



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN

“ANALISIS DE VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS
HERRAMIENTAS UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE
CONCENTRACIÓN DE ONDA (WAVELET) “

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
**MAESTRO EN INGENIERIA
METAL - MECANICA**

P R E S E N T A:
SILVERIO JOEL SÁNCHEZ PÉREZ

DIRECTOR: DR. VICTOR M. CASTAÑO MENESES

CUAUTITLAN IZCALLI EDO. DE MÉXICO 2006

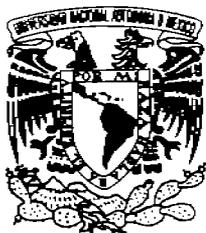
Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Blasita Acosta

Sanchez Perez

FECHA: 10/23/2006

FIRMA: [Signature]



CARTA DE VOTOS APROBATORIOS

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Dr. Juan Antonio Montaraz Crespo
Director FES-Cuautitlán
Presente.

Por medio de este conducto nos permitimos comunicar a usted que revisamos la tesis titulada **“ANÁLISIS DE VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS HERRAMIENTAS UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE CONCENTRACIÓN DE ONDA (WAVELET)”** que presenta el alumno **SILVERIO JOEL SÁNCHEZ PÉREZ** con número de cuenta **7958478-0** y número de expediente **100991025** para obtener el grado de **Maestro en Ingeniería (Metal-Mecánica)**. Consideramos que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el Examen de Grado correspondiente, otorgamos el voto aprobatorio.

Atentamente

“POR MI RAZA HABLARA EL ESPÍRITU”

Cuautitlán Izcalli, Estado de México a _____ de _____ del _____

NOMBRE DE LOS SINODALES

Presidente

Dr. Marcelo López Parra

Secretario

Dra. Suemi Rodríguez Romo

Vocal

Dr. Víctor M. Castaño Meneses

Suplente

Dr. Saúl D. Santillán Gutiérrez

Suplente

Dr. Andrés Herrera Vázquez

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN
CENTRO DE ASIMILACIÓN TECNOLÓGICA (C. A. T.)**

**CENTRO DE FÍSICA APLICADA Y TECNOLOGIA AVANZADA
CAMPUS JURQUILLA QRO.**

**“ANALISIS DE VIBRACIONES MECÁNICAS EN MAQUINAS
HERRAMIENTAS UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE
CONCENTRACIÓN DE ONDA (WAVELET) “**

ALUMNO: SILVERIO JOEL SÁNCHEZ PÉREZ

DIRECTOR: DR. VICTOR MANUEL CASTAÑO MENESES

Objetivo

Conocer las ventajas y desventajas del análisis de vibraciones en maquinas herramientas utilizando la Transformada de Concentración de Onda (wavelet), comparándola con la Transformada de Fourier.

Alcance

De análisis teórico.

INDICE GENERAL

Introducción	1
Capitulo 1: Análisis de señales	
Principios matemáticos	6
Forma Diferencial (Campo covectorial)	6
Análisis de señales	9
Ondas armónicas	12
Señal periódica	20
Señal no periódica	22
La transformada de Fourier	23
Representación de una señal en el dominio del tiempo y la frecuencia	28
Algunas propiedades de la transformada de Fourier	30
Propiedad del desplazamiento en el tiempo	30
Teorema de la convolución	31
Teorema de la convolución en el tiempo	31
Teorema de la convolución en la frecuencia	32
Algunas relaciones de la convolución	33
Propiedad de simetría	35

Teorema del muestreo uniforme	38
La transformada de Fourier de tiempo corto	42
Determinación frecuencia – tiempo	44
Expansión de la señal frecuencia – tiempo y síntesis de la TFTC ...	45
La TFTC discreta	46
Señales de energía y señales de potencia	48
Vectores ortogonales	51
Vectores ortonormales	54
Señales	55
Determinación grafica de los componentes de una función	59
Espacio ortogonal de señales	62
Determinación del error cuadrático medio	65
Señales ortogonales y simétricas	68
Tipos de ondas	70
Fenómenos asociados a las ondas	71
Reflexión	71
Refracción	72
Interferencias	72
Difracción	73
Polarización	73

Longitud de onda	74
Ecuaciones de las ondas progresivas unidimensionales	
Sinusoidales	75
Energía del movimiento ondulatorio	77
El sonido	80
Velocidad del sonido en los gases	83
Comportamiento de las ondas	85
Capítulo 2 : Concentración de Onda (wavelet)	
Mapeo	87
Escalado	92
Análisis de la Concentración de onda	93
La transformada de la Concentración de onda continua	93
La representación en el tiempo	102
Numero de dimensiones	102
La representación del escalamiento	102
Escalado y frecuencia	104
Transformada de espectro de la Concentración de Onda	105
Transformada de espectro de nivel – 1	108
Los pequeños cambios principales	109
Conservación y compactación de la energía	110

Conservación de la energía	110
Justificación de la conservación de energía	112
Concentración de Onda de espectro	113
Producto escalar	114
Aplicación de la Concentración de Onda	116
Capitulo 3 : Momentos Mecánicos	
Inercia rotacional	117
Centro de masa	117
Centro de gravedad	119
Movimiento de rotación y movimiento de traslación	123
Suma de velocidades	125
Velocidad angular	126
Velocidad transferida	128
Fuerzas inerciales y la fuerza de Coriolis	129
Leyes de la conservación de la energía	131
Dinámica rotacional	138
Selección de la posición de los ejes	144
Calculo del momento de inercia	145
Selección de la posición de los ejes de referencia	146
Signo / polaridad del momento de inercia	146

Unidades del momento de inercia	147
Teorema de los ejes paralelos	151
Aproximaciones de Boyton	152
Formula básica utilizando elementos diferenciales (infinitesimales) de masa	154
Formas normalizadas	155
Momentos de inercia de objetos similares a formas normalizadas .	156
Combinando valores de MOI axiales	157
Combinando valores del MOI transversales	157
Efectos del desalineado	160
Comprobando cálculos de MOI mediante medidas físicas	160
Péndulo de torsión invertido	160
Péndulo trifilar para objetos grandes	161
Péndulo compuesto – no recomendado	161
Grado de aceleración – método teórico de los libros de texto	162
Vibraciones en maquinas herramientas	163
Vibración	164
Vibraciones Regenerativas	175
Tolerancia y grado de equilibrado	176
Norma oficial mexicana (vibraciones)	178

Capítulo 4 : Desarrollo del Algoritmo

Algoritmo para el cálculo de Concentración de Onda Discreta	197
Requerimientos de la entrada	203
Puerto de múltiples salidas	204
Puerto de una sola salida	204
Especificando el filtro del banco de filtros	207
La Concentración de Onda tal como la Biorthogonal Daubechies . .	208
Programa para calcular la ondulada de 1 – Dimensión	210
Conclusiones	231

Apéndice A : Conceptos Básicos

Producto escalar	237
Campo escalar	237
Función Real	238
Campo vectorial	238
Tiempo discreto	240
Señal digital	240
Convolución finita y ecuaciones diferenciales	240

Linealidad	241
In variancia de cambio	241
Causalidad	241
Estabilidad (BIBO)	241.
Referencias	244

Introducción

Cotidianamente vivimos entre fenómenos físicos naturales y los que el ser humano produce como por ejemplo: Determinados movimientos globales y ciertas deformaciones son más comunes que otros: los movimientos oscilatorios más probables (los más fáciles de producir) ocurren según ciertas frecuencias naturales. Algunas frecuencias de excitación pueden coincidir con las frecuencias naturales (resonancia) y producir respuestas de vibración relativamente muy intensas ; los cuerpos vibrantes son cuerpos sonoros que nos producen ondas de sonido.

Las ondas en medios deformables o elásticos son un ejemplo de ondas ordinarias de sonido a las cuales se les llama **ondas mecánicas** Se originan por el desplazamiento de alguna parte de un medio elástico de su posición normal, causando oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio. A causa de las fuerzas elásticas sobre capas adyacentes, esta perturbación se transmite de una capa a la próxima a través del medio. El propio medio no se mueve como un conjunto; por el contrario, las diversas partes oscilan en trayectorias limitadas. Por ejemplo, en el caso de las ondas superficiales en el agua, pequeños objetos flotantes como corchos demuestran que el movimiento real de las moléculas de agua es elíptico, ligeramente hacia arriba y hacia abajo y hacia delante y hacia atrás. Sin embargo, las ondas del agua se mueven estacionariamente a lo largo del liquido. Cuando alcanzan a los objetos flotantes los ponen en movimiento, es decir, les transfieren energía. La energía en las ondas está en la forma tanto de energía cinética como de energía potencial y su transmisión se produce al pasar de una parte de la materia a la siguiente y no por un movimiento de largo alcance de la propia materia.

