UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre bases y otras estructuras en espacios de Banach

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

IRENE DE TERESA TRUEBA

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. ÁNGEL MANUEL CARRILLO HOYO
2008

Contenido

Prólogo **v**

1 Preliminares **1**

1.1 Definiciones y resultados-E. normados 1
1.2 Los espacios $(\sum \oplus X_k)_p$ 5
1.3 Anulador y preanulador. El adjunto 6
1.4 Topologías w y w^* 10
1.5 Topologías WOT y SOT en $\mathcal{B}(X,Y)$ 19
1.6 Teoremas de separación 21

2 Estructuras en espacios de Banach **23**

2.1 Operadores relacionados con subespacios de dimensión finita . . . 23
2.2 La descomposición finito dimensional 25
2.3 La propiedad de la base 31
2.4 ϵ-cercanía 43
2.5 La propiedad de aproximación. 47
2.6 Aproximación acotada 49
2.7 La propiedad π 51
2.8 Relaciones: f.d.d.p., b.a.p., π.p. y b.p. 53

3 Estructuras en X y X^* **57**

3.1 El Principio de la Reflexividad local 57
3.2 Relaciones entre estructuras de X y X^* 70
3.3 Diferenciación de las estructuras 91
3.3.1 La a.p. no implica la b.a.p. 93
3.3.2 La b.a.p. no implica la π.p. 99

Prólogo

Hacia finales del siglo XIX, se realizó un esfuerzo enorme, sobre todo en Europa, que dio como resultado lo que ahora es conocido como el Análisis Funcional. Hubo grandes personalidades matemáticas dedicadas a su desarrollo, entre quienes pueden mencionarse a Hadamard, Volterra, Frèchet, Hilbert y Riesz. Este último, junto con Fischer, fue quien unificó, en 1907, las investigaciones que paralelamente se habían hecho en las escuelas alemana, encabezada por Hilbert, y la franco-italiana. Además, Riesz realizó un trabajo crucial acerca de los espacios normados y completos, estudiándolos desde una perspectiva axiomática, lo que resultó vanguardista.

En Polonia, Stefan Banach continuó el estudio de los espacios normados y completos, ahora llamados espacios de Banach, siguiendo el novedoso planteamiento axiomático de Riesz. Con la publicación de *La téorie des opérations linéaires*, Banach estableció nuevas líneas de investigación, que su alumno Schauder siguió fecundamente. Fue éste quien en 1927 definió ([18]), pasando de las sumas finitas a las series, un tipo de base en espacios vectoriales topológicos que ahora lleva su nombre.

Se ha trabajado intensamente, a lo largo del siglo XX, y lo que va del presente, por dar condiciones que permitan construir, o estar ciertos de que existe, una base de Schauder en un espacio de Banach.

Como siempre sucede, los problemas trascendentes fueron los poderosos motores en la investigación acerca de bases de Schauder. Dos de los más famosos son los siguientes:

1.¿Es cierto que cualquier espacio de Banach separable tiene una base de Schauder?. A este problema se le llamó tradicionalmente "el problema de la base", y fue planteado por Banach en 1932 ([1]).

2. ¿Si el dual de un espacio de Banach tiene una base de Schauder, puede asegurarse que el espacio original también la tiene?. Esta pregunta fue planteada por S. Karlin en 1948 ([10]).

En estos temas se usan dos términos que ameritan puntualizarse. Tendremos una estructura en un espacio de Banach cuando hayamos distinguido una colección particular de sus subespacios de dimensión finita . Por supuesto, la importancia de una estructura dependerá de su utilidad para el estudio del espacio. Trabajaremos con seis de ellas que están determinadas por otras tantas propiedades del espacio. Por el ejemplo, la propiedad de que un espacio tenga una base de Schauder, que abreviaremos como b.p., determina una estructura: los rangos de las proyecciones naturales asociados a la base. Con cierto abuso de lenguaje, hablaremos de la estructura o de la propiedad que la determina como si fueran lo mismo. Por otra parte, el término local es usado con un significado distinto al más extendido (sucede en vecindades), pues se refiere a que se tiene una propiedad en subespacios de dimensión finita.

Grothendieck comenzó por estudiar una propiedad en espacios de Banach, que denominó de aproximación y a la que nos referiremos en lo sucesivo como a.p.; ésta es más débil que la b.p.

El estudio de las estructuras que puede haber en los espacios de Banach fue volviéndose poco a poco más popular y empezó a ser un campo de investigación muy activo alrededor de 1970.

Una línea de investigación fue trabajar con propiedades intermedias entre la a.p. y la b.p.; esto es, propiedades más débiles que la de la base, pero más fuertes que la de aproximación. Entre ellas, las más importantes han sido: la propiedad de aproximación acotada (b.a.p., por sus siglas en inglés), la propiedad π (abreviada como π.p.), y la propiedad de aproximación finito dimensional (f.d.d.p., de nuevo, por sus siglas en inglés).

Las estructuras que ellas determinan son a las que refiere el título de esta tesis y serán estudiadas a lo largo de la tesis; también se verá, aunque con menos detenimiento, la propiedad de aproximación acotada conmutativa (c.b.a.p.), que recientemente, gracias al trabajo de Casazza [2], adquirió mayor importancia.

En el artículo *On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces*, que constituye la base de este trabajo, sus autores, Johnson, Rosenthal y Zippin, lograron establecer relaciones muy interesantes entre las estructuras que ya hemos mencionado. De hecho, pudieron responder afirmativamente a la pregunta 2, y su trabajo fue citado, en la década de los setentas, en el artículo ([4]) donde Per Enflo resolvió negativamente el tan enigmático problema de la base (pregunta 1), el cual se plantea ahí en términos de la propiedad de aproximación .

Durante mucho tiempo, este trabajo de Johnson, Rosenthal y Zippin ha sido una referencia esencial para quienes estudian esta área de problemas locales en espacios de Banach ([2]). En él, aparece como herramienta fundamental el Principio de la Reflexividad Local, que tuvo un antecedente en [12] y para la se han dado diversas demostraciones. Nosotros damos una que está basada en técnicas elementales y que fue se debe Martínez-Abejón ([14]).

El Principio de la Reflexividad Local resultó ser esencial para resolver problemas sobre las relaciones que guardan entre sí las propiedades arriba mencionadas y sobre los parecidos geométricos existentes entre un espacio de Banach, su dual, y su doble dual.

Por sí mismo el resultado es interesante y ha sido una herramienta fundamental para el estudio de los espacios de Banach. Éste establece que aún cuando el espacio no sea reflexivo, se tiene una "buena" correspondencia entre los subespacios de dimensión finita del doble dual de un espacio de Banach y los subespacios de dimensión finita del espacio original.

El estudio de la propiedad de aproximación, y el resto de las que hemos mencionado, han sido útiles en muchas de las investigaciones en el área y, poco a poco, empezaron a adquirir vida propia.

En el trabajo se muestran, con base en([9]), las siguientes implicaciones:

$$\text{b.p.} \Rightarrow \text{ f.d.d.p.} \Rightarrow \pi\text{.p.} \Rightarrow \text{ b.a.p.} \Rightarrow \text{ a.p.}$$

Más complicado es determinar que ninguna de ellas es tan sólo una reformulación de una de las otras y, en particular, que no son formas equivalentes de la p.b. En caso contrario, muchos de los resultados encontrados habrían resultado menos interesantes.

Fue poco tiempo después de que Per Enflo resolviera el problema de la base, que Figiel y Johnson ([6]) fueron capaces de dar el primer ejemplo de un espacio con la a.p. que no tuviera la b.a.p. Este ejemplo será analizado en el Capítulo 3 de esta tesis.

En 1987, Stanislaw Szarek ([21]) mostró la existencia de un espacio con la f.d.d.p. pero sin base, y dio el primer ejemplo de un espacio reflexivo con la a.p. que no tiene la b.a.p.

Tiempo después, al combinar los trabajos de Casazza ([2]) y Read ([16]) se mostró que, la c.b.a.p. junto con la π.p., constituyen una condición necesaria y suficiente para tener la f.d.d.p. y que hay un espacio que tiene la c.b.a.p. y por tanto la b.a.p., pero no la f.d.d.p.. Entonces dicho espacio tiene la b.a.p. pero no la π.p. Parte de estos hechos son también probados en el capítulo final.

Hasta donde sabemos, queda todavía por resolverse la pregunta: ¿ la π.p. implica la f.d.d.p.?, pero el panorama ha sido esclarecido notablemente.

A lo largo de la tesis se mostrará cómo fue realizada buena parte de estas investigaciones, enfocándonos sobre todo en el artículo ([9]) y de modo secundario en ([6]), y ([2]).

La tesis está formada por tres partes. La primera, dedicada a los resultados básicos del Análisis Funcional, necesarios para abordar el estudio de las propiedades antes mencionadas. Ellos pueden constituir un guión para desarrollar un programa de estudio de un primer curso sobre espacios de Banach .

En el segundo capítulo se presentan e interrelacionan las propiedades objeto de este trabajo. Ahí podría haberse incluido la sección final de la tesis, de no haberse necesitado resultados tan íntimamente relacionados con la pregunta 2), como los que aparecen de manera natural hasta el Capítulo 3; en donde, como una aplicación, se presenta la respuesta afirmativa a esa pregunta 2). Este último resultado ha servido, por ejemplo, para demostrar el inverso del Teorema de Sobczyk, que se mantuvo por algún tiempo como conjetura y que es mucho más complicado en su demostración que el teorema original.

Este trabajo tiene componentes muy técnicas. El esfuerzo esencial está hecho en las pruebas de los lemas y proposiciones auxiliares que llevan a los resultados más destacables, que en general son presentados como teoremas. Uno de los éxitos del trabajo es explicarlos con mayor claridad y detalle que la de las fuentes utilizadas.

Quedan como tareas pendientes, entre otras, simplificar los enunciados y las pruebas de los resultados técnicos que aquí se incluyen y proporcionar ejemplos. Respecto a esto último, las referencias aquí señaladas no son más generosas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definiciones y resultados sobre espacios normados.

En este trabajo los espacios vectoriales (lineales) tienen a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ como campo de escalares y éste es representado por $\mathbb{F}$.

Escribimos $E \leq X$ para indicar que E es un subespacio vectorial del espacio lineal X. Si $A \subset X$ y X es un espacio vectorial topológico, entonces $\langle A \rangle$ es el subespacio vectorial generado por los elementos de A y $\overline{\langle A \rangle}$ es la cerradura de dicho subespacio.

Para un espacio vectorial X, se denota con $X^{\#}$ al espacio de funcionales lineales; es decir las transformaciones lineales de X en $\mathbb{F}$. Si (X, τ_1) es un espacio vectorial topológico, entonces escribimos $(X, \tau_1)^*$ para denotar a la colección de funcionales lineales continuas según τ.

Si X es normado entonces B_X denota la bola unitaria cerrada con centro en 0 y escribimos X^* para denotar el espacio de funcionales lineales continuas definidas en X. Cuando queremos indicar explícitamente la norma del espacio X escribimos $(X, \|\cdot\|)$.

Una transformación lineal continua $T : X \to Y$ entre dos espacios normados es llamado un operador de X en Y. El espacio de todos los operadores entre dos espacios normados X y Y se denota por $\mathcal{B}(X, Y)$ y si $X = Y$, entonces simplemente escribimos $\mathcal{B}(X)$.

La inmersión natural de un espacio normado X en su doble dual X^{**}se denota por $\widehat{\cdot}$ y a la imagen bajo ésta de $x \in X$ por $\widehat{x}$. Así, $\widehat{x}(x^*) = x^*(x)$ para $x^* \in X$ y $x \in X$.

Para un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ el espacio producto $(X^n, \|\cdot\|_\infty)$ es el espacio lineal de las n-adas de elementos de X con las operaciones usuales y la norma $\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$

Ocasionalmente escribimos $X \approx Y$ para indicar que dos espacios normados X

y Y son isomorfos, es decir existe $T \in B(X,Y)$ biyectivo y bicontinuo.

Sea E un espacio de Banach $k-$dimensional con base $\{e_n\}_{n=1}^{k}$. La sucesión $(f_n)_{n=1}^{k}$, donde para cada $1 \leq n \leq k$ la funcional f_n está caracterizada mediante la propiedad $f_n(e_m) = \delta_{n,m}$ (delta de Kronecker) para $1 \leq m \leq k$, es llamada la sucesión de coeficientes funcionales asociados a la base $\{e_n\}_{n=1}^{k}$. Cuando queramos hacer explícito cuáles son los coeficientes funcionales asociados a una base diremos la base $\{e_1, ..., e_k; f_1, ..., f_k\}$.

Proposición 1.1.1 *Sean X un espacio normado y $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subespacios de X de dimensión finita, entonces $Y = \overline{\left\langle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \right\rangle}$ es separable.*

Demostración.

Demostremos que $\left\langle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \right\rangle$ es separable, por lo que el subespacio Y también lo es.

Llamemos $B_n = \left\{x_1^{(n)}, ..., x_{r_n}^{(n)}\right\}$ a la base de E_n, para cada $n \geq 1$. Entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ es un conjunto generador de $\left\langle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \right\rangle$, pues dado $y \in \left\langle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \right\rangle$, se sabe que existe un natural k tal que $y = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i e_i$, donde $e_i \in E_i$ para cada $1 \leq i \leq k$, y $\{a_i\}_{i=1}^{k}$ es una colección de escalares. A su vez cada uno de los elementos e_i se escribe en términos de la base B_i de E_i. En consecuencia, y es una combinación lineal de los elementos $\left\{x_1^{(1)}, ..., x_{r_1}^{(1)}, ..., x_1^{(k)}, ..., x_{r_k}^{(k)}\right\}$.

Esto implica que las combinaciones lineales con coeficientes racionales, si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, o bien de complejos con parte real e imaginaria racional, si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, constituyen un conjunto denso en $\left\langle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \right\rangle$, y dado que esa colección es numerable, se tiene que $\left\langle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \right\rangle$ es separable.■

Proposición 1.1.2 *Sean V un espacio lineal y $x_1^*, ..., x_n^*$ y x^* funcionales lineales en V^*. Hagamos*

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^* = \{x \in V \mid x_i^*(x) = 0 \text{ para todo } i = 1, ..., n\}.$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
a) Existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$x^* = \alpha_1 x_1^* + \cdots + \alpha_n x_n^*.$$

b) Existe $\gamma < \infty$ tal que para todo $x \in V$,

$$|x^*(x)| \leq \gamma \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^*(x)|.$$

c) $N \subset \ker x^*$; o sea $x^*(x) = 0$ para todo $x \in N$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b) Sea $\gamma = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, entonces para cualquier $x \in V$ se tiene que

$$|x^*(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i x_i^*(x)| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, |x_i^*(x)| \leq \gamma \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^*(x)|.$$

b) $\Rightarrow$ c) La prueba es obvia.

c) $\Rightarrow$ a) Demostremos esta parte por inducción. Sea $n = 1$. Sea $x^* \neq 0$, pues de otro modo la afirmación es inmediata. Supongamos entonces que $\ker x_1^* \subset \ker x^*$, de manera que $\ker x_1^* \neq V$. Dado que $\ker x_1^*$ es un subespacio maximal de V y $V \neq \ker x^*$, tenemos que $\ker x_1^* = \ker x^*$. Sea $x_0 \in V - \ker x^*$, entonces $V = \ker x^* \bigoplus \langle x_0 \rangle$ y si se define $h(x) = x^*(x) - \frac{x^*(x_0)}{x_1^*(x_0)} x_1^*(x)$ para cada $x \in V$, entonces $V \subset \ker h$; o sea, $h \equiv 0$ y por tanto, $x^*(x) = \frac{x^*(x_0)}{x_1^*(x_0)} x_1^*(x)$, con lo que queda probada la base de la inducción.

Ahora supongamos válido el enunciado para $n - 1$ y probémoslo para n. Supongamos que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^* \subset \ker x^*$ y definamos $g_i = x_i^* \mid_{\ker x_n^*}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces, si $g = x^* \mid_{\ker x_n^*}$, tenemos que $\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker g_i \subset \ker g$, lo cual significa, por la hipótesis de inducción, que existen escalares $a_1, ..., a_{n-1}$ tales que $x^* \mid_{\ker x_n^*} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^* \mid_{\ker x_n^*}$. De esta manera $\ker x_n^* \subset \ker \left(x^* - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^* \right)$. Entonces, por la base de la inducción, se tiene que existe un escalar a_n tal que $x^* - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^* = a_n x_n^*$, y con esto se obtiene el resultado buscado.$\blacksquare$

Definición 1.1.3 *Para dos espacios de Banach isomorfos X y Y se define la distancia de Banach-Mazur como:*

$$d(X,Y) = \inf \left\{ \begin{array}{c} \|T\| \left\|T^{-1}\right\| : T : X \to Y \\ \textit{es un isomorfimo entre espacios de Banach} \end{array} \right\}$$

Observemos que la distancia de Banach-Mazur no es en realidad una métrica, de hecho ni semimétrica, pues es, en particular $1 = \|I\| \leq \|T\| \left\|T^{-1}\right\|$ para cualquier isomorfismo T entre espacios de Banach, y por consiguiente, no se satisface $d(X,X) = 0$. Sin embargo, su logaritmo si es una semidistancia; el siguiente resultado sirve para probar esta afirmación.

Proposición 1.1.4 *Sean X, Y y Z tres espacios de Banach tales que $X \approx Y$ y $Y \approx Z$. Entonces*

$$d(X,Z) \leq d(X,Y) \cdot d(Y,Z). \tag{1.1}$$

Demostración.

Supongamos que $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ son isomorfismos, entonces $S \circ T : X \to Z$ es un isomorfismo y

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\| \;\; y \left\|(S \circ T)^{-1}\right\| \leq \left\|S^{-1}\right\| \left\|T^{-1}\right\|.$$

Así,

$$d(X,Z) \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \left\|S^{-1}\right\| \cdot \left\|T^{-1}\right\|.$$

De aquí se sigue la desigualdad (1.1).

Proposición 1.1.5 *Sean X un espacio normado, D un subconjunto denso en X, y una red (T_α) acotada en $\mathcal{B}(X)$ tal que para todo $d \in D$ se tiene que $T_\alpha(d) \to d$. Entonces, $T_\alpha(x) \to x$ para todo $x \in X$.*

Demostración.

Por hipótesis existe $M > 0$ tal que $\|T_\alpha\| \leq M$ para todo α. Sea $x \in X$, entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $d_0 \in D$ tal que $\|x - d_0\| < \frac{\epsilon}{(M+1)2}$. Además, existe α_0 tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$ se tiene $\|T_\alpha(d_0) - d_0\| < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, $\alpha \geq \alpha_0$ implica

$$\begin{aligned} \|T_\alpha(x) - x\| &\leq \|T_\alpha(x) - T_\alpha(d_0)\| + \|T_\alpha(d_0) - d_0\| + \|d_0 - x\| \\ &\leq (\|T_\alpha\| + 1)\|d_0 - x\| + \|T_\alpha(d_0) - d_0\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Así, $T_\alpha(x) \to x$ para todo $x \in X$.■

El siguiente es un resultado sobre espacios topológicos que incluimos aquí por su uso generalizado.

Proposición 1.1.6 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ una función. Entonces $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ es cerrado para todo $c \in \mathbb{R}$ si y sólo si para cualquier red $\{x_\alpha\}$ que converge, digamos a x_0, se satisface:*

$$f(x_0) \leq \liminf_\alpha f(x_\alpha).$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos para alguna red $\{x_\alpha\}$ que converge a $x_0 \in X$, se tiene que $\liminf\limits_\alpha f(x_\alpha) < f(x_0)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\liminf_\alpha f(x_\alpha) = \alpha < f(x_0) - \epsilon$. Por ser α un límite inferior, sabemos que existe una subred $\{y_\beta\}$ de $\{x_\alpha\}$ tal que $f(y_b) \to \alpha$. Dado que $\alpha < f(x_0) - \epsilon$, existe β_o tal que si $\beta \geq \beta_0$, entonces $f(y_\beta) < f(x_0) - \epsilon$. Así, $\{y_\beta\}_{\beta \geq \beta_0}$ es una subred de $\{x_\alpha\}$ que está contenida en el conjunto cerrado $\{x \in X \mid f(x) \leq f(x_0) - \epsilon\}$. Por tanto, el límite de $\{y_b\}_{b \geq b_0}$, que es el mismo x_0, pertenece a ese mismo conjunto. Por consiguiente $f(\lim y_b) = f(x_0) \leq f(x_0) - \epsilon$, lo que es falso. Por tanto, $f(x_0) \leq \liminf_\alpha f(x_\alpha)$.

$\Leftarrow$) La prueba de esta implicación es obvia.■

1.2 Los espacios $(\sum \oplus X_k)_p$

Proposición 1.2.1 *Sean $1 \leq p < \infty$ y $\{(X_k, \|\cdot\|_k)\}_{k=1}^\infty$ una familia de espacios de Banach. Definimos*

$$\left(\sum \oplus X_k\right)_p = \left\{(x_k)_{k=1}^\infty : x_k \in X_k \text{ para cada } k \geq 1, \text{ y } \left(\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}.$$

Entonces, $(\sum \oplus X_k)_p$ es un subespacio vectorial de $\prod_{k \geq 1} X_k$ y $\left((\sum \oplus X_k)_p, \|\cdot\|\right)$ es un espacio de Banach, donde $\|(x_k)_{k=1}^\infty\| = \left(\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ para $(x_k)_{k=1}^\infty \in (\sum \oplus X_k)_p$.

Demostración.

Observemos que para $(x_k)_{k=1}^\infty$ en $\prod_{k \geq 1} X_k$ se cumple: $(x_k)_{k=1}^\infty \in (\sum \oplus X_k)_p$ si y sólo si $(\|x_k\|_k)_{k=1}^\infty \in \left(l^p, \|\cdot\|_p\right)$, y de hecho

$$\|(\|x_k\|)_{k=1}^\infty\|_p = \|(x_k)_{k=1}^\infty\|.$$

i) $\left(\sum_{k=1}^\infty \|0\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, o sea, $(0)_{k=1}^\infty \in (\sum \oplus X_k)_p$ y $\|(0)_{k=1}^\infty\| = 0$. Por otra parte, si $\|(x_k)\| = 0$, entonces$\|(\|x_k\|_k)\|_p = 0$; es decir, $(\|x_k\|_k) = (0)$, y así, $(x_k) = (0)$.

ii) Sea λ un escalar y (x_k) en $(\sum \oplus X_k)_p$, entonces $(|\lambda| \|x_k\|_k) = (\|\lambda x_k\|_k) \in \ell^p$ y así, $\lambda(x_k) \in (\sum \oplus X_k)_p$; más aún,

$$\|\lambda(x_k)\| = \|(\|\lambda x_k\|_k)\|_p = |\lambda| \|(\|x_k\|_k)\|_p = |\lambda| \|(x_k)\|.$$

iii) Sean (x_k) y (y_k) en $(\sum \oplus X_k)_p$. Sabemos que $(\|x_k\|_k + \|y_k\|_k)$ está en l^p, y por consiguiente,

$$\left(\sum_{k=1}^\infty \|x_k + y_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^\infty (\|x_k\|_k + \|y_k\|_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|(\|x_k\|_k)\|_p + \|(\|y_k\|_k)\|_p < \infty$$

de manera que $(x_k + y_k)$ está en $\left(\sum \oplus X_k\right)_p$ y

$$\|(x_k + y_k)\| \leq \|(x_k)\| + \|(y_k)\|.$$

Con esto queda probado que $\left(\left(\sum \oplus X_k\right)_p, \|\cdot\|\right)$ es un espacio normado.

Veamos que $\left(\left(\sum \oplus X_k\right)_p, \|\cdot\|\right)$ es completo. Tomemos una sucesión de Cauchy $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\left(\left(\sum \oplus X_k\right)_p, \|\cdot\|\right)$, donde $y_n = (y_k^n)_{k=1}^{\infty}$ para cada $n \geq 1$.

Sea $\epsilon > 0$. Existe un natural N tal que si $m, n \geq N$, entonces

$$\|y_n - y_m\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k^n - y_k^m\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

En particular,

$$\left(\sum_{k=1}^{r} \|y_k^n - y_k^m\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \tag{1.2}$$

para todo $r \geq 1$, si $m, n \geq N$; de donde, $\|y_k^n - y_k^m\|_k^p < \epsilon^p$ para cada $1 \leq k$, si $m, n \geq N$.

Así, tenemos que para cada $k \geq 1$, la sucesión $(y_k^n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y por tanto convergente, en el espacio de Banach X_k. Hagamos $y_k = \lim\limits_{n \to \infty} y_k^n$. Afirmamos que $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ es el límite de la sucesión (y_n).

Sea $r \geq 1$. Al tomar $n \geq N$ y hacer $m \to \infty$ en (1.2) obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{r} \|y_k^n - y_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$$

y por tanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k^n - y_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \text{ si } n \geq N. \tag{1.3}$$

De donde, $\left(y_k^N - y_k\right)_{k=1}^{\infty} \in \left(\sum \oplus X_k\right)_p$ y por la linealidad de este espacio concluimos que $(y_k)_{k=1}^{\infty} \in \left(\sum \oplus X_k\right)_p$.

Dado que $\epsilon > 0$ fue arbitraria, se tiene que $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ es el límite en $\left(\left(\sum \oplus X_k\right)_p, \|\cdot\|\right)$ de la sucesión (y_n).■

1.3 Anulador y preanulador. El adjunto de un operador

Definición 1.3.1 *Sea X un espacio de Banach. Para $A \subset X$ y $V \subset X^*$, definimos:*

$A^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*(a) = 0$ para todo $a \in A\}$.
$V_{\perp} = \{x \in X : x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in V\}$.
$A^{\perp}$ es llamado el anulador de A y $V_{\perp}$ el preanulador de V.

Proposición 1.3.2 *Sea X un espacio de Banach. Si $A, B \subset X$ con $A \subset B$ y $V, W \subset X^*$, con $V \subset W$ entonces:*
a) $B^{\perp} \subset A^{\perp}$, $W_{\perp} \subset V_{\perp}$.
b) $\overline{A}^{\perp} = A^{\perp}, \overline{V}_{\perp} = V_{\perp}$.
c) $X^{\perp} = \{0\}, X^*_{\perp} = \{0\}$.

Demostración.
a) Sea $x^* \in B^{\perp}$, entonces $x^*(b) = 0$ para todo $b \in B$; en particular, $x^*(a) = 0$ para todo $a \in A$, es decir que $x^* \in A^{\perp}$.

Análogamente, tomemos $x \in W_{\perp}$, entonces $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in W$, lo cual implica que $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in V$.

b) Por a), $\overline{A}^{\perp} \subset A^{\perp}$. Por otra parte, si $x^* \in X^*$ y $x^*(a) = 0$ para todo $a \in A$, entonces $x^*\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x^*(a_n) = 0$ para toda sucesión (a_n) en A que es convergente; de donde se sigue $A^{\perp} \subset \overline{A}^{\perp}$.

Para demostrar la segunda igualdad procederemos de manera análoga. Por el inciso a), $\overline{V}_{\perp} \subset V_{\perp}$, y, si tomamos $x \in X$ tal que $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in V$, y se considera una sucesión (x_n^*) en V convergente, entonces $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n^*\right)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x) = 0$. De ahí que $\overline{V}_{\perp} \supset V_{\perp}$.

c) Por definición, $f \in X^{\perp}$ si y sólo si $f \in X^*$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, es decir $f \equiv 0$.

Es claro que $0 \in X^*_{\perp}$. Por otra parte, si $x \neq 0$, el Teorema de Hahn Banach asegura la existencia de un funcional $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq 0$ y entonces, $x \notin X^*_{\perp}$. Así $x \in X^*_{\perp}$ si y sólo si $x = 0$.■

Definición 1.3.3 *Un operador $P : X \to X$ entre dos espacios normados es llamado una proyección si $P^2 = P$. Se dirá que es una proyección sobre E si $P(X) = E$.*

Definición 1.3.4 *Sea $T : X \to Y$ un operador entre dos espacios normados. El operador $T^* : Y^* \to X^*$ definido como $T(y^*) = y^* \circ T$ es llamado el adjunto de T.*

Entre las propiedades de T^* están:

- $\|T^*\| = \|T\|$.
- La transformación $^* : \underset{T}{B(X,Y)} \underset{\to}{\to} \underset{T^*}{B(Y^*, X^*)}$ es un operador.

- $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ si $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ son operadores entre los espacios normados X, Y y Z.
- $T^*\left(\widehat{X}\right) = \widehat{T(X)}$.

Proposición 1.3.5 *Sean X y Y dos espacios normados y $T \in B(X, Y)$. T es un operador de rango finito si y sólo si T^* lo es.*

Demostración

Recordamos que se dice que un operador es de rango finito si la dimensión de su rango es finita.

Supongamos que T es de rango finito y sea $(y_1, ..., y_n)$ una base de $T(X)$. Consideremos la $n-$ada $(y_1^*, ..., y_n^*) \in Y^{*n}$ de coeficientes funcionales de (y_i). Entonces $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(T(x))\, y_i$ para todo $x \in X$. Así, para $y^* \in Y^*$ y $x \in X$ tenemos, $T^*(y^*)(x) = y^*\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(T(x))\, y_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \widehat{y_i}(y^*)\, T^*(y_i^*)(x)$ y así, $\langle T^*(y_1^*), ..., T^*(y_n^*)\rangle = T^*(Y^*)$ y T^* es de rango infinito.

Inversamente, supongamos que T^* tiene rango finito. Por la primera parte de la prueba, $T^{**}(X^{**})$ tiene dimensión finita y como $\widehat{T(X)} = T^*\left(\widehat{X}\right) \leq T^{**}(X^{**})$ se sigue que $T(X)$ tiene también dimensión finita.■

Proposición 1.3.6 *Sean X y Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador. Entonces*

a) $\ker(T^*) = \operatorname{Ran}(T)^{\perp}$. *En particular si* $\operatorname{Ran}(T)$ *es denso en Y, entonces* $\ker(T^*) = 0$; *o sea T^* es inyectivo.*

b) $\ker(T) = \operatorname{Ran}(T^*)_{\perp}$.

c) $\overline{\operatorname{Ran}(T)} = \ker(T^*)_{\perp}$.

d) $\overline{\operatorname{Ran}(T^*)} \subset \ker(T)^{\perp}$. *Si* $\operatorname{Ran}(T)$ *es cerrado, en particular si T es una proyección, entonces se da la igualdad.*

Demostración.

a) Observemos que

$$\begin{aligned} x^* &\in \ker T^* \Leftrightarrow x^* \circ T = 0 \\ &\Leftrightarrow x^*(T(x)) = 0 \text{ para todo } x \text{ en } X \\ &\Leftrightarrow x^* \in (\operatorname{Ran} T)^{\perp}. \end{aligned}$$

Así, $\ker T^* = (\operatorname{Ran} T)^{\perp}$. Si $\operatorname{Ran}(T)$ es denso en Y, entonces

$$\ker T^* = (\operatorname{Ran}(T))^{\perp} = \left(\overline{\operatorname{Ran}(T)}\right)^{\perp} = Y^{\perp} = 0.$$

b) Como Y^* es una familia separante de funciones para Y, entonces

$$T(x) = 0 \Leftrightarrow y^*(T(x)) = T^*(y^*)(x) = 0 \text{ para todo } y^* \in Y^*.$$

O sea, $x \in \ker(T)$ si y sólo si $x \in \operatorname{Ran}(T^*)_\perp$ y obtenemos b).

c) Para probar que $\overline{\operatorname{Ran}(T)} \subset \ker(T^*)_\perp$ tomemos $y \in \overline{T(X)}$. Entonces existe una sucesión (x_n) en X tal que $T(x_n) \to y$. Dada $y^* \in \ker(T^*)$, se tiene:

$$0 = T^*(y^*)(x_n) = y^*(T(x_n))$$

y

$$y^*(T(x_n)) \to y^*(y) \text{ cuando } n \to \infty.$$

De manera que $y^*(y) = 0$ para cada $y^* \in \ker(T^*)$. Así, $y \in \ker(T^*)_\perp$.

Para probar la contención $\overline{\operatorname{Ran}(T)} \supset \ker(T^*)_\perp$, supongamos que existe $y \in \ker(T^*)_\perp$ tal que $y \notin \overline{\operatorname{Ran}(T)}$. Así, por el Teorema de separación de Hahn-Banach, existe una funcional $y^* \in Y^*$ tal que $y^*(y) \neq 0$ y $y^*(T(x)) = 0$ para todo $x \in X$. Notemos que esto último nos dice que $T^*(y^*)$ es la funcional cero, y que por tanto $y^* \in \ker(T^*)$, y como $y^*(y) \neq 0$, se contradice el hecho de que $y \in \ker(T^*)_\perp$.

d) Se probará más adelante cuando se haya introducido la topología w^*. ■

Corolario 1.3.7 *Si $S : X \to Y$ y $P : X \to Y$ son dos operadores definidos entre espacios de Banach X y Y tales que* $\operatorname{Ran} S \subset \operatorname{Ran} P$*, entonces* $\ker P^* \subset \ker S^*$*.*

Demostración.

Como $\operatorname{Ran} S \subset \operatorname{Ran} P$, se tiene que $(\operatorname{Ran} P)^\perp \subset (\operatorname{Ran} S)^\perp$. Por a) de la proposición anterior, $\ker P^* \subset \ker S^*$.■

Corolario 1.3.8 *Sea $T : X \to Y$ un operador suprayectivo entre espacios de Banach, entonces $T^* : Y^* \to X^*$ es un operador inyectivo.*

Demostración.

Se sigue inmediatamente del inciso a) de la proposición anterior.■

Proposición 1.3.9 *Sea X un espacio de Banach y $P : X \to X$ una proyección. Entonces $(P(X))^*$ es isomorfo a $P^*(X^*)$ y $d((P(X))^*, P^*(X^*)) \leq \|P\|$.*

Demostración.

Sea $T : (P(X))^* \to P^*(X^*)$ definida como $T(g) = P^*(x^*)$, donde x^* es cualquier extensión continua a X^* de g. Esta transformación está bien definida, pues si x^* y y^* son dos extensiones continuas de g y $x \in X$, entonces

$$P^*(x^*)(x) = x^*|_{P(X)}(P(x)) = g(P(x)) = P^*(y^*)(x).$$

Evidentemente T es una transformación lineal, y si $T(g) = 0$ entonces $x^* \circ P = g \circ P = 0$, de manera que $g = 0$, o sea que T es inyectiva. Además dado $x^* \in X^*$, se tiene que $g = x^* \mid_{P(X)}$ cumple que $T(g) = P^*(x^*)$, y por tanto T es sobre.

Veamos que T es bicontinua, y estimemos $\|T\|$ y $\|T^{-1}\|$ para aproximar la distancia Banach-Mazur de $(P(X))^*$ y $P^*(X^*)$.

Dado $g \in P(X)^*$ sea $x^* \in X^*$ una extensión de Hahn-Banach de g. Entonces, $\|T(g)\| = \|P^*(x^*)\| \leq \|P\| \|g\|$, con lo cual T es acotada y $\|T\| \leq \|P\|$. Por otra parte, si $P^*(x^*) \in P^*(X^*)$, entonces $T^{-1}(P^*(x^*)) = x^* \mid_{P(x)}$, y para $x \in X$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left\|x^* \mid_{P(X)} (P(x))\right\| &= \left\|x^* \left(P^2(x)\right)\right\| \\ &= \|P^*(x^*)(P(x))\| \\ &\leq \|P^*(x^*)\| \|P(x)\| \end{aligned}$$

Así, $\left\|T^{-1}(P^*(x^*))\right\| = \left\|x^* \mid_{P(X)}\right\| \leq \|P^*(X^*)\|$, de manera que $\left\|T^{-1}\right\| \leq 1$. Todo esto nos dice que $d\left((P(X))^*, P^*(X^*)\right) \leq \|T\| \left\|T^{-1}\right\| \leq \|P\|$.■

1.4 Topologías w y w^*

Definición 1.4.1 *Sea X un espacio normado. La topología débil w está definida en X por la familia de seminormas $\{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ donde $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$ para todo $x \in X$. La topología débil-$*$ denotada por w^* está definida en X^* por la familia de seminormas $\{p_x : x \in X\}$, donde $p_x(x^*) = |\widehat{x}(x^*)| = |x^*(x)|$ para todo $x^* \in X^*$.*

Proposición 1.4.2 *Sea X un espacio de Banach. Entonces $(X^*, w^*)^* = \widehat{X}$.*

Demostración.

$\widehat{X} \subset (X^*, w^*)^*$, ya que $|\widehat{x}(x^*)| = p_x(x^*)$ para todo $x \in X$ y $x^* \in X^*$.

Inversamente, si $f \in (X^*, w^*)^*$, entonces existe $x \in X$ tal que $|f(x^*)| \leq p_x(x^*) = |\widehat{x}(x^*)|$ para todo $x^* \in X^*$. Por la Proposición 1.1.2 se tiene que $f = \lambda\widehat{x} = \widehat{\lambda x}$ para algún escalar λ y por tanto, $f \in \widehat{X}$.■

A continuación recordamos dos teoremas clásicos del Análisis funcional, lo enunciamos solo para buscar que la exposición sea lo más completa posible. Su demostración puede encontrarse en [15].

Teorema 1.4.3 *(Teorema de Goldstine) Sea X un espacio normado, y $\widehat{\cdot} : X \to X^{**}$ el mapeo canónico. Entonces $B_{\widehat{X}}$ es w^*- denso en $B_{X^{**}}$.*

Teorema 1.4.4 *(Teorema de Helly) Sea X un espacio normado. Sea $\{f_1, ..., f_n\} \subset X^*$ una colección finita no vacía y sean $c_1, ..., c_n$ escalares. Entonces son equivalentes:*

a) Existe $x_0 \in X$ tal que $f_j(x_0) = c_j$ para cada $1 \leq j \leq n$.
b) Existe $M > 0$ tal que

$$|\alpha_1 c_1 + ... + \alpha_n c_n| \leq M \|\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n\|$$

para cada conjunto de escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Además, si se cumple b), para cada $\epsilon > 0$ el elemento x_0 que satisface la condición a) puede escogerse de manera que $\|x_0\| \leq M + \epsilon$.

