UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VALUACIÓN DE OPCIONES BERMUDAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER El TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

E L I Ú R O J A S M O L I N A

TUTOR:
M. EN C. AGUSTÍN ROMÁN AGUILAR

2008

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.
   Apellido paterno: Rojas
   Apellido materno: Molina
   Nombre (s): Eliú
   Teléfono: 57 50 17 56
   Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad o escuela: Facultad de Ciencias
   Carrera: Actuaría
   No. de cuenta: 097000547

2. Datos del tutor
   Grado: M en C
   Apellido paterno: Román
   Apellido materno : Aguilar
   Nombre(s): Agustin

3. Datos del sinodal 1
   Grado: Dra
   Apellido paterno: Bernabé
   Apellido materno : Rocha
   Nombre(s): Araceli

4. Datos del sinodal 2
   Grado: Dr
   Apellido paterno: Lorenzo
   Apellido materno : Valdés
   Nombre(s): Arturo

5. Datos del sinodal 3
   Grado: Act
   Apellido paterno: Pérez Tejada
   Apellido materno : López
   Nombre(s): Fernando Alonso

6. Datos del sinodal 4
   Grado: Act
   Apellido paterno: Ramos
   Apellido materno : García
   Nombre(s): Sandra Cristina

3. Datos del trabajo escrito.
   Título: Valuación de opciones exóticas y derivados de crédito
   Subtitulo: Valuación de opciones Bermudas
   No. de páginas: 47 p
   Año: 2008

"Bueno me es haber sido humillado,
Para que aprenda tus estatutos" Sal 119:71

"Porque de Él, y por Él, y para Él son todas las cosas. A Él sea toda glora por los siglos. Amén."

Rom 11:36

Gracias por todo
Mi
DIOS

A mi madre...

Índice

Introducción

Se sabe que los primeros mercados organizados de opciones se originaron en el siglo XVII en Holanda para comprar y vender bulbos de tulipán; y que en la era actual el primer mercado organizado en el mundo se creó en Estados Unidos con el *Chicago Board Options Exchange (CBOE)* en el año 1973, fecha que coincidió con el origen de la teoría moderna de valuación de opciones con el artículo de Black-Scholes (1973). Y es así como se fue desarrollando a través de una ardua investigación la teoría moderna de las opciones, llegando en la década de los noventa a desarrollar las opciones de segunda generación u opciones exóticas.

Pero a pesar de que en el mundo el desarrollo de estos instrumentos financieros tiene ya un considerable desarrollo histórico, en México se desarrolla un mercado de derivados propio hasta el año de 1998[1] con la puesta en marcha del Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) operando solamente futuros; y no es sino hasta el año del 2004[2] en el que el MexDer se inicia en el mercado de opciones financieras, listándose opciones sobre acciones representativas y sobre el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), y recientemente en el 2006[3] la operación de opciones sobre dólar.

Con lo anterior, se puede decir que el mercado mexicano a pesar de su rezago en comparación con otras partes del mundo en la operación de este tipo de instrumentos financieros está desarrollándose paso a paso, haciendo ver que será necesario prepararse para esta evolución del mercado de derivados en México particularmente del mercado de opciones.

Y siendo conscientes de la realidad expuesta anteriormente, creemos necesario no sólo la familiarización e investigación de las opciones tradicionales; sino que haciéndole

[1] 15 de diciembre de 1998 inicia operaciones MexDer con la participación de cuatro socios liquidadores, negociándose a viva voz en el piso de remates.
[2] 22 de marzo del 2004 el MexDer se inicia en el mercado de opciones financieras.
[3] 27 de julio del 2007

caso al desarrollo de la historia en esta área, empezar a familiarizarnos e investigar acerca de las opciones de segunda generación u opciones exóticas, las cuales dentro de algún tiempo se integraran al mercado mexicano de derivados.

Debido a la necesidad antes planteada desarrollamos el siguiente trabajo cuyo objetivo principal es la familiarización con las opciones exóticas y, en este caso particular, con las opciones Bermudas junto con el desarrollo de un método numérico para valuarlas. Por lo que se da una breve descripción de las opciones exóticas y se describen las características generales de la opción Bermudas; investigando los modelos de valuación de opciones Bermudas ya desarrollados a través de métodos analíticos, para poder así llegar a la implementación del método numérico.

El alcance del trabajo permite obtener un valuador de opciones Bermudas a través de métodos numéricos.

En el primer capítulo se desarrollan los antecedentes de las opciones exóticas y se exponen las características particulares de las opciones Bermudas. En el segundo capítulo se exponen los modelos de valuación de opciones Bermudas por métodos analíticos, describiendo su alcance y algunos ejemplos numéricos obtenidos con estos métodos. En el tercer capítulo se desarrolla un método numérico aplicado a la valuación de opciones Bermudas; se describe el método aplicado y se explica el tipo de opciones que se pueden valuar con este método. Adicionalmente se hace una comparación a través de ejemplos entre el método numérico y el analítico. Por último se exponen las conclusiones del presente trabajo.

I. Características de las opciones Bermudas

Para comenzar recordaremos que una opción de compra (venta) es aquel contrato estandarizado, en el cual su poseedor, mediante el pago de la prima, adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación, de comprar (vender) el bien subyacente al precio pactado en la fecha futura y el vendedor se obliga a vender (comprar), el activo subyacente al precio convenido.

El poseedor de la opción podrá ejercer dicho derecho dependiendo de lo acordado en el contrato respectivo; si se acordó una opción europea, sólo lo podrá ejercer hasta la fecha del vencimiento; en caso de acordarse una opción americana, el comprador podrá ejercer en cualquier momento de la duración del contrato.

Antecedentes

Las opciones tradicionales descritas anteriormente son denominadas opciones *plain vanilla*; lo que las caracteriza son sus propiedades estándar bien definidas, sus precios o volatilidades implícitas de forma regular son publicados por los mercados organizados o por los intermediarios.

Las opciones exóticas se originan en la década de los noventa; sin embargo algunas de sus modalidades ya se observaban en el mercado de derivados *Over The Counter* (OTC) a finales de la década de los sesenta. De la década de los noventa a la actualidad es interesante observar que en el mercado *Over The Counter* ha sido creado un gran número de opciones no-estándar ó exóticas a partir de la ingeniería financiera. Y a pesar de ser una parte relativamente pequeña de este mercado, estas opciones exóticas son importantes ya que llegan a ser mucho más rentables que las opciones *plain vanilla*.

Podríamos definir a las opciones exóticas; también conocidas como opciones de segunda generación debido a que tratan de superar los límites de las operaciones que las opciones *plain vanilla* mantienen; como aquéllas que, a partir de una opción sencilla y con algunas modificaciones en función de determinadas condiciones, nos permiten crear una estructura de resultados cuya intención es disminuir el costo de primas de las opciones tradicionales así como ajustarse más adecuadamente a determinadas situaciones. Las características tales como la determinación del precio de ejercicio, o del bien subyacente, la prima, las condiciones de pago, número de subyacentes, etcétera, son diferentes en las opciones exóticas que en las opciones *plain vanilla*.

La aparición de las opciones exóticas se produce por varias razones tales como: la satisfacción de la necesidad de cobertura en el mercado estandar; por razones de orden fiscal, contable, legal o de regulación. Existen factores que han sido determinantes dentro de este tipo de opciones entre los cuales se podría citar la gran volatilidad en los mercados de capitales; con el riesgo implícito que esto conlleva, y que motivó a los administradores del riesgo a desarrollar operaciones de este tipo, la competitividad y la globalización dentro del área de la administración de riesgos financieros, así como los avances tecnológicos y el gran avance de la teoría de valuación de opciones.

En la actualidad existe una gran variedad de opciones exóticas, entre las más comunes se pueden citar: Bermudas, asiáticas, *chooser*, barrera, *lookback*, compuestas (*call* sobre *call*, *call* sobre *put*, *put* sobre *call*, *put* sobre *put*), *shout*, digitales, diferidas, *rainbow*. De todas las anteriores, aquéllas a las que dedicaremos nuestra atención en este trabajo será a las opciones exóticas Bermudas.

Opciones Bermudas

Las opciones Bermudas son contratos no estandarizados, a través del los cuales el comprador, por medio del pago de una prima, adquiere el derecho pero no la obligación de comprar (vender) el bien subyacente y el vendedor se ve en la obligación de vender o comprar el activo subyacente.

A diferencia de las opciones tradicionales, ya sean europeas o americanas, las opciones Bermudas sólo pueden ser ejercidas en fechas determinadas entre la fecha de compra del contrato y el vencimiento; de ahí el nombre de Bermudas debido a que se encuentra entre las opciones Americanas y las Europeas (entre América y Europa se encuentran las islas Bermudas). Estas opciones también son conocidas como *Atlantic option, Limited exercise option y Quasi-America option* (Gastineau (1992)).

Otra diferencia significativa con respecto a las opciones estandarizadas es que el precio de ejercicio puede cambiar durante la vida de la opción.

Si este tipo de opciones Bermudas llegan a cotizar en mercados organizados se les conoce como opciones japonesas; estas opciones son sobre índices bursátiles (*Topix, Nikkei*) con posibilidad de ejercicio cada jueves.

Existen dos posiciones de las opciones Bermudas:

i) Opción de compra Bermudas: Es aquel contrato no estandarizado, a través del cual el comprador, por medio del pago de una prima, adquiere el derecho pero no la obligación de comprar en un precio pactado el bien subyacente en ciertas fechas futuras ya establecidas antes del término del contrato; y el vendedor se ve en la obligación de vender el bien subyacente al precio convenido.

ii) Opción de venta compra Bermudas: Es aquel contrato no estandarizado, a través del cual el comprador, por medio del pago de una prima, adquiere el derecho pero no la obligación de vender en un precio pactado el bien subyacente en las fechas futuras ya establecidas antes del término del contrato; y el vendedor se ve en la obligación de comprar el bien subyacente al precio convenido.

II. Modelos de valuación de opciones Bermudas

Los contratos de opciones tienen características tales como: el tipo (europea/americana), la especificación de liquidación, la condición de emisión, la posición de los inversionistas (compra/venta), etc.; cuyo conocimiento nos llevan a tener que desarrollar métodos analíticos y numéricos, con base científica, a través de los cuales podamos valuar el costo por la cobertura ante los cambios en el precio subyacente.

Al definir las características específicas de los contratos y los factores de riesgo en el precio de las opciones consideramos dos métodos de valuación: el método analítico y el método numérico. La aplicación de estos métodos depende de las características que anexan restricciones en el método de valuación.

Los métodos analíticos a partir de un análisis cualitativo de las hipótesis que caracterizan a los contratos de opciones (que no haya oportunidad de arbitraje, la rentabilidad esperada debe ser proporcional con el tipo de interés libre de riesgo, etc.) nos proporcionan modelos de valuación basados en ecuaciones diferenciales parciales; que a pesar de su flexibilidad, al aplicarlos se llega a ecuaciones diferenciales sin solución analítica. Por tal motivo se ha dado pie en gran medida a métodos numéricos aplicados a la valuación de opciones, a pesar de que es más deseable operativamente obtener fórmulas cerradas para la valuación de opciones. De ahí que la teoría moderna de valuación de opciones "permita" la permanencia de ambos métodos de valuación.