Por lo, tanto las ondas mecánicas están caracterizadas por el transporte de energía a través de la materia mediante el movimiento ondulatorio de una perturbación en éste sin que haya ningún movimiento global de la materia misma, ya que cada elemento del medio transmite energía a los elementos vecinos. Para la transmisión de las ondas mecánicas es necesario un medio material. Las propiedades del medio material que determinan la velocidad de las ondas mecánicas en él son su *elasticidad* y su *inercia*. Todos los medios materiales (aire, agua, acero, etc.) poseen esas propiedades y en ellos pueden propagarse las ondas mecánicas. Es la *elasticidad* la que da lugar a las fuerzas restauradoras sobre cualquier elemento que se desplaza de su posición de equilibrio; es la *inercia* la que determina la respuesta a esas fuerzas restauradoras.

Hay dos clases generales de vibraciones, libres y forzadas. La vibración libre es la que ocurre cuando un sistema oscila bajo la acción de fuerzas propias al sistema mismo y, cuando las fuerzas externamente aplicadas son inexistentes.

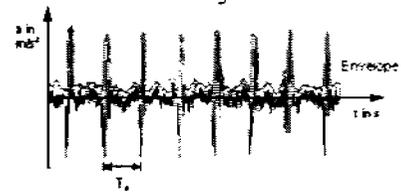
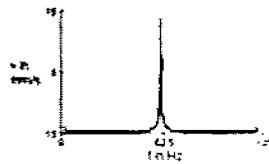
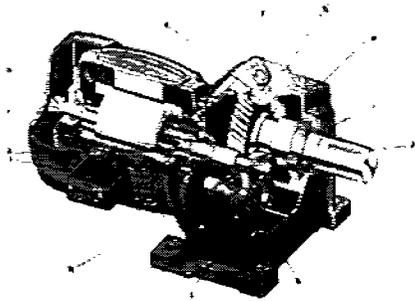
El sistema bajo vibración libre vibrará a una o más de sus frecuencias naturales que, son propiedades del sistema dinámico que dependen de su distribución de masa y rigidez.

La vibración que se realiza bajo la excitación de fuerzas externas es una vibración forzada.

Cuando la excitación es oscilatoria, el sistema es obligado a vibrar a la frecuencia de excitación. Si ésta coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, se produce una situación de resonancia y ocurren oscilaciones peligrosamente grandes. La falla de estructuras mayores como puentes, edificios o alas de aviones es una posibilidad real, bajo resonancia.

El cálculo de las frecuencias naturales es de una importancia muy grande en el estudio de las vibraciones. Todos los sistemas vibratorios están sometidos a cierto

grado de amortiguamiento ya que la energía se disipa por fricción y otras resistencias.



En el análisis de los espectros de vibración en la velocidad, nos permite ver la cantidad de fatiga a la que están sometidos los elementos de la unidad, Con esto podemos calcular la severidad de la vibración. El estudio y cálculo de frecuencias de los espectros de vibración nos permite ver cada uno de los componentes que construyen la máquina. Ejemplo : En un Motor Reductor podemos ver el Engrane de Salida, el balero de la flecha de salida, Los Baleros del Motor, El desbalance de las líneas de fase, La Alineación de los engranes. Por mencionar algunos.

Cuando el movimiento puede repetirse así mismo regularmente se le llama oscilatorio, como en el caso de un balancín de reloj o como en el caso de un movimiento sísmico. Si el movimiento se repite a intervalos de tiempo t , se le llama periódico. El tiempo de repetición t es el periodo de la oscilación y su recíproco, $f = 1 / t$ es la frecuencia. [Tho]

En el análisis de señales se tiene un impresionante arsenal de herramientas. Quizás la mejor conocida de estas es el análisis de Fourier que descompone una señal en componentes de senoides de diferentes frecuencias.

Para muchas señales, el análisis de Fourier es extremadamente provechoso porque el contenido de la frecuencia de la señal es de gran importancia. Por lo

tanto ¿porque necesitamos otras técnicas, como el análisis de la Concentración de Onda.

El análisis de Fourier tiene una seria desventaja. En la transformada al dominio de la frecuencia, la información del tiempo se pierde. Cuando vemos a una transformada de Fourier de una señal, es imposible decir cuando tomo lugar un evento en particular. Si las propiedades de la señal no cambian mucho sobre el tiempo esto es si es que es llamada una señal estacionaria, esta desventaja no es muy importante.

Sin embargo, las señales más interesantes contienen numerosas características dinámicas o transitorias: de movimiento, de tendencia, de cambios repentinos y eventos de comienzo y de término.

Estas características son con frecuencia las partes más importantes de la señal, y el análisis de Fourier no es el adecuado para detectarlo.

La Concentración de Onda (Wavelet), determina con más claridad el calculo de componentes no lineales alrededor del tiempo y la frecuencia. Con la ayuda del calculador digital, se lleva a cabo eficientemente el análisis de una función oscilatoria sin la necesidad de utilizar senos y cósenos como en el análisis de Fourier.

En el lenguaje de las Matemáticas una señal se describe como una cantidad física que varia con el tiempo, el espacio, otra variable o variables independientes por ejemplo las señales de voz se generan al forzar el paso del aire a través de las cuerdas vocales.

Las imágenes se obtienen exponiendo película fotográfica ante un objeto o un paisaje. Por lo tanto, la forma en que se obtienen las señales se encuentra asociada con un sistema que responde a un estímulo o fuerza. El estímulo en

combinación se llama fuente de la señal. Por lo tanto tenemos fuentes de voz, de ruido, de imágenes y de otros tipos de señales.

Podemos decir que un sistema es un dispositivo físico que realiza una operación sobre una señal. Por ejemplo, un filtro que se utiliza para reducir el ruido y las interferencias que se unen a la señal la cual contiene la información deseada se denomina sistema. En este caso, el filtro realiza algunas operaciones sobre la señal, cuyo efecto es reducir (filtrar) el ruido y la interferencia presentes en la señal deseada.

Cuando pasamos una señal a través de un sistema, como en el caso del filtrado, decimos que hemos procesado la señal. En este caso, el procesado de la señal implica la separación de la señal deseada del ruido o de la interferencia.

El sistema puede incluir dispositivos físicos con software de operaciones sobre una señal. En el procesado digital de señales de un computador, las operaciones realizadas sobre una señal constan de varias operaciones matemáticas especificadas por un programa de software.

El computador es una herramienta muy flexible la cual podemos utilizar para entender las descripciones abstractas de los procesos físicos. La observación debe ser traducida al lenguaje del computador el cual realiza un procesamiento por ejemplo de una descripción matemática del proceso físico que podamos expandir ampliamente nuestro entendimiento del proceso físico a través del cálculo automatizado.

Capítulo 1

Análisis de señales

Principios matemáticos

En 1873, James Clerck Maxwell nos dice que para las ondas o para movimientos diferentes al movimiento rectilíneo (vector) se necesitan otros conceptos; sin embargo, esto no a sido muy tomado en cuenta. Los matemáticos italianos Ricci y Levi-Civita, en 1901 entendieron que existen dos tipos de espacios (lugares) mutuamente duales, (ver conceptos básicos apéndice A)vector y covector. [Oze] Desde 1922 el matemático francés Élie Cartan utilizó la denominación equivalente a la **forma exterior para covector y la forma diferencial para un campo covectorial**.

En 1901 el **italiano** Levi-Civita denominó a este otro tipo de movimientos diferente al rectilíneo como **covector**.

Forma diferencial (Campo covectorial)

Definición.

El covector es la colección de todas las funciones lineales por ejemplo, velocidad, aceleración, fuerza Newtoniana sobre \mathbb{R} – espacio vectorial denotado por M (un espacio vectorial) forma un nuevo \mathbb{R} -espacio de formas diferenciales denominado por M^* (forma un nuevo espacio covectorial), que es el espacio

(objeto) dual a M (el espacio dual a los vectores), bajo las dos operaciones siguientes:

$$\text{Si } \alpha, \beta \in M^*, \quad v \in M \quad (\alpha + \beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v), \quad \in \mathbb{R}$$

Si multiplicamos un covector y por un vector obtenemos un real

$$\text{Si } c \in \mathbb{R} \quad (c\alpha)(v) := c\alpha(v), \quad \in \mathbb{R}$$

Si multiplicamos un real por un covector y por un vector obtenemos un real

Si evaluamos el covector $\alpha \in M^*$, sobre el vector $v \in M$, el resultado es el número $\alpha v \in \mathbb{R}$ (si evaluamos el covector α que pertenece a los covectores M^* sobre el vector v que pertenece a los vectores M el resultado es un número αv que pertenece a los reales \mathbb{R}).