Teorema 1.4.5 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $\|\cdot\|_a$ una norma definida en X^* tal que $\|\cdot\|_a$ es equivalente a la norma dual de $\|\cdot\|$. Supongamos que siempre que (x_c^*) es una red w^*-convergente en X^*, se cumple:*

$$\|w^* - \lim x_c^*\|_a \leq \liminf_c \|x_c^*\|_a .$$

Entonces, existe una norma $\|\cdot\|_b$ en X, equivalente a $\|\cdot\|$, tal que $\|\cdot\|_a$ coincide con la norma dual de $\|\cdot\|_b$.

Demostración.

El símbolo $\|\cdot\|$ va a ser usado sin distinción para referirnos tanto a la norma original en X, como a la que ella induce naturalmente en X^*. Los símbolos $\|\cdot\|_a^*$ y $\|\cdot\|_b^*$ se usarán para referirnos a las normas duales de $\|\cdot\|_a^*$ y $\|\cdot\|_b$ en X^* y X^{**}, respectivamente.

Sea $x \in X$, entonces definimos la norma $\|\cdot\|_b$ en X como:

$$\|x\|_b = \|\widehat{x}\|_a^* = \sup\{|\widehat{x}(x^*)| : \|x^*\|_a \leq 1\}.$$

Comprobamos ahora que se trata de una norma equivalente a $\|\cdot\|$. Sean $m, M > 0$ tales que

$$m\|x^*\| \leq \|x^*\|_a \leq M\|x^*\|$$

para todo $x^* \in X^*$; así,

$$\begin{aligned} \|x\|_b &= \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\|_a \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|x^*(x)| : m\|x^*\| \leq 1\} \\ &\leq \frac{1}{m}\|\widehat{x}\| = \frac{1}{m}\|x\|. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|\widehat{x}\| = \sup\{|x^*(x)| \mid \|x^*\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\left\{|x^*(x)| : \frac{1}{M}\|x^*\|_a \leq 1\right\} \\ &= M\|x\|_b. \end{aligned}$$

Por tanto, $m\|x\|_b \leq \|x\| \leq M\|x\|_b$.

Sólo falta demostrar que $\|\cdot\|_b^* = \|\cdot\|_a$. Sea $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\|_a \leq 1$. Para $x \in X$, con $\|x\|_b \leq 1$, se tiene que

$$|x^*(x)| = |\widehat{x}(x^*)| \leq \|\widehat{x}\|_a^* \|x^*\|_a = \|x\|_b \|x^*\|_a \leq 1.$$

De manera que

$$\|x^*\|_b^* = \sup \{|x^*(x)| : \|x^*\|_b \leq 1\} \leq 1$$

siempre que $\|x^*\|_a \leq 1$.

Dado $x^* \in X^*$ distinto de cero, como $z^* = \frac{x^*}{\|x^*\|_a}$ cumple que $\|z^*\|_a = 1$, y por lo anterior: $\|z^*\|_b^* \leq 1$, entonces $\|x^*\|_b^* \leq \|x^*\|_a$. De donde,

$$\|x^*\|_b^* \leq \|x^*\|_a$$

para todo $x^* \in X^*$

Inversamente, sean $x^* \in X^*$, $\epsilon > 0$ y V un subespacio $n-$dimensional de X con base $\{x_1, ...x_n\}$.

La inmersión algebraica $\widehat{\cdot}: (X, \|\cdot\|_b) \to (X^*, \|\cdot\|_a)^*$ es una isometría, pues

$$\|\widehat{x}\|_a^* = \sup \{|x^*(x)| \mid \|x^*\|_a \leq 1\} = \|x\|_b .$$

Sean $a_1, ..., a_n$ escalares arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned} |a_1 x^*(x_1) + ... + a_n x^*(x_n)| &\leq \|x^*\|_b^* \|a_1 x_1 + .. + a_n x_n\|_b \\ &= \|x^*\|_b^* \|a_1 \widehat{x_1} + ... + a_n \widehat{x_n}\|_a^* . \end{aligned}$$

Así, por el Teorema de Helly existe $x_V^* \in X^*$ tal que $x_V^*(x_i) = \widehat{x_i}(x_V^*) = x^*(x_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$ y tal que $\|x_V^*\|_a \leq \|x^*\|_b^* + \epsilon$. En particular, $x_V^* \mid_V = x^* \mid_V$.

Dirijamos con la relación de inclusión a todos los subespacios V de dimensión finita de X, entonces podemos considerar la red (x_V^*) en X^*, donde cada x_V^* está construido como arriba.

Sea $x \in X$, entonces para todo $V \leq X$ de dimensión finita que contenga a x, se tiene $x_V^*(x) = x^*(x)$. De donde $x_V^*(x) \to x^*(x)$ para todo $x \in X$ y por tanto, (x_V^*) es una red w^*-convergente a x^*.

Tenemos,

$$\|x^*\|_a \leq \liminf_V \|x_V^*\|_a \leq \|x^*\|_b^* + \epsilon.$$

Es decir, $\|x^*\|_a \leq \|x^*\|_b^*$ para todo $x^* \in X^*$. Por lo que $\|\cdot\|_a = \|\cdot\|_b^*$ ■

Definición 1.4.6 *Sea X un espacio normado y $A \subset X$, entonces se dice que A es $w-$ acotado (débilmente acotado) si el conjunto $\{x^*(a) \mid a \in A\}$ es acotado para cada $x^* \in X^*$.*

Proposición 1.4.7 *Sea X un espacio de Banach y $A \subset X$, entonces A es acotado en la norma si y sólo si es débilmente acotado.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Si A es acotado en la norma, entonces existe $M > 0$ tal que $\|a\| \leq M$ para todo $a \in A$. Así, dado cualquier $x^* \in X^*$ y $a \in A$, tenemos que $|x^*(a)| \leq \|x^*\| \|a\| \leq M \|x^*\|$ de manera que $\{x^*(a) \mid a \in A\}$ está acotado por $M \|x^*\|$ para cada $x^* \in X^*$ y A es $w-$acotado
$\Leftarrow$) Si A es $w-$acotado entonces para cada $x^* \in X^*$ existe $M_{x^*} > 0$ tal que $|\widehat{a}(x^*)| \leq M_{x^*}$ para todo $a \in A$, entonces por el teorema de Banach-Steinhaus existe $M > 0$ tal que $\|a\| = \|\widehat{a}\| \leq M$.■

Lema 1.4.8 *Sea X un espacio normado y $x^* \in X^{\#}$. Entonces $x^* \in X^*$ si y sólo si x^* es $w-$continua.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sean $x^* \in X^*$ y $\epsilon > 0$. Entonces $B = \{x \mid |x^*(x)| < \epsilon\}$ es una vecindad abierta en la topología débil y x^* es por tanto, $w-$continua.
$\Leftarrow$) La topología de la norma es más fuerte que la débil.■

Lema 1.4.9 *Sean X y Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ una transformación lineal. Entonces T es $(w - w)-$continuo si y solamente si $y^* \circ T$ es acotado para cada $y^* \in Y^*$ (o sea, $y^* \circ T \in X^*$).*

Demostración.
Sea $(x_a) \subset X$ una red $w-$convergente a $x \in X$. Entonces $T(x_a) \xrightarrow{w} T(x)$ si y sólo si $y^*(T(x_a)) \to y^*(T(x))$ para todo $y^* \in Y^*$. De manera que T es $(w - w)-$continuo si y sólo si la funcional $y^* \circ T$ es $w-$continua para todo $y^* \in Y^*$, lo cual, por el Lema 1.4.8 equivale a que T es $(w - w)-$continuo si y sólo si
$y^* \circ T \in X^*$ para todo $y^* \in Y^*$.■

Proposición 1.4.10 *Sean X y Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ una transformación lineal. Entonces T es $(\|\cdot\| - \|\cdot\|)-$continuo si y sólo si T es $(w - w)-$continuo.*

Demostración.
T es norma continuo si y sólo si $T(B_1[0])$ es norma acotado, y por la Proposición 1.4.7, sabemos que esto ocurre si y sólo si $T(B_1[0])$ es $w-$acotado, es decir, si y sólo si $y^*(T(B_1[0]))$ es acotado para todo $y^* \in Y^*$, o lo que es lo mismo si y sólo si $y^* \circ T$ es un operador acotado para cada $y^* \in Y^*$. Finalmente, por el Lema 1.4.9 obtenemos: T es norma continuo si y sólo si T es $(w - w)-$continuo.■

Proposición 1.4.11 *Sean X y Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador, entonces $T^* : Y^* \to X^*$ es $w^* - w^*-$ continuo. Recíprocamente, si $S_1 : Y^* \to X^*$ es una transformación lineal es $w^* - w^*-$ continua, entonces existe un única transformación lineal $(w - w)-$continuo, y por consiguiente, $(\|\cdot\| - \|\cdot\|)-$ continua, $T : X \to Y$, tal que $T^* = S_1$.*

Más aún, si $X = Y$ y $S_1 : X^* \to X^*$ es una proyección, entonces $T : X \to X$ también es una proyección.

Demostración.

Para la primera parte, consideremos una red (y^*_α) en Y^* que w^*- converge a $y^* \in Y^*$. Entonces $T^*(y^*_\alpha)(x) = y^*_\alpha(T(x))$ para todo $x \in X$. Gracias a la w^*- convergencia de (y^*_α), se tiene entonces que $y^*_\alpha(T(x)) \to y^*(T(x))$ para todo $x \in X$, o, lo que es lo mismo, $T^*(y^*_\alpha)(x) \to T^*(y^*)(x)$ para todo $x \in X$; lo cual significa que $T^*(y^*_\alpha)$ w^*-converge a $T^*(y^*)$ en X^*, de manera que T^* es $(w^* - w^*)-$ continuo.

Para la segunda parte, supongamos que $S_1 : Y^* \to X^*$ es lineal y $(w^* - w^*)-$ continua. Sea (y^*_α) una red en Y^* que w^*- converge a $y^* \in Y^*$, entonces $(S_1(y^*_\alpha))$ es una red w^*-convergente a $S_1(y^*)$ en X^*. Esto significa que para cada $x \in X$, la transformación lineal $\widehat{x} \circ S_1 : Y^* \to \mathbb{F}$ satisface

$$(\widehat{x} \circ S_1)(y^*_\alpha) \to (\widehat{x} \circ S_1)(y^*)$$

de manera que $\widehat{x} \circ S_1 : Y^* \to \mathbb{F}$ es un funcional lineal w^*- continuo para cada $x \in X$.

Por la Proposición 1.4.2, $\widehat{x} \circ S_1$ está en $\widehat{Y}$ para cada $x \in X$. De esta forma, si llamamos $\widetilde{\cdot} : \widehat{Y} \to Y$ al operador inverso del isomorfismo natural entre Y y $\widehat{Y} \subset Y^{**}$, entonces $\widetilde{\widehat{x} \circ S_1} \in Y$.

Definamos $T : X \to Y$ como $T(x) = \widetilde{\widehat{x} \circ S_1}$. Es claro que T es lineal. Para demostrar la $(w - w)-$ continuidad de T, consideremos una red (x_a) en X que $w-$converge a $x \in X$. Tenemos

$$y^*(T(x_a)) = y^*\left(\widetilde{\widehat{x_a} \circ S_1}\right) = \widehat{x_\alpha} \circ S_1(y^*)$$

y

$$\widehat{x_\alpha} \circ S_1(y^*) \to S_1(y^*)(x)$$

para todo $y^* \in Y^*$. Así,

$$y^*(T(x_a)) \to S_1(y^*)(x) = \widehat{x} \circ S_1(y^*) = y^*(T(x))$$

para todo $y^* \in Y^*$, lo cual significa que $T(x_a)$ w-converge a $T(x)$ en Y y T es $(w - w)-$ continuo. Por la Proposición 1.4.10 se tiene entonces que T es $(\|\cdot\| - \|\cdot\|)-$ continuo.

Veamos que $T^* = S_1$. Sea $y^* \in Y^*$, entonces $T^*(y^*) = y^* \circ T$, y por tanto

$$\begin{aligned} T^*(y^*)(x) &= y^*\left(\widetilde{\widehat{x} \circ S_1}\right) = (\widehat{x} \circ S_1)(y^*) \\ &= S_1(y^*)(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ y así $T^*(y^*) = S_1(y^*)$. El operador T es único debido al teorema de Hahn-Banach.

Ahora supongamos que estamos considerando el caso particular en que $X = Y$ y S_1 es una proyección, entonces

$$T^2(x) = \widetilde{\widehat{T(x)} \circ S_1}$$

y por consiguiente,

$$\widehat{T^2(x)} = \widehat{T(x)} \circ S_1 = \widehat{x} \circ S_1 \circ S_1 = \widehat{x} \circ S_1 = \widehat{T(x)}$$

para todo $x \in X$. Es decir, $T^2 = T$ y así, $T : X \to X$ es también una proyección.■

Corolario 1.4.12 *Sean X y Y dos espacios normados, y $T : X \to X$ un operador. T es una proyección si y sólo si $T^* : X^* \to X^*$ es una proyección.*

Demostración.

Supongamos que T es una proyección, entonces

$$T^*(T^*(y^*)) = y^* \circ T \circ T = y^* \circ T = T^*(y^*).$$

O sea, $(T^*)^2 = T^*$ y sabemos que $\|T\| = \|T^*\|$, por tanto, T^* es una proyección El recíproco se sigue de la Proposición 1.4.11.■

Lema 1.4.13 *Si V es subespacio de X, entonces $\left(V^{\perp}\right)_{\perp} = \overline{V}$, y si W es un subespacio de X^*, entonces $(W_{\perp})^{\perp} = \overline{W}^{w^*}$* $\ker(T) = \operatorname{Ran}(T^*)_{\perp}$.

Demostración.

a) Es claro que $V \subset \left(V^{\perp}\right)_{\perp}$ y ahora mostramos que $\left(V^{\perp}\right)_{\perp}$ es cerrado: sea (x_n) una sucesión en $\left(V^{\perp}\right)_{\perp}$, convergente a $x \in X$. Dado que para todo $x^* \in V^{\perp}$ se cumple que $x^*(x_n) = 0$ para cualquier $n \geq 1$, entonces $x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = 0$. De manera que $x \in \left(V^{\perp}\right)_{\perp}$.

Lo único que queda por ver es que $\left(V^{\perp}\right)_{\perp} \subset \overline{V}$. Para ello consideremos $x \notin \overline{V}$. Por uno de los corolarios del Teorema de Hahn-Banach, existe una funcional $x^* \in X^*$ tal que $\overline{V} \subset \ker x^*$, y $x^*(x) > 0$. Esto quiere decir que $x^* \in V^{\perp}$ y $x \notin \left(V^{\perp}\right)_{\perp}$. Es decir, todo elemento de $\left(V^{\perp}\right)_{\perp}$ también lo es de $\overline{V}$.

b) La demostración es totalmente análoga a la anterior. Es claro que $W \subset (W_{\perp})^{\perp}$ y $(W_{\perp})^{\perp}$ es w^*-cerrado ya que si (x_n^*) es una sucesión en $(W_{\perp})^{\perp}$ convergente a $x^* \in X$. Dado que para todo $x \in W_{\perp}$ se cumple que $x_n^*(x) = 0$ para todo

$n \geq 1$, entonces $x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = 0$. De manera que $x^* \in (W_\perp)^\perp$. De aquí se sigue que $\overline{W}^{w^*} \subset (W_\perp)^\perp$.

Por otra parte, sea $x^* \notin \overline{W}^{w^*}$. Por uno de los corolarios del Teorema de Hahn-Banach, existe una funcional $\widehat{x} \in (X^*, w^*)^*$ tal que $\overline{W}^{w^*} \subset \ker \widehat{x}$, y $\widehat{x}(x^*) > 0$. Esto quiere decir que $x \in W_\perp$ y $x^* \notin (W_\perp)^\perp$. Así. $(W_\perp)^\perp \subset \overline{W}^{w^*}$.■

Corolario 1.4.14 *Sean X y Y dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, entonces:*

a) $(\ker(T))^\perp = \overline{\operatorname{Ran} T^*}^{w^*}$.

b) $(\ker(T^*))_\perp = \overline{T(X)}$.

Demostración.

a) Por el inciso b) de la Proposición 1.3.6, sabemos que $\ker(T) = (T^*(Y^*))_\perp$, por lo que $(\ker(T))^\perp = ((T^*(Y^*))_\perp)^\perp$. A su vez, por el Lema anterior tenemos que $((T^*(Y^*))_\perp)^\perp = \overline{T^*(Y^*)}^{w^*}$. Así,

$$(\ker(T))^\perp = \overline{T^*(Y^*)}^{w^*}.$$

b) Por el inciso a) de la Proposición 1.3.6, sabemos que $\ker(T^*) = (T(X))^\perp$, y que, por consiguiente tenemos que $(\ker(T^*))_\perp = \left((T(X))^\perp\right)_\perp$. Por el lema anterior, $\left((T(X))^\perp\right)_\perp = \overline{T(X)}$, de donde

$$(\ker(T^*))_\perp = \overline{T(X)}.■$$

Teorema 1.4.15 *Sean X, y Y dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, entonces*

a) T es inyectivo si y sólo si $\operatorname{Ran} T^*$ es w^*-denso en X^*.

b) T^* es inyectivo si y sólo si $\operatorname{Ran} T$ es denso en Y.

Demostración.

a) Por el inciso a) del corolario anterior tenemos $(\ker(T))^\perp = \overline{T^*(Y^*)}^{w^*}$. T es inyectivo si y sólo si $\ker(T) = \{0\}$, y esta última igualdad equivale a $(\ker(T))^\perp = X^*$. De donde, T es inyectivo si y sólo $\overline{T^*(Y^*)}^{w^*} = X^*$.

b) La prueba es análoga a la anterior. Por el inciso b) del corolario anterior tenemos $(\ker(T^*))_\perp = \overline{T(X)}$.

T^* es inyectivo si y sólo si $\ker(T^*) = \{0\}$ y esto último equivale a que $(\ker(T^*))_\perp = X$. Por tanto, T^* es inyectivo si y sólo si $\overline{T(X)} = X$.■

Corolario 1.4.16 *Sean X y Y dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Si T es un isomorfismo, entonces T^* también lo es.*

Demostración.

Por el Teorema de la función abierta basta probar que si T es biyectivo, entonces T^* también lo es.

Por b) de teorema anterior si T es sobre, entonces T^* es inyectivo.

Supongamos que $x^* \in X^*$. Entonces $x^* \circ T^{-1} \in Y^*$ y

$$T^*\left(x^* \circ T^{-1}\right) = x^* \circ T^{-1} \circ T = x^*,$$

por consiguiente, T^* es suprayectivo.■

El siguiente es un teorema cuya demostración decidimos no incluir y puede encontrarse en [17].

Teorema 1.4.17 *Sean X y Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $\mathrm{Ran}(T)$ *es norma-cerrado.*

b) $\mathrm{Ran}(T^*)$ *es w^*-cerrado.*

c) $\mathrm{Ran}(T^*)$ *es norma-cerrado.*

La siguiente proposición es el inciso d) de la Proposición 1.3.6 que no fue demostrado en su momento por requerirse la noción de la topología w^*.

Proposición 1.4.18 *Sean X y Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador. Entonces $\overline{\mathrm{Ran}\,(T^*)} \subset \ker(T)^{\perp}$. Si $\mathrm{Ran}\,(T)$ es cerrado, en particular si T es una proyección, entonces se da la igualdad.*

Demostración.

Para la primera parte tomemos $x^* \in \overline{\mathrm{Ran}\,(T^*)}$, entonces existe una sucesión (y_n^*) en Y^* tal que $T^*(y_n^*) \to x^*$ cuando $n \to \infty$; en particular, $y_n^*(T(x)) \to x^*(x)$, cuando $n \to \infty$ y para cada $x \in X$. De esta forma, si $x \in \ker(T)$, entonces $x^*(x) = 0$, lo cual significa que $x^* \in \ker(T)^{\perp}$.

Ahora supongamos que $\mathrm{Ran}\,(T)$ es cerrado, entonces su rango es cerrado y por tanto, $\mathrm{Ran}\,(T^*)$ es norma-cerrado y w^*-cerrado en X^*, o sea $\overline{\mathrm{Ran}\,(T^*)} = \overline{\mathrm{Ran}\,(T^*)}^{w^*} = \mathrm{Ran}\,(T^*)$. Sea $x^* \in \ker(T)^{\perp}$, o sea, $x^*(x) = 0$ siempre que $T(x) = 0$ y supongamos que $x^* \notin \mathrm{Ran}\,(T^*)$. Así, existe $\widehat{x} \in (X^*, w^*)$ tal que $\widehat{x}(T^*(z^*)) = 0$ para todo $z^* \in X^*$ y $\widehat{x}(x^*) \neq 0$; es decir, $z^*(T(x)) = 0$ para todo $z^* \in X^*$ y $x^*(x) \neq 0$; de donde $T(x) = 0$ y $x^*(x) \neq 0$, lo que contradice que $x^* \in \ker(T)^{\perp}$. Así, $\ker(T)^{\perp} \subset \overline{\mathrm{Ran}\,(T^*)}$.■

Proposición 1.4.19 *Sea X un espacio de Banach, y sea $Z \leq X^*$ de dimensión finita. Entonces Z es w^*-cerrado.*

Demostración.

Primero notemos que si denotamos por $\tau_{\|\cdot\|}$ y a τ_{w^*} a las topologías relativas en Z inducidas por la norma en X^* y por la topología w^* respectivamente; entonces, por ser Z de dimensión finita y por ser $\left(Z, \tau_{\|\cdot\|}\right)$ y (Z, τ_{w^*}) ambos espacios vectoriales topológicos de Hausdorff, tenemos que $\tau_{\|\cdot\|}$ y τ_{w^*} son equivalentes. En particular como $\tau_{\|\cdot\|}$ es primero numerable, también τ_{w^*} lo es.

Si una sucesión (z_n) en Z es w^*-convergente a $x^* \in X^*$, entonces (z_n) es, según la topología w^*, de Cauchy. De nuevo por la equivalencia de las topologías que están considerándose, tenemos que (z_n) también es de Cauchy en $\left(Z, \tau_{\|\cdot\|}\right)$, y por consiguiente, existe un elemento $z_1 \in Z$ que es el límite de (z_n) en la norma. y por tanto, $z_n \overset{w*}{\to} z_1$; de donde $z_1 = x^*$ y $x^* \in Z$. ■

El que sigue es otro resultado clásico del Análisis Funcional, su demostración puede encontrarse en [15]

Teorema 1.4.20 *(Teorema de Banach-Alaoglu) Sea X un espacio normado. Entonces B_{X^*} es w^*-compacto.*

Proposición 1.4.21 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para cada subespacio $Z \leq X^*$ de dimensión finita y cada $M > 0$, sea $\|\cdot\|_{M,Z}$ la norma definida en X^* como*

$$\|x^*\|_{M,Z} = \|x^*\| + Md(x^*, Z),$$

donde $d(x^*, Z) = \inf\{\|x^* - z\| \mid z \in Z\}$.

Entonces, para cada una de estas normas $\|\cdot\|_{M,Z}$, existe una norma correspondiente $|\cdot|_{M,Z}$, definida en X, equivalente a $\|\cdot\|$, y tal que su norma dual coincide con $\|\cdot\|_{M,Z}$.

Demostración.

Cada norma $\|\cdot\|_{M,Z}$ es equivalente a $\|\cdot\|$ en X^*, ya que si $x^* \in X^*$, entonces

$$\|x^*\| \leq \|x^*\| + Md(x^*, Z) \leq \|x^*\| + M\|x^*\| = (1 + M)\|x^*\|,$$

por lo que

$$\|x^*\| \leq \|x^*\|_{M,Z} \leq (1 + M)\|x^*\|$$

para todo $x^* \in X^*$.

Afirmamos que para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$d_c = \{x^* \in X^* \mid d(x^*, Z) \leq c\}$$

es w^*-cerrado. Notemos que $d_c = \bigcap\limits_{\epsilon>0} (Z + B_{c+\epsilon}[0])$.

Por la Proposición 1.4.19 sabemos que Z es w^*-cerrado, y por el Teorema de Banach-Alaoglu $B_{c+\epsilon}[0]$ es w^*-compacto; de donde, $Z + B_{c+\epsilon}[0]$ es w^*-cerrado para todo $\epsilon > 0$ y d_c también lo es.

Por el Lema 1.1.6, lo anterior quiere decir que para toda red (x^*_α) que es w^*-convergente a x^* en X^*se cumple $d(x^*, Z) \leq \liminf\limits_{\alpha} d(x^*_\alpha, Z)$.

Mostraremos que $\|x^*\| \leq \liminf_{\alpha} \|x_\alpha^*\|$. Dado que para cada $x \in X$ se satisface $x_\alpha^*(x) \to x^*(x)$, entonces, si $\|x\| = 1$ y $\epsilon > 0$, existe α_0 tal que

$$|x^*(x)| - |x_\alpha^*(x)| \leq |x_\alpha^*(x) - x^*(x)| < \epsilon$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Así, $|x^*(x)| \leq |x_\alpha^*(x)| + \epsilon \leq (\|x_\alpha^*\| + \epsilon)$ y entonces, $\|x^*\| \leq \liminf_{\alpha} \|x_\alpha^*\| + \epsilon$. Como esto ocurre para toda $\epsilon > 0$, entonces $\|x^*\| \leq \liminf_{\alpha} \|x_\alpha^*\|$.

Por lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \|x^*\|_{M,Z} &= \|x^*\| + Md(x^*, Z) \leq \liminf_{\alpha} \|x_\alpha^*\| + M \liminf_{\alpha} d(x_\alpha^*, Z) \\ &\leq \liminf_{\alpha} (\|x_\alpha^*\| + Md(x_\alpha^*, Z)) = \liminf_{\alpha} \|x_\alpha^*\|_{M,Z}. \end{aligned}$$

Así, estamos en condiciones de usar, para cada norma $\|\cdot\|_{M,Z}$, el Teorema 1.4.5 y por tanto, es cierta la afirmación.■

1.5 Topologías WOT y SOT en $\mathcal{B}(X,Y)$

En el espacio lineal $\mathcal{B}(X,Y)$ de todos los operadores lineales entre X y Y usualmente se considera la topología definida por la norma. Sin embargo, existen otras topologías que pueden serle asignadas; entre éstas vamos a considerar la topología débil de operadores, cuya abreviatura será WOT, por sus siglas en inglés, y la topología fuerte de operadores, que abreviaremos como SOT, también por sus siglas en inglés. Veamos cómo están definidas y algunas de sus propiedades.

Definición 1.5.1 *Sean X y $(Y, \|\cdot\|)$ dos espacios normados Banach. Para cada $x \in X$, definamos en $\mathcal{B}(X,Y)$ la seminorma $P_x(T) = \|T(x)\|$. Entonces la topología generada por la familia de seminormas $\{P_x : x \in X\}$ se llama la topología fuerte de operadores (SOT).*

Definición 1.5.2 *Sean X y Y dos espacios normados. Para $x \in X, y^* \in Y^*$, definamos en $\mathcal{B}(X,Y)$ la seminorma $P_{x,y^*}(T) = |y^*(T(x))| = |T^*(y^*)(x)|$. A la topología generada por la familia de seminormas $\{P_{x,y^*} : x \in X, y^* \in Y^*\}$ se le llama la topología débil de operadores (WOT).*

Observaciones 1.5.3 *Notamos que la convergencia de operadores según la topología fuerte de operadores es equivalente a la convergencia puntual. Por otra parte, la convergencia puntual de la red de operadores adjuntos (T_α^*) a T^* implica la WOT-convergencia de esa red de operadores (T_α) a T.*

Dado que las topologías débil y fuerte de operadores están definidas por una familia de seminormas, se tiene que tanto $(\mathcal{B}(X,Y), SOT)$ como $(\mathcal{B}(X,Y), WOT)$ son espacios lineales localmente convexos.

Proposición 1.5.4 *Consideremos el espacio $\mathcal{B}(X,Y)$, donde X y $(Y,\|\cdot\|)$ son dos espacios normados. La topología SOT es más fuerte que la topología WOT.*

Demostración.
Sea (T_α) una red en $\mathcal{B}(X,Y)$ convergente, según la topología fuerte de operadores, a $T\in\mathcal{B}(X,Y)$. Esto significa que, si $x\in X$, entonces $T_\alpha(x)$ converge a $T(x)$ en Y y por consiguiente, $(T_\alpha(x))\to y^*(T(x))$ para cada $y^*\in Y^*$, y esto significa que, (T_α) converge a T, según la topología débil de operadores.■

Teorema 1.5.5 *Sean X y $(Y,\|\cdot\|)$ dos espacios normados, y sea $F:\mathcal{B}(X,Y)\to\mathbb{F}$ una transformación lineal al campo escalar, entonces F es $SOT-$ continua si y sólo si F es $WOT-$ continua. O sea, $(\mathcal{B}(X,Y),SOT)^*=(\mathcal{B}(X,Y),WOT)^*$.*

Demostración.
Notemos que, dado que la topología WOT está contenida en la SOT, entonces, si F es $WOT-$ continua, entonces necesariamente es $SOT-$ continua.

Para el recíproco, supongamos que $F:\mathcal{B}(X,Y)\to\mathbb{F}$ es $SOT-$ continua. Esto significa que existe $\epsilon>0$ y una colección finita $\{x_1,...,x_n\}$ de elementos en X, tales que si $P_{x_i}(T)=\|T(x_i)\|<\epsilon$ para todo $1\le i\le n$, entonces $|F(T)|<1$.

Consideremos entonces al espacio producto $(Y^n,\|\cdot\|_\infty)$, y definamos el operador $H:\mathcal{B}(X,Y)\to Y^n$ como $H(T)=(T(x_1),...,T(x_n))$, y el operador $f:\operatorname{ran}(H)\to Y^n$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{B}(X,Y) & \xrightarrow{F} & \mathbb{F}\\ H\downarrow & f\nearrow & \\ \operatorname{ran}(H) & & \end{array}$$

o sea, $f(z)=F(T)$ si $z=H(T)$. Observamos que si $\|H(T)\|_\infty<\delta\epsilon$ con $\delta>0$, entonces $\max_{1\le i\le n}\|T(x_i)\|<\delta\epsilon$, y por tanto, $|F(T)|<1\cdot\delta=\delta$; por esto podemos asegurar que f está bien definido pues si $H(T)=H(R)=z$, entonces $\|H(T)-H(R)\|_\infty=\|H(T-R)\|_\infty<\delta\epsilon$ para todo $\delta>0$ y entonces $|F(T-R)|=|F(T)-F(R)|<\delta$ para cualquier $\delta>0$, lo cual significa $F(T)=F(R)$, Además f es claramente lineal y probamos que es continua argumentando como antes: $\|z-w\|_\infty=\|H(T)-H(R)\|_\infty<\delta\epsilon$ implica $|f(z)-f(w)|=|F(T-R)|<\delta$ para cualquier $\delta>0$.

Así, $f\in(\operatorname{ran}H)^*$, y por el Teorema de Hahn-Banach, existe una extensión $f_1\in(Y^n)^*$ de f. Dado que $(Y^*)^n$ y $(Y^n)^*$ son espacios isomorfos vía la transformación $(y_1^*,...,y_n^*)\to\sum\limits_{i=1}^n y_i^*(\cdot)$, existen $y_1^*,...,y_n^*\in Y^*$ tales que, para cada n- ada $(y_1,...y_n)$ en Y^n, $f_1(y_1,...,y_n)=\sum\limits_{i=1}^n y_i^*(y_i)$.

Para todo $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, tenemos que

$$\begin{aligned} F(T) &= f(H(T)) = f_1(H(T)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i^*(T(x_i)). \end{aligned}$$

Y, por tanto, F es $WOT-$ continua, pues para una red (T_α) y un operador T en $\mathcal{B}(X,Y)$, tales que $T_\alpha \overset{WOT}{\rightarrow} T$, se cumple que $y_i^*(T_\alpha(x_i)) \rightarrow y_i^*(T(x_i))$ para todo $1 \leq i \leq n$, lo cual implica que $F(T_\alpha) \rightarrow F(T)$.■

1.6 Teoremas de separación

Los siguientes dos teoremas no son demostrados aquí, se da una referencia en donde se pueden encontrar sus pruebas.

Teorema 1.6.1 *(Teorema de Separación de Eidelheit) [15] Sean X un espacio vectorial topológico complejo y C_1 y C_2 dos subconjuntos de X convexos y no vacíos tales que C_2 tiene interior C_2^o no vacío y $C_1 \bigcap C_2^o = \emptyset$. Entonces existen $x^* \in X^*$ y $s \in \mathbb{R}$ tales que:*

i) $\operatorname{Re} x^*(x) \geq s$ para todo $x \in C_1$.
ii) $\operatorname{Re} x^*(x) \leq s$ para todo $x \in C_2$.
iii) $\operatorname{Re} x^*(x) < s$ para todo $x \in C_2^o$.

Teorema 1.6.2 *(Teorema de separación de Tukey y Klee) [15] Sean X un espacio vectorial complejo localmente convexo y K y C dos subconjuntos de X convexos, no vacíos y ajenos entre sí. Si K es compacto y C es cerrado, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que* $\sup\{\operatorname{Re} x^*(x) \mid x \in K\} < \inf\{\operatorname{Re} x^*(x) \mid x \in C\}$.

Teorema 1.6.3 *Sean X un espacio vectorial, y τ_1 y τ_2 dos topologías localmente convexas definidas en X. Si $(X,\tau_1)^* = (X,\tau_2)^*$ y $C \subset X$ es convexo, entonces $\overline{C}^{\tau_1} = \overline{C}^{\tau_2}$.*

Demostración.
Sea $p \notin \overline{C}^{\tau_1}$, entonces $\{p\}$ y $\overline{C}^{\tau_1}$ son conjuntos convexos y cerrados en (X,τ_1), y además $\{p\}$ es compacto. Entonces, por el Teorema 1.6.2 se sabe que existen números reales c, ϵ con $\epsilon > 0$ y una funcional $x^* \in (X,\tau_1)^*$ tales que

$$\operatorname{Re} x^*(x) < c < c + \epsilon < \operatorname{Re} x^*(p) \ \text{ para todo } x \in \overline{C}^{\tau_1}.$$

Así, $\{x \in X \mid |x^*(x) - x^*(p)| < \epsilon\} \bigcap \overline{C}^{\tau_1} = \emptyset$. Además, dado que $(X,\tau_1)^* = (X,\tau_2)^*$, se tiene que x^* es τ_2-continua, y por consiguiente, $\{x \in X \mid |x^*(x) - x^*(p)| < \epsilon\}$ es una τ_2-vecindad abierta de p. Es decir, que $X - \overline{C}^{\tau_1}$ es abierto en (X,τ_2), y por consiguiente $\overline{C}^{\tau_1}$ es cerrado ahí mismo; de donde $\overline{C}^{\tau_2} \subset \overline{C}^{\tau_1}$. De manera similar se obtiene que $\overline{C}^{\tau_1} \subset \overline{C}^{\tau_2}$ y por tanto, $\overline{C}^{\tau_1} = \overline{C}^{\tau_2}$.■

Corolario 1.6.4 *Sea C un subconjunto convexo de $\mathcal{B}(X,Y)$, entonces $\overline{C}^{WOT} = \overline{C}^{SOT}$.*

Demostración.
Basta usar los teoremas 1.5.5 y anterior.■

Capítulo 2

Estructuras en espacios de Banach

2.1 Operadores relacionados con subespacios de dimensión finita

Proposición 2.1.1 *Sean X y Y dos espacios normados, entonces $T : X \to Y$ es un operador de rango finito si y sólo si $T^* : Y^* \to X^*$ es de rango finito. Más aún,* $\dim T(X) = \dim T^*(X^*)$.

Demostración.

Sean $T : X \to Y$ un operador de rango finito y $\{x_1, ...x_n\}$ una base de $T(X)$, entonces cada elemento en el rango de T puede escribirse como $T(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) x_i$, con $\{h_1, ..., h_n\}$ en X^*. Por tanto, si $y^* \in Y^*$ y $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} T^*(y^*)(x) &= (y^* \circ T)(x) = y^* \left(\sum_{i=1}^{n} h_i(x) x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i(x) y^*(x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(y^*) h_i \right)(x). \end{aligned}$$

O sea, $T^*(y^*) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(y^*) h_i$ para cada $y^* \in Y^*$. Además $\{h_1, ..., h_n\}$ es linealmente independiente en X^* pues se trata de los coeficientes funcionales asociados a la base $\{x_1, ...x_n\}$. Así, la dimensión de $T^*(Y^*)$ es finita, y de hecho coincide con la dimensión de $T(X)$.

Ahora supongamos que $T^* : Y^* \to X^*$ es de rango finito. Entonces, por lo anterior, sabemos que $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ es de rango finito, es decir, $T^{**}(X^{**})$ es de dimensión finita. Por otra parte, sabemos que $T(X) \cong \widehat{T(X)} = T^{**}\left(\widehat{X}\right)$ y $T^{**}\left(\widehat{X}\right) \leq T^{**}(X^{**})$, por lo que $T : X \to Y$ es de rango finito.$\blacksquare$

Proposición 2.1.2 *Sean X y E dos espacios normados, con E de dimensión finita. Si S y T son dos operadores de X en E con el mismo núcleo, y éste es de codimensión finita, entonces* $\operatorname{Ran} T^* = \operatorname{Ran} S^*$

Demostración.

Si $\ker T = X$, el resultado es obvio. Supongamos $\ker T \neq X$. Para probar que $\operatorname{Ran} T^* \subseteq \operatorname{Ran} S^*$, tomemos $T^*(f) \in \operatorname{Ran} T^*$ y busquemos $g \in X^*$ tal que $T^*(f) = S^*(g)$; o sea, tal que $f(T(x)) = g(S(x))$ para todo x en X.