En esta sección nos dedicaremos al estudio de métodos analíticos para valuar el precio de las opciones Bermudas. En donde la mayoría de los modelos son propuestos por Leguey–Llerena en 1998, 1999 y 2000; no pasando por alto algunos modelos para determinados tipos de opciones tales como Flesaker (1992), Chance (1992) y Trippi–Chance (1993) que estudian las *Bermudas capped option.*

En relación a la valuación de opciones de compra Bermudas en Leguey-Llerena (1998) se obtiene a partir de las hipótesis generales de Black-Scholes (1973) y Merton (1973) un modelo tal, que logra incluir como caso particular la conocida fórmula de Black-Scholes y cuya aplicación aproxima el precio de una opción de compra americana que no paga dividendos. Mientras que en Leguey–Llerena (2000) se estudia a fondo a partir de Leguey–Llerena (1998), la aplicación logra aproximar el precio de una opción de compra americana que paga un número finito de dividendos.

Por otro lado respecto a la valuación de opciones de venta Bermudas, Leguey–Llerena (1999) obtienen un modelo que valúa a este tipo de opciones y cuya aplicación aproxima el precio de una opción de venta americana.

Opciones de Compra Bermudas

En la valuación de opciones de compra sabemos que el contrato de una opción de compra americana que no paga dividendos tiene el mismo costo que un contrato de compra europeo (se ejerce en la fecha de vencimiento); ahora, siendo una opción Bermudas un caso intermedio entre la opción americana y la opción europea en Leguey–Llerena (1998) se demuestra que ocurre lo mismo. Debido a lo anterior, buscan las condiciones necesarias para que pueda existir un ejercicio anticipado, y demuestran que para que pueda existir un ejercicio anticipado en una opción de compra Bermudas, el precio de ejercicio no debe quedar constante, sino variar en cada fecha de posible ejercicio y además ser crecientes a lo largo del tiempo; es decir, $k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-1} < k_n$ (donde k_i es el precio asociado a la fecha de ejercicio T_i). Y a partir de la condición anterior logra obtener lo siguiente:

Precio de una opción de compra Bermudas con dos fechas de ejercicio

$$C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2) = e^{-r\tau_1} E_t\left[\max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, T_2; k_2)\} \;\middle|\; v_t \right]$$

donde $C\left(v_{T_1}, T_2; k_2\right) = e^{-r(T_1 - T_2)} E_t\left[\ \max\left\{0, v_{T_2} - k_2\right\} \mid v_{T_1}\right]$ representa el valor en T_1 de una opción de compra europea con vencimiento en T_2 se tiene que :

$$C\left(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2\right) = v_t \Phi_1^2 - e^{-r\tau_2} k_2 \Phi_2^2 + v_t \Phi(d_1) - e^{-r\tau_1} k_1 \Phi(d_2)$$

Precio de una opción de compra Bermudas con n fechas de ejercicio

$$C\left(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n\right) = e^{-r\tau_1} E_t\left[\ \max\left\{0, v_{T_1} - k_1, C\left(v_{T_1}, T_2, \ldots, T_n; k_2, \ldots, k_n\right)\right\} \mid v_t\right]$$

por lo tanto:

$$C\left(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n\right) = \sum_{i=1}^{n} (v_t \Phi_1^i - k_i e^{-r\tau_i} \Phi_2^i)$$

con:

t fecha de valoración

T_i fecha de ejercicio $i=1,\ldots,n$ y $T_i < T_{i+1}$

k_i precio de ejercicio asociado a T_i, $i=1,\ldots,n$

v_{T_i} valor del subyacente en la fecha de ejercicio T_i, $t=T_0$, $\tau_i=T_i-t$

r tipo de interés sin riesgo a corto plazo, conocido y constante $[t, T_n]$

$C=C\left(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n\right)$ valor en t de la opción de compra Bermudas

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{v_t}{v_1}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T_1 - t}}$$

$$d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{T_1 - t}$$

$$\Phi_1^1 = \Phi(d_1)$$

$$\Phi_2^1 = \Phi(d_2)$$

$$\Phi_2^i = P\left[\ N_i\left(\mu_i; \sum\nolimits_i\ \right) \in R_{i-1}\right]$$

$$\Phi_1^i = P\left[\ N_i\left(\mu_i'; \sum\nolimits_i\ \right) \in R_{i-1}\right]$$

$$m_1 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_1 - t)$$

$$m_2 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_2 - t)$$

$$m'_1 = \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_1 - t)$$

$$m'_2 = \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_2 - t)$$

$$\mu_i = (m_1, \ldots, m_i),\ \mu_i' = (m_1', \ldots, m_i')$$

$$\sum\nolimits_i\ = (a_{jk})_{j,k=1,\ldots,i},\ \ a_{jk} = 0\ \ \forall j \neq k,\ \ a_{jj} = \sigma^2(T_j - T_{j-1})$$

$$R_{i-1} = \left\{(z_1, \ldots, z_i) \in \Re^i\right\} \quad \forall i = 2, \ldots, n-1 \ \text{ tal que}$$

$$-\infty < z_1 < \ln\left(\frac{v_1}{v_t}\right); -\infty < z_1 + z_2 < \ln\left(\frac{v_2}{v_t}\right); \ldots; -\infty < z_1 + \ldots + z_{i-1} < \ln\left(\frac{v_{i-1}}{v_t}\right); \ln\left(\frac{v_i}{v_t}\right) < z_1 + \ldots + z_i < \infty$$

$$R_{n-1} = \left\{(z_1, \ldots, z_n) \in \Re^i\right\} \ \text{ tal que}$$

$$-\infty < z_1 < \ln\left(\frac{v_1}{v_t}\right); -\infty < z_1 + z_2 < \ln\left(\frac{v_2}{v_t}\right); \ldots; -\infty < z_1 + \ldots + z_{n-1} < \ln\left(\frac{v_{n-1}}{v_t}\right); \ln\left(\frac{k_n}{v_t}\right) < z_1 + \ldots + z_n < \infty$$

Nótese que en la expresión para calcular el precio de una opción de compra Bermudas con n fechas de ejercicio se incluye como caso particular la conocida fórmula de Black-Sholes(1973) cuando n es igual a 1:

$$c = v_t N(d_1) - ke^{-r(T-t)} N(d_2) = v_t \Phi_1^1 - k_1 e^{-r\tau_1} \Phi_2^1$$

Ahora una de las aplicaciones que encuentran los autores Leguey–Llerena (1998) para la fórmula obtenida es que considerando particiones cada vez más pequeñas del intervalo $\tau \in [t,\ T_n]$ que tiendan a cero, se podrá aproximar el valor de una opción de compra que puede ejercerse en cualquier instante a un precio de ejercicio estrictamente creciente *k(τ)* a partir del siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} C(v_t, T_1,...,T_n; k_1,...,k_n) = C(v_t, \tau; k(\tau))$$

La otra aplicación que los autores Leguey–Llerena (2000) encontraron fue poder valuar una opción de compra americana sobre acciones que reparte un número finito de dividendos de cuantía aleatoria a partir de su modelo para opciones de compra Bermudas Leguey–Llerena (1998) modificado sobre una acción que no reparte dividendos y apoyándose en el planteamiento de Longstaff (1990) en cuyo modelo considera que la cuantía *d* depende del valor de la acción. Y así llegan al siguiente modelo:

$$C(v_t, T_{n+1}; k; d^1) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\pi_i (v_t \Phi_1^i - \frac{k}{\pi_i} e^{-r\tau_i} \Phi_2^i) \right)$$

con:

$d^1 = (d_1,...,d_n)$

$d_i = \alpha_i v_{T_i^-}$ cuantía que depende del valor de la acción

$\alpha_i \in (0,1)$ valor conocido para todo *i=1,…,n*

$v_{T_i^-}$ valor de la acción justo antes del pago del dividendo en el instante T_i (valor *cum-dividendo*)

$\pi_i = \prod_{j=0}^{i-1} (1-\alpha_j)$

Opciones de Venta Bermudas

Respecto a la valuación de opciones de venta Bermudas en Leguey–Llerena (1999) se logra llegar a una fórmula a partir del modelo para valuar opciones de venta extensibles[1] con vencimiento extensible[2]; siendo la opción de venta Bermudas un caso particular, llegando así al siguiente modelo[3]:

$$P(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n) = \sum_{i=1}^{n} (k_i e^{-r\tau_i} - v_t \Phi_1^i)$$

Era de esperarse debido al caso de opciones de compra Bermudas, que una de las aplicaciones del modelo anterior fuera la valuación de opciones de venta americana a partir de opciones Bermudas; en donde se considerarían particiones más pequeñas que tiendan a cero en el intervalo $[t, T_n]$ y considerando también precios de ejercicio constantes, para así obtener el valor de una opción de venta americana con precio k y fecha límite de ejercicio T_n:

$$\lim_{n \to \infty} P(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n) = P(v_t, T_n; k)$$

---

1 Las *opciones de venta con vencimiento extensible* (Longstaff (1990)) permiten vender, en una fecha futura T_1, un determinado tipo de activo subyacente por un precio de ejercicio de k_1 unidades monetarias (u.m.) o, de forma alternativa, adquirir una opción de venta europea sobre el mismo subyacente por A_1 u.m. con vencimiento en T_2 ($T_2 > T_1$) y precio de ejercicio k_2. Las opciones Bermudas son un caso particular de este tipo de opciones para el caso particular de dos fechas de ejercicio y A_2=0.

2 Una *opción de venta extensible con vencimiento extensible* (Leguey-Llerena (1999))es un contrato que contempla dos posibilidades de actuación mutuamente excluyente: permite, en la fecha T_1, vender un determinado subyacente o adquirir una opción de venta con vencimiento extendible. Incluye como caso particular la opción de venta bermuda con n fechas de ejercicio.

3 Se utiliza la misma notación que en el caso de opciones de compra Bermudas, notación usada por los autores en Leguey–Llerena (1999).

Ejemplos numéricos

A continuación se verán algunos ejemplos numéricos de precios calculados con los modelos anteriores, usando datos ficticios.

Opción de compra Bermudas

Primero se considera una opción de compra Bermudas que puede ejercerse en tres instantes: en los meses 3, 6 y 9, con los siguientes parámetros: v_0 = 50 u.m.[4], k_1 = 40 u.m. k_2 = 43 u.m., k_3 = 45 u.m., σ = 0.22 y r = 0.1.

