, p) e^{-iuq - ivp} dq dp. \quad (2.1.2)$$

Usamos también la transformada de Fourier de la distribución de probabilidad en el espacio de posiciones

$$\tilde{\text{pr}}(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{pr}(q, \theta) e^{-i\xi q} dq. \quad (2.1.3)$$

Al usar (2.1.1), resulta claro que

$$\tilde{\text{pr}}(\xi, \theta) = \iint_{\mathbb{R}^2} W(q', p') e^{-i\xi q} dq dp, \quad (2.1.4)$$

en donde hemos hecho las abreviaturas $q' = q \cos(\theta) - p \sin(\theta)$, $p' = q \sin(\theta) + p \cos(\theta)$. Por lo tanto, al invertir esta transformación, vemos que $q = q' \cos(\theta) + p' \sin(\theta)$, $p = -q' \sin(\theta) + p' \cos(\theta)$. Claramente el Jacobiano de dicha transformación (y de su inversa) es igual a 1, y por tanto al realizar el cambio de variables de integración $(q, p) \rightarrow (q', p')$, la integral en (2.1.4) se vuelve

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} W(q', p') e^{-i\xi(q' \cos(\theta) + p' \sin(\theta))} dq' dp'.$$

Si usamos la definición de la función característica (2.1.2), entonces resulta claro que

$$\tilde{\text{pr}}(\xi, \theta) = \tilde{W}(\xi \cos(\theta), \xi \sin(\theta)).$$

es decir, la transformada de Fourier de la distribución de probabilidades en el espacio de posiciones es simplemente la función característica en coordenadas polares!

Hasta el momento todavía no hemos usado la totalidad del poderío del postulado (2.1.1) y ya hemos extraído algunas consecuencias interesantes. Dejemos que la naturaleza cuántica (es decir el operador densidad) entre en juego. Así, de (2.1.3), vemos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}r(\xi, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{U}(\theta) \hat{\rho} \hat{U}^\dagger(\theta) | q \rangle e^{-i\xi q} dq \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{U}(\theta) \hat{\rho} \hat{U}^\dagger(\theta) e^{-i\xi \hat{q}} | q \rangle dq \\
 &= \text{tr} \{ \hat{U}(\theta) \hat{\rho} \hat{U}^\dagger(\theta) e^{-i\xi \hat{q}} \} \\
 &= \text{tr} \{ \hat{\rho} \hat{U}(\theta) e^{-i\xi \hat{q}} \hat{U}^\dagger(\theta) \}.
 \end{aligned}$$

Mediante la fórmula (1.2.9) recordamos la acción del operador de corrimiento de fase sobre \hat{q} . De tal suerte que podemos escribir

$$\hat{U}^\dagger(\theta) e^{-i\xi \hat{q}} \hat{U}(\theta) = e^{-i\xi \cos(\theta) + \hat{p} \sin(\theta)}. \quad (2.1.5)$$

Reconocemos en la expresión (2.1.5) al operador de Weyl $e^{-iu\hat{q}-iv\hat{p}}$ en coordenadas polares. Como vimos, la transformada de Fourier de la densidad de probabilidad, $\tilde{p}r(\xi, \theta)$, nos da la función característica en coordenadas polares. En consecuencia, resulta inmediato que

$$\tilde{W}(u, v) = \text{tr}(\hat{\rho} e^{-iu\hat{q}-iv\hat{p}}). \quad (2.1.6)$$

Lo que ahora hacemos es utilizar el lema de Campbell-Baker-Hausdorff (A.2.2) para reexpresar el operador de Weyl

$$e^{-iu\hat{q}-iv\hat{p}} = e^{-i\frac{uv}{2}} e^{-iu\hat{q}} e^{-iv\hat{p}}. \quad (2.1.7)$$

Es bien sabido que los eigenestados de los operadores de posición y momento se encuentran relacionados mediante una transformada de

Fourier [8], es decir,

$$\boxed{|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqp} |p\rangle dp} \quad (2.1.8a)$$

$$\boxed{|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqp} |q\rangle dq.} \quad (2.1.8b)$$

Por lo tanto, el operador $\exp(-iv\hat{p})$ solamente desplaza a los eigenestados $|q\rangle$ de posición por la cantidad v para producir los estados $|q+v\rangle$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \tilde{W}(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{\rho} e^{-iu\hat{q} - iv\hat{p}} | q \rangle dq \\ &= e^{-i\frac{uv}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{\rho} e^{-iuq} | q+v \rangle dq. \end{aligned}$$

Si en la expresión anterior reemplazamos q por $x - \frac{v}{2}$ obtenemos

$$\tilde{W}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \left\langle x - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| x + \frac{v}{2} \right\rangle dx. \quad (2.1.9)$$

Para obtener la forma explícita de la distribución de cuasiprobabilidad $W(u, v)$, simplemente aplicamos la definición (2.1.2) e invertimos la transformada de Fourier. En virtud de la ecuación (2.1.9) esto quiere decir que

$$\begin{aligned} W(q, p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(u, v) e^{iuq+ivp} du dv \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q' - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| q' + \frac{v}{2} \right\rangle \\ &\quad \times e^{-iuq'+iuq+ivp} dq' dudv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q' - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| q' + \frac{v}{2} \right\rangle e^{ivp} \delta(q' - q) dv dq'. \end{aligned}$$

Al efectuar la integral sobre q' y reemplazar v por x , obtenemos finalmente la legendaria fórmula de Wigner,

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx. \quad (2.1.10)$$

2.1.1. Propiedades básicas de la distribución de Wigner

Estudiemos ahora algunas de las propiedades más fundamentales de la distribución de Wigner. Si el lector desea consultar más propiedades de las que aquí se enlistan se le recomienda la referencia [30].

Notamos primero que la función de Wigner es real para operadores Hermitianos $\hat{\rho}$. Es decir,

$$W^*(q, p) = W(q, p). \quad (2.1.11)$$

Esto se verifica fácilmente de la ecuación (2.1.10) al tomar el complejo conjugado y reemplazar x por $-x$. Asimismo, la función de Wigner se encuentra normalizada, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq dp = 1, \quad (2.1.12)$$

pues el operador densidad se encuentra normalizado de manera tal que $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$.

Una propiedad notable de la distribución de Wigner es la llamada *fórmula de traslape* para un par de operadores \hat{F}_1 y \hat{F}_2 con funciones de Wigner W_1 y W_2 respectivamente. Para obtener la función de Wigner de un operador arbitrario simplemente reemplazamos el operador densidad en (2.1.10) por el operador en cuestión. Por lo tanto, tenemos lo siguiente.

$$\text{tr}(\hat{F}_1 \hat{F}_2) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(q, p) W_2(q, p) dq dp. \quad (2.1.13)$$

Probar (2.1.13) es relativamente sencillo. Para ello, simplemente debemos de usar la ecuación (2.1.10) para desarrollar el lado izquierdo de (2.1.13). Esto es,

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(q, p) W_2(q, p) dq dp \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x_1+x_2)} \left\langle q - \frac{x_1}{2} \left| \hat{F}_1 \right| q + \frac{x_1}{2} \right\rangle \\
&\times \left\langle q - \frac{x_2}{2} \left| \hat{F}_2 \right| q + \frac{x_2}{2} \right\rangle dx_1 dx_2 dq dp,
\end{aligned}$$

Si integramos sobre p y recordamos que la integral $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dt = \delta(x)$, entonces resulta inmediato que al integrar sobre x_1 y reemplazar x_2 por $-x_1$ y luego cambiar x_1 por x , obtenemos que

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{F}_1 \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle \left\langle q + \frac{x}{2} \left| \hat{F}_2 \right| q - \frac{x}{2} \right\rangle dq dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q' | \hat{F}_1 | q'' \rangle \langle q'' | \hat{F}_2 | q' \rangle dq' dq'' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q' | \hat{F}_1 \hat{F}_2 | q' \rangle dq' \\
&= \text{tr}(\hat{F}_1 \hat{F}_2).
\end{aligned}$$

Lo notable de la fórmula de traslape (2.1.13) es que permite calcular valores esperados con facilidad. Observemos que de la completez de los estados de Fock

$$\langle n | \hat{F} | n \rangle = \sum_n \langle n | n \rangle \langle n | \hat{F} | n \rangle = \sum_n \langle n | \hat{\rho} \hat{F} | n \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{F}).$$

Así pues,

$$\text{tr}(\hat{\rho} \hat{F}) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) W_F(q, p) dq dp. \quad (2.1.14)$$

¡Justo como se mencionó en la introducción de esta sección! Más aún, otra consecuencia simple de la fórmula de traslape es que

$$|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(q, p) W_2(q, p) dq dp,$$

para la transición entre estados puros $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$. Sin embargo si dichos estados son ortogonales esta probabilidad se anula, es decir, $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(q, p) W_2(q, p) dq dp = 0$. El traslape entre dos funciones de Wigner estrictamente positivas no puede ser cero, por tanto, esto quiere decir que la función de Wigner puede tener regiones de negatividad. Aunque no lo mostraremos aquí, se puede usar la fórmula de traslape para relacionar a la función de Wigner con la pureza y la entropía de von-Neumann [23]. Por el momento, usaremos la fórmula de traslape para probar dos últimas propiedades de la función de Wigner. Una es la representación de los elementos de matriz del operador densidad en una base dada. Para ello, simplemente notamos que

$$\langle a' | \hat{\rho} | a \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} |a\rangle \langle a'|) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) W_{a'a}(q, p) dq dp, \quad (2.1.15)$$

en donde $W_{a'a}(q, p)$ denota la representación de Wigner del proyector $|a\rangle \langle a'|$ obtenida al reemplazar al operador $\hat{\rho}$ en (2.1.10) por el proyector.

Finalmente, probaremos que la norma de la función de Wigner se encuentra acotada. Es decir,

$$\boxed{|W(q, p)| \leq \frac{1}{\pi}}. \quad (2.1.16)$$

La demostración es inmediata. Primero, consideramos un estado puro $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$ únicamente. Utilizamos la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz junto con la fórmula de Wigner (2.1.10) y obtenemos que

$$|W(q, p)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left\langle q - \frac{x}{2} \middle| \psi \right\rangle \right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left\langle q + \frac{x}{2} \middle| \psi \right\rangle \right|^2 dx = \frac{1}{\pi^2}.$$

2.1.2. Ejemplos de distribuciones de Wigner para diferentes estados

Con el propósito de ilustrar lo discutido con antelación, usemos la fórmula de Wigner (2.1.10) para calcular la expresión explícita de la distribución de Wigner para diferentes estados. Empecemos con el estado de vacío. Al recordar la forma de la función de onda en la representación de posiciones (1.3.10) vemos que

$$\begin{aligned}
 W(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho}_0 \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| 0 \right\rangle \left\langle 0 \left| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \right. \\
 &= \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} e^{-(q-\frac{x}{2})^2} e^{-(q+\frac{x}{2})^2} dx,
 \end{aligned}$$

en donde hemos usado que $\hat{\rho}_0 = |0\rangle\langle 0|$. Continuando con el desarrollo y simplificando términos,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{-q^2-p^2}}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx - \frac{x^2}{4} + p^2} dx \\
 &= \frac{e^{-q^2-p^2}}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}(x-2ip)^2} dx \\
 &= \frac{e^{-q^2-p^2}}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \sqrt{4\pi}.
 \end{aligned}$$

Para concluir que

$$\boxed{W_0(q, p) = \frac{e^{-q^2-p^2}}{\pi}}. \quad (2.1.17)$$

La figura 2.1 ilustra la forma que tiene esta función. Como se aprecia, es una campana Gaussiana centrada en el cero del espacio.

¿Cómo se ven las funciones de los estados comprimidos y los estados de vacío? Esto se puede responder recordando que los estados comprimidos son vacíos comprimidos y que los estados coherentes son estados

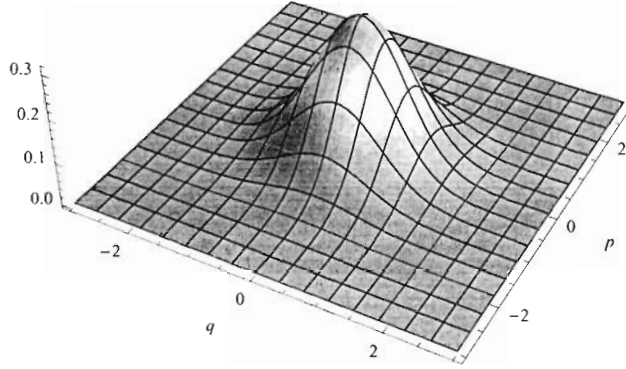


Figura 2.1: Ejemplo de la función de Wigner para el estado de vacío.

de vacío desplazados. Así, para el caso de estados comprimidos tenemos que

$$\begin{aligned} W_S(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{S} \hat{\rho}_0 \hat{S}^\dagger \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle e^{\zeta} \left(q - \frac{x}{2} \right) \left| \hat{\rho}_0 \right| e^{\zeta} \left(q + \frac{x}{2} \right) \right\rangle dx, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\boxed{W_s(q, p) = W_0(e^\zeta q, e^{-\zeta} p) = \frac{\exp(-e^{2\zeta} q^2 - e^{-2\zeta} p^2)}{\pi}} \quad (2.1.18)$$

Esta redistribución de la masa para la función de Wigner es lo que se esperaría con tal de preservar el área de la función. La figura 2.2 muestra un ejemplo de esto.

Para el caso de los estados coherentes tenemos que mediante un procedimiento completamente análogo al utilizado para los estados compri-

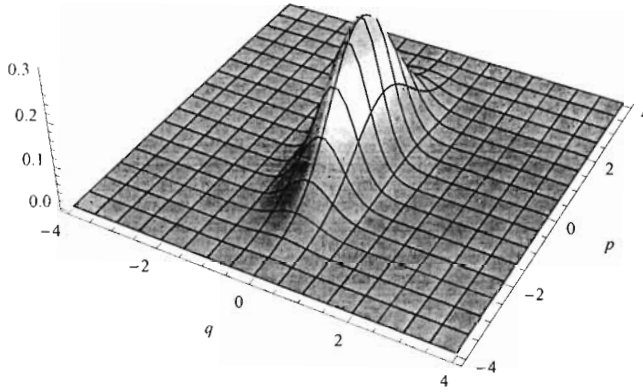


Figura 2.2: Ejemplo de la función de Wigner para un estado comprimido con $\zeta = 0.5$.

midos, es claro que

$$\begin{aligned} W_D(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{D} \hat{\rho}_0 \hat{D}^\dagger \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p_0)x} \left\langle \left(q - q_0 - \frac{x}{2} \right) \left| \hat{\rho}_0 \right| \left(q - q_0 + \frac{x}{2} \right) \right\rangle dx, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\boxed{W_D(q, p) = W_0(q - q_0, p - p_0) = \frac{e^{-(q-q_0)^2 - (p-p_0)^2}}{\pi}} \quad (2.1.19)$$

La figura 2.3 muestra un ejemplo de la función de Wigner para un estado coherente.

Podemos construir funciones de Wigner aún más interesantes si pensamos en el principio de superposición de la mecánica cuántica. Por ejemplo, consideremos a los llamados **estados de gato de Schrödinger**

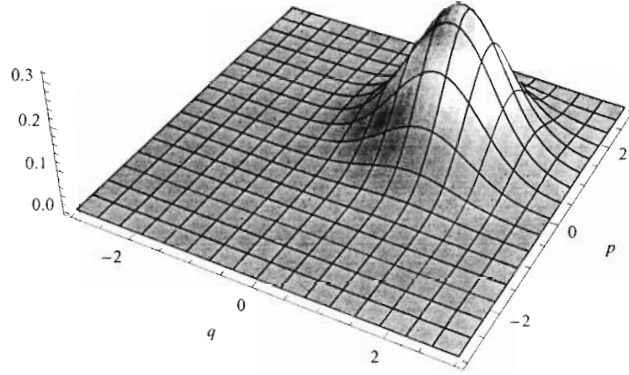


Figura 2.3: Ejemplo de la función de Wigner para un estado coherente con $p_0 = 1$ y $q_0 = 1$.

[12, 23]. Los estados de gato resultan de la superposición de dos estados coherentes de amplitudes opuestas. De esta forma, su función de onda sin normalizar sería simplemente la superposición de las funciones de onda de dos estados coherentes con amplitudes en posición opuestas: q_0 y $-q_0$ respectivamente.

$$\psi_G(q) \propto e^{-\frac{1}{2}(q-q_0)^2} + e^{-\frac{1}{2}(q+q_0)^2}.$$

Deducir el valor de la constante de normalización no es muy complicado ya que sabemos que dicha constante debe de cumplir que $N^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_G(q)^2 dq$ con tal de que la función se encuentre normalizada. Esto

es,

$$\begin{aligned}
 N^{-2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_G(q)^2 dq \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}(q-q_0)^2} + e^{-\frac{1}{2}(q+q_0)^2} \right)^2 dq \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(q-q_0)^2} + e^{-(q+q_0)^2} + 2e^{-\frac{1}{2}((q-q_0)^2+(q+q_0)^2)} dq,
 \end{aligned}$$

que al efectuar las dos primeras integrales y simplificar el argumento de la última exponencial se transforma en

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{\pi} + 2e^{-q_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2} dq \\
 &= 2\sqrt{\pi} \left(1 + e^{-q_0^2} \right),
 \end{aligned}$$

es decir,

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi} \left(1 + e^{-q_0^2} \right)}},$$

y en consecuencia,

$$\boxed{\psi_G(q) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi} \left(1 + e^{-q_0^2} \right)}} \left(e^{-\frac{1}{2}(q-q_0)^2} + e^{-\frac{1}{2}(q+q_0)^2} \right)}. \quad (2.1.20)$$

La ecuación (2.1.20) junto con la fórmula de Wigner nos permiten deducir la forma de la función de Wigner para un estado de gato de Schrödinger. Así,

$$\begin{aligned}
 W_G(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \\
 &= \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}} \left(1 + e^{-q_0^2} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left(e^{-\frac{1}{2}(q-q_0-\frac{x}{2})^2} + e^{-\frac{1}{2}(q+q_0-\frac{x}{2})^2} \right) \\
 &\quad \times \left(e^{-\frac{1}{2}(q-q_0+\frac{x}{2})^2} + e^{-\frac{1}{2}(q+q_0+\frac{x}{2})^2} \right) dx,
 \end{aligned}$$

simplificando, agrupando términos e integrando

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4 \left(1 + e^{-q_0^2}\right) \pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2 - 2qq_0 - \frac{1}{4}x(-4ip + 4q_0 + x)} \\
 &\times \left(e^{2qq_0} + e^{q_0x}\right) \left(1 + e^{q_0(2q+x)}\right) dx \\
 &= \frac{e^{-p^2 - 2ipq_0 - (q+q_0)^2} \left(e^{2ipq_0} + e^{q_0(2q+q_0)} + e^{q_0(4ip+2q+q_0)} + e^{2ipq_0+4qq_0}\right)}{2 \left(1 + e^{q_0^2}\right) \pi},
 \end{aligned}$$

y al usar la identidad de Euler, concluimos finalmente que

$$W_G(q, p) = \frac{e^{-p^2 - (q-q_0)^2} + e^{-p^2 - (q+q_0)^2} + 2e^{-p^2 - q^2} \cos(2pq_0)}{2 \left(1 + e^{-q_0^2}\right) \pi}. \quad (2.1.21)$$

Las figura 2.4 muestra un ejemplo de cómo varía la función de Wigner al cambiar el valor de q_0 .

En lo que sigue, estudiaremos otras distribuciones en el espacio fase y las usaremos para deducir más ejemplos de funciones de Wigner para otros estados.

2.2. Husimi-Kano

Se podría decir que la función de Wigner constituye un balance entre una distribución clásica para el espacio fase y la representación cuántica correcta. La distribución de Wigner genera las marginales adecuadas, obedece la fórmula de traslape (2.1.13) y nos proporciona una manera de calcular valores esperados muy cercana a la manera clásica (2.1.14), y sin embargo, la función de Wigner puede ser negativa. ¿Es posible definir una distribución de cuasiprobabilidad estrictamente no negativa? ¿Podemos definir otras pseudodistribuciones de utilidad? Afortunadamente la respuesta es afirmativa. Empezamos analizando el caso de la llamada distribución de **Husimi-Kano**, o **función Q** [12, 23].

Podemos *suavizar* a la función de Wigner al efectuar su convolución con una distribución Gaussiana del mismo ancho que el vacío, para así

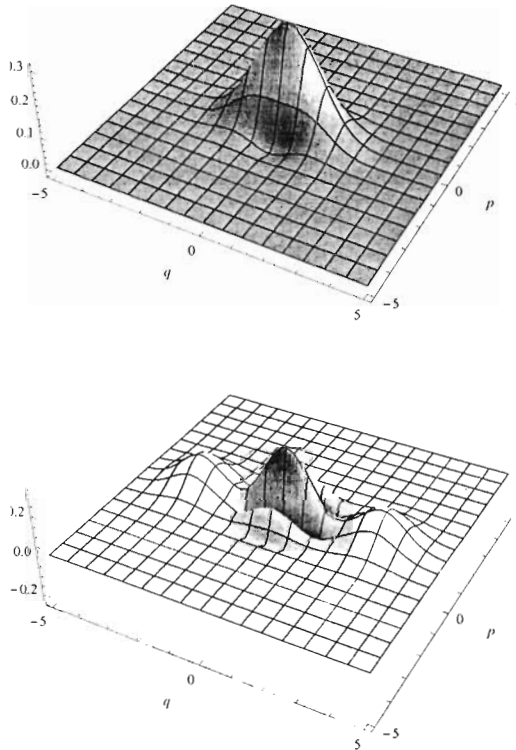


Figura 2.4: Ejemplos de la función de Wigner para un estado de gato de Schrödinger con $q_0 = 1$ (arriba) y $q_0 = 3$ (abajo). Con $q_0 = 1$ no se distinguen claramente las dos amplitudes coherentes, y más bien, pareciera tenerse un efecto de compresión. Sin embargo, al incrementar el valor de q_0 hasta 3 apreciamos claramente cómo aparecen dos amplitudes coherentes y una estructura de interferencia cuántica con una zona de rápida oscilación.

obtener la función Q .

$$Q(q, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q', p') e^{-(q-q')^2 - (p-p')^2} dq' dp' \quad (2.2.1)$$

Aún podemos simplificar esta relación si recordamos la fórmula de traslape de Wigner (2.1.13) y la fórmula de Wigner que corresponde a los estados coherentes (2.1.19) notamos que la función Q simplemente corresponde a la distribución de probabilidad de encontrar a los estados coherentes $|\alpha\rangle$ con amplitud $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$ en el estado $\hat{\rho}$, ya que

$$Q(q, p) = \frac{1}{2\pi} \text{tr} (\hat{\rho} |\alpha\rangle \langle \alpha|) \quad (2.2.2a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle. \quad (2.2.2b)$$

De esta manera, es claro que la función Q es no negativa y además se encuentra normalizada a 1, tal y como se puede verificar de manera directa de la relación de completéz de los estados coherentes (1.4.8).

De la definición de función característica vemos que al usar el teorema de la convolución para transformadas de Fourier, resulta inmediato que

$$\tilde{Q}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(q, p) e^{-iuq - ivp} dq dp \quad (2.2.3a)$$

$$= \tilde{W}(u, v) e^{-\frac{1}{4}(u^2 + v^2)}. \quad (2.2.3b)$$

De forma completamente análoga a la ecuación (2.1.6) tenemos que

$$\tilde{Q} = \text{tr} \left(\hat{\rho} e^{-\frac{1}{4}(u^2 + v^2)} e^{-iu\hat{q} - iv\hat{p}} \right),$$

o bien al introducir el parámetro complejo $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + iv)$, tenemos que

$$\tilde{Q} = \text{tr} \left(\hat{\rho} e^{-\frac{1}{4}|\beta|^2} e^{-i\hat{a}\beta^* - i\hat{a}^\dagger\beta} \right),$$

al recordar que $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})$. Al aplicar el lema de Campbell-Baker-Hausdorff (A.2.2) vemos que

$$\tilde{Q} = \text{tr} \left(\hat{\rho} e^{-i\hat{a}\beta^*} e^{-i\hat{a}^\dagger\beta} \right), \quad (2.2.4)$$

A partir del desarrollo en serie de lo anterior, y de la ecuación (2.2.3a), concluimos entonces que

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{\rho} \hat{a}^{\nu} \hat{a}^{\dagger \mu}) &= i^{\nu+\mu} \frac{\partial^{\nu}}{\partial \beta^{*\nu}} \frac{\partial^{\mu}}{\partial \beta^{\mu}} \tilde{Q} \Big|_{\beta=\beta^*=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(q, p) \alpha^{\nu} \alpha^{*\mu} dq dp, \end{aligned}$$

al usar la notación compleja $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$. Los valores esperados de la forma $\text{tr}(\hat{\rho} \hat{a}^{\nu} \hat{a}^{\dagger \mu})$ son llamados **de orden antinormal**.