Dado que la codimensión de $\ker T$ es finita, entonces existe $\{x_1, ..., x_k\} \subseteq X$ linealmente independiente tal que $X = \ker T \oplus \langle\{x_1, ..., x_k\}\rangle$ y $T(x_i) = y_i$ para cada $1 \leq i \leq k$, donde $\{y_1, ..., y_k\}$ es una base de $\operatorname{Ran} T$.

Tomemos $x \in X$, entonces $x = z + \sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_i$, con $z \in \ker T$ y alguna colección de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{k}$.

Así,

$$\begin{aligned} f(T(x)) &= g(S(x)) \Leftrightarrow f\left(T\left(z + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right)\right) = g\left(S\left(z + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i f(T(x_i)) = \sum_{i=1}^{k} a_i g(S(x_i)) \end{aligned}$$

Es decir, basta encontrar $g \in X^*$ tal que $f(T(x_i)) = g(S(x_i))$ para $1 \leq i \leq k$.

Notemos que $\{S(x_1), ..., S(x_k)\}$ es linealmente independiente, pues

$$\sum_{i=1}^{k} b_i S(x_i) = 0 \Leftrightarrow S\left(\sum_{i=1}^{k} b_i x_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} b_i x_i = 0$$

Por tanto, $b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Así, existe una funcional continua $\widetilde{g} : \langle\{S(x_1), ..., S(x_k)\}\rangle \to E$ tal que $\widetilde{g}(S(x_i)) = f(T(x_i))$ para cada $1 \leq i \leq k$.

Por el Teorema de Hahn-Banach existe una extensión $g : X \to E$ de $\widetilde{g}$. Por tanto, $f(T(x)) = g(S(x))$ para todo x en X y $T^*(f) = S^*(g)$.

Análogamente $\operatorname{Ran} S^* \subseteq \operatorname{Ran} T^*$.$\blacksquare$

Proposición 2.1.3 *Sea X un espacio de Banach y F un subespacio $n-$dimensional de X. Entonces existe una proyección de X sobre F con norma menor o igual que n.*

Demostración.

Como F es de dimensión finita y normado, entonces tiene una base de Aüerbach $\{\{x_1, ...x_n\}; \{f_1, ..., f_n\}\}$, con $\|x_i\| = \|f_i\| = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Por el Teorema de Hahn-Banach, existen extensiones $F_1, ..., F_n$ de $f_1, ..., f_n$ a X, respectivamente; de donde $\|F_i\| = \|f_1\| = 1$ para cada $1 \leq i \leq n$. Así, podemos definir $P(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) x_i$ para cada x en X.

Dado que cada x en F se escribe como $x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) x_i$, entonces $P|_F = I_F$. Así pues, $P : X \to F$ es un operador suprayectivo, y de hecho es una proyección sobre F, pues dado x en X, $P(x) \in F$ y así $P(P(x)) = I_F(P(x)) = P(x)$. Es decir que $P^2 = P$.

Para todo $x \in X$ tenemos:

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} F_i(x) x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|F_i(x)\| \, \|x_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|F_i(x)\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|F_i\| \right) \|x\| = n \|x\| \, . \end{aligned}$$

Así, $\|P\| \leq n$.■

2.2 Espacios con la propiedad de descomposición finito dimensional (f.d.d.p.)

Definición 2.2.1 *Se dice que un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad de descomposición finito dimensional (f.d.d.p. por sus siglas en inglés) si existe una sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de subespacios F_n de X, cada uno de dimensión finita y tales que cada $x \in X$ se puede escribir en forma única como $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, donde $P_n : X \to F_n$ es un operador para cada $n \geq 1$; en particular para cada $n \geq 1$ y $x \in X$ se tiene $P_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} P_n(P_m(x))$ y por tanto, $P_n(P_n(x)) = P_n(x)$, por lo que cada P_n es idempotente, y $P_n(P_m(x)) = 0$ si $m \neq n$.*

La sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es llamada una descomposición finito dimensional (d.f.d.) de X. Para cada $n \geq 1$, la transformación lineal en X definida como $Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x)$ es llamada una proyección natural de la descomposición. Tomamos $Q_0 = 0$.

Es claro que $P_{n+1} = Q_{n+1} - Q_n$ y $Q_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} P_j P_k(x) = \sum_{k=1}^{n} P_j P_k(x) = Q_n$ para todo $n \geq 0$. Más adelante se probará que cada Q_n y, por tanto, cada P_n, es continua, por lo que P_n y Q_n son proyecciones en X para cada $n \geq 1$. También se verá que $P_n(X) = F_n$.

En lo que resta de esta sección usamos la notación que aparece en la definición anterior.

Proposición 2.2.2 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach con la f.d.d.p. Si* $|||x||| = \sup_{r\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{r} P_n(x) \right\|$ *para cada* $x \in X$*, entonces* $|||\cdot|||$ *es una norma en* X*.*

Demostración.

Para cada $x \in X$ tenemos que $|||x||| < \infty$ ya que $\left(\sum_{n=1}^{r} P_n(x) \right)_{r=1}^{\infty}$ converge y por tanto, es una sucesión acotada en X.

a) $|||\cdot|||$ es no negativa. Es claro que $|||0||| = 0$ y por otra parte si $|||x||| = 0$, entonces $\sup_{r\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{r} P_n(x) \right\| = 0$; así, $\left\| \sum_{n=1}^{r} P_n(x) \right\| = 0$ para todo $r \geq 1$. De manera que $\|P_1(x)\| = 0$, y para $k \geq 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \|P_{k+1}(x)\| = \left\| \sum_{n=1}^{k+1} P_n(x) - \sum_{n=1}^{k} P_n(x) \right\| \\ &\leq \ \left\| \sum_{n=1}^{k+1} P_n(x) \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{k} P_n(x) \right\| = 0. \end{aligned}$$

Es decir que $P_k(x) = 0$ para todo $k \geq 1$, de lo que concluimos que $x = 0$.

b)

$$\begin{aligned} |||\lambda x||| \ &= \ \sup_{r\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{r} P_n(\lambda x) \right\| \\ &= \ |\lambda| \sup_{r\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{r} P_n(x) \right\| = |\lambda| \, |||x||| \, . \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} |||x+y||| \ &= \ \sup_{r\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{r} P_n(x) + \sum_{n=1}^{r} P_n(y) \right\| \leq \sup_{r\geq 1} \left[\left\| \sum_{n=1}^{r} P_n(x) \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{r} P_n(y) \right\| \right] \\ &\leq \ \sup_{r\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{r} P_n(x) \right\| + \sup_{r\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{r} P_n(y) \right\| = |||x||| + |||y||| \, . \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.2.3 *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach con la f.d.d.p., entonces* $\|x\| \leq |||x|||$ *para todo* $x \in X$ *y* $(X, |||\cdot|||)$ *es completo; es decir, de Banach.*

Demostración.

Sea $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ una d.f.d. de X y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(X, |||\cdot|||)$, donde $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(y_n)$ para cada $n \geq 1$. Así, se tiene la siguiente propiedad:

(C) Para cada $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} P_i(y_m) - \sum_{i=1}^{r} P_i(y_n) \right\| < \epsilon$$

si $n, m \geq N$ y todo $r \geq 1$.

Probaremos por inducción que $(P_i(y_n))_{n=1}^{\infty}$ es $\|\cdot\|$-de Cauchy para cada $i \geq 1$.

Sea $\epsilon > 0$, por la propiedad C, existe $N > 0$ tal que

$$\|P_1(y_m) - P_1(y_n)\| < \epsilon$$

si $n, m \geq N$; es decir, $(P_1(y_n))_{n=1}^{\infty}$ es $\|\cdot\|$-de Cauchy.

Supongamos que $(P_i(y_n))_{n=1}^{\infty}$ es $\|\cdot\|$-de Cauchy para cada $1 \leq i \leq k$ y sea $\epsilon > 0$, por la propiedad (C), existe $N > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|P_{k+1}(y_m) - P_{k+1}(y_n)\| &\leq \\ \left\| \sum_{i=1}^{k+1} (P_i(y_m) - P_i(y_n)) - \sum_{i=1}^{k} (P_i(y_m) - P_i(y_n)) \right\| &< 2\epsilon \end{aligned}$$

si $n, m \geq N$; por tanto, $(P_{k+1}(y_n))_{n=1}^{\infty}$ es $\|\cdot\|$-de Cauchy.

Por lo anterior, $(P_k(y_n))_{n=1}^{\infty}$ $\|\cdot\|$-converge, digamos a z_k para cada $k \geq 1$ y como $P_k(y_n) \in F_k$ para todo $n \geq 1$ y F_k es $\|\cdot\|$-cerrado, entonces, $z_k \in F_k$ para cada $k \geq 1$.

Ahora probaremos que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ $\|\cdot\|$-converge y que si z es su límite, entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ $|||\cdot|||$- converge a z.

Sea $\epsilon > 0$; por la propiedad (C) existe $N > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} P_i(y_m) - \sum_{i=1}^{r} P_i(y_n) \right\| < \epsilon$$

si $n, m \geq N$ y todo $r \geq 1$. Cuando $m \to \infty$ obtenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} P_i(y_n) - \sum_{i=1}^{r} z_i \right\| < \epsilon \tag{2.1}$$

si $n \geq N$ y todo $r \geq 1$.

Sean, $r > r' \geq 1$, entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} z_i - \sum_{i=1}^{r'} z_i \right\| \leq 2\epsilon + \left\| \sum_{i=r'+1}^{r} P_i(y_N) \right\|.$$

Existe $N' > 0$ tal que $\left\| \sum_{i=s}^{t} P_i(y_N) \right\| < \epsilon$ si $s, t \geq N'$. Así,

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} z_i - \sum_{i=1}^{r'} z_i \right\| < 3\epsilon$$

si $r, r' \geq N'$. Por tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ $\|\cdot\|$-converge a un elemento $z \in X$ como se había afirmado.

De la desigualdad (2.1) se sigue al hacer $r \to \infty$ que $\|y_n - z_i\| \leq \epsilon$ si $n \geq N$ y por tanto, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ $|||\cdot|||$- converge a z y $(X, |||\cdot|||)$ es completo.■

De nuevo, con el propósito de que el trabajo sea lo más completo posible, enunciamos otro resultado clásico del Análisis funcional. No se incluye su prueba, pero puede encontrarse en [15]:

Teorema 2.2.4 *(Teorema de la función abierta) Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X, Y)$ un operador suprayectivo. Entonces T es un operador abierto.*

Proposición 2.2.5 *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con la f.d.d.p., entonces las normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes.*

Demostración.

Vimos antes que $\|x\| \leq |||x|||$ para todo $x \in X$ y que $(X, |||\cdot|||)$ es también un espacio de Banach. La identidad $I : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ es entonces una función continua y biyectiva. Como consecuencia del Teorema de la función abierta se tiene que I es un homeomorfismo. En particular, se sigue de la continuidad de la inversa que existe una constante $c > 0$ tal que $c\,|||x||| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$.

En suma

$$c\,|||x||| \leq \|x\| \leq |||x|||$$

para todo $x \in X$; y esas dos normas son equivalentes.■

Teorema 2.2.6 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una f.d.d.p. dada por la sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de espacios finito dimensionales. Entonces las proyecciones naturales $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ son proyecciones. Más aún, dichas proyecciones están uniformemente acotadas; es decir, $\sup_{n\geq 1} \|Q_n\| < \infty$. Al valor $K = \sup_{n\geq 1} \|Q_n\|$ se le llama la constante de la descomposición de X inducida por las proyecciones Q_n. Además, $Q_n \circ Q_m = Q_{\min(m.n)}$ para todo $m, n \geq 1$ y $|||x||| \leq K \|x\|$ para todo $x \in X$. Para todo $n \geq 1$ el operador $P_n = Q_n - Q_{n-1}$, donde $Q_0 = 0$, es una proyección de X sobre F_n.*

Demostración.

Por lo visto en la Definición 2.2.1 sólo es necesario probar que cada Q_n es continua para saber que Q_n y P_n son proyecciones en X. Sea $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de proyecciones naturales de una d.f.d. de X. Para $k \geq 1$ y $x \in X$ se tiene:

$$\|Q_n(x)\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} P_k(x) \right\| \leq \left\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) \right\| \right\| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \right\| = \frac{1}{c} \|x\|,$$

donde c es como en la Proposición2.2.5. Por tanto, $\|Q_n\| \leq \frac{1}{c}$ para todo $n \geq 1$ y entonces, $K = \sup\limits_{n\geq 1} \|Q_n\| \leq \frac{1}{c}$. En particular, cada Q_n es continuo.

Por otra parte, $Q_n \circ Q_m = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} P_j \circ P_k = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{m} P_j \circ P_k & \text{si } m \leq n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} P_j \circ P_k & \text{si } n \leq m \end{cases}$,

ya que

$$P_j \circ P_k = \begin{cases} P_j & \text{si } j = k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y, por la misma razón, $Q_n \circ Q_m = Q_{\min(m.n).}$

Finalmente, sean $n \geq 1$ y $x \in F_n$. Sabemos: $x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P_m(x)$, esta escritura es única y $P_m(X) \subset F_m$. Por consiguiente, $P_n(x) = x$ si y sólo si $x \in F_n$ y entonces $F_n(X) = F_n$ para cada $n \geq 1$.$\blacksquare$

Teorema 2.2.7 *Sea X un espacio de Banach. Entonces X tiene la f.d.d.p. si y sólo si existe una sucesión $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ de proyecciones de rango finito, uniformemente acotadas y tales que cumplan las siguientes dos propiedades:*

a) $x = \lim\limits_{n\to\infty} Q_n(x)$ para todo $x \in X$.

b) $Q_n \circ Q_m = Q_{\min(n,m)}$ para todo $1 \leq n, m$.

Más aún, la sucesión de proyecciones naturales de una d.f.d. de X está uniformemente acotada y tiene las propiedades a) y b); y si se cumplen a) y b), entonces $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ define una d.f.d. de la que $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de proyecciones naturales.

Se dice que tal sucesión $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ define una d.f.d. en X

Demostración.

Sea $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de proyecciones naturales asociada a una d.f.d. de X. La propiedad a) se sigue inmediatamente de la definición de f.d.d.p., y su acotamiento uniforme y la propiedad b) son consecuencia del Teorema 2.2.6.

Inversamente, supongamos que se cumplen a) y b). Veremos que si se define $F_n = (Q_n - Q_{n-1})(X)$ para $n \geq 1$, donde $Q_0 = 0$, entonces (F_n) es una d.f.d. de X.

Cada F_n es un subespacio de X de dimensión finita, sólo queda demostrar que $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (Q_n - Q_{n-1})(x)$ para cada $x \in X$ y que esa expresión es única.

Observemos en primer lugar que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (Q_n - Q_{n-1})(x) = \lim_{k\to\infty} Q_k(x) = x;$$

o sea, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (Q_n - Q_{n-1})(x)$. Para demostrar que esta es la única manera de escribir a cada $x \in X$ como una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, con $f_n \in F_n$, probaremos que si (y_n) es una sucesión tal que $y_n \in F_n$ para cada $n \geq 1$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = 0$, entonces $y_n = 0$ para todo $n \geq 1$; con este objeto haremos ver que:

$$F_n = (Q_n - Q_{n-1})(X) = Q_n(X) \bigcap \ker Q_{n-1} :$$

para todo $n \geq 1$.

Sea $x \in X$, entonces $Q_n(x) - Q_{n-1}(x) = Q_n(x - Q_{n-1}(x))$ y

$$Q_{n-1}(Q_n(x) - Q_{n-1}(x)) = Q_{n-1}(Q_n(x)) - Q_{n-1}(x) = Q_{n-1}(x) - Q_{n-1}(x) = 0;$$

así, $(Q_n - Q_{n-1})(X) \subset Q_n(X) \bigcap \ker Q_{n-1}$.

Inversamente, sea $Q_n(x) \in \ker Q_{n-1}$, entonces

$$Q_n(x) = Q_n(x) - Q_{n-1}(Q_n(x)) = Q_n(x) - Q_{n-1}(x).$$

De donde, $Q_n(x) \in (Q_n - Q_{n-1})(X)$.

Supongamos que hay una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ con $y_n \in F_n$ para cada $n \geq 1$, que cumple que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = 0$.

Para todo $n \geq 1$ tenemos $y_n \in \ker Q_{n-1}$ y por consiguiente,

$$Q_i(y_n) = Q_i(Q_{n-1}(y_n)) = Q_i(0) = 0 \ si \ n > i;$$

entonces:

$$Q_k\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_k(y_n) = \sum_{n=1}^{k} Q_k(y_n)$$

Demostremos por inducción que $y_k = 0$ para todo $k \geq 1$:

$$0 = Q_1(0) = Q_1(y_1) = y_1.$$

Ahora supongamos que $y_n = 0$ para todo $1 \leq n \leq k$, entonces

$$0 = Q_{k+1}(0) = \sum_{n=1}^{k+1} Q_{k+1}(y_n) = Q_{k+1}(y_{k+1}) = y_{k+1};$$

de esta manera queda demostrado el teorema.■

Definición 2.2.8 *Se dice que un espacio de Banach X tiene una d.f.d. que encoge si hay una sucesión de proyecciones de rango finito (Q_n) que definen dicha d.f.d. tal que (Q_n^*) define una d.f.d. en X^*.*

2.3 Bases en espacios de Banach. La propiedad de la base (b.p.)

Definición 2.3.1 *Una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X se dice que es w-linealmente independiente si satisface alguna de las dos siguientes condiciones equivalentes:*

i) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$ *implica que* $a_i = 0$ *para todo* $i \geq 1$.

ii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ *implica que* $a_i = b_i$ *para todo* $i \geq 1$.

Si $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es w-linealmente independiente, entonces $x_i \neq 0$ para toda $i \geq 1$.

Proposición 2.3.2 *Sea E un espacio de Banach $k-$dimensional con base $\{e_n\}_{n=1}^{k}$. Entonces los coeficientes funcionales $\{f_n\}_{n=1}^{k}$ asociados a $\{e_n\}_{n=1}^{k}$ es una base de E^*.*

Demostración.

Para cada $x \in E$ se cumple $x = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x) x_n$; por tanto, dados $f \in E^*$ se tiene $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x) f(x_n)$ para todo $x \in X$, es decir $f(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{k} \widehat{x}_n(f) f_n \right)(x)$, donde $\widehat{x}_n(f) = f(x_n)$ para todo $1 \leq n \leq k$. Así, $f = \sum\limits_{n=1}^{k} \widehat{x}_n(f) f_n$. y $\{f_n\}_{n=1}^{k}$ genera a X^*. Además, es claro que $\{f_n\}_{n=1}^{k}$ es un conjunto linealmente independiente y por tanto, es una base de X^*.■

Proposición 2.3.3 *Sea X un espacio normado no nulo de dimensión finita. Entonces X tiene una base de Aüerbach $(x_n)_{n=1}^{k}$; es decir, una base tal que, si (f_n) es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a ella, entonces $\|x_n\| = \|f_n\| = 1$ para toda $1 \leq n \leq k$.*

Definición 2.3.4 *Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X es una base de Schauder de ese espacio si para cada $x \in X$ existe una única sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares tales que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

En ese caso, para cada $n, m \geq 1$, el funcional f_n definido como $f_n(x) = a_n$ se llama el $n-$ésimo coeficiente funcional asociado a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, y al operador $U_m = \sum_{n=1}^{m} f_n x_n$ se le llama la $m-$ésima proyección natural asociada a la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es w-linealmente independiente.

Si X tiene una base de Schauder, entonces diremos que tiene la propiedad de la base (b.p.)

A lo largo de este trabajo, cada vez que se haga referencia a una base en algún espacio de Banach, nos referiremos a una base de Schauder, a menos que se indique otra cosa. Notemos que, en el caso de los espacios de dimensión finita, la noción de base de Hamel y de Schauder coinciden.

Corolario 2.3.5 *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder $(x_i)_{i \geq 1}$, entonces X es separable.*

Demostración.

Sabemos que $X = \overline{\left\langle \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\rangle}$ donde $F_i = \langle x_i \rangle$ para $i \geq 1$. El resultado se sigue de la Proposición 1.1.1.■

Definición 2.3.6 *Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X es llamada una sucesión básica en X si es una base del espacio lineal cerrado $\overline{\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}}$ que esa sucesión genera.*

Si un espacio de Banach X tiene una base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces X tiene la propiedad de descomposición finito dimensional. Esto se sigue de tomar $F_n = \langle x_n \rangle$ en la Definición 2.2.1, además la proyecciones naturales asociadas a la base son entonces las proyecciones naturales de la descomposición.

Por lo antes dicho tenemos los siguientes resultados sobre espacios de Banach con base de Schauder, mismos que corresponden a los vistos para espacios con la f.d.d.p.

Proposición 2.3.7 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y coeficientes funcionales $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Si $|||x||| = \sup_{r \geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{r} f_n(x) x_n \right\|$ para cada $x \in X$, entonces $|||\cdot|||$ es una norma en X.*

Teorema 2.3.8 *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces $\|x\| \leq |||x|||$ para todo $x \in X$ y $(X, |||\cdot|||)$ es completo; es decir, $(X, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach.*

Proposición 2.3.9 *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces las normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes.*

Teorema 2.3.10 *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach con base de Schauder, entonces las proyecciones naturales* $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ *asociadas a la base son proyecciones continuas de rango finito. Más aún, dichas proyecciones están uniformemente acotadas;es decir,* $\sup\limits_{n\geq 1} \|U_n\| < \infty$. *Al valor* $K = \sup\limits_{n\geq 1} \|U_n\|$ *se le llama la constante básica de la base. Además,* $U_n \circ U_m = U_{\min(m.n)}$ *para todo* $n, m \geq 1$ *y* $|||x||| \leq K\|x\|$ *para todo* $x \in X$.

Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ que sea w-linealmente independiente. Definimos

$$Y = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ para una (única) sucesión de escalares} \right\}.$$

y $|||\cdot||| : Y \to \mathbb{R}$ como

$$|||x||| = \sup_{n\geq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|.$$

Y es un subespacio de X y $|||\cdot|||$ es una norma en Y que satisface $\|y\| \leq |||y|||$ para todo $y \in Y$.

Lema 2.3.11 $(Y, |||\cdot|||)$ *es completo.*

Demostración.

Sea $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(Y, |||\cdot|||)$, con $y_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{n,i} x_i$, afirmamos que para cada $i \geq 1$ la sucesión de escalares $(a_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ converge, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge en $(X, \|\cdot\|)$, donde $a_i = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n,i}$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ converge a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ en $(Y, |||\cdot|||)$.

Para la primera afirmación basta probar que $(a_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para todo $i \geq 1$, ya que $\mathbb{F}$ es completo, . Usaremos inducción sobre i. Sea $\epsilon > 0$. Existe $N \geq 1$ tal que $n, m \geq N$ implica $|||y_n - y_m||| < \epsilon \|x_1\|$, o lo que es lo mismo, si $n, m \geq N$, entonces

$$\sup_{r\geq 1} \left\| \sum_{i=1}^{r} (a_{n,i} - a_{m,i})\, x_i \right\| < \epsilon \|x_1\|.$$

En particular, para $r = 1$ tenemos:

$$|a_{n,1} - a_{m,1}| \cdot \|x_1\| = \|(a_{n,1} - a_{m,1})\, x_1\| < \epsilon \|x_1\|,$$

por tanto,

$$|a_{n,1} - a_{m,1}| < \epsilon,$$

si $n, m \geq N$; es decir, $(a_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Supongamos que las sucesiones $(a_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ son de Cauchy para toda $i < k$, con $k \in \mathbf{N}$. Existe $N \geq 1$ tal que $n, m \geq N$ implica

$$|||y_n - y_m||| < \frac{\epsilon \|x_k\|}{2},$$

o sea, si $n, m \geq N$, entonces

$$\sup_{r \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^{r} (a_{n,i} - a_{m,i})\, x_i \right\| < \frac{\epsilon \|x_k\|}{2},$$

en particular, para $r = k$ obtenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} (a_{n,i} - a_{m,i})\, x_i \right\| < \frac{\epsilon \|x_k\|}{2}.$$

De donde,

$$\begin{aligned} |a_{n,k} - a_{m,k}| \cdot \|x_k\| &= \|(a_{n,k} - a_{m,k})\, x_k\| < \frac{\epsilon \|x_k\|}{2} + \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (a_{n,i} - a_{m,i})\, x_i \right\| \\ &\leq \frac{\epsilon \|x_k\|}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} |a_{n,i} - a_{m,i}| \cdot \|x_i\|, \end{aligned}$$

y así,

$$|a_{n,k} - a_{m,k}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{|a_{n,i} - a_{m,i}| \cdot \|x_i\|}{\|x_k\|}.$$

Por hipótesis de inducción, existen $N_1, N_2, ..., N_{k-1} \geq 1$ tales que si $n, m \geq N_i$, entonces

$$|a_{n,i} - a_{m,i}| < \frac{\epsilon \|x_k\|}{2\, \|x_i\|\, (k-1)},$$

Hagamos $N_k = \max(N_1, N_2, ..., N_{k-1}, N)$, entonces $n, m \geq N_k$ implica

$$|a_{n,k} - a_{m,k}| < \epsilon;$$

es decir, $(a_{n,k})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y queda probada la primera afirmación.

Ya que $\|x\| \leq |||x|||$ para toda $x \in X$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es también una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|$, y por tanto convergirá en $(X, \|\cdot\|)$ a un elemento $y \in X$. Se probará que $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, donde $a_i = \lim_{n \to \infty} a_{n,i}$ para cada $i \in \mathbf{N}$.

Sea $\epsilon > 0$. Existe $N_1 \geq 1$ tal que si $n \geq N_1$, entonces

$$\|y_n - y\| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Existe $N_2 \geq 1$ tal que si $n, m \geq N_2$, entonces

$$\sup_{r\geq 1}\left\|\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i - \sum_{i=1}^{r} a_{m,i}x_i\right\| = |||y_n - y_m||| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Cuando $m \to \infty$ se obtiene

$$\sup_{r\geq 1}\left\|\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| \leq \frac{\epsilon}{4} \tag{2.2}$$

si $n > N_2$. Así,

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| \leq \frac{\epsilon}{4}$$

para todo $r \geq 1$ y $n \geq N_2$.

Sea $n \geq \max(N_1, N_2)$. Entonces,

$$\left\|y - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| \leq \|y - y_n\| + \left\|y_n - \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\|$$

y así,

$$\left\|y - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| \leq \left\|y_n - \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i\right\| + \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $r \geq 1$.

Por consiguiente,

$$\left\|y - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| < \epsilon$$

para todo r suficientemente grande.

O sea,

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

Por la definición de Y se tiene que $y \in Y$ y por (2.2) concluimos que y_n converge a y en $(Y, |||\cdot|||)$.■

El siguiente es un criterio últil para saber cuándo una sucesión en un espacio de Banach es una base.

Teorema 2.3.12 *Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Entonces $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de X si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

i) $x_i \neq 0$ *para toda* $i \geq 1$.
ii) Existe una constante $K > 0$ *tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

para cualquier sucesión de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ *y naturales* $1 \leq n < m$,
iii) $\overline{\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty}} = X$.

Si estas 3 condiciones se satisfacen, entonces K *es mayor o igual que la constante básica de la base* $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ *y la constante básica de* $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ *es el mínimo real* K *que satisface ii).*

Demostración.

Supongamos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de X con constante básica K_0. Es claro que i) y iii) se satisfacen. El Teorema 2.2.6 nos asegura que $|||x||| \leq K_0 \|x\|$ para toda $x \in X$. Si $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria de escalares, entonces para $1 \leq n < m$, sucede que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right|\right|\right| \leq \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right|\right|\right| \leq K_0 \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|,$$

lo que demuestra que ii) también se satisface.

Inversamente, observemos que i) y ii) implican que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es w-linealmente independiente. Por el Lema 2.3.11 sabemos que

$$Y = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ para una (única) sucesión de escalares} \right\}.$$

es $|||\cdot|||$ −completo. Mostraremos, usando ii), que $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$ en Y, y por tanto, Y es cerrado en X. Sabemos que $\|y\| \leq |||y|||$ para todo $y \in Y$. Por otra parte, si $y \in Y$ y $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, entonces para cualesquiera $n, m \in \mathbf{N}$, con $n < m$, se sigue de ii) que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|,$$

fijemos n, entonces cuando $m \to \infty$ obtenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|,$$

y, por tanto,

$$\sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|,$$

o lo que es lo mismo,

$$|||x||| \leq K \|x\|,$$

y concluimos que $|||\cdot|||$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes en Y. Por consiguiente, $(Y, \|\cdot\|)$ es completo y, por tanto, cerrado en X. Como es claro que $\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty} \subset Y$, se sigue de iii) que $X = Y$. Así, $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de X.

Como acabamos de ver. si se satisfacen i)-iii), entonces $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de X y de la condición

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|$$

para cualquier sucesión de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ y naturales $1 \leq n < m$, se sigue que $\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|$ si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge y $n \geq 1$, o sea, $\|U_n\| \leq K$, donde U_n es la n-ésima proyección natural asociada a la base. De aquí se sigue que K es mayor o igual que la constante básica M de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Por la primera parte de la prueba se tiene que K_0 satisface ii); por tanto K_0 es la mínima constante con esa propiedad.■

Corolario 2.3.13 *Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Entonces $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de X si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*
i) $x_i \neq 0$ para todo $i \geq 1$.
ii) Existe una constante $K > 0$ que para cualquier sucesión de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ y para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, con $n < m$, satisface:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

Si estas 2 condiciones se cumplen, entonces K es mayor o igual que la constante básica de sucesión básica $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y la constante básica de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es el mínimo real K que satisface ii).

Proposición 2.3.14 *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, y sean, respectivamente, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ los coeficientes funcionales y las proyecciones naturales asociadas a esa base. Entonces, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^* cuyos coeficientes funcionales son $\left(\widehat{x}_n | \overline{\langle f_i \rangle_{i=1}^{\infty}} \right)_{n=1}^{\infty}$, y los operadores $\left(U_n^* | \overline{\langle f_i \rangle_{i=1}^{\infty}} \right)_{n=1}^{\infty}$ son las proyecciones naturales asociados a ella. La constante básica de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ no es mayor que la de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Demostración.
Es claro que $f_i \neq 0$ para toda $i \geq 1$. Sea M la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Sea $x^* \in X^*$. Para $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) x_i$ en X tenemos

$$U_n^*(x^*)(x) = x^*(U_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} f_i(x) x^*(x_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \widehat{x_i}(x^*) f_i\right)(x)$$

por lo que

$$U_n^*(x^*) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{x_i}(x^*) f_i \tag{2.3}$$

para todo $x^* \in X^*$ y $n \geq 1$.

Sean $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de escalares y $n < m$ dos naturales. Por lo anterior, si $x^* = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$, entonces,

$$U_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(x^*) f_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

Además,

$$\left\| U_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right)\right\| \leq \|U_n\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right\| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right\|.$$

Por tanto,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right\|.$$

El Corolario 2.3.13 nos asegura que $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica.

Sea $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ un elemento de $\overline{\langle f_i \rangle_{i=1}^{\infty}}$. Como $\widehat{U_n(x)} \in X^{**}$ para todo $x \in X$ tenemos que si $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) x_i$, entonces

$$U_n^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right)(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right)(U_n(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(U_n(x)) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right)(x);$$

o sea,

$$U_n^*(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right),$$

y además,

$$\widehat{x}_n(f) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x_n) = a_i$$

para todo $i \geq 1$.

Así, $U_n^*|\overline{\langle f_i\rangle_{i=1}^{\infty}}$ y $\widehat{x}_n|\overline{\langle f_i\rangle_{i=1}^{\infty}}$ son la n-ésima proyección y el n-ésimo coeficiente funcional asociados a $(f_i)_{i=1}^{\infty}$; y como $\left\| U_n^*|\overline{\langle f_i\rangle_{i=1}^{\infty}} \right\| \leq \|U_n\| \leq M$, entonces, la constante básica de $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ es menor o igual que M. ■

Corolario 2.3.15 *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, y sean $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones de coeficientes funcionales y proyecciones asociadas a esa base, respectivamente. Entonces, $U_n^{**}(x^{**}) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{f}_i(x^{**})\,\widehat{x}_i$ para todo $x^{**} \in X^{**}$ y $n \geq 1$. La sucesión $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ es una base de $\widehat{X}$ cuya sucesión de coeficientes funcionales es $\left(\widehat{f_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, y la $m-$ésima proyección natural asociada a esta base es $U_m^{**}|\widehat{X} = \sum_{n=1}^{m} \widehat{\widehat{f_n}}\,\widehat{x_n}$.*

Notemos que en este caso usamos la misma notación $\widehat{\cdot}$ para referirnos tanto al operador definido en X, como aquel que se aplica a elementos de X^*.

Demostración.

Sea $x^{**} \in X^{**}$ y $n \geq 1$. De (2.3) se sigue:

$$U_n^{**}(x^{**})(x^*) = x^{**}(U_n^*(x^*)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{f}_i(x^{**})\,\widehat{x}_i\right)(x^*)$$

y de ahí que $U_n^{**}(x^{**}) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{f}_i(x^{**})\,\widehat{x}_i$.

Por la proposición anterior, sabemos que $(\widehat{x_n})$ es una sucesión básica con coeficientes funcionales $\left(\widehat{\widehat{f_n}} \mid \overline{\langle\widehat{x_n}\rangle}\right)$. Debemos ver entonces que $\overline{\langle\widehat{x_n}\rangle} = \widehat{X}$ y para esto sólo tenemos que probar $\widehat{X} \subset \overline{\langle\widehat{x_n}\rangle}$. Sea $x \in X$, por ser $\widehat{\cdot} : X \to \widehat{X}$ un isomorfismo isométrico tenemos

$$\widehat{x} = \widehat{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f_k(x)\,x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(\widehat{x})\,\widehat{x_k};$$

de donde $\widehat{x} \in \overline{\langle\widehat{x_n}\rangle}$.

Por otra parte, si $x \in X$ y $x^* \in X^*$, entonces

$$\begin{aligned} U_n^{**}(\widehat{x})(x^*) &= \widehat{x}(x^* \circ U_n) = x^*\left(U_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,x_k\right)\right) \\ &= x^*\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,x^*(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,\widehat{x_k}(x^*) = \left(\sum_{k=1}^{n} \widehat{f}_k(\widehat{x})\,\widehat{x_k}\right)(x^*). \end{aligned}$$

O sea, $U_m^{**}|\widehat{X} = \sum\limits_{n=1}^{m} \widehat{f_n}\ \widehat{x_n}$.■

Proposición 2.3.16 *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base en X. Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a esa base, entonces $x^* = w^* - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widehat{x_k}(x^*) f_k$ para cada $x^* \in X^*$.*

Demostración.

Sea $x^* \in X^*, n \geq 1$ y $x \in X$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \widehat{x_k}(x^*) f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} x^*(x_k) f_k(x) = x^*\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k\right).$$

Y así, $\sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{x_k}(x^*) f_k(x) \to x^*(x)$ o lo que es lo mismo $x^* = w^* - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widehat{x_k}(x^*) f_k$.■

Lema 2.3.17 *Sea X un espacio de Banach con una descomposición finito dimensional determinada por las proyecciones $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$. Si para todo $n \geq 1$ el subespacio $(Q_n - Q_{n-1})(X)$, donde $Q_0 = 0$, tiene una base $(x_{i=1}^n)_{i=1}^{d_n}$ con constante básica b_n y $\sup\limits_{n\geq 1} b_n = b < \infty$, entonces la sucesión $x_1^1, ..., x_{d_i}^1, ..., x_1^n, ..., x_{d_n}^n, ...$ es una base de Schauder de X.*

Demostración.

Usaremos la caracterización de base dada en el Teorema 2.3.12

i) Sea (y_k) un numeración de $\left\{x_1^1, ..., x_{d_i}^1, ..., x_1^l, ..., x_{d_n}^l, ...\right\}$, entonces $y_k \neq 0$ para todo $k \geq 1$.

ii) Denotemos con K_0 a la constante básica de las proyecciones $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$, y, para el bloque $x_1^l, ..., x_{d_l}^l$ denotemos como P_i^l:$(Q_n - Q_{n-1})(X) \to (Q_n - Q_{n-1})(X)$ a la $i-$ésima proyección natural, donde $1 \leq i \leq d_l$. Por hipótesis se satisface $\left\|P_i^l\right\| \leq b_l \leq b$.

Sea (a_k) una sucesión de escalares. Tomemos $m > n$ y sea l el primer natural tal que $n \leq \sum\limits_{i=1}^{l} d_i$ y hagamos $i = n - \sum\limits_{i=1}^{l-1} d_i$, entonces $1 < i \leq d_l$ y donde $\sum\limits_{i=1}^{l-1} d_i = 0$ si $l = 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k y_k = Q_{l-1}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k y_k\right) + P_i^l\left((Q_l - Q_{l-1})\left(\sum_{k=1}^{m} a_k y_k\right)\right).$$

De manera que

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k y_k\right\| &= \|Q_{l-1}\| \left\|\sum_{k=1}^{m} a_k y_k\right\| + \left\|P_i^1\right\| (\|Q_l\| + \|Q_{l-1}\|) \left\|\sum_{k=1}^{m} a_k y_k\right\| \\ &\leq (K_0 + 2K_0 b) \left\|\sum_{k=1}^{m} a_k y_k\right\|. \end{aligned}$$

Entonces, se cumple ii) del Teorema 2.3.12.

iii) Veamos que $X = \overline{\langle y_i \rangle_{i=1}^{\infty}}$. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Como

$$x = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} (Q_n - Q_{n-1})(x),$$

entonces existe $m_0 \geq 1$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{m_0} (Q_n - Q_{n-1})(x) - x \right\| < \epsilon.$$

$\sum_{n=1}^{m_0} (Q_n - Q_{n-1})(x)$ es una combinación lineal de $x_1^1, ..., x_{d_i}^1, ..., x_1^{m_0}, ..., x_{d_{m_0}}^{m_0}$, y por consiguiente, de $\langle y_i \rangle_{i=1}^{\infty}$, entonces $x \in \overline{\langle y_i \rangle_{i=1}^{\infty}}$.■

Proposición 2.3.18 *a) Sean X y Y dos espacios de Banach isomorfos, tales que $d(X,Y) \leq c$. Si X tiene una base con constante básica b, entonces Y también tiene una base, y la constante básica asociada a ella es menor o igual que bc.*

b) Sea X un espacio de Banach con una base con constante básica b. Entonces, la sucesión de coeficientes funcionales asociados a ella es una sucesión básica en X^* que tiene una constante básica menor o igual que b.

c) Sea X un espacio de Banach y E un subespacio de X de dimensión finita. Si $P : X \to E$ es una proyección acotada sobre E y E tiene una base con constante básica b, entonces $P^*(X^*)$ tiene una base con constante básica menor o igual que $b\|P\|$.