Aplicando la fórmula se obtiene:

C (50, 0.25, 0.5, 0.75; 40, 43, 45)=

$$= 50\Phi_2^3 - 45e^{-r*0.75}\Phi_1^3 + 50\Phi_2^2 - 43e^{-r*0.5}\Phi_1^2 + 50\Phi(d_1) - 40e^{-r*.025_1}k_1\Phi(d_2) =$$

= 11.00771 + 0.00771 +0.00716 = 11.02258 u.m.

Para las respectivas tres opciones europeas son:

C_e (50, .25; 40) = 11.00771 u.m., C_e (50, .5; 43) = 9.42294 u.m. y C_e (50, .75; 45) = 9.05126 u.m.

A continuación se presenta una tabla donde se varían algunos parámetros, obteniendo el valor de la opción de compra Bermudas y las opciones de compra europeas correspondientes.

	σ= 0	σ= 1	r = 0.12	k_1 = 40
$v_t\Phi(d_1) - k_1e^{-r*0.25}\Phi(d_2)$	10.9876	15.31207	11.20019	10.0505
$v_t\Phi_2^2 - k_2e^{-r*0.5}\Phi_1^2$	0	13.81992	0.00975	0.04448
$v_t\Phi_2^3 - k_3e^{-r*0.75}\Phi_1^3$	0	4.74202	0.0012	0.01682
Valor Bermuda	10.98760	33.87401	11.21114	10.11180
$C_e(50{,}0.25;k_1)$	10.98760	15.31207	11.20019	10.0505
$C_e(50{,}0.5;k_1)$	9.09713	17.58839	9.78687	9.42294
$C_e(50{,}0.75;k_1)$	8.25154	19.80413	9.5566	9.05126

[4] 1 u.m. = unidades monetarias

Opción de venta Bermudas

Para el caso de las opciones de venta Bermudas, a continuación se presenta una tabla en donde se exponen los resultados obtenidos variando algunos parámetros, tales como la volatilidad y el número de fechas de ejercicio n, considerando que los precios de ejercicio son constantes y los intervalos de tiempo tienen la misma amplitud. La columna Valor recoge los valores reales.

r	k	τ	σ	v_t	B(n=2)	B(n=4)	B(n=8)	B(n=16)	B(n=32)	Valor
0.125	1	1	0.5	1.1	0.11204	0.11295	0.11397	0.11527	0.11535	0.11510
0.045	1	1	0.3	1	0.09844	0.09909	0.09978	0.10020	0.01005	0.10010
0.08	1	1	0.2	1	0.04882	0.05085	0.05161	0.05229	0.05237	0.05250
0.03	1	1	0.1	1	0.02785	0.02846	0.02885	0.02906	0.02919	0.02910

III. Métodos numéricos aplicados a la valuación de opciones Bermudas

Los métodos numéricos aplicados a la valuación de opciones se dan a partir de que al aplicar los métodos analíticos no se logra obtener soluciones a las ecuaciones diferenciales en las que sus modelos se basan. De ahí que la teoría moderna de valuación de opciones "permita" la permanencia de ambos métodos de valuación.

Para la valuación de opciones Bermudas existen varios métodos numéricos tales como las aproximaciones algorítmicas de: Merton (1973) que desarrolla un método para valorar opciones americanas con el supuesto de que existen n cambios en el precio de ejercicio, el cual bajo ciertas condiciones se logra demostrar que esta opción es equivalente a una opción Bermudas con precios de ejercicio variables; en Dewynne-Howison-Wilmott (1997) se implementa un pseudocódigo del algoritmo *SOR* (*Succesive Over Relaxation*) para valuar opciones Bermudas, este método se utiliza frecuentemente para resolver cierto tipo de ecuaciones matriciales (Stoer-Bulirsch 1993). Ambos métodos manejan algoritmos iterativos.

En este capítulo se implementará un método numérico a partir del conocido método binomial cuyo planteamiento general se encuentra en Cox-Ross-Rubinstein (1979).

Método Binomial

El método binomial supone que al final de cada periodo el precio subyacente puede tener sólo dos posibles valores (supuesto binomial), por lo que dividiendo el tiempo al vencimiento T en n periodos de misma duración existirán n+1 posibles valores en el precio subyacente y n+1 posibles precios de la opción en la fecha de vencimiento.

El método está basado en la suma finita de variables aleatorias binomiales independientes e idénticamente distribuidas empleadas en los procesos de caminatas aleatorias. El precio subyacente futuro es modelado mediante el proceso estocástico, el cual considera la volatilidad subyacente. Ya modelado el precio subyacente futuro, para conocer el precio de las opciones se emplea la programación dinámica estocástica y por medio del principio de Bellman se resuelve el problema de maximizar el flujo de efectivo en valor presente.

El método considera la no existencia de oportunidades de arbitraje para ningún inversionista y de esa manera representar las trayectorias posibles que puede seguir el precio subyacente y las siguientes hipótesis:

1. No se consideran comisiones, impuestos, costos de operación ni diferenciales entre los precios de compra y venta.

2. Se puede comprar y vender cualquier cantidad real de todo bien subyacente.

3. Se puede comprar y vender los bienes subyacentes sin poseerlos (al descubierto).

4. No hay depósitos de garantía en la compra y venta de opciones al descubierto.

5. La tasa de interés libre de riesgo se aplica de igual forma a los deudores y acreedores (valoración neutral al riesgo) y dicha tasa es constante.

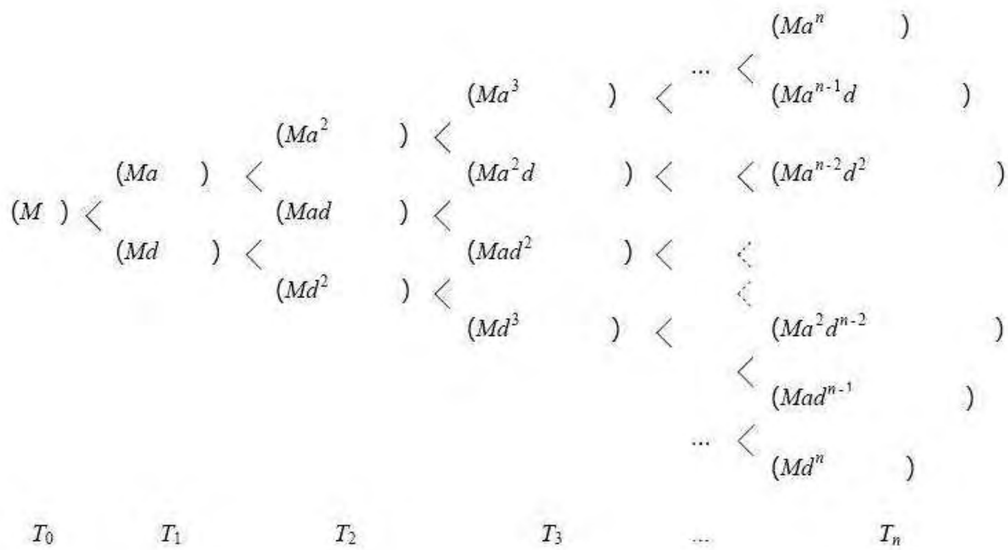
6. Pueden realizarse las operaciones simultáneamente.

7. Las operaciones no afectan el comportamiento del mercado.

8. El precio subyacente evoluciona como un proceso binomial multiplicativo.

9. El bien subyacente no otorga dividendos durante el periodo de vigencia.

El método binomial valúa tanto opciones europeas de compra y venta como opciones americanas de copra y venta, ambos con sus respectivos algoritmos a partir de la construcción del árbol binomial, el cual explicándolo gráficamente se podría observar de la siguiente manera.



Y a partir del último periodo del árbol anterior (T_n) se empieza a calcular el precio de la opción en T_0.

En el primer paso del algoritmo para calcular el valor de la opción a partir del árbol binomial de precios tanto en el caso de las opciones europeas, las opciones americanas y para nuestro interés también en las opciones Bermudas, la única diferencia se encuentra entre las opciones de venta y las opciones de compra, el periodo T_n se calculará de la siguiente manera:

Opción de compra (europea ó americana ó Bermudas):

$$c_{i+1,n} = \max\{Ma^{n-i}d^i - k, 0\} \qquad \text{para } i = 0, \ldots, n$$

Opción de venta (europea ó americana ó Bermudas):

$$p_{i+1,n} = \max\{k - Ma^{n-i}d^i, 0\} \qquad \text{para } i = 0, \ldots, n$$

Donde:

M = precio de mercado del bien subyacente

$$a = e^{\sigma\sqrt{\delta T}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta T}}$$

En el caso de las opciones europeas los siguientes periodos (n-1….1) en ambos casos (compra ó venta) se calculará de la siguiente manera:

$$c_{i+1,n-j} = \left[(c_{i+1,n-j+1})\pi + (c_{i+2,n-j+1})\theta\right]e^{-i\delta T}$$

Para *i=0,…,n* y *j=1,…n*

$$p_{i+1,n-j} = \left[(p_{i+1,n-j+1})\pi + (p_{i+2,n-j+1})\theta\right]e^{-i\delta T}$$

Así hasta llegar al $c_{0,0}$ (compra) ó $p_{0,0}$ (venta) en T_0 el cual es el valor de la opción europea. Se puede observar que este valor se obtuvo solamente de traer a valor presente los precios futuros con su respectiva probabilidad neutral al riesgo de ocurrencia (π , θ).

Para el caso de las opciones americanas los periodos de n-1 a1 1 el precio de la opción se calcularán de la siguiente manera:

Opción de compra americana:

$$C_{i+1,n-j} = \left\{\max\left[\,(C_{i+1,n-j+1})\pi + (C_{i+2,n-j+1})\theta\,\right], \max\left[\,Ma^{n-i}d^{i} - k, 0\,\right]\right\}e^{-i\delta T}$$