Por ejemplo: si aplicamos un multímetro (vector) a un campo eléctrico (covector) obtenemos una medición (un real o un número).

La forma exterior o covector mide vectores y el vector mide covectores. Aquí tenemos un ejemplo de dualidad. Para que exista el vector debe de existir el covector y para que exista el covector debe de existir el vector. Otro ejemplo: el tiempo mide el movimiento y el movimiento mide el tiempo (Émil Picard).

Si aplicamos a un vector el producto punto o gravitación obtenemos un covector.

Si M es de dimensión n , entonces también lo es M^* (si los vectores M son de dimensión n , entonces también lo es los covectores M^*). Si f es un campo escalar en el espacio físico, para el punto p en el espacio físico $f_p \in \mathbb{R}$.

Si en cada punto del espacio físico se elige un covector, tenemos un campo covectorial. Si α es un campo covectorial y v es campo vectorial es decir, α_p es covector y v_p es vector, tenemos como resultado que αv es un campo escalar:

$$(\alpha v)_p = \alpha_p v_p \in \mathbb{R}$$

si f es la medida de los puntos en el dominio, df es la medida de las velocidades, muchos campos escalares para construir el campo covectorial.

Las formas diferenciales es solo una y si se descompone tenemos un resultado diferente. [Gra] [Ozi]

El covector describe un movimiento diferente al movimiento rectilíneo, por ejemplo un movimiento ondulatorio.

Si sumamos dos ondas (covectores) $\alpha + \beta$ obtenemos una onda de longitud de onda menor con mayor frecuencia y con más energía. [San]

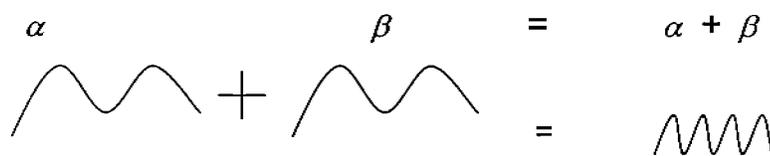


Figura 1.2

Por lo tanto, si la distancia de la longitud de onda es menor y la amplitud es menor, la onda tiene mayor frecuencia y más energía.

Multiplicación de un covector α por un numero - 0.5.

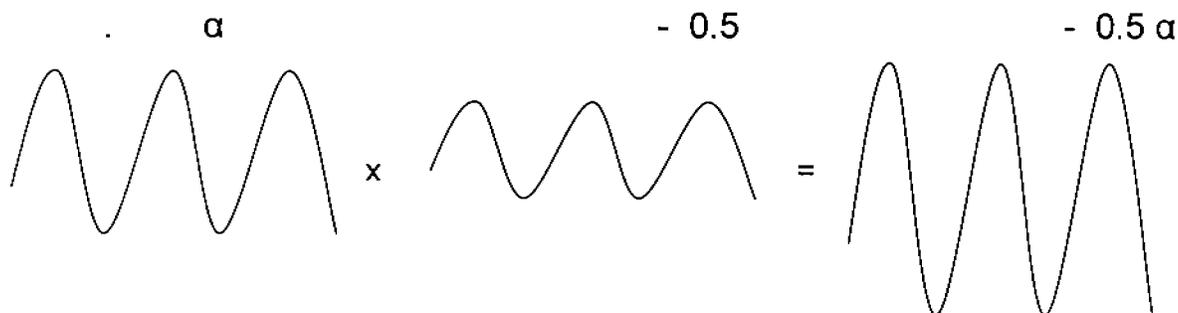


Figura 1.3

El movimiento ondulatorio transporta energía. Este transporte de energía, que puede tener lugar a distancias considerables, se realiza sin *necesidad de desplazamiento* de materia a gran distancia, ya que cada elemento del medio transmite energía a los elementos vecinos. Ejemplos de ondas: ondas electromagnéticas (ondas de radio, ondas de T. V., luz, etc.) Algunas frecuencias de excitación pueden coincidir con las frecuencias naturales (resonancia) y producir respuestas de vibración relativamente muy intensas ; los cuerpos vibrantes son cuerpos sonoros que nos producen ondas de sonido.

Análisis de señales

Para entender los fenómenos físicos naturales y los que el ser humano produce en la vida diaria, nos auxiliamos de diferentes formas para obtenerlo. La adquisición de este conocimiento comienza con la observación de los procesos físicos como por ejemplo una percepción sensorial directa del proceso físico, o de una percepción indirecta a través de un censor, etc.

Este conocimiento puede ser utilizado para mejorar la forma de cómo interactuamos con nuestro medio ambiente. [Dou]

Una vez que el proceso a sido observado, la adquisición de un conocimiento más profundo proviene de otras formas de investigación como la documentación de su acción sobre otros procesos físicos con el fin de alterar sus características, otra forma de investigación más poderosa involucra el desarrollo de una descripción abstracta del proceso físico como el lenguaje matemático que se puede utilizar en la investigación de las propiedades del proceso físico para analizar su representación abstracta. En esta forma de investigación, nuestro entendimiento del proceso físico se desarrolla indirectamente, estudiando las propiedades de la descripción matemática.

En el año de 1748 L. Euler examinó el movimiento de una cuerda vibrante. Si consideramos la deflexión vertical $f_1(x)$ de la cuerda en el tiempo t y a una distancia x a lo largo de la misma, entonces para cualquier tiempo t , los modos normales son funciones senoides de x relacionadas armónicamente.

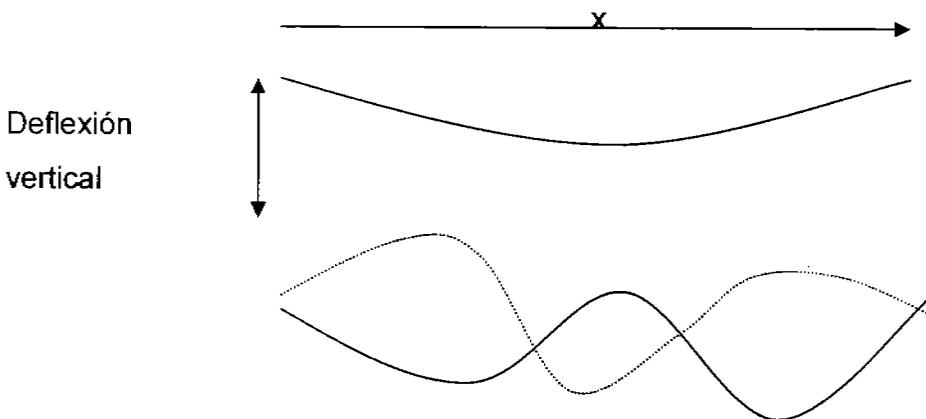


Figura 1.4

Lo que Euler notó fue que si la configuración de una cuerda vibrante en algún punto del tiempo es una combinación lineal de estos modos normales, también lo es su configuración en cualquier tiempo subsiguiente. Demostró que se podía calcular los coeficientes de la combinación lineal para un tiempo posterior.

El movimiento oscilatorio puede repetirse a si mismo regularmente, como en el caso de un balancín de reloj. Cuando el movimiento se repite a intervalos de tiempo τ , se le llama *periódico*. El tiempo de repetición $\tau = 2\pi$ es el período de

la oscilación y su recíproco, $f = \frac{1}{\tau}$ es la *frecuencia*.

Por medio de geometría y trigonometría podemos valorar el movimiento oscilatorio. Dibujando una circunferencia de radio unitario. "Unitario" puede significar 1 pulgada, 1 centímetro o cualquier otra unidad; no importa. En términos de un triángulo rectángulo puede ser considerado una proyección de un punto en un círculo unitario sobre un eje. Al recordar la definición del seno y del coseno de

un ángulo, $\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto - opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto - opuesto}}{1} \Rightarrow \text{sen } \theta = \text{cateto opuesto}$

$\text{cos } \theta = \frac{\text{cateto - adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto - adyacente}}{1} \Rightarrow \text{cos } \theta = \text{cateto adyacente}$

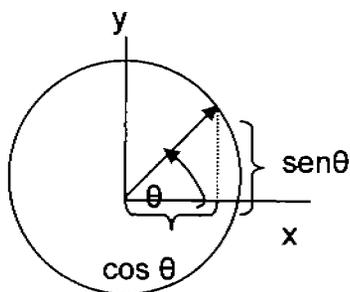


Figura 1.5 Definición del seno y del coseno como proyección del círculo unitario a los ejes x, y

obtenemos las componentes del seno y del coseno sobre los ejes x e y de un punto moviéndose alrededor del círculo unitario a una velocidad constante. La longitud de la hipotenusa es la unidad.

