



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“RELATIVIDAD NUMÉRICA: SIMETRÍA
AXIAL, ONDAS GRAVITACIONALES Y
CONDICIONES DE FRONTERA”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

MILTON JAVIER RUIZ MENESES

DIRECTOR DE TESIS: DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: DR. MARCELO SALGADO RODRÍGUEZ



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Para las tres mujeres más especiales de mi vida,
Buzi Bu, Elga y Lucila.*

Agradecimientos

Tal vez esta es una de las secciones más difíciles de escribir por que no quiero olvidar a todas las personas que me ayudaron de una u otra manera a terminar este proyecto. Así que voy a empezar cronológicamente. Quiero agradecer de manera muy especial a mi asesor Miguel Alcubierre por el excelente curso de relatividad numérica en Merida, Venezuela, después del cual decidí trabajar en esta área. Además por su apoyo y enseñanzas durante estos últimos años.

También quiero agradecer a los miembros de mi comité tutorial, Darío Núñez y Marcelo Salgado, por todo el apoyo recibido durante esta última etapa, así como a cada uno de los miembros del grupo Ollin, grupo de relatividad numérica del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM. También a Olivier Sarbach por su amistad, apoyo y por su gran asesoría en los dos últimos años. Por supuesto, a cada uno de mis sinodales (aquellos que aun no he mencionado), José Antonio González, Tonatiuh Matos, Jorge Cervantes y Hernando Quevedo, por sus importantes comentarios para mejorar este trabajo escrito.

Finalmente quiero agradecer a un grupo de personas no menos importantes, las personas más cercanas a mi. A Andrea por su grandioso apoyo durante todo el tiempo que he estado en México. A mis amigos colombo-mexicanos Alexander, Mauricio, Eduardo y William por todos esos momentos de discusión y de juegos. A mis amigos mexicanos Angel y Benjamin por su amistad y todas su enseñanzas. Y a cada uno de los miembros de mi familia colombiana, mis padres, mis hermanos, mis tíos y abuelos, por que siempre han estado ahí, apoyándome sin esperar nada a cambio.

Este trabajo fue financiado parcialmente por la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP-UNAM), por CONACyT a través del proyecto U47209-F y por DGAPA-UNAM a través del proyecto IN113907. Los cálculos numéricos del capítulo 6 fueron realizados en Kan Balam, UNAM.

Resumen

Estudiamos tres aspectos importantes de la relatividad numérica: la regularización de códigos adaptados a simetría esférica y axial, condiciones de frontera compatibles con las constricciones y el cálculo de la energía y momentos transportados por las ondas gravitacionales.

Para la regularización de códigos adaptados, discutimos las condiciones de paridad que deben cumplir las variables geométricas cuando $r \rightarrow -r$, en el caso esférico, y $\rho \rightarrow -\rho$, para el caso axial. Sin embargo, estas condiciones no son suficientes para garantizar evoluciones numéricas regulares. Para obtener las demás condiciones usamos el hecho de que localmente el espacio-tiempo debe ser plano. Teniendo en cuenta esto, usamos la forma general que deben tener las componentes de los tensores en un espacio-tiempo esférica o axialmente simétrico para encontrar un algoritmo genérico para la regularización de las ecuaciones de evolución en estas dos simetrías. Mostramos que este procedimiento de regularización es independiente de la estructura matemática de las ecuaciones de evolución, para lo cual implementamos numéricamente las ecuaciones de evolución ADM y NOR. Explícitamente mostramos la regularidad de nuestras ecuaciones de evolución y presentamos varios ejemplos numéricos que la confirman. Por otro lado, la motivación para tener condiciones de frontera compatibles con las constricciones es simple. La mayor parte de las condiciones de frontera usadas en las simulaciones numéricas actuales causan que modos de propagación que violan las constricciones se propaguen desde la frontera y hacia el interior del dominio computacional. Teniendo en cuenta esto, presentamos varios conjuntos de condiciones de frontera para las ecuaciones de Einstein en la norma armónica compatibles con las constricciones. Usando una nueva técnica, recientemente propuesta por Kreiss y Winicour, demostramos que el problema de valores iniciales asociado con las ecuaciones de Einstein en esta norma con las condiciones de frontera propuestas esta bien planteado por lo menos en la aproximación de coeficientes congelados. Hacemos una estimación de la cantidad de radiación espuria introducida por nuestras condiciones de frontera y estudiamos su comportamiento numérico usando un agujero negro perturbado de Schwarzschild. Finalmente, estudiamos la energía y momentos radiados durante la colisión frontal de dos agujeros negros. Para esto, encontramos las expresiones generales para estos observables usando dos métodos: los invariantes de norma resultantes de la teoría de perturbaciones sobre un espacio-tiempo de Schwarzschild y una descomposición del escalar de Weyl Ψ_4 en armónicos esféricos con peso de espín. Mostramos analítica y numéricamente que estas expresiones son completamente equivalentes.

Abstract

This thesis is concerned with three important aspects of numerical relativity: the regularization of numerical codes to evolve spherically and axially symmetric spacetimes, outer boundary conditions and the calculation of energy and momenta carried by the gravitational radiation.

To find an algorithm for regularization, we discuss the parity conditions that the geometric functions must satisfy when $r \rightarrow -r$ or $\rho \rightarrow -\rho$ in the spherical or axial case respectively. One can show that parity conditions are not enough in order to have a regular evolution. The extra conditions are a consequence of local flatness. With those conditions, we use the general form of tensor components in spherically and axially symmetric to specify a generic algorithm of regularization in those symmetries. We show that such procedure is independent of the hyperbolic structure of the evolution equations system. For this, we implement numerically the ADM and NOR equations. We explicitly show the regularity of evolution equation and we present several examples showing the regularity of our evolutions. On the other hand, the motivation to use constraint preserving outer boundary conditions is simple. Outer boundary conditions implemented in the current numerical evolution generate constraint violating modes that propagate into the computational domain. Taking that into account, we specify several sets of outer boundary conditions for Einstein field equation in the harmonic gauge which are constraint preserving. Using the new technique proposed by Kreiss and Winicour, we show the well-posedness of the initial value problem resulting of Einstein equations in this gauge with our boundary conditions in the frozen coefficient approximation. We obtain estimates for the amount of junk reflection introduced by our conditions and perform numerical tests using a perturbed Schwarzschild black hole. Finally, we study the radiated gravitational waves from a head-on collision. For this, we find the general expressions for the energy and momenta carried away by gravitational waves using two approaches: the invariants resulting from the theory of perturbations of a Schwarzschild space-time and a spin-weighted spherical harmonics decomposition of the Weyl scalar Ψ_4 . We show analytically and numerically that those expressions are equivalent.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Relatividad Numérica	1
1.2. Notación	6
2. Formalismos de Evolución	9
2.1. Formulación 3+1 de la relatividad general	10
2.2. Curvatura intrínseca y extrínseca	13
2.3. Variables de norma	17
2.3.1. Condiciones de foliación	17
2.3.2. Condiciones sobre el vector de corrimiento	21
2.4. Formulaciones hiperbólicas de las ecuaciones de Einstein en la descomposición 3+1	23
2.4.1. Formulación BSSN	24
2.4.2. Formulación NOR	28
2.5. Ecuaciones de Einstein en la Norma Armónica	31
3. Regularización	35
3.1. Condiciones de regularidad	36
3.1.1. Simetría esférica	36
3.1.2. Simetría Axial	39
3.2. Ecuaciones de evolución	43

3.2.1.	Caso esférico	43
3.2.2.	Caso Axial	45
3.3.	Ejemplos Numéricos	46
3.3.1.	Espacio-tiempo de Minkowski en simetría esférica	47
3.3.2.	Espacio-tiempo de Minkowski en simetría axial usando ADM	49
3.3.3.	Espacio-tiempo de Minkowski en simetría axial usando NOR	52
3.3.4.	Ondas de Brill	54
3.4.	Discusión	61
4.	Condiciones de Frontera para las ecuaciones de Einstein en la norma armónica	63
4.1.	Condiciones de frontera externas	66
4.1.1.	Condiciones de frontera de primer orden	68
4.1.2.	Condiciones de frontera de segundo orden	71
4.1.3.	Condiciones de frontera de orden mayor	73
4.2.	Problema de valores iniciales	74
4.2.1.	Condiciones de frontera de primer orden	76
4.2.2.	Condiciones de frontera de segundo y de orden mayor	82
4.2.3.	Condiciones de frontera mixtas, de primer y de segundo orden	85
4.3.	Propiedades de las condiciones de frontera	86
4.3.1.	Coefficiente de reflexión en el límite de frecuencias altas	86
4.3.2.	Coefficiente de reflexión usando la condición de frontera sobre el tensor de distorsión	88
4.3.3.	Experimentos numéricos	92
4.4.	Discusión	96
5.	Energía y momentos transportados por la radiación gravitacional	99
5.1.	Ondas gravitacionales y observables físicos	100
5.1.1.	Energía y momentos transportados por la onda gravitacional	102
5.2.	Energía y momentos radiado en términos del escalar Ψ_4	107
5.3.	Radiación gravitacional usando perturbaciones de Agujeros Negros	111
5.3.1.	Desarrollo multipolar	112
5.3.2.	Perturbaciones invariantes de norma	114
5.3.3.	Energía y momentos radiados	118

5.4. Discusión	120
6. Colisión Frontal de agujeros negros con espín	121
6.1. Datos iniciales	122
6.2. Metodología	125
6.2.1. Radiación espuria de Bowen-York	127
6.2.2. Precisión y convergencia	129
6.3. Energía y momentos Radiados	131
6.3.1. Momento lineal radiado	135
6.4. Discusión	137
7. Conclusiones	139
A. Hiperbolicidad de las ecuaciones de evolución	143
A.1. Hiperbolicidad	144
A.2. Hiperbolicidad de ADM	146
A.3. Hiperbolicidad del sistema de ecuaciones tipo NOR	149
B. Ecuaciones de Evolución tipo NOR para el caso esférico	153
C. Condiciones de frontera maximalmente disipativas	155
D. Armónicos esféricos con peso de espín	159
Bibliografía	165

Índice de figuras

2.1. Espacio-tiempo globalmente hiperbólico \mathcal{M} foliado en hipersuperficies espaciales Σ_t . Cada hipersuperficie es parametrizada por la coordenada temporal t	11
2.2. Foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies tridimensionales tipo espacio. La función de lapso α mide el intervalo de tiempo propio entre las hipersuperficies a lo largo de la trayectoria normal y el vector de corrimiento β^i mide la velocidad relativa entre las trayectorias normales y las líneas con coordenadas espaciales fijas.	12
2.3. Hipersuperficie espacial Σ_t encajada en el espacio-tiempo \mathcal{M} . El cambio en la dirección del vector nulo \vec{n} bajo transporte paralelo nos da información de como esta hipersuperficie esta encajada en \mathcal{M} , es decir, nos da información de la curvatura extrínseca de Σ_t	13
2.4. Hipersuperficie espacial Σ_t encajada en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . El vector normal \vec{n} es transportado paralelamente de un punto a otro sobre la hipersuperficie espacial Σ_t	15
3.1. Para aplicar las condiciones de paridad a las funciones geométricas, añadimos un punto ficticio $r = -\Delta r/2$ para desplazar el inicio de la malla numérica. Esto implica que las condiciones de paridad através del origen se reducen a copiar el valor de una variable dada de $r = \Delta r/2$ a $r = -\Delta r/2$ con el mismo signo para el caso en el que la variable sea par, o con el signo contrario en el caso en que sea impar.	44

3.2.	Evolución del espacio-tiempo de Minkowski en simetría esférica con un lapso no trivial usando la formulación NOR. Izquierda: evolución de la componente métrica $\gamma_{rr} \equiv A$. Derecha: evolución de la componente Δ^r a diferentes tiempos. Nótese que, durante la evolución, estas variables tienen un comportamiento suave, en particular cuando el pulso pasa através del origen.	48
3.3.	Norma L_2 de la constricción hamiltoniana para tres distintas resoluciones $\Delta r = 0.025, 0.0125, 0.0065$. En el panel de la derecha mostramos la norma de la constricción durante todo el tiempo de la evolución $t = 10$. En el panel izquierdo, por otro lado, presentamos la norma de la constricción justo cuando un primer pulso toca la frontera exterior. Hemos reescalado la norma L_2 , del panel derecho, para las resoluciones más altas por el factor 2^2 y 2^4 respectivamente.	49
3.4.	Evolución del espacio-tiempo de Minkowski en simetría axial con un lapso no trivial usando las ecuaciones ADM. Las figuras muestran la evolución de una de las componentes de la métrica y la función de lapso a lo largo de la diagonal. Izquierda: evolución de la componente métrica $\gamma_{\rho\rho} \equiv A$ a lo largo de la diagonal. Derecha: evolución de la función de lapso α a diferentes tiempos. Las funciones se comportan suavemente mientras el pulso pasa através del eje de simetría.	51
3.5.	Evolución del espacio-tiempo de Minkowski en simetría axial con un lapso no trivial usando las ecuaciones tipo NOR. Las figuras muestran la evolución de una de las componentes de la métrica y del lapso a lo largo de la diagonal. Izquierda: evolución de la componente métrica $\gamma_{\rho\rho} \equiv A$ a lo largo de la diagonal. Derecha: evolución de la función de lapso α a diferentes tiempos. Nótese que las funciones se comportan suavemente mientras el pulso pasa através del eje de simetría.	53
3.6.	Evolución del espacio-tiempo de Minkowski en simetría axial con un lapso no trivial usando las ecuaciones tipo NOR. Las figuras muestran la evolución de una de las componentes de la curvatura extrínseca y de la componente ρ del vector Δ^i a lo largo de la diagonal. Izquierda: evolución de Δ^ρ a lo largo de la diagonal. Derecha: evolución de la componente $K_{\rho\rho} \equiv K_A$ a diferentes tiempos. Nótese que una vez más, las funciones se comportan suavemente mientras el pulso pasa através del eje de simetría.	54

3.7.	Norma L_2 en escala semilogarítmica para la constricción hamiltoniana y de momento M^ρ para el sistema de ecuaciones ADM para tres distintas resoluciones. Nótese que hemos reescalado las resoluciones más altas por el factor $(\Delta\rho_{max}/\Delta_{min})^2$ para mostrar segundo orden de convergencia. Una vez más, podemos asegurar que el código es a segundo orden antes de que el primer modo de propagación alcance la frontera alrededor del tiempo $t \sim 5$.	55
3.8.	Violación de la constricción hamiltoniana para el sistema de ecuaciones NOR. En los tres primeros paneles mostramos la constricción a lo largo del eje ρ para tres diferentes resoluciones. El último panel corresponde a la norma L_2 en escala semilogarítmica. Hemos elegido estos tres pasos de tiempo para mostrar el comportamiento de la constricción antes de que el primer modo de propagación alcance la frontera exterior, después que tenemos reflexiones en la frontera y, finalmente, cuando se detiene la evolución. Nótese que hemos reescalado las resoluciones más altas por el factor $(\Delta\rho_{max}/\Delta_{min})^2$ para mostrar segundo orden de convergencia.	56
3.9.	Perfil de la función de Holz para una amplitud de $a = 3$. Elegimos esta forma de la función q para garantizar la regularidad de los datos iniciales.	57
3.10.	Factor conforme $\Psi(\rho, z)$ para datos iniciales de ondas de Brill. Por simplicidad, hemos elegido la función q tipo Holz [71] para una amplitud de $a = 3.0$. Con esta amplitud garantizamos que no se formarán agujeros negros pero, sin embargo, nos permite estar lejos del régimen lineal.	58
3.11.	Convergencia de los datos iniciales para las ondas de Brill con una amplitud $a = 3$. Una vez calculados los datos iniciales calculamos la constricción hamiltoniana para $t = 0$ a tres distintas resoluciones $\Delta\rho = 0.2, 0.1, 0.05$. Nótese que hemos reescalado las resoluciones más altas para demostrar segundo orden de convergencia.	59
3.12.	Ondas de Brill. Las figuras muestran la evolución de las variables geométricas a lo largo de la diagonal ($r = \sqrt{r^2 + z^2}$). Arriba, izquierda: evolución de la componente métrica $\gamma_{\rho\rho} \equiv A$ a lo largo de la diagonal. Arriba, derecha: evolución de la función de lapso α . Abajo, izquierda: evolución de Δ^ρ a lo largo de la diagonal. Abajo, derecha: evolución de la traza de la curvatura extrínseca K a diferentes tiempos. Nótese que las funciones geométricas se comportan suavemente mientras el pulso pasa através del eje de simetría.	60

4.1.	Espacio-tiempo $M = [0, T] \times \Sigma$ con una superficie de frontera suave $\mathcal{T} = [0, T] \times \partial\Sigma$. Por simplicidad, supondremos que la frontera \mathcal{T} es una superficie temporal y ortogonal a las superficies Σ_i que son superficies puramente espaciales.	67
4.2.	Coefficiente de reflexión $ \gamma(kR) $ como función de kR para la condición de frontera sobre el tensor de distorsión (4.9) para radiación cuadrupolar con numero de onda k y paridad impar. El coeficiente de reflexión decae como $(kR)^{-1}$ para $kR \gg 1$	91
4.3.	Diferencia $\Delta\mathcal{U}$ con respecto a la solución de referencia para cuatro diferentes resoluciones (N_r, L) . Izquierda: Condición de frontera para el tensor de distorsión $\sigma_{\mu\nu} = 0$ (línea continua) vs. Condición de Kreiss-Winicour (punteada). Derecha: Condición de segundo orden (sólida) vs. Condición de frontera mixta (punteada).	94
4.4.	Violación de las constricciones \mathcal{C} para cuatro diferentes resoluciones (N_r, L) . Izquierda: Condición de frontera para el tensor de distorsión nulo (sólida) vs. Condición de Kreiss-Winicour (punteada). Derecha: Condición de segundo orden (sólida) vs. Condición de frontera mixta (punteada).	95
4.5.	Diferencia de Ψ_4 con respecto a la solución de referencia de para dos distintas resoluciones. Izquierda: Condición de frontera con el tensor de distorsión nulo (sólida) vs. Condición de frontera de Kreiss-Winicour (punteada). Derecha: Condiciones de frontera de segundo orden (sólida) vs. Condiciones de frontera mixtas (punteada).	96
5.1.	Efecto de la polarización de una onda gravitacional que se propaga a lo largo del eje z sobre un anillo de partículas que se encuentra inicialmente en reposo sobre el plano xy (figura de la derecha). De acuerdo a la polarización de la onda, el anillo se distorsiona a lo largo de los ejes principales como se muestra en la figura del centro (polarización $+$) o a lo largo de la diagonal (polarización \times)	102

6.1. Coeficiente dominante A_{20} en el desarrollo (5.40) del escalar de Weyl Ψ_4 para tres distintas configuraciones de datos iniciales calculado a una distancia coordenada de $40M$. Las línea continua/azul corresponde a la configuración de dos agujeros negros con igual masa y con espín nulo. La línea discontinua/roja corresponde a la configuración de espines paralelos de igual magnitud a lo largo del eje z y, finalmente, la línea punteada/verde corresponde a una configuración de dos agujeros negros sobre el eje z con espines paralelos pero de diferente magnitud. La figura interior de la derecha corresponde a la parte real del invariante de norma Q_{par}^{20} para el caso de igual masa sin espín (línea azul/continua) y del invariante Q_{par}^{20} para una configuración de masa igual masa y espines paralelos (línea roja/discontinua).	128
6.2. Norma L_2 de la violación de la constricción hamiltoniana para las configuraciones: MI_{++} (figura superior), MI (figura inferior izquierda) y MI_{+0} (figura inferior derecha). Nótese que hemos escalado dos de las tres resoluciones, las más altas, para demostrar convergencia de segundo orden.	129
6.3. Convergencia de la parte real del coeficiente A_{20} para la configuración de datos iniciales MI_{+0} . La figura superior, en escala semilogarítmica, corresponde al valor absoluto de las diferencias $M/35 - M/40$ (línea azul/continua) y $M/40 - M/50$. Nótese que hemos escalado esta última diferencia por un factor de 1.181 para demostrar convergencia de segundo orden. La figura inferior muestra la parte real del coeficiente A_{20} para estas tres resoluciones.	131
6.4. Energía radiada en la colisión frontal de dos agujeros negros sin espín. La energía es calculada usando la teoría de perturbaciones o a través el escalar de Weyl Ψ_4 . La gráfica interior de la derecha corresponde a la diferencia del valor absoluto entre la parte real de los coeficientes A_{20} para una resolución de $h = M/35$ y una resolución de $h = M/40$ (línea sólida) y la diferencia entre el valor absoluto de la parte real de los coeficientes A_{20} para las resoluciones de $h = M/40$ y $h = M/50$ (línea punteada). Esta última diferencia es escalada por un factor de 1.181 para demostrar segundo orden de convergencia. Todos los coeficientes A_{20} fueron calculados a una distancia coordenada de $r = 40M$	132

- 6.5. Energía radiada en la colisión frontal de dos agujeros negros para la configuración de datos iniciales NI_{++} . La energía es calculada usando las expresiones (5.43) y (5.101). Adicionalmente, para mostrar que estas expresiones son equivalentes, usamos la ecuación (5.100) para calcular el escalar de Weyl Ψ_4 y, una vez más, la expresión (5.43) para calcular la energía radiada por el sistema. Los paneles superiores corresponden a la energía considerando la radiación espuria (izquierda) y sin considerarla (derecha). Los paneles inferiores corresponden al valor absoluto de la diferencia entre la energía calculada en términos de ψ_4 y la energía en términos de los invariantes de norma (línea continua/azul) y el valor absoluto de la diferencia entre energía calculada en términos de ψ_4 y la energía calculada en términos del escalar Ψ_4 calculado en términos de los invariantes de norma (línea punteada/roja). Nótese que en la figura de la derecha consideramos la radiación espuria y en la izquierda la despreciamos. Por completez, en el panel superior derecho superponemos la parte real del coeficiente A_{20} calculado numéricamente y la parte real del coeficiente A_{20} calculado en términos de los invariantes de norma. 134
- 6.6. Momento lineal en la dirección z radiado en la colisión frontal de dos agujeros negros (configuración MI_{+0}) a un radio de extracción de $R = 40M$. Por la simetría del problema las demás componentes se anulan. El momento lineal es calculado usando la teoría de perturbaciones (línea roja/discontinua) o usando el escalar de Weyl Ψ_4 (línea azul/continua). Nótese que la velocidad con la que se mueve el agujero negro resultante es $\vec{v} = 0.21 \text{ km/s } \hat{e}_z$. La figura interior de la derecha corresponde al momento lineal radiado en la configuración NI_{00} usando el escalar Ψ_4 (línea azul/continua) y teoría de perturbaciones (línea roja/discontinua). Encontramos que la velocidad con la que se desplaza el agujero negro final es $\vec{v} = 3.21 \text{ km/s } \hat{e}_z$. Estos resultados son consistentes con los resultados presentados en [46]. 136

Índice de tablas

- 6.1. Datos iniciales para la colisión frontal de dos agujeros negros. Por simplicidad, consideramos configuraciones para las cuales la masa ADM del sistema es igual a uno y localizamos los agujeros negros, al igual que sus respectivos espines, sobre el eje z . El parámetro a_i es aproximadamente el parámetro de espín de un agujero negro de Kerr y L es la separación propia entre los dos horizontes aparentes. 125
- 6.2. Energía y momento lineal radiado en la colisión de agujeros negros correspondientes a los datos iniciales de la tabla 6.1. Por la simetría del problema no se radia momento angular. La energía y los momentos angulares fueron calculados usando las expresiones presentadas en el capítulo 5. Nótese que el tiempo de fusión, que corresponde al tiempo en el que aparece un horizonte en común, de los agujeros negros con espín $T_{\text{fusión}}$ no parece cambiar significativamente con respecto al tiempo de fusión de los agujeros negros sin espín. 133

INTRODUCCIÓN

1.1. Relatividad Numérica

La teoría general de la relatividad formulada por Albert Einstein a finales de 1915 [52, 53] ha cambiado dramáticamente la forma en la que en la actualidad interpretamos el espacio y el tiempo. Para esta teoría, la gravitación no es una fuerza, tal como se consideraba con la teoría newtoniana, sino una manifestación dinámica de la geometría del espacio-tiempo. Un objeto masivo distorsiona la geometría del espacio-tiempo y esta a su vez altera el movimiento del objeto. La forma en que la geometría se relaciona con las distribuciones de masa y energía nos la dice las ecuaciones de campo¹

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (1.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo, $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ el escalar de curvatura y $T_{\mu\nu}$ el tensor de momento-energía de la materia.

A simple vista, uno podría pensar que estas ecuaciones son simples de resolver. No obstante, la complejidad de este sistema de ecuaciones solo permitió encontrar, durante varias décadas, un número limitado de soluciones caracterizadas por un alto grado de simetría. Un ejemplo de esto, es la solución esféricamente simétrica de Schwarzschild o de Kerr para espacio-tiempos axialmente simétricos.

Cuando uno intenta resolver las ecuaciones de Einstein (1.1) debe tener en cuenta dos puntos importantes antes que intentar nada. Primero, estas ecuaciones están escritas de forma covariante, es decir,

¹Estas ecuaciones están escritas en unidades geométricas, es decir, $c = G = 1$. En la siguiente sección discutiremos la notación y convenciones que estaremos usando a lo largo de esta tesis.

podemos usar cualquier sistema de coordenada para intentar resolverlas. Esta enorme libertad en la forma en la que podemos elegir coordenadas, que es muy útil en la búsqueda de soluciones, puede llegar, sin embargo, a complicar la interpretación de la solución que obtenemos. El segundo punto se refiere a sus propiedades matemáticas. Las ecuaciones de campo,² en cuatro dimensiones, forman un conjunto de diez ecuaciones diferenciales no-lineales acopladas de segundo orden para la métrica. Así que, intentar encontrar alguna solución con relevancia astrofísica básicamente resulta imposible. Estas dos “complicaciones” son las responsables de que, como ya dijimos antes, las soluciones exactas que se conocen hoy en día presenten alto grado de simetría.

Esto no quiere decir que con la relatividad general sea imposible hacer predicciones relevantes. Esta teoría, por ejemplo, predice que la trayectoria de un rayo de luz es desviada por la presencia de un objeto masivo, hecho que fue confirmado durante los eclipses de 1919 y 1922. También puede explicar la precesión del perihelio de Mercurio, colapsos gravitacionales, etc. De hecho, se han realizado muchas pruebas a la teoría y hasta ahora todas parecen confirmarla. Una detallada discusión acerca de pruebas experimentales de la relatividad general es presentada en [136].

Uno de los caminos más fructíferos en el intento de entender las implicaciones de la relatividad general parece ser el uso de métodos y/o aproximaciones numéricas para resolver las ecuaciones (1.1). Por ejemplo, a través de resultados numéricos, Choptuik descubrió los fenómenos críticos en el colapso gravitacional [47]. A partir de esta necesidad ha surgido el área de la relatividad numérica.

La relatividad numérica se empezó a desarrollar durante las décadas de los sesentas y setentas a partir de los trabajos pioneros de Hahn y Linqvist [68] y Smarr y Epply [120, 55, 56] sobre la colisión frontal de agujeros negros. Sin embargo, los recursos computacionales en ese momento eran muy limitados y los resultados numéricos obtenidos no fueron los mejores. En la actualidad, con la nueva tecnología en supercomputadoras, el panorama de la relatividad numérica ha cambiado radicalmente. Ahora es posible hacer simulaciones a muy alta resolución³ que han permitido a la comunidad de relatividad numérica enfrentar problemas teóricos mucho más interesantes y por lo tanto cada vez más complicados. Por ejemplo, y para citar los trabajos más relevantes de los últimos años, después de los trabajos de Pretorius, del grupo de Brownsville y el grupo de Goddard sobre la evolución de agujeros negros en órbita [99, 41, 16], ahora estamos en posición de estudiar la colisión de agujeros negros con espín, la interacción del espín-órbita

²Nos referiremos a las ecuaciones (1.1) como ecuaciones de Einstein o ecuaciones de campo indistintamente.

³Por ejemplo en [36] se reportaron simulaciones numéricas del espacio-tiempo de Schwarzschild con una resolución máxima de $h = M/512$.

en sistemas binarios, etc. Todos estos desarrollos numéricos y, por supuesto, teóricos han permitido la consolidación de la relatividad numérica como otra rama independiente de investigación en relatividad general. A pesar de estos avances aun continuamos con el problema de los recursos computacionales. Hagamos una cuenta rápida. En una simulación típica de agujeros negros, por ejemplo las simulaciones presentadas en los Capítulos 4 y 6, se usa una malla numérica de aproximadamente 300^3 puntos, es decir, aproximadamente 10^7 puntos. Por otro lado, el número típico de variables para evolucionar, variables de norma, variables geométricas y otras variables auxiliares tales como la variable $\chi = \exp(-4\phi)$ necesaria para evolucionar la puntura, es de alrededor de 50 variables. Así que, teniendo en cuenta que en promedio durante las evoluciones numéricas, en cada punto de la malla necesitamos un Kbyte de memoria RAM, en total necesitaríamos aproximadamente 50 Gbytes de memoria disponible por cada paso de tiempo. Sumado a esto, necesitamos hacer análisis de la simulación, digamos de diez variables cada 100 pasos de tiempo. Esto es al rededor de un Tbyte de disco para almacenar tan solo información. Así que, explorar las simetrías de un problema dado para disminuir los recursos computacionales es indispensable. La simetría natural para comenzar a estudiar problemas de este tipo es la esférica. Bajo esta consideración, los problemas tri y bidimensionales se reducen a problemas unidimensionales, los cuales pueden ser abordados con modestos recursos computacionales. Sin embargo, existen muy pocos problemas relevantes que se puedan atacar con esta simetría tan restrictiva. La siguiente simetría, mucho más interesante que la esférica, es la axial. Los espacio-tiempos con simetría axial pueden ser usados para estudiar, por ejemplo, la colisión de frente de dos agujeros negros, fenómenos de acreción, etc. Además de esto, con los nuevos detectores de ondas gravitacionales, LIGO, VIRGO, GEO 600 y TAMA entre otros, tenemos una gran demanda en el análisis del patrón de ondas gravitacionales provenientes de simulaciones de la colisión de objetos compactos. Como un espacio-tiempo axialmente simétrico permite ondas gravitacionales, podemos estudiar este tipo de patrones en simulaciones numéricas que ocupan menos recursos computacionales que en el caso de simulaciones tridimensionales.

No obstante, a pesar de la evidente necesidad de usar códigos adaptados a una simetría dada, se han hecho pocos avances en esta dirección. Al considerar sistemas de coordenadas curvilíneas se produce una pérdida de regularidad de las variables geométricas, por ejemplo, si usamos coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) para describir un espacio-tiempo esféricamente simétrico, que son evidentemente singulares en el origen, varios términos en cada una de las ecuaciones de evolución divergen como $1/r$ a pesar de que en un sistema localmente plano ⁴ la regularidad de estos términos esta garantizada. En un espacio-

⁴Un espacio-tiempo general descrito por coordenadas curvilíneas siempre puede ser expresado localmente usan-

tiempo con simetría axial nos encontramos con un problema similar cuando nos aproximamos al eje de simetría. Alcubierre y González presentaron en [9] un algoritmo de regularización para evitar este tipo de singularidades para espacio-tiempos esféricamente simétricos. Sin embargo, no es claro como generalizar este algoritmo al caso axial sin destruir la hiperbolicidad del sistema de ecuaciones. Recientemente, un método de regularización para espacio-tiempos axialmente simétricos fue propuesto por Rinne y Stewart en [107, 104] para el formalismo de evolución Z_4 [23, 24]. Este método se basa esencialmente en la forma general que deben tener las componentes de cualquier tensor axialmente simétrico. Siguiendo esta misma idea, presentamos en [108] un algoritmo de regularización general para espacio-tiempos esférica y axialmente simétricos. La ventaja de este método sobre los dos anteriores es que no necesitamos introducir alguna variable adicional para garantizar la regularidad de las funciones geométricas.

El otro punto que se debe tener en cuenta al realizar evoluciones numéricas en relatividad general es el de las condiciones de frontera; en ausencia de fronteras, uno puede mostrar que si inicialmente las constricciones se satisfacen, las identidades de Bianchi junto con las ecuaciones de evolución garantizan que las constricciones se satisfagan a todo tiempo. Sin embargo, como una consecuencia de imponer condiciones de frontera artificiales,⁵ aparecen modos de propagación que violan las constricciones. Este es un problema que hasta hace muy pocos años se le ha comenzado a dar la importancia que merece [59, 125, 40]. Miller mostro en [88] que una mala elección de condiciones de frontera afecta dramáticamente la dinámica del sistema. Uno puede pensar, sin embargo, que el efecto de las condiciones de frontera debe disminuir cuando colocamos las frontera cada vez mas lejos de la región de interés, es decir, alejamos tanto las fronteras que cualquier modo de propagación que se genere en la frontera este desconectado causalmente de la dinámica del sistema. En efecto, a falta de unas buenas condiciones de frontera, esto es lo que actualmente se hace. Por ejemplo, en la colisión de frente de dos agujeros negros con espín (ver Capítulo 6) las condiciones de frontera se encuentran a 380M y la extracción de ondas gravitacionales es a 40M de la región de interés físico. Sin embargo, esta solución pragmática nos lleva de nuevo al problema de los recursos computacionales. Así que, imponer condiciones de frontera compatibles con las constricciones es igualmente indispensable.

En esta tesis, damos una revisión a los tres aspectos que, a grandes rasgos, hemos descrito antes. En el Capítulo 2 daremos una breve introducción al formalismo $3 + 1$ de la relatividad general, el cual es

do un sistema de referencia inercial plano.

⁵Por condiciones artificiales queremos decir condiciones de frontera que debemos imponer manualmente ya que la malla numérica es finita.

necesario para escribir las ecuaciones de campo (1.1) como ecuaciones de evolución. Adicionalmente, describiremos las ideas principales detrás de los tres formalismos de evolución usados por la mayor parte de la comunidad de relatividad numérica; el formalismo BSSN, basado en el trabajo de Shibata y Nakamura [119] y Baumgarte y Shapiro [21], el cual es el usado por el 90% de los grupos de relatividad numérica y que nosotros utilizaremos en las simulaciones de la colisión de agujeros negros en el Capítulo 6. El formalismo de Nagy-Ortiz-Reula [92] o formalismo NOR, que es un formalismo hiperbólico y, de alguna manera, alternativo al BSSN y que lo usaremos, por simplicidad, en el Capítulo 3. Finalmente, el armónico, que nos permite reescribir las ecuaciones (1.1) como un conjunto de ecuaciones de onda lo cual garantiza automáticamente que el sistema de ecuaciones resultantes es fuertemente hiperbólico. Esto nos facilita el encontrar condiciones de frontera compatibles con las constricciones. En el apéndice A discutimos brevemente el concepto de hiperbolicidad y mostramos explícitamente que las formulaciones ADM y NOR son débil y fuertemente hiperbólicas respectivamente en la norma Bona-Masso. Por otro lado, en el Capítulo 3 se presenta un método de regularización de las ecuaciones de evolución en el caso de simetría esférica y axial. Mostramos explícitamente que nuestro algoritmo de regularización es independiente y no afecta la hiperbolicidad de nuestro sistema de ecuaciones. Por completez, ya que las ecuaciones de evolución resultantes son extremadamente largas, en el apéndice B presentamos las ecuaciones de evolución para el caso esférico y mostramos que nuestras ecuaciones de evolución son manifiestamente regulares. En el Capítulo 4 construimos un conjunto de familias de condiciones de frontera que preserva las constricciones. Estas nuevas condiciones de frontera incluyen las recientes propuestas que reducen la cantidad de falsas reflexiones⁶ de la radiación gravitacional [37, 38] en la frontera. En el apéndice C presentamos las condiciones de frontera maximalmente disipativas. Finalmente, en los Capítulos 5 y 6 presentamos un estudio sistemático de la colisión de frente de dos agujeros negros con diferentes magnitudes de espín y diferentes relaciones masas. Para esto, en el Capítulo 5 encontramos las expresiones generales para la energía, el momento lineal y el momento angular radiados por el sistema usando una descomposición del escalar de Weyl ψ_4 en armónicos esféricos con peso de espín. Las relaciones de ortogonalidad y algunas otras propiedades para esta base se presentan en el apéndice D. En el Capítulo 6, usamos estas expresiones para calcular cada uno de estos observables físicos. Finalmente, concluimos en el capítulo 7.

⁶Por falsas reflexiones queremos decir, reflexiones numéricas que se originan por la presencia de fronteras artificiales.

1.2. Notación

En relatividad general, tal y como sucede en en la mayoría de las disciplinas de investigación, no existe un consenso sobre cual debe ser la notación que sea usada por todos los grupos de investigación en relatividad. Así que es necesario hablar explícitamente de la notación que usaremos a lo largo de esta tesis para evitar ambigüedades.

A menos que esté mencionado explícitamente en otro lugar, estaremos usando:

- Notación de índices abstracta para tensores. El número de índices indica el rango del tensor.
- Para evitar usar el símbolo de suma, a través de toda la tesis estaremos usando la convención de suma de Einstein. Índices repetidos, uno abajo y otro arriba, implican una suma. Por ejemplo,

$$A_\mu B^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu. \quad (1.2)$$

- Los índices griegos ($\alpha, \beta \dots$) son índices de espacio-tiempo, es decir, son usados para objetos geométricos que están definidos sobre el espacio-tiempo de cuatro dimensiones y corren de cero a tres. La componente cero denota la componente temporal, mientras que las demás componentes denotan las componentes espaciales. Por el contrario, los índices latinos (i, j, \dots) son usados para objetos puramente espaciales y corren de uno a tres.
- En un lugar donde sea explícitamente necesario distinguir objetos tridimensionales de objetos cuatro dimensionales usaremos los superíndices ⁽³⁾ y ⁽⁴⁾ en cada uno de los respectivos objetos.
- La métrica que describe el espacio-tiempo es denotada por $g_{\mu\nu}$, mientras que la métrica que describe las superficies espaciales es γ_{ij} . Adicionalmente, la signatura que usamos para $g_{\mu\nu}$ es $(-+++)$.
- La parte simétrica o antisimétrica de un tensor es denotada por paréntesis redondos o cuadrados respectivamente, es decir, la parte simétrica de $A_{\mu\nu}$ esta dada por

$$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}), \quad (1.3)$$

mientras que la parte antisimétrica es

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}), \quad (1.4)$$

-
- Los operadores diferenciales $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$ y ∇_i denotan la derivada ordinaria y derivada covariante respectivamente.
 - Finalmente un comentario acerca de las unidades. Para evitar arrastrar constantes a lo largo de toda la tesis, hemos elegimos el sistema de unidades geométricas, donde la constante de la gravitación de Newton G y la velocidad de la luz c son iguales a uno. En este sistema de unidades todas las cantidades físicas tienen unidades de longitud a alguna potencia. Para regresar al sistema de unidades internacional basta con multiplicar por una combinación adecuada de las constantes G y c a alguna potencia.

Para finalizar este capítulo, quiero mencionar un punto importante. La discusión presentada en esta tesis esta basada en las referencias [108, 109, 110]. El artículo [108] fue escrito en colaboración con el Dr. Miguel Alcubierre y el Dr. Darío Núñez, aunque el código numérico empleado fue escrito bajo la asesoría del Dr. Alcubierre. El artículo [109] fue escrito en colaboración con el Dr. Olivier Sarbach y el Dr. Oliver Rinne; la mayor parte de este trabajo fue hecha en conjunto con el Dr. Sarbach, aunque las simulaciones numéricas presentadas en [109] y en la sección 4.3.3 fueron implementadas en el código SpEC solamente por el Dr. Rinne. Por otro lado, el artículo [110] fue escrito en colaboración con el Dr. Alcubierre y el Dr. Núñez, aunque un estudio numérico preliminar de estos resultados fue hecho en conjunto con el Dr. Ryoji Takahashi.

FORMALISMOS DE EVOLUCIÓN

Cuando uno piensa en simulaciones numéricas, automáticamente piensa en variables dinámicas y en sus respectivas ecuaciones de evolución. Sin embargo, como las ecuaciones de Einstein (1.1) están escritas de tal forma que el espacio y el tiempo son simétricos y juegan exactamente los mismos papeles, no podemos directamente reescribir estas ecuaciones como ecuaciones de evolución. Por lo tanto, para simulaciones numéricas lo primero que debemos hacer es romper esta simetría. Uno de los caminos más usados para hacer esto, aunque no el único, es a través de la formulación 3+1 de la relatividad general. Esta formulación se basa en la foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies tipo espacio Σ_t , las cuales están parametrizadas por la coordenada t constante, y en proyecciones de las ecuaciones de campo a lo largo de la tangente y la normal a las hipersuperficies a Σ_t . Otras formas de romper la simetría entre las coordenadas espaciales y la coordenada temporal, que son de alguna manera análogas a la formulación 3 + 1, son el formalismo Característico que fue introducido por Bondi [67] y Sachs [111] en los años sesenta, el formalismo conforme introducido por Friedrich en los años ochenta [57], o usando una norma específica, por ejemplo, la norma armónica, para la cual se exige que las coordenadas satisfagan $\square x^\mu = 0$. Una detallada discusión acerca de las ecuaciones de Einstein escritas en esta norma es presentada en [100, 85]. En el formalismo característico, en lugar de hacer una foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales como en la formulación 3 + 1, se hace una foliación en hipersuperficies nulas o conos de luz. Esta descomposición tiene la ventaja de que las ecuaciones de campo pueden ser compactificadas de forma tal que el infinito nulo es rigurosamente representado a una distancia finita sobre la malla numérica. Con esta compactificación no existen condiciones de frontera externas artificiales. A pesar de lo llamativo que suena esta formulación, tenemos el problema, por ejemplo, de que las coordenadas están generadas por rayos de luz, los cuales pueden ser enfocados por un fuerte campo gravitacional. Por otro lado, el

formalismo conforme se basa en una compactificación conforme que mapea todos los puntos del espacio-tiempo a una distancia finita en el espacio coordinado y una reformulación de las ecuaciones (1.1) en términos de las funciones geométricas reescaladas por el factor conforme. Al igual que en el formalismo característico, el infinito nulo es incluido en la malla numérica. La formulación conforme es muy útil para el problema de la extracción de la radiación gravitacional y su inconveniente radica en la dificultad de encontrar datos iniciales adecuados. Una detallada discusión acerca de esta formulación puede ser encontrada en [73].

Una vez que logramos escribir las ecuaciones de Einstein como ecuaciones de evolución, debemos preocuparnos por que las ecuaciones obtenidas estén matemáticamente bien planteadas, es decir, que el problema de valores iniciales asociado con las resultantes ecuaciones de evolución este bien planteado (ver apéndice A). Por ejemplo, ya sabemos, desde mediados de los años noventa, que el problema de valores iniciales asociado con las ecuaciones de evolución de Arnowitt-Deser-Misner, conocidas como ecuaciones ADM, esta malplanteado si usamos las usuales ecuaciones de evolución para el lapso (tipo Bona-Masso) y, por ejemplo, la ecuación de evolución *Gamma Driver* para el vector de corrimiento.¹ Este problema causa que las simulaciones numéricas rápidamente sean inestables.² A continuación daremos una breve introducción al formalismo 3 + 1 de la relatividad general y discutiremos las principales ideas detrás de las formulaciones BSSN y NOR, cuyo problema de valores iniciales esta bien planteado. Finalizamos este Capítulo, reescribiendo las ecuaciones de campo en la norma armónica.

2.1. Formulación 3+1 de la relatividad general

Consideremos un espacio-tiempo \mathcal{M} globalmente hiperbólico con una métrica $g_{\mu\nu}$ y una foliación particular F ; la razón para usar un espacio-tiempo globalmente hiperbólico es que este puede ser foliado completamente por hipersuperficies espaciales, tal y como se muestra en la figura 2.1. Así que, asumiremos, a partir de este momento, que todos los espacio-tiempos tienen esta propiedad. Cada hipersuperficie

¹En general no es posible garantizar la estabilidad ni la unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, el cual tiene asociado un problema de valores iniciales mal planteado. Una detallada discusión acerca de esto es presentada en el apéndice A.

²Es importante resaltar que las ecuaciones ADM como las tenemos presentadas en esta tesis fueron rederivadas por York [137] y existen algunas diferencias entre las ecuaciones ADM originales y las ecuaciones ADM por York. Una detalla discusión acerca de esto es presentada en [3].

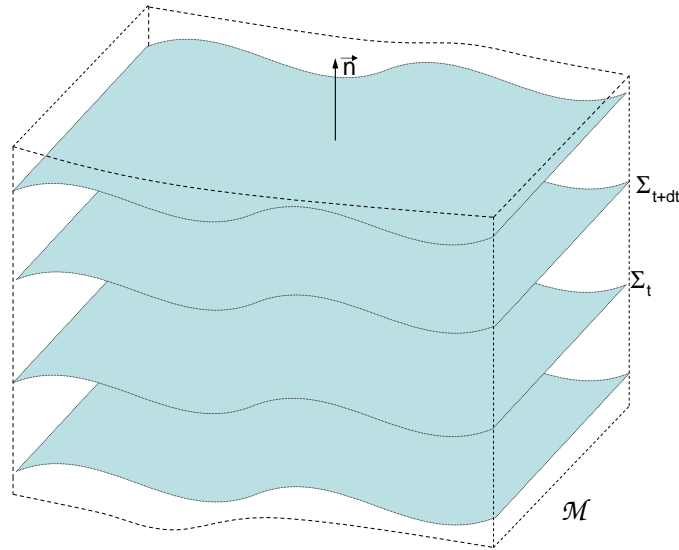


FIGURA 2.1: *Espacio-tiempo globalmente hiperbólico \mathcal{M} foliado en hipersuperficies espaciales Σ_t . Cada hipersuperficie es parametrizada por la coordenada temporal t .*

espacial Σ_t puede ser parametrizada por la coordenada t , la cual puede ser considerada como una función de tiempo universal. Por supuesto, este tiempo no necesariamente debe coincidir con el tiempo propio de algún observador. Dada la foliación, lo siguiente por hacer es preguntarnos como podemos describir la geometría de este espacio. Para esto, consideremos dos hipersuperficies infinitesimalmente cercanas Σ_t y $\Sigma_{t+\Delta t}$ tal y como se muestra en la figura 2.2. La geometría de la región del espacio-tiempo contenida entre ambas hipersuperficies esta descrita por las siguientes funciones geométricas:

- I. La métrica espacial γ_{ij} que mide distancias sobre la hipersuperficie tridimensional Σ_t . Dada la métrica γ_{ij} , podemos definir el elemento de línea tridimensional como:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j . \quad (2.1)$$

- II. El lapso de tiempo propio $d\tau$ entre ambas hipersuperficies que mide un observador que se mueve a lo largo de la dirección normal a ellas. Este observador se conoce como *observador de Euler*. Uno puede relacionar, a partir de la definición de tiempo propio y coordenado, el tiempo τ con el tiempo universal t a través de la relación:

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt , \quad (2.2)$$

donde $\alpha(t, x^i)$ es la llamada función de lapso.

III. La velocidad relativa β^i entre los observadores de Euler y las líneas con coordenadas espaciales constantes. La velocidad β^i es conocida como el vector de corrimiento y se puede obtener a través de la relación

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^i) dt. \quad (2.3)$$

En términos de estas tres cantidades, uno puede reescribir la métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo como:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2 \beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.4)$$

donde hemos definido $\beta_i \equiv \gamma_{ij} \beta^j$. Claramente, la manera en la que se hace la foliación no es única, y de la misma forma, la manera en la que se propaga el sistema de coordenadas espacial de una hipersuperficie a otra tampoco lo es. Esto significa que tanto el lapso como el vector de corrimiento son funciones que se pueden especificar libremente. Estas funciones determinan nuestro sistema de coordenadas y se conocen como *funciones de norma*. Nótese que, por lo tanto, las componentes métricas g_{tt} y g_{ti} solo se pueden especificar eligiendo un sistema de coordenadas específico.

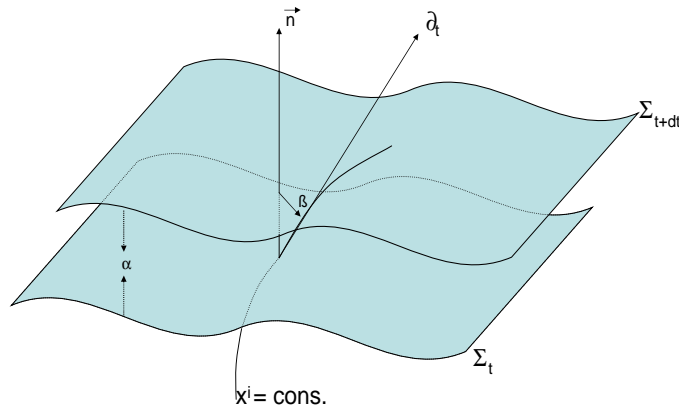


FIGURA 2.2: Foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies tridimensionales tipo espacio. La función de lapso α mide el intervalo de tiempo propio entre las hipersuperficies a lo largo de la trayectoria normal y el vector de corrimiento β^i mide la velocidad relativa entre las trayectorias normales y las líneas con coordenadas espaciales fijas.

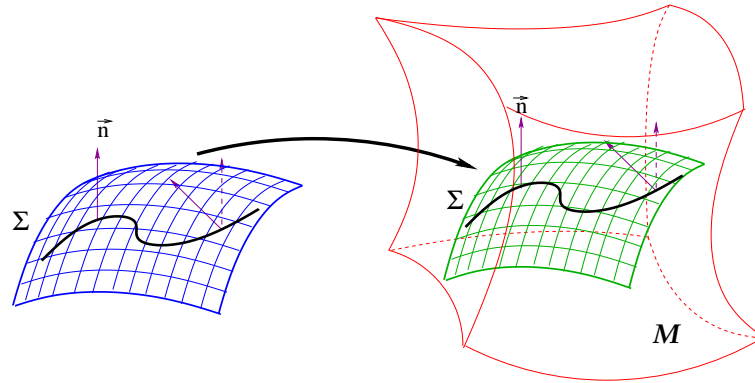


FIGURA 2.3: Hipersuperficie espacial Σ_t encajada en el espacio-tiempo \mathcal{M} . El cambio en la dirección del vector nulo \vec{n} bajo transporte paralelo nos da información de como esta hipersuperficie esta encajada en \mathcal{M} , es decir, nos da información de la curvatura extrínseca de Σ_t .

Finalmente, el ingrediente que nos falta para cerrar esta discusión es saber cómo las hipersuperficies espaciales Σ_t están encajadas en el espacio-tiempo \mathcal{M} . Para esto, es necesario hablar de la curvatura extrínseca de las hipersuperficies.

2.2. Curvatura intrínseca y extrínseca

Al hablar de la curvatura del espacio-tiempo \mathcal{M} desde el punto de vista de la descomposición $3 + 1$, debemos distinguir entre la curvatura intrínseca y la curvatura extrínseca de cada hipersuperficie tridimensional por el hecho de que estas hipersuperficies están encajadas en el espacio-tiempo (ver figura 2.3). Para aclarar esto, como ejemplo, consideremos un cilindro visto desde \mathbb{R}^3 y visto sin tener en cuenta ningún sistema de referencia, tal y como se muestra en el figura 2.4. El cilindro encajado en \mathbb{R}^3 es sin duda alguna curvo. Diremos entonces que el cilindro es extrínsecamente curvo. Por otro lado, si consideramos el cilindro sin referirnos a algún sistema de referencia y trazamos dos líneas paralelas sobre su hipersuperficie, claramente estas líneas no se intersectarán en ningún punto. Por lo tanto, diremos que el cilindro es intrínsecamente plano. Nótese que, en analogía con el tensor de Riemann ${}^{(4)}R_{\mu\nu\alpha\beta}$ que mide la curvatura del espacio-tiempo \mathcal{M} , la curvatura intrínseca se puede calcular a través del tensor de Riemann tridimensional ${}^{(3)}R_{ijkl}$, el cual se define en términos de la métrica γ_{ij} . Por otro lado, para dar una definición geométrica de la curvatura extrínseca, consideremos una hipersuperficie Σ_t encajada en el

espacio-tiempo y un vector normal unitario n^μ a esta, tal y como se muestra en la figura 2.3. No es difícil mostrar que las componentes de \vec{n} están dadas por:³

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0), \quad (2.5)$$

de donde es claro que, por construcción, el vector unitario \vec{n} es tipo tiempo, es decir,

$$n^\mu n_\mu = -1.$$

Con esto, podemos introducir el operador de proyección $P^\mu{}_\nu$, el cual toma cualquier vector del espacio-tiempo r^μ y lo proyecta a la hipersuperficie Σ_t . Este operador está definido como:

$$P^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu, \quad (2.6)$$

donde $\delta^\mu{}_\nu = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ y $n_\nu \equiv g_{\mu\nu}n^\mu$. Usando este operador, el tensor de curvatura extrínseca es definido como

$$K_{\alpha\beta} \equiv -P^\mu{}_\alpha \nabla_\mu n_\beta = -\left(\nabla_\alpha n_\beta + n_\alpha n^\nu \nabla_\nu n_\beta\right). \quad (2.7)$$

Nótese que el tensor $K_{\alpha\beta}$ cumple con la relación

$$n^\alpha K_{\alpha\beta} = n^\beta K_{\alpha\beta} = 0,$$

es decir, es un tensor puramente espacial. Adicionalmente, el tensor de curvatura extrínseca $K_{\alpha\beta}$ es, como se verá más adelante, simétrico en sus dos índices.

Aunque esta definición, es desde el punto de vista matemático elegante, es poco intuitiva. Una definición más clara, con significado geométrico, puede darse recordando el ejemplo del cilindro. Para esto, consideremos una vez más el cilindro visto desde \mathbb{R}^3 y el vector normal a su hipersuperficie \vec{n} en el punto a , tal y como se muestra en la figura 2.4. Si transportamos paralelamente este vector del punto a al punto b y lo comparamos con el vector normal en este punto, es claro que los dos vectores están apuntando en dos distintas direcciones. Este cambio en la dirección lo mide la curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$. Teniendo en cuenta esto último, se puede mostrar que una definición completamente equivalente a (2.7) es

$$K_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\alpha\beta}, \quad (2.8)$$

donde \mathcal{L} denota la derivada de Lie. Usando (2.5) en (2.8) es posible mostrar que, teniendo en cuenta que la curvatura extrínseca es puramente espacial,

³Nótese que, por definición, el vector \vec{n} define la velocidad cuatro-dimensional de los observadores de Euler.

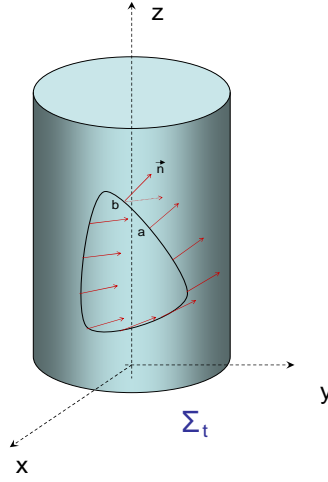


FIGURA 2.4: Hipersuperficie espacial Σ_t encajada en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . El vector normal \vec{n} es transportado paralelamente de un punto a otro sobre la hipersuperficie espacial Σ_t .

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -\frac{1}{2\alpha} \left(\partial_t \gamma_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \gamma_{ij} \right) \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \left(\partial_t \gamma_{ij} - \nabla_i \beta_j - \nabla_j \beta_i \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde hemos usado que $\mathcal{L}_{\vec{t}} = \partial_t$ en un sistema de coordenadas adaptado. Esta última expresión puede reescribirse como:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \nabla_i \beta_j + \nabla_j \beta_i. \quad (2.10)$$

Así que, de acuerdo con la expresión anterior, podemos interpretar a la curvatura extrínseca K_{ij} como la *velocidad* de la métrica espacial γ_{ij} . Esta es una de las ecuaciones de evolución que necesitamos para reescribir la relatividad general como un problema de valores iniciales. La otra ecuación que necesitamos encontrar es la ecuación de evolución para K_{ij} . Para esto, usaremos proyecciones de las ecuaciones de Einstein a lo largo de la hipersuperficie espacial Σ_t y su normal.

Usando el vector n^μ y el operador de proyección (2.6) sobre las ecuaciones (1.1) podemos separarlas en los siguientes dos grupos:

1. Cuatro ecuaciones sin derivadas temporales, llamadas ecuaciones de constricción:⁴

a) Constricción Hamiltoniana,

$$H \equiv R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 0, \quad (2.11)$$

donde $R \equiv \gamma^{ij} R_{ij}$, R_{ij} es el tensor de Ricci tridimensional sobre Σ_t y K es la traza de la curvatura definida como $K = \gamma^{ij} K_{ij}$. Esta expresión es obtenida al proyectar los dos índices libres de (1.1) a lo largo de la dirección normal a la hipersuperficie espacial Σ_t .

b) Constricción de momento

$$M^j \equiv \nabla_i [K^{ij} - \gamma^{ij} K] = 0, \quad (2.12)$$

la cual es obtenida a través de una proyección mixta, es decir, a lo largo de la dirección normal y sobre la hipersuperficie Σ_t .

2. Seis ecuaciones con derivadas temporales, obtenidas proyectando los dos índices libres de las ecuaciones de Einstein sobre Σ_t ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ij}}{\partial t} &= -\nabla_i \nabla_j \alpha + \alpha [R_{ij} - 2K_{ik} K^k_j + K K_{ij}] + \mathcal{L}_\beta K_{ij} \\ &= -\nabla_i \nabla_j \alpha + \alpha [R_{ij} - 2K_{ik} K^k_j + K K_{ij}] \\ &+ \beta^k \nabla_k K_{ij} + K_{ik} \nabla_j \beta^k + K_{jk} \nabla_i \beta^k. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Esta última expresión junto con (2.10) forman un sistema cerrado de ecuaciones de evolución conocidas como ecuaciones de Arnowitt-Deser-Misner (ADM). Así que, con este sistema de ecuaciones hemos reescrito la relatividad general como un problema de valores iniciales. Por lo tanto, lo único que necesitamos es resolver numéricamente las ecuaciones ADM para evolucionar cualquier espacio-tiempo. Sin embargo, como mostramos en el apéndice A, el problema de valores iniciales asociado con este sistema de ecuaciones está mal planteado y, por lo tanto, conducen a inestabilidades numéricas. En la sección 2.4 presentamos brevemente las principales ideas detrás de formulaciones alternativas cuyo problema de valores iniciales asociado está bien planteado.