Para *i=0,…,n* y *j=1,…n*

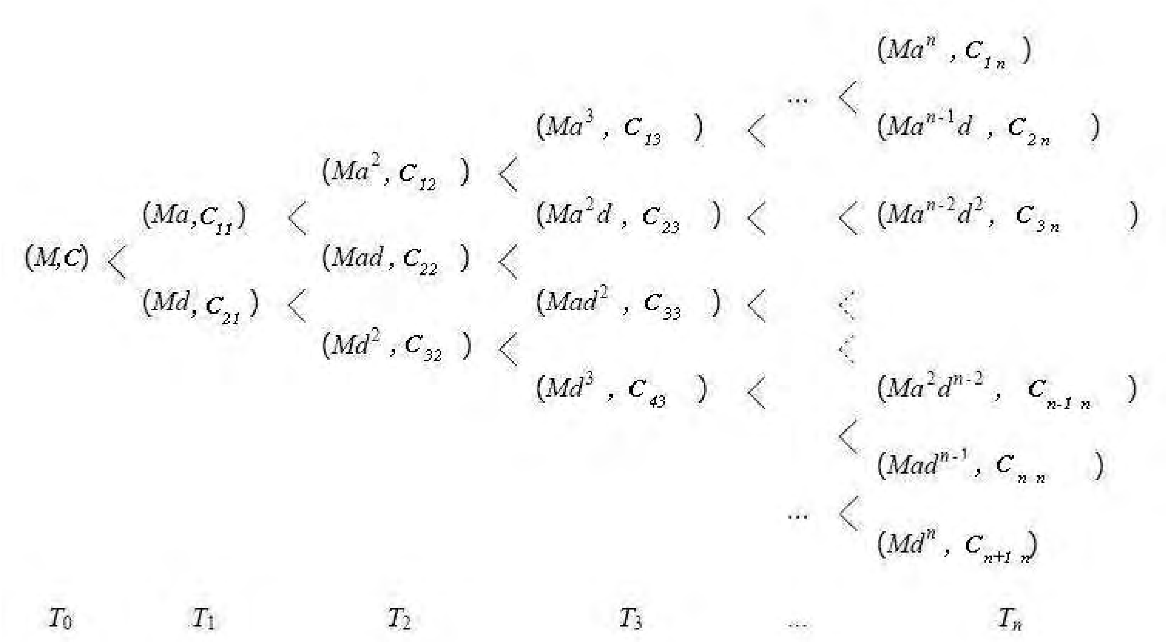
Opción de venta americana:

$$P_{i+1,n-j} = \left\{\max\left[\,(P_{i+1,n-j+1})\pi + (P_{i+2,n-j+1})\theta\,\right], \max\left[k - Ma^{n-i}d^{i}, 0\,\right]\right\}e^{-i\delta T}$$

Para *i=0,…,n* y *j=1,…n*

Así hasta llegar a $C_{0,0}$ (compra) ó $P_{0,0}$ (venta) en T_0 dependiendo del caso el cual es el valor de la opción americana.

Gráficamente se podría entender de la siguiente manera[1]:



A través de la aplicación de ambos algoritmos es como logramos implementar un programa que valúa opciones Bermudas por medio del método binomial. Como podemos recordar las opciones Bermudas pueden ser ejercidas sólo en determinadas fechas entre la fecha de compra del contrato y el vencimiento, pudiendo coincidir el vencimiento con la última fecha de ejercicio.

Para el programa implementado se necesita de la siguiente información, el cual a partir de k, M, r, T, n, m y σ , calcula los demás datos (a, d, δ, π , θ):

k = precio de ejercicio (ó precios)
M ó v = precio de mercado del bien subyacente
r = tasa libre de riesgo (anual)
T = tiempo en días de duración del contrato

---

[1] El gráfico ejemplifica una opción americana de compra C, pero el caso es el mismo para opciones europeas c, p ó americanas de venta P

n = número de periodos

m = número de fechas de ejercicio

σ = volatilidad (anual)

a = probabilidad de que el precio de mercado suba de un periodo a otro

d = probabilidad de que el precio de mercado baje de un periodo a otro

δ = longitud de los periodos

π , θ = probabilidad de ocurrencia de los movimientos en el precio subyacente (prob. neutral al riesgo)

Donde:

$$\delta = \frac{1}{n} \ , \quad a = e^{\sigma\sqrt{\delta T}} \ , \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\delta T}} \ , \quad \pi = \frac{e^{i\delta T} - d}{a - d} \quad \text{y} \quad \theta = (1-\pi) = \frac{a - e^{i\delta T}}{a - d}$$

El algoritmo del programa queda de la siguiente manera:

1. La función pide los siguientes datos k, M, r, T, n, m y σ.
2. A partir del valor de m, el programa pide las m fechas de ejercicio con sus respectivos precios de ejercicio y los guarda en una matriz de m*2.
3. El programa pregunta si es opción de compra ó de venta.
4. El programa calcula los demás datos necesarios a, d, δ, π y θ .
5. A partir de los valores calculados construye el árbol binomial de precios y los guarda en una matriz n+1*n+1.
6. Calcula el periodo T_n del árbol del valor de la opción dependiendo si es compra o venta como se explicaba anteriormente y lo guarda en otra matriz de n+1*n+1
7. Los siguientes periodos los calculará como una opción europea hasta que llegue a una fecha de ejercicio periodo en el cual se calculará como opción americana,

pasando este periodo se volverá a calcular como una opción europea y así consecutivamente hasta llegar a T_0 en el que nos da el valor de la opción Bermudas.

8. Nos da el valor del la opción Bermudas.

Cabe destacar que este programa no sólo calcula el valor de una opción Bermudas, sino que también, como casos particulares, calcula el valor de opciones europeas y americanas; en el primer caso se debe especificar que sólo hay una fecha de ejercicio (m=1) y que ésta es igual a la fecha de vencimiento, característica de las opciones europeas y para el caso de las americanas se especifica que existen tantas fechas de ejercicio como periodos haya, con un mismo precio de ejercicio para todas las fechas.

Comparación numérica

A continuación se expondrá la comparación entre los resultados que se obtienen con el programa (método numérico) y los obtenidos con los modelos analíticos.

Opción de compra Bermudas

Primero consideraremos una opción de compra Bermudas que puede ejercerse en tres diferentes meses, sean estos 3, 6 y 9, con los siguientes parámetros: v_0 = 50 u.m., k_1 = 40 u.m. k_2 = 43 u.m., k_3 = 45 u.m., σ = 0.22 y r = 0.1.

Los resultados comparativos se muestran en la siguiente tabla[2]:

Datos		Método Analítico	Método Númerico
$C_b(50,0.25,0.5,0.75;40,43,45)$		11.02258	11.04370
$C_e(50,0.25;40)$		11.00771	11.00770
$C_e(50,0.5;43)$		9.42294	9.42430
$C_e(50,0.75;45)$		9.05126	9.05300
Valor Bermuda	σ= 0	10.98760	10.98760
	σ= 1	33.87401	19.90280
	r = 0.12	11.21114	11.23970
	k_1 = 40	10.11180	10.16300
$C_e(50,0.25;k_1)$	σ= 0	10.98760	10.98760
	σ= 1	15.31207	15.30600
	r = 0.12	11.20019	11.19980
$C_e(50,0.5;k_1)$	σ= 0	9.09713	9.09710
	σ= 1	17.58839	17.60300
	r = 0.12	9.78687	9.78780
$C_e(50,0.75;k_1)$	σ= 0	8.25154	8.25150
	σ= 1	19.80413	19.79030
	r = 0.12	9.5566	9.55840

Tabla Comparativa 3.1

[2] En la Tabla 3.1 c_e se refiere al valor de la opción europea de compra y c_b a la opción Bermudas

En la tabla anterior se puede notar que los resultados con ambos métodos son muy parecidos para todos los casos con excepción del valor Bermudas con volatilidad igual a 1, en donde el valor obtenido por el método numérico es mucho menor al obtenido por el método analítico; por lo que nos damos a la tarea de calcular la opción americana con los mismos parámetros y precios de ejercicio igual a 45 y así obtenemos un valor aproximado de 20.0774. Ahora notamos que el valor obtenido por el método numérico 19.9028 se encuentra entre el valor de la opción americana 20.0774 y el valor de la opción europea 19.79030 con los mismos parámetros como se podría esperar (19.7903<19.9028<20.0774). Por lo que podemos decir que el método numérico es mejor que el método analítico para el caso de volatilidades altas.

Opción de venta Bermudas

Para el caso de las opciones de venta Bermudas, a continuación se presenta una tabla en donde se exponen los resultados obtenidos por ambos métodos; analítico y numérico variando algunos parámetros, tales como la volatilidad y el número de fechas de ejercicio *n*, considerando que los precios de ejercicio son constantes y los intervalos de tiempo tienen la misma amplitud, ambas restricciones son debido a la naturaleza del método analítico, ya que el método numérico puede trabajar con precios no constantes y con intervalos de diferentes amplitudes.

	r	k	τ	σ	v_t	**Método Analítico**	**Método Númerico**
B(n=2)	0.125	1	1	0.5	1.1	0.11204	0.11050
	0.045	1	1	0.3	1	0.09844	0.09800
	0.08	1	1	0.2	1	0.04882	0.04870
	0.03	1	1	0.1	1	0.02785	0.02780
	0.488	35	0.5833	0.2	40	0.423	0.0062
B(n=4)	0.125	1	1	0.5	1.1	0.11295	0.11300
	0.045	1	1	0.3	1	0.09909	0.09910
	0.08	1	1	0.2	1	0.05085	0.05070
	0.03	1	1	0.1	1	0.02846	0.02850
	0.488	35	0.5833	0.2	40	0.426	0.01100
B(n=8)	0.125	1	1	0.5	1.1	0.11397	0.11440
	0.045	1	1	0.3	1	0.09978	0.09970
	0.08	1	1	0.2	1	0.05161	0.05170
	0.03	1	1	0.1	1	0.02885	0.02880
	0.488	35	0.5833	0.2	40	0.429	0.01400
B(n=16)	0.125	1	1	0.5	1.1	0.11527	0.11520
	0.045	1	1	0.3	1	0.10020	0.10010
	0.08	1	1	0.2	1	0.05229	0.05220
	0.03	1	1	0.1	1	0.02906	0.02900
	0.488	35	0.5833	0.2	40	0.427	0.01630
B(n=32)	0.125	1	1	0.5	1.1	0.11535	0.11560
	0.045	1	1	0.3	1	0.01005	0.10030
	0.08	1	1	0.2	1	0.05237	0.05250
	0.03	1	1	0.1	1	0.02919	0.02920
	0.488	35	0.5833	0.2	40	0.4333	0.01780

Tabla Comparativa 3.2

Se observa en la Tabla 3.2 que los resultados con ambos métodos son muy parecidos con excepción de uno en donde k=35 y v=40; esto lo debemos a que en el modelo analítico para opciones Bermudas de venta se ocupa un parámetro τ que el método numérico no se ocupa y que en el caso citado anteriormente toma valores (τ=.5833) que le impiden permanecer indistinto como en los demás casos (τ=1).

Salvo lo mencionado anteriormente se puede concluir que el método numérico es mejor que el analítico debido a la flexibilidad de en la amplitud de los intervalos de tiempo.

Conclusiones

Debido a las características de las opciones Bermudas no será difícil para los inversionista entenderlas y de este modo podrán ver que pueden acercarse más a sus necesidades que lo que podrían ser las opciones americanas o europeas.

El contar con un método analítico trae varias ventajas para las opciones Bermudas por sobre otras opciones exóticas que no cuentan con ellos, debido a que técnicamente todo se reduce a una pocas operaciones; aunque tengan algunas limitaciones.

El método numérico obtenido en el presente trabajo no sólo será un buen complemento para el modelo analítico investigado; ya que por sí solo y gracias a su gran capacidad operativa[1] podrá dar valuaciones de opciones Bermudas, opciones americanas y opciones europeas en varios casos mucho más confiables que con el método analítico, como se pudo observar en la comparaciones numéricas de ambos métodos, donde una alta volatilidad llega a poner en problemas al método analítico de opciones de compra Bermudas. Por lo que podemos concluir que el método numérico que se desarrolló logra mejorar al método analítico.