Ondas armónicas

El movimiento oscilatorio más simple es el *movimiento armónico*. Frecuentemente se representa el movimiento armónico como la proyección sobre una línea recta, se puede suponer físicamente como la función de las señales de forma exponencial compleja $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ que describe el movimiento de un punto del borde de una rueda de radio unitario. De la trigonometría (figura 1.6) se ve que la proyección del punto sobre el eje real es $\cos\omega_0 t$ y la parte imaginaria representada por j es $\sin\omega_0 t$. combinándolas se puede obtener la identidad de Euler $e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j \sin\omega_0 t$ [Tho] [Ste]

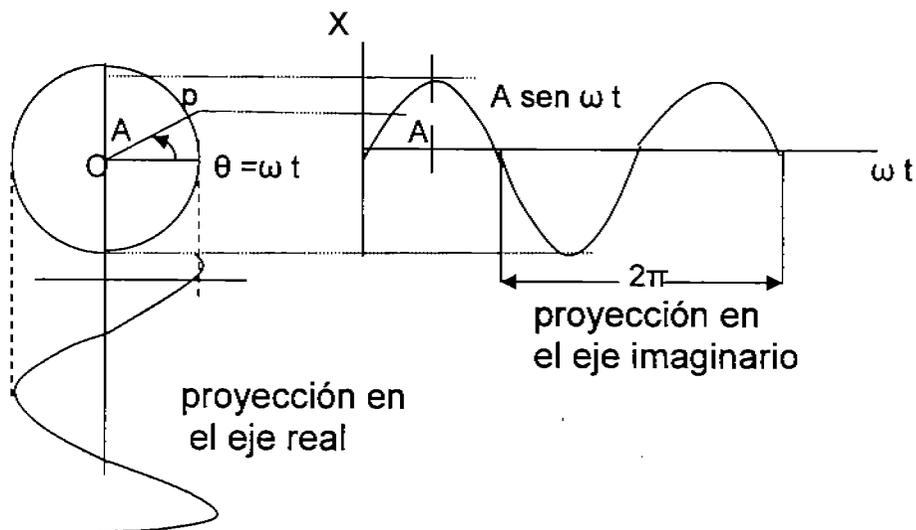


Figura 1. 6 movimiento armónico como proyección de un punto que se mueve en una circunferencia. La rueda gira (convencionalmente) hacia la izquierda con velocidad angular ω_0 radianes por segundo.

Si trazamos una flecha del centro al punto de referencia sobre cada círculo (rueda), puede hallarse la suma de las flechas tal como si fueran cantidades vectoriales. La flecha resultante puede tratarse como un vector y se traslada a un sistema de coordenadas, de forma que su origen coincida con el sistema. Sus proyecciones sobre dicho sistema serán las componentes imaginaria y real de la suma resultante, estas flechas se llaman fasores. Un fador se define en el plano complejo por su componente imaginaria y real, por su magnitud y ángulo de fase. En el plano de coordenadas x, y que llamaremos el plano de fase. Los puntos del plano de fase son llamados puntos de fase.

Un movimiento $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de un punto de la fase en el plano de fase, tal que la velocidad del punto moviéndose en cada momento del tiempo es igual a la velocidad de fase representada por un vector en la ubicación del punto de fase en ese momento. La velocidad rectilínea representada por el vector es tangente a la trayectoria. La imagen de θ es llamada la *curva de fase*. El movimiento del punto de fase en el plano de fase es un movimiento uniforme alrededor de O :

$$y = r_0 \text{sen}(\theta_0 - t), \quad x = r_0 \text{cos}(\theta_0 - t)$$

cada uno de los niveles de energía establecidos en una curva de fase. Los puntos de fase cuyas coordenadas difieren por 2π corresponde a la misma posición. Si ω es la velocidad angular de la línea OP , el desplazamiento X se escribe como

$$X = A \text{sen } \omega t \quad (1.1)$$

La cantidad ω está generalmente en radianes por segundo y se le denomina frecuencia circular.

Como el movimiento se repite cada 2π radianes, tenemos

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f \quad (1.2)$$

en donde τ y f son el periodo y la frecuencia del movimiento armónico, habitualmente medidos en segundos y ciclos por segundo respectivamente. La velocidad y aceleración del movimiento armónico puede simplemente determinarse por diferenciación de la ecuación (1.1).

Utilizando el punto para representar la derivada, tenemos

$$\dot{x} = \omega A \cos \omega t = \omega A \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.3)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \operatorname{sen} \omega t = \omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \pi) \quad (1.4)$$

por lo tanto la velocidad y aceleración son también armónicas con la misma frecuencia de oscilación pero aventajan al desplazamiento en $\frac{\pi}{2}$ y π radianes respectivamente. La ecuación (1.1) y (1.4) revela que

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1.5)$$

de tal forma que en el movimiento armónico la aceleración es proporcional al desplazamiento y está dirigida hacia el origen.

Es frecuente que se presenten vibraciones de diferentes frecuencias simultáneamente. Por ejemplo, la vibración de una cuerda de violín está compuesta de la frecuencia fundamental f y de todos sus armónicos $2f$, $3f$, etc. Otro ejemplo es la vibración libre de un sistema con varios grados de libertad, a la cual contribuyen las vibraciones de cada frecuencia natural.

Tales vibraciones se manifiestan en una forma de onda compleja que se repite periódicamente, como se muestra en la figura 1.7. [Tho]

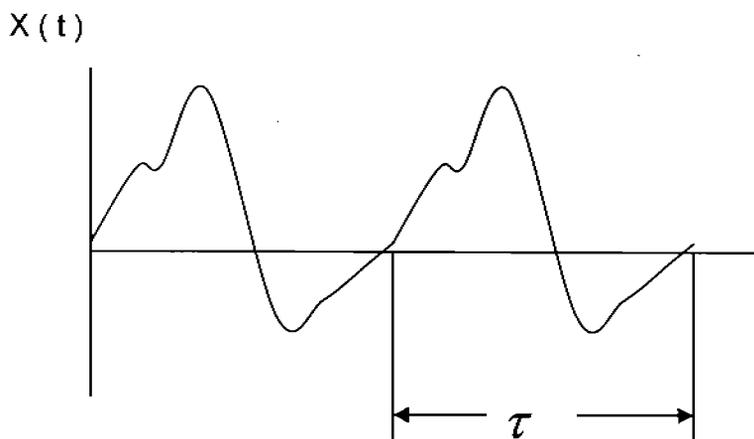


Figura 1.7 movimiento periódico de periodo τ

Los cálculos numéricos se pueden reducir si se advierte que la función $x(t)$ es expresable en términos de funciones pares e impares.

$$X(t) = E(t) + O(t) \quad (1.6)$$

Una función par $E(t)$ es simétrica con respecto al origen, de tal forma que $E(t) = E(-t)$ como sucede por ejemplo con $\cos \omega t = \cos(-\omega t)$.

Una función impar satisface la relación $O(t) = -O(-t)$, como por ejemplo, $\sin \omega t = -\sin(-\omega t)$. La característica que nos permite distinguir el sonido de otro se llama timbre.

El timbre depende de los armónicos que contiene el sonido, así como de sus intensidades relativas y de la forma en que van cambiando de intensidad al producirse el sonido.

Se tienen dos formas de producir timbres interesantes: 1) empezando desde cero y sumando armónicos uno a uno o 2) partiendo de una onda rica de armónicos y restándole.

El 21 de diciembre de 1807 Jean Baptiste Joseph Fourier presentó sus ideas relacionadas con las series trigonométricas. Presentó su trabajo sobre difusión de calor en el instituto de Francia. [OWY]

En su trabajo había encontrado series de senoides relacionadas armónicamente que eran útiles para representar la distribución de la temperatura a través de un cuerpo. Sostenía que cualquier señal periódica se podía representar por tales series, descubrió una forma de armar y desarmar funciones periódicas complicadas, entre ellas las que sirven para describir las ondas sonoras. El método de Fourier permite considerar a las ondas complicadas como superposiciones, o sumas de ondas senoides simples, llamadas *armónicos*. Toda onda sonora se puede analizar (desarmar) o sintetizar (armar) en términos de tonos puros. Los tonos puros, los cuales son representados por ondas senoides, son muy desagradables al oído (el desagradable tono de marcar el teléfono es aproximadamente senoide).

Los sonidos agradables e interesantes son mucho más complicados, los argumentos matemáticos de Fourier eran aún imprecisos, y no fue sino hasta 1829 que P. L. Dirichlet proporcionó las condiciones precisas bajo las cuales una señal periódica se puede representar con una serie de Fourier.

