UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL MÉTODO DE RESERVA MÍNIMA Y APLICACIONES GENERALIZADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIA

P R E S E N T A :

LAURA IRAÍS BALLINAS ZAVALA

TUTOR:
ACT. JORGE OTILIO AVENDAÑO ESTRADA

2008

A mis padres y a Jorge Luis Rodríguez.

Agradecimientos:

A Dios por darme la oportunidad de llegar aquí, por darme fuerza y valor para lograr mis sueños.

A mis padres por brindarme su apoyo incondicional.

A Jorge Avendaño por su ayuda y por todo el tiempo que me ha dedicado, para hacer posible este trabajo.

A mis profesores, que son una parte esencial en mi desarrollo académico, ya que si ellos yo no tendría los conocimientos necesarios para desempeñar mi profesión.

A Jorge Luis Rodríguez por estar a mi lado en todo momento.

"Las grandes cosas no se logran por impulso, sino por la suma de pequeños hechos".

Vincent Van Gogh.

ÍNDICE DE CONTENIDO Página.

INTRODUCCIÓN

El Diario Oficial de la Federación publicó el 30 de septiembre de 2003 la Circular S-10.1.7.1 de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, la cual da a conocer, de manera general, a las compañías de seguros, el procedimiento actuarial que deben seguir para poder determinar el monto mínimo de sus reservas de riesgos en curso de los seguros de vida de largo plazo. Dicho monto es conocido como “reserva mínima”.

La circular da una descripción del cálculo actuarial de la reserva mínima, sin embargo, se basa en un caso muy particular, por lo que, este trabajo tiene como principal objetivo, mostrar la aplicación del método de reserva mínima en distintos tipos de seguro de vida, sin contradecir el espíritu de dicha circular.

Este trabajo está integrado por cuatro capítulos, desarrollados de la siguiente manera:

El primer capítulo trata sobre el concepto de reserva matemática y sus distintos métodos de cálculo: el método prospectivo, el retrospectivo y el método de recurrencia. También se habla de los seguros de muerte y de sobrevivencia sobre varias vidas, de la teoría de decrementos múltiples, así como de las probabilidades y seguros con decrementos múltiples. Se dan ejemplos sobre la reserva matemática de estos seguros.

Se revisa el concepto de sistema modificado de reservas, se menciona el porqué es necesario el uso de estos sistemas y cuándo se deben usar. Otros conceptos que se tratan en el segundo capítulo son el de prima modificada de primer año y el de prima modificada de renovación.

Además, se dan a conocer algunos sistemas modificados de reservas, como el de Año Temporal Preliminar Completo, el de Illinois estándar, el de los Comisionados, el Canadiense, y el Temporal Preliminar a 2 años. Se menciona la diferencia entre un Sistema de Año Temporal Preliminar Completo y el Sistema de Año Temporal Preliminar Modificado. Se habla también sobre los sistemas modificados en México.

El último apartado de este segundo capítulo trata sobre cómo se amortiza un préstamo.

Los motivos por los cuales se creó el método de reserva mínima, el marco legal de este método, y una descripción detallada del mismo, se mencionan en el tercer capítulo. También se da un ejemplo que compara la reserva matemática bajo distintos sistemas modificados de reserva.

En el último capítulo se proponen algunos ejemplos de seguros de vida no tradicionales, y se desarrolla cada uno de ellos aplicando el método de reserva mínima. Cada ejemplo incluye la descripción de la cobertura, el cálculo de la prima nivelada, el cálculo de las primas modificadas de primer año y de renovación, el procedimiento para determinar la anualidad de amortización, una gráfica comparativa de la reserva no modificada, de prima nivelada, y de la reserva mínima. Además, se determina la reserva mínima exacta a una fecha de valuación dada y, en algunos casos, se propone un esquema de amortización con aportaciones variables, el cual se compara con la normatividad vigente sobre la reserva matemática.

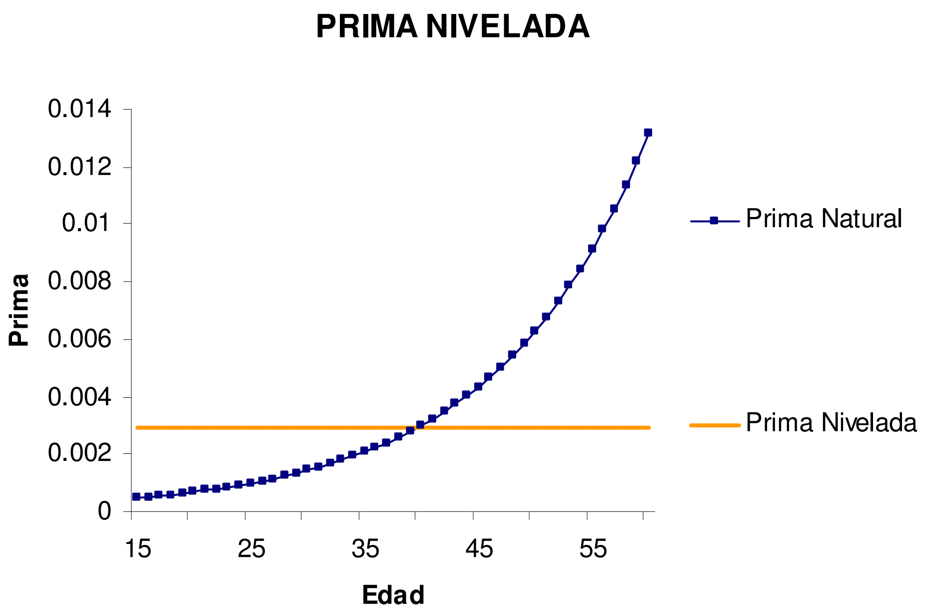
CAPÍTULO I.
LA RESERVA MATEMÁTICA

1.1 Concepto de la Reserva Matemática.

1.1.1 Reserva de los Seguros de Vida a Prima Nivelada.

En un plan de prima nivelada, donde el pago de la prima es constante cada año, las primas netas, en conjunto y con base a las tasas de mortalidad e interés supuestas, son suficientes para pagar todas las reclamaciones esperadas por muerte que se van venciendo. El total de las primas netas pagadas cada año son, al menos por un tiempo, al principio, mayores que el importe de las reclamaciones por muerte, de esta manera se crea un fondo con los pagos excedentes y con los intereses sobre los mismos. Dicho fondo es técnicamente la *reserva matemática*[1]. Sin esta reserva, las primas futuras en el plan de prima nivelada serían insuficientes, por lo que el mantenimiento de este fondo es una parte necesaria de este plan.

Esto se debe a que el riesgo de muerte es creciente con la edad de los asegurados mientras que la prima nivelada, al ser un valor promedio, no corresponde al valor esperado de la mortalidad anual, como se muestra en la siguiente gráfica:



Gráfica 1.1.1.1 Comparación del comportamiento de la prima natural con la prima nivelada. Tabla de Mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

[1] La reserva matemática se refiere a la reserva que corresponde a seguros de vida y a pensiones de largo plazo.

En esta gráfica se muestra como es el comportamiento de la prima natural[2] con respecto a la prima nivelada. Se puede ver claramente que en los primeros años la prima nivelada que paga el asegurado es mayor a la prima que debería pagar, con la diferencia se forma la reserva, la cual se va acumulando para cuando suceda lo contrario, es decir, para cuando la prima nivelada sea menor que la prima natural y por lo tanto insuficiente para pagar las muertes ocurridas durante los últimos años.

Debe quedar claro que la reserva se acumula con base en las tasas de mortalidad y de interés supuestas por la compañía aseguradora, y no sobre la base de la mortalidad que se experimenta realmente. En la gran mayoría de los casos, las reclamaciones por muerte reales son más bajas que las supuestas las cuales estuvieron previstas en el cálculo de la prima neta, entonces la diferencia es una ganancia de la mortalidad con la cual se aumenta el fondo de superávit de la compañía aseguradora hasta que se distribuya entre los asegurados o accionistas como dividendos.

1.1.2 Otro Punto de Vista.

La reserva se puede explicar desde otro punto de vista. Se sabe que en cualquier seguro con un plan de primas anuales y suma asegurada de 1 unidad monetaria, donde A representa el valor presente de las obligaciones de la compañía y $P\ddot{a}$ el valor presente de las primas que debe pagar el asegurado, en el momento inicial se cumple la siguiente ecuación, llamada *principio de equivalencia*

$$A = P\ddot{a} \qquad (1.1.2.1)$$

es decir, que el compromiso del asegurador es igual al del asegurado, o bien

$$A - P\ddot{a} = 0 \qquad (1.1.2.2)$$

lo cual significa que en el momento inicial la diferencia entre los compromisos del asegurador y el asegurado es igual a cero.

La igualdad que hay entre ambos compromisos deja de existir desde el momento en que empieza a transcurrir el tiempo, entonces después de m años se tiene

$$A_{(m)} \neq P\ddot{a}_{(m)} \qquad (1.1.2.3)$$

Donde $A_{(m)}$ y $P\ddot{a}_{(m)}$ son respectivamente, la prima única de cualquier seguro y el valor presente actuarial de las primas que se pagan de manera vitalicia después de m años de haber iniciado el seguro, esto es, que si la edad inicial del asegurado es x entonces la edad del asegurado ahora es $x+m$.

Si el seguro se contratara ahora, se tendría lo siguiente

[2] Una prima natural es el valor esperado anual del riesgo por muerte o sobrevivencia, según el seguro de que se trate.

$$A_{(m)} = P_{(m)}\ddot{a}_{(m)} \qquad (1.1.2.4)$$

Pero como por lo general la prima anual, para un mismo tipo de seguro, crece al aumentar la edad, entonces

$$P_{(m)} > P$$

por lo que se obtiene

$$A_{(m)} = P_{(m)}\ddot{a}_{(m)} > P\ddot{a}_{(m)} \qquad (1.1.2.5)$$

esto es, la obligación del asegurador es mayor que la del asegurado. A la diferencia que hay entre éstas se le conoce como *reserva matemática* y se simboliza con la letra V [3].

$$V_{(m)} = A_{(m)} - P\ddot{a}_{(m)} \qquad (1.1.2.6)$$

Cuando el plan del seguro es a prima única no existe el compromiso del asegurado, entonces

$$V_{(m)} = A_{(m)} \qquad (1.1.2.7)$$

1.2 Métodos de Cálculo de la Reserva Matemática.

Los procedimientos que se deben seguir para el cálculo de las reservas matemáticas son muy variados, ya que éstos dependen de las características de cada plan.

1.2.1 Método Prospectivo.

El método prospectivo es el más común y el que se deriva de la definición, por lo que toma en cuenta las obligaciones futuras del asegurador y del asegurado. Es por ello que también se le llama de *previsión* o de *expectativa*.

Entonces, sólo se debe calcular, en un momento m dado, los valores presentes de las obligaciones futuras del asegurador y del asegurado, y después obtener la diferencia entre ellos:

$$V_{(m)} = A_{(m)} - P\ddot{a}_{(m)}$$

Otra forma más general de la fórmula del método prospectivo es

[3] Inicial de la expresión inglesa *Value of police*, valor de póliza.

$$ {}_{m}V = \sum_{j=0}^{n-1} b_{m+j+1} \cdot v^{j+1} \, {}_{j}p_{x+m} \cdot q_{x+m+j} - \sum_{j=0}^{p-1} \pi_{m+j} \cdot v^{j} \, {}_{j}p_{x+m} \qquad (1.2.1.1) $$

Donde ${}_{m}V$ es la reserva en el año m, el valor de b_j es el beneficio por muerte en el año j con $j = 1,2,\ldots$, el valor de π_{j-1} es el pago de la prima en el año j también con $j = 1,2,\ldots$, entonces π_0 es la prima que se paga al inicio del primer año y así sucesivamente. Además n es el plazo de cobertura del seguro y p es el plazo de pago de primas.

Por ejemplo, bajo este método, en un seguro de vida entera ($n = \propto$) para una persona de edad x, pagadero con primas que van a durar toda la vida ($p = \propto$), seguro ordinario de vida, con suma asegurada de una unidad monetaria ($b_j = 1$, para toda j), la reserva después de m años es

$$ {}_{m}V_{x} = A_{x+m} - P_{x}\ddot{a}_{x+m} \qquad (1.2.1.2) $$

Si en lugar de ser pagadero por primas durante toda la vida es pagadero por un número determinado, p, de primas, es decir, a pagos limitados, donde $m < p$, entonces la reserva es

$$ {}_{m}V_{x} = A_{x+m} - {}_{p}P_{x}\ddot{a}_{x+m:\overline{p-m|}} \qquad (1.2.1.3) $$

Pero si $m \geq p$, la reserva queda

$$ {}_{m}V_{x} = A_{x+m} \qquad (1.2.1.4) $$

la reserva se reduce sólo al compromiso del asegurador, ya que el asegurado no tiene ninguna obligación pendiente con la compañía.

Existe una forma más sencilla para el cálculo de la reserva en un seguro ordinario de vida y en un dotal (mixto)

$$ A_{x} = P_{x}\ddot{a}_{x} = 1 - d\ddot{a}_{x} $$

ya que $P_{x} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x}} - d$

Entonces

$$ {}_{m}V_{x} = A_{x+m} - P_{x}\ddot{a}_{x+m} = P_{x+m}\ddot{a}_{x+m} - P_{x}\ddot{a}_{x+m} $$

$$ = (P_{x+m} - P_{x})\ddot{a}_{x+m} = \left(\frac{1}{\ddot{a}_{x+m}} - d - \frac{1}{\ddot{a}_{x}} + d \right)\ddot{a}_{x+m} $$

por lo tanto

$$ {}_mV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}_x} \qquad (1.2.1.5) $$

En el seguro mixto se tiene

$$ {}_mV_{x:\overline{n}|} = A_{x+m:\overline{n-m}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} = \left(P_{x+m:\overline{n-m}|} - P_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} $$

por lo tanto

$$ {}_mV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (1.2.1.6) $$

Las ecuaciones (1.2.1.5) y (1.2.1.6) muestran que el seguro ordinario de vida y el mixto tienen reservas que siempre son positivas y que crecen conforme pasa el tiempo. Esto se debe a que las primas anuales, en estos planes de seguro, crecen al aumentar la edad

$$ P_{x+m} > P_x \quad \text{y} \quad P_{x+m:\overline{n-m}|} > P_{x:\overline{n}|} $$

cuando crece el valor de *m* aumenta la diferencia que hay en estas expresiones.

También, como el valor presente de la renta disminuye al aumentar la edad se tiene

$$ \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}_x} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} < 1 $$

Entonces

$$ {}_mV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}_x} > 0 $$

$$ {}_mV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} > 0 $$

$$ \text{y} \;\; {}_{m+1}V_x > {}_mV_x $$

$$ {}_{m+1}V_{x:\overline{n}|} > {}_mV_{x:\overline{n}|} $$

Cuando se trata del seguro mixto además de aumentar la edad también se acorta el plazo, por lo que las desigualdades se acentúan.

1.2.2 Método Retrospectivo.

Aunque no es tan común, las reservas matemáticas también se pueden calcular con el llamado método *retrospectivo*. A diferencia del método prospectivo que considera las obligaciones futuras, este método se basa en las obligaciones ya cumplidas por ambas partes, he de ahí su nombre.

Entonces la reserva es igual a la diferencia que existe entre lo cobrado y lo pagado por el asegurador, es decir, la diferencia entre las primas pagadas por el asegurado y lo que ha aportado la aseguradora por siniestros, tomando en cuenta los intereses producidos por los dos lados.

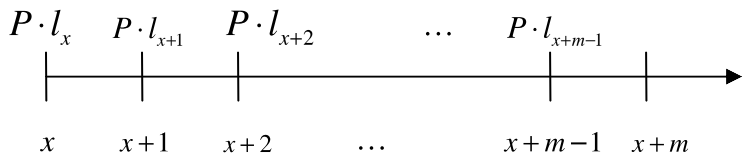
De manera general se tiene

$$V_{(m)} = P\ddot{S}_{(m)} - k_{(m)} \qquad (1.2.2.1)$$

donde $k_{(m)}$ representa al costo de acumulación del seguro, y $P\ddot{S}_{(m)}$ es la acumulación del valor de las primas pagadas durante m años.

Si, por ejemplo, se tiene un seguro ordinario de vida contratado por l_x personas, entonces al final del año m quedan l_{x+m} asegurados vivos. El asegurador debe haber creado, para cada asegurado con vida, una *reserva individual* de ${}_mV_x$. Por lo que $l_{x+m} \cdot {}_mV_x$ es la *reserva global*, que también es la diferencia entre los cobros y los pagos del asegurador.

Por un lado, se tienen las primas cobradas



del 1er año: $P \cdot l_x \cdot (1+i)^m$

ya que l_x es el número de personas que pagan la prima P, y éstas se acumulan a la tasa i durante m años, ya que las primas se pagan por adelantado. De manera similar se tiene

del 2º año: $P \cdot l_{x+1} \cdot (1+i)^{m-1}$

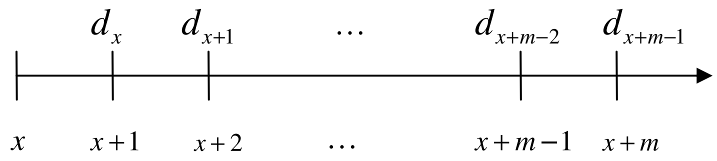
…

y del m-ésimo año: $P \cdot l_{x+m-1} \cdot (1+i)$

Entonces los cobros totales tomando en cuenta los intereses son:

$$P \cdot l_x \cdot (1+i)^m + P \cdot l_{x+1} \cdot (1+i)^{m-1} + ... + P \cdot l_{x+m-1} \cdot (1+i)$$

Por el otro lado se tienen los pagos



Por lo que los pagos totales tomando en cuenta los intereses son:

$$d_x \cdot (1+i)^{m-1} + d_{x+1} \cdot (1+i)^{m-2} + ... + d_{x+m-2} \cdot (1+i) + d_{x+m-1}$$

Como la *reserva global* es igual a los cobros menos los pagos hechos por el asegurador, se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} l_{x+m} \cdot {}_mV_x = {} & P \cdot l_x \cdot (1+i)^m + P \cdot l_{x+1} \cdot (1+i)^{m-1} + ... + P \cdot l_{x+m-1} \cdot (1+i) \\ & -\left[d_x \cdot (1+i)^{m-1} + d_{x+1} \cdot (1+i)^{m-2} + ... + d_{x+m-2} \cdot (1+i) + d_{x+m-1} \right] \end{aligned}$$

entonces

$${}_mV_x = P\left[\frac{l_x \cdot (1+i)^m + l_{x+1} \cdot (1+i)^{m-1} + ... + l_{x+m-1} \cdot (1+i)}{l_{x+m}} \right]$$

$$-\left[\frac{d_x \cdot (1+i)^{m-1} + d_{x+1} \cdot (1+i)^{m-2} + ... + d_{x+m-2} \cdot (1+i) + d_{x+m-1}}{l_{x+m}} \right]$$

que si multiplicamos por $l_x \cdot v^m$ al denominador y al numerador

$${}_mV_x = P \frac{\left[l_x + l_{x+1} \cdot v + ... + l_{x+m-1} \cdot v^{m-1} \right] \cdot l_x}{\left[l_{x+m} \cdot v^m \right] l_x}$$

$$-\frac{\left[d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + ... + d_{x+m-2} \cdot v^{m-1} + d_{x+m-1} \cdot v^m \right] \cdot l_x}{\left[l_{x+m} \cdot v^m \right] l_x}$$

ahora, como

$${}_mE_x = \frac{v^m l_{x+m}}{l_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{l_x + l_{x+1} \cdot v + \ldots + l_{x+m-1} \cdot v^{m-1}}{l_x}$$

$$A^1_{x:\overline{m}|} = \frac{d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + \ldots + d_{x+m-1} \cdot v^m}{l_x}$$

entonces

$$_mV_x = \frac{1}{_mE_x}\left[P\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - A^1_{x:\overline{m}|} \right]$$

Si se hace $\ddot{S}_{x:\overline{m}|} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{_mE_x}$ y $_tk_x = \frac{A^1_{x:\overline{m}|}}{_mE_x}$ la expresión se reduce a

$$_mV_x = P\ddot{S}_{x:\overline{m}|} - {}_tk_x \qquad (1.2.2.2)$$

1.2.3 Método de Recurrencia, de Fackler o de Fouret.

Con este método se puede calcular la reserva de un año en función de la reserva del año anterior. Pero este procedimiento tiene el inconveniente de que arrastra los errores de los cálculos. Aún así, este método es utilizado para comprobar reservas calculadas por otros métodos, o para constituir las reservas de seguros en donde el cálculo de su prima sea bastante elaborado.

El razonamiento que se hace para llegar a la fórmula de recurrencia es el siguiente:

Al principio del año n-ésimo el asegurador tiene la reserva $V_{(m-1)}$ para cada asegurado, pero como cobra la prima P, entonces tiene en total $V_{(m-1)} + P$ por cada uno de los l_{x+m-1} asegurados que quedan con vida. Entonces de manera global tiene:

$$l_{x+m-1}\left(V_{(m-1)} + P\right)$$

por lo que al final del año obtiene:

$$l_{x+m-1}\left(V_{(m-1)} + P\right)(1+i)$$

por los intereses que se generan.

De esta cantidad debe pagar los seguros de las d_{x+m-1} personas que murieron en este año y formar la reserva final $V_{(m)}$ para cada uno de los l_{x+m} sobrevivientes, es decir $d_{x+m-1} + l_{x+m} \cdot V_{(m)}$, entonces

$$l_{x+m-1}\left(V_{(m-1)} + P\right)\left(1+i\right) = d_{x+m-1} + l_{x+m} \cdot V_{(m)}$$

$$V_{(m)} = \frac{l_{x+m-1}\left(V_{(m-1)} + P\right)\left(1+i\right) - d_{x+m-1}}{l_{x+m}} \qquad (1.2.3.1)$$

multiplicando por l_{x+m-1} tanto el numerador como el denominador, se tiene

$$V_{(m)} = \frac{\left(V_{(m-1)} + P\right)\left(1+i\right) - q_{x+m-1}}{p_{x+m-1}} \qquad (1.2.3.2)$$

que es la fórmula de recurrencia.

1.3 Comportamiento de la Reserva Matemática en los Planes de Seguro Tradicionales.

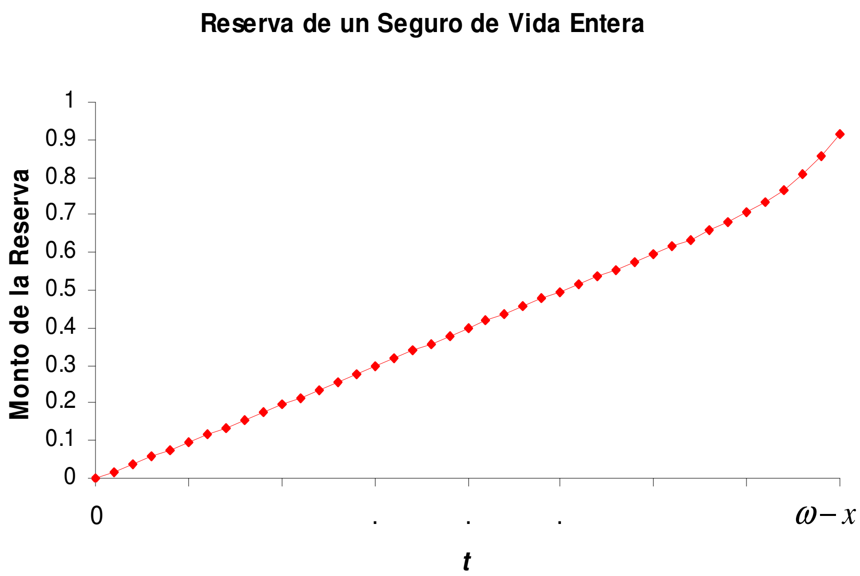
La reserva matemática se comporta de diferentes maneras, dependiendo del tipo de seguro del que se trate, es decir, de las condiciones de pago de primas, de la temporalidad de la cobertura, etc.

En la siguiente tabla se muestra las fórmulas del cálculo de la reserva matemática para distintos planes de seguro en el tiempo *t*.

Plan	Fórmula de la Reserva Matemática	
Seguro de vida entera	$A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$	
Seguro temporal a *n* años	$A^{1}_{x+t:\overline{n-t}\rceil} - P^{1}_{x:\overline{n}\rceil} \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$	$t < n$
	0	$t = n$
Seguro dotal a *n* años	$A_{x+t:\overline{n-t}\rceil} - P_{x:\overline{n}\rceil} \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$	$t < n$
	1	$t = n$
Seguro de vida entera con pagos limitados a *m* años	$A_{x+t} - {}_{m}P_x \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}\rceil}$	$t < m$
	A_{x+t}	$t \geq m$
Seguro dotal a *n* años con pagos limitados a *m* años	$A_{x+t:\overline{n-t}\rceil} - {}_{m}P_{x:\overline{n}\rceil} \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}\rceil}$	$t < m < n$
	$A_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$	$m \leq t < n$
	1	$t = n$
Dotal puro a *n* años	$A_{x+t:\overline{n-t}\rceil}^{\quad\ 1} - P_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1} \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$	$t < n$
	1	$t = n$

Tabla 1.3.1 Reserva matemática bajo el método prospectivo, donde el asegurado tiene edad *x* a la fecha de contratación. La fecha de valuación de la reserva es después de *t* años.

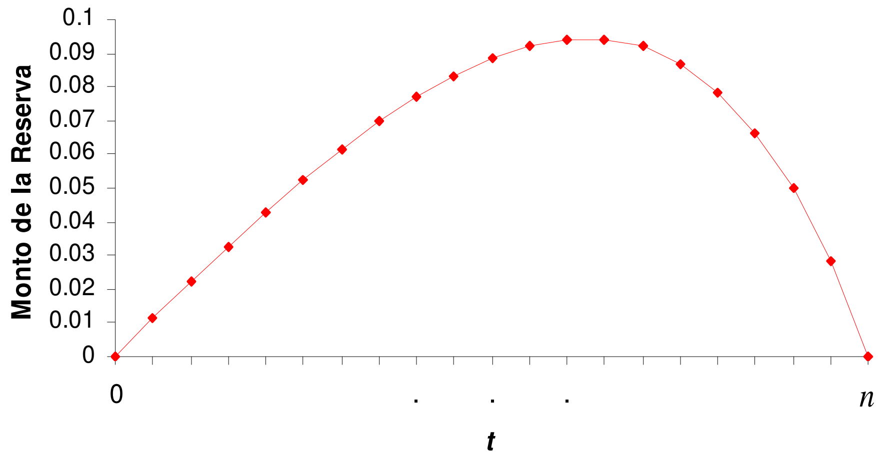
La reserva matemática tiene distintos comportamientos, dependiendo del plan del que se trate. Por ejemplo para un seguro de vida entera, la curva de la reserva, ${}_{t}V_{x}$, es creciente, como lo muestra la siguiente gráfica[4]:



[4] En ésta y las siguientes gráficas dentro de este apartado, la suma asegurada es de 1 unidad monetaria, la tasa de interés es del 5.5%, y la Tabla de Mortalidad es: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

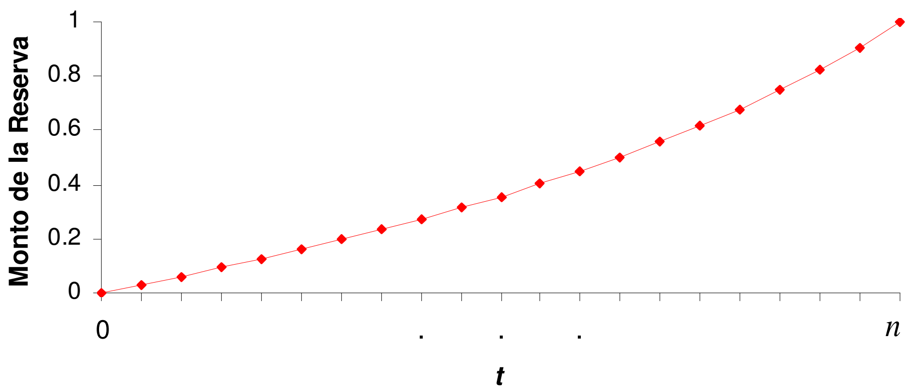
En cambio, para un seguro temporal la gráfica de la reserva matemática, ${}_tV^{\,1}_{x:\overline{n}|}$, es una curva cóncava que al principio crece y después comienza a decrecer hasta llegar al valor de cero nuevamente:

Reserva de un Seguro Temporal a *n* Años

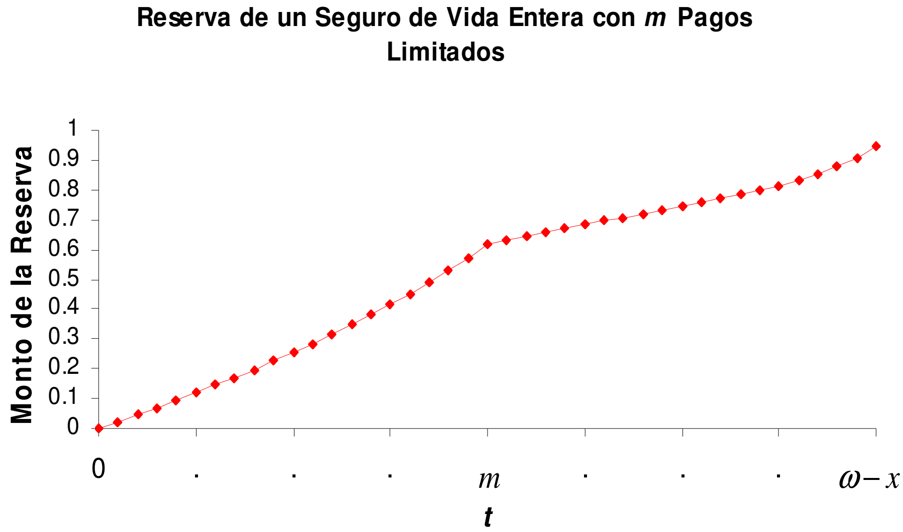


Ahora, para un seguro dotal a n años la curva de su reserva, ${}_tV_{x:\overline{n}|}$, es creciente de manera convexa, hasta llegar al valor de la suma asegurada:

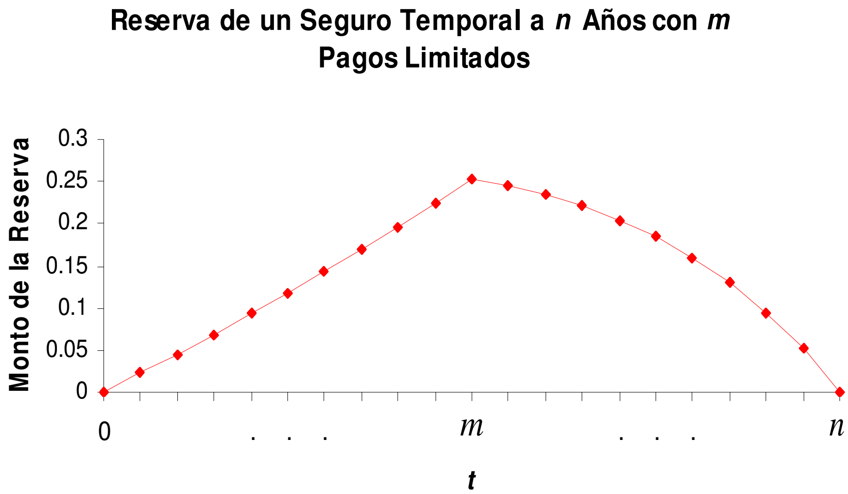
Reserva de un Seguro Dotal a *n* Años



Mientras que en la gráfica de la reserva de un seguro de vida entera con pagos limitados a m años se observa que la reserva, ${}^{m}_{t}V_x$, al principio crece de manera rápida, esto sucede mientras se está pagando la prima, cuando terminan las obligaciones por parte del asegurador la reserva sigue creciendo, pero más lentamente:

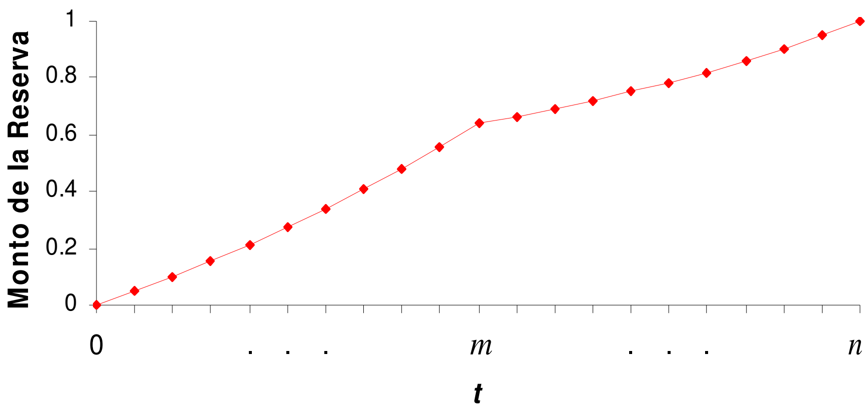


Ahora, para un seguro temporal a n años con pagos limitados, la reserva, ${}^{m}_{t}V^{\;1}_{x:\overline{n}|}$ toma el siguiente comportamiento:



En un seguro dotal a n años con pagos limitados a m años la gráfica de la reserva matemática, ${}^{m}_{t}V_{x:\overline{n}|}$, es de la siguiente forma:

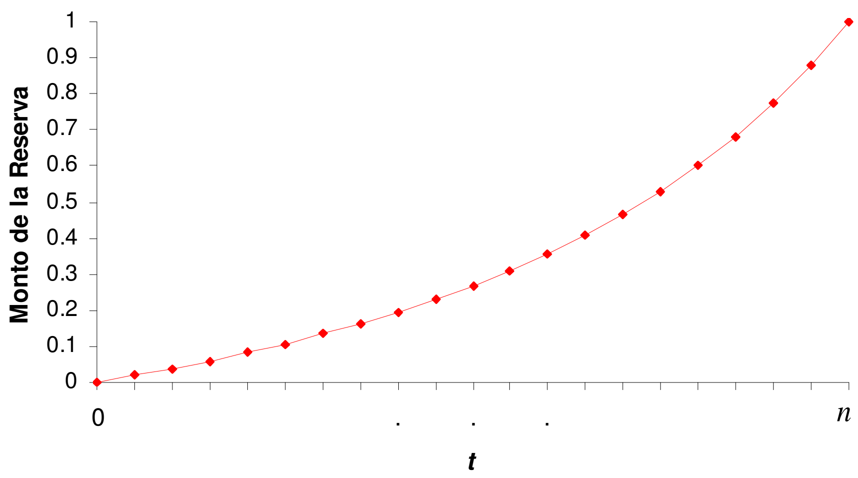
Reserva de un Seguro Dotal a *n* Años con *m* Pagos Limitados



Los primeros m años la reserva crece un poco más rápido que en los últimos $n-m$ años, en los cuales crece lentamente hasta alcanzar la suma asegurada.

Y para un dotal puro a n años la curva de la reserva, ${}_tV_{x:\overline{n|}}^{\;\;1}$, es:

Reserva de un Seguro Dotal Puro a *n* Años



La curva de este seguro es muy similar a la de un seguro dotal a n años, ya que también es convexa y siempre creciente hasta llegar al valor de la suma asegurada.

1.4 Reserva Matemática para Seguros sobre Varias Vidas.

En la operación de seguros, en algunas ocasiones se solicitan seguros sobre dos o más vidas en conjunto, para procurar una protección a un grupo de personas, por ejemplo: dos esposos; padre e hijo; padre, madre e hijos, varios socios; etc. En la teoría de vidas contingentes[5] a dicho grupo se le conoce con el nombre de *estatus*.

Un estatus es el conjunto de "entes" sobre los cuales se define una regla de existencia. Donde el ente (x_i) tiene edad x_i. Existen distintos tipos de estatus, por ejemplo:

Estatus de vidas conjuntas denotado por $(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_m)$. La condición de existencia de este estatus es que todos los integrantes se encuentren con vida, por lo que también se le llama *estatus del primer fallecimiento*. Un seguro bajo este tipo de estatus es pagadero a la disolución del grupo, es decir, cuando ocurra la primera muerte, cuando fallezca al menos uno de los que forma parte del grupo.

El *estatus del último sobreviviente* se denota por $\left(\overline{x_1 x_2 ... x_m}\right)$, donde $(x_1), (x_2), ..., (x_m)$ son los *m* entes que lo integran, el estatus existe siempre y cuando al menos uno de los *m* entes que lo conforman exista.

Estatus de k sobrevivientes. Sean $(x_1), (x_2), ..., (x_m)$ *m* vidas, se define el estatus de *k* sobrevivientes como aquel que se encuentra vigente siempre y cuando al menos *k* de las *m* vidas se encuentre con vida, donde $k \in \{1, 2, ..., m\}$. Este estatus se denota por $\left(\overline{x_1 x_2 ... x_m}^{\,k}\right)$

1.4.1 Seguros en caso de Muerte para Varias Vidas.

El pago del beneficio de estos seguros depende del fallecimiento de una o varias personas, según el tipo de estatus del que se trate y según las condiciones del contrato.

1.4.1.1 Seguros de vida entera sobre dos vidas.

a) Estatus del primer fallecimiento

Sean dos personas *(x)* y *(y)*, donde la probabilidad de que en el año enésimo ocurra la primera muerte se denota por ${}_{n-1}/q_{xy}$, para la cual pueden suceder tres casos: que muera *(x)* y sobreviva *(y)*, que muera *(y)* y sobreviva *(x)*, o bien, que mueran los dos. Entonces

[5] Es decir, de vidas múltiples o varias vidas.

$$_{n-1}/q_{xy}=\left[{}_{n-1}/q_x\cdot{}_np_y\right]+\left[{}_np_x\cdot{}_{n-1}/q_y\right]+\left[{}_{n-1}/q_x\cdot{}_{n-1}/q_y\right]$$

$$=\left[\left({}_{n-1}p_x-{}_np_x\right){}_np_y\right]+\left[{}_np_x\left({}_{n-1}p_y-{}_np_y\right)\right]+\left[\left({}_{n-1}p_x-{}_np_x\right)\left({}_{n-1}p_y-{}_np_y\right)\right]$$

$$\therefore \qquad {}_{n-1}/q_{xy}={}_{n-1}p_{xy}-{}_np_{xy} \qquad (1.4.1.1.1)$$

Un peso que se paga al fin de este año tiene un valor actual de

$$v^n\,{}_{n-1}/q_{xy}=v^n\,{}_{n-1}p_{xy}-v^n\,{}_np_{xy}$$

Entonces un peso pagadero al fin del año en que ocurra ese primer fallecimiento, cualquiera que sea el año, tiene un valor presente de

$$A_{xy}=\sum_{n=1}^{\omega-x}v^n\,{}_{n-1}/q_{xy}=v\sum_{n=1}^{\omega-x}v^{n-1}\,{}_{n-1}p_{xy}-\sum_{n=1}^{\omega-x}v^n\,{}_np_{xy}$$

$$\therefore \qquad A_{xy}=v\ddot{a}_{xy}-a_{xy} \qquad (1.4.1.1.2)$$

$$=(1-d)\ddot{a}_{xy}-(\ddot{a}_{xy}-1)$$

$$A_{xy}=1-d\ddot{a}_{xy}$$

b) Estatus del último sobreviviente.