Demostración.

a) Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de X con constante básica b, y sea $T : X \to Y$ un isomorfismo. Probaremos que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una base de Y

Sea y en Y, entonces existe x en X tal que $T(x) = y$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es base de X, entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ para una sucesión única de escalares $(a_n)_{i=1}^{\infty}$. Así, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n) = y$ para una sucesión de escalares $(a_n)_{i=1}^{\infty}$y ésta es única pues si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n) = 0$ entonces $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = 0$, y por ser T un isomorfismo necesariamente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$, de manera que $a_n = 0$ para toda $n \geq 1$. Por consiguiente, $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una base de Y.

Sea b la constante básica asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(P_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(Q_k)_{k=1}^{\infty}$las sucesiones de proyecciones asociadas a las bases$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$, respectivamente. Entonces:

$$\left\| Q_k(\sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n)) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{k} a_n T(x_n) \right\| = \left\| T(\sum_{n=1}^{k} a_n x_n) \right\| = \left\| T(P_k(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n)) \right\|$$

y

$$\begin{aligned} \left\| T(P_k(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n)) \right\| &\leq \|T\| \|P_k\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \\ &\leq b \|T\| \left\| T^{-1} \left(T \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) \right) \right\| \\ &\leq b \|T\| \left\| T^{-1} \right\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n) \right\|. \end{aligned}$$

En resumen,

$$\|Q_k\| \leq b \|T\| \left\| T^{-1} \right\| \text{ para todo isomorfismo } T \text{ entre } X \text{ y } Y.$$

Por tanto, $\|Q_k\| \leq bc$ y en consecuencia $\sup\limits_{k \geq 1} \|Q_k\| \leq bc$. Entonces, la constante básica de $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ no es mayor que bc.

b) Este inciso es la Proposición 2.3.14.

c) Por la Proposición 2.3.2 y el inciso b) de este teorema (en su versión para bases finitas) $E^* = (P(X))^*$ tiene una base con constante básica menor o igual que b, y por la Proposición 1.3.9 y el inciso a) de este teorema (en su versión para bases finitas), entonces $P^*(X^*)$ tiene una base cuya constante básica no excede $\|P\| b$.■

Definición 2.3.19 *Sea X un espacio de Banach. Se dice que una base de Schauder de X encoge si los coeficientes funcionales asociados a ella son base de Schauder de X^*.*

Definición 2.3.20 *Sea X un espacio de Banach. Se dice que una base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de X es acotadamente completa si para cualquier sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ que satisface $\sup\limits_{k \geq 1} \left\| \sum\limits_{n=1}^{k} a_n f_n \right\| < \infty$ se cumple que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge en X.*

Lema 2.3.21 *Si X un espacio de Banach con una base de Schauder que encoge, entonces X^* tiene una base acotadamente completa.*

Demostración.

Sabemos que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de X que encoge, y (f_n) es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a ella, entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ constituye una base para X^*. Veamos que esa es una base acotadamente completa para X^*.

Sea (a_n) una sucesión de escalares para la que $\sup\limits_{k\geq 1}\left\|\sum\limits_{n=1}^{k} a_n f_n\right\| = r < \infty$. Si el conjunto de sumas parciales $A = \left\{\sum\limits_{n=1}^{k} a_n f_n : k \geq 1\right\}$ es finito, entonces por ser (f_n) una sucesión básica, ella es $w-$linealmente independiente, se tiene que a partir de cierto momento la sucesión (a_n) se estaciona en cero, y por consiguiente $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} a_n f_n\right)$ también se estaciona, y ésta sucesión converge.

Por otra parte, si A es un conjunto infinito, entonces como $A \subset B_r(0)$, y este último conjunto es relativamente compacto según la topología w^*, entonces A tiene un w^*- punto de acumulación en $\overline{B_r(0)}^{w^*}$ al que llamaremos y. Esto implica que dado $\epsilon > 0$ y $k \geq 1$ existe $m \geq k \geq 1$ tal que $\left|\sum\limits_{n=1}^{m} a_n f_n(x_k) - y(x_k)\right| < \epsilon$, es decir que $|a_k - y(x_k)| < \epsilon$. Así, para cada $k \geq 1$ $a_k = y(x_k)$, y por tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n = y$. O sea, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa para X^*.■

En la siguiente sección se dan resultados que serán usados para estudiar las propiedades de aproximación y aproximación acotada.

2.4 Operadores ϵ-cercanos a un operador identidad. ϵ-cercanía de subespacios

Lema 2.4.1 *Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $E \leq X$. Si se cumple que $\|T|_E - I_E\| < \epsilon$ para algún $0 < \epsilon < 1$, entonces $T|_E\colon E \to T(E)$ es un operador invertible y $\left\|(T|_E)^{-1}\right\| < \frac{1}{1-\epsilon}$.*

Demostración.

Hagamos $U = T|_E\colon E \to T(E)$. De la hipótesis $\|T|_E - I_E\| < \epsilon < 1$ se sigue:

$$0 < 1 - \epsilon < \|U(x)\| \text{ para todo } x \in E \text{ con } \|x\| = 1;$$

o sea, U es un operador acotado por abajo y por tanto, invertible sobre su imagen; además, de la desigualdad anterior se sigue $\left\|U^{-1}\right\| < \frac{1}{1-\epsilon}$.■

Definición 2.4.2 *Sean X un espacio de Banach, E_1 y E_2 dos de sus subespacios y $\epsilon > 0$. Decimos que E_2 es ϵ-cercano E_1 si existe un operador $T : E_1 \to E_2$ invertible, de E_1 sobre E_2, tal que $\|Tx - x\| < \epsilon \|x\|$ para todo $x \in E_1$.*

Lema 2.4.3 *Sea X un espacio de Banach y E_1, E_2, F_1, F_2 subespacios cerrados de X. Supóngase que $F_i \subset E_i$, y que existe una proyección P_i de E_i sobre F_i tal que $\|P_i\| = c_i$, para $i = 1, 2$. Sean δ y ϵ reales positivos tales que $\delta c_1 + \epsilon (1 + c_1) < \frac{1}{2}$; además, supongamos que F_1 es $\delta-$cercano a F_2 y que E_1 es $\epsilon-$ cercano a E_2. Entonces $(I - P_1)(E_1)$ y $(I - P_2)(E_2)$ son isomorfos y $d((I - P_1)(E_1), (I - P_2)(E_2)) \leq 3(1 + c_1)(1 + c_2)$.*

Demostración.

Sean $V : F_1 \to F_2$ y $U : E_1 \to E_2$ los operadores invertibles que determinan la δ y ϵ cercanías, respectivamente. Definamos el operador $T : E_1 \to E_2$ como $T(x) = V(P_1(x)) + U(x - P_1(x))$.

Observamos:

$$\begin{aligned}
\|T(x) - x\| &= \|V(P_1(x)) + U(x - P_1(x)) - x + P_1(x) - P_1(x)\| \\
&\leq \|V(P_1(x)) - P_1(x)\| + \|U(x - P_1(x)) - (x - P_1(x))\| \\
&\leq \|V - I_{F_1}\| \|P_1(x)\| + \|U - I_{E_1}\| \|x - P_1(x)\| \\
&\leq (\delta c_1 + \epsilon (1 + c_1)) \|x\| < \frac{1}{2} \|x\|.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\|T(x)\| > \frac{1}{2}\|x\|$ y T está acotado por abajo, en particular es inyectivo.

Veamos que T es también suprayectivo; para ello demostramos que $V(P_1(E_1))$ y $U((I - P_1)(E_1))$ son complementos directos en E_2.

Sea $y \in V(P_1(E_1)) \bigcap U((I - P_1)(E_1))$. Existen $x, x' \in E_1$ tales que

$$y = V(P_1(x)) = U\left((I - P_1)\left(x'\right)\right).$$

Entonces,

$$0 = V(P_1(x)) - U\left((I - P_1)\left(x'\right)\right) = T\left(P_1(x) + (I - P_1)\left(-x'\right)\right).$$

Como T es inyectiva, se tiene que $P_1(x) + (I - P_1)(-x') = 0$. Dado que los espacios $P_1(E_1)$ y $(I - P_1)(E_1)$ son complementos directos, tenemos que $P_1(x) = (I - P_1)(x') = 0$. Así, $y = 0$, y por tanto

$$V(P_1(E_1)) \bigcap U((I - P_1)(E_1)) = \{0\}.$$

Como U y V son isomorfismos, entonces:

$$E_2 = U(F_1) \bigoplus U((I - P_1)(E_1))$$

y así, $\operatorname{codim} U((I - P_1)(E_1)) = \dim U(F_1) = \dim F_1$; $\dim V(P_1(E_1)) = \dim F_1$.

Por tanto,

$$E_2 = V(P_1(E_1)) \bigoplus U((I - P_1)(E_1)) = T(E_1)$$

y T es suprayectivo.

En resumen, $T : E_1 \to E_2$ es un isomorfismo.

Si $x_1 \in F_1$ entonces $P_1(x_1) = x_1$ y $x_1 - P_1(x_1) = 0$; por consiguiente, $T(x_1) = V(x_1)$, de manera que $T(F_1) = F_2$, ya que V es sobre.

Además, como $\|T(x) - x\| \le \frac{1}{2}\|x\|$ se tiene por un lado que $\|T(x)\| \le \frac{3}{2}\|x\|$ y por otro que $\|x\| \le 2\|T(x)\|$, de donde $\|T\|\|T^{-1}\| \le 3$. El operador T induce el isomorfismo

$$S : \underset{x+F_1}{E_1 / F_1} \underset{\to}{\to} \underset{T(x)+F_2}{E_2 / F_2},$$

para el cual también se tiene $\|S\|\|S^{-1}\| \le 3$ y por consiguiente,

$$d(E_1/F_1, E_2/F_2) \le 3.$$

En vista que $F_i = \ker(I - P_i)$ para $i = 1, 2$, entonces existen isomorfismos $\varphi_i : E_i/F_i \to (I - P_i)(E_i)$ tales que $\|\varphi_i\| = \|I - P_i\|$ y $\|\varphi^{-1}\| = 1$. Así, se tiene que $d(E_i/F_i, (I - P_i)(E_i)) \le \|I - P_i\| \le 1 + c_i$ para $i = 1, 2$.

Al usar la desigualdad (1.1) obtenemos

$$\begin{aligned} & d((I - P_1)(E_1), (I - P_2)(E_2)) \\ \le\ & d((I - P_1)(E_1), E_1/F_1) \cdot d(E_1/F_1, E_2/F_2) \cdot d(E_2/F_2, (I - P_2)(E_2)) \\ \le\ & 3(1 + c_1)(1 + c_2). \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 2.4.4 *Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ un operador de rango finito y $F \le X$ un subespacio de dimensión finita. Si $\dim F = k$ y $0 < \epsilon < 1$, con $\frac{k\epsilon}{1-\epsilon} < 1$ y $\|T|_F - I_F\| < \epsilon$, entonces:*

a) Existe un operador S de X sobre un subespacio $n-$dimensional de X, donde $n = \dim T(X)$, tal que $S|_F = I_F$, $\|S - T\| < \frac{k\epsilon}{1-\epsilon}\|T\|$, y $S(X) \subset \langle T(X), F\rangle$, $\ker T = \ker S$ y $S^*(X^*) = T^*(X^*)$.

b) Si además T es una proyección, entonces S puede escogerse como una proyección que satisface: $\left\|S|_{T(X)} - I_{T(X)}\right\| < \frac{k\epsilon}{1-\epsilon}$.

Demostración.

a) Hagamos $U = T|_F : F \to T(F)$. Por el Lema 2.4.1 U es un operador invertible y $\|U^{-1}\| < \frac{1}{1-\epsilon}$.

También observamos que como U es una biyección lineal, se cumple que $\dim F = \dim T(F)$, y en particular $\dim F \le \dim T(X)$. Por el Lema **??** sabemos que existe una proyección P de $E = T(X)$ sobre $T(F) = U(F)$ tal que $\|P\| \le k$.

Hagamos $V = (U^{-1} \circ P) + I_E - P$ y $S = V \circ T$. Así, $V \in \mathcal{B}(E, X)$, $S \in \mathcal{B}(X)$, es claro que $S(X) \subset \langle T(X), F\rangle$ y si $x \in F$, entonces $S(x) = (V \circ T)(x) = \left((U^{-1} \circ P) + I_E - P\right)(T(x)) = x + T(x) - T(x) = x$. Es decir, $S|_F = I_F$.

Además,

$$\|V - I_E\| = \left\|\left(U^{-1} \circ P\right) - P\right\| = \left\|(U^{-1} - I_{T(F)}) \circ P\right\| \le \left\|U^{-1} - I_{T(F)}\right\| \|P\|.$$

Por tanto,

$$\|V - I_E\| \leq k \left\|U^{-1} - U \circ U^{-1}\right\| = k \left\|(I_F - U) \circ U^{-1}\right\| \leq k \|I_F - U\| \left\|U^{-1}\right\|$$

y entonces

$$\|V - I_E\| < \frac{k\epsilon}{1-\epsilon} < 1. \tag{2.4}$$

De donde,

$$\|S - T\| = \|(V \circ T) - T\| = \|(V - I_E) \circ T\| \leq \|V - I_E\| \|T\| < \frac{k\epsilon}{1-\epsilon} \|T\| .$$

De acuerdo a (2.4) tenemos $\|V - I_E\| < 1$ y por el Lema 2.4.1 el operador $V : E\,(= T\,(X)) \to V\,(E)$ es invertible. Entonces, $\dim S\,(X) = \dim V\,(E) = \dim E = \dim T\,(X) = n$.

Los operadores T y S tienen el mismo núcleo, pues

$$S(x) = 0 \Leftrightarrow V(T(x)) = 0 \Leftrightarrow T(x) = 0.$$

Y sus rangos están contenidos en $\langle T\,(X)\,, F\rangle$ que es un espacio de dimensión finita.

La codimensión de $\ker T = \ker S$ es finita, pues $\mathrm{Ran}\,(T)$ es finito y por el Lema **??** concluimos que $\mathrm{Ran}\, T^* = \mathrm{Ran}\, S^*$.

b) Tenemos que S es proyección si T lo es, pues entonces:

$$T\,(P\,(T\,(x))) = P\,(T\,(x)) \text{ para todo } x \in X,$$

ya que, $P\,(T\,(x)) \in T\,(F)$ y $T\,(F) \subset T\,(X)$.

Además,

$$T\left(U^{-1}\,(P\,(T\,(x)))\right) = P\,(T\,(x)) \text{ para todo } x \in X,$$

ya que $P\,(T\,(x)) \in T\,(F)$ y $U = T|_F$.

Y como

$$S\,(x) = V\,(T\,(x)) = U^{-1}\,(P\,(T\,(x))) + I_E\,(T\,(x)) - P\,(T\,(x))$$

obtenemos,

$$\begin{aligned} T\,(S\,(x)) &= T\left(U^{-1}\,(P\,(T\,(x)))\right) + T\,(x) - P\,(T\,(x)) \\ &= P\,(T\,(x)) + T\,(x) - P\,(T\,(x)) = T(x). \end{aligned}$$

Así,

$$(S \circ S)(x) = V(T(S(x))) = V(T(x)) = S(x).$$

Finalmente, se probará que $\left\| S\mid_{T(X)} - I_{T(X)} \right\| < \frac{k\epsilon}{1-\epsilon}$. Notemos primero que, como T es una proyección, entonces $S(T(x)) = V(T(T(x))) = V(T(x))$; por tanto, $S\mid_{T(X)} = V\mid_{T(X)}$, de manera que:

$$\left\| S\mid_{T(X)} - I_{T(X)} \right\| = \left\| V\mid_{T(X)} - I_{T(X)} \right\| < \frac{k\epsilon}{1-\epsilon}. \blacksquare$$

Lema 2.4.5 *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que (T_α) es una red de operadores de rango finito definidos en X que converge puntualmente a la identidad en X. Dados $F \leq X$ de dimensión finita y $\epsilon > 0$ existe α_ϵ tal que: $\|T_\alpha(x) - x\| \leq \epsilon \|x\|$ si $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ y para todo $x \in F$, o lo que es lo mismo, $\|T_\alpha|_F - I_F\| \leq \epsilon$ si $\alpha \geq \alpha_\epsilon$. Es decir, (T_α) converge uniformemente a la identidad I en cualquier subespacio de X de dimensión finita.*

Demostración.

Sea $\{x_1, ..., x_n\}$ una base de F, entonces dado $x \in F$, $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ para algunos escalares únicos $\beta_1, ..., \beta_n$.

Si definimos $\|x\|' = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$ entonces $\|\cdot\|'$ es otra norma definida en F, y por ser este espacio de dimensión finita, se tiene que $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|'$. Sea $M > 0$ tal que $\|\cdot\|' \leq M \|\cdot\|$. Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existe α_ϵ tal que $\|T_\alpha(x_i) - x_i\| < \frac{\epsilon}{M}$ para todo $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ y $1 \leq i \leq n$.

Por tanto,

$$\left\| T_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| \frac{\epsilon}{M} \leq \|x\|' \frac{\epsilon}{M} = \|x\| \epsilon$$

si $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ para cualquier colección de escalares $\{\beta_i\}_{i=1}^{n}$. Es decir, se cumplen las afirmaciones. $\blacksquare$

2.5 La propiedad de aproximación.

Definición 2.5.1 *Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación (p.a.), si para cualquier subconjunto compacto K de X y cualquier $\epsilon > 0$, existe un operador de rango finito $T : X \to X$, tal que $\|T(x) - x\| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$.*

Esta propiedad, introducida por Grothendieck en 1955, constituye la propiedad más débil con la que trabajaremos a lo largo del trabajo, como veremos en el Teorema 2.8.1.

Proposición 2.5.2 *Sean X un espacio de Banach. Las siguientes son afirmaciones equivalentes:*

a) Para cada $E \leq X$ de dimensión finita y cada $\epsilon > 0$, existe un operador $T : X \to X$ de rango finito, tal que $\|T(x) - x\| \leq \epsilon \|x\|$.

b) Existe una red (T_α) en $\mathcal{B}(X)$ de operadores de rango finito que converge puntualmente a la identidad en X.

c) Para todo $E \leq X$ de dimensión finita hay un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ de rango finito tal que $S(x) = x$ para todo $x \in E$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b) Sabemos que dados $E \leq X$, de dimensión finita, y $\epsilon > 0$, existe un operador $T_{(\epsilon,E)}$ de rango finito tal que $\left\|T_{(\epsilon,E)}(x) - x)\right\| \leq \epsilon \|x\|$ para todo $x \in E$.

Es fácil probar que relación $\preceq$ definida para las parejas (ϵ, E) formadas por un real positivo ϵ y un subespacio E de X, de dimensión finita, definida como $(\epsilon, E) \preceq (\epsilon', E')$ si $\epsilon' \leq \epsilon$ y $E \leq E'$ es un orden parcial. Veamos que este orden dirige a esa colección de parejas:

Dados $(\epsilon, E), (\epsilon', E')$ tomemos $\epsilon'' = \min\{\epsilon, \epsilon^{'}\}$ y $E^{''} = \langle E \cup E' \rangle$. Entonces, $\epsilon'' \leq \epsilon, \epsilon'$, $E, E' \leq E''$ y E'' es de dimensión finita. Por tanto, $(\epsilon, E), (\epsilon', E') \preceq (\epsilon'', E^{''})$.

Así, la familia $(T_{\epsilon,E})$ es una red de operadores de rango finito definidos en X. Ahora demostraremos que $(T_{\epsilon,E})$ tiende puntualmente a la identidad en X.

Sea $\epsilon_0 > 0$ y $x \in X$; definamos $\delta = \frac{\epsilon_0}{\|x\|+1}$ y $F = \langle x \rangle$. Entonces $(\epsilon, E) \succeq (\delta, F)$ implica

$$\left\|T_{(\epsilon,E)}(x) - x\right\| \leq \epsilon \|x\| \leq \delta \|x\| < \epsilon_0.$$

Por tanto, $T_{\epsilon,E} \to I$ en X.

b) $\Rightarrow$ a) Sea $E \leq X$ de dimensión finita y supongamos que (T_α) es una red de operadores de rango finito tal que $T_\alpha \to I$ en X. Por el Lema 2.4.5, dado $\epsilon > 0$ existe α tal $\|T_\alpha(x) - x\| \leq \epsilon \|x\|$ para todo $x \in E$; de manera que se cumple b).

a) $\Rightarrow$ c) Sea $E \leq X$, con $\dim E = n < \infty$. Consideremos $\epsilon > 0$ tal que $\frac{n\epsilon}{1-\epsilon} < 1$.

Por hipótesis, existe un $T \in \mathcal{B}(X)$ de rango finito tal que

$$\|T\ |_E\ (x) - I\ |_E\ (x)\| < \epsilon \|x\|$$

y por el Lema 2.4.4 existe S, operador en X, de rango finito, tal que $S\ |_E = I\ |_E$.

c)$\Rightarrow$a) La prueba de esta implicación es obvia.■

Corolario 2.5.3 *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de aproximación. Entonces X tiene las siguientes propiedades:*

a) X tiene la propiedad de que para cada $E \leq X$ de dimensión finita y para cada $\epsilon > 0$, existe un operador $T : X \to X$ de rango finito, tal que $\|T(x) - x\| \leq \epsilon \|x\|$ para todo $x \in E$.

b) Existe una red (T_α) en $\mathcal{B}(X)$ de operadores de rango finito que converge puntualmente a la identidad en X.

c) Para todo $E \leq X$ de dimensión finita hay un operador $S \in \mathcal{B}(X)$, de rango finito, tal que $S(x) = x$ para todo $x \in E$.

Demostración.

Veremos que X tiene la propiedad a), lo cual, por la proposición anterior, basta para demostrar este resultado.

Sea $E \leq X$ de dimensión finita y $\epsilon > 0$. Dado que la bola unitaria B_E en E, es un compacto en X, se cumple que existe un operador $T : X \to X$ de rango finito tal que $\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{x}{\|x\|}\right\| < \epsilon$ para todo $x \in E$ no nulo. Por tanto, $\|T(x) - x\| < \epsilon \|x\|$ para todo $x \in E$.■

2.6 La propiedad de $\lambda-$aproximación métrica. La propiedad de aproximación acotada

Definición 2.6.1 *Sea $\lambda \geq 1$. Un espacio de Banach X tiene la propiedad de $\lambda-$aproximación métrica (λ-m.a.p. por sus siglas en inglés) si para cada $E \leq X$ de dimensión finita y cada $\epsilon > 0$ existe un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ de rango finito tal que $\|T\| \leq \lambda$ y $\|T(x) - x\| < \epsilon \|x\|$ para todo $x \in E$.*

Si X tiene la propiedad de $\lambda-$aproximación métrica para algún $\lambda \geq 1$, entonces se dice que X tiene propiedad de aproximación acotada (b.a.p. por sus siglas en inglés)

Proposición 2.6.2 *Sean X un espacio de Banach y $\lambda \geq 1$. Entonces son equivalentes:*

a) X tiene la propiedad de $\lambda-$aproximación métrica.

b) Existe una red (T_α) en $\mathcal{B}(X)$ de operadores de rango finito, uniformemente acotada por λ, que converge puntualmente a la identidad en X.

c) Para todo $E \leq X$ de dimensión finita y para toda $\lambda' > \lambda$ hay un operador $S \in \mathcal{B}(X)$, de rango finito, tal que $\|S\| \leq \lambda'$ y $S(x) = x$ para todo $x \in E$.

d) X tiene la $\lambda'-$propiedad de aproximación métrica para todo $\lambda' > \lambda$.

e) Para todo $K \subset X$ compacto y cada $\epsilon > 0$ existe un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| \leq \lambda$ y tal que $\|T(x) - x\| < \epsilon$ para todo $x \in K$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b) Sabemos que dados $E \leq X$, de dimensión finita, y $\epsilon > 0$, existe un operador $T_{(\epsilon,E)}$ de rango finito tal que $\|T_{(\epsilon,E)}\| \leq \lambda$ y $\|T_{(\epsilon,E)}(x) - I(x)\| \leq \epsilon \|x\|$ para todo $x \in E$.

Es fácil probar que relación $\preceq$ definida para las parejas (ϵ, E) formadas por un real positivo ϵ y un subespacio E de X, de dimensión finita, definida como

$(\epsilon, E) \preceq (\epsilon', E')$ si $\epsilon' \leq \epsilon$ y $E \leq E'$ es un orden parcial. Veamos que este orden dirige a esa colección de parejas:

Dados $(\epsilon, E), (\epsilon', E')$ tomemos $\epsilon'' = \min\{\epsilon, \epsilon'\}$ y $E'' = \langle E \cup E' \rangle$. Entonces , $\epsilon'' \leq \epsilon, \epsilon'$, $E, E' \leq E''$ y E'' es de dimensión finita. . Por tanto, $(\epsilon, E), (\epsilon', E') \preceq (\epsilon'', E'')$.

Así, la familia $(T_{\epsilon,E})$ es una red de operadores de rango finito definidos en X y uniformemente acotada por λ. Ahora demostraremos que $(T_{\epsilon,E})$ tiende puntualmente a la identidad en X.

Sea $\epsilon_0 > 0$ y $x \in X$ y definamos $\delta = \frac{\epsilon_0}{\|x\|+1}$ y $F = \langle x \rangle$. Entonces $(\epsilon, E) \succeq (\delta, F)$ implica

$$\left\| T_{(\epsilon,E)}(x) - x \right\| \leq \epsilon \|x\| \leq \delta \|x\| < \epsilon_0.$$

Por tanto, $T_{\epsilon,E} \to I$ en X..

b) $\Rightarrow$ a) Sea $E \leq X$ de dimensión finita y supongamos que (T_α) es una red de operadores de rango finito tal que $T_\alpha \to I$ en X y $\|T_\alpha\| \leq \lambda$. Por el Lema 2.4.5, dado $\epsilon > 0$ existe α tal $\|T_\alpha(x) - x\| \leq \epsilon \|x\|$ para todo $x \in E$, y como $\|T_\alpha\| \leq \lambda$, tenemos que X tiene la propiedad de $\lambda-$aproximación métrica.

a) $\Rightarrow$ c) X tiene la $\lambda-$propiedad de aproximación métrica. Sean $E \leq X$, con $\dim E = n$, y $\beta \in (0,1)$. Consideremos $\epsilon > 0$ tal que $\frac{n\epsilon}{1-\epsilon} < \beta < 1$

Por hipótesis, existe un $T \in \mathcal{B}(X)$ de rango finito tal que

$$\|T \mid_E (x) - I \mid_E (x)\| < \epsilon \|x\| \ \text{ y } \ \|T\| \leq \lambda.$$

Por el Lema 2.4.4 existe S, operador en X, de rango finito, tal que $S \mid_E = I \mid_E$ y $\|S - T\| \leq \frac{n\epsilon}{1-\epsilon} \|T\| < \beta \|T\|$. Por tanto, $\|S\| \leq (1+\beta) \|T\| \leq (1+\beta) \lambda$.

En suma, para cada subespacio E de dimensión finita y cada $\lambda' > \lambda$, existe un operador $S \in \mathcal{B}(X)$, de rango finito tal que $\|S\| \leq \lambda'$, y $S(x) = x$ para todo $x \in E$.

c)$\Rightarrow$a) Sean $E \leq X$ de dimensión finita y $\epsilon > 0$. Tomemos $\epsilon_0 > 1$ tal que $\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0} < \epsilon$, y notemos que como $\epsilon_0 \lambda > \lambda$, entonces existe $T \in \mathcal{B}(X)$ de rango finito tal que $T \mid_E = I_E$ y tal que $\|T\| \leq \alpha_0 \lambda$.

Definamos un nuevo operador $T_0 = \frac{1}{\epsilon_0} T$. Si $x \in E$, entonces

$$\begin{aligned} \|T_0(x) - x\| &\leq \frac{1}{\epsilon_0} \|T(x) - \epsilon_0 x\| = \frac{1}{\epsilon_0} \|x - \epsilon_0 x\| \\ &= \frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0} \|x\| < (\epsilon_0 - 1) \|x\| \leq \epsilon \|x\| \end{aligned}$$

Además,

$$\|T_o\| = \frac{1}{\epsilon_0} \|T\| \leq \lambda.$$

O sea, X tiene la propiedad de $\lambda-$aproximación métrica.

c)$\Rightarrow$d) La prueba es obvia.

d)$\Rightarrow$c) Sea $\lambda' > \lambda$ y escojamos $\lambda' > \lambda_0 > \lambda$. Como X tiene la λ_0-propiedad de aproximación métrica se sigue que se cumple a) y por tanto c).

a)$\Rightarrow$e) Sean $K \subset X$ compacto y no vacío, y $\epsilon > 0$. Existe una $\frac{\epsilon}{2(\lambda+1)}-$red finita $\{x_1, ..., x_n\}$ de K. Definamos $E = \langle x_1, ..., x_n \rangle$, por ser éste de dimensión finita, existe $T \in \mathcal{B}(X)$ de rango finito tal que $\|T\| \leq \lambda$ y

$$\|T(x) - x\| < \frac{\epsilon}{2} \|x\|$$

si $x \in E$.

Sea $x \in K$ existe $1 \leq i \leq n$ tal que $\|x_i - x\| \leq \frac{\epsilon}{2(\lambda+1)}$ y tenemos:

$$\begin{aligned} \|T(x) - x\| &\leq \|T(x) - T(x_i)\| + \|T(x_i) - x_i\| + \|x_i - x\| \\ &\leq (\lambda + 1) \|x_i - x\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

por lo que se satisface e).

e)$\Rightarrow$a) Sea $E \leq X$ de dimensión finita y $\epsilon > 0$. Dado que la bola unitaria B_E en E, es un compacto en X, se cumple que existe un operador $T : X \to X$ de rango finito tal que $\|T(x)\| \leq \lambda$ y $\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{x}{\|x\|} \right\| < \epsilon$ para todo $x \in E$ no nulo. Por tanto, $\|T(x) - x\| < \epsilon \|x\|$ para todo $x \in E$.■

Como podemos ver, por el inciso e) del teorema anterior, la única diferencia entre la propiedad de aproximación y la propiedad de aproximación acotada, es que, en la segunda, se requiere que los operadores en cuestión estén uniformemente acotados.

Aunque trabajaremos poco con la siguiente propiedad la incluimos porque la mencionamos en el último capítulo y está en el actual contexto.

Definición 2.6.3 *Se dice que un espacio de Banach separable tiene la propiedad conmutativa de aproximación acotada (c.b.a.p.) si existe una sucesión (T_n) de operadores en X de rango finito, uniformemente acotados, tales que $T_n(x) \to x$ para cada $x \in X$, y $T_n \circ T_m = T_{\min(n,m)}$ siempre que $n \neq m$.*

Es claro que todo espacio con la c.b.a.p. tiene la b.a.p. y por el Teorema 2.2.7 todo espacio f.d.d.p. tiene la c.b.a.p.

2.7 π_λ-espacios. La propiedad π (π.p.)

Definición 2.7.1 *Sea $\lambda \geq 1$. Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad π_λ o que es un π_λ-espacio, si existe una colección $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de subespacios finito dimensionales de X, ordenada por la inclusión, tal que $X = \overline{\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha}$ y para cada $\alpha \in A$ existe una proyección T_α de X sobre E_α con $\|T_\alpha\| \leq \lambda$.*

X es llamado un π-espacio, o se dice que X tiene la propiedad π, si X es un π_λ-espacio para algún $\lambda \geq 1$.

Proposición 2.7.2 *Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es un π-espacio.

b) Existe una red (T_α) de proyecciones en X, de rango finito, y uniformemente acotada que converge puntualmente a la identidad en X y además, $T_\beta T_\alpha = T_\beta$ si $\beta \geq \alpha$.

c) Existe $\lambda_0 \geq 1$ que satisface la siguiente propiedad: para cada subespacio F de X, de dimensión finita, existe una proyección T de X, de rango finito, tal que $T(x) = x$ para todo $x \in F$ y $\|T\| \leq \lambda_0$.

Demostración.

a)$\Rightarrow$b) Por hipótesis, existen $\lambda \geq 1$ y una familia $\{E_\alpha\}$ de subespacios de X de dimensión finita, ordenados por la inclusión, tales que $X = \overline{\bigcup_\alpha E_\alpha}$ y para cada α existe una proyección T_α de X sobre E_α tal que $\|T_\alpha\| \leq \lambda$.

Definamos $\alpha \leq \beta$ si $E_\alpha \subset E_\beta$. Entonces, (T_α) es una red de proyecciones de X, de rango finito, uniformemente acotada por λ y si $\alpha \leq \beta$, entonces $T_\beta T_\alpha = T_\beta$.

Probaremos que (T_α) converge puntualmente a la identidad. Sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$, entonces existen α_0 y $y \in E_{\alpha_0}$ tales que $\|y - x\| < \frac{\epsilon}{(\lambda+1)}$ y además, se cumple que $T_\alpha(y) = y$ si $\alpha \succeq \alpha_0$. Por tanto, $\alpha \succeq \alpha_0$ implica

$$\|T_\alpha(x) - x\| \leq \|T_\alpha(x) - T_\alpha(y)\| + \|T_\alpha(y) - x\| \leq (\|T_\alpha\| + 1)\,\|y - x\| < \epsilon.$$

Es decir, $T_\alpha \to I$.

b)$\Rightarrow$c) Sea (T_α) una red como en b). Existe $\lambda \geq 1$ tal que $\|T_\alpha\| \leq \lambda$ para todo α. Tomemos un subespacio k-dimensional F de X y sea $0 < \epsilon < 1$ tal que $\frac{k\epsilon}{1-\epsilon} < 1$. Por el Lema 2.4.5 existe $\alpha_\epsilon > 0$ tal que $\|T_\alpha |_F - I_F\| < \epsilon$ si $\alpha \geq \alpha_\epsilon$.

Por el Lema 2.4.4, existe una proyección S de rango finito tal que $S |_F = I_F$ y

$$\|S\| - \|T_\alpha\| \leq \|S - T_\alpha\| \leq \frac{k\epsilon}{1-\epsilon}\,\|T_\alpha\| \leq \|T_\alpha\|,$$

por lo que $\|S\| \leq 2\,\|T_\alpha\| \leq 2\lambda$. Por tanto, se cumple c).

c)$\Rightarrow$a) Sabemos que dado $F \leq X$ de dimensión finita, existe una proyección de rango finito T_F de X sobre un subespacio E_F tal que $\|T_F\| \leq \lambda_0$ y $T_F(x) = x$ para todo $x \in F$. Notemos que esta última propiedad implica que $F \leq E_F$.

Ahora mostraremos que la familia $\{E_F\}$, con F recorriendo todos los subespacios de dimensión finita de X, está dirigida por la inclusión. Dados E_{F_1} y E_{F_2}, tomemos $F_3 = \langle E_{F_1} \cup E_{F_2} \rangle$, entonces existe T_{F_3} con las propiedades que arriba se mencionaron, y por tanto, $F_3 \subset E_{F_3}$, y entonces, E_{F_1} y E_{F_2} están contenidos en E_{F_3}.

Además, $X = \bigcup E_F$ pues si $x \in X$, entonces $F = \langle x \rangle$ es un subespacio de X de dimensión finita y así, existe un espacio E_F en la familia antes construida tal que $F \subset E_F$ y por tanto, $x \in \bigcup E_F$. ■

Observación 2.7.3 *Si analizamos las pruebas anteriores podemos concluir que en a) podemos poner que X es un π_λ- espacio y en b) que la red está acotada por λ y entonces las 2 afirmaciones serán también equivalentes. Asimismo, si en c) ponemos que para cada $\lambda_0 > \lambda$ existe el operador con las características ahí señaladas, entonces el nuevo inciso a) implica esta nueva forma del inciso c).*

2.8 Relaciones entre: f.d.d.p., b.a.p., π.p. y b.p. y su conservación bajo isomorfismos.

Es importante observar que las propiedades antes definidas no son independientes entre sí y mantienen relaciones interesantes, esto lo muestra el siguiente

Teorema 2.8.1 *Sea X un espacio de Banach.*

a) Si X tiene una base de Schauder (x_n), o sea tiene la b.p., entonces tiene también la f.d.d.p. En ese caso, las proyecciones que definen una descomposición finito dimensional para X coinciden con las proyecciones naturales asociadas a la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de X.

b) Si X tiene la f.d.d.p., entonces es un $\pi_\lambda-$espacio para alguna $\lambda \geq 1$.

c) Si X es un $\pi_\lambda-$espacio para alguna $\lambda \geq 1$, entonces X tiene la propiedad de $\lambda-$aproximación métrica.

d) Si X tiene la propiedad de aproximación $\lambda-$métrica para alguna $\lambda \geq 1$, entonces X tiene la propiedad de aproximación.