Fourier no contribuyó en realidad a la teoría matemática de las series de Fourier. Sin embargo, si tuvo la perspicacia para ver el potencial de esta representación mediante series. Fourier obtuvo una representación para señales no periódicas, como integrales ponderadas de senoides las cuales no están relacionadas armónicamente. [MeD]

Las series exponenciales de Fourier consiste de una suma de términos exponenciales complejos, cada uno con su propia magnitud, fase y velocidad angular (frecuencia) , por lo tanto, la suma de fasores puede describir los valores instantáneos de señales complejas utilizando la representación en serie exponencial de Fourier de una función $f(t)$ en terminos de series infinitas de exponenciales complejos que rotan a múltiplos enteros de π radianes por segundo cada termino de la serie es un fador y los coeficientes complejos los F_n representan el ángulo de inicio y la magnitud de cada fador. Se pueden sumar utilizando la regla de la suma de los vectores y el resultado será la amplitud y la fase complejas instantáneas de la función original. El factor $(-j)$ se inicia en el eje imaginario negativo por lo que sus proyecciones sobre el eje real comienzan en cero. Por comodidad todo se gira 90° y se toma la proyección sobre el eje imaginario

Se le llama representación de una función en serie de Fourier a la representación de una función en un determinado intervalo mediante una combinación lineal de funciones mutuamente ortogonales. Existe, sin embargo, un gran número de conjuntos de funciones ortogonales y, por consiguiente, se puede representar una función dada en términos de diferentes conjuntos de funciones ortogonales.

Cada conjunto de funciones ortogonales corresponde a un sistema de coordenadas.

Para obtener un conjunto completo debemos agregar funciones coseno así como funciones seno. El conjunto de funciones que contiene un grupo $\cos(n\omega_0 t)$ y otro $\sin(n\omega_0 t)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) forma un conjunto ortogonal completo.

Cualquier función $f(t)$ puede representarse en términos de estas funciones

en cualquier intervalo $(t_0, t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0})$. Así

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t + \dots + b_n \sin n\omega_0 t + \dots$$

$$(t_0 < t < t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}), \text{ por conveniencia, } \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ por } T$$

la ecuación anterior queda entonces como

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (t_0 < t < t_0 + T)$$

la ecuación es la representación de $f(t)$ por medio de la serie trigonométrica de Fourier en el intervalo $(t_0, t_0 + T)$. Las constantes a_n y b_n están dadas por

$$a_n = \frac{\int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) \cos n\omega_0 t dt}{\int_{t_0}^{(t_0+T)} \cos^2 n\omega_0 t dt} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{\int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) \sin n\omega_0 t dt}{\int_{t_0}^{(t_0+T)} \sin^2 n\omega_0 t dt}$$

si ponemos $n = 0$ en la ecuación de a_n obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) dt \quad (1.7)$$

También tenemos que

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n \omega_0 t dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \text{sen}^2 n \omega_0 t dt = \frac{T}{2}$$

por consiguiente

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n \omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \text{senn} \omega_0 t dt$$

a_0 es el valor promedio de $f(t)$ en el intervalo $(t_0 < t < t_0 + T)$ la serie trigonométrica de $f(t)$ tiene la siguiente representación compacta

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (1.8)$$

en donde

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{y} \quad \phi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

el desarrollo en serie de Fourier de una función periódica equivale realmente a la transformación de la función en términos de sus componentes de diferentes frecuencias. Una función periódica con periodo T tiene componentes de frecuencias angulares $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0$, etc. En donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Si se especifica $f(t)$, se puede encontrar su espectro. Inversamente, si se conoce el espectro, se puede encontrar la función periódica $f(t)$ correspondiente.

Por lo que, tenemos dos formas de especificar a la función $f(t)$: la representación en el dominio del tiempo, con la cual $f(t)$ se expresa como función del tiempo, y la representación en el dominio de la frecuencia, con la cual se especifica el espectro (es decir, las amplitudes de las diferentes componentes de la frecuencia). En el espectro existe únicamente en $\omega = \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$, etc. El espectro no es una curva continua, sino que existe solamente en algunos valores discretos de ω . Por lo que es un *espectro discreto* y a veces se llama *espectro de líneas*. Se puede representar gráficamente al espectro al trazar líneas verticales en $\omega = \omega_0, 2\omega_0, \dots$, etc. Con alturas proporcionales a la amplitud de la componente correspondiente de frecuencia.

En una gráfica, el espectro de frecuencias discreto aparece como una serie de líneas verticales igualmente espaciadas, con alturas proporcionales a la amplitud de la componente correspondiente de frecuencia. Se puede utilizar cualquiera de las dos series, la trigonométrica o la exponencial, para representar el espectro. Sin embargo, para nuestros fines, resulta más útil la forma exponencial.

Señal periódica

La forma más simple del perfil de una onda es del tipo seno o coseno, que se conocen como ondas senoides, ondas armónicas simples o como ondas armónicas. Es importante su estudio porque según el desarrollo en serie de Fourier cualquier onda aunque no fuera senoide podría sintetizarse por superposición de ondas armónicas. Una señal periódica $X(t)$ es una función que satisface la condición [Hav]

$$X(t) = X(t + T) \text{ para todo } t \quad (1.9)$$

Donde T es una constante positiva. Si esta condición se satisface para $T = T_0$, por ejemplo, entonces también se satisface para $T = 2T_0, 3T_0, 4T_0, \dots$

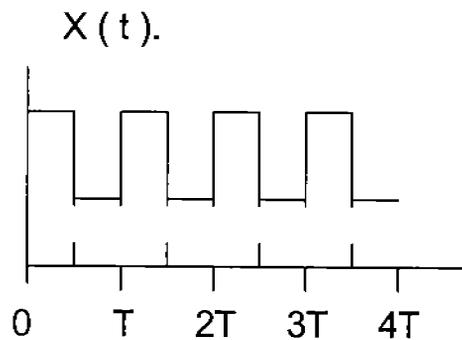


Figura 1.20 onda cuadrada periódica

En esta serie la función periódica se expresa como suma de funciones exponenciales de frecuencia $0, \pm \omega_0, \pm 2 \omega_0, \dots$, etc. No es difícil entender el significado de las frecuencias negativas. Las dos señales $e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cos \omega t$ oscilan a la frecuencia ω . Los cuales se les puede ver como dos fasores que giran en direcciones opuestas y que, cuando se suman, producen una función real de tiempo. Así,

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cos \omega t$$

En una función periódica de periodo T , la serie exponencial está dada por

$$F(t) = F_0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots + F_n e^{jn\omega_0 t} + \dots$$

$$+ F_{-1} e^{-j\omega_0 t} + F_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \dots + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \dots$$

Las frecuencias $0, \omega_0, -\omega_0, 2\omega_0, -2\omega_0, \dots, n\omega_0, -n\omega_0, \dots$, etc.

Y las amplitudes de las componentes son respectivamente

$$F_0, F_1, F_{-1}, F_2, F_{-2}, \dots, F_n, F_{-n}, \dots, \text{etc.}$$

Las amplitudes F_n suelen ser complejas y, por lo tanto se les describe por su magnitud y fase. Por consiguiente, en general, se requiere de dos espectros para la representación de una función periódica en el dominio de la frecuencia: el espectro de magnitud y el espectro de fase; sin embargo, en la mayoría de los casos, las amplitudes de las componentes de la frecuencia son o bien reales o imaginarias, de tal forma que se puede describir la función mediante un sólo espectro.

Señal no periódica

El valor más pequeño que cumple la ecuación (1.9) se llama periodo fundamental de $X(t)$. Por lo tanto el periodo fundamental T define la duración de un ciclo completo de cualquier señal $X(t)$ para la cual no hay valor de T que cumpla la condición de la ecuación (1.9) recibe el nombre de **señal no periódica** (un solo pulso que no se vuelve a repetir). [Hav]

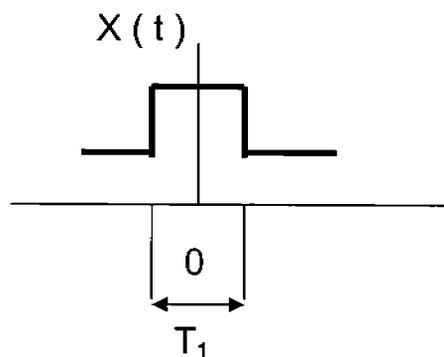


Figura 1.21 Onda no periódica, pulso rectangular con duración T_1 (un solo pulso)

La Transformada de Fourier

Una función periódica, se puede extender la representación a todo el intervalo $(-\infty, \infty)$. Sin embargo conviene representar cualquier función, periódica o no, en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$ en términos de señales exponenciales. Consideremos la función $f(t)$ que se muestra en la figura. Se requiere representar a esa función como suma de funciones exponenciales en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$. [STr] [Lat]

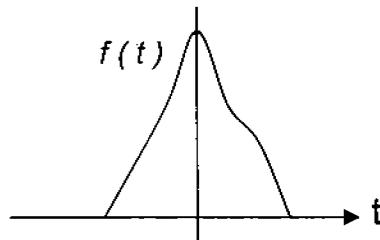


Figura 1.15

Con ese fin construimos una nueva función periódica $f_r(t)$ con periodo T en la que la función $f(t)$ se repite cada T segundos como nos indica la siguiente figura (1.16).