A partir del presente trabajo se cree necesario que se siga profundizando en la investigación de las opciones exóticas para estar preparados ante las necesidades de los inversionistas y la constante evolución de los mercados de derivados; particularmente en modelos donde se asume la volatilidad estocástica de precios subyacentes.

[1] El programa desarrollado supera al Sistema de Información Electrónica para Valuación de Opciones sobre Dólar Americano (SIERNA Opciones, https://erdos.fciencias.unam.mx) en la capacidad de número de periodos en donde SIERNA sólo logra computarizar 100 periodos, contra por lo menos 1440 periodos con los que fue probado el programa implementado.

ANEXO

I. Obtención de la fórmula cerrada para valuar opciones Bermudas de compra[1]

La notación básica usada en el texto es la siguiente:

t fecha de valoración,

T_i fecha de ejercicio. $T_i \in \{T_1, \ldots, T_n\}$, $T_i < T_{i+1}$,

k_i precio de ejercicio asociado a T_i, $k_i \in \{k_1, \ldots, k_n\}$,

v_{T_i} v.a. «valor del subyacente en la fecha de ejercicio T_i», $t = T_0$, $\tau_i = T_i - t$,

$C = C(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n)$ valor en t de la opción de compra bermuda descrita, $\frac{\partial C}{\partial v_t} = C_1$, $\frac{\partial^2 C}{\partial v_t^2} = C_{11}$, $\frac{\partial C}{\partial t} = C_t$,

$C_e = C_e(v_{T_j}, T_i; k_i)$ valor en T_j de una opción de compra europea sobre el mismo subyacente que la opción bermuda, ejercitable en T_i ($T_i \geq T_j$) a un precio de ejercicio de k_i,

$C_a = C_a(v_{T_j}, T_i; k_i)$ valor en T_j de una opción de compra americana sobre el mismo subyacente que la opción bermuda, ejercitable en el intervalo $[T_j, T_i]$ a un precio de ejercicio de k_i,

r tipo de interés sin riesgo a corto plazo, conocido y constante en $[t, T_n]$,

$f(T_j, T_i)$ valor en T_j de un bono sin riesgo que paga 1 u.m. en T_i ($T_i \geq T_j$),

$dv_t = \mu v_t dt + \sigma v_t dz_t$ proceso lognormal que modeliza las variaciones instantáneas del valor del subyacente, siendo dz_t un proceso estándar de Wiener,

$p(v_{T_i} | v_{T_j})$ probabilidad de transición de que el valor del subyacente en T_i sea v_{T_i} condicionada al valor que tome en T_j $(i>j)$.

Cuando se requiera una notación adicional se la definirá en el texto.

1. Delimitación del problema

Es bien sabido que una opción de compra americana sobre un subyacente que no paga dividendos no vale más que su correspondiente europea. Siendo la opción bermuda un caso intermedio entre la americana y la europea, cabe preguntarse, bajo las hipótesis de ausencia de arbitraje (o de activos dominados) y de inversores que prefieren más a menos, para que precios de ejercicio el problema tiene sentido.

[1] La obtención se toma íntegramente del artículo de Leguey–Llerena (1998).

a) Consideremos en primer lugar una opción de compra bermuda con dos fechas de ejercicio $\{T_1, T_2\}$ y con precios de ejercicio asociados de $\{k_1, k_2\}$, respectivamente.

Si $k_1 = k_2$, $C_e(v_t, T_2; k_2) \leq C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2) \leq C_a(v_t, T_2; k_2)$. Puesto que en ausencia de dividendos las opciones europea y americana tienen el mismo valor, se tiene

$$C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2) = C_e(v_t, T_2; k_2) = C_a(v_t, T_2; k_2)$$

— Si $k_1 > k_2$ y la opción se ejerce en T_1 su valor será $v_{T_1} - k_1 < v_{T_1} - k_2$. Como $C_e(v_{T_1}, T_2; k_2) \geq max\{0, v_{T_1} - k_2\ f(T_2, T_1)\} \geq v_{T_1} - k_2\ f(T_2, T_1) > v_{T_1} - k_2$ y $C(v_{T_1}, T_2; k_2) = C_e(v_{T_1}, T_2; k_2)$, se tiene $v_{T_1} - k_1 < C(v_{T_1}, T_2; k_2)$. Es decir, en T_1 la opción vale más viva que muerta y, en consecuencia, no se ejercerá, coincidiendo su valor con él de una opción de compra europea con fecha y precio de ejercicio de T_2 y k_2, respectivamente:

$$C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2) = C_e(v_t, T_2; k_2)$$

— $k_1 < k_2$. La opción se ejercerá en T_1 si $v_{T_1} - k_1 > C(v_{T_1}, T_2; k_2)$. Como $C(v_{T_1}, T_2; k_2) = C_e(v_{T_1}, T_2; k_2) \geq v_{T_1} - k_2\ f(T_2, T_1)$, se tiene $v_{T_1} - k_1 >$ $> v_{T_1} - k_2\ f(T_2, T_1)$, si y sólo si $\dfrac{k_1}{k_2} < f(T_2, T_1)$. Bajo la hipótesis de tipo de interés conocido y constante: $f(T_2, T_1) = e^{-r(T_2 - T_1)}$, de donde:

$$\frac{k_1}{k_2} < e^{-r(T_2 - T_1)} \qquad [1]$$

La desigualdad [1] es una condición necesaria de ejercicio anticipado, por tanto, si $\dfrac{k_1}{k_2} > e^{-r(T_2 - T_1)}$ la opción bermuda no se ejercerá en T_1, coincidiendo su valor con él de una opción de compra europea con fecha y precio de ejercicio T_2 y k_2, respectivamente:

$$C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2) = C_e(v_t, T_2; k_2)$$

Evidentemente, si la volatilidad del subyacente es nula la condición [1] se convierte en necesaria y suficiente.

b) Consideremos ahora el caso general de una opción de compra bermuda con fechas de ejercicio $\{T_1,\ldots,T_n\}$ y precios de ejercicio asociados de $\{k_1,\ldots,k_n\}$ respectivamente.

Si $k_1 = \ldots = k_n$, $C_e(v_t, T_n; k_n) \le C(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n) \le C_a(v_t, T_n; k_n)$
Como en ausencia de dividendos el valor de las opciones de compra europea y americana coinciden, se tiene:

$$C(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n) = C_e(v_t, T_n; k_n) = C_a(v_t, T_n; k_n)$$

Si $k_i > k_{i+1}$ y la opción se ejerce en T_i, su valor será $v_{T_i} - k_i < v_{T_i} - k_{i+1} <$ $< C_e(v_{T_i}, T_{i+1}; k_{i+1}) \le C(v_{T_i}, T_{i+1}, \ldots, T_n; k_{i+1}, \ldots, k_n)$. Es decir, la opción vale más viva que muerta y, en consecuencia, no se ejercerá en T_i.

— $k_i < k_{i+1}$. La opción se ejercerá en T_i si:
$v_{T_i} - k_i > C(v_{T_i}, T_{i+1}, \ldots, T_n; k_{i+1}, \ldots, k_n) \ge C_e(v_{T_i}, T_{i+1}; k_{i+1}) \ge$
$> v_{T_i} - k_{i-1} f(T_{i+1}, T_i)$. Si tomamos $f(T_{i+1}, T_i) = e^{-r(T_{i+1}-T_i)}$,
se tiene $v_{T_i} - k_i > v_{T_i} - k_{i+1} e^{-r(T_{i+1}-T_i)}$, si y sólo si:

$$\frac{k_i}{k_{i+1}} < e^{-r(T_{i+1}-T_i)} \qquad [2]$$

Observese también aquí que la expresión [2] es una condición necesaria de ejercicio anticipado, por tanto, si $k_i/k_{i+1} > e^{-r(T_{i+1}-T_i)}$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, podemos eliminar T_i como posible fecha de ejercicio.

Es importante resaltar que las condiciones anteriores no presuponen que el valor del subyacente venga descrito por un determinado proceso estocástico.

2. La ecuación de valoración

La función C que simboliza el valor de la opción de compra bermuda responderá a la EDP:

$$0 = C_1 r v_t + \frac{1}{2} C_{11} v_t^2 \sigma^2 + C_t - rC \qquad [3]$$

sujeta a

$$\text{en } T_1,\ C = max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, T_2, \ldots, T_n; k_2, \ldots, k_n)\} \qquad [3.1]$$

cuya solución es[6]

$$C = e^{-rT_1} E_t\left[max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, T_2, \ldots, T_n; k_2, \ldots, k_n)\} \middle| v_t \right]$$

tomando como dinámica corregida del valor del subyacente a $dv_t = rv_t dt + \sigma v_t dz'_t$, donde dz'_t es un proceso estándar de Wiener.

Resolveremos la EDP [3] sujeta a [3.1] inductivamente.

6. Consideremos una EDP del tipo:

$$0 = C_v r v + \frac{1}{2} C_{vv} v^2 \sigma^2 + C_t - rC,$$

sujeta a

$$C(v, T) = f(v_T)$$

Se demuestra (ver, por ejemplo, Rochet-Demange (1992: 216 y 217), que el precio del activo derivado $C(v, t)$ es igual a la esperanza matemática (para una cierta ley de probabilidad, llamada *probabilidad riesgo neutro*) de la suma actualizada, al tipo de interés libre de riesgo, de los pagos generados por el título, ya sean en forma de flujo continuo de cupones o dividendos, y/o bajo la forma de un reembolso final. En el caso que nos ocupa, la solución es

$$C(v, T) = E_t\left[e^{-\int_t^T r\, ds} f(v_T) \middle| v(t) = v_t \right]$$

3. Opciones de compra bermuda con dos fechas de ejercicio

Consideremos una opción de compra que únicamente puede ejercerse en las fechas T_1 y T_2 a unos precios de ejercicio de k_1 y k_2, respectivamente.

Suponer que $dv_t = \mu v_t dt + \sigma v_t dz_t$ equivale, en términos de distribución, a que[7]:

$$\ln\left(\frac{v_{T_i}}{v_{T_{i-1}}}\right) \sim N(a, b)$$

siendo:

$g = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$;

$a = g(T_i - T_{i-1})$,

$b = \sigma^2 (T_i - T_{i-1})$,

y $N(a, b)$ la función de distribución normal de media a y variancia b.

Cálculo de $C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2)$.

$C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2) = e^{-r\tau} E_t[\max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, T_2; k_2)\} | v_t]$, teniendo en cuenta que $dv_t = rv_t dt + \sigma v_t dz'_t$ y[8] donde $C(v_{T_1}, T_2; k_2)$ representa el valor en T_1 de una opción de compra europea con vencimiento en T_2 y precio de ejercicio k_2, estando definido por la fórmula de Black-Scholes.