2.3. Glauber-Sudarshan

Es posible obtener aún otra distribución en el espacio fase si en vez de utilizar valores esperados de orden antinormal usamos valores esperados **de orden normal** ¿Cuál es la correspondencia en el espacio fase para el orden normal? Si cambiamos el orden de las exponenciales en la expresión (2.2.4) definimos entonces una nueva función

$$\tilde{P} = \text{tr}(\hat{\rho} e^{-i\hat{a}^{\dagger} \beta} e^{-i\hat{a} \beta^*}), \quad (2.3.1)$$

bajo el entendido de que $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + iv)$. En consecuencia, al usar los mismos argumentos de la sección anterior, encontramos que la **función P o de Glauber-Sudarshan**

$$P(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(u, v) e^{iuq + ivp} du dv$$

corresponde al orden normal

$$\text{tr}(\hat{\rho} \hat{a}^{\dagger \mu} \hat{a}^{\nu}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(q, p) \alpha^{*\mu} \alpha^{\nu} dq dp,$$

con $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$.

Una propiedad notable de la función P es que diagonaliza al operador densidad en términos de los estados coherentes. Para ello, notamos que de la ecuación (2.3.1) y de (A.2.2) resulta claro que

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(u, v) &= \text{tr} \left(\hat{\rho} e^{-i\hat{a}^\dagger \beta} e^{-i\hat{a} \beta^*} \right) \\
 &= \text{tr} \left(\hat{\rho} e^{\frac{|\beta|^2}{2}} e^{-i\hat{a}^\dagger \beta} e^{-i\hat{a} \beta^*} \right) \\
 &= \text{tr} \left(\hat{\rho} e^{\frac{|\beta|^2}{2}} e^{-i\hat{a}^\dagger \beta - i\hat{a} \beta^*} \right) \\
 &= \text{tr} \left(\hat{\rho} e^{\frac{(u^2+v^2)}{4}} e^{-iu\hat{q} - iv\hat{p}} \right) \\
 &= e^{\frac{(u^2+v^2)}{4}} \tilde{W}(u, v).
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\tilde{W}(u, v) = e^{-\frac{(u^2+v^2)}{4}} \tilde{P}(u, v). \quad (2.3.2)$$

Utilizando el mismo razonamiento que en el caso de la función Q , sólo que a la inversa esto quiere decir que

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(q_0, p_0) e^{-(q-q_0)^2 - (p-p_0)^2} dq_0 dp_0.$$

Si recordamos la fórmula de Wigner (2.1.10) y la forma de la función de Wigner para los estados coherentes (2.1.19), vemos que de lo anterior resulta inmediato que al usar el teorema de Fubini y la linealidad del producto interior

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx = \\
 &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(q_0, p_0) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \alpha \right\rangle \langle \alpha \left| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \right) dq_0 dp_0 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(q_0, p_0) |\alpha\rangle \langle \alpha| dq_0 dp_0 \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx,
 \end{aligned}$$

y por tanto, los argumentos de las integrales con respecto a x deben de ser iguales entre sí¹, de donde se desprende el célebre *teorema de la equivalencia óptica*

$$\hat{\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(q_0, p_0) |\alpha\rangle \langle \alpha| dq_0 dp_0. \quad (2.3.3)$$

Procedemos ahora a estudiar algunos ejemplos adicionales de interés.

2.3.1. Más ejemplos de funciones de distribución

¿Cómo se ven las funciones Q ? ¿Qué tan suavizadas son con respecto a la función de Wigner? Empecemos usando la fórmula (2.2.2b) y la expresión (1.4.6), entonces, para un estado de Fock $|n\rangle$ tenemos

$$Q(q, p) = \frac{1}{2\pi} |\langle \alpha | n \rangle|^2 \quad (2.3.4a)$$

$$= \frac{1}{2\pi n!} e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n} \quad (2.3.4b)$$

$$= \frac{1}{2\pi n!} e^{-\frac{1}{2}(q^2+p^2)} \left(\frac{q^2+p^2}{2} \right)^n. \quad (2.3.4c)$$

En la figura 2.5 se pueden apreciar dos ejemplos de la función Q de Husimi para diferentes estados de Fock. Notar que si $n = 0$ la expresión anterior casi se reduce a la deducida para la función de Wigner, pues $Q(q, p)|_{n=0} = \frac{1}{2} W_0 \left(\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}} \right)$.

De la función Q para estados de Fock podemos deducir la forma de la función P para estos estados. Baste recordar la ecuaciones (2.2.3b) y (2.3.2) y usar el teorema de la convolución para transformaciones de

¹En realidad son iguales salvo en un conjunto de medida cero.

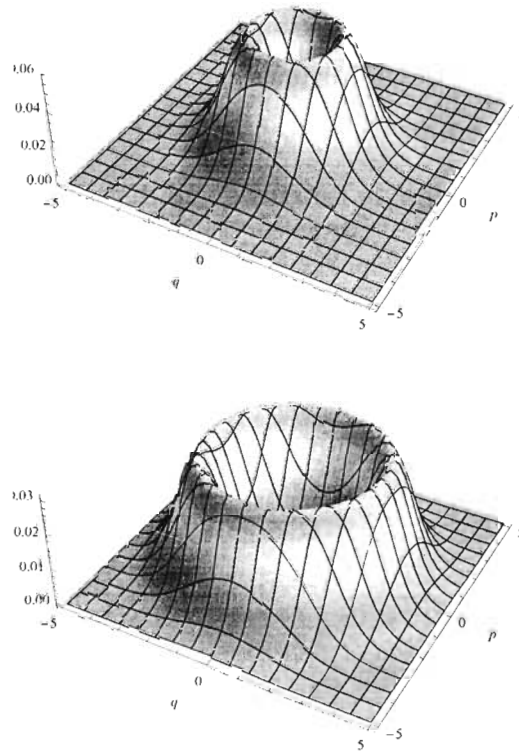


Figura 2.5: Ejemplos de la función Q de Husimi para un estado de Fock con $n = 1$ y con $n = 4$.

Fourier [39] para escribir

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(u, v) &= \tilde{Q}(u, v) e^{\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \\
 \implies P(q, p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}(u, v) e^{\frac{1}{2}(u^2+v^2)} e^{iuq+ivp} du dv \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(q', p') e^{-\frac{1}{2}((q-q')^2+(p-p')^2)} dq' dp' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi n!} e^{-\frac{1}{2}(q'^2+p'^2)} \left(\frac{q'^2+p'^2}{2} \right)^n e^{-\frac{1}{2}((q-q')^2+(p-p')^2)} dq' dp' \\
 &= \frac{1}{n!} e^{\left(\frac{q^2+p^2}{2}\right)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \right]^n \delta(q) \delta(p).
 \end{aligned}$$

En lo anterior, hemos evaluado la convolución usando las propiedades de las transformaciones de Fourier y recordando que la transformada de Fourier de un polinomio está en términos de derivadas distribucionales de la función delta de Dirac [39, 16]. Este es un buen ejemplo para mostrar cómo las funciones P resultan en objetos muy singulares (incluso más singulares que las funciones de Wigner).

Centremos ahora nuestra atención en un estado térmico. El operador densidad de un estado térmico está dado por

$$\hat{\rho} = (1 - e^{-\beta}) \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| e^{-n\beta}, \quad (2.3.5)$$

con $\beta = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$. Denotamos por k_B a la constante de Boltzmann y por T a la temperatura. Para entender por qué éste debe de ser el operador densidad de un estado térmico, podemos argumentar lo que sigue. En el equilibrio térmico, el operador densidad tiene que ser diagonal. Más aún, ya que los fotones obedecen la estadística de Bose-Einstein, su función de partición es $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta} = \frac{1}{1-e^{-\beta}}$. Así, al usar la definición (2.2.2a) y sustituir la relación (2.3.4b) para la función de Husimi de los

estados de Fock, resulta claro que

$$\begin{aligned}
 Q_T(q, p) &= \frac{e^{-|\alpha|^2} (1 - e^{-\beta})}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2 e^{-\beta})^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-\beta}) \exp(-|\alpha|^2 (1 - e^{-\beta})) \\
 &= \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-\beta}) \exp\left(-\frac{1}{2} (p^2 + q^2) (1 - e^{-\beta})\right).
 \end{aligned}$$

Como se puede ver, la función de distribución es una Gaussiana centrada en el origen del espacio fase. Para el caso límite en el que $\beta \rightarrow \infty$, observamos que esta función Q tiende a la función Q_0 de un estado de vacío, mientras que para el caso de temperatura finita, tenemos que es de un ancho(varianza) mayor. En la figura 2.6 podemos apreciar un ejemplo de cómo se ve la función de Husimi para un estado térmico con $\beta = 0.1$.

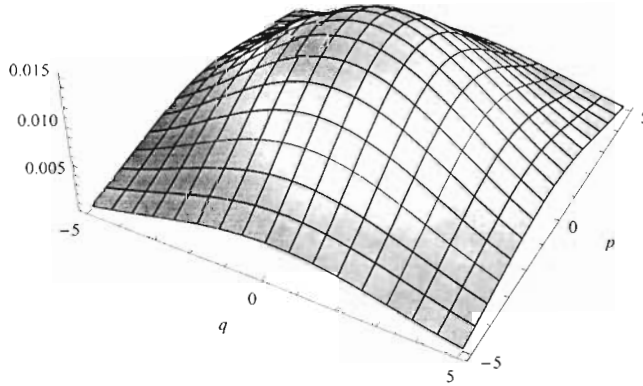


Figura 2.6: Ejemplo de la función de Husimi para un estado térmico con $\beta = 0.1$.

Cabe ahora preguntarnos ¿cuál es la función de Wigner para un estado térmico? la respuesta a esta pregunta se obtiene fácilmente mediante

la inversión de las funciones características (ver la ecuación (2.2.3b)) vía la transformada inversa de Fourier, para obtener finalmente que

$$W_T(q, p) = \frac{1}{\pi} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) \exp\left(-\left(q^2 + p^2\right) \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right)\right). \quad (2.3.6)$$

La función de Wigner de un estado térmico describe un comportamiento muy similar al de la función de Husimi. Ambas presentan el mismo comportamiento límite y sus gráficas son muy similares, tal y como lo muestra la figura 2.7.

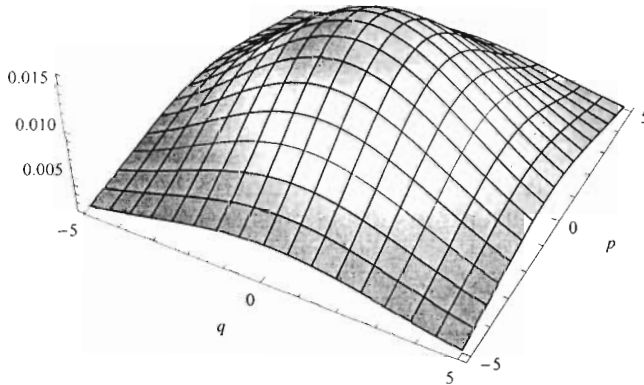


Figura 2.7: Ejemplo de la función de Wigner para un estado térmico con $\beta = 0.1$. Notar la similitud con la función de Husimi.

Nuevamente, vía la transformación inversa de Fourier, ahora aplicada a (2.3.2), obtenemos la distribución P de un estado térmico.

$$P_T(q, p) = \frac{1}{\pi} (e^\beta - 1) \exp\left(-\frac{1}{2} (p^2 + q^2) (e^\beta - 1)\right)$$

Como muestra la figura 2.8, para el valor de $\beta = 0.1$, la gráfica de la función de Glauber de un estado térmico es muy similar a sus análogos

de Wigner y Husimi. Sin embargo, en el límite $\beta \rightarrow \infty$ difiere notablemente, pues en el límite tiene el singular comportamiento de una delta de Dirac bidimensional.

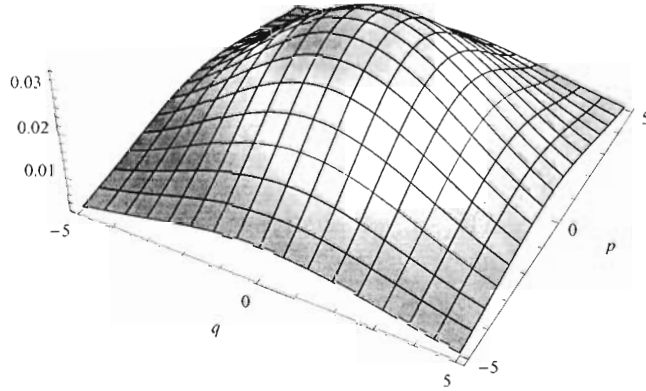


Figura 2.8: Ejemplo de la función de Glauber para un estado térmico con $\beta = 0.1$. Notar la similitud con las funciones de Wigner y de Husimi.

La ecuación, (2.3.5), nos permite deducir la forma que tienen las funciones de Wigner para los estados de número. Es decir, si le aplicamos la fórmula de Wigner resulta inmediato que

$$W_T(q, p) = (1 - e^{-\beta}) \sum_{n=0}^{\infty} W_n(q, p) e^{-n\beta}$$

esto es, al recordar (2.3.6)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) \exp\left(-\left(q^2 + p^2\right) \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \\ &= (1 - e^{-\beta}) \sum_{n=0}^{\infty} W_n(q, p) e^{-n\beta}, \end{aligned}$$

o al despejar,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} W_n(q, p) e^{-n\beta} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 - e^{-\beta}} \right) \exp\left(-\left(q^2 + p^2\right) \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right)\right), \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1 + e^{-\beta}} \right) \exp\left(-\left(q^2 + p^2\right) \frac{e^{\frac{\beta}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}}}{e^{\frac{\beta}{2}} (1 + e^{-\beta})}\right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1 + e^{-\beta}} \right) \exp\left(-\left(q^2 + p^2\right) \left(1 - \frac{2e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)} \left(\frac{1}{1 - (-e^{-\beta})} \right) \exp\left(-2 \frac{(q^2 + p^2) (-e^{-\beta})}{1 - (-e^{-\beta})}\right),
 \end{aligned}$$

para que al usar la función generadora de los polinomios de Laguerre [22], lo anterior se vuelva

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} W_n(q, p) e^{-n\beta} &= \frac{1}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(2q^2 + 2p^2) (-e^{-\beta})^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)} L_n(2q^2 + 2p^2) e^{-n\beta} \\
 \therefore W_n(q, p) &= \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)} L_n(2q^2 + 2p^2).
 \end{aligned}$$

La figura 2.9 nos muestra un ejemplo de la función de Wigner de los estados de número para diferentes valores de n .

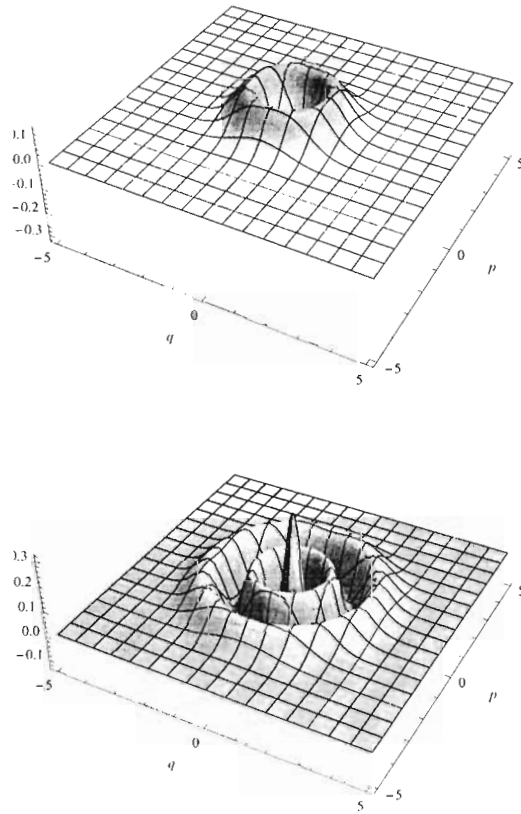


Figura 2.9: Ejemplos de la función de Wigner para un estado de Fock con $n = 1$ y con $n = 4$.

Representación del campo atómico (grupo de rotaciones)

LOS ÁTOMOS PUEDEN radiar y absorber luz. La interacción entre el campo electromagnético cuantizado y un átomo representa un problema fundamental en física. Sin embargo, los átomos son objetos muy complejos con niveles de energía difíciles de describir. Se vuelve entonces necesario encontrar una simplificación que permita realizar predicciones precisas pero a la vez que sea manejable desde un punto de vista teórico. Para nuestros propósitos, la aproximación de un átomo como un sistema cuántico de dos niveles resultará suficiente. Dicha simplificación reduce considerablemente las complicaciones del problema, y nos permite predecir ya ciertos fenómenos de interés. Más aún, deseamos describir la interacción de un número fijo de átomos de dos niveles con un campo electromagnético transversal. Esto se debe a que deseamos investigar propiedades más colectivas que individuales de la interacción átomo-luz. La simplificación realizada al pensar en el sistema de dos niveles es que esto es matemáticamente equivalente a un sistema con espín- $\frac{1}{2}$ en un campo magnético. Esto ya es relevante pues nos permite usar el formalismo de los operadores de momento angular (sus relaciones de conmutación) para resolver el problema.

Como se verá más adelante, el proceso a seguir para el caso del

campo atómico es análogo al del campo electromagnético. Primero, definiremos el equivalente de los estados de Fock, los llamados estados de Dicke. Luego definiremos el equivalente a los estados coherentes o de Glauber, que en el caso atómico son llamados coherentes atómicos o de Bloch. Después definiremos los estados comprimidos de espín (en analogía a los estados comprimidos del campo electromagnético) para finalizar con la representación en el espacio fase del sistema que estamos estudiando.

3.1. Estados de Dicke

Para un sistema atómico de dos niveles, denotaremos a las funciones de onda del estado base y del estado excitado del n -ésimo átomo por $|\psi_2^n\rangle$ y $|\psi_1^n\rangle$ respectivamente. Cualquier operador que actúe en este sistema puede ser expandido en términos de las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_x^n, \hat{\sigma}_y^n, \hat{\sigma}_z^n$ y la matriz identidad $\mathbb{1}_2^n$ asociadas a cada átomo. Recordemos que la forma de estas matrices es [8]

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.1a)$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.1b)$$

Si, por comodidad, denotamos por $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_3$, entonces vemos que las matrices de Pauli satisfacen las siguientes propiedades [8]

$$\hat{\sigma}_i^2 = \mathbb{1} \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.1.2a)$$

$$\det(\hat{\sigma}_i) = -1 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.1.2b)$$

$$\text{tr}(\hat{\sigma}_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.1.2c)$$

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k, \quad \forall i, j \quad (3.1.2d)$$

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k, \quad \forall i, j \quad (3.1.2e)$$

Ahora, definimos los operadores de ascenso y descenso del n -ésimo átomo de la colección de N átomos mediante

$$\hat{\sigma}_{\pm}^n = \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}_x^n \pm i\hat{\sigma}_y^n \right). \quad (3.1.3)$$

De las relaciones (3.1.2), las relaciones de conmutación de estos operadores son inmediatas

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_{\pm}] = \pm 2\hat{\sigma}_{\pm} \quad (3.1.4a)$$

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z. \quad (3.1.4b)$$

Los estados $|\psi_1^n\rangle$ y $|\psi_2^n\rangle$ son eigenestados de $\hat{\sigma}_z^n$.

La elección de la base para el sistema de dos niveles no es única. Es decir, se puede escoger cualquier otra combinación lineal de la forma

$$|\psi_i'^n\rangle = \sum_{j=1}^2 U_{i,j} |\psi_j^n\rangle \quad (i = 1, 2)$$

que mantenga las propiedades de ortogonalidad y normalización. Las transformaciones más generales $U_{i,j}$ con estas propiedades son la colección de matrices unitarias de 2×2 que forman el grupo $U(2)$. El subgrupo de transformaciones con determinante 1 forman el grupo $SU(2)$ tan familiar en el análisis de momento angular.

En lo que se refiere al arreglo de N átomos, el espacio de Hilbert correspondiente es generado por el conjunto de 2^N estados producto

$$|\phi_{i_1 i_2 \dots i_n}\rangle = \prod_{n=1}^N |\psi_{i_n}^N\rangle \quad (i_n = 1, 2).$$

Los operadores colectivos de momento angular quedan definidos mediante las siguientes relaciones

$$\hat{J}_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_{\mu}^n \quad (\mu = x, y, z) \quad (3.1.5a)$$

$$\hat{J}_{\pm} = \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_{\pm}^n \quad (3.1.5b)$$

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 \quad (3.1.5c)$$

A partir de las ecuaciones (3.1.5) y (3.1.2), resulta inmediato observar que se satisfacen las relaciones de conmutación siguientes

$$\boxed{[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z} \quad (3.1.6a)$$

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z \quad (3.1.6b)$$

$$\boxed{[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm} \quad (3.1.6c)$$

además de las ecuaciones típicas de los operadores de momento angular

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y \quad (3.1.7a)$$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{J}_+\hat{J}_- - \hat{J}_-\hat{J}_+). \quad (3.1.7b)$$

Todos los elementos anteriores, nos permiten utilizar el formalismo de los operadores de momento angular para nuestra conveniencia en los cálculos posteriores. Así, los **estados de Dicke** se definen como los eigenestados de los operadores \hat{J}^2 y \hat{J}_z y son simplemente los estados usuales $|J, M\rangle$ de momento angular (ver [8] para detalles de momento angular). Se deduce, a partir de las relaciones de conmutación de momento angular, que estos estados cumplen las ecuaciones

$$\boxed{\hat{J}_z |J, M\rangle = M |J, M\rangle} \quad (3.1.8a)$$

$$\boxed{\hat{J}^2 |J, M\rangle = J(J+1) |J, M\rangle.} \quad (3.1.8b)$$

Además de ser ortonormales y de formar una base.

De forma similar a como se hizo en el caso electromagnético se puede probar que tanto $\hat{J}_+ |J, M\rangle$ como $\hat{J}_- |J, M\rangle$ son eigenestados del operador \hat{J}_z . A través de la identificación del eigenvalor correspondiente, vemos que estos operadores incrementan o disminuyen, respectivamente, en una unidad la proyección de momento angular. Por tanto, de las condiciones de normalización se termina por deducir que su efecto sobre los $|J, M\rangle$ es

$$\hat{J}_\pm |J, M\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} |J, M \pm 1\rangle. \quad (3.1.9)$$

En analogía con el campo electromagnético, podemos definir un estado de “mínimo peso” o de “vacío” $|J, -J\rangle$ como aquél que cumple la ecuación

$$\hat{J}_- |J, -J\rangle = 0. \quad (3.1.10)$$

Luego, al actuar n veces con el operador \hat{J}_+ obtenemos de manera directa que

$$\hat{J}_+^n |J, -J\rangle = n! \binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}} |J, -J + n\rangle, \quad (3.1.11)$$

de tal suerte que de manera inmediata podemos usar esto para escribir a los estados de Dicke como

$$|J, M\rangle = \frac{1}{(J+M)!} \binom{2J}{J+M}^{-\frac{1}{2}} \hat{J}_+^{J+M} |J, -J\rangle, \quad (3.1.12)$$

recordando que $M \in \{-J, \dots, J\}$.

3.2. Estados coherentes atómicos o de Bloch

En la sección anterior, hemos definido a los estados de Dicke. Tal y como en el caso electromagnético los estados de Fock se corresponden con un número de fotones determinado, los estados de Dicke representan una excitación atómica precisa. Esta excitación, sin embargo, se distribuye entre los N átomos que conforman el sistema de átomos de dos niveles. Así como en el caso del campo electromagnético encontramos después a los estados coherentes, ahora vamos a ver que para el caso del campo atómico existen estados coherentes colectivos. Lo que haremos es construir el operador desplazamiento del campo atómico y luego aplicarlo al equivalente del estado de vacío atómico.

El operador desplazamiento del campo atómico se define [2, 34, 50] como

$$\hat{D}(\theta, \varphi) = e^{\zeta \hat{J}_+ - \zeta^* \hat{J}_-}. \quad (3.2.1)$$

en donde

$$\zeta = \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}. \quad (3.2.2)$$

Los estados coherentes atómicos se obtienen como estados de vacío $|J, -J\rangle$ desplazados, es decir [2, 34, 50]

$$|\theta, \varphi\rangle = \hat{D}(\theta, \varphi) |J, -J\rangle \quad (3.2.3)$$

A partir de la expresión anterior, notemos que cuando $\tau = 0$ el estado coherente coincide con el estado de mínimo peso.