Antes de discutir las formulaciones alternativas a ADM, es necesario en este punto hablar de las variables de norma. Nótese que las ecuaciones ADM involucran la función de lapso α y el vector de corrimiento

⁴Para los cálculos presentados aquí es suficiente suponer que estamos en vacío.

β^i y las ecuaciones de Einstein no nos dijeron nada sobre como elegir y/o evolucionar estas variables. Esto era de esperarse pues, como ya mencionamos antes, estas variables son funciones de norma. Así que uno debe especificar libremente estas variables. Intuitivamente uno podría pensar en usar la solución más simple, $\alpha = 1$ y $\beta^i = 0$. Sin embargo, uno puede mostrar que en general, y contrario a lo que uno piensa, esta solución rápidamente hace que el sistema de coordenada que estamos usando sea singular. En la siguiente sección presentamos un breve resumen de las propuestas que tenemos en la actualidad para elegir estas variables.

2.3. Variables de norma

Cuando estudiamos la evolución dinámica del espacio-tiempo es importante elegir un sistema de coordenadas que nos permita no solo cubrir la mayor parte de este espacio sino que a su vez nos ayude a evitar cualquier tipo de irregularidad, como singularidades coordenadas o físicas. En el lenguaje $3 + 1$, esto se traduce, en como hacer una adecuada elección del lapso y del vector de corrimiento. Desde el punto de vista geométrico, con la elección de la función de lapso α automáticamente hacemos una foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales. Esta es la razón por la cual a esta elección se le conoce con el nombre de *condición de foliación*. Por otro lado, con la elección del vector de corrimiento β^i , elegimos como las líneas coordenadas se propagan de una hipersuperficie a otra, por ejemplo, con la suposición de que $\beta^i = 0$, las líneas coordenadas se propagan en la misma dirección que el vector normal a la hipersuperficie (ver figura 2.3). A continuación damos una breve descripción de las condiciones de norma que son más usadas, en la práctica, en la relatividad numérica.

2.3.1. Condiciones de foliación

Existen varias formas de elegir la función de lapso, que se pueden clasificar, siguiendo a [2], de la siguiente forma:

- I. Condición de foliación prescrita: el lapso es una función conocida del tiempo y el espacio. Un ejemplo natural de este tipo de condición es la conocida foliación geodésica, en la cual $\alpha = 1$.
- II. Condición de foliación algebraica: la función de lapso es una función de las variables geométricas de la hipersuperficie espacial. Un ejemplo de este tipo de condición es la conocida foliación $1 + \log$, en la cual, $\alpha = 1 + \ln\gamma$. Empíricamente se encontró que esta condición es robusta en la práctica y, adicionalmente, evita singularidades.

III. Condición elíptica: el lapso se obtiene resolviendo a cada paso de tiempo una ecuación elíptica. En general, esta tipo de condiciones se obtiene cuando suponemos alguna condición sobre la geometría de la hipersuperficie espacial. Un ejemplo de una condición de foliación elíptica es *la foliación maximal* [121], en la cual exigimos que los elementos de volumen espaciales permanezcan constantes durante toda la evolución. Esta condición claramente evita cualquier tipo de singularidades.

Foliación geodésica

Como ya mencionamos antes, la foliación geodésica del espacio-tiempo es la elección más natural que se puede pensar para la función α . Esta condición se obtiene al preguntarnos cual debe ser el valor del lapso para que el tiempo propio del observador de Euler coincida con el tiempo coordinado. Así que, teniendo en cuenta la expresión (2.2) la función $\alpha = 1$.

Para entender el significado geométrico de esta condición es necesario tener en cuenta las siguientes propiedades. Comencemos calculando la aceleración de los observadores de Euler a lo largo de la dirección normal. Esta aceleración esta dada por

$$a^\nu = n^\mu \nabla_\mu n^\nu. \quad (2.14)$$

Nótese que, ya que n^ν es un vector unitario, su gradiente debe ser necesariamente ortogonal a este. Así que, $a^\mu n_\mu = 0$. Por lo tanto, la aceleración del observador de Euler es puramente espacial. Adicionalmente, uno puede mostrar, teniendo en cuenta (2.5) y los resultados del apéndice B de [8], que

$$a_0 = \beta^i \partial_i \ln \alpha, \quad (2.15)$$

$$a_i = \partial_i \ln \alpha. \quad (2.16)$$

Finalmente, el cambio en el tiempo del elemento de volumen esta dado por la divergencia de la velocidad del observador de Euler $\nabla_\mu n^\mu$. Usando la definición (2.8), uno puede mostrar fácilmente que

$$\nabla_\mu n^\mu = -K. \quad (2.17)$$

El nombre de foliación geodésica surge del hecho que, usando la condición $\alpha = 1$ en la expresión (2.16) la aceleración propia del observador de Euler se anula, por lo tanto, estos observadores siguen geodésicas tipo tiempo. Por otro lado, usando la condición geodésica en la ecuación de evolución de la traza de la curvatura extrínseca tenemos que

$$\partial_t K - \beta^i \partial_i K = \alpha K^{ij} K_{ij}.$$

Nótese que el término de la derecha de esta última expresión es definido positivo. Así que, la traza de la curvatura extrínseca a lo largo de la dirección normal siempre crece y por lo tanto, teniendo en cuenta (2.17), el elemento de volumen colapsa a cero. Esta es la razón por la cual esta condición nunca se usa en la práctica.

Foliación maximal

El problema de la foliación geodésica es que esta condición permite que los observadores sean enfocados, es decir, que los elementos de volumen colapsen a cero. Así que, es natural pensar que una mejor condición de foliación es exigir que los elementos de volumen permanezcan constantes en el tiempo. Teniendo en cuenta (2.17), esta condición es equivalente a exigir que

$$\partial_t K = 0 = K .$$

Tomando la traza de la expresión (2.13) y usando la constricción hamiltoniana para eliminar el escalar de Ricci tenemos que

$$\partial_t K - \beta^i \partial_i K = -\nabla^i \nabla_i \alpha + \alpha K_{ik} K^{ki} . \quad (2.18)$$

Entonces, si exigimos que los elementos de volumen permanezcan constantes en el tiempo, la función de lapso deba satisfacer la condición

$$\nabla^i \nabla_i \alpha = \alpha K_{ik} K^{ki} . \quad (2.19)$$

Esta condición es conocida como la *condición maximal*.⁵ Esta condición fue propuesta por primera vez por Lichnerowicz en [84] y es usada con frecuencia por ejemplo en simulaciones de agujeros negros.

Una propiedad importante de esta condición es que evita las singularidades. Por construcción no permite que las líneas coordenadas sean enfocadas y adicionalmente, ya que cerca a una singularidad física no se puede garantizar que los elementos de volumen permanezcan constantes, impide que las hipersuperficies espaciales se aproximen arbitrariamente a las singularidades.

Condiciones de foliación tipo Bona-Masso

El problema con la condición de foliación maximal es que, en cada paso de evolución, necesitamos resolver una ecuación elíptica y no tenemos métodos numéricos que nos permitan resolver de manera

⁵Uno puede mostrar que cuando $K = 0$ el elemento de volumen es maximizado con respecto a pequeñas variaciones en la hipersuperficie Σ_t .

eficiente y en general estas ecuaciones.⁶ Por esta razón sean propuesto otro tipo de condiciones. Una de las propuestas más populares es la familia de condiciones tipo Bona-Masso [27, 28]. Este tipo de condiciones permite, como veremos más adelante, reproducir por ejemplo el comportamiento de la condición maximal resolviendo una simple ecuación evolución hiperbólica.

Para encontrar este familia de condiciones, comencemos exigiendo que las coordenadas satisfagan la condición armónica

$$\square x^\alpha = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu x^\alpha = 0. \quad (2.20)$$

Esta condición, en coordenadas adaptadas, es equivalente a

$$\Gamma^\alpha \equiv g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0, \quad (2.21)$$

donde los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ son calculados usando la métrica $g_{\mu\nu}$. Usando una vez más el apéndice B de [8] para expresar los símbolos de Christoffel cuatro-dimensionales en términos de las variables $3 + 1$, se puede encontrar fácilmente que la componente temporal de la expresión (2.21) es

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 K + \mathcal{L}_\beta \alpha. \quad (2.22)$$

Esta condición es conocida como *condición de foliación armónica*. Nótese que, usando las ecuaciones ADM, esta condición implica que

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} = 0,$$

donde hemos definido la variable $\tilde{\alpha}$ como $\tilde{\alpha} = \alpha/\sqrt{\gamma}$. En el caso en que el vector de corrimiento $\beta^i = 0$, la condición armónica puede ser integrada como $\alpha = h(x^i) \sqrt{\gamma}$, donde la función $h(x^i)$ es una función positiva y arbitraria pero independiente del tiempo.

Una generalización de la condición armónica fue propuesta por primera vez por Bona y Masso [25, 26, 27, 28] en la forma

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K + \mathcal{L}_\beta \alpha, \quad (2.23)$$

⁶Es necesario aclarar este punto. Por supuesto hoy en día existen muchos métodos numéricos para resolver las ecuaciones elípticas de manera eficiente. Por ejemplo, los métodos multi-dominios (o *multigrid*) usando diferencias finitas, los cuales convergen de manera polinomial a la solución deseada. También tenemos los métodos espectrales que, aunque son mucho más rápidos pues su convergencia es exponencial, son mucho más complejos de implementar y/o generalizar numéricamente. Sin embargo, a pesar de contar con estos métodos siempre es más barato, en términos de tiempo computacional, implementar ecuaciones hiperbólicas.

donde $f(\alpha)$ es una función positiva. Se ha mostrado empíricamente que la condición anterior con $f = 2/\alpha$ es robusta y bien comportada para espacio-tiempos con fuertes campos gravitacionales.

2.3.2. Condiciones sobre el vector de corrimiento

Las condiciones sobre el vector de corrimiento son menos conocidas ya que tradicionalmente se asumía que $\beta^i = 0$. En la práctica, para algunos casos asumir esta condición es suficiente. Sin embargo, un vector de corrimiento diferente de cero es necesario, por ejemplo, para evitar que durante la evolución de espacio-tiempos con agujeros negros, el horizonte aparente del agujero negro crezca muy rápidamente en el espacio coordinado (los observadores de Euler caen al agujero negro), lo que causa que, eventualmente el dominio computacional este dentro de dicho horizonte en un tiempo coordinado finito. Adicionalmente, el uso de un vector de corrimiento corrotante permitió hacer la primer evolución binaria de agujeros negros de una órbita [33]. A continuación presentamos algunas propuestas sobre el vector de corrimiento que han sido utilizadas recientemente.

Distorsión mínima

En una típica evolución numérica que involucra fuertes campos gravitacionales, por ejemplo, la evolución de espacio-tiempos que contienen agujeros negros, los elementos de volumen se distorsionan de manera arbitraria. Esto causa que eventualmente la evolución se detenga. Así que si idealmente se controla esta distorsión los códigos numéricos deberían permanecer estables durante mucho tiempo. Teniendo en cuenta esto, Smarr y York propusieron en [122] la condición conocida como *distorsión mínima*. La idea básica de esta condición es controlar y/o eliminar la distorsión de los elementos de volumen durante la evolución. Para imponer esta condición, definimos el tensor de distorsión Σ_{ij} como

$$\Sigma_{ij} \equiv \frac{1}{2} \gamma^{1/3} \mathcal{L}_{\vec{t}} \tilde{\gamma}_{ij}, \quad (2.24)$$

con la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij} = \gamma^{-1/3} \gamma_{ij}$ y, donde por construcción, hemos definido el vector temporal \vec{t} como

$$t^\mu \equiv \alpha n^\mu + \beta^\mu.$$

En analogía con la expresión (2.10), podemos interpretar el tensor de distorsión mínima como la velocidad de la métrica conforme. Usando la ecuación (2.10) se puede reescribir la expresión (2.24) en términos de

las cantidades 3 + 1 como

$$\Sigma_{ij} = -\alpha \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right) + \frac{1}{2} (\mathbf{L}\beta)_{ij}, \quad (2.25)$$

donde el operador \mathbf{L} es definido como:⁷

$$(\mathbf{L}\beta)_{ij} \equiv 2 \nabla_{(i} \beta_{j)} - \frac{2}{3} \gamma_{ij} \nabla_k \beta^k. \quad (2.26)$$

Finalmente, la condición de distorsión mínima se obtiene al minimizar la integral de $\Sigma_{ij} \Sigma^{ij}$ sobre toda la hipersuperficie espacial. Esta condición implica

$$D^i \Sigma_{ij} = 0, \quad (2.27)$$

o de manera equivalente,

$$\Delta_{\mathbf{L}} \beta^i = 2 \nabla_j \left[\alpha \left(K^{ij} - \frac{1}{3} \gamma^{ij} K \right) \right], \quad (2.28)$$

donde hemos definido el operador $\Delta_{\mathbf{L}}$ como

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{L}} \beta^i &\equiv \nabla_j (\mathbf{L}\beta)^{ij} = \nabla^j \nabla_j \beta^i + \nabla_j \nabla^i \beta^j - \frac{2}{3} \nabla^i \nabla_j \beta^j \\ &= \nabla^2 \beta^i + \frac{1}{3} \nabla^i \nabla_j \beta^j + R^i_j \beta^j. \end{aligned} \quad (2.29)$$

La ecuación (2.28) es conocida como la condición de distorsión mínima para el vector de corrimiento. Nótese que esta condición son tres ecuaciones elípticas acopladas para las tres componentes de β^i . Como ya hemos mencionado antes, resolver ecuaciones elípticas en general es muy difícil. Esta es la razón por la cual esta condición es muy poco usada en la práctica.

En los últimos años, se han propuesto ecuaciones de evolución para el vector de corrimiento relacionadas con el tensor de distorsión mínima del tipo

$$\partial_t \beta^i \propto \nabla_j \Sigma^{ij},$$

por ejemplo, la condición parabólica [3]

$$\partial_t \beta^i = \epsilon \left[\nabla^2 \beta^i + \frac{1}{3} \nabla^i \nabla_j \beta^j + R^i_j \beta^j - 2 \nabla_j \left(\alpha \left(K^{ij} - \frac{1}{3} \gamma^{ij} K \right) \right) \right], \quad (2.30)$$

⁷Este operador también aparece cuando se estudian los datos iniciales. Para detalles ver por ejemplo [49, 3]

donde el parámetro ϵ es una constante mayor que cero. Esta ultima ecuación para las componentes del vector de corrimiento es mucho más simple de resolver que la condición de distorsión mínima. Sin embargo, es conocido que, por estabilidad, en toda ecuación parabólica se debe cumplir $\Delta t \leq (\Delta x)^2$. Por lo tanto, el uso de esta condición implica muchos recursos computacionales; al incrementar la resolución espacial nos toma mucho más tiempo llegar al mismo punto temporal. Teniendo en cuenta esto, Alcubierre *et al.* propusieron la condición conocida como *Gamma driver*.⁸ Esta condición tiene la forma [6]

$$\partial_t^2 \beta^i = \alpha^2 \xi \partial_t \tilde{\Gamma}^i, \quad (2.31)$$

donde ξ es una función definida positiva de la posición y/o del lapso y donde hemos usado que $\tilde{\Gamma}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}$.⁹ Se ha mostrado empíricamente que esta condición es extremadamente robusta y bien comportada; en las recientes simulaciones de agujeros negros [41, 16, 64] esta condición fue implementada con un término adicional de amortiguamiento en la forma

$$\partial_t^2 \beta^i = \alpha^2 \xi \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \eta \partial_t \beta^i, \quad (2.32)$$

donde la constante $\eta > 0$. Esta condición fue indispensable para garantizar la estabilidad de los códigos numéricos.

2.4. Formulaciones hiperbólicas de las ecuaciones de Einstein en la descomposición 3+1

El primer paso en el intento por cambiar la estructura matemática de las ecuaciones de evolución surge naturalmente cuando se tiene en cuenta que las ecuaciones de evolución que resultan de la descomposición 3 + 1 no son únicas. Siempre es posible sumar múltiplos de las constricciones para obtener nuevas ecuaciones de evolución sin alterar la solución física correspondiente. Hoy en día, existe una gran cantidad de

⁸Esta condición esta inspirada en la condición *Gamma freezing*,

$$\partial_t \tilde{\Gamma}^i = 0.$$

Para detalles ver, por ejemplo, [3].

⁹Esta igualdad es valida solamente si suponemos que el determinante de la métrica conforme es en general constate.

propuestas hiperbólicas¹⁰ alternativas a la formulación ADM. Por supuesto, unas más populares que otras. Nosotros, sin embargo, brevemente discutiremos dos formulaciones que empíricamente han probado ser particularmente estables durante evoluciones numéricas en diferentes espacio-tiempos.

2.4.1. Formulación BSSN

Una de las formulaciones hiperbólicas más exitosas, alternativas a las ecuaciones ADM, y que es usada por la mayor parte de la comunidad de relatividad numérica es la formulación BSSN introducida a finales de los años ochenta por Shibata y Nakamura [94] y usada a finales de los años noventa por Baumgarte y Shapiro [21] en un estudio sistemático para mostrar que esta nueva formulación es mucho más estable que ADM. La idea principal de esta formulación es la introducción de tres nuevas variables $\tilde{\Gamma}^i$, conocidas como *funciones de conexión conforme*, y una transformación conforme para la métrica y la curvatura extrínseca. Adicionalmente, BSSN separa la curvatura extrínseca en su traza y en un tensor con traza cero. Esto permite, como veremos más adelante, tener mayor control sobre la dinámica del sistema.

Para empezar, consideremos una transformación conforme de la métrica espacial γ_{ij} de la forma

$$\tilde{\gamma}_{ij} \equiv \psi^{-4} \gamma_{ij} \equiv e^{-4\phi} \gamma_{ij}, \quad (2.33)$$

donde el factor conforme ψ se elige de tal forma que el determinante de la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$ sea igual a uno; notese que con esta elección la métrica $\tilde{\gamma}_{ij}$ es por lo tanto una densidad tensorial de peso $-2/3$. Hemos usado la segunda equivalencia porque en la práctica, en lugar de usar el factor conforme ψ , se usa la función ϕ . Teniendo en cuenta esto, es fácil mostrar que

$$\phi = \frac{1}{12} \ln \gamma, \quad (2.34)$$

donde γ es el determinante de la métrica γ_{ij} . Por otro lado, consideremos un reescalamiento conforme de la curvatura extrínseca sin traza,

$$A_{ij} \equiv K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K, \quad (2.35)$$

¹⁰Para la discusión en esta sección es suficiente con asumir que los sistemas de ecuaciones hiperbólicos son sistemas de ecuaciones cuya solución depende continuamente de los datos iniciales. Sin embargo, una discusión sobre el concepto de hiperbolicidad, sistemas débil y fuertemente hiperbólicos es presentada en el apéndice A.

similar al reescalamiento de la métrica γ_{ij} , es decir, de la forma¹¹

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} A_{ij}. \quad (2.36)$$

Hasta este momento, no hemos hecho otra cosa más que redefinir las variables ADM en términos de una descomposición conforme. Una diferencia significativa es que adicionalmente a estas redefiniciones, BSSN introduce tres funciones conformes definidas como

$$\tilde{\Gamma}^i \equiv \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}, \quad (2.37)$$

donde los símbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ son calculados a través de la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$. Así, en lugar de evolucionar las variables ADM, la métrica γ_{ij} y la curvatura extrínseca K_{ij} , la formulación BSSN usa las variables:¹²

$$\phi = \frac{1}{12} \ln \gamma, \quad (2.38)$$

$$K = \gamma^{ij} K_{ij}, \quad (2.39)$$

$$\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij}, \quad (2.40)$$

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} A_{ij}, \quad (2.41)$$

$$\tilde{\Gamma}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}. \quad (2.42)$$

Existen varias motivaciones para elegir la forma de este tipo de variables. Por ejemplo, la transformación conforme y la separación de la curvatura extrínseca en su traza y el tensor A_{ij} permite tener control sobre la condición de foliación, es decir, sobre la función de lapso, que en general, como sugiere la ecuación (2.23), esta relacionada con la traza K . Adicionalmente, a través de (2.34) podemos tener el control, en algún sentido, de los elementos de volumen. Por otro lado, la definición de las variables $\tilde{\Gamma}^i$ permite, cuando se consideran variables independientes, reescribir el tensor de Ricci como un operador elíptico que actúa sobre las componentes de la métrica conforme. Con esto, las ecuaciones de evolución

¹¹En analogía con la métrica conforme, uno puede mostrar fácilmente que la curvatura extrínseca sin traza conforme es también una densidad tensorial de peso $-2/3$.

¹²Recientemente se propuso en [41] evolucionar la variable $\chi \equiv \exp(-4\phi)$ en lugar de la función ϕ para garantizar que las evoluciones numéricas de espacio-tiempos que contienen agujeros negros permanezcan estables. Por otro lado, en [16] se propuso una nueva condición de norma que también garantiza esta estabilidad sin introducir ninguna variable adicional.

para la métrica $\tilde{\gamma}_{ij}$ y la curvatura \tilde{A}_{ij} se reescriben como ecuaciones de evolución tipo ecuación de onda. Para finalizar esta sección, lo que nos resta por hacer es encontrar las ecuaciones de evolución para las variables BSSN. Usando la ecuación de evolución para la métrica (2.10) y la expresión (2.33) es fácil encontrar que

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{6}\alpha K, \quad (2.43)$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{ij}}{dt} = -2\alpha\tilde{A}_{ij}, \quad (2.44)$$

donde, por simplicidad, hemos definido $d/dt \equiv \partial_t - \mathcal{L}_\beta$. Por otro lado, de la ecuación de evolución para la curvatura extrínseca (2.13) y la constricción hamiltoniana para eliminar el escalar de Ricci, encontramos¹³

$$\frac{dK}{dt} = -\gamma^{ij}\nabla_i\nabla_j\alpha + \alpha\left(\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2\right), \quad (2.45)$$

$$\frac{d\tilde{A}_{ij}}{dt} = e^{-4\phi}\left\{-\nabla_i\nabla_j\alpha + \alpha R_{ij}\right\}^{\text{ST}} + \alpha\left(K\tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik}\tilde{A}_j^k\right), \quad (2.46)$$

donde el superíndice ST denota la parte libre de traza de la expresión con respecto a la métrica γ_{ij} , es decir, dada la variable \mathbf{Y}_{ij} , su parte libre de traza $\mathbf{Y}_{ij}^{\text{ST}}$ esta dada por

$$\mathbf{Y}_{ij}^{\text{ST}} = \mathbf{Y}_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\mathbf{Y}^l_l. \quad (2.47)$$

Estas ecuaciones de evolución involucran derivadas covariantes compatibles con la métrica γ_{ij} . Para calcular estas derivadas usamos la relación, que se obtiene de las ecuaciones (2.33) y (2.38),

$$\Gamma^k_{ij} = \tilde{\Gamma}^k_{ij} + 2\left(\delta^k_i\partial_j\phi + \delta^k_j\partial_i\phi - \tilde{\gamma}_{ij}\tilde{\gamma}^{kl}\partial_l\phi\right). \quad (2.48)$$

Una relación similar para el tensor de Ricci, asociado con γ_{ij} , se puede calcular a través de

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + R^\phi_{ij}, \quad (2.49)$$

¹³En este punto de la discusión es útil definir cual es la derivada de lie de una densidad tensorial de peso ω a lo largo del vector $\vec{\beta}$. Esta derivada es definida como

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}T \equiv \left[\mathcal{L}_{\vec{\beta}}T\right]_{|\omega=0} + \omega T\partial_i\beta^i,$$

donde el primer término denota la derivada de lie asumiendo que T es un tensor.

donde \tilde{R}_{ij} es el tensor de Ricci asociado con la métrica conforme

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ij} = & -\frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{lm} \partial_l \partial_m \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{k(i} \partial_j) \tilde{\Gamma}^k + \tilde{\Gamma}^k \tilde{\Gamma}_{(ij)k} \\ & + \tilde{\Gamma}^{lm} \left[2 \tilde{\Gamma}_{l(i} \tilde{\Gamma}_{j)km} + \tilde{\Gamma}_{im}^k \tilde{\Gamma}_{klj} \right], \end{aligned} \quad (2.50)$$

y el tensor R^ϕ_{ij} denota los términos que dependen de ϕ ,

$$R^\phi_{ij} = -2 \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j \phi - 2 \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\nabla}^k \tilde{\nabla}_k \phi + 4 \tilde{\nabla}_i \phi \tilde{\nabla}_j \phi - 4 \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\nabla}^k \phi \tilde{\nabla}_k \phi, \quad (2.51)$$

donde $\tilde{\nabla}_i$ es la derivada covariante compatible con la métrica conforme. Finalmente, para encontrar la ecuación de evolución para las variables $\tilde{\Gamma}^i$ podemos usar las expresiones (2.10), (2.37) y la constricción de momentos para eliminar la divergencia de \tilde{A}^{ij} para obtener¹⁴

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i = & \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k + \beta^j \partial_j \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^j \partial_j \beta^i + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \partial_j \beta^j \\ & - 2 \tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha + 2 \alpha \left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} + 6 \tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Uno puede reescribir esta ecuación de una manera más compacta si se tiene en cuenta que los tres últimos términos que involucran en vector de corrimiento β^i corresponden a la derivada de lie de una densidad vectorial de peso $-2/3$. Por lo tanto podemos reescribir (2.52) como¹⁵

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\Gamma}^i}{dt} = & \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k - 2 \tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha \\ & + 2 \alpha \left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} + 6 \tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

La estabilidad numérica de la formulación BSSN ha sido probada tanto empírica como teóricamente varias veces (ver por ejemplo [21, 5, 7]). Esta formulación parece ser una de las propuestas más robustas que se conocen hoy en día y fue primordial en la solución del problema de la evolución de dos agujeros negros en órbita [41, 16].

¹⁴En la práctica, si uno usa las ecuaciones (2.43), (2.44), (2.45), (2.46) y la ecuación de evolución para $\tilde{\Gamma}^i$ sin usar la constricción de momentos en una evolución numérica, el sistema resulta inestable.

¹⁵Nótese que solo estamos reescribiendo la ecuación (2.52) de manera compacta. Si la variable $\tilde{\Gamma}^i$ fuera realmente una densidad vectorial de peso $-2/3$ los demás términos que involucran el vector de corrimiento β^i no deberían estar presentes.

2.4.2. Formulaci3n NOR

A pesar de que la mayor parte de la comunidad numérica es pragmática, existe una parte de la comunidad que intenta buscar soluciones alternativas a un problema dado. Particularmente hablando, aunque la formulaci3n BSSN es la formulaci3n que en la pr3ctica funciona mejor, una pequeña comunidad numérica ha intentado buscar formulaciones alternativas. Recientemente, Nagy, Ortiz y Reula presentaron una nueva reformulaci3n hiperb3lica de las ecuaciones ADM conocida como la formulaci3n NOR [92]. Esta nueva formulaci3n esta inspirada en las ecuaciones de evoluci3n tipo Bona-Masso [25, 15, 28]¹⁶ y BSSN aunque no hace uso de ninguna transformaci3n conforme, ni separa la curvatura extrínseca en su traza K y el tensor A_{ij} de traza cero. Estas dos simplificaciones hacen que la formulaci3n NOR sea mucho más simple de implementar pues reduce el número de variables para evolucionar, y, por lo tanto, es mucho más atractiva. Sin embargo, a pesar de su atractiva forma, aun existen algunas dudas acerca de su estabilidad numérica comparada con la estabilidad que se obtiene en un código tipo BSSN.

La formulaci3n NOR se basa en la introducci3n de tres funciones de conexi3n Γ^i , completamente análogas a las funciones de conexi3n conforme de BSSN. Sus variable dinámicas son γ_{ij} y K_{ij} , cuyas ecuaciones de evoluci3n conocemos de la formulaci3n ADM, y las tres funciones Γ^i . Para encontrar la ecuaci3n de evoluci3n para estas variables, usamos la identidad

$$\Gamma^i = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_j (\sqrt{\gamma} \gamma^{ij}) , \quad (2.54)$$

y después de algunas cuentas, encontramos que

$$\frac{d\Gamma^i}{dt} = \gamma^{lm} \partial_l \partial_m \beta^i - \nabla_l (2\alpha K^{il} - \alpha \gamma^{il} K) + 2\alpha K^{lm} \Gamma_{lm}^i , \quad (2.55)$$

donde por notaci3n hemos asumido que la derivada de lie de la variable Γ^i corresponde a la derivada de un tensor, es decir, los términos que resultan de la derivada de lie al escribir explícitamente la derivada temporal son

$$\mathcal{L}_\beta \Gamma^i = \beta^l \partial_l \Gamma^i - \Gamma^l \partial_l \beta^i . \quad (2.56)$$

Adicionalmente, NOR introduce dos parámetros que se usan para sumar múltiplos arbitrarios de las restricciones a las ecuaciones (2.13) y (2.55). Estos dos grados adicionales de “libertad” son útiles para

¹⁶Es importante mencionar que la formulaci3n de ecuaciones de evoluci3n tipo Bona-Masso no corresponde a las condiciones de foliaci3n tipo Bona-Masso. Las ecuaciones de evoluci3n Bona-Masso son ecuaciones de evoluci3n para la métrica, curvatura extrínseca y una variable geométrica auxiliar, mientras que las condiciones de foliaci3n son condiciones sobre la funci3n de lapso α .

garantizar que el sistema de ecuaciones de evolución conduce a un problema de valores iniciales bien planteado. Así que, la formulación modifica la ecuación de evolución para K_{ij} en la forma:

$$\frac{dK_{ij}}{dt} = -\nabla_i \nabla_j + \alpha \left(R_{ij} + K K_{ij} - 2 K_{ik} K^k_j + \eta \alpha \gamma_{ij} H \right), \quad (2.57)$$

donde η una constante real. De manera análoga, la ecuación de evolución para Γ^i cambia a la expresión

$$\frac{d\Gamma^i}{dt} = \gamma^{lm} \partial_l \partial_m \beta^i - \nabla_l \left(2 \alpha K^{il} - \alpha \gamma^{il} K \right) + 2 \alpha K^{lm} \Gamma_{lm}^i + \xi \alpha M^i, \quad (2.58)$$

donde ξ es de nuevo una constante real. Es importante mencionar, en este punto de la discusión, que como mostraremos en el apéndice A, si suponemos que las constantes $\eta = \xi = 0$, el problema de valores iniciales asociado con la formulación NOR no esta bien planteado. Esto se debe a que con esta combinación de las constantes, NOR esencialmente se reduce a la formulación ADM; se puede mostrar que por el hecho de introducir las variables Γ^i como variables independientes, la estructura matemática del sistema de ecuaciones no cambia, en otras palabras, aunque consideremos el sistema ADM y consideremos las funciones Γ^i como variables independientes, el sistema resultante tiene un problema de valores iniciales asociado mal planteado. Esta es la razón del por qué es útil sumar adecuadamente múltiplos de las constricciones. Por otro lado, si asumimos que $\eta = 0$ y $\xi = 2$, el problema de valores iniciales asociado con el sistema de ecuaciones NOR esta bien planteado (ver apéndice A). Esto era de esperar pues uno puede mostrar que con esta combinación de valores para las constantes η y ξ , la formulación NOR se reduce a el sistema de ecuaciones de evolución Bona-Masso.

Antes de finalizar esta sección, queremos mencionar un punto sutil que sera extremadamente útil en la implementación de códigos numéricos adaptados a una simetría dada. Claramente, las variables de conexión $\tilde{\Gamma}^i$ de la formulación BSSN y/o Γ^i en la formulación NOR, no son tensores. Así que, intentar evolucionar espacio-tiempos en coordenadas curvilíneas conduce a varios problemas en la definición de estas variables. Para aclarar este punto, veamos un simple ejemplo. Consideremos un espacio-tiempo esféricamente simétrico descrito por la métrica tridimensional

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & r^2 B & 0 \\ 0 & 0 & r^2 B \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

Por simetría, la única componente de Γ^i diferente de cero debe ser Γ^r . Sin embargo, se puede mostrar

fácilmente, usando las expresiones (2.54) y (3.52), que las componentes de Γ^i son:

$$\Gamma^r = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial_r A}{2A} - \frac{\partial_r B}{2B} - \frac{1}{r} \right), \quad (2.60)$$

$$\Gamma^\theta = -\frac{\cot \theta}{2B}, \quad (2.61)$$

$$\Gamma^\phi = 0. \quad (2.62)$$

Ya que estamos considerando la forma más general para la métrica γ_{ij} en coordenadas esféricas, el hecho que la componente Γ^θ sea distinta de cero implica una inconsistencia. Si inicialmente consideramos un sistema de coordenadas, adaptadas a una simetría dada, es de esperar que la evolución numérica no nos lleve a otro tipo de coordenadas. Este problema surge por que nuestras variables de evolución no son covariantes con respecto a transformaciones de coordenadas. Alcubierre y colaboradores mostraron en [8] que este problema se puede corregir definiendo una nueva variable Δ^i en lugar de Γ^i

$$\Delta^i = \gamma^{jk} \Delta_{jk}^i \equiv \gamma^{jk} \left(\Gamma_{jk}^i - \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i \right), \quad (2.63)$$

donde las funciones $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i$ son los símbolos de Christoffel asociados con un espacio-tiempo de fondo plano descrito por el mismo tipo de coordenadas que el espacio-tiempo físico. Con esta nueva variable, podemos verificar que si inicialmente imponemos coordenadas esféricas, después de un tiempo $t > 0$ las evoluciones numéricas permanecerán en este mismo sistema de coordenadas. Para esto, una vez más usamos la métrica (3.52) y la anterior definición para obtener:

$$\Delta^r = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial_r A}{2A} - \frac{\partial_r B}{B} \right) - \frac{2}{r} \left(\frac{\partial_r A}{A} - \frac{\partial_r B}{B} \right), \quad (2.64)$$

$$\Delta^\theta = 0, \quad (2.65)$$

$$\Delta^\phi = 0. \quad (2.66)$$

Al reemplazar la variable Γ^i por Δ^i en las variables del sistema NOR, la única ecuación de evolución que se modifica es la ecuación para la curvatura extrínseca. Este cambio se tiene en cuenta al considerar que el tensor de Ricci escrito en términos de Δ^i adopta la forma

$$\begin{aligned} R_{ij} &= -\frac{1}{2} \gamma^{lk} \partial_l \partial_k \gamma_{ij} + \gamma_{k(i} \partial_{j)} \left[\Delta^k + \overset{\circ}{\Gamma}^k \right] + \gamma^{lm} \Gamma_{il}^k \Gamma_{kmj} \\ &+ \frac{1}{2} \left[\Delta^l + \overset{\circ}{\Gamma}^l \right] \partial_l \gamma_{ij} + \frac{1}{2} \gamma^{kl} \gamma^{mn} \left[2 \partial_{(i} \gamma_{ln} \partial_m \gamma_{j)k} - \partial_{(i} \gamma_{ln} \partial_{j)} \gamma_{km} \right], \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde hemos definido $\overset{\circ}{\Gamma}^l \equiv \gamma^{ij} \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^l$. En esta ultima expresión la simetrización involucra únicamente los índices i y j . Finalmente, para cerrar el sistema de ecuaciones de evolución del sistema NOR, debemos

encontrar la ecuación de evolución para Δ^i . Es fácil mostrar que, bajo un procedimiento similar al usado para encontrar la ecuación (2.55), después de algunas cuentas obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta^i}{dt} &= \gamma^{lm} \partial_l \partial_m \beta^i + \gamma^{lm} \beta^k \partial_k \overset{\circ}{\Gamma}_{lm}^i - \overset{\circ}{\Gamma}^k \partial_k \beta^i + 2 \overset{\circ}{\Gamma}_{lm}^i \gamma^{km} \partial_k \beta^l \\ &- \nabla_m \left[\alpha (2K^{im} - \gamma^{im} K) \right] + 2 \alpha K^{lm} \Delta_{lm}^i. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Nótese que para encontrar esta expresión hemos asumido que el espacio-tiempo de fondo es estático, es decir, hemos supuesto que

$$\partial_t \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^l = 0.$$

Finalmente, en analogía con la expresión (2.58), la ecuación de evolución para Δ^i es

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta^i}{dt} &= \gamma^{lm} \partial_l \partial_m \beta^i + \gamma^{lm} \beta^k \partial_k \overset{\circ}{\Gamma}_{lm}^i - \overset{\circ}{\Gamma}^k \partial_k \beta^i + 2 \overset{\circ}{\Gamma}_{lm}^i \gamma^{km} \partial_k \beta^l \\ &- \nabla_m \left[\alpha (2K^{im} - \gamma^{im} K) \right] + 2 \alpha K^{lm} \Delta_{lm}^i + \xi \alpha M^i. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Al referirnos a la formulación NOR nos referiremos al sistema de ecuaciones (2.10), (2.57) y (2.69). Este sistema de ecuaciones en general no necesariamente coincide con la versión original propuesta por Nagy y colaboradores [92].

2.5. Ecuaciones de Einstein en la Norma Armónica

Hasta este momento solo hemos hablado de formulaciones de las ecuaciones de Einstein usando la descomposición 3 + 1 sin referirnos a ninguna condición particular sobre las variables de norma. A continuación, discutiremos una forma completamente diferente de reescribir las ecuaciones de Einstein como un problema de valores iniciales. Para esto exigimos que las coordenadas del espacio-tiempo x^μ satisfagan una condición armónica, es decir,

$$\square x^\mu = \Gamma^\mu = 0, \quad (2.70)$$

donde, como ya mencionamos antes, \square es el operador de D'Alambert es definido como

$$\square x^\alpha \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu x^\alpha. \quad (2.71)$$

La ventaja de usar este método sobre, por ejemplo, la descomposición 3 + 1 es que al imponer esta condición la parte principal de la ecuación diferencial que satisface cada componente de la métrica es una

ecuación de onda. Esto permite automáticamente asegurar que el sistema de ecuaciones es fuertemente hiperbólico. Este método ha sido muy útil, como mostramos en el Capítulo 4, para estudios analíticos. Para detalles ver por ejemplo [100, 11, 85, 109]. Una generalización natural de la condición armónica (2.71) es

$$\square x^\alpha = H^\alpha, \quad (2.72)$$

donde H^α es una función arbitraria. Esta generalización fue propuesta de manera independiente por Friedrich en [58] para estudiar la hiperbolicidad de las ecuaciones de Einstein y por Garfinkle en [60] para estudiar singularidades en algunas cosmologías. Recientemente fue usada por Pretorius en [99] para presentar la primera evolución estable binaria de dos agujeros negros en órbita. Nótese que a pesar de que la condición armónica es una condición sobre las coordenadas x^μ del espacio-tiempo, la condición armónica generalizada (2.72) no implica ninguna condición sobre estas coordenadas. Cualquier espacio-tiempo en coordenadas arbitrarias puede ser expresado como (2.72) con su correspondiente fuente H^α . A continuación, siguiendo a [109], presentamos las ecuaciones de campo en la norma armónica generalizada teniendo en cuenta que, como se mostró en la sección anterior, es más conveniente usar una métrica de fondo $\mathring{g}_{\mu\nu}$ fija y la cantidad $\Delta^\mu{}_{\alpha\beta}$ en lugar de la conexión $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$. Con esto, podemos reemplazar la condición (2.72) por

$$\mathcal{C}^\alpha = g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu} \right) - H^\alpha = g^{\mu\nu} \Delta^\alpha{}_{\mu\nu} - H^\alpha = 0, \quad (2.73)$$

donde hemos definido, en analogía con (2.63), la cantidad $\Delta^\alpha{}_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} (\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu})$. Adicionalmente, es útil definir, para los siguientes cálculos, la diferencia entre la métrica física y la métrica de fondo como

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \mathring{g}_{\mu\nu}. \quad (2.74)$$

Nótese que, como $\mathring{\nabla}$ es la derivada covariante compatible con la métrica de fondo, uno puede reemplazar $\mathring{\nabla}_\alpha h_{\mu\nu}$ por $\mathring{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu}$. Sin embargo, como veremos en el Capítulo 4, es más útil escribir las expresiones en términos de $h_{\mu\nu}$ que en términos de la métrica $g_{\mu\nu}$. Por otro lado, el tensor de Riemann correspondiente a la métrica $g_{\mu\nu}$ puede ser reescrito, en términos de $\Delta^\alpha{}_{\mu\nu}$, como

$$R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} = \mathring{R}^\alpha{}_{\mu\nu\beta} + 2\mathring{\nabla}_{[\nu} \Delta^\alpha{}_{\beta]\mu} + 2\Delta^\alpha{}_{\sigma[\nu} \Delta^\sigma{}_{\beta]\mu}, \quad (2.75)$$

donde $\mathring{R}^\alpha{}_{\mu\nu\beta}$ es el tensor de Riemann asociado con la métrica de fondo $\mathring{g}_{\mu\nu}$. Teniendo en cuenta que

$$\Delta^\alpha{}_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\mathring{\nabla}_\mu h_{\nu\beta} + \mathring{\nabla}_\nu h_{\beta\mu} - \mathring{\nabla}_\beta h_{\mu\nu} \right), \quad (2.76)$$

y, adicionalmente que

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu g^{\alpha\beta} = -\Delta^\alpha{}_{\mu\nu} g^{\nu\beta} - \Delta^\beta{}_{\mu\nu} g^{\nu\alpha}, \quad (2.77)$$

es fácil mostrar que el tensor de Riemann satisface la siguiente relación

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{\nabla}_\nu h_{\mu\beta} - \overset{\circ}{\nabla}_\beta \overset{\circ}{\nabla}_\nu h_{\mu\alpha} + \overset{\circ}{\nabla}_\beta \overset{\circ}{\nabla}_\mu h_{\alpha\nu} - \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{\nabla}_\mu h_{\nu\beta} \right) \\ &+ g_{\sigma\tau} \Delta^\sigma{}_{\nu\alpha} \Delta^\tau{}_{\mu\beta} - g_{\sigma\tau} \Delta^\sigma{}_{\nu\beta} \Delta^\tau{}_{\mu\alpha} + g_{[\mu\sigma} \overset{\circ}{R}{}^\sigma{}_{\nu]\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

En esta última expresión la antisimetría involucra solo los índices μ y ν . De manera similar, para el tensor de Ricci obtenemos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(-\overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{\nabla}_\beta h_{\mu\nu} - \overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{\nabla}_\nu h_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{\nabla}_\alpha h_{\nu\beta} + \overset{\circ}{\nabla}_\nu \overset{\circ}{\nabla}_\alpha h_{\mu\beta} \right) \\ &+ g_{\sigma\tau} g^{\alpha\beta} (\Delta^\sigma{}_{\mu\alpha} \Delta^\tau{}_{\nu\beta} - \Delta^\sigma{}_{\mu\nu} \Delta^\tau{}_{\alpha\beta}) - g^{\alpha\beta} \overset{\circ}{R}{}^\sigma{}_{\alpha\beta(\mu} g_{\nu)\sigma}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Consideremos ahora, la derivada covariante de (2.73):

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \mathcal{C}_\nu &= g^{\alpha\beta} \left(\overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{\nabla}_\alpha h_{\nu\beta} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{\nabla}_\nu h_{\alpha\beta} \right) - 2 \Delta^\alpha{}_{\beta\mu} g_{\nu\sigma} \Delta^\sigma{}_{\alpha\tau} g^{\beta\tau} \\ &- g_{\sigma\beta} g^{\alpha\beta} \Delta^\sigma{}_{\mu\nu} \Delta^\tau{}_{\alpha\beta} - \nabla_\mu H_\nu. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Restando la parte simétrica de la anterior expresión de la ecuación (2.79) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mu\nu} &= g^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{\nabla}_\beta h_{\mu\nu} - 2 g_{\sigma\tau} g^{\alpha\beta} \Delta^\sigma{}_{\mu\alpha} \Delta^\tau{}_{\nu\beta} - 4 \Delta^\alpha{}_{\beta(\mu} g_{\nu)\sigma} \Delta^\sigma{}_{\alpha\tau} g^{\beta\tau} \\ &+ 2 g^{\alpha\beta} \overset{\circ}{R}{}^\sigma{}_{\alpha\beta(\mu} g_{\nu)\sigma} - 2 \nabla_{(\mu} H_{\nu)}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

donde $\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv -2 R_{\mu\nu} + 2 \nabla_{(\mu} \mathcal{C}_{\nu)}$. Finalmente, usando dos veces la identidad de Bianchi también obtenemos,

$$\nabla^\nu \left(\mathcal{E}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta} \right) = \nabla^\nu \nabla_\nu \mathcal{C}_\mu + R_\mu{}^\nu \mathcal{C}_\nu. \quad (2.82)$$

Por lo tanto, si en las dos expresiones anteriores suponemos que $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$, obtenemos, de la expresión (2.81), las ecuaciones de Einstein en la norma armónica para el vacío y, de la expresión (2.82), las ecuaciones de evolución para las constricciones de norma.

Al igual que con las variables de norma en la formulación 3 + 1, las ecuaciones de evolución para la métrica (2.81) involucran cuatro funciones arbitrarias H_μ . Estas funciones, en analogía con el lapso y el vector de corrimiento, se pueden interpretar como la libertad que se tiene de elegir cualquier sistema de

coordenadas en relatividad general y por lo tanto, las ecuaciones de campo (1.1) nuevamente no pueden decir nada acerca de ellas.

La forma más simple de como elegir las funciones de norma H_μ es suponer que estas funciones son funciones arbitrarias de las coordenadas del espacio-tiempo,

$$H_\mu = f_\mu(x^\alpha).$$

Otra propuesta natural es, en analogía con las condiciones de foliación Bona-Masso, una ecuación de evolución para H_μ que lleve el sistema a coordenadas armónicas

$$\partial_t H_\mu = f(t) H_\mu,$$

donde f es una función positiva y arbitraria que obliga a que el sistema evolucione a un estado para el cual $H_\mu = 0$. Sin embargo, el método más usado para elegir estas funciones es traducir la norma armónica al lenguaje 3 + 1. Para esto, elegimos coordenadas (t, x^i) y una vez más hacemos la foliación del espacio-tiempo \mathcal{M} en hipersuperficies espaciales Σ_t . Con esto, podemos descomponer la métrica $g_{\mu\nu}$ en la forma

$$g_{00} = -(\alpha^2 - \gamma_{ij} \beta^i \beta^j), \quad (2.83)$$

$$g_{0i} = \gamma_{ij} \beta^j, \quad (2.84)$$

$$g_{ij} = \gamma_{ij}, \quad (2.85)$$

donde α y β^i son la función de lapso y el vector de corrimiento usuales de la formulación 3 + 1. Usando esta forma de la métrica en la condición (2.73) y teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= -\frac{1}{\alpha^3} (\partial_t \alpha - \beta^m \partial_m \alpha + \alpha^2 K), \\ \Gamma^i &= \frac{\beta^i}{\alpha^3} (\partial_t \alpha - \beta^m \partial_m \alpha + \alpha^2 K) + {}^{(3)}\Gamma^i \\ &\quad - \frac{1}{\alpha^2} (\partial_t \beta^i - \beta^m \partial_m \beta^i + \alpha \partial^i \alpha), \end{aligned} \quad (2.86)$$

encontramos que esta condición generalizada es equivalente a las ecuaciones de evolución para las variables de norma

$$\partial_t \alpha - \beta^m \partial_m \alpha = \alpha (H_t - \beta_m H^m - \alpha^2 \dot{\Gamma}^t), \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \beta^i - \beta^m \partial_m \beta^i &= \alpha^2 ({}^{(3)}\Gamma^i - \gamma^{ij} H_j - \beta^i \dot{\Gamma}^t - \dot{\Gamma}^i) \\ &\quad - \alpha \gamma^{ij} \partial_j \alpha - \beta^i \beta^j H_j. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Nótese que al especificar la función H^μ determinamos la evolución de las funciones de norma. En el Capítulo 4 usamos este hecho para elegir la forma que deben tener estas funciones en la práctica.

REGULARIZACIÓN

Después de los trabajos de Pretorius [99], del grupo de Brownsville [41] y el grupo de Goddard [16], el problema de la colisión de dos agujeros negros en órbita puede considerarse esencialmente resuelto. Incluso la mayor parte de la comunidad de relatividad numérica considera que el problema de la evolución y/o colisión de objetos compactos en vacío está resuelto. Esta es la razón por la cual la mayor parte de la comunidad de relatividad numérica está migrando a problemas relacionados con hidrodinámica relativista. Sin embargo, aún se pueden atacar algunos problemas con relevancia astrofísica tales como colapso y/o acreción de materia, ondas de Brill, etc. Por supuesto, uno siempre puede argumentar que estos problemas deben ser solubles con los códigos numéricos actuales. Sin embargo, como la mayor parte de estos códigos están escritos en coordenadas cartesianas, no se puede tomar alguna ventaja de las simetrías del problema. La razón de por qué se implementan códigos en estas coordenadas y no en coordenadas adaptadas a una simetría dada es simple. Al implementar códigos con coordenadas adaptadas aparecen singularidades coordenadas del tipo $\sim 1/r$ o $\sim 1/\rho$ para coordenadas esféricas o axiales respectivamente, que rápidamente causan que las simulaciones sean inestables y que, por lo tanto, la evolución se detenga. Así que, usar coordenadas cartesianas en las simulaciones, sin tener en cuenta la simetría presente, parece ser la solución más adecuada. Sin embargo, si queremos hacer evoluciones numéricas relevantes necesitamos tener, como ya mencionamos en el Capítulo 1, grandes recursos computacionales. Por este motivo, reducir el número de puntos en la malla numérica se hace indispensable.

Existen varias técnicas para tratar de resolver el problema de las singularidades coordenadas. Por ejemplo, se puede elegir una norma particular que elimine o disminuya este problema. Sin embargo, el inconveniente de esta elección es que limita el tipo de evoluciones que se pueden hacer. Por ejemplo, la norma radial [19], en la cual se exige que el área de las esferas de radio propio r sea siempre $4\pi r^2$,

no permite penetrar el horizonte aparente, ya que en el interior del horizonte es imposible garantizar que el área de las esferas sea constante con un vector de corrimiento $\beta^i = 0$. En esta sección presentamos un procedimiento completamente general de regularización para el caso de espacio-tiempos esférica y axialmente simétricos, inspirado en el trabajo de Rinne y Stewart [107, 104], que nos permite elegir una condición arbitraria para las variables de norma.

3.1. Condiciones de regularidad

Para encontrar una técnica de regularización para códigos numéricos implementados en coordenadas adaptadas a una simetría dada, lo primero que uno debe considerar es el tipo de condiciones de regularidad que deben cumplir las funciones geométricas. Por simplicidad, comenzaremos discutiendo este tipo de condiciones para un espacio-tiempo esféricamente simétrico y, en base a esto, encontraremos condiciones análogas para el caso axial.

3.1.1. Simetría esférica

Existen dos tipos de condiciones de regularidad para las componentes métricas. El primer conjunto de condiciones surge al considerar directamente la simetría. Para analizar este tipo de condiciones, comencemos considerando la forma más general de la métrica en coordenadas esféricas,

$$ds^2 = -(\alpha - \beta_r \beta^r) dt^2 + 2\beta_r dr dt + \gamma_{rr} dr^2 + \gamma_{\theta\theta} d\Omega^2, \quad (3.1)$$

donde, como ya mencionamos antes, las variables α y β^r son la función de lapso y el vector de corrimiento respectivamente. Las funciones métricas γ_{rr} y $\gamma_{\theta\theta}$ son funciones que dependen solamente de t y r . Por otro lado, denotamos por $d\Omega^2$ al elemento de ángulo sólido definido como $d\Omega^2 \equiv d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2$. Con esta forma de la métrica ahora podemos preguntarnos por las implicaciones que se tienen con este tipo de simetría.

La simetría esférica implica que las reflexiones a través del origen deben dejar la métrica invariante, es decir, si consideramos una transformación de la forma $r \rightarrow -r$ tenemos que

$$\alpha(-r) = \alpha(r), \quad (3.2)$$

$$\beta^r(-r) = -\beta^r(r), \quad (3.3)$$

$$\gamma_{rr}(-r) = \gamma_{rr}(r), \quad (3.4)$$

$$\gamma_{\theta\theta}(-r) = \gamma_{\theta\theta}(r). \quad (3.5)$$

Por lo tanto, α , γ_{rr} y $\gamma_{\theta\theta}$ deben ser funciones pares de r , mientras que β^r y las derivadas radiales de γ_{ij} deben ser impares. Por otro lado, la paridad de los coeficientes métricos implica, teniendo en cuenta (2.10), que las componentes de la curvatura extrínseca K_{rr} y $K_{\theta\theta}$ deben ser también funciones pares. Por otro lado, el segundo tipo de condiciones de regularidad surgen naturalmente al considerar que siempre se puede describir localmente cualquier espacio-tiempo através de una métrica plana, es decir, podemos reescribir la métrica γ_{ij} localmente como

$$dl^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2, \quad (3.6)$$

donde \tilde{r} es la coordenada radial que mide distancias propias con respecto al origen. Si ahora consideramos una transformación de coordenadas de $\tilde{r} \rightarrow r$, através de $\tilde{r} = \tilde{r}(r)$, podemos reescribir la métrica (3.6) como

$$dl^2 = \left(\frac{d\tilde{r}}{dr}\right)^2 dr^2 + r^2 \left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^2 d\Omega^2. \quad (3.7)$$

Desarrollando \tilde{r} en una serie de Taylor alrededor del origen, tenemos que

$$\tilde{r} \simeq r \left(\frac{d\tilde{r}}{dr}\right)_{r=0}. \quad (3.8)$$

Por lo tanto, en vecindades del origen encontramos que

$$dl^2 = \left(\frac{d\tilde{r}}{dr}\right)_{r=0}^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (3.9)$$

es decir, para cualquier coordenada radial r , la métrica en el origen debe ser conformalmente plana. Este resultado, junto con las condiciones de paridad, implica que podemos reescribir la métrica espacial en simetría esférica como

$$dl^2 = A dr^2 + r^2 T d\Omega^2, \quad (3.10)$$

con A y T funciones pares tales que, cerca del origen, cumplen con

$$A = A_0 + r^2 A_1, \quad T = T_0 + r^2 T_1, \quad (3.11)$$

y donde A_0 y T_0 son funciones que solamente dependen de t y que adicionalmente, teniendo en cuenta (3.9), satisfacen

$$A_0 = T_0.$$

La implementación numérica de las condiciones de paridad y la condición (3.11), no es trivial. La razón de esto es que las condiciones de regularidad están sobredeterminadas; en el origen tenemos tres condiciones

para las dos coeficientes métricos: las variables $D_A \equiv \partial_r A$ y $D_T \equiv \partial_r T$ se deben anular y, adicionalmente, debemos garantizar que las funciones A y T sean iguales. Para solucionar este problema, Alcubierre y González definieron en [9] la variable auxiliar

$$\lambda \equiv \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{T} \right). \quad (3.12)$$

Con esto, se tienen tres variables y tres condiciones para implementar en $r = 0$. Ellos mostraron que todas sus variables son manifiestamente regulares en el caso de simetría esférica. Sin embargo, la generalización de este método de regularización al caso axial no es clara. El problema surge, como mostramos en la siguiente sección, porque este algoritmo introduce términos de la forma¹ $\partial_z \lambda / \rho$, los cuales modifican la estructura característica de las ecuaciones de evolución dañando la hiperbolicidad de una formulación dada. Esta es la razón por la cual nosotros usaremos un procedimiento de regularización diferente, el cual puede ser generalizado directamente al caso axial sin ningún problema. Para esto, introducimos las variables,

$$H \equiv \frac{A + T}{2}, \quad J \equiv \frac{A - T}{2r^2}. \quad (3.13)$$

Las condiciones (3.4) y (3.5) implican que tanto la variable H como la variable J son funciones regulares que son, por construcción, pares en el origen. Esta definición puede ser trivialmente invertida para obtener

$$A = H + r^2 J, \quad T = H - r^2 J. \quad (3.14)$$

Teniendo en cuenta esta última expresión, la métrica espacial (3.10) puede ser reescrita como

$$dl^2 = (H + r^2 J) dr^2 + r^2 (H - r^2 J) d\Omega^2. \quad (3.15)$$

Esto implica que la curvatura extrínseca debe ser de la forma:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_A & 0 & 0 \\ 0 & r^2 K_T & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta K_T \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

donde se debe tener en cuenta que $K_A \equiv K_H + r^2 K_J$ y $K_T \equiv K_H - r^2 K_J$. Adicionalmente, las funciones K_H y K_J deben ser funciones pares en las vecindades del origen. Estas condiciones, como mostraremos más adelante son suficientes para garantizar que las variables dinámicas permanecen regulares durante la evolución.