La probabilidad de que dadas dos vidas, *(x)* y *(y)*, el último fallecimiento sea en el año enésimo se simboliza por ${}_{n-1}/q_{\overline{xy}}$, aquí también pueden suceder tres casos: que muera *(x)* en el año enésimo y que *(y)* haya muerto antes de llagar a dicho año, que *(x)* haya muerto antes de llagar al año enésimo y que *(y)* muera en este año, y que mueran los dos en el año enésimo. Por lo que

$$_{n-1}/q_{\overline{xy}}=\left[{}_{n-1}/q_x\cdot{}_{n-1}q_y\right]+\left[{}_{n-1}q_x\cdot{}_{n-1}/q_y\right]+\left[{}_{n-1}/q_x\cdot{}_{n-1}/q_y\right]$$

$$=\left[\left({}_{n-1}p_x-{}_np_x\right)\left(1-{}_{n-1}p_y\right)\right]+\left[\left(1-{}_{n-1}p_x\right)\left({}_{n-1}p_y-{}_np_y\right)\right]+\left[\left({}_{n-1}p_x-{}_np_x\right)\left({}_{n-1}p_y-{}_np_y\right)\right]$$

$$_{n-1}/q_{\overline{xy}}={}_{n-1}p_x-{}_np_x+{}_{n-1}p_y-{}_np_y-{}_{n-1}p_{xy}+{}_np_{xy}$$

Como ${}_{n-1}/q_x={}_{n-1}p_x-{}_np_x$ y por (1.4.1.1.1), entonces

$$_{n-1}/q_{\overline{xy}}={}_{n-1}/q_x+{}_{n-1}/q_y-{}_{n-1}/q_{xy} \qquad (1.4.1.1.3)$$

El valor presente de un seguro pagadero al fin del año en que ocurra el último fallecimiento es igual al de un seguro sobre la vida de *(x)*, más el de un seguro sobre la vida de *(y)*, menos el de un seguro del primer fallecimiento sobre *(x)* y *(y)*, todos por la misma suma asegurada. Entonces, para un seguro unitario, esto queda:

$$A_{\overline{xy}} = A_x + A_y - A_{xy} \qquad (1.4.1.1.4)$$

1.4.1.2 Seguros diferidos y temporales para dos personas.

Para un seguro unitario diferido de dos vidas sobre un estatus del primer fallecimiento se tiene

$$_n/A_{xy} = {}_nE_{xy} \cdot A_{x+n:y+n} \qquad (1.4.1.2.1)$$

$$= {}_nE_{xy} \cdot (1 - d\ddot{a}_{x+n:y+n})$$

$$= {}_nE_{xy} - d \cdot {}_nE_{xy} \cdot \ddot{a}_{x+n:y+n}$$

$$_n/A_{xy} = {}_nE_{xy} - d \cdot {}_n/\ddot{a}_{xy} \qquad (1.4.1.2.2)$$

Y para un estatus del último sobreviviente:

$$_n/A_{\overline{xy}} = {}_n/A_x + {}_n/A_y - {}_n/A_{xy} \qquad (1.4.1.2.3)$$

Ahora, un seguro temporal unitario para un estatus del primer fallecimiento tiene el siguiente valor presente

$$/_nA_{xy} = A_{xy} - {}_n/A_{xy} \qquad (1.4.1.2.4)$$

$$= 1 - d\ddot{a}_{xy} - ({}_nE_{xy} - d \cdot {}_n/\ddot{a}_{xy})$$

$$\therefore \qquad /_nA_{xy} = 1 - {}_nE_{xy} - d \cdot \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} \qquad (1.4.1.2.5)$$

Si el seguro es para un estatus del último sobreviviente, se tiene

$$/_nA_{\overline{xy}} = /_nA_x + /_nA_y - /_nA_{xy} \qquad (1.4.1.2.6)$$

1.4.1.3 Seguros mixtos para dos personas.

Cuando se trata de un seguro mixto, es decir un temporal más un capital diferido, para un estatus del primer fallecimiento entonces se tiene

$$A_{xy:\overline{n}|} = {}_{/n}A_{xy} + {}_{n}E_{xy} = 1 - d\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} \qquad (1.4.1.3.1)$$

y para el estatus del último sobreviviente:

$$A_{\overline{xy}:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + A_{y:\overline{n}|} - A_{xy:\overline{n}|} \qquad (1.4.1.3.2)$$

1.4.1.4 Seguros sobre más de dos vidas para un estatus del primer fallecimiento.

Sean *m* vidas $(x_1),(x_2),...,(x_m)$, para las cuales se tiene que

$$A_{x_1x_2...x_m} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t ({}_{t-1}p_{x_1x_2...x_m} - {}_{t}p_{x_1x_2...x_m})$$

ya que la probabilidad de que el primer fallecimiento ocurra en el año *t* es igual a la diferencia que hay entre la probabilidad de que todo el grupo empiece el año –que todos estén convida al inicio del año- y la probabilidad de que todo el grupo lo termine –que ninguno de ellos fallezca durante este año-. Simplificando queda

$$A_{x_1x_2...x_m} = v\ddot{a}_{x_1x_2...x_m} - a_{x_1x_2...x_m} \qquad (1.4.1.4.1)$$

$$A_{x_1x_2...x_m} = 1 - d\ddot{a}_{x_1x_2...x_m} \qquad (1.4.1.4.2)$$

De manera similar se tiene para los seguros (unitarios) diferido, temporal y mixto:

$${}_{n}/A_{x_1x_2...x_m} = {}_{n}E_{x_1x_2...x_m} A_{x_1+n:x_2+n:...x_m+n} \qquad (1.4.1.4.3)$$

$$= {}_{n}E_{x_1x_2...x_m} - d \cdot {}_{n}/\ddot{a}_{x_1x_2...x_m} \qquad (1.4.1.4.4)$$

$${}_{/n}A_{x_1x_2...x_m} = A_{x_1x_2...x_m} - {}_{n}/A_{x_1x_2...x_m} \qquad (1.4.1.4.5)$$

$$= 1 - {}_{n}E_{x_1x_2...x_m} - d\ddot{a}_{x_1x_2...x_m:\overline{n}|} \qquad (1.4.1.4.6)$$

$$A_{x_1x_2...x_m:\overline{n}|} = {}_{/n}A_{x_1x_2...x_m} + {}_{n}E_{x_1x_2...x_m} \qquad (1.4.1.4.7)$$

$$= 1 - d\ddot{a}_{x_1x_2...x_m:\overline{n}|} \qquad (1.4.1.4.8)$$

1.4.1.5 Seguros sobre más de dos vidas que no se pagan al primer fallecimiento.

Sea *m* el número total de vidas de un seguro que se paga al final del año en el que ocurre la r-ésima muerte, entonces al principio de dicho año viven por lo menos $m-(r-1)$ asegurados. El valor presente del seguro es:

$$A_{\overset{r}{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}}=1-d\ddot{a}_{\overset{m-r+1}{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}} \tag{1.4.1.5.1}$$

Ahora, si se representa con el símbolo Z^r a la suma de las combinaciones de las $\ddot{a}_{x_i}$ tomadas de *r* formas, es decir:

$$Z=\ddot{a}_{x_1}+\ddot{a}_{x_2}+\ldots+\ddot{a}_{x_m}$$

$$Z^2=\ddot{a}_{x_1x_2}+\ddot{a}_{x_1x_3}+\ldots+\ddot{a}_{x_2x_3}+\ddot{a}_{x_2x_4}+\ldots+\ddot{a}_{x_{m-1}x_m}$$

...

$$Z^r=\ddot{a}_{x_1x_2\ldots(r)}+\ddot{a}_{x_1x_3\ldots(r)}+\ldots+\ddot{a}_{x_i\ldots(r)}$$

donde *(r)* significa que el subíndice tiene *r* elementos.

Entonces se puede escribir

$$A_{\overset{r}{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}}=1-d\frac{Z^{m-r+1}}{(1+Z)^{m-r+1}} \tag{1.4.1.5.2}$$

Por ejemplo, si se tiene 4 vidas, el valor presente de un seguro que se paga al final del año en que ocurra el segundo fallecimiento es:

$$\begin{aligned}A_{\overset{2}{\overline{x_1x_2x_3x_4}}}&=1-d\ddot{a}_{\overset{3}{\overline{x_1x_2x_3x_4}}}=1-d\frac{Z^3}{(1+Z)^3}=1-d\left(Z^3-3Z^4\right)\\&=1-d\left(\ddot{a}_{x_1x_2x_3}+\ddot{a}_{x_1x_2x_4}+\ddot{a}_{x_1x_3x_4}+\ddot{a}_{x_2x_3x_4}-3\ddot{a}_{x_1x_2x_3x_4}\right)\\&=A_{x_1x_2x_3}+A_{x_1x_2x_4}+A_{x_1x_3x_4}+A_{x_2x_3x_4}-3A_{x_1x_2x_3x_4}\end{aligned}$$

Para los demás planes de seguros bajo el estatus $\left(\overset{r}{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}\right)$ basta aplicar las fórmulas ya conocidas:

$$ {}_{n}/A^{\;r}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = {}_{n}E^{\;m-r+1}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} \cdot A^{\;r}_{\overline{x_1+n:x_2+n:\ldots x_m+n}} \qquad (1.4.1.5.3) $$

$$ /_{n}A^{\;r}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = A^{\;r}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} - {}_{n}/A^{\;r}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} \qquad (1.4.1.5.4) $$

$$ A^{\;r}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}:\overline{n|}} = /_{n}A^{\;r}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} + {}_{n}E^{\;m-r+1}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} \qquad (1.4.1.5.5) $$

1.4.1.6 Primas anuales y reservas matemáticas.

En el cálculo de las primas de seguros sobre varias vidas se debe tener cuidado al decidir qué tipo de renta vitalicia debe usarse en dicho cálculo, por ejemplo, en un seguro de vida entera sobre m vidas que se paga después de que ocurra el r-ésimo fallecimiento, la prima anual es

$$ P^{\;r}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = \frac{A^{\;r}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}}{\ddot{a}^{\;m-r+1}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}} \qquad (1.4.1.6.1) $$

Ya que la prima se paga sólo mientras el número de fallecimientos no se mayor que $r-1$, es decir, mientras que vivan por lo menos $m-r+1$ personas.

Entonces la prima anual de un seguro pagadero al final del año en que muera el último sobreviviente de un grupo formado por *(x)*, *(y)* es

$$ P_{\overline{xy}} = \frac{A_{\overline{xy}}}{\ddot{a}_{\overline{xy}}} \qquad (1.4.1.6.2) $$

$$ = \frac{A_x + A_y - A_{xy}}{\ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}} $$

Pero si la prima se paga mientras el grupo permanezca intacto, es decir, si y sólo si las dos personas se encuentren con vida, se tiene

$$ P_{\overline{xy}} = \frac{A_{\overline{xy}}}{\ddot{a}_{xy}} \qquad (1.4.1.6.3) $$

Ahora, si el pago de la prima depende sólo de la vida de una de las dos personas, por ejemplo, de *(x)*, esto es, que la prima solo se paga mientras *(x)* se encuentra con vida, entonces

$$P_{\overline{xy}} = \frac{A_{\overline{xy}}}{\ddot{a}_x} \qquad (1.4.1.6.4)$$

El procedimiento para el cálculo de la reserva matemática para seguros sobre varias vidas, es básicamente el mismo que se utiliza para el de la reserva matemática de seguros de vida individual.

Por ejemplo, para un seguro que es pagadero al final del año en que muera el último sobreviviente del grupo formado por *(x)* y *(y)*, en donde la prima se paga sólo mientras *(x)* se encuentre con vida, la reserva matemática, bajo el método prospectivo, después de *m* años es:

a) Si aún viven los dos:

$$_mV_{\overline{xy}} = A_{\overline{x+m:y+m}} - P\ddot{a}_{x+m} \qquad (1.4.1.6.5)$$

b) Si sólo vive *(x)*:

$$_mV_x = A_{x+m} - P\ddot{a}_{x+m} \qquad (1.4.1.6.6)$$

c) Si sólo vive *(y)*:

$$_mV_y = A_{y+m} \qquad (1.4.1.6.7)$$

dado que la prima ya no se debe pagar.

1.4.2 Seguros de Sobrevivencia para Varias Vidas.

Recordando que una anualidad, o renta contingente es una serie de pagos periódicos que dependen de la sobrevivencia de una persona o de un grupo de varias vidas (por lo que también es llamada anualidad de sobrevivencia) donde dichos pagos pueden ser por toda la vida, o por parte de ésta. Entonces el pago del beneficio de los seguros de sobrevivencia también depende de la sobrevivencia de una o varias personas después de que se cumpla cierta condición estipulada en el contrato del seguro.

1.4.2.1 Anualidades contingentes sobre dos vidas.

Sean *(x), (y)* dos vidas. La probabilidad de que al final de enésimo año, *(y)* se encuentre con vida y *(x)* haya muerto con anterioridad es

$$_np_y(1 - {}_np_x) = {}_np_y - {}_np_{xy} \qquad (1.4.2.1.1)$$

Entonces un peso que es pagadero a *(y)* al final del año *n*, siempre y cuando *(x)* ya haya muerto, tiene el siguiente valor presente

$$ {}_{n}E_{x/y} = v^{n}({}_{n}p_{y} - {}_{n}p_{xy}) = {}_{n}E_{y} - {}_{n}E_{xy} \qquad (1.4.2.1.2) $$

Entonces una anualidad contingente vitalicia, pagadera a *(y)* a partir del final del año en que muere *(x)*, tiene un valor presente de

$$ a_{x/y} = a_{y} - a_{xy} \qquad (1.4.2.1.3) $$

De manera similar, para las anualidades diferidas y temporales bajo estas condiciones se tiene

$$ {}_{n}/a_{x/y} = {}_{n}/a_{y} - {}_{n}/a_{xy} \qquad (1.4.2.1.4) $$

$$ a_{x/y:\overline{n|}} = a_{y:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}} \qquad (1.4.2.1.5) $$

Si se trata de una anualidad diferida bajo condiciones similares, pero que se paga sólo si *(x)* fallece después de transcurridos los primeros *n* años, entonces el valor actual de esta anualidad es

$$ {}_{n}E_{xy} \cdot a_{x+n/y+n} = {}_{n}E_{xy}(a_{y+n} - a_{x+n:y+n}) \qquad (1.4.2.1.6) $$

1.4.2.2 Anualidades contingentes para grupos de más de dos vidas.

Sea un grupo de *m* vidas que se encuentra dividido en dos subgrupos, uno compuesto por *r* vidas y otro, por lo tanto, formado por $m-r$ vidas. Entonces, de manera general, una renta pagadera al primer subgrupo a partir del final del año en el que se disuelve el segundo, con la condición de que permanezca intacto el primero, se expresa de la siguiente forma:

$$ a_{(m-r)/(r)} = a_{(r)} - a_{(r)(m-r)} \qquad (1.4.2.2.1) $$

Cuando se trata de dos vidas, el asunto es claro. Si la primera muerte es la estipulada, el sobreviviente cobra la renta mientras viva, o durante el plazo establecido en el contrato.

Ahora, que si se trata de dos grupos de vidas, el asunto se complica. La situación antes considerada no es más que una de las tantas que se pueden presentar. La fórmula anterior es útil cuando la renta dura desde que se produce la primera muerte en uno de los subgrupos, hasta que ocurra el primer fallecimiento en el otro.

Pero muchas veces en los contratos se pactan condiciones muy distintas, ya que puede tomarse en cuenta la primera, la segunda, …, la $m-r$ muerte de un subgrupo, en combinación con la primera, la segunda, …, la r muerte del otro. Para lo cual ya no es útil la fórmula anterior, por lo que se debe hacer un análisis detallado para obtener una expresión conveniente para cada caso. Cuando el número de vidas es bastante grande, la manipulación de los cálculos es muy compleja, por lo que es preferible buscar una aproximación, menos exacta pero más fácil de manejar.

Por ejemplo, sean *(x), (y), (z)* tres vidas, algunos de los casos que se pueden presentar son:

a) Después de la muerte de *(x)*, el grupo *(y, z)* recibe la renta, mientras subsiste como grupo

$$a_{x/yz} = a_{yz} - a_{xyz} \qquad (1.4.2.2.2)$$

b) Una vez que haya muerto *(x)*, se paga la renta, no sólo al grupo *(y, z)*, sino al último sobreviviente del grupo

$$a_{x/\overline{yz}} = a_{\overline{yz}} - a_{x:\overline{yz}} = a_y + a_z - (a_{yz} + a_{xy} + a_{xz}) + a_{xyz} \qquad (1.4.2.2.3)$$

c) A la disolución, primera muerte, del grupo *(x, y)* comienza *(z)* a cobrar la renta

$$a_{xy/z} = a_z - a_{xyz} \qquad (1.4.2.2.4)$$

d) Al morir el último sobreviviente del grupo *(x, y)* comienza *(z)* a cobrar la renta

$$a_{\overline{xy}/z} = a_z - a_{\overline{xy}:z} = a_z - (a_{xz} + a_{yz} - a_{xyz}) \qquad (1.4.2.2.5)$$

e) Una renta pagadera a *(x)* a partir de la muerte de *(z)*, primera del grupo que forman *(y)* y *(z)*, es igual a una renta de sobrevivencia, pagadera al grupo *(x, y)* al morir *(z)*, más la renta que continúa luego de morir *(y)* si vive aún *(x)*

$$a_{\overset{1}{yz}/x} = a_{z/xy} + a_{\overset{2}{yz}/x} \qquad (1.4.2.2.6)$$

de donde se obtiene

$$a_{\overset{2}{yz}/x} = a_{\overset{1}{yz}/x} - a_{z/xy} \qquad (1.4.2.2.7)$$

que es la renta pagadera a *(x)*, cuando sobrevive a *(z)* y a *(y)*, siempre y cuando las muertes se den en el orden dado.

1.4.2.3 Seguros de sobrevivencia sobre dos vidas.

Sean *(x)*, *(y)* dos vidas. El valor actual de un peso pagadero al fin del año *k*, siempre y cuando que en dicho año muera la persona *(x)* y deje aún con vida a *(y)*, es

$$v^k \cdot {}_{k-1/}q_{\overset{1}{x}y} = v^k \cdot \tfrac{1}{2}\left[{}_{k-1}p_{xy} - {}_{k}p_{xy} + \frac{{}_{k}p_{x-1:y}}{p_{x-1}} - \frac{{}_{k}p_{x:y-1}}{p_{y-1}} \right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[v^k \left({}_{k-1}p_{xy} - {}_{k}p_{xy} \right) + \frac{v^k\,{}_{k}p_{x-1:y}}{p_{x-1}} - \frac{v^k\,{}_{k}p_{x:y-1}}{p_{y-1}} \right] \qquad (1.4.2.3.1)$$

Por lo tanto el valor presente de un peso pagadero al fin del año en que muera *(x)* viviendo aún *(y)* es

$$A_{\overset{1}{x}y} = \tfrac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \left({}_{k-1}p_{xy} - {}_{k}p_{xy} \right) + \frac{\sum_{k=1}^{\omega-x} v^k\,{}_{k}p_{x-1:y}}{p_{x-1}} - \frac{\sum_{k=1}^{\omega-x} v^k\,{}_{k}p_{x:y-1}}{p_{y-1}} \right]$$

es decir

$$A_{\overset{1}{x}y} = \tfrac{1}{2}\left[A_{xy} + \frac{a_{x-1:y}}{p_{x-1}} - \frac{a_{x:y-1}}{p_{y-1}} \right] \qquad (1.4.2.3.2)$$

y de manera similar se tiene

$$A_{x\overset{1}{y}} = \tfrac{1}{2}\left[A_{xy} + \frac{a_{x:y-1}}{p_{y-1}} - \frac{a_{x-1:y}}{p_{x-1}} \right] \qquad (1.4.2.3.3)$$

Al sumar la dos igualdades anteriores se obtiene la prima pura única de un seguro pagadero a la disolución del grupo formado por *(x)* y *(y)*, ya que el seguro se paga a la primera muerte

$$A_{xy} = A_{\overset{1}{x}y} + A_{x\overset{1}{y}} \qquad (1.4.2.3.4)$$

Ahora que si *(y)* tiene la misma edad que *(x)*, es decir, $x = y$, entonces

$$A_{\overset{1}{x}x} = \tfrac{1}{2} A_{xx} \qquad (1.4.2.3.5)$$

Se tienen otras igualdades interesantes:

Como $A_{\overset{1}{x}y} + A_{\overset{2}{x}y} = A_x$, entonces

$$A_{\overset{2}{x}y} = A_x - A_{\overset{1}{x}y} \qquad (1.4.2.3.6)$$

y de manera similar

$$A_{x\overset{2}{y}} = A_y - A_{x\overset{1}{y}} \qquad (1.4.2.3.7)$$

Si en estas mismas expresiones se limita la suma a los primeros *n* términos, se obtienen los seguros temporales bajo condiciones similares

$$/_{n}A_{\overset{1}{x}y} = \tfrac{1}{2}\left[/_{n}A_{xy} + \frac{a_{x-1:y:\overline{n}|}}{p_{x-1}} - \frac{a_{x:y-1:\overline{n}|}}{p_{y-1}} \right] \qquad (1.4.2.3.8)$$

$$/_{n}A_{x\overset{1}{y}} = \tfrac{1}{2}\left[/_{n}A_{xy} + \frac{a_{x:y-1:\overline{n}|}}{p_{y-1}} - \frac{a_{x-1:y:\overline{n}|}}{p_{x-1}} \right] \qquad (1.4.2.3.9)$$

y además $/_{n}A_{xy} = /_{n}A_{\overset{1}{x}y} + /_{n}A_{x\overset{1}{y}}$ de donde

$$/_{n}A_{\overset{1}{x}y} = /_{n}A_{xy} - /_{n}A_{x\overset{1}{y}} \qquad (1.4.2.3.10)$$

$$/_{n}A_{x\overset{1}{y}} = /_{n}A_{xy} - /_{n}A_{\overset{1}{x}y} \qquad (1.4.2.3.11)$$

También $/_{n}A_{\overset{1}{x}y} + /_{n}A_{\overset{2}{x}y} = /_{n}A_{x}$, entonces

$$/_{n}A_{\overset{2}{x}y} = /_{n}A_{x} - /_{n}A_{\overset{1}{x}y} \qquad (1.4.2.3.12)$$

y

$$/_{n}A_{x\overset{2}{y}} = /_{n}A_{y} - /_{n}A_{x\overset{1}{y}} \qquad (1.4.2.3.13)$$

Ahora, para los seguros diferidos se tiene de manera similar las siguientes relaciones:

$$_{n}/A_{\overset{1}{x}y} = {}_{n}/A_{xy} - {}_{n}/A_{x\overset{1}{y}} \qquad (1.4.2.3.14)$$

$$_{n}/A_{x\overset{1}{y}} = {}_{n}/A_{xy} - {}_{n}/A_{\overset{1}{x}y} \qquad (1.4.2.3.15)$$

y

$$_{n}/A_{\overset{2}{x}y} = {}_{n}/A_{x} - {}_{n}/A_{\overset{1}{x}y} \qquad (1.4.2.3.16)$$

$$_{n}/A_{x\overset{2}{y}} = {}_{n}/A_{y} - {}_{n}/A_{x\overset{1}{y}} \qquad (1.4.2.3.17)$$

1.4.2.4 Seguros de sobrevivencia sobre más de dos vidas.

Cuando se tienen más de dos vidas, se procede de manera similar. Por ejemplo, dadas tres vidas, *(x)*, *(y)* y *(z)*, para calcular la probabilidad de que la muerte de *(x)* ocurra en el año enésimo y que sea la primera muerte del grupo, existen cuatro casos:

a) Que muera *(x)* durante el año enésimo y queden con vida al final del año *(y)* y *(z)*

$$\left({}_{n-1}p_x - {}_n p_x\right){}_n p_{yz} = {}_{n-1}p_x \cdot {}_n p_{yz} - {}_n p_{xyz} \qquad (1.4.2.4.1)$$

$$= \frac{{}_n p_{x-1:y:z}}{p_{x-1}} - {}_n p_{xyz}$$

b) Que mueran *(x)* y *(y)* dentro del año, *(x)* antes que *(y)*, y que quede con vida *(z)* al final del año

$$\tfrac{1}{2}\left({}_{n-1}p_x - {}_n p_x\right)\left({}_{n-1}p_y - {}_n p_y\right){}_n p_z$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{{}_n p_{x-1:y-1:z}}{p_{x-1:y-1}} - \frac{{}_n p_{x-1:y:z}}{p_{x-1}} - \frac{{}_n p_{x:y-1:z}}{p_{y-1}} + {}_n p_{xyz}\right) \qquad (1.4.2.4.2)$$

c) Que mueran *(x)* y *(z)* dentro del año, *(x)* antes que *(z)*, y que sobreviva *(y)* al final del año

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{{}_n p_{x-1:y:z-1}}{p_{x-1:z-1}} - \frac{{}_n p_{x-1:y:z}}{p_{x-1}} - \frac{{}_n p_{x:y:z-1}}{p_{z-1}} + {}_n p_{xyz}\right) \qquad (1.4.2.4.3)$$

d) Que los tres mueran dentro del enésimo año, pero que haya muerto primero *(x)*

$$\tfrac{1}{3}\left({}_{n-1}p_x - {}_n p_x\right)\left({}_{n-1}p_y - {}_n p_y\right)\left({}_{n-1}p_z - {}_n p_z\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[{}_{n-1}p_{xyz} - {}_n p_{xyz} + \frac{{}_n p_{x-1:y:z}}{p_{x-1}} + \frac{{}_n p_{x:y-1:z}}{p_{y-1}} + \frac{{}_n p_{x:y:z-1}}{p_{z-1}}\right.$$

$$\left. - \frac{{}_n p_{x-1:y-1:z}}{p_{x-1:y-1}} - \frac{{}_n p_{x-1:y:z-1}}{p_{x-1:z-1}} - \frac{{}_n p_{x:y-1:z-1}}{p_{y-1:z-1}}\right] \qquad (1.4.2.4.4)$$

Sumando las cuatro probabilidades anteriores, se tiene

$$
{}_{n-1/}q_{\overset{1}{x}yz} = \tfrac{1}{3}\left[\left({}_{n-1}p_{xyz} - {}_{n}p_{xyz} \right) - \frac{{}_{n}p_{x:y-1:z-1}}{p_{y-1:z-1}} + \frac{{}_{n}p_{x-1:y:z}}{p_{x-1}} \right]
$$

$$
+\tfrac{1}{6}\left[\frac{{}_{n}p_{x-1:y-1:z}}{p_{x-1:y-1}} + \frac{{}_{n}p_{x-1:y:z-1}}{p_{x-1:z-1}} - \frac{{}_{n}p_{x:y-1:z}}{p_{y-1}} - \frac{{}_{n}p_{x:y:z-1}}{p_{z-1}} \right] \qquad (1.4.2.4.5)
$$

Entonces, si se introduce el factor de descuento y se suman todos los valores que puede tomar la expresión cuando *n* varía desde 1 hasta $\omega - x$, se obtiene el valor de $A_{\overset{1}{x}yz}$

$$
A_{\overset{1}{x}yz} = \tfrac{1}{3}\left[A_{xyz} - \frac{a_{x:y-1:z-1}}{p_{y-1:z-1}} + \frac{a_{x-1:y:z}}{p_{x-1}} \right]
$$

$$
+\tfrac{1}{6}\left[\frac{a_{x-1:y-1:z}}{p_{x-1:y-1}} + \frac{a_{x-1:y:z-1}}{p_{x-1:z-1}} - \frac{a_{x:y-1:z}}{p_{y-1}} - \frac{a_{x:y:z-1}}{p_{z-1}} \right] \qquad (1.4.2.4.6)
$$

Ahora, sea un seguro sobre las mismas tres vidas, pero éste se paga después de la muerte de *(x)* siempre y cuando haya ocurrido después de fallecido *(y)* y quedando con vida *(z)*.

La probabilidad de que este hecho se de en el año *k*, se puede aproximar de la siguiente forma[6]:

$$
{}_{k-1/}q_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z} = {}_{k-1/}q_x \left(1 - {}_{k-\frac{1}{2}}p_y\right) \cdot {}_{k-\frac{1}{2}}p_z \qquad (1.4.2.4.7)
$$

Por lo que un peso pagadero al final del año en que ocurra dicho evento, es

$$
A_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z} = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \; {}_{k-1/}q_x \left(1 - {}_{k-\frac{1}{2}}p_y\right) \cdot {}_{k-\frac{1}{2}}p_z
$$

$$
= \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \frac{d_{x+k-1}}{l_x} \cdot \frac{l_{z+k-\frac{1}{2}}}{l_z} - \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \frac{d_{x+k-1}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+k-\frac{1}{2}}}{l_y} \cdot \frac{l_{z+k-\frac{1}{2}}}{l_z}
$$

por lo tanto

$$
A_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z} = A_{\overset{1}{x}z} - A_{\overset{1}{x}yz} \qquad (1.4.2.4.8)
$$

---

[6] Se supone que todas las muertes suceden, en promedio, a la mitad de año.

Para el mismo grupo de personas, el valor de un seguro pagadero siempre que la segunda muerte sea la de *(x)*, sin importar quién muera primero -antes que *(x)*- y quién muera al último -después que *(x)*-, es

$$A^{2}_{xyz} = A^{2}_{x y_1 z} + A^{2}_{x y z_1} = A^{1}_{xz} - A^{1}_{xyz} + A^{1}_{xy} - A^{1}_{xyz}$$

$$= A^{1}_{xz} + A^{1}_{xy} - 2A^{1}_{xyz} \qquad (1.4.2.4.9)$$

De manera similar, el valor de un seguro pagadero al final del año en que muera *(x)*, siempre y cuando hayan muerto antes *(y) y (z)*, es

$$A^{3}_{xyz} = A_x - A^{1}_{xy} - A^{1}_{xz} + A^{1}_{xyz} \qquad (1.4.2.4.10)$$

Ahora, el valor de un seguro pagadero al fin del año en que muera *(x)* si esta muerte ocurre antes de que fallezca el último sobreviviente del grupo formado por *(y)* y *(z)* es

$$A^{1}_{x:\overline{yz}} = A^{1}_{xyz} + A^{2}_{xyz} = A^{1}_{xy} + A^{1}_{xz} - A^{1}_{xyz} \qquad (1.4.2.4.11)$$

1.4.2.5 Primas anuales.

El procedimiento para el cálculo de las primas anuales de este tipo de seguros, es el mismo, pero también se debe tener cuidado con el tipo de renta que corresponde a las condiciones establecidas en el contrato.

Por ejemplo, sea una renta vitalicia diferida por *n* años, pagadera a *(y)* después de la muerte de *(x)*, donde las primas se pagan durante *n* años. Entonces las primas sólo se pagan mientras permanezca intacto el grupo, ya que si muere primero *(x)* se adquiere el derecho a la renta, y si muere primero *(y)* se termina el contrato, por lo que el valor de cada prima es el siguiente

$${}_{n}P_{x/y} = \frac{{}_{n}/a_{x/y}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} \qquad (1.4.2.5.1)$$

Otro ejemplo puede ser, una renta diferida por n años, pagadera a *(z)* después de la disolución del grupo formado por *(x)* y *(y)*, donde la prima temporal por *n* años es

$${}_{n}P_{xy/z} = \frac{{}_{n}/a_{xy/z}}{\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|}} \qquad (1.4.2.5.2)$$

porque la prima se paga sólo si permanece íntegro el grupo formado por las tres vidas, ya que si muere primero *(z)* se termina el contrato, y si muere *(x)* o *(y)* se adquiere el derecho a la renta.

La prima anual de un seguro de vida entera pagadero en caso de que *(y)* sobreviva a *(x)* es

$$P_{\overset{1}{x}y} = \frac{A_{\overset{1}{x}y}}{\ddot{a}_{xy}} \qquad (1.4.2.5.3)$$

De la manera similar, aquí la prima se paga sólo mientras se encuentren con vida los dos, ya que si muere *(x)* comienza el cobro de la renta, y si muere *(y)* se anula el contrato.

Ahora, la prima anual de un seguro sobre dos vidas *(x)*, *(y)*, pagadero cuando se produce en segundo término la muerte de *(x)* es

$$P_{\overset{2}{x}y} = \frac{A_{\overset{2}{x}y}}{\ddot{a}_{x}} \qquad (1.4.2.5.4)$$

Aquí la prima se paga mientras viva *(x)*, ya que si es el segundo en morir se paga el seguro, y si muere antes que *(y)* se da por terminado el contrato.

Para la prima anual de un seguro sobre tres vidas *(x)*, *(y)*, *(z),* pagadero cuando muere primero *(x)* se tiene

$$P_{\overset{1}{x}yz} = \frac{A_{\overset{1}{x}yz}}{\ddot{a}_{xyz}} \qquad (1.4.2.5.5)$$

La prima se paga sólo si permanece íntegro el grupo.

1.4.2.6 Reservas matemáticas.

Para el cálculo de la reserva matemática de los seguros de sobrevivencia se sigue el mismo procedimiento que se lleva a cabo en los demás tipos de seguros. También se debe analizar cuidadosamente las condiciones que están estipuladas en el contrato para no cometer errores.

Por ejemplo, la reserva matemática después de *m* años de un seguro sobre tres vidas *(x)*, *(y)*, *(z)*, pagadero después de la muerte de *(x)* si su muerte ocurre en tercer lugar y pagándose la prima mientras viva *(x)* es

a) Si están los tres con vida:

$${}_{m}V_{\overset{3}{x}yz} = A_{\overset{3}{x+m}:y+m:z+m} - P\ddot{a}_{x+m} \qquad (1.4.2.6.1)$$

b) Si ya ha muerto uno, por ejemplo *(z)*, y viven los otros dos:

$$ {}_{m}V_{\overline{\overset{2}{x\,y}}} = A_{\overline{\overset{2}{x+m:y+m}}} - P\ddot{a}_{x+m} \qquad (1.4.2.6.2) $$

c) Si sólo sobrevive *(x)*:

$$ {}_{m}V_{x} = A_{x+m} - P\ddot{a}_{x+m} \qquad (1.4.2.6.3) $$

donde

$$ P = \frac{A_{\overline{\overset{3}{x\,yz}}}}{\ddot{a}_{x}} \qquad (1.4.2.6.4) $$

1.4.3 Ejemplo de una Reserva Matemática de un Seguro sobre Varias Vidas.

Para ver más o menos como se comporta una reserva matemática en un seguro sobre varias vidas tomemos el siguiente ejemplo:

Sea un seguro sobre tres personas, de 40, 50 y 55 años de edad respectivamente, cuyo beneficio es de 1 peso y se pagará al final del año en que fallezca el último sobreviviente, donde la prima se paga sólo mientras permanezca intacto el grupo. Entonces la reserva matemática, si sobreviven los tres, después de *m* años es:

$$ {}_{m}V_{\overline{40:50:55}} = A_{\overline{40+m:50+m:55+m}} - P\ddot{a}_{40+m:50+m:55+m} $$

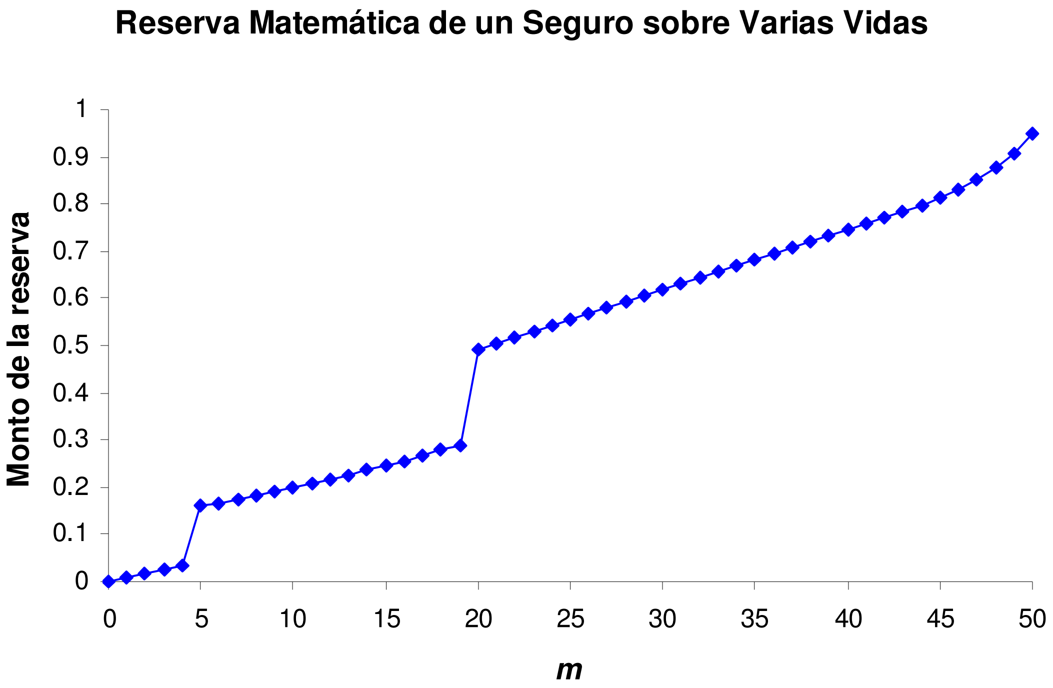
Pero si al final del año *m* sólo sobreviven *(40)* y *(50)*, entonces:

$$ {}_{m}V_{\overline{40:50}} = A_{\overline{40+m:50+m}} $$

Ahora, si sólo sobrevive *(50)* se tiene:

$$ {}_{m}V_{50} = A_{50+m} $$

Supongamos que *(55)* fallece durante el año 5, y que *(40)* fallece en el transcurso del año 20, entonces la reserva matemática se comportaría de la siguiente manera:



Gráfica 1.4.3.1 Reserva matemática de un seguro bajo un estatus del último sobreviviente para *(40)*, *(50)* y *(55)*, donde se conoce la condición del estatus en el momento *t*. La tasa de interés del 5.5%. Tabla de Mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

Los "saltos" que muestra esta gráfica se dan porque se supuso la muerte de un asegurado en el año 5, y la muerte de otro en el año 20.