Para poder expresar a los estados coherentes en función de los estados de Dicke requerimos usar una versión más general que el lema de Campbell-Baker-Hausdorff. Llamaremos a este resultado *el teorema del desenredamiento de un operador* (ver apéndice A, ecuación (A.3.1)). Es decir, es posible escribir al operador desplazamiento como [3, 50]

$$\hat{D}(\theta, \varphi) = e^{\tau \hat{J}_+} e^{\ln(1+|\tau|^2) \hat{J}_z} e^{-\tau^* \hat{J}_-},$$

en donde $\tau = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi}$ (ver apéndice A).

Al aplicar esta nueva forma del operador desplazamiento es muy fácil ver que el resultado de aplicar $e^{\tau^* \hat{J}_-}$ sobre $|J, -J\rangle$ es $|J, -J\rangle$, mientras que $e^{\ln(1+|\tau|^2) \hat{J}_z}$ es simplemente $\frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} |J, -J\rangle$ pues $|J, -J\rangle$ es un eigenvector de \hat{J}_z con eigenvalor $-J$. Así, al usar (3.1.11), resulta claro que

$$\begin{aligned} \hat{D}(\theta, \varphi) |J, -J\rangle &= \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} e^{\tau \hat{J}_+} |J, -J\rangle \\ &= \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} \sum_{n=0}^{2J} \binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}} \tau^n |J, -J+n\rangle. \end{aligned}$$

Al reemplazar $M = -J + n$, obtenemos finalmente el equivalente a la fórmula (1.4.6) para el caso del campo atómico

$$\boxed{|\theta, \varphi\rangle = \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} \sum_{M=-J}^J \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \tau^{J+M} |J, M\rangle.} \quad (3.2.4)$$

Podemos visualizar a los estados coherentes como un mapeo de la esfera S^2 sobre el plano complejo. Esto se puede apreciar en la figura 3.1¹

¹Esta figura proviene con algunas modificaciones de [50].

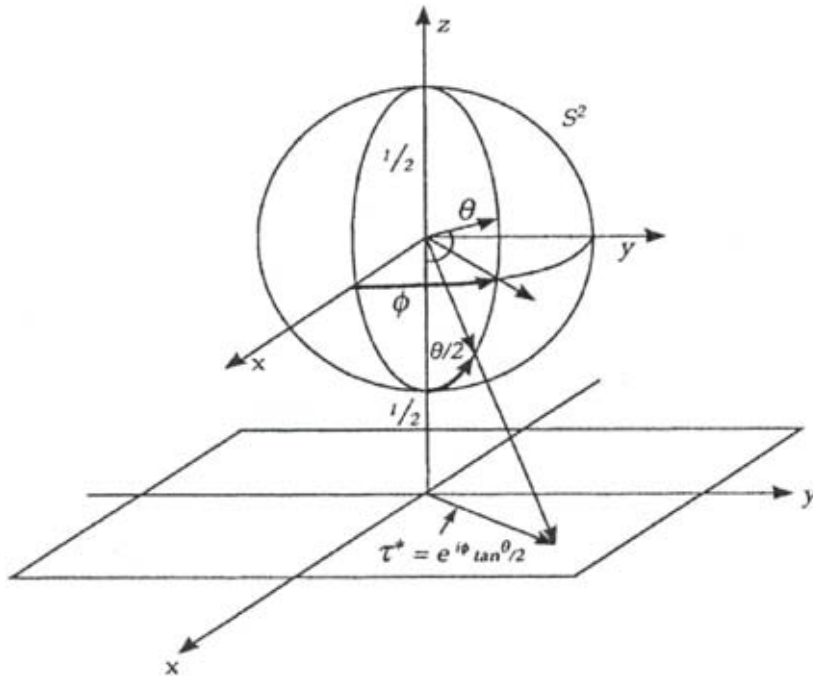


Figura 3.1: Geometría de los estados coherentes del campo atómico.

3.2.1. Valores esperados de diferentes operadores

No obstante las similitudes que hemos trazado entre los estados coherentes electromagnéticos y los atómicos, hay un punto en el que difieren notablemente. Los estados $|\theta, \varphi\rangle$ no son eigenestados del operador \hat{J}_- . En cambio, a partir de la ecuación (3.2.4) podemos observar que

$$\hat{J}_- |\theta, \varphi\rangle = \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^J} \sum_{M=-J+1}^J \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} (J+M)^{\frac{1}{2}} (J-M+1)^{\frac{1}{2}} \times \tau^{J+M} |J, M-1\rangle$$

de manera que al cambiar el índice de la suma

$$= \frac{\tau}{(1 + |\tau|^2)^J} \sum_{M=-J}^{J-1} \left(\frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!} \right)^{\frac{1}{2}} (J-M) \tau^{J+M} |J, M\rangle.$$

De esta forma el valor esperado de \hat{J}_- se obtiene como

$$\begin{aligned} \langle \theta, \varphi | \hat{J}_- | \theta, \varphi \rangle &= \frac{2J\tau}{(1 + |\tau|^2)^{2J}} \sum_{M=-J}^{J-1} \binom{2J-1}{J+M} |\tau|^{2(J+M)} \\ &= \frac{2J\tau}{(1 + |\tau|^2)^{2J}} (1 + |\tau|^2)^{2J-1}. \end{aligned}$$

así, podemos concluir finalmente que

$$\langle \theta, \varphi | \hat{J}_- | \theta, \varphi \rangle = \frac{2J\tau}{1 + |\tau|^2}. \quad (3.2.5)$$

Un procedimiento completamente análogo nos otorga que el valor esperado de \hat{J}_+ es

$$\langle \theta, \varphi | \hat{J}_+ | \theta, \varphi \rangle = \frac{2J\tau^*}{1 + |\tau|^2}, \quad (3.2.6)$$

lo cual, al usar (3.1.7) nos permite escribir de inmediato los valores esperados de \hat{J}_x y \hat{J}_y

$$\langle \theta, \varphi | \hat{J}_x | \theta, \varphi \rangle = \frac{2J\Re(\tau)}{1 + |\tau|^2} \quad (3.2.7a)$$

$$\langle \theta, \varphi | \hat{J}_y | \theta, \varphi \rangle = \frac{2J\Im(\tau)}{1 + |\tau|^2}, \quad (3.2.7b)$$

donde $\Re(\tau)$ e $\Im(\tau)$ denotan las partes real e imaginaria de τ respectivamente. La ecuación (3.2.4) y el hecho de que los estados de Dicke son eigenestados de \hat{J}_z nos permiten escribir su valor esperado de manera inmediata

$$\langle \theta, \varphi | \hat{J}_z | \theta, \varphi \rangle = \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^{2J}} \sum_{M=-J}^J \binom{2J}{J+M} M |\tau|^{2(J+M)}$$

Si escribimos $R = J + M$, entonces, lo anterior se vuelve

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^{2J}} \left(\sum_{R=1}^{2J} \frac{(2J)! |\tau|^{2R}}{(R-1)!(2J-R)!} - J \sum_{R=0}^{2J} \frac{(2J)! |\tau|^{2R}}{R!(2J-R)!} \right) \\
 &= \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^{2J}} \left(2J |\tau|^2 (1 + |\tau|^2)^{2J-1} - J (1 + |\tau|^2)^{2J} \right) \\
 &= \frac{J (|\tau|^2 - 1)}{1 + |\tau|^2}. \tag{3.2.8}
 \end{aligned}$$

3.2.2. Representación de Bloch

Recordemos que $\tau = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi}$. Si sustituimos esto en las expresiones de los valores esperados (3.2.7) y (3.2.8) que recién hemos calculado vemos que

$$\langle \theta, \varphi | \hat{J}_x | \theta, \varphi \rangle = J \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi) \tag{3.2.9a}$$

$$\langle \theta, \varphi | \hat{J}_y | \theta, \varphi \rangle = J \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \tag{3.2.9b}$$

$$\langle \theta, \varphi | \hat{J}_z | \theta, \varphi \rangle = -J \cos(\theta). \tag{3.2.9c}$$

Es decir, podemos asociar a un estado coherente un punto sobre una esfera de radio J cuyas componentes cartesianas se encuentran dadas por los valores esperados de sus componentes de momento angular (salvo por el signo negativo de \hat{J}_z). A esta representación se le conoce como la **representación de Bloch** y es debido a ella que los estados coherentes atómicos son llamados a veces **estados de Bloch**.

3.2.3. No ortogonalidad y sobre-completéz

Como se vio anteriormente, los estados coherentes del campo electromagnético no son ortogonales ni linealmente independientes. Encontraremos que los estados coherentes del campo atómico comparten propiedades análogas. Empezamos calculando el producto interior de dos de ellos mediante la ecuación (3.2.4). Así, usando la ortogonalidad de

los estados de Dicke,

$$\begin{aligned} \langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle &= \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^J (1 + |\tau'|^2)^J} \sum_{M=-J}^J \binom{2J}{J+M} (\tau^* \tau')^{J+M} \\ &= \frac{(1 + \tau^* \tau')^{2J}}{(1 + |\tau|^2)^J (1 + |\tau'|^2)^J}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Esto muestra que los estados coherentes atómicos se encuentran apropiadamente normalizados y que *no son ortogonales en general*. Sin embargo, a diferencia del caso electromagnético, para un estado $|\theta, \varphi\rangle$ dado, sí existe un estado ortogonal: aquél que tenga $\tau' = -\frac{1}{\tau^*}$.

Podemos reexpresar a la ecuación (3.2.10) en una forma que hace explícita la relación entre los vectores de Bloch de los estados coherentes. Al usar la forma que tiene el parámetro τ en términos de las coordenadas θ, φ , vemos que después de un sencillo cálculo

$$\begin{aligned} |\langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle|^2 &= \frac{\left| 1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) e^{i(\varphi' - \varphi)} \right|^{4J}}{\left| \sec\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^{4J} \left| \sec\left(\frac{\theta'}{2}\right) \right|^{4J}} \\ &= \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) e^{i(\varphi' - \varphi)} \right|^{4J} \\ &= \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \cos(\varphi' - \varphi) \right)^{2J}. \end{aligned}$$

Ahora bien, podemos simplificar más la expresión anterior si recordamos que $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$, que $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$ y adicionalmente que $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$. Con esto, al

continuar el desarrollo es fácil ver que

$$= \left(\frac{1}{2} (1 + \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')) \right)^{2J} \quad (3.2.11)$$

$$= \left(\frac{1}{2} (1 + \cos \Theta) \right)^{2J} \\ = \left(\cos \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right)^{4J}, \quad (3.2.12)$$

en donde Θ es el ángulo entre los dos vectores sobre la esfera de Bloch de los estados coherentes $|\theta, \varphi\rangle$ y $|\theta', \varphi'\rangle$. Así, vemos que estados coherentes ortogonales corresponden a puntos diametralmente opuestos sobre la esfera de Bloch.

Para finalizar, vamos a probar que los estados coherentes del campo atómico forman un conjunto completo en el subespacio de Hilbert que corresponde a todos aquellos estados de Dicke que tienen una J fija. Para esto realizamos la integral del proyector $|\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi|$ sobre todo el espacio fase. Tenemos pues que

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi |\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi| \\ = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(1 + \tan \frac{\theta}{2})^{2J}} \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}} \\ \times \tau^{*J+M'} \tau^{J+M} |J, M'\rangle \langle J, M| \\ = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{4J} \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}} \\ \times \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{2J+M+M'} e^{i(M-M')\varphi} |J, M'\rangle \langle J, M|.$$

Cuando realizamos la integración sobre φ , vemos que al recordar que $\delta(M' - M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(M'-M)\varphi} d\varphi$ se elimina una suma y por tanto lo

anterior se transforma en

$$= \sum_{M=-J}^J \int_0^\pi 2\pi \binom{2J}{J+M} \sin \theta \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2(J+M)} \\ \times \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2(J-M)} |J, M\rangle \langle J, M| d\theta,$$

y al recordar que $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ notamos que

$$= \sum_{M=-J}^J \int_0^\pi d\theta 4\pi \binom{2J}{J+M} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2(J+M)+1} \\ \times \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2(J-M)+1} |J, M\rangle \langle J, M|.$$

Al realizar la integración sobre θ , y recordar las propiedades de la función beta [1] vemos que

$$\int_0^\pi \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2(J+M)+1} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2(J-M)+1} d\theta = B(J-M+1, J+M+1) \\ = \frac{(J-M)!(J+M)!}{(2J+1)!},$$

en donde $B(x, y)$ denota a la función beta. Por lo tanto, de la completez de los estados de Dicke, nuestro desarrollo se vuelve

$$= \sum_{M=-J}^J \frac{4\pi}{2J+1} |J, M\rangle \langle J, M| \\ = \frac{4\pi}{2J+1},$$

es decir,

$$\boxed{\frac{2J+1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi |\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi| = 1} \quad (3.2.13)$$

3.3. Estados comprimidos

Por nuestra experiencia con los estados comprimidos del campo electromagnético, sabemos que la compresión redistribuye las fluctuaciones cuánticas de una cuadratura en otra. Esto también ocurre en el caso del campo atómico, sin embargo se debe tener cierto cuidado. Uno se vería tentado a definir a los estados comprimidos del campo atómico como aquellos en los que alguna de las cuadraturas tiene una varianza menor al límite cuántico estándar de $\frac{J}{2}$. El problema con esta definición es que un estado coherente podría aparecer como comprimido si se le analiza desde un marco de referencia apropiado (mediante alguna rotación). Tal y como se sugiere en [20], lo necesario en la definición de compresión es que se establezcan correlaciones entre los espines elementales de la colección de N átomos. Esto implica que un estado se encuentre comprimido si la varianza de una componente de espín normal al vector de espín es menor al límite cuántico estándar de $\frac{J}{2}$. La correlación entre espines requiere que haya interacciones no lineales en el Hamiltoniano pues de otra manera sólo se establecen rotaciones de los espines individuales. La interacción no lineal más sencilla es la cuadrática en \hat{J}_z (ver [20] y también [31] para una discusión más profunda sobre este punto. Hasta hace relativamente poco fue posible generar estados comprimidos en el laboratorio y utilizarlos para la investigación [41, 48]). Así, un ejemplo de estado comprimido [20] está dado por

$$\boxed{|\chi, \theta, \varphi\rangle = \hat{S}_\chi |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\chi \hat{J}_z^2} |\theta, \varphi\rangle,} \quad (3.3.1)$$

en donde $|\theta, \varphi\rangle$ es un estado coherente atómico.

Empecemos por calcular la forma que tienen estos estados al desarrollarlos en función de los estados de Dicke. A partir de la ecuación (3.2.4) es inmediato que al desarrollar (3.3.1) en serie de Taylor

$$\begin{aligned} |\chi, \theta, \varphi\rangle &= e^{-i\chi \hat{J}_z^2} |\theta, \varphi\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\chi)^n}{n!} \hat{J}_z^{2n} \sum_{M=-J}^J \frac{\binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}}}{(1+|\tau|^2)^J} \tau^{J+M} |J, M\rangle, \end{aligned}$$

al aplicar el operador J_z^2 y usar que los estados de Dicke son eigenestados de este operador obtenemos que $|\chi, \theta, \varphi\rangle$ es

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\chi)^n}{n!} M^{2n} \sum_{M=-J}^J \frac{\binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}}}{(1+|\tau|^2)^J} \tau^{J+M} |J, M\rangle,$$

y por último, al reconocer la serie de la exponencial, concluimos que

$$|\chi, \theta, \varphi\rangle = \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} \sum_{M=-J}^J e^{-i\chi M^2} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \tau^{J+M} |J, M\rangle. \quad (3.3.2)$$

O bien podemos escribir lo anterior de manera explícita en términos de θ y φ al usar la definición de τ para obtener que

$$|\chi, \theta, \varphi\rangle = \sum_{M=-J}^J e^{-i\chi M^2} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{J+M} \times \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{J-M} |J, M\rangle. \quad (3.3.3)$$

Para darse una idea más concreta de la forma de estos estados, vemos que para $J = \frac{1}{2}$ la expresión anterior se vuelve

$$|\chi, \theta, \varphi\rangle = e^{-\frac{i\chi}{4}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sin \frac{\theta}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right).$$

Mientras que para $J = 1$ es

$$|\chi, \theta, \varphi\rangle = e^{-i\chi} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} |1, -1\rangle + \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |1, 0\rangle + \sin^2 \frac{\theta}{2} |1, 1\rangle \right).$$

Pseudodistribuciones de probabilidad para el campo atómico

EN UN CAPÍTULO anterior, hemos analizado diferentes distribuciones de pseudoprobabilidad para diversidad de ejemplos de estados del campo electromagnético. Hemos visto que tales representaciones resultan útiles para entender la relación entre las diferentes variables conjugadas en un problema. En este capítulo haremos un análisis similar sólo que ahora con estados del campo atómico.

4.1. Wigner

4.1.1. Definición usando el desarrollo multipolar

Definir la función de Wigner para el caso del campo atómico es más complejo que en el campo electromagnético. La diferencia más importante es que mientras que para el caso del campo electromagnético uno puede tener un número infinito de excitaciones (fotones) en el caso atómico este número es finito. Esto cambia drásticamente la estructura algebraica del problema y se vuelve necesario recurrir a herramientas más sofisticadas. Siguiendo lo hecho en [2], definimos a la función de Wigner en términos de operadores de estados multipolares.

Un operador de estado multipolar está dado por la expresión [2]

$$\hat{\mathbf{T}}_{kq} = \sum_{M, M'} (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix} |J, M\rangle \langle J, M'|, \quad (4.1.1)$$

en donde

$$\begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix}$$

representa al símbolo $3j$ de Wigner [21, 36]. Cabe notar que los coeficientes $3j$ de Wigner se escriben en términos de los coeficientes de Clebsch-Gordan como [21, 36]

$$\langle J_1, M_1, J_2, M_2 | J, M \rangle = (-1)^{J_1 - J_2 + M} \sqrt{2J+1} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J \\ M_1 & M_2 & -M \end{pmatrix}.$$

Cualquier operador puede ser expandido en términos de operadores de estados multipolares como [2]

$$\hat{G} = \sum_{k, q} G_{kq} \hat{\mathbf{T}}_{kq}, \quad (4.1.2)$$

con los coeficientes G_{kq} de la expansión dados por [2]

$$G_{kq} = \text{tr} \left(\hat{\mathbf{T}}_{kq}^\dagger \hat{G} \right). \quad (4.1.3)$$

En el caso particular de la distribución de Wigner, lo que se hace es realizar una expansión del operador densidad $\hat{\rho}$ en términos de los operadores multipolares para que al usar a los coeficientes G_{kq} de la expansión, la distribución de Wigner esté dada por [2]

$$W(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sum_{k=0}^{2J} \sum_{q=-k}^k Y_{kq}(\theta, \varphi) G_{kq}, \quad (4.1.4)$$

en donde Y_{kq} representa al armónico esférico usual. Con esta definición, la función de Wigner para el caso atómico comparte las mismas propiedades que mostramos que tiene en el caso electromagnético. Lo que haremos a continuación será utilizar esta definición para estudiar cómo se ven la pseudodistribuciones de algunos estados de interés del campo atómico.

4.1.2. Ejemplos de funciones de Wigner para diferentes estados del campo atómico

Empecemos calculando los coeficientes del desarrollo para los estados más simples del campo atómico: los estados de Dicke. Esto quiere decir que en este caso usamos al operador densidad $\hat{\rho} = |J, M\rangle \langle J, M|$. A partir de la ecuación (4.1.1) y la ortogonalidad de los estados de Dicke, resulta inmediato que los coeficientes de la expansión son

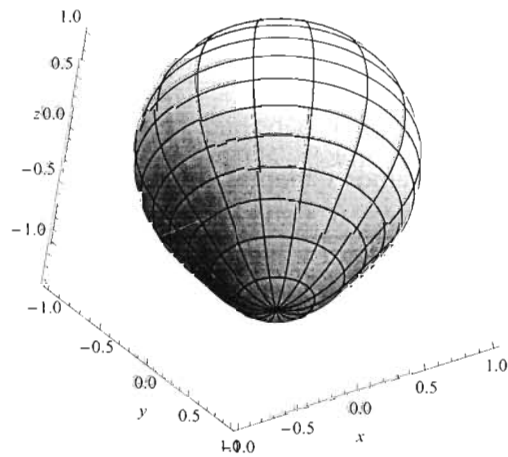
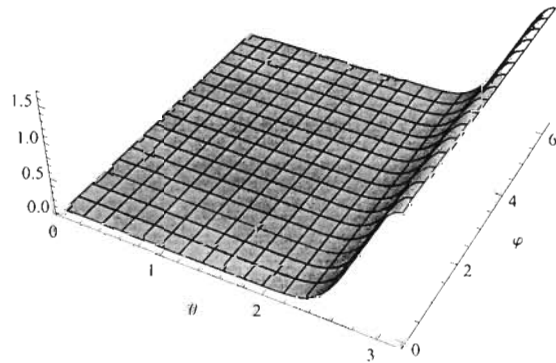
$$G_{kq}^{Dicke}(J, M) = (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M \end{pmatrix},$$

de donde, al recordar que los símbolos 3j de Wigner se anulan si $-M + q + M' \neq 0$ [21, 36], concluimos que

$$\begin{aligned} W^{Dicke}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sum_{k=0}^{2J} \sum_{q=-k}^k Y_{kq}(\theta, \varphi) G_{kq}^{Dicke}(J, M) \\ &= \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sum_{k=0}^{2J} \sum_{q=-k}^k Y_{kq}(\theta, \varphi) (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sum_{k=0}^{2J} Y_{k0}(\theta, \varphi) (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & 0 & M \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

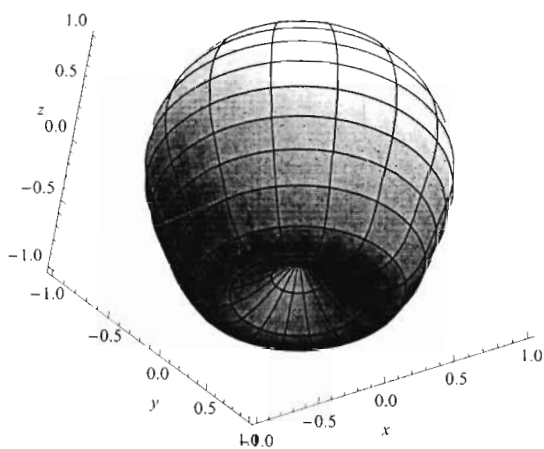
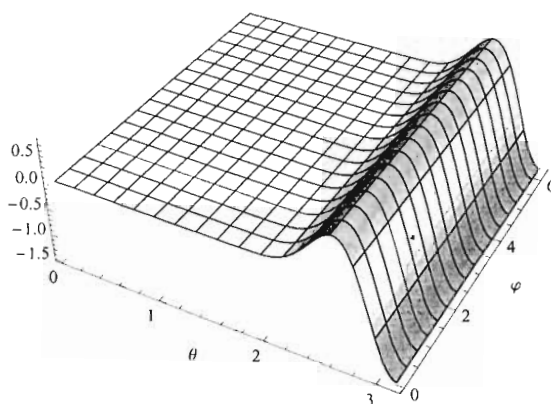
En la figura 4.1 mostramos ejemplos de cómo se ven estas funciones para $J = 5$ y $M = -5, \dots, 0$. Cada subfigura muestra a la función de Wigner graficada en el plano y luego la gráfica de $1 + \frac{W(\theta, \varphi)}{\sqrt{J(J+1)}}$ en la esfera unitaria. La razón para escoger esta función en la esfera y no la función de Wigner directamente en la esfera unitaria responde a que deseamos evitar valores negativos del radio en la esfera. Además, esta función nos permite observar el efecto que tiene la función de Wigner al deformar la esfera unitaria de Bloch.

El siguiente paso lógico es obtener la función de Wigner para un estado coherente $|\theta, \varphi\rangle$ del campo atómico. Podemos adelantar que por la forma en que se definen a los estados coherentes, la función de distribución debe ser similar a la del estado de vacío $|J, -J\rangle$ con la cresta



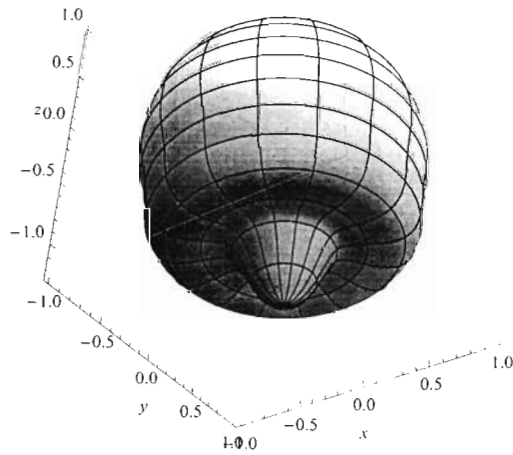
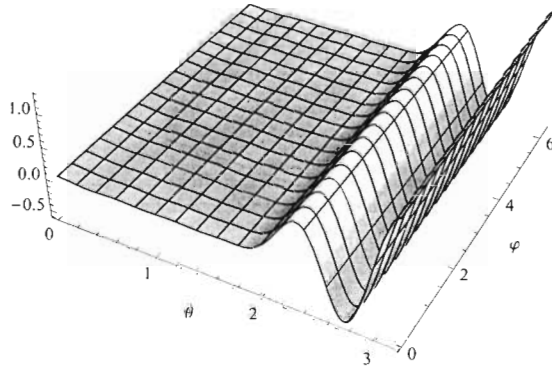
(a) Ejemplo de la función de Wigner para $|5, -5\rangle$.