¹Estamos usando coordenadas cilíndricas ρ , θ y z para el caso con simetría axial (ver sección 3.1.2)

3.1.2. Simetría Axial

En analogía con el método usado para encontrar las condiciones de regularidad en el caso esférico, comenzamos, una vez más, con la forma general de la métrica en coordenadas cilíndricas (ρ, z, ϕ) :

$$ds^2 = -(\alpha - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2(\beta_\rho d\rho + \beta_z dz + \beta_\phi d\phi) dt + \gamma_{\rho\rho} d\rho^2 + \gamma_{zz} dz^2 + \gamma_{\phi\phi} d\phi^2 + 2(\gamma_{\rho z} d\rho dz + \gamma_{\rho\phi} d\rho d\phi + \gamma_{z\phi} dz d\phi), \quad (3.17)$$

donde $\beta^\rho, \beta^z, \beta^\phi$ son las componentes del vector de corrimiento. Nótese que las variables de norma, y las componentes de la métrica γ_{ij} son funciones que dependen, por construcción, solamente de t, ρ y z . Una de las implicaciones que se tiene al considerar un espacio-tiempo con simetría axial es que la métrica (3.17) debe permanecer invariante bajo la transformación $\rho \rightarrow -\rho$, lo cual implica que:

$$\alpha(-\rho) = \alpha(\rho), \quad (3.18)$$

$$\beta_\rho(-\rho) = -\beta_\rho(\rho), \quad (3.19)$$

$$\beta_z(-\rho) = \beta_z(\rho), \quad (3.20)$$

$$\beta_\phi(-\rho) = \beta_\phi(\rho), \quad (3.21)$$

$$\gamma_{\rho\rho}(-\rho) = \gamma_{\rho\rho}(\rho), \quad (3.22)$$

$$\gamma_{zz}(-\rho) = \gamma_{zz}(\rho), \quad (3.23)$$

$$\gamma_{\phi\phi}(-\rho) = \gamma_{\phi\phi}(\rho), \quad (3.24)$$

$$\gamma_{\rho z}(-\rho) = -\gamma_{\rho z}(\rho), \quad (3.25)$$

$$\gamma_{\rho\phi}(-\rho) = -\gamma_{\rho\phi}(\rho), \quad (3.26)$$

$$\gamma_{z\phi}(\rho) = \gamma_{z\phi}(\rho), \quad (3.27)$$

y, teniendo en cuenta (2.10), una vez más, las componentes de la curvatura extrínseca K_{ij} heredan las propiedades de paridad de sus correspondientes coeficientes métricos. Por otro lado, como ya mencionamos antes, las condiciones de paridad (3.27) no son suficientes para garantizar la regularidad de las funciones sobre el eje de simetría $\rho = 0$. También necesitamos considerar las condiciones que surgen al suponer el hecho de que el espacio debe ser localmente plano en el eje. Un camino intuitivo para encontrar estas condiciones es el siguiente.² Comencemos considerando la forma general de la métrica espacial en

²Un método alternativo para encontrar el mismo tipo de condiciones a través de vectores de Killing fue presentado por Rinne y Stewart en [107].

coordenadas cartesianas

$$dl^2 = \gamma_{xx} dx^2 + \gamma_{yy} dy^2 + \gamma_{zz} dz^2 + 2 \left(\gamma_{xy} dx dy + \gamma_{xz} dx dz + \gamma_{yz} dy dz \right). \quad (3.28)$$

La simetría axial implica, en particular, que la métrica debe ser invariante bajo reflexiones alrededor de los ejes x y y , y bajo intercambios de x por y . Adicionalmente, la restricción de que la métrica localmente debe ser plana implica que esta debe ser suave. Estas dos condiciones implican que, para la coordenada z fija, debemos tener

$$\gamma_{xx} \sim k_\rho + \mathcal{O}(x^2 + y^2) \sim k_\rho + \mathcal{O}(\rho^2), \quad (3.29)$$

$$\gamma_{yy} \sim k_\rho + \mathcal{O}(x^2 + y^2) \sim k_\rho + \mathcal{O}(\rho^2), \quad (3.30)$$

$$\gamma_{zz} \sim k_z + \mathcal{O}(x^2 + y^2) \sim k_z + \mathcal{O}(\rho^2), \quad (3.31)$$

$$\gamma_{xy} \sim \mathcal{O}(xy) \sim \mathcal{O}(\rho^2), \quad (3.32)$$

$$\gamma_{xz} \sim \mathcal{O}(x) \sim \mathcal{O}(\rho), \quad (3.33)$$

$$\gamma_{yz} \sim \mathcal{O}(y) \sim \mathcal{O}(\rho), \quad (3.34)$$

donde k_ρ y k_z son constantes. Consideramos ahora la transformación de coordenadas $(x, y, z) \rightarrow (\rho, z, \phi)$ usando

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (3.35)$$

Bajo esta transformación de coordenadas, después de algunas cuentas, encontramos

$$\gamma_{\rho\rho} = \gamma_{xx} \cos^2 \phi + \gamma_{yy} \sin^2 \phi + 2 \gamma_{xy} \sin \phi \cos \phi, \quad (3.36)$$

$$\gamma_{zz} = \gamma_{zz}, \quad (3.37)$$

$$\gamma_{\phi\phi} = \rho^2 (\gamma_{xx} \sin^2 \phi + \gamma_{yy} \cos^2 \phi - 2 \gamma_{xy} \sin \phi \cos \phi), \quad (3.38)$$

$$\gamma_{\rho z} = \gamma_{xz} \cos \phi + \gamma_{yz} \sin \phi, \quad (3.39)$$

$$\gamma_{\rho\phi} = \rho (\gamma_{yy} - \gamma_{xx}) \sin \phi \cos \phi + \rho \gamma_{xy} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi), \quad (3.40)$$

$$\gamma_{z\phi} = \rho (-\gamma_{xz} \sin \phi + \gamma_{yz} \cos \phi). \quad (3.41)$$

Finalmente, teniendo en cuenta el comportamiento de las componentes métricas cerca al eje, condiciones (3.29)–(3.34), y la métrica escrita en términos de las coordenadas cilíndricas, condiciones (3.36)–

(3.41), encontramos que

$$\gamma_{\rho\rho} \sim k_\rho + \mathcal{O}(\rho^2), \quad (3.42)$$

$$\gamma_{zz} \sim k_z + \mathcal{O}(\rho^2), \quad (3.43)$$

$$\gamma_{\phi\phi} \sim \rho^2 (k_\rho + \mathcal{O}(\rho^2)), \quad (3.44)$$

$$\gamma_{\rho z} \sim \mathcal{O}(\rho), \quad (3.45)$$

$$\gamma_{\rho\phi} \sim \mathcal{O}(\rho^3), \quad (3.46)$$

$$\gamma_{z\phi} \sim \mathcal{O}(\rho^2). \quad (3.47)$$

Por lo tanto, la métrica γ_{ij} puede ser escrita como

$$\begin{aligned} dt^2 &= A d\rho^2 + B dz^2 + \rho^2 T d\phi^2 \\ &+ 2 \left(\rho C d\rho dz + \rho^3 C_1 d\rho d\phi + \rho^2 C_2 dz d\phi \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde las funciones métricas (A, B, T, C, C_1, C_2) y, por la expresión (2.10), las respectivas componentes de la curvatura extrínseca son funciones pares de ρ sobre el eje. De nuevo se puede mostrar estas condiciones de paridad no son suficientes para garantizar la regularidad de las evoluciones numéricas. Las demás condiciones surgen, en analogía con el caso esférico, al considerar que localmente la métrica es plana. Con un procedimiento similar al utilizado en la sección anterior, se puede mostrar que esta condición implica que

$$A = A_0 + \rho^2 A_1, \quad T = T_0 + \rho^2 T_1, \quad (3.49)$$

donde las variables A_0 y T_0 son funciones de t e iguales sobre el eje de simetría.

Una vez más, las condiciones de regularidad están sobredeterminadas pues el número de condiciones es mayor al número de variables. Para resolver este problema siguiendo a [9], podemos introducir la variable auxiliar

$$\lambda \equiv \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{A}{T} \right), \quad (3.50)$$

como variable independiente. Se puede mostrar que, si exigimos que el comportamiento de la variable λ cerca al origen sea

$$\lambda \sim \mathcal{O}(\rho), \quad (3.51)$$

las ecuaciones de evolución son manifiestamente regulares. Sin embargo, al incluir esta variable, como ya mencionamos antes, la hiperbolicidad de un sistema particular de ecuaciones de evolución se rompe.

Para entender esto, consideremos, por ejemplo, el sistema de ecuaciones NOR con la variable λ y, por simplicidad, supongamos que $C_1 = C_2 = 0$. Ya que la variable λ introduce términos del tipo $\sim \partial_z \lambda / \rho$ en las ecuaciones de evolución de las componentes de la curvatura extrínseca, debemos considerarla como variable de primer orden para el estudio de la hiperbolicidad. Después de algunas cuentas (ver apéndice A) encontramos que la matriz característica del subsistema $u = (K_C, \lambda)$ esta dada por

$$M = -\frac{2\alpha C}{AB - C^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

el cual claramente no puede ser diagonalizado. Así que, aunque con este método removemos las singularidades coordenadas, eventualmente aparecerán inestabilidades numéricas relacionadas con que el problema de valores iniciales asociado con nuestro sistema de ecuaciones de evolución no esta bien planteado. A continuación, describimos un método alternativo para asegurar la regularidad de las variables de evolución y garantizar que la hiperbolicidad del sistema. Para esto, de nuevo definimos las nuevas variables

$$H \equiv \frac{A + T}{2}, \quad J \equiv \frac{A - T}{2\rho^2}. \quad (3.53)$$

Los resultados de (3.18)–(3.27) y (3.42)–(3.47) implican que las funciones H y J son funciones regulares que son pares en ρ . Una vez más, las definiciones de H y J pueden ser trivialmente invertidas para obtener

$$A = H + \rho^2 J, \quad T = H - \rho^2 J, \quad (3.54)$$

así que la métrica espacial (3.48) puede ser escrita como

$$dl^2 = (H + \rho^2 J) d\rho^2 + B dz^2 + \rho^2 (H - \rho^2 J) d\phi^2 \\ + 2 (\rho C d\rho dz + \rho^3 C_1 d\rho d\phi + \rho^2 C_2 dz d\phi). \quad (3.55)$$

Teniendo en cuenta este último resultado es directo encontrar que el tensor de curvatura extrínseca K_{ij} adopta la forma

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_A, & \rho K_C & \rho^3 K_{C_1} \\ \rho K_C & K_B & \rho^2 K_{C_2} \\ \rho^3 K_{C_1} & \rho^2 K_{C_2} & \rho^2 K_T \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

donde, por simplicidad, hemos definido $K_A \equiv K_H + \rho^2 K_J$ y $K_T \equiv K_H - \rho^2 K_J$. Nótese que, dada la forma en la que escribimos las componentes de la curvatura extrínseca, todas las variables son funciones pares. Finalmente, para regularizar el sistema de ecuaciones NOR, lo único que nos resta por hacer es

ver las propiedades de regularidad del vector Δ^i . Estas propiedades se pueden obtener directamente de su definición, ecuación (2.63). Por lo tanto, teniendo en cuenta propiedades de simetría de la métrica γ_{ij} y la curvatura extrínseca K_{ij} , encontramos que la componente Δ^ρ es impar mientras que las componentes Δ^z y Δ^ϕ son funciones pares con respecto a reflexiones sobre el eje. En la siguiente sección explícitamente mostraremos que este procedimiento regulariza cualquier sistema de ecuaciones de evolución.

Nótese que este procedimiento de regularización no altera la hiperbolicidad del sistema de ecuaciones ya que solamente hicimos una redefinición de algunas funciones geométricas.

3.2. Ecuaciones de evolución

Estamos interesados en mostrar que las condiciones de regularidad presentadas en las secciones anteriores son suficientes para garantizar la regularidad de las variables geométricas y lo suficientemente generales para ser aplicadas a cualquier sistema de ecuaciones en el que estemos interesados. Para esto, usaremos dos diferentes tipos de sistemas de ecuaciones de evolución: el sistema ADM, que como se muestra en el apéndice A es débilmente hiperbólico, y el sistema NOR, que es fuertemente hiperbólico. Una vez más, comenzaremos con el caso esférico para generalizarlo posteriormente al caso axial.

3.2.1. Caso esférico

Para mostrar como se usan las condiciones de regularidad sobre un conjunto concreto de ecuaciones de evolución, a continuación regularizaremos el sistema de ecuaciones tipo NOR, presentado en la sección 2.4.2, en el caso esférico. Para esto, debemos tener en cuenta que, de acuerdo con (3.14), las variables que vamos a evolucionar son Δ^r , H , J , K_H y K_J .

La manera simple de implementar numéricamente la condición de paridad es, como se muestra en la figura 3.1, añadir el punto ficticio $r = -\Delta r/2$ a la malla numérica para desplazar su inicio. Esto implica entonces que las condiciones de paridad através del origen se reducen a copiar el valor de una variable dada de $r = \Delta r/2$ a $r = -\Delta r/2$ con el mismo signo para el caso en el que la variable sea par, o con el signo contrario en el caso en que sea impar. La siguiente condición de regularidad es que, en el origen los coeficientes métricos A y T deben ser iguales. Esta condición automáticamente se cumple con la definición (3.14). Con esto, las ecuaciones de evolución para H y J son trivialmente obtenidas a partir de

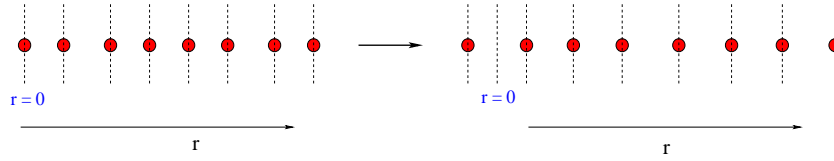


FIGURA 3.1: Para aplicar las condiciones de paridad a las funciones geométricas, añadimos un punto ficticio $r = -\Delta r/2$ para desplazar el inicio de la malla numérica. Esto implica que las condiciones de paridad a través del origen se reducen a copiar el valor de una variable dada de $r = \Delta r/2$ a $r = -\Delta r/2$ con el mismo signo para el caso en el que la variable sea par, o con el signo contrario en el caso en que sea impar.

la expresión (2.10),

$$\partial_t H = -2\alpha K_H + \beta^r \partial_r H + A \partial_r \beta^r, \quad (3.57)$$

$$\partial_t J = -2\alpha K_J + \beta^r \partial_r J + A \partial_r \beta^r, \quad (3.58)$$

Las ecuaciones de evolución para K_H y K_J , por otro lado, se pueden obtener fácilmente de las ecuaciones de evolución para K_A y K_T . Estas ecuaciones son muy largas y las presentamos explícitamente en el Apéndice B. Para la discusión presentada en esta sección es suficiente considerar tan solo algunos términos de estas ecuaciones explícitamente. La ecuación de evolución para la función K_H , de acuerdo con (B.1), es

$$\partial_t K_H = \frac{\alpha H^3}{2r A^2 T^2} \left(\Delta^r H^2 - F_r H - 2D_H \right) + \mathcal{H}, \quad (3.59)$$

donde, como en el Apéndice A, hemos definido $F_r \equiv \partial_r \ln \alpha$, $D_H \equiv \partial_r H/2$ y con \mathcal{H} como una función que agrupa los términos que no están divididos por r .³ Bajo una simple inspección, se puede ver que todos los términos en esta expresión son manifiestamente regulares. Por otro lado, la ecuación para K_J toma la forma

$$\partial_t K_J = -\frac{\alpha H^4 \left(H \Delta^r - F_r \right)}{2r^3 A^2 T^2} + \frac{\alpha H^4 \left(H \partial_r \Delta^r - \partial_r F_r \right)}{2r^2 A^2 T^2} + \mathcal{J}, \quad (3.60)$$

³Un comentario acerca de la notación. Al igual que en el Apéndice A, en lo que resta de este capítulo hemos definido, por comodidad, tanto para el caso esférico como para el axial, las variables $D_{ijk} \equiv \partial_i \gamma_{ij}/2$ y $F_i \equiv \partial_i \ln \alpha$. Así que, por ejemplo, $D_\rho J = \partial_\rho J/2$.

donde la función \mathcal{J} agrupa términos que no están divididos por r o términos de la forma $(D_H)^2/r^2$, $D_J/r \equiv \partial_r J/2r$, etc., que son manifiestamente regulares. Escrita de esta forma, la expresión anterior claramente es irregular cuando r tiende a cero. Sin embargo, recordando las propiedades de paridad de Δ^r , F_r , $\partial_r \Delta^r$ y $\partial_r F_r$, se puede ver fácilmente que los términos de (3.60) son regulares si los juntamos por pares para formar una sola derivada, es decir, si escribimos (3.60) en la forma

$$\partial_t K_J = \frac{\alpha H^5}{2r A^2 T^2} \partial_r \left(\frac{\Delta^r}{r} \right) - \frac{\alpha H^4}{2r A^2 T^2} \partial_r \left(\frac{F_r}{r} \right) + \mathcal{J}. \quad (3.61)$$

Claramente esta ecuación de evolución es manifiestamente regular, pues $\Delta^r/r \sim \text{cons.} + \mathcal{O}(r^2)$, así que $\partial_r(\Delta^r/r) \sim \mathcal{O}(r)$, y $F_r/r \sim \text{cons.} + \mathcal{O}(r^2)$, por lo tanto $\partial_r(F_r/r) \sim \mathcal{O}(r)$. Adicionalmente, uno puede ver que la ecuación para Δ^r , y las constricciones son trivialmente regulares tal y como se muestra en el Apéndice B. Como vemos, este procedimiento trivialmente regulariza todas las ecuaciones que se obtienen de la formulación NOR en el caso esférico. En la siguiente sección veremos su generalización al caso axial.

3.2.2. Caso Axial

En analogía con el caso esférico, comencemos con el sistema de ecuaciones tipo NOR en el caso axial. En este caso, las variables de evolución deben ser H , J , B , C , C_1 , C_2 , las respectivas componentes de la curvatura extrínseca y las tres componentes $(\Delta^\rho, \Delta^z, \Delta^\phi)$. Teniendo en cuenta esto, podemos ahora aplicar las condiciones de regularidad para este caso. Las condiciones de paridad para estas variables pueden ser, implementadas, en analogía con el caso esférico, añadiendo un punto ficticio $-\Delta\rho/2$ para desplazar el comienzo de la malla numérica. Esto, por lo tanto, implica que las condiciones de paridad se reducen a copiar el valor de una variable dada de $\rho = \Delta\rho/2$ a $\rho = -\Delta\rho/2$ con el mismo signo para el caso en el que la variable sea par, o con el signo contrario en el caso en que sea impar. Por otro lado, la condición de que localmente la métrica debe ser plana en el eje, se tiene por construcción con la definición (3.54). Con esto, las ecuaciones de evolución para las componentes K_H y K_J pueden ser obtenidas directamente de las ecuaciones para K_A y K_T . Estas ecuaciones, sin embargo son extremadamente largas aun en el caso de un espacio-tiempo sin rotación ($\beta^\phi = 0$). Sin embargo, como mostraremos numéricamente en la siguiente sección, la ecuación de evolución resultante para K_H es manifiestamente regular. Por otro lado, la ecuación de evolución para K_J tiene términos que a simple vista son irregulares. Para tratar estos términos consideremos, por simplicidad, que $C_1 = C_2 = \beta^i = 0$. Con esto, la ecuación de evolución para

K_J toma la forma

$$\partial_t K_J = -\frac{\alpha B^2 H^4}{2\rho T^2 (AB - \rho^2 C^2)^2} \left(\frac{H \Delta^\rho}{\rho^2} - \frac{H \partial_\rho \Delta^\rho}{\rho} - \frac{F_\rho}{\rho^2} + \frac{\partial_\rho F_\rho}{\rho} \right) + \mathcal{J}, \quad (3.62)$$

donde esta vez hemos definido a \mathcal{J} como la función que agrupa términos que no están divididos por ρ o términos de la forma $(D_\rho H \partial_\rho F_\rho)/\rho^2$, $D_\rho J/\rho$, que son manifiestamente regulares. Con esto, conseguimos aislar explícitamente los términos que son irregulares.

Al igual que en el caso esférico, nótese que los términos en (3.62) son regulares si se unen por pares para formar dos únicos términos con derivadas, es decir, si los escribimos de la forma

$$\partial_t K_J = \frac{\alpha B^2 H^4}{2\rho T^2 (AB - \rho^2 C^2)^2} \left[H \partial_\rho \left(\frac{\Delta^\rho}{\rho} \right) - \partial_\rho \left(\frac{F_\rho}{\rho} \right) \right] + \mathcal{J}. \quad (3.63)$$

Es sencillo ver que esta última ecuación es regular si se tiene en cuenta que, $\Delta^\rho/\rho \sim \text{cons.} + \mathcal{O}(\rho^2)$, así que, $\partial_\rho (\Delta^\rho/\rho) \sim \mathcal{O}(\rho)$, y $F_\rho/\rho \sim \text{cons.} + \mathcal{O}(\rho^2)$, por lo tanto $\partial_\rho (F_\rho/\rho) \sim \mathcal{O}(\rho)$. Por otro lado, se puede ver por simple inspección que el resto de ecuaciones de evolución son manifiestamente regulares.

Antes de terminar esta sección, por completez queremos mencionar brevemente como regularizar las ecuaciones de evolución ADM. La idea básica, una vez más, es definir las variables de evolución que, para este caso, simplemente serán γ_{ij} y K_{ij} y aplicar las condiciones de regularidad. Por ejemplo, en analogía con el caso anterior, la ecuación de evolución para K_J sin rotación y sin vector de corrimiento adopta la forma

$$\partial_t K_J = \frac{\alpha B H^4}{2\rho A^2 T^2 (AB - \rho^2 C^2)^2} \left[\partial_\rho \left(\frac{D_{\rho zz}}{\rho} \right) - B \partial_\rho \left(\frac{F_\rho}{\rho} \right) \right] + \mathcal{J}'. \quad (3.64)$$

Uno puede ver que esta última expresión, como las demás expresiones para las otras variables, es regular sobre el eje de simetría.

3.3. Ejemplos Numéricos

Ya hemos mostrado como regularizar sistemas de ecuaciones tanto en simetría esférica como en simetría axial. Ahora veamos como este método funciona en la practica. Para esto, primero consideraremos la evolución del espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas con una elección de lapso no trivial, para comparar con el algoritmo presentado en [9]. Adicionalmente, para asegurarnos que el procedimiento de regularización es independiente de la hiperbolicidad del sistema, presentamos simulaciones

axialmente simétricas usando el sistema de ecuaciones ADM y el sistema fuertemente hiperbólico tipo NOR, presentado en la sección 2.4.2. Finalmente, como un segundo ejemplo, consideramos el espacio-tiempo de ondas de Brill como una prueba no trivial del procedimiento de regularización en espacio-tiempos axialmente simétricos.

Todas las simulaciones presentadas a continuación han sido realizadas usando un método de líneas con el método iterativo de Crank-Nicholson [83] en el tiempo y diferencias finitas de segundo orden centradas para el espacio.

3.3.1. Espacio-tiempo de Minkowski en simetría esférica

Como primer ejemplo del método de regularización evolucionamos el espacio-tiempo de Minkowski con un lapso no trivial y un vector de corrimiento $\beta^r = 0$, usando el sistema de ecuaciones tipo NOR, con los siguientes datos iniciales

$$A = T = 1 , \quad (3.65)$$

$$K_A = K_T = 0 , \quad (3.66)$$

lo que implica que

$$H = 1 , \quad J = 0 . \quad (3.67)$$

$$K_H = 0 , \quad K_J = 0 . \quad (3.68)$$

Para garantizar una evolución no trivial, elegimos un perfil gaussiano inicial para la función de lapso de la forma

$$\alpha(t = 0) = 1 + r^2 R \left(\exp \left[- \left(\frac{r - r_0}{\sigma} \right)^2 \right] + \exp \left[- \left(\frac{r + r_0}{\sigma} \right)^2 \right] \right) , \quad (3.69)$$

con los parámetros $R = 0.001$, $r_0 = 5.0$ y $\sigma = 1.0$. Hemos elegido esta forma del perfil gaussiano para garantizar que inicialmente el lapso sea regular en el origen. Para evolucionar el lapso, usamos la ecuación de evolución (2.23) restringida a la norma armónica, es decir, eligiendo $f(\alpha) = 1$. Adicionalmente, usamos una malla numérica con $\Delta r = 0.1$, un parámetro de Courant de $\Delta t / \Delta r = 0.5$ y localizamos la frontera exterior en $r = 200$. En la Figura 3.2 mostramos la evolución de la componente radial de la métrica $\gamma_{rr} \equiv A$ y de la componente radial del vector Δ^i . Nótese que estas funciones permanecen perfectamente regulares cuando el pulso gaussiano pasa a través del origen. Durante esta simulación se observo

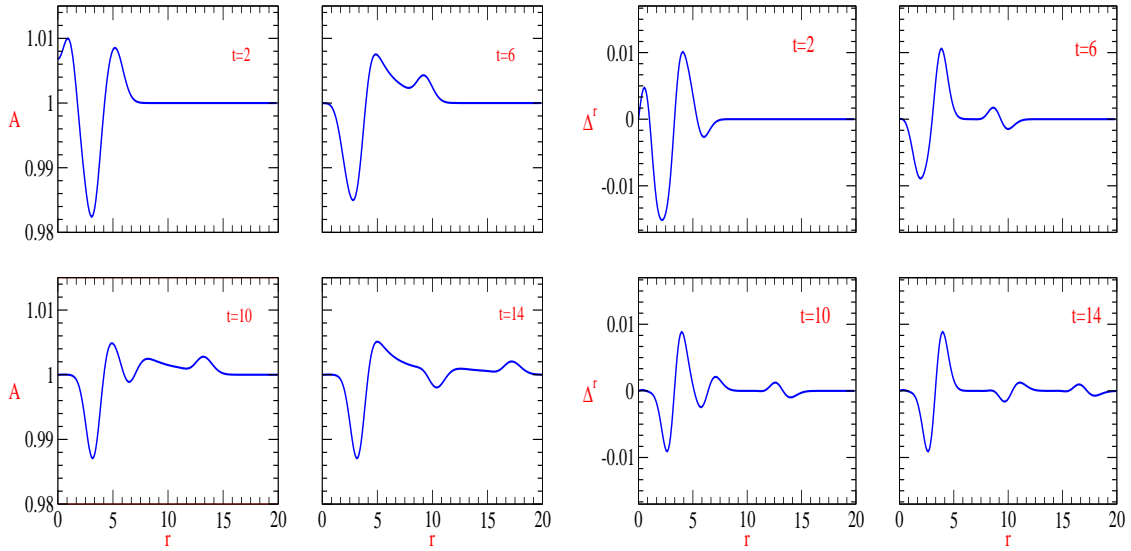


FIGURA 3.2: Evolución del espacio-tiempo de Minkowski en simetría esférica con un lapso no trivial usando la formulación NOR. Izquierda: evolución de la componente métrica $\gamma_{rr} \equiv A$. Derecha: evolución de la componente Δ^r a diferentes tiempos. Nótese que, durante la evolución, estas variables tienen un comportamiento suave, en particular cuando el pulso pasa através del origen.

que el sistema puede evolucionar por largo tiempo. En particular, esta simulación tuvo una duración de 80 pasos de tiempo y las variables permanecieron regulares durante toda la simulación .

En la figura 3.3 presentamos la norma L_2 de la violación de la restricción hamiltoniana para tres distintas resoluciones $\Delta r = 0.025, 0.0125, 0.0065$. Hemos elegido estas resoluciones para asegurarnos que estamos en el régimen de convergencia. Nótese que cuando el primer modo de propagación llega a la frontera exterior (ver panel derecho), en un tiempo de $t \sim 4.5$, el código deja de ser a segundo orden. Esto era de esperarse pues hemos implementado condiciones de frontera radiativas para todas las variables de evolución. Ya que estas condiciones de frontera no son compatibles con las restricciones (ver capítulo 4), se introducen modos de propagación al interior del dominio computacional que violan las restricciones. Sin embargo, si consideramos la región antes de que cualquier pulso llegue a la frontera, es decir, la región encerrada por la caja punteada (panel izquierdo) podemos mostrar segundo orden de convergencia.

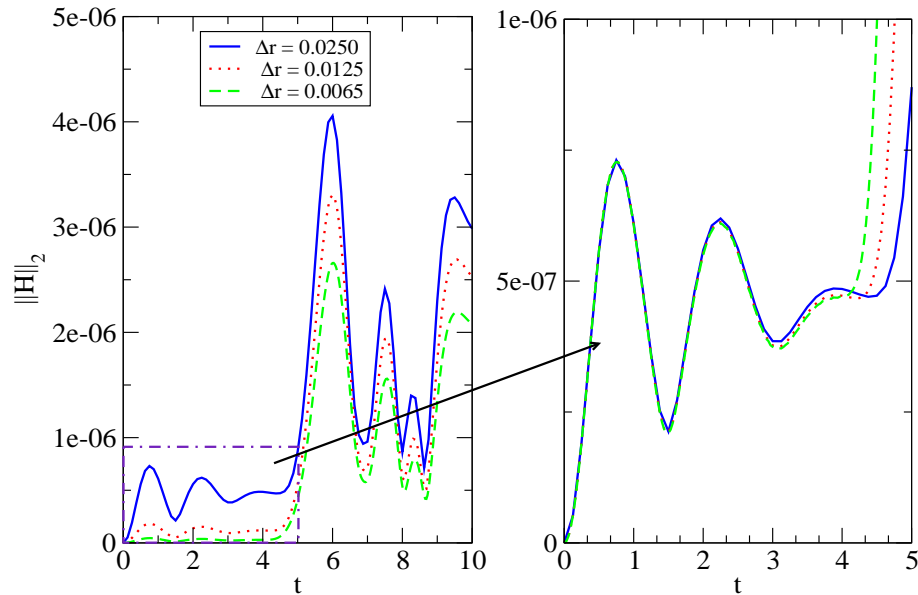


FIGURA 3.3: Norma L_2 de la constricción hamiltoniana para tres distintas resoluciones $\Delta r = 0.025, 0.0125, 0.0065$. En el panel de la derecha mostramos la norma de la constricción durante todo el tiempo de la evolución $t = 10$. En el panel izquierdo, por otro lado, presentamos la norma de la constricción justo cuando un primer pulso toca la frontera exterior. Hemos reescalado la norma L_2 , del panel derecho, para las resoluciones más altas por el factor 2^2 y 2^4 respectivamente.

Para esto hemos reescalado las resoluciones $\Delta r = 0.0125$ y $\Delta r = 0.0065$ por un factor de 4 y 16. Los resultados son presentados en el panel izquierdo. Nótese que en esta región, la norma L_2 de la constricción hamiltoniana para las tres resoluciones es prácticamente la misma.

3.3.2. Espacio-tiempo de Minkowski en simetría axial usando ADM

El siguiente ejemplo es similar al presentado en la en la última sección. Sin embargo, en este caso hemos empleado un código axialmente simétrico, el cual hace uso de la formulación ADM. De nuevo, consideramos datos iniciales correspondientes a un espacio-tiempo de Minkowski, así que la métrica y la

curvatura extrínseca tienen la forma

$$A = B = T = 1, \quad (3.70)$$

$$C = C_1 = C_2 = 0, \quad (3.71)$$

$$K_A = K_B = K_T = 0, \quad (3.72)$$

$$K_C = K_{C_1} = K_{C_2} = 0, \quad (3.73)$$

$$(3.74)$$

lo cual implica que

$$H = 1, \quad J = 0, \quad (3.75)$$

$$K_H = 0, \quad K_J = 0. \quad (3.76)$$

Por otro lado, como dato inicial para el lapso, elegimos un perfil gaussiano de la forma

$$\alpha(t = 0) = 1 + R \exp \left[- \left(\frac{z - z_0}{\sigma_z} \right)^2 - \left(\frac{\rho - \rho_0}{\sigma_\rho} \right)^2 \right], \quad (3.77)$$

centrado en $\rho = z = 5.0$. Adicionalmente, hemos usado un espaciamiento de $\Delta\rho = \Delta z = 0.1$, un parámetro de Courant $\Delta t / \min\{\Delta\rho, \Delta z\} = 0.25$,⁴ una amplitud de $R = 0.01$ para el perfil gaussiano y $\sigma_\rho = \sigma_z = 1.5$. Evolucionamos el lapso usando la norma armónica. Las fronteras exteriores están en $\rho = z = 130$. Después de varias pruebas numéricas, encontramos que, para garantizar la estabilidad del código numérico es necesario usar algún tipo de disipación. Nosotros en particular hemos usado una disipación de cuarto orden de Kreiss-Oliger,⁵ la cual modifica la evolución de una variable dada através de

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} \rightarrow u_{i,j}^{n+1} & - \epsilon_\rho (u_{i+2,j}^n - 4u_{i+1,j}^n + 6u_{i,j}^n - 4u_{i-1,j}^n + u_{i-2,j}^n) \\ & - \epsilon_z (u_{i,j+2}^n - 4u_{i,j+1}^n + 6u_{i,j}^n - 4u_{i,j-1}^n + u_{i,j-2}^n), \end{aligned} \quad (3.78)$$

⁴Existen varias formas de definir el parámetro de Courant para el caso de más de una dimensión. Por ejemplo, en lugar de elegir el mínimo entre los diferentes Δx^i , uno puede elegir la norma de los espaciamientos, es decir, $\sqrt{\sum \Delta x^i}$, así que, el parámetro de Courant está dado por $\Delta t / \sqrt{\sum \Delta x^i}$. Sin embargo, para evitar problemas de estabilidad, nosotros preferimos usar el mínimo entre los dos espaciamientos.

⁵Para detalles de este operador ver [78, 66].

donde ϵ_ρ y ϵ_z son constantes arbitrarias que deben ser menores que uno. Nótese que, la forma del término de disipación nos permite usarlo de manera independiente a lo largo de la dirección ρ y z respectivamente. Para esta simulación, hemos usado una constante de $\epsilon_\rho = \epsilon_z = 0.05$.

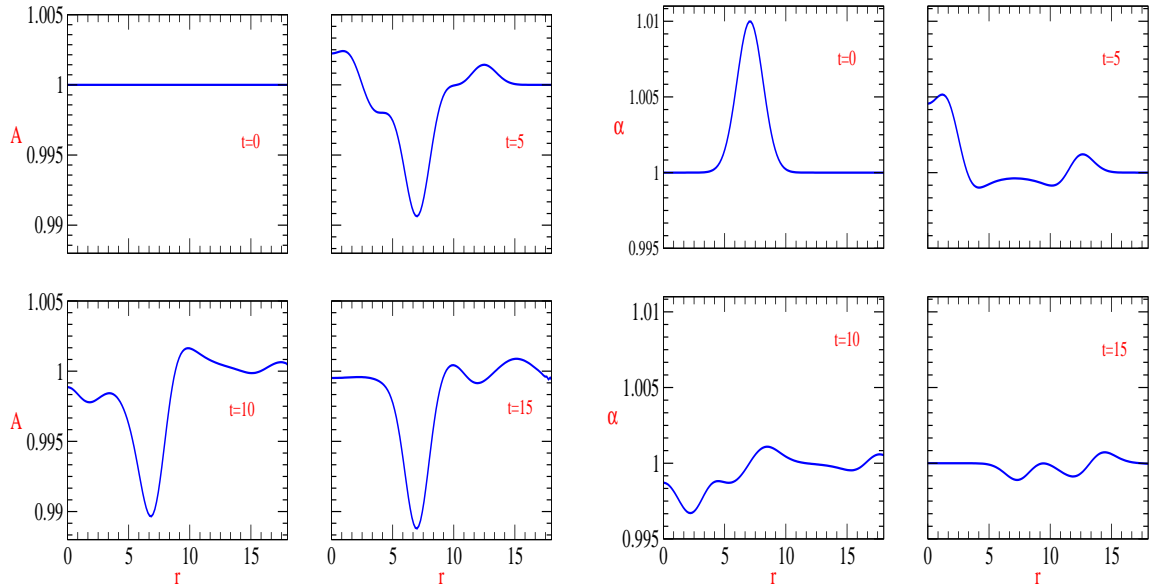


FIGURA 3.4: Evolución del espacio-tiempo de Minkowski en simetría axial con un lapso no trivial usando las ecuaciones ADM. Las figuras muestran la evolución de una de las componentes de la métrica y la función de lapso a lo largo de la diagonal. Izquierda: evolución de la componente métrica $\gamma_{\rho\rho} \equiv A$ a lo largo de la diagonal. Derecha: evolución de la función de lapso α a diferentes tiempos. Las funciones se comportan suavemente mientras el pulso pasa a través del eje de simetría.

Las figuras 3.4 muestran la evolución del coeficiente métrico $\gamma_{\rho\rho} \equiv A$ y la función de lapso α . Por simplicidad, hemos considerado proyecciones a la largo de la diagonal.⁶ Una vez más, vemos que no existe problema sobre el eje de simetría. El lapso evoluciona como una onda, pasa a través del eje y finalmente regresa a uno.

⁶Los puntos sobre la diagonal satisfacen la relación $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

Nótese que el procedimiento de regularización, presentado en las anteriores secciones, funciona para el caso en el que el sistema de ecuaciones de evolución sea débilmente hiperbólico. En las siguientes secciones veremos que, dicho procedimiento, también regulariza las ecuaciones de evolución para el caso en el que el sistema es fuertemente hiperbólico.

3.3.3. Espacio-tiempo de Minkowski en simetría axial usando NOR

En nuestro siguiente ejemplo, consideramos exactamente la misma situación anterior, datos iniciales, condiciones de frontera y malla numérica, pero esta vez usamos el sistema de ecuaciones NOR que, como mostramos en el Apéndice A, es fuertemente hiperbólico.

Las Figuras 3.5 y 3.6 muestran la evolución de cuatro funciones geométricas a lo largo de la diagonal. Una vez más, las variables permanecen regulares cuando el pulso llega al eje de simetría $\rho = 0$. Esta simulación tuvo una duración aproximada de 50 pasos de tiempo, tiempo durante el cual las variables permanecieron regulares sobre el eje de simetría.

Finalmente, en las figuras 3.7 y 3.8 presentamos un análisis de convergencia para código numérico empleado. Ya que estamos usando el método de líneas con el método iterativo de Crank-Nicholson y diferencias centradas de segundo orden en el espacio, esperamos que el código numérico empleado sea a segundo orden. En la figura 3.7 presentamos la norma L_2 para la constricción hamiltoniana y de la componente M^ρ de la constricción de momento para tres distintas resoluciones $\Delta\rho = 0.03125, 0.025, 0.01875$. Nótese que hemos rescalado las resoluciones más altas por el factor adecuado para mostrar segundo orden de convergencia. Claramente en la región en la que la frontera exterior no ha afectado la simulación numérica el código es a segundo orden. Sin embargo, para el paso de tiempo $t \sim 5$ la frontera introduce modos de propagación hacia el dominio computacional que violan las constricciones. Por otro lado, en la figura 3.8, mostramos el comportamiento de las constricciones hamiltoniana para tres diferentes tiempos. El tiempo $t = 3.5$ corresponde al tiempo en el que ningún modo de propagación ha alcanzado la frontera exterior. En la iteración $t = 8.5$ varios modos han alcanzado la frontera y se han introducido modos que violan las constricciones. Finalmente, el paso de tiempo $t = 12.5$ detenemos la evolución. En el último panel de la figura 3.8 presentamos la norma L_2 en escala semilogarítmica. Para mostrar segundo orden de convergencia hemos rescalado las resoluciones más altas. Hemos elegido estas tres resoluciones $\Delta\rho = 0.025, 0.0125, 0.00625$ ya que empíricamente hemos encontrado que con ellas garantizamos que estamos en el régimen de convergencia; para resoluciones más bajas, aparentemente errores de orden mayor a $\mathcal{O}(\Delta\rho^2)$ parecen aun dominar en la simulación y podemos encontrar sobreconvergencia. Nótese que,

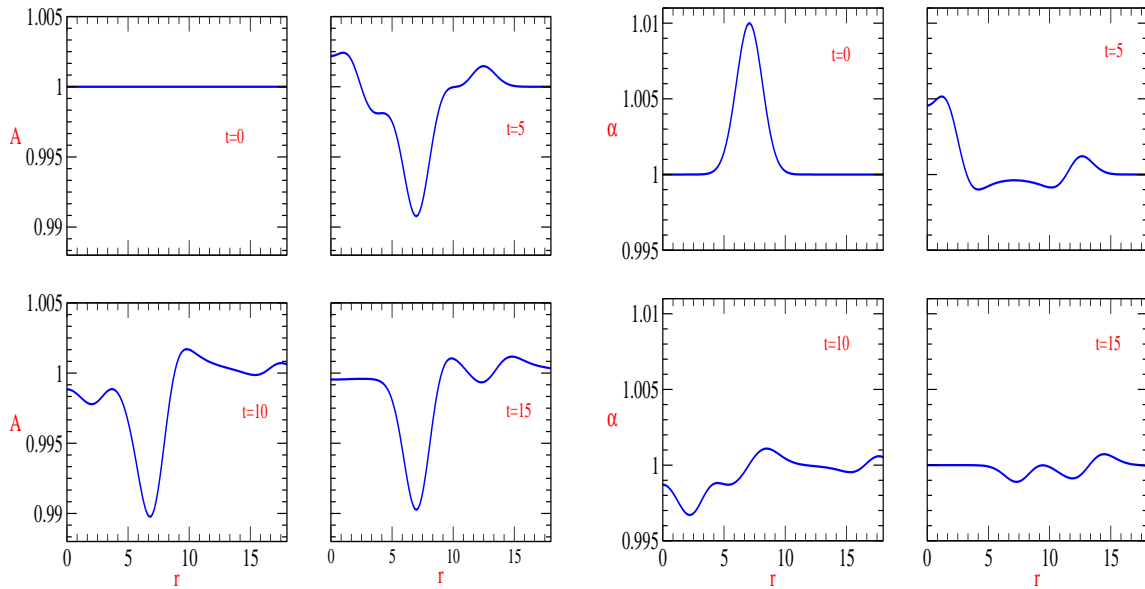


FIGURA 3.5: Evolución del espacio-tiempo de Minkowski en simetría axial con un lapso no trivial usando las ecuaciones tipo NOR. Las figuras muestran la evolución de una de las componentes de la métrica y del lapso a lo largo de la diagonal. Izquierda: evolución de la componente métrica $\gamma_{\rho\rho} \equiv A$ a lo largo de la diagonal. Derecha: evolución de la función de lapso α a diferentes tiempos. Nótese que las funciones se comportan suavemente mientras el pulso pasa a través del eje de simetría.

en analogía con el caso esférico, la norma L_2 de la constricción hamiltoniana para las resoluciones más altas reescala adecuadamente solo hasta el tiempo $t \sim 4$. Después de este paso de tiempo, algunos modos de propagación que violan las constricciones son reflejados en la frontera hacia el dominio computacional. Esto era de esperarse, ya que impusimos condiciones de frontera radiativas,

$$\partial_t F + v \partial_r f + v(F - F_0) \sim 0, \quad (3.79)$$

donde F es el campo que se propaga a velocidad v y F_0 es un valor asintótico de F . En nuestro caso, hemos impuesto esta condición de frontera para todas nuestras variables y hemos asumido que su velocidad de propagación es $v = 1$. En el siguiente capítulo discutiremos un tipo especial de condiciones de frontera que son compatibles con las constricciones.

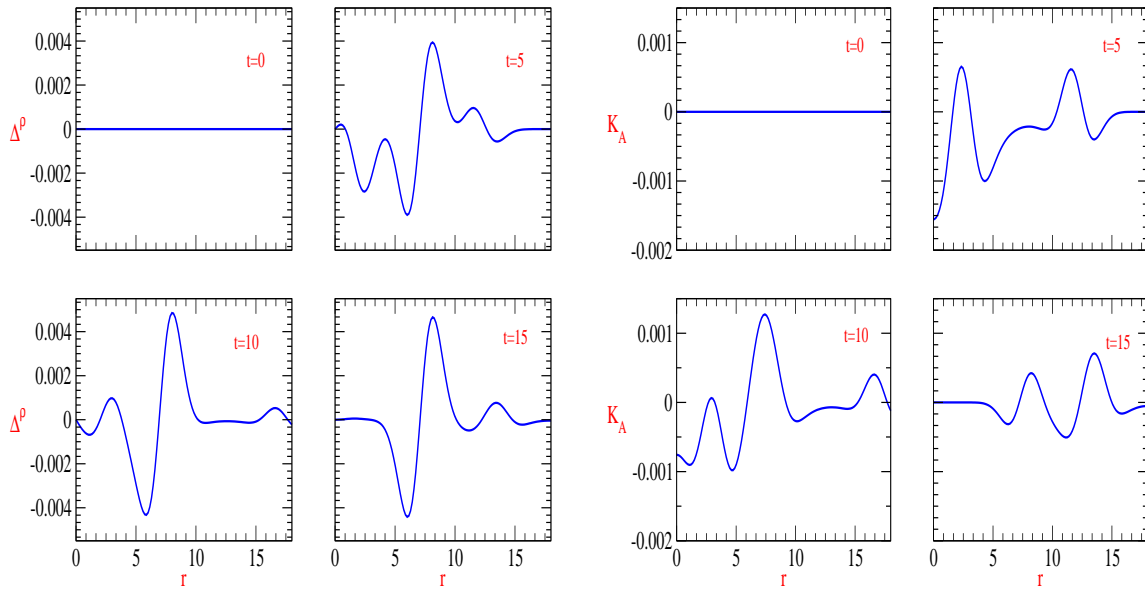


FIGURA 3.6: Evolución del espacio-tiempo de Minkowski en simetría axial con un lapso no trivial usando las ecuaciones tipo NOR. Las figuras muestran la evolución de una de las componentes de la curvatura extrínseca y de la componente ρ del vector Δ^i a lo largo de la diagonal. Izquierda: evolución de Δ^ρ a lo largo de la diagonal. Derecha: evolución de la componente $K_{\rho\rho} \equiv K_A$ a diferentes tiempos. Nótese que una vez más, las funciones se comportan suavemente mientras el pulso pasa através del eje de simetría.

3.3.4. Ondas de Brill

Nuestro último ejemplo corresponde a la evolución del espacio-tiempo de ondas de Brill usando la formulación NOR. Este espacio-tiempo corresponde a una solución de ondas gravitacionales intensas, no lineales y en vacío. Dependiendo de su intensidad, las ondas se pueden dispersar o, por el contrario, colapsar a un agujero negro. Alcubierre *et al.* encontraron en [4] que para una amplitud aproximadamente $a \approx 5$ las ondas de Brill colapsan a un agujero negro.

Para encontrar la geometría que describe este espacio-tiempo, comencemos considerando una métrica axialmente simétrica de la forma

$$ds^2 = \Psi^4 [e^{2q} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] , \quad (3.80)$$

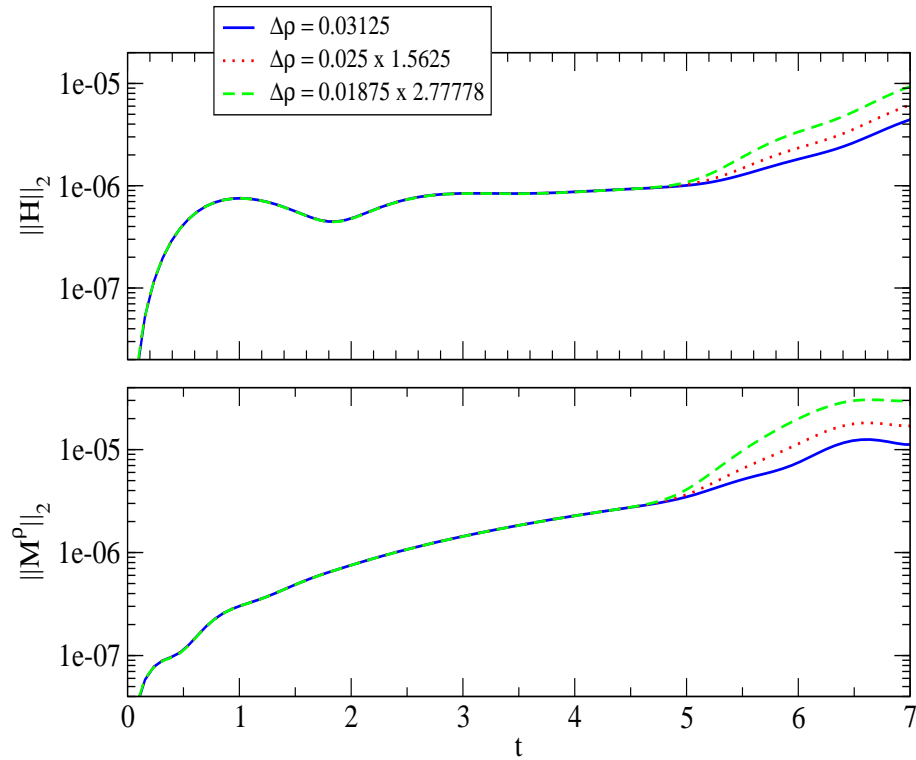


FIGURA 3.7: Norma L_2 en escala semilogarítmica para la constricción hamiltoniana y de momento M^p para el sistema de ecuaciones ADM para tres distintas resoluciones. Nótese que hemos reescalado las resoluciones más altas por el factor $(\Delta\rho_{max}/\Delta_{min})^2$ para mostrar segundo orden de convergencia. Una vez más, podemos asegurar que el código es a segundo orden antes de que el primer modo de propagación alcance la frontera alrededor del tiempo $t \sim 5$.

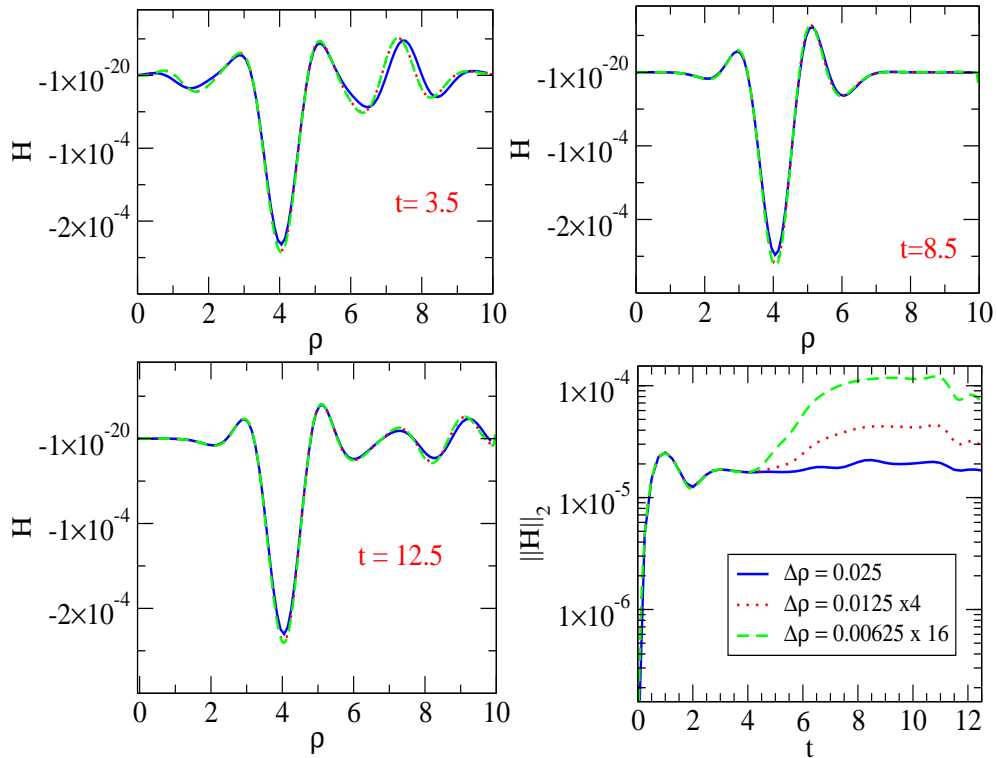


FIGURA 3.8: Violación de la constricción hamiltoniana para el sistema de ecuaciones NOR. En los tres primeros paneles mostramos la constricción a lo largo del eje ρ para tres diferentes resoluciones. El último panel corresponde a la norma L_2 en escala semilogarítmica. Hemos elegido estos tres pasos de tiempo para mostrar el comportamiento de la constricción antes de que el primer modo de propagación alcance la frontera exterior, después que tenemos reflexiones en la frontera y, finalmente, cuando se detiene la evolución. Nótese que hemos reescalado las resoluciones más altas por el factor $(\Delta\rho_{max}/\Delta\rho_{min})^2$ para mostrar segundo orden de convergencia.

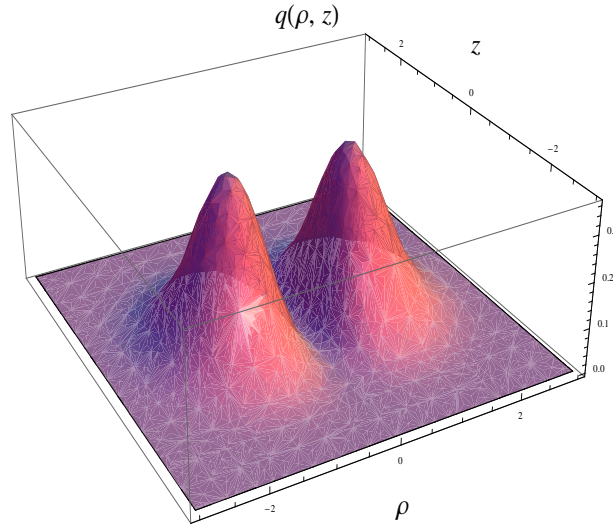


FIGURA 3.9: Perfil de la función de Holz para una amplitud de $a = 3$. Elegimos esta forma de la función q para garantizar la regularidad de los datos iniciales.

donde la variable q , que resulta ser arbitraria, y Ψ son funciones que depende de las coordenadas t , ρ y z .

Para encontrar la función Ψ imponemos, sin perdida de generalidad, la condición de simetría temporal, es decir, $K_{ij} = 0$. Esta condición satisface automáticamente la constricción de momentos M^j . Elegiendo una forma particular de la función q , podemos resolver la constricción Hamiltoniana H para el factor conforme Ψ . Usando la métrica (3.80) esta constricción toma la forma

$$\overset{\circ}{\nabla}^2 \Psi + \frac{1}{4} (q_{,\rho\rho} + q_{,zz}) \Psi = 0, \quad (3.81)$$

donde $\overset{\circ}{\nabla}^2$ es el operador laplaciano asociado con el espacio plano. La función q es arbitraria salvo por las condiciones de frontera que debe cumplir. Estas condiciones son:

$$q|_{\rho=0} = 0, \quad (3.82)$$

$$\partial_{\rho}^n q|_{\rho=0} = 0, \quad \text{para } n \text{ impar}, \quad (3.83)$$

$$q|_{r \rightarrow \infty} = O(r^{-2}). \quad (3.84)$$

Una vez elegida la función q , lo que resta por hacer es resolver la ecuación elíptica (3.81) numéricamente.

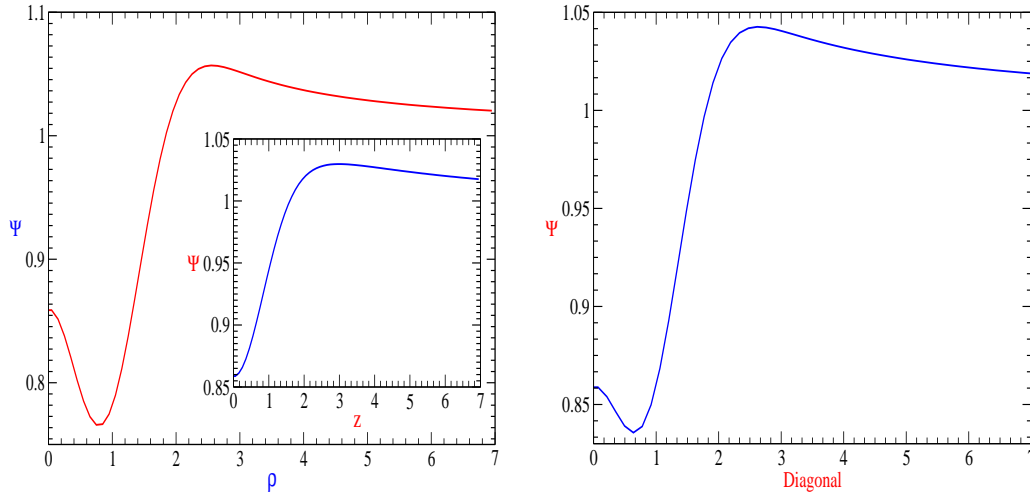


FIGURA 3.10: Factor conforme $\Psi(\rho, z)$ para datos iniciales de ondas de Brill. Por simplicidad, hemos elegido la función q tipo Holz [71] para una amplitud de $a = 3.0$. Con esta amplitud garantizamos que no se formarán agujeros negros pero, sin embargo, nos permite estar lejos del régimen lineal.

Existen diferentes propuestas en la literatura para elegir la función q , ver por ejemplo [10, 56, 71]. Nosotros consideremos, siguiendo a [10], la propuesta introducida por Holz y colaboradores en [71], que tiene la forma

$$q = a \rho^2 e^{-(\rho^2 + z^2)}, \quad (3.85)$$

donde a es un parámetro constante que determina la amplitud de las ondas de Brill. Con esta elección garantizamos la regularidad de los datos iniciales. En la figura 3.9 se muestra la forma de la función de Holz para una amplitud de $a = 3$. y en la figura 3.11 hacemos un análisis de convergencia para los datos iniciales calculados con (3.85).

Con esta elección particular de la función q podemos ahora resolver la ecuación elíptica (3.81) para encontrar el factor conforme Ψ . Existen varias formas de resolver esta ecuación, como ya lo hemos mencionado en el capítulo anterior, existen algoritmos específicos empleando diferencias finitas o métodos espectrales. Sin embargo, para resolver esta ecuación, como solo la necesitamos resolver inicialmente, usamos un enfoque diferente; en lugar de intentar resolver la ecuación (3.81), resolvemos la ecuación de

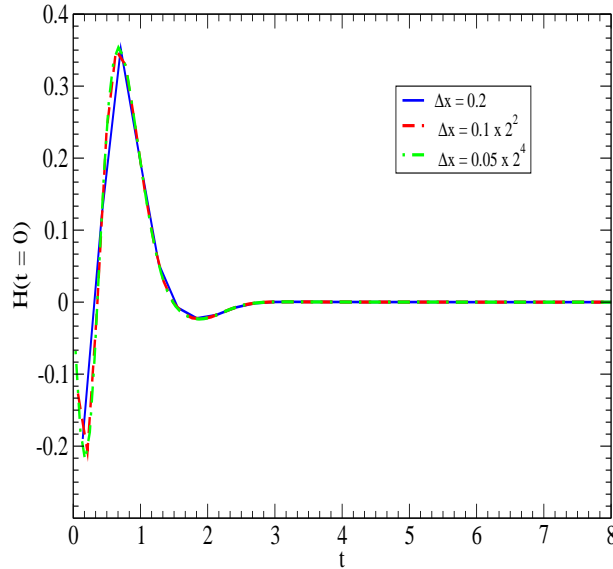


FIGURA 3.11: *Convergencia de los datos iniciales para las ondas de Brill con una amplitud $a = 3$. Una vez calculados los datos iniciales calculamos la constricción hamiltonia para $t = 0$ a tres distintas resoluciones $\Delta\rho = 0.2, 0.1, 0.05$. Nótese que hemos reescalado las resoluciones más altas para demostrar segundo orden de convergencia.*

evolución

$$\partial_\tau^2 - \nabla^2 \Psi = -\frac{1}{4} (q_{,\rho\rho} + q_{,zz}) , \quad (3.86)$$

donde τ es un tiempo ficticio usado para evolucionar la ecuación de onda bidimensional (3.86). Adicionalmente imponemos condiciones de frontera tipo radiativas,

$$\partial_\tau \Psi + \partial_r \Psi = \frac{1 - \Psi}{r} , \quad (3.87)$$

que permiten que los modos de propagación de la onda salgan del dominio computacional. La idea es entonces evolucionar la ecuación de onda hasta terminar con una solución estática, la cual debe corresponder a la solución de la ecuación (3.81). En la figura 3.10 presentamos la función Ψ que se obtiene resolviendo, con este método, la ecuación (3.81) para una amplitud de $a = 3.0$. Con esta amplitud garantizamos que no se formarán agujeros negros pero, sin embargo, nos permite estar lejos del régimen lineal.