Demostración.

a) Sea X un espacio con base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y cuya sucesión de coeficientes funcionales asociados es $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Para cada $n \geq 1$ definimos el operador $P_n(x) = f_n(x)\, x_n$, tenemos que P_n es una proyección de X sobre $\langle x_n \rangle$. Así, dado x en X se cumple: $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)x_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, y además, esta representación de x es única por ser $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a ella. De esta forma, $(\langle x_n \rangle)_{n=1}^{\infty}$ es una descomposición finito dimensional de X y las proyecciones asociadas a esa d.f.d. para X son las proyecciones naturales asociadas a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$: $Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$.

b) Sea $(F_i)_{i=1}^{\infty}$ una descomposición finito dimensional de X. Entonces definamos $E_n = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} F_i \right\rangle$. La familia $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ está dirigida por la inclusión, y dado cualquier x en X se cumple $x = \sum_{i=1}^{\infty} P_n(x)$, donde cada P_n es una proyección de X sobre F_n. Es decir, x es el límite de elementos en $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n$, pues cada suma parcial $\sum_{i=1}^{k} P_n(x)$ está en E_k. Así, $X = \overline{\bigcup E_n}$ y sabemos (Teorema 2.2.6) que la familia $\left(Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ de las proyecciones naturales de la d.f.d. está uniformemente acotada; además $Q_n(X) = E_n$ para todo $n \geq 1$. Así, X es un $\pi_\lambda-$espacio para alguna $\lambda \geq 1$.

c) Por la Observación 2.7.3, tenemos que c) implica el inciso b) de la 2.6.2 y por tanto X tiene la propiedad de $\lambda-$aproximación métrica.

d) La afirmación es obvia.■

Teorema 2.8.2 *Las cuatro propiedades que se analizan en este trabajo: f.d.d.p., b.a.p., π.p. y b.p. se conservan bajo isomorfismos.*

Demostración.

Sean X, Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ un isomorfismo.

a) La propiedad de aproximación acotada es invariante bajo isomorfismos. Usaremos el inciso b) de la Proposición 2.6.2.

Supongamos que para alguna $\lambda \geq 1$, X tiene la $\lambda-$ m.a.p. Por la Proposición 2.6.2 sabemos que existe una red (T_α) de operadores de rango finito uniformemente acotada por λ tal que $T_\alpha(x) \to x$ para todo $x \in X$.

Definamos $S_\alpha = T \circ T_\alpha \circ T^{-1}$ para cada α. Entonces $S_\alpha : Y \to X$ es de rango finito y $\|S_\alpha\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|T\| \lambda$ para todo α. Además, dado cualquier $y \in Y$, tenemos que $y = T(x)$ para alguna $x \in X$, y así,

$$S_\alpha(y) = T\left(T_\alpha\left(T^{-1}(T(x))\right)\right) = T(T_\alpha(x))$$

y entonces $S_\alpha(y) \to T(x) = y$. Con lo cual obtenemos que Y tiene la $\left(\left\|T^{-1}\right\| \|T\| \lambda\right)-$ m.a.p.

b) La propiedad π es invariante bajo isomorfismos.

La demostración es completamente análoga a la que se hizo en el inciso a); ahora se usará la Proposición 2.7.2, según ésta lo único que falta verificar para tener b) es que si T_α es una proyección, entonces $S_\alpha = T \circ T_\alpha \circ T^{-1}$ también lo es; pero esto resulta es cierto pues

$$S_\alpha \circ S_\alpha = T \circ T_\alpha \circ T^{-1} \circ T \circ T_\alpha \circ T^{-1} = T \circ T_\alpha^2 \circ T^{-1} = S_\alpha.$$

c) La propiedad de descomposición finito dimensional es invariante bajo isomorfismos.

Si X tiene una d.f.d., entonces, por la caracterización que nos brinda el Teorema 2.2.7, sabemos que existe una sucesión de proyecciones de rango finito (Q_n) uniformemente acotada, digamos por $M > 0$, tal que $Q_m \circ Q_n = Q_{\min(m,n)}$ y que converge puntualmente a la identidad en X. Entonces definimos los operadores $Q'_n = T \circ Q_n \circ T^{-1}$. Así (Q'_n) es una sucesión de operadores uniformemente acotada por $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| M$ y de rango finito. Además,

$$Q'_n \circ Q'_n = T \circ Q_n \circ T^{-1} \circ T \circ Q_n \circ T^{-1} = T \circ Q_n^2 \circ T^{-1} = Q'_n$$

y

$$Q'_m \circ Q'_n = T \circ Q_m \circ T^{-1} \circ T \circ Q_n \circ T^{-1} = T \circ Q_{\min(n,m)} \circ T^{-1} = Q'_{\min(m,n)}.$$

Por último, dado $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$, y

$$Q'_n(y) = Q'_n(T(x)) = T(Q_n(x)) \to T(x) = y.$$

Por tanto, por el mismo Teorema 2.2.7, Y tiene una d.f.d. definida por (Q'_n).

d) La propiedad de la base se conserva bajo isomorfismos.

Este inciso ya se probó en una versión más amplia en la Proposición 2.3.18.■

Capítulo 3

Estructuras en X y X^*

3.1 El Principio de la Reflexividad local

Cuando un espacio de Banach es reflexivo se tiene que X es isométricamente isomorfo a X^{**} a través de la inmersión canónica $\widehat{\cdot}$. El Principio de la reflexividad local que veremos aquí establece que a cada subespacio de dimensión finita de un espacio de Banach X le corresponde un subespacio isométrico de X vía una isometría que aplicada a puntos de $\widehat{X}$ actúa como la inversa de $\widehat{\cdot}$. En particular a un subespacio de dimensión finita de $\widehat{X}$ le corresponde "el mismo" subespacio en X.

Lema 3.1.1 *Sean X, Y dos espacios de Banach, $T : X \to Y$ un operador y $x^{**} \in X^{**}$ tal que $\|x^{**}\| \leq 1$ y $\|T^{**}(x^{**}) - \widehat{y}\| < \epsilon$ para algún $y \in Y$ y un $\epsilon > 0$. Entonces no existe $W \subseteq B_X$ convexo tal que $x^{**} \in \overline{\widehat{W}}^{w*}$ y $W \bigcap L = \emptyset$, donde $L = \{x \in B_X : \|T(x) - y\| < \epsilon\}$*

Demostración.

Supongamos que $W \subseteq B_X$ es un convexo tal que $x^{**} \in \overline{\widehat{W}}^{w*}$ y $W \bigcap L = \emptyset$. Como $W \bigcap L = \emptyset$, entonces $\|T(w) - y\| \geq \epsilon$ para todo $w \in W$.

Además, gracias a Proposición 1.4.11 tenemos que T^{**} es $w^* - w^*-$ continuo, y por consiguiente

$$T^{**}(x^{**}) \in T^{**}\left(\overline{\widehat{W}}^{w*}\right) \subset \overline{T^{**}\left(\widehat{W}\right)}^{w*} = \overline{\widehat{T(W)}}^{w*}. \tag{3.1}$$

Dado que el trasladado $T(W) - y$ de $T(W)$ es un conjunto convexo de Y ajeno a la bola abierta V centrada en el origen y de radio ϵ, el Teorema 1.6.1 nos asegura que existen $y^* \in Y^*$ y un real a tales que $y^*(T(w) - y) \geq a > y^*(z)$ para todo $w \in W$ y para todo $\|z\| < \epsilon$.

Como $a > y^*(z)$ para todo $\|z\| < \epsilon$, sabemos que $a > 0$ y $\frac{a}{\epsilon} \geq \|y^*\|$ pues

$$a \geq \sup_{\|z\|<\epsilon} y^*(z) = \sup_{\|z\|<1} y^*(\epsilon z) = \epsilon \sup_{\|z\|<1} y^*(z) = \epsilon \|y^*\|.$$

Definamos $y_0^* = \frac{\epsilon}{a} y^*$; así, $\|y_0^*\| \leq 1$ y $y_0^*(T(w) - y) = \frac{\epsilon}{a} y^*(T(w) - y) \geq \epsilon$ para todo $w \in W$.

Observemos que

$$\epsilon \leq y_0^*(T(w) - y) = \left(\widehat{T(w)} - \widehat{y}\right)(y_0^*) = (T^{**}(\widehat{w}) - \widehat{y})(y_0^*) = \widehat{y_0^*}(T^{**}(\widehat{w}) - \widehat{y})$$

para todo $w \in W$. Por esto y (3.1) obtenemos $\widehat{y_0^*}(T^{**}(x^{**}) - \widehat{y}) \geq \epsilon$.

Finalmente,

$$\|T^{**}(x^{**}) - \widehat{y}\| \geq (T^{**}(x^{**}) - \widehat{y})(y_0^*) = \widehat{y_0^*}(T^{**}(x^{**}) - \widehat{y}) \geq \epsilon,$$

lo cual contradice la hipótesis.■

Observación 3.1.2 *Bajo las hipótesis del lema anterior, L es distinto del vacío; de lo contrario se tendría $B_X \bigcap L = \emptyset$ y $x^{**} \in \overline{\widehat{B_X}}^{w*}$, y de este par de hechos y el Teorema de Goldstine, se tendría una contradicción a dicho lema.*

Corolario 3.1.3 *Sean X, Y dos espacios de Banach, $T : X \to Y$ un operador y $x^{**} \in X^{**}$ tal que $\|x^{**}\| \leq 1$ y $\|T^{**}(x^{**}) - \widehat{y}\| < \epsilon$ para algún $y \in Y$ y un $\epsilon > 0$. Entonces $x^{**} \in \overline{\widehat{L}}^{w^*}$ en X^{**}, donde $L = \{x \in B_X : \|T(x) - y\| < \epsilon\}$.*

Demostración.

Supongamos que $x^{**} \notin \overline{\widehat{L}}^{w^*}$. Como X^{**} con la topología w^* es localmente convexo, $\{x^{**}\}$ es w^*-compacto, $\overline{\widehat{L}}^{w^*}$ es obviamente w^*-cerrado, y ambos son convexos, entonces, de acuerdo al Teorema 1.6.2, existe $x^* \in X^*$ tal que $b = \widehat{x^*}(x^{**}) > \max\limits_{\widehat{x} \in \overline{\widehat{L}}^{w^*}} \widehat{x^*}(\widehat{x}) = a$; en particular,

$$x^{**}(x^*) > \frac{a+b}{2} > x^*(x) \text{ para todo } x \in L.$$

Definamos $W = \left\{x \in B_X : x^*(x) > \frac{a+b}{2}\right\}$. Entonces $x^{**} \in \overline{\widehat{W}}^{w^*}$, ya que por el teorema de Goldstine existe una red (x_α) en B_X tal que $\widehat{x_\alpha} \xrightarrow{w^*} x^{**}$, y como $x^{**}(x^*) > \frac{a+b}{2}$ entonces existe α_0 tal que $\widehat{x_\alpha}(x^*) > \frac{a+b}{2}$ siempre que $\alpha > \alpha_0$. Así, en toda w^*-vecindad de x^{**} hay puntos de $\widehat{W}$.

Por otra parte, $W \bigcap L = \emptyset$ ya que $\frac{a+b}{2} > x^*(x)$ para todo $x \in L$, y puesto que W es un conjunto conexo, se contradice el Lema 3.1.1. Así $x^{**} \in \overline{\widehat{L}}^{w^*}$.■

Proposición 3.1.4 *Sean X un espacio de Banach y $E \leq X^*$ de dimensión finita. Dado $\alpha > 0$, existe una colección $\{u_j\}_{j=1}^r \subseteq X$ tal que $\|u_j\| = 1$ para toda $1 \leq j \leq r$, y $\|e\| \leq (1+\alpha) \max\limits_{1 \leq j \leq r} |e(u_j)|$ para todo $e \in E$.*

Demostración.

Sea $\epsilon \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{1+\alpha} + \epsilon < 1$, y escojamos $\frac{1}{1+\alpha} + \epsilon < \delta < 1$. El conjunto $S = \{e \in E \mid \|e\| = 1\}$ es un compacto en E, pues éste es un espacio de dimensión finita. En particular, S es totalmente acotado, y por consiguiente existen vectores $e_1, .., e_r \in S$ que forman una $\epsilon-$red finita de S.

Como para cada $1 \leq j \leq r$ se tiene: $\|e_j\| = \sup \{|e_j(x)| : x \in X \ , \ \|x\| = 1\}$ y como $0 < \delta < 1$, se sigue que para cada $1 \leq j \leq r$ existe $u_j \in X$ tal que $\|u_j\| = 1$ y $\delta = \|e_j\| \delta < |e_j(u_j)|$.

Tomemos entonces cualquier $e \in S$. Existe $1 \leq j \leq r$ tal que $\|e - e_j\| < \epsilon$, y así

$$|e(u_j)| \geq |e_j(u_j)| - |e_j(u_j) - e(u_j)| > \delta - \epsilon > \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1+\alpha} \|e\| .$$

De esta forma

$$\|e\| < (1+\alpha) |e(u_j)| < (1+\alpha) \max_{1 \leq j \leq r} |e(u_j)| .$$

Ahora, dado $e \in E$, con $e \neq 0$, tenemos:

$$\left\| \frac{e}{\|e\|} \right\| < (1+\alpha) \max_{1 \leq j \leq r} \left| \frac{e}{\|e\|}(u_j) \right| ;$$

o sea,

$$\|e\| < (1+\alpha) \max_{1 \leq j \leq r} |e(u_j)| .$$

Por consiguiente,

$$\|e\| \leq (1+\alpha) \max_{1 \leq j \leq r} |e(u_j)|$$

para cualquier $e \in E$.■

Corolario 3.1.5 *Sean X un espacio de Banach, $Z \leq X^*$ de dimensión finita, y $\alpha > 0$. Entonces existe $Y \leq X$ también de dimensión finita tal que para cada $z \in Z$, se tiene que $\|z\| \leq (1+\alpha) \sup \{|z(y)| \mid y \in Y \ y \ \|y\| = 1\}$.*

Lema 3.1.6 *Sean X un espacio de Banach y k y m dos naturales. Definimos el operador $G : X^k \to X^m$ como*

$$G\left((x_s)_{s=1}^k\right) = \left(\sum_{s=1}^k \lambda_s^j x_s\right)_{j=1}^m ,$$

donde $\left(\lambda_s^j\right)$, con $1 \leq s \leq k$ y $1 \leq j \leq m$, es una colección fija de escalares. Entonces $G^*(\left(x_j^*\right)_{j=1}^m) = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_s^j x_j^*\right)_{s=1}^k$ y por tanto,

$$G^{**}\left((x_s^{**})_{s=1}^k\right) = \left(\sum_{j=1}^k \lambda_s^j x_s^{**}\right)_{j=1}^m .$$

Demostración.
Sea $\left(x_j^*\right)_{j=1}^{m} \in (X^m)^*$

$$\begin{aligned}\left(G^*(\left(x_j^*\right)_{j=1}^{m})\right)(x_s)_{s=1}^{k} &= \left(\left(x_j^*\right)_{j=1}^{m} \circ G\right)(x_s)_{s=1}^{k} = \left(\left(x_j^*\right)_{j=1}^{m}\right)\left(\sum_{s=1}^{k} \lambda_s^j x_s\right)_{j=1}^{m} \\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{k} \lambda_s^j x_j^*(x_s)\right) = \sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_s^j x_j^*(x_s)\right).\end{aligned}$$

Es decir, $G^*(\left(x_j^*\right)_{j=1}^{m}) = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_s^j x_j^*\right)_{s=1}^{k}$. ■

Lema 3.1.7 *Sean X un espacio de Banach y k, M y N tres naturales. Dados $f_i, u_j \in X^*$ para $1 \leq i \leq M$ y $1 \leq j \leq N$, definimos el operador $S : X^k \to \mathbb{F}^{Mk+Nk}$ como $S\left((x_s)_{s=1}^{k}\right) = (f_i(x_s), u_j(x_s))_{i,j,s}$. Entonces,*

$$S^{**}\left((g_s)_{s=1}^{k}\right) = (g_s\,(\widehat{f_i), g_s}\,(u_j))_{s,j,i} \text{ para todo } (g_s)_{s=1}^{k} \in \left(X^k\right)^{**}.$$

Demostración.
Sean $(a_{i,s}, b_{j,s})_{s,j,i} \in \left(\mathbb{F}^{Mk+Nk}\right)^*$ y $(x_s)_{s=1}^{k} \in X^k$, entonces

$$\begin{aligned}S^*\left((a_{i,s}, b_{j,s})_{s,j,i}\right)\left((x_s)_{s=1}^{k}\right) &= (a_{i,s}, b_{j,s})\left(S\left((x_s)_{s=1}^{k}\right)\right) \\ &= (a_{i,s}, b_{j,s})_{s,j,i}(f_i(x_s), u_j(x_s))_{s,j,i} \\ &= \sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{M} a_{i,s} f_i(x_s) + \sum_{j=1}^{N} b_{j,s} u_j(x_s)\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{M} a_{i,s} f_i + \sum_{j=1}^{N} b_{j,s} u_j\right)_{s=1}^{k}\left((x_s)_{s=1}^{k}\right).\end{aligned}$$

En resumen,

$$S^*\left((a_{i,s}, b_{j,s})_{s,j,i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{M} a_{i,s} f_i + \sum_{j=1}^{N} b_{j,s} u_j\right)_{s=1}^{k}$$

para todo $(a_{i,s}, b_{j,s})_{s,j,i} \in \left(\mathbb{F}^{Mk+Nk}\right)^*$

Entonces, si $(g_s)_{s=1}^k \in (X^{**})^k$,

$$\begin{aligned} S^{**}\left((g_s)_{s=1}^k\right)\left((a_{i,s}, b_{j,s})_{s,j,i}\right) &= (g_s)_{s=1}^k \circ S^*\left((a_{i,s}, b_{j,s})_{s,j,i}\right) \\ &= (g_s)_{s=1}^k \circ \left(\sum_{i=1}^M a_{i,s} f_i + \sum_{j=1}^N b_{j,s} u_j\right) \\ &= \sum_{s=1}^k \left(\sum_{i=1}^M a_{i,s} g_s(f_i) + \sum_{j=1}^N b_{j,s} g_s(u_j)\right) \\ &= \left(\widehat{g_s(f_i), g_s(u_j)}\right)_{s,j,i} (a_{i,s}, b_{j,s})_{s,j,i}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$S^{**}\left((g_s)_{s=1}^k\right) = \left(\widehat{g_s(f_i), g_s(u_j)}\right)_{s,j,i} \text{ para todo } (g_s)_{s=1}^k \in \left(X^k\right)^{**}. \blacksquare$$

Definición 3.1.8 *Un operador $T : X \to Y$ entre dos espacios normados es llamada una $\epsilon-$isometría, con $\epsilon > 0$, si $1 - \epsilon \leq \|T(x)\| \leq 1 + \epsilon$ siempre que $\|x\| = 1$.*

Es claro que si $T : X \to Y$ es una $\frac{\epsilon}{3+\epsilon}-$isometría, con $\epsilon > 0$, entonces T es un isomorfismo sobre su imagen y $\|T\|\left\|T^{-1}\right\| < 1+\epsilon$, ya que la condición $1 - \frac{\epsilon}{3+\epsilon} \leq \|T(x)\| \leq 1 + \frac{\epsilon}{3+\epsilon}$ para todo $x \in X$ con $\|x\| = 1$, implica que T está acotado por abajo, $\|T\| \leq 1 + \frac{\epsilon}{3+\epsilon}$ y $\left\|T^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\frac{\epsilon}{3+\epsilon}} < 1 + \frac{\epsilon}{3}$.

Teorema 3.1.9 *(Principio de la Reflexividad local). Sean $E \leq X^{**}$ y $F \leq X^*$ de dimensiones finitas. Dado $0 < \epsilon < 1$ existe un operador $T : E \to \widehat{X}$ tal que:*

a) T es una $\frac{\epsilon}{3+\epsilon}$-isometría, en particular, $\|T\|\left\|T^{-1}\right\| < 1 + \epsilon$.

b) $T\,|_{E \bigcap \widehat{X}} = I_{E \bigcap \widehat{X}}$.

c) $T(e)(f) = e(f)$ si $f \in F$ y $e \in E$.

Si $\widetilde{\cdot}$ denota la isometría inversa de la inmersión canónica $\widehat{\cdot} : X \to X^{**}$, entonces el operador $T_0 : E \to X$ dado como $T_0 = \widetilde{\cdot} \circ T : E \to X$ satisface:

a_0) T_0 es una $\frac{\epsilon}{3+\epsilon}$-isometría, en particular $\|T_0\|\left\|T_0^{-1}\right\| < 1 + \epsilon$.

b_0) $T_0(\widehat{x}) = x$ si $\widehat{x} \in E$.

c_0) $f(T_0(e)) = e(f)$ si $f \in F$ y $e \in E$.

Demostración.

Sea $n = \dim E$. El resultado es obvio si $n = 0$; supongamos que $n > 0$. $\dim E \bigcap \widehat{X} = n - k$, con $0 \leq k \leq n$. Si $k = 0$ el resultado se obtiene con $T = I_E$. Para $0 < \epsilon < 1$ hagamos $\delta = \frac{\epsilon}{3+\epsilon}$. Escojamos una base normalizada $\left\{x_j^{**}\right\}_{j=1}^n$ de E, tal que $\left\langle \left\{x_j^{**}\right\}_{j=k+1}^n \right\rangle = E \bigcap \widehat{X}$ y definamos $y_j^{**} = (1-\delta)\, x_j^{**}$ para cada

$1 \le j \le n$. Entonces, $\left\{y_j^{**}\right\}_{j=1}^{n}$ es también una base de E. Si $\{h_j\}_{j=1}^{n}$ son los coeficientes funcionales asociados a la base $\left\{y_j^{**}\right\}_{j=1}^{n}$, entonces $(y_1^{**},..,y_n^{**};h_1,..,h_n)_{j=1}^{n}$ es un sistema biortogonal de E tal que $\left\|y_j^{**}\right\| = 1-\delta$ para todo $1 \le j \le n$, y $\left\{y_j^{**}\right\}_{j=k+1}^{n}$ es una base de $E \bigcap \widehat{X}$.

Observemos que $I_E(e) = \sum_{j=1}^{n} h_j(e)\, y_j^{**}$ para todo $e \in E$, por lo que cualquier operador $T : E \to \widehat{X}$ de la forma $T(e) = \sum_{j=1}^{k} h_j(e)\,\widehat{v}_j + \sum_{j=k+1}^{n} h_j(e)\, y_j^{**}$, con $v_1,...,v_k \in X$, satisface la condición $T\mid_{E\bigcap \widehat{X}} = I_{E\bigcap \widehat{X}}$. En lo que sigue, elegiremos vectores $v_1,...,v_k \in X$ que harán que el operador $T : E \to \widehat{X}$, definido como $T(e) = \sum_{j=1}^{k} h_j(e)\,\widehat{v}_j + \sum_{j=k+1}^{n} h_j(e)\, y_j^{**}$, sea una $\delta-$isometría que satisface c).

Tomemos $0 < \alpha < \min\left(\frac{1}{1-\delta} - 1, \frac{\delta}{\sum_{j=1}^{n}\|h_j\|}, 1\right)$. Sea $\{e_j\}_{j=1}^{r}$ una $\frac{\alpha}{4}-$red finita de $Int\,(B_E)$.

Por otra parte, como $E \le X^{**}$ es de dimensión finita, se sigue de la Proposición 3.1.4 que existe una colección $\left\{u_j^*\right\}_{j=1}^{r'}$ en B_{X^*} tal que $\|e\| \le (1+\alpha) \max_{1\le j\le r'} \left|e\left(u_j^*\right)\right|$ para todo $e \in E$.

Podemos suponer que $r = r'$, pues en caso contrario podemos agregar puntos superfluos a la red $\{e\}_{j=1}^{r}$ o a la colección $\left\{u_j^*\right\}_{j=i}^{r'}$. Sea N el valor común de r y r'.

En resumen, existen una $\frac{\alpha}{4}-$red finita $\{e\}_{j=1}^{N}$ de $Int\,(B_E)$ y una colección $\left\{u_j^*\right\}_{j=i}^{N}$ en B_{X^*} tales que

$$\|e\| \le (1+\alpha) \max_{1\le j\le N} \left|e\left(u_j^*\right)\right| \tag{3.2}$$

para todo $e \in E$.

Sea $h_i(e_j) = \lambda_i^j$ para cada $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le N$; así, $e_j = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i^j y_i$ para cada $1 \le j \le N$. Hagamos $p = \max_{1\le j\le N} \sum_{r=1}^{k} \left|\lambda_r^j\right|$.

En el producto cartesiano X^k consideremos, como hemos convenido, la norma del máximo de la normas de las componentes. Definimos

$$C = \left\{(x_s)_{s=1}^{k} \in B_{X^k} : \left\|\sum_{s=1}^{k} \lambda_s^j x_s + \sum_{s=k+1}^{n} \lambda_s^j \widetilde{y_s^{**}}\right\| < 1,\ j = 1,...,N\right\}.$$

Definimos $G : X^k \to X^N$ como $G\left((x_s)_{s=1}^k\right) = \left(\sum_{s=1}^k \lambda_s^j x_s\right)_{j=1}^N$, entonces de acuerdo al Lema 3.1.6 tenemos: $G^{**}\left((x_s^{**})_{s=1}^k\right) = \left(\sum_{j=1}^k \lambda_s^j x_s^{**}\right)_{j=1}^N$. Por tanto,

$$\left\| G^{**}\left((y_s^{**})_{s=1}^k\right) + \left(\sum_{s=k+1}^n \lambda_s^j y_s^{**}\right)_{j=1}^N \right\| < 1$$

ya que

$$\left\| \sum_{s=1}^k \lambda_s^j y_s^{**} + \sum_{s=k+1}^n \lambda_s^j y_s^{**} \right\| = \left\| \sum_{s=1}^n \lambda_s^j y_s^{**} \right\| = \|e_j\| < 1.$$

Por el Corolario 3.1.3 se tiene que $(y_s^{**})_{s=1}^k \in \overline{\widehat{C}}^{w^*}$.

Sea $\{f_i\}_{i=1}^M$ una base de F y definamos el operador $S : X^k \to \mathbb{F}^{Mk+Nk}$ como $S\left((x_s)_{s=1}^k\right) = \left(f_i(x_s), u_j^*(x_s)\right)_{s,j,i}$ con $1 \le s \le k$, $1 \le i \le M$, $1 \le j \le N$, donde $u_j^* \in B_{X^*}$ son las funcionales que satisfacen 3.2. Entonces,

$$S^{**}\left((y_s^{**})_{s=1}^k\right) \in S^{**}\left(\overline{\widehat{C}}^{w^*}\right) \subseteq \overline{S^{**}\left(\widehat{C}\right)}^{w^*} = \overline{\widehat{S(C)}}^{w^*},$$

pero por ser $\mathbb{F}^{Mk+Nk}$ un espacio de dimensión finita, la topología w^* y la inducida por la norma coinciden, y por tanto,

$$S^{**}\left((y_s^{**})_{s=1}^k\right) \subset \overline{\widehat{S(C)}} = \widehat{\overline{S(C)}}.$$

$\operatorname{Ran}(S)$ es cerrado, ya que por (3.2) tenemos

$$\left\| S\left((x_s)_{s=1}^k\right) \right\| \ge \max_{1\le j\le N, 1\le s\le k} \left|\widehat{x_s}\left(u_j^*\right)\right| \ge \frac{1}{1+\alpha} \left\| (x_s)_{s=1}^k \right\|. \tag{3.3}$$

para todo $(x_s)_{s=1}^k \in X^k$.

Afirmamos que $\widehat{\operatorname{Ran}(S)} = \operatorname{Ran}(S^{**})$. Por un lado, $\widehat{\operatorname{Ran}(S)} \subset \operatorname{Ran}(S^{**})$ ya que $S^{**}\left((\widehat{x_s})_{s=1}^k\right) = \widehat{S\left((x_s)_{s=1}^k\right)}$. Por otro lado, debido a que $\operatorname{Ran}(S)$ es cerrado y $\mathbb{F}^{Mk+Nk}$ es de dimensión finita, se tiene

$$\begin{aligned} S^{**}\left(\left(X^k\right)^{**}\right) &= S^{**}\left(\overline{\widehat{X^k}}^{w^*}\right) \subseteq \overline{S^{**}\left(\widehat{X^k}\right)}^{w^*} = \overline{S^{**}\left(\widehat{X^k}\right)} \\ &= \overline{\widehat{S(X^k)}} = \widehat{S(X^k)} = \widehat{\operatorname{Ran}(S)}. \end{aligned}$$

Por lo que existe $(v_j)_{j=1}^k \in X^k$ tal que $S\left(\widehat{(v_j)_{j=1}^k}\right) = S^{**}\left(\left(y_j^{**}\right)_{j=1}^k\right)\left(\in \overline{\widehat{S(C)}}\right)$.
Así, para $0 < \beta < \min\left\{1, \frac{\delta}{2p}\right\}$ podemos encontrar $(c_j)_{j=1}^k \in C$ tal que

$$\left\| S\left(\widehat{(v_j)_{j=1}^k}\right) - S\left(\widehat{(c_j)_{j=1}^k}\right)\right\| = \left\| S\left(\widehat{(v_j - c_j)_{j=1}^k}\right)\right\| < \frac{\beta}{1+\alpha}.$$

Al definir $b_j = v_j - c_j$ para cada $1 \leq j \leq k$, se obtiene de 3.3 que $\left\|(b_j)_{j=1}^k\right\| < \beta$ y

$$S^{**}\left(\left(y_j^{**}\right)_{j=1}^k\right) = S\left(\widehat{(c_j)_{j=1}^k}\right) + S\left(\widehat{(b_j)_{j=1}^k}\right).$$

Mostraremos que $T(e) = \sum_{j=1}^k h_j(e)\widehat{v}_j + \sum_{j=k+1}^n h_j(e)\, y_j^{**}$ satisface $T(e)(f_i) = e(f_i)$ para todo $1 \leq i \leq M$ y $e \in E$, de donde se sigue c), y además probaremos que T es una $\delta-$isometría.

Por el Lema 3.1.7 tenemos:

$$S^{**}\left((g_s)_{s=1}^k\right) = \left(\widehat{g_s(f_i), g_s\left(u_j^*\right)}\right)_{s,j,i} \text{ para todo } (g_s)_{s=1}^k \in \left(X^k\right)^{**}.$$

En particular,

$$S^{**}\left((y_s)_{s=1}^k\right) = \left(y_s(f_i), \widehat{y_s\left(u_j^*\right)}\right)_{s,1\leq j\leq N, 1\leq i\leq M}.$$

De donde,

$$\begin{aligned}\left(y_s(f_i), \widehat{y_s\left(u_j^*\right)}\right)_{s,j,i} &= S^{**}\left((y_s)_{s=1}^k\right) = S\left(\widehat{(c_s)_{s=1}^k}\right) + S\left(\widehat{(b_s)_{s=1}^k}\right)\\ &= \left(f_i\widehat{(c_s + b_s), u_j^*}(c_s + b_s)\right)_{s,j,i}.\end{aligned}$$

Lo que significa que

$$y_s(f_i) = f_i(c_s) + f_i(b_s) = f_i(v_s) \text{ para todo } 1 \leq s \leq k,\ 1 \leq i \leq M.$$

$$y_s\left(u_j^*\right) = u_j^*(c_s) + u_j^*(b_s) \text{ para todo } 1 \leq s \leq k,\ 1 \leq j \leq N. \tag{3.4}$$

De la primera de estas igualdades se obtiene que si $1 \leq i \leq M$ y $e \in E$, entonces se cumple

$$\begin{aligned} T(e)(f_i) &= \sum_{j=1}^{k} h_j(e) f_i(v_j) + \sum_{j=k+1}^{n} h_j(e) y_j^{**}(f_i) = \\ &= \sum_{j=1}^{k} h_j(e) y_j^{**}(f_i) + \sum_{j=k+1}^{n} h_j(e) y_j^{**}(f_i) = e(f_i). \end{aligned}$$

Para ver que T es una δ-isometría notemos primero que para cada $1 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned} \|T(e_i)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{k} h_j(e_i) \widehat{v}_j + \sum_{j=k+1}^{n} h_j(e_i) y_j^{**} \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^i \left(\widehat{c}_j + \widehat{b}_j \right) + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j^i y_j^{**} \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^i \widehat{c}_j + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j^i y_j^{**} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^i \widehat{b}_j \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^i c_j + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j^i \widetilde{y_j^{**}} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^i b_j \right\| < 1 + \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^i b_j \right\| \\ &\leq 1 + \left(\sum_{j=1}^{k} \left| \lambda_j^i \right| \right) \left\| (b_j)_{j=1}^{k} \right\| < 1 + \beta p < 1 + \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Y puesto que $\{e_j\}_{j=1}^{N}$ es una $\frac{\alpha}{4}-$red finita de $IntB_E$, para $x \in S_E$ tenemos que existe $1 \leq i \leq n$ tal que:

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq \|T(x) - T(e_i)\| + \|T(e_i)\| \leq \|T\| \|x - e_i\| + \|T(e_i)\| < \|T\| \frac{\alpha}{4} + 1 + \frac{\delta}{2} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{k} \|h_j\| \left\| (c_j + b_j)_{j=1}^{k} \right\| + \sum_{j=k+1}^{n} \|h_j\| \left\| \left(y_j^{**} \right)_{j=1}^{n} \right\| \right) \frac{\alpha}{4} + 1 + \frac{\delta}{2} \\ &< \frac{\alpha}{4} \left(2 \sum_{j=1}^{k} \|h_j\| + (1 - \delta) \sum_{j=k+1}^{n} \|h_j\| \right) + 1 + \frac{\delta}{2} \\ &< \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{n} \|h_j\| + 1 + \frac{\delta}{2} = 1 + \delta. \end{aligned}$$

Para mostrar que $1 - \delta < \|T(x)\|$ para todo x, observamos que de la igualdad (3.4) se deduce que para $e \in E$ se tiene:

$$T(e)\left(u_j^*\right) = \sum_{s=1}^{k} h_s(e) u_j^*(c_s + b_s) + \sum_{s=k+1}^{n} h_s(e) y_s\left(u_j^*\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{k} h_s(e)\, y_s\left(u_j^*\right) + \sum_{s=k+1}^{n} h_s(e)\, y_s\left(u_j^*\right)$$
$$= \sum_{s=1}^{n} h_s(e)\, y_s\left(u_j^*\right) = e\left(u_j^*\right).$$

Así,
$$\left|e\left(u_j^*\right)\right| = \left|T(e)\left(u_j^*\right)\right| \leq \left\|u_j^*\right\| \|T(e)\| \leq \|T(e)\|$$
por tanto,
$$(1-\delta)\|e\| \leq \frac{\|e\|}{(1+\alpha)} \leq \sup_{1\leq j\leq N} \left|e\left(u_j^*\right)\right| \leq \|T(e)\|.$$

En conclusión, T es una $\delta-$isometría.

Las afirmaciones para T_0 se siguen inmediatamente y el teorema queda demostrado.■

Lema 3.1.10 *Sean X y Y dos espacios de Banach, con Y de dimensión finita. Si $F \leq X^*$ es de dimensión finita, $R : X^* \to Y$ es un operador y $0 < \epsilon < 1$, entonces existe un operador $S : X^* \to Y$ $w^* - \|\cdot\|$ continuo tal que:*

a) $S|_F = R|_F$.
b) $\|S\| \leq (1+\epsilon)\|R\|$.
c) $S^*(y^*) = R^*(y^*)$ siempre que $R^*(y^*) \in \widehat{X}$.
d) $S(X^*) = R(X^*)$ si R es sobre.

Demostración.

Supongamos que la dimensión de Y es positiva. Sea $E = R^*(Y^*)$. Por el Principio de la Reflexividad local sabemos que existe una $\frac{\epsilon}{3+\epsilon}-$isometría, $T : E \to X$, tal que:
i) $T(\widehat{x}) = x$ si $\widehat{x} \in E$.
ii) $f(T(e)) = e(f)$ para todo $f \in F$ y $e \in E$.

En particular, T es invertible y $\|T\| < 1+\epsilon$.

Como Y es de dimensión finita se tiene que Y y Y^{**} son isomorfos vía la isometría canónica $\widehat{\cdot} : Y \to Y^{**}$. Sea $S = \widetilde{\cdot} \circ (T \circ R^*)^*$, donde $\widetilde{\cdot}$ denota la isometría inversa de la inmersión canónica $\widehat{\cdot}$, entonces S es un operador de X^* en Y. Dado que $(T \circ R^*)^*$es un operador dual, entonces, por la Proposición 1.4.11 y por ser Y de dimensión finita se tiene que $(T \circ R^*)^*$, y por tanto S, es $w^* - \|\cdot\|$-continuo.

Dados $f \in F$ y $y^* \in Y^*$, tenemos

$$\widehat{S(f)}(y^*) = (T \circ R^*)^*(f)(y^*) = (f \circ (T \circ R^*))(y^*) = f(T \circ R^*(y^*)).$$

Y dado que $R^*(y^*) \in E$, se tiene por ii) que

$$f(T(R^*(y^*))) = R^*(y^*)(f) = y^*(R(f)) = \widehat{R(f)}(y^*).$$

En suma, $S(f) = R(f)$ para todo $f \in F$.

Por otra parte,

$$\|S\| = \|\widetilde{\ } \circ T \circ R^{**}\| = \|T \circ R^*\| \leq (1+\epsilon)\|R\|.$$

Sean $y^* \in Y^*$ y $x^* \in X^*$ y supongamos que $R^*(y^*) \in \widehat{X}$. Por i) sabemos que $T(R^*(y^*)) = \widetilde{R^*(y^*)}$; de donde:

$$\begin{aligned} R^*(y^*)(x^*) &= T(\widehat{R^*(y^*)})(x^*) = x^*(T(R^*(y^*))) = \\ (T \circ R^*)^*(x^*)(y^*) &= y^*\left(\widetilde{(T \circ R^*)^*}(x^*)\right) = y^*(S(x^*)) = S^{\,*}(y^*)(x^*). \end{aligned}$$

Así, $S^*(y^*) = R^*(y^*)$ siempre que $R^*(y^*) \in \widehat{X}$.

Ahora supongamos que el operador R es suprayectivo, lo cual, por el Corolario 1.3.8, implica que R^* es inyectivo. Por ser R de rango finito, digamos de dimensión n, existe una base $\{y_i\}_{i=1}^n$ de $R(X^*) = Y$. Llamemos $\{f_i\}_{i=1}^n$ a los coeficientes funcionales asociados a esta base. Entonces $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una base de Y^*. Sea $x^* \in X^*$, entonces $R(x^*) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x^*)\, y_i$.