Figura 4.1: Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J = 5$.



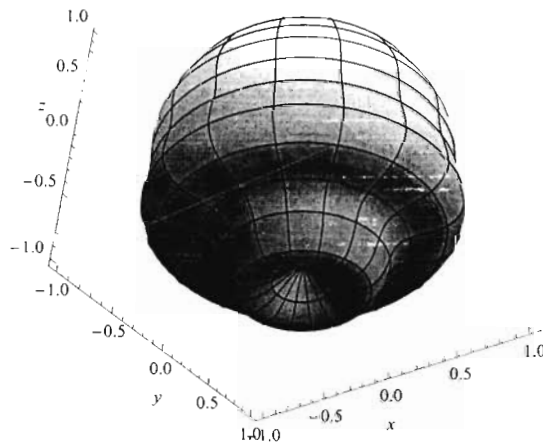
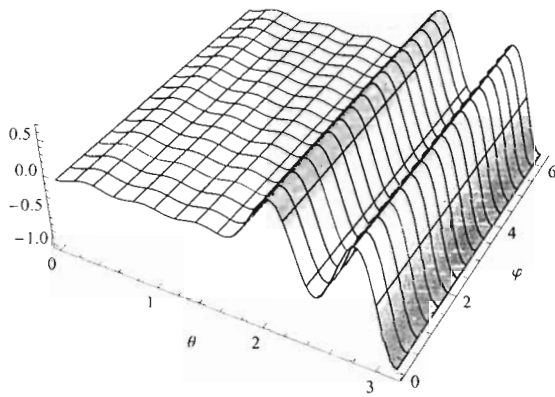
(b) Ejemplo de la función de Wigner para $|5, -4\rangle$.

Figura 4.1: Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J = 5$ (cont.).



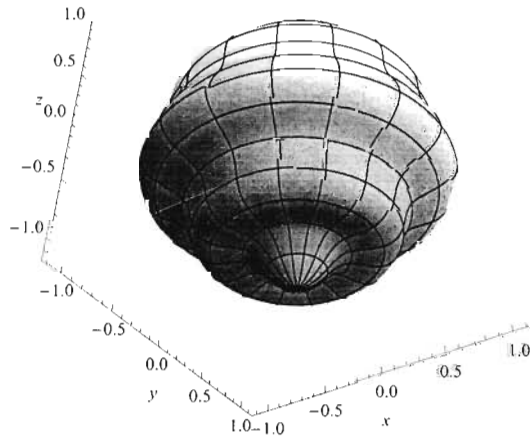
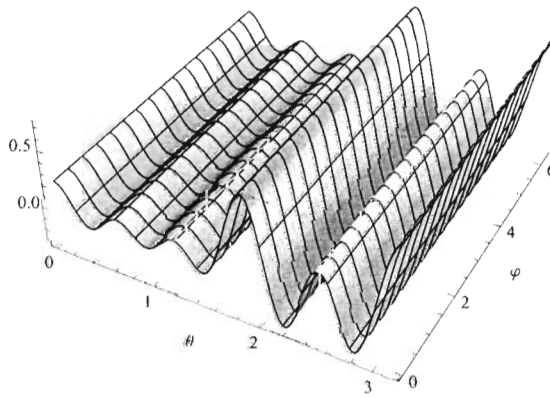
(c) Ejemplo de la función de Wigner para $|5, -3\rangle$.

Figura 4.1: Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J=5$ (cont.).



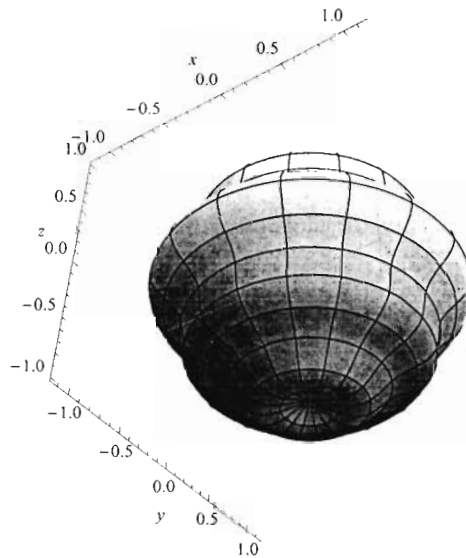
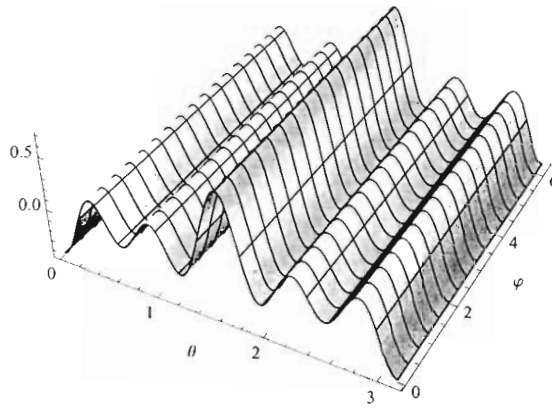
(d) Ejemplo de la función de Wigner para $|5, -2\rangle$.

Figura 4.1: Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J=5$ (cont.).



(e) Ejemplo de la función de Wigner para $|5, -1\rangle$.

Figura 4.1: Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J=5$ (cont.).



(f) Ejemplo de la función de Wigner para $|5, 0\rangle$.

Figura 4.1: Ejemplos de funciones de Wigner para estados de Dicke con $J=5$ (cont.).

de la distribución desplazada del polo sur de la esfera de Bloch. Comprobemos esto. Lo que haremos será utilizar la definición (4.1.3) para calcular los coeficientes de la expansión (4.1.4). Sin embargo, para simplificar los cálculos, recurriremos a varias herramientas adicionales. En primer lugar, usaremos el hecho de que aplicar el operador desplazamiento $\hat{D}(\theta, \varphi)$ de los estados coherentes del campo atómico es equivalente a realizar una rotación $\hat{R}(-\varphi, -\theta, \varphi)$ en el espacio de momento angular [3, 36]. Definimos a una rotación en el espacio de momento angular como sigue

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha\hat{J}_z} e^{-i\beta\hat{J}_y} e^{-i\gamma\hat{J}_z} \quad (4.1.6)$$

de tal suerte que

$$\hat{R}^\dagger(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\gamma\hat{J}_z} e^{i\beta\hat{J}_y} e^{i\alpha\hat{J}_z}.$$

De lo anterior es claro que $\hat{R}^\dagger(-\varphi, -\theta, \varphi) = \hat{R}(\varphi, \theta, \varphi)$.

Notemos adicionalmente que podemos escribir a los operadores de estados multipolares como sigue

$$\hat{\mathbf{T}}_{kq} = \sum_{M, M'} (-1)^{J-M'} \langle J, M, J, -M' | k, q \rangle |J, M\rangle \langle J, M'|, \quad (4.1.7)$$

en donde hemos usado que los coeficientes $3j$ de Wigner se escriben en términos de los coeficientes de Clebsch-Gordan como [21, 36]

$$\langle J_1, M_1, J_2, M_2 | J, M \rangle = (-1)^{J_1 - J_2 + M} \sqrt{2J + 1} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J \\ M_1 & M_2 & -M \end{pmatrix}.$$

Siguiendo con (4.1.7), notamos que al recordar las propiedades de simetría de los coeficientes de Clebsch-Gordan, entonces

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_{kq}^\dagger &= \sum_{M, M'} (-1)^{J-M'} \langle J, M, J, -M' | k, q \rangle |J, M'\rangle \langle J, M| \\ &= \sum_{M, M'} (-1)^{J-M+q} \langle J, M', J, -M | k, -q \rangle |J, M'\rangle \langle J, M| \\ &= (-1)^q \hat{\mathbf{T}}_{k-q} \end{aligned}$$

Ahora sí, procedemos a calcular los coeficientes del desarrollo de la función de Wigner para el estado coherente atómico

$$|\theta_c, \varphi_c\rangle = \hat{D}(\theta_c, \varphi_c)|J, -J\rangle = \hat{R}(-\varphi_c, -\theta_c, \varphi_c)|J, -J\rangle,$$

obteniendo así que

$$\begin{aligned} G_{kq}^{coh} &= \langle \theta_c, \varphi_c | \hat{\mathbf{T}}_k^\dagger q | \theta_c, \varphi_c \rangle \\ &= \langle J, -J | \hat{R}^\dagger(-\varphi_c, -\theta_c, \varphi_c) \hat{\mathbf{T}}_{kq}^\dagger \hat{R}(-\varphi_c, -\theta_c, \varphi_c) | J, J \rangle \\ &= (-1)^q \sum_{q'=-k}^k \mathbb{D}_{q'-q}^k(-\varphi_c, \theta_c, \varphi_c) \langle J, -J | \hat{\mathbf{T}}_{kq} | J, -J \rangle, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

en donde hemos usado las propiedades de los operadores de estados multipolares bajo rotaciones y que $\mathbb{D}_{q'-q}^k$ denota a las componentes de una matriz de Wigner [8, 36]. Observemos adicionalmente que

$$\begin{aligned} &\langle J, -J | \hat{\mathbf{T}}_{kq} | J, -J \rangle \\ &= \sum_{M, M'} (-1)^{J-M'} \langle J, M, J, M' | k, q' \rangle \langle J, -J | J, M \rangle \langle J, M' | J, -J \rangle \\ &= (-1)^{2J} \langle J, -J, J, J | k, q' \rangle \delta_{q'0}. \end{aligned}$$

Al usar esto en el desarrollo de (4.1.8), obtenemos que

$$\begin{aligned} &= (-1)^{q+2J} \mathbb{D}_{0-q}^k(-\varphi_c, \theta_c, \varphi_c) \langle J, -J, J, J | k, 0 \rangle \\ &= (-1)^{q-k} \left(\frac{4\pi}{2k+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{k-q}(-\theta_c, -\varphi_c) \langle J, J, J, -J | k, 0 \rangle, \end{aligned}$$

en donde hemos hecho uso de las propiedades de simetría de las matrices de Wigner y de su forma explícita en términos de los armónicos esféricos [36]. Al sustituir esto en la definición de la función de Wigner (4.1.4) y usar la forma explícita de los coeficientes de Clebsch-Gordan de este caso [36], concluimos que

$$\begin{aligned} W^{coh}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sum_{k,q} (-1)^{q-k} (2J)! \sqrt{\frac{2k+1}{(2J-k)!(2J+k+1)!}} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} Y_{kq}(\theta, \varphi) Y_{k-q}(-\theta_c, -\varphi_c), \end{aligned}$$

es decir,

$$W^{coh}(\theta, \varphi) = \frac{(2J+1)!}{\sqrt{2J+1}} \sum_{k=0}^{2J} \sum_{q=-k}^k (-1)^{q-k} \sqrt{\frac{1}{(2J-k)!(2J+k+1)!}} \\ \times Y_{k-q}(-\theta_c, -\varphi_c) Y_{kq}(\theta, \varphi). \quad (4.1.9)$$

En la figura 4.2 se puede apreciar un ejemplo.

Podemos analizar también la función de Wigner de los estados comprimidos (3.3.3) del campo atómico. Calculemos los coeficientes de la expansión del operador densidad en términos de los operadores de estados multipolares. Tenemos pues que

$$G_{kq}^{comp} = \left\langle \chi, \theta_c, \varphi_c \left| \hat{\mathbf{T}}_{kq}^\dagger \right| \chi, \theta_c, \varphi_c \right\rangle \\ = \sum_{M, M'} (-1)^{J-M} e^{i\chi(M^2-M'^2)} \binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta_c}{2} \right)^{2J-M-M'} \\ \times \left(\sin \frac{\theta_c}{2} \right)^{2J+M+M'} e^{i(M-M')\varphi_c} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix},$$

de donde la función de Wigner para los estados comprimidos es

$$W^{comp}(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{2J} \sum_{q=-k}^k \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}} \\ \times \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta_c}{2} \right)^{2J-M-M'} \left(\sin \frac{\theta_c}{2} \right)^{2J+M+M'} \\ \times e^{i(M-M')\varphi_c + i\chi(M^2-M'^2)} Y_{kq}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix} = 0$ si $-M + q + M' \neq 0$, entonces $M = q + M'$, al realizar este cambio y luego renombrar al índice M' como M ,

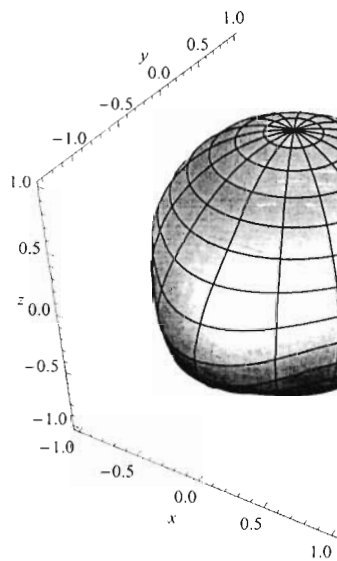
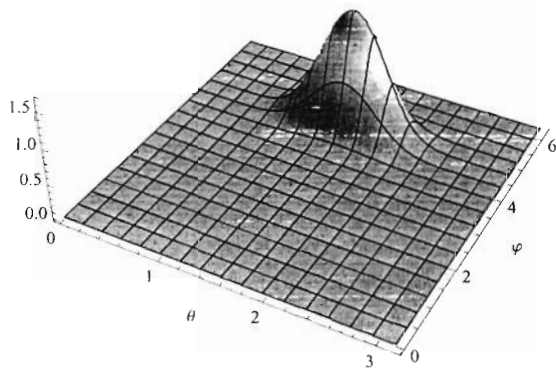


Figura 4.2: Ejemplo de la función de Wigner para un estado coherente.

$$\left| \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
 W^{comp}(\theta, \varphi) &= \sum_{k=0}^{2J} \sum_{q=-k}^K \sum_{M=-J}^J (-1)^{J-q-M} \sqrt{2k+1} \binom{2J}{J+q+M}^{\frac{1}{2}} \\
 &\times \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta_c}{2} \right)^{2(J-M)-q} \left(\operatorname{sen} \frac{\theta_c}{2} \right)^{2(J+M)+q} \\
 &\times e^{iq\varphi_c + i\chi((q+M)^2 - M'^2)} Y_{kq}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} J & k & J \\ -q-M & q & M \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

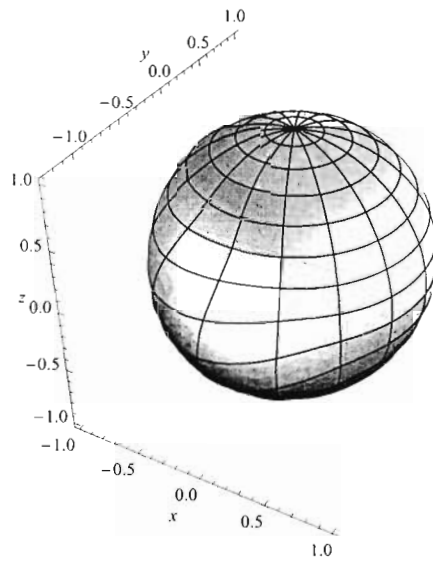
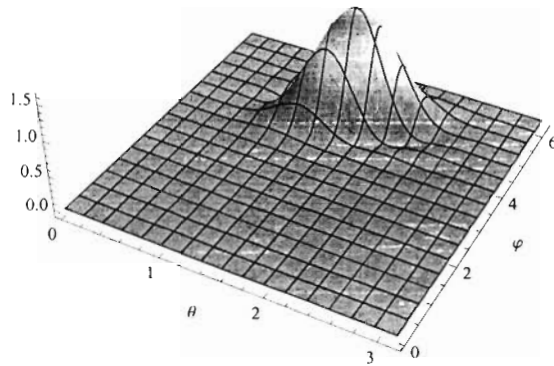
Por último, notemos que se debe de cumplir que $-J \leq -q - M \leq J$, lo cual quiere decir que $\max(-J - q, -J) \leq M \leq \min(J - q, J)$. Así, si llamamos $\mathcal{S}_q = \{M : \max(-J - q, -J) \leq M \leq \min(J - q, J)\}$, escribimos finalmente que

$$\begin{aligned}
 W^{comp}(\theta, \varphi) &= \sum_{k=0}^{2J} \sum_{q=-k}^K \sum_{M \in \mathcal{S}_q} (-1)^{J-q-M} \sqrt{2k+1} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \\
 &\times \binom{2J}{J+q+M}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta_c}{2} \right)^{2(J-M)-q} \left(\operatorname{sen} \frac{\theta_c}{2} \right)^{2(J+M)+q} \\
 &\times e^{iq\varphi_c + i\chi((q+M)^2 - M'^2)} Y_{kq}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} J & k & J \\ -q-M & q & M \end{pmatrix}. \quad (4.1.10)
 \end{aligned}$$

En la figura 4.3 podemos apreciar cómo cambia la función de Wigner de un estado comprimido al cambiar el parámetro de compresión. Si el parámetro es chico, la función se parece a la de un estado coherente, pero conforme crece, aparecen fluctuaciones que la distinguen de ésta.

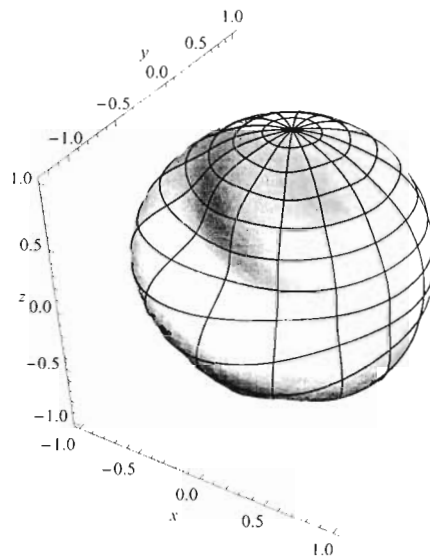
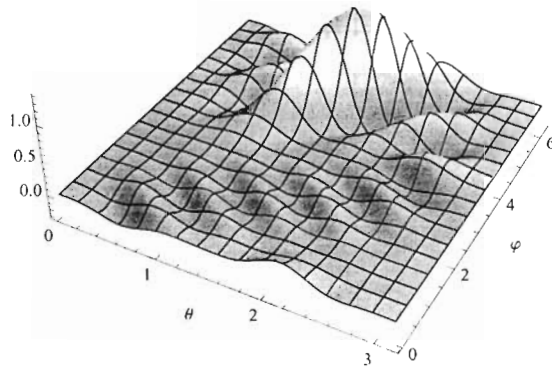
Así como para el caso electromagnético estudiamos la superposición de dos estados coherentes, para el caso atómico podemos estudiar primero la superposición del estado de vacío $|J, -J\rangle$ con su “opuesto” $|J, J\rangle$ y luego la de dos estados coherentes. A la primera superposición le llamaremos estado de **gato polar**, mientras que a la segunda le llamaremos **estado de gato no polar** [4]. Comencemos deduciendo la función de Wigner para el estado de gato polar. En este caso, el operador densidad está dado por

$$\hat{\rho}^{gsp} = \frac{1}{2} (|J, J\rangle \langle J, J| + |J, -J\rangle \langle J, -J| + |J, J\rangle \langle J, -J| + |J, -J\rangle \langle J, J|).$$



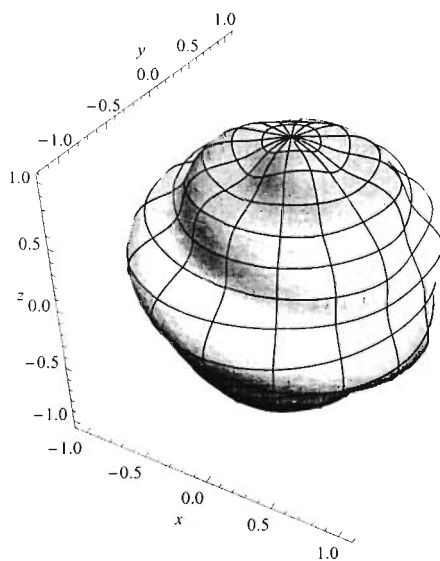
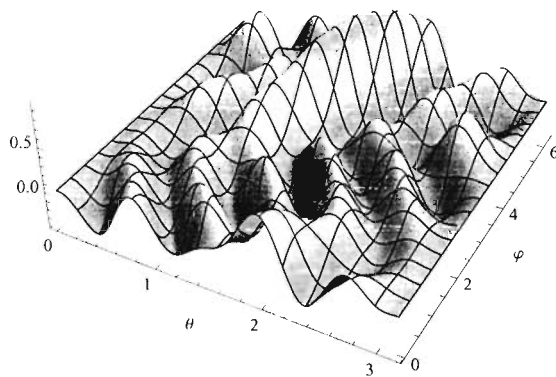
(a) Ejemplo de la función de Wigner para un estado comprimido $\left|0.1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Figura 4.3: Ejemplos de funciones de Wigner para diferentes estados comprimidos.



(b) Ejemplo de la función de Wigner para $\left|0.25, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Figura 4.3: Ejemplos de funciones de Wigner para diferentes estados comprimidos (cont.).



(c) Ejemplo de la función de Wigner para $\left|0.5, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Figura 4.3: Ejemplos de funciones de Wigner para diferentes estados comprimidos (cont.).

De la definición (4.1.3) es muy fácil ver que

$$G_{kq}^{gsp} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2} \left(\begin{pmatrix} J & k & J \\ -J & q & J \end{pmatrix} + (-1)^{2J} \begin{pmatrix} J & k & J \\ J & q & -J \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} J & k & J \\ -J & q & -J \end{pmatrix} + (-1)^{2J} \begin{pmatrix} J & k & J \\ J & q & J \end{pmatrix} \right),$$

y por lo tanto, al recordar que los coeficientes $3j$ de Wigner se anulan si sus tres índices inferiores no suman cero, la función de Wigner queda dada por

$$W^{gsp}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sum_{k=0}^{2J} \sqrt{2k+1} \left(\begin{pmatrix} J & k & J \\ -J & 0 & J \end{pmatrix} Y_{k0}(\theta, \varphi) \right. \\ \left. + (-1)^{2J} \begin{pmatrix} J & k & J \\ J & 0 & -J \end{pmatrix} Y_{k0}(\theta, \varphi) + \begin{pmatrix} J & k & J \\ -J & 2J & -J \end{pmatrix} Y_{k2J}(\theta, \varphi) \right. \\ \left. + (-1)^{2J} \begin{pmatrix} J & k & J \\ J & -2J & J \end{pmatrix} Y_{k-2J}(\theta, \varphi) \right). \quad (4.1.11)$$

Sin embargo, podemos simplificar aún más esta expresión si usamos la forma explícita de los coeficiente $3j$ de Wigner [21] para los casos que requerimos

$$\begin{pmatrix} J & k & J \\ -J & q & J \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{(2J)!^2}{(2J-k)!(2J+k+1)!}} \delta_{q,0}$$

$$\begin{pmatrix} J & k & J \\ J & q & -J \end{pmatrix} = (-1)^{2J-k} \sqrt{\frac{(2J)!^2}{(2J-k)!(2J+k+1)!}} \delta_{q,0}$$

$$\begin{pmatrix} J & k & J \\ -J & q & -J \end{pmatrix} = (-1)^{-2J} \sqrt{\frac{1}{(2J+k+1)!(2J-k)!(k-2J)!}} \delta_{q,2J}$$

$$\begin{pmatrix} J & k & J \\ J & q & J \end{pmatrix} = (-1)^{-k} \sqrt{\frac{1}{(2J+k+1)!(2J-k)!(k-2J)!}} \delta_{q,-2J}.$$

Al sustituir lo anterior en (4.1.11) y usar las diversas propiedades de simetría de los armónicos esféricos, concluimos finalmente que la función de Wigner de un estado de gato polar está dada por

$$\begin{aligned}
 W^{gsp}(\theta, \varphi) = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \left(\sum_{k=0}^{2J} (2J)! \sqrt{\frac{2k+1}{(2J-k)!(2J-k+1)!}} \right. \\
 & \times (Y_{k0}(\theta, \varphi) + Y_{k0}(\pi - \theta, \varphi)) \\
 & \left. + 2 \sqrt{\frac{(2J+1)! (\sin \theta)^{2J} \cos(N\varphi)}{4\pi 2^{2J} (2J)!}} \right). \quad (4.1.12)
 \end{aligned}$$

La figura 4.4 muestra un ejemplo de la gráfica para el caso $J = 5$. Como se puede apreciar, los efectos de interferencia cuántica debido a la superposición de estados son claramente visibles.