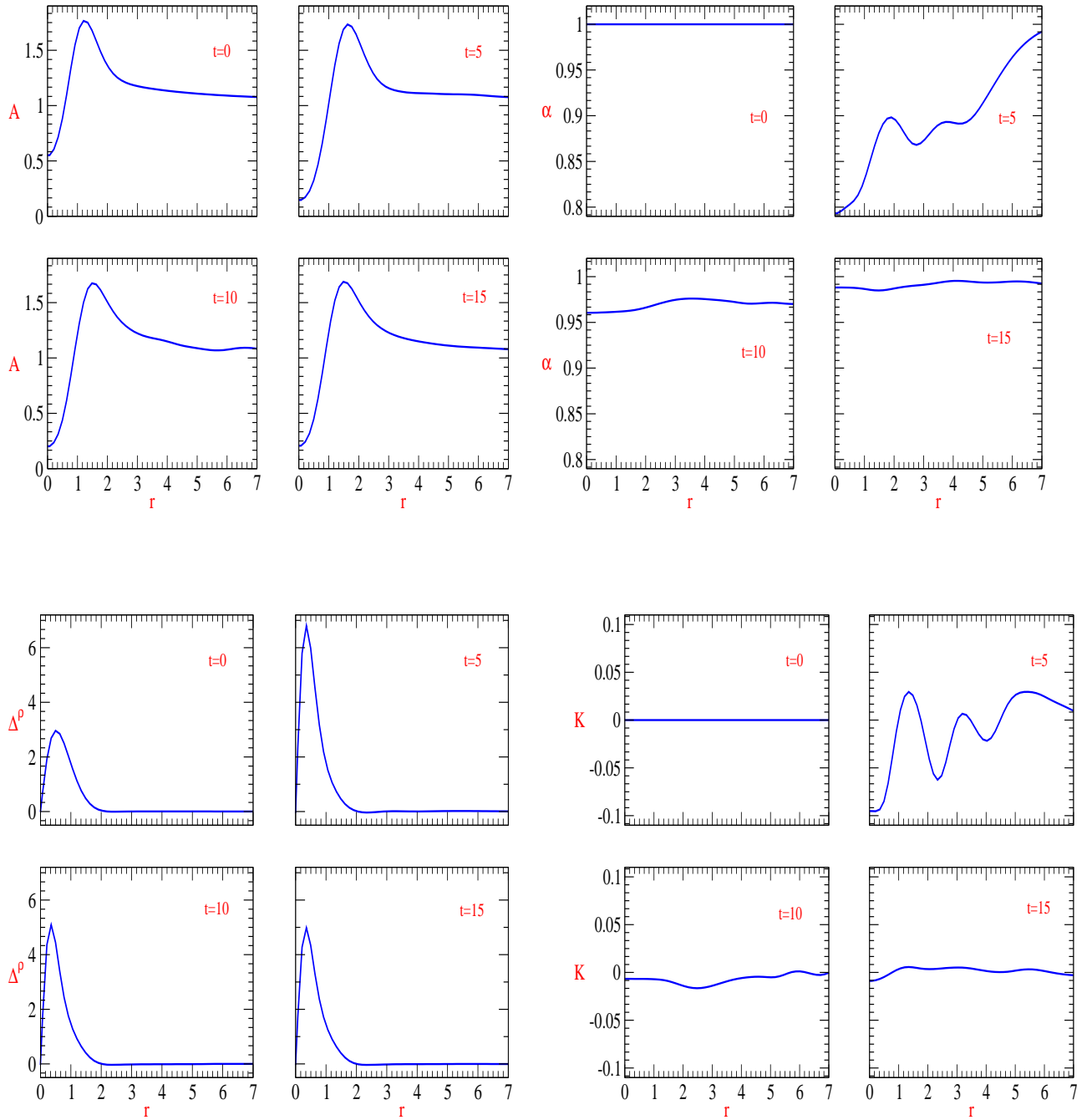


FIGURA 3.12: Ondas de Brill. Las figuras muestran la evolución de las variables geométricas a lo largo de la diagonal ($r = \sqrt{r^2 + z^2}$). Arriba, izquierda: evolución de la componente métrica $\gamma_{\rho\rho} \equiv A$ a lo largo de la diagonal. Arriba, derecha: evolución de la función de lapso α . Abajo, izquierda: evolución de Δ^ρ a lo largo de la diagonal. Abajo, derecha: evolución de la traza de la curvatura extrínseca K a diferentes tiempos. Nótese que las funciones geométricas se comportan suavemente mientras el pulso pasa através del eje de simetría.

Para la evolución de estos datos iniciales hemos usado una malla numérica de $\Delta\rho = \Delta z = 0.1$ y un factor de Courant de $\Delta t/\Delta\rho = 0.2$. Las condiciones de fronteras externas están localizadas en $\rho = z = 70$. Para la evolución del lapso usamos la condición de foliación de Bona-Masso (2.23) con $f = 2/\alpha$. Una vez más, por estabilidad hemos considerado disipación de Kreiss-Oliger con coeficientes $\epsilon_\rho = \epsilon_z = 0.05$.

Las Figura 3.12 muestra, en analogía con la evolución del sistema de ecuaciones NOR, la evolución de diferentes componentes geométricas. Nótese que, una vez más, las simulaciones no presentan alguna inestabilidad cuando el pulso llega al eje de simetría.

3.4. **Discusión**

En este Capítulo presentamos un procedimiento de regularización para simulaciones numéricas en el caso de espacio-tiempos con simetría esférica y axial. Para esto, seguimos una idea de Rinne y Stewart presentada en [107]. Este procedimiento nos asegura que se cumplen las condiciones de paridad y las condiciones que se obtienen cuando consideramos que el espacio debe ser localmente plano en el origen $r = 0$ o en el eje de simetría $\rho = 0$. La importancia de este algoritmo de regularización es que es independiente del sistema de ecuaciones de evolución que usemos. Para demostrar esto, explícitamente usamos el procedimiento para las formulaciones ADM y NOR, las cuales son débil y fuertemente hiperbólicas respectivamente. Adicionalmente, describimos los códigos numéricos y mencionamos algunos ejemplos donde mostramos como el algoritmo de regularización funciona en la práctica. Experimentos numéricos similares, usando la formulación Z_4 , fueron presentados en [104]. Estos ejemplos muestran que podemos construir códigos numéricos adaptados a una simetría dada, los cuales nos permiten estudiar escenarios astrofísicos relevantes con modestos recursos computacionales.

Para cerrar esta discusión, es útil tener en cuenta que también se puede construir códigos regulares usando normas específicas que permiten reducir el número de componentes independientes de la métrica. No obstante, nuestro interés ha sido el de encontrar un procedimiento de regularización general que permita que las variables de norma sean arbitrarias.

CONDICIONES DE FRONTERA PARA LAS ECUACIONES DE EINSTEIN EN LA NORMA ARMÓNICA

En el capítulo anterior hemos discutido las condiciones necesarias para garantizar que la evolución de un sistema de ecuaciones, escritas en un sistema de coordenadas adaptado a una simetría dada, permanezca regular. Esto es, entre otras cosas, indispensable para reducir la cantidad de recursos computacionales empleados en una simulación dada; en lugar de evolucionar un espacio-tiempo unidimensional o bidimensional con códigos numéricos tridimensionales, ahora lo podemos hacer con códigos adaptados que nos permiten reducir en una o en dos dimensiones la cantidad de puntos de la malla numérica. Otro ingrediente tan o mucho más importante que los códigos adaptados a una simetría dada, y que sin embargo solo hasta hace relativamente muy poco tiempo a tomado la importancia que merece, son las condiciones de frontera. Miller, Gressman y Suen mostraron, dentro del contexto de evoluciones binarias de estrellas de neutrones, que el uso de condiciones de frontera artificiales puede llegar a afectar dramáticamente la dinámica en las vecindades de campos gravitacionales intensos [88]. No es difícil entender por que ocurre esto. La mayoría de simulaciones de relatividad numérica usan las condiciones de frontera radiativas las cuales, como mencionamos en el capítulo anterior, no toman en cuenta las constricciones. Esto causa que modos de propagación que violan las constricciones se reflejen en la frontera hacia el interior del dominio computacional contaminando la solución física deseada. Por supuesto, uno siempre pueden imponer las condiciones de frontera lo suficientemente lejos de tal forma que estos modos que violan las constricciones estén desconectados causalmente de la región de interés. Aunque debemos pagar un precio. Esta

solución es muy cara en términos de recursos computacionales, especialmente en simulaciones numéricas tridimensionales. Por supuesto, en la actualidad contamos con las técnicas de refinamiento de mallas adaptativas (para detalles ver por ejemplo [16, 36, 98] y sus referencias) que nos permiten imponer las fronteras en una región, con muy poca resolución, lo suficientemente lejos para que estos modos no afecten la solución y, en contraste, con muy alta resolución en la región dinámica. Sin embargo, esta técnica aun tiene un inconveniente. En una típica simulación numérica de un sistema binario de dos agujeros negros, las fronteras son impuestas en aproximadamente $\sim 380M$ y la extracción de ondas gravitacionales, para obtener observables físicos tales como energía y momentos radiados por el sistema (ver capítulo 5), es al rededor de $\sim 40 - 70M$. Así que estamos evolucionando innecesariamente, a muy baja resolución, un dominio computacional de alrededor de $\sim 300M$. Por lo tanto, idealmente deberíamos poder imponer condiciones de frontera cerca a la región de extracción de radiación gravitacional. Recientemente Rinne, Lindblom y Scheel probaron numéricamente en [106] la calidad de varios conjunto de condiciones de frontera comparando la cantidad de reflexiones espurias y la violación de constricciones que se obtienen al imponer determinadas condiciones de frontera. Ellos demuestran que sus resultados implementando condiciones de frontera compatibles con las constricciones en regiones cercanas a la esfera de extracción de radiación gravitacional son más precisos que los usuales resultados presentados en las simulaciones de sistemas binarios de agujeros negros.

Teniendo en cuenta esto, en este capítulo estudiaremos las ecuaciones de Einstein (1.1) en coordenadas armónicas sobre un dominio espacial con fronteras; hemos elegido la norma armónica ya que las ecuaciones de campo en esta norma se reescriben como un conjunto de diez ecuaciones tipo onda para las diez componentes métricas. Esto automáticamente nos garantiza que, si trabajamos en un dominio computacional sin condiciones de frontera artificiales, el problema de valores iniciales asociado esta bien planteado. Por lo tanto, por lo único que debemos preocuparnos es por evolucionar estas ecuaciones de onda.

Numéricamente lo que necesitamos hacer para evolucionar la ecuación de onda, o cualquier otra ecuación de evolución, es imponer algún tipo de condición de frontera de acuerdo al problema que queremos resolver. Las fronteras pueden ser físicas, por ejemplo, cuando queremos ver cuales son los modos de propagación sobre una cuerda de una guitarra, o, pueden ser artificiales, por ejemplo, cuando queremos encontrar la propagación de un campo escalar sobre todo el espacio-tiempo Minkowski; necesitamos imponer estas condiciones por que ninguna maquina y/o *cluster* puede evolucionar un dominio computacional infinito.

Las condiciones de frontera físicas son triviales de imponer, el problema mismo nos habla de ellas.

Sin embargo, no es claro cuales y/o como se deben imponer las condiciones de frontera artificiales. Por supuesto, debemos elegir condiciones de frontera que no afecten la estructura matemática del sistema de ecuaciones de evolución. No es deseable tener inestabilidades numéricas generadas por la frontera. La otra cualidad obvia, que debe tener toda condición de frontera artificial, es que debe ser lo suficientemente “transparente” para que los modos de propagación que salen de la malla numérica no sean reflejados al interior del dominio computacional. Esto último nos garantiza que la solución acotada debe ser muy cercana a la solución que se obtendría al evolucionar todo el espacio. Las condiciones de frontera con esta última propiedad son conocidas condiciones de frontera absorbentes [37, 38].

Después de considerar todas las posibles propiedades que deben tener las condiciones de frontera artificiales para intentar resolver las ecuaciones de Einstein en la norma armónica, aun tenemos un problema que resolver. No todos los diez coeficientes métricos representan grados de libertad físicos. Así que no podemos simplemente utilizar lo aprendido al evolucionar la ecuación de onda con fronteras artificiales. En lugar de esto, debemos tener en cuenta que la métrica en la norma armónica tiene cuatro constricciones de norma. Analíticamente se puede mostrar que, en ausencia de fronteras artificiales, es suficiente resolver estas constricciones junto con sus derivadas temporales inicialmente. Las identidades de Bianchi y las ecuaciones de evolución garantizaran que estas constricciones se satisfacen en todo punto del espacio. Por otro lado, cuando nuestro sistema dinámico tiene condiciones de frontera, necesitamos especificar cuatro condiciones de frontera que nos aseguren que no existen modos de propagación hacia el dominio computacional que violan las constricciones de norma, es decir, necesitamos fijar cuatro condiciones de frontera compatibles con las constricciones de norma. Ese hecho reduce los diez grados de libertad a seis. Otros cuatro grados de libertad están relacionados, como ya mencionamos en el capítulo 2, con la libertad que tenemos de elegir un sistema de coordenadas. Finalmente, los dos últimos grados de libertad están, como veremos en el capítulo 5, relacionados con la radiación gravitacional.

Existen varias propuestas para las condiciones de frontera de las ecuaciones de Einstein en la norma armónica con las propiedades que hemos discutido antes [125, 85, 80, 109]. Por ejemplo, Szilagyi y colaboradores propusieron en [125, 126] una combinación de condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann¹ para las ecuaciones de Einstein cuyo problema de valores iniciales resultante esta bien plan-

¹Las condiciones de frontera tipo Dirichlet son condiciones que fijan la frontera a un valor determinado, por ejemplo, si consideramos la ecuación de evolución

$$\partial_t^2 \Phi - \partial_x^2 \Phi = 0,$$

teado en el régimen no lineal. Ellos mostraron numéricamente, usando datos iniciales compatibles con las constricciones más un pequeño contenido de datos aleatorios tanto en los datos iniciales como en la frontera, que su sistema de ecuaciones de evolución con condiciones de frontera es robustamente estable. Por otro lado, en [80] Kreiss y Winicour propusieron recientemente condiciones de frontera del tipo Sommerfeld para las ecuaciones de Einstein en la norma armónica. Ellos muestran, usando técnicas de operadores pseudo diferenciales, que su sistema de ecuaciones de evolución con este tipo de fronteras conduce a un problema de valores iniciales bien puesto. Condiciones absorbentes que involucran el escalar de Weyl Ψ_0 se han propuesto en [85]; Buchman y Sarbach mostraron en [37] que una buena aproximación a una condición de frontera absorbente es congelar el valor inicial del escalar Ψ_0 durante toda la evolución. Nosotros, por otro lado, generalizamos las ecuaciones de frontera de primer orden de Kreiss y Winicour y proponemos condiciones de frontera de segundo orden, que son similares a las presentadas en [85], y de orden mayor [109]. Esto nos permite tener mayor control sobre las reflexiones en la frontera de los modos de propagación que salen del dominio computacional.

4.1. Condiciones de frontera externas

Antes de intentar encontrar condiciones de frontera para las ecuaciones de Einstein en la norma armónica es necesario redefinir y aclarar algunos conceptos. Al igual que en la sección 2.5, para los siguientes cálculos, es útil usar la diferencia entre la métrica física $g_{\mu\nu}$ y una métrica de fondo fija $\hat{g}_{\mu\nu}$ definida como

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \hat{g}_{\mu\nu}.$$

Por otro lado, asumiremos que la frontera $\partial\Sigma$ de cada superficie espacial Σ_i es suave y que la superficie $\mathcal{T} = [0, T] \times \partial\Sigma$ es una superficie tipo tiempo, tal y como se muestra en la figura 4.1.

en el intervalo $[0, 1]$, las condiciones de Dirichlet son de la forma

$$\Phi(0) = f_1, \quad \Phi(1) = f_2,$$

donde f_1 y f_2 son valores conocidos. Por otro lado, Las condiciones de frontera tipo Neumann, especifican los valores de la derivada de las variables en la frontera, es decir,

$$\partial_x \Phi(0) = g_1, \quad \partial_x \Phi(1) = g_2,$$

donde g_1 y g_2 son funciones dadas.

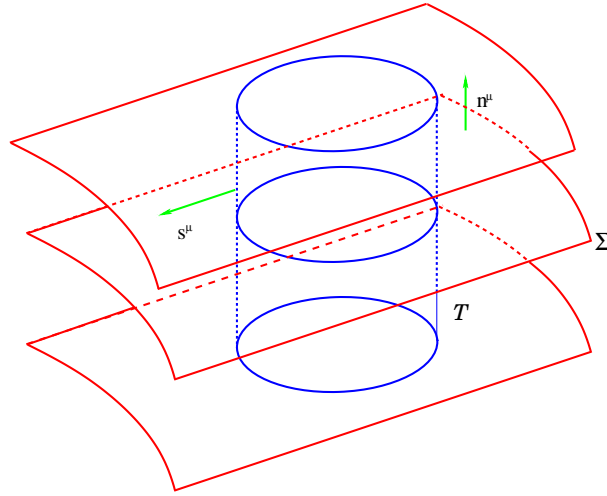


FIGURA 4.1: Espacio-tiempo $M = [0, T] \times \Sigma$ con una superficie de frontera suave $\mathcal{T} = [0, T] \times \partial\Sigma$. Por simplicidad, supondremos que la frontera \mathcal{T} es una superficie temporal y ortogonal a las superficies Σ_t que son superficies puramente espaciales.

También es necesario definir dos vectores unitarios. Supondremos que el vector n^μ denota el vector saliente normal a Σ_t y el vector s^μ denota el vector saliente normal a la superficie bidimensional $\partial\Sigma$ encajada en Σ .² Teniendo en cuenta esta última definición, es fácil ver que estos vectores cumplen con

$$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1, \quad g_{\mu\nu} n^\nu s^\mu = 0, \quad g_{\mu\nu} s^\nu s^\mu = 1.$$

La definición de estos vectores, nos permiten automáticamente construir una tétrada nula $\{l^\mu, k^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$ de acuerdo con

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(n^\mu + s^\mu), \quad k^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(n^\mu - s^\mu), \quad (4.1)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(v^\mu + i w^\mu), \quad \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(v^\mu - i w^\mu), \quad (4.2)$$

donde los vectores v^μ y w^μ son dos vectores unitarios mutuamente ortogonales, los cuales son normales

²Estos vectores están definidos con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$, aunque desde luego, también podemos definir estos vectores con respecto a de la métrica de fondo $\mathring{g}_{\mu\nu}$.

a n^μ y s^μ (con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$). Nótese que esta tétrada, por construcción, esta adaptada a la frontera y es única salvo por reescalamientos de los vectores l^μ y k^μ y salvo por una rotación $m^\mu \mapsto e^{i\varphi} m^\mu$, $\bar{m}^\mu \mapsto e^{-i\varphi} \bar{m}^\mu$ de los vectores m^μ y \bar{m}^μ alrededor de un ángulo φ .

Por otro lado, ya que las ecuaciones de Einstein en el vacío y en la norma armónica, ecuaciones de evolución (2.81) con $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$, son diez ecuaciones tipo onda, necesitamos encontrar diez condiciones de frontera sobre la superficie \mathcal{T} . Estas diez condiciones se pueden dividir en condiciones de frontera que preservan las constricciones de norma, condiciones de frontera para la radiación gravitacional y condiciones de frontera que controlan los modos de propagación de la norma. Las condiciones de frontera que preservan las constricciones de norma aseguran que las soluciones cuyos datos iniciales satisfacen inicialmente las constricciones, las satisfecerán durante toda la evolución. Nótese que, como ya mencionamos en el capítulo 2, estas cuatro constricciones de norma $\mathcal{C}^\mu = 0$ obedecen por si mismas un conjunto de ecuaciones de onda. Por otro lado, ya que la radiación gravitacional tiene dos grados de libertad, necesitamos especificar dos condiciones más para controlar la radiación física. Finalmente, debemos especificar cuatro condiciones de frontera para los modos de propagación de la norma.

A continuación, presentaremos varios conjuntos de condiciones de frontera compatibles con las constricciones de norma. Hemos dividido estos conjuntos en condiciones de frontera de primer orden, de segundo orden y de orden mayor; el orden se refiere al grado de las derivadas de $h_{\mu\nu}$ que aparecen en las condiciones de frontera.

4.1.1. Condiciones de frontera de primer orden

En el caso de condiciones de primer orden, las condiciones que preservan las constricciones de norma se pueden obtener directamente através de la expresión (2.73). Usando (2.76), esta condición se puede reexpresar como

$$\mathcal{C}_\beta \equiv g^{\mu\nu} \left(\overset{\circ}{\nabla}_\mu h_{\nu\beta} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla}_\beta h_{\mu\nu} \right) - H_\beta \hat{=} 0, \quad (4.3)$$

donde la notación $\hat{=}$ significa que la igualdad se tiene solamente sobre \mathcal{T} . Estas cuatro condiciones de frontera son condiciones tipo Dirichlet.

Por otro lado, reescribiendo la métrica $g^{\mu\nu}$ en término de la base nula,

$$g^{\mu\nu} = -2 l^{(\mu} k^{\nu)} + 2 m^{(\mu} \bar{m}^{\nu)}, \quad (4.4)$$

podemos expresar, de manera equivalente, las cuatro condiciones (4.3) como

$$\mathcal{C}_\mu l^\mu \hat{=} -D_{lm\bar{m}} - D_{kll} + D_{m\bar{m}l} + D_{\bar{m}ml} - H_l \hat{=} 0, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{C}_\mu k^\mu \hat{=} -D_{lkk} - D_{km\bar{m}} + D_{m\bar{m}k} + D_{\bar{m}mk} - H_k \hat{=} 0, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{C}_\mu m^\mu \hat{=} -D_{lkm} - D_{klm} + D_{mlk} + D_{\bar{m}mm} - H_m \hat{=} 0, \quad (4.7)$$

donde hemos definido $D_{\alpha\mu\nu} \equiv \overset{\circ}{\nabla}_\alpha h_{\mu\nu}$ y donde los índices l, k, m, \bar{m} denotan la contracción con l^μ, k^μ y m^μ respectivamente. Nótese que, como el vector m^μ es complejo, la expresión (4.7) corresponde a dos condiciones.

Consideremos ahora el tensor de distorsión asociado con una congruencia de curvas nulas a lo largo del campo vectorial l^μ de acuerdo con ³

$$\sigma_{\mu\nu}^{(l)} = \left(\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} \right) \nabla_\alpha l_\beta, \quad (4.8)$$

donde $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - s_\mu s_\nu = 2m_{(\mu} \bar{m}_{\nu)}$ representa la métrica inducida sobre $\partial\Sigma_t$. Nótese que $\sigma_{\mu\nu}^{(l)}$ es un tensor sin traza que es ortogonal a los vectores n^μ y s^μ ; el tensor de distorsión tiene, por construcción, dos componentes linealmente independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos imponer las condiciones de frontera

$$m^\mu m^\nu \sigma_{\mu\nu}^{(l)} \hat{=} q_2, \quad (4.9)$$

donde q_2 es una función compleja conocida sobre la frontera. Podemos usar ahora la expresión (2.76), para expresar esta última condición en términos de $\Delta^\alpha_{\mu\nu}$ y de la geometría del espacio de fondo. Para esto debemos relacionar los vectores unitarios n_μ y s_μ con sus vectores correspondientes de fondo \hat{n}_μ y \hat{s}_μ . Es fácil ver que estas cantidades están relacionadas a través de

$$n_\mu = \alpha \hat{n}_\mu, \quad s_\mu = \epsilon \hat{s}_\mu + \delta \hat{n}_\mu,$$

donde α, δ y ϵ son funciones sobre la frontera. Con esto, encontramos que

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \nabla_\alpha l_\beta = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \left(\overset{\circ}{\nabla}_\alpha l_\beta - l_\tau \Delta^\tau_{\alpha\beta} \right).$$

³Geométricamente el tensor de distorsión, o *shear*, representa la deformación de una congruencia de curvas sin cambiar su volumen. Para detalles ver [97].

Como los vectores (n_μ, s_μ) y $(\hat{n}_\mu, \hat{s}_\nu)$ representan dos conjuntos de vectores base para el mismo espacio vectorial, podemos definir el tensor $\mathring{\mathcal{K}}_{\mu\nu}^{(l)}$ como

$$\mathring{\mathcal{K}}_{\mu\nu}^{(l)} \equiv \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \mathring{\nabla}_\alpha l_\beta, \quad (4.10)$$

el cual coincide con la curvatura extrínseca de la frontera bidimensional de la superficie Σ_t cuando esta es encajada en el espacio de fondo $(M, \mathring{g}_{\mu\nu})$. Esto no permite reexpresar la condición (4.8) en la forma

$$\sigma_{\mu\nu}^{(l)} = \left(\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} \right) \left(\mathring{\mathcal{K}}_{\alpha\beta}^{(l)} - l_\tau \Delta^\tau_{\alpha\beta} \right).$$

Finalmente, usando la expresión (2.76) la condición (4.9) se puede expresar como

$$D_{lmm} - 2D_{mlm} \hat{=} 2 \left(q_2 - \mathring{\mathcal{K}}_{mm}^{(l)} \right). \quad (4.11)$$

Antes de continuar veamos cuales son las condiciones que hemos especificado. Es fácil ver que las condiciones de frontera (4.5)-(4.7) y (4.11) son seis condiciones generalizadas de Sommerfeld del tipo

$$l^\mu \mathring{\nabla}_\mu u \hat{=} q, \quad (4.12)$$

para las componentes métricas $h_{m\bar{m}}, h_{kk}, h_{km}$ y h_{mm} . Así que aun nos falta especificar cuatro condiciones de frontera más para las componentes métricas restantes h_{ll}, h_{lk} y h_{lm} . Para esto, y en analogía con las condiciones de frontera (C.1), supondremos cuatro condiciones más del tipo Sommerfeld. Resumiendo, hemos encontrado diez condiciones de frontera usando tan solo la constricción armónica (4.3). Estas condiciones son:

$$D_{lll} \hat{=} p, \quad (4.13)$$

$$D_{llk} \hat{=} \pi, \quad (4.14)$$

$$D_{llm} \hat{=} q_1, \quad (4.15)$$

$$D_{lmm} \hat{=} 2D_{mlm} + 2 \left(q_2 - \mathring{\mathcal{K}}_{mm}^{(l)} \right), \quad (4.16)$$

$$D_{lm\bar{m}} \hat{=} -D_{kll} + D_{ml\bar{m}} + D_{\bar{m}lm} - H_l, \quad (4.17)$$

$$D_{lkm} \hat{=} -D_{klm} + D_{mlk} + D_{\bar{m}mm} - H_m, \quad (4.18)$$

$$D_{lkk} \hat{=} -D_{km\bar{m}} + D_{m\bar{m}k} + D_{\bar{m}mk} - H_k, \quad (4.19)$$

donde p y π y q_1 y q_2 son funciones reales y complejas respectivamente, las cuales son conocidas en la frontera. Uno puede ver fácilmente que estas condiciones de frontera solo involucran primeras derivadas de los coeficientes métricos.

4.1.2. Condiciones de frontera de segundo orden

De acuerdo con [105], uno puede demostrar que ya que las cuatro condiciones de frontera (4.3) son condiciones tipo Dirichlet, los modos que violan las constricciones de norma se reflejan en la frontera hacia el interior del dominio computacional. Una generalización natural para este tipo condiciones son las de segundo orden; recientemente se ha mostrado en [37, 38], que usar condiciones de frontera de segundo orden permite algún tener control sobre las reflexiones de los modos de propagación que violan las constricciones en la frontera. Siguiendo a [85, 105] uno puede generalizar las condiciones de frontera tipo Dirichlet (4.3) a las condiciones tipo Sommerfeld

$$l^\mu \nabla_\mu \mathcal{C}_\nu \hat{=} 0. \quad (4.20)$$

Esta condición puede reescribirse, usando las expresiones (2.80), de la forma

$$\begin{aligned} l^\mu l^\nu \nabla_\mu \mathcal{C}_\nu &\hat{=} -E_{llm\bar{m}} - E_{lkl} + E_{lm\bar{m}l} + E_{l\bar{m}ml} \\ &- 2 \Delta^{\alpha\beta}{}_l \Delta_{l\alpha\beta} - \Delta^\alpha{}_{ll} \Delta_{\alpha\tau\sigma} g^{\tau\sigma} - l^\mu l^\nu \nabla_\mu H_\nu \hat{=} 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} l^\mu k^\nu \nabla_\mu \mathcal{C}_\nu &\hat{=} -E_{llkk} - E_{lkm\bar{m}} + E_{lm\bar{m}k} + E_{l\bar{m}mk} \\ &- 2 \Delta^{\alpha\beta}{}_l \Delta_{k\alpha\beta} - \Delta^\alpha{}_{lk} \Delta_{\beta\tau\sigma} g^{\tau\sigma} - l^\mu k^\nu \nabla_\mu H_\nu \hat{=} 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} l^\mu m^\nu \nabla_\mu \mathcal{C}_\nu &\hat{=} -E_{llkm} - E_{lklm} + E_{lmlk} + E_{l\bar{m}mm} \\ &- 2 \Delta^{\alpha\beta}{}_l \Delta_{m\alpha\beta} - \Delta^\alpha{}_{lm} \Delta_{\alpha\tau\sigma} g^{\tau\sigma} - l^\mu m^\nu \nabla_\mu H_\nu \hat{=} 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde hemos definido $E_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{\nabla}_\beta h_{\mu\nu}$. Nótese que, como mencionamos antes, ya que el vector m^μ es complejo las condiciones anteriores corresponden a cuatro condiciones de frontera. Así que aun necesitamos especificar seis condiciones más. Dos condiciones de frontera más pueden ser especificadas si definimos el escalar de Weyl Ψ_0 en la frontera. Esta condición fue propuesta por primera vez por Friedrich y Nagy en [59] y ha sido usada en [74, 115, 85, 105, 93, 20, 106]; se ha sugerido que congelar el escalar Ψ_0 a su valor inicial es un buen punto de partida para especificar condiciones de frontera absorbentes.⁴ Recientemente, Buchman y Sarbach presentaron en [37] un estudio analítico detallado de esta condición. Ellos mostraron que esta condición genera reflexiones que decaen como $(kR)^{-4}$ para radiación monocromática con número de onda k .

⁴Por condiciones de frontera absorbentes queremos decir, condiciones de frontera que nos garantizan que tan solo una pequeña cantidad de radiación espuria es reflejada en la frontera $\partial\Sigma$ hacia el dominio computacional

Teniendo en cuenta lo anterior, comencemos definiendo el escalar de Weyl Ψ_0 como⁵

$$\Psi_0 = R_{\mu\nu\alpha\beta} l^\mu m^\nu l^\alpha m^\beta. \quad (4.24)$$

Usando la expresión (2.78) para el tensor de Riemann, obtenemos

$$\begin{aligned} 2\Psi_0 &= -E_{llmm} - E_{mmlm} + 2E_{(lm)lm} + 2\Delta^\alpha{}_{lm}\Delta_{\alpha lm} \\ &\quad - 2\Delta^\alpha{}_{ll}\Delta_{\alpha mm} + l_\mu \hat{R}^\mu{}_{mlm} - m_\mu \hat{R}^\mu{}_{llm}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Las seis condiciones de frontera (4.21)-(4.23) y (4.25) para los coeficientes métricos $h_{m\bar{m}}$, h_{kk} , h_{km} y h_{mm} tienen la forma

$$l^\mu l^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu u \hat{=} q,$$

con q una función conocida sobre la frontera que puede depender tan solo de primeras derivadas con respecto al vector l^μ . Finalmente y en analogía con la sección anterior, completamos este conjunto de condiciones de frontera especificando cuatro condiciones tipo Sommerfeld para las componentes h_{ll} , h_{lk} y h_{lm} .

Resumiendo, las condiciones de segundo orden, por lo tanto, son:

$$E_{lll} \hat{=} p, \quad (4.26)$$

$$E_{llk} \hat{=} \pi, \quad (4.27)$$

$$E_{llm} \hat{=} q_1, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} E_{llmm} &\hat{=} -E_{mmlm} + 2E_{(lm)lm} + 2\Delta^\alpha{}_{lm}\Delta_{\alpha lm} \\ &\quad - 2C\Delta^\alpha{}_{ll}\Delta_{\alpha mm} + l_\mu \hat{R}^\mu{}_{mlm} - m_\mu \hat{R}^\mu{}_{llm} - 2\psi_0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} E_{llkm} &\hat{=} -E_{lklm} + E_{lmk} + E_{l\bar{m}mm} - 2\Delta^{\alpha\beta}{}_l \Delta_{m\alpha\beta} \\ &\quad - \Delta^\alpha{}_{lm}\Delta_{\alpha\tau\sigma}g^{\tau\sigma} - l^\mu m^\nu \nabla_\mu H_\nu, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} E_{llm\bar{m}} &\hat{=} -E_{lkl} + E_{lm\bar{m}l} + E_{l\bar{m}ml} - 2\Delta^{\alpha\beta}{}_l \Delta_{l\alpha\beta} \\ &\quad - \Delta^\alpha{}_{ll}\Delta_{\alpha\tau\sigma}g^{\tau\sigma} - l^\mu l^\nu \nabla_\mu H_\nu, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} E_{llkk} &\hat{=} -E_{lkm\bar{m}} + E_{lm\bar{m}k} + E_{l\bar{m}mk} - 2\Delta^{\alpha\beta}{}_l \Delta_{k\alpha\beta} \\ &\quad - \Delta^\alpha{}_{lk}\Delta_{\alpha\tau\sigma}g^{\tau\sigma} - l^\mu k^\nu \nabla_\mu H_\nu, \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde p y π y q_1 y ψ_0 son funciones reales y complejas respectivamente definidas sobre la frontera.

⁵Nótese que en general la definición del escalar de Weyl Ψ_0 se hace en términos del tensor de Weyl. Sin embargo, en el vacío el tensor de Ricci se anula. Así que el tensor de Riemann y el de Weyl son equivalentes.

4.1.3. Condiciones de frontera de orden mayor

Teniendo en cuenta lo discutido en las secciones anteriores, es natural pensar que si aumentamos el grado de las derivadas de los coeficientes métricos, podemos tener un mayor control sobre las reflexiones en la frontera. Usando esto, en esta sección generalizaremos las condiciones de frontera de primer y segundo orden a condiciones de orden mayor.

Teniendo en cuenta las expresiones (4.13)–(4.15) y (4.26)–(4.28), y si $L \geq 2$, podemos especificar cuatro condiciones de frontera de orden $(L + 1)$ através de

$$l^{\mu_1} l^{\mu_2} \dots l^{\mu_{L+1}} l^\alpha l^\beta \overset{\circ}{\nabla}_{\mu_1} \overset{\circ}{\nabla}_{\mu_2} \dots \overset{\circ}{\nabla}_{\mu_{L+1}} h_{\alpha\beta} \hat{=} p, \quad (4.33)$$

$$l^{\mu_1} l^{\mu_2} \dots l^{\mu_{L+1}} l^\alpha k^\beta \overset{\circ}{\nabla}_{\mu_1} \overset{\circ}{\nabla}_{\mu_2} \dots \overset{\circ}{\nabla}_{\mu_{L+1}} h_{\alpha\beta} \hat{=} \pi, \quad (4.34)$$

$$l^{\mu_1} l^{\mu_2} \dots l^{\mu_{L+1}} l^\alpha m^\beta \overset{\circ}{\nabla}_{\mu_1} \overset{\circ}{\nabla}_{\mu_2} \dots \overset{\circ}{\nabla}_{\mu_{L+1}} h_{\alpha\beta} \hat{=} q_1. \quad (4.35)$$

En analogía con las expresiones (4.3) y (4.20), podemos definir cuatro condiciones más que preservan las constricciones de norma

$$l^{\mu_1} l^{\mu_2} \dots l^{\mu_L} \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_L} \mathcal{C}_\nu \hat{=} 0, \quad (4.36)$$

y finalmente las dos condiciones de frontera

$$\begin{aligned} & l^{\mu_1} l^{\mu_2} \dots l^{\mu_{L-1}} l^\alpha m^\beta l^\tau m^\sigma \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-1}} \Delta_{\alpha\beta\tau\sigma} \\ & + b(h_{\alpha\beta}, \nabla_\mu h_{\alpha\beta}, \dots, \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_L} h_{\alpha\beta}; l^\mu, k^\mu, m^\mu) \hat{=} 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde b es una función conocida sobre la frontera que depende de $h_{\alpha\beta}$ y de sus derivadas de orden menor o igual que L .

Las condiciones de frontera de la forma (4.37) fueron recientemente introducidas por Buchman y Sarbach en [37, 38]. En [37] se introdujo una jerarquía de condiciones de frontera \mathcal{B}_L que conducen a una perfecta absorción de la radiación gravitacional débil con momento angular $L' \leq L$. Una generalización de esta jerarquía, que incluye términos de corrección de la curvatura extrínseca, fue introducida en [38]. En analogía con esto, a continuación definiremos una jerarquía de condiciones de frontera. Para esto, consideremos la ecuación de campo de Newman-Penrose

$$l^\mu \nabla_\mu \sigma - m^\mu \nabla_\mu \kappa = -\Psi_0 + \mathcal{Q}, \quad (4.38)$$

donde $\sigma = m^\mu m^\nu \nabla_\nu l_\mu$ es la distorsión, $\kappa = m^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu$ es el coeficiente de espín, el cual puede ser reescrito en la forma

$$\kappa = -\frac{1}{2} D_{ml} + (\text{términos algebraicos en } h_{\mu\nu}),$$

y, finalmente, la función \mathcal{Q} representa los términos cuadráticos en las primeras derivadas de $h_{\mu\nu}$.

Si podemos imponer la condición que la derivada a lo largo de m^μ de κ que cancele los términos cuadráticos en el lado derecho de la ecuación (4.38) obtendríamos

$$\Psi_0 = -l^\mu \nabla_\alpha \sigma, \quad (4.39)$$

por lo tanto, las condiciones (4.9) podrían ser interpretadas como el miembro “ $L = 0$ ” de las condiciones (4.37); para un caso general, no hemos encontrado la forma de cancelar estos términos. Sin embargo, en el límite de frecuencias altas, por ejemplo (discutidas en la sección 4.3.1), encontramos que siempre es posible elegir un sistema de coordenadas para el cual la condición $l^\mu h_{\mu\nu} = 0$ se satisface en todo punto y en todo momento en el que $D_{mll} = 0$. Como en el límite de altas frecuencias los términos cuadráticos en la expresión (4.38) puede ser despreciados, la ecuación (4.38) se reduce a la expresión (4.39).

Como veremos en la sección 4.3, el uso de las condiciones de frontera (4.36) implican una menor cantidad de reflexiones de los modos de propagación que violan las constricciones a medida que L aumenta. Sin embargo, el significado geométrico de las condiciones (4.33), (4.34) y (4.35) no es claro. No obstante, la importancia de estas condiciones radica en el hecho de que, junto con las condiciones (4.36) y (4.37), su problema de valores iniciales asociado esta bien planteado, por lo menos en el límite de coeficientes congelados (ver sección (4.2)).

4.2. Problema de valores iniciales

En esta sección analizamos el problema de valores iniciales asociado con las ecuaciones de evolución (2.81), restringido a $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$, junto con las condiciones de frontera de primer, segundo y orden mayor presentadas antes. Con el fin de comparar nuestros resultados numéricos (ver sección 4.3.3) con los resultados presentados en [85, 105, 106], consideraremos un nuevo conjunto de condiciones de frontera, el cual mezcla condiciones de primer y segundo orden.

Para estudiar el problema de valores iniciales, por simplicidad, usaremos la aproximación de coeficientes congelados [79, 66], donde uno congela los coeficientes de las ecuaciones de evolución y de las condiciones de frontera. Con esto, el problema se simplifica a un problema lineal y de coeficientes constantes. En este régimen se consideran perturbaciones de amplitudes pequeñas y de frecuencias altas de un espacio-tiempo de fondo dado. Intuitivamente este es el régimen importante en la dependencia continua

en los datos iniciales.⁶ Así que, es de esperar que si el problema de valores iniciales en esta aproximación esta bien planteado, estará bien planteado en el caso general. Siguiendo a Kreiss y Winicour [80], usaremos la teoría de operadores pseudodiferenciales y la construcción de un simetrizador (ver apéndice A), para mostrar que el problema de valores iniciales para el caso no lineal esta bien planteado.

Las ecuaciones de evolución en la norma armónica (2.81), restringidas a $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$, en la aproximación de coeficientes congelados alrededor de un punto arbitrario p se reducen a

$$\mathring{g}^{\alpha\beta}(p)\partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu} = 2\partial_{(\mu}H_{\nu)} \equiv \mathcal{F}_{\mu\nu} , \quad (4.40)$$

donde $\mathring{g}_{\mu\nu}(p)$ es la métrica de fondo constante que se obtiene al congelarla en el punto p . Por otro lado, en esta aproximación podemos suponer que la frontera es un plano. Así que, intentar resolver las ecuaciones de onda no lineales para los coeficientes métricos se reduce a un problema lineal de coeficientes constantes sobre el dominio $\Omega = (0, \infty) \times \Sigma$. Adicionalmente, nótese que, bajo una adecuada transformación de coordenadas, que deja la foliación $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$ invariante, es posible llevar la métrica $\mathring{g}_{\mu\nu}(p)$ a la forma

$$\mathring{g}(p) = -dt^2 + (dx + \beta dt)^2 + dy^2 + dz^2 , \quad (4.41)$$

donde β es una constante. Para ver esto, comencemos suponiendo que la forma más general de la métrica $\mathring{g}(p)$ es

$$\mathring{g}(p) = -\alpha^2 dT^2 + h_{ij} (dX^i + \beta^i dT) (dX^j + \beta^j dT) ,$$

donde α y β^i son una constante positiva y un vector constante respectivamente. Adicionalmente, podemos descomponer la métrica espacial constante como

$$h_{ij} dX^i dX^j = N^2 (dX^1)^2 + H_{AB} (dX^A + b^A dX^1) (dX^B + b^B dX^1) ,$$

donde N es una constante positiva, el vector bidimensional b^A es constante y H_{AB} denota una métrica bidimensional; es claro que los índices A y B corren de dos a tres. En dos dimensiones siempre es posible hacer una transformación de coordenadas, involucrando las coordenadas X^2 y X^3 , que lleve la métrica bidimensional a la forma $H_{AB} = \delta_{AB}$. Adicionalmente, usando la transformación $Y^1 = N X^1$, $Y^A = X^A + b^A X^1$, que claramente deja a Σ invariante, podemos reescribir la métrica espacial como $h_{ij} = \delta_{ij}$.

⁶Desde el punto de vista numérico este es el régimen de mayor importancia. Cuando se incrementa la resolución espacial en una solución numérica de un sistema de ecuaciones mal planteado, algunas inestabilidades pueden crecer más rápidamente; altas frecuencias se pueden traducir en un aumento en la resolución numérica.

Finalmente, usando $t = \alpha T$, $x = Y^1$, $y = Y^2 + \beta^2 T$, $z = Y^3 + \beta^3 T$, la métrica $g_{\mu\nu}(p)$ se puede reescribir como (4.41).

Teniendo en cuenta (4.41), las ecuaciones de evolución (4.40) se pueden expresar como

$$\left[-\partial_t^2 + 2\beta \partial_t \partial_x + (1 - \beta^2) \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right] h_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}. \quad (4.42)$$

En las siguientes secciones analizaremos el problema de valores iniciales asociado con las ecuaciones de evolución (4.42) y el conjunto de condiciones de frontera presentados antes. Para esto, supondremos que la magnitud de la constante β es mucho menor que uno. Nótese que esta condición no es una restricción, por construcción, en la frontera esta condición se satisface automáticamente ya que hemos asumido que la frontera \mathcal{T} es una superficie tipo espacio.

4.2.1. Condiciones de frontera de primer orden

En la aproximación de coeficientes congelados, las condiciones de frontera de primer orden (4.13)–(4.19) se reduce a

$$l^\mu \partial_\mu h_{ll} \hat{=} p, \quad (4.43)$$

$$l^\mu \partial_\mu h_{lk} \hat{=} \pi, \quad (4.44)$$

$$l^\mu \partial_\mu h_{lm} \hat{=} q_1, \quad (4.45)$$

$$l^\mu \partial_\mu h_{mm} \hat{=} 2m^\mu \partial_\mu h_{lm} + 2 \left(q_2 - \mathring{K}_{mm}^{(l)} \right), \quad (4.46)$$

$$l^\mu \partial_\mu h_{m\bar{m}} \hat{=} -k^\mu \partial_\mu h_{ll} + m^\mu \partial_\mu h_{l\bar{m}} + \bar{m}^\mu \partial_\mu h_{lm} - H_l, \quad (4.47)$$

$$l^\mu \partial_\mu h_{km} \hat{=} -k^\mu \partial_\mu h_{lm} + m^\mu \partial_\mu h_{lk} + \bar{m}^\mu \partial_\mu h_{mm} - H_m, \quad (4.48)$$

$$l^\mu \partial_\mu h_{kk} \hat{=} -k^\mu \partial_\mu h_{m\bar{m}} + m^\mu \partial_\mu h_{\bar{m}k} + \bar{m}^\mu \partial_\mu h_{mk} - H_k. \quad (4.49)$$

Necesitamos ahora encontrar una base nula adapta a la frontera. Nótese que, con respecto a la métrica (4.41) tenemos que

$$\mathring{n}^\mu \partial_\mu = \partial_t - \beta \partial_x, \quad \mathring{s}^\mu \partial_\mu = -\partial_x,$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} l^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_t - [1 + \beta] \partial_x \right), \\ k^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_t + [1 - \beta] \partial_x \right), \\ m^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_y + i \partial_z \right), \end{aligned} \quad (4.50)$$

es una base nula adaptada a la frontera. Esta forma de la base nos permite escribir el sistema de ecuaciones (4.42) con las condiciones de frontera (4.43)–(4.49) como⁷

$$\left[-\partial_t^2 + 2\beta\partial_t\partial_x + (1 - \beta^2)\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right] u^{(i)} = \mathcal{F}^{(i)} \quad \text{sobre } \Omega, \quad (4.53)$$

$$\left[\partial_t - (1 + \beta)\partial_x \right] u^{(i)} \doteq q^{(i)} \quad \text{sobre } \mathcal{T}, \quad (4.54)$$

donde, para este caso, el índice i corre de 1 a 10 y la función q_i sobre la frontera depende únicamente de las derivadas tangenciales de primer orden de $u^{(j)}$ para $j = 1, \dots, i - 1$.

Antes de intentar hacer alguna estimación para el problema anterior, nótese que es suficiente suponer datos iniciales triviales; si $u = u^{(i)}$ es cualquier solución suave de (4.53)–(4.54), podemos definir entonces

$$\begin{aligned} \bar{u}(t, x, y, z) &\equiv u(t, x, y, z) - u(0, x, y, z) \\ &\quad - t \partial_t u(0, x, y, z), \quad t \geq 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \end{aligned} \quad (4.55)$$

la cual satisface las ecuaciones (4.53)–(4.54) con las fuentes $\mathcal{F}^{(i)}$ y $q^{(i)}$ modificadas y los datos iniciales $\bar{u}(0, x, y, z) = 0$, $\partial_t \bar{u}(0, x, y, z) = 0$ para todo (x, y, z) en Σ . Teniendo en cuenta todo esto, lo que nos resta por hacer es demostrar que el sistema de ecuaciones (4.53) con las condiciones de frontera (4.54) tiene un problema de valores iniciales bien planteado. Sin embargo, tenemos el siguiente problema. Como la condición de frontera (4.54) no es maximalmente disipativa (ver apéndice C) ya que la función q_i sobre la frontera depende de las derivadas tangenciales de $u^{(j)}$, no podemos usar las técnicas tradicionales, como la estimación de una energía, para mostrar que el sistema esta matemáticamente bien planteado. Recientemente Kreiss y Winicour propusieron una nueva para mostrar la estabilidad de este tipo de sistemas [80].

⁷Nótese que las derivadas a lo largo de k^μ en las expresiones (4.47) y (4.48) pueden ser reemplazadas por las derivadas a lo largo de la evolución temporal ∂_t teniendo en cuenta que

$$k^\mu \partial_\mu = \frac{1}{1 + \beta} \left(\sqrt{2} \partial_t - [1 - \beta] l^\mu \partial_\mu \right), \quad (4.51)$$

y las expresiones (4.43) y (4.45). De manera similar, los términos $k^\mu \partial_\mu h_{m\bar{m}}$ en la expresión (4.49) pueden ser reemplazados por derivadas tangenciales usando

$$k^\mu \partial_\mu = \frac{1}{1 + \beta} \left(\sqrt{2} \partial_t - [1 - \beta] l^\mu \partial_\mu \right), \quad (4.52)$$

y la ecuación (4.47), después de haber usado (4.51). De esta forma, solo las derivadas tangentes a la frontera aparecen al lado derecho de las expresiones (4.43)–(4.49). Esto puede ser útil en las implementaciones numéricas.

Teniendo en cuenta esto, a continuación construiremos una estimación para las soluciones de (4.53) en términos de los datos en la frontera; mostraremos que para todo $\eta > 0$ y todas las soluciones suaves $u^{(i)}$ de (4.53) y (4.54) con datos iniciales triviales, existe una constante $C_i > 0$ tal que

$$\eta \|u^{(i)}\|_{\eta,1,\Omega}^2 + \|u^{(i)}\|_{\eta,1,\mathcal{T}}^2 \leq C_i \left(\eta^{-1} \|\mathcal{F}^{(i)}\|_{\eta,0,\Omega}^2 + \|q^{(i)}\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2 \right), \quad (4.56)$$

donde las normas anteriores son definidas como

$$\begin{aligned} \|u\|_{\eta,m,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} e^{-2\eta t} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial_t^{\alpha_t} \partial_x^{\alpha_x} \partial_y^{\alpha_y} \partial_z^{\alpha_z} u(t, x, y, z)|^2 dt dx dy dz, \\ \|u\|_{\eta,m,\mathcal{T}}^2 &= \int_{\mathcal{T}} e^{-2\eta t} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial_t^{\alpha_t} \partial_x^{\alpha_x} \partial_y^{\alpha_y} \partial_z^{\alpha_z} u(t, 0, y, z)|^2 dt dy dz, \end{aligned}$$

con el multi-índice $\alpha = (\alpha_t, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ y $|\alpha| = \alpha_t + \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z$.⁸ El punto importante con la expresión (4.56) es que con ella se obtiene una estimación para la norma L^2 de las derivadas de primer orden de la solución $u^{(i)}$ con respecto a la frontera \mathcal{T} . Por lo tanto, en la estimación del i -ésimo problema (4.53)-(4.54), la norma de las primeras derivadas de $u^{(j)}$ que aparecen en $q^{(i)}$ pueden ser estimadas y obtenemos la siguiente estimación global:⁹ para todo $\eta > 0$ y soluciones suaves $h_{\mu\nu}$ del problema de valores iniciales con frontera (4.42), (4.43)–(4.49) con datos iniciales triviales, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu=0}^3 (\eta \|h_{\mu\nu}\|_{\eta,1,\Omega}^2 + \|h_{\mu\nu}\|_{\eta,1,\mathcal{T}}^2) &\leq C \left(\eta^{-1} \sum_{\mu,\nu=0}^3 \|\mathcal{F}_{\mu\nu}\|_{\eta,0,\Omega}^2 + \|p\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2 + \|\pi\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|q_1\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2 + \|q_2\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2 + \sum_{\mu=0}^3 \|H_{\mu}\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2 \right). \end{aligned}$$

Para probar la estimación (4.56), debemos suponer una solución suave $u = u^{(i)}$ de las ecuaciones tipo onda (4.53)–(4.54) con datos iniciales triviales, es decir, $u(0, x, y, z) = 0$ y $\partial_t u(0, x, y, z) = 0$ para

⁸Un comentario acerca de la notación. Un multi-índice n dimensional es un vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, donde α_i es un número entero, que cumple con: si α y $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ entonces $(\alpha \pm \beta \equiv \alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$, $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha_i < \beta_i$ para todo i , etc.

⁹Los problemas que satisfacen esta clase de estimaciones junto con la existencia de las soluciones son usualmente llamados *fuertemente bien planteados en el sentido generalizado* [79, 80]. Sin embargo, nosotros usamos el término “generalizado” para referirnos al hecho de que los datos iniciales que usamos son triviales y que las normas involucran una integración en el tiempo.

(x, y, z) sobre la superficie Σ , fijar la constante $\eta > 0$ y definir la función u_η ,

$$u_\eta(t, x, y, z) \equiv \begin{cases} e^{-\eta t} u(x, y, z) & \text{para } t > 0, \\ 0 & \text{para } t \leq 0. \end{cases} \quad (4.57)$$

Adicionalmente, denotamos la transformada de Fourier de $u_\eta(t, x, y, z)$ con respecto a las coordenadas (t, y, z) como $\tilde{u}_\eta(\xi, x, \omega_y, \omega_z)$ y como $\tilde{u}(s, x, \omega_y, \omega_z) \equiv \tilde{u}_\eta(\xi, x, \omega_y, \omega_z)$, con $s = \eta + i\xi$, a la transformada de Fourier-Laplace de u [66]. Con estas definiciones, uno puede ver fácilmente que la función \tilde{u} , usando (4.53) y (4.54), satisface el sistema de ecuaciones ordinarias

$$[-s^2 + 2\beta s \partial_x + (1 - \beta^2) \partial_x^2 - \omega^2] \tilde{u} = \tilde{F}, \quad \text{sobre } x \in (0, \infty), \quad (4.58)$$

$$[s - (1 + \beta) \partial_x] \tilde{u} \hat{=} \tilde{q}, \quad \text{en } x = 0, \quad (4.59)$$

donde $\omega \equiv \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}$ y \tilde{F} y \tilde{q} denotan la transformación Fourier-Laplace de $\mathcal{F}^{(i)}$ y $q^{(i)}$ respectivamente. Este conjunto de ecuaciones se puede reescribir como un sistema de ecuaciones de primer orden si introducimos la variable

$$\tilde{v} \equiv \frac{1}{k} (\partial_x + \gamma^2 \beta s) \tilde{u}, \quad (4.60)$$

donde $k = \sqrt{|s|^2 + \omega^2}$ y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Con esto, el sistema de ecuaciones (4.58)-(4.59) se transforma en

$$\partial_x \tilde{w} = M(s, \omega) \tilde{w} + \tilde{f}, \quad \text{sobre } x \in (0, \infty), \quad (4.61)$$

$$L(s, \omega) \tilde{w} \hat{=} \tilde{g}, \quad \text{en } x = 0, \quad (4.62)$$

donde hemos definido

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}, \quad \tilde{f} = \frac{\gamma^2}{k} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F} \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \frac{1 - \beta}{k} \tilde{q},$$

y

$$M(s, \omega) = k \begin{pmatrix} -\gamma^2 \beta s' & 1 \\ \gamma^4 (s'^2 + \gamma^{-2} \omega'^2) & -\gamma^2 \beta s' \end{pmatrix}, \quad L(s, \omega) = (s', -\gamma^{-2}),$$

con $s' = s/k$ y $\omega' = \omega/k$. Nótese que $|s'|^2 + |\omega'|^2 = 1$. Los valores y vectores propios correspondiente de M están dados por

$$\mu_\pm = \gamma^2 k \left(-\beta s' \pm \sqrt{s'^2 + \gamma^{-2} \omega'^2} \right), \quad e_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \gamma^2 \sqrt{s'^2 + \gamma^{-2} \omega'^2} \end{pmatrix},$$

donde la raíz cuadrada tiene la parte real positiva para $\operatorname{Re}(s') > 0$. Uno puede mostrar para este caso que ¹⁰

$$\operatorname{Re}\left(\sqrt{s'^2 + \gamma^{-2}\omega'^2}\right) \geq \operatorname{Re}(s'),$$

lo cual implica que $\operatorname{Re}(\mu_-) < 0 < \operatorname{Re}(\mu_+)$. Nosotros estamos interesados en la solución de (4.61)–(4.62) que decae cuando $x \rightarrow \infty$, es decir,

$$\tilde{w}(s, x, \omega) = \sigma e^{\mu_- x} e_- . \quad (4.63)$$

La constante σ satisface la relación

$$\left[s' + \sqrt{s'^2 + \gamma^{-2}\omega'^2} \right] \sigma = \tilde{g} . \quad (4.64)$$

Es posible mostrar que existe una constante positiva $\delta_2 > 0$ tal que¹¹

$$\left| s' + \sqrt{s'^2 + \gamma^{-2}\omega'^2} \right| \geq \delta_2 ,$$

para todo $\operatorname{Re}(s') > 0$ y todo $\omega' \in \mathbb{R}$ con $|s'|^2 + |\omega'|^2 = 1$. Por lo tanto, existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$|\tilde{w}(s, 0, \omega)| \leq C_1 |\tilde{g}(s, \omega)| , \quad (4.65)$$

para todo $\operatorname{Re}(s) > 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$. De acuerdo a [80], esto significa que el sistema es *establemente acotado*. Kreiss y Winicour mostraron en [80] que esto implica la existencia de un simetrizador $H = H(s', \omega')$, donde H es una matriz 2×2 compleja y hermitiana, que cumple con las siguientes relaciones (ver apéndice A):

1. $H(s', \omega')$ depende suavemente de (s', ω') .
2. Existe una constante $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$HM + M^*H \geq \varepsilon_1 \operatorname{Re}(s)I_2 , \quad (4.66)$$

para todo $\operatorname{Re}(s) > 0$ y todo $\omega \in \mathbb{R}$. La matriz I_2 denota la matriz identidad 2×2 .