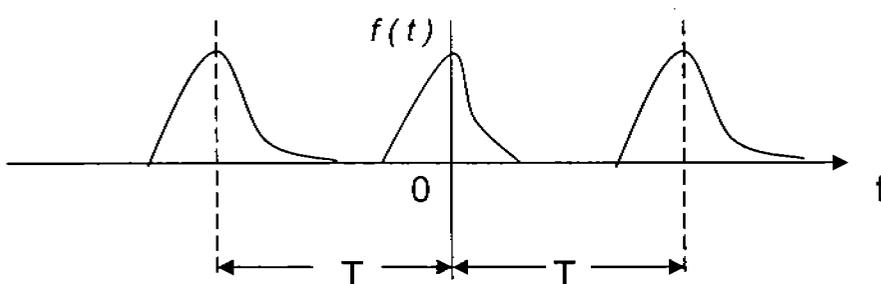


Figura 1.16

El periodo T se hace lo suficientemente grande para que no se traslapen los pulsos de la forma $f(t)$. La nueva función $f_T(t)$ es periódica y se le puede representar por una serie exponencial de Fourier. En el limite, suponemos que T tiende a infinito, entonces los pulsos de la función periódica se repiten después de un intervalo infinito.

Por lo tanto, en el limite $T \rightarrow \infty$, $f_T(t)$ y $f(t)$ son idénticas. Es decir $\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t)$. La serie de Fourier que representa a $f_T(t)$ en todo el intervalo también representará a $f(t)$ en todo el intervalo si hacemos $T = \infty$ en la serie. Podemos expresar la serie exponencial de Fourier de $f_T(t)$ como

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{en donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$y \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.10)$$

El término F_n representa la amplitud de la componente de la frecuencia $n\omega_0$. A continuación si suponemos que T aumenta, entonces ω_0 disminuye y el espectro se vuelve más denso como se ve de la ecuación, también se reduce la amplitud de cada componente. La forma del espectro de la frecuencia no cambia. En el limite, cuando $T = \infty$, la magnitud de cada componente se vuelve infinitesimalmente pequeña, pero también existe un número infinito de componentes espectrales.

El espectro existe en cualquier valor de ω y ya no es un espectro discreto sino función continua de ω . Para aclararlo haremos un cambio de notación. Sea $n\omega_0 = \omega_n$ entonces, F_n es función de ω_n y denotaremos F_n mediante $F_n(\omega_n)$.

Además, sea
$$T F_n(\omega_n) = F(\omega_n) \quad (1.11)$$

Entonces
$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \quad (1.12)$$

y a partir de las ecuaciones (1.11) y (1.12) obtenemos

$$F(\omega_n) = T F_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (1.13)$$

si sustituimos el valor de $T = \frac{1}{2\pi}$ en la ecuación (1.13) obtenemos

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \omega_0 \quad (1.14)$$

la ecuación (1.14) nos enseña que se puede expresar $f_T(t)$ como suma de señales exponenciales de frecuencias $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots$, etc. La amplitud de la componente de frecuencia ω_n es $F(\omega_n) \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)$ (esto es igual a F_n). Por lo tanto la amplitud de dicha componente no es igual sino proporcional a $F(\omega_n)$. Interpretaremos ahora gráficamente la ecuación (1.14) que representa una suma discreta de componentes de frecuencia o, una suma de componentes discreta de frecuencia.

En general la cantidad $F(\omega_n) e^{j\omega_n t}$ es compleja y por lo tanto, en su representación gráfica estricta se necesitan dos diagramas (uno real y otro imaginario o sea diagramas de magnitud y fase). Si suponemos que la cantidad $F(\omega_n) e^{j\omega_n t}$ es real, en la figura siguiente muestra el diagrama de esta cantidad como función de ω .

La función existe solamente en valores discretos de ω , es decir, en $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, etc. En donde $\omega_n = n \omega_0$.

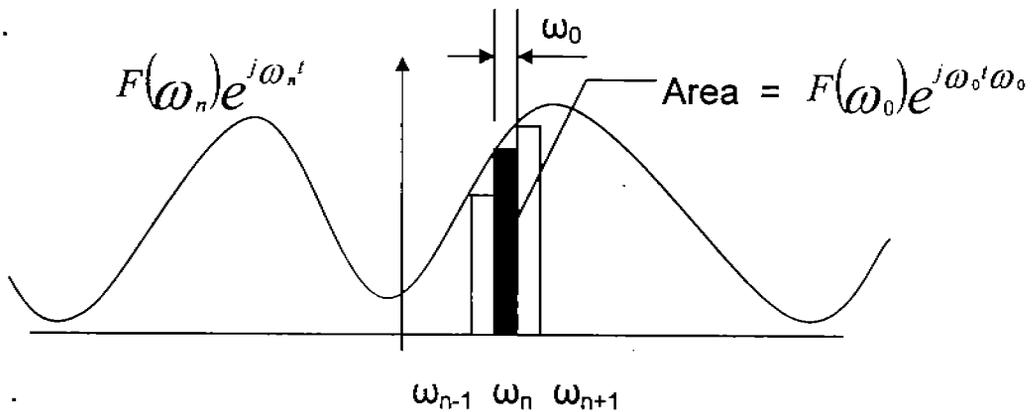


Figura 1.17

La distancia que separa cada componente de frecuencia es ω_0 . Por lo tanto, el área del rectángulo sombreado de la figura es $F(\omega_n)e^{jn\omega_n t\omega_0}$.

La ecuación (1.14) representa la suma de las áreas bajo todos los rectángulos que corresponden a valores de n desde $n = -\infty$ hasta ∞ .

La suma de las áreas rectangulares representa aproximadamente el área bajo la curva de la figura. La aproximación se mejora cuando disminuye el valor de ω_0 . En el límite cuando T es infinitesimalmente pequeño de modo que se puede representar el movimiento del vector como $d\omega$.

La suma discreta de la ecuación (1.14) o la suma de todos los vectores en movimiento ω y está dada por $F(\omega)e^{j\omega t}$. Además, cuando T es infinitesimalmente pequeño, la función $f_T(t)$ es $f(t)$ y las ecuaciones (1.13) y (1.14) se transforman en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.15)$$

en donde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.16)$$

Las ecuaciones representan una función no periódica $f(t)$ en términos de funciones exponenciales en todo el intervalo $(-\infty < t < \infty)$. La ecuación (1.15) representa $f(t)$ como suma continua de funciones exponenciales con frecuencias comprendidas en el intervalo $(-\infty < \omega < \infty)$. La amplitud de cualquier componente es proporcional a $F(\omega)$. Por lo tanto $F(\omega)$ representa el espectro de frecuencia $f(t)$ y se le llama función de densidad espectral. En general las ecuaciones (1.15) y (1.16) se conocen como par de transformadas de Fourier. Se dice que la ecuación (1.16) es la transformada directa de Fourier de $f(t)$ y la ecuación (1.15) la transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$.

Representación de una señal en el dominio del tiempo y Frecuencia

La transformada de Fourier es un instrumento en el cual se expresa una señal dada en términos de sus componentes exponenciales. La función $F(\omega)$ es la transformada directa de Fourier de $f(t)$ y representa las amplitudes relativas de las diferentes componentes. Por lo tanto, $F(\omega)$ es la representación de $f(t)$ en el dominio de la frecuencia. La representación en el dominio del tiempo especifica la función en cada instante del tiempo, mientras que la representación en el dominio de la frecuencia especifica las amplitudes relativas de las componentes de frecuencia de la función. Ambas representaciones especifican en forma única la función. [Lat]

En general, la función $F(\omega)$ es compleja y se necesitan dos diagramas para su representación gráfica completa.

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

$F(\omega)$ se puede representar mediante un diagrama de magnitudes $|F(\omega)|$ y un diagrama de fase $\theta(\omega)$. En muchos casos, $F(\omega)$ es sólo real o imaginaria y entonces sólo se requiere de un diagrama. Demostraremos a continuación que, cuando $f(t)$ es función real $F^*(\omega) = F(-\omega)$

tenemos
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

De la misma forma
$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt$$

De la ecuación anterior, si $f(t)$ es función real de t , entonces $F^*(\omega) = F(-\omega)$

Por lo tanto, si $F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$

entonces $F(-\omega) = |F(\omega)| e^{-j\theta(\omega)}$

A partir de esta ecuación vemos que el espectro de magnitud $|F(\omega)|$ es función par de ω y del espectro de fase $\theta(\omega)$ en función impar de ω .