Como se puede ver, el valor de la reserva en un determinado año *m* depende mucho de las condiciones en las que se encuentra el estatus en dicho año, y de las pactadas en el contrato, por ejemplo, la condición del pago de la prima.

Pero, ¿qué sucede cuando no se tiene información a priori sobre la composición del estatus al momento *m*? La reserva matemática de un seguro sobre un grupo de tres personas *(x)*, *(y)*, *(z)* bajo las condiciones anteriores es:

a) Si sobreviven los tres, la reserva es $A_{\overline{x+m:y+m:z+m}} - P\ddot{a}_{x+m:y+m:z+m}$ con probabilidad ${}_m p_{xyz}$

b) Si sólo sobreviven *(x)* y *(y)*, la reserva es $A_{\overline{x+m:y+m}}$ con probabilidad ${}_m p_{xy} \cdot {}_m q_z$

c) Si sólo sobreviven *(x)* y *(z)*, la reserva es $A_{\overline{x+m:z+m}}$ con probabilidad ${}_m p_{xz} \cdot {}_m q_y$

d) Si sólo sobreviven *(y)* y *(z)*, la reserva es $A_{\overline{y+m:z+m}}$ con probabilidad ${}_m p_{yz} \cdot {}_m q_x$

e) Si sólo sobrevive *(x)*, la reserva es A_{x+m} cuya probabilidad es ${}_m p_x \cdot {}_m q_{\overline{yz}}$

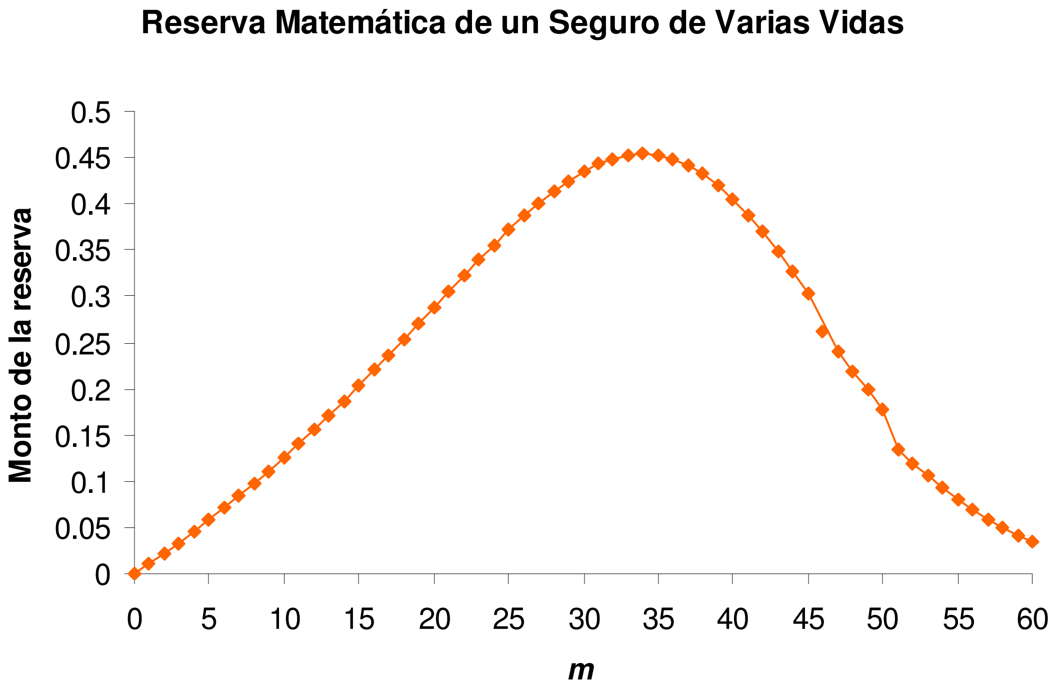
f) Si sólo sobrevive *(y)*, la reserva es A_{y+m} cuya probabilidad es ${}_m p_y \cdot {}_m q_{\overline{xz}}$

g) Si sólo sobrevive *(z)*, la reserva es A_{z+m} cuya probabilidad es ${}_m p_z \cdot {}_m q_{\overline{xy}}$

Donde ${}_m q_{\overline{xy}} = \left(1 - {}_m p_x\right)\left(1 - {}_m p_y\right)$

Entonces la reserva matemática, cuando no se tiene información a priori sobre la composición del estatus al momento *m*, es la suma de los productos de las reservas anteriores por su probabilidad correspondiente, es decir:

$$
\begin{aligned}
{}_mV = &\left[(A_{\overline{x+m:y+m:z+m}} - P\ddot{a}_{x+m:y+m:z+m}) \cdot {}_m p_{xyz} \right] + \left[A_{\overline{x+m:y+m}} \cdot {}_m p_{xy} \cdot {}_m q_z \right] \\
&+ \left[A_{\overline{x+m:z+m}} \cdot {}_m p_{xz} \cdot {}_m q_y \right] + \left[A_{\overline{y+m:z+m}} \cdot {}_m p_{yz} \cdot {}_m q_x \right] + \left[A_{x+m} \cdot {}_m p_x \cdot {}_m q_{\overline{yz}} \right] \\
&+ \left[A_{y+m} \cdot {}_m p_y \cdot {}_m q_{\overline{xz}} \right] + \left[A_{z+m} \cdot {}_m p_z \cdot {}_m q_{\overline{xy}} \right]
\end{aligned}
$$



Gráfica 1.4.3.2 A diferencia de la gráfica anterior, ésta muestra el comportamiento de la reserva matemática cuando no se tiene información a priori de la composición del estatus en el momento *m*. Aquí también x = 40, y = 50, z = 55, tasa de interés es del 5.5%, y la Tabla de Mortalidad es: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

La curva de esta reserva presenta dos cambios notorios. Esto es porque la probabilidad de que el asegurado con 55 años de edad, se encuentre con vida después de 46 años, es cero. Y la probabilidad de que el asegurado de edad 50 se encuentre con vida después de 51 años, es cero.

1.5 Reserva Matemática bajo el Modelo de Decrementos Múltiples.

Antes que nada debe quedar claro que una operación de decrementos múltiples es la operación actuarial de vida que toma en cuenta los diferentes estados a los que puede llegar un asegurado, y cada uno de estos estados puede causar un beneficio distinto para el asegurado. Entonces una operación de decrementos múltiples contempla al mismo tiempo varias contingencias o riesgos que afectan a los asegurados.

El modelo de decrementos múltiples ha sido empleado por compañías aseguradoras para realizar los cálculos de las pensiones y de las indemnizaciones que deben pagar. Por lo que se dijo anteriormente, en este modelo, no se considera al fallecimiento como el único evento que causa la salida (decremento) de una persona de un grupo, para este modelo existen otras causas de la salida, tales como la invalidez, el retiro, etc.

1.5.1 Notación y Relaciones en la Teoría de Decrementos Múltiples.

De manera general, sea un grupo de personas, cada una de ellas está expuesta a *m* causas de salida, donde:

$l_x^{(\tau)}$ = número de personas de edad *x* expuestas a *m* causas de decremento en un grupo.

$d_x^{(k)}$ = número de decrementos en un año ocurridos por la causa *k*.

$d_x^{(\tau)}$ = número de decrementos en un año debido a todas las causas de salida, es decir, a las *m* causas.

$$= \sum_{\forall k} d_x^{(k)} = l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} \qquad (1.5.1.1)$$

$q_x^{(k)}$ = probabilidad de que una persona de edad *x* salga del grupo, en un periodo de un año, por la causa *k*.

$$= \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(\tau)}} \qquad (1.5.1.2)$$

$q_x^{(\tau)}$ = probabilidad de que una persona de edad *x* salga del grupo, en un periodo de un año, por cualquiera de las *m* causas (tasa ajustada).

$$= \frac{d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{\sum_{\forall k} d_x^{(k)}}{l_x^{(\tau)}} = \sum_{\forall k} q_x^{(k)} \qquad (1.5.1.3)$$

$p_x^{(\tau)}$ = probabilidad de que una persona de edad *x*, sujeta a todas las causas posibles de salida, permanezca en el grupo un año más.

$$= 1 - q_x^{(\tau)} = 1 - \sum_{\forall k} q_x^{(k)} \qquad (1.5.1.4)$$

$q'^{(k)}_x$ = tasa absoluta (simple o sin ajustar) de decremento, es la probabilidad de que una persona de edad *x* salga del grupo por la causa *k*, en un periodo de un año, estando sujeta únicamente a dicha causa, también es conocida como probabilidad neta de decremento.

$p'^{(k)}_x$ = probabilidad de que una persona de edad *x*, sujeta únicamente a la causa *k*, permanezca en el grupo un año más.

$$= 1 - q'^{(k)}_x \qquad (1.5.1.5)$$

$m_x^{(\tau)}$ = tasa central de decremento total para un grupo de personas de edad *x*, sujetos a todas las causas posibles de salida.

$$= \frac{d_x^{(\tau)}}{L_x^{(\tau)}} = q'_x = \frac{d_x^{(\tau)}}{\frac{1}{2}(l_x^{(\tau)} + l_{x+1}^{(\tau)})} \qquad (1.5.1.6)$$

donde $L_x^{(\tau)}$ = número de personas que permanecen en el grupo entre las edades x y $x+1$.

$$= l_{x+\frac{1}{2}}^{(\tau)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} dt = l_x^{(\tau)} - \frac{1}{2} d_x^{(\tau)} = \frac{l_x^{(\tau)} + l_{x+1}^{(\tau)}}{2} \qquad (1.5.1.7)$$

ya que se supone que las salidas se distribuyen de manera uniforme en el intervalo [0, 1], es decir, $l_{x+t}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - t d_x^{(\tau)}$, $\forall t \in [0,1]$

$m_x^{(k)}$ = tasa central de decremento de la causa *k* para un grupo de personas de edad *x*.

$$= \frac{d_x^{(k)}}{L_x^{(\tau)}} \qquad (1.5.1.8)$$

$$\therefore \qquad m_x^{(\tau)} = \sum_{\forall k} m_x^{(k)} \qquad (1.5.1.9)$$

Además, $$m_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(\tau)} - \frac{1}{2} d_x^{(\tau)}} \cdot \frac{\frac{1}{l_x^{(\tau)}}}{\frac{1}{l_x^{(\tau)}}} = \frac{q_x^{(k)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(\tau)}} \qquad (1.5.1.10)$$

A partir de cada una de las tasas de decrecimiento, se puede construir una tabla de decrementos múltiples mediante las siguientes expresiones:

$$q_x^{(k)} = \frac{m_x^{(k)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}} \qquad (1.5.1.11)$$

$$q_x^{(\tau)} = \frac{m_x^{(\tau)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}} \qquad (1.5.1.12)$$

$$p_x^{(\tau)} = \frac{2 - m_x^{(\tau)}}{2 + m_x^{(\tau)}} \qquad (1.5.1.13)$$

1.5.2 Probabilidades de Decrementos Múltiples a partir de Probabilidades Simples.

Sea $\mu_y^{(\tau)} = -\frac{1}{l_y^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dy} l_y^{(\tau)}$ la tasa instantánea de decremento o fuerza de decremento debida a todas las causas posibles de salida del grupo. Entonces de $\mu_y^{(\tau)} = \frac{d}{dy} \ln l_y^{(\tau)}$ se obtiene:

$${}_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_y^{(\tau)} dy} \qquad (1.5.2.1)$$

Si se supone que $l_y^{(\tau)} = \sum_{\forall k} l_y^{(k)}$, se obtiene:

$\mu_y^{(k)} = -\frac{1}{l_y^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dy} l_y^{(k)}$, que es la tasa instantánea de decremento debida a la causa *k* del grupo expuesto a las *m* causas de salida.

Por lo tanto

$$\mu_y^{(\tau)} = \mu_y^{(1)} + \mu_y^{(2)} + \ldots + \mu_y^{(m)} \qquad (1.5.2.2)$$

esto quiere decir que las causas de salida son independientes entre si, entonces:

$${}_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_x^{x+t} \left(\mu_y^{(1)} + \mu_y^{(2)} + \ldots + \mu_y^{(m)}\right) dy}$$

Si ${}_t p'^{(k)}_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_y^{(k)} dy}$, entonces

$$ {}_t p_x^{(\tau)} = {}_t p'^{(1)}_x \cdot {}_t p'^{(2)}_x \cdots {}_t p'^{(m)}_x \qquad (1.5.2.3)$$

Si se sustituyen valores se obtiene:

$$1 - q_x^{(\tau)} = \left(1 - q'^{(1)}_x\right)\left(1 - q'^{(2)}_x\right)\ldots\left(1 - q'^{(m)}_x\right)$$

como $q_x^{(\tau)} = \sum_{\forall k} q_x^{(k)}$, se tiene

$$1 - \left(q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + \ldots + q_x^{(m)}\right) = \left(1 - q'^{(1)}_x\right)\left(1 - q'^{(2)}_x\right)\ldots\left(1 - q'^{(m)}_x\right)$$

Si se consideran tres causas de salida, por ejemplo muerte, invalidez y rotación, y si además se supone uniformidad para cada uno de los eventos, se tiene

$$1 - \left(q_x^{(M)} + q_x^{(I)} + q_x^{(R)}\right) = \left(1 - q'^{(M)}_x\right)\left(1 - q'^{(I)}_x\right)\left(1 - q'^{(R)}_x\right) \qquad (1.5.2.4)$$

Desarrollando la expresión anterior se llega a

$$q_x^{(M)} + q_x^{(I)} + q_x^{(R)} = q'^{(M)}_x + q'^{(I)}_x + q'^{(R)}_x - q'^{(M)}_x q'^{(I)}_x$$
$$- q'^{(M)}_x q'^{(R)}_x - q'^{(I)}_x q'^{(R)}_x + q'^{(M)}_x q'^{(I)}_x q'^{(R)}_x$$

Lo cual significa que debe existir una relación directa entre las tasas ajustadas y las tasas sin ajustar. Por lo que se puede escribir a cada tasa ajustada de la siguiente forma:

$$q_x^{(M)} = q'^{(M)}_x - \frac{1}{2} q'^{(M)}_x q'^{(I)}_x - \frac{1}{2} q'^{(M)}_x q'^{(R)}_x + \frac{1}{3} q'^{(M)}_x q'^{(I)}_x q'^{(R)}_x$$

$$q_x^{(I)} = q'^{(I)}_x - \frac{1}{2} q'^{(M)}_x q'^{(I)}_x - \frac{1}{2} q'^{(I)}_x q'^{(R)}_x + \frac{1}{3} q'^{(M)}_x q'^{(I)}_x q'^{(R)}_x$$

$$q_x^{(R)} = q'^{(R)}_x - \frac{1}{2} q'^{(M)}_x q'^{(R)}_x - \frac{1}{2} q'^{(I)}_x q'^{(R)}_x + \frac{1}{3} q'^{(M)}_x q'^{(I)}_x q'^{(R)}_x$$

Entonces las probabilidades de decrementos múltiples se pueden obtener a partir de las probabilidades de decrementos simples:

$$q_x^{(M)} = q'^{(M)}_x \left[1 - \frac{1}{2}\left(q'^{(I)}_x + q'^{(R)}_x\right) + \frac{1}{3} q'^{(I)}_x q'^{(R)}_x\right] \qquad (1.5.2.5)$$

$$q_x^{(I)} = q'^{(I)}_x\left[1-\frac{1}{2}\left(q'^{(M)}_x+q'^{(R)}_x\right)+\frac{1}{3}q'^{(M)}_x\, q'^{(R)}_x\right] \qquad (1.5.2.6)$$

$$q_x^{(R)} = q'^{(R)}_x\left[1-\frac{1}{2}\left(q'^{(M)}_x+q'^{(I)}_x\right)+\frac{1}{3}q'^{(M)}_x\, q'^{(I)}_x\right] \qquad (1.5.2.7)$$

1.5.3 Probabilidades Simples a partir de Probabilidades de Decrementos Múltiples.

En una tabla de decrementos simples los valores de d_x se pueden obtener directamente por $d_x = q_x \cdot l_x$, expresión que nos indica el número de salidas por una determinada causa, sin embargo si se considera $q'^{(k)}_x$, al ser aplicada al total de expuestos, no necesariamente representa las salidas por la causa *k*, esto es:

$$q'^{(k)}_x \cdot l_x^{(\tau)} \neq d_x^{(k)}$$

ya que algunos de los $l_x^{(\tau)}$ no están expuestos a la causa *k*.

Sea $d_x^{(-k)}$ el número de salidas en un grupo por causas diferentes a la causa *k*.

$$d_x^{(-k)} = d_x^{(\tau)} - d_x^{(k)} \qquad (1.5.3.1)$$

Si se supone que estas vidas están expuestas a la causa *k* en promedio medio año, entonces $l_x^{(\tau)} - \frac{1}{2}d_x^{(-k)}$ es el número de personas expuestas que no han salido por la causa *k*. Esto implica lo siguiente:

$$d_x^{(k)} = q'^{(k)}_x\left[l_x^{(\tau)} - \frac{1}{2}d_x^{(-k)}\right] \qquad (1.5.3.2)$$

Despejando y desarrollando se tiene:

$$q'^{(k)}_x = \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(\tau)} - \frac{1}{2}d_x^{(-k)}} \cdot \frac{1/l_x^{(\tau)}}{1/l_x^{(\tau)}} = \frac{q_x^{(k)}}{1-\frac{1}{2}q_x^{(-k)}} \qquad (1.5.3.3)$$

donde $q_x^{(-k)}$ es la probabilidad de que una persona de edad *x* salga por una causa distinta a la causa *k*, en un periodo de un año.

Dado que se supone que los eventos de salida son independientes entre sí, se tiene

$$q_x^{(-k)} = \sum_{\forall i \neq k} q_x^{(i)} \tag{1.5.3.4}$$

$$\rightarrow \quad q'^{(k)}_x = \frac{q_x^{(k)}}{1 - \frac{1}{2}\sum_{\forall i \neq k} q_x^{(i)}} \tag{1.5.3.5}$$

1.5.4 Ejemplos: Primas y Reservas Matemáticas bajo el Modelo de Decrementos Múltiples.

El procedimiento que se sigue para el cálculo de las primas y las reservas matemáticas con decrementos múltiples, básicamente es el mismo que se lleva a cabo en cualquier seguro, con el principio de equivalencia, sólo que hay que utilizar las probabilidades que corresponden a las condiciones del seguro.

Por ejemplo, sea un seguro que consiste en pagar \$1 a una persona de edad *x*, si sale de una empresa por invalidez. La edad de jubilación es de 65 años. Entonces la prima nivelada es de:

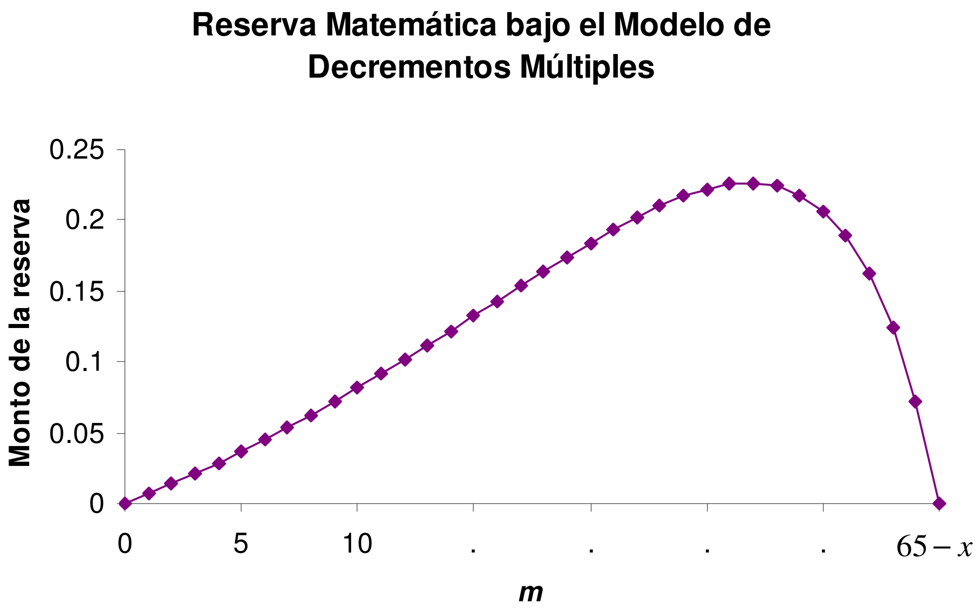
$$P = \frac{\sum_{t=0}^{65-x-1} v^{t+1}\left({}_{t|}q_x^{(I)}\right)}{\sum_{t=0}^{65-x-1} v^t\ {}_t p_x^{(\tau)}}$$

donde ${}_{t|}q_x^{(k)} = \frac{d_{x+t}^{(k)}}{l_x^{(\tau)}}$, los valores de $d_{x+t}^{(k)}$ y de $l_x^{(\tau)}$ se obtienen de una tabla de decrementos múltiples.

Y la reserva matemática después de *m* años se calcula con la siguiente expresión:

$${}_mV = \sum_{t=0}^{65-x-1-m} v^{t+1}\left({}_{t|}q_{x+m}^{(I)}\right) - P\sum_{t=0}^{65-x-1-m} V^t\ {}_t p_{x+m}^{(\tau)}$$

Ahora, si $x = 30$, entonces la reserva matemática se comporta de la siguiente forma:



Gráfica 1.5.4.1 Muestra la reserva matemática de un seguro que paga \$1 a una persona de edad x, si sale de una empresa por invalidez, además, la edad de jubilación es de 65 años. La tasa de interés es del 5.5%. Tabla de Mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual. Tabla de Invalidez: Disability Alvaro Vindas. En este caso $x = 30$.

Ahora, considérese un seguro a prima única de rentas por invalidez, es decir, un seguro que a partir de que el asegurado se invalida paga una renta de R pesos al final de cada año mientras permanezca con vida. Entonces, si el asegurado tiene edad x a la fecha de contratación, y la edad de jubilación es de 65 años, la prima única es

$$PU = \sum_{t=1}^{65-x} \frac{d_{x+t-1}^{(I)}}{l_x^{(\tau)}} v^t \cdot R\ddot{a}_{x+t}^{(inv)}$$

donde $\ddot{a}_{x+t}^{(inv)}$ es la anualidad que se calcula con probabilidades de muerte pero de una persona que ya está inválida[7], ya que se toma en cuenta que la probabilidad de muerte de un activo y de un inválido no es la misma.

Para seguros con decrementos múltiples en casos como éste, la reserva matemática del seguro antes y después de la invalidez no es la misma, la primera es una reserva de riesgos en curso y la segunda es una reserva de obligaciones pendientes de cumplir.

Entonces la reserva matemática de este seguro es:

a) Si el asegurado sigue activo (reserva de riesgos en curso)

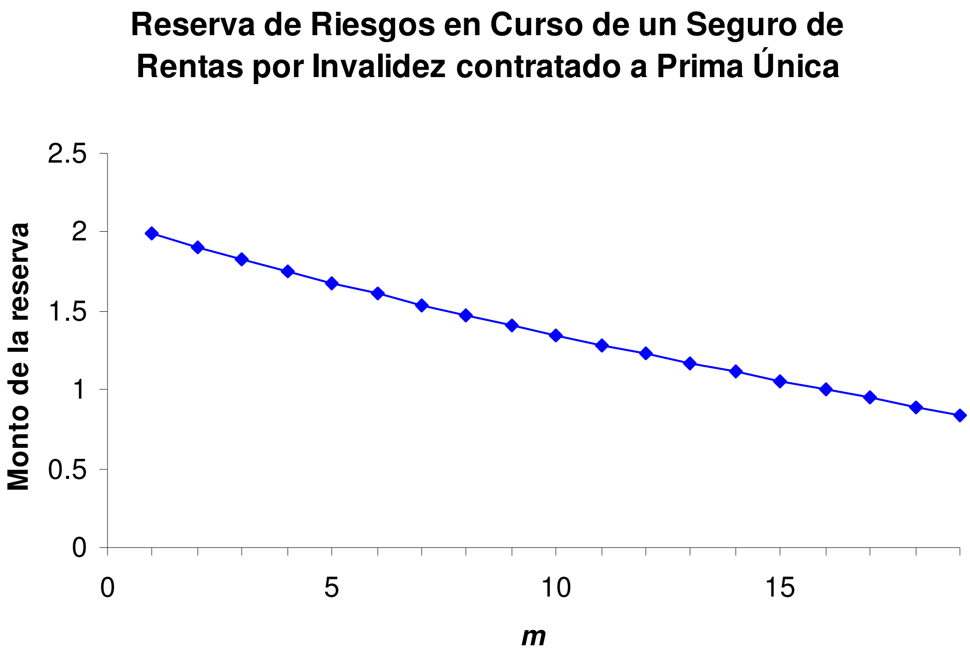
$${}_mV = \sum_{t=1}^{65-x+m} \frac{d_{x+m+t-1}^{(I)}}{l_{x+m}^{(\tau)}} v^t \cdot R\ddot{a}_{x+m+t}^{(inv)}$$

[7] La tabla de mortalidad de inválidos ocupada en este caso es: Hunter's Disability Rates.

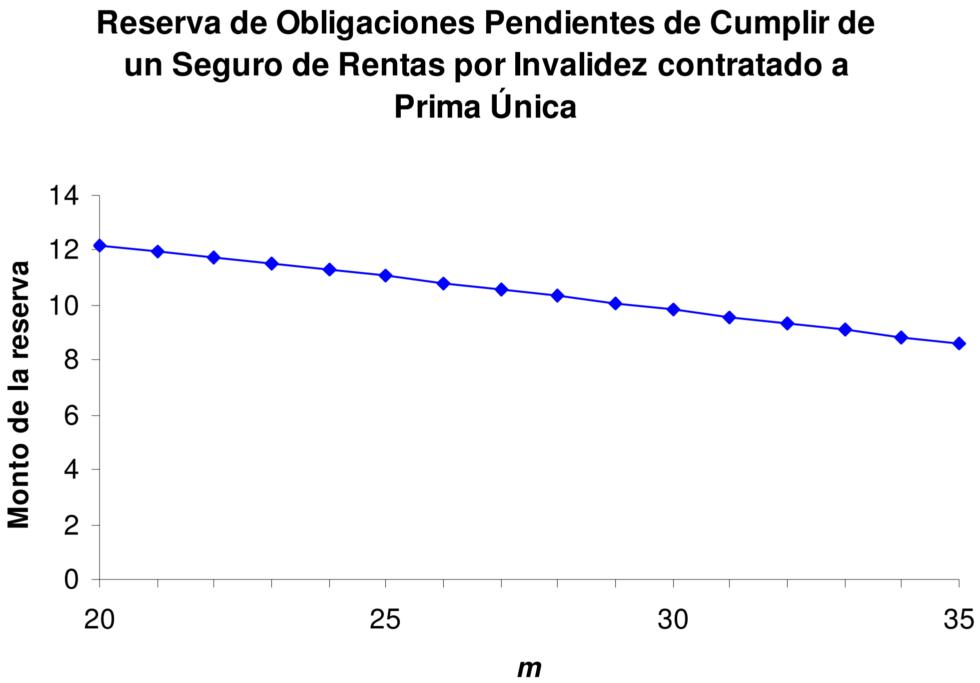
b) Si el asegurado ya se invalidó (reserva de obligaciones pendientes de cumplir)

$$_{m}V = R\ddot{a}_{x+m}^{(inv)}$$

Si suponemos que *(x)* tiene edad 30 y que se invalida en el año 20, la reserva se comportaría de la siguiente manera:



Gráfica 1.5.4.2 La edad del asegurado *(x)* es 30 años. Esta gráfica de riesgos en curso termina en el año 19 porque se supone que *(x)* se invalida en el año 20. La tasa de interés es del 5.5%. Tabla de Mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual. Tabla de Invalidez: Disability Álvaro Vindas. Tabla de mortalidad de Inválidos: Hunter's Disability Rates.



Gráfica 1.5.4.3 Al igual la edad del asegurado *(x)* es 30 años, se supone que *(x)* se invalida en el año 20. La tasa de interés es del 5.5%. Tabla de Mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual. Tabla de Invalidez: Disability Álvaro Vindas. Tabla de mortalidad de Inválidos: Hunter's Disability Rates.

Esta última gráfica (de obligaciones pendientes de cumplir) empieza al final del año en que se invalidó el asegurado (año 20) y termina al final del año 35 = 65 - x.

Pero, si no se tiene información a priori sobre el estado del asegurado, se deben considerar los casos posibles con sus probabilidades correspondientes. Entonces:

a) Si el asegurado permanece activo después de m años, la reserva es $\sum_{t=1}^{65-x+m} \frac{d^{(I)}_{x+m+t-1}}{l^{(\tau)}_{x+m}} v^t \cdot R\ddot{a}^{(inv)}_{x+m+t}$ con probabilidad ${}_m p_x^{(\tau)}$

b) Si el asegurado, después de m años, está inválido y no ha muerto, la reserva es $R\ddot{a}^{(inv)}_{x+m}$ con probabilidad ${}_m p_x^{ai}$

Donde ${}_m p_x^{ai}$ es la probabilidad de que una persona que actualmente está activa y tiene edad x, llegue vivo e inválido a la edad $x + m$. Para el cálculo de las probabilidades anteriores es necesaria una tabla de mortalidad de inválidos.[8]

$$ {}_m p_x^{ai} = \frac{l^{ii}_{x+m} - l^{ii}_x \cdot {}_m p_x^{i}}{l_x^{(\tau)}} $$

[8] Jordan (8), Capítulo 15: Tablas con decrementos secundarios.

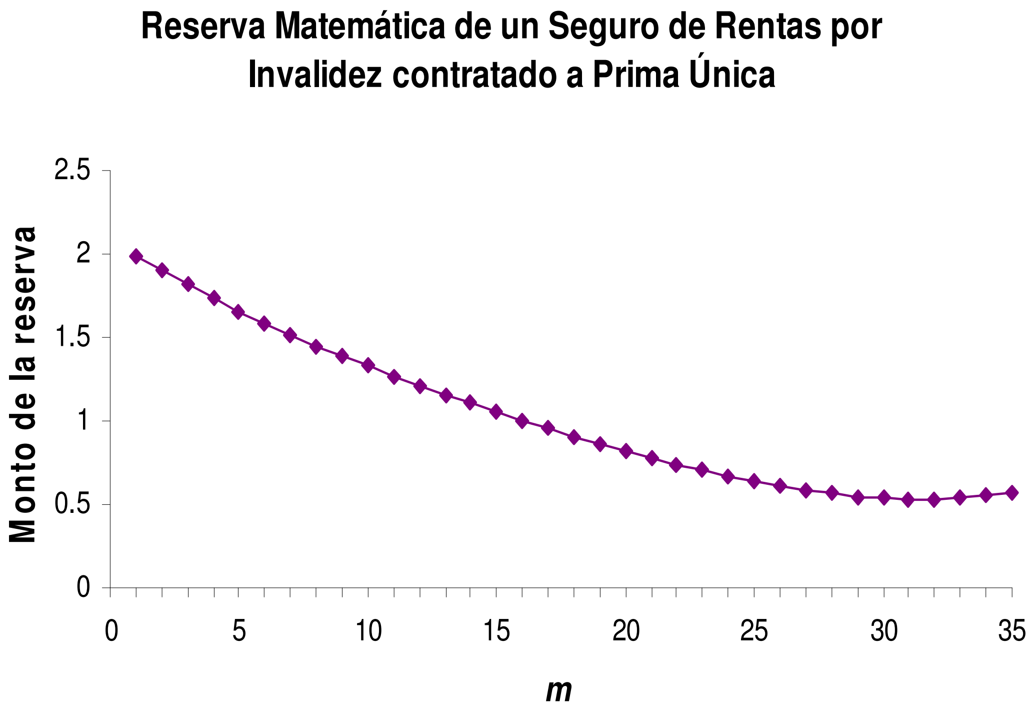
l_x^{ii} = número de inválidos vivos a edad x.

${}_m p_x^i$ = probabilidad de que una persona inválida de edad x, llegue viva a la edad $x + m$.

Por lo que la reserva matemática de este seguro cuando no se tiene información a priori sobre el estado del asegurado es:

$$ {}_mV = \left[\sum_{t=1}^{\omega-x+m} \frac{d_{x+m+t-1}^{(I)}}{l_{x+m}^{(\tau)}} v^t \cdot R\ddot{a}_{x+m+t}^{(inv)} \left({}_m p_x^{(\tau)} \right) \right] + R \cdot \ddot{a}_{x+m}^{(inv)} \cdot {}_m p_x^{ai} $$

Y el comportamiento de dicha reserva es



Gráfica1.5.4.4 La edad del asegurado *(x)* es de 30 años, aquí no se tiene información a priori sobre el estado del asegurado en el momento *m*. La tasa de interés es del 5.5%. Tabla de Mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual. Tabla de Invalidez: Disability Alvaro Vindas. Tabla de mortalidad de Inválidos: Hunter's Disability Rates.

CAPÍTULO II.
RESERVAS MODIFICADAS

2.1 Concepto de Reserva Modificada.

2.1.1 Necesidad de las reservas modificadas.

Bajo el sistema de prima neta nivelada, la prima neta es suficiente para los beneficios que se estipulan en el contrato del seguro, pero ninguna parte de esta prima está destinada a los gastos, por lo que las aseguradoras aplican un recargo nivelado a la prima anual que paga el asegurado. Donde dichos recargos sean suficientes para los gastos que se efectúen durante la vigencia del plan.

Sin embargo, en el primer año o en los primeros años, normalmente los gastos son mayores que el recargo nivelado. Por ejemplo, el costo del examen médico, la inspección del riesgo, el costo de emitir la póliza, son gastos que se hacen en el momento de la emisión y se hacen una sola vez, entonces los gastos no son uniformes año con año. Además a los agentes se les paga un porcentaje de comisión más elevado en el primer año o en los primeros años que en los años siguientes. Como el recargo es nivelado, en los primeros años el recargo es insuficiente para pagar los gastos, pero en los años siguientes el recargo es más que suficiente.

Si esto sucede, para poder constituir reservas mediante el sistema de prima neta nivelada, la institución debe "pedir un préstamo" de sus fondos de superávit, por un tiempo, para compensar los gastos excedentes en los primeros años. El "préstamo" del superávit se puede rembolsar en años posteriores cuando los recargos corrientes sean mayores que los gastos corrientes.

2.1.2 Cuándo Utilizar las Reservas Modificadas.

Cuando una institución ya está bien establecida y cuenta con buenos fondos de superávit, no hay problemas, ya que para cualquier año los préstamos para complementar los recargos referidos a pólizas nuevas o recientes, se recompensan por el excedente de los recargos de las primas de las pólizas más antiguas.

Pero, si la institución no tiene amplios fondos de superávit, entonces no puede constituir reservas mediante este sistema. O bien, si la compañía aseguradora apenas comienza como tal, y el volumen de sus pólizas en vigor aumenta rápidamente, tampoco puede formar reservas bajo el sistema de prima neta nivelada, ya que por ser nueva, en sus primeros años, las pólizas han sido emitidas recientemente, por lo que no ha tenido tiempo de acumular mucho superávit. Cuando se está bajo estas circunstancias es necesario modificar el sistema de reservas.

Para hacer frente a las condiciones anteriores se han desarrollado distintos procedimientos actuariales que se les conoce como *sistemas modificados de reserva*[1], los cuales están basados en el hecho de que los recargos son insuficientes para pagar los gastos en los primeros años de la póliza y que son más que suficientes en los años siguientes.

Estos sistemas permiten establecer una reserva inferior (*reserva modificada*) y el uso de una parte de las primas netas ("préstamo") para pagar los gastos excedentes de los primeros años, siempre y cuando dichas cantidades se repongan de los recargos posteriores, esto es, cuando los costos reales de la institución sean menores a los recargos nivelados hechos en las primas; entonces la reposición se hace mediante un mecanismo de amortización.

También para impedir que las compañías aseguradoras hagan un posible derroche en gastos de adquisición, y así mismo, para evitar la fabricación de dividendos ficticios.

2.1.3 Primas Modificadas: Prima del Primer Año y Prima de Renovación.

Debido a que las primas netas en conjunto, se supone que son exactamente suficientes para pagar las reclamaciones, entonces cualquier parte de la prima neta que se utilice para pagar los gastos debe recuperarse de una forma o de otra, ya sea del superávit o de los recargos de las primas de renovación.

Para los seguros con beneficios y primas constantes, en los sistemas modificados de reservas, el conjunto de primas netas niveladas P es remplazado durante un número específico de años j, por una prima α del primer año seguida de una serie de primas β para los siguientes $j-1$ años (primas de renovación). Sea h el periodo de pago de primas, si $j < h$, se asume que P es la prima que se toma después de los primeros j años póliza.

El valor inicial de este conjunto de primas debe ser igual al valor inicial del conjunto de las primas netas niveladas, esto es:

$$\alpha + \beta\left(\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - 1\right) + P\left(\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - \ddot{a}_{x:\overline{j}|}\right) = P\ddot{a}_{x:\overline{h}|}$$

o bien:

$$\alpha + \beta a_{x:\overline{j-1}|} = P\ddot{a}_{x:\overline{j}|}$$

Si el valor de la prima del primer año es conocido, se puede obtener el valor de la prima de renovación despejando a β de la ecuación anterior:

[1] definidos por el regulador de las instituciones de seguros, mediante normas de carácter general.

$$\alpha + \beta a_{x:\overline{j-1}|} = P\left(a_{x:\overline{j-1}|} + 1\right)$$

$$\beta = P + \frac{P - \alpha}{a_{x:\overline{j-1}|}}$$

$$= \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - \alpha}{a_{x:\overline{j-1}|}} \tag{2.1.3.1}$$

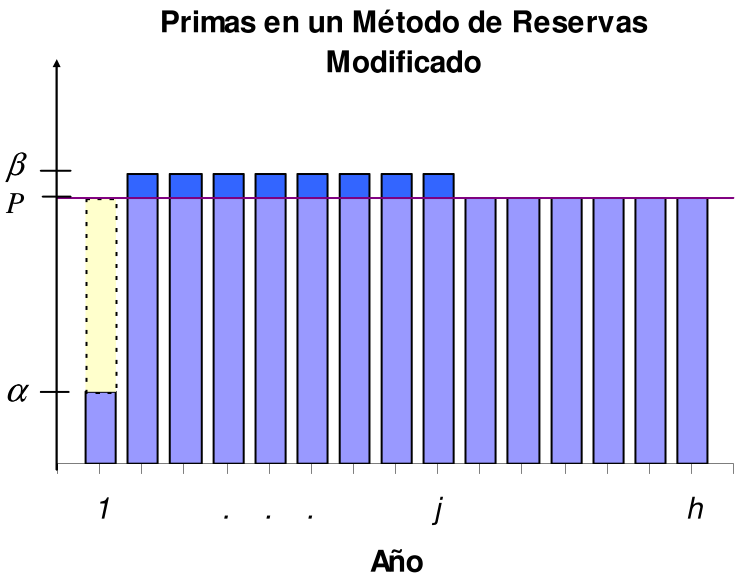
También se puede obtener otra expresión:

$$\beta\left(\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - 1\right) = P\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - \alpha$$

$$\beta = P + \frac{\beta - \alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}} \tag{2.1.3.2}$$

Así que, un método de reserva modificada para póliza con beneficios y primas constantes, puede definirse conociendo la duración del periodo de modificación y, la prima del primer año α, o la prima de renovación β o la diferencia $\beta - \alpha$.