¹⁰Nótese que si η', ξ', a, b son números reales tal que $s' = \eta' + i\xi'$ y $\sqrt{s'^2 + \gamma^{-2}\omega'^2} = a + ib$. Entonces, tomando el cuadrado de la última expresión obtenemos $\eta'\xi' = ab$ y $a^4 + (\xi'^2 - \eta'^2 - \gamma^{-2}\omega'^2)a^2 - \eta'^2\xi'^2 = 0$, de lo cual podemos concluir que $a^2 \geq \eta'^2$.

¹¹Ver prueba del lema 3 de [80].

3. Existen constantes $\varepsilon_2 > 0$ y $C_2 > 0$ tal que

$$\langle \tilde{w}, H\tilde{w} \rangle \geq \varepsilon_2 |\tilde{w}|^2 - C_2 |\tilde{g}|^2, \quad (4.67)$$

para todo \tilde{w} que satisface la condición de frontera $L(s, \omega)\tilde{w} = \tilde{g}$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual sobre \mathbb{C}^2 y $|\cdot|$ la norma correspondiente.

Usando este simetrizador, la estimación (4.56) puede ser obtenida de la siguiente manera. Comencemos usando la expresión (4.61) y (4.66). Con esto tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_x \langle \tilde{w}, H\tilde{w} \rangle &= 2 \langle \tilde{w}, H\partial_x \tilde{w} \rangle \\ &= \langle \tilde{w}, (HM + M^*H)\tilde{w} \rangle + 2 \langle \tilde{w}, H\tilde{f} \rangle \\ &\geq \varepsilon_1 \operatorname{Re}(s) |\tilde{w}|^2 - K |\tilde{w}|^2 - \frac{1}{K} |H\tilde{f}|^2, \end{aligned}$$

donde $K > 0$. Integrando ambos lados con respecto a x en el intervalo $[0, \infty]$ y eligiendo $K = \varepsilon_1 \operatorname{Re}(s)/2$, obtenemos, después de haber usado (4.67), que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(s) \int_0^\infty |\tilde{w}|^2 dx &\leq \frac{2}{\varepsilon_1} \left[-\langle \tilde{w}, H\tilde{w} \rangle|_{x=0} + \frac{2}{\varepsilon_1 \operatorname{Re}(s)} \int_0^\infty |H\tilde{f}|^2 dx \right] \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon_1} (-\varepsilon_2 |\tilde{w}|^2|_{x=0} + C_2 |\tilde{g}|^2) + \frac{4}{\varepsilon_1^2 \operatorname{Re}(s)} \int_0^\infty |H\tilde{f}|^2 dx. \end{aligned}$$

Como $H = H(s', \omega')$ depende suavemente de (s', ω') y $|s'|^2 + |\omega'|^2 = 1$, existe una constante $C_3 > 0$ tal que $|H\tilde{f}| \leq C_3 |\tilde{f}|$ para todo (s', ω') que satisface $\operatorname{Re}(s') > 0$ y $|s'|^2 + |\omega'|^2 = 1$. Usando esto y multiplicando la desigualdad anterior por k^2 , obtenemos

$$\eta \int_0^\infty (|k\tilde{u}|^2 + |\partial_x \tilde{u}|^2) dx + (|k\tilde{u}|^2 + |\partial_x \tilde{u}|^2)|_{x=0} \leq C \left[\eta^{-1} \int_0^\infty |\tilde{F}|^2 dx + |\tilde{q}|^2 \right], \quad (4.68)$$

para alguna constante $C > 0$. Finalmente, la estimación (4.56) se obtiene después de integrar sobre ξ, ω_y y ω_z) y usando la identidad de Parseval.¹² La existencia de las soluciones se sigue de la ecuaciones (4.61)

¹²Si $F(\nu)$ y $G(\nu)$ son la transformada de Fourier de $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente. Entonces la relación de Parseval nos dice que

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)g(\bar{t}) dt = \int_{-\infty}^\infty G(\nu)F(\bar{\nu}) d\nu,$$

donde \bar{g} denota el complejo conjugado de la función g .

y(4.62) y los resultados usuales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Antes de estudiar el problema de valores iniciales con condiciones de frontera de segundo y más alto orden, nótese que la estimación (4.56) puede ser generalizada de la siguiente manera. Para cada $m = 2, 3, 4, \dots$ existe una constante $C_{i,m}$ tal que

$$\eta \|u^{(i)}\|_{\eta,m,\Omega}^2 + \|u^{(i)}\|_{\eta,m,\mathcal{T}}^2 \leq C_{i,m} \left(\eta^{-1} \|\mathcal{F}^{(i)}\|_{\eta,m-1,\Omega}^2 + \|\mathcal{F}^{(i)}\|_{\eta,m-2,\mathcal{T}}^2 + \|q^{(i)}\|_{\eta,m-1,\mathcal{T}}^2 \right), \quad (4.69)$$

para todo $\eta > 0$ y toda solución suave $u^{(i)}$ restringida a que sus primeras m derivadas temporales se anulan en $t = 0$. Esto siempre se puede conseguir usando la transformación

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(i)}(t, x, y, z) &= u^{(i)}(t, x, y, z) \\ &- \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} (\partial_t)^k u^{(i)}(0, x, y, z), \quad t \geq 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Nótese que las ecuaciones de evolución implican entonces que las primeras $(m-2)$ derivadas temporales de F se anulan idénticamente en $t = 0$. Para probar la estimación (4.69), primero multiplicamos (4.68) por k^{2j} , con $j = 1, 2, \dots, m-1$. Esto conduce a las estimaciones deseadas para las derivadas tangenciales. Para estimar la derivadas normales, usamos la ecuación de evolución

$$\partial_x^2 \tilde{u} = \gamma^2 \left[(s^2 + \omega^2) \tilde{u} - 2\beta s \partial_x \tilde{u} + \tilde{F} \right],$$

y el hecho que $\eta = \operatorname{Re}(s) \leq k$, de lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta \sum_{j=0}^m |k^{m-j} \partial_x^j \tilde{u}|^2 dx + \sum_{j=0}^m |k^{m-j} \partial_x^j \tilde{u}|^2 \Big|_{x=0} &\leq \tilde{C}_m \left[\int_0^\infty \eta^{-1} \sum_{j=0}^{m-2} |k^{m-1-j} \partial_x^j \tilde{F}|^2 dx \right. \\ &\left. + \sum_{j=0}^{m-2} |k^{m-2-j} \partial_x^j \tilde{F}|^2 \Big|_{x=0} + |k^{m-1} \tilde{q}|^2 \right], \end{aligned}$$

para alguna constante \tilde{C}_m . La estimación (4.69) se tiene entonces después de la integración sobre ξ, ω_y y ω_z y con la identidad de Parseval.

4.2.2. Condiciones de frontera de segundo y de orden mayor

Para analizar el problema de valores iniciales resultante al imponer las condiciones de segundo orden o más alto orden, generalizamos la estimación anterior para $m \geq 2$. En el aproximación de coeficientes

congelados, el sistema de ecuaciones de evolución con condiciones de frontera de segundo o más alto orden tiene la forma,

$$[-\partial_t^2 + 2\beta\partial_t\partial_x + (1 - \beta^2)\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] u^{(i)} = \mathcal{F}^{(i)} \quad \text{sobre } \Omega, \quad (4.71)$$

$$[\partial_t - (1 + \beta)\partial_x]^m u^{(i)} \hat{=} q^{(i)} \quad \text{sobre } \mathcal{T}, \quad (4.72)$$

donde, al igual que antes, el índice i corre de uno a diez y la función $q^{(i)}$ en la frontera depende de la m -ésima derivada de $u^{(j)}$. Para la estimación, una vez más, suponemos que los datos iniciales son triviales, definimos la función u_η y tomamos su transformada de Fourier con respecto a las direcciones tangenciales (t, y, z) . Con esto, obtenemos el mismo sistema de ecuaciones de primer orden que en (4.61). Sin embargo, la condición de frontera (4.62) ahora se debe reemplazar por

$$\mathcal{L}^m \tilde{u} \hat{=} \left(\frac{1 - \beta}{k} \right)^m \tilde{q},$$

donde el operador lineal $\mathcal{L} \equiv (1 - \beta)s' - \gamma^{-2}k^{-1}\partial_x$. Para escribir esta expresión en forma algebraica, nótese que, en virtud de la ecuación (4.61), tenemos

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}\tilde{u} \\ \mathcal{L}\tilde{v} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} - \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F} \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

donde la matriz B esta dada por

$$B = \begin{pmatrix} s' & -\gamma^{-2} \\ -\gamma^2\lambda'^2 & s' \end{pmatrix},$$

y donde la parte real de la variable $\lambda' = \sqrt{s'^2 + \gamma^{-2}\omega'^2}$ es positiva. Integrando ambos lados de (4.73), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^m \tilde{u} \\ \mathcal{L}^m \tilde{v} \end{pmatrix} = B^m \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} - \frac{1}{k^2} \sum_{j=0}^{m-1} B^j \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{L}^{m-1-j} \tilde{F} \end{pmatrix}.$$

Explícitamente, podemos ver que

$$B^j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_+^j + b_-^j & -\gamma^{-2}\lambda'^{-1}(b_+^j - b_-^j) \\ -\gamma^2\lambda'(b_+^j - b_-^j) & b_+^j + b_-^j \end{pmatrix},$$

donde $b_\pm = s' \pm \lambda'$ son los valores propios de la matriz B . Por lo tanto, las condiciones de frontera de orden mayor o igual a dos se pueden reescribir en la forma (4.62) con

$$L(s, \omega) = \frac{1}{2} [b_+^m + b_-^m, -\gamma^{-2}\lambda'^{-1}(b_+^m - b_-^m)],$$

y

$$\tilde{g} = \left(\frac{1-\beta}{k} \right)^m \tilde{q} - \frac{1}{2\gamma^2 k \lambda'} \sum_{j=1}^{m-1} (b_+^j - b_-^j) \mathcal{L}^{m-1-j} \tilde{F} \Big|_{x=0}.$$

La solución correspondiente a un término de fuente trivial $\tilde{f} = 0$ que decae cuando $x \rightarrow \infty$ esta dada entonces por

$$\tilde{w}(s, x, \omega) = \sigma e^{\mu-x} e_-, \quad (4.74)$$

donde la constante σ satisface $L(s, \omega)e_- \sigma = \tilde{g}$. Teniendo en cuenta que $e_- = (1, -\gamma^2 \lambda')^T$, esta condición se reduce a

$$b_+^m \sigma = \tilde{g}.$$

Sin embargo, como se mostró en la última sección, existe una constante $\delta_2 > 0$ tal que $|b_+| \geq \delta_2$ para todo $\text{Re}(s') > 0$ y todo $\omega' \in \mathbb{R}$ con $|s'|^2 + |\omega'|^2 = 1$. Así que, existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$|\tilde{w}(s, 0, \omega)| \leq C_2 |\tilde{g}(s, \omega)|, \quad (4.75)$$

para todo $\text{Re}(s) > 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$ y el sistema es acotadamente estable. Entonces, usando los resultados de Kreiss y Winicour [80], existe un simetrizador suave que satisface las condiciones 1. – 3., enumeradas en la subsección anterior, de donde obtenemos la estimación

$$\eta \int_0^\infty |\tilde{w}|^2 dx + |\tilde{w}|^2|_{x=0} \leq C \left[\eta^{-1} \int_0^\infty |\tilde{f}|^2 dx + |\tilde{g}|^2 \right],$$

Para alguna constante $C > 0$. Multiplicando a ambos lados por k^{2m} , usando la ecuación de evolución $\partial_x^2 \tilde{u} = \gamma^2 [(s^2 + \omega^2) \tilde{u} - 2\beta s \partial_x \tilde{u} + \tilde{F}]$ y $\eta = \text{Re}(s) \leq k$, obtenemos

$$\begin{aligned} \eta \int_0^\infty \sum_{j=0}^m |k^{m-j} \partial_x^j \tilde{u}|^2 dx + \sum_{j=0}^m |k^{m-j} \partial_x^j \tilde{u}|^2 \Big|_{x=0} &\leq \tilde{C} \left[\eta^{-1} \int_0^\infty \sum_{j=0}^{m-2} |k^{m-1-j} \partial_x^j \tilde{F}|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{m-2} |k^{m-2-j} \partial_x^j \tilde{F}|^2 \Big|_{x=0} + |\tilde{q}|^2 \right], \quad (4.76) \end{aligned}$$

para alguna nueva constante $\tilde{C} > 0$. Usando las relaciones de Parseval y asumiendo que $\partial_t^j u(0, x, y, z) = 0$ para todo $j = 0, 1, \dots, m$, tenemos que

$$\eta \|u\|_{\eta, m, \Omega}^2 + \|u\|_{\eta, m, \mathcal{T}}^2 \leq \tilde{C} \left[\eta^{-1} \|F\|_{\eta, m-1, \Omega}^2 + \|F\|_{\eta, m-2, \mathcal{T}}^2 + \|q\|_{\eta, 0, \mathcal{T}}^2 \right], \quad (4.77)$$

la cual corresponde a la estimación, al igual que en la última sección, que estábamos buscando.

4.2.3. Condiciones de frontera mixtas, de primer y de segundo orden

Para el caso en el que el sistema de ecuaciones de evolución (4.53) tiene condiciones de frontera mixtas, por ejemplo, condiciones de frontera de primer y de segundo orden, se pueden encontrar estimaciones equivalentes a las que discutimos en las secciones anteriores. A continuación, siguiendo a [85, 105, 106], estudiaremos el problema de valores iniciales asociado con un nuevo conjunto de condiciones de frontera, el cual resulta de combinar las condiciones de primer orden (4.13)–(4.15) con las condiciones de segundo orden (4.29)–(4.32) que definen el escalar de Weyl Ψ_0 en la frontera.

Empezaremos considerando las condiciones de frontera de primer orden para la norma (4.43)–(4.45). Usando la estimación (4.69) con $m = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^3 (\eta \|h_{l\mu}\|_{\eta,2,\Omega}^2 + \|h_{l\mu}\|_{\eta,2,\mathcal{T}}^2) &\leq C_1 \left[\sum_{\mu=0}^3 (\eta^{-1} \|\mathcal{F}_{l\mu}\|_{\eta,1,\Omega}^2 + \|\mathcal{F}_{l\mu}\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2) \right. \\ &\quad \left. + \|p\|_{\eta,1,\mathcal{T}}^2 + \|\pi\|_{\eta,1,\mathcal{T}}^2 + \|q_1\|_{\eta,1,\mathcal{T}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Por otro lado, aplicando la estimación (4.77) con $m = 2$ a las condiciones de frontera de segundo orden (4.29)–(4.32) en el límite de altas frecuencias, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu \in \{k,m,\bar{m}\}} (\eta \|h_{\mu\nu}\|_{\eta,2,\Omega}^2 + \|h_{\mu\nu}\|_{\eta,2,\mathcal{T}}^2) &\leq C_2 \left[\sum_{\mu,\nu \in \{k,m,\bar{m}\}} (\eta^{-1} \|\mathcal{F}_{\mu\nu}\|_{\eta,1,\Omega}^2 + \|\mathcal{F}_{\mu\nu}\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mu=0}^3 \|h_{l\mu}\|_{\eta,2,\mathcal{T}}^2 + \sum_{\mu=0}^3 \|H_{\mu}\|_{\eta,1,\mathcal{T}}^2 + \|\psi_0\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Combinando estas dos estimaciones, expresiones (4.78)–(4.79) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu=0}^3 (\eta \|h_{\mu\nu}\|_{\eta,2,\Omega}^2 + \|h_{\mu\nu}\|_{\eta,2,\mathcal{T}}^2) &\leq C_3 \left[\sum_{\mu,\nu=0}^3 (\eta^{-1} \|\mathcal{F}_{\mu\nu}\|_{\eta,1,\Omega}^2 + \|\mathcal{F}_{\mu\nu}\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mu=0}^3 \|H_{\mu}\|_{\eta,1,\mathcal{T}}^2 + \|p\|_{\eta,1,\mathcal{T}}^2 + \|\pi\|_{\eta,1,\mathcal{T}}^2 + \|q_1\|_{\eta,1,\mathcal{T}}^2 + \|\psi_0\|_{\eta,0,\mathcal{T}}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.80)$$

para una constante C_3 que es independiente de $\eta > 0$ y $h_{\mu\nu}$. Nótese que hemos supuesto que $h_{\mu\nu}$ y sus primeras dos derivadas temporales se anulan en $t = 0$.

4.3. Propiedades de las condiciones de frontera

En las anteriores secciones presentamos varias familias de condiciones de frontera compatibles con las constricciones de norma y mostramos, siguiendo a [80], que el problema acotado de valores iniciales asociado con las ecuaciones de Einstein en la norma armónica esta bien planteado. Ahora, en esta sección, queremos estudiar cual es el comportamiento de estas condiciones de frontera en la practica. Asumiremos, como es natural pensar, que un conjunto de condiciones de frontera es mejor que otro entre menor sea la diferencia entre la solución no acotada y la solución con condiciones de frontera artificiales.

4.3.1. Coeficiente de reflexión en el límite de frecuencias altas

En el límite de frecuencias altas, el sistema de ecuación de evolución y sus condiciones de frontera se reduce, como ya mostramos antes, a un problema lineal de coeficientes constantes de la forma (4.71)–(4.72) restringido al semiplano $x > 0$ y a la constricción armónica

$$\mathring{g}^{\mu\nu} \left(\mathring{\nabla}_\mu h_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \mathring{\nabla}_\alpha h_{\mu\nu} \right) = 0, \quad (4.81)$$

donde $\mathring{\nabla}_\mu = \partial_\mu$ ya que la métrica de fondo $\mathring{g}_{\mu\nu}$ es, de acuerdo con (4.41), plana. Por otro lado, para estimar la cantidad de radiación gravitacional reflejada en la frontera es útil hacer una suposición adicional. Asumiremos que los datos iniciales se eligen de tal forma que son compatibles con la constricción armónica (4.81) y que además suprimen las componentes h_{ll} , h_{lk} y h_{lm} y sus derivadas temporales. Esta condición no implica, como mostraremos a continuación, ninguna restricción sobre la física del problema, solo restringe la elección de coordenadas. Para mostrar esto, supongamos que $h_{\mu\nu}$ es una solución arbitraria de (4.71) satisfaciendo la constricción armónica (4.81). Bajo una transformación infinitesimal de coordenadas $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, donde $\xi^\mu \ll 1$, la métrica $h_{\mu\nu}$ transforma de acuerdo con

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}. \quad (4.82)$$

Es fácil ver, ya que ξ_μ satisface por si mismo la ecuación tipo onda

$$\mathring{g}^{\alpha\nu} \mathring{\nabla}_\alpha \mathring{\nabla}_\nu \xi_\mu = 2 \left[-\mathring{\nabla}_l \mathring{\nabla}_k \xi_\mu + \mathring{\nabla}_m \mathring{\nabla}_{\bar{m}} \right] \xi_\mu = 0. \quad (4.83)$$

que la métrica $h'_{\mu\nu}$ también satisface la construcción armónica. Por otro lado, exigiendo que las componentes métricas h'_{ll} , h'_{lk} y h'_{lm} y sus derivadas temporales se anulen en la superficie inicial, obtenemos las

siguientes condiciones:

$$h'_{ll} = h_{ll} + \sqrt{2} [\partial_t \xi_l - (1 + \beta) \partial_x \xi_l] = 0, \quad (4.84)$$

$$h'_{lk} = h_{lk} + \frac{1}{\sqrt{2}} [\partial_t (\xi_l + \xi_k) - (1 + \beta) \partial_x \xi_k + (1 - \beta) \partial_x \xi_l] = 0, \quad (4.85)$$

$$h'_{lm} = h_{lm} + \frac{1}{\sqrt{2}} [\partial_t \xi_m - (1 + \beta) \partial_x \xi_m + (\partial_y + i \partial_z) \xi_l] = 0, \quad (4.86)$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_k h'_{ll} = \overset{\circ}{\nabla}_k h_{ll} + (\partial_y^2 + \partial_z^2) \xi_l = 0, \quad (4.87)$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_k (2h'_{lk} - h'_{lm}) = \overset{\circ}{\nabla}_k (2h_{lk} - h_{lm}) + 2\sqrt{2} \partial_x \overset{\circ}{\nabla}_k \xi_l + (\partial_y^2 + \partial_z^2) \xi_k = 0, \quad (4.88)$$

$$2\overset{\circ}{\nabla}_k h'_{lm} = 2\overset{\circ}{\nabla}_k h_{lm} + 2\overset{\circ}{\nabla}_m \overset{\circ}{\nabla}_k \xi_k + (\partial_y^2 + \partial_z^2) \xi_m = 0, \quad (4.89)$$

donde hemos usado la tétrada (4.50) y la expresión (4.83). Las ecuaciones (4.84)–(4.86) conducen a ecuaciones elípticas para cada superficie $x = \text{constante}$ para ξ_l , ξ_k y ξ_m las cuales, en principio, pueden ser resueltas. Una vez resueltas estas condiciones, podemos usar una vez más las ecuaciones (4.84)–(4.86) para encontrar sus respectivas derivadas temporales. Esto muestra que es posible elegir una norma que satisfaga la constricción armónica y que inicialmente elimine las componentes métricas h'_{ll} , h'_{lk} y h'_{lm} y sus derivadas temporales. Con esto, las ecuaciones de evolución para $h_{\mu\nu}$ y las condiciones de frontera (4.13)–(4.15) o (4.33)–(4.35), que en el límite de altas frecuencias se reducen a

$$\left[\partial_t - (1 + \beta) \partial_x \right]^{L+1} u \hat{=} 0, \quad u = h_{ll}, h_{lk}, h_{lm}, \quad L \geq 0,$$

implican, por lo tanto, que $h_{ll} = h_{lk} = h_{lm} = 0$ en todo punto del espacio y para todo tiempo. Por otro lado, la constricción armónica (4.81), en esta norma, conduce a

$$\overset{\circ}{\nabla}_l h_{m\bar{m}} = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla}_l h_{kk} = -\overset{\circ}{\nabla}_k h_{m\bar{m}} + 2\overset{\circ}{\nabla}_{(m} \overset{\circ}{\nabla}_{\bar{m})k}, \quad \overset{\circ}{\nabla}_l h_{km} = \overset{\circ}{\nabla}_{\bar{m}} h_{mm}.$$

La primera condición, junto con la ecuación de onda $-\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\nabla}_l h_{m\bar{m}} + \overset{\circ}{\nabla}_{(m} \overset{\circ}{\nabla}_{\bar{m})} h_{m\bar{m}} = 0$, implica que $h_{m\bar{m}} = 0$. Con esta condición, la tercera expresión puede ser entonces integrada a lo largo de l^μ para obtener h_{km} ; como l^μ es un vector saliente en la frontera, los datos iniciales para h_{km} determinan completamente la solución. Finalmente, cuando determinamos h_{km} , la segunda ecuación puede ser integrada para obtener h_{kk} . Así que, teniendo en cuenta los resultados anteriores, es claro que en la norma en la que $l^\mu h_{\mu\nu} = 0$, toda la dinámica del sistema esta gobernada por el sistema de ecuaciones de evolución

$$\left[-\partial_t^2 + 2\beta \partial_t \partial_x + (1 - \beta^2) \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right] h_{mm} = 0, \quad (4.90)$$

$$\left[\partial_t - (1 + \beta) \partial_x \right]^{L+1} h_{mm} \hat{=} 0, \quad (4.91)$$

donde el orden de la condición de frontera es $L + 1 = 0, 1, 2, \dots$

Para cuantificar la cantidad de reflexiones generadas por las condiciones de frontera, siguiendo a [37, 38], consideremos una onda plana monocromática con frecuencia $\omega > 0$ y vector de onda $p_j = q(-1, \tan \theta, 0)$ con $q > 0$ y donde el ángulo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ es el ángulo de incidencia. Esta onda es reflejada en la frontera $x = 0$. Así que, la solución general tiene la forma

$$h_{mm} = e^{i(\omega t - p_j x^j)} + \gamma e^{i(\omega t - \hat{p}_j x^j)}, \quad (4.92)$$

donde el vector de onda, teniendo en cuenta la reflexión, es $\hat{p}_j = q(1, \tan \theta, 0)$ y γ la amplitud del coeficiente de reflexión. Para obtener una relación de dispersión, introducimos (4.92) en la ecuación (4.90) y en la condición de frontera (4.91). Esta relación esta dada por

$$\omega = q \left[\beta + \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \right],$$

para el coeficiente de reflexión

$$\gamma = - \left[\frac{1 - \cos \theta}{1 + (1 + 2\beta) \cos \theta} \right]^{L+1}. \quad (4.93)$$

Para modos con un ángulo de incidencia fija $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, el término dentro del paréntesis cuadrado, en la expresión anterior, es positivo y menor que uno. De esto podemos concluir que existe una relación de proporcionalidad inversa entre el orden L de la condición de frontera y las reflexiones en la frontera; tenemos menos reflexiones a medida que aumentamos el orden de la frontera. Nótese que si elegimos $\beta = 0$ y $L = 0$ o $L = 1$, obtenemos un coeficiente de reflexión que coincide con el coeficiente obtenido en la sección 1.B de la referencia [54].

Antes de terminar esta sección queremos enfatizar que por nuestras elecciones de norma, como veremos en la siguiente sección, el coeficiente de reflexión γ no depende de la frecuencia ni de la longitud de onda. Sin embargo, este coeficiente puede cambiar si usamos otro tipo de norma.

4.3.2. Coeficiente de reflexión usando la condición de frontera sobre el tensor de distorsión

En esta sección queremos estudiar una generalización del análisis presentado en la sección anterior. Para esto, relajamos la la suposición de frecuencias altas y en su lugar supondremos que cerca a la frontera el espacio-tiempo que estamos considerando puede descrito usando la métrica de Schwarzschild con masa M y una perturbación del espacio-tiempo.¹³ Adicionalmente, asumiremos que la frontera exterior es una

¹³La cantidad M denota la masa ADM del sistema.

esfera de radio $R \gg M$ y que la radiación gravitacional monocromática esta caracterizada por un numero de onda $k \gg M^{-1}$. Como ya hemos mencionado antes, recientemente se mostró en [37] que la condición de frontera (4.29) que congela el escalar de Weyl Ψ_0 conduce a un coeficiente de reflexión que decae como $(kR)^{-4}$ para radiación gravitacional cuadrupolar y como $(kR)^{-2(L+1)}$ para las condiciones de frontera de alto mayor (4.37) con momento multipolar $\ell > L$. Nosotros, por otro lado, calcularemos el coeficiente de reflexión para la condición de frontera sobre el tensor de distorsión. Nótese que, como mostramos al final de la subsección 4.1.3, esta condición puede ser considerada, bajo ciertas consideraciones, como el miembro $L = 0$ de la jerarquía de condiciones de frontera absorbentes (4.37). Por lo tanto, es de esperar un coeficiente de reflexión que decae como $(kR)^{-2}$ para la radiación gravitacional. Sin embargo, como mostraremos a continuación, el coeficiente de reflexión solo escala como $(kR)^{-1}$ para $kR \gg 1$.

Para comenzar, consideremos una perturbación impar (ver capítulo 5) del espacio-tiempo de Schwarzschild. Para esto, suponemos que el espacio-tiempo tiene la forma $M = \tilde{M} \times S^2$ y que la métrica de fondo $\hat{g}_{\mu\nu}$ puede expresarse como

$$\hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \tilde{g}_{ab} dx^a dx^b + r^2 \hat{g}_{AB} dx^A dx^B, \quad (4.94)$$

donde \tilde{g}_{ab} denota una la métrica sobre el espacio \tilde{M} y \hat{g}_{AB} es la métrica usual sobre S^2 . Los índices a, b, \dots son los índices radial y temporal mientras que los índices A, B, \dots representan los índices angulares. La perturbación de la métrica de fondo tiene la forma

$$\delta g_{ab} = L_{ab}, \quad \delta g_{Ab} = Q_{Ab}, \quad \delta g_{AB} = r^2 K_{AB},$$

donde las cantidades L_{ab} , Q_{Ab} y K_{AB} dependen de las coordenadas x^a y x^A . Usando esto, encontramos que, a primer orden en la perturbación, el tensor de distorsión (4.8) asociado con t y r constantes tiene la forma

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{ab} &= 0, \\ \delta \sigma_{Ab} &= 0, \\ \delta \sigma_{AB} &= \frac{1}{2} l^b \left[r^2 \tilde{\nabla}_b \hat{K}_{AB} - 2 \hat{\nabla}_{(A} Q_{B)b} + \hat{g}_{AB} \hat{g}^{CD} \hat{\nabla}_C Q_{Db} \right], \end{aligned} \quad (4.95)$$

donde \hat{K}_{AB} representa la parte sin traza de K_{AB} , es decir,

$$\hat{K}_{AB} = K_{AB} - \frac{1}{2} \hat{g}_{AB} \hat{g}^{CD} K_{CD},$$

Usando las propiedades de transformación de las cantidades L_{ab} , Q_{Ab} y K_{AB} bajo una transformación infinitesimal (para detalles ver por ejemplo [113, 38]), se encuentra que $\delta \sigma_{AB}$ es invariante con respecto

a la transformación de coordenadas impar, aunque no con respecto a perturbaciones pares. Ya que la condición de frontera sobre el tensor de distorsión (4.9) tiene una interpretación invariante de norma para el caso de perturbaciones impares solo estudiaremos este caso.

Como mostramos en el capítulo 5, las perturbaciones con paridad impar están parametrizadas por una escalar κ y una 1-forma $h = h_a dx^a$ sobre \tilde{M} de la forma

$$L_{ab} = 0, \quad Q_{Ab} = h_b S_A, \quad K_{AB} = 2\kappa \hat{\nabla}_{(A} S_{B)},$$

donde $S_A = \hat{\varepsilon}_A{}^B \hat{\nabla}_B Y^{l,m}$ con $\hat{\varepsilon}_{AB}$ el elemento de volumen en S^2 y $Y^{l,m}$ los armónicos esféricos usuales. Con esto, siguiendo a [114], obtenemos

$$\delta\sigma_{AB} = -l^b h_b^{(inv)} \hat{\nabla}_{(A} S_{B)},$$

donde la cantidad

$$h_b^{(inv)} = h_b - r^2 \tilde{\nabla}_b \left(\frac{\kappa}{r^2} \right),$$

es invariante de norma [61]. Este invariante de norma puede ser reescrito en términos del escalar invariante Φ , el cual obedece la ecuación de Regge-Wheeler [101, 113, 114, 110]

$$\left[-\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] \Phi = 0, \quad (4.96)$$

en la forma

$$h_b^{(inv)} = \tilde{\varepsilon}_{ab} \tilde{\nabla}^a (r \Phi),$$

donde $\tilde{\varepsilon}_{ab}$ es el elemento de volumen inducido sobre \tilde{M} [61, 113, 114]. Por lo tanto, la condición de frontera sobre el tensor de distorsión (4.9) implica que, la condición de frontera para la ecuación de Regge-Wheeler que controla la dinámica de la perturbación gravitacional con paridad impar es

$$l^b \tilde{\nabla}_b (r \Phi) \doteq 0. \quad (4.97)$$

Finalmente, para cuantificar las reflexiones que se generan por la condición de frontera (4.97) imponemos esta condición a una distancia finita $r = R < \infty$ y, siguiendo a [37], supondremos ondas monocromáticas cuadrupolares de la forma

$$\Phi(t, r) = a_2^\dagger a_1^\dagger \left(e^{ik(r-t)} + \gamma e^{-ik(r+t)} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{2M}{R}\right), \quad (4.98)$$

donde el número de onda k es positivo, γ es la amplitud coeficiente de reflexión y, adicionalmente, hemos definido los operadores

$$a_2^\dagger \equiv -\partial_r + \frac{2}{r}, \quad a_1^\dagger \equiv -\partial_r + \frac{1}{r}.$$

También supondremos que las coordenadas $x^a = (t, r)$ son tales que

$$\tilde{g}_{ab} dx^a dx^b = -dt^2 + dr^2 + \mathcal{O}\left(\frac{2M}{R}\right), \quad \text{con } r \approx R.$$

Entonces, introduciendo (4.98) en la condición de frontera (4.97) obtenemos

$$|\gamma(kR)| = \left[1 + \frac{4(kR)^6}{[3 + (kR)^2]^2} \right]^{-1/2}. \quad (4.99)$$

Este coeficiente de reflexión $|\gamma(kR)|$ se muestra en la figura 4.2. Nótese que, de esta última expresión, el coeficiente decae como $(kR)^{-1}$ para un $kR \gg 1$.

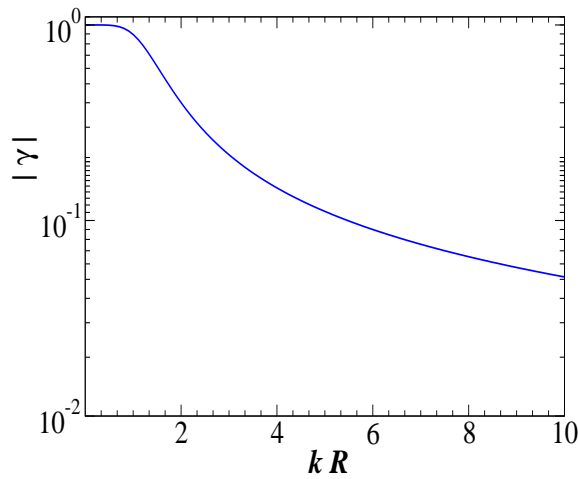


FIGURA 4.2: Coeficiente de reflexión $|\gamma(kR)|$ como función de kR para la condición de frontera sobre el tensor de distorsión (4.9) para radiación cuadrupolar con número de onda k y paridad impar. El coeficiente de reflexión decae como $(kR)^{-1}$ para $kR \gg 1$.

4.3.3. Experimentos numéricos

En las secciones anteriores hemos analizado analíticamente, bajo ciertas consideraciones, cual es el comportamiento de algunas de las condiciones de frontera que hemos presentado antes. En esta sección queremos estudiar cual es el comportamiento numérico de dichas condiciones en la practica.

Idealmente una condición de frontera implica, como ya mencionamos antes, una solución que es idéntica a la solución correspondiente en el dominio no acotado. Este argumento fue usado por Rinne y colaboradores en [106] para cuantificar el comportamiento de varias condiciones de frontera usando el siguiente procedimiento: primero se evoluciona una solución de referencia u^{ref} sobre un dominio computacional. Después, este dominio es truncado a cierta distancia donde se imponen las condiciones de frontera. El dominio de referencia se elige de tal forma que cualquier modo de propagación que se refleje en la frontera este desconectado causalmente del dominio truncado para evoluciones numéricas largas. Finalmente, se compara la solución del dominio truncado u^{tru} con la solución u^{ref} para medir las reflexiones y modos de propagación que violan las constricciones introducidos por la frontera. En las simulaciones que presentamos a continuación, usaremos este mismo procedimiento para cuantificar la este tipo de reflexiones en la frontera. Adicionalmente, supondremos que los datos iniciales corresponden a un agujero negro de Schwarzschild de masa M en coordenadas de Kerr-Schild

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{2M}{r}(dt + dr)^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.100)$$

con una perturbación impar en forma de ondas gravitacionales cuadrupolares la cual es construida usando el método de Teukolsky [129]. Por simplicidad, tomamos como función generatriz una gaussiana de la forma

$$G(r) = A \exp \left[-\frac{(r - r_0)^2}{\sigma^2} \right],$$

con una amplitud $A = 0.004$, centrada en $r = 5M$ y $\sigma = 1.5M$. Con esto, podemos encontrar datos iniciales que satisfacen las constricciones. Esta perturbación es centrada en un radio inicial de $r_0 = 5M$ y su longitud de onda dominante es $\lambda \approx 4M$. Los datos iniciales son evolucionados sobre un cascaron esférico desde $r = 1.9M$, justo en el interior del horizonte, y hasta $R = 961.9M$ para la solución de referencia y hasta $R = 41.9M$ para el dominio truncado. Las funciones de norma H_μ se eligen inicialmente de tal forma que la derivada temporal del lapso (2.87) y del vector de corrimiento (2.88) se anulen. Por simplicidad, este valor de H_μ es congelado durante la evolución.

Nuestra implementación numérica hace uso de una formulación a primer orden, tanto en espacio como en tiempo, de las ecuaciones de Einstein en la norma armónica generalizada. Para esto, siguiendo a [85],

introducimos dos nuevas variables: $\Phi_{i\mu\nu} \equiv \partial_i g_{\mu\nu}$ y $\Pi_{\mu\nu} \equiv -t^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}$. Con esto, podemos reescribir el sistema de ecuaciones (2.81), con $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$, de la forma

$$\partial_t u^\alpha + A^{i\alpha}{}_\nu \partial_i u^\nu = F^\alpha, \quad (4.101)$$

donde la variable u^α representa la colección de variables dinámicas $u^\alpha \equiv (g_{\mu\nu}, \Phi_{i\mu\nu}, \Pi_{i\mu\nu})$ y donde $A^{i\alpha}{}_\nu$ y las fuentes F^α pueden depender de u^α aunque no de sus derivadas (Para detalles ver [85]). Este sistema de ecuaciones (4.101) es evolucionado usando el código SpEC (*Caltech-Cornell Spectral Einstein*) que esta basado sobre una método de colocación pseudo-espectral. El dominio computacional es una cascarón esférico desde $r = 1.9M$ hasta algún $r = R$, el cual es dividido en subdominios con un espaciamiento $\Delta r = 10M$. Sobre cada subdominio la solución se expande en polinomios de Chebyshev en la dirección radial y en armónicos esféricos $Y^{l,m}$ en las direcciones angulares. Las resoluciones que usamos son de $N_r \in \{21, 31, 41, 51\}$ coeficientes por subdominio para las series de Chebyshev y $l \leq L$ con $L \in \{8, 10, 12, 14\}$ para los armónicos esféricos. Para cambiar la posición de la frontera R cambiamos el número de subdominios. Por ejemplo, para el caso en el que $R = 961.9M$ hemos usado 96 subdominios. Finalmente, para la integración en el tiempo usamos un Runge-Kutta de cuarto orden, con un factor de Courant $\Delta t / \Delta x_{\min} = 2.25$, donde Δx_{\min} es la menor distancia entre dos puntos de colocación vecinos.

Teniendo en cuenta todo la anterior, a continuación compararemos los siguientes cuatro conjuntos de condiciones de frontera:

1. Condiciones de frontera a primer orden (4.13)–(4.19).
2. Condiciones originales de Kreiss-Winicour presentadas en [80]. Estas condiciones solo reemplazan la expresión (4.16) por

$$D_{lmm} \hat{=} q'_2, \quad (4.102)$$

pero por lo demás son exactamente las mismas condiciones anteriores.

3. Condiciones de segundo orden que preservan las constricciones congelando el escalar Ψ_0 , expresiones (4.26)–(4.32).
4. Condiciones de frontera mixtas; las mismas condiciones anteriores pero con las condiciones de primer orden (4.13)–(4.15) para la norma, en lugar de las condiciones de segundo orden (4.26)–(4.28).

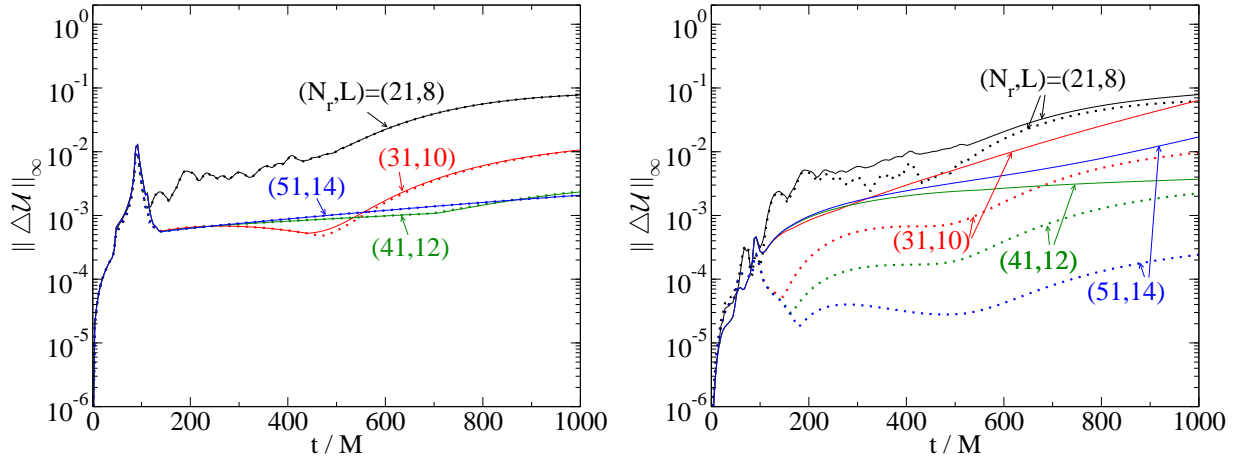


FIGURA 4.3: Diferencia $\Delta\mathcal{U}$ con respecto a la solución de referencia para cuatro diferentes resoluciones (N_r, L) . Izquierda: Condición de frontera para el tensor de distorsión $\sigma_{\mu\nu} = 0$ (línea continua) vs. Condición de Kreiss-Winicour (punteada). Derecha: Condición de segundo orden (sólida) vs. Condición de frontera mixta (punteada).

La figura 4.3 muestra la norma L^∞ de la diferencia $\Delta\mathcal{U}$ entre la solución del dominio truncado y la solución de referencia como función del tiempo; esta cantidad se obtiene calculando la siguiente norma en cada punto del espacio

$$\Delta\mathcal{U} \equiv \delta^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} [\Delta g_{\mu\nu} \Delta g_{\alpha\beta} + \Delta \Pi_{\mu\nu} \Delta \Pi_{\alpha\beta} + \Delta \Phi_{\mu\nu} \Delta \Phi_{\alpha\beta}]^{1/2}, \quad (4.103)$$

donde $\Delta g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}^{\text{tru}} - g_{\mu\nu}^{\text{ref}}$ y de manera similar para las demás variables dinámicas [106]. Claramente los resultados obtenidos para las condiciones de primer orden son similares. Aparece un primer pico cuando la reflexión de la frontera exterior alcanza el centro, donde su amplitud es máxima debido a la simetría esférica. Por otro lado, en el caso de las condiciones de frontera de segundo orden, este mismo pico es alrededor de dos ordenes de magnitud más pequeño. Para el conjunto de condiciones de frontera mixtas la cantidad $\Delta\mathcal{U}$ converge a cero para tiempos mayores que $t/M > 300M$ a diferencia del caso con las condiciones de frontera de primer orden. Desafortunadamente, esto no ocurre en el caso de condiciones de segundo orden para la norma. Para este conjunto de condiciones, $\Delta\mathcal{U}$ crece en el tiempo a una tasa que aparentemente no parece depender de la resolución de una manera monótona. Este mismo problema fue observado en [74] y aparentemente es un problema numérico relacionado con la filtración espectral.

La violación de las restricciones se muestra en la figura 4.4. La cantidad \mathcal{C} es una norma tensorial que

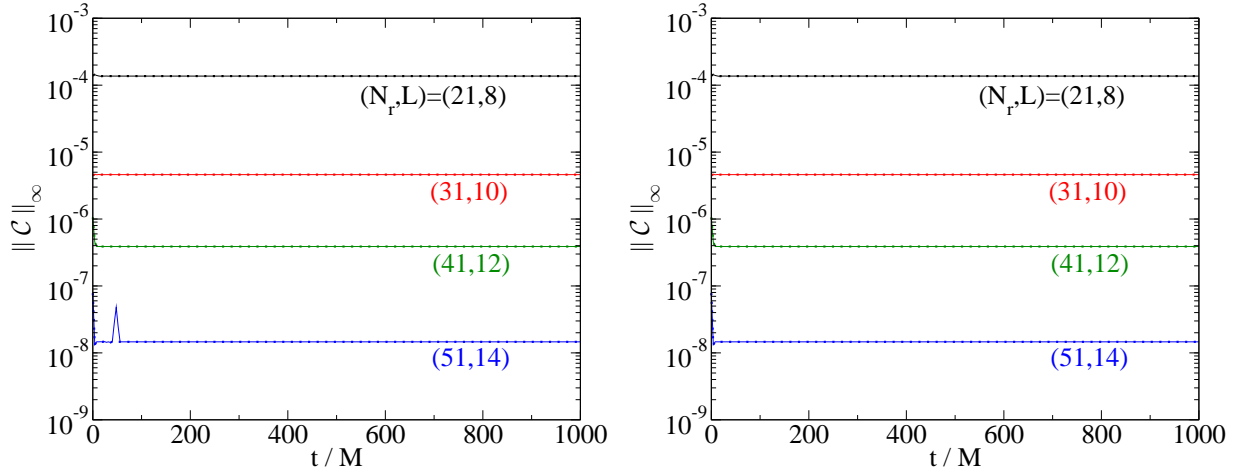


FIGURA 4.4: Violación de las constricciones \mathcal{C} para cuatro diferentes resoluciones (N_r, L) . Izquierda: Condición de frontera para el tensor de distorsión nulo (sólida) vs. Condición de Kreiss-Winicour (punteada). Derecha: Condición de segundo orden (sólida) vs. Condición de frontera mixta (punteada).

incluye la restricción armónica (2.73) así como las restricciones adicionales originadas de la reducción a primer orden de [85]. Normalizamos \mathcal{C} por la segunda derivada de la métrica así que $\mathcal{C} \sim 1$ significa que las restricciones no se satisfacen. La violación de las restricciones converge a cero cuando incrementamos la resolución para todas las condiciones de frontera. Esto era de esperar pues todas las condiciones de frontera preservan las restricciones.

Finalmente queremos cuantificar como las condiciones de frontera afectan la radiación gravitacional extraída de una simulación numérica. Esto es importante pues, como veremos en los siguientes dos capítulos, uno de los principales objetivos de la relatividad numérica es calcular la radiación gravitacional emitida por objetos compactos, tales como agujeros negros. Para esto, calculamos el escalar Ψ_4 sobre una esfera de extracción cercana a la frontera exterior, en $R_{\text{ex}} = 40M$. Ya que este escalar es invariante de norma con respecto a transformaciones infinitesimales de coordenadas y rotaciones de la tétrada en el espacio-tiempo de fondo de Schwarzschild, esperamos que los errores en Ψ_4 generados por las ambigüedades en la norma sean muy pequeños. La figura 4.5 muestra la diferencia de Ψ_4 con respecto a la misma cantidad obtenida de la solución de referencia en el mismo punto. Normalizamos $|\Delta\Psi_4|$ al máximo en el tiempo de $|\Psi_4|$ en el radio de extracción. De nuevo, las dos conjuntos de condiciones de frontera de primer orden tienen un comportamiento similar. Cuando la radiación saliente pasa a través de

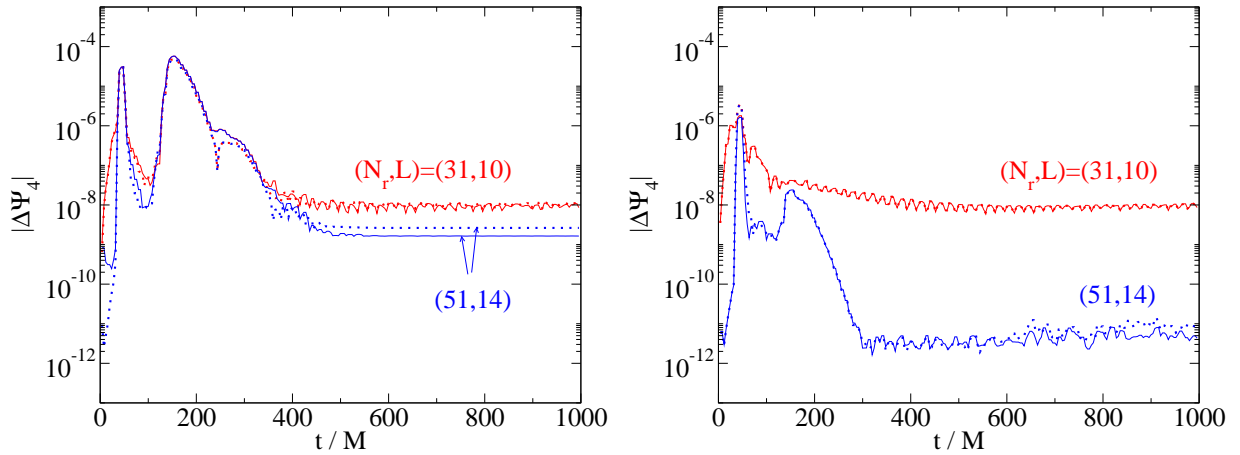


FIGURA 4.5: Diferencia de Ψ_4 con respecto a la solución de referencia de para dos distintas resoluciones. Izquierda: Condición de frontera con el tensor de distorsión nulo (sólida) vs. Condición de frontera de Kreiss-Winicour (punteada). Derecha: Condiciones de frontera de segundo orden (sólida) vs. Condiciones de frontera mixtas (punteada).

la esfera de extracción se origina un primer pico. Parte de esta radiación se refleja en la frontera y decae exponencialmente. Este comportamiento también es observado en el conjunto de condiciones de frontera mixtas y de segundo orden. sin embargo, las reflexiones son alrededor de un orden de magnitud más pequeñas. La cantidad $|\Delta\Psi_4|$ decrece cuando se incrementa la resolución para las estas condiciones, aunque no para las condiciones de primer orden.

4.4. Discusión

Hemos encontrado varios conjuntos de condiciones de frontera que preservan las constricciones para las ecuaciones de Einstein en la norma armónica generalizada. Para comparar su comportamiento hemos dividido estos conjuntos en condiciones de frontera de primer, segundo y orden mayor; el orden se refiere al grado más alto de las derivas de la métrica que aparecen en las condiciones de frontera.

Las condiciones frontera de primer orden son una generalización de las condiciones de Kreiss y Winicour presentadas en [80]. Por otro lado, las condiciones de segundo orden nos permiten fijar el escalar de Weyl Ψ_0 en la frontera. A pesar de que existe una ambigüedad en la definición de este escalar a un radio finito, esta condición permite controlar, en algún sentido, la radiación gravitacional que entra al do-

minio computacional. Esto es importante en las simulaciones numéricas, por ejemplo para cuantificar la radiación de las ondas gravitacionales emitidas por objetos astrofísicos compactos. Adicionalmente, con estas condiciones de frontera podemos estudiar el colapso crítico de ondas gravitacionales, comenzando con un espacio- tiempo de Minkowski, e inyectando pulsos de ondas gravitacionales a través de la frontera exterior con diferentes amplitudes [115, 85]. Finalmente, hemos considerado condiciones de frontera de orden mayor a dos que abarcan la jerarquía de las condiciones de frontera \mathcal{B}_L discutidas en [37, 38]. Como mostramos antes, una menor cantidad de reflexiones se origina en la frontera a medida que L es incrementado. Por otro lado, en la sección 4.2 hemos analizado el problema de valores iniciales asociado con nuestras propuestas usando el método propuesto por Kreiss y Winicour en [80]. Finalmente, para saber cual es el comportamiento de nuestras condiciones de frontera en la practica, hemos calculado analíticamente el coeficiente de reflexión para cuantificar la cantidad de radiación que se refleja en la frontera y hemos hecho algunas pruebas numéricas.

ENERGÍA Y MOMENTOS TRANSPORTADOS POR LA RADIACIÓN GRAVITACIONAL

Las ondas gravitacionales son perturbaciones del espacio-tiempo que viajan a la velocidad de la luz. Este tipo de radiación es una de las predicciones más importantes de la relatividad general aunque no sea detectado directamente. Sin embargo, existen fuertes evidencias de su existencia. Por ejemplo, Hulse y Taylor encontraron que existe un cambio en el periodo del pulsar PSR 1913 + 16, el cual puede ser explicado con alta precisión si suponemos que el sistema esta perdiendo energía a través de la emisión de radiación gravitacional [72, 127, 77]. Las ondas gravitacionales han tomado tanta importancia hoy en día que incluso se cree que, después de su detección, se convertirán en una nueva ventana de observación astronómica similar a la que se tiene usando la radiación electromagnética. Así que se están haciendo grandes colaboraciones, por ejemplo los observatorios de ondas gravitacionales LISA, LIGO, VIRGO, GEO 600, TAMA, para que en los próximos años este tipo de radiación sea finalmente detectada directamente.

La importancia de las ondas gravitacional radica en un simple hecho. En general, a través de la emisión de energía y momentos lineal y angular en forma de radiación gravitacional, un sistema dinámico arbitrario, como sistemas binarios de agujeros negros, puede alcanzar un estado de equilibrio. Claramente esta radiación debe llevar consigo información acerca de las propiedades físicas del sistema mismo. Esta es la razón por la cual la predicción de las ondas gravitacionales provenientes de la colisión de dos objetos compactos ha sido uno de los principales temas de investigación en relatividad numérica en los últimos años. Sin embargo, solo recientemente se pudieron realizar simulaciones numéricas lo suficientemente estables como para poder obtener patrones de radiación gravitacional realistas [99, 41, 16, 70, 36]. Ahora es posible extraer la información astrofísica relevante de la colisión de dos agujeros negros como, por

ejemplo, la velocidad con la que el agujero negro final se mueve [35, 98, 45], la magnitud y dirección final del espín del agujero negro [44], etc.

El método tradicional para extraer la radiación gravitacional de una simulación numérica se basa la teoría de perturbaciones de un espacio-tiempo de Schwarzschild desarrollada originalmente por Regge y Wheeler [101] y Zerilli [138] y después modificada por Moncrief para construir una teoría invariante de norma [90]. Sin embargo, en los últimos años se ha hecho más popular, por lo menos dentro de la comunidad de relatividad numérica, describir la radiación gravitacional en términos de las componentes del tensor de Weyl usando el formalismo de Newman–Penrose [95]. En este capítulo obtendremos las expresiones generales para la energía, el momento lineal y angular transportados por las ondas gravitacionales usando una descomposición de armónicos tensoriales del tensor de Weyl. Estas expresiones serán usadas en el capítulo 6 para cuantificar estos observables durante la evolución binaria de agujeros negros. Adicionalmente, compararemos nuestros resultados con las expresiones resultantes en términos de perturbaciones invariantes de norma [132, 98, 123].

5.1. Ondas gravitacionales y observables físicos

En esta sección brevemente revisamos las expresiones generales para la energía y los momentos de las ondas gravitacionales en la norma transversa y libre de traza (TT). Para esto, comencemos considerando una métrica de fondo plana $\eta_{\mu\nu}$ y una perturbación métrica $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ de tal forma que, en general, podemos escribir la métrica total como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (5.1)$$

Por otro lado, recordando que el campo gravitacional tiene dos grados de libertad (ver capítulo 4), podemos ahora elegir la norma TT. En esta norma solo tenemos dos funciones desconocidas h^+ y h^\times que representan las dos posibles polarizaciones de la onda gravitacional. Por lo tanto, imponiendo las condiciones

$$h_{0\alpha} = 0 , \quad (5.2)$$

$$h^i_i = 0 , \quad (5.3)$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_j h^{ij} = 0 , \quad (5.4)$$

donde $\overset{\circ}{\nabla}$ es la derivada covariante compatible con $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$. Si suponemos que la onda gravitacional se propaga a lo largo de la dirección z , la perturbación $h_{\mu\nu}$ se puede expresar como

$$h^{TT}{}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^+ & h^\times & 0 \\ 0 & h^\times & -h^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Con esta última forma de la métrica podemos ahora ver cual es el efecto de la onda gravitacional sobre una distribución de partículas de prueba. Para esto, consideremos dos partículas separadas inicialmente y en reposo. Supongamos, por simplicidad, que una de ellas esta en el origen de nuestro sistema de coordenadas y la otra en la posición $(x = \epsilon, 0, 0)$. Teniendo en cuenta la ecuación geodésica, es fácil mostrar que cuando pasa la onda gravitacional produce una oscilación en la separación de las partículas, la cual satisface

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial t^2} = -R_{i00j} \xi^j, \quad (5.6)$$

donde el vector ξ^i mide la separación coordenada entre ambas partículas. Por otro lado, usando (5.1) podemos expresar el tensor de Riemann en términos de la perturbación $h_{\mu\nu}$ como

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (5.7)$$

De esta última expresión y con (5.6) encontramos que

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h^{TT}{}_{ij}}{\partial t^2} \right) \xi^j. \quad (5.8)$$

Esto significa que la separación de dos partículas inicialmente en reposo y sobre el eje x satisface

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial h^{TT}{}_{xx}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial h^{TT}{}_{xy}}{\partial t^2}. \quad (5.9)$$

De manera similar, la separación de dos partículas inicialmente en reposo y separadas una distancia ϵ sobre el eje y satisfacen la relación

$$\frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial h^{TT}{}_{yy}}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial h^{TT}{}_{xx}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial h^{TT}{}_{xy}}{\partial t^2}. \quad (5.10)$$

Ahora podemos usar las expresiones (5.9) y (5.10) para entender el significado geométrico de la polarización de la onda gravitacional. Para esto consideremos un anillo de partículas y una partícula en el centro

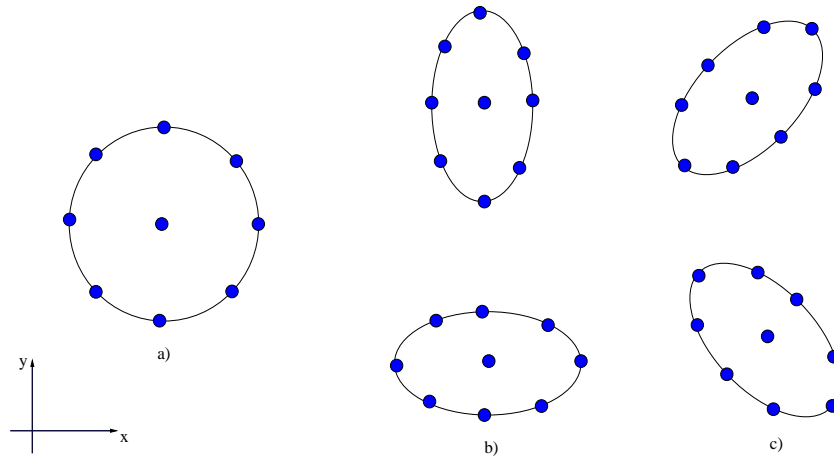


FIGURA 5.1: Efecto de la polarización de una onda gravitacional que se propaga a lo largo del eje z sobre un anillo de partículas que se encuentra inicialmente en reposo sobre el plano xy (figura de la derecha). De acuerdo a la polarización de la onda, el anillo se distorsiona a lo largo de los ejes principales como se muestra en la figura del centro (polarización $+$) o a lo largo de la diagonal (polarización \times)

de dicho anillo, tal y como se muestre en la figura 5.1. Adicionalmente, supongamos por simplicidad que esta distribución de partículas interacciona con una onda gravitacional que se propaga a lo largo del eje z con $h_{xx} = \text{Re}\{A_0 e^{-i\omega(t-z)}\}$ y $h_{xy} = 0$, donde denota Re denota la parte real. Entonces, teniendo en cuenta (5.9) y (5.10), vemos que las partículas oscilarán de acuerdo a la figura 5.1-(b); la partícula que esta sobre el eje x a una distancia ϵ del centro del anillo oscilará a lo largo de este eje con una amplitud $A = \epsilon A_0/2$, mientras que la partícula que se encuentra a la misma distancia ϵ pero sobre el eje y oscilara con la misma amplitud pero desfasada, con respecto al movimiento de la partícula sobre el eje x , un ángulo de $\phi = \pi$. De manera similar, consideremos una onda gravitacional con $h_{xx} = 0$ y $h_{xy} = \text{Re}\{A_0 e^{-i\omega(t-z)}\}$. En analogía con el caso anterior, uno puede demostrar que las partículas sobre el anillo se moverán de acuerdo con la figura 5.1-(c).