Para finalizar esta sección, calculemos ahora la función de Wigner de un estado de gato no polar, es decir de la superposición de dos estados coherentes atómicos de la forma

$$|\Psi_{12}\rangle = \frac{|\theta_1, \varphi_1\rangle + |\theta_2, \varphi_2\rangle}{\sqrt{2(1 + \Re(\langle \theta_1, \varphi_1 | \theta_2, \varphi_2 \rangle))}},$$

en donde $\Re(z)$ denota la parte real del número complejo z .

Para poder calcular explícitamente la función de Wigner de $|\Psi_{12}\rangle$ escogemos como parámetros de los estados coherentes a θ_1 arbitrario, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ y $\theta_2 = -\theta_1$. De esta forma el operador densidad está dado por

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}^{gsp} = & \frac{1}{2(1 + (\cos \theta_1)^{2J})} (|\theta_1, 0\rangle \langle \theta_1, 0| + |\theta_1, 0\rangle \langle -\theta_1, 0| \\
 & + |-\theta_1, 0\rangle \langle \theta_1, 0| + |-\theta_1, 0\rangle \langle -\theta_1, 0|),
 \end{aligned}$$

en donde hemos hecho uso de la expresión que encontramos para el producto interior de dos estados coherentes (3.2.12).

Calculemos los coeficientes del desarrollo multipolar término a término y usemos esto para calcular la contribución a la función de Wigner total de cada uno de los sumandos.

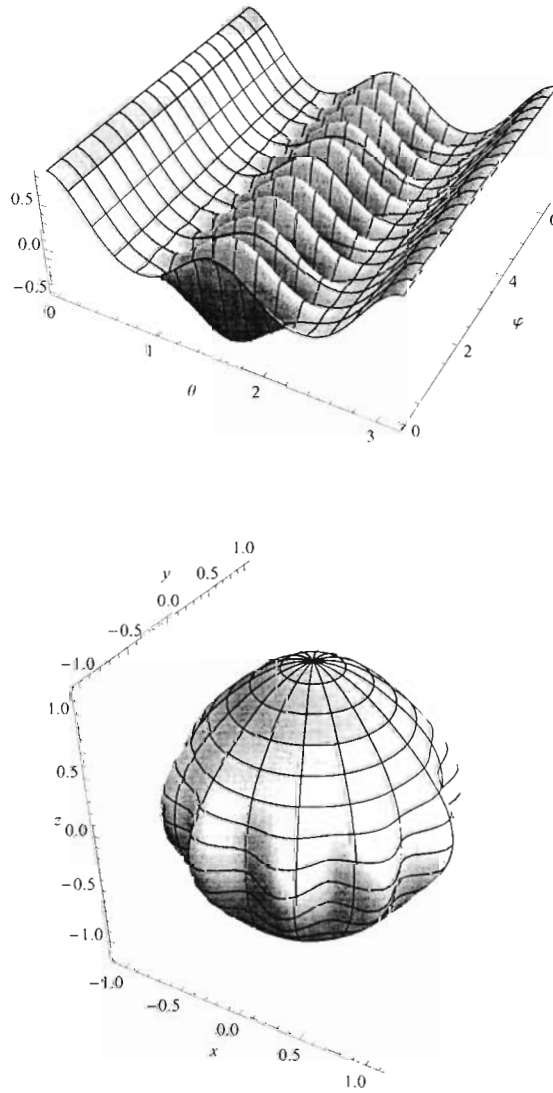


Figura 4.4: Ejemplo de la función de Wigner para un estado de gato polar con $J = 5$.

1. $|\theta_1, 0\rangle \langle \theta_1, 0|$: El coeficiente que buscamos implica evaluar la expresión

$$\begin{aligned} \langle \theta_1, 0 | \hat{\mathbf{T}}_{kq}^\dagger | \theta_1, 0 \rangle &= \sum_{M, M'} \binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\sin \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J+M+M'} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J-M-M'} \langle J, M' | \hat{\mathbf{T}}_{kq}^\dagger | J, M \rangle. \end{aligned}$$

Sin embargo, notemos que

$$\begin{aligned} \langle J, M' | \hat{\mathbf{T}}_{kq}^\dagger | J, M \rangle &= \sum_{S, S'} (-1)^{J-S} \sqrt{2k+1} \\ &\times \begin{pmatrix} J & k & J \\ -S & q & S' \end{pmatrix} \langle J, M' | J, S' \rangle \langle J, S | J, M \rangle \delta_{M', S'} \delta_{M, S} \\ &= (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el coeficiente debido a este término es

$$\begin{aligned} G_{kq}^{gsnp1} &= \frac{1}{2(1+(\cos \theta_1)^{2J})} \sum_{M, M'} (-1)^{J-M} \binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \\ &\times \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \left(\sin \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J+M+M'} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J-M-M'}. \end{aligned}$$

En consecuencia, la función de Wigner debida a este término está dada por

$$\begin{aligned} W_1^{gsnp}(\theta, \varphi) &= \frac{\sqrt{2J+1}}{2\sqrt{4\pi}(1+(\cos \theta_1)^{2J})} \sum_{k, q, M, M'} (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \\ &\times \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J+M+M'} \\ &\times \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J-M-M'} Y_{kq}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Sin embargo, si recordamos que los coeficientes $3j$ de Wigner se anulan cuando los tres índices inferiores no suman cero, entonces podemos escribir a $M = M' + q$, para ahorrarnos una suma, y luego renombrar a M' como M para obtener finalmente la función de Wigner de este término.

$$\begin{aligned}
 W_1^{gsnp}(\theta, \varphi) &= \frac{\sqrt{2J+1}}{2\sqrt{4\pi} (1 + (\cos \theta_1)^{2J})} \sum_{k,q,M} (-1)^{J-M-q} \sqrt{2k+1} \\
 &\times \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M-q & q & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2J \\ J+M \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2J \\ J+M+q \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \\
 &\times \left(\operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2} \right)^{2(J+M)+q} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2(J-M)-q} Y_{kq}(\theta, \varphi). \quad (4.1.13)
 \end{aligned}$$

2. $|\theta_1, 0\rangle \langle -\theta_1, 0|$: Por un procedimiento completamente análogo al anterior encontramos que

$$\begin{aligned}
 G_{kq}^{gsnp2} &= \frac{1}{2(1 + (\cos \theta_1)^{2J})} \sum_{M,M'} (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} 2J \\ J+M' \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2J \\ J+M \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \\
 &\times \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \left(\operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J+M+M'} (-1)^{J+M'} \\
 &\times \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J-M-M'}.
 \end{aligned}$$

De esta forma la función de Wigner correspondiente es

$$\begin{aligned}
 W_2^{gsnp}(\theta, \varphi) &= \frac{\sqrt{2J+1}}{2\sqrt{4\pi} (1 + (\cos \theta_1)^{2J})} \sum_{k,q,M} (-1)^{2J-q} \sqrt{2k+1} \\
 &\times \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M-q & q & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2J \\ J+M \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2J \\ J+M+q \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \\
 &\times \left(\operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2} \right)^{2(J+M)+q} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2(J-M)-q} Y_{kq}(\theta, \varphi). \quad (4.1.14)
 \end{aligned}$$

3. $|- \theta_1, 0\rangle \langle \theta_1, 0|$: Mediante un proceso similar al ya realizado

$$G_{kq}^{gsnp3} = \frac{1}{2(1 + (\cos \theta_1)^{2J})} \sum_{M, M'} (-1)^{J-M} \binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \\ \times \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \left(\sin \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J+M+M'} (-1)^{J+M} \\ \times \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J-M-M'}.$$

Y en consecuencia la función de Wigner correspondiente es

$$W_3^{gsnp}(\theta, \varphi) = \frac{\sqrt{2J+1}}{2\sqrt{4\pi}(1 + (\cos \theta_1)^{2J})} \sum_{k, q, M} (-1)^{2J} \sqrt{2k+1} \\ \times \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M-q & q & M \end{pmatrix} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+M+q}^{\frac{1}{2}} \\ \times \left(\sin \frac{\theta_1}{2} \right)^{2(J+M)+q} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2(J-M)-q} Y_{kq}(\theta, \varphi). \quad (4.1.15)$$

4. $|- \theta_1, 0\rangle \langle - \theta_1, 0|$: Finalmente,

$$G_{kq}^{gsnp4} = \frac{1}{2(1 + (\cos \theta_1)^{2J})} \sum_{M, M'} (-1)^{J-M} \binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \\ \times \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \left(\sin \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J+M+M'} (-1)^{2J+M+M'} \\ \times \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2J-M-M'}.$$

Con lo cual la función de Wigner correspondiente es

$$\begin{aligned}
 W_4^{gsnp}(\theta, \varphi) &= \frac{\sqrt{2J+1}}{2\sqrt{4\pi} (1 + (\cos \theta_1)^{2J})} \sum_{k,q,M} (-1)^{3J+M} \sqrt{2k+1} \\
 &\times \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M-q & q & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2J \\ J+M \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2J \\ J+M+q \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \\
 &\times \left(\operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2} \right)^{2(J+M)+q} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2(J-M)-q} Y_{kq}(\theta, \varphi). \quad (4.1.16)
 \end{aligned}$$

Ahora sí, podemos escribir la función de Wigner de un gato de Schrödinger no polar. A partir de lo que ya calculamos esto es simplemente

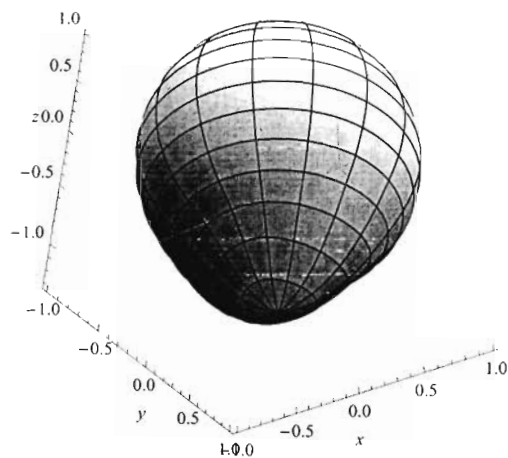
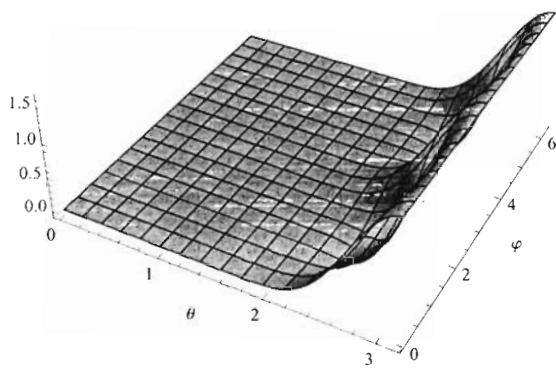
$$W^{gsnp}(\theta, \varphi) = W_1^{gsnp}(\theta, \varphi) + W_2^{gsnp}(\theta, \varphi) + W_3^{gsnp}(\theta, \varphi) + W_4^{gsnp}(\theta, \varphi),$$

o bien al sustituir las expresiones obtenidas en las ecuaciones (4.1.13), (4.1.14), (4.1.15) y (4.1.16), expandir los coeficientes binomiales y realizar algunas simplificaciones simples, concluir que

$$\begin{aligned}
 W^{gsnp}(\theta, \varphi) &= \frac{\sqrt{2J+1}}{2\sqrt{4\pi} (1 + (\cos \theta_1)^{2J})} \sum_{k=0}^{2J} \sum_{q=-k}^k \sum_{M \in \mathcal{S}_q} \sqrt{2k+1} (2J)! \\
 &\times \frac{(-1)^{J-M-q} + (-1)^{2J-q} + (-1)^{2J} + (-1)^{3J+M}}{\sqrt{(J+M)!(J-M)!(J+q+M)!(J-q-M)!}} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M-q & q & M \end{pmatrix} \\
 &\times \left(\operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2} \right)^{2(J+M)+q} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \right)^{2(J-M)-q} Y_{kq}(\theta, \varphi), \quad (4.1.17)
 \end{aligned}$$

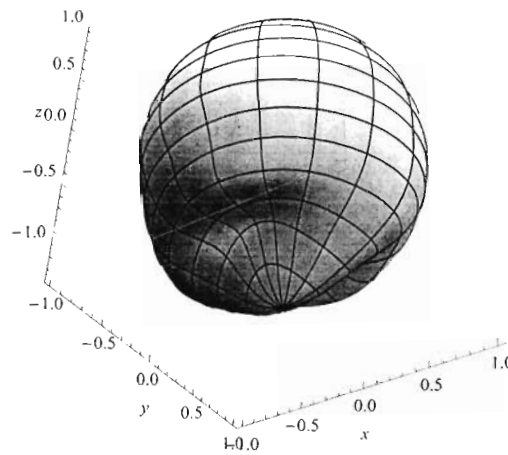
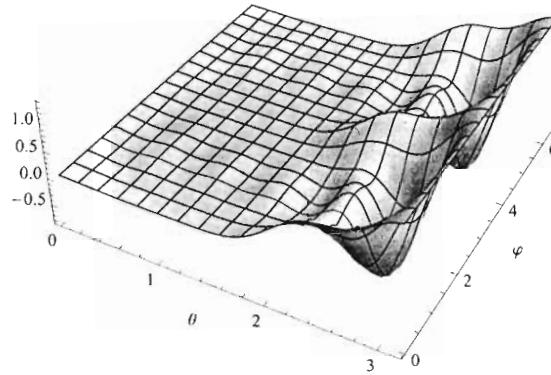
en donde $\mathcal{S}_q = \{M : \max(-J-q, -J) \leq M \leq \min(J-q, J)\}$.

En la figura 4.5 podemos apreciar algunos ejemplos del efecto de cambiar el ángulo θ_1 en la figura de Wigner de un estado de gato no polar. Se pueden apreciar claramente los efectos de interferencia entre los estados superpuestos. Dichos efectos se vuelven más claros conforme se aumenta el ángulo θ_1 . También vemos cómo aparecen además de los efectos de interferencia, efectos de compresión notorios [4].



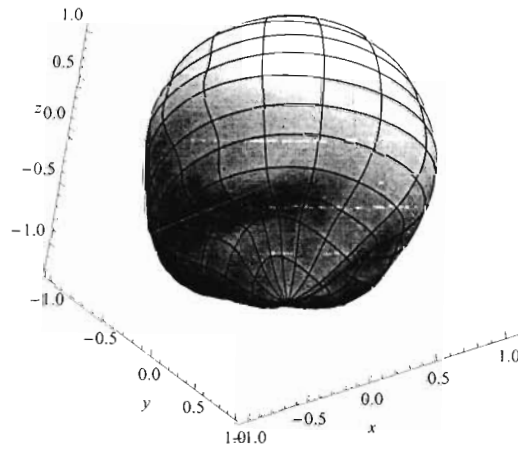
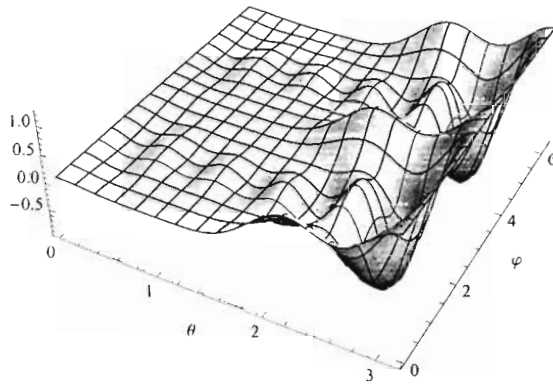
(a) Ejemplo de la función de Wigner para un estado de gato no polar con $J = 5$, $\theta_1 = \frac{\pi}{9}$.

Figura 4.5: Ejemplos de funciones de Wigner para estados de gatos no polares con diferentes valores de θ_1 .



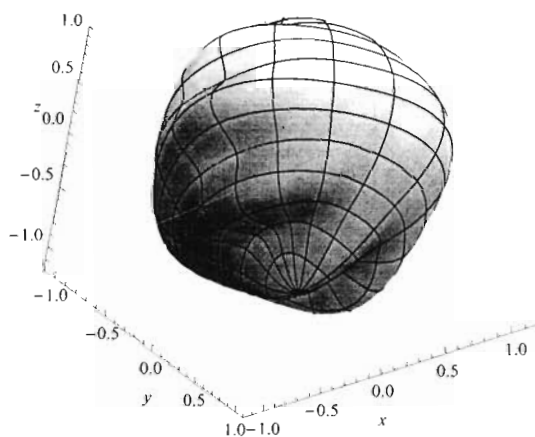
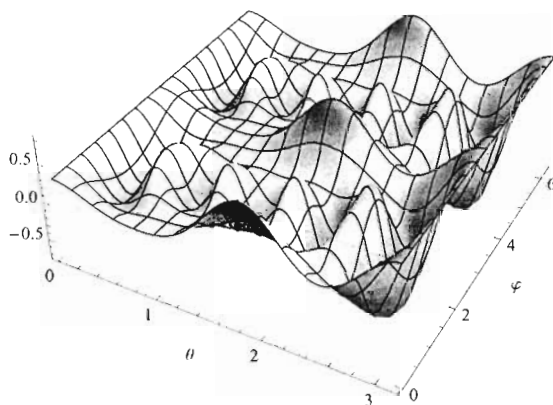
(b) Ejemplo de la función de Wigner para un estado de gato no polar con $J = 5$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

Figura 4.5: Ejemplos de funciones de Wigner para estados de gatos no polares con diferentes valores de θ_1 (cont.).



(c) Ejemplo de la función de Wigner para un estado de gato no polar con $J = 5$, $\theta_1 = \frac{11\pi}{36}$.

Figura 4.5: Ejemplos de funciones de Wigner para estados de gatos no polares con diferentes valores de θ_1 (cont.).



(d) Ejemplo de la función de Wigner para un estado de gato no polar con $J = 5$, $\theta_1 = \frac{27\pi}{180}$.

Figura 4.5: Ejemplos de funciones de Wigner para estados de gatos no polares con diferentes valores de θ_1 (cont.).

4.2. Husimi-Kano

4.2.1. Definición

Ya que hemos analizado la función de Wigner para una diversidad de estados del campo atómico vamos a hacer lo mismo con la función de Husimi. La extensión de la definición (2.2.2b) de la función de Husimi del caso electromagnético al caso atómico es inmediata: sólo debemos de reemplazar los estados coherentes electromagnéticos por los estados coherentes atómicos, es decir, definimos a la función de Husimi del caso atómico como [42, 43]

$$Q(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | \hat{\rho} | \theta, \varphi \rangle, \quad (4.2.1)$$

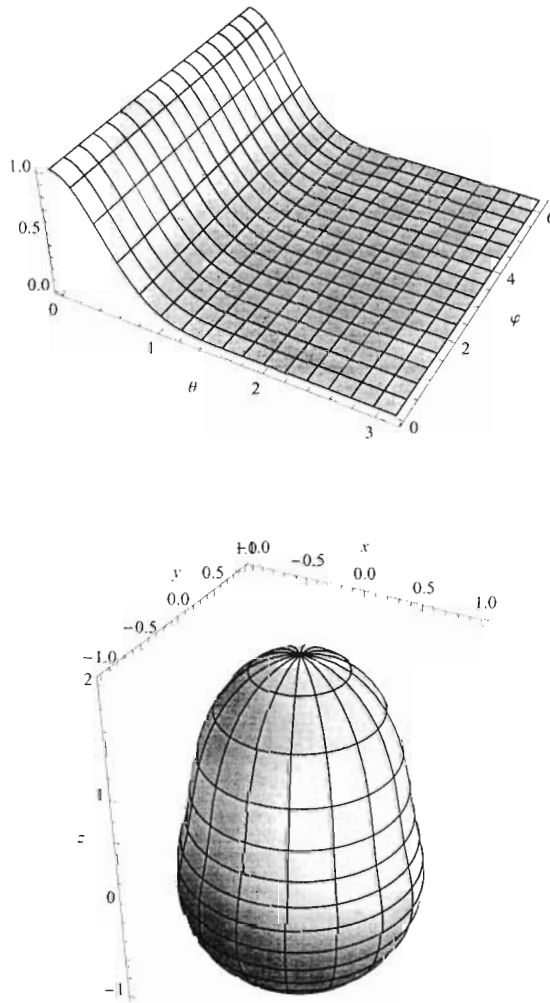
en donde $|\theta, \varphi\rangle$ denota a un estado coherente atómico y $\hat{\rho}$ es el operador densidad del estado que deseamos analizar. En lo que sigue estudiaremos algunos ejemplos sencillos.

4.2.2. Ejemplos de funciones de Husimi para diferentes estados del campo atómico

Empezamos analizando la función de Husimi para un estado de Dicke $|J, M\rangle$. En este caso, el operador densidad está dado por $\hat{\rho} = |J, M\rangle \langle J, M|$, y en consecuencia la función de Husimi para un estado de Dicke es, al recordar la expresión (3.2.4),

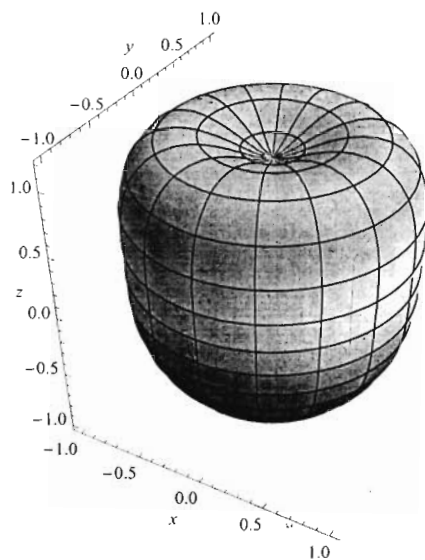
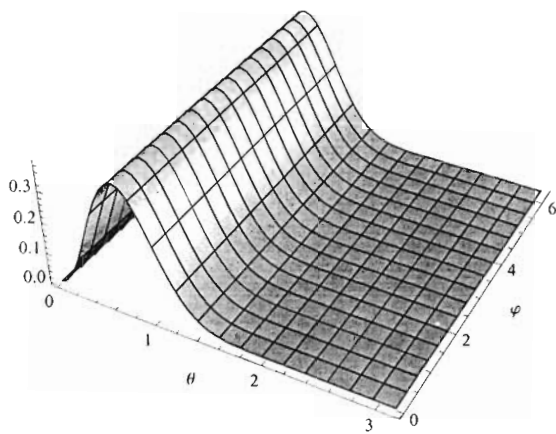
$$\begin{aligned} Q^{Dicke}(\theta, \varphi) &= |\langle J, M | \theta, \varphi \rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^J} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \tau^{J+M} \right|^2 \\ &= \left| \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{J+M} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{J-M} \right|^2 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

En la figura 4.6 es posible apreciar ejemplos de las funciones de Husimi para estados de Dicke con $J = 5$ y diferentes valores de M .



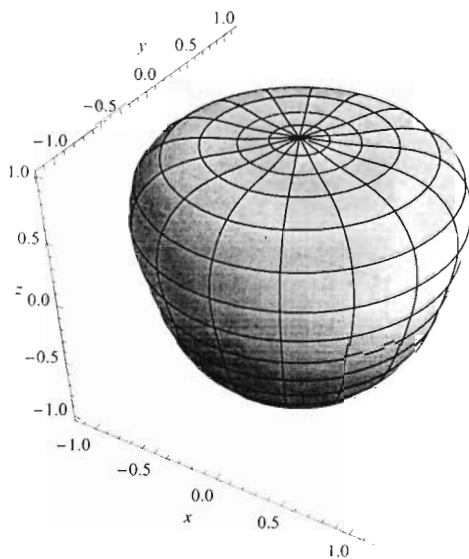
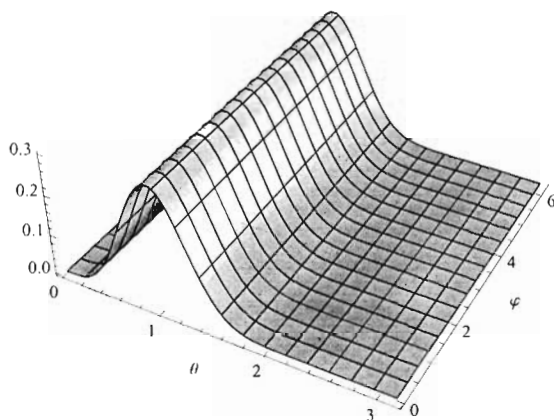
(a) Ejemplo de la función de Husimi para $|5, -5\rangle$.

Figura 4.6: Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.