De la ecuación (1.16), que define la transformada de Fourier , claramente se tiene de que si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ es finita, entonces existe la transformada de Fourier . Pero, como la magnitud de $e^{-j\omega t}$ es la unidad, una condición suficiente para la existencia de la transformada de Fourier de $f(t)$ es de que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ sea finita . Sin embargo, si se consideran funciones singulares (por ejemplo, funciones impulso), entonces esta condición de absoluta integración es condición suficiente pero no es siempre necesaria, ya que existen funciones que no son absolutamente integrables, aunque si tienen transformadas.

Las funciones como $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $u(t)$, etc. No satisfacen la condición anterior y, en un sentido estricto, no poseen transformada de Fourier. Sin embargo, esas funciones si tienen transformada de Fourier en el limite. Se puede suponer que la función $\sin \omega t$ existe únicamente en el intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$. En estas condiciones la función posee transformada de Fourier, siempre y cuando T sea finito. [BAT] [CrR]

Algunas propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad de desplazamiento en el tiempo

Si $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

entonces $f(t - t_0) \longleftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$ (1.17)

demostración

$$F[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$$

Sea

$$t - t_0 = x$$

entonces $F[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x + t_0)} dx$

El teorema establece que, si se desplaza una función en el dominio del tiempo en la cantidad de t_0 segundos, entonces no se altera su espectro de magnitud $|F(\omega)|$, pero el espectro de fase sufre un cambio de $-\omega t_0$. Por lo tanto, un desplazamiento de t_0 en el dominio del tiempo es equivalente a una desviación de fase de $-\omega t_0$, es decir, a la multiplicación por $e^{-j\omega t_0}$ en el dominio de la frecuencia.

El Teorema de la Convolución

Dadas dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, podemos formar la integral siguiente:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (1.18)$$

esta integral llamada integral de convolución, define la convolución de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, y también se expresa simbólicamente como

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad (1.19)$$

Se tienen dos teoremas: la convolución en el tiempo y la convolución en la frecuencia

Teorema de la convolución en el tiempo

Si

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad \text{y} \quad g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \longleftrightarrow F(\omega) G(\omega) \quad (1.20)$$

es decir

$$f(t) * g(t) \longleftrightarrow F(\omega) G(\omega) \quad (1.21)$$

demostración
$$F [f(t) * g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} g(t - \tau) dt \right] d\tau$$

por la propiedad de desplazamiento en el tiempo de la ecuación (1.19), la integral entre paréntesis del segundo miembro es igual a $G(\omega) e^{-j\omega\tau}$, por lo que

$$F [f(t) * g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} G(\omega) d\tau$$

$$= F(\omega)G(\omega)$$

Teorema de la convolución en la frecuencia

Si

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad \text{y} \quad g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$$

entonces

$$f(t) g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) G(\omega - u) du \quad (1.22)$$

o sea

$$f(t) g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * G(\omega)] \quad (1.23)$$

Este teorema se demuestra de la misma forma que el anterior, debido a la simetría entre las transformadas directa e inversa de Fourier.

La convolución de dos funciones en el dominio del tiempo equivale a la multiplicación de sus espectros en el dominio de la frecuencia y que la multiplicación de dos funciones en el dominio del tiempo equivale a la convolución de sus espectros en el dominio de la frecuencia

La forma de obtener la propiedad de la transformada de Fourier con la respuesta al impulso del sistema, es simplemente el cambio de amplitud compleja experimentado por una exponencial compleja de frecuencia ω , conforme pasa a través de un sistema lineal invariante en el tiempo. Si el sistema es estable, entonces, la respuesta al impulso es absolutamente integrable. Esto es, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$. Sin embargo, si un sistema es inestable, esto es, si, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = \infty$, entonces, la transformada de Fourier no existe y en este caso la respuesta del sistema a una entrada senoide es infinita. Por lo tanto, al utilizar el análisis de Fourier para el estudio de sistemas, estaremos restringiéndonos a sistemas con respuesta al impulso que posean transformadas de Fourier

Algunas relaciones de la convolución

A continuación se presentan algunas leyes del álgebra de la convolución que sigue lineamientos similares a los de la multiplicación ordinaria, operación sugerida por su representación simbólica. [Lat]

Ley conmutativa

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (1.24)$$

la relación se demuestra de la siguiente forma

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

al sustituir la variable τ por $t-x$, tenemos

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \\ &= g(t) * f(t) \end{aligned}$$

ley distributiva

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t) \quad (1.25)$$

la demostración es obvia

ley asociativa

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) \quad (1.30)$$

la ley se deriva del teorema de la convolución y del hecho de que

$$F(\omega)[G(\omega)H(\omega)] = [F(\omega)G(\omega)]H(\omega)$$

Propiedad de simetría

Existe cierta simetría en las ecuaciones en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Esto se puede ver de las ecuaciones que definen a la transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

y (1.31)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

por lo tanto se refleja la misma simetría en ambas propiedades. Por ejemplo, el efecto en el dominio de la frecuencia , causado por una diferenciación en el dominio del tiempo, se parece al efecto en el dominio del tiempo, causado por una diferenciación en el dominio de la frecuencia. Por conveniencia, denotaremos la correspondencia entre ambos dominios por una flecha bi-direccional en donde $F(\omega)$ es la transformada directa de Fourier de $f(t)$ y que $f(t)$ es la transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$ como se indica en la ecuación (1.32)

Si
$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

Entonces
$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (1.32)$$

Demostración de la ecuación (1.31) obtenemos que

$$2 \pi f (- t) = \int_{-\infty}^{\infty} F (\omega) e^{-j \omega t} d \omega$$

en esta integral ω es una variable simbólica la podemos sustituir por cualquier otra variable x . Por lo tanto

$$2 \pi f (- t) = \int_{-\infty}^{\infty} F (x) e^{-j x t} dx$$

entonces

$$2 \pi f (- \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F (x) e^{-j x t} dx$$

de la misma forma, sustituyendo la variable simbólica x por otra variable t , obtenemos

$$2 \pi f (- \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F (t) e^{-j \omega t} dt$$

$$= F [F(t)]$$

así,

$$F(t) \longleftrightarrow 2 \pi f (- \omega) \quad (1.33)$$

se ve claramente la propiedad de simetría cuando $f(t)$ es una función par

En este caso, $f(-\omega) = f(\omega)$ y la ecuación (1.32) se reduce a

$$F(t) \longleftrightarrow 2 \pi f (\omega)$$

En la figura 1.18 se puede ver que la transformada de Fourier de una función pulso rectangular es una función de muestreo y que la transformada de Fourier de una función de muestreo es una función pulso rectangular.