5.1.1. Energía y momentos transportados por la onda gravitacional

Hasta este momento hemos descrito las propiedades de la perturbación $h_{\mu\nu}$ y cual es el efecto de esta perturbación sobre las partículas de prueba. A continuación, por otro lado, describiremos cual es el flujo de energía, momento lineal y angular transportado por la radiación gravitacional. Para esto, supondremos

que estamos lo suficientemente de la región dinámica del sistema. Esto nos permite asumir que en esta región todos los campos se propagan como ondas esféricas salientes, es decir,

$$h \sim \frac{f(t-r)}{r}.$$

Con esto podemos suponer que asintóticamente $\partial_r h \sim -\partial_t h \equiv -\dot{h}$. Además, para $r \gg 1$ siempre podemos asumir que localmente la radiación es aproximadamente una onda plana. Esto nos permite despreciar las derivadas angulares cuando las comparamos con las derivadas radiales.¹ Adicionalmente, usaremos el tensor de momento-energía de Isaacson, el cual describe la energía y los momentos asociados con la radiación gravitacional promediados sobre algunas longitudes de onda usando la aproximación de longitud de onda corta. En la norma TT y en un sistema inercial localmente plano, el tensor de energía-momento de Isaacson esta dado por [132, 89]

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi} \left\langle \sum_{i,j} \partial_\mu h^{TT}_{ij} \partial_\nu h^{TT}_{ij} \right\rangle, \quad (5.11)$$

donde $\langle \rangle$ denota el promedio sobre varias longitudes de onda. Usando la forma explícita de h^{TT}_{ij} en términos de las dos polarizaciones (5.5), podemos reexpresar el tensor de Isaacson como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \langle \partial_\mu h^+ \partial_\nu h^+ + \partial_\mu h^\times \partial_\nu h^\times \rangle, \quad (5.12)$$

o de manera equivalente,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial_\mu H \partial_\nu \bar{H} \rangle, \quad (5.13)$$

donde hemos definido $H \equiv h^+ - ih^\times$ y a \bar{H} como el complejo conjugado de H . Podemos ahora usar la ecuación (5.13) para encontrar el flujo de energía y momento de la onda gravitacional. Para esto, consideremos primero el flujo de energía a lo largo de la dirección i , el cual, en general, esta dado por la componente T^{0i} . En particular, el flujo de energía a lo largo de la dirección radial, en un sistema de referencia localmente cartesiano es

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt dA} &= T^{0r} = \frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial^0 H \partial^r \bar{H} \rangle \\ &= -\frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial_t H \partial_r \bar{H} \rangle, \end{aligned} \quad (5.14)$$

¹Se debe ser muy cuidadosos con esta aproximación cuando se tienen cantidades que no involucran derivadas radiales tales como el momento angular. Como veremos más adelante, despreciar simplemente las derivadas angulares conduce a resultados erróneos.

donde dA es el elemento de área normal a la dirección radial. Teniendo en cuenta la aproximación de onda saliente, podemos expresar (5.14) como

$$\frac{dE}{dt dA} = \frac{1}{16\pi} \langle \dot{H} \dot{\bar{H}} \rangle = \frac{1}{16\pi} \langle |\dot{H}|^2 \rangle . \quad (5.15)$$

Finalmente, para encontrar el flujo total de energía radiada por el sistema en un tiempo dado necesitamos integrar sobre toda la esfera de radio r . Con esto obtenemos

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint |\dot{H}|^2 d\Omega , \quad (5.16)$$

donde, para este caso, $dA = r^2 d\Omega$ con $d\Omega$, como ya lo hemos definido antes, el elemento de ángulo sólido usual. Hemos introducido el límite de r tendiendo a infinito ya que el tensor de momento-energía de Isaacson es válido solamente en la aproximación de campo débil. Nótese que no hemos considerado el promedio sobre H . La integración sobre la esfera ya es por sí misma un promedio sobre el espacio.

Consideremos, por otro lado, el flujo de momento que corresponde a las componentes espaciales del tensor de momento-energía T^{ij} . El flujo de momento i a lo largo de la dirección radial estará dado, teniendo en cuenta (5.13), por

$$\frac{dP_i}{dt dA} = T_{ir} = \frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial_i H \partial_r \bar{H} \rangle = \frac{1}{16\pi} l_i \langle |\dot{H}|^2 \rangle , \quad (5.17)$$

donde \vec{l} es el vector radial unitario en el espacio plano,

$$\vec{l} = \frac{\vec{x}}{r} = (\text{sen } \theta \cos \varphi, \text{sen } \theta \text{sen } \varphi, \cos \theta) . \quad (5.18)$$

En la última igualdad hemos usado el hecho que asintóticamente $\partial_i H \simeq (x_i/r) \partial_r H$; usamos la relación que se tiene entre la coordenada temporal y radial en la aproximación de onda saliente e ignoramos las derivadas angulares. Teniendo en cuenta esto, el flujo de momento radiado por el sistema estará dado, en analogía con (5.16), por

$$\frac{dP_i}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint l_i |\dot{H}|^2 d\Omega . \quad (5.19)$$

Finalmente, consideremos el flujo de momento angular. Uno podría pensar, en completa analogía con el momento angular en un espacio tridimensional $L = \vec{r} \times \vec{p}$, que localmente el flujo de momento de la componente i del momento angular a lo largo de la dirección radial debe corresponder a

$$\epsilon_{ijk} x^j T^{kr} , \quad (5.20)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi–Civita tridimensional. Sin embargo, para este caso esta expresión no es correcta ya que el promedio que se usa en el tensor de Isaacson no toma en cuenta los términos que decaen como $1/r^3$, los cuales contribuyen al flujo de momento angular. La expresión correcta para el flujo de momento angular, deducida por primera vez por DeWitt en 1971, en la norma TT toma la forma [132]

$$\frac{dJ^i}{dt dA} = \frac{1}{32\pi} \epsilon^{ijk} \left(x_j \partial_k h_{ab} + 2 \delta_{aj} h_{bk} \right) \partial_r h^{ab} . \quad (5.21)$$

Esta expresión puede ser expresada de forma compacta si introducimos los vectores de Killing $\vec{\xi}_i$ asociados con la rotación. En términos de estos vectores, el flujo de momento angular puede ser expresado como

$$\frac{dJ_i}{dt} = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{32\pi} \oint (\mathcal{L}_{\xi_i} h_{ab}) \partial_t h^{ab} d\Omega , \quad (5.22)$$

donde $\mathcal{L}_{\xi_i} h_{ab}$ es la derivada de Lie de h_{ab} con respecto a $\vec{\xi}_i$. En esta última expresión hemos usado la relación $\partial_r h = -\partial_t h$ para ondas salientes.

Para expresar el flujo de momento angular en términos de H al igual que para la energía y el momento lineal, debemos tener cuidado al considerar la acción de la derivada de Lie sobre la métrica perturbada. El camino más simple para hacer esto es trabajar directamente con coordenadas esféricas (r, θ, φ) . En este caso, los vectores de momento angular tienen las componentes:

$$\vec{\xi}_x = (0, -\sin \varphi, -\cos \varphi \cot \theta) , \quad (5.23)$$

$$\vec{\xi}_y = (0, \cos \varphi, -\sin \varphi \cot \theta) , \quad (5.24)$$

$$\vec{\xi}_z = (0, 0, 1) . \quad (5.25)$$

Claramente el vector $\vec{\xi}_z$ es uno de los vectores de la base coordenada, así que la derivada de Lie a lo largo de esta dirección se reduce simplemente a una derivada parcial. Por otro lado, para calcular la derivada de Lie a lo largo de las otras direcciones es útil introducir primero los vectores complejos angulares

$$\vec{\xi}_{\pm} \equiv \vec{\xi}_x \pm i \vec{\xi}_y . \quad (5.26)$$

Adicionalmente, introducimos una base coordenada $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$, y definimos los dos vectores complejos unitarios $\hat{e}_{\pm} \equiv 1/\sqrt{2}(\hat{e}_\theta \mp i \hat{e}_\varphi)$. Se puede mostrar que la derivada de Lie de \hat{e}_{\pm} con respecto a $\vec{\xi}_{\pm}$ esta dada por

$$\mathcal{L}_{\xi_{\pm}} \hat{e}_{\pm}^a = \mp (i e^{\pm i\varphi} \csc \theta) \hat{e}_{\pm}^a . \quad (5.27)$$

Por otro lado, si reescribimos la perturbación h_{ab} en la norma TT en términos de la base ortonormal como:

$$\begin{aligned} h_{ab} &= h^+ \left[(\hat{e}_\theta)_a (\hat{e}_\theta)_b - (\hat{e}_\varphi)_a (\hat{e}_\varphi)_b \right] \\ &+ h^\times \left[(\hat{e}_\theta)_a (\hat{e}_\varphi)_b + (\hat{e}_\varphi)_a (\hat{e}_\theta)_b \right] \\ &= H (\hat{e}_-)_a (\hat{e}_-)_b + \bar{H} (\hat{e}_+)_a (\hat{e}_+)_b , \end{aligned} \quad (5.28)$$

podemos ahora calcular la derivada de Lie de h_{ab} con respecto al vector $\vec{\xi}_\pm$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{\xi_\pm} h_{ab} = (\hat{e}_-)_a (\hat{e}_-)_b \hat{J}_\pm H + (\hat{e}_+)_a (\hat{e}_+)_b \hat{J}_\pm \bar{H} , \quad (5.29)$$

donde hemos definido los operadores

$$\begin{aligned} \hat{J}_\pm &\equiv \xi_\pm^a \partial_a - i s e^{\pm i\varphi} \csc \theta \\ &= e^{\pm i\varphi} \left[\pm i \partial_\theta - \cot \theta \partial_\varphi - i s \csc \theta \right] , \end{aligned} \quad (5.30)$$

y donde s es el peso de espín de la función sobre la cual el operador esta actuando. En este caso en particular (para detalles ver p ndice D) $s = -2$ para H y $s = +2$ para \bar{H} . Este último resultado implica que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\xi_\pm} h_{ab}) \partial_t h^{ab} &= \hat{J}_\pm H \partial_t \bar{H} + \hat{J}_\pm \bar{H} \partial_t H \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \hat{J}_\pm H \partial_t \bar{H} \right\} . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Por lo tanto,

$$(\mathcal{L}_{\xi_x} h_{ab}) \partial_t h^{ab} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \hat{J}_x H \partial_t \bar{H} \right\} , \quad (5.32)$$

$$(\mathcal{L}_{\xi_y} h_{ab}) \partial_t h^{ab} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \hat{J}_y H \partial_t \bar{H} \right\} . \quad (5.33)$$

Finalmente, usando estas dos últimas expresiones en (5.22), el flujo de momento angular radiado por el sistema es

$$\frac{dJ_i}{dt} = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \operatorname{Re} \oint \hat{J}_i H \partial_t \bar{H} d\Omega , \quad (5.34)$$

donde los operadores de momento angular \hat{J}_i están definidos como

$$\begin{aligned} \hat{J}_x &= \frac{1}{2} \left(\hat{J}_+ + \hat{J}_- \right) \\ &= -\operatorname{sen} \varphi \partial_\theta - \cos \varphi (\cot \theta \partial_\varphi + i s \csc \theta) , \\ \hat{J}_y &= -\frac{i}{2} \left(\hat{J}_+ - \hat{J}_- \right) \\ &= +\cos \varphi \partial_\theta - \operatorname{sen} \varphi (\cot \theta \partial_\varphi + i s \csc \theta) , \\ \hat{J}_z &= \partial_\varphi . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Es importante mencionar que, salvo por el factor $-i\hbar$, estos operadores son exactamente los mismos operadores de momento angular de la mecánica cuántica para funciones con peso de espín s [51].

Resumiendo, hemos encontrado las expresiones correctas para calcular el flujo de energía (5.16), de momento lineal (5.19) y de momento angular radiados por el sistema (5.34). Ahora, dada una simulación numérica la pregunta natural es como se calculan los coeficientes h^+ y h^\times . La respuesta a esto no es trivial. En una simulación típica se obtiene la métrica total del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ y no la descomposición (5.1). Por lo tanto, aunque tenemos las expresiones para calcular el flujo de radiación gravitacional en la práctica no las podemos usar. En la siguiente sección presentaremos un procedimiento análogo a partir del escalar de Weyl Ψ_4 , el cual nos permite calcular la energía y los momentos en términos de la métrica general $g_{\mu\nu}$.

5.2. Energía y momentos radiado en términos del escalar Ψ_4

En el capítulo 4 discutimos brevemente las propiedades del escalar Ψ_0 en el contexto de las reflexiones que son introducidas por las condiciones de frontera. En esta sección, por otro lado, discutiremos las propiedades del escalar de Weyl Ψ_4 el cual puede ser, eligiendo una tetraada nula adecuada, relacionado con la radiación gravitacional que sale del dominio de interés. Este escalar está definido como

$$\Psi_4 \equiv C_{\alpha\beta\mu\nu} k^\alpha \bar{m}^\beta k^\mu \bar{m}^\nu, \quad (5.36)$$

donde $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ es el tensor Weyl y, en analogía con (4.1) y con (4.2), k^μ y \bar{m}^μ son vectores de la base nula construidos a partir de la base esférica de la siguiente forma

$$\begin{aligned} l^\mu &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_t^\mu + \hat{e}_r^\mu), \\ k^\mu &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_t^\mu - \hat{e}_r^\mu), \\ m^\mu &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_\theta^\mu + i\hat{e}_\varphi^\mu), \\ \bar{m}^\mu &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_\theta^\mu - i\hat{e}_\varphi^\mu), \end{aligned} \quad (5.37)$$

con e_t^μ , e_r^μ , e_θ^μ y e_φ^μ la base de vectores ortonormal usuales en coordenadas esféricas.

Lo interesante de la cantidad $H = h^+ - ih^\times$, definida en la sección anterior, es que también puede ser escrita en términos del escalar de Weyl Ψ_4 . Para ver esto, nótese que en vacío, como ya mencionamos antes, el tensor de Riemann y el de Weyl son equivalentes. Por lo tanto, usando la expresión para el tensor

de Riemann en la aproximación linealizada (5.7), uno puede mostrar que, en la aproximación de ondas salientes que se propagan en la dirección radial y en la norma TT, el escalar Ψ_4 tiene la forma

$$\Psi_4 = - \left(\ddot{h}^+ - i \ddot{h}^\times \right) = -\ddot{H} , \quad (5.38)$$

y el resto de los escalares de Weyl se anulan. Por lo tanto, para ondas gravitacionales salientes podemos escribir,

$$H = - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} \Psi_4 dt'' dt' . \quad (5.39)$$

Con esta expresión podemos calcular ahora el flujo de energía y de momentos que encontramos en la sección anterior, pero esta vez en términos de Ψ_4 . Sin embargo, antes de hacer esto es conveniente proyectar este escalar sobre una esfera y describir su dependencia angular en términos de armónicos esféricos tensoriales con peso de espín s , los cuales notaremos como ${}_s Y^{l,m}$ (ver apéndice D). Ya que el escalar Ψ_4 transforma bajo una rotación como un campo con peso de espín $s = -2$ podemos descomponerlo de la siguiente manera:^{2 3}

$$\Psi_4 = \sum_{l,m} A^{l,m} {}_{-2} Y^{l,m}(\theta, \phi) , \quad (5.40)$$

donde el coeficiente $A^{l,m}$ está dado por

$$A^{l,m} = \oint \Psi_4 {}_{-2} \bar{Y}^{l,m}(\theta, \phi) d\Omega . \quad (5.41)$$

Con estas expresiones ahora calculemos el flujo de energía emitido por el sistema en forma de ondas gravitacionales. Para esto, es fácil ver que, usamos la expresión (5.16) junto con la relación entre H y Ψ_4 (5.39),

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16 \pi} \oint \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 d\Omega . \quad (5.42)$$

²Bajo una rotación que deja invariante los vectores l^μ y k^μ y rota los vectores m y \bar{m} un ángulo θ tenemos que Ψ_4 se transforma a $e^{-2i\theta}\Psi_4$

³Nótese que como esta expansión está en términos de los armónicos tensoriales con peso de espín $s = 2$, la suma sobre el índice l debe comenzar en $l = 2$. Los armónicos tensoriales están definidos solamente para $|m| \leq l$ y $|s| \leq l$. Por simplicidad, no escribiremos explícitamente los límites de la suma. Asumiremos que la suma sobre l comienza en 2, mientras que la de m se encuentra entre $-l$ y l .

Usando ahora la relación de ortogonalidad para ${}_s Y^{l,m}$, encontrada en el apéndice D, podemos reescribir la energía radiada como

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \sum_{l,m} \left| \int_{-\infty}^t A^{l,m} dt' \right|^2, \quad (5.43)$$

la cual es equivalente a la expresión (5.16) en términos de los coeficientes de polarización de la onda gravitacional.

De manera similar, podemos expresar el momento lineal radiado en términos de Ψ_4 y los coeficientes $A^{l,m}$. Usando la expresión del momento radiado (5.19) y de nuevo la ecuación (5.39), obtenemos

$$\frac{dP_i}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint l_i \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 d\Omega. \quad (5.44)$$

Esta expresión puede ser escrita en términos de los coeficientes $A^{l,m}$. Para esto, reemplazamos la expansión multipolar (5.40) en la anterior ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dt} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \sum_{l,m} \sum_{l',m'} \oint l_i \left({}_{-2}Y^{l,m} \right) \left({}_{-2}\bar{Y}^{l',m'} \right) d\Omega \\ &\quad \times \int_{-\infty}^t A^{l,m} dt' \int_{-\infty}^t \bar{A}^{l',m'} dt'. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Nótese que las componentes del vector radial l_i pueden ser escritas en términos de los armónicos esféricos tensoriales con peso de espín $s = 0$, es decir, en términos de los armónicos esféricos usuales $Y^{l,m}$ de la siguiente manera

$$l_x = \sin \theta \cos \varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left[Y^{1,-1} - Y^{1,1} \right], \quad (5.46)$$

$$l_y = \sin \theta \sin \varphi = i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left[Y^{1,-1} + Y^{1,1} \right], \quad (5.47)$$

$$l_z = \cos \theta = 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} Y^{1,0}. \quad (5.48)$$

Por lo tanto, la parte angular del flujo de momento lineal involucra la integral de tres armónicos esféricos tensoriales. Estas integrales se pueden calcular, como se muestra explícitamente en el apéndice D, en términos de los símbolos de Wigner 3-lm. Con esto, es fácil mostrar que el flujo de momento lineal esta

dado por

$$\begin{aligned} \frac{dP_+}{dt} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{8\pi} \sum_{l,m} \int_{-\infty}^t dt' A^{l,m} \\ &\times \int_{-\infty}^t dt' \left(a_{l,m} \bar{A}^{l,m+1} + b_{l,-m} \bar{A}^{l-1,m+1} - b_{l+1,m+1} \bar{A}^{l+1,m+1} \right), \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_z}{dt} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \sum_{l,m} \int_{-\infty}^t dt' A^{l,m} \\ &\times \int_{-\infty}^t dt' \left(c_{l,m} \bar{A}^{l,m} + d_{l,m} \bar{A}^{l-1,m} + d_{l+1,m} \bar{A}^{l+1,m} \right), \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde, por simplicidad, en lugar de trabajar directamente con P_x y P_y hemos definido la cantidad compleja $P_+ \equiv P_x + iP_y$. Los coeficientes $a_{l,m}$, $b_{l,m}$, $c_{l,m}$ y $d_{l,m}$ están definidos como

$$a_{l,m} = \frac{\sqrt{(l-m)(l+m+1)}}{l(l+1)}, \quad (5.51)$$

$$b_{l,m} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{(l-2)(l+2)(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)}}, \quad (5.52)$$

$$c_{l,m} = \frac{2m}{l(l+1)}, \quad (5.53)$$

$$d_{l,m} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{(l-2)(l+2)(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}}. \quad (5.54)$$

Finalmente, para calcular el flujo de momento angular reescribimos la expresión (5.34) en términos del escalar de Weyl Ψ_4 . Des esta expresión obtenemos

$$\frac{dJ_i}{dt} = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \operatorname{Re} \left\{ \oint \left(\int_{-\infty}^t \bar{\Psi}_4 dt' \right) \times \hat{J}_i \left(\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} \Psi_4 dt'' dt' \right) d\Omega \right\}. \quad (5.55)$$

Expresando Ψ_4 en términos de su expansión multipolar e integrando sobre la esfera, obtenemos (ver apéndice D)

$$\begin{aligned} \frac{dJ_i}{dt} &= - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l,m} \sum_{l',m'} \int_{-\infty}^t \bar{A}^{l',m'} dt' \right. \\ &\times \left. \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} A^{l,m} dt'' dt' \times \oint -{}_2\bar{Y}^{l',m'} \hat{J}_i \left(-{}_2Y^{l,m} \right) d\Omega \right\}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Esta vez las integrales sobre la parte angular involucran el producto de dos armónicos esféricos tensoriales, los cuales satisfacen las relaciones de ortogonalidad usuales. Así que podemos obtener fácilmente las expresiones para el momento angular llevado por la radiación gravitacional. Estas expresiones son

$$\frac{dJ_x}{dt} = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{ir^2}{32\pi} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{l,m} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} A^{l,m} dt'' dt' \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^t \left(f_{l,m} \bar{A}^{l,m+1} + f_{l,-m} \bar{A}^{l,m-1} \right) dt' \right\}, \quad (5.57)$$

$$\frac{dJ_y}{dt} = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{32\pi} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l,m} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} A^{l,m} dt'' dt' \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^t \left(f_{l,m} \bar{A}^{l,m+1} - f_{l,-m} \bar{A}^{l,m-1} \right) dt' \right\}, \quad (5.58)$$

$$\frac{dJ_z}{dt} = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{ir^2}{16\pi} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{l,m} m \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} A^{l,m} dt'' dt' \int_{-\infty}^t \bar{A}^{l,m} dt' \right\}, \quad (5.59)$$

donde los coeficientes $f_{l,m}$ están definidos

$$f_{l,m} \equiv \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \\ = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}. \quad (5.60)$$

Por convención hemos usado que $\operatorname{Im}(a + ib) = ib$, donde a y b son funciones reales.

Antes de finalizar esta sección, es necesario mencionar un punto importante con respecto a la elección de la tetrada nula. Recientemente Lousto y Zlochower presentaron en [86] expresiones similares para el momento angular transportado por la onda gravitacional. Sin embargo, nuestras expresiones difieren de las de ellos por un factor de $1/\sqrt{2}$. Esta diferencia se origina por el uso de diferentes normalizaciones de la tetrada que se usa para definir el escalar de Weyl Ψ_4 .

5.3. Radiación gravitacional usando perturbaciones de Agujeros Negros

Aunque el anterior método para calcular la radiación gravitacional en términos de una descomposición del escalar de Weyl Ψ_4 es en la práctica el método usual en relatividad numérica, no es el único. Otro camino para calcular la energía y momentos transportados por la radiación gravitacional, que hasta fue

hasta hace poco el método tradicionalmente usado, es el uso de las perturbaciones invariantes de norma de un agujero negro de Schwarzschild. En esta sección presentamos brevemente las principales ideas de esta teoría. La motivación para presentar esta discusión es mostrar que los dos métodos conducen a expresiones equivalentes. Una discusión detallada sobre esta teoría puede ser encontrada en [91, 87, 114].

5.3.1. Desarrollo multipolar

Para comenzar, consideremos una métrica de la forma (5.1), pero esta vez supondremos que la métrica de fondo es ahora la métrica de Schwarzschild. Como la métrica de fondo es esféricamente simétrica, es útil descomponer, en analogía con el capítulo 4, la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ como el producto del espacio bidimensional \tilde{M}^2 asociado con las coordenadas (t, r) y la variedad S^2 descrita por las coordenadas angulares (θ, φ) . Teniendo en cuenta esto, podemos expresar (5.1) en la forma

$$ds^2 = \tilde{g}_{ab} dx^a dx^b + r^2 \hat{g}_{AB} dx^A dx^B, \quad (5.61)$$

donde \tilde{g}_{ab} denota la métrica pseudo-Riemanniana sobre la variedad \tilde{M}^2 y donde la métrica $\hat{g}_{AB} = \text{diag}(1, \sin^2 \theta)$ es la métrica usual sobre S^2 .⁴ Teniendo en cuenta lo anterior, consideremos ahora un desarrollo multipolar de la perturbación $h_{\mu\nu}$ en términos de los armónicos esféricos $Y^{l,m}(\theta, \varphi)$. Este desarrollo separa de manera natural la perturbación en dos sectores de acuerdo a sus propiedades de paridad. El sector par, también conocido como axial, donde los multipolos transforman como $(-1)^l$ bajo una transformación del tipo $(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \phi)$ y el sector impar, o polar, donde los multipolos transforman como $(-1)^{l+1}$ bajo el mismo tipo de transformación. Para descomponer $h_{\mu\nu}$ de esta forma, es necesario introducir los armónicos esféricos escalares, vectoriales y tensoriales. Los armónicos escalares son los armónicos esféricos usuales. Por otro lado, los armónicos vectoriales pueden ser de dos diferentes tipos. Los armónicos vectoriales pares que están definidos como el gradiente de los armónicos esféricos,

$$\hat{\nabla}_A Y^{l,m} \equiv Y^{l,m}_A, \quad (5.62)$$

y los armónicos vectoriales impares, que están definidos como

$$-\epsilon_A{}^B \hat{\nabla}_B Y^{l,m} \equiv X^{l,m}_A, \quad (5.63)$$

⁴Aquí y en lo que resta de esta sección supondremos, al igual que en el capítulo 4, que los índices (a, b, \dots) corren de 0 a 1 (representan las coordenadas sobre \tilde{M}^2) y los índices (A, B, \dots) corren de 3 a 4. Adicionalmente, la derivada covariante sobre \tilde{M}^2 es denotada por $\tilde{\nabla}$, y $\hat{\nabla}$ corresponde a la derivada covariante en S^2 .

donde ϵ_{AB} es el tensor de Levi–Civita sobre S^2 y cuyas componentes son $\epsilon_{\theta\varphi} = -\epsilon_{\varphi\theta} = \hat{g}^{1/2} = \sin\theta$. De igual manera, es posible definir los armónicos tensoriales pares e impares. Existen dos formas de definir los armónicos tensoriales pares: multiplicando los armónicos esféricos escalares por la métrica \hat{g}_{AB} , o tomando la segunda derivada covariante de $Y^{l,m}$. Sin embargo, estas funciones no forman un conjunto linealmente independiente. En lugar de esto es mejor usar el tensor de *Zerilli–Mathews* definido como [91]:⁵

$$Z^{l,m}_{AB} \equiv \hat{\nabla}_A \hat{\nabla}_B Y^{l,m} + \frac{1}{2} l(l+1) \hat{g}_{AB} Y^{l,m}. \quad (5.64)$$

Por otro lado, los armónicos tensoriales impares se pueden definir como

$$X^{l,m}_{AB} \equiv \frac{1}{2} \left(\hat{\nabla}_A X^{l,m}_B + \hat{\nabla}_B X^{l,m}_A \right). \quad (5.65)$$

Con estas definiciones, la métrica perturbada $h_{\mu\nu}$ se descompone automáticamente en el sector par dado por

$$\left(h^{l,m}_{ab} \right)_{\text{par}} = H^{l,m}_{ab} Y^{l,m}, \quad (5.66)$$

$$\left(h^{l,m}_{aB} \right)_{\text{par}} = H^{l,m}_a Y^{l,m}_B, \quad (5.67)$$

$$\left(h^{l,m}_{AB} \right)_{\text{par}} = r^2 \left(K^{l,m} \hat{g}_{AB} Y^{l,m} + G^{l,m} Z^{l,m}_{AB} \right), \quad (5.68)$$

y en el sector impar

$$\left(h^{l,m}_{ab} \right)_{\text{impar}} = 0, \quad (5.69)$$

$$\left(h^{l,m}_{aB} \right)_{\text{impar}} = h^{l,m}_a X^{l,m}_B, \quad (5.70)$$

$$\left(h^{l,m}_{AB} \right)_{\text{impar}} = h^{l,m} X^{l,m}_{AB}, \quad (5.71)$$

donde los coeficientes $(H^{l,m}_{ab}, H^{l,m}_a, K^{l,m}, G^{l,m}, h^{l,m}_a, h^{l,m})$ son funciones que en general dependen de las coordenadas r y t . Nótese que como Y^{00} es una constante, los armónicos vectoriales y tensoriales se anulan para $l = 0$. Por otro lado, para $l = 1$ es fácil mostrar que los armónicos tensoriales se anulan mientras que los vectoriales no. Uno puede interpretar el modo vectorial par con $l = 1$ como un modo de norma, el cual puede ser removido bajo una transformación de coordenadas adecuada [62, 114, 87]. Por

⁵Uno puede mostrar fácilmente que el tensor de *Zerilli–Mathews* tiene traza cero. Así que este tensor también se podría considerar como una definición alternativa para los los armónicos tensoriales.

otro lado, el modo vectorial impar con $l = 1$ puede ser interpretado como una contribución al momento angular o modo de Kerr [114]. Teniendo en cuenta esto, supondremos que $l \geq 2$, al igual que en la expansión de Ψ_4 en términos de los armónicos tensoriales presentada en la sección 5.2.

5.3.2. Perturbaciones invariantes de norma

En la sección anterior mostramos como la perturbación $h_{\mu\nu}$ se puede descomponer en un sector par y otro impar. Claramente esta descomposición depende de las coordenadas ya que los coeficientes $H^{l,m}_{ab}$, $H^{l,m}_a$, $K^{l,m}$, $G^{l,m}$, $h^{l,m}_a$ y $h^{l,m}$ son funciones que dependen de las coordenadas r y t . Esta propiedad hace que estos coeficientes sean muy poco llamativos para cualquier análisis. Sin embargo, es posible construir invariantes de norma usando una adecuada combinación de ellos. Por ejemplo, para el caso de una perturbación par, los coeficientes

$$\tilde{K}^{l,m} \equiv K^{l,m} + \frac{1}{2} l(l+1) G^{l,m} - \frac{2}{r} r^a \varepsilon^{l,m}_a, \quad (5.72)$$

$$\tilde{H}^{l,m}_{ab} \equiv H^{l,m}_{ab} - \tilde{\nabla}_a \varepsilon^{l,m}_b - \tilde{\nabla}_b \varepsilon^{l,m}_a, \quad (5.73)$$

donde hemos definido a $\varepsilon^{l,m}_a$ como

$$\varepsilon^{l,m}_a \equiv H^{l,m}_a - \frac{r^2}{2} \tilde{\nabla}_a G^{l,m}, \quad (5.74)$$

son, como se mostró en [61], invariantes de norma. Al igual que en 4.3.2, los invariantes de norma $\tilde{K}^{l,m}$ y $\tilde{H}^{l,m}_{ab}$ pueden ser reescritos en términos del escalar invariante

$$\Psi_{\text{par}}^{l,m} \equiv \frac{2r}{L} \left[\tilde{K}^{l,m} + \frac{2r^a}{\Lambda} \left(r^b \tilde{H}^{l,m}_{ab} - r \tilde{\nabla}_a \tilde{K}^{l,m} \right) \right], \quad (5.75)$$

donde $L \equiv l(l+1)$, $\Lambda \equiv (l-1)(l+2) + 6M/r$, y $r_a \equiv \tilde{\nabla}_a r$. Esta cantidad satisface una simple ecuación de onda conocida como la “ecuación de Zerilli” [138]. De igual manera, podemos definir una cantidad invariante de norma para el caso impar de la forma [61]

$$\tilde{h}_a^{l,m} \equiv h^{l,m}_a - r^2 \tilde{\nabla}_a \left(\frac{h^{l,m}}{r^2} \right). \quad (5.76)$$

Como mostramos en la sección 4.3.2, este invariante se puede reexpresar en términos de del escalar

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{impar}}^{l,m} &\equiv \frac{2r \epsilon^{ab}}{(l-1)(l+2)} \left[\tilde{\nabla}_a \tilde{h}^{l,m}_b - \frac{2r_a}{r} \tilde{h}^{l,m}_b \right] \\ &= \frac{2r \epsilon^{ab}}{(l-1)(l+2)} \left[\tilde{\nabla}_a h^{l,m}_b - \frac{2r_a}{r} h^{l,m}_b \right]. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Usando las ecuaciones de campo de Einstein (1.1), se puede mostrar que Ψ_{impar} satisface la ecuación de onda (4.96).

La ventaja de usar las cantidades invariantes es que estas cantidades pueden relacionarse fácilmente con la radiación gravitacional en la norma TT. Para ver esto, consideremos primero las perturbaciones de norma pares. Si asintóticamente nos aproximamos a la norma TT, se puede mostrar que los coeficientes h_{ab} y h_{aB} decaen más rápido que h_{AB} . Así que, de acuerdo con la expansión multipolar (5.68), podemos ignorar los coeficientes $H^{l,m}_{ab}$ y $H^{l,m}_a$, y solo considerar los coeficientes $K^{l,m}$ y $G^{l,m}$. Usando una base ortonormal alineada con las direcciones angulares es fácil mostrar que

$$(h^+)_{\text{par}}^{l,m} = \frac{G^{l,m}}{2} \left(Z^{l,m}_{\theta\theta} - \frac{Z^{l,m}_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} \right), \quad (5.78)$$

$$(h^\times)_{\text{par}}^{l,m} = G^{l,m} \left(\frac{Z^{l,m}_{\theta\varphi}}{\sin \theta} \right). \quad (5.79)$$

Por otro lado, empleando la condición de traza cero en la ecuación (5.68) obtenemos que $K = 0$. En este caso el escalar $\Psi_{\text{par}}^{l,m}$ se puede reescribir como $\Psi_{\text{par}}^{l,m} = r G^{l,m}$. Esto implica que la contribución de las perturbaciones pares a la métrica en la norma TT se puede escribir en términos de Ψ_{par} como

$$(h^+)_{\text{par}}^{l,m} = \frac{\Psi_{\text{par}}^{l,m}}{2r} \left(Z^{l,m}_{\theta\theta} - \frac{Z^{l,m}_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{\Psi_{\text{par}}^{l,m}}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} l(l+1) \right] Y^{l,m}, \quad (5.80)$$

$$(h^\times)_{\text{par}}^{l,m} = \frac{\Psi_{\text{par}}^{l,m}}{r} \left(\frac{Z^{l,m}_{\theta\varphi}}{\sin \theta} \right) = \frac{\Psi_{\text{par}}^{l,m}}{r} \left(\frac{i m}{\sin \theta} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \right] Y^{l,m}, \quad (5.81)$$

donde hemos usado el hecho que $\partial_\varphi Y^{l,m} = i m Y^{l,m}$.

Ahora veamos que pasa con las perturbaciones impares. Es fácil mostrar que la perturbación $h_{\mu\nu}$ se puede escribir en términos de los armónicos tensoriales (5.65) como

$$(h^+)_{\text{impar}}^{l,m} = \frac{h^{l,m}}{2r^2} \left(X^{l,m}_{\theta\theta} - \frac{X^{l,m}_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} \right), \quad (5.82)$$

$$(h^\times)_{\text{impar}}^{l,m} = \frac{h^{l,m}}{r^2} \left(\frac{X^{l,m}_{\theta\varphi}}{\sin \theta} \right). \quad (5.83)$$

El siguiente paso es relacionar $h^{l,m}$ con el escalar invariante de norma $\Psi_{\text{impar}}^{l,m}$. En este caso no podemos simplemente ignorar el coeficiente $h^{l,m}_a$ para calcular $h^{l,m}$, ya que queda claro de la definición (5.77) que este invariante solamente depende de $h^{l,m}_a$. Sin embargo, en la norma TT estas cantidades están relacionadas entre sí. Para entender esto, consideremos la condición transversa sobre $h_{\mu A}$, es decir,

$$\nabla^\mu h_{\mu A} = 0.$$

Usando la expansión multipolar y calculando explícitamente la divergencia de $X_{AB}^{l,m}$, se encuentra que esta condición implica

$$\hat{\nabla}^a \left(r^2 h^{l,m}_a \right) = \frac{1}{2} (l-1)(l+2) h^{l,m}. \quad (5.84)$$

Recordando que en la norma TT podemos elegir que $h_{\mu\nu}$ sea puramente espacial y como la métrica g_{ab} debe ser asintóticamente la métrica de Minkowski, podemos expresar (5.84) en la forma

$$\partial_r \left(r^2 h^{l,m}_r \right) = \frac{1}{2} (l-1)(l+2) h^{l,m}. \quad (5.85)$$

Bajo el mismo argumento, también se puede reescribir la expresión (5.77) como

$$\Psi_{\text{impar}}^{l,m} = \frac{2r}{(l-1)(l+2)} \partial_t h^{l,m}_r. \quad (5.86)$$

Teniendo en cuenta estos dos últimos resultados, podemos escribir la relación

$$\partial_r \left(r \Psi_{\text{impar}}^{l,m} \right) = \partial_t h^{l,m}. \quad (5.87)$$

Para integrar esta expresión podemos, sin pérdida de generalidad, hacer uso de la aproximación de onda saliente, de la cual obtenemos

$$h^{l,m} \sim -r \Psi_{\text{impar}}^{l,m}. \quad (5.88)$$

Así, podemos reescribir la perturbación impar como

$$\begin{aligned} (h^+)_{\text{impar}}^{l,m} &= -\frac{\Psi_{\text{impar}}^{l,m}}{2r} \left(X^{l,m}_{\theta\theta} - \frac{X^{l,m}_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} \right) \\ &= -\frac{\Psi_{\text{impar}}^{l,m}}{r} \left(\frac{im}{\sin \theta} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \right] Y^{l,m}, \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} (h^\times)_{\text{impar}}^{l,m} &= -\frac{\Psi_{\text{impar}}^{l,m}}{r} \left(\frac{X^{l,m}_{\theta\varphi}}{\sin \theta} \right) \\ &= \frac{\Psi_{\text{impar}}^{l,m}}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} l(l+1) \right] Y^{l,m}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Finalmente, usando las relaciones (5.80) y (5.81) para las perturbaciones pares y (5.89) y (5.90) para las perturbaciones impares, podemos expresar los coeficientes h^+ y h^\times en la norma TT en la forma

$$h^+ = \frac{1}{2r} \sum_{l,m} \left[\Psi_{\text{par}}^{l,m} \left(Z^{l,m}_{\theta\theta} - \frac{Z^{l,m}_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} \right) - \Psi_{\text{impar}}^{l,m} \left(X^{l,m}_{\theta\theta} - \frac{X^{l,m}_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} \right) \right], \quad (5.91)$$

$$h^\times = \frac{1}{r} \sum_{l,m} \left[\Psi_{\text{par}}^{l,m} \left(\frac{Z^{l,m}_{\theta\varphi}}{\sin \theta} \right) - \Psi_{\text{impar}}^{l,m} \left(\frac{X^{l,m}_{\theta\varphi}}{\sin \theta} \right) \right]. \quad (5.92)$$

Nótese que a pesar de que las funciones $\Psi_{\text{par}}^{l,m}$ y $\Psi_{\text{par}}^{l,m}$ son en general complejas, los coeficientes h^+ y h^\times deben ser reales. Esto implica, usando las propiedades de los armónicos esféricos bajo conjugación compleja, que

$$\bar{\Psi}_{\text{par}}^{l,m} = (-1)^m \Psi_{\text{par}}^{l,-m}, \quad \bar{\Psi}_{\text{impar}}^{l,m} = (-1)^m \Psi_{\text{impar}}^{l,-m}. \quad (5.93)$$

Podemos también reescribir las expresiones en términos de los armónicos esféricos con peso de espín. Para esto es más conveniente considerar la combinación compleja H , para la cual encontramos

$$H = \frac{1}{2r} \sum_{l,m} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \left(\Psi_{\text{par}} + i \Psi_{\text{impar}} \right) {}_{-2}Y^{l,m}. \quad (5.94)$$

Antes de calcular la energía y los momentos radiados en términos de los escalares invariantes de norma, es importante mencionar una convención comúnmente usada en relatividad numérica. Para esto, consideremos el escalar invariante de norma

$$\begin{aligned} Q_{\text{M}}^{l,m} &\equiv \frac{2r^a \tilde{h}_a^{l,m}}{r} \\ &= \frac{2r^a}{r} \left(h^{l,m}_a - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a h^{l,m} + \frac{r_a}{r} h^{l,m} \right), \end{aligned} \quad (5.95)$$

para el sector impar introducido por Moncrief en [90]. La forma de este escalar ha sido la elección más común para estudiar las perturbaciones impares del espacio-tiempo de Schwarzschild y esta es la razón por la cual la mayoría de las implementaciones numéricas usan esta definición en lugar de $\Psi_{\text{impar}}^{l,m}$. Es posible mostrar que asintóticamente, y considerando la norma TT, la función $Q_{\text{M}}^{l,m}$ se reduce a

$$Q_{\text{M}}^{l,m} \sim -\partial_t \Psi_{\text{impar}}^{l,m}. \quad (5.96)$$

Por otro lado, si introducimos el reescalamiento

$$Q_{\text{par}}^{l,m} \equiv \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} \Psi_{\text{par}}^{l,m}, \quad (5.97)$$

$$Q_{\text{impar}}^{l,m} \equiv \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} Q_{\text{M}}^{l,m}, \quad (5.98)$$

es fácil mostrar que la función H en términos de $Q_{\text{par}}^{l,m}$ y $Q_{\text{impar}}^{l,m}$ se puede expresar como [132]

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}r} \sum_{l,m} \left[Q_{\text{par}}^{l,m} - i \int_{-\infty}^t Q_{\text{impar}}^{l,m} dt' \right] {}_{-2}Y^{l,m}. \quad (5.99)$$

5.3.3. Energía y momentos radiados

Con la breve discusión presentada en la sección anterior ahora estamos en condiciones de calcular la energía, el momento lineal y angular en términos de los escalares invariantes de norma $\Psi_{\text{par}}^{l,m}$ y $\Psi_{\text{impar}}^{l,m}$ y/o en términos de $Q_{\text{par}}^{l,m}$ y $Q_{\text{impar}}^{l,m}$. Existen dos formas de hacer esto. El camino más natural es substituir directamente las ecuaciones (5.94) y (5.99) en las expresiones para la energía y los momentos radiados. La otra forma es relacionar los coeficientes $A^{l,m}$ de la expansión multipolar de Ψ_4 con los escalares invariantes de norma. Nosotros elegimos esta última opción que, aunque es menos natural, nos permite demostrar que nuestras expresiones son completamente equivalentes a las expresiones frecuentemente utilizadas en relatividad numérica.

Comparando la expansión multipolar para Ψ_4 con la expansión para las perturbaciones, y usando el hecho que asintóticamente $\Psi_4 = -\ddot{H}$, es fácil demostrar que

$$\begin{aligned} A^{l,m} &= -\frac{1}{2r} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \left(\ddot{\Psi}_{\text{par}}^{l,m} + i \ddot{\Psi}_{\text{impar}}^{l,m} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\ddot{Q}_{\text{par}}^{l,m} - i \ddot{Q}_{\text{impar}}^{l,m} \right). \end{aligned} \quad (5.100)$$

Con esto, podemos traducir las expresiones en términos de $A^{l,m}$ directamente a las expresiones en términos de $\Psi_{\text{par}}^{l,m}$ y $\Psi_{\text{impar}}^{l,m}$ y/o en términos de $Q_{\text{par}}^{l,m}$ y $Q_{\text{impar}}^{l,m}$.

Para comenzar, consideremos la energía radiada por el sistema. Usando las expresiones (5.43) y (5.100), se obtiene inmediatamente

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{64\pi} \sum_{l,m} \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \left(\left| \dot{\Psi}_{\text{par}}^{l,m} \right|^2 + \left| \dot{\Psi}_{\text{impar}}^{l,m} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{32\pi} \sum_{l,m} \left(\left| \dot{Q}_{\text{par}}^{l,m} \right|^2 + \left| \dot{Q}_{\text{impar}}^{l,m} \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.101)$$

Para encontrar esta expresión hemos usado el hecho de que, como una consecuencia de (5.93),

$$\sum_m \left(\dot{\Psi}_{\text{par}}^{l,m} \dot{\Psi}_{\text{impar}}^{l,m} - \dot{\Psi}_{\text{impar}}^{l,m} \dot{\Psi}_{\text{par}}^{l,m} \right) = 0. \quad (5.102)$$

Por otro lado, para encontrar el momento lineal en términos de los invariantes comenzamos con las

ecuaciones (5.49)-(5.50), y usando una vez más (5.100), obtenemos⁶

$$\frac{dP_+}{dt} = \frac{1}{8\pi} \sum_{l,m} \left[i a_{l,m} \dot{Q}_{\text{par}}^{l,m} \bar{Q}_{\text{impar}}^{l,m+1} - b_{l+1,m+1} \left(\dot{Q}_{\text{par}}^{l,m} \dot{Q}_{\text{par}}^{l+1,m+1} + Q_{\text{impar}}^{l,m} \bar{Q}_{\text{impar}}^{l+1,m+1} \right) \right], \quad (5.103)$$

$$\frac{dP_z}{dt} = \frac{1}{16\pi} \sum_{l,m} \left[i c_{l,m} \dot{Q}_{\text{par}}^{l,m} \bar{Q}_{\text{impar}}^{l,m} + d_{l+1,m} \left(\dot{Q}_{\text{par}}^{l,m} \dot{Q}_{\text{par}}^{l+1,m} + Q_{\text{impar}}^{l,m} \bar{Q}_{\text{impar}}^{l+1,m} \right) \right], \quad (5.104)$$

donde los coeficientes $(a_{l,m}, b_{l,m}, c_{l,m}, d_{l,m})$ están dados por (5.54). Estas últimas expresiones están escritas solo en términos de $(Q_{\text{par}}^{l,m}, Q_{\text{impar}}^{l,m})$, sin embargo, la traducción en términos de $(\Psi_{\text{par}}^{l,m}, \Psi_{\text{impar}}^{l,m})$ es trivial. Estas expresiones son completamente equivalentes a las expresiones recientemente derivadas por Pollney *et al.* en [98], y por Sopena *et al.* en [123].

De manera similar, podemos obtener expresiones para el momento angular radiado usando las expresiones (5.57)-(5.59). Se encuentra que:

$$\frac{dJ_x}{dt} = \frac{i}{32\pi} \text{Im} \sum_{l,m} f_{l,m} \left(\bar{Q}_{\text{par}}^{l,m} \dot{Q}_{\text{par}}^{l,m+1} + \bar{P}_{\text{impar}}^{l,m} Q_{\text{impar}}^{l,m+1} \right), \quad (5.105)$$

$$\frac{dJ_y}{dt} = -\frac{1}{32\pi} \text{Re} \sum_{l,m} f_{l,m} \left(\bar{Q}_{\text{par}}^{l,m} \dot{Q}_{\text{par}}^{l,m+1} + \bar{P}_{\text{impar}}^{l,m} Q_{\text{impar}}^{l,m+1} \right), \quad (5.106)$$

$$\frac{dJ_z}{dt} = \frac{i}{32\pi} \sum_{l,m} m \left(\dot{Q}_{\text{par}}^{l,m} \bar{Q}_{\text{par}}^{l,m} + Q_{\text{impar}}^{l,m} \bar{P}_{\text{impar}}^{l,m} \right), \quad (5.107)$$

donde hemos definido

$$P_{\text{impar}}^{l,m} \equiv \int_{-\infty}^t Q_{\text{impar}}^{l,m} dt', \quad (5.108)$$

y donde de nuevo los coeficientes $f_{l,m}$ están dados por (5.60). Nótese que las expresiones para dJ_x/dt y dJ_y/dt son manifiestamente reales. Es relativamente fácil mostrar que los términos de la expresión de dJ_z/dt , después de la suma, son puramente imaginarios, así que el resultado final es real.

Expresiones equivalentes al conjunto de ecuaciones (5.43), (5.49)-(5.50) y (5.57)-(5.59) para la energía y momento radiado por la radiación gravitacional en términos de Ψ_4 , o al conjunto (5.101), (5.103)-(5.104) y (5.105)-(5.107) en términos de perturbaciones de norma invariantes, fueron deducidas por Thor-

⁶Las cuentas son considerablemente largas y, para simplificar las expresiones se debe usar varias veces (5.93) o la expresión equivalente en términos de Q .

ne en [132]. Para relacionar las expresiones de Thorne con las nuestras podemos usar el hecho de que

$$\begin{aligned} A^{l,m} &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left[{}^{(l+2)}I^{l,m} - i \left({}^{(l+2)}S^{l,m} \right) \right], \\ \bar{A}^{l,m} &= \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}r} \left[{}^{(l+2)}I^{l,-m} + i \left({}^{(l+2)}S^{l,-m} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.109)$$

donde, en la notación de Thorne, $I^{l,m}(t-r)$ son los *momentos multipolares de masa* y donde ${}^{(l)}I^{l,m}$ y ${}^{(l)}S^{l,m}$ denota la l -ésima derivada temporal de estas cantidades.

Como comentario final, observemos que para simplificar la notación en esta sección no hemos introducido el límite de r tendiendo a infinito. Sin embargo, este límite debe ser entendido ya que todos los resultados son válidos solamente en la aproximación de campo débil.

5.4. Discusión

Hemos deducido explícitamente las expresiones para calcular la energía, el momento lineal y el momento angular radiado por un sistema aislado en forma de ondas gravitacionales. Partimos de una perturbación $h_{\mu\nu}$ de la métrica de fondo $\eta_{\mu\nu}$, y trabajamos en la norma transversa y libre de traza (norma TT). Con esto, rederivamos las expresiones usuales para la energía y momentos basados en el tensor de momento-energía propuesto por Isaacson. Introducimos el escalar de Weyl Ψ_4 y su expansión multipolar en términos de armónicos esféricos con peso de espín. A partir de esto, derivamos explícitamente las expresiones para la energía y momentos en términos de los coeficientes $A^{l,m}$. Finalmente, también presentamos la expansión multipolar en términos de perturbaciones invariantes de norma del espacio-tiempo de Schwarzschild. En particular, con las expresiones en términos de la expansión del escalar de Weyl Ψ_4 evitamos separar la métrica de fondo del espacio-tiempo generado numéricamente el cual, en general, está en coordenadas arbitrarias. Antes de terminar esta discusión es necesario mencionar un punto sutil. Para calcular numéricamente los escalares de Weyl Ψ_n necesitamos introducir la tetrada nula (5.37). Sin embargo, en la definición de esta tetrada existen ciertas ambigüedades; la radiación gravitacional puede solo calcularse en el infinito nulo futuro. Recientemente Lehner y Moreschi analizaron este problema en [82] y mostraron como introducir correcciones para remover estas ambigüedades.

En el siguiente capítulo usaremos estas expresiones para calcular numéricamente la energía y los momentos radiados en la colisión frontal de dos agujeros negros.

COLISIÓN FRONTAL DE AGUJEROS NEGROS CON ESPÍN

El problema de la colisión de objetos compactos, particularmente agujeros negros, ha sido uno de los principales temas de investigación en relatividad numérica desde su comienzo; la relatividad numérica comenzó a desarrollarse como una rama independiente de investigación a partir de los trabajos de Hahn y Linqvist [68] y Smarr y Eppley [120, 55, 56] sobre la colisión frontal de agujeros negros. Sin embargo, el problema de la colisión de objetos compactos en órbita es, en general, terriblemente complicado y solo recientemente se pudo resolver [99, 41, 16]. La primera propuesta exitosa para resolver este problema fue hecha a comienzos del 2005 por Pretorius [99]. Esta propuesta consiste en hacer la evolución de la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ usando la norma armónica generalizada (2.72). Por otro lado, los grupos de Brownsville y Goddard propusieron, de manera independiente, “evolucionar” la singularidad física de cada uno de los agujeros negros [41, 16]. Esta propuesta usa la formulación BSSN con algunas modificaciones en las ecuaciones de evolución para las variables de norma que permiten el movimiento de la puntura. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos decir que la comunidad de relatividad numérica lleva alrededor de 40 años estudiando el mismo problema. ¿Por que estamos tan interesados en resolver este problema? Uno puede intentar resolver esta pregunta usando varias argumentos. En particular, por que se espera que la colisión de agujeros negros en órbita sea una fuente prominente de ondas gravitacionales, las cuales se esperan detectar con los observatorios de interferometría como el LIGO, VIRGO, GE0600, TAMA; la colisión de dos agujeros negros origina un agujero altamente distorsionado que alcanzara un estado de equilibrio emitiendo una gran cantidad de radiación gravitacional.

Usando estas propuestas, ahora es posible estudiar con todo detalle la evolución y colisión de agujeros

negros. Además de esto, podemos también extraer los correspondientes patrones de ondas gravitacionales [33, 50, 99, 41, 16, 70]. Por ejemplo, en [42, 43, 44] se estudio la colisión de agujeros negros de igual masa con espín. Campanelli y colaboradores encontraron que la radiación máxima de la masa en forma de ondas gravitacionales de un sistema de dos agujeros negros en una órbita cuasi-circular es menor que el 8% de la masa total del sistema. Por otro lado, en [18, 64] se cálculo la velocidad final del agujero negro resultante de la colisión de dos de estos objetos, la cual es al rededor de 175 km/s para una relación de masa $q = m_1/m_2 = 0.36$.

Desde luego con estos avances se inicio una fuerte competencia entre la mayor parte de los grupos de relatividad numérica por simular y analizar de forma general la colisión de agujeros negros con y sin espín en órbita. La complejidad de este tipo de simulaciones puede complicar el análisis de algunas variables físicas. Esta es la razón por la cual hemos restringido nuestras evoluciones numéricas a la colisión frontal de agujeros negros. Esto nos permite tener algún control sobre los efectos adicionales que se generan en el problema general del movimiento orbital de estos objetos. En este capítulo calculamos el flujo de energía y de momento lineal y angular usando las expresiones calculadas en el capítulo 5. Mostramos numéricamente que las expresiones calculadas en términos de la descomposición del escalar de Weyl Ψ_4 y las expresiones en términos de las perturbaciones invariantes de norma son equivalentes.

6.1. Datos iniciales

Para las evoluciones que presentaremos a continuación hemos considerado datos iniciales tipo puntura [30] que describen dos agujeros negros inicialmente en reposo. Con esto, podemos expresar la métrica sobre la superficie inicial Σ_0 como (ver sección 2.4.1)

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij}, \quad (6.1)$$

donde el factor conforme ψ , en términos de su parte regular u y la parte singular ψ_{BL} , es definido como

$$\psi = \psi_{BL} + u.$$

La parte singular ψ_{BL} del factor conforme se puede escribir como

$$\Psi_{BL} = 1 + \sum_{p=1}^2 \frac{m_p}{2|\vec{r} - \vec{r}_p|}, \quad (6.2)$$

donde m_p es la masa del i -ésimo agujero negro localizado en \vec{r}_p . Por otro lado, la función u , la cual representa la parte regular del factor conforme, es calculada resolviendo numéricamente la constricción

Hamiltoniana (2.11). En Particular, para resolver esta constricción usamos el código escrito por Ansrog, Brüggmann y Tichy, el cual es descrito en [14], que hace uso de métodos espectrales. Por otro lado, para introducir el espín de los agujeros negros usamos la forma de la curvatura extrínseca tipo Bowen-York [29], de acuerdo con

$$K_{p,ij}^S = \frac{3}{r_p^3} \psi^{-2} \left(\epsilon_{kim} n_p^k n_{p,j} S_p^m + \epsilon_{kjm} n_p^k n_{p,i} S_p^m \right), \quad (6.3)$$

donde \vec{n}_p es el vector unitario en la dirección de r_p y \vec{S}_p es el espín del p-ésimo agujero negro. La expresión (6.3) corresponde a una solución exacta de la constricción de momentos.

Las configuraciones de datos iniciales que hemos considerado corresponden a colisiones frontales de dos agujeros negros sin y con espín alineado/anti-alineado a lo largo del eje z . Inicialmente localizamos las punturas simétricamente sobre el eje z en $z = \pm 4$. Nótese que por simetría las únicas componentes en la expansión (5.40) y en los invariantes de norma $Q_{par/impar}$ que en principio son diferentes de cero corresponde a $l \geq 2$ y $m = 0$. Los parámetros específicos usados en cada simulación son presentados en la tabla 6.1; hemos dividido las configuraciones de datos iniciales en tres grupos:

1. colisión de agujeros sin espín,
2. colisión de agujeros con la misma magnitud de espín,
3. colisión de agujeros con diferentes magnitudes de espín.