En la siguiente gráfica se muestra como el "préstamo" (P – α), tomado de la prima nivelada del primer año, es amortizado durante los siguientes j – 1 años, entonces de $\alpha + \beta a_{x:\overline{j-1}|} = P\ddot{a}_{x:\overline{j}|}$ se obtiene $P - \alpha = (\beta - P)a_{x:\overline{j-1}|}$, lo cual se ve claro en la gráfica.



Gráfica 2.1.3.1 El área de la parte faltante de la prima nivelada del primer año se repone con la suma de las áreas del exceso a la prima nivelada de los siguientes j – 1 años.

El símbolo V^{Mod} se usa para denotar la reserva calculada bajo un método modificado de reservas.

La reserva después de *m* años para el caso general de un seguro dotal a *n* años con pagos limitados a *h* años bajo un sistema modificado de reservas, con un periodo de modificación de *j* años, es

a) Si $m \leq j \leq h$

$$
\begin{aligned}
{}_{m}^{h}V_{x:\overline{n}|}^{Mod} &= A_{x+m:\overline{n-m}|} - \beta \ddot{a}_{x+m:\overline{j-m}|} - P_{j-m} / \ddot{a}_{x+m:\overline{h-j}|} \\
&= A_{x+m:\overline{n-m}|} - P\ddot{a}_{x+m:\overline{h-m}|} - (\beta - P)\ddot{a}_{x+m:\overline{j-m}|} \\
&= {}_{m}^{h}V_{x:\overline{n}|} - (\beta - P)\ddot{a}_{x+m:\overline{j-m}|}
\end{aligned}
$$

b) Si $m \geq j$, la reserva es la reserva calculada bajo el sistema de prima neta nivelada.

2.2 Algunos Sistemas Modificados de Reservas.

2.2.1 Año Temporal Preliminar Completo.

El método llamado *Año Temporal Preliminar Completo* (ATPC) fue creado por el actuario alemán Dr. Augustus Zillmer en 1863, y su explicación es necesaria para el entendimiento de otros sistemas.

Zillmer fue quien mostró cómo una compañía aseguradora puede incluir una provisión, para el primer año de comisiones, en el cálculo de la reserva. Las altas comisiones pagadas por las aseguradoras, pueden desarrollar reservas negativas, por lo que Zillmer recomendó a las compañías remplazar dicha reserva por cero y que la diferencia se fuera amortizando en años futuros.

El objetivo para cualquier método de reserva es evitar una reserva negativa al final del primer año, por lo que la prima modificada del primer año no debe ser menor que el costo del seguro para este año, entonces para algunos seguros se tiene:

$$
{}_{1}V \geq 0 \quad \rightarrow \quad \alpha \geq A_{\overset{1}{x}:\overline{1}|} \qquad (2.2.1.1)
$$

Cuando $\alpha = A_{\overset{1}{x}:\overline{1}|}$ y el periodo de modificación, *j*, es igual al periodo del pago de la prima, se tiene como resultado el método ATPC.

En otras palabras, como las reclamaciones por muerte se dan incluso durante el primer año de la póliza, la parte de la prima neta del primer año que puede utilizarse para gastos, está entonces limitada a una cantidad, de tal manera que queden fondos suficientes para pagar las reclamaciones que ocurrirán en este año según la tabla de mortalidad utilizada.

Dicha cantidad es el máximo que puede usarse, entonces es igual a la prima de valuación del primer año, P_1, menos el costo de siniestralidad esperado del primer año, CS_1. A esta diferencia se le conoce como prima de ahorro.

Donde $CS_1 = A^{\;1}_{x:\overline{1}|} = \alpha^{ATPC}$.

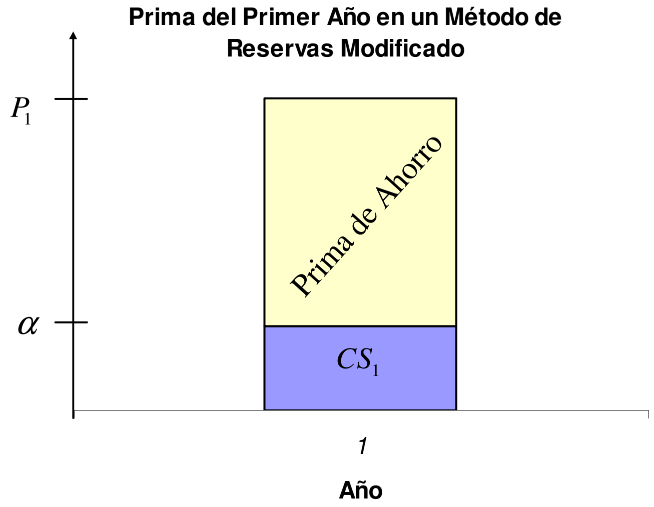


Figura 2.2.1.1 La prima de ahorro del primer año es la diferencia entre la prima de valuación del primer año y el valor presente actuarial del costo de siniestralidad del primer año.

Como la modificación se extiende sobre todo el periodo del pago de prima, y si se considera en general a un seguro de prima nivelada con h pagos limitados, con un valor presente actuarial denotado por A, y sea $A(1)$ el valor presente actuarial de un seguro con el mismo plan pero a edad $x + 1$, entonces la prima de renovación se puede calcular de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
A^{\;1}_{x:\overline{1}|} + \beta^{ATPC}\,{}_1/\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|} &= P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} \\
&= A \\
&= A^{\;1}_{x:\overline{1}|} + {}_1E_x A(1) \qquad (2.2.1.2)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\beta^{ATPC} = \frac{{}_1E_x A(1)}{{}_1/\ddot{a}_{x:\overline{h-1|}}} = \frac{A(1)}{\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1|}}}$$

Cuando se toma el máximo, la reserva del primer año queda extinguida, ya que la prima entera neta del primer año se usa para pagar las reclamaciones y los gastos. Además, el monto de los recargos de renovación que se deben usar en años futuros para constituir la reserva, serán altos. En este caso, después del primer año la aseguradora requiere de una prima neta del mismo monto que si la póliza hubiera sido emitida al final del primer año a edad $x + 1$. De hecho la compañía debe manejar a la póliza, en cuanto a las reservas se refiere, como si fuera una póliza de un seguro temporal a un año a edad x, más una póliza de seguro de vida emitida un año después y por lo tanto a una edad $x +1$, de ahí la expresión "año temporal preliminar".

2.2.2 Año Temporal Preliminar Modificado.

En general, el método Año Temporal Preliminar Completo puede ser útil para pólizas de prima baja, tales como las pólizas de vida, pagos limitados con largos periodos de pago de prima y dotales a largo plazo. Pero cuando se trata de pólizas de alto precio, como son las pólizas de vida pagos limitados a corto plazo y los dotales de duraciones cortas, el plan provee más dinero para los gastos de primer año que los realmente necesarios, y cuando se tienen gastos excesivos en el primer año de la póliza, el monto de los recargos de renovación que se necesitan para cubrir el "préstamo", puede ser insuficiente.

Por lo anterior es necesario limitar el método ATPC, por lo cual se obtiene un *Sistema de Año Temporal Preliminar Modificado* (ATPM), también llamado simplemente *Año Temporal Preliminar* (ATP). El principio general de un sistema de ATPM es que, aunque el recargo del primer año, para muchos planes de seguros, es insuficiente para los gastos del primer año, la parte de la prima neta del primer año que puede usarse para gastos, debe estar limitada a lo que sea necesario. Por lo tanto, la compañía aseguradora debe retener y poner en el fondo de la reserva una parte de la prima neta del primer año.

El sistema ATPM no se refiere a un solo método de acumulación de reservas, más bien se refiere a un grupo de distintos métodos, que tienen el mismo principio. Los distintos sistemas de ATPM difieren en la duración del periodo de modificación de la reserva y en la cantidad del limite del gasto extra del primer año. Algunos ejemplos son: Método Illinois Estándar, Método de Valuación de Reservas de los Comisionados, el Método Canadiense, etc.

Un estándar para una reserva ATPM requiere: (1) Una regla de decisión con la cual, las pólizas de seguros estén divididas en dos grupos, las que tienen primas altas y las que tienen primas bajas. (2) Que para las pólizas con primas bajas, se permita el método ATPC, donde $\alpha = A^{1}_{x:\overline{1|}}$. (3) Una definición de un método de valuación para las pólizas de primas altas, donde se especifique el valor de β, o de $\beta-\alpha$, o una $\alpha > A_{\overset{1}{x}:\overline{1|}}$, y la duración del periodo de modificación.

2.2.2.1 Método Illinois Estándar.

El método Illinois Estándar es un ATPM que, para el caso de las pólizas con primas iguales o mayores que la prima para una póliza de vida con pagos limitados a 20 años, exige que se constituyan reservas de prima neta nivelada totales después del fin del año 20, o bien, después del fin del periodo de pago de primas, siempre y cuando, éste sea menor a 20 años. El límite de la parte de la prima neta del primer año que se puede tomar prestada para pagar los gastos excedentes, para este caso, es el total de la prima de ahorro para un seguro de vida con pagos limitados a 20 años.

De manera general, para las pólizas en las cuales la prima es menor a la prima de una póliza de vida a 20 pagos, se permite el sistema ATPC. Y para las pólizas cuya prima es mayor o igual a la prima de una póliza de vida a 20 pagos, por ejemplo, un dotal a 20 años, una parte de la prima neta del primer año debe ser retenida como reserva del primer año.

La diferencia entre la reserva global bajo el sistema de prima nivelada y la reserva global bajo el método Illinois Estándar de una compañía aseguradora, depende de la proporción relativa de pólizas emitidas recientemente y la proporción del resto de las pólizas. Por ejemplo, en una institución establecida que realiza negocios normales, la reserva Illinois Estándar global puede ser aproximadamente el 95% de la reserva global de prima nivelada. Mientras que, en una compañía joven o en una cuyos negocios recientes sean relativamente grandes, la diferenta entre dichas reservas globales sería mayor.

2.2.2.2 Método de Valuación de Reservas de los Comisionados.

Este método es muy similar al Illinois Estándar. La Ley de Valuación Estándar define los Estándares de Valuación de la Reserva de los Comisionados para seguros de vida, donde:

- Los seguros de pólizas altas son definidos como aquel para el cual $\beta^{ATPC} > {}_{19}P_{x+1}$, donde ${}_{19}P_{x+1}$ es la prima de renovación, bajo el sistema ATPC, para un seguro de vida a 20 pagos.

- Para los seguros con primas bajas, $\beta^{ATPC} \leq {}_{19}P_{x+1}$, el método requiere la valuación del ATPC.

- El Método de Valuación de Reservas de los Comisionados (MVRC) es usado para pólizas de seguros con primas altas. Donde el periodo de pago de prima es el periodo de modificación y

$$\beta^{MVRC} - \alpha^{MVRC} = {}_{19}P_{x+1} - A_{\overset{1}{x}:\overline{1|}}$$

de donde $$\alpha^{MVRC} = \beta^{MVRC} - \left({}_{19}P_{x+1} - A^{\;1}_{x:\overline{1}|} \right) \qquad (2.2.2.2.1)$$

Entonces se puede sustituir la expresión anterior en la fórmula (2.1.3.2) y se obtiene

$$\beta^{MVRC} = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - A^{\;1}_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \qquad (2.2.2.2.2)$$

donde *h* es la duración del periodo de pago de prima.

La siguiente figura ilustra mejor el Estándar de Valuación de Reserva de los Comisionados[2].

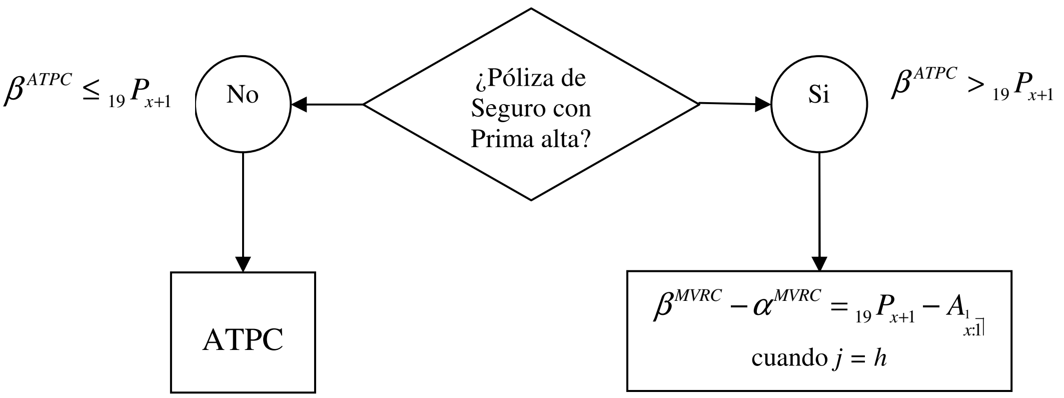


Figura 2.2.2.2.1 Método de Valuación de Reservas de los Comisionados.

2.2.2.3 Método Canadiense.

El método Canadiense se usa desde 1927. Éste método permite una modificación especial para todas las pólizas con una prima neta nivelada más grande que la prima neta nivelada de un ordinario de vida a la misma edad, y un ATPC para todas las demás pólizas. La modificación se extiende sobre todo el periodo de pago de primas, y está basada en el exceso de la prima neta nivelada *P*, sobre la prima neta modificada del primer año α, donde este exceso, $P - \alpha$, se fija como la diferencia correspondiente $P_x - A^{\;1}_{x:\overline{1}|}$, producida por el método ATPC aplicado a un seguro ordinario de vida, es decir, que se permite el mismo monto de reducción en el primer año, que para un seguro ordinario de vida. Entonces se tiene

$$P - \alpha^{Can} = P_x - A^{\;1}_{x:\overline{1}|} \qquad \text{para } P > P_x$$

[2] Bowers et al. (2).

de donde $$\alpha^{Can} = P - \left(P_x - A^{\;1}_{x:\overline{1}|}\right) \qquad (2.2.2.3.1)$$

De la (2.1.3.1) se obtiene

$$\beta^{Can} = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - P + \left(P_x - A^{\;1}_{x:\overline{1}|}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|}}$$

$$= P + \frac{P_x - A^{\;1}_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|}} \qquad (2.2.2.3.2)$$

2.2.2.4 Método Temporal Preliminar a 2 Años.

Este método se usa cuando, después de un año, los recargos de la prima de renovación también son insuficientes para los gastos del segundo año. Un Método Temporal Preliminar a 2 Años está definido con tres primas de valuación:

Prima del primer año: $A^{\;1}_{x:\overline{1}|}$

Prima del segundo año: $A^{\;\;1}_{x+1:\overline{1}|}$

De ahí en adelante: La prima nivelada para edad x + 2, no cambia, es decir, P_{x+2} para los siguientes años.

Entonces, por ejemplo, bajo este método, la reserva de un seguro de vida entera a edad x después de un año es:

$${}_1V^{Mod} = A_{x+1} - A^{\;\;1}_{x+1:\overline{1}|} - P_{x+2}a_{x+1}$$

Como $A_x = v\left(q_x + p_x A_{x+1}\right)$, se tiene

$${}_1V^{Mod} = v\left(q_{x+1} + p_{x+1}A_{x+2}\right) - v \cdot q_{x+1} - \left(\frac{A_{x+2}}{\ddot{a}_{x+2}}\right)a_{x+1}$$

$$= v \cdot q_{x+1} + v \cdot p_{x+1}A_{x+2} - v \cdot q_{x+1} - \left(\frac{a_{x+1}}{\ddot{a}_{x+2}}\right)A_{x+2}$$

$$= v \cdot p_{x+1} A_{x+2} - \left[\frac{\dfrac{v l_{x+2} + v^2 l_{x+3} + v^3 l_{x+4} + \ldots}{l_{x+1}}}{\dfrac{l_{x+2} + v l_{x+3} + v^2 l_{x+4} + \ldots}{l_{x+2}}} \right] A_{x+2}$$

$$= v \cdot p_{x+1} A_{x+2} - \left[\frac{\dfrac{v\left(l_{x+2} + v l_{x+3} + v^2 l_{x+4} + \ldots\right)}{l_{x+1}}}{\dfrac{l_{x+2} + v l_{x+3} + v^2 l_{x+4} + \ldots}{l_{x+2}}} \right] A_{x+2}$$

$$= v \cdot p_{x+1} A_{x+2} - \left[\frac{v l_{x+2}}{l_{x+1}} \right] A_{x+2}$$

$$= v \cdot p_{x+1} A_{x+2} - v \cdot p_{x+1} A_{x+2} = 0$$

Ahora la reserva después de dos años es:

$${}_2V^{Mod} = A_{x+2} - P_{x+2} \ddot{a}_{x+2}$$

$$= A_{x+2} - \left(\frac{A_{x+2}}{\ddot{a}_{x+2}} \right) \ddot{a}_{x+2}$$

$$= A_{x+2} - \left(\frac{\ddot{a}_{x+2}}{\ddot{a}_{x+2}} \right) A_{x+2} = 0$$

Y la reserva después de *m* años es:

$${}_mV^{Mod} = A_{x+m} - P_{x+2} \ddot{a}_{x+m}$$

si se suma un cero queda

$${}_mV^{Mod} = A_{x+m} + (P_x \ddot{a}_{x+m} - P_x \ddot{a}_{x+m}) - P_{x+2} \ddot{a}_{x+m}$$

$$= (A_{x+m} - P_x \ddot{a}_{x+m}) + P_x \ddot{a}_{x+m} - P_{x+2} \ddot{a}_{x+m}$$

$$= {}_mV_x - P_{x+2} \ddot{a}_{x+m} + P_x \ddot{a}_{x+m}$$

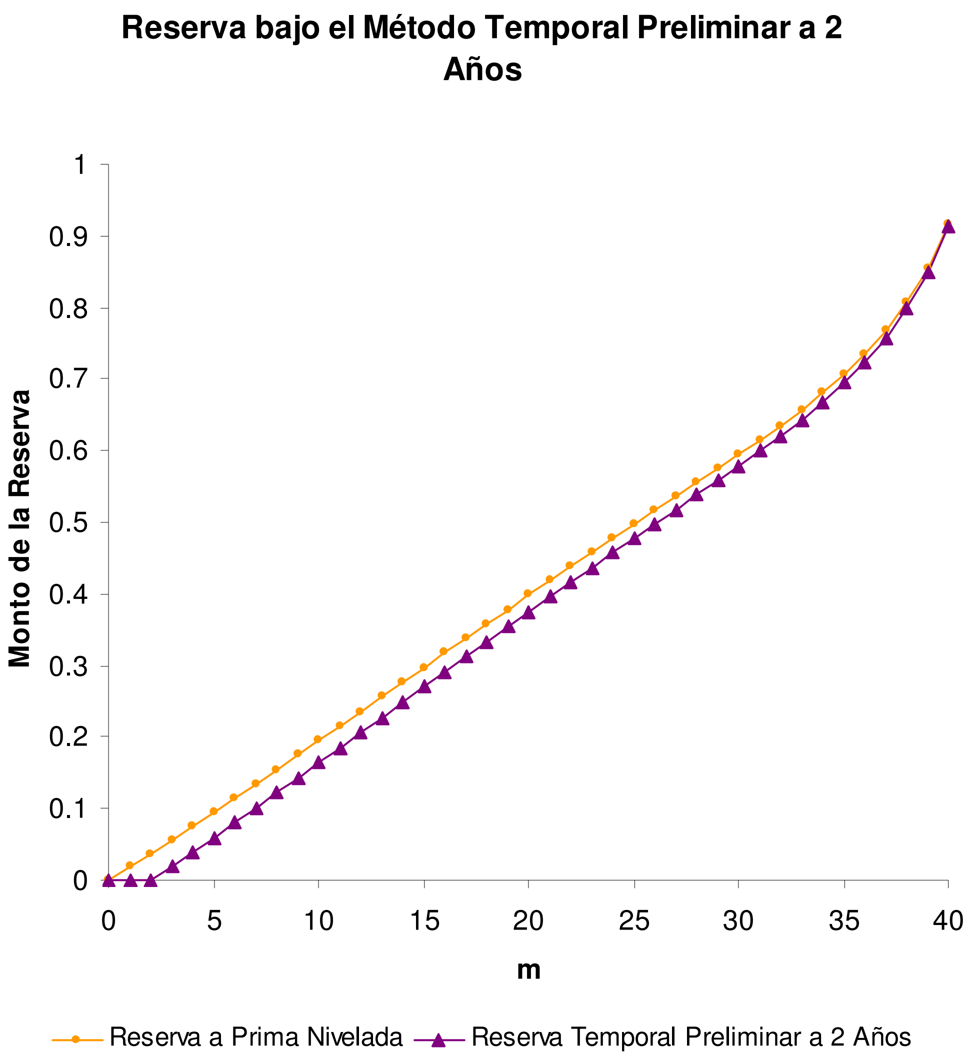
$$= {}_mV_x - \left(P_{x+2} - P_x\right) \ddot{a}_{x+m}$$

Por lo tanto, la reserva para de un seguro de vida entera a edad *x*, bajo el método temporal preliminar a dos años, está dada por:

$$ {}_1V^{Mod} = {}_2V^{Mod} = 0 $$

$$ {}_mV^{Mod} = {}_mV_x - \left(P_{x+2} - P_x\right)\ddot{a}_{x+m} \qquad\qquad m = 3,4,\ldots $$

Si *x* es igual a 60, la reserva bajo este método se comportaría de la siguiente manera.



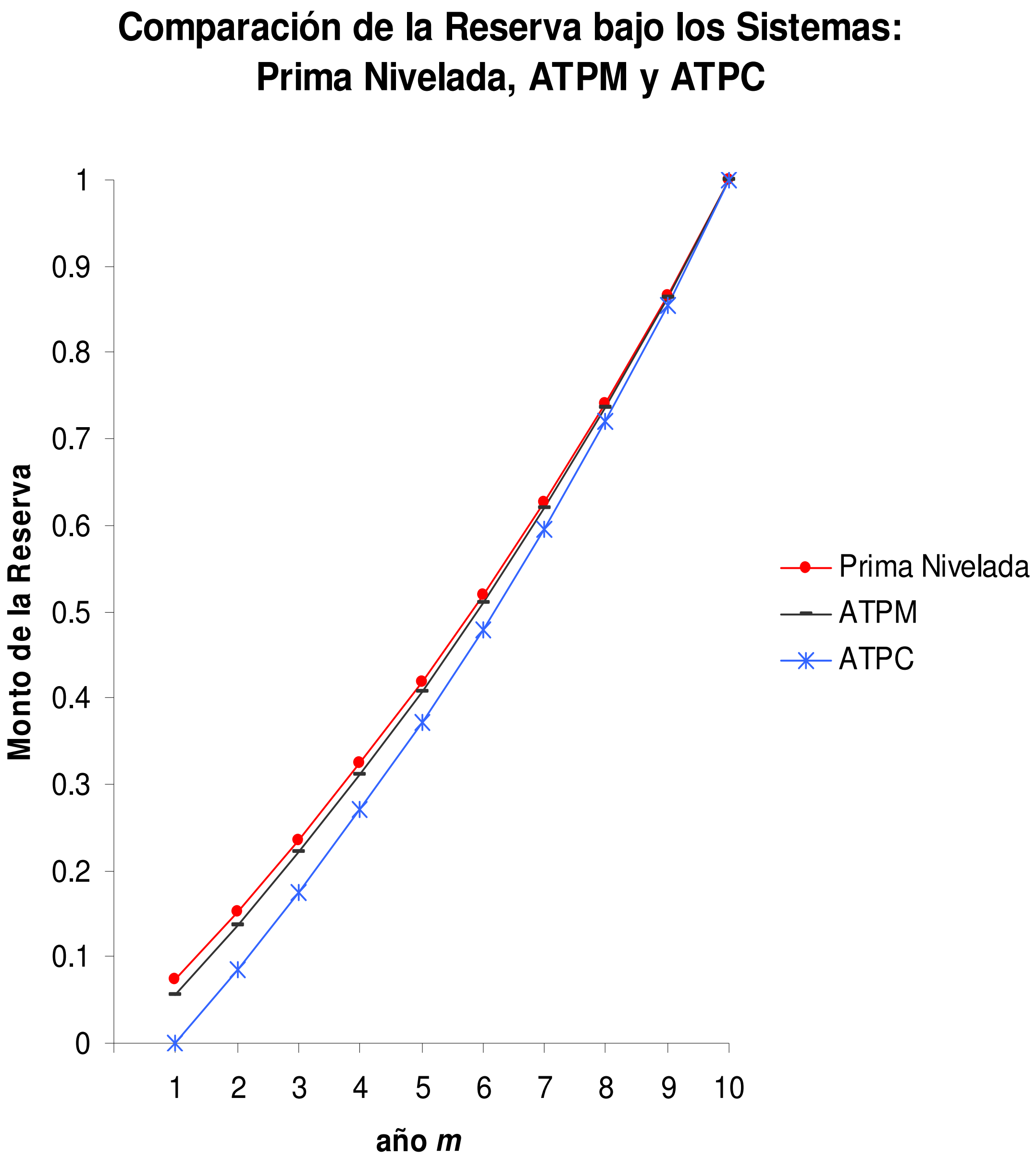
Gráfica 2.2.2.4.1 Muestra el comportamiento de una reserva matemática bajo el método Temporal Preliminar a 2 Años, para un seguro de vida entera, a edad 60, y se compara con la reserva matemática bajo el método de prima nivelada. La tasa de interés con la que se realizaron los cálculos es del 5.5%, y se usó la Tabla de Mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

Por lo general, este tipo de sistema de reserva es común en seguros de salud.

2.2.3 Diferencia entre el ATPC y un ATPM.

Entonces la diferencia entre un ATPM y el ATPC es: En el ATPC está permitido tomar como préstamo toda la prima de ahorro, es decir, el préstamo máximo, para la compensación de los altos gastos de los primeros años. En cambio en un ATPM, el préstamo está limitado de tal manera que sea suficiente para cubrir dichos gastos.

Para los seguros con formas de primas bajas se aplica el ATPC, por lo que se permite no tener reserva terminal del primer año, y para los seguros con formas de primas más altas se aplica un ATPM, donde la reserva terminal del primer año es "parcial".



Gráfica 2.2.3.1 Reserva matemática bajo los sistemas de Prima Nivelada, ATPM, y ATPC, de un seguro dotal a 10 años para una persona de 60 años de edad, con periodo de pago de primas de 10 años. El sistema de ATPM que se usó es el Método Canadiense. La tasa de interés con la que se realizaron los cálculos es del 5.5%, y se usó la Tabla de Mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

En está gráfica se puede ver que la reserva bajo cualquier sistema de ATPM se encuentra delimitada por las reservas de Prima Nivelada y la del ATPC. Esto es, que la reserva de un ATPM siempre se va a encontrar entre la reserva de Prima Nivelada y la del ATPC. La reserva bajo el sistema de Prima Nivelada siempre es mayor o igual que cualquier otra, por el contrario, la reserva bajo el sistema de ATPC siempre es menor o igual que las demás.

2.3 Sistemas Modificados de Reservas en México.

El ATP es un método que se utilizó en nuestro país durante muchos años, pero en la práctica, en la aplicación de este método, se tuvieron irregularidades y limitaciones, es por ello que ahora se utiliza el llamado Método de Reserva Mínima, que explicaré con detalle en el próximo capítulo.

De manera general, en el método ATP se debe comparar la prima nivelada calculada bajo el plan del seguro en cuestión, con la prima de un seguro dotal temporal a 20 años a la misma edad, con la misma suma asegurada. De esta comparación se pueden dar dos casos:

a) Que la prima nivelada del seguro en cuestión sea menor o igual a la prima del dotal a 20 años. En este caso la compañía aseguradora puede ocupar toda la prima de ahorro, sin importar cuál es el monto de la pérdida, es decir, se aplica el Año Temporal Preliminar Completo.

Si $P \leq P_{x:\overline{20|}}$, entonces las primas del primer año y la de renovación, son:

$$\alpha^{ATPC} = v \cdot q_x = A^{\;1}_{x:\overline{1|}} \tag{2.3.1}$$

$$\beta^{ATPC} = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h|}} - A^{\;1}_{x:\overline{1|}}}{v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{h-1|}}} = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h|}} - A^{\;1}_{x:\overline{1|}}}{{}_1/\ddot{a}_{x:\overline{h-1|}}} \tag{2.3.2}$$

b) Que la prima nivelada del seguro en cuestión sea mayor que la prima del dotal a 20 años. Si esto pasa, la institución puede disponer sólo de la prima de ahorro, menos la diferencia que exista entre la prima nivelada y la prima del dotal, esto es, un Año Temporal Preliminar Modificado.

Si $P > P_{x:\overline{20|}}$, la prima del primer año y la prima de renovación son:

$$\alpha^{ATPM} = v \cdot q_x + \left(P - P_{x:\overline{20|}}\right) = A^{\;1}_{x:\overline{1|}} + \left(P - P_{x:\overline{20|}}\right) \tag{2.3.3}$$

$$\beta^{ATPM}=\frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|}-A^{\ \ 1}_{x:\overline{1}|}-\left(P-P_{x:\overline{20}|}\right)}{v\cdot p_x\cdot\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}}=\frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|}-A^{\ \ 1}_{x:\overline{1}|}-\left(P-P_{x:\overline{20}|}\right)}{{}_1/\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|}} \qquad (2.3.4)$$

2.4 Amortización de un Préstamo.

Dado que un sistema modificado de reservas no es más que un método por el que se permite tomar un "préstamo de la prima de primer año" y "devolverlo en el plazo de pago de primas restante", es decir, amortizarlo, entonces estudiaremos los fundamentos de cómo se amortiza un préstamo.

2.4.1 Amortización y Tabla de Amortización con Pagos Ciertos.

En Finanzas, la palabra *amortizar* significa saldar o pagar gradualmente una deuda o un crédito, por medio de una serie de pagos que, la mayoría de las veces, son iguales y se realizan en intervalos de tiempo iguales[3], bajo la tasa de interés *i*.

En cualquier contrato de una operación de crédito, se estipula el plazo de dicha operación, la tasa de interés y la forma en que el préstamo será pagado o amortizado. Algunas de las formas en que la deuda puede ser amortizada son, con pagos iguales, vencidos o anticipados, diferidos, crecientes, decrecientes, pagaderos *m* veces al año, o bien, con alguna combinación de los anteriores, esto puede depender de las necesidades de quien recibe el préstamo, o sea, de deudor.

Cuando los pagos de la deuda no dependen, por ejemplo, de la muerte o de la sobrevivencia del deudor, éstos son *ciertos*, es decir, que se deben efectuar sin importar las condiciones en las que se encuentre el deudor. Entonces, el valor de los pagos se puede obtener, desde el inicio de la vigencia, mediante *anualidades ciertas* que dependen de las condiciones del contrato y cuando las tasas de interés son fijas, a éstos se les conoce como pagos predeterminados.

El método de amortización se basa en el siguiente principio de equivalencia

$$\text{Valor presente de los pagos} = \text{Monto del préstamo} \qquad (2.4.1.1)$$

Por ejemplo, se tiene un préstamo de \$1,000 que se debe saldar con cuatro *pagos iguales* anuales vencidos, si la tasa de interés anual efectiva es del 8%, ¿cuál es el valor de cada pago?

$$P\cdot a_{\overline{4}|}=1000 \qquad \rightarrow \qquad P=\frac{1000}{a_{\overline{4}|}}=301.92$$

[3] Díaz Mata y Aguilera Gómez (6).

Los pagos que se calculan de esta manera están formados por pos partes, la que sirve para amortizar la deuda (que reduce el importe de la deuda), y la que cubre los intereses. En una tabla de amortización se ve lo que pasa con los pagos, los intereses, la amortización y con el saldo en cada periodo de pago. Para el ejemplo anterior se tendría:

Año	Pago anual	Interés sobre el saldo	amortización	Saldo
0				1,000.00
1	301.92	80.00	221.92	778.08
2	301.92	62.25	239.67	538.41
3	301.92	43.07	258.85	279.56
4	301.92	22.36	279.56	0.00
Totales	1207.68	207.68	1,000.00	

En esta tabla se puede observar que la suma de los pagos anuales es igual a la suma de los intereses más la suma de las amortizaciones. El saldo es igual al saldo anterior más los intereses del periodo menos el pago. La amortización es igual al pago menos los intereses.

Entonces de manera general, en una tabla de amortización se puede ver cómo los pagos de cada periodo sirven, por un lado, para pagar los intereses correspondientes, y por el otro, para amortizar el saldo de la deuda.

Las tablas de amortización son importantes, porque además de exponer la evolución del crédito en cada periodo, permite conocer el saldo en cualquier momento de la operación, por lo que el deudor puede liquidar el préstamo, antes del plazo pactado, pagando sólo dicho saldo.

Si para el ejemplo anterior, se pide que los *pagos* sean *crecientes linealmente*, con un incremento de \$50 cada año, entonces se tiene:

$$D = Pv + (P+Q)v^2 + (P+2Q)v^3 + (P+3Q)v^4$$

donde D es el valor presente de la deuda, P es el pago del primer año, y Q es la razón con la cual se va a incrementar el pago.

Simplificando queda:

$$D = P \cdot a_{\overline{4}|} + Q \cdot \frac{a_{\overline{4}|} - 4v^4}{i} \qquad (2.4.1.2)$$

Ahora, si se despeja P, queda:

$$P = \frac{D}{a_{\overline{4}|}} - Q \cdot \frac{a_{\overline{4}|} - 4v^4}{i \cdot a_{\overline{4}|}}$$

$$= \frac{Di - Q(a_{\overline{4|}} - 4v^4)}{i \cdot a_{\overline{4|}}}$$

$$= \frac{1000 \cdot i - 50(a_{\overline{4|}} - 4v^4)}{i \cdot a_{\overline{4|}}} = 231.72$$

Por lo tanto la tabla de amortización con los pagos crecientes de esta forma, es

Año	Pago anual	Interés sobre el saldo	amortización	Saldo
0				1,000.00
1	231.72	80.00	151.72	848.28
2	281.72	67.86	213.86	634.42
3	331.72	50.75	280.97	353.46
4	381.73	28.28	353.45	0.00
Totales	1,226.89	226.89	1,000.00	

Ahora, si los *pagos* fueran *linealmente decrecientes* los cálculos serían básicamente iguales, sólo que ahora se tendría $Q < 0$. Por ejemplo, si los pagos disminuyen en \$50 cada año, queda:

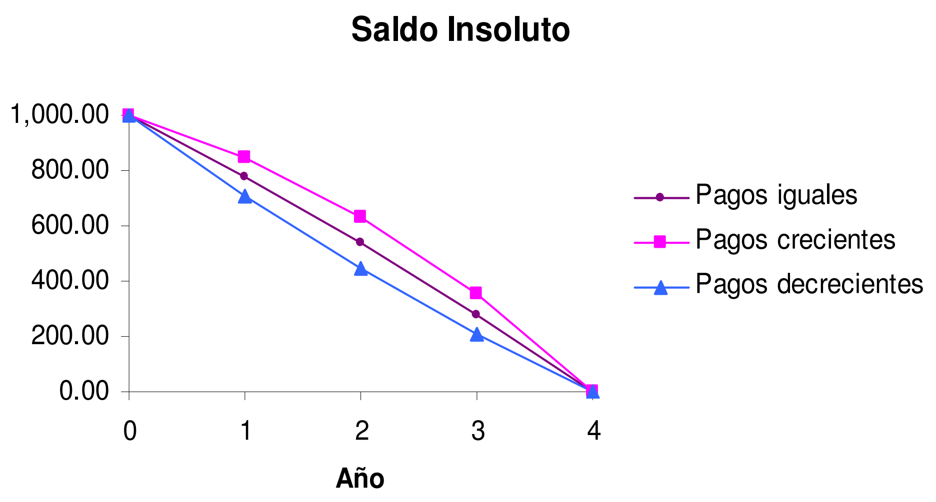
$$P = \frac{Di - Q(a_{\overline{4|}} - 4v^4)}{i \cdot a_{\overline{4|}}}$$

$$= \frac{1000 \cdot i - (-50)(a_{\overline{4|}} - 4v^4)}{i \cdot a_{\overline{4|}}} = 372.12$$

Por lo que la tabla de amortización es

Año	Pago anual	Interés sobre el saldo	amortización	Saldo
0				1,000.00
1	372.12	80.00	292.12	707.88
2	322.12	56.63	265.49	442.39
3	272.12	35.39	236.73	205.66
4	222.11	16.45	205.66	0.00
Totales	1,188.47	188.47	1,000.00	

Para ver cómo es el comportamiento de los saldos insolutos cuando los pagos son iguales, crecientes y decrecientes, se tiene la siguiente gráfica.



Gráfica 2.4.1.1 Muestra el comportamiento del saldo insoluto para tres casos diferentes, cuando los pagos son iguales, cuando son crecientes, y cuando son decrecientes, en este ejemplo, la deuda inicial es de \$1,000 que se deben pagar en cuatro años, con una tasa de interés del 8%.

Los valores de dichos saldos son:

Año	Saldo Insoluto		
	Pagos iguales	Pagos crecientes	Pagos decrecientes
0	1,000.00	1,000.00	1,000.00
1	778.08	848.28	707.88
2	538.41	634.42	442.39
3	279.56	353.46	205.66
4	0.00	0.00	0.00

La ecuación (2.4.1.2) se puede generalizar de la siguiente manera

$$D = P \cdot a_{\overline{n}|} + Q \cdot \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \qquad (2.4.1.3)$$

donde, D es el valor presente de la deuda, P es el pago del primer año, y Q es la razón con la cual se va a variar el pago. Si $Q < 0$, los pagos son decrecientes; si $Q > 0$, los pagos son crecientes; y si $Q = 0$, los pagos son iguales.