Para calcular la esperanza matemática, debemos estudiar previamente los puntos de corte entre las funciones $v_{T_1} - k_1$ y $C(v_{T_1}, T_2; k_2)$. Para ello definiremos la función auxiliar: $f(v) = v - C(v, T_2; k_2) - k_1$.

$f(v)$ es una función continua y derivable con $f'(v) > 0$. En $v = 0$, $f(0) = -k_1 < 0$. Si $v \to \infty \Rightarrow f(v) \to k_2 e^{-r(T_2 - T_1)} - k_1$. Para asegurarnos que $f(v)$ tiene una única raiz debemos imponer la condición $\lim_{v \to \infty} f(v) > 0 \Leftrightarrow k_2 e^{-r(T_2 - T_1)} - k_1 > 0$, la cual se cumplirá si y sólo si

$$\frac{k_1}{k_2} < e^{-r(T_2 - T_1)} \qquad [4]$$

7. Ver, por ejemplo, Hull (1993: 82 y 83).
8. Por tanto, a efectos de cálculo se tiene que

$$\ln\left(\frac{v_{T_i}}{v_{T_{i-1}}}\right) \sim N(r(T_i - T_{i-1}), \sigma^2(T_i - T_{i-1})).$$

Observación 1:

Si $\frac{k_1}{k_2} > e^{-r(T_2 - T_1)}$, entonces, como la función $f(v)$ es estrictamente creciente se tiene que $f(v) = v - C(v, T_2; k_2) - k_1 < 0$ para todo v y la opción se ejercerá en T_2 coincidiendo su valor con él de una clásica con precio de ejercicio k_2 y vencimiento T_2. Obsérvese que la expresión [4] coincide con la desigualdad [1].

En estas condiciones, existe un único valor v_1 tal que $f(v_1) = 0$ y:

$\forall v > v_1, f(v) > 0 \Leftrightarrow v - k_1 > C(v, T_2; k_2)$,

$\forall v \in [0, v_1), f(v) < 0 \Leftrightarrow v - k_1 < C(v, T_2; k_2)$.

Así pues,

$$C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2) = e^{-r(T_1-t)} E_t\left[\max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, T_2; k_2)\} \mid v_t\right]$$

y teniendo en cuenta que:

$$C(v_{T_1}, T_2; k_2) = e^{-r(T_2-T_1)} E_t\left[\max\{0, v_{T_2} - k_2\} \mid v_{T_1}\right]$$

se tiene:

$$C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2) = v_t \Phi_2^2 - e^{-rT_2} k_2 \Phi_1^2 + v_t \Phi(d_1) - e^{-rT} k_1 \Phi(d_2) \qquad [5]$$

siendo,

$$m_1 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_1 - t) - \rho(T_1 - t)\,,$$

$$m_2 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_2 - T_1) - \rho(T_2 - T_1)\,,$$

$$m'_1 = \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_1 - t)\,,$$

$$m'_2 = \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_2 - T_1)\,,$$

$$d_1 = d_2 - \sigma\sqrt{T_1 - t}\,,$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{v_t}{v_1}\right) + \rho(T_1 - t)}{\sigma\sqrt{T_1 - t}}\,,$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx\,,$$

$$\Phi_1^2 = P\left[N_2\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2(T_1 - t) & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_2 - T_1) \end{pmatrix}\right) \in R\right],$$

$$\Phi_2^2 = P\left[N_2\left(\begin{pmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2(T_1 - t) & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_2 - T_1) \end{pmatrix}\right) \in R\right].$$

$$R = \left\{(z_1, z_2) \in \Re^2 \text{ tal que } -\infty < z_1 < \ln\left(\frac{v_t}{v_1}\right);\ \ln\left(\frac{k_2}{v_t}\right) < z_1 + z_2 < \infty\right\}.$$

La consideración de una fecha y precio de ejercicio adicional requiere estudiar el valor de la derivada de C, definida por la fórmula [5], con respecto de v_t. Dado el número de parámetros que contempla la expresión [5], el cálculo directo de C_1 nos ha resultado infructuoso. No obstante, siendo, en cierto sentido, la opción bermuda una generalización de la opción europea, parecía lógico pensar que compartirían algunas propiedades; en concreto, la convexidad con respecto al valor del subyacente. Además, la elección de un proceso lognormal sugería la existencia de una asíntota oblicua en $v_t - k_1 e^{-r\tau}$. El cumplimiento de estas dos propiedades implica que $C_1 < 1$. Para demostrarlas hemos replicado un conjunto de proposiciones de Merton (1973: 146, 147 y 150).

Proposición 1. $C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2)$ es homogénea de grado 1 con respecto al valor del subyacente v_t y a los precios de ejercicio k_1 y k_2.

Demostración: Hay que probar que el recinto de integración R no varía si el valor del subyacente pasa de v_t a αv_t, con $\alpha \in \Re^+$.

Sea $v_1 \in \Re^1$ tal que $v_1 = k_1 + C(v_1, T_2; k_2)$; sabemos que v_1 es único.

Sean $\alpha, v_2 \in \Re^1$ tales que $v_2 = \alpha k_1 + C(v_2, T_2; \alpha k_2)$.

$C(v_{T_1}, T_2; k_2)$ viene definida por la fórmula de Black-Scholes que es homogénea de grado 1 con respecto de v_{T_1} y k_2. Por tanto,

$$v_2 = \alpha\left(k_1 + C\left(\frac{v_2}{\alpha}, T_2; k_2\right)\right) \Leftrightarrow \frac{v_2}{\alpha} = k_1 + C\left(\frac{v_2}{\alpha}, T_2; k_2\right),$$

y por la unicidad se tiene que $\frac{v_2}{\alpha} = v_1 \Leftrightarrow v_2 = \alpha v_1$.

Proposición 2. $C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2)$ es convexa con respecto a los precios de ejercicio k_1 y k_2.

Demostración. Sean:

$k_i = (k_i^1, k_i^2) \in \Re^1 \times \Re^+$, con $i = 1, 2, 3$.

$k_3^j = \lambda k_1^j + (1-\lambda) k_2^j$, con $j = 1, 2$.

$\lambda \in [0, 1]$.

$\tau = (T_1, T_2) \in \Re^+ \times \Re^+$.

Obsérvese que $k_2^j \leq k_3^j \leq k_1^j$, $\forall j = 1, 2$.

Hagamos el cambio de notación: $C(v_t, T_1, T_2; k_i^1, k_i^2) \equiv C(v_t, \tau; k_i)$.

Hay que demostrar que $\forall \lambda \in [0, 1]$ se cumple:

$$C(v_t, \tau; k_3) \leq \lambda C(v_t, \tau; k_1) + (1 - \lambda) C(v_t, \tau; k_2)$$

siendo,

$$C(v_t, \tau; k_i) = e^{-rT_1} E_t \left[max\{0, v_{T_1} - k_i^1, C(v_{T_1}, T_2; k_i^2)\} \middle| v_t \right]$$

y $C(v_{T_1}, T_2; k_i^2)$ el valor en T_1 de una opción de compra estándar definido por la fórmula de Black-Scholes, para $i \in \{1,2,3\}$.

De las propiedades de la función *max*, de la convexidad de $C(v_{T_1}, T_2; k_i^2)$ respecto del precio de ejercicio y de la monotonía de la esperanza matemática se llega al resultado:

$$\lambda C(v_t, \tau; k_1) + (1-\lambda) C(v_t, \tau; k_2)$$

$$= e^{-rT_1} E_t [\lambda max\{0, v_{T_1} - k_1^1, C(v_{T_1}, T_2; k_1^2)\} +$$

$$+(1-\lambda)\, max\{0, v_{T_1} - k_2^1, C(v_{T_1}, T_2; k_2^2)\} \mid v_t] \geq$$

$$= e^{-rT_1} E_t [\, max\{0, v_{T_1} - k_3^1, C(v_{T_1}, T_2; k_3^2)\} \mid v_t] = C(v_{T_1}, \tau; k_3) .$$

La proposición 2 nos dice que el valor de una cartera A formada por λ opciones de compra bermuda con vector de precios de ejercicio (k_1^1, k_1^2) más $1-\lambda$ opciones de compra bermuda con vector de precios de ejercicio (k_2^1, k_2^2) es mayor o igual que el valor de una cartera B formada por una opción de compra bermuda con vector de precios de ejercicio (k_3^1, k_3^2). Obsérvese que si el valor de la cartera A fuera estrictamente menor que él de la cartera B, se daría una situación de arbitraje puesto que en cualquier fecha de ejercicio T_i el valor de la cartera A es, como mínimo, igual que él de la cartera B.

Proposición 3. $C(v_t, T_1, T_2; k_1, k_2)$ es convexa con respecto al valor del subyacente.

Demostración. Sean:

$k_i = (k_i^1, k_i^2) \in \Re^+ \times \Re^+$, con $i = 1, 2, 3$,

$k = (k^*, k^{**}) \in \Re^+ \times \Re^+$,

$k_3 = \gamma k_1 + (1-\lambda) k_2, \forall \gamma \in [0, 1]$,

$v_3 = \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2, \forall \lambda \in [0, 1]$, $v_i \in \Re^+ \forall i = 1, 2, 3$,

$\tau = (T_1, T_2) \in \Re^+ \times \Re^+$.

Hay que demostrar que $\forall \lambda \in [0, 1]$ se cumple:

$$C(v_3, \tau; k) \leq \lambda C(v_1, \tau; k) + (1-\lambda) C(v_2, \tau; k) .$$

donde $C(v_t,\tau;k)\equiv C(v_t,T_1,T_2;k^*,k^{**})$.

Por la proposición 2 sabemos que $\forall\gamma\in[0,1]$ se verifica:

$$C(1,\tau;k_3)\leq\gamma C(1,\tau;k_1)+(1-\gamma)C(1,\tau;k_2) \qquad [1]$$

Tomemos $\gamma=\dfrac{\lambda v_1}{v_3}$ (obsérvese que γ así definida toma valores entre cero y uno[9]) y $k_i=\left(\dfrac{1}{v_i}\right)k$ con[10] $i=1,2,3$.

Multiplicando la desigualdad [1] por v_3:

$$v_3C(1,\tau;k_3)\leq v_3\gamma C(1,\tau;k_1)+v_3(1-\gamma)C(1,\tau;k_2)=$$

$$=\{\gamma v_3=\lambda v_1;\ (1-\gamma)v_3=v_2(1-\lambda)\}=$$

$$=\lambda v_1C(1,\tau;k_1)+v_2(1-\lambda)C(1,\tau;k_2)=\{\text{Por la proposición 1}\}=$$

$$=\lambda C(v_1,\tau;k)+(1-\lambda)C(v_2,\tau;k).$$

La proposición 3 se deduce de las proposiciones 1 y 2; por tanto, su incumplimiento implica que la proposición 1 o la proposición 2 no se verifiquen, provocando una situación de arbitraje.