En el primero conjunto de datos iniciales evolucionamos dos configuraciones. La primera configuración corresponde a la evolución de dos agujeros negros de la misma masa y sin espín (denotada como IM_{00}) y la segunda corresponde a la colisión de dos agujeros negros sin rotación y con una relación de masas distinta de uno (denotada como NI_{00}). Por otro lado, en el siguiente conjunto de datos iniciales corresponde a cuatro distintas configuraciones de igual masa pero con diferentes pero con diferentes orientaciones de espín. La configuración MI_{+0} corresponde a dos agujeros negros de igual masa uno de ellos con espín orientado a lo largo de \hat{e}_z . La configuración MI_{++} corresponde a dos agujeros negros de igual masa y espín orientados en la dirección \hat{e}_z . De igual forma las configuraciones MI_{+-} y MI_{-+} corresponde a configuraciones de datos iniciales de agujeros negros de igual masa con espines antialineados.¹ Final-

¹Ya que estamos considerando configuraciones de datos iniciales axialmente simétricos, las configuraciones de datos iniciales MI_{+-} y MI_{-+} son idénticas. Hemos considerado estas dos configuraciones por completez ya que en simulaciones preliminares encontramos que MI_{+-} y MI_{-+} conducían a resultados inconsistentes.

mente, en el último grupo de datos iniciales evolucionamos dos agujeros negros de diferentes masas y diferentes magnitudes de espín orientados a lo largo de \hat{e}_z .

Por otro lado, por comodidad definimos el parámetro q , el cual mide la relación entre las dos masa de los agujeros negros

$$q \equiv \frac{m_1}{m_2}, \quad (6.4)$$

donde la masa de los dos agujeros negros cumplen con la relación $m_1 < m_2$ y el parámetro a asociado, en analogía con la solución de Kerr, con el espín individual de cada agujero negro

$$a \equiv \frac{|S|}{m} \approx \frac{|S|}{M_{AH}}, \quad (6.5)$$

donde M_{AH} es la masa del horizonte aparente, la cual se puede calcular através de la masa irreducible usando la expresión de Christodoulou [31, 48],

$$M_{HA} = \sqrt{M_{irr}^2 + \frac{S^2}{4 M_{irr}^2}}, \quad (6.6)$$

donde M_{irr} es la masa irreducible definida, en términos del área del horizonte aparente A_{HA} , como ²

$$M_{irr} = \sqrt{\frac{A_{HA}}{16 \pi}}. \quad (6.7)$$

El área A_{HA} es calculada numéricamente usando el código descrito en [130]. Por otro lado, hemos ajustado los datos iniciales de tal forma que la masa ADM del sistema es igual a uno. Esto fija la distancia propia L entre los dos agujero negros, la cual es medida entre los puntos más cercanos de los horizontes aparentes, aproximadamente en $L \approx 12M$.³

Para completar los datos iniciales aun nos falta especificar los valores iniciales de las variables de norma. En el caso de agujeros negros sin espín, en $t = 0$ usamos

$$\beta^i(0) = 0, \quad (6.8)$$

$$\alpha(0) = \psi_0^{-2}, \quad (6.9)$$

²Esta cantidad es definida en analogía con

$$M_{irr} \equiv \sqrt{\frac{A_{HE}}{16 \pi}},$$

donde A_{HE} es el área del horizonte de eventos que surge de la segunda ley de la termodinámica; el área del horizonte de eventos de un agujero negro no disminuye con el tiempo.

³Aquí y en lo que sigue, M se refiera a la masa ADM del sistema considerado.

Masa $S_1 S_2$	S_1^z/M^2	S_2^z/M_{AH}^2	a_1/m_1	a_2/m_2	L/M_{ADM}	m_1	$q = m_1/m_2$
MI ₀₀	0.0	0.0	0.0	0.0	11.59	0.5	1.0
NI ₀₀	0.0	0.0	0.0	0.0	11.9278	0.25	0.33
MI ₊₀	0.05	0.0	0.1880	0.0	13.4132	0.4962	1.0
MI ₊₊	0.05	0.05	0.1880	0.1880	13.2438	0.4928	1.0
MI _{+−}	0.05	-0.05	0.1880	0.1880	13.2438	0.4928	1.0
MI _{−+}	-0.05	0.05	0.1880	0.1880	13.2438	0.4928	1.0
NI ₊₊	0.06	0.085	0.355	0.221	11.8171	0.380	0.638

TABLA 6.1: Datos iniciales para la colisión frontal de dos agujeros negros. Por simplicidad, consideramos configuraciones para las cuales la masa ADM del sistema es igual a uno y localizamos los agujeros negros, al igual que sus respectivos espines, sobre el eje z . El parámetro a_i es aproximadamente el parámetro de espín de un agujero negro de Kerr y L es la separación propia entre los dos horizontes aparentes.

donde ψ_0 es el factor conforme inicial. Esta forma inicial de lapso (lapso precolapsado) propuesto por primera vez en [6] y usado por Campanelli *et. al.* para simulaciones de agujeros negros en órbita [41], garantiza inicialmente que el sistema de ecuaciones es regular. Por otro lado, para agujeros negros con espín $\vec{S}_p \neq 0$ es necesario usar

$$\alpha(0) \sim \psi_{BL}^{-4}. \quad (6.10)$$

Esta condición de nuevo garantiza que el sistema de ecuaciones inicialmente es regular. Elegimos, como se sugirió en [42], el lapso inicial en la forma

$$\alpha(0) = \frac{2}{1 + \psi_{BL}^4}. \quad (6.11)$$

Es fácil mostrar que, lejos de las punturas, esta forma del lapso corresponde al lapso que se obtiene al escribir la métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas (lapso isotrópico).

6.2. Metodología

Evolucionamos el conjunto de datos iniciales presentado en la tabla 6.1 usando un código tipo BSSN (ver capítulo 2) en el que se implementó la técnica del movimiento de las punturas propuesto en [16]. Este código usa las herramientas computacionales de CACTUS [39] y fue desarrollado originalmente

por el grupo del instituto Albert Einstein (AEI) y reciente modificado por el grupo de Louisiana/AEI. Para detalles ver por ejemplo [7, 5, 133, 131, 76]. Para garantizar la estabilidad del código numérico agregamos, al lado derecho de las ecuaciones de evolución, un término de disipación artificial de cuarto orden de Kreiss-Oliger [78, 66], similar al que usamos en la sección 3.3. Por otro lado, evolucionamos el lapso usando la condición de foliación $I+log$ que satisface la ecuación de evolución

$$\partial_t \alpha - \beta^i \partial_i \alpha = -2\alpha (K - K_0), \quad (6.12)$$

donde K_0 es el valor inicial de la curvatura extrínseca que en nuestro caso es igual a cero. El vector de corrimiento es evolucionado usando una forma particular de la condición $\tilde{\Gamma}$ -driver discutida en la sección 2.3. Escrita como un conjunto de dos condiciones de primer orden, esta condición se puede expresar como

$$\begin{aligned} \partial_t \beta^i - \beta^j \partial_j \beta^i &= \frac{3}{4} \alpha B^i, \\ \partial_t B^i - \beta^j \partial_j B^i &= \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \beta^j \partial_j \tilde{\Gamma}^i - \eta B^i, \end{aligned} \quad (6.13)$$

donde el factor de amortiguamiento $\eta = 2$ para todas las simulaciones. Nótese que hemos agregado el término $-\beta^j \partial_j \tilde{\Gamma}^i$ al sistema de ecuaciones (6.13). Este factor permite eliminar los modos de propagación con velocidad cero. Baker y colaboradores encontraron en [16] que si no se incluye este término en la ecuación de evolución para el vector de corrimiento, la evolución deja ruido numérico donde inicialmente se encontraba la puntura, el cual se puede amplificar durante la evolución.

Para calcular el espín individual de cada agujero negro a cada paso de tiempo, usamos el formalismo de horizontes dinámicos [118], del cual obtenemos que

$$J_i = \frac{1}{8\pi} \oint_{AH} (\phi^\mu{}_i R^\nu K_{\mu\nu}) d^2V, \quad (6.14)$$

donde, en el horizonte, $\phi^\mu{}_i$ es un campo vectorial de Killing, $K_{\mu\nu}$ es la curvatura extrínseca, R^ν es un vector radial unitario y saliente y d^2V es el elemento de área intrínseco del horizonte. Inicialmente y por simplicidad supondremos que, como se propuso en [44], las componentes del vector $\phi^\mu{}_i$ esta dado por

$$\phi^\mu{}_x = [0, -(z - z_c), (y - y_c)] , \quad (6.15)$$

$$\phi^\mu{}_y = [(z - z_c), 0, -(x - x_c)] , \quad (6.16)$$

$$\phi^\mu{}_z = [-(y - y_c), (x - x_c), 0] , \quad (6.17)$$

donde (x_c, y_c, z_c) es la posición coordenada del centro geométrico del horizonte.

Por otro lado, para la integración en el tiempo usamos el método de líneas con un Runge-Kutta de tercer orden para el tiempo y diferencias finitas de cuarto orden para las derivadas espaciales. Adicionalmente, usamos una jerarquía de nueve mallas numéricas como refinamiento. Para obtener cada uno de los nueve niveles de refinamiento comenzamos con la resolución más alta $h = M/35.7143$, $M/41.6667$, $M/50$,⁴ localizada en la vecindad de los horizontes de cada agujero negro, y las demás las obtenemos mediante la relación 2 : 1. Implementamos este refinamiento de mallas usando el código *Carpet* descrito en [117]. Finalmente, en todas las simulaciones, imponemos la condición de frontera de onda radiativa para la frontera exterior localizada aproximadamente en $380M$.

6.2.1. Radiación espuria de Bowen-York

Como ya hemos mencionado antes, estamos interesados en calcular la energía y los momentos lineal y angular que son irradiados durante la colisión frontal de agujeros negros con espín a través de las ondas gravitacionales. Esto lo podemos hacer usando la teoría de perturbaciones sobre un espacio-tiempo de Schwarzschild o a través de los escalares de Weyl, tal y como discutimos en el capítulo 5. Sin embargo, antes de calcular cualquiera de estos observables físicos debemos tener en cuenta un punto muy importante. Recordemos que los datos iniciales que estamos usando para evolucionar el sistema binario son tipo Bowen-York. Estos datos iniciales, después de resolver la constricción hamiltoniana, contienen cierta cantidad no despreciable de radiación espuria.⁵ Esta radiación proviene de las suposiciones no físicas, como que la métrica sea conformalmente plana, que se hacen cuando queremos obtener los datos iniciales. Para ilustrar esto, presentamos en la figura 6.1 el coeficiente dominante A_{20} en el desarrollo (5.40) del escalar de Weyl Ψ_4 para tres distintas configuraciones de datos iniciales. Este coeficiente es calculado a una distancia coordenada de $40M$. Es claro que la configuración con una menor cantidad de “falsa radiación” corresponde al caso en que los datos iniciales de dos agujeros negros sin espín (línea continua/azul). Por otro lado, para las otras dos configuraciones, datos iniciales para dos agujeros negros con espín alineado sobre el eje z y una magnitud de $a/m = 0.22$ (línea punteada/verde) y espines alineados pero de diferente magnitud, $a_i/m = 0.1, 0.82$ (línea discontinua/roja), la radiación espuria es del mismo orden de magni-

⁴Nótese que las resoluciones más finas corresponden a $h = 0.028, 0.024, 0.020$, respectivamente.

⁵Diremos que esta radiación es espuria puesto que se genera por las suposiciones que estamos usando para obtener los datos iniciales. Por ejemplo, si queremos construir datos iniciales para un agujero negro de Kerr usando Bowen-York, obtenemos, como se mostró en [32], un espacio-tiempo de un agujero negro de Kerr con un contenido de ondas de Brill.

tud que la radiación que proviene de la colisión de los agujeros negros. Nótese que un comportamiento parecido también se observa en los invariantes de norma. No obstante, el modo $l = 2, m = 0$ para estas tres configuraciones es similar después que el sistema ha radiado las ondas gravitacionales iniciales de Bowen-York.

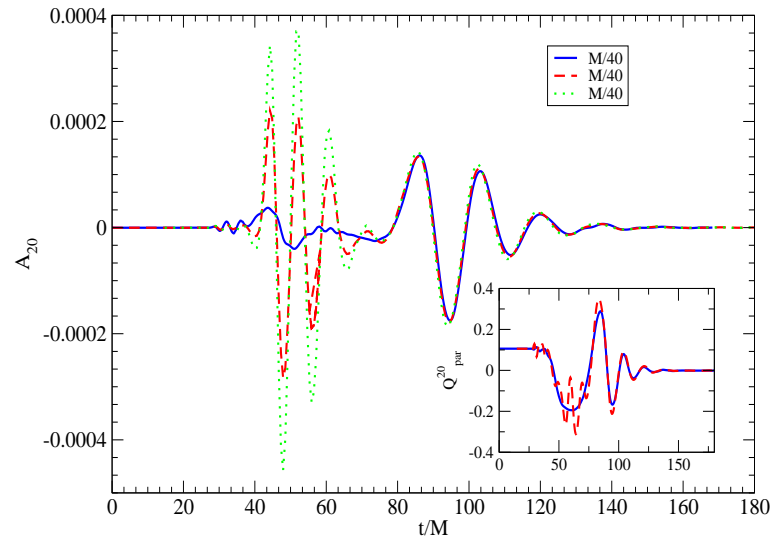


FIGURA 6.1: Coeficiente dominante A_{20} en el desarrollo (5.40) del escalar de Weyl Ψ_4 para tres distintas configuraciones de datos iniciales calculado a una distancia coordenada de $40M$. La línea continua/azul corresponde a la configuración de dos agujeros negros con igual masa y con espín nulo. La línea discontinua/roja corresponde a la configuración de espines paralelos de igual magnitud a lo largo del eje z y, finalmente, la línea punteada/verde corresponde a una configuración de dos agujeros negros sobre el eje z con espines paralelos pero de diferente magnitud. La figura interior de la derecha corresponde a la parte real del invariante de norma Q_{par}^{20} para el caso de igual masa sin espín (línea azul/continua) y del invariante Q_{par}^{20} para una configuración de masa igual masa y espines paralelos (línea roja/discontinua).

Para resolver este problema, Hannam y colaboradores propusieron en [69] una nueva técnica, que usa la superposición de dos agujeros negros de Kerr en coordenadas cuasi-isotropicas, para construir datos iniciales para agujeros negros con espín que reduce significativamente esta radiación. Por otro lado, Choi y colaboradores estimaron el tiempo en el que el sistema elimina esta radiación [46]. Para esto,

ellos supusieron que cada agujero negro alcanza un estado de equilibrio, se relaja, a un agujero negro de Kerr con la misma masa y espín. Nosotros seguiremos este último procedimiento para no considerar la radiación de Bowen-York; en la practica, lo que hacemos es integrar las expresiones (5.43), (5.49) y (5.50) entre el intervalo t_0 y t , donde t_0 es el tiempo para el cual esta radiación no es considerada. Por supuesto, el punto inicial de integración puede variar para cada configuración de datos iniciales, tal y como se demostró en [46].

6.2.2. Precisión y convergencia

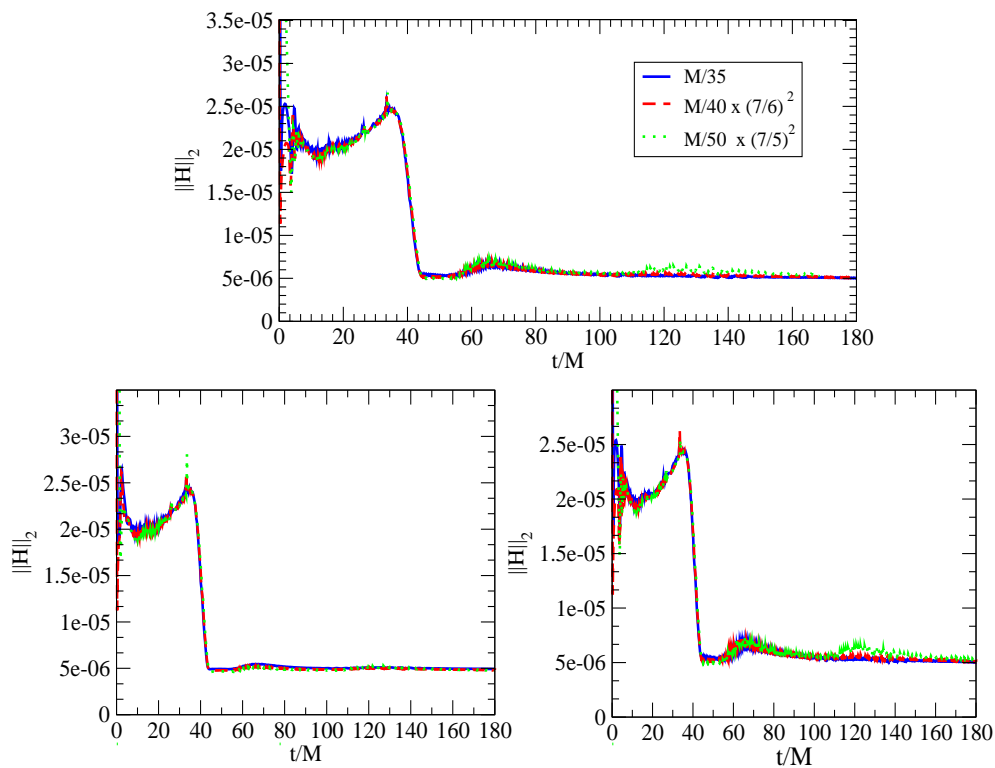


FIGURA 6.2: Norma L_2 de la violación de la constricción hamiltoniana para las configuraciones: MI_{++} (figura superior), MI (figura inferior izquierda) y MI_{+0} (figura inferior derecha). Nótese que hemos escalado dos de las tres resoluciones, las más altas, para demostrar convergencia de segundo orden.

En las secciones anteriores hemos discutido la forma en la que obtenemos los datos iniciales, las técnicas numéricas que debemos emplear para evolucionar estos datos y además la forma en la que re-

moveremos la radiación espuria de nuestros resultados numéricos. Sin embargo, aun no hemos discutido nada acerca de cual es la precisión que debemos esperar de los resultados numéricos ni hemos demostrado la convergencia del código numérico que estamos empleando. Para esto, es necesario analizar las aproximaciones numéricas que se están haciendo. Como discutimos en las secciones anteriores, el error en las diferencias finitas espaciales usada en el algoritmo numérico es de orden $\mathcal{O}(h^4)$ y el método de integración en el tiempo es a tercer orden. Por otro lado, el error en la interpolación temporal usada por Carpet para el refinamiento es de orden $\mathcal{O}(\Delta t^3)$. Por lo tanto, el orden teórico de convergencia esperado es igual a tres. Desafortunadamente hemos encontrado numéricamente que el factor de convergencias es de dos. En la figura 6.2 mostramos la norma L_2 para la violación de la constricción hamiltoniana para tres distintas configuraciones de datos iniciales y las tres resoluciones $h = (M/50, M/41.6667, M/35.7143)$. Nótese que hemos reescalado la norma de la constricción hamiltoniana por el factor

$$\varrho = \left(\frac{h_a}{h_b} \right)^2,$$

donde en nuestro caso $h_a \sim M/42$, $h_a = M/50$, y $h_b \sim M/36$. Un punto importante debe ser aclarado en este punto de la discusión acerca de como es calculada la norma L_2 de la constricción hamiltoniana. Usando carpet impusimos ocho cajas o zonas de diferente resolución en una misma simulación. Sin embargo, al calcular la norma L_2 este código interpola o extrapola todos los puntos a una misma resolución. Por ejemplo, cuando calculamos la norma L_2 para una máxima resolución de $h = M/50$ todos los resultados son interpolados/extrapolados a una resolución de $h \sim M/8$.

En la figura 6.3, mostramos la convergencia de la parte real del modo dominante A_{20} en la expansión (5.40) del escalar de Weyl ψ_4 , extraído en $R_{ext} = 40M$. Para esto, consideramos el valor absoluto de la diferencia entre $M/35 - M/40$ y $M/40 - M/50$ y reescalamos esta última diferencia por el factor 1.181 para demostrar segundo orden de convergencia; usamos un interpolador de segundo orden para hacer coincidir los tres coeficientes sobre la malla más fina. El factor de reescalamiento es obtenido a partir de la relación [3]

$$u_{\Delta_1} - u_{\Delta_2} \approx (u_{\Delta_2} - u_{\Delta_3}) \left[\frac{\Delta_1^n - \Delta_2^n}{\Delta_2^n - \Delta_3^n} \right], \quad (6.18)$$

donde Δ_a es la resolución a la cual la solución u_{Δ_a} es calculada y n es el orden de precisión esperado, en este caso $n = 2$.

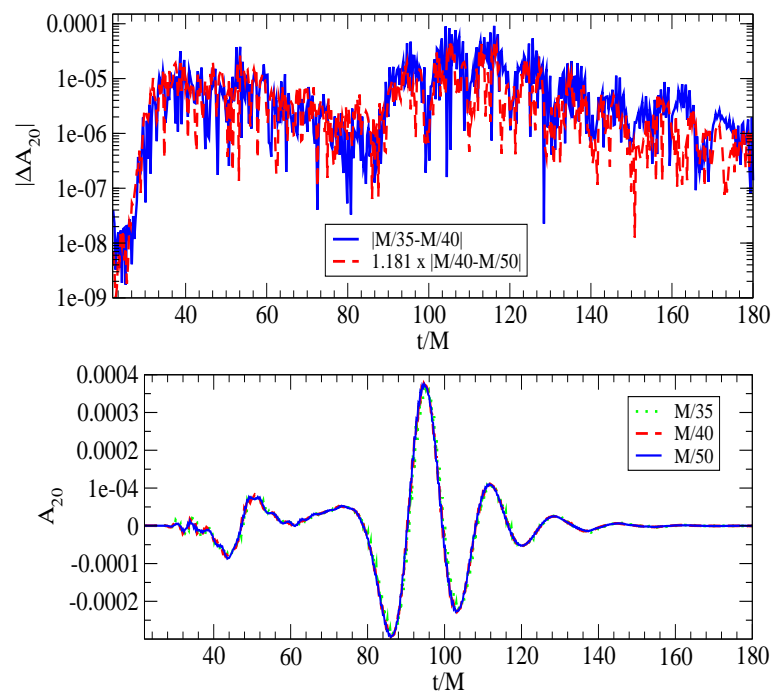


FIGURA 6.3: Convergencia de la parte real del coeficiente A_{20} para la configuración de datos iniciales MI_{+0} . La figura superior, en escala semilogarítmica, corresponde al valor absoluto de las diferencias $M/35 - M/40$ (línea azul/continua) y $M/40 - M/50$. Nótese que hemos escalado esta última diferencia por un factor de 1.181 para demostrar convergencia de segundo orden. La figura inferior muestra la parte real del coeficiente A_{20} para estas tres resoluciones.

6.3. Energía y momentos Radiados

En esta sección calculamos la energía y los momento lineal angular radiados durante la colisión frontal de dos agujeros negros (ver tabla 6.1) usando las expresiones correspondientes en términos de la descomposición del escalar de Weyl Ψ_4 en armónicos esféricos con peso de espín y las perturbaciones invariantes de norma, presentadas en el capítulo anterior. Adicionalmente, para demostrar que estas expresiones son completamente equivalentes calculamos la energía y momentos radiados a partir de la expresión (5.100). Los resultados obtenidos son presentados en la tabla 6.2.

La figura 6.4 corresponde a la energía radiada después de la colisión de dos agujeros negros inicial-

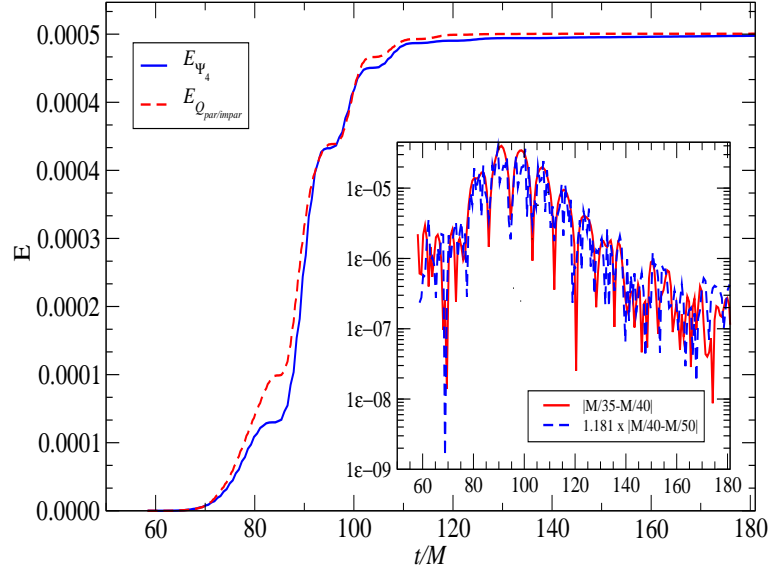


FIGURA 6.4: Energía radiada en la colisión frontal de dos agujeros negros sin espín. La energía es calculada usando la teoría de perturbaciones o a través el escalar de Weyl Ψ_4 . La gráfica interior de la derecha corresponde a la diferencia del valor absoluto entre la parte real de los coeficientes A_{20} para una resolución de $h = M/35$ y una resolución de $h = M/40$ (línea sólida) y la diferencia entre el valor absoluto de la parte real de los coeficientes A_{20} para las resoluciones de $h = M/40$ y $h = M/50$ (línea punteada). Esta última diferencia es escalada por un factor de 1.181 para demostrar segundo orden de convergencia. Todos los coeficientes A_{20} fueron calculados a una distancia coordenada de $r = 40M$.

mente en reposo sobre el eje z (MI_{00}). Para eliminar la radiación espuria de Bowen-York integramos la expresión (5.43) a partir de un tiempo inicial de $t_0 = 58.7$. Nótese que la energía calculada a través del escalar de Weyl Ψ_4 (línea azul/continua) y la energía calculada a través de los invariantes de norma $Q_{par/impar}$ (línea roja/discontinua) son aproximadamente iguales. Encontramos que el sistema radia aproximadamente 0.05 % de su masa en forma de ondas gravitacionales. Estos resultados son consistentes con los resultados presentados en [13, 46].

En la figura 6.5 presentamos la energía radiada para la configuración inicial NI_{++} que corresponde a dos agujeros negros sobre el eje z con espín y una relación de masas de $q = 0.638$. En los paneles superiores presentamos la energía radiada obtenida de tres formas diferentes. La línea continua/azul corresponde a la energía calculada en términos del escalar de Weyl Ψ_4 (expresión (5.43)), la línea punteada/roja correspon-

	$E_{Q_{par/impar}} \times 10^{-4}$	$E_{\psi_4} \times 10^{-4}$	$P_z(\Psi_4)$	$P_z(Q_{par/impar})$	$v_z(km/s)$	$T_{fusión}$
MI ₀₀	5.25	5.23	0.000	0.000	0.00	35.968
NI ₀₀	4.136	4.19	1.073×10^{-5}	1.103×10^{-5}	3.21	36.023
MI ₊₀	5.242	5.173	6.993×10^{-7}	7.1227×10^{-7}	0.21	36.352
MI ₊₊	5.70	5.49	0.00	0.00	0.000	36.352
MI ₊₋	6.07	6.04	0.00	0.00	0.00	36.352
MI ₋₊	6.03	6.04	0.00	0.00	0.00	36.352
NI ₋₊	5.23	5.13	8.944×10^{-6}	9.032×10^{-6}	2.66	39.322

TABLA 6.2: Energía y momento lineal radiado en la colisión de agujeros negros correspondientes a los datos iniciales de la tabla 6.1. Por la simetría del problema no se radia momento angular. La energía y los momentos angulares fueron calculados usando las expresiones presentadas en el capítulo 5. Nótese que el tiempo de fusión, que corresponde al tiempo en el que aparece un horizonte en común, de los agujeros negros con espín $T_{fusión}$ no parece cambiar significativamente con respecto al tiempo de fusión de los agujeros negros sin espín.

de a la energía calculada en términos de los invariantes de norma $Q_{par/impar}$ y finalmente, la línea discontinua/verde corresponde a la energía calculada en términos del escalar Ψ_4 el cual a su vez es calculado en términos de los invariantes de norma usando la expresión (5.100); Nótese que, siguiendo a [46], para no considerar la radiación de Bowen-York todas nuestras expresiones son integradas a partir de $t_0 = 62.21$. Por otro lado, en los paneles inferiores presentamos el valor absoluto de la diferencia entre la energía calculada en términos de Ψ_4 y los invariantes de norma (línea continua/azul) y la energía en términos de Ψ_4 y $\Psi_4[Q_{par/impar}]$. Nótese que cuando no consideramos las ondas gravitacionales incluidas por los datos iniciales de Bowen-York, la diferencia entre la energía calculada de estas tres formas tiende a cero, es decir, la energía calculada de estas tres formas es básicamente la misma. Por completez, en el panel superior de la derecha presentamos la superposición de la parte real del coeficiente A_{20} calculado numéricamente y en términos de los invariantes de norma. Como era de esperar, de acuerdo con los resultados presentados en el panel inferior, estos dos coeficientes son equivalentes.

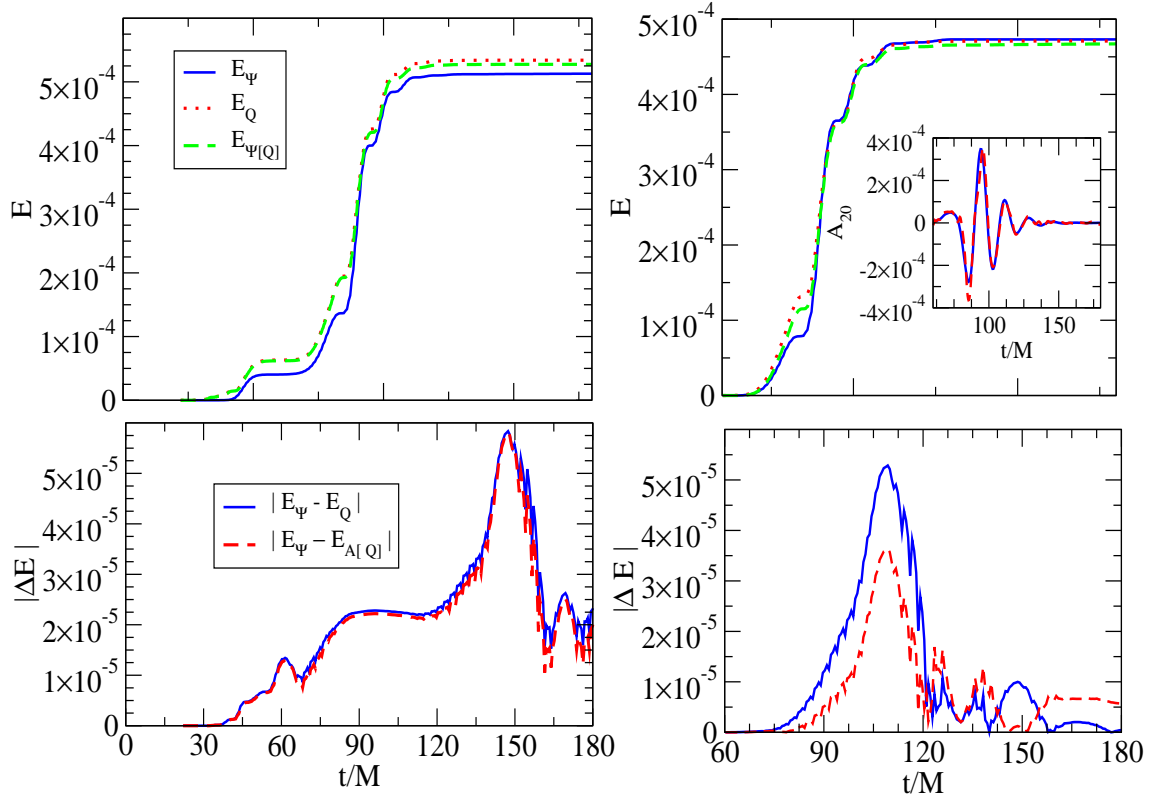


FIGURA 6.5: Energía radiada en la colisión frontal de dos agujeros negros para la configuración de datos iniciales NI_{++} . La energía es calculada usando las expresiones (5.43) y (5.101). Adicionalmente, para mostrar que estas expresiones son equivalentes, usamos la ecuación (5.100) para calcular el escalar de Weyl Ψ_4 y, una vez más, la expresión (5.43) para calcular la energía radiada por el sistema. Los paneles superiores corresponden a la energía considerando la radiación espuria (izquierda) y sin considerarla (derecha). Los paneles inferiores corresponden al valor absoluto de la diferencia entre la energía calculada en términos de ψ_4 y la energía en términos de los invariantes de norma (línea continua/azul) y el valor absoluto de la diferencia entre energía calculada en términos de ψ_4 y la energía calculada en términos del escalar Ψ_4 calculado en términos de los invariantes de norma (línea punteada/roja). Nótese que en la figura de la derecha consideramos la radiación espuria y en la izquierda la despreciamos. Por completez, en el panel superior derecho superponemos la parte real del coeficiente A_{20} calculado numéricamente y la parte real del coeficiente A_{20} calculado en términos de los invariantes de norma.

6.3.1. Momento lineal radiado

La colisión frontal de dos agujeros negros con una relación de masas $q \neq 1.0$ han sido estudiadas en [12, 13, 46]. Andrade y Price estudiaron este problema en [12] usando la aproximación de límite cercano, la cual usa datos iniciales que representan agujeros negros cercanos con un horizonte común; el espacio-tiempo fuera del horizonte se puede interpretar como un espacio-tiempo con una sola puntura. Ellos predicen que la velocidad máxima con la que se desplaza el agujero negro es del orden de $\sim 10 \text{ km/s}$. Por otro lado, Anninos y Brandt presentaron en [13] el primer estudio numérico completamente no lineal de la colisión frontal de dos agujeros negros con una relación de masas de $q \in \{1.0, 0.75, 0.50, 0.25\}$. Ellos encontraron que la velocidad máxima con la que se mueve el agujero negro resultante es del orden de $\sim 20 \text{ km/s}$. Recientemente, el grupo de Goddard presento un estudio sistemático de la colisión de agujeros negros de frente con y sin espín en [46] usando la técnica del movimiento de punturas. Ellos encontraron que para una configuración de datos iniciales con $q = 1.5$, sin espín y una masa ADM de 1.24 la velocidad final del agujero negro es aproximadamente 2.71 km/s .

En la figura 6.6 presentamos la componente P^z correspondiente a la configuraciones de datos iniciales MI_{+0} y NI_{00} usando los invariantes de norma $Q_{par/impar}$ (línea roja/discontinua) y la descomposición del escalar de Weyl Ψ_4 en términos de los armónicos esféricos con peso de espín (línea azul/continua). Nótese que las componentes y y x se anulan por simetría.

Para calcular la velocidad con la que se mueve el agujero negro resultante de la colisión usamos primero la expresión

$$\frac{dP_z}{dt} = \frac{d_{3,0} r^2}{16\pi} \int_{-\infty}^t dt' A^{2,0} \int_{t_0}^t dt' \bar{A}^{3,0} \Big|_{R_{\text{ext}}=40 M}, \quad (6.19)$$

para encontrar el momento lineal radiado P^z y luego dividimos este momento entre la masa total de dicho agujero, la cual puede ser calculada a partir de la diferencia entre la masa inicial ADM y la energía radiada por el sistema. Con esto, obtenemos que la velocidad del agujero negro resultante es de $v_z = 0.21 \text{ km/s}$ para la configuración MI_{+0} y de $v_z = 3.21 \text{ km/s}$ para la configuración NI_{00} . Nótese que estos resultados son compatibles con los resultados presentados en [13, 46]. Estos resultados hacen que el escenario de la colisión frontal de agujero negros sea poco interés en estudios astrofísicos cuando se comparan por ejemplo con la velocidad esperada del agujero negro sin espín proveniente de una colisión en órbita, la cual es aproximadamente de 200 km/s .

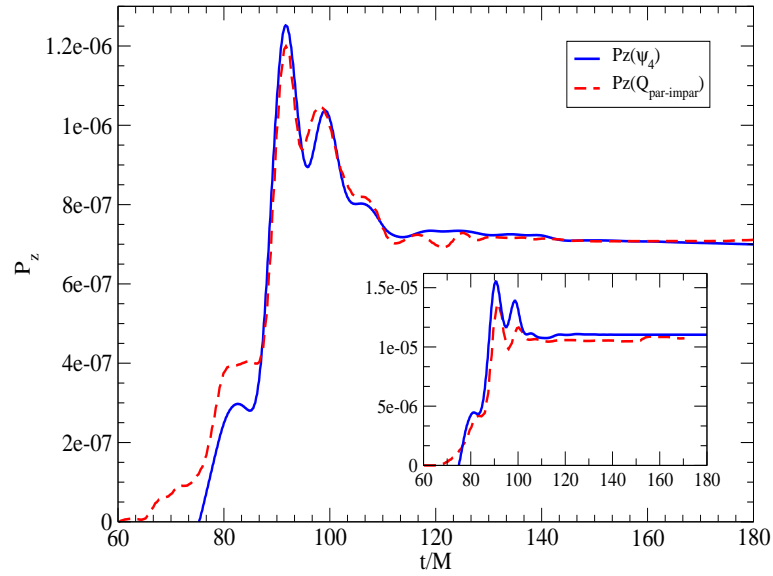


FIGURA 6.6: Momento lineal en la dirección z radiado en la colisión frontal de dos agujeros negros (configuración MI_{+0}) a un radio de extracción de $R = 40M$. Por la simetría del problema las demás componentes se anulan. El momento lineal es calculado usando la teoría de perturbaciones (línea roja/discontinua) o usando el escalar de Weyl Ψ_4 (línea azul/continua). Nótese que la velocidad con la que se mueve el agujero negro resultante es $\vec{v} = 0.21 \text{ km/s } \hat{e}_z$. La figura interior de la derecha corresponde al momento lineal radiado en la configuración NI_{00} usando el escalar Ψ_4 (línea azul/continua) y teoría de perturbaciones (línea roja/discontinua). Encontramos que la velocidad con la que se desplaza el agujero negro final es $\vec{v} = 3.21 \text{ km/s } \hat{e}_z$. Estos resultados son consistentes con los resultados presentados en [46].

6.4. **Discusión**

Después del auge que tuvo la relatividad numérica recientemente con los trabajos de Pretorius y los grupos de Brownsville y Goddard, se intensificó el estudio de la colisión de agujeros negros con su respectivo patrón de ondas gravitacionales en todos los escenarios posibles, por ejemplo, agujeros negros en órbita con y sin espín, con diferentes relaciones de masa, etc. En el capítulo 5 rederivamos las expresiones para calcular la energía, momentos lineal y momento angular usando una descomposición del escalar de Weyl Ψ_4 en términos de armónicos esféricos con peso de espín. Relacionamos estas expresiones con las expresiones tradicional usadas en relatividad numérica en términos de los invariantes de norma. En este capítulo demostramos numéricamente, usando seis configuraciones de datos iniciales, que las expresiones, por lo menos las de energía y momento lineal radiado, en términos de Ψ_4 y en términos de los invariantes de norma, son completamente equivalentes. Estos resultados son consistentes con los resultados presentados en [13, 46].

En la tabla 6.2 presentamos los resultados obtenidos para nuestras siete configuraciones de datos iniciales. Nótese que la masa radiada por el sistema en forma de ondas gravitacionales no cambia significativamente por la presencia del espín. De manera similar el tiempo de colisión es aproximadamente el mismo para todas las configuraciones. Antes de terminar esta sección es importante mencionar un punto importante. Aunque la motivación original para estudiar la evolución numérica de la colisión frontal de dos agujeros negros era estudiar cual era el efecto del espín en el tiempo de la fusión de este sistema binario y cual era la dirección y magnitud final del espín del agujero resultante, los datos iniciales que usamos no nos permiten concluir nada a este respecto. Claramente esto se debe a la magnitud del espín que consideramos. Sin embargo, cuando incrementamos la magnitud del espín al rededor de $a/m \sim 0.82$ no pudimos demostrar convergencia en nuestros resultados numéricos a ningún orden. Los errores numéricos involucrados en este tipo de evoluciones son mayores que los resultados esperados.

CONCLUSIONES

En esta tesis hemos presentado un estudio cuidadoso de tres importantes aspectos en relatividad numérica: códigos para la evolución de espacio-tiempos adaptados a una simetría dada, condiciones de frontera compatibles con las constricciones y la radiación gravitacional proveniente de la colisión de un sistema binario de agujeros negros.

En el capítulo 3 describimos una nueva técnica de regularización de códigos para la evolución de espacio-tiempos esférica y axialmente simétricos. La principal motivación para implementar un código adaptado a una simetría de un problema dado es que podemos reducir la cantidad de recursos computacionales, esto nos permite estudiar con bastante detalle problemas tales como fenómenos críticos en el colapso gravitacional [47], colisión frontal de agujeros negros, etc. Por supuesto, podemos también argumentar que con las nuevas técnicas de refinamientos adaptativos [34, 17] o códigos de refinamiento como Carpet, podemos también reducir la cantidad de recursos computacionales. Sin embargo, una de las razones por las cuales insistimos en usar códigos adaptados es el de intentar responder a la pregunta de como implementar un código en simetría axial estable. Por supuesto, si implementáramos estas técnicas en los códigos adaptados podríamos reducir considerablemente las necesidades computacionales con respecto a un código tridimensional. En ese capítulo, mostramos analítica y numéricamente que nuestro procedimiento de regularización es independiente de la estructura hiperbólica del sistema de ecuaciones usado. Para esto, implementamos este algoritmo de regularización para el sistema de ecuaciones de evolución ADM en simetría axial y el sistema NOR para espacio-tiempos esférica y axialmente simétricos y evolucionamos dos clase de datos iniciales.¹ A modo de prueba, evolucionamos un espacio-tiempo de

¹Elegimos trabajar con el sistema de ecuaciones tipo NOR en lugar el sistema de ecuaciones BSSN por que es

Minkowski en ambas simetrías con una perturbación gaussiana inicial en la función de lapso. Esto nos asegura que la dinámica no sea trivial. Encontramos que la perturbación se propaga a lo largo del dominio computacional, en particular alrededor del origen $r = 0$ y del eje de simetría $\rho = 0$, y las componentes de la métrica, curvatura extrínseca y las demás variables dinámicas permanecen regulares durante toda la evolución numérica. Por otro lado, evolucionamos el espacio-tiempo de ondas de Brill que corresponde a una solución de ondas gravitacionales no lineal. Para asegurar que nuestras evoluciones se encuentran dentro del régimen no lineal, aunque sin colapsar a un agujero negro, consideramos una amplitud aproximada de $a \approx 3$. Nuestros resultados muestran que, como era de esperar, las ondas de Brill se dispersan completamente y las variables permanecen regulares durante la evolución. Un punto importante debe ser mencionado aquí. Aunque mostramos convergencia de nuestro código numérico para los experimentos que presentamos, encontramos que para campos gravitacionales intensos, por ejemplo espacio-tiempo de ondas de Brill con una amplitud $a \sim 5$, el código numérico se hace rápidamente inestable. Claramente estas inestabilidades no son generadas por los términos tipo $\sim 1/\rho$, puesto que estas inestabilidades tendrían que aparecer en los experimentos que presentamos en el capítulo 3. Creemos que estas inestabilidades son inherentes al sistema de ecuación tipo NOR que usamos para las evoluciones axiales; este tipo de ecuaciones es muy similar al sistema de ecuaciones Bona-Masso y Alcubierre y colaboradores encontraron que este último sistema de ecuaciones presenta cierto tipo de inestabilidades en coordenadas cartesianas para campos gravitacionales intensos.

Por otro lado, en el capítulo 4 presentamos varias familias de condiciones de frontera compatibles con las constricciones para las ecuaciones de Einstein en la norma armónica. La motivación para estudiar este problema es simple. Las condiciones de frontera que se usan en la mayor parte de las simulaciones numéricas no son compatibles con las constricciones. Esto causa que modos de propagación que violan las constricciones se propaguen desde la frontera y hacia el interior del dominio computacional. Miller, Gressman y Suen mostraron en [88] que las condiciones de frontera artificiales en la evolución binaria de estrellas de neutrones puede afectar dramáticamente la dinámica en regiones cercanas a las estrellas. Como imponer condiciones de frontera no es trivial, usamos condiciones de frontera razonablemente buenas, por ejemplo condiciones radiativas, lo suficientemente lejos para que no afectan la dinámica en las regiones de interés; en las simulaciones que presentamos en el capítulo 6 estudiamos la colisión frontal de agujeros negros separados una distancia coordenada aproximada de $L = 12M$ y la frontera exterior lo colocamos

más simple de implementar numéricamente; la formulación NOR no hace ninguna descomposición conforme de la métrica ni de la curvatura extrínseca.

a una distancia de $380M$.

Para especificar un conjunto de condiciones de frontera uno debe tener en cuenta que estas condiciones deben ser compatibles con las constricciones, es decir, estas condiciones deben garantizar que los datos iniciales que satisfacen las constricciones deben implicar soluciones que satisfagan las constricciones y además que sean estables. No es útil imponer condiciones de frontera a un conjunto de ecuaciones de evolución que se haga inestable por culpa de las fronteras. Teniendo en cuenta esto, elegimos trabajar en la norma armónica porque las ecuaciones de Einstein se pueden reescribir como un conjunto de diez ecuaciones de evolución tipo onda para las diez componentes métricas. Con esto, heredamos automáticamente toda la estructura matemática de este tipo de ecuaciones; se debe tener cuidado cuando se intenta aplicar los resultados obtenidos al resolver la ecuación de onda ya que las diez componentes métricas no representan grados de libertad físicos. Esto nos permitió imponer varias familias de condiciones de frontera que divididos, por simplicidad, en condiciones de primer, segundo y orden mayor; el orden se refiere al grado de las derivadas de la métrica. Mostramos analíticamente, usando una propuesta de Kreiss y Winicour [80], y numéricamente que el problema de valores iniciales asociado con las ecuaciones de Einstein en esta norma y con las condiciones de frontera propuestas está bien planteado. Lo interesante de este tipo de condiciones de frontera, como se mostró en [106], es que no es necesario imponerlas mas allá de la zona de extracción de ondas gravitacionales

Finalmente, en los capítulos 5 y 6 estudiamos la radiación gravitacional proveniente de la colisión frontal de agujeros negros. Las ondas gravitacionales han tomado recientemente mucha importancia, no solo por que se espera que se conviertan en una nueva ventana astronómica, sino porque además la relatividad numérica por fin, después de cuarenta años de investigación, puede estudiar con todo detalle los patrones de ondas gravitacionales provenientes de la colisión de objetos compactos en una gran cantidad de escenarios con relevancia astrofísica. Por otro lado, ya que los observatorios de ondas gravitacionales (LIGO, VIRGO, GEO 600) están en proceso de calibración o están reuniendo datos, es indispensable conocer teóricamente los posibles patrones de ondas gravitacionales que se esperan observar y cuales es su posible fuente [1].

En el capítulo 5 obtuvimos las expresiones generales para calcular la energía, el momento lineal y angular transportado por las ondas gravitacionales. Para encontrar estas expresiones usamos dos métodos; el primer método usa una descomposición del escalar de Weyl Ψ_4 en términos de los armónicos tensoriales con peso de espín. Esto nos permite expresar la energía y los momentos radiados en términos de los coeficientes A_{lm} que se calculan directamente en la evolución numérica. Por otro lado, podemos también calcular estos observables físicos en términos de perturbaciones invariantes de un espacio-tiempo

de Schwarzschild; este último fue el método que tradicionalmente se usó dentro de la comunidad de relatividad numérica. Sin embargo, tiene un inconveniente. Para calcular la energía y momentos radiados, necesitamos identificar la métrica de Schwarzschild y la perturbación $h_{\mu\nu}$. Esta es la razón por la cual hoy en día usamos la extracción de ondas gravitacionales en términos del escalar de Weyl Ψ_4 . Nótese, sin embargo, que este método tiene una gran desventaja. Para definir los escalares de Weyl necesitamos definir la tetraada nula (5.37), lo cual no es un problema trivial. Para detalles ver por ejemplo [82]. Por otro lado, en el capítulo 6 presentamos un breve estudio sobre la colisión frontal de agujeros negros con y sin espín, usando la técnica de punturas móviles, para demostrar numéricamente que las expresiones calculadas con estos dos métodos son equivalentes. Por simplicidad, solo consideramos datos iniciales correspondientes a dos agujeros negros inicialmente sobre el eje z . Esto automáticamente hace que todas las componentes del momento angular \vec{J} se anulen por simetría. Un punto importante, que no se tuvo en cuenta inicialmente, es que todas las suposiciones que se hacen para encontrar los datos iniciales conducen a una solución con una cantidad no deseada de radiación gravitacional. Este contenido de ondas gravitacionales en el problema de la colisión frontal de agujeros negros es comparable con la radiación emanada por el sistema físico considerado.

HIPERBOLICIDAD DE LAS ECUACIONES DE EVOLUCIÓN

En el capítulo 2 introdujimos varias formulaciones alternativas a las ecuaciones de evolución ADM. La introducción de estas nuevas formulaciones es necesaria pues se ha mostrado teórica y empíricamente que el problema de valores iniciales asociado con las ecuaciones ADM, usando por ejemplo las usuales ecuaciones de evolución para el lapso (tipo Bona-Masso) y la ecuación de evolución *Gamma Driver* para el vector de corrimiento, esta mal planteado. En el capítulo 4 ya hemos discutido el problema de valores iniciales asociado con las ecuaciones de Einstein escritas en la norma armónica con condiciones de frontera usando operadores pseudodiferenciales. En este apéndice, por otro lado, discutimos el problema de valores iniciales asociado con las ecuaciones de evolución usado en el capítulo 3 usando las llamadas funciones propias. Una discusión detallada sobre esto puede ser encontrada en [3, 102].

La idea principal de garantizar que el problema de valores iniciales asociado con un sistema de ecuaciones dado este bien planteado es que con esto podemos demostrar que, como veremos más adelante, pequeñas perturbaciones en los datos iniciales implicaran pequeñas perturbaciones en la solución final. Asegurar esto cuando se buscan soluciones numéricas es indispensable puesto que siempre tenemos errores de redondeo que se introducen en todo código numérico. Intuitivamente decimos que el problema de valores iniciales asociado con un sistema de ecuaciones esta bien planteado si existe una solución única del sistema que depende continuamente de los datos iniciales. Formalmente hablando, siguiendo a Reula [102], un sistema de ecuaciones diferenciales esta bien planteado si existe una norma $\|\cdot\|$ y dos constantes α y k tal que para cualquier conjunto de datos iniciales suaves y cualquier $t > 0$ podemos

hacer la siguiente estimación:

$$\|u(t, \cdot)\| \leq k e^{\alpha t}, \|u(0, \cdot)\|. \quad (\text{A.1})$$

Como consecuencia de esto tenemos que: como la norma de la solución puede ser acotada con la misma constante para todos los datos iniciales, automáticamente garantizamos que pequeñas perturbaciones en los datos iniciales se traducen en pequeñas perturbaciones en la solución final.

A.1. Hiperbolicidad

Para definir el concepto de hiperbolicidad, comencemos considerando un sistema de N ecuaciones de la forma¹

$$\partial_t u_a + \partial_j F_a^j = q_a \quad a \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{A.2})$$

donde F_a^j y q_a son funciones de u y no de sus derivadas. Este sistema se puede reescribir como

$$\partial_t u_a + M_{ab}^j \partial_j u^b = q_a \quad a, b \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{A.3})$$

donde hemos definido $M_{ab}^j \equiv \partial F_a^j / \partial u^b$ y, por simplicidad, suponemos que M_{ab}^j es una matriz de coeficientes constantes. Siguiendo a [103], consideremos el símbolo principal de M_{ab}^j que es definido como

$$P_{ab}(n_j) \equiv M_{ab}^j n_j,$$

donde n_j es un vector unitario arbitrario. Con esto, podemos ahora dar la siguiente definición:

Definición A.1.1 *El sistema (A.3) es fuertemente hiperbólico si el símbolo P_{ab} tiene únicamente valores propios reales y es diagonalizable.*

Para sistemas fuertemente hiperbólicos, siempre es posible construir una matriz hermitiana $H = H(n_i)$ tal que la matriz HP es simétrica, es decir,

$$HP - P^T H = 0, \quad (\text{A.4})$$

donde P^T es la matriz transpuesta de P . Esta es la razón por la cual la matriz H recibe el nombre de, como ya mencionamos en el capítulo 4, simetrizador. Adicionalmente, diremos que el sistema de ecuaciones (A.3) es simétricamente hiperbólico si el simetrizador H resulta ser independiente del vector unitario

¹La mayor parte de las ecuaciones de evolución en la relatividad general siempre se pueden reescribir de esta manera.

n_i . La definición A.1.1 puede ser generalizada a sistemas cuasi-lineales para los cuales la matriz M^j_{ab} depende de u^a . Para este tipo de sistemas es necesario exigir que el simetrizador H , el cual puede depender ahora de u^a y del vector n^i , sea suave (para detalles ver [124]). Sin embargo, para la discusión presentada aquí es suficiente con suponer que la matriz M^j_{ab} es constante.

La importancia de la existencia del simetrizador esta relacionada con el hecho de que con H podemos definir una norma para la solución, usualmente llamada *la energía* del sistema.² Esta norma es definida como

$$E(t) \equiv \|u\|^2 = \int u^\dagger H u dV, \quad (\text{A.5})$$

donde u^\dagger es el adjunto de u y $dV = dx^1 \cdots dx^j$. Esta norma se puede emplear, cuando el sistema es simétricamente hiperbólico y las condiciones son maximalmente disipativas (ver apéndice C), para mostrar que el sistema de valores iniciales acotado esta bien planteado [81, 3].

Otra propiedad importante de los sistemas hiperbólicos es que son causales. Para entender esto, consideremos el sistema de ecuaciones (A.3) con $q_a = 0$ y, por simplicidad, supongamos que estamos en una sola dimensión ejemplo x . Si \mathbb{R} es la matriz construida a partir de los vectores propios \vec{e}_i de M^x_{ab} , podemos ahora definir

$$\mathbf{u} \equiv \mathbb{R} \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbb{R}^{-1} \mathbf{u}. \quad (\text{A.6})$$

Nótese que por construcción siempre es posible invertir \mathbb{R} , ya que los sistemas fuertemente hiperbólicos tienen un conjunto de completo de vectores propios independientes. Las funciones \mathbf{w} son conocidas como *funciones propias*. Por otro lado, ya que la matriz \mathbb{R} se construye a partir de los vectores propios de M^x_{ab} , bajo una transformación de semejanza podemos reescribir M^x_{ab} en su forma diagonal de acuerdo con

$$\mathbb{R}^{-1} M \mathbb{R} = \Lambda, \quad (\text{A.7})$$

donde la matriz Λ es diagonal y cada uno de sus elementos es un valor propio de M . Usando (A.3) es fácil mostrar que la ecuación de evolución para las funciones propias \mathbf{w} es

$$\partial_t \mathbf{w} + \Lambda \partial_x \mathbf{w} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Así, hemos transformado el sistema de ecuaciones diferenciales (A.3) en un sistema desacoplado de N ecuaciones de advección con velocidad de propagación λ_a ; cada una de estas velocidades corresponde a

²Para cierto tipo de ecuaciones, como la ecuación de onda, esta norma coincide con la energía física.

una velocidad de propagación de cada uno de los modos característicos del sistema. Por lo tanto, en sistemas fuertemente hiperbólicos no existen modos que se propaguen a velocidades instantáneas. En otras palabras, el dominio de dependencia del sistema para cualquier conjunto de datos iniciales es acotado. Una detallada discusión acerca del dominio de dependencia para sistemas lineales y cuasi-lineales es presentada por Reula en [103]. Nótese que hasta este punto de la discusión, hemos considerado solo el caso lineal. Para casos no lineales, en general, no podemos definir un conjunto de funciones que simplemente se propaguen a lo largo de las líneas características del sistema. Aunque, en analogía con lo hecho en el capítulo 4, podemos usar perturbaciones de un estado base. En este caso, encontramos que las perturbaciones se propagan a lo largo de líneas características [3]. Afortunadamente, en relatividad general podemos usar el concepto de funciones propias ya que la no linealidad de estas ecuaciones aparece en los términos fuente.

Con esta breve introducción a sistemas hiperbólicos, estamos ahora en condiciones de discutir las propiedades matemáticas de los sistemas de ecuaciones presentados en el capítulo 2. Sin embargo, por simplicidad nos limitaremos a discutir a continuación solamente las propiedades de los sistemas ADM y NOR.

A.2. Hiperbolicidad de ADM

Como ya hemos mencionado antes, existen por lo menos dos formas para estudiar las propiedades de hiperbolicidad de un sistema de ecuaciones. Con la técnica de operadores pseudodiferenciales podemos analizar directamente el sistema de ecuaciones de evolución, que son ecuaciones diferenciales de segundo orden (ver capítulo 4). Por otro lado, la técnica de las funciones propias, que usaremos a continuación, solo se puede aplicar a sistemas de ecuaciones de primer orden.