Otra forma de amortizar un crédito, es decir, sin anualidades, es cuando se van *abonando cantidades fijas al capital*, donde se establecen de antemano las cantidades que se abonarán al capital periódicamente, en este caso se calculan por separado los intereses devengados, entonces el pago que debe realizar el deudor se determina por la suma de capital e intereses.

Bajo este esquema las tasas de interés pueden ser fijas o variables. Cuando la tasa es variable ésta se determina por una tasa de referencia, y el valor de los abonos se calcula, por lo general, dividiendo el monto total del crédito entre el número de pagos pactados para liquidar la deuda, los intereses devengados se calculan sobre los saldos insolutos tomando como base la tasa de interés que resulte para el periodo de pago correspondiente.

Por ejemplo, para un crédito de \$1,000 que se desea amortizar en 4 años, la amortización anual del capital sería de \$250

$$\frac{1000}{4} = 250$$

A esta cantidad se le debe sumar los intereses devengados por el saldo insoluto durante el tiempo transcurrido hasta el día anterior a la realización del pago. Entonces la cantidad que va a pagar el deudor es dicha suma.

Si se supone que para el primer año la tasa resultó ser del 7%, para el segundo del 7.5%, para el tercero del 6.5% y para el último año resultó ser del 6.8%, entonces la tabla de amortización quedaría de la siguiente manera.

Año	Amortización fija al capital	Intereses devengados	Pago: suma de capital + intereses	Saldo insoluto al final del periodo.
0				1,000.00
1	250.00	70.00	320.00	750.00
2	250.00	56.25	306.25	500.00
3	250.00	32.50	282.50	250.00
4	250.00	17.00	267.00	0.00
Totales	1,000.00	175.75	1,175.75	

Los intereses pudieron haberse establecido a una tasa fija durante toda la vigencia, o bien, a una tasa que sea constante, por ejemplo, los primeros dos años, y después cambia por otra tasa que será fija por los siguientes dos años. Siempre los intereses dependen de las condiciones del contrato.

Otro ejemplo es, cuando se tiene la misma deuda de \$1,000 que también se va a liquidar en 4 pagos vencidos con una tasa del 8%, si se supone que el deudor sólo puede pagar \$1 en cada uno de los primeros tres años, entonces la pregunta es ¿cuál es la cantidad que debe pagar en el último año?

Lo cual se resuelve con la siguiente ecuación

$$1000 = v + v^2 + v^3 + v^4 X$$

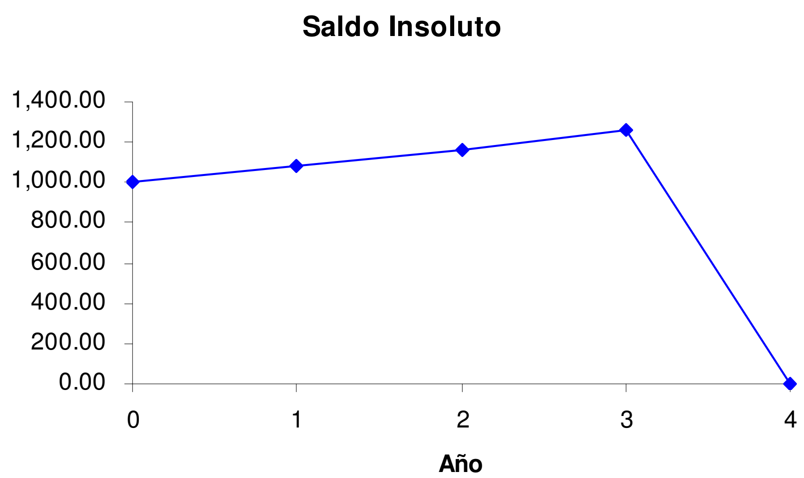
$$X = \frac{1000 - (v + v^2 + v^3)}{v^4}$$

$$=\frac{1000-a_{\overline{3|}}}{v^4}=1{,}356.98$$

entonces la tabla de amortización queda:

Año	Pago anual	Interés sobre el saldo	amortización	Saldo Insoluto
0				1,000.00
1	1.00	80.00	-79.00	1,079.00
2	1.00	86.32	-85.32	1,164.32
3	1.00	93.15	-92.15	1,256.47
4	1,356.98	100.52	1,256.47	0.00
Totales	1,359.98	359.98	1,000.00	

El saldo insoluto, gráficamente, se ve de la siguiente manera:



Gráfica 2.4.1.2 Saldo insoluto de una deuda de $1,000 que se paga en 4 años con pagos vencidos con interés del 8%, los primeros tres pagos son de $1.

La siguiente tabla muestra de manera resumida las variantes que puede tener una amortización de un crédito, según el esquema de pago que se trate.

Amortización de un Crédito

Esquema de pago	Tipo o características	Valor de los pagos
Por anualidades	Vencida Anticipada Diferida Creciente Decreciente Pagadera *m* veces al año Sus combinaciones	Predeterminado (las tasas de interés se fijan de antemano)
Con abonos fijos al capital	Tasa fija	Predeterminado
	Tasa variable	No predeterminado (las tasas se conocen al término del periodo y es entonces cuando se calculan los intereses y la cantidad que deberá pagarse)

Fuente: Matemáticas Financieras: Fundamentos y aplicaciones, Cánovas Theriot Roberto.

2.4.2 Fondo de Amortización con Pagos Ciertos.

Existe otro concepto que también trata sobre el pago de una deuda, éste es el *fondo de amortización*, la diferencia es que en la amortización la deuda es una cantidad que está en valor presente o actual, mientras que en el fondo de amortización, la deuda es una cantidad que se va a pagar a futuro, y lo que se hace es constituir una reserva o fondo depositando determinadas cantidades, por lo general, iguales y periódicas, en cuentas que devengan intereses, con el fin de acumular la cantidad o monto que permita pagar la deuda a su vencimiento.

Por ejemplo, si se quiere pagar una deuda de \$1,000 después de 4 años, con un interés del 8% anual, ¿cuál es el valor del depósito que se debe hacer cada año, para poder pagar dicha deuda?

$$1000 = D \cdot S_{\overline{4}|}$$

$$D = \frac{1000}{S_{\overline{4}|}} = \frac{1000}{4.5061} = 221.92$$

La tabla que muestra la forma en que se acumula el fondo es:

Año	Interés	Depósito	Interés	Monto en el	Monto neto

	pagado		devengado	fondo	del préstamo
0					1,000.00
1	80.00	221.92	0.00	221.92	778.08
2	80.00	221.92	17.75	461.59	538.41
3	80.00	221.92	36.93	720.44	279.56
4	80.00	221.92	57.64	1,000.00	0.00
Totales	320.00	887.68	112.32		

2.4.3 Amortización con Pagos Contingentes.

Si los pagos de una deuda dependen de la existencia de una persona o de un grupo de personas, a éstos se les conoce como *pagos contingentes*, entonces, en estos casos, para realizar cálculos se hace uso de las *anualidades contingentes*, de manera similar a cuando los pagos son ciertos, sólo que aquí el principio de equivalencia es:

Valor presente actuarial de los pagos = Monto del préstamo (2.4.3.1)

Por ejemplo, si se tiene una deuda de $10,000 que se debe amortizar con 5 pagos vencidos anuales siempre y cuando el deudor se encuentre con vida, entonces si la tasa de interés es del 5%, y la edad actual del deudor es de 30 años, la igualdad anterior quedaría

$$Pa_{x:\overline{5}|} = 10,000$$

Por lo que el valor de cada pago debería ser de

$$P = \frac{10,000}{a_{x:\overline{5}|}} = \frac{10,000}{4.31} = 2,320.19$$

Cuya tabla de amortización es:

Año	Pago anual	Interés sobre el saldo	amortización	Saldo
0				10,000.00
1	2,320.19	500.00	1,820.19	8,179.81
2	2,320.19	408.99	1,911.19	6,268.62
3	2,320.19	313.43	2,006.75	4,261.86
4	2,320.19	213.09	2,107.09	2,154.77
5	2,262.51	107.74	2,154.77	0.00
Totales	11,543.25	1,543.25	10,000.00	

En el pago del año 5 se realizó un ajuste para que el saldo insoluto quedara en cero.

Pero si la condición para que se realice el pago es siempre y cuando el deudor o su cónyuge se encuentren con vida, es decir, que sólo se deja de pagar si los dos fallecen, y si la esposa del deudor tiene 25 años, entonces

$$Pa_{\overline{xy}:\overline{5|}} = 10,000$$

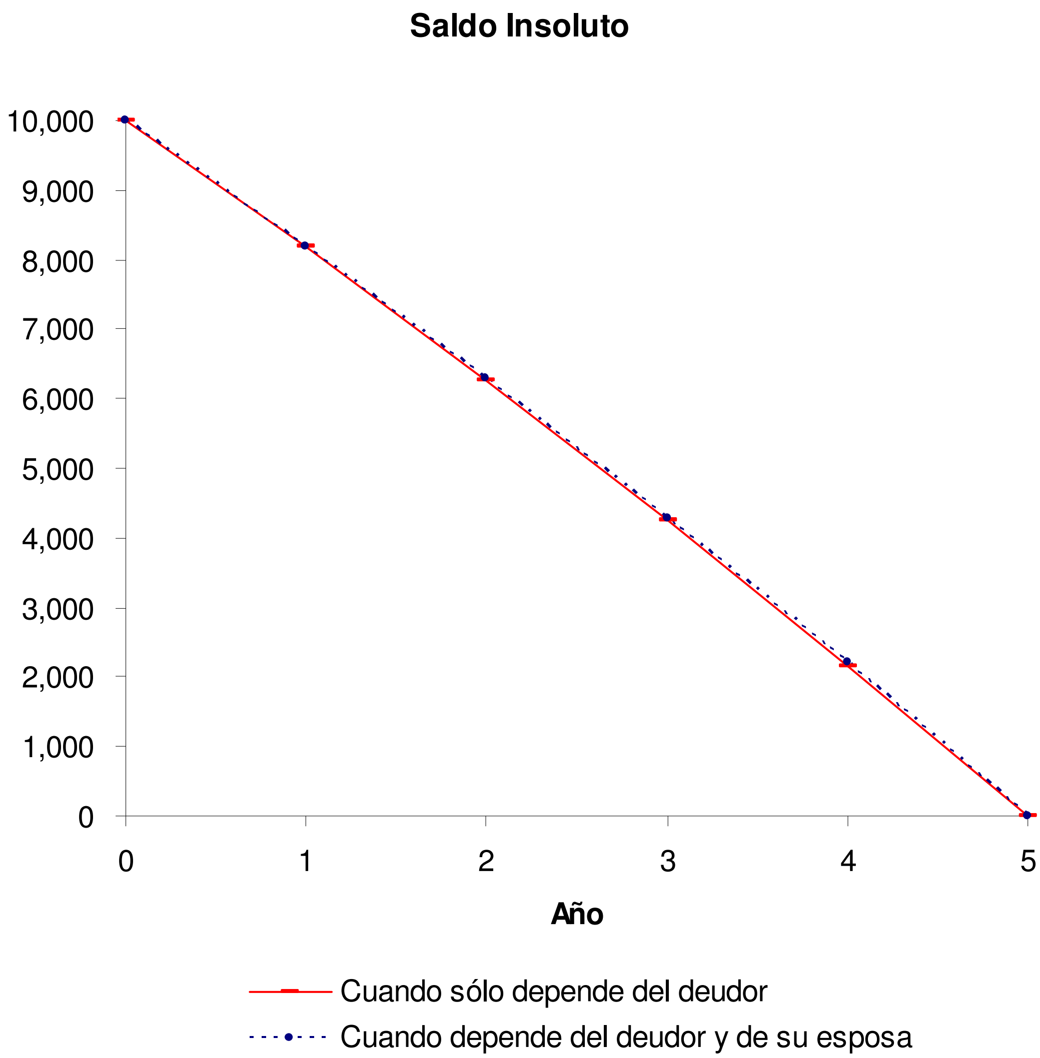
$$P = \frac{10,000}{a_{\overline{xy}:\overline{5|}}} = \frac{10,000}{4.33}$$

$$P = 2,309.47$$

Y la tabla de amortización es

Año	Pago anual	Interés sobre el saldo	amortización	Saldo
0				10,000.00
1	2,309.47	500.00	1,809.47	8,190.53
2	2,309.47	409.53	1,899.94	6,290.59
3	2,309.47	314.53	1,994.94	4,295.65
4	2,309.47	214.78	2,094.69	2,200.96
5	2,311.01	110.05	2,200.96	0.00
Totales	11,548.89	1,548.89	10,000.00	

En el pago del año 5 se realizó un ajuste para que el saldo insoluto quedara en cero.



Gráfica 2.4.1.3 Comparación del saldo insoluto de una deuda de $10,000 que se debe amortizar con 5 pagos vencidos anuales. Caso 1: cuando los pagos se hacen si el deudor se encuentra con vida, y caso 2: cuando el pago se realiza si el deudor o su esposa se encuentran con vida. La tasa de interés es del 5%, y la edad actual del deudor es de 30 años, y la de su esposa es de 25 años. Tabla de Mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

De igual forma el comportamiento del saldo insoluto es muy similar a cuando se trata de pagos ciertos.

CAPÍTULO III.
EL SISTEMA DE RESERVA MÍNIMA

3.1 Motivación para la Creación de la Reserva Mínima.

Como ya se mencionó anteriormente, en México, durante muchos años, la reserva matemática que se constituía tenía como límite inferior la reserva calculada conforme al sistema modificado de reserva denominado "Año Temporal Preliminar", pero por ser un procedimiento actuarial viejo, en la actualidad se presentaron algunas limitaciones al querer aplicarlo en los nuevos tipos de seguro.

Los métodos modificados de reserva tenían limitantes porque la mayoría de ellos definen la pérdida del primer año en función de ciertos planes estándar (como es el caso del método ATP que usa como referencia el dotal 20), ya que, en su momento, fue una manera bastante práctica para simplificar los cálculos, esto era valioso porque no existían las herramientas de cómputo con las que se cuenta hoy en día. Por esto mismo, ahora, es posible plantear métodos más elaborados en la práctica, los cuales no tienen esas desventajas.

Por lo anterior, el método ATP fue sustituido por un nuevo método en 2004, éste se llama "Método de Reserva Mínima", el cual se creó para la regulación mexicana, superando distintas limitantes del método ATP.

Este nuevo método es más exacto, porque a diferencia del método ATP, permite conocer el valor exacto de la pérdida del primer año. Otra característica de este método es que delimita la pérdida del primer año al valor de la prima de ahorro del plan de que se trate, y esto le da congruencia técnica, ya que si no fuera así, se podría obtener una reserva negativa en los primeros años. Por último, otra ventaja, es que la fórmula se puede aplicar a cualquier tipo de seguro, incluso a formas de seguro más o menos complejas que en la actualidad son comunes y en las cuales el método ATP no se podía aplicar. Por las razones anteriores, se puede decir que el Método de Reserva Mínima es exacto, congruente y general.

Las tres razones principales que originaron el cambio del método ATP por el Método de Reserva Mínima son[1]:

1) El método ATP no se puede aplicar en muchos casos donde el beneficio o las coberturas son distintos a los tradicionales.

Se sabe que en el método ATP, se compara el valor de la prima nivelada del plan del seguro del que se trata con el valor de la prima de un seguro dotal temporal a 20 años a la misma edad y con la misma suma asegurada. Pero si, por ejemplo, se tiene un seguro dotal con suma asegurada de $100,000 por muerte, y una suma asegurada de $200,000 por supervivencia, y se desea aplicar el método ATP, al momento de querer calcular la prima del dotal temporal a 20 años, surge una pregunta: ¿con qué valor de suma

[1] Aguilar Beltrán y Avendaño Estrada (1).

asegurada se debe calcular la prima del dotal temporal a 20 años?, ¿con suma asegurada igual a \$100,000? ¿o con suma asegurada igual a \$200,000?

Así como éste, hay muchos casos donde no se puede aplicar el método ATP.

2) El método ATP, así como otros sistemas modificados de reservas, no es exacto, en el sentido de que el préstamo no concuerda con la pérdida del primer año.

Por ejemplo, si se tiene una póliza de un seguro dotal a 15 años para una persona de 30 años de edad con suma asegurada de \$1,000, y se tiene una segunda póliza de un seguro dotal a tres años, igual para una persona de 30 años de edad y con la misma suma asegurada, entonces:

$$P_{x:\overline{15|}} = 43.49$$

$$P_{x:\overline{3|}} = 299.72$$

Pero al momento de aplicar el método ATP, sucede lo siguiente:

$$P_{x:\overline{20|}} = 28.65$$

entonces

$$P_{x:\overline{15|}} = 43.49 > 28.65 = P_{x:\overline{20|}} \qquad \text{y} \qquad P_{x:\overline{3|}} = 299.72 > 28.65 = P_{x:\overline{20|}}$$

Por lo tanto, para las dos pólizas, se debe aplicar el método ATPM, es decir, que la aseguradora puede disponer de la prima de ahorro menos la diferencia que hay entre la prima nivelada y la prima del dotal a 20 años, para cada póliza:

$$PAH^{poliza(1)} = 42.06$$

$$PAH^{poliza(2)} = 298.29$$

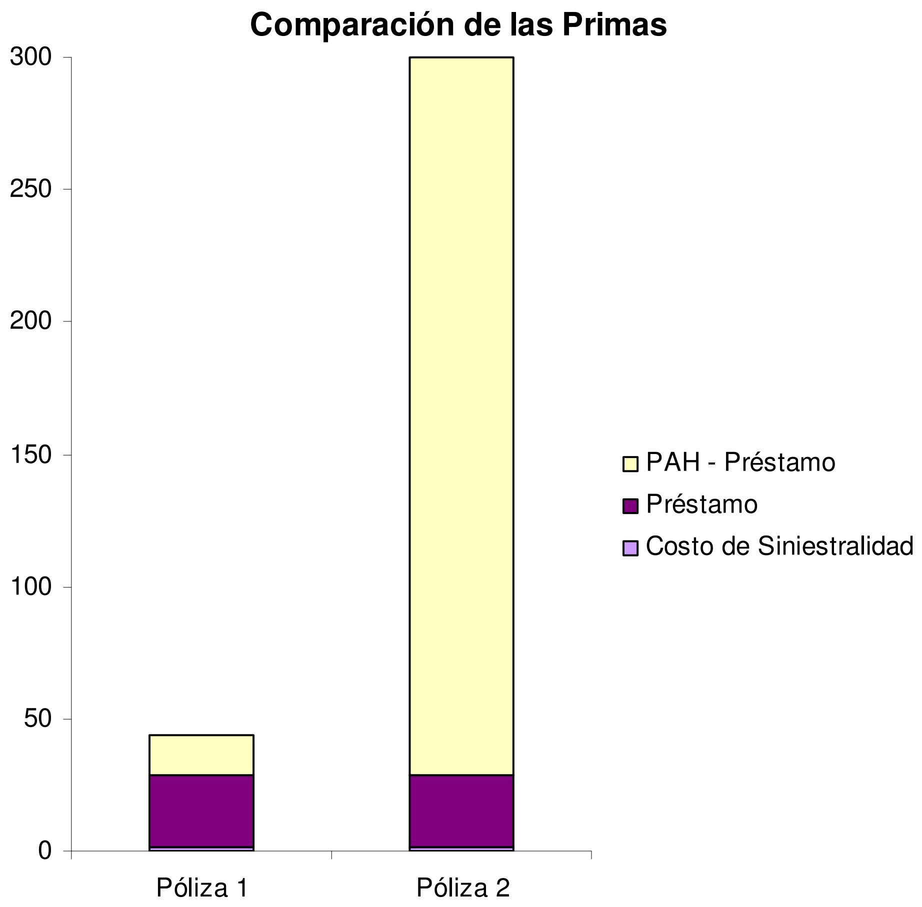
por lo tanto

$$prestamo^1 = PAH^{poliza(1)} - \left(P_{x:\overline{15|}} - P_{x:\overline{20|}}\right) = 27.22$$

$$prestamo^2 = PAH^{poliza(2)} - \left(P_{x:\overline{3|}} - P_{x:\overline{20|}}\right) = 27.22$$

donde $PAH^{poliza(i)}$ es la prima de ahorro de la póliza *i*, y $prestamo^i$ es la cantidad de la que puede disponer la aseguradora por la póliza *i*.

Entonces no suena lógico que dos seguros, donde uno tiene una prima nivelada muy pequeña en comparación con la prima nivelada del otro, puedan disponer de la misma cantidad.



Gráfica 3.1.1 Muestra la comparación de las primas de un seguro dotal a 15 años (póliza 1) y de un seguro dotal a 3 años (póliza 2), donde , bajo el método ATP, pueden tomar prestada la misma cantidad para cubrir los gastos de adquisición.

En la gráfica anterior se puede ver que el costo de siniestralidad es el mismo para ambas pólizas, entonces para la segunda póliza tal vez no es necesario el préstamo o el préstamo debería ser menor que el de la primer póliza, ya que la prima es bastante alta, con la cual se pueden cubrir los gastos de adquisición de los primeros años, o por lo menos una buena parte de éstos. Entonces el préstamo que se obtiene del método ATP no es congruente con la pérdida del primer año.

3) Cuando se desconoce la forma en que se debe aplicar el método ATP en algunos tipos de seguros, se suele aplicarlo erróneamente, ya que se plantea la aplicación en los mismos términos que aparecen en la literatura, los cuales sólo son aplicables en los seguros tradicionales. Como en dicha literatura no está explícito cómo aplicar el método en estos casos que no son tradicionales, se puede caer en confusión.

Sea el caso de un seguro que paga una suma asegurada por muerte, y además paga la misma suma asegurada por invalidez. Si se desea aplicar el método ATP, la prima nivelada de este seguro se debe comparar con la prima del dotal a 20 años correspondiente en edad y suma asegurada, $P_{x:\overline{20|}}$. Pero, la prima del dotal a 20 años no toma en cuenta el factor de invalidez, entonces ¿es correcto comparar la prima del seguro con $P_{x:\overline{20|}}$? No. Ahora el problema es ¿con qué se debe comparar la prima del seguro?, o ¿cómo se introduce el factor de invalidez en la comparación?

Por este tipo de cuestiones, fue necesario crear un método que rompiera con este tipo de limitantes y que fuera aplicable a cualquier tipo de seguro.

3.2 Descripción de la Reserva Mínima.

3.2.1 Marco Legal del Método de Reserva Mínima.

Todas las compañías aseguradoras, deben constituir, entre otras, una reserva de riesgos en curso, que, en el caso de los seguros de vida se calcula conforme a lo establecido en el artículo 47 de la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros y la Circular S-10.1.7. de la CNSF.

En el caso de los seguros de vida de largo plazo, la normatividad indica que la reserva de riesgos en curso no debe ser inferior a la que se obtenga del llamado método de reserva mínima. Los métodos empleados para la valuación de reservas de riesgos en curso son registrados por las propias aseguradoras, y son llamados *métodos de suficiencia*, este nombre se deriva de que "dichos métodos tienen como objeto calcular la reserva como el monto suficiente para el cumplimiento de las obligaciones futuras de la compañía tomando en cuenta sus propios patrones de siniestralidad"[2].

Sin importar el método de suficiencia que se use, se debe aplicar el método de reserva mínima para obtener un límite mínimo del monto para la constitución de la reserva matemática.

3.2.2 Procedimiento para el Cálculo de la Reserva Mínima.

Para encontrar el valor de la reserva mínima se debe calcular la reserva matemática terminal, como se ha visto anteriormente, y a dicha reserva se le debe restar la anualidad de amortización de la pérdida del primer año de la vigencia del plan. Para dicho cálculo se debe tomar en cuenta los siguientes puntos:

3.2.2.1 Pérdida del Primer Año.

Para poder aplicar el método de la reserva mínima, primero es necesario obtener el valor de la *pérdida del primer año*, con la cual se determinará la *anualidad de amortización*.

[2] Aguilar Beltrán y Avendaño Estrada (1).

La pérdida del primer año es, "la diferencia entre el costo de adquisición que la compañía estima pagar conforme a su nota técnica, en el primer año de vigencia del plan de que se trate $\left(CAdq_{NT}\right)$ y la porción de prima de tarifa (α) del primer año, correspondiente al recargo por concepto de gastos de adquisición"[3], es decir

$$PE_1 = CAdq_{NT} - PT_1 \cdot \alpha \qquad (3.2.2.1.1)$$

donde PE_1 es la pérdida del primer año, y PT_1 es la prima de tarifa del primer año.

Esta diferencia es la que existe entre el costo de adquisición no nivelado (es decir esperado), y el costo nivelado (que es el recargo de la prima), entonces la aseguradora debe definir con anterioridad el costo de adquisición que espera tener en el primer año y el gasto nivelado.

En algunas ocasiones el costo de adquisición real y nivelado no están definidos como un porcentaje de la prima de tarifa, si es así, la pérdida del primer año es la diferencia entre el importe que representa el gasto del primer año, costo esperado $C_{esperado}$, y el que representa el costo nivelado, $C_{nivelado}$, entonces:

$$PE_1 = C_{esperado} - C_{nivelado} \qquad (3.2.2.1.2.)$$

Cuando la compañía calcula las primas de tarifa con recargos fijos a la prima de riesgo, el costo nivelado es:

$$C_{nivelado} = \alpha \cdot PT \qquad (3.2.2.1.3)$$

donde *PT* es la prima de tarifa del primer año, y α es el recargo por los costos de adquisición.

Ejemplo, sea un seguro temporal a 5 años con suma asegurada de \$100,000 y con 3 pagos limitados, para una persona de 30 años de edad. Si los gastos de adquisición de los primeros tres años son 40%, 15%, 3%, respectivamente, y los de administración son 10%, 5%, 2% respectivamente, entonces la pérdida del primer año es

$$PE_1 = CAdq_1 - CAdq_N = 40\% PT - CAdq_N$$

El valor de la prima de tarifa se puede calcular mediante el siguiente principio de equivalencia:

Valor presente esperado de ingresos por primas	=	Valor presente esperado de egresos por pagos de reclamaciones, beneficios y gastos

Por lo que

[3] CNSF (4).

$$PT \cdot \ddot{a}_{x:\overline{3}|} = 100{,}000 A^{1}_{x:\overline{5}|} + (0.5)PT + (0.2)PT \cdot vp_x + (0.05)PT \cdot v^2 {}_2p_x$$

de donde se obtiene

$$PT = \frac{100{,}000 A^{1}_{x:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{3}|} - 0.5 - 0.2 \cdot vp_x - 0.05 \cdot v^2 {}_2p_x}$$

Ahora, el costo de adquisición nivelado se calcula de la siguiente manera:

$$(0.4)PT + (0.15)PT \cdot vp_x + (0.03)PT \cdot v^2 {}_2p_x = \alpha \cdot PT + \alpha \cdot PT \cdot vp_x + \alpha \cdot PT \cdot v^2 {}_2p_x$$

ya que $\alpha \cdot PT = CAdq_N$, entonces

$$CAdq_N = \frac{(0.4)PT + (0.15)PT \cdot vp_x + (0.03)PT \cdot v^2 {}_2p_x}{1 + vp_x + v^2 {}_2p_x}$$

$$CAdq_N = \left(\frac{0.4 + (0.15)vp_x + (0.03)v^2 {}_2p_x}{1 + vp_x + v^2 {}_2p_x} \right) PT$$

Si la tasa de interés técnico para el cálculo de la prima de tarifa es del 5.5%, se tiene

$$PT = 197.66$$

$$CAdq_N = (0.20)PT$$

Entonces

$$PE_1 = (40\%)197.66 - (20\%)197.66$$

Por lo tanto

$$PE_1 = 39.53$$

3.2.2.2 Pérdida Amortizable.

En cada póliza, para compensar la pérdida del primer año, la compañía cuenta únicamente con la prima de ahorro, por lo que, si la pérdida del primer años es mayor que la prima de ahorro, la aseguradora sólo podrá financiar la parte de la pérdida que se pueda cubrir con la prima de ahorro. La *pérdida amortizable* es la pérdida que corresponde a la cantidad que la compañía debe amortizar, entonces, ésta tiene como límite la prima de ahorro.

El procedimiento que se debe seguir para calcular la pérdida amortizable es[4]:

i) La prima de ahorro del primer año $\left(PAH_1\right)$, se calcula como la diferencia entre la prima neta nivelada $\left(PN_1\right)$, y la prima natural, es decir el costo esperado de siniestralidad del primer año.

$$PAH_1 = PN_1 - CS_1 \qquad (3.2.2.2.1)$$

donde CS_1 es el valor presente del costo de siniestralidad esperado del primer año. Cuando se trata de un seguro de muerte, se tiene

$$CS_1 = SA \cdot \frac{q_x}{1+i}$$

ii) Ahora se debe calcular el valor de la pérdida amortizable $\left(PA\right)$ como la pérdida esperada, siempre y cuando ésta última, no resulte superior a la prima de ahorro, esto es:

$$PA_1 = Min\left(PE_1, PAH_1\right) \qquad (3.2.2.2.2)$$

Cuando se conoce la forma de cálculo de la prima natural del primer año, no se tiene problema alguno, pero en algunos tipos de seguro pueden generarse algunas dificultades, en estos casos se puede hacer uso de la definición de prima natural para encontrar la solución al problema.

Sabemos que la prima natural del primer año, para cualquier tipo de seguro, es el valor presente de la siniestralidad esperada del primer año, es decir, de la probabilidad de que se pague el beneficio acordado, por el monto del beneficio,

$$PNA = v \cdot b_1 \cdot \Pr_1(S) \qquad (3.2.2.2.3)$$

donde $\Pr_1(S)$ es la probabilidad de que se pague el beneficio en el año 1, y b_1 es el monto del beneficio que, también en el año 1, se debe pagar.

Para el ejemplo anterior, donde se calculó la pérdida del primer año, se tiene

$$PN_1 = \frac{100,000 A_{\overset{1}{x}:\overline{5|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{3|}}}$$

$$CS_1 = 100,000 \cdot v \cdot q_x$$

Si el interés técnico para la valuación de la reserva es del 5.5%, entonces

[4]CNSF (4).

$$PN_1 = 165.35 \text{ y } CS_1 = 142.94$$

Por lo que la prima de ahorro es

$$PAH_1 = PN_1 - CS_1 = 22.41$$

Por lo tanto, la pérdida amortizable es

$$PA_1 = \min\{39.53, 22.41\}$$

$$PA_1 = 22.41$$

3.2.2.3 Anualidad de Amortización.

La anualidad de amortización "se refiere al proceso mediante el cual la compañía irá reponiendo gradualmente el "préstamo" que tomó de la prima de ahorro para financiar la pérdida del primer año, producida por los gastos de adquisición"[5].

El objetivo de la amortización es reponer el monto tomado de la prima de ahorro, "pérdida amortizable", a lo largo del periodo de pago de primas. Para reponer a la reserva matemática la pérdida amortizable, hay varias formas actuariales de hacerlo, sólo que la velocidad con que se haga esta reposición va a variar dependiendo del método.

Si la reposición del préstamo se hace de manera lineal, reponiendo una cantidad constante cada año, sólo basta con dividir la pérdida amortizable entre el número de años en que se va a amortizar la deuda.

$$AM_t(n-1) = PA_1$$

entonces, $AM_t = \dfrac{PA_1}{n-1}$

En este caso el factor de amortización es:

$$Factor_t = \frac{n-1-t}{n-1} \quad \forall \ t \leq n-1$$

La forma anterior es muy simple, pero en el ámbito regulatorio, la anualidad de amortización se debe calcular de la siguiente manera[6]:

[5] Aguilar Beltrán y Avendaño Estrada (1).
[6] CNSF (4).

$$AM_t = PA_1 \cdot \frac{(1+i)}{p_x} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}} \qquad (3.2.2.3.1)$$

Donde m es el plazo de pago de primas del plan. Aquí se usa un factor de amortización que toma en cuenta el valor presente actuarial de las obligaciones futuras en el momento t, $\left(\ddot{a}_{x+t:m-t}\right)$, en relación al valor presente actuarial de las obligaciones al principio del periodo de amortización, $\left(\ddot{a}_{x+1:m-1}\right)$, esto es porque al principio de este periodo, el valor presente actuarial de obligaciones futuras de aportaciones anuales que debe realizar la aseguradora para reponer la parte de la reserva matemática que tomó para financiar la pérdida, es equivalente a la pérdida amortizable, entonces:

$$R \cdot v \cdot p_x \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|} = PA_1$$

Al despejar la porción anual de amortización se tiene

$$R = \frac{(1+i)PA_1}{p_x \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}} \qquad (3.2.2.3.2)$$

Conforme va pasando el tiempo, el plazo para reponer la pérdida va disminuyendo, por lo que en el año t el valor presente actuarial de las cantidades pendientes de amortizar $\left(MAF_t\right)$, es

$$MAF_t = R \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \qquad (3.2.2.3.3)$$

Al comparar esta última igualdad con el saldo inicial de la pérdida amortizable, se obtiene el porcentaje que en este momento t queda pendiente de amortizar

$$Porcentaje_t = \frac{R \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{R \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}} = \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}$$

Como PA_1 es la pérdida amortizable al inicio de la vigencia del seguro, entonces el porcentaje de la pérdida amortizable que está pendiente al momento t es

$$AM_t = PA_1 \cdot \frac{(1+i)}{p_x} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}$$

La normatividad dice que la reserva mínima exacta del primer año se debe calcular de la siguiente manera:

$$_1V_x^{\min} = \frac{\frac{q_x}{(1+i)}\left(\frac{365-T}{365}\right) + \left(PAH_1 - PA_1\right)(1+i)^{T/365}}{p_x} \qquad (3.2.2.3.4)$$

donde T es el número de días transcurridos a la fecha de valuación de la reserva. Es decir, la parte no devengada del costo de siniestralidad del primer año, más la diferenta entre la prima de ahorro y la pérdida amortizable, capitalizada mensualmente a una tasa de interés técnica i, esto siempre y cuando la diferencia sea positiva.

Y el monto de la reserva mínima terminal a partir del segundo año de la vigencia de la póliza, durante el plazo de amortización, según la regulación, es

$$ {}_tV_x^{min} = {}_tV_x - AM_t \qquad (3.2.2.3.5)$$

Esto es, la reserva terminal de prima nivelada menos la anualidad de amortización en el año t.

Ahora, la reserva mínima exacta al día k del año póliza t, se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$ {}_{t-1+\frac{k}{365}}V_x^e = \begin{cases} \frac{k}{365}\,{}_tV_x^{\min} + \left(1-\frac{k}{365}\right)\left({}_{t-1}V_x^{\min} + PN_x + \frac{PA_1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}\frac{(1+i)}{p_x}\right), t \le m \\ \\ \frac{k}{365}\,{}_tV_x^{\min} + \left(1-\frac{k}{365}\right)\left({}_{t-1}V_x^{\min}\right), t > m \end{cases} \qquad (3.2.2.3.6)$$

donde PN_x es la prima neta nivelada, k es el número de días que han transcurrido desde el último aniversario de la emisión de la póliza a la fecha de valuación, y m es el plazo de pago de primas del plan. La fórmula anterior se deduce haciendo una interpolación lineal entre la reserva mínima inicial del año t, ${}_{t-1}V_x^{\min} + PN_x + R$, y la reserva mínima terminal del año t, ${}_tV_x^{\min}$.

Con esto se expone la esencia del método de amortización del sistema de reserva mínima que propone la regulación mexicana. Después de esta explicación, su aplicación para tipos de seguro más complejos es sencilla.

Algunas notas importantes son[7]:

1) "El factor de amortización se deduce a partir de estimar el valor presente actuarial de las aportaciones anuales futuras (R)."

2) "El valor presente actuarial de las aportaciones futuras anuales se debe estimar en función del valor presente de las aportaciones y de las probabilidades anuales de que dichas aportaciones lleguen a darse por permanecer vigente el seguro."

---

[7] Aguilar Beltrán y Avendaño Estrada (1).

3) Por el momento, "el monto de las aportaciones anuales, por su propia construcción se deben suponer de monto constante en el tiempo. Pero, como la reserva mínima tiene el carácter de cota inferior para la reserva matemática, se pueden proponer modificaciones en dos sentidos: amortización mediante aportaciones no homogéneas, o bien, reducción del periodo de amortización. En ambos casos se prestará atención a que la propuesta de modificación no derive en una reserva inferior a la que resulte del proceso de amortización constante."

4) "Las probabilidades anuales futuras se calculan en función de la probabilidad de que la condición de pago de primas siga vigente, y por tanto se paguen las primas."