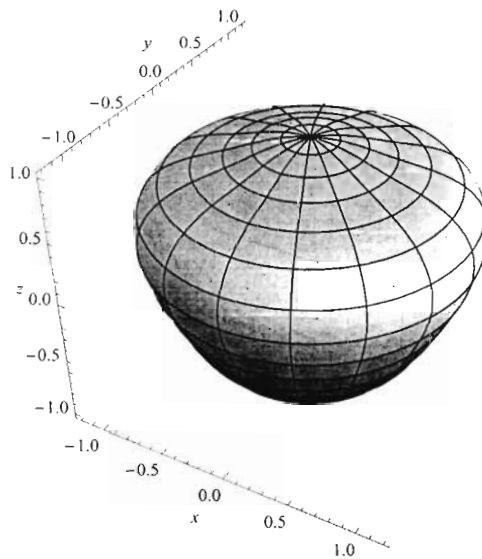
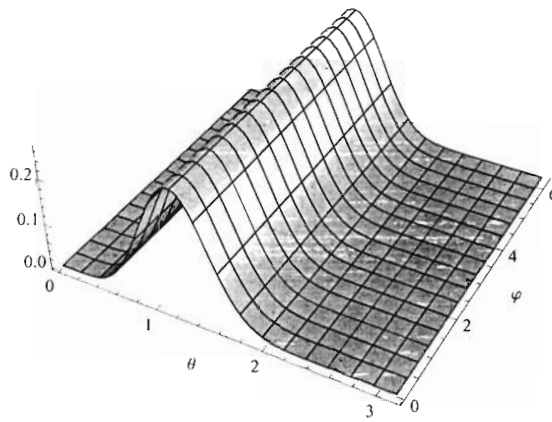
(b) Ejemplo de la función de Husimi para $|5, -4\rangle$.

Figura 4.6: Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.(cont.)



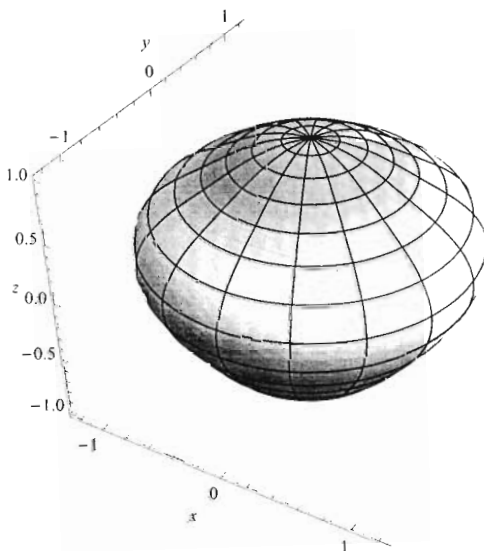
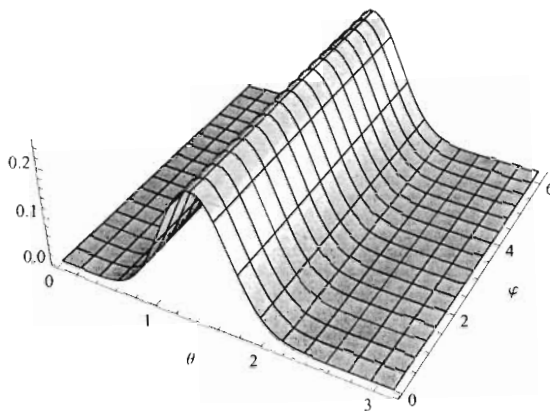
(c) Ejemplo de la función de Husimi para $|5, -3\rangle$.

Figura 4.6: Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.(cont.)



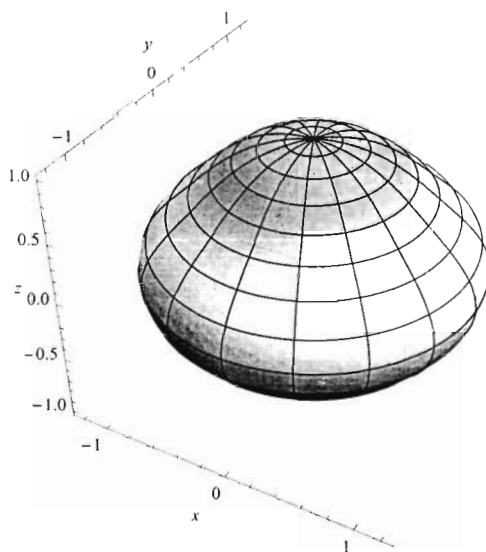
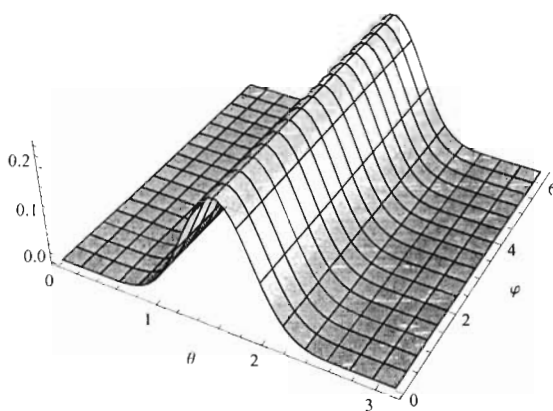
(d) Ejemplo de la función de Husimi para $|5, -2\rangle$.

Figura 4.6: Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.(cont.)



(e) Ejemplo de la función de Husimi para $|5, -1\rangle$.

Figura 4.6: Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.(cont.)



(f) Ejemplo de la función de Husimi para $|5, 0\rangle$.

Figura 4.6: Ejemplos de funciones de Husimi para estados de Dicke con $J=5$.(cont.)

Ahora deducimos la forma que tiene la función de Husimi para un estado coherente $|\theta_c, \varphi_c\rangle$. En este caso el operador densidad es $\hat{\rho} = |\theta_c, \varphi_c\rangle \langle \theta_c, \varphi_c|$. De esta manera, la función de Husimi es simplemente $|\langle \theta_c, \varphi_c | \theta, \varphi \rangle|^2$. ¡Pero ya calculamos el valor de esta expresión en la ecuación (3.2.11)!. Por lo tanto la función de Husimi de un estado coherente atómico queda dada por

$$Q^{coh}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{2} (1 + \cos \theta \cos \theta_c + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta_c (\cos \varphi \cos \varphi_c + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_c)) \right)^{2J} \quad (4.2.3)$$

En la figura (4.7) se puede apreciar un ejemplo.

Finalmente, calculemos la función de Husimi para un estado atómico comprimido $|\chi, \theta_c, \varphi_c\rangle$. En este caso el operador densidad está dado por $\hat{\rho} = |\chi, \theta_c, \varphi_c\rangle \langle \chi, \theta_c, \varphi_c|$, y por tanto, al recordar la expresión (3.3.2), encontramos que la función de Husimi queda dada por

$$\begin{aligned} Q^{comp}(\theta, \varphi) &= |\langle \chi, \theta_c, \varphi_c | \theta, \varphi \rangle|^2 \\ &= \left| \sum_{M, M'} e^{i\chi M'^2} \frac{\binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}}}{(1 + |\tau_c|^2)^J} (\tau_c^*)^{J+M'} \frac{\binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}}}{(1 + |\tau|^2)^J} \tau^{J+M} \langle J, M' | J, M \rangle \right|^2 \\ &= \left| \sum_{M=-J}^J e^{i\chi M^2} \binom{2J}{J+M} e^{i(J+M)(\varphi - \varphi_c)} \left(\cos \frac{\theta_c}{2} \right)^{J-M} \left(\operatorname{sen} \frac{\theta_c}{2} \right)^{J+M} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{J-M} \left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)^{J+M} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

En la figura 4.8 es posible apreciar los cambios en la función de Husimi de un estado comprimido al ir cambiando el parámetro de compresión.

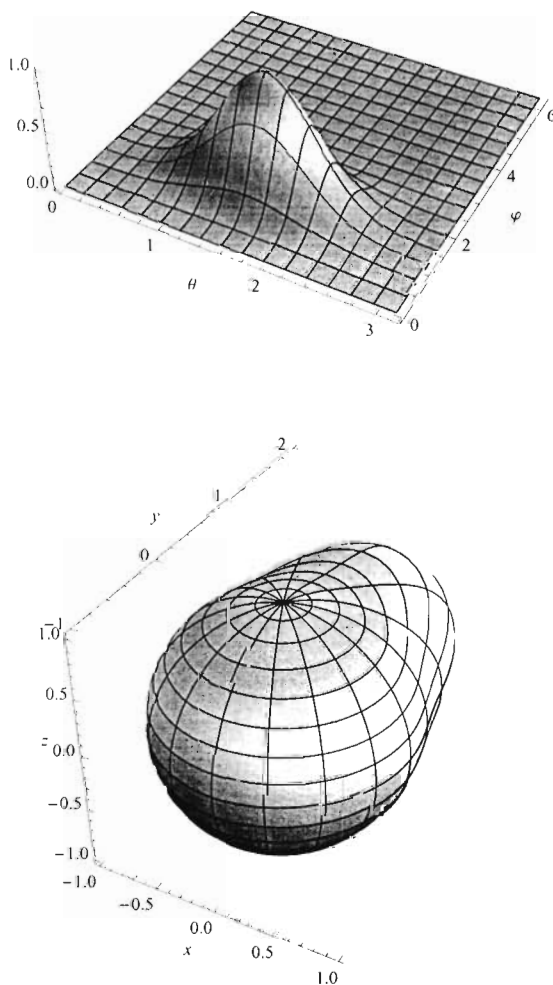
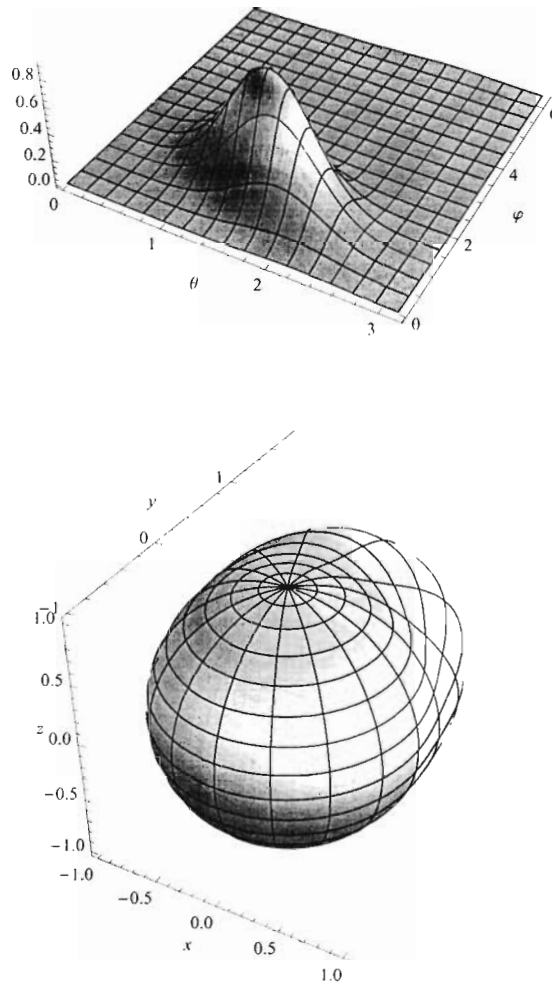
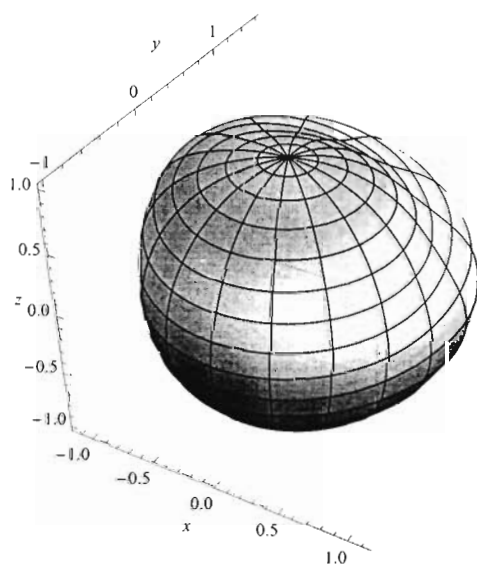
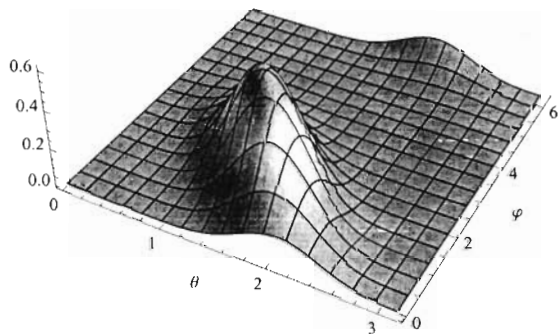


Figura 4.7: Ejemplo de la función de Husimi para el estado coherente $\left| \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



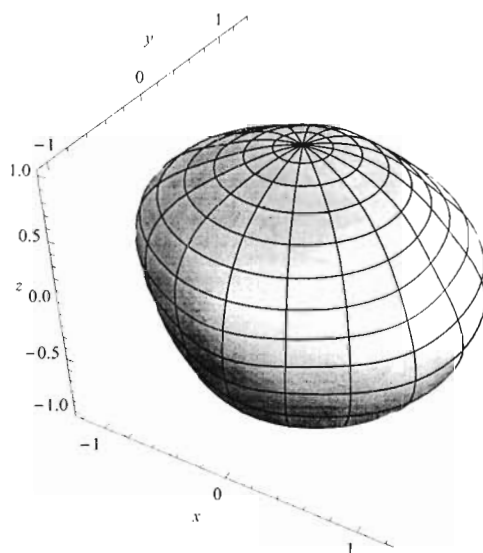
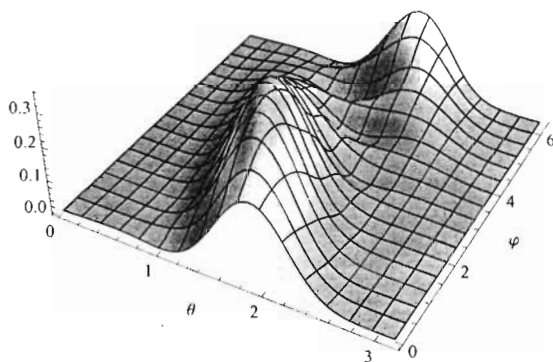
(a) Ejemplo de la función de Husimi para $\left|0.1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Figura 4.8: Ejemplos de funciones de Husimi para estados comprimidos con $J = 5$.



(b) Ejemplo de la función de Husimi para $\left|0.25, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Figura 4.8: Ejemplos de funciones de Husimi para estados comprimidos con $J = 5$ (cont.).



(c) Ejemplo de la función de Husimi para $\left\langle 0.5, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Figura 4.8: Ejemplos de funciones de Husimi para estados comprimidos con $J = 5$ (cont.).

Conclusiones, análisis y trabajo futuro

EL FORMALISMO DE las pseudodistribuciones de probabilidad no se enseña de manera usual en los cursos de Mecánica Cuántica de nivel licenciatura. Así, en el presente trabajo decidimos estudiar este esquema para los casos de los campos atómico y electromagnético. Las pseudodistribuciones de probabilidad son una herramienta que nos permite analizar y visualizar en el espacio fase [18] diversos estados del campo electromagnético o atómico y utilizar nuestra intuición estadística y probabilística en el estudio de la Mecánica Cuántica. Las pseudodistribuciones más importantes que se pueden estudiar son la pseudodistribución de Wigner, la de Husimi-Kano y la de Glauber-Sudarshan. Para el caso electromagnético estudiamos las pseudodistribuciones de Wigner, Husimi-Kano y Glauber mientras que para el caso atómico sólo los equivalentes de Wigner y Husimi-Kano. En el caso electromagnético vimos las gráficas de la función de Wigner para estados de Fock, estados coherentes y comprimidos, estados térmicos y de gato de Schrödinger. También vimos las gráficas de la función de Husimi para estados de Fock y para estados térmicos, y por último analizamos la forma de la función de Glauber-Sudarshan para estados de Fock y visualizamos la gráfica de los estados térmicos. En el caso atómico estudiamos la función de Wigner de los estados de Dicke, coherentes atómicos y comprimidos. También analizamos los estados de gato de Schrödinger polares y no polares. Finalizamos con el estudio de la función de Husimi para los estados de Dicke, coherentes atómicos y comprimidos. Aunque no discutimos de manera explícita muchas de las diferencias entre las pseudodistribuciones estudiadas una de las más claras es cómo algunas reflejan

de manera más transparente que otras la naturaleza de los estados que uno se encuentra estudiando. Por ejemplo, la función de Wigner resulta muy apropiada para observar los efectos de interferencia cuántica de los estados de gato de Schrödinger mientras que la función de Husimi no los ilustra de manera tan clara, o la de Glauber que resulta un objeto tan singular que no es posible tener una gráfica de él. Motivos como el antes citado fueron ponderados al elegir los ejemplos a estudiar, y aunque no se haya mencionado en el texto, se trató de utilizar siempre la pseudodistribución que hiciera más fácil la interpretación. No obstante, las distintas pseudodistribuciones no son objetos inconexos entre sí, en el caso electromagnético se encuentran relacionadas mediante transformadas de Fourier [23] y en el caso atómico el formalismo de los operadores de estados multipolares es subyacente a todas ellas [2], y también es posible conectarlas a partir de transformadas integrales con núcleos específicos [30].

Uno de los aspectos más interesantes de la pseudodistribución de Wigner es que las marginales de esta pseudodistribución son las distribuciones de probabilidad de cada una de las variables en el espacio fase. En este sentido, la pseudodistribución de Wigner podría ser considerada como lo más cerca que podemos acercarnos a una distribución de probabilidad conjunta respetando los principios de la Mecánica Cuántica (en particular, el de incertidumbre de Heisenberg). Llamamos a la pseudodistribución de Wigner pseudodistribución y no distribución de probabilidad porque aparecen “*probabilidades*” negativas. Uno podría interpretar a las regiones del espacio fase en el que aparecen las “*probabilidades*” negativas como aquellas en donde se manifiesta de manera más patente el comportamiento cuántico del fenómeno bajo estudio. Es decir, como regiones en donde el fenómeno no tiene un equivalente clásico. El problema de las probabilidades negativas no es de fácil interpretación [11] y aún hay autores que trabajan en refinar la interpretación que puede tener esto [38].

El caso de la pseudodistribución de Wigner para el campo atómico es interesante pues uno puede extender el formalismo utilizado en el caso continuo para generar una pseudodistribución de Wigner discreta [13, 24, 49] y aplicar esto al estudio del espacio fase de qubits. La

distribución discreta de Wigner es una herramienta muy rica pues permite estudiar la tomografía del estado cuántico bajo consideración [24] o bien la evolución estocástica del mismo [9, 10].

Si uno se siente incómodo con la idea de que aparezcan “*probabilidades*” negativas, entonces es posible usar la distribución de Husimi-Kano para que garantice que las probabilidades siempre sean positivas. Esta función ya ha sido utilizada [42, 43] para estudiar la complejidad [47] de sistemas cuánticos de uno y muchos cuerpos así como su comportamiento caótico. Inclusive la delocalización de la función de Husimi, la cual puede ser medida mediante sus momentos, es una señal de enredamiento [5, 17, 29, 35] en un sistema de muchos cuerpos [42].

La distribución de Glauber-Sudarshan puede tomar formas muy singulares, y en consecuencia, esto dificulta su estudio y uso. Sin embargo, probamos para el caso electromagnético el teorema de la equivalencia óptica. Con él es posible expresar al operador densidad en términos de los estados coherentes. Aunque no lo mencionamos, también es posible realizar esto para el caso del campo atómico y se obtiene una fórmula similar [3]. Resultados como este invitan a utilizar los estados coherentes para otros propósitos más generales. Por ejemplo, en [33] se los utiliza para obtener el valor esperado del Hamiltoniano de Cirac [7, 27] y luego usar la teoría de catástrofes para obtener una separatriz y observar regiones de comportamiento crítico en los parámetros que describen a un condensado de Bose-Einstein [15, 28, 40] de dos modos con acoplamiento Josephson [44]. Más aún, se ve cómo existen transiciones de fase bien marcadas al atravesar las diferentes regiones del espacio de parámetros divididas por la separatriz y comportamiento singular de diferentes observables sobre la separatriz.

En este mismo trabajo [33] se estudia también cómo cambian las funciones de Wigner y Husimi en cada una de las regiones del espacio de parámetros y asimismo se determina el comportamiento crítico del segundo momento de la función de Husimi. Se observa cómo las funciones de pseudoprobabilidad cambian al cruzar la separatriz. Además, el comportamiento de los segundos momentos en algunas regiones es constante, y tiene cambios abruptos al cambiar entre las regiones indicadas por la separatriz. Inclusive a partir de los momentos de las pseu-

distribuciones se pueden encontrar las regiones en los que el sistema presenta delocalización y cuantificar esto de manera precisa.

Como podemos apreciar, las funciones de pseudoprobabilidad constituyen un esquema teórico rico y con muchas y variadas aplicaciones que facilitan algunos estudios. Por tanto, esto justifica el que hayamos decidido estudiarlas con detalle y aprender sus propiedades, la deducción de casos particulares, y cómo es que se ven para diferentes ejemplos.

APÉNDICE A

Algunos resultados importantes en el cálculo de operadores

EN ESTE APÉNDICE incluimos los enunciados y las demostraciones de diferentes resultados de gran utilidad en el cálculo de operadores.

A.1. El teorema de la expansión de un operador

Sean \hat{A} y \hat{B} dos operadores lineales arbitrarios y llamemos

$$\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}}.$$

Expandamos a la función \hat{f} como una serie de Taylor alrededor del cero. Esto es, obtengamos el valor de cada una de las derivadas de la función \hat{f} en el origen. Para el caso de la primera derivada tenemos que de la definición,

$$\hat{f}'(x) = e^{x\hat{A}} [\hat{A}, \hat{B}] e^{-x\hat{A}},$$

y por tanto,

$$\hat{f}'(0) = [\hat{A}, \hat{B}].$$

Al derivar nuevamente notamos que

$$\hat{f}''(x) = e^{x\hat{A}} (\hat{A} [\hat{A}, \hat{B}] - [\hat{A}, \hat{B}] \hat{A}) e^{-x\hat{A}},$$

de tal suerte que,

$$\hat{f}''(0) = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] .$$

y así sucesivamente con derivadas de orden superior. Por tanto, la serie de \hat{f} es

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(0) + x\hat{f}'(0) + \frac{x^2}{2!}\hat{f}''(0) + \dots \quad (\text{A.1.1a})$$

$$= \hat{B} + x [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots . \quad (\text{A.1.1b})$$

Este teorema es de particular importancia cuando el conmutador $[\hat{A}, \hat{B}]$ es igual a una constante c , pues así la serie se acaba en el segundo término y tenemos que $\hat{f}(x) = \hat{B} + cx$.

A.2. La fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff

Sean \hat{A} y \hat{B} dos operadores que no necesariamente conmutan pero tales que su conmutador $[\hat{A}, \hat{B}]$ conmuta con ambos, es decir

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] . \quad (\text{A.2.1})$$

Entonces,

$$e^{x(\hat{A}+\hat{B})} = e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}}e^{-\frac{x^2[\hat{A},\hat{B}]}{2}} = e^{x\hat{B}}e^{x\hat{A}}e^{\frac{x^2[\hat{A},\hat{B}]}{2}} . \quad (\text{A.2.2})$$

Probaremos [8, 26] esta afirmación como sigue. Sea

$$\hat{C}(x) = e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}} .$$

Derivemos ambos lados con respecto a x . Así,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{C}(x)}{dx} &= \hat{A}e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}} + e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{x\hat{B}} \\ &= \left(\hat{A} + e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} \right) \hat{C}(x), \end{aligned}$$

que al usar el teorema de la expansión de un operador se convierte en

$$\frac{d\hat{C}(x)}{dx} = ((\hat{A} + \hat{B}) + x [\hat{A}, \hat{B}]) \hat{C}(x)$$

pues los conmutadores de orden superior desaparecen. Notemos además que de la definición de $\hat{C}(x)$, y dado que \hat{A} conmuta con $e^{x\hat{A}}$ y \hat{B} conmuta con $e^{x\hat{B}}$, es posible escribir también

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{C}(x)}{dx} &= e^{x\hat{A}}\hat{A} + e^{x\hat{B}} + e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}}\hat{B} \\ &= e^{x\hat{A}e^{x\hat{B}}} \left(e^{-x\hat{B}}\hat{A}e^{x\hat{B}+\hat{B}} \right) \\ &= \hat{C}(x) (\hat{A} + \hat{B} + x [\hat{A}, \hat{B}]). \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\hat{C}(x)$ conmuta con $\hat{A} + \hat{B} + x [\hat{A}, \hat{B}]$. Por tanto, podemos integrar la ecuación diferencial con respecto a x como si fuera una ecuación diferencial ordinaria y común. Este proceso nos otorga lo siguiente.

$$\hat{C}(x) = e^{x(\hat{A}+\hat{B}) + \frac{x^2[\hat{A},\hat{B}]}{2}} = e^{x(\hat{A}+\hat{B})} e^{\frac{x^2[\hat{A},\hat{B}]}{2}},$$

de donde el resultado deseado es ahora inmediato.