9. En efecto, de la igualdad $v_3=\lambda v_1+(1-\lambda)v_2$ se tiene

$$1=\frac{\lambda v_1}{v_3}+(1-\lambda)\frac{v_2}{v_3}\Rightarrow 0<\frac{\lambda v_1}{v_3}<1$$

10. Obsérvese que k_i definido de esta forma verifica la igualdad $k_3=\gamma k_1+(1-\gamma)k_2$. En efecto, si $k^*=k_1^1v_1=k_2^1v_2$ y $k^{**}=k_1^2v_1=k_2^2v_2$, y como:
$k_3^1=\gamma k_1^1+(1-\gamma)k_2^1$ [1] y $k_3^2=\gamma k_1^2+(1-\gamma)k_2^2$ [2], se tiene:
De [1],

$$k_3^1=\gamma\frac{k^*}{v_1}+(1-\gamma)\frac{k^*}{v_2}=k^*\left(\frac{\gamma}{v_1}+\frac{1-\gamma}{v_2}\right)=k^*\left(\frac{\lambda}{v_3}+\frac{1-\lambda}{v_3}\right)=\frac{k^*}{v_3}\Leftrightarrow k_3^1v_3=k^*.$$

Y de [2],

$$k_3^2=\gamma\frac{k^{**}}{v_1}+(1-\gamma)\frac{k^{**}}{v_2}=k^{**}\left(\frac{\gamma}{v_1}+\frac{1-\gamma}{v_2}\right)=k^{**}\left(\frac{\lambda}{v_3}+\frac{1-\lambda}{v_3}\right)=\frac{k^{**}}{v_3}\Leftrightarrow k_3^2v_3=k^{**}.$$

Proposición 4. $C(v_t,T_1,T_2;k_1,k_2)$ tiene una asintota oblicua en $v_t-k_1e^{-r\tau_1}$.

Demostración.

$$C(v_t,T_1,T_2;k_1,k_2)=v_t(\Phi_2^2+\Phi(d_1))-e^{-r\tau_2}k_2\Phi_1^2-e^{-r\tau}k_1\Phi(d_2).$$

Cuando $v_t\to\infty\to\Phi_2^2\to0,\Phi_1^2\to0,\Phi(d_1)\to1$ y $\Phi(d_2)\to1$; por tanto,

$C(v_t,T_1,T_2;k_1,k_2)\to v_t-k_1e^{-r\tau_1}$.

4. Valoración de opciones de compra bermuda con n *fechas de ejercicio*

Mediante un proceso de inducción, el resultado anterior puede generalizarse al caso en que la opción permite el ejercicio en n fechas.

Sean:

$$\tau^i = (T_i, T_{i+1}, \ldots, T_n)$$

$$k^i = (k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n)$$

$$C(v_{T_i}, T_{i+1}, \ldots, T_n; k_{i+1}, \ldots, k_n) = C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1})$$

$$f_i(v_{T_i}) = v_{T_i} - k_i - C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i-1})$$

$$i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

Por indución se demuestra que, $\forall i, C(v_{T_i}, \tau^{i-1}; k^{i+1})$ verifica las proposiciones[11] 1, 2, 3 y 4. Por tanto:

$$f_i(0) = -k_i < 0 \qquad [6.1]$$

$$f_i(\infty) = k_{i+1} e^{-r(T_{i+1} - T_i)} - k_i \qquad [6.2]$$

$$f'_i(v_{T_i}) > 0 \qquad [6.3]$$

Lo que nos interesa es estudiar las raíces de la función $f_i(v_{T_i})$ para determinar los valores del subyacente en que es preferible ejercer la opción y aquéllos para los cuales es mejor mantenerla viva. Para asegurar la existencia de una única raíz debemos imponer la condición $f_i(\infty) > 0$, la cual se cumplirá si y sólo si:

$$\frac{k_i}{k_{i-1}} < e^{-r(T_{i+1} - T_i)} \qquad [7]$$

11. Ver apéndice.

Observación 2:

Si $\frac{k_i}{k_{i+1}} > e^{-r(T_{i+1}-T_i)}$ entonces, $v_{T_i} - k_i < C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1})$ y la opción no se ejercerá en T_i. Obsérvese que la desigualdad [7] coincide con la expresión [2].

De [6.1], [6.2], [6.3] y [7] se deduce que existe un único valor de la acción, v_i, tal que $f_i(v_i) = 0$ y

$$\forall v_{T_i} \in [0, v_i), f_i(v_{T_i}) < 0 \Leftrightarrow v_{T_i} - k_i < C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1}),$$

$$\forall v_{T_i} > v_i, f_i(v_{T_i}) > 0 \Leftrightarrow v_{T_i} - k_i > C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1})$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} &C(v_{T_i}, \tau^{i+1}; k^{i+1}) = \\ &= e^{-r(T_{i+1}-T_i)} \Big(\int_0^{v_{i+1}} C(v_{T_{i+1}}, \tau^{i+2}; k^{i+2}) p(v_{T_{i+1}} | v_{T_i}) dv_{T_{i+1}} + \\ &\int_{v_{i+1}}^{\infty} (v_{T_{i+1}} - k_{i+1}) p(v_{T_{i+1}} | v_{T_i}) dv_{T_{i+1}} \Big) \end{aligned} \qquad [8]$$

Así pues, el valor de una opción de compra bermuda que permite el ejercicio en las fechas $T_1, \ldots, T_n$ con precios de ejercicio respectivos $k_1, \ldots, k_n$ vendrá determinado por:

$$C(v_t, \tau^1; k_1) = e^{-rT} E_t [max\{0, v_{T_1} - k_1, C(v_{T_1}, \tau^2; k^2)\} | v_t]$$

y teniendo en cuenta [8] se llega a:

$$C(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n) = \sum_{i=1}^{n} (v_t \Phi_2^i - k_i e^{-rT_i} \Phi_1^i) \qquad [9]$$

con:

$m_i = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_i - T_{i-1})$,

$m'_i = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_i - T_{i-1}), \forall i = 1, \ldots, n$,

$T_0 \equiv t$,

$d_1 = d_2 + \sigma_v \sqrt{T_1 - t}$,

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{v_t}{v_1}\right) + g(T_1 - t)}{\sigma_v \sqrt{T_1 - t}},$$

$\Phi_2^1 \equiv \Phi(d_1)$,

$\Phi_1^1 \equiv \Phi(d_2)$,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx ,$$

$$\Phi'_1 = P\left[N_i\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2(T_1-t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_2-T_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2(T_i-T_{i-1}) \end{pmatrix} \right) \in R_{i-1} \right],$$

$$\Phi'_2 = P\left[N_i\left(\begin{pmatrix} m'_1 \\ \vdots \\ m'_i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2(T_1-t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_2-T_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2(T_i-T_{i-1}) \end{pmatrix} \right) \in R_{i-1} \right],$$

$R_{i-1} = \{(z_1, \dots, z_i) \in \Re^i$ tal que

$$-\infty < z_1 < \ln\left(\frac{v_1}{v_i}\right); \quad -\infty < z_1 + z_2 < \ln\left(\frac{v_2}{v_i}\right); \dots;$$

$$-\infty < z_1 + \dots + z_{i-1} < \ln\left(\frac{v_{i-1}}{v_i}\right); \ \ln\left(\frac{v_i}{v_i}\right) < z_1 + \dots + z_i < \infty \},$$

$$\forall i = 2, \dots, n-1 ,$$

$R_{n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \Re^n$ tal que

$$-\infty < z_1 < \ln\left(\frac{v_1}{v_i}\right); -\infty < z_1 + z_2 < \ln\left(\frac{v_2}{v_i}\right); \dots;$$

$$-\infty < z_1 + \dots + z_{n-1} < \ln\left(\frac{v_{n-1}}{v_i}\right); \ \ln\left(\frac{k_n}{v_i}\right) < z_1 + \dots + z_n < \infty \},$$

$$v_{n-j} : k_{n-j} = C(v_{n-j}, T_{n-j+1}, \dots, T_n; k_{n-j+1}, \dots, k_n),$$

$$\forall j = 1, \dots, n-1 ,$$

$$\ln\left(\frac{k_j}{k_{j+1}}\right) < -r(T_{j+1} - T_j), \forall j = 1, \dots, n-1 ,$$

$$\varrho = r - \frac{1}{2}\sigma^2 ,$$

$$\tau_j = T_j - t, \forall j = 1, \dots, n .$$

Obsérvese que la expresión [9] incluye como caso particular la conocida fórmula de Black-Scholes (1973).

Apéndice

Las proposiciones 1, 2, 3 y 4 pueden generalizarse, mediante un proceso de inducción completa, a todo n.

Para $n = 1$: $C(v_t, T_1; k_1)$ verifica las cuatro proposiciones ya que está definida por la fórmula de Black-Scholes.

Supongamos que se verifican para $n - 1$.

Para n:

Proposición 1. Sea $\alpha \in \Re^+$ y $v_{n-1} \in \Re^+$ el único valor del subyacente en el instante T_1 que cumple la igualdad:

$$v_{n-1} - k_1 = C(v_{n-1}, T_2, \ldots, T_n; k_2, \ldots, k_n)$$

Sea $v^*_{n-1} \subset \Re^+$ tal que

$$v^*_{n-1} - \alpha k_1 = C(v^*_{n-1}, T_2, \ldots, T_n; \alpha k_2, \ldots, k_n)$$

Como, por hipótesis de inducción, $C(v_{T_1}, T_2, \ldots, T_n; k_2, \ldots, k_n)$ verifica la proposición 1, se tiene:

$$\frac{v^*_{n-1}}{\alpha} - k_1 = C\left(\frac{v^*_{n-1}}{\alpha}, T_2, \ldots, T_n; k_2, \ldots, k_n\right)$$

y por la unicidad $v^*_{n-1} = \alpha v_{n-1}$.

Proposición 2. La demostración es análoga al caso $n = 2$, haciendo el cambio de notación:

$k_i^* = (k_i^2, \ldots, k_i^n) \in \Re^{n-1}$

$k_i = (k_i^1, \ldots, k_i^n) \in \Re^n, k_i^j > 0, \forall j = 1, \ldots, n, i = 1, 2, 3,$

$k_3^j = \lambda k_1^j + (1 - \lambda) k_2^j, \forall j = 1, \ldots, n, \forall \lambda \subset [0, 1]$,

$\tau^* = (T_2, \ldots, T_n) \subset \Re^{n-1}$,

$\tau = (T_1, \ldots, T_n) \subset \Re^n, T_j > 0, \forall j = 1, \ldots, n$.

$C(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_i^1, \ldots, k_i^n) = C(v_t, \tau; k_i)$,

$C(v_t, \tau; k_i) = e^{-rT_1} E_t \left[max\{0, v_{T_1} - k_i^1, C(v_{T_1}, \tau^*; k_i^*)\} \middle| v_t \right]$.