3.2.3 Ejemplo Comparativo de Reserva Matemática bajo distintos Métodos.

Sea un seguro dotal a 15 años, con las siguientes características:

Edad	35
Plazo de Cobertura	15
Plazo de pago	15
Dotal/**T**emporal	D
Suma Asegurada	$1,000.00
Interés técnico	5.50%
Interés primas	5.50%
Gasto Adq. Año 1	60.00%

PT1	50.39
%CA (a)	13.44%
CA-nivelado	6.77
CA-real	30.23
Pérdida	23.46
Financ. ATP	27.24
Financ. CNSF	23.50
Financ. ATPC	41.96

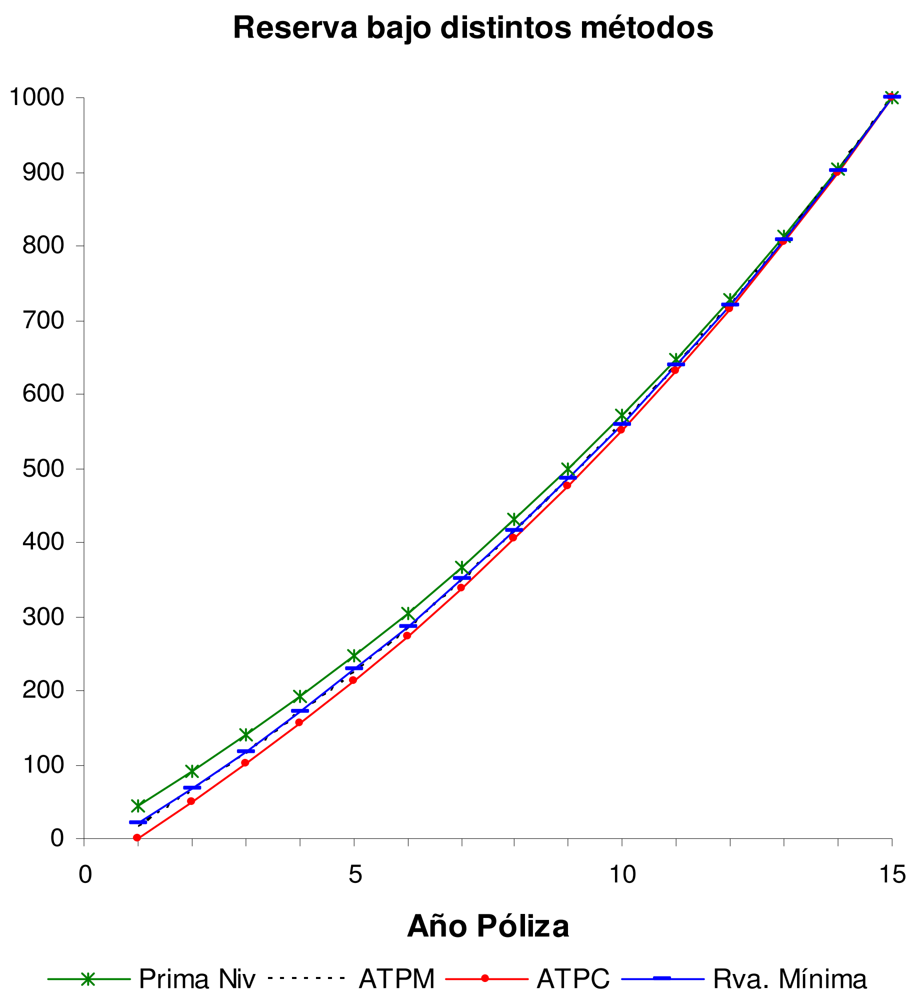
Por lo que también se tienen los siguientes valores:

Prima D-20	29.32
Prima Nivelada	44.03
Prima de ahorro	41.96

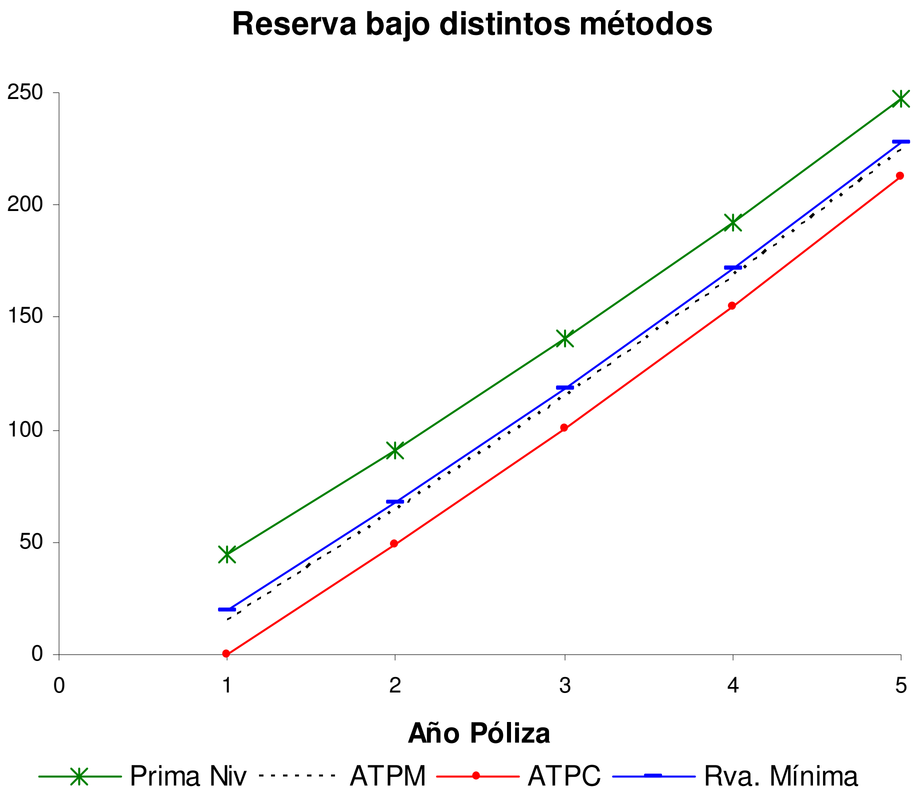
Los montos de la reserva bajo el método de Prima Nivelada, ATPM, ATPC, y el de Reserva Mínima, son:

Año póliza	Prima Niv	ATPM	ATPC	Rva. Mínima
1	44.36	15.56	0.00	19.52
2	91.11	63.72	48.92	67.52
3	140.40	114.49	100.49	118.09
4	192.37	168.02	154.88	171.41
5	247.19	224.49	212.24	227.65
6	305.03	284.08	272.77	286.99
7	366.10	346.99	336.67	349.65
8	430.60	413.43	404.16	415.82
9	498.75	483.64	475.48	485.74
10	570.80	557.87	550.88	559.66
11	647.03	636.39	630.65	637.87
12	727.73	719.52	715.09	720.66
13	813.21	807.58	804.54	808.36
14	903.84	900.94	899.37	901.34
15	1,000.00	1,000.00	1,000.00	1,000.00

Ahora, la gráfica que muestra el comportamiento y la comparación de dichas reservas es:



Gráfica 3.2.3.a Muestra el comportamiento y compara la reserva matemática de un seguro dotal a 15 años, para una persona de 35 años, con suma asegurada de $1,000, calculada bajo distintos métodos, entre ellos el de Reserva Mínima. Tabla de Mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.



Gráfica 3.2.3.b Muestra las mismas reservas de la gráfica anterior, sólo que hasta el año póliza 5, para poder apreciar mejor la diferencia de las reservas.

Como se puede ver, la reserva bajo el método ATPC está muy por debajo de la reserva calculada por el método de reserva mínima, y en comparación con ésta última, para este caso también la reserva del ATPM está un poco abajo. Según la normatividad que se aplica ahora en México, la reserva no puede ser inferior al la reserva que se obtenga bajo el método de reserva mínima, por lo que para este ejemplo, tanto la reserva del método ATPC, como la calculada bajo el método ATPM se quedarían cortas.

CAPÍTULO IV. APLICACIONES GENERALIZADAS

En este capítulo se mostrarán algunas aplicaciones del método de Reserva Mínima, donde se analizarán y desarrollarán a fondo algunos ejemplos de contratos que no son tan comunes pero que servirán para ilustrar la generalidad del método.

4.1 Seguro con Suma Asegurada y Primas Variables.

Los seguros variables son aquéllos en los cuales las aportaciones por parte del asegurado, primas, no son constantes año con año, o bien, cuando el beneficio del seguro es variable, valga la redundancia, conforme el tiempo[1].

4.1.1 Descripción de la cobertura.

Sea un seguro de vida entera para una persona de edad *x*, con una suma asegurada que crece linealmente, es decir, un seguro tal que, si el asegurado fallece durante el primer año, la suma asegurada es SA_1, si fallece durante el segundo año, la suma asegurada es $SA_1 + k$, si fallece durante el tercer año, es de $SA_1 + 2k$, y así sucesivamente. Además las primas de este seguro se pagan durante *m* años, y crecen de la misma manera, con la misma razón que crece la suma asegurada.

4.1.2 Cálculo de las primas netas.

Entonces, si SA_t es la suma asegurada del año póliza *t*, P_t es la prima que paga el asegurado al inicio del año *t*, se tiene que

$$SA_t = SA_1\left[1+\left(t-1\right)h\right] \text{ y } P_t = P_1\left[1+\left(t-1\right)h\right]$$

donde la razón de incremento es $h = \dfrac{k}{SA_1}$

Ahora, por el principio de equivalencia

[1] En el diseño de un plan con estas características deberá ponerse especial cuidado en las tasas de variación de primas y sumas aseguradas que se utilicen pues, aun cuando se trate de seguros crecientes tanto en suma asegurada como en primas, la reserva matemática puede resultar negativa si la tasa de crecimiento de la prima es superior a la de la suma asegurada.

$$\sum_{t=1}^{m} P_t \cdot v^{t-1} {}_{t-1}p_x = \sum_{t=1}^{\infty} SA_t \cdot v^t {}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1}$$

$$\sum_{t=1}^{m} P_1 \left[1+(t-1)h\right] \cdot v^{t-1} {}_{t-1}p_x = \sum_{t=1}^{\infty} SA_1 \left[1+(t-1)h\right] \cdot v^t {}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1}$$

$$P_1 \sum_{t=1}^{m} \left[1+(t-1)h\right] \cdot v^{t-1} {}_{t-1}p_x = SA_1 \sum_{t=1}^{\infty} \left[1+(t-1)h\right] \cdot v^t {}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1}$$

Por lo tanto, la prima neta del primer año es

$$P_1 = \frac{SA_1 \sum_{t=1}^{\infty} \left[1+(t-1)h\right] \cdot v^t {}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1}}{\sum_{t=1}^{m} \left[1+(t-1)h\right] \cdot v^{t-1} {}_{t-1}p_x}$$

de la cual se obtiene el valor de las primas netas restantes.

4.1.3 Calculo de las primas modificadas de primer año y de renovación.

Para encontrar el valor de la prima modificada de primer año, el cálculo es muy sencillo, a la prima neta del primer año se quita la parte del préstamo, es decir, la pérdida amortizable. Sea α, la prima del primer año, entonces

$$\alpha = P_1 - PA_1$$

Ahora, para encontrar el valor de las primas modificadas de renovación, sabemos que la cantidad que se paga anualmente para amortizar el préstamo es

$$R = \frac{(1+i)PA_1}{p_x \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}$$

Si β_t es la prima de renovación del año *t*, para $t = 2,3,\ldots,m$, se tiene

$$\beta_t = P_t + R$$

Entonces, α, β_1, β_2, …, β_m, son la primas modificadas bajo el método de reserva mínima.

A continuación se demostrará la equivalencia entre el valor presente actuarial de las primas modificadas y el valor presente actuarial de las primas netas.

Lo que se quiere demostrar es la siguiente igualdad

$$\alpha+\sum_{t=2}^{m}\beta_t v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x=\sum_{t=1}^{m}P_t\cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x$$

Sustituyendo el valor de las primas modificadas, se tiene

$$\alpha+\sum_{t=2}^{m}\beta_t v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x=P_1-PA_1+\sum_{t=2}^{m}\left(P_t+R\right)v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x$$

$$=P_1-PA_1+\sum_{t=2}^{m}P_t\cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x+\sum_{t=2}^{m}R\cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x$$

Reduciendo términos

$$=\sum_{t=1}^{m}P_t\cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x-PA_1+\sum_{t=2}^{m}R\cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x$$

Sustituyendo el valor de *R*

$$=\sum_{t=1}^{m}P_t\cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x-PA_1+\sum_{t=2}^{m}\frac{(1+i)PA_1}{p_x\cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x$$

$$=\sum_{t=1}^{m}P_t\cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x-PA_1+\frac{PA_1\sum_{t=2}^{m}(1+i)v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x}{p_x\cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}$$

Simplificando, se tiene

$$=\sum_{t=1}^{m}P_t\cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x-PA_1+PA_1\frac{\sum_{t=2}^{m}v^{t-2}\,{}_{t-1}p_x}{p_x\cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}$$

$$=\sum_{t=1}^{m}P_t\cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x-PA_1+PA_1\frac{\sum_{t=1}^{m-1}v^{t-1}\,{}_{t}p_x}{p_x\cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}$$

Desarrollando la anualidad se llaga a

$$=\sum_{t=1}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x - PA_1 + PA_1 \frac{\sum_{t=1}^{m-1} v^{t-1}\,{}_t p_x}{p_x \sum_{t=1}^{m-1} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{x+1}}$$

$$=\sum_{t=1}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x - PA_1 + PA_1 \frac{\sum_{t=1}^{m-1} v^{t-1}\,{}_t p_x}{\sum_{t=1}^{m-1} v^{t-1} p_x \cdot {}_{t-1}p_{x+1}}$$

Se sabe que ${}_{t-1}p_{x+1} = p_{x+1}p_{x+2}...p_{x+t-1}$, y si se multiplica por el término p_x, se tiene

$$p_x \cdot {}_{t-1}p_{x+1} = p_x p_{x+1} p_{x+2}...p_{x+t-1} = {}_t p_x$$

Entonces

$$=\sum_{t=1}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x - PA_1 + PA_1 \frac{\sum_{t=1}^{m-1} v^{t-1}\,{}_t p_x}{\sum_{t=1}^{m-1} v^{t-1}\,{}_t p_x}$$

$$=\sum_{t=1}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x - PA_1 + PA_1$$

$$=\sum_{t=1}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x$$

Por lo tanto

$$\alpha + \sum_{t=2}^{m} \beta_m v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x = \sum_{t=1}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x$$

Que es lo que se quería demostrar.

4.1.4 Cálculo de la pérdida amortizable.

Supóngase que la prima de tarifa del primer año es de \$40 y que el recargo por gastos de adquisición nivelado es de 12% de la prima de tarifa, supóngase también que el gasto real de adquisición del primer año es de \$20. Entonces la pérdida del primer año es

$$PE_1 = 20 - 40(\%12) = 20 - 4.8 = 15.2$$

Ahora, para calcular la prima de ahorro primero se debe calcular la prima natural del primer año, es decir

$$CS_1 = SA_1 \cdot v \cdot q_x$$

Si la edad del asegurado es de 40 años, la suma asegurada del primer año es $SA_1 = \$1,000$, la tasa de interés es del 5.5%, las primas se pagan durante 20 años, y si el incremento *k* de la suma asegurada es de \$50, es decir, la razón *h* es del 5%, se tiene

$$P_1 = \frac{SA_1 \sum_{t=1}^{\infty} \left[1 + (t-1)h\right] \cdot v^t \, {}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1}}{\sum_{t=1}^{m} \left[1 + (t-1)h\right] \cdot v^{t-1} \, {}_{t-1}p_x} = 23.88$$

$$CS_1 = SA_1 \cdot v \cdot q_x = 3$$

Entonces la prima de ahorro es

$$PAH_1 = 23.88 - 3 = 20.88$$

Por lo tanto el valor de la pérdida amortizable es

$$PA_1 = \min\{15.2, 20.88\} = 15.2$$

4.1.5 Cálculo de la anualidad de amortización.

Se sabe que $AM_t = PA_1 \cdot \frac{(1+i)}{p_x} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}$, entonces

t	AM_t
1	16.09
2	15.58
3	15.06
4	14.5
5	13.92
6	13.31
7	12.66
8	11.98
9	11.26
10	10.51

t	AM_t
11	9.71
12	8.87
13	7.97
14	7.03
15	6.03
16	4.97
17	3.84
18	2.64
19	1.37
20	0

4.1.6 Comparación de la reserva no modificada contra la reserva mínima (modificada).

Ahora, veamos cómo se calcula la reserva terminal no modificada para este ejemplo:

$$ {}_tV_x = \sum_{j=1}^{\infty} SA_1\left[1+\left(j+t-1\right)h\right]v^j \; {}_{j-1}p_{x+t}\cdot q_{x+j+t-1} - \sum_{j=1}^{m-t} P_1\left[1+\left(j+t-1\right)h\right]v^{j-1} \; {}_{j-1}p_{x+t} $$

o bien,

$$ {}_tV_x = \sum_{j=1}^{\infty} SA_{t+j}v^j \; {}_{j-1}p_{x+t}\cdot q_{x+j+t-1} - \sum_{j=1}^{m-t} P_{t+j}v^{j-1} \; {}_{j-1}p_{x+t} \text{ cuando } t < m $$

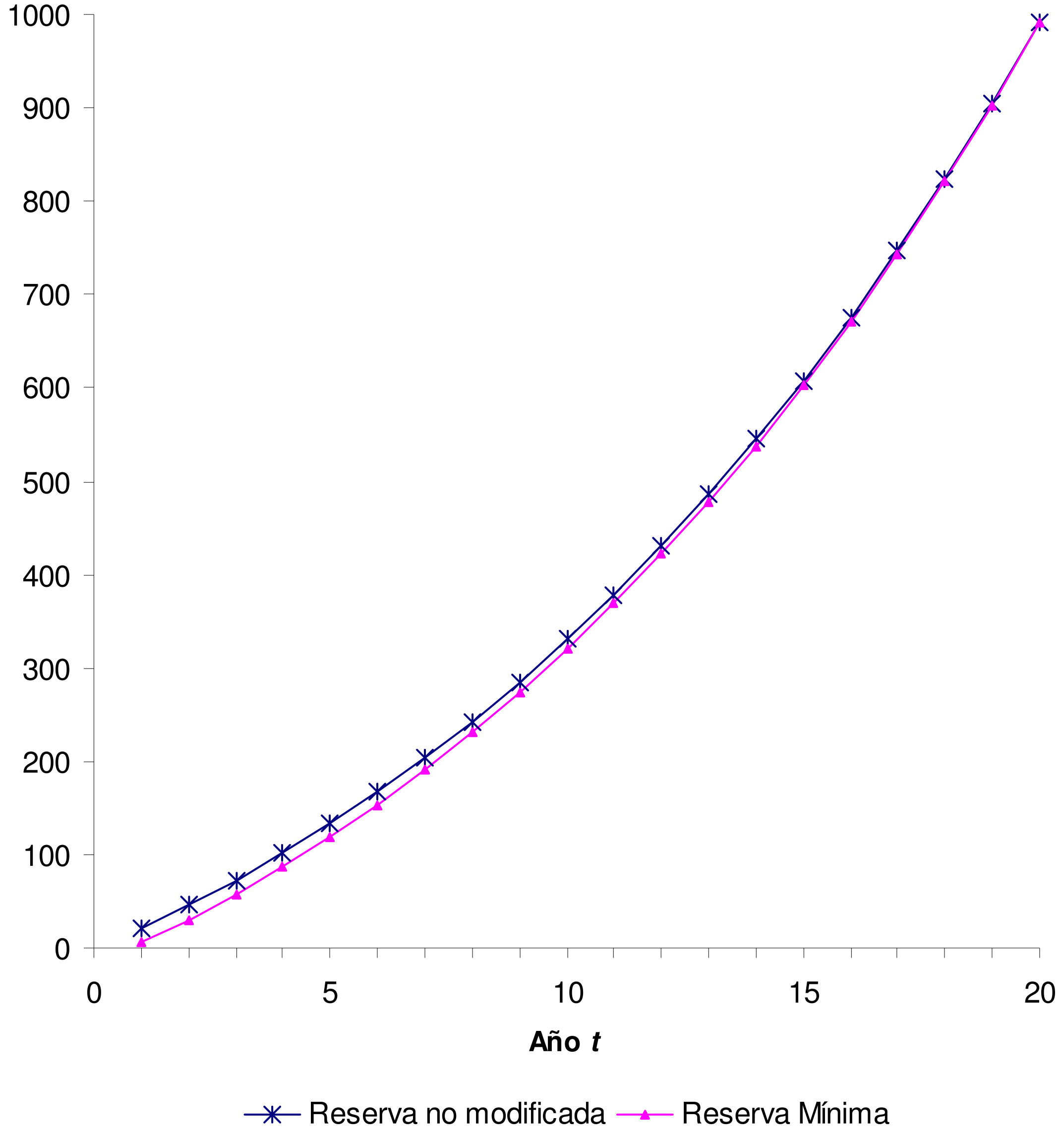
Y cuando $t \geq m$, la reserva terminal no modificada es:

$$ {}_tV_x = \sum_{j=1}^{\infty} SA_{t+j}v^j \; {}_{j-1}p_{x+t}\cdot q_{x+j+t-1} $$

Además, como ya se vio, la reserva mínima terminal es

$$ {}_tV_x^{min} = {}_tV_x - AM_t $$

La siguiente gráfica muestra la comparación de la reserva terminal no modificada y la reserva mínima terminal para este seguro, donde se puede ver que efectivamente la reserva mínima está por debajo de la otra.



Gráfica 4.1.6.1 Comparación de las reservas no modificada y modificada (mínima), para un seguro con suma asegurada y primas crecientes linealmente. Se graficaron sólo los primeros años para notar mejor la diferencia. Tabla de mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

4.1.7 Cálculo de la reserva exacta a una fecha de valuación dada.

Supóngase que la póliza de este seguro se emitió el 25 de mayo de 2004 y la fecha de valuación de la reserva es el 31 de diciembre de 2007. Entonces para este caso, t = 4 y como m = 20, por lo tanto $t \leq m$. Así que la fórmula a utilizar para el cálculo de la reserva exacta es la siguiente

$$_{t-1+\frac{k}{365}}V_x^e = \frac{k}{365}\,{}_tV_x^{\min} + \left(1-\frac{k}{365}\right)\left({}_{t-1}V_x^{\min} + \beta_t\right)$$

O bien,

$$ {}_{t-1+\frac{k}{365}}V_x^e = \frac{k}{365}\,{}_tV_x^{\min} + \left(1-\frac{k}{365}\right)\left({}_{t-1}V_x^{\min} + P_t + \frac{PA_1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}\frac{(1+i)}{p_x}\right) $$

donde $k = 220$, ya que del 25 de mayo de 2007 al 31 de diciembre de 2007 transcurren 220 días, entonces

$$ {}_{3+\frac{220}{365}}V_x^e = \frac{220}{365}\,{}_4V_x^{\min} + \left(1-\frac{220}{365}\right)\left({}_3V_x^{\min} + P_4 + R\right) $$

$$ {}_{3+\frac{220}{365}}V_x^e = 0.60(87.18) + (0.40)(57.79 + 27.47 + 1.37) $$

Por lo tanto la reserva exacta al 31 de diciembre de 2007 es:

$$ {}_{3+\frac{220}{365}}V_x^e = 86.95 $$

4.1.8 Amortización con aportaciones variables.

¿Qué pasa cuando las aportaciones para amortizar el préstamo no son constantes? Si la compañía define las aportaciones, de tal manera que crecen linealmente con la misma razón *h*, es decir, $R_t = R_1\left[1+(t-1)h\right]$ donde el valor de R_1 se determina por el principio de equivalencia

$$ PA_1 = v \cdot p_x \sum_{t=1}^{m-1} R_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{x+1} $$

de donde

$$ \frac{PA_1}{v \cdot p_x} = R_1 \sum_{t=1}^{m-1}\left[1+(t-1)h\right] \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{x+1} $$

$$ R_1 = \frac{PA_1}{v \cdot p_x \sum_{t=1}^{m-1}\left[1+(t-1)h\right] \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{x+1}} $$

$$ \therefore \qquad R_1 = \frac{PA_1}{\sum_{t=1}^{m-1}\left[1+(t-1)h\right] \cdot v^{t}\,{}_{t}p_{x}} $$

Entonces la prima modificada del primer año sería nuevamente $\alpha = P_1 - PA_1$, y las primas de renovación modificadas serían $\beta_t = P_t + R_{t-1}$ para t = 2,3,…,m.

Para demostrar que es correcto, se debe verificar que el valor presente actuarial de las primas no modificadas es igual al valor presente actuarial de las primas modificadas, es decir

$$\sum_{t=1}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x = \alpha + \sum_{t=2}^{m} \beta_t v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x$$

Desarrollando el miembro derecho de la ecuación, se tiene

$$\alpha + \sum_{t=2}^{m} \beta_t v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x = P_1 - PA_1 + \sum_{t=2}^{m} \left(P_t + R_{t-1}\right) \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x$$

$$= P_1 - PA_1 + \sum_{t=2}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x + \sum_{t=1}^{m-1} R_t \cdot v^t\,{}_t p_x$$

$$= P_1 - PA_1 + \sum_{t=2}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x + R_1 \sum_{t=1}^{m-1} \left[1 + (t-1)h\right] \cdot v^t\,{}_t p_x$$

$$= \sum_{t=1}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x + \frac{PA_1 \sum_{t=1}^{m-1} \left[1 + (t-1)h\right] \cdot v^t\,{}_t p_x}{\sum_{t=1}^{m-1} \left[1 + (t-1)h\right] \cdot v^t\,{}_t p_x} - PA_1$$

$$= \sum_{t=1}^{m} P_t \cdot v^{t-1}\,{}_{t-1}p_x$$

Por lo tanto se cumple el principio de equivalencia. Entonces con los datos anteriores se tiene:

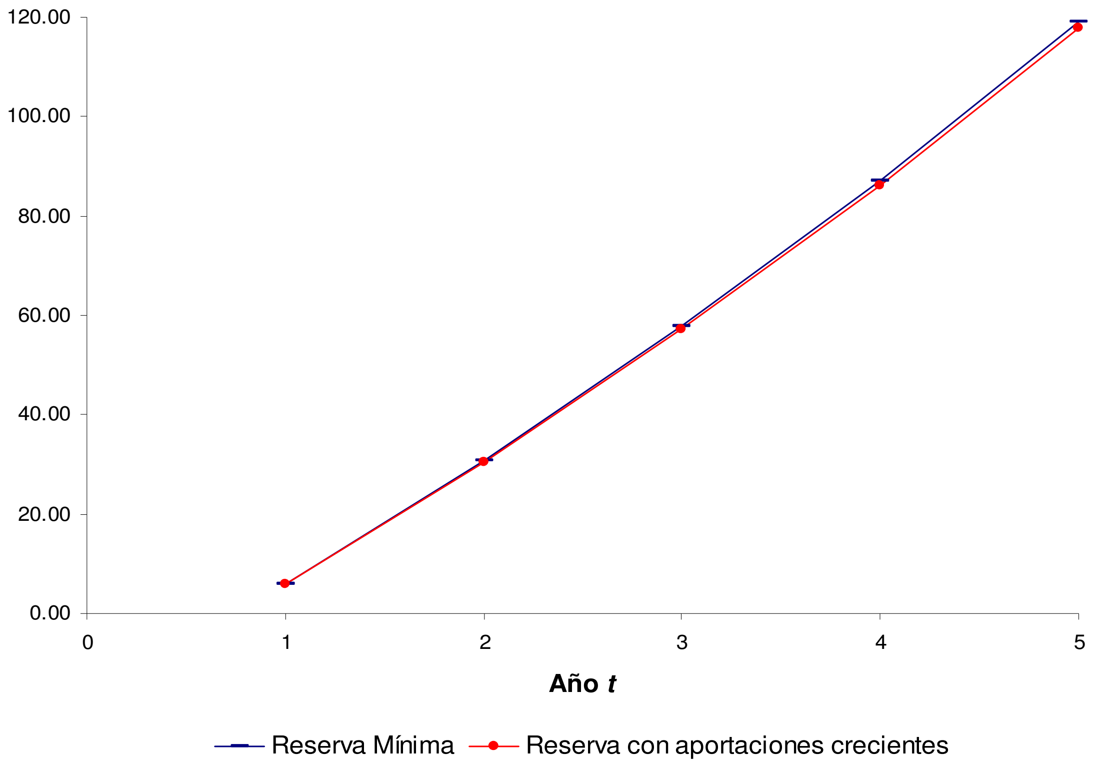
$$R_1 = \frac{15.2}{\sum_{t=1}^{19} \left[1 + (t-1)0.05\right] \cdot v^t\,{}_t p_x}$$

$$R_1 = 1.00229015$$

Por lo que las primas modificadas bajo este esquema son

t	Primas modificadas
1	8.68
2	26.08
3	27.32
4	28.57
5	29.81
6	31.06
7	32.30
8	33.54
9	34.79
10	36.03
11	37.28
12	38.52
13	39.77
14	41.01
15	42.25
16	43.50
17	44.74
18	45.99
19	47.23
20	48.48

Entonces la comparación de la reserva modificada con aportaciones crecientes y la reserva mínima, sería así:



Gráfica 4.1.8.1 Compara la reserva mínima y la reserva modificada con aportaciones crecientes para un seguro con suma asegurada y primas que crecen linealmente. Sólo se graficó la primera parte para apreciar mejor la diferencia. Tabla de mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

Se puede ver que la reserva modificada con aportaciones crecientes es inferior a la que resulta del método de reserva mínima, por lo tanto el amortizar de esta forma contravendría la circular[2], aunque dicha amortización sea técnicamente correcta.

4.2 Seguros de Vidas Múltiples.

4.2.1 Seguro por muerte sobre varias vidas.

Veamos un ejemplo de un seguro de vidas múltiples:

4.2.1.1 Descripción de la cobertura.

Una pareja *(x, y)* contrata un seguro que consiste en que, en caso de que *(x)* fallezca, *(y)* queda asegurado de por vida por una suma asegurada igual a $1,000,000. Si *(y)* fallece antes que *(x)*, el contrato termina sin obligación para la compañía. La prima se paga siempre y cuando esté con vida *(x)*.

4.2.1.2 Cálculo de la prima nivelada.

El valor presente actuarial de este seguro es

$$SA\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\cdot\mu_{x+t}\cdot A_{y+t}dt$$

donde SA = $1,000,000.

La expresión anterior se puede aproximar por medio de sumas, de la siguiente manera:

$$SA\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\cdot\mu_{x+t}\cdot A_{y+t}dt \approx SA\left[vq_{\overset{1}{x}\,y}A_y + v^2p_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+1}:y+1}A_{y+1} + v^3\,{}_2p_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+2}:y+2}A_{y+2}+\ldots\right]$$

$$= SA\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_tp_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+t}:y+t}A_{y+t}$$

donde $q_{\overset{1}{x+t}:y+t}$ se puede aproximar así:

---

2 CNSF (4).

$$q_{\underset{x+t:y+t}{1}} \approx q_{x+t}\left(1-\frac{1}{2}q_{y+t}\right)$$

Entonces por el principio de equivalencia se tiene que

$$SA\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_{t}p_{xy}\cdot q_{\underset{x+t:y+t}{1}}\,A_{y+t} = P\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\cdot{}_{t-1}p_{xy}$$

o bien,

$$SA\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_{t}p_{xy}\cdot q_{\underset{x+t:y+t}{1}}\,A_{y+t} = P\ddot{a}_{xy}$$

Por lo tanto la prima neta nivelada es

$$P = \frac{SA\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_{t}p_{xy}\cdot q_{\underset{x+t:y+t}{1}}\,A_{y+t}}{\ddot{a}_{xy}}$$

4.2.1.3 Primas modificadas de primer año y de renovación.

La prima modificada del primer año es

$$\alpha = P - PA_1$$

Y la prima de renovación del año *t*, para $t = 2,3,\ldots$ es

$$\beta = P + R$$

Donde *R* es la porción que se amortiza anualmente.

Se sabe que el valor presente actuarial de obligaciones futuras por concepto de las aportaciones anuales que debe hacer la compañía para amortizar el préstamo es equivalente a la pérdida amortizable, entonces para este caso se tiene

$$R\cdot v\cdot p_{xy}\cdot\ddot{a}_{x+1:y+1} = PA_1$$

de donde

$$R = \frac{(1+i)PA_1}{p_{xy}\cdot\ddot{a}_{x+1:y+1}}$$

Ahora se debe verificar que el valor presente actuarial de las primas no modificadas es igual al valor presente actuarial de las primas modificadas, es decir

$$P\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy} = \alpha + \beta \sum_{t=2}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy}$$

Desarrollando el lado derecho de la igualdad se tiene

$$\alpha + \beta \sum_{t=2}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy} = P - PA_1 + \left(P+R\right)\sum_{t=2}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy}$$

$$= P - PA_1 + P\sum_{t=2}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy} + R\sum_{t=2}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy}$$

$$= P\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy} - PA_1 + \frac{\left(1+i\right)PA_1}{p_{xy}\cdot \ddot{a}_{x+1:y+1}}\sum_{t=2}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy}$$

$$= P\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy} - PA_1 + PA_1\frac{\sum_{t=2}^{\infty} v^{t-2}\,{}_{t-1}p_{xy}}{p_{xy}\cdot \ddot{a}_{x+1:y+1}}$$

$$= P\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy} - PA_1 + PA_1\frac{\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t}p_{xy}}{p_{xy}\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{x+1:y+1}}$$

$$= P\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy} - PA_1 + PA_1\frac{\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t}p_{xy}}{\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t}p_{xy}}$$

$$= P\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy} - PA_1 + PA_1$$

$$= P\sum_{t=1}^{\infty} v^{t-1}\,{}_{t-1}p_{xy}$$

Por lo tanto el valor presente actuarial de las primas no modificadas sí es igual al valor presente actuarial de las primas modificadas.

4.2.1.4 Cálculo de la anualidad de amortización.

Si la prima de tarifa del primer año es de $10,000 y el recargo por gastos de adquisición nivelado es de 15% de la prima de tarifa, y además se supone que el gasto real de adquisición del primer año es de $4,000, entonces la pérdida del primer año es

$$PE_1 = 4{,}000 - 10{,}000(\%15) = 4{,}000 - 1{,}500 = 2{,}500$$

La prima natural del primer año, es decir, el costo de siniestralidad del primer año es

$$CS_1 = SA \cdot v \cdot q_{\overset{1}{x}\,y} A_y$$

Ahora, si la edad de *(x)* es de 50 años, la de *(y)* es de 45 años, y si la tasa de interés es del 5.5%, tenemos:

$$CS_1 = 1{,}369.19$$

$$P = \frac{SA\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_t p_{xy} \cdot q_{\underset{x+t:y+t}{\underline{1}}} A_{y+t}}{\ddot{a}_{xy}} = 6{,}062.64$$

Por lo que la prima de ahorro es

$$PAH_1 = 6{,}077.18 - 1{,}369.19 = 4{,}693.45$$

Entonces la pérdida amortizable es

$$PA_1 = \min\{2{,}500; 4{,}693.45\} = 2{,}500$$

La parte de la pérdida amortizable que está pendiente al final del año *t*, es decir, la anualidad de amortización, es

$$AM_t = PA_1 \frac{(1+i)}{p_{xy}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:y+t}}{\ddot{a}_{x+1:y+1}}$$

t	AM_t
1	2,667.35
2	2,620.83
3	2,573.55
4	2,525.55
5	2,476.86
6	2,427.54
7	2,377.63
8	2,327.18
9	2,276.23
10	2,224.86
11	2,173.11
12	2,121.04
13	2,068.73
14	2,016.23
15	1,963.61
16	1,910.95
17	1,858.30
18	1,805.75
19	1,753.35
20	1,701.19
21	1,649.34
22	1,597.86
23	1,546.83
24	1,496.31
25	1,446.36

t	AM_t
26	1,397.06
27	1,348.45
28	1,300.60
29	1,253.56
30	1,207.36
31	1,162.06
32	1,117.66
33	1,074.20
34	1,031.68
35	990.09
36	949.39
37	909.51
38	870.36
39	831.74
40	793.42
41	754.99
42	715.86
43	675.12
44	631.32
45	582.22
46	524.19
47	451.24
48	353.31
49	213.08
50	0.00

4.2.1.5 Comparación de la reserva no modificada contra la reserva mínima.

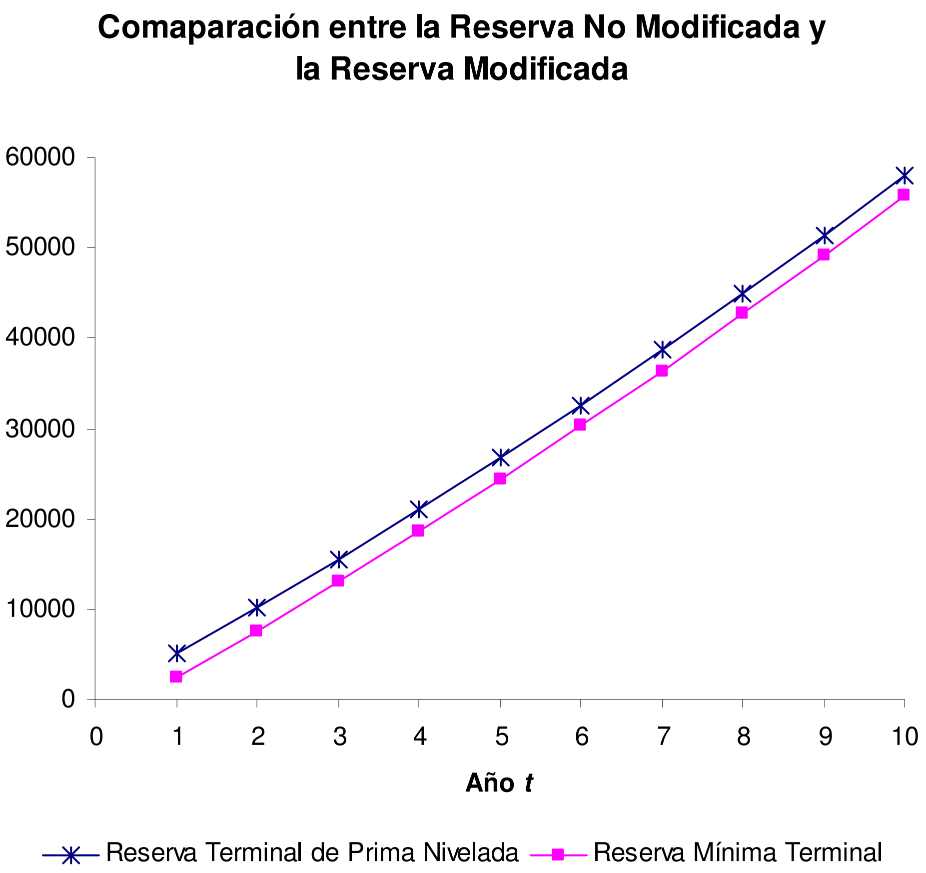
La reserva terminal de prima neta nivelada (no modificada) del año t, se calcula de la siguiente manera:

$$_{t}V = SA\sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1}\ _{j}p_{x+t:y+t} \cdot q_{\overset{1}{\overline{x+t+j:y+t+j}}} A_{y+t+j} - P\ddot{a}_{x+t:y+t}$$

Y como la reserva mínima (modificada) es:

$$_{t}V^{\min} = {}_{t}V - AM_{t}$$

Entonces la gráfica que compara a estas reservas es



Gráfica 4.2.1.5.1 Muestra la comparación de la reserva no modificada y la reserva modificada para los primeros 10 años. Tabla de mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

4.2.1.6 Cálculo de la reserva exacta a una fecha de valuación dada.

Si se supone que la póliza de este seguro se emitió el 2 de diciembre de 2005, y se desea calcular la reserva mínima exacta al 31 de marzo de 2007, entonces la fórmula que se debe aplicar para dicho cálculo es

$$_{t-1+\frac{k}{365}}V_x^e = \frac{k}{365}\,{}_tV_x^{\min} + \left(1-\frac{k}{365}\right)\left({}_{t-1}V_x^{\min} + P + \frac{(1+i)\,PA_1}{p_{xy}\cdot \ddot{a}_{x+1:y+1}}\right)$$

donde t = 2 y k = 119

Por lo tanto

$$_{1+\frac{119}{365}}V_x^e = \frac{119}{365}\,{}_2V_x^{\min} + \left(1-\frac{119}{365}\right)\left({}_1V_x^{\min} + \beta\right)$$

$$= 8{,}273.69$$

4.2.2 Renta de supervivencia sobre varias vidas.

Ahora se analizará un ejemplo de un seguro de rentas sobre varias vidas:

4.2.2.1 Descripción de la cobertura.

Sea un seguro de rentas sobre tres vidas, *(x, y, z)* con las siguientes características:

Durante el período de constitución (10 años), la prima a pagar es *kP*, donde *k* es el número de personas del grupo que están con vida. La renta a pagar (vencida temporal a 30 años) es *jS* donde *j* es el número de asegurados con vida.