A.3. El teorema del desenredamiento de un operador

Para el caso de $SU(2)$ tenemos una fórmula análoga a la de Baker-Campbel-Hausdorff. Tendremos a bien llamar a esta fórmula el *teorema del desenredamiento* para distinguirla de la fórmula de BCH. Este importante resultado nos dice que podemos escribir

$$\boxed{e^{\zeta\hat{J}_+ - \zeta^*\hat{J}_-} = e^{\tau\hat{J}_+} e^{\ln(1+|\tau|^2)\hat{J}_z} e^{-\tau^*\hat{J}_-},} \quad (\text{A.3.1})$$

en donde se define a $\zeta = \frac{\theta}{2}e^{i\varphi}$ y se obtiene $\tau = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}$.

Para probar esto [14, 50], vamos a utilizar la representación matricial de los operadores \hat{J}_+ , \hat{J}_- y \hat{J}_z . Esto es,

$$\hat{J}_+ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{J}_- \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{J}_z \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3.2})$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} e^{\zeta \hat{J}_+ - \zeta^* \hat{J}_-} &\rightarrow \exp \begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ -\zeta^* & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos |\zeta| & \frac{\zeta}{|\zeta|} \operatorname{sen} |\zeta| \\ -\frac{\zeta^*}{|\zeta|} \operatorname{sen} |\zeta| & \cos |\zeta| \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

o al recordar la definición de ζ ,

$$e^{\zeta \hat{J}_+ - \zeta^* \hat{J}_-} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) & e^{i\varphi} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ -e^{-i\varphi} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) & \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3.4})$$

De forma análoga, usamos la representación matricial para calcular el producto de exponenciales

$$\begin{aligned} e^{\tau \hat{J}_+} e^{\beta \hat{J}_z} e^{-\tau^* \hat{J}_-} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{\beta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\beta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau^* & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{\beta}{2}} - |\tau|^2 e^{-\frac{\beta}{2}} & \tau e^{-\frac{\beta}{2}} \\ -\tau^* e^{-\frac{\beta}{2}} & e^{-\frac{\beta}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

Al comparar (A.3.4) con (A.3.5), resulta inmediato que

$$\begin{aligned} \beta &= \ln \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \tau &= \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

probando el teorema.

APÉNDICE B

Código del programa en Mathematica®

EN ESTE APÉNDICE incluimos el código del programa en Mathematica® utilizado para generar las gráficas de este trabajo.

```
1 (*Fijar el directorio de operación para los \  
→archivos de la  
2 tesis y la paleta de color y el número de puntos a\  
→ usar en las  
3 gráficas 3D*)  
4 (*SetDirectory["C:\\Users\\RamonLopez\\Desktop\\\  
→Tesis  
5 Raul\\Archivos Mathematica"];*) SetDirectory["C:\\\  
→Documents_and  
6 Settings\\Raul\\Mis_documentos"]; (*SetDirectory["\  
→C:\\Documents  
7 and Settings\\José Raúl\\Mis documentos\\Unam\\\  
→tesis"];*)  
8 (*<<Version5 'Graphics';*)  
9 puntos=50;Needs["BarCharts"];Needs["PlotLegends"];\  
→]; micolor="DarkRainbow"; Inicio=SessionTime[];\  
→recursion=2;
```

```

10 (*CAPÍTULO I*) (*Funcion de onda de un oscilador
11 electromagnético*)
12 \[Phi][n_, q_]:=HermiteH[n, q]/Sqrt[2^n*n!*Sqrt[\[Pi]\
->]]*Exp[-q^2/2];
13 (*Exportar gráficas de varias funciones de onda de\
-> osciladores electromagneticos*)
14 Export["funondcuad.pdf", Plot[Evaluate[Table[N[\[Phi]\
->][n, q], 20], {n, 0, 3, 1}], {q, -4, 4}, AxesLabel->{q,\
->,\[Psi]} , PlotLegend->{"n=0", "n=1", "n=2", "n=3"}, \
->LegendPosition->{1, -0.5}]]
15 (*Función de onda irregular -1*)
16 \[Phi]irr1n[q_]:=Exp[q^2/2];
17 (*Función de onda irregular del vacío*)
18 \[Phi]irr0n[q_]:=Sqrt[\[Pi]/2]*Exp[-q^2/2]*Erfi[q\
->];
19 (* Exportar gráficas de lo anterior*)
20 Export["funondcuadirr.pdf", Plot[{N[\[Phi]irr1n[q\
->], 20], N[\[Phi]irr0n[q], 20]}, {q, -2.5, 2.5}, AxesLabel\
->{q, \[Psi]}, PlotLegend->{"Subscript[\[Psi], _-1](q\
->)", "Subscript[\[Psi], _0](q)"}, LegendPosition\
->{1, -0.5}]]
21 (*Ejemplo de una función de onda de un estado \
->coherente*)
22 Export["fundondcoh.pdf", Plot[N[\[Pi]^(-1/4)*Exp[-\
->q-1)^2/2], 20], {q, -3, 3}, AxesLabel->{q, \[Psi]}]]
23 (*Exportar ejemplo de una distribución Poisson*)
24 Export["poisson.pdf", GeneralizedBarChart[Table[{n,\
->N[PDF[PoissonDistribution[5], n], 20], 0.5}, {n,\
->, 0, 15}], AxesLabel->{n, p}]]
25 (*Definir función de onda de estados comprimidos*)
26 \[Psi]comp[\[Zeta]_, p0_, q0_, p_, q_]:=\[Pi]^(-1/4)\
->*\[ExponentialE]^(\[Zeta]/2)*Exp[-\[ExponentialE\
->]^(2*\[Zeta])*(q-q0)^2/(2)+\[ImaginaryI]*p*q-(\
->ImaginaryI)*p0*q0)/(2)];

```

```

27 (*Exportar gráfica con ejemplos*)Export["\
→funondcuadcomp.pdf",Plot[Evaluate[Table[N[\[Psi]\
→comp[\[Zeta],0,0,0,q],20],{\[Zeta],-1,1,0.5}]],{q\
→,-3,3},AxesLabel→{q,\[Psi]},PlotRange→Full,\
→PlotLegend→{"\[Zeta]=-1","\[Zeta]=-0.5","\[Zeta\
→]=0","\[Zeta]=0.5","\[Zeta]=1"},LegendPosition\
→→{1,-0.5}]]
28 (*Definir función de distribución de probabilidad \
→para estados comprimidos y exportar su gráfica*)
29 Pcomp[\[Zeta]_,n_]:=Piecewise[{{0,Mod[n,2]==1},{\
→Binomial[n,n/2]*1/Cosh[\[Zeta]]*(1/2*Tanh[\[Zeta\
→])^n,Mod[n,2]==0}}];
30 Export["distrprobcomp.pdf",GeneralizedBarChart[\
→Table[{n,N[Pcomp[3,n],20],0.5},{n,0,20,1}],\
→AxesLabel→{n,Subscript[p,n]}]]
31 (*CAPÍTULO II*)
32 (*Exportar una gráfica de la función de Wigner \
→para el estado de vacío*)
33 Wc[q_,p_,q0_,p0_]:=1/\[Pi]*Exp[-(q-q0)^2-(p-p0)\
→^2];
34 Export["funcwignervacio.pdf",Plot3D[N[Wc[q,p\
→,0,0],20],{q,-3,3},{p,-3,3},PlotRange→Full,\
→PlotPoints→puntos,MaxRecursion→recursion,\
→ColorFunction→micolor,AxesLabel→{q,p}]]
35 (*idem para un estado coherente con q0=1 y p0=1*)
36 Export["funcwignercoh.pdf",Plot3D[N[Wc[q,p\
→,1,1],20],{q,-3,3},{p,-3,3},PlotRange→Full,\
→PlotPoints→puntos,MaxRecursion→recursion,\
→ColorFunction→micolor,AxesLabel→{q,p}]]
37 (*idem para el estado de vacío comprimido*)
38 \[Zeta]=0.5;(*parámetro de compresión*)Export["\
→funcwignercomp.pdf",Plot3D[N[Wc[Exp[\[Zeta]]*q,Exp\
→[-\[Zeta]]*p,0,0],20],{q,-4,4},{p,-4,4},PlotRange\
→→Full,PlotPoints→puntos,MaxRecursion→recursion\
→,ColorFunction→micolor,AxesLabel→{q,p}]]

```

```

39 (*Definir la función de Wigner de un estado de \
   → número*)
40 Wn[q_ , p_ , n_ ]:=(-1)^n/\[Pi]*Exp[-q^2-p^2]*LaguerreL\
   →[n,2*q^2+2*p^2];
41 (*Exportar una gráfica con ejemplos para n=1 y n=4\
   → *)
42 Export["funcwignernum.pdf",Column[Table[Plot3D[N[\
   → Wn[q,p,n],20],{q,-5,5},{p,-5,5},PlotRange->Full,\
   → PlotPoints->puntos, MaxRecursion->recursion,\
   → ColorFunction->micolor, AxesLabel->{q,p}],{n\
   → ,1,4,3}]]]
43 (*Función de Wigner para un estado de Gato*)
44 WG[q_ , p_ , q0_ ]:=1/(2 \[Pi]*(1+ \[ExponentialE]^(-q0\
   → ^2))*(Exp[-(q-q0)^2-p^2]+Exp[-(q+q0)^2-p^2]+2*Exp\
   → [-q^2-p^2]*Cos[2*p*q0]);
45 Export["funcwignergato.pdf",Column[Table[Plot3D[N[\
   → WG[q,p,q0],20],{q,-5,5},{p,-5,5},PlotRange->Full,\
   → PlotPoints->puntos, MaxRecursion->recursion,\
   → ColorFunction->micolor, AxesLabel->{q,p}],{q0\
   → ,1,3,2}]]]
46 (*Función de Wigner para un estado térmico*)
47 WT[q_ , p_ ,\[Beta]_ ]:=1/\[Pi]*Tanh[\[Beta]/2]*Exp[-(\
   → q^2+p^2)*Tanh[\[Beta]/2]];
48 Export["funcwignerterm.pdf",Plot3D[N[WT[q,p\
   → ,.1],20],{q,-5,5},{p,-5,5},PlotRange->Full,\
   → PlotPoints->puntos, MaxRecursion->recursion,\
   → ColorFunction->micolor, AxesLabel->{q,p}]]]
49 (*Función Q de un estado de Fock*)
50 Qn[p_ , q_ , n_ ]:=1/(2*\[Pi]*n!)*Exp[-1/2*(q^2+p^2)\
   → ]*(1/2*(q^2+p^2))^n;
51 (*Exportar una gráfica con ejemplos para n=1 y n=4\
   → *)
52 Export["funchusiminum.pdf",Column[Table[Plot3D[N[\
   → Qn[q,p,n],20],{q,-5,5},{p,-5,5},PlotRange->Full,\
   → PlotPoints->puntos, MaxRecursion->recursion,\

```

```

→ColorFunction→micolor ,AxesLabel→{q,p}},{n\
→,1,4,3}]]]
53
54 (*Definir la función Q de un estado térmico*)
55 QT[q_,p_,\[Beta]_]:=1/(2\[Pi])*(1-Exp[-\[Beta]])*\
→Exp[-1/2*(q^2+p^2)*(1-Exp[-\[Beta]])];
56 (*Exportar la gráfica*)
57 Export["funchusimitem.pdf",Plot3D[N[QT[q,p\
→,.1],20],{q,-5,5},{p,-5,5},PlotRange→Full,\
→PlotPoints→puntos,
58 MaxRecursion→recursion ,ColorFunction→micolor ,\
→AxesLabel→{q,p}]]]
59 (*Definir la función P de un estado térmico*)
60 PT[q_,p_,\[Beta]_]:=1/(\[Pi])*(Exp[\[Beta]]-1)*Exp\
→[-1/2*(q^2+p^2)*(Exp[\[Beta]]-1)];
61 Export["funcglauberterm.pdf",Plot3D[N[PT[q,p\
→,0.1],20],{q,-5,5},{p,-5,5},PlotRange→Full,\
→PlotPoints→puntos,
62 MaxRecursion→recursion ,ColorFunction→micolor ,\
→AxesLabel→{q,p}]]]
63 (*CAPÍTULO IV*) (*Función de Wigner para un estado\
→ de Dicke*)
64 WDicke[\[Theta]_,\[Phi]_,J_,M_]:=Sqrt[(2*J+1)\
→/(4*\[Pi])]*Sum[SphericalHarmonicY[k,0,\[Theta],\[\
→Phi]]*(-1)^(J-M)*Sqrt[2*k+1]*ThreeJSymbol[{J,-M},{\
→k,0},{J,M}],{k,0,2*J}];
65 ComplexExpand[WDicke[\[Theta],\[Phi],5,-5]];
66 WDickebis[\[Theta]_,\[Phi]_]:=Evaluate[%];
67 (*Exportar gráficas para diferentes valores de M y\
→ con J=5*)
68 Export["WignerDicke5.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[N[\
→WDickebis[\[Theta],\[Phi]],20],{\[Theta],0,\[Pi]\
→}],{\[Phi],0,2*\[Pi]}},PlotRange→Full,PlotPoints→\
→puntos

```

```

69 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{\[Theta] , \[CurlyPhi]}} , { \
->SphericalPlot3D[N[1+WDickebis[\[Theta] , \[Phi]]/( \
->Sqrt[5*(5+1))],20] , {\[Theta] , 0 , \[Pi]} , {\[Phi] \
-> , 0 , 2*\[Pi]}] , PlotRange->Full , PlotPoints->puntos
70 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{x , y , z} , ViewPoint \
->->{1.340 , -2.142 , -2.251}}}]
71 ComplexExpand[WDicke[\[Theta] , \[Phi] , 5 , -4]];
72 WDickebis[\[Theta]_ , \[Phi]_] := Evaluate[%];
73 Export["WignerDicke4.pdf" , GraphicsGrid[{{Plot3D[N[ \
->WDickebis[\[Theta] , \[Phi]] , 20] , {\[Theta] , 0 , \[Pi] \
->}} , {\[Phi] , 0 , 2*\[Pi]}] , PlotRange->Full , PlotPoints-> \
->puntos
74 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{\[Theta] , \[CurlyPhi]}} , { \
->SphericalPlot3D[N[1+WDickebis[\[Theta] , \[Phi]]/( \
->Sqrt[5*(5+1))],20] , {\[Theta] , 0 , \[Pi]} , {\[Phi] \
-> , 0 , 2*\[Pi]}] , PlotRange->Full , PlotPoints->puntos
75 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{x , y , z} , ViewPoint \
->->{1.340 , -2.142 , -2.251}}}]
76 ComplexExpand[WDicke[\[Theta] , \[Phi] , 5 , -3]];
77 WDickebis[\[Theta]_ , \[Phi]_] := Evaluate[%];
78 Export["WignerDicke3.pdf" , GraphicsGrid[{{Plot3D[N[ \
->WDickebis[\[Theta] , \[Phi]] , 20] , {\[Theta] , 0 , \[Pi] \
->}} , {\[Phi] , 0 , 2*\[Pi]}] , PlotRange->Full , PlotPoints-> \
->puntos
79 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{\[Theta] , \[CurlyPhi]}} , { \
->SphericalPlot3D[N[1+WDickebis[\[Theta] , \[Phi]]/( \
->Sqrt[5*(5+1))],20] , {\[Theta] , 0 , \[Pi]} , {\[Phi] \
-> , 0 , 2*\[Pi]}] , PlotRange->Full , PlotPoints->puntos
80 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{x , y , z} , ViewPoint \

```

```

-->{1.340,-2.142,-2.251}}}]
81 ComplexExpand[WDicke[\[Theta],[Phi],5,-2]];
82 WDickebis[\[Theta]_,\[Phi]_] := Evaluate[%];
83 Export["WignerDicke2.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[N[\
--WDickebis[\[Theta],[Phi]],20],{\[Theta],0,[Pi\
--]},{\[Phi],0,2*\[Pi]}],PlotRange->Full,PlotPoints->\
--puntos
84 ,MaxRecursion->recursion,ColorFunction->micolor,\
--AxesLabel->{\[Theta],[CurlyPhi]}],{\
--SphericalPlot3D[N[1+WDickebis[\[Theta],[Phi]]/(\
--Sqrt[5*(5+1)])],{\[Theta],0,[Pi]},{\[Phi],0,2*\[\
--Pi]}],PlotRange->Full,PlotPoints->puntos
85 ,MaxRecursion->recursion,ColorFunction->micolor,\
--AxesLabel->{x,y,z},ViewPoint\
-->{1.340,-2.142,-2.251}}}]
86 ComplexExpand[WDicke[\[Theta],[Phi],5,-1]];
87 WDickebis[\[Theta]_,\[Phi]_] := Evaluate[%];
88 Export["WignerDicke1.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[N[\
--WDickebis[\[Theta],[Phi]],20],{\[Theta],0,[Pi\
--]},{\[Phi],0,2*\[Pi]}],PlotRange->Full,PlotPoints->\
--puntos
89 ,MaxRecursion->recursion,ColorFunction->micolor,\
--AxesLabel->{\[Theta],[CurlyPhi]}],{\
--SphericalPlot3D[N[1+WDickebis[\[Theta],[Phi]]/(\
--Sqrt[5*(5+1)]),20],{\[Theta],0,[Pi]},{\[Phi]\
--},0,2*\[Pi]}],PlotRange->Full,PlotPoints->puntos
90 ,MaxRecursion->recursion,ColorFunction->micolor,\
--AxesLabel->{x,y,z},ViewPoint\
-->{1.340,-2.142,-2.251}}}]
91 ComplexExpand[WDicke[\[Theta],[Phi],5,0]];
92 WDickebis[\[Theta]_,\[Phi]_] := Evaluate[%];
93 Export["WignerDicke0.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[N[\
--WDickebis[\[Theta],[Phi]],20],{\[Theta],0,[Pi\
--]},{\[Phi],0,2*\[Pi]}],PlotRange->Full,PlotPoints->\
--puntos

```

```

94 ,MaxRecursion->recursion ,ColorFunction->micolor ,\
->AxesLabel->{\[Theta] ,\[CurlyPhi]}} ,{\
->SphericalPlot3D[N[1+WDickebis[\[Theta] ,\[Phi]]/( \
->Sqrt[5*(5+1) ]),20] ,{\[Theta] ,0 ,\[Pi]}} ,{\[Phi]\
->] ,0 ,2*\[Pi]}} ,PlotRange->Full ,PlotPoints->puntos
95 ,MaxRecursion->recursion ,ColorFunction->micolor ,\
->AxesLabel->{x ,y ,z} ,ViewPoint\
->->{1.340 , -2.142 , -2.251}]]]]
96 (*Función de Wigner para un estado coherente \
->atómico*)
97 Wcoh[\[Theta]_ ,\[Phi]_ ,J_ ,\[Theta]c_ ,\[Phi]c_]:= \
->Sum[(-1)^(q-k) *(2*J) !* Sqrt[(2*J+1)/((2*J-k) !*(2*J+\
->k+1) !)] *SphericalHarmonicY[k ,q ,\[Theta] ,\[Phi]]* \
->SphericalHarmonicY[k , -q , -\[Theta]c , -\[Phi]c] ,{k\
->, 0 , 2*J} , {q , -k , k}];
98 ComplexExpand[Wcoh[\[Theta] ,\[Phi] ,5 ,\[Pi]/2 ,\[Pi]\
->]/2]];
99 Wcohbis[\[Theta]_ ,\[Phi]_]:= Evaluate[%];
100 (*Exportar un ejemplo de la función de Wigner de \
->un estado
101 coherente atómico*)
102 Export["Wignercohat.pdf" ,GraphicsGrid[{{Plot3D[N[\
->Wcohbis[\[Theta] ,\[Phi]] ,20] ,{\[Theta] ,0 ,\[Pi]\
->]}} ,{\[Phi] ,0 ,2*\[Pi]}} ,PlotRange->Full ,PlotPoints->\
->puntos
103 ,MaxRecursion->recursion ,ColorFunction->micolor ,\
->AxesLabel->{\[Theta] ,\[CurlyPhi]}} ,{\
->SphericalPlot3D[N[1+Wcohbis[\[Theta] ,\[Phi]]/( Sqrt\
->[5*(5+1) ]),20] ,{\[Theta] ,0 ,\[Pi]}} ,{\[Phi] ,0 ,2*\[Pi]\
->]}} ,PlotRange->Full ,PlotPoints->puntos
104 ,MaxRecursion->recursion ,ColorFunction->micolor ,\
->AxesLabel->{x ,y ,z}]]]]
105 (*Función de Wigner de un estado comprimido*)
106 Wcomp[\[Theta]_ ,\[Phi]_ ,\[Chi]_ ,J_ ,\[Theta]c_ ,\[ \
->Phi]c_]:= Sqrt[(2*J+1)/(4*\[Pi])] *Sum[

```



```

107 SphericalHarmonicY[k, q, \[Theta], \[Phi]]*Exp[\[ImaginaryI]*\[Chi]*((q+M)^2-M^2)*Binomial[2*J, J+M,
→]^(1/2)*Binomial[2*J, J+q+M]^(1/2)*Sqrt[2*k+1]*\
→ThreeJSymbol[\{J, -q-M\}, \{k, q\}, \{J, M\}]*(-1)^(J-q-M)*(\
→Sin[\[Theta]c/2])^(2*(J+M)+q)*(Cos[\[Theta]c/2])\
→^(2*(J-M)-q)*Exp[\[ImaginaryI]*\[Phi]c*q]
108 , \{k, 0, 2*J\}, \{q, -k, k\}, \{M, Max[-J, -J-q], Min[J, J-q]\}]; \
→(*Exportar
109 dos ejemplos de funciones de Wigner al cambiar el \
→parámetro de
110 compresión *)
111 ComplexExpand[Wcomp[\[Theta], \[Phi], 0.5, 5, \[Pi]
→]/2, \[Pi]/2];
112 Wcompbis[\[Theta]_, \[Phi]_] := Evaluate[%];
113 Export["Wignercomp05at.pdf", GraphicsGrid[{{Plot3D[\
→Chop[N[Wcompbis[\[Theta], \[Phi]], 20]], {\[Theta]
→], 0, \[Pi]}, {\[Phi], 0, 2*\[Pi]}, PlotRange→Full, \
→PlotPoints→puntos
114 , MaxRecursion→recursion, ColorFunction→micolor, \
→AxesLabel→{\[Theta], \[CurlyPhi]}}], {\
→SphericalPlot3D[Chop[N[1+Wcompbis[\[Theta], \[Phi]
→]]/(Sqrt[5*(5+1)]), 20]], {\[Theta], 0, \[Pi]}, {\[Phi]
→], 0, 2*\[Pi]}, PlotRange→Full, PlotPoints→puntos
115 , MaxRecursion→recursion, ColorFunction→micolor, \
→AxesLabel→{x, y, z}}}}]]
116 ComplexExpand[Wcomp[\[Theta], \[Phi], 0.25, 5, \[Pi]
→]/2, \[Pi]/2];
117 Wcompbis[\[Theta]_, \[Phi]_] := Evaluate[%];
118 Export["Wignercomp025at.pdf", GraphicsGrid[{{Plot3D\
→[Chop[N[Wcompbis[\[Theta], \[Phi]], 20]], {\[Theta]
→], 0, \[Pi]}, {\[Phi], 0, 2*\[Pi]}, PlotRange→Full, \
→PlotPoints→puntos
119 , MaxRecursion→recursion, ColorFunction→micolor, \
→AxesLabel→{\[Theta], \[CurlyPhi]}}], {\
→SphericalPlot3D[Chop[N[1+Wcompbis[\[Theta], \[Phi]