Sea $z^* \in X^*$ que cumpla las siguientes condiciones:

$$z^* \circ (T \circ R^*)(f_i) = f_i(x^*)\,, \text{ para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Tal z^* existe porque tanto T como R^* son operadores inyectivos y $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una base de $Y^* = R(X^*)$. Entonces

$$S(z^*) = \widetilde{\ } \circ (T \circ R^*)^*(z^*) = (z^* \circ \widetilde{(T \circ R^*)}).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} S(z^*) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(S(z^*))\, y_i = \sum_{i=1}^{n} f_i\left(z^* \circ \widetilde{(T \circ R^*)}\right) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (z^* \circ (T \circ R^*))(f_i)\, y_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y_i = R(x^*). \end{aligned}$$

Y por tanto, $R(X^*) \subset S(X^*)$. La contención contraria es obvia, por lo que queda demostrado el lema.■

Corolario 3.1.11 *Sean X un espacio de Banach, Y y F dos subespacios de X^*, ambos de dimensión finita, $0 < \epsilon < 1$ y $R : X^* \to Y$ y $S : X^* \to Y$ dos operadores que cumplen con todo lo señalado en el lema anterior. Entonces, los operadores $R_1 : X^* \to X^*$ y $S_1 : X^* \to X^*$, definidos como $R_1(x^*) = R(x^*)$ y $S_1(x^*) = S(x^*)$, respectivamente, tienen rangos en Y; por tanto, de dimensión finita. S_1 es $w^* - \|\cdot\|$ continuo y se satisface:*

a) $S_1\mid_F = R_1\mid_F$.

b) $\|S_1\| \leq (1+\epsilon)\|R_1\|$.

c) $S_1^*(x^{**}) = R_1^*(x^{**})$ *para todo* $x^{**} \in X^{**}$ *que cumple que* $R_1^*(x^{**}) \in \widehat{X}$.

d) Existe un operador $T : X \to X$ *de rango finito tal que* $T^* = S_1$.

e) Si R *es una proyección sobre* Y, *entonces* S_1 *y* T, *pueden escogerse como proyecciones (de rango finito) y* $S_1(X^*) = R(X^*)$.

Demostración.

Por el lema anterior, es claro que se satisfacen a) y b).

c). Por c) del mismo lema se tiene: $S^*(y^*) = R^*(y^*)$ para todo $y^* \in Y^*$ que satisface $R^*(y^*) \in \widehat{X}$; es decir, $y^* \circ R \in \widehat{X}$ implica $y^* \circ S = y^* \circ R$ si $y^* \in Y$.

Sea $x^{**} \in X^{**}$ tal que $R_1^*(x^{**}) \in \widehat{X}$. Tenemos,

$$S_1^*(x^{**}) = (x^{**}|Y) \circ S_1 = (x^{**}|Y) \circ S$$

y

$$R_1^*(x^{**}) = (x^{**}|Y) \circ R;$$

de donde,

$$S_1^*(x^{**}) = (x^{**}|Y) \circ S = (x^{**}|Y) \circ R = R_1^*(x^{**}).$$

d) Sabemos que S_1 es un operador $w^*-\|\cdot\|-$continuo, y por ser Y de dimensión finita, w^*-w^*- continuo, entonces por las Proposiciones 1.3.5 y 1.4.11 existe un operador $T : X \to X$ de rango finito, tal que $T^* = S_1$.

e) Ahora, si R, y por tanto R_1, es una proyección sobre Y, entonces tomemos $F' = \langle F \bigcup Y \rangle$. Por lo recién probado, existe $S_1 : X^* \to X^*$, con rango en Y, que es $w^* - \|\cdot\| -$ continuo y satisface; a), para F' en lugar de F, b), c) y $S_1(X^*) = R_1(X^*) = Y$. Sea $x^* \in X^*$, entonces existe $z^* \in X^*$ tal que $S_1(x^*) = R_1(z^*)$. Debido a que se satisface a) y el rango de R_1 es Y, obtenemos: $S_1^2(x^*) = S_1(R_1(z^*)) = R_1(R_1(z^*)) = R_1(z^*) = S_1(x^*)$ y por consiguiente, S_1 y T (Proposición 1.4.11), son proyecciones. Por lo antes dicho, S_1 es una proyección sobre $Y = R(X^*)$.■

Observación 3.1.12 *Si en el corolario anterior* R *se supone* w^*-$\|\cdot\|$ *continuo, entonces las conclusiones son obvias tomando* $S_1 = R_1$.

Ahora, juntando el Principio de la Reflexividad local, el Lema 3.1.10, y el Corolario 3.1.11, tenemos una versión ampliada del Principio de la Reflexividad local, que se resume en el siguiente

Teorema 3.1.13 *Sean* X *un espacio de Banach,* $E \leq X^{**}$ *y* $G \leq X^*$ *de dimensiones finitas, y* $0 < \epsilon < 1$. *Si existe una proyección* P *de* X^{**} *sobre* E, *entonces existe un operador inyectivo* $T : E \to X$ *y una proyección* P_0 *de* X *sobre* $T(E)$ *tales que* *a)* $T(\widehat{x}) = x$ *si* $\widehat{x} \in E$.

b) $f(T(e)) = e(f)$ *para todo* $f \in G$ *y* $e \in E$.

c) $\left\|T^{-1}\right\| \|T\| < 1 + \epsilon$.

d) $\|P_0\| \leq \|P\|(1+\epsilon)$.

Si además P *es* $w^* - \|\cdot\|$ *continuo, entonces* P_0 *puede escogerse de manera que satisfaga a), b), c), d) y*

e) $P_0^{**}(x^{**}) = P(x^{**})$ *siempre que* $P(x^{**})$ *esté en* $\widehat{X}$.

Demostración.

Si hacemos que P juegue el papel de R en el Corolario 3.1.11, cumpliéndose entonces la hipótesis de que R es una proyección sobre E. Entonces $Q^* : (X^*)^* \to E$ es la proyección suprayectiva (S_1) cuya existencia es asegurada en ese resultado, entonces $Q : X^* \to X^*$ corresponde a la proyección (T) de rango finito que ahí aparece. Además, ese mismo corolario nos dice que $\|Q\| \leq \|P\|\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)$.

Hagamos $F = Q(X^*)$, que es un subespacio de X^* de dimensión finita, y definamos $F' = \langle F \bigcup G \rangle$, que también es de dimensión finita.

a)-c) Por el Principio de Reflexividad local existe $T : E \to X$ tal que $f(T(e)) = e(f)$ para todo $f \in F' = \langle F \bigcup G \rangle$ y $e \in E$, $T(\widehat{x}) = x$ si $\widehat{x} \in E$, y $\left\|T^{-1}\right\|, \|T\| < 1 + \frac{\epsilon}{4}$; o sea se satisfacen a), b) y c).

d) Ahora tomemos $P_0 = T \circ Q^* \circ \widehat{\cdot}$, entonces $P_0(X) \subset T(E)$ y

$$\begin{aligned} \|P_0\| &\leq \|T\|\|Q\| \\ &\leq \|P\|\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right) < \|P\|(1+\epsilon). \end{aligned}$$

Por otra parte, si $x^* \in X^*$ entonces $Q(x^*) \in F$, de manera que dado $e \in E$ y $x^* \in X^*$, se tiene

$$\left(Q^*\left(\widehat{T(e)}\right)\right)(x^*) = \left(\widehat{T(e)} \circ Q\right)(x^*) = \left(\widehat{T(e)}\right)(Q(x^*)) = Q(x^*)(T(e)).$$

Por b)

$$Q(x^*)(T(e)) = e(Q(x^*)) = (Q^*(e))(x^*) = e(x^*).$$

Así $Q^*\left(\widehat{T(e)}\right) = e$ para todo $e \in E$, y por tanto,

$$P_0(T(e)) = T\left(Q^*\left(\widehat{T(e)}\right)\right) = T(e) \text{ para todo } e \in E.$$

Es decir, $P_0|_{T(E)} = I_{T(E)}$, de donde, $P_0(X) = T(E)$. Además,

$$P_0^2(x) = P_0(T(Q^*(\widehat{x}))) = T(Q^*(\widehat{x})) = P_0(x)$$

y por consiguiente P_0 es una proyección sobre $T(E)$.

Si P es $w^*-\|\cdot\|$ continua, entonces, por la observación anterior podemos tomar $Q^*=P$, con lo que se siguen cumpliendo a)-d) y tenemos $P_0 = T\circ P\circ\widehat{\cdot}$, así, $P_0 : X \to T(E)\subset X$ es un operador para el que se cumple:

$$P_0^{**} = (T\circ P\circ\widehat{\cdot})^* = T^{**}\circ P^{**}\circ\widehat{\ }|_{X^{**}} .$$

Como $\widehat{\cdot}^{**}(x^{**}) = \widehat{x^{**}}$, tenemos

$$\begin{aligned} P_0^{**}(x^{**}) &= T^{**}\left(P^{**}\left(\widehat{x^{**}}\right)\right) = T^{**}\left(\widehat{P(x^{**})}\right) \\ &= T(\widehat{P(x^{**})}). \end{aligned}$$

Además, si $P(x^{**})\in\widehat{X}$, entonces, por a) se sigue

$$P(x^{**}) = T(\widehat{P(x^{**})}) = P_0^{**}(x^{**}).$$

De manera que se cumple el inciso e).■

3.2 Relaciones entre estructuras de X y X^*

Aquí se dan los resultados que motivan el título del capítulo y se concluye con uno que es fundamental en la teoría de las bases: X tiene base de Schauder si X^* la tiene. Este resultado tardó 20 años en obtenerse, desde que S. Karlin planteó el problema.

Lema 3.2.1 *Sea X un espacio de Banach para el que existe $Y\le X^*$ y dos redes de operadores de rango finito (P_α) y (T_β) que satisfacen:*

1) $P_\alpha : X\to X$, $P_\alpha^*(X^*)\subset Y$ y $T_\beta : X^*\to Y$ para todo α y β.
2) $P_\alpha(x)\to x$, $T_\beta(y)\to y$ para todo $x\in X$ y $y\in Y$, y $\sup\limits_\beta\|T_\beta\|<\infty$.
3) Los operadores P_α son proyecciones.

Sean E y F dos subespacios de dimensión finita de X y Y, respectivamente y $0<\epsilon<1$ y $\alpha_1\in A$. Entonces existe una proyección Q de rango finito definida en X tal que:

a) $Q(e)=e$ para todo $e\in E$.
b) $Q^*(f)=f$ para todo $f\in F$.
c) $Q^*(X^*)\subset Y$.
d) $\|Q\|\le 2K+2c+3Kc$ donde $c=\sup\limits_\alpha\|P_\alpha\|<\infty$ (Teorema de Banach-Steinhaus) y $K=\sup\limits_\beta\|T_\beta\|$.
e) $Q(X)$ es $\epsilon-$cercano a $P_{\alpha_0}(X)$ para alguna $\alpha_0>\alpha_1$.

Demostración.

Sea $0 < \delta < \frac{1}{3}$ tal que $\delta \dim(F) < \frac{1}{4}$ y $\frac{\delta \dim F}{1-\delta} < \frac{1}{2}$. Como F es de dimensión finita, el Lema 2.4.5 asegura que existe β tal que $\|T_\beta(f) - f\| \leq \delta \|f\|$ para todo $f \in F$ y el Lema 2.4.4 nos dice que existe $T \in \mathcal{B}(X^*)$ de rango finito contenido en $\langle T_\beta(X^*), F\rangle \subset Y$ tal que $T(f) = f$ para todo $f \in F$ y $\|T_\beta - T\| < \frac{1}{2}\|T_\beta\|$; de esto último se obtiene que $\|T\| \leq \frac{3}{2}\|T_\beta\| \leq \frac{3}{2}K$.

Por el Corolario 3.1.11 existe un operador $S : X \to X$ de rango finito tal que:

s1) $S^*(X^*) = T(X^*) \subset Y$,

s2) $)S^*(f) = T(f) = f$ para todo $f \in F$,

s3) $\|S\| \leq \|T\|(1+\delta) \leq \frac{3}{2}K(1+\delta) \leq 2K$

Tomemos el espacio de dimensión finita $G = \langle E \bigcup \operatorname{Ran}(S)\rangle \subset X$ y escojamos $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ tal que $\frac{\gamma \dim G}{1-\gamma} < \frac{\epsilon}{4} < 1$. Sea α_0' tal que $\|P_\alpha(g) - g\| \leq \gamma\|g\|$ para todo $g \in G$ y $\alpha \geq \alpha_0'$, esto último puede lograrse gracias nuevamente al Lema 2.4.5. Consideremos $\alpha_0 > \max(\alpha_0', \alpha_1)$; por el inciso b) del Lema 2.4.4 existe una proyección P en X de rango finito tal que

p1) $P(g) = g$ para todo $g \in G$,

p2) $\|P - P_{\alpha_0}\| \leq \frac{\gamma \dim G}{1-\gamma}\|P_{\alpha_0}\|$, por tanto, $\|P\| \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right)\|P_{\alpha_0}\| < \frac{3}{2}c$.

p3) $\left\|P|_{P_{\alpha_0}(X)} - I_{P_{\alpha_0}(X)}\right\| < \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$.

p4) $\operatorname{Ran} P^* = \operatorname{Ran} P^*_{\alpha_0} \subset Y$.

Por el Lema 2.4.1 tenemos que el operador $P|_{P_{\alpha_0}(X)}: P_{\alpha_0}(X) \to P(P_{\alpha_0}(X))$ es invertible. Como $\ker P = (\operatorname{Ran} P^*)_\perp = \left(\operatorname{Ran} P^*_{\alpha_0}\right)_\perp = \ker P_{\alpha_0}$ y P, P_{α_0} son proyecciones, tenemos que para cada $x \in X$ se cumple que $x - P_{\alpha_0}(x) \in \ker P$ y entonces $P(x) = P(P_{\alpha_0}(x))$ por lo que $P(P_{\alpha_0}(X)) = P(X)$; de donde, $P|_{P_{\alpha_0}(X)}: P_{\alpha_0}(X) \to P(X)$ es invertible y $\left\|P|_{P_{\alpha_0}(X)} - I_{P(X)}\right\| < \epsilon$, es decir, $P_{\alpha_0}(X)$ es ϵ-cercano a $P(X)$.

Ahora consideremos el operador $Q = S + P - S \circ P$. Es claro que $Q \in \mathcal{B}(X)$ es de rango finito por serlo S y P. Probaremos que Q, y por tanto Q^*, es una proyección, para esto se usará que $P(S(x)) = S(x)$ para todo $x \in X$ ya que $P(g) = g$ para todo $g \in G$:

$$\begin{aligned} Q^2(x) &= S^2(x) + S(P(x)) - S^2(P(x)) + P(S(x)) + P^2(x) \\ &\quad - P(S(P(x))) - S(P(S(x))) - S\left(P^2(x)\right) + SP(S(P(x))) \\ &= S(x) + P(x) - S(P(x)) = Q(x). \end{aligned}$$

d) Además,

$$\|Q\| = \|S + P - S \circ P\| \leq \|S\| + \|P\| + \|S\| \, \|P\| \leq 2K + 2c + 3Kc.$$

Así, Q cumple d).

c) Como $Q^* = S^* + P^* + P^* \circ S^*$ obtenemos de s1) y p4) que $Q^*(X^*) \subset Y$, con lo que se cumple c).

b) y e) Observemos que

$$(I - S) \circ (I - P) = I - (S + P - S \circ P) = I - Q,$$

de donde,

$$I - Q^* = (I - P^*) \circ (I - S^*).$$

Por otro lado, recordemos que $\operatorname{Ran} S \subset G$ y $P \mid_G = I_G$ es decir que $\operatorname{Ran} S \subset \operatorname{Ran} P$. Por el Corolario 1.3.7 tenemos entonces que $\ker P^* \subset \ker S^*$. De esta manera, dado $x^* \in \ker P^*$, tenemos

$$(I - S^*)(x^*) = x^* - S^*(x^*) = x^*.$$

$$(I - P^*) \circ (I - S^*)(x^*) = x^*. \tag{3.5}$$

Es decir, $\ker P^* \subset \operatorname{Ran}(I - Q^*) \subset \operatorname{Ran}(I - P^*) = \ker P^*$, por lo que $I - Q^*$ es una proyección sobre $\ker P^*$ y así, $\ker P^* = \operatorname{Ran}(I - Q^*) = \ker Q^*$.

Por lo anterior, la Proposición 1.3.6 y por ser Q y P de rango finito, tenemos $\operatorname{Ran} Q = (\ker Q^*)_\perp = (\ker P^*)_\perp = \operatorname{Ran} P$.

Como $P_{\alpha_0}(X)$ es ϵ-cercano a $P(X)$, concluimos que $Q(X)$ es $\epsilon-$cercano a $P_{\alpha_0}(X)$ y obtenemos e).

Por s2), $S^*(f) = f$ para todo $f \in F$. Sea $f \in F$, entonces $(I - S^*)(f) = 0$ y por (3.5) $(I - Q^*)(f) = 0$. Así $Q^*(f) = f$ para todo $f \in F$, con lo que se verifica b).

a) Finalmente, como $E \subset G$ y $P \mid_G = I_G$, tenemos que por p1) $(I - P)(e) = 0$ para todo $e \in E$, de manera que $(I - Q)(e) = (I - S) \circ (I - P)(e) = 0$ para todo $e \in E$. Así, $Q(e) = e$ para todo $e \in E$ y Q cumple a).■

Corolario 3.2.2 *Sea X un $\pi_\lambda-$espacio tal que X^* tiene la propiedad $\mu-$aproximación métrica. Si los subespacios $E \subset X$ y $F \subset X^*$ son de dimensión finita y $\epsilon > 0$, entonces existe una proyección $Q : X \to X$ de rango finito tal que*

a) $Q \mid_E = I_E$, $Q^* \mid_F = I_F$.

b) $\|Q\| \leq 2\mu + 2\lambda + 3\mu\lambda$.

c) $Q(X)$ es $\epsilon-$cercano a E_{α_0} para algún $\alpha_0 \in A$, donde la red $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ define una $\pi_\lambda-$ estructura de X.

Demostración.

Como X es un $\pi_\lambda-$espacio, por la Observación 2.7.3 sabemos que existe una red de proyecciones de rango finito $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ uniformemente acotada tal que $\sup_\alpha \|P_\alpha\| \leq \lambda$ y $P_\alpha(x) \rightarrow x$ para todo $x \in X$. Más aún, los subespacios $E_\alpha = P_\alpha(X)$ definen una $\pi_\lambda-$ estructura de X.

Por otro lado, como X^* tiene la propiedad $\mu-$m.a.p., se sigue de la Proposición 2.6.2 que existe una red de operadores de rango finito (T_β) uniformemente acotada, con $\sup \|T_\beta\| \leq \mu$, tal que $T_\beta(x^*) \rightarrow x^*$ para todo $x^* \in X^*$.

De esta manera nos encontramos en la situación del Lema 3.2.1, con $Y = X^*$, el cual nos asegura que existe un operador Q con las propiedades deseadas.$\blacksquare$

Lema 3.2.3 *Sea X un espacio de Banach para el que existe $Y \leq X^*$ y dos redes $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ y $(T_\beta)_{\beta\in B}$ de operadores de rango finito que satisfacen:*

1) $P_\alpha : X \rightarrow X$, $P^*_\alpha(X^*) \subset Y$ y $T_\beta : X^* \rightarrow Y$ para todo α y β.

2) $P_\alpha(x) \rightarrow x$ para todo $x \in X$, $T_\beta(y) \rightarrow y$ para todo $y \in Y$, y $\sup_\beta \|T_\beta\| < \infty$.

3) Cada T_β es una proyección.

Sean E y F subespacios de dimensión finita de X y Y, respectivamente, $0 < \epsilon < 1$ y $\beta_1 \in B$ fija. Entonces, existe Q una proyección de rango finito definida en X tal que:

a) $Q(e) = e$ para todo $e \in E$.

b) $Q^*(f) = f$ para todo $f \in F$.

c) $Q^*(X^*) \subset Y$.

d) $\|Q\| \leq 2c + 2K + 3cK$ donde $c = \sup_\alpha \|P_\alpha\| < \infty$ (Teorema de Banach-Steinhaus) y $K = \sup_\beta \|T_\beta\|$.

e) $Q^*(X^*)$ es $\epsilon-$cercano a $T_\beta(X)$ para algún $\beta > \beta_1$.

Demostración.

La prueba de este resultado se basa en argumentos muy parecidos a los que se usaron para demostrar el Lema3.2.1.

Sea $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tal que $\frac{\delta \dim E}{1-\delta} < \frac{1}{2}$. El Lema 2.4.5 asegura que existe α_0 tal que $\|P_{\alpha_0}(e) - e\| \leq \delta \|e\|$ para todo $e \in E$.

Así, el Lema 2.4.4 nos dice que existe un operador P de rango finito definido en X tal que:

p1) $P(e) = e$ para todo $e \in E$.

p2) $P^*(X^*) = P^*_{\alpha_0}(X^*) \subset Y$.

p3) $\|P_{\alpha_0} - P\| < \frac{\delta \dim E}{1-\delta} \|P_{\alpha_0}\|$. De esto último se obtiene que $\|P\| \leq \frac{3c}{2}$.

Definamos $H = \langle P^*(X^*) \bigcup F \rangle \subset Y$, y tomemos $0 < \gamma < \frac{1}{3}$ tal que $\frac{\gamma \dim H}{1-\gamma} < \frac{\epsilon}{4} < 1$; de donde $\gamma \dim H < \frac{\epsilon}{4}$.

Escojamos β_0 suficientemente grande para que $\left\|T_{\beta_0}(h) - h\right\| \leq \gamma \|h\|$ para todo $h \in H$, tal elección es posible gracias al Lema 2.4.5.

Ahora, por el inciso b) del Lema 2.4.4 existe una proyección T en X^* de rango finito tal que:

t1) $T(h) = h$ para todo $h \in H$.

t2) $T^*(X^*) = T^*_{\beta_0}(X^*) \subset Y$.

t3) $\left\|T - T_{\beta_0}\right\| \leq \frac{\gamma \dim H}{1-\gamma} \left\|T_{\beta_0}\right\|$, por lo que $\|T\| \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) \left\|T_{\beta_0}\right\| < \frac{3}{2}K$.

t4) $\left\|T\mid_{T_{\beta_0}(X^*)} - I_{T_{\beta_0}(X^*)}\right\| < \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$.

Por el Lema 2.4.1 tenemos que el operador $T\mid_{T_{\beta_0}(X^*)}: T_{\beta_0}(X^*) \to T\left(T_{\beta_0}(X^*)\right)$ es invertible. Como $\ker T = (\operatorname{Ran} T^*)_\perp = \left(\operatorname{Ran} T^*_{\beta_0}\right)_\perp = \ker T_{\beta_0}$ se sigue como en la prueba del Lema 3.2.1 que $T\left(T_{\beta_0}(X^*)\right) = T(X^*)$; de donde, $T\mid_{T_{\beta_0}(X^*)}: T_{\beta_0}(X^*) \to T(X^*)$ es invertible y $\left\|T\mid_{T_{\beta_0}(X^*)} - I_{T_{\beta_0}(X^*)}\right\| < \epsilon$, por lo que $T^*(X^*)$ es $\epsilon-$cercano a $T^*_{\beta_0}(X)$.

Por el Corolario 3.1.11 existe una proyección $S : X \to X$ de rango finito, tal que

s1) $S^*(X^*) = T(X^*)$.

s2) $S^*(h) = T(h) = h$ para todo $h \in H$.

s3) $\|S\| \leq \|T\|(1+\gamma) \leq \frac{3}{2}K(1+\gamma) \leq 2K$ (la penúltima desigualdad se obtiene de t3).

Definimos $Q = S + P - S \circ P$. Veremos que $Q^* = S^* + P^* - P^* \circ S^*$ es una proyección en X^*; para esto usaremos que S^* es también una proyección y s2): $S^*(h) = T(h) = h$ para todo $h \in H = \langle P^*(X^*) \bigcup F\rangle$; en particular tendremos $S^*(P^*(x^*)) = P^*(x^*)$ para todo $x^* \in X^*$:

$$
\begin{aligned}
Q^{*2}(x^*) &= S^{*2}(x^*) + S^*(P^*(x^*)) - S^*(P^*(S^*(x^*))) \\
&\quad + P^*(S^*(x^*)) + P^{*2}(x^*) - P^{*2}(S^*(x^*)) \\
&\quad - P^*\left(S^{*2}(x^*)\right) - P^*(S^*(P^*(x^*))) + P^*S^*(P^*(S^*(x^*))) \\
&= S^*(x^*) + P^*(x^*) - P^*(S^*(x^*)) = Q^*(x^*).
\end{aligned}
$$

Lo que demuestra, por el Corolario 1.4.12, que tanto Q^*, como Q son proyecciones

El operador Q satisface a), b) y d) ya que:

$$Q(e) = S(e) + P(e) - S(P(e)) = S(e) + e - S(e) = e$$

para todo $e \in E$; como $F \subset H$, entonces

$$Q^*(f) = S^*(f) + P^*(f) - (P^* \circ S^*)(f) = T(f) = f$$

para todo $f \in F$ y

$$\|Q\| = \|S + P - SP\| \leq \|S\| + \|P\| + \|S\| \|P\| \leq 2K + 2c + 3Kc.$$

Por p2), s1) y t2) tenemos $S^*(X^*) = T(X^*) \subset Y$ y $P^*(X^*) \subset Y$, y por tanto se cumple c): $Q^*(X^*) \subset Y$.

Tenemos $I - Q = (I - S) \circ (I - P)$ y sabemos que $\operatorname{Ran} P^* \subset H$ y $S^* |_H = T |_H = I_H$, es decir, $\operatorname{Ran} P^* \subset \operatorname{Ran} S^*$. Por el Corolario 1.3.7 tenemos que $\ker S \subset \ker P$. Así, dado $x \in \ker S$, tenemos

$$Q(x) = S(x) + P(x) - S(P(x)) = 0.$$

Es decir, $\ker S \subset \ker Q = \operatorname{Ran}(I - Q) \subset \operatorname{Ran}(I - S) = \ker S$, por lo que $I - Q$ es una proyección sobre $\ker S$ y así, $\ker S = \ker Q$.

Por lo anterior, y por ser Q y S proyecciones obtenemos (Proposición 1.3.6):

$$\operatorname{Ran} Q^* = (\ker Q)^\perp = (\ker S)^\perp = \operatorname{Ran} S^*$$

Como $T_{\beta_0}(X^*)$ es ϵ-cercano a $T(X^*) = S(X^*)$, concluimos que $Q^*(X^*)$ es $\epsilon-$cercano a $T_{\beta_0}(X^*)$ y obtenemos e).$\blacksquare$

Teorema 3.2.4 *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces son equivalentes:*

a) X tiene la f.d.d.p.

b) Existe $Y \leq X^*$ cerrado y separable, y dos sucesiones (P_n) y (T_n) de operadores de rango finito que satisfacen:

i) $P_n : X \to X$, $P_n^*(X^*) \subset Y$ y $T_n : X^* \to Y$ para todo $n \geq 1$.

ii) $P_n(x) \to x$, $T_n(y) \to y$, cuando $n \to \infty$ y para todo $x \in X$, $y \in Y$, y $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty$.

iii) Cada operador P_n es una proyección.

c) Las mismas condiciones que las dadas en b), salvo que en vez de que cada P_n sea una proyección se pide que cada T_n es una proyección.

Más aún, si se satisface a), entonces Y puede escogerse como el subespacio cerrado generado por la unión del rango de los operadores adjuntos de las proyecciones naturales que inducen una descomposición finito dimensional de X.

Si se satisface b), entonces la sucesión (Q_n) de proyecciones naturales de la d.f.d. que se obtiene para X es tal que:

iv) La sucesión de proyecciones $(Q_n^* \mid_Y)$ determina una descomposición finito dimensional en Y.

v) $\sup\limits_{n\geq 1} \|Q_n\| \leq 2K + 2c + 3cK$ donde $c = \sup\limits_{n\geq 1} \|P_n\|$ y $K = \sup\limits_{n\geq 1} \|T_n\|$.

vi) Existe una subsucesión (P_{n_k}) de (P_n) tal que para cada $k \geq 1$, se cumple que $Q_k(X)$ es $\epsilon-$cercano a $P_{n_k}(X)$.

vii) $Q_n^*(X^*) \subset Y$ para cada $n \geq 1$.

Y, si se cumple c), entonces la sucesión (Q_n) de proyecciones naturales de la d.f.d. que se obtiene para X es tal que:

viii) La sucesión de proyecciones $(Q_n^* \mid_Y)$ determina una descomposición finito dimensional en Y.

ix) $\sup\limits_{n\geq 1} \|Q_n\| \leq 2K + 2c + 3cK$ donde $c = \sup\limits_{n\geq 1} \|P_n\|$ y $K = \sup\limits_{n\geq 1} \|T_n\|$.

x) Existe una subsucesión (T_{n_k}) de (T_n) tal que para cada $k \geq 1$, se cumple que $Q_k^*(X^*)$ es $\epsilon-$cercano a $T_{n_k}(X^*)$.

xi) $Q_n^*(X^*) \subset Y$ para cada $n \geq 1$.

Demostración.

a)$\Rightarrow$b) Sea (Q_n) una sucesión de proyecciones que determinan una descomposición finito dimensional para X. Definamos el espacio $Y = \overline{\left\langle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n^*(X^*) \right\rangle}$, el cual resulta separable por la Proposición 1.1.1, pues cada $Q_n^*(X^*)$ es de dimensión finita; así se cumple

i) $Q_n : X \to X$, $Q_n^*(X^*) \subset Y$ y $Q_n^* : X^* \to Y$ para todo $n \geq 1$.

ii) $Q_n(x) \to x$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in X$ y $\sup\limits_{n\geq 1} \|Q_n^*\| < \infty$, por el Teorema 2.2.6 Por otra parte, dados $m \geq 1$ y $x^* \in X^*$ se satisface

$$Q_n^*(Q_m^*(x^*)) = x^* \circ Q_m \circ Q_n = x^* \circ Q_{\min(m,n)} = Q_{\min(m,n)}^*(x^*)$$

para todo $n \geq 1$. Por tanto, $Q_n^*(Q_m^*(x^*)) \to Q_m^*(x^*)$ cuando $n \to \infty$. Es decir, $Q_n^*(y) \to y$ cuando $n \to \infty$, para todo $y \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n^*(X^*)$ y como esta unión es densa en Y tenemos que $Q_n^*(y) \to y$ cuando $n \to \infty$, para todo $y \in Y$.

iii) Los operadores Q_n son proyecciones. Por consiguiente, b) se satisface.

a)$\Rightarrow$c) Esta demostración es la misma que en el caso anterior, sólo hace falta ver que (Q_n^*) es una sucesión de proyecciones, pero esto se sigue de que es el adjunto de una proyección (Corolario 1.4.12)

b)$\Rightarrow$a) Tomemos dos sucesiones (x_n) y (y_n) densas en X y Y, respectivamente, con $x_1 = y_1 = 0$ y sea $0 < \epsilon < 1$.

Por el Teorema de Banach-Steinhaus la sucesión (P_n) es acotada en $\mathcal{B}(X)$. Sea $c = \sup\limits_{n\geq 1} \|P_n\|$ y $K = \sup\limits_{n\geq 1} \|T_n\|$; entonces $c \geq 1$.

Construyamos una sucesión de operadores recursivamente:

Sea $Q_1 = P_1$ y supongamos que se han construido proyecciones $Q_1, ..., Q_k$ de rango finito tales que:

1)$Q_i \circ Q_j = Q_{\min(i,j)}$ si $1 \leq i, j \leq k$.

2)$\{x_1, ..., x_i\} \subset Q_i(X)$ para todo $1 \leq i \leq k$.

3)$\{y_1, ..., y_i\} \subset Q_i^*(X^*) \subset Y$ para todo $1 \leq i \leq k$.

4)$\|Q_i\| \leq 2c + 2K + 3cK$ para todo $1 \leq i \leq k$.

5) Existe una colección creciente de naturales $\{n_j\}_{j=1}^k$ tales que $Q_j(X)$ es $\epsilon-$cercano a $P_{n_j}(X)$.

Sean $E = \langle x_{k+1}, Q_k(X) \rangle$, $F = \langle y_{k+1}, Q_k^*(X^*) \rangle$. Por el Lema 3.2.1 existe una proyección Q_{k+1} de rango finito con las propiedades ahí indicadas:

$Q_{k+1}(e) = e$ para todo $e \in E$.

$Q_{k+1}^*(f) = f$ para todo $f \in F$.

$Q_{k+1}^*(X^*) \subset Y$.

$\|Q_{k+1}\| \leq 2K + 2c + 3cK$.

Existe $n_{k+1} > n_j$ para todo $1 \leq j \leq k$ tal que $Q_{k+1}(X)$ es $\epsilon-$ cercano a P_{n_k}.

Veremos que $Q_1 ... Q_{k+1}$ cumple las propiedades 1) a 4). Realmente lo único que hace falta demostrar es la propiedad 1) para $1 \leq i \leq k$ y $j = k+1$, pues el resto se tiene automáticamente.

Tomemos entonces $1 \leq i \leq k$. Tenemos $Q_{k+1} \circ Q_k = Q_k$ y $Q_{k+1}^* \circ Q_k^* = Q_k^*$, pues Q_{k+1} y Q_{k+1}^* son la identidad en E y F, respectivamente; de donde:

$$Q_{k+1} \circ Q_i = Q_{k+1} \circ Q_k \circ Q_i = Q_k \circ Q_i = Q_i.$$

$$Q_{k+1}^* \circ Q_i^* = Q_{k+1}^* \circ (Q_i \circ Q_k)^* = Q_{k+1}^* \circ Q_k^* \circ Q_i^* = Q_i^*. \tag{3.6}$$

Si no fuera cierto que $Q_i \circ Q_{k+1} = Q_i$, entonces $(Q_i \circ Q_{k+1})(x) \neq Q_i(x)$ para algún $x \in X$, y como X^* es una familia separante de funciones, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*((Q_i \circ Q_{k+1})(x)) \neq x^*(Q_i(x))$, o lo que es lo mismo, $\left(Q_{k+1}^* \circ Q_i^*\right)(x^*) \neq Q_i^*(x^*)$, lo que contradice la igualdad (3.6). Por tanto, se cumple 1) para $1 \leq i \leq k$ y $j = k+1$.

De esta manera, se construye recursivamente una sucesión (Q_n) de proyecciones de rango finito definidas en X que satisface:

- $Q_n \circ Q_m = Q_m = Q_m \circ Q_n$ siempre que $m \leq n$.

-(vii)) $Q_n^*(X^*) \subset Y$ para todo $n \geq 1$. Por tanto, $Q_n^*|Y^*$ es una proyección de rango finito.

- (v)) $\sup\limits_{n \geq 1} \|Q_n\| \leq 2c + 2K + 3cK$. Hagamos $r = 2c + 2K + 3cK$.

(vi)) Existe una subsucesión (P_{n_k})de (P_n) tal que $Q_k(X)$ es $\epsilon-$ cercano a P_{n_k} para todo $k \geq 1$.

Veamos que (Q_n) converge puntualmente a la identidad en X. Sean $\eta > 0$ y $x \in X$ y tomemos x_i tal que $\|x - x_i\| < \frac{\eta}{2r}$. Si $n \geq i$, entonces

$$\|Q_n(x) - x\| \leq \|Q_n(x - x_i)\| + \|x_i - x\| \leq (r+1)\|x_i - x\| < \eta.$$

Gracias al Teorema 2.2.7 se tiene que la sucesión de proyecciones (Q_n) induce una descomposición finito dimensional en X.

Veamos que se cumple iv): la sucesión $(Q_n^* |_Y)$ de proyecciones definidas en Y, de rango finito y uniformemente acotadas por r, induce una descomposición finito dimensional para Y. Ya sabemos que si $1 \leq i \leq k$, entonces

$$Q_{k+1}^* \circ Q_i^* = Q_i^* y Q_i^* \circ Q_{k+1}^* = (Q_{k+1} \circ Q_i)^* = Q_i^*.$$

Finalmente, para usar el Teorema 2.2.7 mostramos que $(Q_n^* |_Y)$ converge puntualmente a la identidad en Y. Sea $\eta > 0$ y sea $y \in Y$, entonces tomemos y_i tal que $\|y - y_i\| < \frac{\eta}{2r}$. Así, $n \geq i$ implica:

$$\|Q_n^* (y) - y\| \leq \|Q_n^* (y - y_i)\| + \|y_i - y\| \leq (r+1) \|y_i - y\| < \eta.$$

Por el Teorema 2.2.7, que la sucesión $(Q_n^* |_Y)$ induce una descomposición finito dimensional en Y.

c)$\Rightarrow$a) Por el Lema 3.2.3, siempre que se tenga c) podemos encontrar, intercambiando los papeles de los operadores P_n y T_n en la prueba de b)$\Rightarrow$a), una sucesión de (Q_n) de proyecciones definidas en X de rango finito, que induce una d.f.d. en X y satisface:

viii), xi) $Q_n^* (X^*) \subset Y$ para cada $n \geq 1$ *y* $(Q_n^* |_Y)$ induce una descomposición finito dimensional para Y.

ix) $\sup_{n\geq 1} \|Q_n\| \leq 2K + 2c + 3cK$ donde $c = \sup\limits_{n\geq 1} \|P_n\|$ y $K = \sup\limits_{n\geq 1} \|T_n\|$.

x) Existe una subsucesión (T_{n_k})de (T_n) tal que para cada $k \geq 1$, se cumple que $Q_k^* (X^*)$ es $\epsilon-$cercano a $T_{n_k} (X^*)$.$\blacksquare$

Lema 3.2.5 *Sean X un espacio de Banach tal que X^* es un $\pi_\lambda-$ espacio y $(E_\beta)_\beta$ una colección dirigida por la inclusión que define una π_λ-estructura en X^*. Supongamos que $E \leq X$ y $F \leq X^*$ son de dimensión finita y $\epsilon > 0$. Entonces existe una proyección $Q : X \to X$ de rango finito tal que:*

a) $Q(e) = e$ para todo $e \in E$.

b) $Q^*(f) = f$ para todo $f \in F$.

c) $\|Q\| \leq 4\lambda + 3\lambda^2$.

d) $Q^*(X^*)$ es $\epsilon-$ cercano a algún subespacio E_β.