4.2.2.2 Cálculo de las primas netas.

El valor presente actuarial de las obligaciones por parte de los asegurados es:

$$P\sum_{t=0}^{9} v^t \left[3 \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{\underline{[3]}}} + 2 \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{\underline{[2]}}} + {}_t p_{\underset{xyz}{\underline{[1]}}} \right]$$

donde

$${}_t p_{\underset{xyz}{\underline{[3]}}} = {}_t p_{xyz}$$

$${}_t p_{\underset{xyz}{\underline{[2]}}} = {}_t p_{xy} \cdot {}_t q_z + {}_t p_{xz} \cdot {}_t q_y + {}_t p_{yz} \cdot {}_t q_x$$

$$= {}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz} - 3\,{}_t p_{xyz}$$

$${}_t p_{\underset{xyz}{\underline{[1]}}} = {}_t p_x \cdot {}_t q_y \cdot {}_t q_z + {}_t p_y \cdot {}_t q_x \cdot {}_t q_z + {}_t p_z \cdot {}_t q_x \cdot {}_t q_y$$

$$= {}_t p_x + {}_t p_y + {}_t p_z - 2\left({}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz}\right) + 3\,{}_t p_{xyz}$$

Y el valor presente actuarial de las obligaciones por parte de la compañía es:

$$S\sum_{t=11}^{40} v^t \left[3 \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{\underline{[3]}}} + 2 \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{\underline{[2]}}} + {}_t p_{\underset{xyz}{\underline{[1]}}} \right]$$

Entonces por el principio de equivalencia se tiene

$$P=\frac{S\sum_{t=11}^{40}v^t\left[3\cdot{}_tp_{\overline{\underset{xyz}{[3]}}}+2\cdot{}_tp_{\overline{\underset{xyz}{[2]}}}+{}_tp_{\overline{\underset{xyz}{[1]}}}\right]}{\sum_{t=0}^{9}v^t\left[3\cdot{}_tp_{\overline{\underset{xyz}{[3]}}}+2\cdot{}_tp_{\overline{\underset{xyz}{[2]}}}+{}_tp_{\overline{\underset{xyz}{[1]}}}\right]}$$

Una vez calculado el valor de P, se encuentra fácilmente el valor de las primas, $2P$ y $3P$.

4.2.2.3 Primas modificadas de primer año y de renovación.

Para este caso el valor presente actuarial de obligaciones futuras por concepto de las aportaciones anuales que debe hacer la compañía para amortizar el préstamo, es

$$\begin{aligned}Rv\Big[&p_{xyz}\ddot{a}_{\overline{x+1:y+1:z+1}:\overline{9}|}+p_{xy}\left(1-p_z\right)\ddot{a}_{\overline{x+1:y+1}:\overline{9}|}+p_{xz}\left(1-p_y\right)\ddot{a}_{\overline{x+1:z+1}:\overline{9}|}\\&+p_{yz}\left(1-p_x\right)\ddot{a}_{\overline{y+1:z+1}:\overline{9}|}+p_x\left(1-p_y\right)\left(1-p_z\right)\ddot{a}_{x+1:\overline{9}|}\\&+p_y\left(1-p_x\right)\left(1-p_z\right)\ddot{a}_{y+1:\overline{9}|}+p_z\left(1-p_x\right)\left(1-p_y\right)\ddot{a}_{z+1:\overline{9}|}\Big]\end{aligned}\qquad(4.2.2.3.1)$$

Donde R es el término de amortización. Aquí se considera que después de un año, pueden seguir con vida los tres asegurados, o bien, pueden fallecer uno o dos asegurados y aún así el status sigue vigente.

Para tratar de simplificar la expresión anterior, se desarrollará primero, lo que está dentro de los corchetes:

$$\begin{aligned}&p_{xyz}\ddot{a}_{\overline{x+1:y+1:z+1}:\overline{9}|}+p_{xy}\left(1-p_z\right)\ddot{a}_{\overline{x+1:y+1}:\overline{9}|}+p_{xz}\left(1-p_y\right)\ddot{a}_{\overline{x+1:z+1}:\overline{9}|}+p_{yz}\left(1-p_x\right)\ddot{a}_{\overline{y+1:z+1}:\overline{9}|}\\&+p_x\left(1-p_y\right)\left(1-p_z\right)\ddot{a}_{x+1:\overline{9}|}+p_y\left(1-p_x\right)\left(1-p_z\right)\ddot{a}_{y+1:\overline{9}|}+p_z\left(1-p_x\right)\left(1-p_y\right)\ddot{a}_{z+1:\overline{9}|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=p_{xyz}\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}{}_{t-1}p_{\overline{x+1:y+1:z+1}}+p_{xy}\left(1-p_z\right)\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}{}_{t-1}p_{\overline{x+1:y+1}}\\&\qquad+p_{xz}\left(1-p_y\right)\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}{}_{t-1}p_{\overline{x+1:z+1}}+p_{yz}\left(1-p_x\right)\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}{}_{t-1}p_{\overline{y+1:z+1}}\\&\qquad+p_x\left(1-p_y\right)\left(1-p_z\right)\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}{}_{t-1}p_{x+1}+p_y\left(1-p_x\right)\left(1-p_z\right)\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}{}_{t-1}p_{y+1}\\&\qquad+p_z\left(1-p_x\right)\left(1-p_y\right)\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}{}_{t-1}p_{z+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t=1}^{9} v^{t-1} \Big[p_{xyz} \big({}_{t-1}p_{x+1} + {}_{t-1}p_{y+1} + {}_{t-1}p_{z+1} - {}_{t-1}p_{x+1:y+1} - {}_{t-1}p_{x+1:z+1} \\
&\quad - {}_{t-1}p_{y+1:z+1} + {}_{t-1}p_{x+1:y+1:z+1} \big) \\
&\quad + p_{xy}(1-p_z)\big({}_{t-1}p_{x+1} + {}_{t-1}p_{y+1} - {}_{t-1}p_{x+1:y+1} \big) \\
&\quad + p_{xz}(1-p_y)\big({}_{t-1}p_{x+1} + {}_{t-1}p_{z+1} - {}_{t-1}p_{x+1:z+1} \big) \\
&\quad + p_{yz}(1-p_x)\big({}_{t-1}p_{y+1} + {}_{t-1}p_{z+1} - {}_{t-1}p_{y+1:z+1} \big) \\
&\quad + p_x(1-p_y)(1-p_z)\,{}_{t-1}p_{x+1} + p_y(1-p_x)(1-p_z)\,{}_{t-1}p_{y+1} \\
&\quad + p_z(1-p_x)(1-p_y)\,{}_{t-1}p_{z+1} \Big] \\
&= \sum_{t=1}^{9} v^{t-1} \Big[p_{yz}\,{}_tp_x + p_{xz}\,{}_tp_y + p_{xy}\,{}_tp_z - p_z\,{}_tp_{xy} - p_y\,{}_tp_{xz} - p_x\,{}_tp_{yz} + {}_tp_{xyz} \\
&\quad + p_y(1-p_z)\,{}_tp_x + p_x(1-p_z)\,{}_tp_y - (1-p_z)\,{}_tp_{xy} + p_z(1-p_y)\,{}_tp_x \\
&\quad + p_x(1-p_y)\,{}_tp_z - (1-p_y)\,{}_tp_{xz} + p_z(1-p_x)\,{}_tp_y + p_y(1-p_x)\,{}_tp_z \\
&\quad - (1-p_x)\,{}_tp_{yz} + (1-p_y)(1-p_z)\,{}_tp_x + (1-p_x)(1-p_z)\,{}_tp_y \\
&\quad + (1-p_x)(1-p_y)\,{}_tp_z \Big] \\
&= \sum_{t=1}^{9} v^{t-1} \Big\{ {}_tp_x \big[p_{yz} + p_y(1-p_z) + p_z(1-p_y) + (1-p_y)(1-p_z) \big] \\
&\quad + {}_tp_y \big[p_{xz} + p_x(1-p_z) + p_z(1-p_x) + (1-p_x)(1-p_z) \big] \\
&\quad + {}_tp_z \big[p_{xy} + p_x(1-p_y) + p_y(1-p_x) + (1-p_x)(1-p_y) \big] \\
&\quad - {}_tp_{xy} \big[p_z + (1-p_z) \big] - {}_tp_{xz} \big[p_y + (1-p_y) \big]
\end{aligned}
$$

$$-{}_t p_{yz}\left[p_x+\left(1-p_x\right)\right]+{}_t p_{xyz}\Big\}$$

$$=\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}\Big\{{}_t p_x\left[p_y\left(p_z+1-p_z\right)+\left(1-p_y\right)\left(p_z+1-p_z\right)\right]$$

$$+{}_t p_y\left[p_x\left(p_z+1-p_z\right)+\left(1-p_x\right)\left(p_z+1-p_z\right)\right]$$

$$+{}_t p_z\left[p_x\left(p_y+1-p_y\right)+\left(1-p_x\right)\left(p_y+1-p_y\right)\right]$$

$$-{}_t p_{xy}\left[p_z+1-p_z\right]-{}_t p_{xz}\left[p_y+1-p_y\right]-{}_t p_{yz}\left[p_x+1-p_x\right]+{}_t p_{xyz}\Big\}$$

$$=\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}\Big\{{}_t p_x\left[p_y+\left(1-p_y\right)\right]+{}_t p_y\left[p_x+\left(1-p_x\right)\right]+{}_t p_z\left[p_x+\left(1-p_x\right)\right]$$

$$-{}_t p_{xy}-{}_t p_{xz}-{}_t p_{yz}+{}_t p_{xyz}\Big\}$$

$$=\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}\left[{}_t p_x+{}_t p_y+{}_t p_z-{}_t p_{xy}-{}_t p_{xz}-{}_t p_{yz}+{}_t p_{xyz}\right]$$

$$=\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}\,{}_t p_{\overline{xyz}}$$

Entonces, si se regresamos a la fórmula (4.2.2.3.1), el valor presente actuarial de las aportaciones anuales futuras, que debe hacer la compañía para amortizar el préstamo, queda expresado de la siguiente manera:

$$R\cdot v\sum_{t=1}^{9}v^{t-1}\,{}_t p_{\overline{xyz}}$$

$$=R\sum_{t=1}^{9}v^{t}\,{}_t p_{\overline{xyz}}$$

$$=Ra_{\overline{xyz}:\overline{9|}}$$

Por lo tanto

$$R\cdot a_{\overline{xyz}:\overline{9|}}=PA_1$$

de donde

$$R = \frac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}}$$

Sea α la prima modificada de primer año, y β_t la prima modificada de renovación, por lo que

$$\alpha = 3P - PA_1$$

$$\beta_t = kP + R$$

donde k es el número de asegurados que se encuentran con vida después de t años. Entonces otra forma de expresar la prima modificada de renovación es

$$\beta_t = \begin{cases} 3P + R & \text{con probabilidad } {}_t p_{\underset{xyz}{[3]}} \\ 2P + R & \text{con probabilidad } {}_t p_{\underset{xyz}{[2]}} \\ P + R & \text{con probabilidad } {}_t p_{\underset{xyz}{[1]}} \end{cases}$$

Como se ha hecho anteriormente, ahora se verificará la equivalencia entre el valor presente actuarial de las primas no modificadas y el de las primas modificadas. Es decir

$$P\sum_{t=0}^{9} v^t \left[3 \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[3]}} + 2 \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[2]}} + {}_t p_{\underset{xyz}{[1]}} \right] =$$

$$\alpha + \sum_{t=1}^{9} v^t \left[(3P + R) \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[3]}} + (2P + R) \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[2]}} + (P + R)\, {}_t p_{\underset{xyz}{[1]}} \right]$$

Desarrollando el miembro derecho de la igualdad se tiene

$$\alpha + \sum_{t=1}^{9} v^t \left[(3P + R) \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[3]}} + (2P + R) \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[2]}} + (P + R)\, {}_t p_{\underset{xyz}{[1]}} \right]$$

$$= 3P - PA_1 + \sum_{t=1}^{9} v^t \left[(3P + R) \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[3]}} + (2P + R) \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[2]}} + (P + R)\, {}_t p_{\underset{xyz}{[1]}} \right]$$

$$= 3P - PA_1 + \sum_{t=1}^{9} v^t \left[\left(3P \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[3]}} + 2P \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[2]}} + P \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[1]}} \right) + \left(R \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[3]}} + R \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[2]}} + R \cdot {}_t p_{\underset{xyz}{[1]}} \right) \right]$$

$$=3P-PA_1+\sum_{t=1}^{9}v^t\left[P\left(3\cdot{}_tp_{\frac{[3]}{xyz}}+2\cdot{}_tp_{\frac{[2]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[1]}{xyz}}\right)+R\left({}_tp_{\frac{[3]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[2]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[1]}{xyz}}\right)\right]$$

$$=3P-PA_1+\sum_{t=1}^{9}v^t\left[P\left(3\cdot{}_tp_{\frac{[3]}{xyz}}+2\cdot{}_tp_{\frac{[2]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[1]}{xyz}}\right)+R\left({}_tp_{\overline{xyz}}\right)\right]$$

$$=3P-PA_1+\sum_{t=1}^{9}v^tP\left(3\cdot{}_tp_{\frac{[3]}{xyz}}+2\cdot{}_tp_{\frac{[2]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[1]}{xyz}}\right)+\sum_{t=1}^{9}v^tR\cdot{}_tp_{\overline{xyz}}$$

$$=P\sum_{t=0}^{9}v^t\left(3\cdot{}_tp_{\frac{[3]}{xyz}}+2\cdot{}_tp_{\frac{[2]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[1]}{xyz}}\right)-PA_1+\sum_{t=1}^{9}v^tR\cdot{}_tp_{\overline{xyz}}$$

$$=P\sum_{t=0}^{9}v^t\left(3\cdot{}_tp_{\frac{[3]}{xyz}}+2\cdot{}_tp_{\frac{[2]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[1]}{xyz}}\right)-PA_1+R\sum_{t=1}^{9}v^t\cdot{}_tp_{\overline{xyz}}$$

$$=P\sum_{t=0}^{9}v^t\left(3\cdot{}_tp_{\frac{[3]}{xyz}}+2\cdot{}_tp_{\frac{[2]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[1]}{xyz}}\right)-PA_1+R\cdot a_{\overline{xyz}:\overline{9|}}$$

$$=P\sum_{t=0}^{9}v^t\left(3\cdot{}_tp_{\frac{[3]}{xyz}}+2\cdot{}_tp_{\frac{[2]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[1]}{xyz}}\right)-PA_1+\frac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9|}}}\cdot a_{\overline{xyz}:\overline{9|}}$$

$$=P\sum_{t=0}^{9}v^t\left(3\cdot{}_tp_{\frac{[3]}{xyz}}+2\cdot{}_tp_{\frac{[2]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[1]}{xyz}}\right)-PA_1+PA_1$$

$$=P\sum_{t=0}^{9}v^t\left(3\cdot{}_tp_{\frac{[3]}{xyz}}+2\cdot{}_tp_{\frac{[2]}{xyz}}+{}_tp_{\frac{[1]}{xyz}}\right)$$

Por lo tanto el valor presente actuarial de las primas modificadas es igual al valor presente actuarial de las primas no modificadas.

4.2.2.4 Cálculo de la anualidad de amortización.

Supóngase que el recargo por gastos de adquisición nivelado es de 10% de la prima de tarifa, y que el gasto real de adquisición del primer año es de \$8,000, si la prima de tarifa del primer año es de \$23,000, entonces la pérdida del primer año es

$$PE_1=8{,}000-23{,}000(\%10)=8{,}000-2{,}300=5{,}700$$

Ahora, los datos de este seguro son: *(x)* tiene 25 años de edad, *(y)* tiene 30 años de edad y *(z)* tiene 35 años de edad, la tasa de interés es del 5.5%, y el valor de la renta S es de \$5,000.

Entonces, el valor de P es

$$P = \frac{S\sum_{t=11}^{40} v^t \left[3 \cdot {}_t p_{\underline{xyz}}^{[3]} + 2 \cdot {}_t p_{\underline{xyz}}^{[2]} + {}_t p_{\underline{xyz}}^{[1]} \right]}{\sum_{t=0}^{9} v^t \left[3 \cdot {}_t p_{\underline{xyz}}^{[3]} + 2 \cdot {}_t p_{\underline{xyz}}^{[2]} + {}_t p_{\underline{xyz}}^{[1]} \right]} = 4{,}880.62$$

La prima natural del primer año es

$$CS_1 = 0$$

Ya que los beneficios de este seguro se empiezan a pagar después de los 10 años de constitución, entonces en el primer año, el beneficio es cero.

Por lo que la prima de ahorro de primer año es

$$PAH_1 = 4{,}880.62 - 0 = 4{,}880.62$$

Por lo tanto

$$PA_1 = \min\{5{,}700; 4{,}880.62\} = 4{,}880.62$$

Ahora, la anualidad de amortización es:

a) $AM_t = \dfrac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:y+t:z+t}:\overline{10-t}|}$, si después de t años los tres asegurados sobreviven.

b) $AM_t = \dfrac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:y+t}:\overline{10-t}|}$, si después de t años, sólo sobreviven *(x)*, y *(y)*.

c) $AM_t = \dfrac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:z+t}:\overline{10-t}|}$, si después de t años, sólo sobreviven *(x)*, y *(z)*.

d) $AM_t = \dfrac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{y+t:z+t}:\overline{10-t}|}$, si después de t años, sólo sobreviven *(y)*, y *(z)*.

e) $AM_t = \dfrac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{10-t}|}$, si sólo sobrevive *(x)*, después de *t* años.

f) $AM_t = \dfrac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{y+t:\overline{10-t}|}$, si sólo sobrevive *(y)*, después de *t* años.

g) $AM_t = \dfrac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{z+t:\overline{10-t}|}$, si sólo sobrevive *(z)*, después de *t* años.

Entonces, cuando no se tiene información sobre la composición del grupo después de *t* años, la anualidad de amortización es

$$AM_t = \frac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:y+t:z+t}:\overline{10-t}|}\ {}_t p_{xyz} + \frac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:y+t}:\overline{10-t}|}\ {}_t p_{xy}\ {}_t q_z$$

$$+ \frac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:z+t}:\overline{10-t}|}\ {}_t p_{xz}\ {}_t q_y + \frac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{y+t:z+t}:\overline{10-t}|}\ {}_t p_{yz}\ {}_t q_x$$

$$+ \frac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{10-t}|}\ {}_t p_x\ {}_t q_y\ {}_t q_z + \frac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{y+t:\overline{10-t}|}\ {}_t p_y\ {}_t q_x\ {}_t q_z$$

$$+ \frac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \cdot \ddot{a}_{z+t:\overline{10-t}|}\ {}_t p_z\ {}_t q_x\ {}_t q_y$$

Es decir,

$$AM_t = \frac{PA_1}{a_{\overline{xyz}:\overline{9}|}} \Big[\ddot{a}_{\overline{x+t:y+t:z+t}:\overline{10-t}|}\ {}_t p_{xyz} + \ddot{a}_{\overline{x+t:y+t}:\overline{10-t}|}\ {}_t p_{xy}\ {}_t q_z + \ddot{a}_{\overline{x+t:z+t}:\overline{10-t}|}\ {}_t p_{xz}\ {}_t q_y$$

$$+ \ddot{a}_{\overline{y+t:z+t}:\overline{10-t}|}\ {}_t p_{yz}\ {}_t q_x + \ddot{a}_{x+t:\overline{10-t}|}\ {}_t p_x\ {}_t q_y\ {}_t q_z + \ddot{a}_{y+t:\overline{10-t}|}\ {}_t p_y\ {}_t q_x\ {}_t q_z$$

$$+ \ddot{a}_{z+t:\overline{10-t}|}\ {}_t p_z\ {}_t q_x\ {}_t q_y \Big]$$

de donde:

t	AM_t
1	5,149.06
2	4,691.62
3	4,209.02
4	3,699.87
5	3,162.73
6	2,596.04
7	1,998.19
8	1,367.45
9	702.02
10	0.00

4.2.2.5 Comparación de la reserva no modificada y la reserva modificada.

La reserva no modificada después de *t* años cuando los tres asegurados se encuentran con vida, y si $t<10$, es

$$
{}_{t}V = S\sum_{j=11-t}^{40-t} v^{j}\left[3\cdot {}_{j}p_{\frac{[3]}{x+t:y+t:z+t}} + 2\cdot {}_{j}p_{\frac{[2]}{x+t:y+t:z+t}} + {}_{j}p_{\frac{[1]}{x+t:y+t:z+t}}\right]
$$

$$
-P\sum_{j=0}^{9-t} v^{j}\left[3\cdot {}_{j}p_{\frac{[3]}{x+t:y+t:z+t}} + 2\cdot {}_{j}p_{\frac{[2]}{x+t:y+t:z+t}} + {}_{j}p_{\frac{[1]}{x+t:y+t:z+t}}\right]
$$

Si $t\geq 10$, la reserva no modificada cuando después de *t* años los tres asegurados se encuentran con vida, es

$$
{}_{t}V = S\sum_{j=1}^{40-t} v^{j}\left[3\cdot {}_{j}p_{\frac{[3]}{x+t:y+t:z+t}} + 2\cdot {}_{j}p_{\frac{[2]}{x+t:y+t:z+t}} + {}_{j}p_{\frac{[1]}{x+t:y+t:z+t}}\right]
$$

Pero si se toma en cuenta que después de *t* años pueden también fallecer uno o dos asegurados, y aún seguiría vigente el seguro, entonces la reserva no modificada de este seguro bajo las condiciones anteriores está dada por los siguientes casos:

a) Si sobreviven los tres, la reserva es la siguiente, con probabilidad ${}_{t}p_{xyz}$

$$
S\sum_{j=11-t}^{40-t} v^{j}\left[3\cdot {}_{j}p_{\frac{[3]}{x+t:y+t:z+t}} + 2\cdot {}_{j}p_{\frac{[2]}{x+t:y+t:z+t}} + {}_{j}p_{\frac{[1]}{x+t:y+t:z+t}}\right]
$$

$$
-P\sum_{j=0}^{9-t} v^{j}\left[3\cdot {}_{j}p_{\frac{[3]}{x+t:y+t:z+t}} + 2\cdot {}_{j}p_{\frac{[2]}{x+t:y+t:z+t}} + {}_{j}p_{\frac{[1]}{x+t:y+t:z+t}}\right], \text{ si } t<10
$$

o bien,

$$S\sum_{j=1}^{40-t} v^j \left[3\cdot {}_{j}p_{\overline{x+t:y+t:z+t}}^{[3]} + 2\cdot {}_{j}p_{\overline{x+t:y+t:z+t}}^{[2]} + {}_{j}p_{\overline{x+t:y+t:z+t}}^{[1]} \right], \text{ si } t \geq 10$$

b) Si sólo sobreviven *(x)* y *(y)*, con probabilidad ${}_{t}p_{xy} \cdot {}_{t}q_{z}$, la reserva es

$$S\sum_{j=11-t}^{40-t} v^j \left[2\cdot {}_{j}p_{\overline{x+t:y+t}}^{[2]} + {}_{j}p_{\overline{x+t:y+t}}^{[1]} \right] - P\sum_{j=0}^{9-t} v^j \left[2\cdot {}_{j}p_{\overline{x+t:y+t}}^{[2]} + {}_{j}p_{\overline{x+t:y+t}}^{[1]} \right], \text{ si } t < 10$$

$$S\sum_{j=1}^{40-t} v^j \left[2\cdot {}_{j}p_{\overline{x+t:y+t}}^{[2]} + {}_{j}p_{\overline{x+t:y+t}}^{[1]} \right], \text{ si } t \geq 10$$

c) Si sólo sobreviven *(x)* y *(z)*, la reserva es, con probabilidad ${}_{t}p_{xz} \cdot {}_{t}q_{y}$

$$S\sum_{j=11-t}^{40-t} v^j \left[2\cdot {}_{j}p_{\overline{x+t:z+t}}^{[2]} + {}_{j}p_{\overline{x+t:z+t}}^{[1]} \right] - P\sum_{j=0}^{9-t} v^j \left[2\cdot {}_{j}p_{\overline{x+t:z+t}}^{[2]} + {}_{j}p_{\overline{x+t:z+t}}^{[1]} \right], \text{ si } t < 10$$

$$S\sum_{j=1}^{40-t} v^j \left[2\cdot {}_{j}p_{\overline{x+t:z+t}}^{[2]} + {}_{j}p_{\overline{x+t:z+t}}^{[1]} \right], \text{ si } t \geq 10$$

d) Si sólo sobreviven *(y)* y *(z)*, la reserva es, con probabilidad ${}_{t}p_{yz} \cdot {}_{t}q_{x}$

$$S\sum_{j=11-t}^{40-t} v^j \left[2\cdot {}_{j}p_{\overline{y+t:z+t}}^{[2]} + {}_{j}p_{\overline{y+t:z+t}}^{[1]} \right] - P\sum_{j=0}^{9-t} v^j \left[2\cdot {}_{j}p_{\overline{y+t:z+t}}^{[2]} + {}_{j}p_{\overline{y+t:z+t}}^{[1]} \right], \text{ si } t < 10$$

$$S\sum_{j=1}^{40-t} v^j \left[2\cdot {}_{j}p_{\overline{y+t:z+t}}^{[2]} + {}_{j}p_{\overline{y+t:z+t}}^{[1]} \right], \text{ si } t \geq 10$$

e) Si sólo sobrevive *(x)*, la reserva es, con probabilidad ${}_{t}p_{x} \cdot {}_{t}q_{y} \cdot {}_{t}q_{z}$

$$S\sum_{j=11-t}^{40-t} v^j \, {}_{j}p_{x+t} - P\sum_{j=0}^{9-t} v^j \, {}_{j}p_{x+t}, \text{ si } t < 10$$

$$S\sum_{j=1}^{40-t} v^j \, {}_{j}p_{x+t}, \text{ si } t \geq 10$$

f) Si sólo sobrevive *(y)*, la reserva es, con probabilidad ${}_{t}p_{y} \cdot {}_{t}q_{x} \cdot {}_{t}q_{z}$

$$S\sum_{j=11-t}^{40-t} v^j \, {}_j p_{y+t} - P\sum_{j=0}^{9-t} v^j \, {}_j p_{y+t} \text{ , si } t<10$$

$$S\sum_{j=1}^{40-t} v^j \, {}_j p_{y+t} \text{ , si } t\geq 10$$

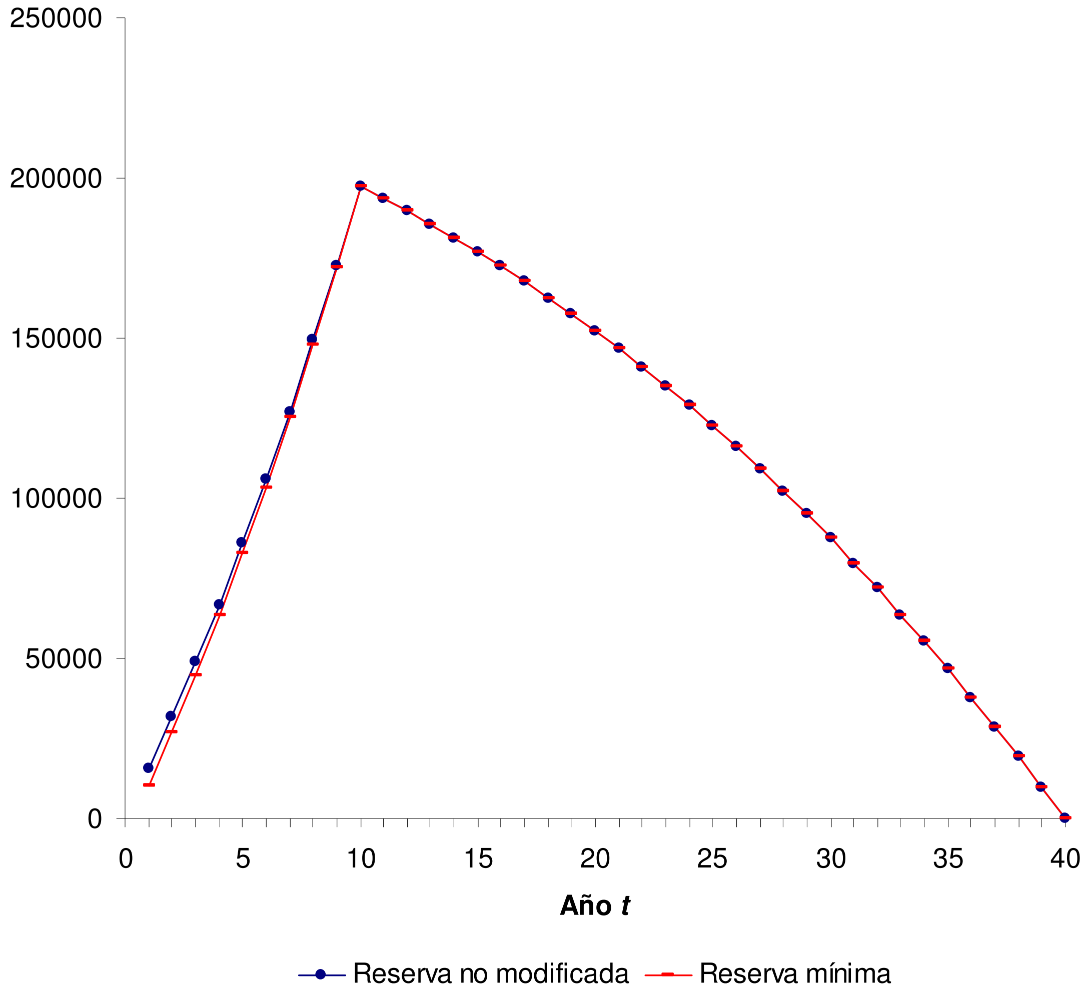
g) Si sólo sobrevive *(z)*, la reserva es, con probabilidad ${}_t p_z \cdot {}_t q_x \cdot {}_t q_y$

$$S\sum_{j=11-t}^{40-t} v^j \, {}_j p_{z+t} - P\sum_{j=0}^{9-t} v^j \, {}_j p_{z+t} \text{ , si } t<10$$

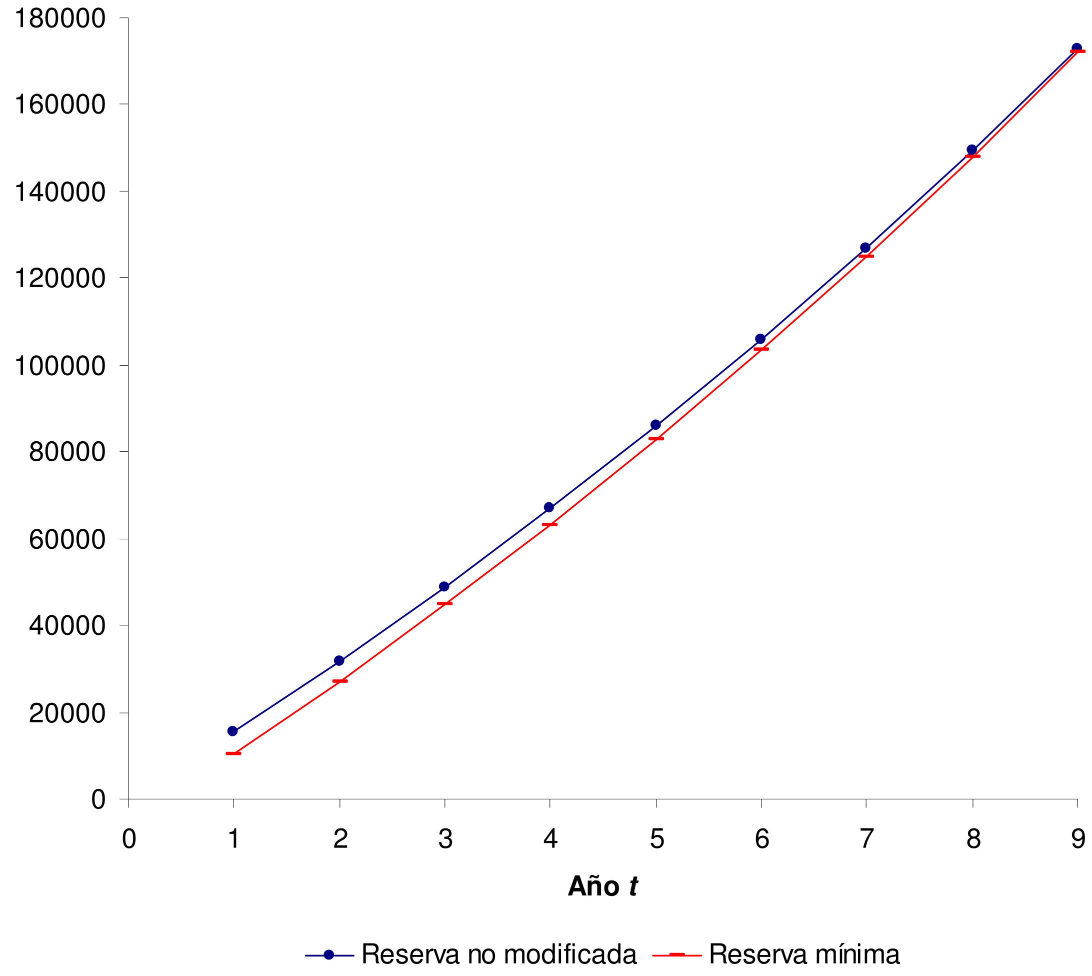
$$S\sum_{j=1}^{40-t} v^j \, {}_j p_{z+t} \text{ , si } t\geq 10$$

Entonces la reserva no modificada, cuando no se tiene información a priori sobre la composición del estatus al momento *t*, es la suma de los productos de las reservas anteriores por su probabilidad correspondiente.

La siguiente gráfica muestra la comparación de la reserva no modificada y la reserva modificada (mínima).



Gráfica 4.2.2.5.1 Muestra la comparación de la reserva no modificada y la reserva mínima para un seguro de una renta sobre 3 personas, con las condiciones antes mencionadas. Tabla de mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.



Gráfica 4.2.2.5.2 Muestra solamente los primeros años de la gráfica anterior, para notar mejor la comparación.