```

```

→]]/(Sqrt[5*(5+1)]),20]],{[Theta],0,[Pi]},{[Phi]
→],0,2*[Pi]},PlotRange→Full,PlotPoints→puntos
120 ,MaxRecursion→recursion,ColorFunction→micolor,
→AxesLabel→{x,y,z}}}]
121 ComplexExpand[Wcomp[[Theta],[Phi],0.1,5,[Pi]
→]/2,[Pi]/2]];
122 Wcompbis[[Theta]_,[Phi]_] := Evaluate[%];
123 Export["Wignercomp01at.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[
→Chop[N[Wcompbis[[Theta],[Phi]],20]],{[Theta]
→],0,[Pi]},{[Phi],0,2*[Pi]},PlotRange→Full,
→PlotPoints→puntos
124 ,MaxRecursion→recursion,ColorFunction→micolor,
→AxesLabel→{[Theta],[CurlyPhi]}}},{
→SphericalPlot3D[Chop[N[1+Wcompbis[[Theta],[Phi]
→]]/(Sqrt[5*(5+1)]),20]],{[Theta],0,[Pi]},{[Phi]
→],0,2*[Pi]},PlotRange→Full,PlotPoints→puntos
125 ,MaxRecursion→recursion,ColorFunction→micolor,
→AxesLabel→{x,y,z}}}]
126 (*Función de Wigner de un estado de Gato atómico
→polar*)
127 Wgatopol[[Theta]_,[Phi]_,J_] := (1/2)*Sqrt[(2*J+1)
→/(4*[Pi])]*(Sum[
128 (Sqrt[2*k+1]*(2*J)!)/(Sqrt[(2*J-k)!*(2*J+k+1)!])*(
→SphericalHarmonicY[k,0,[Theta],[Phi]]+
→SphericalHarmonicY[k,0,[Pi]-[Theta],[Phi]])
129 ,{k,0,2*J}]+
130 2*Sqrt[(2*(2*J)+1)/(4*[Pi])]*(Sin[[Theta]])
→^(2*J)*Cos[2*J*[Phi]])/(2^(2*J)*(2*J)!);
131 ComplexExpand[Wgatopol[[Theta],[Phi],5]];
132 Wgatopolbis[[Theta]_,[Phi]_] := Evaluate[%];
133 (*Ejemplo con J=5*)
134 Export["Wignergatopolat.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[
→[N[Wgatopolbis[[Theta],[Phi]],20]],{[Theta],0,[
→Pi]},{[Phi],0,2*[Pi]},PlotRange→Full,PlotPoints
→→puntos

```

```

135 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{\[Theta],\[CurlyPhi]}}},{\
->SphericalPlot3D[N[1+Wgatonopolbis[\[Theta],\[Phi]]/(
->Sqrt[5*(5+1)]),20],{\[Theta],0,\[Pi]},{\[Phi]
->],0,2*\[Pi]},PlotRange->Full,PlotPoints->puntos
136 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{x,y,z}}}]
137 (*Función de Wigner de un estado de Gato atómico \
->NO polar*)
138 Wgatonopol[\[Theta]_,\[Phi]_,J_,\[Theta]c_]:=Sqrt\
->[(2*J+1)/(4*\[Pi])]*Sum[
139 (Sqrt[2*k+1]*(2*J)!)/(2*(1+(Cos[\[Theta]c])^(2*J))\
->)*((-1)^(J-q-M)+(-1)^(3*J+M)+(-1)^(2*J)+(-1)^(2*J-
->q))/(Sqrt[(J+M)!*(J-M)!*(J+q+M)!*(J-q-M)!])*
140 ThreeJSymbol[{J,-M-q},{k,q},{J,M}*(Sin[\[Theta]c\
->/2])^(2*(J+M)+q)*(Cos[\[Theta]c/2])^(2*(J-M)-q)*\
->SphericalHarmonicY[k,q,\[Theta],\[Phi]]
141 ,{k,0,2*J},{q,-k,k},{M,Max[-J,-J-q],Min[J,J-q]}}];
142 ComplexExpand[Wgatonopol[\[Theta],\[Phi],5,\[Pi]
->]/9]];
143 Wgatonopolbis[\[Theta]_,\[Phi]_]:=Evaluate[%];
144 Export["Wignergatonopolat9.pdf",GraphicsGrid[{{\
->Plot3D[N[Wgatonopolbis[\[Theta],\[Phi]],20],{\[Theta]
->],0,\[Pi]},{\[Phi],0,2*\[Pi]},PlotRange->Full\
->,PlotPoints->puntos
145 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{\[Theta],\[CurlyPhi]}}},{\
->SphericalPlot3D[N[1+Wgatonopolbis[\[Theta],\[Phi]
->]]/(Sqrt[5*(5+1)]),20],{\[Theta],0,\[Pi]},{\[Phi]
->],0,2*\[Pi]},PlotRange->Full,PlotPoints->puntos
146 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{x,y,z},ViewPoint\
->->{1.340,-2.142,-2.251}}}]
147 ComplexExpand[Wgatonopol[\[Theta],\[Phi],5,\[Pi]
->]/4]];

```

```

148 Wgatonopolbis [\ [Theta]_, \ [Phi]_] := Evaluate [%];
149 Export [ "Wignergatonopolat4 . pdf" , GraphicsGrid [ { { \
→Plot3D [ N [ Wgatonopolbis [\ [Theta] , \ [Phi] ] , 20 ] , { \ [ \
→Theta ] , 0 , \ [ Pi ] } , { \ [ Phi ] , 0 , 2 * \ [ Pi ] } , PlotRange → Full \
→ , PlotPoints → puntos
150 , MaxRecursion → recursion , ColorFunction → micolor , \
→AxesLabel → { \ [Theta] , \ [ CurlyPhi ] } } } , { \
→SphericalPlot3D [ N [ 1 + Wgatonopolbis [\ [Theta] , \ [Phi] \
→ ] ] / ( Sqrt [ 5 * ( 5 + 1 ) ] ) , 20 ] , { \ [Theta] , 0 , \ [ Pi ] } , { \ [ Phi \
→ ] , 0 , 2 * \ [ Pi ] } , PlotRange → Full , PlotPoints → puntos
151 , MaxRecursion → recursion , ColorFunction → micolor , \
→AxesLabel → { x , y , z } , ViewPoint \
→ → { 1.340 , - 2.142 , - 2.251 } } } ] ] ]
152 ComplexExpand [ Wgatonopol [\ [Theta] , \ [Phi] , 5 , 11 * \ [ Pi \
→ ] / 36 ] ] ;
153 Wgatonopolbis [\ [Theta]_, \ [Phi]_] := Evaluate [%];
154 Export [ "Wignergatonopolat36 . pdf" , GraphicsGrid [ { { \
→Plot3D [ N [ Wgatonopolbis [\ [Theta] , \ [Phi] ] , 20 ] , { \ [ \
→Theta ] , 0 , \ [ Pi ] } , { \ [ Phi ] , 0 , 2 * \ [ Pi ] } , PlotRange → Full \
→ , PlotPoints → puntos
155 , MaxRecursion → recursion , ColorFunction → micolor , \
→AxesLabel → { \ [Theta] , \ [ CurlyPhi ] } } } , { \
→SphericalPlot3D [ N [ 1 + Wgatonopolbis [\ [Theta] , \ [Phi] \
→ ] ] / ( Sqrt [ 5 * ( 5 + 1 ) ] ) , 20 ] , { \ [Theta] , 0 , \ [ Pi ] } , { \ [ Phi \
→ ] , 0 , 2 * \ [ Pi ] } , PlotRange → Full , PlotPoints → puntos
156 , MaxRecursion → recursion , ColorFunction → micolor , \
→AxesLabel → { x , y , z } , ViewPoint \
→ → { 1.340 , - 2.142 , - 2.251 } } } ] ] ]
157 ComplexExpand [ Wgatonopol [\ [Theta] , \ [Phi] , 5 , 77 * \ [ Pi \
→ ] / 180 ] ] ;
158 Wgatonopolbis [\ [Theta]_, \ [Phi]_] := Evaluate [%];
159 Export [ "Wignergatonopolat180 . pdf" , GraphicsGrid [ { { \
→Plot3D [ N [ Wgatonopolbis [\ [Theta] , \ [Phi] ] , 20 ] , { \ [ \
→Theta ] , 0 , \ [ Pi ] } , { \ [ Phi ] , 0 , 2 * \ [ Pi ] } , PlotRange → Full \
→ , PlotPoints → puntos

```

```

160 ,MaxRecursion->recursion ,ColorFunction->micolor ,\
->AxesLabel->{\[Theta],\[CurlyPhi]}}},{\
->SphericalPlot3D[N[1+Wgatonopolbis[\[Theta],\[Phi\
->]]/(Sqrt[5*(5+1)]),20],{\[Theta],0,\[Pi]},{\[Phi\
->],0,2*\[Pi]},PlotRange->Full,PlotPoints->puntos
161 ,MaxRecursion->recursion ,ColorFunction->micolor ,\
->AxesLabel->{x,y,z},ViewPoint\
->->{1.340,-2.142,-2.251}}}]
162 (*Exportar ejemplos de las funciones de Husimi \
->para diferentes
163 estados de Dicke*)
164 QDicke[\[Theta]_,\[Phi]_,J_,M_]:=Abs[Binomial[2*J,\
->J+M]^(1/2)*(Sin[\[Theta]/2])^(J+M)*(Cos[\[Theta]\
->]/2)^(J-M)]^2;
165 Export["HusimiDicke5.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[N[\
->QDicke[\[Theta],\[Phi],5,-5],20],{\[Theta],0,\[Pi\
->]],{\[Phi],0,2*\[Pi]},PlotRange->Full,PlotPoints->\
->puntos
166 ,MaxRecursion->recursion ,ColorFunction->micolor ,\
->AxesLabel->{\[Theta],\[CurlyPhi]}}},{\
->SphericalPlot3D[N[1+QDicke[\[Theta],\[Phi\
->],5,-5],20],{\[Theta],0,\[Pi]},{\[Phi],0,2*\[Pi]},\
->PlotRange->Full,PlotPoints->puntos
167 ,MaxRecursion->recursion ,ColorFunction->micolor ,\
->AxesLabel->{x,y,z}}}]
168 Export["HusimiDicke4.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[N[\
->QDicke[\[Theta],\[Phi],5,-4],20],{\[Theta],0,\[Pi\
->]],{\[Phi],0,2*\[Pi]},PlotRange->Full,PlotPoints->\
->puntos
169 ,MaxRecursion->recursion ,ColorFunction->micolor ,\
->AxesLabel->{\[Theta],\[CurlyPhi]}}},{\
->SphericalPlot3D[N[1+QDicke[\[Theta],\[Phi\
->],5,-4],20],{\[Theta],0,\[Pi]},{\[Phi],0,2*\[Pi]},\
->PlotRange->Full,PlotPoints->puntos

```

```

170 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{x,y,z}}}]
171 Export["HusimiDicke3.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[N[\
->QDicke[\[Theta],\[Phi],5,-3],20],{\[Theta],0,\[Pi]\
->}],{\[Phi],0,2*\[Pi]}},PlotRange->Full,PlotPoints->\
->puntos
172 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{\[Theta],\[CurlyPhi]}},{\
->SphericalPlot3D[N[1+QDicke[\[Theta],\[Phi]\
->],5,-3],20],{\[Theta],0,\[Pi]}},{\[Phi],0,2*\[Pi]}},\
->PlotRange->Full,PlotPoints->puntos
173 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{x,y,z}}}]
174 Export["HusimiDicke2.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[N[\
->QDicke[\[Theta],\[Phi],5,-2],20],{\[Theta],0,\[Pi]\
->}],{\[Phi],0,2*\[Pi]}},PlotRange->Full,PlotPoints->\
->puntos
175 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{\[Theta],\[CurlyPhi]}},{\
->SphericalPlot3D[N[1+QDicke[\[Theta],\[Phi]\
->],5,-2],20],{\[Theta],0,\[Pi]}},{\[Phi],0,2*\[Pi]}},\
->PlotRange->Full,PlotPoints->puntos
176 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{x,y,z}}}]
177 Export["HusimiDicke1.pdf",GraphicsGrid[{{Plot3D[N[\
->QDicke[\[Theta],\[Phi],5,-1],20],{\[Theta],0,\[Pi]\
->}],{\[Phi],0,2*\[Pi]}},PlotRange->Full,PlotPoints->\
->puntos
178 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{\[Theta],\[CurlyPhi]}},{\
->SphericalPlot3D[N[1+QDicke[\[Theta],\[Phi]\
->],5,-1],20],{\[Theta],0,\[Pi]}},{\[Phi],0,2*\[Pi]}},\
->PlotRange->Full,PlotPoints->puntos
179 ,MaxRecursion->recursion , ColorFunction->micolor , \
->AxesLabel->{x,y,z}}}]

```

```

180 Export["HusimiDicke0.pdf", GraphicsGrid[{{Plot3D[N[
→QDicke[[Theta], [Phi], 5, 0], 20], {[Theta], 0, [Pi]
→}], {[Phi], 0, 2*[Pi]}, PlotRange→Full, PlotPoints→
→puntos
181, MaxRecursion→recursion, ColorFunction→micolor,
→AxesLabel→{[Theta], [CurlyPhi]}}, {
→SphericalPlot3D[N[1+QDicke[[Theta], [Phi]
→], 5, 0], 20], {[Theta], 0, [Pi]}, {[Phi], 0, 2*[Pi]},
→PlotRange→Full, PlotPoints→puntos
182, MaxRecursion→recursion, ColorFunction→micolor,
→AxesLabel→{x, y, z}}}]
183 (*Función de Husimi para un estado coherente*)
184 Qcoh[[Theta]_, [Phi]_, J_, [Theta]c_, [Phi]c_] :=
→Abs[(1/2*(1+Cos[[Theta]]*Cos[[Theta]c]+Sin[[
→Theta]]*Sin[[Theta]c]*(Cos[[Theta]]*Cos[[Theta]
→c]+Sin[[Phi]]*Sin[[Phi]c))))^J]^2;
185 Export["Husimicoh.pdf", GraphicsGrid[{{Plot3D[N[
→Qcoh[[Theta], [Phi], 5, [Pi]/2, [Pi]/2], 20], {[
→Theta], 0, [Pi]}, {[Phi], 0, 2*[Pi]}, PlotRange→Full
→, PlotPoints→puntos
186, MaxRecursion→recursion, ColorFunction→micolor,
→AxesLabel→{[Theta], [CurlyPhi]}}, {
→SphericalPlot3D[N[1+Qcoh[[Theta], [Phi], 5, [Pi]
→]/2, [Pi]/2], 20], {[Theta], 0, [Pi]}, {[Phi], 0, 2*[
→Pi]}, PlotRange→Full, PlotPoints→puntos
187, MaxRecursion→recursion, ColorFunction→micolor,
→AxesLabel→{x, y, z}}}]
188 (*Función de Husimi de un estado comprimido*)
189 Qcomp[[Theta]_, [Phi]_, [Chi]_, J_, [Theta]c_, [
→Phi]c_] := Abs[Sum[Binomial[2*J, J+M]*Exp[[
→ImaginaryI]*[Chi]*M^2]*Exp[[ImaginaryI]*(J+M)
→*([Phi]-[Phi]c)]*(Cos[[Theta]c/2)]^(J-M)*(Sin
→[[Theta]c/2)]^(J+M)*(Cos[[Theta]/2)]^(J-M)*(Sin
→[[Theta]/2)]^(J+M), {M, -J, J}]]^2;

```

```

190 Export["Husimicomp05.pdf", GraphicsGrid[{{Plot3D[N[
→Qcomp[\[Theta],\[Phi],0.5,5,\[Pi]/2,\[Pi]
→]/2],20],{\[Theta],0,\[Pi]},{\[Phi],0,2*\[Pi]},\
→PlotRange→Full,PlotPoints→puntos
191 ,MaxRecursion→recursion,ColorFunction→micolor,\
→AxesLabel→{\[Theta],\[CurlyPhi]}}}],{
→SphericalPlot3D[N[1+Qcomp[\[Theta],\[Phi],0.5,5,\[
→Pi]/2,\[Pi]/2],20],{\[Theta],0,\[Pi]},{\[Phi]
→],0,2*\[Pi]},PlotRange→Full,PlotPoints→puntos
192 ,MaxRecursion→recursion,ColorFunction→micolor,\
→AxesLabel→{x,y,z}}}}]]]
193 Export["Husimicomp025.pdf", GraphicsGrid[{{Plot3D[N[
→Qcomp[\[Theta],\[Phi],0.25,5,\[Pi]/2,\[Pi]
→]/2],20],{\[Theta],0,\[Pi]},{\[Phi],0,2*\[Pi]},\
→PlotRange→Full,PlotPoints→puntos
194 ,MaxRecursion→recursion,ColorFunction→micolor,\
→AxesLabel→{\[Theta],\[CurlyPhi]}}}],{
→SphericalPlot3D[N[1+Qcomp[\[Theta],\[Phi]
→],0.25,5,\[Pi]/2,\[Pi]/2],20],{\[Theta],0,\[Pi]
→}],{\[Phi],0,2*\[Pi]},PlotRange→Full,PlotPoints→\
→puntos
195 ,MaxRecursion→recursion,ColorFunction→micolor,\
→AxesLabel→{x,y,z}}}}]]]
196 Export["Husimicomp01.pdf", GraphicsGrid[{{Plot3D[N[
→Qcomp[\[Theta],\[Phi],0.1,5,\[Pi]/2,\[Pi]
→]/2],20],{\[Theta],0,\[Pi]},{\[Phi],0,2*\[Pi]},\
→PlotRange→Full,PlotPoints→puntos
197 ,MaxRecursion→recursion,ColorFunction→micolor,\
→AxesLabel→{\[Theta],\[CurlyPhi]}}}],{
→SphericalPlot3D[N[1+Qcomp[\[Theta],\[Phi],0.1,5,\[
→Pi]/2,\[Pi]/2],20],{\[Theta],0,\[Pi]},{\[Phi]
→],0,2*\[Pi]},PlotRange→Full,PlotPoints→puntos
198 ,MaxRecursion→recursion,ColorFunction→micolor,\
→AxesLabel→{x,y,z}}}}]]]
199 Fin=SessionTime[]; TiempoCorridamin=(Fin-Inicio)

```

Bibliografía

- [1] Abramowitz, Milton y Irene Stegun (editores): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1965.
- [2] Agarwal, G. S.: *Relation between atomic coherent-state representation, state multipoles, and generalized phase-space distributions*. Phys. Rev. A, 24(6):2889–2896, Diciembre 1981.
- [3] Arecchi, F. T., Eric Courtens, Robert Gilmore y Harry Thomas: *Atomic Coherent States in Quantum Optics*. Phys. Rev. A, 6(6):2211–2237, Diciembre 1972.
- [4] Benedict, M. G. y A. Czirják: *Wigner functions, squeezing properties, and slow decoherence of a mesoscopic superposition of two-level atoms*. Phys. Rev. A, 60(5):4034–4044, Nov 1999.
- [5] Bengtsson, I. y K. Życzkowski: *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 2007.
- [6] Bertrand, J. y P. Bertrand: *A tomographic approach to Wigner's function*. Foundations of Physics, 17:397–405, 1987.
- [7] Cirac, J. I., M. Lewenstein, K. Mølmer y P. Zoller: *Quantum superposition states of Bose-Einstein condensates*. Phys. Rev. A, 57(2):1208–1218, Febrero 1998.

- [8] Cohen-Tannoudji, Claude, Bernard Diu y Franck Laloe: *Quantum Mechanics*. Wiley-VCH, 1977.
- [9] Cohendet, O, P Combe, M Sirugue y M Sirugue-Collin: *A stochastic treatment of the dynamics of an integer spin*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 21(13):2875–2883, 1988.
- [10] Cohendet, O, P Combe y M Sirugue-Collin: *Fokker-Planck equation associated with the Wigner function of a quantum system with a finite number of states*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 23(11):2001–2011, 1990.
- [11] Feynman, Richard P: *Quantum Implications*, capítulo Negative Probability. Routledge, 1987.
- [12] Gerry, Christopher C. y Peter L. Knight: *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2004.
- [13] Gibbons, Kathleen S., Matthew J. Hoffman y William K. Wootters: *Discrete phase space based on finite fields*. Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics), 70(6):062101, 2004.
- [14] Gilmore, R., C. M. Bowden y L. M. Narducci: *Classical-quantum correspondence for multilevel systems*. Phys. Rev. A, 12(3):1019–1031, Septiembre 1975.
- [15] Gordon, D. y C. M. Savage: *Creating macroscopic quantum superpositions with Bose-Einstein condensates*. Phys. Rev. A, 59(6):4623–4629, Junio 1999.
- [16] Gradshteyn, I. S. y I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 2000.
- [17] Horodecki, R., P Horodecki, M. Horodecki y K. Horodecki: *Quantum entanglement*. ArXiv Quantum Physics e-prints, 2007.
- [18] Kim, Y. S. y E. P. Wigner: *Canonical transformation in quantum mechanics*. American Journal of Physics, 58(5):439–448, 1990.

- [19] Kitaev, Alexei y John Preskill: *Topological Entanglement Entropy*. Physical Review Letters, 96(11):110404, 2006.
- [20] Kitagawa, Masahiro y Masahito Ueda: *Squeezed spin states*. Phys. Rev. A, 47(6):5138–5143, Junio 1993.
- [21] Landau, L.D. y E.M. Lifshitz: *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*. Elsevier, 2003.
- [22] Lebedev, N. N.: *Special Functions and their Applications*. Dover Publications, 1972.
- [23] Leonhardt, U.: *Measuring the quantum state of light*. Cambridge University Press, 2005.
- [24] Leonhardt, Ulf: *Discrete Wigner function and quantum-state tomography*. Phys. Rev. A, 53(5):2998–3013, May 1996.
- [25] Levin, Michael y Xiao Gang Wen: *Detecting Topological Order in a Ground State Wave Function*. Physical Review Letters, 96(11):110405, 2006.
- [26] Mandel, Leonard y Emil Wolf: *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [27] Micheli, A., D. Jaksch, J. I. Cirac y P. Zoller: *Many-particle entanglement in two-component Bose-Einstein condensates*. Phys. Rev. A, 67(1):013607, Enero 2003.
- [28] Milburn, G. J., J. Corney, E. M. Wright y D. F. Walls: *Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential*. Phys. Rev. A, 55(6):4318–4324, Junio 1997.
- [29] Mintert, F., A. R. R. Carvalho, M. Kuś y A. Buchleitner: *Measures and dynamics of entangled states*. Physics Reports, 415:207–259, Agosto 2005.
- [30] Moyal, J.E.: *Quantum Mechanics as a Statistical Theory*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 45:99–123, 1949.

- [31] Pathak, P K, R N Deb, N Nayak y B Dutta-Roy: *The quadratic spin squeezing operators*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41(14):145302 (9pp), 2008.
- [32] Perelomov, Askold: *Generalized Coherent States and Their Applications*. Springer-Verlag, 1986.
- [33] Pérez Campos, Citlali, José R. González Alonso, Octavio Castaños Garza y Ramón López Peña: *Quantum phase transitions in two-mode Bose–Einstein condensates*. Este artículo se encuentra en preparación.
- [34] Radcliffe, J M: *Some properties of coherent spin states*. Journal of Physics A: General Physics, 4(3):313–323, 1971.
- [35] Renyi, Alfred: *On Measures of Entropy and Information*. En *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob.*, volumen 1, páginas 547–561, 1961.
- [36] Rose, M. E.: *Elementary Theory of Angular Momentum*. Dover Publications, 1995.
- [37] Ryu, S. y Y. Hatsugai: *Entanglement entropy and the Berry phase in the solid state*. Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics), 73(24):245115, 2006.
- [38] Scully, Marlan O., Herbert Walther y Wolfgang Schleich: *Feynman’s approach to negative probability in quantum mechanics*. Phys. Rev. A, 49(3):1562–1566, Mar 1994.
- [39] Sneddon, Ian N.: *Fourier transforms*. Dover Publications, 1995.
- [40] Sørensen, Anders, Lu Ming Duan, Ignacio Cirac y Peter Zoller: *Many-particle entanglement with Bose–Einstein condensates*. Nature, 409:63, 2001.
- [41] Sørensen, Anders y Klaus Mølmer: *Spin-Spin Interaction and Spin Squeezing in an Optical Lattice*. Phys. Rev. Lett., 83(11):2274–2277, Septiembre 1999.

- [42] Sugita, A: *Moments of generalized Husimi distributions and complexity of many-body quantum states*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 36(34):9081–9103, 2003.
- [43] Sugita, Ayumu y Hirokazu Aiba: *Second moment of the Husimi distribution as a measure of complexity of quantum states*. Phys. Rev. E, 65(3):036205, Febrero 2002.
- [44] Tonel, A P, J Links y A Foerster: *Quantum dynamics of a model for two Josephson-coupled Bose-Einstein condensates*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 38(6):1235–1245, 2005.
- [45] Vidal, G., J. I. Latorre, E. Rico y A. Kitaev: *Entanglement in Quantum Critical Phenomena*. Phys. Rev. Lett., 90(22):227902, Junio 2003.
- [46] Walls, D.F. y G.J. Milburn: *Quantum Optics*. Springer, 1995.
- [47] Wehrl, Alfred: *General properties of entropy*. Rev. Mod. Phys., 50(2):221–260, Abril 1978.
- [48] Wineland, D. J., J. J. Bollinger, W. M. Itano y D. J. Heinzen: *Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy*. Phys. Rev. A, 50(1):67–88, Julio 1994.
- [49] Wootters, W.K.: *Picturing qubits in phase space*. IBM Jour. Res. Dev., 48(1):99–109, 2004.
- [50] Zhang, Wei Min, Da Hsuan Feng y Robert Gilmore: *Coherent states: Theory and some applications*. Rev. Mod. Phys., 62(4):867–927, Oct 1990.