Demostración.

Sabemos por la Observación 2.7.3 que si X^* es un $\pi_\lambda-$ espacio, entonces existe una red de proyecciones de rango finito$(T_\beta)_{\beta\in B}$, uniformemente acotada, con $\sup\limits_{\beta\in B} \|T_\beta\| \leq \lambda$, y tal que $T_\beta (x^*) \to x^*$ para todo $x^* \in X^*$. Tomemos $\lambda' > \lambda$ y sea $0 < \delta < \min\left(\epsilon, \frac{\lambda'}{\lambda} - 1, 1\right)$. Entonces para cada $\beta \in B$ existe, por el Corolario3.1.11 (con $Y = T_\beta (X^*) = F$), una proyección $S_\beta : X \to X$ de rango finito tal que $S_\beta^* |_{T_\beta(X^*)} = T_\beta |_{T_\beta(X^*)}$, por tanto, $S_\beta^* (T_\beta (x^*)) = T_\beta^2 (x^*) =$

$T_\beta(x^*)$ para todo $x^* \in X^*$, $T_\beta(X^*) = S_\beta^*(X^*)$, y $\|S_\beta\| \leq \|T_\beta\|(1+\delta) \leq \lambda\left(1+\frac{\lambda'}{\lambda}-1\right) = \lambda'$.

Además, $S_\beta^*(x^*) \to x^*$ para todo $x^* \in X^*$, ya que

$$\left\|S_\beta^*(x^*) - x^*\right\| = \left\|S_\beta^*(x^* - T_\beta(x^*)) + T_\beta(x^*) - x^*\right\| \leq (\lambda'+1)\|T_\beta(x^*) - x^*\|$$

para cada β y $T_\beta(x^*) \to x^*$ para todo $x^* \in X^*$.

Por lo anterior, $S_\beta^*(x^*)(x) \to x^*(x)$ para todo $x \in X$ y $x^* \in X^*$; o sea, $x^*(S_\beta(x)) \to x^*(x)$ para todo $x \in X$ y $x^* \in X^*$, o lo que es lo mismo: $S_\beta \overset{WOT}{\to} I_X$. Así, I_X está en la cerradura de (S_β) en la topología WOT. Sabemos, por el Corolario 1.6.4, que entonces I_X está en la cerradura de la envolvente convexa de (S_β) en la topología SOT. Es decir, existe una red (R_γ) de operadores en X tal que $R_\gamma \to I_X$ y cada $R_\gamma = \sum_{\beta i \in \sigma(\gamma)} a_i S_{\beta_i}$, para algún subconjunto finito $\sigma(\gamma)$ de índices en B y reales $a_i \geq 0$ tales que $\sum a_i = 1$. Entonces, cada R_γ es de rango finito y satisface $\|R_\gamma\| = \left\|\sum_{\beta i \in \sigma(\gamma)} a_i S_{\beta_i}\right\| \leq \sum_{\beta i \in \sigma(\gamma)} a_i \left\|S_{\beta_i}\right\| \leq \sum_{\beta i \in \sigma(\gamma)} a_i \lambda' = \lambda'$.

Por la Proposición 2.6.2 X tiene la $\lambda'-$ m.a.p. Como esto es válido para todo $\lambda' > \lambda$, entonces por esa misma proposición X tiene la $\lambda-$m.a.p y existe una red (P_α) de proyecciones de rango finito tal que $\|P_\alpha\| \leq \lambda$ y $P_\alpha \to I_X$.

Como las proyecciones (T_β) y (P_α) están uniformemente acotados por λ y cumplen las hipótesis del Lema 3.2.3 (con $Y = X^*$), entonces podemos asegurar que existe Q con las propiedades enunciadas, cuidando de observar que d) se cumple porque $T_\alpha(X) = E_\alpha$ para todo α.■

Teorema 3.2.6 *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces X tiene la f.d.d.p. si se cumple alguna de las siguientes propiedades:*

a) X es un $\pi-$espacio y X^* tiene la propiedad b.a.p.

b) X^* es un $\pi-$espacio.

c) X es un $\pi-$ espacio y es isomorfo al conjugado de algún espacio de Banach.

d) Existe una sucesión (T_n) de proyecciones de rango finito definidas en X tales que $T_m \circ T_n = T_m$ para todo $m \leq n$ y $T_n(x) \overset{w}{\to} x$ para todo $x \in X$.

Más aún, si X^* es separable y a) o b) se cumple, entonces X tiene una descomposición finito dimensional que encoge.

Demostración.

a) Supongamos que X es un $\pi_\lambda-$espacio y que X^* tiene la propiedad $\mu-$m.a.p. para un par de reales $\mu, \lambda \geq 1$. Tomemos a Q_0 como el operador 0 en X. Consideremos una sucesión $(x_k)_{k=1}^\infty$ densa en X y hagamos $E_1 = \langle x_1 \rangle$ y $F_1 = Q_0^*(X^*)$. Entonces, por el Corolario 3.2.2 existe una proyección Q_1 de rango finito definida en X tal que $\|Q_1\| \leq M$, donde M es una cota que depende de μ y λ, $Q_1|_{E_1} = I_{E_1}$ y $Q^*|_{F_1} = I_{F_1}$.

Supongamos que para cada $1 \le k \le n$, tenemos una proyección Q_k en X de rango finito, que cumple:

1) $Q_k \mid_{\langle Q_{k-1}(X) \bigcup x_k \rangle} = I_{\langle Q_{k-1}(X) \bigcup x_k \rangle}$ y por tanto, $\langle x_1, ..., x_k \rangle \subset Q_k(X)$.

2) $Q_k \circ Q_l = Q_{\min\{l,k\}}$ si $0 \le k, l \le n$.

3) $Q_k^* \mid_{Q_{k-1}^*(X^*)} = I_{Q_{k-1}^*(X^*)}$.

4) $\sup_{1 \le k \le n} \|Q_k\| \le M$.

Entonces, por el Corolario 3.2.2, tomando $E = \langle Q_n(X) \bigcup d_{n+1} \rangle$ y $F = Q_n^*(X^*)$, hay una proyección Q_{n+1} en X de rango finito tal que:

- $Q_{n+1} \mid_{\langle Q_n(X) \bigcup d_{n+1} \rangle} = I_{\langle Q_n(X) \bigcup d_{n+1} \rangle}$ y por tanto, $\langle d_1, ..., d_{n+1} \rangle \subset Q_{n+1}(X)$.

-$Q_{n+1}^* \mid_{Q_n^*(X^*)} = I_{Q_n^*(X^*)}$.

-$\|Q_{n+1}\| \le M$.

Veamos que también se cumple: $Q_{n+1} \circ Q_l = Q_l \circ Q_{n+1} = Q_l$ para todo $0 \le l \le n$. Por un lado,

$$Q_{n+1} \circ Q_l = (Q_{n+1} \circ Q_n) \circ Q_l = Q_n \circ Q_l = Q_l.$$

Para demostrar que $Q_l \circ Q_{n+1} = Q_l$, primero observemos que

$$Q_{n+1}^* \circ Q_l^* = Q_{n+1}^* \circ (Q_l \circ Q_n)^* = \left(Q_{n+1}^* \circ Q_n^*\right) \circ Q_l^* = Q_l^*.$$

Si no fuera cierto que $Q_l \circ Q_{n+1} = Q_l$, entonces existe $x \in X$ tal que $(Q_l \circ Q_{n+1})(x) \ne Q_l(x)$, y como X^* es una familia separante de funciones en X, existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*((Q_l \circ Q_{n+1})(x)) \ne x^*(Q_l(x))$; así $\left(Q_{n+1}^* \circ Q_l^*\right)(x^*) \ne Q_l^*(x^*)$, lo que contradice lo anterior: $Q_{n+1}^* \circ Q_l^* = Q_l^*$. Por consiguiente, $Q_l \circ Q_{n+1} = Q_l$.

Así, hemos construido inductivamente una sucesión (Q_k) de proyecciones de rango finito uniformemente acotada, que constituyen nuestros candidatos para generar una descomposición finito dimensional de X.

Probemos que $Q_k(x) \to x$ para todo $x \in X$. Dados $\epsilon > 0$ y $x \in X$ sea i tal que $\|d_i - x\| < \frac{\epsilon}{\sup\|Q_k\|+1}$; y tomemos $k \ge i$ entonces:

$$\begin{aligned} \|Q_k(x) - x\| &\le \|Q_k(x) - d_i\| + \|d_i - x\| = \|Q_k(x - d_i)\| + \|d_i - x\| \\ &\le (\|Q_k\| + 1)\|d_i - x\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo que, efectivamente, la sucesión (Q_k) converge a la identidad en X. Por el Teorema 2.2.7, sabemos que X tiene la f.d.d.p.

Notemos que si adicionalmente se tiene la hipótesis de que X^* es separable y (y_k^*) es una sucesión densa en ese espacio, entonces podemos tomar en la construcción anterior $F_1 = \langle y_1^* \rangle$ y obtener, con base en el Corolario 3.2.2, una sucesión de proyecciones (Q_k) en X de rango finito que además de tener las propiedades ya descritas, satisfacen $Q_k^* \mid_{\langle Q_{k-1}^*(X^*), y_k^* \rangle} = I_{\langle Q_{k-1}^*(X^*), y_k^* \rangle}$ para todo $k \ge 1$. La sucesión (Q_k^*) converge puntualmente a la identidad en X^*, pues dados $\epsilon > 0$ y $x^* \in X^*$ existe i tal que $\|y_i^* - x^*\| < \frac{\epsilon}{\sup\|Q_k\|+1}$; y si tomemos $k \geq i$ entonces:

$$\begin{aligned} \|Q_k^*(x^*) - x^*\| &\leq \|Q_k^*(x^*) - y_i^*\| + \|y_i^* - x^*\| \\ &= \|Q_k^*(x^* - y_i)\| + \|y_i^* - x^*\| \\ &\leq (\|Q_k\| + 1)\|y_i^* - x^*\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Además, $Q_m^* \circ Q_n^* = Q_{\min\{m,n\}}^*$, y (Q_k^*) está uniformemente acotada pues sus preadjuntos tienen las propiedades correspondientes. Por todo esto, el Teorema 2.2.7, nos dice que en este caso en que X^* es separable, (Q_k^*) define una d.f.d. para X^* y por tanto, X tiene una d.f.d. que encoge.

b) La demostración de este inciso es completamente análoga a la que se hizo en a), pues el Lema 3.2.5, en lugar del Corolario 3.2.2, nos permite construir la sucesión (Q_k) de proyecciones en X de rango finito, tal y como se hizo en la prueba anterior, que definen una d.f.d. para X. Además, si X^* es separable, nuevamente tenemos que esa d.f.d. de X encoge.

c) Sea X un $\pi-$espacio tal que $X \cong Y^*$ para algún espacio de Banach Y. Como los isomorfismos conservan la estructura de $\pi-$espacio (Teorema 2.8.2), entonces sabemos, por el inciso anterior, que Y tiene la f.d.d.p. Además, dado que Y^* es separable, por ser isomorfo a X, tenemos que Y tiene una d.f.d. que encoge, y por tanto $X \cong Y^*$ tiene también una d.f.d.

d) Supongamos ahora que (T_n) es una sucesión de proyecciones de rango finito definidas en X que converge débilmente a la identidad en cada punto de X, y que satisface $T_m \circ T_n = T_m$ si $1 \leq m \leq n$. Como X es separable entonces existe una sucesión (x_j) densa en X.

Sean $n, m \geq 1$. Entonces para $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ y $(x_1^*, ..., x_n^*) \in (X^*)^n$, tenemos que

$$(x_1^*(T_m(x_1)), ..., x_n^*(T_m(x_n))) \to (x_1^*(x_1), ..., x_n^*(x_n))$$

cuando $m \to \infty$, pues, por hipótesis, $x^*(T_m(x)) \to x^*(x)$ cuando $m \to \infty$ para $x \in X$ y $x^* \in X^*$.

Así, $(x_1, ..., x_n) \in \overline{\{T_m(x_j) \mid m \geq 1, 1 \leq j \leq n\}}^{w(X^n)}$, donde $\overline{A}^{w(X^n)}$ denota la cerradura débil de A en X^n.

Denotemos como *convQ* a la envolvente convexa de todo conjunto Q. Entonces,

$$\begin{aligned} (x_1, .., x_n) &\in \overline{conv\{T_m(x_j) \mid m \geq 1, 1 \leq j \leq n\}}^{w(X^n)} \\ &= \overline{conv\{T_m(x_j) \mid m \geq 1, 1 \leq j \leq n\}}^{\|\cdot\|_\infty}, \end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|_\infty$ es la norma del máximo en X^n (Teorema 1.6.3).

Esto significa que existe un natural k_n y un conjunto $\left\{a_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{k_n}$ de reales no negativos tales que $\sum\limits_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} = 1$ para los que se cumple:

$$\left\|\sum_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} T_i\left(x_j\right) - x_j\right\| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } 1 \leq j \leq n \tag{3.7}$$

Dado que para cada $n \geq 1$ podemos repetir el argumento, entonces tiene una sucesión (P_n) de operadores en X de rango finito donde $P_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} T_i$ para cada $n \geq 1$.

La sucesión (P_n) está uniformemente acotada ya que para $x^* \in X^*$ tenemos que la sucesión $\left(T_n^*\left(x^*\right)(x)\right)_{n=1}^{\infty} = \left(x^*\left(T_n(x)\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ es convergente para todo $x \in X$ y entonces, por el Teorema de Banach-Steinhaus, $\left(T_n^*\left(x^*\right)\right)$está acotada en X^* o sea existe una $k > 0$ tal que $\left\|T_n^*\left(x^*\right)\right\| \leq k$. Como esto puede hacerse para cualquier $x^* \in X^*$, entonces otra vez por Banach-Steinhaus (T_n^*) está acotada uniformemente digamos por K y por tanto, (P_n) también está uniformemente acotada por K.

Dado que $\left\|P_n\left(x_j\right) - x_j\right\| < \frac{1}{n}$ si $1 \leq j \leq n$ (3.7), se tiene que (P_n) converge a la identidad en el subconjunto denso $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ de X, entonces se sigue de la Proposición 1.1.5 que (P_n) converge a la identidad en todo X.

Por otro lado, como $T_n \circ T_{n+1} = T_n$ entonces $T_{n+1}^* \circ T_n^* = T_n^*$ y por consiguiente dado $y = T_n^*\left(x^*\right) \in \operatorname{Ran}\left(T_n^*\right)$ se tiene que

$$T_{n+1}^*(y) = T_{n+1}^*\left(T_n^*\left(x^*\right)\right) = T_n^*\left(x^*\right) = y.$$

Esto significa que $\operatorname{Ran}\left(T_n^*\right) \subset \operatorname{Ran}\left(T_{n+1}^*\right)$ y de aquí se desperende que $\bigcup\limits_{n=1}^{k} T_n^*\left(X^*\right) = T_k^*\left(X^*\right)$ para todo $k \geq 1$ y dado que $P_n^* = \sum\limits_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} T_i^*$, entonces $\operatorname{Ran}\left(P_n^*\right) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k_n} \operatorname{Ran}\left(T_i^*\right) = \operatorname{Ran}\left(T_{k_n}^*\right)$

Hagamos $Y = \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n^*\left(X^*\right)}$, entonces Y es un subespacio cerrado y separable (Proposición 1.1.1) y tenemos que $\operatorname{Ran}\left(P_n^*\right) \subset Y$ para todo $n \geq 1$.

Finalmente, notemos que si $y \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n^*\left(X^*\right)$, entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que $y \in T_{n_0}^*\left(X^*\right) \subset T_n^*\left(X^*\right)$ si $n \geq n_0$, de donde:

$$\left\|T_n^*(y) - y\right\| = 0 \text{ si } n \geq n_0,$$

lo cual nos dice que la sucesión (T_n^*) converge puntualmente a la identidad en $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n^*\left(X^*\right)$ y por tanto en Y (Proposición 1.1.5).

En suma, tenemos que $Y \leq X^*$ es cerrado y separable, y las sucesiones (P_n) y (T_n^*) son de operadores de rango finito que satisfacen:

i) $P_n : X \to X$, $P_n^*(X^*) \subset Y$ y $T_n^* : X^* \to Y$ para todo $n \geq 1$.

ii) $P_n(x) \to x$ y $T_n^*(y) \to y$, cuando $n \to \infty$ y para todo $x \in X$ y $y \in Y$, y $\sup\limits_{n\geq 1} \|T_n^*\| < \infty$.

iii) Cada operador T_n^* ess una proyección, pues sus preadjuntos lo son.

Por el inciso c) del Teorema 3.2.4 tenemos que X posee una d.f.d.■

Corolario 3.2.7 *Si X es un $\pi-$espacio, separable y reflexivo, entonces X tiene la f.d.d.p.*

Demostración.

Como $X \cong (X^*)^*$ y X es un $\pi-$espacio, se cumple c) del teorema anterior, y por tanto X tiene la f.d.d.p.■

Corolario 3.2.8 *Si X^* es un $\pi-$espacio, entonces X también lo es.*

Demostración.

Como X^* es un π_λ espacio para alguna $\lambda \geq 1$, entonces, por el Lema 3.2.5, dado cualquier $E \leq X$ de dimensión finita, existe una proyección $Q : X \to X$ de rango finito con la propiedad de que $\|Q\| \leq 4\lambda + 4\lambda^2$ y $Q\mid_E = I_E$. Sabemos entonces, por la Proposición 2.7.2, que efectivamente X es un $\pi-$espacio.■

Corolario 3.2.9 *Si X es un $\pi-$espacio y X^* tiene la propiedad b.a.p., entonces X^* también es un $\pi-$espacio.*

Demostración.

X es un π_λ espacio y X^* tiene la propiedad $\mu-$m.a.p. para algún par de reales λ, $\mu \geq 1$. El Corolario 3.2.2 nos asegura que, dado cualquier $F \leq X^*$ de dimensión finita, existe una proyección de rango finito $Q : X \to X$ tal que $Q^*\mid_F = I_F$ y $\|Q^*\| \leq 2\mu + 2\lambda + 3\mu\lambda$, lo que, según la Proposición 2.7.2, quiere decir que X^* es un $\pi-$espacio.■

Teorema 3.2.10 *Sea X un espacio de Banach separable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X tiene una base de Schauder.

b) Existen $Y \leq X^*$ cerrado, separable y con base de Schauder, y sucesiones de operadores de rango finito (P_n) y (S_n) tales que:

i) $P_n : X \to X$, $P_n^*(X^*) \subset Y$, y $S_n : X^* \to Y$ para todo $n \geq 1$.

ii) $P_n(x) \to x$ y $S_n(y) \to y$, cuando $n \to \infty$ y para todo $x \in X$ y $y \in Y$, y $\sup_{n\geq 1} \|S_n\| < \infty$.

Más aún, si se cumple b), entonces los coeficientes funcionales de la base encontrada para X son una base de Schauder de Y.

Demostración.

a)$\Rightarrow$b) Por el Teorema 2.8.1, sabemos que si X tiene base de Schauder, entonces X tiene la f.d.d.p. y por el Teorema 3.2.4 tenemos entonces que existen $Y \leq X^*$ cerrado y separable, que es el subespacio cerrado generado por la unión del rango de los operadores adjuntos de las proyecciones que inducen una descomposición finito dimensional para X, y dos sucesiones (P_n) y (S_n), de operadores de rango finito, que cumplen:

i) $P_n : X \to X$, $P_n^*(X^*) \subset Y$ y $S_n : X^* \to Y$ para todo $n \geq 1$.

ii) $P_n(x) \to x$ y $S_n(y) \to y$, cunado $n \to \infty$ y para todo $x \in X$ y $y \in Y$, y $\sup_{n\geq 1} \|S_n\| < \infty$.

iii) P_n es proyección para todo $n \geq 1$.

De manera que sólo falta demostrar que Y tiene una base de Schauder. Para esto se probará que Y coincide con el espacio cerrado generado por los coeficientes funcionales de la base de X, que por ser una sucesión básica será una base de Y.

Sea (Q_n) una sucesión de proyecciones de rango finito que definen una descomposición finito dimensional para X, entonces, como se dijo arriba, tenemos:

$$Y = \overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n^*(X^*) \right\rangle}.$$

Por a) del Teorema 2.8.1 las proyecciones Q_n coinciden con las proyecciones naturales asociadas a la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, y, por tanto, para cada $n \geq 1$ se tiene:

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i.$$

De manera que Y es el subespacio cerrado generado por los coeficientes funcionales f_n asociados a la base de Schauder de X.

b)$\Rightarrow$a) Supongamos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder del subespacio cerrado Y de X^*, y que (U_n) es la sucesión de proyecciones naturales asociadas a ella. Sea b la constante básica de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, o sea, $b = \sup_{n\geq 1} \|U_n\| \geq 1$.

Para $n \geq 1$, definamos el subespacio $Y_n = \langle y_1, ..., y_n \rangle$ de Y. Sea $\delta > 0$ tal que $\frac{n\delta}{1-\delta} < 1$. Hagamos $\gamma = \sup_{n\geq 1} \|S_n\|$, y construyamos una sucesión (ϵ_n) de números positivos menores que 1 y tales que para cada $n \geq 1$ se cumpla $\frac{\epsilon_n}{1-\epsilon_n} n < \frac{1}{n}$.

Por el Lema 2.4.5 sabemos que existe un índice $k_n \geq 1$ tal que

$$\|S_k(y) - y\| \leq \epsilon_n \|y\|$$

para todo $y \in Y_n$ y todo $k \geq k_n$.

De esta manera, podemos construir una sucesión creciente de índices (k_n) tales que

$$\|S_{k_n}(y) - y\| \leq \epsilon_n \|y\|$$

para todo $y \in Y_n$ y todo $k \geq k_n$, y así, (S_{k_n}) es una subsucesión de (S_n) con la propiedad anterior.

Por otro lado, el Lema 2.4.4 nos dice que para cada $n \geq 1$ existe un operador de rango finito $S'_n : X^* \to X^*$ tal que:

1) $S'_n |_{Y_n} = I_{Y_n}$.

2) $\|S'_n - S_{k_n}\| < \frac{\epsilon_n}{1-\epsilon_n} n \|S_{k_n}\| < \frac{1}{n}\gamma$, y así $\|S'_n\| < 2\gamma$, y

3) $S'_n(X) \subset \langle S_{k_n}(X), Y_n \rangle \subset Y$.

Dado $y \in Y$, tenemos:

$$\begin{aligned} \left\|S'_n(y) - y\right\| &\leq \left\|S'_n(y) - S_{k_n}(y)\right\| + \|S_{k_n}(y) - y\| \\ &\leq \frac{\gamma}{n}\|y\| + \|S_{k_n}(y) - y\| \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$; por tanto, $S'_n \to I_Y$.

Definamos el operador $T_n = U_n \circ S'_n$, entonces $T_n : X^* \to Y_n$; más aún, $T_n(X^*) = Y_n$ gracias a 1) y 3) señalada para S'_n.

Veamos que el operador T_n es una proyección, para esto usamos que por 1) se satisface $S'_n(U_n(S'_n(x^*))) = U_n(S'_n(x^*))$ y así,

$$T_n^2(x^*) = U_n\left(U_n\left(S'_n(x^*)\right)\right) = U_n\left(S'_n(x^*)\right) = T_n(x^*).$$

Además, si $c = 2b\gamma$, entonces

$$\|T_n\| \leq \|U_n\| \left\|S'_n\right\| \leq c \tag{3.8}$$

Ahora veamos que $T_n \to I_Y$. Sea $y \in Y$, entonces $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ para una única sucesión de escalares (a_i) y

$$\begin{aligned} \|T_n(y) - y\| &= \left\|U_n\left(S'_n(y)\right) - \sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - y\right\| \\ &= \left\|U_n\left(S'_n(y) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right)\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - y\right\| \\ &\leq b\left\|\left(S'_n(y) - y\right)\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - y\right\|. \end{aligned}$$

Como los dos últimos sumandos tienden a 0, cuando $n \to \infty$, se tiene que efectivamente $T_n \to I_Y$.

En suma, para cada $n \geq 2$ tenemos un operador de rango finito $P_n : X \to X$ y una proyección $T_n : X^* \to Y$ de rango finito tales que

4) $P_n^*(X^*) \leq Y$.

5) $P_n(x) \to x$ y $T_n(y) \to y$, cuando $n \to \infty$ y para todo $x \in X$ y $y \in Y$, y $\sup_{n\geq 1} \|T_n\| < \infty$.

Es decir que se satisface el inciso c) del Teorema 3.2.4, y por tanto el mismo teorema nos asegura que X tiene una descomposición finito dimensional definida por una sucesión (Q_n) de proyecciones de rango finito con las siguientes 5 propiedades:

6) $Q_nQ_m = Q_m = Q_mQ_n$ siempre que $m \leq n$; en particular, $Q_k^*Q_{k-1}^* = Q_{k-1}^* = Q_{k-1}^*Q_k^*$.

7) $\sup_{n\geq 1} \|Q_n\| \leq 2c_0 + 2\gamma + 3\gamma c_0$, donde $c_0 = \sup_{n\geq 1} \|P_n\|$ y por tanto, $\sup_{n\geq 1} \|Q_n\| \leq 2c_0 + 2c + 3cc_0$.

8) Dado $\epsilon > 0$ y $k \geq 1$, existe una subsucesión (T_{n_k}) de (T_n) tal que para cada $k \geq 1$, se cumple que $Q_k^*(X^*)$ es $\epsilon-$cercano a $T_{n_k}(X^*) = Y_{n_k}$.

9) $Q_n^*(X^*) \subset Y$ para cada $n \geq 1$.

10) La sucesión de proyecciones $(Q_n^* |_Y)$ determina una descomposición finito dimensional en Y.

Por el Lema 2.3.17, para hacer ver que X tiene base, sólo hace falta demostrar que para cada $k \geq 1$ el subespacio $(Q_k - Q_{k-1})(X)$, donde $Q_0 = 0$, tiene una base con constante básica b_k para la que se cumple $\sup_{k\geq 1} \|b_k\| < \infty$.

Sea $M > 2c_0 + 2c + 3c_0c$ y tomemos $\epsilon > 0$ tal que $(1 + M)\epsilon < \frac{1}{4}$ y $\epsilon < \frac{1}{4b}$.

Sea $k \geq 2$ y hagamos: $E_1 = T_{n_k}(X^*) = Y_{n_k}$, $E_2 = Q_k^*(X^*)$, $F_1 = T_{n_k-1}(X^*) = Y_{n_k-1}$ y $F_2 = Q_{k-1}^*(X^*)$. Los cuatro subespacios son cerrados, unos por ser de dimensión finita y los otros por ser los rangos de proyecciones continuas. Además, por 8), E_2 es $\epsilon-$cercano a E_1, y que F_2 es $\epsilon-$cercano a F_1.

Definamos

$$B_1 = U_{n_k-1} |_{Y_{n_k}} \colon E_1 \to F_1$$

y

$$B_2 = Q_{k-1}^* |_{E_2} \colon E_2 \to F_2.$$

El operador B_1 es sobre porque $y = B_1(y)$ para todo $y \in F_1$. El operador B_2 también es sobre, pues 6) nos dice que $Q_{k-1}^*(X^*) \subset Q_k^*(X^*)$, y, por consiguiente, dado $y \in F_2$ se tiene que $B_2(y) = y$. Así, B_1 es una proyección de E_1 sobre F_1 y B_2 es una proyección de E_2 sobre F_2.

Además, $\|B_1\| \leq \|U_{n_k-1}\| \leq b$ y $\|B_2\| \leq \left\|Q_{k-1}^*\right\| = \|Q_{k-1}\| < M$. Entonces,

$$\epsilon \|B_1\| + \epsilon(1 + \|B_2\|) \leq \epsilon b + \epsilon(1 + M) < \frac{1}{2}.$$

Hagamos $M_0 = 3(1 + b)(1 + M)$. Por el Lema 2.4.3 existe un operador invertible $V : (I - B_1)(E_1) \to (I - B_2)(E_2)$ que cumple $\|V\| \left\|V^{-1}\right\| \leq M_0$. Entonces,

$$d((I - B_1)(E_1), (I - B_2)(E_2)) \leq M_0.$$

Es claro que $(I - B_1)(E_1) = \langle y_{n_k+1}, ..., y_{n_k} \rangle$, y además se tiene $(I - B_2)(E_2) = \left(Q_k^* - Q_{k-1}^*\right)(X^*)$, como ahora mostramos:
Dado $x^* \in X^*$, se tiene que

$$\begin{aligned} B_2\left(Q_k^*(x^*) - Q_{k-1}^*(x^*)\right) &= Q_{k-1}^*\left(Q_k^*(x^*)\right) - Q_{k-1}^*\left(Q_{k-1}^*(x^*)\right) \\ &= Q_{k-1}^*(x^*) - Q_{k-1}^*(x^*) = 0. \end{aligned}$$

Es decir que $\left(Q_k^* - Q_{k-1}^*\right)(X^*) \subset \operatorname{Ran}(I - B_2)$. Y si consideramos $y = Q_k^*(x^*)$ en el núcleo de B_2, entonces $0 = B_2\left(Q_k^*(x^*)\right) = Q_{k-1}^*(x^*)$, y por tanto,

$$y = Q_k^*(x^*) = \left(Q_k^* - Q_{k-1}^*\right)(x^*) \in \left(Q_k^* - Q_{k-1}^*\right)(X^*).$$

De manera que como afirmamos: $(I - B_2)(E_2) = \left(Q_k^* - Q_{k-1}^*\right)(X^*)$ y entonces

$$d\left(\langle y_{n_k+1}, ..., y_{n_k} \rangle, \ \left(Q_k^* - Q_{k-1}^*\right)(X^*)\right) \leq M_0.$$

Por otra parte, la constante básica de $\left\{y_{n_{k-1}}, .., y_{n_k}\right\}$ es menor que b, por lo que, gracias al inciso a) de la Proposición 2.3.18, $\left(Q_k^* - Q_{k-1}^*\right)(X^*)$ también tiene base, y su constante básica es menor o igual que $M_0 b$. Dado que además $Q_k^* - Q_{k-1}^*$ es una proyección de rango finito en X^*, entonces, por la Proposición 1.3.9 y el inciso b) de la 2.3.18, se tiene que $\left((Q_k - Q_{k-1})(X)\right)^*$ es un espacio con base finita cuya constante básica no excede $\|Q_k - Q_{k-1}\| M_0 b \leq 2MM_0 b$. Entonces, otra vez por el inciso b) de la Proposición 2.3.18 $\left((Q_k - Q_{k-1})(X)\right)^{**}$ también tiene una base con constante básica menor o igual que $2MM_0 b$, y dado que $\left((Q_k - Q_{k-1})(X)\right)^{**}$ es isométricamente isomorfo a $(Q_k - Q_{k-1})(X)$, por ser éste de dimensión finita, entonces ese último espacio tiene igualmente una base cuya constante básica no excede $2MM_0 b$. Entonces, por el Lema 2.3.17 X tiene una base.

En este punto, sólo falta probar que los coeficientes funcionales de dicha base constituyen también una base para Y.

Sea $k \geq 1$, y $\left\{x_1^{(k)}, ..., x_{d_k}^{(k)}\right\}$ la base de $(Q_k - Q_{k-1})(X)$ de cuya existencia hablamos en el párrafo anterior. Entonces, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{x_1^{(k)}, ..., x_{d_k}^{(k)}\right\}$ es la base que encontramos para X. Esta base tiene asociada la sucesión de coeficientes funcionales $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{f_1^{(k)}, ..., f_{d_k}^{(k)}\right\}$, y, por tanto para cada $k \geq 1$ y cada $1 \leq i \leq d_k$, se cumple

$$f_i^k\left(x_j^{(n)}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = k \text{ y } j = i \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Cuando cada funcional del conjunto $\left\{f_1^{(k)}, ..., f_{d_k}^{(k)}\right\}$ se restringe a $\left\langle x_1^{(k)}, ..., x_{d_k}^{(k)}\right\rangle$, siguen cumpliendo la propiedad anterior; esto significa que $f_i^{(k)} \mid \left\langle x_1^{(k)}, ..., x_{d_k}^{(k)}\right\rangle$ es el $i-$ésimo coeficiente funcional asociado a $\left\{x_1^{(k)},...,x_{d_k}^{(k)}\right\}$ en el espacio generado por estos vectores.

Renombremos como (y_n) a la base $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x_1^{(k)},...,x_{d_k}^{(k)}\right\}$ de X, y consecuentemente (f_n) a sus coeficientes funcionales. Entonces, dado $f\in\left(Q_k^*-Q_{k-1}^*\right)(X^*)$, tenemos $f=\left(Q_k^*-Q_{k-1}^*\right)(x^*)$ para algún $x^*\in X^*$. Para cualquier $x\in X$ se cumple:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(Q_k^*-Q_{k-1}^*\right)(x^*)\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,y_n\right)=x^*\left((Q_k-Q_{k-1})\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,y_n\right)\right)\\ &= x^*\left(\sum_{i=1}^{d_k}f_i^{(k)}(x)\,x_i^{(k)}\right)=\left(\sum_{i=1}^{d_k}\widehat{x_i^{(k)}}(x^*)\,f_i^{(k)}\right)(x). \end{aligned}$$

De manera que $f=\sum\limits_{i=1}^{d_k}\widehat{x_i^{(k)}}(x^*)\,f_i^{(k)}$, si $f=\left(Q_k^*-Q_{k-1}^*\right)(x^*)$. Esto es, $\left\{f_1^{(k)},..,f_{d_k}^{(k)}\right\}$ es una base de $\left(Q_k^*-Q_{k-1}^*\right)(X^*)$ para cada $k\geq 1$.

Dado $k\geq 1$, llamemos $P_r^{(k)}:\left(Q_k^*-Q_{k-1}^*\right)(X^*)\to\left(Q_k^*-Q_{k-1}^*\right)(X^*)$ con $1\leq r\leq d_k$ a la $r-$ésima proyección natural asociada a $\left\{f_1^{(k)},..,f_{d_k}^{(k)}\right\}$. Sea U_n la $n-$ésima proyección natural asociada a la base $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x_1^{(k)},..,x_{d_k}^{(k)}\right\}$; por consiguiente, U_n^* es la $n-$ésima proyección natural asociada a la sucesión básica $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{f_1^{(k)},..,f_{d_k}^{(k)}\right\}$.

Entonces, para $N_k=\sum\limits_{j=1}^{k-1}d_j$ tenemos $\left\|P_r^{(k)}\left(\sum\limits_{i=1}^{d_k}a_if_i^{(k)}\right)\right\|=\left\|\sum\limits_{i=1}^{r}a_if_i^{(k)}\right\|$ y

$$\begin{aligned} &\left\|\sum_{i=1}^{r}a_if_i^{(k)}\right\|\\ &=\left\|U_{r+N_k}^*\left(0x_1^{(1)}+...+0x_{d_1}^{(1)}+...+0x_1^{(k-1)}+...+0x_{d_{k-1}}^{(k-1)}+\sum_{i=1}^{d_k}a_if_i^{(k)}\right)\right\|\\ &\leq\left\|U_{r+N_k}^*\right\|\left\|\sum_{i=1}^{d_k}a_if_i^{(k)}\right\|. \end{aligned}$$

Esto es, $\left\|P_r^{(k)}\right\|\leq\left\|U_{r+N_k}\right\|$. Y (U_n) es una sucesión de operadores uniformemente acotada, por lo que el supremo de la sucesión de constantes básicas correspondientes a $\left(P_r^{(k)}\right)_{r=1}^{d_k}$ para $k\geq 1$ es finito.

Lo anterior, junto con la propiedad 10 de la sucesión (Q_n^*), nos permite aplicar el Lema 2.3.17, y concluir que $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{f_1^{(k)},...,f_{d_k}^{(k)}\right\}$ es una base para Y. ■

Teorema 3.2.11 *Sea X un espacio de Banach, entonces X tiene una base que encoge, y en consecuencia X^* tiene una base acotadamente completa, si se cumple alguna de las siguientes propiedades:*

a) X^* tiene una base de Schauder.
b) X^* es separable, tiene la b.a.p. y X tiene una base de Schauder.
Demostración.

a) Supongamos que (y_n^*) es una base de X^* y sean (T_n) las proyecciones naturales asociadas a ella. Sea $\sup_{n\geq 1}\|T_n\| = b$. Al tomar en el Corolario 3.1.11 $R = T_n$ y $Y = F = T_n(X^*)$ obtenemos que para cada $n \geq 1$ existe una proyección S_n definida en X tal que

- $S_n^*(X^*) = T_n(X^*)$,
- $S_n^* |_{T_n(X^*)} = T_n |_{T_n(X^*)} = I_{T_n(X^*)}$ y
- $\|S_n^*\| \leq 2b$.

En particular, cada S_n es de rango finito.

Sea $\epsilon > 0$ y $x^* \in X^*$. Entonces $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i^*$ para una única colección de escalares $\{a_i\}$.