4.2.2.6 Cálculo de la reserva exacta a una fecha de valuación dada.

Si suponemos que la póliza de este seguro fue emitida el 25 de julio de 2002, y se desea calcular la reserva mínima exacta al 30 de junio de 2007, entonces la fórmula a aplicar es la siguiente

$$_{t-1+\frac{k}{365}}V_x^e = \frac{k}{365}\,{}_tV_x^{\min} + \left(1-\frac{k}{365}\right)\left({}_{t-1}V_x^{\min} + \beta_{t-1}\right)$$

donde $t = 5$ y $k = 340$

Por lo tanto

$$_{4+\frac{340}{365}}V_x^e = \frac{340}{365}\,{}_5V_x^{\min} + \left(1-\frac{340}{365}\right)\left({}_4V_x^{\min} + \beta_4\right)$$

Sustituyendo el valor de la prima de renovación, se tiene

$$
{}_{4+\frac{340}{365}}V_x^e = \frac{340}{365}\,{}_5V_x^{\min} + \left(1-\frac{340}{365}\right)\left[{}_4V_x^{\min} + \left(\left(3P+R\right)\cdot{}_4p_{\overline{\underset{xyz}{[3]}}}\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\left(2P+R\right)\cdot{}_4p_{\overline{\underset{xyz}{[2]}}} + \left(P+R\right){}_4p_{\overline{\underset{xyz}{[1]}}}\right)\right]
$$

$$
= 82{,}476.72
$$

4.2.2.7 Amortización con aportaciones variables (decreciente geométricamente).

Si la compañía propone un esquema de amortización para el pago de la pérdida, de tal manera que la aportación del año 1 es R_1, la aportación del año *t*, para *t* = 2,3,…9, es $R_t = R_1 - Q^{t-1}$ donde *Q* es una cantidad de decremento. El valor de R_1 se determina por el principio de equivalencia

$$
PA_1 = \sum_{t=1}^{9} R_t v^t\,{}_tp_{\overline{xyz}}
$$

de donde

$$
PA_1 = R_1 \cdot v \cdot p_{\overline{xyz}} + \sum_{t=2}^{9}\left(R_1 - Q^{t-1}\right)v^t\,{}_tp_{\overline{xyz}}
$$

$$
PA_1 = R_1 \cdot v \cdot p_{\overline{xyz}} + R_1\sum_{t=2}^{9} v^t\,{}_tp_{\overline{xyz}} - \sum_{t=2}^{9} v^tQ^{t-1}\,{}_tp_{\overline{xyz}}
$$

$$
PA_1 = R_1\sum_{t=1}^{9} v^t\,{}_tp_{\overline{xyz}} - \sum_{t=2}^{9} v^tQ^{t-1}\,{}_tp_{\overline{xyz}}
$$

$$
R_1\sum_{t=1}^{9} v^t\,{}_tp_{\overline{xyz}} = PA_1 + \sum_{t=2}^{9} v^tQ^{t-1}\,{}_tp_{\overline{xyz}}
$$

$$
\therefore \qquad R_1 = \frac{PA_1 + \sum_{t=2}^{9} v^tQ^{t-1}\,{}_tp_{\overline{xyz}}}{\sum_{t=1}^{9} v^t\,{}_tp_{\overline{xyz}}}
$$

Bajo este esquema las primas modificadas de primer año y de renovación son:

$$\alpha = 3P - PA_1$$

$$\beta_t = \begin{cases} 3P + R_t & \text{con probabilidad } {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} \\ 2P + R_t & \text{con probabilidad } {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} \\ P + R_t & \text{con probabilidad } {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz} \end{cases}$$

Donde t = 1,2,…,9, para comprobar que esta propuesta es técnicamente correcta, se demostrará la equivalencia entre el valor presente actuarial de las primas no modificadas y el de las primas modificadas bajo este esquema. Es decir

$$P\sum_{t=0}^{9} v^t \left[3 \cdot {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + 2 \cdot {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz} \right] =$$

$$\alpha + \sum_{t=1}^{9} v^t \left[\left(3P + R_t\right) \cdot {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + \left(2P + R_t\right) \cdot {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + \left(P + R_t\right) {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz} \right]$$

Desarrollando el lado derecho de la igualdad anterior, se tiene

$$\alpha + \sum_{t=1}^{9} v^t \left[\left(3P + R_t\right) \cdot {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + \left(2P + R_t\right) \cdot {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + \left(P + R_t\right) {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz} \right]$$

$$= 3P - PA_1 + v\left[\left(3P + R_1\right) \cdot p_{\underline{[3]}\atop xyz} + \left(2P + R_1\right) \cdot p_{\underline{[2]}\atop xyz} + \left(P + R_1\right) p_{\underline{[1]}\atop xyz} \right]$$

$$+\sum_{t=2}^{9} v^t \left[\left(3P + R_1 - Q^{t-1}\right) \cdot {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + \left(2P + R_1 - Q^{t-1}\right) \cdot {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} \right.$$

$$\left. + \left(P + R_1 - Q^{t-1}\right) {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz} \right]$$

$$= 3P - PA_1 + v\left[\left(3P \cdot p_{\underline{[3]}\atop xyz} + 2P \cdot p_{\underline{[2]}\atop xyz} + P \cdot p_{\underline{[1]}\atop xyz} \right) + R_1 \left(p_{\underline{[3]}\atop xyz} + p_{\underline{[2]}\atop xyz} + p_{\underline{[1]}\atop xyz} \right) \right]$$

$$+\sum_{t=2}^{9} v^t \left[\left(3P \cdot {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + 2P \cdot {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + P \cdot {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz} \right) \right.$$

$$+R_1\left({}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz}\right) - Q^{t-1}\left({}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz}\right)\Bigg]$$

$$= 3P - PA_1 + P\cdot v\left(3\cdot p_{\underline{[3]}\atop xyz} + 2\cdot p_{\underline{[2]}\atop xyz} + p_{\underline{[1]}\atop xyz}\right) + R_1\cdot v\cdot p_{\overline{xyz}}$$

$$+P\sum_{t=2}^{9} v^t\left(3\cdot {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + 2\cdot {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz}\right) + R_1\sum_{t=2}^{9} v^t\, {}_t p_{\overline{xyz}} - \sum_{t=2}^{9} Q^{t-1} v^t\, {}_t p_{\overline{xyz}}$$

$$= P\sum_{t=0}^{9} v^t\left(3P\cdot {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + 2P\cdot {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + P\cdot {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz}\right) - PA_1$$

$$+R_1\sum_{t=1}^{9} v^t\, {}_t p_{\overline{xyz}} - \sum_{t=2}^{9} Q^{t-1} v^t\, {}_t p_{\overline{xyz}}$$

$$= P\sum_{t=0}^{9} v^t\left(3P\cdot {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + 2P\cdot {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + P\cdot {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz}\right) - PA_1$$

$$+\left(\frac{PA_1 + \sum_{t=2}^{9} v^t Q^{t-1}\, {}_t p_{\overline{xyz}}}{\sum_{t=1}^{9} v^t\, {}_t p_{\overline{xyz}}}\right)\cdot \sum_{t=1}^{9} v^t\, {}_t p_{\overline{xyz}} - \sum_{t=2}^{9} Q^{t-1} v^t\, {}_t p_{\overline{xyz}}$$

$$= P\sum_{t=0}^{9} v^t\left(3P\cdot {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + 2P\cdot {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + P\cdot {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz}\right) - PA_1 + PA_1$$

$$+\sum_{t=2}^{9} v^t Q^{t-1}\, {}_t p_{\overline{xyz}} - \sum_{t=2}^{9} Q^{t-1} v^t\, {}_t p_{\overline{xyz}}$$

$$= P\sum_{t=0}^{9} v^t\left(3P\cdot {}_t p_{\underline{[3]}\atop xyz} + 2P\cdot {}_t p_{\underline{[2]}\atop xyz} + P\cdot {}_t p_{\underline{[1]}\atop xyz}\right)$$

Por lo tanto la amortización bajo este esquema es técnicamente correcta.

Ahora, si $Q = 2$, entonces

$$R_1 = \frac{PA_1 + \sum_{t=2}^{9} v^t Q^{t-1} \, {}_t p_{\overline{xyz}}}{\sum_{t=1}^{9} v^t \, {}_t p_{\overline{xyz}}} = 749.87$$

Entonces las primas modificadas bajo este esquema son:

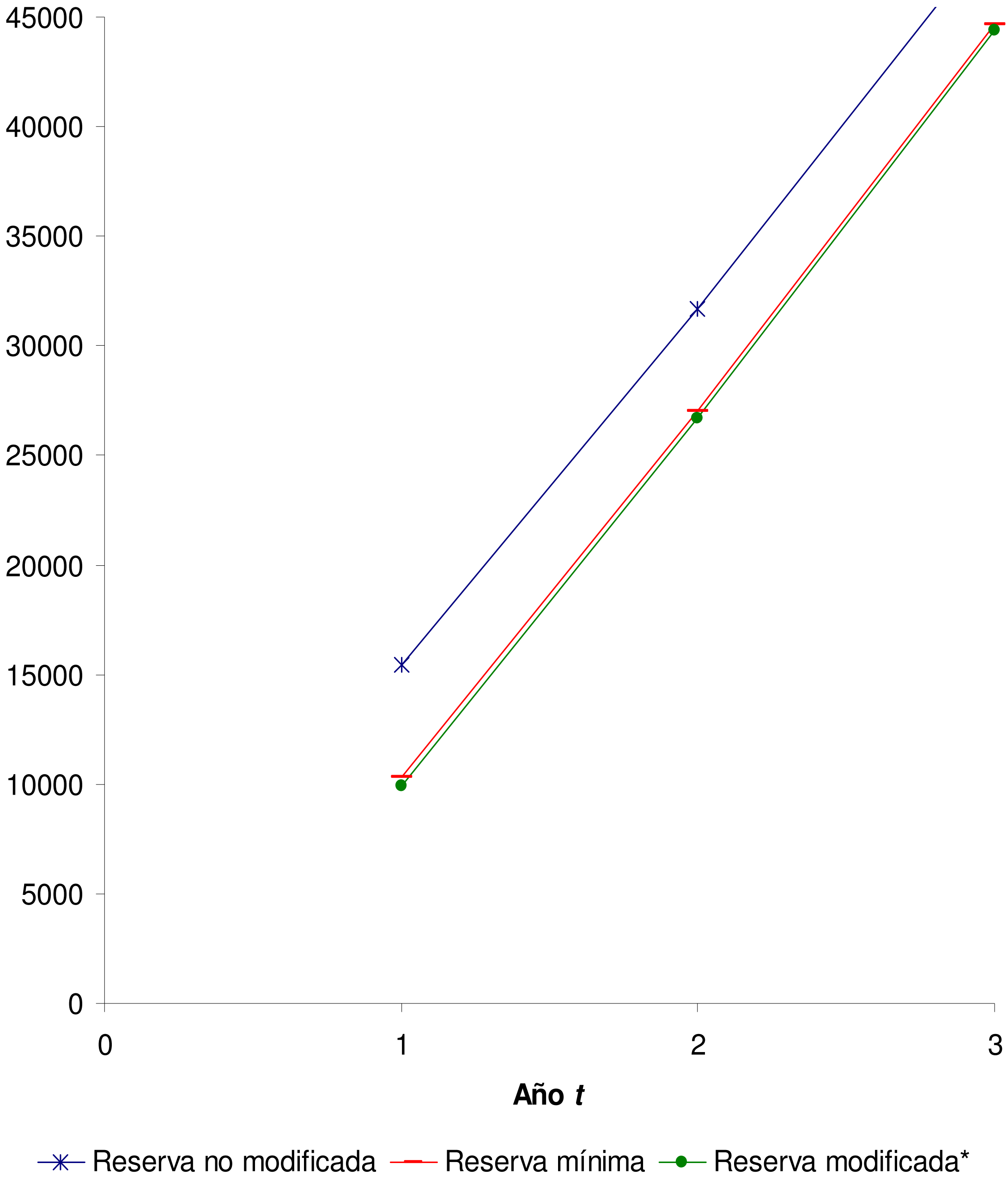
$$\alpha = 3P - PA_1, \text{ y } \beta_t = (3P + R_t) \cdot {}_t p_{\frac{[3]}{xyz}} + (2P + R_t) \cdot {}_t p_{\frac{[2]}{xyz}} + (P + R_t) \, {}_t p_{\frac{[1]}{xyz}}$$

t	Prima modificada
0	9,761.25
1	15,368.63
2	15,341.79
3	15,313.09
4	15,280.38
5	15,241.54
6	15,192.39
7	15,124.78
8	15,022.53
9	14,853.46

Y la anualidad de amortización del año *t*, es

t	AM_t
1	5,499.98
2	4,997.99
3	4,471.89
4	3,909.87
5	3,306.19
6	2,654.63
7	1,952.20
8	1,211.32
9	493.87
10	0.00

Por lo que la gráfica que compara la reserva modificada bajo este esquema y a la reserva mínima, es la siguiente.



Gráfica 4.2.2.7.1 Comparación entre la reserva no modificada, la reserva mínima y la reserva modificada bajo el esquema propuesto en este inciso. Sólo se muestra la comparación de los primeros tres años. Tabla de mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.
* Reserva modificada bajo el esquema amortización con aportaciones decrecientes geométricamente.

En la gráfica anterior se puede ver que para los primeros años, la reserva modificada bajo este esquema de aportaciones decrecientes geométricamente, contradice la normatividad vigente sobre la reserva mínima, ya que sus valores están por debajo de ésta última.

Algunos valores de la reserva no modificada, la reserva mínima, y la reserva modificada* son:

t	V_t	$V_t^{\min}$	V_t^{mod}
1	15,447.17	10,298.11	9,947.20
2	31,719.56	27,027.94	26,721.57
3	48,860.72	44,651.70	44,388.83
4	66,916.47	63,216.60	63,006.61
5	85,935.01	82,772.28	82,628.81
6	105,967.02	103,370.98	103,312.38
7	127,065.82	125,067.63	125,113.62
8	149,287.48	147,920.03	148,076.17
9	172,691.00	171,988.98	172,197.13
10	197,338.37	197,338.37	197,338.37

4.3 Seguro sobre Varios Eventos.

4.3.1 Descripción de la cobertura.

Sea un seguro temporal a *n* años, sobre una persona de edad *x*, cuyo beneficio es SA_1 por muerte, o SA_2 por invalidez, pero manteniendo la cobertura de muerte, aún cuando el asegurado se encuentre inválido. Las primas se pagan siempre y cuando el asegurado se encuentre válido (activo), es decir, vivo y sin invalidarse. El periodo de pago de primas es igual a la temporalidad del seguro.

4.3.2 Cálculo de la prima nivelada.

Sea *P* la prima nivelada de este seguro, por principio de equivalencia tenemos:

$$SA_1 \sum_{t=1}^{n} v^t \left({}_{t-1}/q_x^{aa} + {}_{t-1}/q_x^{ai} \right) + SA_2 \sum_{t=1}^{n} v^t \; {}_{t-1}/q_x^{(I)} = P \cdot \sum_{t=0}^{n-1} v^t \; {}_t p_x^{aa} \qquad (4.3.2.1)$$

Donde[3]:

${}_{t-1}/q_x^{aa} = \dfrac{d_{x+t-1}^{aa}}{l_x^{aa}}$ es la probabilidad de que un activo de edad *x* muera, sin invalidarse, en el año *t*.

${}_{t-1}/q_x^{ai} = \dfrac{d_{x+t-1}^{ii} - l_x^{ii} \cdot {}_{t-1}/q_x^{i}}{l_x^{aa}}$ es la probabilidad de que una persona activa, que en el momento de que contrata el seguro tiene edad *x*, muera inválido en el año *t*.

[3] Jordan (8), Capítulo 15: Tablas con decrementos secundarios.

${}_{t-1}/\,q_x^{(I)} = {}_{t-1}/\,r_x = \dfrac{i_{x+t-1}}{l_x^{aa}}$ es la probabilidad de que un activo vivo de edad x (estando sujeto a dos causas de salida: muerte e incapacidad), se incapacite en el año t.

${}_t\,p_x^{aa} = \dfrac{l_{x+t}^{aa}}{l_x^{aa}}$ es la probabilidad de que una persona de edad x, alcance la edad $x + t$, sin invalidarse.

l_x^{aa} es el número de personas que se encuentran con vida y activos a edad x.

d_x^{aa} es el número de decrementos, del grupo l_x^{aa}, por muerte.

i_x es el número de decrementos, del grupo l_x^{aa}, por incapacidad.

l_x^{ii} son los inválidos vivos a edad x.

d_x^{ii} es el número de personas que murieron, de los l_x^{ii}.

q_x^a es la probabilidad de que una persona activa a edad x, muera en el periodo de un año, sin importar si muere siendo activa o inválida.

q_x^i es la probabilidad de muerte entre los inválidos vivos de edad x.

Si se denota por, ${}_{t-1}/\,q_x^a$, a la probabilidad de que una persona de edad x, muera exactamente en el año t, sin importar si muere estando activa o inválida, entonces

$${}_t/\,q_x^a = {}_{t-1}/\,q_x^{aa} + {}_{t-1}/\,q_x^{ai}$$

Por lo que la expresión (4.3.2.1) queda de la siguiente forma:

$$SA_1\sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_{t-1}/\,q_x^a + SA_2\sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_{t-1}/\,q_x^{(I)} = P\cdot\sum_{t=0}^{n-1} v^t\ {}_t\,p_x^{aa}$$

Por lo tanto

$$P = \frac{SA_1\sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_{t-1}/\,q_x^a + SA_2\sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_{t-1}/\,q_x^{(I)}}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t\ {}_t\,p_x^{aa}}$$

4.3.3 Cálculo de la prima de primer año y la prima de renovación.

El valor presente actuarial de obligaciones futuras por concepto de las aportaciones anuales que debe hacer la compañía, para reponer la parte de la reserva que se tomó para financiar la pérdida, debe ser equivalente a la pérdida amortizable, entonces

$$R \cdot v \cdot p_x^{aa} \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}^{aa} = PA_1$$

de donde:

$$R = \frac{(1+i)\,PA_1}{p_x^{aa} \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}^{aa}}$$

La prima modificada de primer año es

$$\alpha = P - PA_1$$

Y la prima de renovación es

$$\beta = P + R$$

Ahora, se probará la equivalencia entre el valor presente actuarial de las primas no modificadas y el valor presente actuarial de las primas modificadas, es decir,

$$P \cdot \sum_{t=0}^{n-1} v^t \,{}_t p_x^{aa} = \alpha + \beta \sum_{t=1}^{n-1} v^t \,{}_t p_x^{aa}$$

Desarrollando el miembro derecho de la igualdad anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta \sum_{t=1}^{n-1} v^t \,{}_t p_x^{aa} &= P - PA_1 + (P+R) \sum_{t=1}^{n-1} v^t \,{}_t p_x^{aa} \\
&= P - PA_1 + P \sum_{t=1}^{n-1} v^t \,{}_t p_x^{aa} + R \sum_{t=1}^{n-1} v^t \,{}_t p_x^{aa} \\
&= P \sum_{t=0}^{n-1} v^t \,{}_t p_x^{aa} - PA_1 + R \sum_{t=1}^{n-1} v^t \,{}_t p_x^{aa} \\
&= P \sum_{t=0}^{n-1} v^t \,{}_t p_x^{aa} - PA_1 + \frac{(1+i)\,PA_1}{p_x^{aa} \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}^{aa}} \cdot \sum_{t=1}^{n-1} v^t \,{}_t p_x^{aa}
\end{aligned}$$

$$= P\sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_t p_x^{aa} - PA_1 + PA_1 \frac{\sum_{t=1}^{n-1} v^{t-1} \, {}_t p_x^{aa}}{p_x^{aa} \cdot \sum_{t=1}^{n-1} v^{t-1} \, {}_{t-1} p_{x+1}^{aa}}$$

$$= P\sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_t p_x^{aa} - PA_1 + PA_1 \frac{\sum_{t=1}^{n-1} v^{t-1} \, {}_t p_x^{aa}}{\sum_{t=1}^{n-1} v^{t-1} p_x^{aa} \cdot {}_{t-1} p_{x+1}^{aa}}$$

Como $p_x^{aa} \cdot {}_{t-1} p_{x+1}^{aa} = \frac{l_{x+1}^{aa}}{l_x^{aa}} \cdot \frac{l_{x+t}^{aa}}{l_{x+1}^{aa}} = \frac{l_{x+t}^{aa}}{l_x^{aa}} = {}_t p_x^{aa}$, entonces la expresión anterior queda:

$$= P\sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_t p_x^{aa} - PA_1 + PA_1 \frac{\sum_{t=1}^{n-1} v^{t-1} \, {}_t p_x^{aa}}{\sum_{t=1}^{n-1} v^{t-1} \, {}_t p_x^{aa}}$$

$$= P\sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_t p_x^{aa} - PA_1 + PA_1$$

$$= P\sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_t p_x^{aa}$$

Por lo tanto se cumple la equivalencia entre el valor presente actuarial de las primas no modificadas y el de las primas modificadas.

4.3.4 Cálculo de la anualidad de amortización.

Si se supone que la prima de tarifa del primer año es de \$2,500, y que el recargo nivelado por gastos de adquisición es del 10% de la prima de tarifa. Supóngase también que el gasto de adquisición real del primar año es de \$1,000. Entonces la pérdida del primer año es

$$PE_1 = 1{,}000 - 2{,}500(10\%) = 1{,}000 - 250 = 750$$

Ahora, para calcular la prima de ahorro, se debe encontrar el valor de la prima natural del primar año, es decir, el valor presente actuarial de las obligaciones, por parte de la compañía, del primer año, esto es:

$$CS_1 = SA_1 \cdot v \cdot (q_x^{aa} + q_x^{ai}) + SA_2 \cdot v \cdot r_x$$

$$= SA_1 \cdot v \cdot q_x^a + SA_2 \cdot v \cdot r_x$$

$$= v\left(SA_1 \cdot q_x^a + SA_2 \cdot r_x \right)$$

Si $SA_1 = \$500,000$, $SA_2 = \$300,000$, además, la edad del asegurado es de 30 años, la temporalidad del seguro es de 20 años, y la tasa es del 5%, entonces

$$CS_1 = v\left(500,000 \cdot q_x^a + 300,000 \cdot r_x\right) = 894.47$$

De a cuerdo a los datos anteriores, la prima *P* es igual a

$$P = \frac{500,000 \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_{t-1}/q_x^a + 300,000 \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_{t-1}/r_x}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t \ {}_t p_x^{aa}}$$

$$\therefore \qquad P = 1,656.41$$

Por lo que la prima de ahorro es igual a la prima de riesgo nivelada menos la prima natural:

$$PAH_1 = 1,656.41 - 894.47 = 761.94$$

Entonces la pérdida amortizable, es

$$PA_1 = \min\{PE_1; PAH_1\} = \min\{750; 761.94\} = 750$$

Ahora, para el cálculo de la anualidad de amortización del año *t*, puede suceder:

a) Que *(x)* se encuentre con vida y activo en el año *t*, entonces AM_t es

$$\frac{(1+i)PA_1}{p_x^{aa} \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}^{aa}} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}^{aa}$$

b) Que *(x)* se encuentre con vida e inválido en el año *t*, en este caso, el valor de AM_t no tiene sentido, ya que las primas se pagan siempre y cuando el asegurado se encuentre vivo y sin invalidarse.

Por lo tanto

$$AM_t = \frac{(1+i)PA_1}{p_x^{aa} \cdot \ddot{a}^{aa}_{x+1:\overline{n-1|}}} \cdot \ddot{a}^{aa}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

Cuyos valores son:

t	AM_t
1	789.17
2	763.42
3	736.42
4	708.12
5	678.43
6	647.29
7	614.62
8	580.33
9	544.33
10	506.52
11	466.81
12	425.06
13	381.16
14	334.96
15	286.33
16	235.08
17	181.04
18	124.00
19	63.74
20	0.00

4.3.5 Comparación de la reserva no modificada y la reserva mínima.

Los valores de la reserva terminal no modificada, dependen del estado en el que se encuentra el asegurado después de *t* años:

a) Si el asegurado se encuentra activo y con vida, entonces ${}_tV$ es

$$SA_1 \sum_{j=1}^{n-t} v^j \;{}_{j-1/}q^a_{x+t} + SA_2 \sum_{j=1}^{n-t} v^j \;{}_{j-1/}r_{x+t} - P \sum_{j=0}^{n-t-1} v^j \;{}_j p^{aa}_{x+t}$$

con probabilidad ${}_t p_x^{aa}$

b) Si el asegurado se encuentra vivo pero inválido, entonces ${}_tV$ es

$SA_1 \sum_{j=1}^{n-t} v^j \;{}_{j-1/}q^i_{x+t}$, con probabilidad ${}_t p_x^{ai}$

Por lo que la reserva terminal no modificada, cuando no se tiene información a priori sobre el estado en el que se encuentra el asegurado después de *t* años, se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$
{}_tV = \left[SA_1 \sum_{j=1}^{n-t} v^j \; {}_{j-1/}q^{a}_{x+t} + SA_2 \sum_{j=1}^{n-t} v^j \; {}_{j-1/}r_{x+t} - P \sum_{j=0}^{n-t-1} v^j \; {}_j p^{aa}_{x+t} \right] {}_t p^{aa}_x
$$

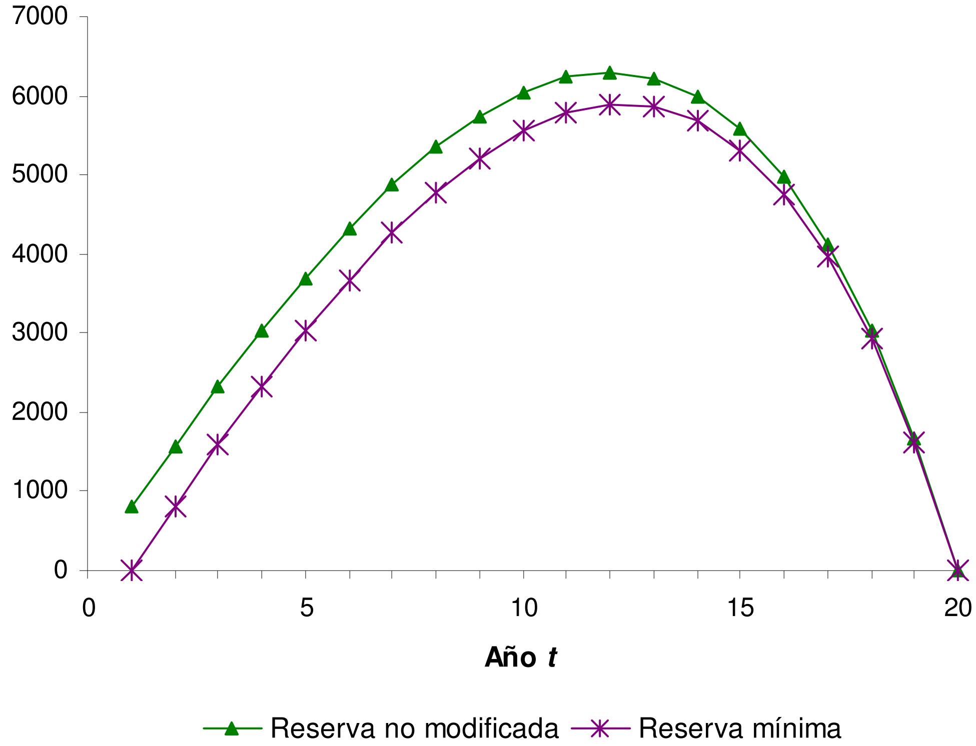
$$
+ \left[SA_1 \sum_{j=1}^{n-t} v^j \; {}_{j-1/}q^{i}_{x+t} \right] {}_t p^{ai}_x
$$

Por lo anterior, la reserva mínima terminal, es

$$
{}_tV^{\min} = \left[SA_1 \sum_{j=1}^{n-t} v^j \; {}_{j-1/}q^{a}_{x+t} + SA_2 \sum_{j=1}^{n-t} v^j \; {}_{j-1/}r_{x+t} - P \sum_{j=0}^{n-t-1} v^j \; {}_j p^{aa}_{x+t} - AM_t \right] {}_t p^{aa}_x
$$

$$
+ \left[SA_1 \sum_{j=1}^{n-t} v^j \; {}_{j-1/}q^{i}_{x+t} \right] {}_t p^{ai}_x
$$

La siguiente gráfica muestra la comparación entre la reserva terminal no modificada y la mínima.



Gráfica 4.3.5.1 Comparación de la reserva terminal no modificada y la reserva terminal mínima, de un seguro temporal a 20 años que paga \$500,000 por muerte y \$300,000 por invalidez (manteniendo la cobertura por muerte), a una persona con 30 años de edad. Las primas se pagan siempre que el asegurado se encuentre con vida y activo. Tabla de mortalidad: Experiencia Mexicana 91-98 Individual.

4.3.6 Cálculo de la reserva mínima exacta a una fecha de valuación dada.

Supóngase que la póliza de este seguro se emitió el 8 de mayo de 2007, y se desea calcular el valor de la reserva mínima exacta al 31 de marzo de 2008. Como la fecha valuación, es antes de que haya transcurrido el primer año póliza, entonces se determinará la reserva mínima exacta, de la siguiente manera:

$$_{\frac{T}{365}}V_x^e = \frac{CS_1 \dfrac{365-T}{365} + \left(PAH_1 - PA_1\right)\left(1+i\right)^{\frac{T}{365}}}{p_x^{aa}}$$

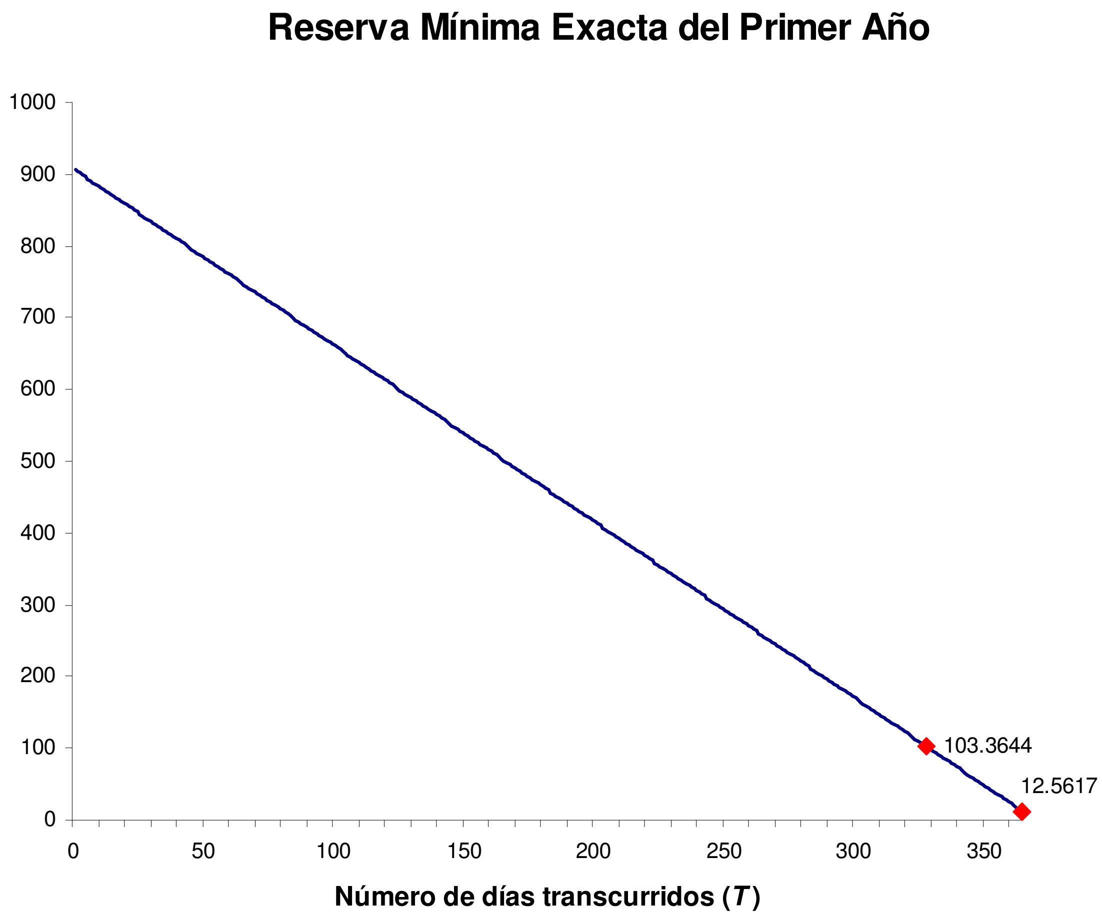
Donde T es el número de días transcurridos desde el inicio de la vigencia de la póliza hasta la fecha de valuación de la reserva.

$$_{\frac{328}{365}}V_x^e = \frac{v\left(SA_1 \cdot q_x^a + SA_2 \cdot r_x\right)\dfrac{37}{365} + \left(PAH_1 - PA_1\right)\left(1+i\right)^{\frac{328}{365}}}{p_x^{aa}}$$

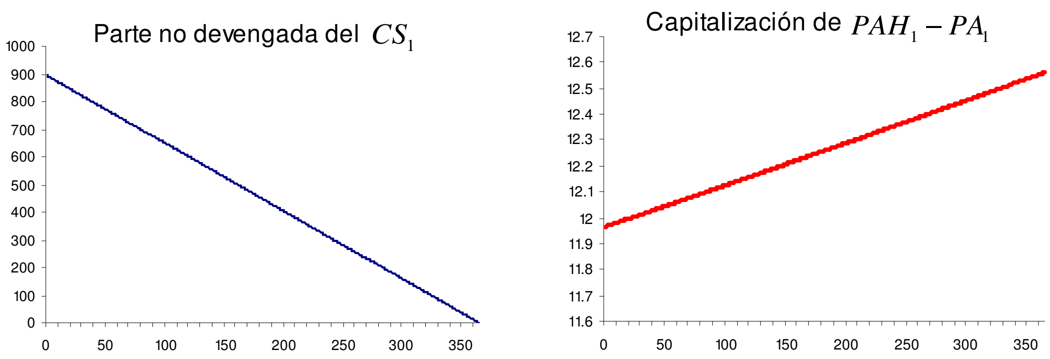
$$= \frac{(894.47)\dfrac{37}{365} + (11.94)(1+i)^{\frac{328}{365}}}{0.99788}$$

$$\therefore \qquad {}_{\frac{328}{365}}V_x^e = 103.3644$$

La siguiente gráfica muestra como es el comportamiento, día a día, de la reserva mínima exacta durante el primer año de la vigencia del seguro.

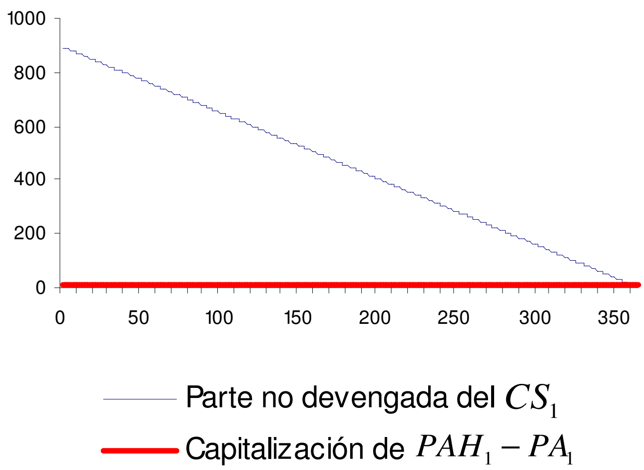


Gráfica 4.3.6.1 Reserva mínima exacta para cada día durante el primer año de la vigencia del seguro. Marca el punto y el valor de la reserva mínima exacta cuando han transcurrido 328 días. También marca el punto y el valor de la reserva mínima exacta después de transcurrido un año (365 días) de la vigencia del seguro.



Gráficas 4.3.6.2 Muestra el comportamiento diario, durante el primer año, de: la parte no devengada del costo de siniestralidad del primer año (lado izquierdo), y la capitalización de la diferencia entre la prima de ahorro y la pérdida amortizable (lado derecho).

Se sabe que la reserva mínima exacta en el primer año de vigencia es la parte no devengada del costo de siniestralidad del primer año, más la capitalización de la diferencia entre la prima de ahorro del primer año y la pérdida amortizable.



Gráfica 4.3.6.3 Comparación diaria entre la parte no devengada del costo de siniestralidad del primer año, y la capitalización de la diferencia que hay entre la prima de ahorro y la pérdida amortizable, durante el primer año de la vigencia del seguro.

La razón por la que la reserva mínima exacta del primer año tiene un comportamiento decreciente, es:

Como la parte no devengada de CS_1 es, para este caso, mucho más grande que la capitalización de $PAH_1 - PA_1$, entonces la reserva mínima exacta del primer año tiene un comportamiento similar al de la parte no devengada de CS_1, es decir, decreciente.

CONCLUSIONES

Las compañías de seguros deben constituir varias reservas, entre ellas, la reserva de riesgos en curso para los seguros de vida de largo plazo. Como se vio al inicio de este trabajo, esta reserva se puede calcular por diferentes métodos. También se explicó qué es, y cuándo, se debe utilizar un sistema modificado de reservas.

El método de reserva mínima, que es un sistema modificado para el cálculo de las reservas de riesgos en curso para los seguros de vida de largo plazo, aplicado en México, supera algunas limitantes que tienen la mayoría de los métodos entre ellos, el del Año Temporal Preliminar.

En el último capítulo se desarrollaron ejemplos sobre el cálculo de la reserva mínima, bajo diferentes tipos de seguro, de los cuales su cobertura es distinta a las coberturas tradicionales. Para cada ejemplo, se calculó la prima nivelada, la pérdida del primer año, la prima de ahorro, de donde se obtiene la pérdida amortizable, después se calculó el término de amortización R y la anualidad de amortización para encontrar los valores de la reserva mínima.

Con estos ejemplos se puede concluir que el método de reserva mínima es aplicable en seguros con coberturas no tradicionales, por lo tanto, como se mencionó en el tercer capítulo, este método no está limitado; además, tampoco muestra inconsistencias en su aplicación. Aún cuando la cobertura del seguro parezca compleja, la compañía puede encontrar, de manera más o menos sencilla, el monto mínimo de su reserva matemática.

Es importante mencionar que el hecho de que un seguro sea variable en las primas, no implica que el sistema de aportaciones de la reserva mínima deba ser también variable, ya que la forma en que se amortice el préstamo tomado en el primer año de vigencia de la póliza no necesariamente debe estar relacionada con la forma en que el asegurado paga la prima. Esto es porque quien se obliga a hacer las aportaciones a la reserva es la compañía de seguro y no necesariamente genera, de las primas futuras que paga el asegurado, utilidades crecientes o decrecientes por el adelanto de comisiones que le hizo al agente en el primer año que es lo que le generó la pérdida.

También se analizó si es posible y tiene sentido plantear un esquema de amortización variable. Por lo que se concluyó que para cubrir el pago de la pérdida amortizable, se pueden proponer esquemas de amortización distintos al que se menciona en la normatividad, es decir, con aportaciones no constantes, solo que la compañía debe tener cuidado en que su propuesta no contravenga la normatividad, por lo que debe verificar que la reserva modificada bajo dicho esquema no sea inferior a la que resulta del método de reserva mínima donde las aportaciones son constantes.

Los ejemplos vistos en este trabajo fueron para fines prácticos y para mostrar de manera simple el procedimiento del método de reserva mínima. Pero sucede que, en la práctica por lo general no es así de fácil, por lo que se debe poner mucho cuidado en la situación en la que se encuentra el estatus y las condiciones del seguro en el momento de la valuación de la reserva, para calcular correctamente las reservas matemáticas que debe constituir la compañía. De no ser así, puede suceder que ésta última, tenga dinero de más en sus reservas, o del contrario, que tenga una reserva deficitaria, por lo cual la CNSF puede cobrar una multa.

Una de las partes más importantes que vigila y regula la CNSF son las reservas técnicas de las compañías de seguros. Esto es porque un aspecto fundamental de la supervisión y regulación de las operaciones de dichas compañías es lograr que éstas cumplan con las obligaciones contraídas con sus asegurados, que principalmente es hacer fuerte a las reclamaciones futuras por parte de los asegurados, es por ello que las instituciones deben contar con los recursos financieros suficientes. Y el recurso principal con que cuenta la compañía para tales efectos son precisamente las reservas técnicas.

BIBLIOGRAFÍA

1. **AGUILAR BELTRÁN, Pedro, y AVENDAÑO ESTRADA, Jorge Otilio.** *Fundamentos y Aplicaciones del Método de Reserva Mínima para Seguros de Vida (Parte I).* México (s.a., s.e., s.c.)

2. **BOWERS, Newton L. Jr., GERBER, Hans U., HICKMAN, James C., JONES, Donald A., NESBITT, Cecil J.** *Actuarial Mathematics.* 2ª. edición. The Society of Actuaries, 1997. Schaumburg, Illinois.

3. **CÁNOVAS THERIOT, Roberto.** *Matemáticas Financieras: Fundamentos y aplicaciones.* Trillas, 2004. México.

4. **CNSF.** *Circular S-10.1.7.1*, publicada en el Diario Oficial de la Federación del 30 de septiembre de 2003.

5. **CNSF.** *Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros*, publicada en el Diario Oficial de la Federación del 31 de agosto de 1935. Incluye reformas publicadas en el Diario Oficial de la Federación del 28 de junio de 2007.

6. **DÍAZ MATA, Alfredo, y AGUILERA GÓMEZ, Víctor Manuel.** *Matemáticas Financieras.* McGraw-Hill, 1987. México

7. **GONZÁLEZ GALÉ, José.** *Elementos de Cálculo Actuarial.* 4ª. edición. Macci, 1968. Buenos Aires.

8. **JORDAN, Chester Wallace, Jr.** *Life Contingencies.* 2a. edición. The Society of Actuaries, 1991. Chicago, Illinois.

9. **KELLISON, Stephen G.** *The Theory of interest.* 2a. edición. Richard D. Irwin, 1991. Homewood, Illinois.

10. **MACLEAN, Joseph Brotherton.** *El Seguro de Vida.* CECSA, 1962, México.