Proposición 3. La demostración es análoga al caso $n = 2$, teniendo en cuenta que:

$k_i = (k_i^1, \ldots, k_i^n) \in \Re^n, k_i^j > 0, \forall j = 1, \ldots, n, i = 1, 2, 3,$

$E = (E_1, \ldots, E_n) \in \Re^n, E_j > 0, \forall j = 1, \ldots, n,$

$k_3 = \gamma k_1 + (1-\gamma) k_2, \forall \gamma \in [0, 1],$

$v_3 = \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2, \forall \lambda \in [0, 1], v_i \in \Re^-, i = 1, 2, 3,$

$\tau = (T_1, \ldots, T_n) \in \Re^n, T_j > 0, \forall j = 1, \ldots, n,$

$C(v_t, \tau; E) \equiv C(v_t, T_1, \ldots, T_n; E_1, \ldots, E_n).$

Proposición 4.

$C(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n) = v_t \sum_{i=1}^{n} \Phi_2^i - \sum_{i=1}^{n} k_i e^{-rT_i} \Phi_1^i.$

Cuando $v_t \to -\infty \Rightarrow \Phi_2^i \to 0, \Phi_1^i \to 0, \forall i = 2, \ldots, n, \Phi_2^1 \to 1,$ y $\Phi_1^1 \to 1$; por tanto, $C(v_t, T_1, \ldots, T_n; k_1, \ldots, k_n) \to v_t - k_1 e^{-rT_1}.$

II. Código fuente del programa desarrollado.

Este código se desarrolló en el programa Matlab 7.0

```
function v=Bermudasbinomial(S,M,T,sigma,r,n,m)
% Calcula el valor de una opción Bermudas
% Donde:
% S ó k es el valor de ejercicio
% M ó v es el valor de mercado
% Sigma es la volatilidad
% r la tasa de interés libre de riesgo
% n el número de periodos
% m el número de fechas de ejercicio
% La función se llama: Bermudasbinomial(S,M,T,sigma,r,n,m)
N=zeros(m,2);
tipo=input('Teclea la primera fecha de ejercicio-periodo: ');
N(1,1)=tipo;
tipo=input('Teclea el primer precio de ejercicio: ');
N(1,2)=tipo;
for k=2:m
   tipo=input('Teclea la siguiente fecha de ejercicio-periodo: ');
   N(k,1)=tipo;
   tipo=input('Teclea el siguiente precio de ejercicio: ');
   N(k,2)=tipo;
end
tipo==0;
tipo=input('Teclea 1 si es una opción de compra ó 2 si es una opción de venta: ');
p=0;
t=0;
u=0;
d=0;
u=exp(sigma*sqrt(T/(360*n)));
d=exp(-sigma*sqrt(T/(360*n)));
p=(exp(r*(T/(360*n)))-d)/(u-d);
t=1-p;
P=zeros(n+1);
H=zeros(n+1);
V=zeros(n+1);
H(1,1)=M;
o=0;
for i=0:n-1
   for j=o:n-1
      H(i+1,j+2)=H(i+1,j+1)*u;
      H(i+2,j+2)=H(i+1,j+1)*d;
```

```
    end
    o=o+1;
end
for i=0:n
      if tipo==2
           P(i+1,n+1)=max(S-H(i+1,n+1),0);
      end
      if tipo==1
          P(i+1,n+1)=max(H(i+1,n+1)-S,0);
      end
end
i=0; j=0; o=0;
for j=n+1
    for i=n:-1:0
        V(i+1,j)=P(i+1,j);
    end
end
if m==1
    if n==N(1,1)
        o=n;
        for j=n:-1:1
            for i=o:-1:1
                V(i,j)=(p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n)));
            end
            o=o-1;
        end
    end
else
    if n==N(m,1)
        o=n;
        q=m;
        for j=n:-1:(N(q-1,1)+2)
            for i=o:-1:1
                V(i,j)=(p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n)));
            end
            o=o-1;
        end
        for q=m:-1:3
            for j=N(q-1,1)+1
                for i=o:-1:1
                    if tipo==1
                        V(i,j)=max(((p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n)))),
(max(H(i,j)-N(q-1,2),0)));
                    end
```

```
                if tipo==2
                    V(i,j)=max((p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n))),max(N(q-
1,2)-H(i,j),0));
                end
            end
            o=o-1;
        end
        for j=(N(q-1,1)):-1:(N(q-2,1)+2)
            for i=o:-1:1
                V(i,j)=(p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n)));
            end
            o=o-1;
        end
    end
    for j=N(1,1)+1
        for i=o:-1:1
                if tipo==1
                    V(i,j)=max((p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n))),max(H(i,j)-
N(1,2),0));
                end
                if tipo==2
                    V(i,j)=max((p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-
r*(T/(360*n))),max(N(1,2)-H(i,j),0));
                end
            end
            o=o-1;
    end
    for j=(N(1,1)):-1:1
        for i=o:-1:1
                V(i,j)=(p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n)));
            end
            o=o-1;
    end
else
    o=n;
    q=m;
    for j=n:-1:(N(q,1)+2)
        for i=o:-1:1
            V(i,j)=(p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n)));
        end
        o=o-1;
    end
    for q=m:-1:2
        for j=N(q,1)+1
```

```
            for i=o:-1:1
               if tipo==1
                  V(i,j)=max((p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n))),max(H(i,j)-
N(q-1,2),0));
               end
               if tipo==2
                  V(i,j)=max((p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n))),max(N(q-
1,2)-H(i,j),0));
               end
            end
            o=o-1;
         end
         for j=(N(q,1)):-1:(N(q-1)+2)
            for i=o:-1:1
               V(i,j)=(p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n)));
            end
            o=o-1;
         end
      end
      for j=N(1,1)+1
         for i=o:-1:1
               if tipo==1
                  V(i,j)=max((p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n))),max(H(i,j)-
N(1,2),0));
               end
               if tipo==2
                  V(i,j)=max((p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-
r*(T/(360*n))),max(N(1,2)-H(i,j),0));
               end
            end
            o=o-1;
      end
      for j=(N(1,1)):-1:1
         for i=o:-1:1
               V(i,j)=(p*V(i,j+1)+t*V(i+1,j+1))*exp(-r*(T/(360*n)));
            end
            o=o-1;
      end
   end
end
H;
P;
V;
v=V(1,1);
```

Bibliografía

BLACK, F. y Scholes, M., *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"*, Journal of Political Economy, Vol. 81, 1973, pp. 637-654.

CHANCE, D., *"The Pricing of Limited-exercise Caps and Spreads"*, Working paper, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1992.

CLIMENT, J., *"Análisis teórico práctico para la valuación de opciones*", Universidad Nacional Autónoma de México, Tesis de licenciatura, 2001.

CLIMENT, J., *"Sistema de información electrónica para valuación de opciones"*, Universidad Nacional Autónoma de México, Tesis de maestría, 2004.

COX, J y Ross, S., *"The valuation of options for alternative"*, Journal of Financial Economics 3, 1976 pp. 145-166.

DEWYNNE, J.; Howison, S. y Wilmott, P., *"Option Pricing: Mathematical Models and Computation"*, Oxford: Oxford Financial Press, 1997.

FLESAKER, B., *"The Design and Valuation of Capped Index Option"*, Working papper, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1992.

GARCÍA, J.; Sancha, M.; Tejero, C. y Toscano, D*., "Opciones exóticas",* Boletín Económico de ICE No. 2673, 2000.

GASTINEAU, G., *"Dictionary of Financial Risk Management"*, Chicago: Probus Publishing Co., 1992.

GESKE, R., *"The valuation of compound options"*, Journal of Financial Economis 7, 1979, pp. 63-81.

GESKE, R. y Johnson, H.E., *"The American put valued analytically"*, Journal of Finance, Vol 39, 1984, pp. 1511-1524.

GESKE, R., *"A note on the analytical formula for unprotected American call options on stocks with know dividends"*, Journal of Financial Economics 7, 1979, pp. 375-380.

HULL. J., *"Introducción a los mercados de futuros y opciones"*, Prentice Hall, 2002.

HULL. J., *"Options, Futures and other Derivative Securities"*, Prentice Hall, 1998.

JARROW, R. y Rudd, A., *"Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes"*, Journal of Financial Economics, 10, 1982, pp. 347-369.

LEGUEY, S., *"Las bases estocásticas de la modelización financiera"*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1995.

LEGUEY, S. y Llerena, F., *"Valoración de opciones de compra Bermudas con precios de ejercicio variables"*, Revista Española de Economía, Vol. 15, 1998, pp. 199-216.

LEGUEY, S. y Llerena, F., *"Opciones de compra extensibles con vencimiento extendible"*, Document de Treball 2, Departament de Gestió d´Empreses i Economia, Universitat Rovira i Virgili (URV), 1999.

LEGUEY, S y Llerena, F., *"Valoración de opciones de compra americanas sobre acciones que reparten un número finito de dividendos de cuantía aleatoria"*, Document de Treball 2, Departament de Gestió d´Empreses i Economia, Universitat Rovira i Virgili (URV), 2000.

LEGUEY, S y Llerena, F, *"Valoración de opciones de venta vía opciones Bermudas"*, Document de Treball 5, Departament de Gestió d´Empreses i Economia, Universitat Rovira i Virgili (URV), 2000.

LLERENA, F., *"Una nota sobre valoración de opciones americanas y arbitraje"*, Investigaciones Económicas, Vol XXIV (1), 2000, pp. 207-218.
LONGSTAFF, F., *"Pricing options with extendible maturities: analysis and applications"*, The Journal of Finance, Vol. 45, 1990, pp. 935-957.
MACMILLAN, L.W., *"Analytic approximation for the American put option"*, Advance in Futures and Options Research, Vol. 1, 1986, pp. 119-139.
MERTON, R. C., *"Theory of Racional Option Pricing"*, Bell Journal of Economics and Management Science, Spring, 1973,pp. 141-183.
MERTON, R. C., *"On the Pricing of Contigent Claims and the Modigliani-Millier Theorem"*, Journal of Financial Economics 5, 1977, pp. 241-249.
ROCHET, J.-C., Demange, G.: *"Méthodes mathematiques de la finance"*, Economica. París, 1992.
ROLL, R., *"An analytic valuation formula for unprotected American call options on stocks with know dividends"*, Journal of Financial Economics 5, 1977, pp. 251-258.
RUBINSTEIN, M. y Reiner, E., *"Exotic Options"*, Finance Working Paper, No. 220, Institute of Business and Economic Research, University of California, 1992
SCHWARTZ, E.S., *"The valuation of warrants: implementing a new approach"*; Journal of Financial Economics4, pp. 79-93; 1977.
STOER, J. y Bulirsch, R., *"Introductions to Numeriacl Analysis"*; Berlín: Springer; 1993.
TRIPPI, R. y Chance, D.,: *"Quick Valuation of the Bermuda Capped Option"*; Journal of Portfolio Management, 20, pp. 93-99; 1993.
WHALEY, D., "On the valuation of American call options on stocks with know dividends"; Journal of Financial Economics 9, pp. 375-380; 1981.