Sea $m \geq 1$ para la que

$$\left\| x^* - \sum_{i=1}^{m} a_i y_i^* \right\| < \frac{\epsilon}{4b} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dado que $T_n(X^*) = \langle y_1^*, ..., y_n^* \rangle$, resulta que si $n \geq m$, entonces

$$S_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i y_i^*\right) = T_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i y_i^*\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i^*$$

y de ahí que $n \geq m$ implica

$$\begin{aligned}
\|S_n^*(x^*) - x^*\| &\leq \left\| S_n^*(x^*) - S_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i y_i^*\right)\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i^* - x^*\right\| \\
&\leq \|S_n^*\| \left\| x^* - \sum_{i=1}^{m} a_i y_i^*\right\| + \left\| x^* - \sum_{i=1}^{m} a_i y_i^*\right\| \\
&< 2b\frac{\epsilon}{4b} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $S_n^*(x^*) \to x^*$, cuando $n \to \infty$ y para todo $x^* \in X^*$, o lo que es lo mismo, $x^*(S_n(x)) \to x^*(x)$, cuando $n \to \infty$ y para todo $x \in X$ y $x^* \in X^*$; o sea, $S_n \overset{WOT}{\to} I_X$. Por el Corolario 1.6.4 la identidad I_X está en la cerradura de la envolvente convexa de $\{S_n : n \geq 1\}$ en la topología SOT. Es decir, existe una sucesión (P_n) de operadores en X tal que $P_n(x) \to x$ para cada $x \in X$, y cada

$P_n = \sum\limits_{i\in\sigma(n)} a_i S_i$, para algún subconjunto finito $\sigma(n)$. Nótese que cada P_n es un operador de rango finito, por serlo cada S_i.

En suma, tenemos que $Z = X^*$ es un espacio con base, y por tanto separable, y existen sucesiones (P_n) y (T_n) de operadores de rango finito que cumplen:

i) $P_n : X \to X$, $T_n : X^* \to Y$, $P_n^*(X^*) \subset Z$ para todo $n \leq 1$.

ii) $P_n(x) \to x$ y $T_n(x^*) \to x^*$, cuando $n \to \infty$ y para todo $x \in X$ y $x^* \in Z$, y $\sup_{n\geq 1} \|T_n\| < \infty$.

Por el Teorema 3.2.10 X tiene base de Schauder tal que sus funcionales biortogonales son una base para $Z = X^*$.

b) Supongamos que el espacio X tiene una base de Schauder y X^* es separable y tiene la propiedad b.a.p. Hagamos $Z = X^*$ y $Y = \widehat{X}$; así, $Y \leq Z^*$.

Consideremos ahora una base (x_n) de X, con coeficientes funcionales (f_n), y proyecciones naturales U_n. Definamos el operador $S_n = U_n^{**}$, entonces, por el Corolario 2.3.15, dado cualquier $x^{**} \in X^{**}$ se tiene

$$S_m(x^{**}) = \sum_{i=1}^{m} \widehat{f}_i(x^{**})\, \widehat{x}_i,$$

por lo que $S_m(X^{**}) \subset \widehat{X}$, o lo que es lo mismo, $S_m(Z^*) \subset Y$. Además,

$$S_m(\widehat{x}) \to \widehat{x}$$

para todo $\widehat{x} \in \widehat{X}$. Y, $\sup_{n\geq 1} \|S_n\| = \sup_{n\geq 1} \|U_n\| < \infty$.

Por otra parte, sea $(z_n)_{n\geq 1}$una sucesión denso de $Z = X^*$. Como este espacio tiene la propiedad b.a.p., se sigue de la Proposición 2.6.2 que existe $\lambda \geq 1$ tal que para cada subespacio $Z_n = \langle z_1, ..., z_n\rangle$ de Z, con $n \geq 1$, existe un operador $R_n : Z \to Z$ de rango finito tal que $R_n|_{Z_n} = I_{Z_n}$ y $\|R_n\| \leq \lambda$.

Dado $0 < \epsilon < 1$, el Lema 3.1.10 nos asegura que para cada $n \geq 1$ existe un operador $P_n : Z \to R_n(Z)$ $w - \|\cdot\|$-continuo tal que:

- $P_n|_{Z_n} = R_n|_{Z_n} = I_{Z_n}$, y
- $\|P_n\| \leq \lambda(1+\epsilon) \leq 2\lambda$.

En particular, P_n es de rango finito para todo $n \geq 1$.

Veamos que la sucesión (P_n) converge a la identidad en Z. Sea $\delta > 0$ y $z \in Z$ y tomemos $k \geq 1$ tal que $\|z - z_k\| < \frac{\delta}{4\lambda} \leq \frac{\delta}{2}$. Si $n \geq k$, entonces $P_n(z_k) = z_k$ y

$$\begin{aligned}
\|P_n(z) - z\| &\leq \|P_n(z) - P_n(z_k)\| + \|z_k - z\| \\
&\leq \|P_n\|\,\|z_k - z\| + \|z_k - z\| \\
&< 2\lambda\frac{\delta}{4\lambda} + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned}$$

Por tanto $P_n \to I_Z$.

Por otro lado, recordemos que $x^* \overset{w}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \widehat{x}_i(x^*)\, f_i$ para cualquier $x^* \in X^*$ (Proposición 2.3.16).

Como P_n es $w - \|\cdot\|$-continuo, para cualquier $x^{**} \in X^{**}$ y $x^* \in X^*$ se tiene:

$$\begin{aligned}
P_n^*(x^{**})(x^*) &= (x^{**} \circ P_n)(x^*) = x^{**}\left(P_n\left(w - \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\widehat{x_i}(x^*) f_i\right)\right) \\
&= x^{**}\left(\lim_{m\to\infty} P_n\left(\sum_{i=1}^{m}\widehat{x_i}(x^*) f_i\right)\right) = x^{**}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\widehat{x_i}(x^*) P_n(f_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\widehat{x_i}(x^*)\ x^{**}(P_n(f_i)) = \sum_{i=1}^{\infty}\widehat{f_i}(x^{**}\circ P_n)\ \widehat{x_i}(x^*) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\widehat{f_i}(x^{**}\circ P_n)\ \widehat{x_i}\right)(x^*).
\end{aligned}$$

Es decir, $P_n^*(x^{**}) = \sum_{i=1}^{\infty}\widehat{f_i}(x^{**}\circ P_n)\ \widehat{x_i}$, para todo $x^{**} \in X^{**}$ y por tanto, $P_n^*(x^{**}) \in \widehat{X}\,(= Y)$; o sea, $P_n^*(Z^*) \subset Y$ para todo $n \geq 1$.

Con todo lo hecho en la prueba concluimos que para Z se cumplen las propiedades del inciso b) del Teorema 3.2.10:

i) $Y \leq Z^*$ es cerrado y con base de Schauder.

ii) Existen dos sucesiones (P_n) y (S_n) de operadores de rango finito, con $P_n : Z \to Z$, $P_n^*(Z^*) \subset Y$, y $S_n : Z^* \to Y$ cuando $n \to \infty$.

iii) $P_n(z) \to z$ y $S_n(y) \to y$, cuando $n \to \infty$ y para todo $z \in Z$ y $y \in Y$, y $\sup_{n\geq 1}\|S_n\| < \infty$.

Por tanto, $Z = X^*$ tiene una base de Schauder y, por el inciso a) sabemos que X tiene una base que encoge.■

3.3 Diferenciación de las estructuras

Después de haber analizado las propiedades: f.d.d.p., b.a.p., π.p. y b.p., observamos que podemos lograr cierta unidad al formular cada una de ellas en términos de redes de operadores, de la siguiente manera:

- (Proposición 2.6.2) X tiene la **b.a.p**. si y sólo si existe una red (T_α) en $\mathcal{B}(X)$ de operadores de rango finito, uniformemente acotada, que converge puntualmente a la identidad en X.

- (Proposición 2.7.2) X tiene la **π.p.** si y sólo si existe una red (T_α) de proyecciones en X, de rango finito, y uniformemente acotada que converge puntualmente a la identidad en X y que satisface $T_\beta T_\alpha = T_\beta$ si $\beta \geq \alpha$.

- (Teorema 2.2.7) X tiene la **f.d.d.p.** si y sólo si existe una sucesión $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ de proyecciones de rango finito, uniformemente acotadas y tales que:

i) $x = \lim_{n\to\infty} Q_n(x)$ para toda $x \in X$.

ii) $Q_n \circ Q_m = Q_{\min(n,m)}$ para toda $1 \leq n, m$.

- (Teorema 3.2.10) X tiene la **b.p.** si y sólo si X es separable, existen $Y \leq X^*$ cerrado, separable y con base, y sucesiones de operadores de rango finito (P_n) y (T_n) tales que:

  i) $P_n : X \to X$, $P_n^*(X^*) \leq Y$, y $S_n : X^* \to Y$ para todo $n \geq 1$.

  ii) $P_n(x) \to x$, cuando $n \to \infty$, para todo $x \in X$, $S_n(y) \to y$, cuando $n \to \infty$, para todo $y \in Y$, y $\sup_{n\geq 1} \|S_n\| < \infty$.

  Más aún, si se cumplen estas últimas propiedades, entonces los coeficientes funcionales de la base de X forman una base para Y .

Cuando el espacio de Banach X es separable, que es un caso de especial importancia dado que constituye una condición necesaria para la b.p., las propiedades b.a.p., π.p. y f.d.d.p. pueden expresarse ya no en términos de redes de operadores sino de sucesiones de operadores.

Sea X un espacio de Banach separable,entonces:

- (Proposición 3.3.1) X tiene la **b.a.p.** si y sólo si existe una sucesión (T_n) en $B(X)$ de operadores de rango finito, uniformemente acotada que converge puntualmente a la identidad en X

- (Proposición 3.3.2) X tiene la propiedad π.**p.** si y sólo si existe una sucesión (S_n) en $B(X)$ de proyecciones de rango finito, uniformemente acotada por $\lambda \geq 1$, que converge puntualmente a la identidad en X y tales que $S_n S_m = S_m$ siempre que $m \leq n$.

- f.d.d.p. (Teorema 3.2.4) X tiene la **f.d.d.p.** si y sólo si existe $Y \leq X^*$ cerrado y separable, y dos sucesiones (P_n) y (T_n) de operadores de rango finito que satisfacen:

  i) $P_n : X \to X$, $P_n^*(X^*) \subset Y$ y $T_n : X^* \to Y$ para todo $n \geq 1$.

  ii) $P_n(x) \to x$, $T_n(y) \to y$, cuando $n \to \infty$ y para todo $x \in X$, $y \in Y$, y $\sup\limits_{n\geq 1} \|T_n\| < \infty$.

  iii) Los operadores P_n son proyecciones para toda $n \geq 1$, o los operadores T_n son proyecciones para cada $n \geq 1$.

Las proposiciones mencionadas para b.a.p. y π.p. en el caso de X separable son ahora demostradas.

Proposición 3.3.1 *Sea X un espacio de Banach separable, entonces X tiene la $\lambda-$m.a.p., con $\lambda \geq 1$, si y sólo si existe una sucesión (T_n) en $B(X)$ de operadores de rango finito, uniformemente acotada por λ, que converge puntualmente a la identidad en X*

Demostración.

Debido a la Proposición 2.6.2, sólo es necesario probar la parte “sólo si”. Supongamos que X tiene la $\lambda-$m.a.p. Sean (x_n) una sucesión densa en X, y (T_α) una red en $B(X)$ de operadores de rango finito, uniformemente acotada por $\lambda \geq 1$, que converge puntualmente a la identidad en X (Proposición 2.6.2)

Dado $\epsilon > 0$, existe α_1 tal que $\|T_\alpha(x_1) - x_1\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $\alpha \succeq \alpha_1$. Escojamos $\alpha_2 \succeq \alpha_1$, tal que para todo $\alpha \succeq \alpha_2$ se tiene que $\|T_\alpha(x_2) - x_2\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Continuamos la construcción inductiva de esta sucesión de índices tales que $\alpha_{n+1} \succeq \alpha_n$, y $\|T_\alpha(x_n) - x_n\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para toda $\alpha \succeq \alpha_n$. Así:

$$\|T_{\alpha_n}(x_m) - x_m\| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ si } n \geq m.$$

Dado $x \in X$, existe $x_m \in X$ tal que $\|x_m - x\| \leq \frac{\epsilon}{(\lambda+1)2}$, y por tanto:

$$\begin{aligned} \|T_{\alpha_n}(x) - x\| &\leq \|T_{a_n}(x) - T_{a_n}(x_m)\| + \|T_{a_n}(x_m) - x_m\| + \|x_m - x\| \\ &\leq (\lambda+1)\|x_m - x\| + \|T_{a_n}(x_m) - x_m\| \leq \epsilon, \end{aligned}$$

siempre que $n \geq i$.

Con lo cual queda probado el lema.■

Proposición 3.3.2 *Sea X un espacio de Banach separable, entonces X tiene la propiedad π_λ si y sólo si existe una sucesión (S_n) en $B(X)$ de proyecciones de rango finito, uniformemente acotada por $\lambda \geq 1$, que converge puntualmente a la identidad en X y tales que $S_n S_m = S_m$ siempre que $m \leq n$.*

Demostración.

Es prácticamente idéntica a la del lema anterior. Aquí se usa la Proposición 2.7.2 en lugar de la 2.6.2.■

Quizás esta manera de presentar las cuatro estructuras resulte más ilustrativa para ver sus diferencias y similitudes. Esto último está directamente relacionado con el hecho de que se ha logrado probar, casi en su totalidad, que las estructuras son en general distintas entre sí , o lo que es lo mismo que no hay equivalencia entre las propiedades que las determinan.

3.3.1 La a.p. no implica la b.a.p.

Definición 3.3.3 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $\lambda \geq 1$ y $\epsilon > 0$. Se dice que X tiene la propiedad $(\epsilon, \lambda)-$m.a.p. si para cada $Z \leq X$ de dimensión finita, $\delta > \epsilon$ y $\beta > \lambda$ existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| \leq \beta$ y*

$$\|T(z) - z\| \leq \delta \|z\| \text{ para cada } z \in Z$$

Lema 3.3.4 *Sean $T_n, ..., T_1$ transformaciones lineales definidas sobre un mismo espacio vectorial X. Si se define S_n como aquella que satisface:*

$$I - S_n = (I - T_n)(I - T_{n-1}) ... (I - T_1),$$

entonces

$$\begin{aligned} S_n &= (I - T_n) \circ (I - T_{n-1}) \circ ... \circ (I - T_2) \circ T_1 \\ &\quad + (I - T_n) \circ (I - T_{n-1}) \circ ... \circ (I - T_3) \circ T_2 \\ &\quad + ... + (I - T_n) \circ T_{n-1} + T_n. \end{aligned}$$

Demostración.
Para $n = 1$ se tiene que $I - S_1 = I - T_1$ implica $S_1 = T_1$.
Supongamos que S_{n-1} satisface

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= (I - T_{n-1}) \circ ... \circ (I - T_2) \circ T_1 \\ &\quad + (I - T_{n-1}) \circ ... \circ (I - T_3) \circ T_2 \\ &\quad +.. + (I - T_{n-1}) \circ T_{n-2} + T_{n-1}. \end{aligned}$$

Como $I - S_n = (I - T_n)(I - S_{n-1})$, entonces

$$\begin{aligned} S_n &= (I - T_n)(S_{n-1} - I) + I \\ &= S_{n-1} - T_n S_{n-1} - I + T_n + I \\ &= S_{n-1} - T_n S_{n-1} + T_n \\ &= (I - T_n) \circ (I - T_{n-1}) \circ ... \circ (I - T_2) \circ T_1 \\ &\quad + (I - T_n) \circ (I - T_{n-1}) \circ ... \circ (I - T_3) \circ T_2 \\ &\quad + ... + (I - T_n) \circ T_{n-1} + T_n. \blacksquare \end{aligned}$$

Definición 3.3.5 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para cada $Z \leq X^*$ de dimensión finita y cada $M > 0$, sea $\|\cdot\|_{M,Z}$ la norma definida en X^* como*

$$\|x^*\|_{M,Z} = \|x^*\| + Md(x^*, Z),$$

donde $d(x^*, Z) = \inf\{\|x^* - z\| \mid z \in Z\}$. Definimos el conjunto A como $|\cdot|_{M,Z} \in A$ si $|\cdot|_{M,Z}$ es una norma en X equivalente a $\|\cdot\|$ y tal que su norma dual coincide con $\|\cdot\|_{M,Z}$, para algún $M > 0$ y $Z \leq X^*$ de dimensión finita.

Proposición 3.3.6 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach tal que $\left(X, |\cdot|_{M,Z}\right)$ tiene la propiedad $\lambda-$m.a.p. para cada $|\cdot|_{M,Z} \in A$. Sea $0 < \epsilon < 1$, entonces $(X^*, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad $\left(\epsilon, \lambda\left[1 + \frac{2\lambda}{\epsilon}\right]\right)$-m.a.p.*

Demostración.

Sean $Z \leq X^*$ de dimensión finita, $\beta > \lambda$ y $r > 0$. Tomamos $M = \frac{2\beta}{\epsilon}$ y consideramos la norma $\|\cdot\|_{M,Z}$ y $Y \leq X$ de dimensión finita tal que

$$\|z\| \leq (1+r) \sup \{|z(y)| : y \in Y \text{ con } \|y\| \leq 1\}$$

para todo $z \in Z$ (Corolario 3.1.5).

Como $\left(X, |\cdot|_{M,Z}\right)$ tiene la $\lambda-$m.a.p., existe un operador de rango finito $T : X \to X$ tal que $T(y) = y$ para cada $y \in Y$ y $|T|_{M,Z} \leq \beta$. Así,

$$\begin{aligned} \|T^*(x^*)\| + 2\frac{\beta}{\epsilon} d(T^*(x^*), Z) &= \|T^*(x^*)\|_{M,Z} \\ &\leq |T|_{M,Z} \|x^*\|_{M,Z} = |T|_{M,Z} \left[\|x^*\| + 2\frac{\beta}{\epsilon} d(x^*, Z)\right] \end{aligned}$$

para todo $x^* \in X^*$.

Entonces

$$\begin{aligned} \|T^*(x^*)\| &\leq \|T^*(x^*)\|_{M,Z} \leq \beta \left[\|x^*\| + 2\frac{\beta}{\epsilon} \inf_{z \in Z} \|x^* - z\|\right] \\ &\leq \beta \left[\|x^*\| + 2\frac{\beta}{\epsilon} \|x^*\|\right] = \beta \left[1 + 2\frac{\beta}{\epsilon}\right] \|x^*\| \end{aligned}$$

para todo $x^* \in X^*$.

Así, T^* es un operador de rango finito definido en X^* que satisface

$$\|T^*\| = \|T\| \leq \beta \left[1 + 2\frac{\beta}{\epsilon}\right].$$

Por otra parte, usando también la desigualdad de arriba, dado $z_0 \in Z$, se tiene que

$$\begin{aligned} 2\frac{\beta}{\epsilon} d(T^*(z_0), Z) &\leq \|T^*(z_0)\|_{M,Z} \\ &\leq \beta \left[\|z_0\| + 2\frac{\beta}{\epsilon} \inf_{z \in Z} \|z_0 - z\|\right] \\ &= \beta \|z_0\|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Es decir,

$$d(T^*(z), Z) \leq \frac{\epsilon}{2} \|z\|$$

para todo $z \in Z$ y observemos que si $z \neq 0$, entonces la desigualdad es estricta, pues si $z \in \ker T^* - \{0\}$, entonces $d(T^*(z), Z) = 0 < \frac{\epsilon}{2} \|z\|$, y si $z \notin \ker T^*$, entonces la primera desigualdad de (3.9) es también estricta.

Así, si $z \in Z \setminus \{0\}$, entonces existe $w \in Z$ tal que

$$\|T^*(z) - w\| \leq \frac{\epsilon}{2} \|z\| .$$

Entonces

$$\|T^*(z) - w\| \leq \frac{\epsilon}{2} \|z\|$$

para todo $z \in Z$.

Dado $y \in Y$, tenemos que $T^*(z)(y) = z(T(y)) = z(y)$ y por tanto,

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \|w(y) - z(y)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \|z\| .$$

Y por consiguiente,

$$\|z - w\| \leq (1 + r) \sup_{\|y\| \leq 1} \|w(y) - z(y)\| \leq \frac{\epsilon}{2} (1 + r) \|z\| .$$

Para cualquier $z \in Z$ tenemos:

$$\|T^*(z) - z\| \leq \|T^*(z) - w\| + \|w - z\| \leq \frac{\epsilon}{2} \|z\| + \frac{\epsilon}{2} (1 + r) \|z\|$$

para todo $z \in Z$; de donde,

$$\|T^*(z) - z\| \leq (\epsilon + r) \|z\|$$

para todo $z \in Z$.

En resumen, T^* satisface

$$\|T^*\| \leq \beta \left[1 + 2\frac{\beta}{\epsilon}\right] \text{ y } \|T^*(z) - z\| \leq (\epsilon + r) \|z\|$$

para todo $z \in Z$. Entonces $(X^*, \|\cdot\|)$ tiene la $\left(\epsilon, \lambda \left[1 + \frac{2\lambda}{\epsilon}\right]\right)$-m.a.p.■

Proposición 3.3.7 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach con la propiedad* (ϵ, λ) *−m.a.p. para algún* $0 < \epsilon < 1$. *Entonces,* X *tiene la* $\frac{\lambda}{1-\epsilon}-$ *m.a.p.*

Demostración.

Sean $Z \leq X$ de dimensión finita, $\beta > \lambda$, $0 < \epsilon < \delta < 1$ y $\epsilon_0 > 0$. Es posible construir por inducción una sucesión $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ de operadores de rango finito tales que

$$\|T_n(x) - x\| \leq \delta \|x\| \text{ para cada } x \in \left\langle Z \bigcup T_1(X) \bigcup ... \bigcup T_{n-1}(X) \right\rangle ,$$

donde $T_0(X) = \{0\}$, y $\|T_n\| \leq \beta$ para todo $n \geq 1$.

Ahora definamos, para $n \geq 1$, el operador S_n como el que satisface

$$I - S_n = (I - T_n) \circ (I - T_{n-1}) \circ ... \circ (I - T_1) \ .$$

Así,

$$\|S_n(z) - z\| \leq \delta^n \|z\| \text{ para cada } z \in Z$$

Y por el Lema 3.3.4 tenemos:

$$\begin{aligned} S_n &= (I - T_n) \circ (I - T_{n-1}) \circ ... \circ (I - T_2) \circ T_1 \\ &\quad + (I - T_n) \circ (I - T_{n-1}) \circ ... \circ (I - T_3) \circ T_2 \\ &\quad + ... + (I - T_n) \circ T_{n-1} + T_n. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|S_n\| \leq \delta^{n-1}\beta + \delta^{n-2}\beta + ... + \beta < \frac{\beta}{(1-\delta)}.$$

Para n suficientemente grande

$$\|S_n(z) - z\| \leq \delta^n \|z\| < \epsilon_0 \|z\| \text{ para cada } z \in Z.$$

Supongamos $\|S_n\| > \frac{\lambda}{1-\epsilon}$ para n tan grandes como se quiera.

Si lo anterior sucediera para los operadores S_n construidos para cada $\beta > \lambda$ y $0 < \epsilon < \delta < 1$, entonces se tendría $\frac{\lambda}{1-\epsilon} < \frac{\beta}{(1-\delta)}$ para cada $\beta > \lambda$ y $0 < \epsilon < \delta < 1$, lo que es imposible.

Por tanto, para alguno de esos valores β y δ se tiene

$$\|S_n(z) - z\| < \epsilon_0 \|z\| \text{ para cada } z \in Z$$

y

$$\|S_n\| < \frac{\lambda}{1-\epsilon}$$

para alguna n.

Por tanto, X tiene la $\frac{\lambda}{1-\epsilon}-$ m.a.p.■

Teorema 3.3.8 *Si para cada* $|\cdot|_{M,Z}$ *en el conjunto A, de la Definición 3.3.5, se satisface que* $\left(X, |\cdot|_{M,Z}\right)$ *tiene la* $\lambda-$ *m.a.p., entonces* X^* *tiene la* $2\lambda(1+4\lambda)-$ *m.a.p.*

Demostración.

Por la Proposición 3.3.6 sabemos que $(X^*, \|\cdot\|)$ tiene la $\left(\epsilon, \lambda\left[1 + \frac{2\lambda}{\epsilon}\right]\right)$-m.a.p. para cada $\epsilon \in (0,1)$. Por la Proposición 3.3.7 X^* tiene a su vez la propiedad de aproximación $\frac{\lambda}{1-\epsilon} \cdot \left(1 + \frac{2\lambda}{\epsilon}\right)$-m.a.p. y por tanto, si consideramos $\epsilon = \frac{1}{2}$, tenemos que X^* tiene la $2\lambda(1+4\lambda)$-m.a.p.■

Teorema 3.3.9 *La propiedad de aproximación no implica la propiedad de aproximación acotada.*

Demostración.

Lindenstrauss demostró en [11] que existe un espacio de Banach X con la propiedad $1-$m.a.p., pero cuyo espacio dual X^* no tiene la propiedad de aproximación. Esto implica, por el Teorema 2.8.1, que X^* tampoco tiene la propiedad $\lambda-$m.a.p. para todo $\lambda \geq 1$, y en particular cuando λ toma valores naturales. Por el Teorema 3.3.8, sabemos entonces que para todo $n \geq 1$, el espacio X no tiene la propiedad de aproximación $n-$métrica para alguna norma del conjunto A de la definición 3.3.5, que llamaremos $|\cdot|_n$.

Mostraremos que el espacio $(\sum (X, |\cdot|_n))_{l_2}$ tiene la propiedad aproximación, pero no la de aproximación acotada.

a) $Y = (\sum (X, |\cdot|_n))_{l_2}$ tiene la propiedad de aproximación.

Sea $K \subset Y$ un compacto y $\epsilon > 0$, entonces sabemos que existe $N \geq 1$ tal que

$$\left\|(x_n)_{n=N+1}^{\infty}\right\|_{l_2} = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $(x_n) \in K$.

Consideremos la proyección $n-$ésima π_n definida en $(\sum (X, |\cdot|_n))_{l_2}$. Como sabemos, π_n es una función continua, y por consiguiente $\pi_n(K)$ es un compacto en X. Dado que X tiene la $1-$m.a.p. existe un operador T_n, para cada $n \geq 1$, definido en X y de rango finito tal que $\|T_n\| \leq 1$ y

$$\|T_n(x_n) - x_n\| \leq \frac{\epsilon^2}{2^{n+1}M^2}$$

para todo $x_n \in \pi_n(K)$, donde M es el mínimo de las constantes que satisfacen $|x|_n \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$ y para toda $1 \leq n \leq N$.

Formemos el operador lineal y continuo $T : (\sum (X, |\cdot|_n))_{l_2} \to (\sum (X, |\cdot|_n))_{l_2}$ definido como $T = (T_1, .., T_{N-1}, T_N, 0, 0, ...)$. Así, T es un operador de rango finito.

Si $(x_n) \in K$, entonces

$$\begin{aligned} &\|T((x_n)) - (x_n)\|_{l_2} \\ \leq\ & \left(\sum_{n=1}^{N} |T_n(x_n) - x_n|_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & \left(\sum_{n=1}^{N} M^2 \|T_n(x_n) - x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que Y tiene la propiedad de aproximación.

b) $Y = \left(\sum (X, |\cdot|_n)\right)_{l_2}$ no tiene la propiedad de aproximación acotada.

Supongamos que lo contrario; es decir, que existe una $\lambda \geq 1$ tal que Y tiene la propiedad de aproximación $\lambda-$métrica.

Sea $n \geq \lambda$ y tomemos $K \subset (X, |\cdot|_n)$ un compacto. Si $i_n : X \to Y$ es el operador definido como

$$i_n(x) = \left(\overbrace{0, ..., 0, x}^{n}, 0, .. \right),$$

entonces la imagen de K bajo i_n es un compacto en Y, y por nuestra suposición existe un operador de rango finito $T : Y \to Y$, tal que

$$\left\| T(k') - k' \right\|_{l_2} \leq \epsilon$$

para toda $k' \in i_n(K)$, y $\|T\| \leq n$.

Definimos el operador $S = \pi_n \circ T \circ i_n$. Observemos que S está definido en X y es de rango finito pues T lo es, y como $\|\pi_n\| \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} |S(k)|_n &= |\pi_n(T(0, ..., 0, k, 0, ...))|_n \leq \|T(0, ..., 0, k, 0, ...)\|_{l_2} \\ &\leq \|T\| \, \|(0, ..., 0, k, 0, ...)\|_{l_2} = \|T\| \, |k|_n \leq n \, |k|_n \, . \end{aligned}$$

Por tanto $\|S\| \leq n$.

Además para $k \in K$ tenemos:

$$\begin{aligned} \|S(k) - k\| &\leq \|\pi_n\| \, \|T(0, ..., 0, k, 0, ...) - (0, ..., 0, k, 0, ...)\|_{l_2} \\ &\leq \|T(0, ..., 0, k, 0, ...) - (0, ..., 0, k, 0, ...)\|_{l_2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Con lo cual tenemos que $(X, |\cdot|_n)$ tiene la n-m.a.p. y se contradice la elección de la norma $|\cdot|_n$. Por tanto, Y no tiene la propiedad de aproximación acotada.$\blacksquare$

Respecto a lo anterior Stanislaw Szarek demostró en [21] que incluso cuando un espacio es reflexivo puede tener la a.p. y no la b.a.p.

En el mismo trabajo Szarek [21] hace ver la que la **f.d.d.p. no implica la b.p.**, con lo que responde negativamente la vieja pregunta de si la propiedad de aproximación acotada es equivalente a la propiedad de la base, misma que fue un problema abierto durante mucho tiempo. No se presenta la prueba pues obligaría a sobrepasar el tiempo y alcances previstos para la realización de este trabajo.

3.3.2 La b.a.p. no implica la π.p.

La propiedad π que como vimos implica la b.a.p., no es equivalente a ésta. Esto se sigue de los trabajos de C. J. Read [16] y P. G. Casazza [2]. El primero exhibió un espacio de Banach X que tiene la propiedad de aproximación acotada conmutativa (c.b.a.p.), la cual implica la b.a.p., y no tiene la f.d.d.p. Por otra parte, Casazza probó que si un espacio de Banach tiene la c.b.a.p. y es π espacio, entonces tiene la f.d.d.p. Por tanto, el espacio X que Read construyó, no tiene la π- propiedad, y por consiguiente, la b.a.p. no implica la π- propiedad.

El trabajo de Read nunca fue publicado a pesar de haber sido citado en muchos artículos especializados y nos resultó imposible conseguirlo. Sin embargo, el trabajo de Casazza sí estuvo disponible, y en seguida veremos la demostración del teorema que mencionamos arriba, y que fue publicado en [2].

Teorema 3.3.10 *Un espacio de Banach separable X tiene la f.d.d.p. si y sólo si X tiene la c.b.a.p. y la π. p.*

Demostración.

Supongamos que X tiene la f.d.d.p. Entonces por el Teorema 2.8.1 X tiene la π.p. y por el Teorema 2.2.7 tiene la c.b.a.p.

Inversamente supongamos que X tiene la c.b.a.p. y la π.p. Por tener la π.p., existe una sucesión (π_n) de proyecciones de rango finito, definidos en X, tales que $\pi_n \circ \pi_m = \pi_m$ siempre que $m \leq n$, y que converge puntualmente a la identidad en X.(Proposición 3.3.2)

Por otra parte, dado que se tiene la propiedad c.b.a.p., existe una sucesión (T_n) de operadores en X de rango finito y uniformemente acotados que satisfacen $T_n(x) \to x$ para cada $x \in X$, y $T_n \circ T_m = T_{\min(n,m)}$ siempre que $n \neq m$.

Consideremos el espacio separable $Y = \overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^*(X^*) \right\rangle}$ y sea $0 < \epsilon < 1$ tal que $\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \dim \pi_1(X) \lambda < \frac{1}{2}$, donde $\lambda \geq \max\left(\sup_{n\geq 1} \|\pi_n\| \cdot \sup_{n\geq 1} \|T_n\|, 1\right)$.

Por el Lema 2.4.5 existe $n_1 \geq 1$ tal que

$$\left\| T_{n_1} |_{\pi_1(X)} - I_{\pi_1(X)} \right\| < \epsilon.$$

Y por el Lema 2.4.4, existe un operador $S_1 : X \to X$, de rango finito, tal que

$$S_1 |_{\pi_1(X)} = I_{\pi_1(X)}, \left\| S_1 - T_{n_1} \right\| \leq \frac{1}{2}$$

y

$$S_1^*(X^*) = T_{n_1}^*(X^*) \subset Y.$$

Es posible construir inductivamente una subsucesión (T_{n_i}) de (T_n) y una sucesión (S_i) de operadores de rango finito, definidos en X, con las siguientes características:

a)$\left\| T_{n_i} |_{\pi_i(X)} - I_{\pi_i(X)} \right\| < \epsilon_i$ donde, $0 < \epsilon_i < 1$ es tal que $\frac{\epsilon_i}{1-\epsilon_i} d\lambda < \frac{1}{i}$ para $d = \dim \pi_{i-1}(X)$.

b) $S_i \circ \pi_i = \pi_i$.

c) $\|S_i - T_{n_i}\| \leq \frac{1}{i}$.

d) $S_i^*(X^*) = T_{n_i}^*(X^*) \subset Y$.

Definamos $Q_i = \pi_i \circ S_i$ para cada $i \geq 1$. Como $\pi_j \circ \pi_i = \pi_i$ si $i \leq j$, y por b), se tiene que

$$Q_i^2 = \pi_i \circ (S_i \circ \pi_i) \circ S_i = \pi_i \circ S_i = Q_i.$$

De manera que Q_i es una proyección para cada $i \geq 1$, y es de rango finito por serlo π_i.

Por d),

$$Q_i^*(X^*) = S_i^*(\pi_i^*(X^*)) \subset Y.$$

Además, $Q_i(x) \to x$ para cada $x \in X$, pues dado $x \in X$, $m \geq 1$, e $i \geq m$, por las propiedades de la sucesión (π_i), y por el inciso b), se tiene:

$$\begin{aligned} Q_i(\pi_m(x)) &= (\pi_i \circ S_i \circ \pi_m)(x) = (\pi_i \circ S_i \circ \pi_i \circ \pi_m)(x) \\ &= (\pi_i \circ \pi_m)(x) = \pi_m(x). \end{aligned}$$

Es decir, que $Q_i(x) \to x$ para cualquier $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \pi_i(X)$. Pero como $\bigcup_{i=1}^{\infty} \pi_i(X)$ es denso en X, entonces $Q_i(x) \to x$ para todo $x \in X$.

Hasta ahora no hemos usado la hipótesis de que los operadores (T_n) conmuten; precisamente se usará en lo que sigue:

Tenemos,

$$\lim_{n\to\infty} T_n^*(T_m^*(x^*)) = T_m^*(x^*) \text{ para todo } x^* \in X^*;$$

por tanto, $T_n^*(x^*) \to x^*$ para todo $x^* \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^*(X^*)$, y, como este espacio es denso en Y, tenemos que $T_n^*(y) \to y$ para todo $y \in Y$.

En suma, se tienen un subespacio $Y \leq X^*$ cerrado y separable, y dos sucesiones de operadores de rango finito, (Q_n) y (T_n^*), tales que:

i) $Q_n : X \to X$, $Q_n^*(X^*) \subset Y$ y $T_n^* : X^* \to Y$ para todo $n \geq 1$.

ii) $Q_n(x) \to x$, $T_n^*(y) \to y$, cuando $n \to \infty$ y para todo $x \in X$, $y \in Y$, y $\sup_{n\geq 1} \|T_n^*\| < \infty$.

iii) Cada operado Q_n es una proyección.

Esto significa, por el Teorema 3.2.4, que X tiene la f.d.d.p.■

Hasta donde sabemos sigue sin resolverse si todo espacio de Banach con π.p. tiene la f.d.d.p.

Concluimos este trabajo con dos cuadros que resumen las relaciones entre las estructuras estudiadas.

b.p. $\Rightarrow$ f.d.d.p. $\Rightarrow$ πp. $\Rightarrow$ b.a.p. $\Rightarrow$ a.p.

Propiedad	$\Rightarrow$	Propiedad
f.d.d.p.	No	b.p.
π.p.	??	f.d.d.p.
b.a.p.	No	π.p.
a.p	No	b.a.p.

Bibliografía

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszwa, 1932.

[2] P. G. Casazza, *The commuting B.A.P. for Banach spaces*, Analysis al Urbana II, (Berkson, E. Peck, N. T., y Uhl, J. J., editores) London Math. Soc. Lecture Notes, No. 138, 1989, 108-127.

[3] N. Dunford, L. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, New York, 1958.

[4] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973) 309-317.

[5] M. Favian et al., *Functional Analysis and infinite dimensional Geometry*, CMS Books in Mathematics; 8, Springer, 2001

[6] T. Fiegiel and W.B. Johnson, *The approximation property does not imply the bouded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **41**, 1, (1973), 197-200.

[7] R. Gómez, Tesis de Licenciatura: *Sucesiones básicas. Extensión de coeficientes funcionales*, 1994.

[8] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. No 16 (1955).

[9] W.B. Johnson, H. P. Rosenthal and M. Zippin, *On basis, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces*, Israel J. Math. **9**, (1971), 488-506.

[10] S. Karlin, *Bases in Banach spaces*, Duke Math. J. **15** (1948), 971-985.

[11] J. Lindenstrauss, *On James' paper "Separable conjugate spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279-284.

[12] J. Lindenstrauss, H.P. Rosenthal, *The $\mathcal{L}_p$ spaces*. Israel J. Math. **9** (1969) 325-349.

[13] J. Lindenstrauss, L.Tzafriri , *Classical Banach Spaces I. Sequence spaces*, Springer-Verlag, 1977.

[14] A. Martínez-Abejón, *An elementary proof of the principle of local reflexivity*, Proc. Amer. Math. Soc. **127**, 5, (1999), 1397-1398.

[15] R.E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Springer-Verlag, 1998.

[16] C.J. Read *Different forms of the aproximation property.* No publicado.

[17] W. Rudin, *Functional Analysis. Second edition*, McGraw-Hill, Inc. 1991.

[18] M.J. Schauder, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Z. **26** (1927), 47-65.

[19] Sigmund-Schulte, R. *The Origins of Functional Analysis*, History of Analysis, (Jahnke, F.N., editor), Amer. Math. Society y London Math. Soc., serie History of Mathematics, **24**, (2003), p.385-408.

[20] I. Singer, *Bases in Banach spaces. I.* Springer-Verlag, 1970.

[21] S. J. Szarek, *A Banach space without a basis which has the bounded approximation property*, Acta Math. **159** (1987) 81-98.