Comencemos reexpresando las ecuaciones de evolución ADM, ecuaciones de evolución (2.10) y (2.13), como ecuaciones de primer orden. Para esto, siguiendo a [28], definimos las variables auxiliares

$$D_{ijk} \equiv \frac{1}{2} \partial_i \gamma_{jk}, \quad F_i \equiv \partial_i \ln \alpha. \quad (\text{A.9})$$

Las ecuaciones de evolución para estas variables pueden ser obtenidas directamente de (2.10) y (2.23). Para el análisis que sigue es suficiente con considerar tan solo la parte principal de las ecuaciones de evolución. Teniendo en cuenta esto, las ecuaciones de evolución para las variables D_{ijk} y F_i toman la

forma

$$\partial_0 D_{ijk} \simeq -\alpha \partial_i K_{jk} , \quad (\text{A.10})$$

$$\partial_0 F_i \simeq -\alpha f \partial_i K , \quad (\text{A.11})$$

donde hemos definido $\partial_0 \equiv \partial_t - \beta^i \partial_i$, y donde, a partir de este momento, el símbolo \simeq indica igualdad solamente con la parte principal. Por otro lado, para encontrar la parte principal de la ecuación de evolución de la curvatura extrínseca necesitamos encontrar la parte principal del tensor de Ricci. Es fácil demostrar que la parte principal de este tensor esta dada por:

$$\begin{aligned} R_{ij} &\simeq -\frac{1}{2} \gamma^{lm} \partial_l \partial_m \gamma_{ij} + \gamma_{k(i} \partial_{j)} \Gamma^k \\ &= \partial_l D^l{}_{ij} + 2 \partial_{(j} D^l{}_{i)l} - \partial_{(j} D_{i)l}{}^l . \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto, la ecuación de evolución para la curvatura extrínseca (2.57) puede ser reescrita como

$$\partial_0 K_{ij} \simeq -\alpha \partial_k \Lambda_{ij}^k , \quad (\text{A.13})$$

donde hemos definido a Λ_{ij}^k como

$$\Lambda_{ij}^k \equiv D^k{}_{ij} + \delta_{(i}^k [F_{j)} + D_{j)l}{}^l - 2 D^l{}_{j)l}] . \quad (\text{A.14})$$

Así, considerando solo la parte principal, las ecuaciones ADM se reducen al sistema de ecuaciones

$$\partial_0 D_{ijk} \simeq -\alpha \partial_i K_{jk} , \quad (\text{A.15})$$

$$\partial_0 F_i \simeq -\alpha f \partial_i K , \quad (\text{A.16})$$

$$\partial_0 K_{ij} \simeq -\alpha \partial_k \Lambda_{ij}^k . \quad (\text{A.17})$$

A pesar de que Λ_{ij}^k no son cantidades independientes, para el análisis que estamos haciendo es necesario tener en cuenta sus ecuaciones de evolución. Usando las anteriores expresiones es directo mostrar que

$$\partial_0 \Lambda_{ij}^k \simeq -\alpha \gamma^{ek} \partial_e K_{ij} - \alpha \delta_{(i}^k [(f+1) \partial_{j)} K - 2 \gamma^{el} \partial_e K_{j)l}] . \quad (\text{A.18})$$

Teniendo en cuenta lo anterior, en tres dimensiones tenemos un conjunto de 27 ecuaciones para estudiar que corresponden a las 18 variables independientes de D_{ijk} , las tres componentes de las variables F_i y las seis componentes independientes para la curvatura extrínseca K_{ij} . La idea es entonces encontrar 27

funciones propias independientes que nos permitirán recobrar las 27 variables originales.³ Por simplicidad comencemos con las ecuaciones (A.15) y (A.16) y consideremos solamente derivadas a lo largo de una dirección arbitraria digamos x . Con esto, podemos reescribir estas ecuaciones como

$$\partial_t F_a - \beta^x \partial_x F_a \simeq 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\partial_t D_{ajk} - \beta^x \partial_x D_{ajk} \simeq 0, \quad (\text{A.20})$$

para $a \neq x$. Nótese que, teniendo en cuenta la ecuación (A.8), las dos variables F_a y las 12 variables D_{ajk} son funciones propias con velocidad propia $-\beta^x$. Antes de continuar con el análisis es necesario tener en cuenta el siguiente hecho [3]. Supongamos que tenemos las funciones (u_1, u_2) satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\partial_t u_1 = a \partial_x u_2, \quad \partial_t u_2 = b \partial_x u_1. \quad (\text{A.21})$$

Este sistema tiene la estructura de una ecuación de onda. Es fácil mostrar que las velocidades de propagación del sistema son $\pm\sqrt{ab}$ y que sus correspondientes función propias son $w_{\pm} = u_1 \mp \sqrt{(a/b)} u_2$.

Para encontrar las siguientes funciones propias consideremos que $a, b \neq x$. Con esto y considerando solamente derivada a lo largo de la dirección x , podemos reescribir las ecuaciones (A.17) y (A.18) como

$$\partial_0 K_{ab} \simeq -\alpha \partial_x \Lambda_{ab}^x, \quad (\text{A.22})$$

$$\partial_0 \Lambda_{ab}^x \simeq -\alpha \gamma^{xx} \partial_x K_{ab}. \quad (\text{A.23})$$

Por lo tanto, de estas dos expresiones obtenemos seis funciones propias más que se propagan con velocidad $-\beta^x \pm \alpha\sqrt{\gamma^{xx}}$.⁴ Estas funciones tienen la forma

$$\sqrt{\gamma^{xx}} K_{ab} \mp \Lambda_{ab}^x. \quad (\text{A.24})$$

Con estas 6 nuevas funciones propias tenemos 20 de las 27 funciones propias que buscamos. Para encontrar las 7 funciones restantes, supongamos ahora que alguno de los índices i o j en la ecuación (A.18) es igual a x . Con esto, podemos reescribir (A.18), a orden principal, como

$$\partial_0 \Lambda_{xb}^x \simeq \alpha \gamma^{xc} \partial_x K_{bc}, \quad (\text{A.25})$$

³Es suficiente considerar que las funciones propias son combinaciones lineales de las cantidades originales $u = (F_i, D_{ijk}, K_{ij})$ de la forma $w_a = C_{ab} u^b$. Por lo tanto, la parte principal evoluciona de acuerdo a $\partial_t w_a + \lambda_a \partial_x w_a \simeq 0$ con velocidad propia λ_a .

⁴Nótese que estas son solamente seis funciones propias puesto que las variables K_{ab} y Λ_{ab}^x son simétricas en los índices a y b .

donde los índices c y b son diferentes de x . Teniendo en cuenta la ecuación de evolución para K_{bc} ,

$$\partial_0 K_{bc} \simeq -\alpha \partial_x \Lambda_{bc}^x, \quad (\text{A.26})$$

nos encontramos con un problema. La variable Λ_{xb}^x evoluciona con la componente K_{bc} mientras que esta componente evoluciona con Λ_{bc}^x . En términos de la matriz característica M , este subsistema se puede reescribir como,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

que claramente no es diagonalizable. Por lo tanto, no podemos encontrar el conjunto de 27 funciones propias para el sistema de ecuaciones ADM. Se puede mostrar que todos los valores propios del sistema son reales, así que el sistema es débilmente hiperbólico [75]. A continuación mostraremos un ejemplo de un sistema fuertemente hiperbólico.

A.3. Hiperbolicidad del sistema de ecuaciones tipo NOR

A continuación demostraremos explícitamente que el sistema de ecuaciones tipo NOR, junto con la ecuación de evolución para el lapso (2.23), corresponde a un sistema de ecuaciones fuertemente hiperbólico para el caso en el que los coeficientes $\eta = 0$ y $\xi = 2$. Por simplicidad, para el siguiente análisis asumiremos que el vector de corrimiento $\beta^i(t, x^j)$ es una función conocida del espacio-tiempo, así que sus derivadas pueden ser consideradas como términos fuentes para el análisis de hiperbolicidad.

La parte principal del tensor de Ricci (2.67) es

$$\begin{aligned} R_{ij} &\simeq -\frac{1}{2} \gamma^{lm} \partial_l \partial_m \gamma_{ij} + \partial_{(i} \Delta_{j)} \\ &= -\partial_m D^m{}_{ij} + \partial_{(i} \Delta_{j)}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Por lo tanto, la ecuación de evolución para la curvatura extrínseca (2.57) puede ser escrita como

$$\partial_0 K_{ij} \simeq -\alpha \partial_k \Lambda_{ij}^k, \quad (\text{A.29})$$

donde, una vez más, hemos definido a Λ_{ij}^k como

$$\Lambda_{ij}^k \equiv D^k{}_{ij} + \delta_{(i}^k [F_{j)} - \Delta_{j)}]. \quad (\text{A.30})$$

Por otro lado, la ecuación de evolución para Δ^i , considerando solo la parte principal, es

$$\partial_0 \Delta_i \simeq -\alpha \left(2 \partial_m K^m{}_i - \partial_i K \right) + 2 \alpha M_i = -\alpha \partial_i K. \quad (\text{A.31})$$

Resumiendo, nuestro sistema de ecuaciones tipo NOR, a orden principal, tiene la forma

$$\partial_0 F_i \simeq -\alpha f \partial_i K , \quad (\text{A.32})$$

$$\partial_0 D_{ijk} \simeq -\alpha \partial_i K_{jk} , \quad (\text{A.33})$$

$$\partial_0 \Delta_i \simeq -\alpha \partial_i K , \quad (\text{A.34})$$

$$\partial_0 K_{ij} \simeq -\alpha \partial_k \Lambda_{ij}^k . \quad (\text{A.35})$$

Como ya mencionamos antes, a pesar de que Λ_{ij}^k nos son cantidades independientes, para el siguiente análisis es necesario tener sus ecuaciones de evolución. Usando (A.32), (A.33) y (A.34), es fácil mostrar que

$$\partial_0 \Lambda_{ij}^k \simeq -\alpha \left[\gamma^{kl} \partial_l K_{ij} + (f-1) \delta_{(i}^k \partial_{j)} K \right] . \quad (\text{A.36})$$

Por lo tanto tenemos un sistema de treinta ecuaciones diferenciales para analizar. Estas ecuaciones corresponden a tres componentes de F_i , 18 componentes independientes de D_{ijk} , seis componentes independientes de K_{ij} y tres componentes independientes de Δ_i . De nuevo la idea es entonces encontrar treinta funciones propias linealmente independientes con sus correspondientes velocidades propias. Para esto, en analogía con el caso anterior, elegimos una dirección específica, por ejemplo x e ignoramos las derivadas a lo largo de las otras direcciones. Teniendo en cuenta esto, podemos escribir las ecuaciones (A.32), (A.33) y (A.34) como

$$\partial_t F_a - \beta^x \partial_x F_a \simeq 0 , \quad (\text{A.37})$$

$$\partial_t D_{ajk} - \beta^x \partial_x D_{ajk} \simeq 0 , \quad (\text{A.38})$$

$$\partial_t \Delta_a - \beta^x \partial_x \Delta_a \simeq 0 , \quad (\text{A.39})$$

donde $a \neq x$. De nuevo, automáticamente hemos encontrado que las 16 cantidades D_{aij} , F_a y Δ_a son funciones propias con velocidad propia $-\beta^x$.⁵ Por otro lado, si tomamos la traza de (A.33) y la restamos de (A.32) obtenemos

$$\partial_t (F_a - f D_a^k{}_k) - \beta^x \partial_x (F_a - f D_a^k{}_k) \simeq 0 , \quad (\text{A.40})$$

que corresponde a una sola función propia extra pues ya hemos considerado F_a . De manera similar, restando la traza de (A.33) con (A.34) obtenemos

$$\partial_t (D_x^m{}_m - \Delta_m) - \beta^x \partial_x (D_x^m{}_m - \Delta_x) \simeq 0 , \quad (\text{A.41})$$

⁵Nótese que como el índice $a \neq x$ las funciones F_a y Δ_a corresponden a cuatro funciones propias. Por otro lado, puesto que la variable D_{aij} es simétrica en los índices i y j tenemos doce funciones propias más.

que corresponde a la función propia $D_x^m - \Delta_x$ con velocidad propia $-\beta^x$. Resumiendo, hemos encontrado 18 de las 30 funciones propias que buscamos. Las restantes funciones propias se obtienen combinando la ecuación de evolución para la curvatura extrínseca (A.35) con (A.18). Por simplicidad asumiremos que $\beta^i = 0$. Si una vez más $a \neq x$, el sistema de ecuaciones se reduce a

$$\partial_t K_{ai} \simeq -\alpha \partial_x \Lambda_{ai}^x, \quad (\text{A.42})$$

$$\partial_t \Lambda_{ai}^x \simeq -\alpha \gamma^{xx} \partial_x K_{ai}. \quad (\text{A.43})$$

De estas últimas expresiones, es claro que tenemos otras diez funciones propias de la forma

$$\sqrt{\gamma^{xx}} K_{ai} \mp \Lambda_{ai}^x, \quad (\text{A.44})$$

con velocidad de propagación $\pm \alpha \sqrt{\gamma^{xx}}$. Finalmente, si consideramos la traza de (A.35) y (A.18), tenemos que

$$\partial_t K \simeq -\alpha \partial_x \Lambda^x, \quad (\text{A.45})$$

$$\partial_t \Lambda^x \simeq -\alpha f \gamma^{xx} \partial_x K, \quad (\text{A.46})$$

donde $\Lambda^x \equiv \gamma^{mn} \Lambda_{mn}^x$. Por lo tanto, las dos últimas funciones propias son

$$\sqrt{f \gamma^{xx}} K \mp \Lambda^x, \quad (\text{A.47})$$

con velocidad de propagación $\pm \alpha \sqrt{f \gamma^{xx}}$. De esta forma vemos que la formulación tipo NOR con $\eta = 0$ y $\xi = 2$ es fuertemente hiperbólica. En general, uno puede mostrar que este sistema de ecuaciones es fuertemente hiperbólico para los siguientes casos:⁶

- $\eta = 0, \xi = 2$ y $f > 0$,
- $\eta = 0, \xi > 0$ y $f > 0$ pero $f \neq 1$,
- $\eta \neq 0, \xi > 0$ y $f > 0$, pero $\eta(2 - \xi) > -1/2$.

Bajo un procedimiento completamente análogo, se puede mostrar que el sistema de ecuaciones BSSN, con una elección adecuada de las ecuaciones de evolución para las variables de norma, es fuertemente hiperbólico [112, 65, 22].

⁶Para una detallada descripción en términos de funciones propias ver [3]. Una detallada discusión en términos de operadores pseudodiferenciales es presentada por Taylor en [128].

ECUACIONES DE EVOLUCIÓN TIPO NOR PARA EL CASO ESFÉRICO

En este apéndice mostramos explícitamente que el sistema de ecuaciones tipo NOR, presentado en la sección 2.4.2 para el caso de simetría esférica, es regular. En el caso de simetría axial, por otro lado, las ecuaciones de evolución también son manifiestamente regulares. Sin embargo, ya que estas ecuaciones son extremadamente largas, consideramos que su regularidad queda clara de los ejemplos numéricos presentados en el capítulo 3. Así que, no escribimos explícitamente estas ecuaciones aquí.

Teniendo en cuenta las expresiones (3.57) y (3.58), las ecuaciones de evolución restantes tipo NOR, para un espacio-tiempo esféricamente simétrico son:

$$\begin{aligned}
 \partial_t K_H = & \frac{\alpha H^3}{2r A^2 T^2} \left(\Delta^r H^2 - F_r H - 2D_H \right) + \frac{\alpha}{2A^2 T^2} \left[\frac{D_H^2}{4} \left(3H^2 - r^2 J(A + 9H) \right) + \frac{Ar^4 D_J^2 T}{4} + \right. \\
 & H^2 J r^2 \left(J + 2K_A K_H - 2r F_r J \right) + \left(A^2 D_H T^2 - r J \left(r^2 H^3 J + r^2 A H J T + A^2 T^2 \right) \right) \Delta^r + \\
 & r D_H J \left(5H^2 + 8r^2 H J + 13r^4 J^2 \right) + r^6 J^3 \left(-2K_A K_H + 3J \left(r F_r - 5 \right) \right) - A^2 F_r^2 T^2 + \\
 & r^2 D_J \left(A F - H^2 J - 5r^5 J^3 \right) + 2H^3 \left(J + 2r F_r J + K_A \left(K_T - r^2 K_J \right) \right) - 4A^2 T^2 \partial_r F_r - \\
 & 2r^4 H J^2 \left(2J \left(r F_r + 7 \right) + K_A \left(K_T - r^2 K_J \right) \right) + \frac{r^4 H D_J}{2} \left(D_J H - 36J^2 r - 5D_J J r^2 \right) + \\
 & \left. \frac{1}{2} D_H D_J r^2 \left(3H^2 - 2H J r^2 + 7J^2 r^4 \right) T^2 + A^3 T^2 \partial_r \Delta^r - A T^2 \partial_r D_H \right], \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_t K_J = & \frac{\alpha H^5}{2r A^2 T^2} \partial_r \left(\frac{\Delta^r}{r} \right) - \frac{\alpha H^4}{2r A^2 T^2} \partial_r \left(\frac{F_r}{r} \right) + \frac{\alpha H^2 D_H}{8r^2 A^2 T^2} (4F_r H - D_H) + \frac{\alpha H^2}{2r A^2 T^2} \times \\
 & \left(-6H D_J + 11J D_H - 2H J F_r + 3J H^2 \Delta^r \right) + D_H^2 \left(-5H J + \frac{3J^2 r^2}{2} \right) + \\
 & D_H \left(H^2 (7D_J - 2J F_r) + 12H J^2 r - 2H J (D_J + J r^2 F_r) + 14J^3 r^3 + J^2 r^4 \times \right. \\
 & \left. (3D_J + 2J F_r) \right) - 4H^3 K_A K_J + H J r^2 \left(-5D_J^2 r^2 + 4J^2 (r F_r - 13) + 4J r \times \right. \\
 & \left. (-6D_J + K_A K_J r) \right) + 4H^2 \left(J K_A (K_H + K_T) - 3J r D_J + J^2 \left(2r^2 F_r^2 - 9 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{D_J^2 r^2}{4} \right) \right) - 2AT^2 \partial_r D_J - J^2 r^4 \left(8J K_A (K_H + K_T) + 12J r D_J - 3D_J^2 r^2 + \right. \\
 & \left. 4J^2 (r F_r (r F_r + 1) + 5) \right) + 2 \left(A^2 D_J T^2 + J^2 r (-2J r^2 + T) (H^2 + AT) \right) \Delta^r + \\
 & 2 \left(2H^2 J^2 r^2 - J^4 r^6 \right) \partial_r F_r + 2J \left(-H^2 (A + H) J r^2 + \right. \\
 & \left. A J^3 r^6 + A H^2 T \right) \partial_r \Delta^r, \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

y finalmente,

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Delta^r = & \frac{\alpha}{A^3 T^2} \left[2H^2 r (6J K_H + A K_J) + 12J^3 r^5 K_H - 10A J^2 r^5 K_J + A F_r T \left(-A K_J r^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. K_H (A + 2J r^2) \right) + 2D_H K_A T^2 + 2D_J K_A r^2 T^2 - A^2 T \partial_r K_H - 2H \left(J^2 (-4K_T r^3 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 4K_J r^5) + AT (F_r K_J r^2 + \partial_r K_H) \right) + A (A + 2J) r^2 T \partial_r K_J \right], \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

donde hemos definido, en analogía con el capítulo 3, las variables $F_r = \partial_r \ln \alpha$, $D_H = \partial_r H/2$ y $D_J = \partial_r J/2$. Nótese que teniendo en cuenta los resultados presentados en la sección 3.1.1, es fácil concluir que todas estas ecuaciones de evolución son regulares en todo punto, específicamente hablando, en el origen $r = 0$.

CONDICIONES DE FRONTERA MAXIMALMENTE DISIPATIVAS

En el capítulo 4 y en el apéndice A mencionamos un tipo especial de condiciones de frontera: las condiciones de frontera maximalmente disipativas. El propósito de este apéndice es mostrar, usando un ejemplo muy sencillo, cual es la característica de este tipo de condiciones de frontera. Una detalla discusión acerca de este tipo de condiciones de frontera puede ser encontrada en [81, 66, 79, 3].

Como ya hemos mencionado antes, uno puede usar la estimación de la energía para mostrar que un sistema de ecuaciones tiene un problema de valores iniciales acotado bien planteado. Sin embargo, si las condiciones de frontera no son maximalmente disipativas o el sistema no es simétricamente hiperbólico esta técnica no se puede aplicar. Veamos porqué ocurre esto. Para comenzar, siguiendo a [3], consideremos una forma simplificada del sistema de ecuaciones (4.53),

$$\partial_t u + M^i \partial_i u = 0, \tag{C.1}$$

donde M^i son matrices de coeficientes constantes. Adicionalmente asumiremos que el sistema de ecuaciones es simétricamente hiperbólico. Esto implica, como mencionamos en el apéndice A, que podemos construir un simetrizador H . Una vez construido H podemos definir una norma para las soluciones del sistema (C.1)

$$E(t) \equiv \|u\|^2 = \int_{\Sigma} u^\dagger H u dV. \tag{C.2}$$

Ahora veamos cual es la variación en el tiempo de esta norma. Para esto, tomando una derivada temporal encontramos, después de usar la ecuación de evolución (C.1) y que la matriz $H M^i$ es simétrica ya que H

es independiente del vector unitario n^i , que

$$\partial_t E = - \int_{\Sigma} \partial_i \left(u^\dagger H M^i u \right) dV. \quad (\text{C.3})$$

Nótese que un punto importante para llegar a la anterior expresión es que el sistema sea simétricamente hiperbólico. Finalmente, usando el teorema de la divergencia, podemos reescribir (C.3) como

$$\partial_t E = - \int_{\partial\Sigma} \left(u^\dagger H P(\vec{n}) u \right) dA. \quad (\text{C.4})$$

En esta última expresión, hemos usado la definición del símbolo $P(\vec{n}) \equiv M^i n_i$ (ver apéndice A). Para encontrar la variación en el tiempo de (C.2) es necesario construir explícitamente el simetrizador H . Para este caso, en el cual el sistema de ecuaciones es (C.1), este operador puede ser trivialmente construido en términos de los vectores propios del símbolo en la forma

$$H = R^{-1T} R^{-1}, \quad (\text{C.5})$$

donde R es la matriz de los vectores propios columna de P . Con (C.5) uno puede mostrar fácilmente la siguiente relación:

$$H P = R^{-1T} R^{-1} P = R^{-1T} R^{-1} P R R^{-1} = R^{-1T} \Lambda R^{-1}, \quad (\text{C.6})$$

donde el índice T representa la transpuesta de matriz transpuesta y Λ es la matriz diagonal de los valores propios de P . Usando esta expresión en la ecuación (C.4), podemos reescribir la variación en el tiempo de E como

$$\partial_t E = - \int_{\partial\Sigma} \left(\omega^\dagger \Lambda \omega \right) dA, \quad (\text{C.7})$$

donde hemos definido los campos propios ω como $\omega \equiv R^{-1}u$. Finalmente, asumiendo que la matriz Λ tiene la forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\Lambda^I & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^{II} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

donde Λ^0 es la submatriz correspondiente a los valores propios nulos de P y Λ^I y Λ^{II} son las submatrices definidas positivas correspondientes a los valores positivos y negativos de P . Esta forma de Λ nos permite reescribir la expresión (C.7) como

$$\partial_t E = \int_{\partial\Sigma} \left(\omega_-^\dagger \Lambda^I \omega_- \right) dA - \int_{\partial\Sigma} \left(\omega_+^\dagger \Lambda^{II} \omega_+ \right) dA,$$

donde ω_{\pm} son los campos propios asociados con los valores propios positivos y negativos respectivamente. Nótese que el primer término de esta última expresión siempre es definido positivo (aumenta la energía), mientras que el segundo término es siempre definido negativo (disminuye la energía). En otras palabras, los modos de propagación que salen disminuyen la energía del sistema, mientras que los modos entrantes la aumentan. Por lo tanto, si asumimos que en la frontera

$$\omega_- \hat{=} S \omega_+,$$

donde S es una matriz que relaciona los campos entrantes ω_- y salientes ω_+ y que satisface la relación $\omega_+^\dagger S^T |\Lambda_-| S \omega_+ \leq \omega_+^\dagger \Lambda_+ \omega_+$, la energía del sistema no aumenta en el tiempo. Este tipo especial de condiciones de frontera son conocidas como maximalmente disipativas [81, 66, 79, 3].

ARMÓNICOS ESFÉRICOS CON PESO DE ESPÍN

En este apéndice discutiremos brevemente algunas propiedades de los armónicos esféricos con peso de espín. Una detallada discusión acerca de estas funciones puede ser encontrada en [134, 63, 3]. Los armónicos esféricos con peso de espín se introdujeron por primera vez por Newman y Penrose en [96] para estudiar la radiación gravitacional. Sin embargo, hoy en día se usan en el estudio de las soluciones a las ecuaciones de Maxwell, ecuación de Dirac, o ecuaciones dinámicas para campos con espín arbitrario [116].

Los armónicos esféricos con peso de espín son una generalización de los armónicos esféricos usuales $Y^{l,m}$ y son funciones complejas sobre la esfera. Antes de intentar definir estas funciones, es útil entender que significa que una cantidad geométrica tenga un peso de espín. Para esto, comencemos considerando una función compleja f sobre la esfera que puede corresponder a las componentes de objetos tensoriales/espinoriales en una base ortonormal $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ inducida por las coordenadas esféricas (r, θ, φ) . Diremos que la función f tiene peso de espín s si, bajo una rotación de la base angular $(\hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ por un ángulo ψ , esta función transforma como $f \rightarrow e^{-is\psi} f$. Un ejemplo trivial de esto es una función escalar cuyo peso de espín claramente es $s = 0$. Un ejemplo, un poco más interesante corresponde a un vector tridimensional \vec{v} con componentes $(v^{\hat{r}}, v^{\hat{\theta}}, v^{\hat{\phi}})$. Nótese que estas componentes no corresponden a las componentes en la base coordenada. En la base coordenada donde los vectores no son unitarios, las componentes v^i están relacionadas con las componentes $v^{\hat{i}}$ por $(v^{\hat{r}}, v^{\hat{\theta}}, v^{\hat{\phi}}) = (v^r, r v^\theta, r \sin \theta v^\phi)$. Para

encontrar el correspondiente peso de espín de dicho vector, definimos los vectores unitarios complejos

$$\hat{e}_{\pm} \equiv (\hat{e}_{\theta} \mp i\hat{e}_{\varphi}) / \sqrt{2}. \quad (\text{D.1})$$

Con esto, podemos reescribir el vector \vec{v} en la forma

$$\vec{v} = v^0 \hat{e}_r + v^+ \hat{e}_+ + v^- \hat{e}_-, \quad (\text{D.2})$$

donde hemos definido la componente $v^0 \equiv v^{\hat{r}}$, la componente $v^{\pm} \equiv (v^{\hat{\theta}} \pm iv^{\hat{\phi}}) / \sqrt{2}$. Si consideramos una rotación de los vectores $(\hat{e}_{\theta}, \hat{e}_{\varphi})$ por un ángulo ψ , es fácil mostrar que la componente v^0 tiene peso de espín $s = 0$, mientras que las componentes v^{\pm} tienen peso de espín $s = \pm 1$.

Los armónicos esféricos con peso de espín, denotados usualmente por ${}_s Y^{l,m}(\theta, \varphi)$, forman una base para el espacio de funciones con un peso de espín s definido. Estas funciones pueden ser introducidas de diferentes maneras. Por ejemplo, podemos comenzar especificando los operadores

$$\begin{aligned} \bar{\partial} f &\equiv -\sin^s \theta \left(\partial_{\theta} + \frac{i}{\sin \theta} \partial_{\varphi} \right) (f \sin^{-s} \theta) \\ &= - \left(\partial_{\theta} + \frac{i}{\sin \theta} \partial_{\varphi} - s \cot \theta \right) f, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial} f &\equiv -\sin^{-s} \theta \left(\partial_{\theta} - \frac{i}{\sin \theta} \partial_{\varphi} \right) (f \sin^s \theta) \\ &= - \left(\partial_{\theta} - \frac{i}{\sin \theta} \partial_{\varphi} + s \cot \theta \right) f. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Teniendo en cuenta estas definiciones, podemos definir los armónicos esféricos con peso de espín a partir de los los armónicos esféricos usuales como

$${}_s Y^{l,m} \equiv \left[\frac{(l-s)!}{(l+s)!} \right]^{1/2} \bar{\partial}^s (Y^{l,m}), \quad s \geq 0, \quad (\text{D.5})$$

$${}_s Y^{l,m} \equiv (-1)^s \left[\frac{(l+s)!}{(l-s)!} \right]^{1/2} \bar{\partial}^{-s} (Y^{l,m}), \quad s \leq 0, \quad (\text{D.6})$$

donde en particular ${}_0 Y^{l,m} = Y^{l,m}$. Estas definiciones implican que

$$\bar{\partial} ({}_s Y^{l,m}) = + [(l-s)(l+s+1)]^{1/2} {}_{s+1} Y^{l,m}, \quad (\text{D.7})$$

$$\bar{\partial} ({}_s Y^{l,m}) = - [(l+s)(l-s+1)]^{1/2} {}_{s-1} Y^{l,m}. \quad (\text{D.8})$$

En analogía con las propiedades de los operadores de creación y destrucción \hat{a} y \hat{a}^\dagger de la mecánica cuántica, llamaremos a los operadores $\bar{\partial}$ y $\bar{\partial}$ operadores de creación y destrucción de espín respectivamente. Otra propiedad de estos operadores es

$$\bar{\partial}\bar{\partial} \left({}_s Y^{l,m} \right) = -[l(l+1) - s(s+1)] {}_s Y^{l,m}, \quad (\text{D.9})$$

$$\bar{\partial}\bar{\partial} \left({}_s Y^{l,m} \right) = -[l(l+1) - s(s-1)] {}_s Y^{l,m}. \quad (\text{D.10})$$

De estas últimas relaciones, queda claro que las funciones ${}_s Y^{l,m}$ son funciones propias de los operadores $\bar{\partial}\bar{\partial}$ y $\bar{\partial}\bar{\partial}$, los cuales son generalizaciones del operador de Laplace sobre la esfera L^2 :

$$L^2 f \equiv \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 f. \quad (\text{D.11})$$

Podemos encontrar también una generalización para las expresiones usuales de los operadores de momento angular al caso de operadores con peso de espín buscando operadores \hat{J}_z y \hat{J}_\pm tales que [51]

$$\hat{J}_z {}_s Y^{l,m} = i m {}_s Y^{l,m}, \quad (\text{D.12})$$

$$\hat{J}_\pm {}_s Y^{l,m} = i [(l \mp m)(l + 1 \pm m)]^{1/2} {}_s Y^{l,m \pm 1}. \quad (\text{D.13})$$

Con esto, encontramos que los operadores de momento angular con peso de espín deben tener la forma

$$\hat{J}_z = \partial_\varphi, \quad (\text{D.14})$$

$$\hat{J}_\pm = e^{\pm i\varphi} \left[\pm i \partial_\theta - \cot \theta \partial_\varphi - i s \csc \theta \right]. \quad (\text{D.15})$$

Los operadores de momento angular para las componentes x y y son obtenidos trivialmente de $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i \hat{J}_y$ como:

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2} (\hat{J}_+ + \hat{J}_-), \quad \hat{J}_y = -\frac{i}{2} (\hat{J}_+ - \hat{J}_-). \quad (\text{D.16})$$

Los armónicos esféricos con peso de espín tienen varias propiedades interesantes que pueden encontrarse directamente de su definición. En primer lugar, podemos mostrar que el complejo conjugado de ${}_s Y^{l,m}$ está dado por

$${}_s \bar{Y}^{l,m}(\theta, \varphi) = (-1)^{s+m} {}_{-s} Y^{l,-m}(\theta, \varphi). \quad (\text{D.17})$$

Adicionalmente, es fácil demostrar que la relación de ortogonalidad entre dos armónicos esféricos está dada por

$$\oint {}_s Y^{l,m}(\theta, \varphi) {}_{s'} \bar{Y}^{l',m'}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{ss'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{D.18})$$

La integral de tres armónicos esféricos, que es frecuentemente usada, por ejemplo, para calcular el flujo de momento lineal de las ondas gravitacionales, puede expresarse en general como

$$\oint_{s_1} Y^{l_1, m_1}(\theta, \varphi)_{s_2} Y^{l_2, m_2}(\theta, \varphi)_{s_3} Y^{l_3, m_3}(\theta, \varphi) d\Omega = \left[\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(2l_3 + 1)}{4\pi} \right]^{1/2} \times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.19})$$

donde

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.20})$$

son los símbolos 3- l m de Wigner, los cuales pueden ser calculados a partir de [135]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= (-1)^{l_1 - m_1} \delta_{m_1 + m_2, -m_3} \\ &\times \left[\frac{(l_1 + l_2 - l_3)! (l_1 + l_3 - l_2)! (l_2 + l_3 - l_1)! (l_3 + m_3)! (l_3 - m_3)!}{(l_1 + l_2 + l_3 + 1)! (l_1 + m_1)! (l_1 - m_1)! (l_2 + m_2)! (l_2 - m_2)!} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{(l_2 + l_3 + m_1 - k)! (l_1 - m_1 + k)!}{(l_3 - l_1 + l_2 - k)! (l_3 - m_3 - k)! (l_1 - l_2 + m_3 + k)!} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

En esta última expresión la suma es solamente válida para todos los valores de k para los cuales el argumento de los factoriales es mayor o igual a cero. Adicionalmente, si la combinación de $\{l_i, m_i\}$ es tal que el argumento del factorial fuera de la sumatoria es negativo, entonces el coeficiente correspondiente se anula.

En general la expresión (D.21) es muy complicada, sin embargo, para algunos casos especiales se simplifica. Por ejemplo, en el caso en que $m_1 = l_1$, $m_2 = l_2$ y $l_3 = m_3 = l_1 + l_2$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_1 + l_2 \\ l_1 & l_2 & l_1 + l_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(l_1 + l_2) + 1}}. \quad (\text{D.22})$$

Otro caso particularmente interesante (ver capítulo 5) corresponde a tomar $l_3 = m_3 = 0$. Para este caso, uno encuentra que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & 0 \\ m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix} &= \langle l_1, m_1, l_2, m_2 | 0, 0 \rangle \\ &= \frac{(-1)^{l_1 - m_1}}{\sqrt{2l_1 + 1}} \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, -m_2}. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Para el caso en el que $l_3 = 1$, que aparece en las expresiones para el momento lineal transportado por la radiación gravitacional (ver capítulo 5) tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix} &= (-1)^{l_1-m_1} \delta_{m_1+m_2,0} \left[\frac{2m_1 \delta_{l_1,l_2}}{\sqrt{(2l_1+2)(2l_1+1)(2l_1)}} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{l_1,l_2+1} \sqrt{\frac{(l_1+m_1)(l_1-m_1)}{l_1(2l_1+1)(2l_1-1)}} - \delta_{l_1+1,l_2} \sqrt{\frac{(l_2-m_2)(l_2+m_2)}{l_2(2l_2+1)(2l_2-1)}} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & \pm 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{l_1-m_1} \delta_{m_1+m_2,\mp 1} \left[\pm \delta_{l_1,l_2} \sqrt{\frac{(l_1 \mp m_1)(l_1 \mp m_2)}{l_1(2l_1+2)(2l_1+1)}} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{l_1,l_2+1} \sqrt{\frac{(l_1 \mp m_1)(l_1 \pm m_2)}{2l_1(2l_1+1)(2l_1-1)}} + \delta_{l_1+1,l_2} \sqrt{\frac{(l_2 \mp m_2)(l_2 \pm m_1)}{2l_2(2l_2+1)(2l_2-1)}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Bibliografía

- [1] Ajith, P., et al.: A template bank for gravitational waveforms from coalescing binary black holes: I. non-spinning binaries (2007). ArXiv:0710.2335 [gr-qc]
- [2] Alcubierre, M.: Are gauge shocks really shocks? (2005). Gr-qc/0503030
- [3] Alcubierre, M.: Introduction to 3 + 1 Numerical Relativity. Oxford Univ. Press, Oxford (2008)
- [4] Alcubierre, M., Allen, G., Brügmann, B., Lanfermann, G., Seidel, E., Suen, W.M., Tobias, M.: Gravitational collapse of gravitational waves in 3D numerical relativity. Phys. Rev. D **61**, 041,501 (2000). Gr-qc/9904013
- [5] Alcubierre, M., Allen, G., Brügmann, B., Seidel, E., Suen, W.M.: Towards an understanding of the stability properties of the 3+1 evolution equations in general relativity. Phys. Rev. D **62**, 124,011 (2000). Gr-qc/9908079
- [6] Alcubierre, M., Brügmann, B., Diener, P., Koppitz, M., Pollney, D., Seidel, E., Takahashi, R.: Gauge conditions for long-term numerical black hole evolutions without excision. Phys. Rev. D **67**, 084,023 (2003). Gr-qc/0206072
- [7] Alcubierre, M., Brügmann, B., Dramlitsch, T., Font, J., Papadopoulos, P., Seidel, E., Stergioulas, N., Takahashi, R.: Towards a stable numerical evolution of strongly gravitating systems in general relativity: The conformal treatments. Phys. Rev. D **62**, 044,034 (2000). Gr-qc/0003071

-
- [8] Alcubierre, M., Corichi, A., González, J., Nuñez, D., Reimann, B., Salgado, M.: Generalized harmonic spatial coordinates and hyperbolic shift conditions. *Phys. Rev. D* **72**, 124,018 (2005). Gr-qc/0507007
- [9] Alcubierre, M., González, J.: Regularization of spherically symmetric evolution codes in numerical relativity. *Comp. Phys. Comm.* **167**, 76 (2005). Gr-qc/0401113
- [10] Alcubierre, M., et al.: Test-beds and applications for apparent horizon finders in numerical relativity. *Class. Quant. Grav.* **17**, 2159–2190 (2000)
- [11] Andersson, L., Moncrief, V.: Elliptic-hyperbolic systems and the Einstein equations. *Annales Henri Poincaré* **4**, 1–34 (2003)
- [12] Andrade, Z., Price, R.H.: Head-on collisions of unequal mass black holes: Close-limit predictions. *Phys. Rev.* **D56**, 6336–6350 (1997)
- [13] Anninos, P., Hobill, D., Seidel, E., Smart, L., Suen, W.M.: Collision of two black hole. *Phys. Rev. Lett* **71**(18), 2851–2854 (1993)
- [14] Ansorg, M., Brüggmann, B., Tichy, W.: A single-domain spectral method for black hole puncture data. *Phys. Rev.* **D70**, 064,011 (2004)
- [15] Arbona, A., Bona, C., Massó, J., Stela, J.: Robust evolution system for numerical relativity. *Phys. Rev. D* **60**, 104,014 (1999). Gr-qc/9902053
- [16] Baker, J.G., Centrella, J., Choi, D.I., Koppitz, M., van Meter, J.: Gravitational wave extraction from an inspiraling configuration of merging black holes. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 111,102 (2006)
- [17] Baker, J.G., van Meter, J.R.: Reducing reflections from mesh refinement interfaces in numerical relativity. *Phys. Rev.* **D72**, 104,010 (2005)
- [18] Baker, J.G., et al.: Getting a kick out of numerical relativity. *Astrophys. J.* **653**, L93–L96 (2006)
- [19] Bardeen, J., Piran, T.: General relativistic axisymmetric rotating systems: Coordinates and equations. *Phys. Rep.* **196**, 205 (1983)
- [20] Bardeen, J.M., Buchman, L.T.: Numerical tests of evolution systems, gauge conditions, and boundary conditions for 1d colliding gravitational plane waves. *Phys. Rev.* **D65**, 064,037 (2002)
-

-
- [21] Baumgarte, T.W., Shapiro, S.L.: On the numerical integration of einstein's field equations. *Phys. Rev.* **D59**, 024,007 (1999)
- [22] Beyer, H., Sarbach, O.: On the well posedness of the baumgarte-shapiro-shibata- nakamura formulation of einstein's field equations (2004)
- [23] Bona, C., Ledvinka, T., Palenzuela, C., Zacek, M.: General-covariant evolution formalism for numerical relativity. *Phys. Rev.* **D67**, 104,005 (2003)
- [24] Bona, C., Ledvinka, T., Palenzuela, C., Zacek, M.: A symmetry-breaking mechanism for the z4 general-covariant evolution system. *Phys. Rev.* **D69**, 064,036 (2004)
- [25] Bona, C., Massó, J.: Einstein's evolution equations as a system of balance laws. *Phys. Rev. D* **40**, 1022–1026 (1989)
- [26] Bona, C., Massó, J.: Hyperbolic evolution system for numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1097 (1992)
- [27] Bona, C., Massó, J.: Numerical relativity: evolving space-time. *International Journal of Modern Physics C: Physics and Computers* **4**, 88 (1993)
- [28] Bona, C., Massó, J., Seidel, E., Stela, J.: New formalism for numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 600–603 (1995). Gr-qc/9412071
- [29] Bowen, J.M., York, J.W.: Time-asymmetric initial data for black holes and black-hole collisions. *Phys. Rev. D* **21**(8), 2047–2056 (1980). DOI 10.1103/PhysRevD.21.2047
- [30] Brandt, S., Brüggmann, B.: A simple construction of initial data for multiple black holes. *Phys. Rev. Lett.* **78**(19), 3606–3609 (1997). Gr-qc/9703066
- [31] Brandt, S., Camarda, K., Seidel, E., Takahashi, R.: Three Dimensional Distorted Black Holes. *Class. Quant. Grav.* **20**, 1–20 (2003)
- [32] Brandt, S.R., Seidel, E.: Evolution of distorted rotating black holes. iii. initial data. *Phys. Rev. D* **54**(2), 1403–1416 (1996). DOI 10.1103/PhysRevD.54.1403
- [33] Brüggmann, Bernd, Tichy, Wolfgang, Jansen, Nina: Numerical simulation of orbiting black holes. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 211,101 (2004)
-

-
- [34] Brüggmann, B.: Adaptive mesh and geodesically sliced schwarzschild spacetime in 3+1 dimensions. *Phys. Rev. D* **54**(12), 7361–7372 (1996). Gr-qc/9608050
- [35] Brüggmann, B., Gonzalez, J., Hannam, M., Husa, S., Sperhake, U.: Exploring black hole superkicks (2007). Gr-qc/0707.0135
- [36] Brüggmann, B., et al.: Calibration of moving puncture simulations (2006). Gr-qc/0610128
- [37] Buchman, L.T., Sarbach, O.C.A.: Towards absorbing outer boundaries in general relativity. *Class. Quant. Grav.* **23**, 6709–6744 (2006)
- [38] Buchman, L.T., Sarbach, O.C.A.: Improved outer boundary conditions for einstein’s field equations. *Class. Quant. Grav.* **24**, S307–S326 (2007)
- [39] Cactus-web: <http://cactuscode.org>
- [40] Calabrese, G., Lehner, L., Tiglio, M.: Constraint-preserving boundary conditions in numerical relativity. *Phys. Rev.* **D65**, 104,031 (2002)
- [41] Campanelli, M., Lousto, C.O., Marronetti, P., Zlochower, Y.: Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 111,101 (2006)
- [42] Campanelli, M., Lousto, C.O., Zlochower, Y.: Gravitational radiation from spinning-black-hole binaries: The orbital hang up. *Phys. Rev. D* **74**, 041,501 (2006)
- [43] Campanelli, M., Lousto, C.O., Zlochower, Y.: Spin-orbit interactions in black-hole binaries. *Phys. Rev. D* **74**, 084,023 (2006)
- [44] Campanelli, M., Lousto, C.O., Zlochower, Y., Krishnan, B., Merritt, D.: Spin flips and precession in black-hole-binary mergers. *Phys. Rev.* **D75**, 064,030 (2007)
- [45] Campanelli, M., Lousto, C.O., Zlochower, Y., Merritt, D.: Maximum gravitational recoil. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 231,102 (2007)
- [46] Choi, D.I., et al.: Recoiling from a kick in the head-on collision of spinning black holes. *Phys. Rev.* **D76**, 104,026 (2007)
- [47] Choptuik, M.W.: Universality and scaling in gravitational collapse of massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 9 (1993)
-

-
- [48] Christodoulou, D.: Reversible and irreversible transformations in black-hole physics. *Phys. Rev. Lett.* **25**(22), 1596–1597 (1970)
- [49] Cook, G.B.: Initial data for numerical relativity. *Living Rev. Rel.* **3:5** (2000)
- [50] Diener, P., Herrmann, F., Pollney, D., Schnetter, E., Seidel, E., Takahashi, R., Thornburg, J., Ventrella, J.: Accurate evolution of orbiting binary black holes. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 121,101 (2006). Gr-qc/0512108
- [51] Dray, T.: The relationship between monopole harmonics and spin-weighted spherical harmonics. *J. Math. Phys.* **26**, 1030–1033 (1985)
- [52] Einstein, A.: Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1915)
- [53] Einstein, A.: Zur allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1915)
- [54] Engquist, B., Majda, A.: Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.* **31**, 629–651 (1977)
- [55] Eppley, K.: The numerical evolution of the collision of two black hole. PhD thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey (1975)
- [56] Eppley, K.: Evolution of time-symmetric gravitational waves: Initial data and apparent horizons. *Phys. Rev. D* **16**, 1609 (1977)
- [57] Friedrich, H.: The asymptotic characteristic initial value problem for einstein's vacuum field equations as an initial value problem for a first order quasi-linear symmetric hyperbolic system. *Proc. Roy. Soc. London* **A378**, 401 (1981)
- [58] Friedrich, H.: On the hyperbolicity of Einstein's and other gauge field equations. *Comm. Math. Phys.* **100**, 525–543 (1985)
- [59] Friedrich, H., Nagy, G.: The initial boundary value problem for Einstein's vacuum field equations. *Comm. Math. Phys.* **201**, 619–655 (1999)
-

-
- [60] Garfinkle, D.: Harmonic coordinate method for simulating generic singularities. *Phys. Rev.* **D65**, 044,029 (2002)
- [61] Gerlach, U., Sengupta, U.: Gauge-invariant perturbations on most general spherically symmetric space-times. *Phys. Rev. D* **19**, 2268–2272 (1979)
- [62] Gleiser, R.J., Khanna, G., Pullin, J.: Evolving the Bowen-York initial data for boosted black holes. *Phys. Rev. D* **66**, 024,035 (2002)
- [63] Goldberg, J.N., Macfarlane, A.J., Newman, E.T., Rohrlich, F., Sudarshan, E.C.G.: Spin-s spherical harmonics and $\bar{\delta}$. *J. Math. Phys.* **8**, 2155 (1967)
- [64] Gonzalez, J.A., Sperhake, U., Brüggmann, B., Hannam, M., Husa, S.: Total recoil: the maximum kick from nonspinning black-hole binary inspiral. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 091,101 (2007)
- [65] Gundlach, C., Martín-García, J.M.: Symmetric hyperbolicity and consistent boundary conditions for second-order einstein equations. *Phys. Rev.* **D70**, 044,032 (2004)
- [66] Gustafsson, B., Kreiss, H., Olinger, J.: Time dependent problems and difference methods. Wiley, New York (1995)
- [67] H. Bondi, M.v.d.B., Metzner, A.: Waves from axi-symmetric isolated systems. In: *Gravitational Waves in general relativity VII*, pp. 21–52. *Proc. R. Soc. London*, A269 (1962)
- [68] Hahn, S., Lindquist, R.: The two-body problem in geometrodynamics. *Ann. Phys.* **29**, 304 (1964)
- [69] Hannam, M., Husa, S., Brüggmann, B., Gonzalez, J.A., Sperhake, U.: Beyond the Bowen-York extrinsic curvature for spinning black holes. *Class. Quant. Grav.* **24**, S15–S24 (2007)
- [70] Herrmann, F., Shoemaker, D., Laguna, P.: Unequal mass binary black hole plunges and gravitational recoil (2006). *Gr-qc/0601026*
- [71] Holz, D., Miller, W., Wakano, M., Wheeler, J.: Directions in general relativity: Proceedings of the 1993 international symposium, maryland; papers in honor of di eter brill. In: B. Hu, T. Jacobson (eds.) *Directions in General Relativity: Proceedings of the 1993 International Symposium, Maryland; Papers in honor of Di eter Brill*. Cambridge University Press, Cambridge, England (1993)
- [72] Hulse, R., Taylor, J.: Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophys. J.* **195**, L51–L53 (1975)
-

-
- [73] Husa, S.: Numerical relativity with the conformal field equations. *Lect. Notes Phys.* **617**, 159–192 (2003)
- [74] Kidder, L., Lindblom, L., Scheel, M., Buchman, L., Pfeiffer, H.: Boundary conditions for the Einstein evolution system. *Phys. Rev. D* **71**, 064,020 (2005)
- [75] Kidder, L.E., Scheel, M.A., Teukolsky, S.A., Carlson, E.D., Cook, G.B.: Black hole evolution by spectral methods. *Phys. Rev. D* **62**, 084,032 (2000)
- [76] Koppitz, M., et al.: Getting a kick from equal-mass binary black hole mergers (0100)
- [77] Kramer, M., et al.: Tests of general relativity from timing the double pulsar. *Science* **314**, 97–102 (2006)
- [78] Kreiss, H., Oliger, J.: *Methods for the Approximate Solution of Time Dependent Problems*. Vol. 10 of Global Atmospheric Research Programme (GARP): GARP Publication Series (1973)
- [79] Kreiss, H.O., Lorenz, J.: *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*. Academic Press, San Diego (1989)
- [80] Kreiss, H.O., Winicour, J.: Problems which are well-posed in a generalized sense with applications to the einstein equations. *Class. Quant. Grav.* **23**, S405–S420 (2006)
- [81] Lax, P., Phillips, R.: Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. *Commun. Pure Appl. Math.* **13**, 427–455 (1960)
- [82] Lehner, L., Moreschi, O.M.: Dealing with delicate issues in waveforms calculations. *Phys. Rev. D* **76**, 124,040 (2007). DOI 10.1103/PhysRevD.76.124040
- [83] Leiler, G., Rezzolla, L.: On the iterated crank-nicolson for hyperbolic and parabolic equations in numerical relativity. *Phys. Rev. D* **73**, 044,001 (2006)
- [84] Lichnerowicz, A.: L'intégration des équations de la gravitation relativiste et la problème des n corps. *J. Math. Pures et Appl.* **23**, 37 (1944)
- [85] Lindblom, L., Scheel, M.A., Kidder, L.E., Owen, R., Rinne, O.: A new generalized harmonic evolution system. *Class. Quant. Grav.* **23**, S447– S462 (2006)
-

-
- [86] Lousto, C.O., Zlochower, Y.: A practical formula for the radiated angular momentum. *Phys. Rev. D* **76**, 041,502 (2007)
- [87] Martel, K., Poisson, E.: Gravitational perturbations of the schwarzschild spacetime: A practical covariant and gauge-invariant formalism. *Phys. Rev. D* **71**, 104,003 (2005)
- [88] Miller, M.A., Gressman, P., Suen, W.M.: Towards a realistic neutron star binary inspiral: Initial data and multiple orbit evolution in full general relativity. *Phys. Rev. D* **69**, 064,026 (2004)
- [89] Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A.: *Gravitation*. Academic Press, San Francisco (1973)
- [90] Moncrief, V.: Gravitational perturbations of spherically symmetric systems. I. the exterior problem. *Ann. Phys.* **88**, 323 (1974)
- [91] Nagar, A., Rezzolla, L.: Gauge-invariant non-spherical metric perturbations of schwarzschild black-hole spacetimes. *Class. Quant. Grav.* **22**, R167 (2005)
- [92] Nagy, G., Ortiz, O.E., Reula, O.A.: Strongly hyperbolic second order einstein's evolution equations. *Phys. Rev. D* **70**, 044,012 (2004)
- [93] Nagy, G., Sarbach, O.: A minimization problem for the lapse and the initial- boundary value problem for einstein's field equations. *Class. Quant. Grav.* **23**, S477–S504 (2006)
- [94] Nakamura, T., Oohara, K., Kojima, Y.: General relativistic collapse to black holes and gravitational waves from black holes. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **90**, 1–218 (1987)
- [95] Newman, E.T., Penrose, R.: An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.* **3**, 566–578 (1962). Erratum in *J. Math. Phys.* **4**, 998 (1963)
- [96] Newman, E.T., Penrose, R.: Note on the bondi-metzner-sachs group. *J. Math. Phys.* **7**, 863–870 (1966)
- [97] Poisson, E.: *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, England (2004)
- [98] Pollney, D., et al.: Recoil velocities from equal-mass binary black-hole mergers: a systematic investigation of spin-orbit aligned configurations. *Phys. Rev. D* **76**, 124,002 (2007)
-

-
- [99] Pretorius, F.: Evolution of binary black hole spacetimes. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 121,101 (2005)
- [100] Pretorius, F.: Numerical relativity using a generalized harmonic decomposition. *Class. Quant. Grav.* **22**, 425–452 (2005)
- [101] Regge, T., Wheeler, J.: Stability of a Schwarzschild singularity. *Phys. Rev.* **108**, 1063–1069 (1957)
- [102] Reula, O.A.: Hyperbolic methods for einstein’s equations. *Living Rev. Rel.* **1**, 3 (1998)
- [103] Reula, O.A.: Strongly hyperbolic systems in general relativity. *Journal of Hyperbolic Differential Equations* **1**, 251–269 (2004)
- [104] Rinne, O.: Axisymmetric numerical relativity. PhD thesis, University of Cambridge. gr-qc/0601064 (2005)
- [105] Rinne, O.: Stable radiation-controlling boundary conditions for the generalized harmonic einstein equations. *Class. Quant. Grav.* **23**, 6275–6300 (2006)
- [106] Rinne, O., Lindblom, L., Scheel, M.A.: Testing outer boundary treatments for the Einstein equations. *Class. Quant. Grav.* **24**, 4053–4078 (2007)
- [107] Rinne, O., Stewart, J.M.: A strongly hyperbolic and regular reduction of einstein’s equations for axisymmetric spacetimes. *Class. Quant. Grav.* **22**, 1143–1166 (2005)
- [108] Ruiz, M., Alcubierre, M., Nunez, D.: Regularization of spherical and axisymmetric evolution codes in numerical relativity. *Gen. Rel. Grav.* **40**, 159–182 (2008)
- [109] Ruiz, M., Rinne, O., Sarbach, O.: Outer boundary conditions for Einstein’s field equations in harmonic coordinates. *Class. Quant. Grav.* **24**, 6349–6378 (2007)
- [110] Ruiz, M., Takahashi, R., Alcubierre, M., Nunez, D.: Multipole expansions for energy and momenta carried by gravitational waves. *Gen. Rel. Grav.* (2007). ArXiv:0707.4654 [gr-qc]
- [111] Sachs, R.: Waves in asymptotically at spacetimes. In: *Gravitational Waves in general relativity VIII*, pp. 103–126. *Proc. R. Soc. London*, A270 (1962)
- [112] Sarbach, O., Calabrese, G., Pullin, J., Tiglio, M.: Hyperbolicity of the bssn system of einstein evolution equations. *Phys. Rev.* **D66**, 064,002 (2002)
-

-
- [113] Sarbach, O., Heusler, M., Brodbeck, O.: Perturbation theory for self-gravitating gauge fields. i: The odd-parity sector. *Phys. Rev.* **D62**, 084,001 (2000)
- [114] Sarbach, O., Tiglio, M.: Gauge invariant perturbations of schwarzschild black holes in horizon-penetrating coordinates. *Phys. Rev.* **D64**, 084,016 (2001)
- [115] Sarbach, O., Tiglio, M.: Boundary conditions for einstein's field equations: Analytical and numerical analysis. *J. Hyperbol. Diff. Equat.* **2**, 839 (2005)
- [116] Scanio, J.J.G.: Spin-weighted spherical harmonics and electromagnetic multipole expansions. *American Journal of Physics* **45**, 173–178 (1977)
- [117] Schnetter, E., Hawley, S.H., Hawke, I.: Evolutions in 3D numerical relativity using fixed mesh refinement. *Class. Quant. Grav.* **21**, 1465–1488 (2004)
- [118] Schnetter, E., Krishnan, B., Beyer, F.: Introduction to dynamical horizons in numerical relativity. *Phys. Rev.* **D74**, 024,028 (2006)
- [119] Shibata, M., Nakamura, T.: Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. *Phys. Rev. D* **52**, 5428 (1995)
- [120] Smarr, L., A.Cadez, DeWitt, B., Eppley, K.: Collision of two black holes: Theoretical framework. *Phys. Rev. D* **14**, 2443 (1976)
- [121] Smarr, L., York, J.: Kinematical conditions in the construction of spacetime. *Phys. Rev. D* **17**, 2529 (1978)
- [122] Smarr, L., York, J.: Radiation gauge in general relativity. *Phys. Rev. D* **17**, 1945 (1978)
- [123] Sopuerta, C.F., Yunes, N., Laguna, P.: Gravitational recoil from binary black hole mergers: The close-limit approximation. *Phys. Rev.* **D74**, 124,010 (2006)
- [124] Strang, G.: Necessary and insufficient conditions for well-posed cauchy problems. *Jour. Diff. Eqs.* **2**, 107 (1966)
- [125] Szilagyi, B., Schmidt, B.G., Winicour, J.: Boundary conditions in linearized harmonic gravity. *Phys. Rev.* **D65**, 064,015 (2002)
-

-
- [126] Szilagyi, B., Winicour, J.: Well-posed initial-boundary evolution in general relativity. *Phys. Rev. D* **68**, 041,501 (2003)
- [127] Taylor, J.H., Weisberg, J.M.: A new test of general relativity: Gravitational radiation and the binary pulsar psr 1913+16. *Astrophys. J.* **253**, 908–920 (1982)
- [128] Taylor, M.: *Partial differential equations II, Qualitative Studies of Linear Equations.* Springer (1999)
- [129] Teukolsky, S.: Linearized quadrupole waves in general relativity and the motion of test particles. *Phys. Rev. D* **26**, 745 (1982)
- [130] Thornburg, J.: A fast apparent-horizon finder for 3-dimensional cartesian grids in numerical relativity. *Class. Quant. Grav.* **21**, 743–766 (2004)
- [131] Thornburg, J., et al.: Are moving punctures equivalent to moving black holes? *Class. Quant. Grav.* **24**, 3911–3918 (2007)
- [132] Thorne, K.: Multipole expansions of gravitational radiation. *Rev. Mod. Phys.* **52**, 299–339 (1980)
- [133] Vulcanov, D.N., Alcubierre, M.: Testing the Cactus code on exact solutions of the Einstein field equations. *Int. J. Mod. Phys. C* **13**, 805–822 (2002)
- [134] Wiaux, Y., Jacques, L., Vandergheynst, P.: Fast spin $+2$ spherical harmonics transforms. *J. Comput. Phys.* **226**, 2359–2371 (2007)
- [135] Wigner, E.: *Group Theory and Its Application to Quantum Mechanics of Atomic Spectra.* New York: Academic Press, New York, U.S.A. (1959)
- [136] Will, C.M.: The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Rel.* (2005)
- [137] York, J.: Kinematics and dynamics of general relativity. In: L. Smarr (ed.) *Sources of Gravitational Radiation.* Cambridge University Press, Cambridge, England (1979)
- [138] Zerilli, F.J.: Effective potential for even parity regge-wheeler gravitational perturbation equations. *Phys. Rev. Lett.* **24**, 737 (1970)
-