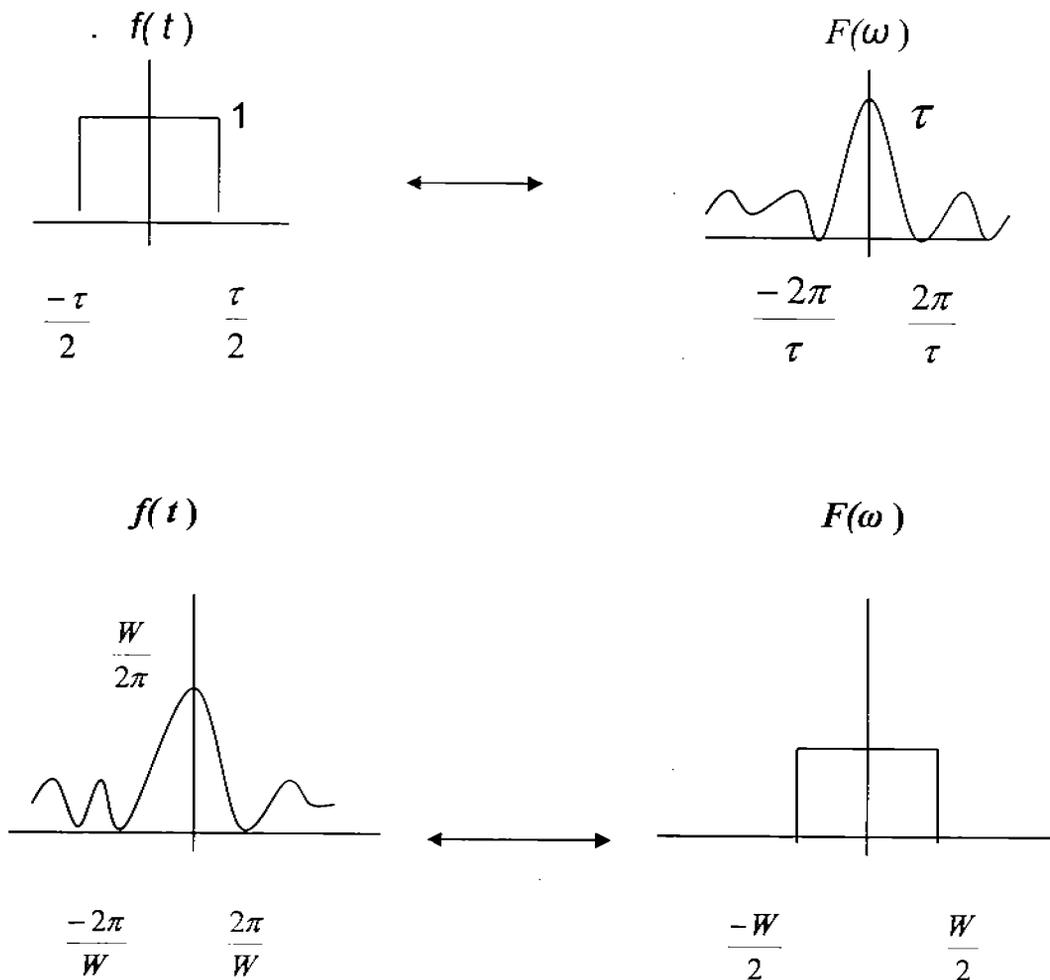


Figura 1.18 propiedad de simetría de la transformada de Fourier

La propiedad de simetría se cumple en todas las funciones $f(t)$ pares.

Si $f(t)$ no es función par, entonces la simetría no es perfecta y sólo existe en cierto grado, como se ve a partir de la ecuación (1.32).

Teorema de muestreo uniforme

Especifica una señal dada mediante muestras suyas tomadas a intervalos uniformes de $\frac{1}{2} f_m$ (frecuencia de muestreo) segundos. Si se divide el intervalo de tiempo de una señal limitada en banda en partes iguales para tomar por abajo de los intervalos tales que cada uno tenga una duración de T segundos, donde T es menor que $\frac{1}{2} f_m$ y si se toma una muestra instantánea de cada sub-intervalo, entonces el conocimiento de la magnitud instantánea de cada muestra y de los instantes en que se toma la muestra de cada sub-intervalo nos da toda la información de la señal original. Esto implica que, si la transformada de Fourier de $f(t)$ vale cero fuera de determinada frecuencia $\omega_m = 2\pi f_m$, entonces toda la información acerca de $f(t)$ queda contenida en sus muestras uniformemente espaciadas a intervalos menores de $\frac{1}{2} f_m$ segundos. Esto se ilustra en la siguiente figura 1.19 [Lat]

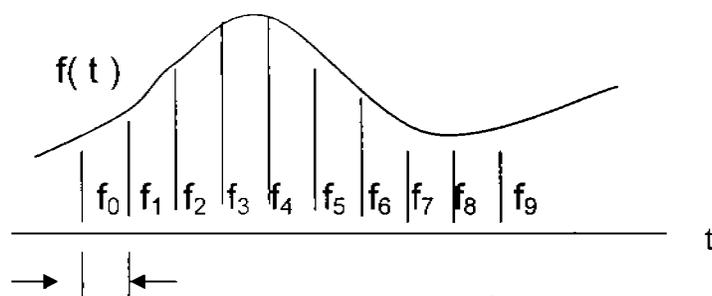


Figura 1.19

La rapidez de muestreo debe ser por lo menos el doble de la máxima frecuencia f_m presente en el espectro de $f(t)$.

O dicho en otras palabras, se debe muestrear la señal por lo menos dos veces en cada periodo o ciclo de su componente de frecuencia más alta. El teorema de muestreo se puede demostrar con la ayuda del teorema de la convolución en la frecuencia. Considerando una señal $f(t)$ limitada en banda que no contenga componentes espectrales mayores de f_m Hz. Esto significa que $F(\omega)$, la transformada de Fourier de $f(t)$, es cero cuando $|\omega| > \omega_m$, ($\omega_m = 2\pi f_m$). Si suponemos que multiplicamos la función $f(t)$ por una función impulso periódica $\delta_T(t)$. [Lat]

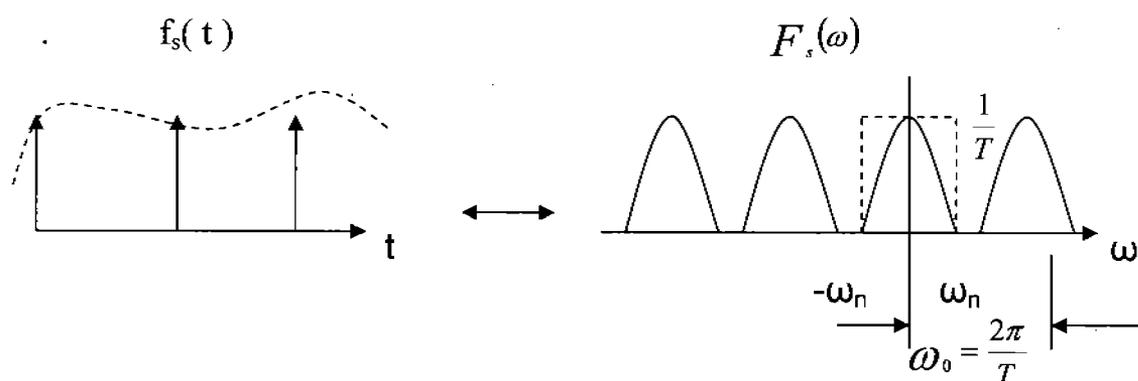


Figura 1.20

La función producto es una sucesión de impulsos localizados a intervalos regulares de T segundos con intensidades iguales a los valores de $f(t)$ en los instantes correspondientes. El producto $f(t)\delta_T(t)$ representa la función $f(t)$ muestreada a intervalos uniformes de T segundos. Denotaremos la función muestreada por $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$ como se muestra en la figura 1.20 el espectro de frecuencia de $f(t)$ es $F(\omega)$.

Los impulsos están separados por un intervalo uniforme de $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\delta_T(t) \longleftrightarrow \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$

la transformada de Fourier de $f(t)\delta_T(t)$ estará dada de acuerdo con el teorema de la convolución en la frecuencia, por la convolución de $F(\omega)$ con $\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$.

$$f_s(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)]$$

al sustituir $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, obtenemos

$$f_s(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T} [F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)]$$

para realizar la operación de convolución, desplazamos todo el tren de impulsos $[\delta_{\omega_0}(\omega)]$ en la dirección positiva de ω . Cuando cada impulso pasa por $F(\omega)$, reproduce la misma $F(\omega)$ como los impulsos están a intervalos de $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, la operación de convolución resulta en que se repita $F(\omega)$ cada ω_0 radianes por segundo.

La función de densidad espectral correspondiente a $f_s(t)$ es, por lo tanto, la misma $F(\omega)$ pero repetida periódicamente cada ω_0 radianes por segundo.

$F(\omega)$ se repetirá periódicamente sin traslaparse siempre que $\omega_0 \geq 2\omega_m$, o sea $\frac{2\pi}{T} \geq 2(2\pi f_m)$ es decir $T \leq \frac{1}{2f_m}$ por consiguiente, cuando muestreemos la

función $f(t)$ a intervalos uniformes de $\frac{1}{2f_m}$ segundos, la función de densidad espectral de $f_s(t)$ será una replica periódica de $F(\omega)$ y, por lo tanto, contendrá toda la información acerca de $f(t)$. La multiplicación de una señal por otra puede considerarse como el empleo de una señal para escalar o *modular* la amplitud de la otra, por lo tanto, la multiplicación de las dos señales se refiere frecuentemente como *modulación de amplitud*.

El análisis de Fourier tiene una seria desventaja. En la transformada al dominio de la frecuencia, la información del tiempo se pierde. Cuando vemos a una transformada de Fourier de una señal, es imposible decir cuando tomo lugar un evento en particular. Si las propiedades de la señal no cambian mucho sobre el tiempo esto es si es que es llamada una señal estacionaria, esta desventaja no es muy importante. Sin embargo, las señales más interesantes contienen numerosas características dinámicas o transitorias: de movimiento, de tendencia, de cambios repentinos y eventos de comienzo y de termino.

Estas características son con frecuencia las partes más importantes de la señal, y el análisis de Fourier no es el adecuado para detectarlo.

La Transformada de Fourier de Tiempo Corto

En un esfuerzo para corregir estas deficiencias, Dennis Gabor (1946) adaptó la transformada de Fourier para analizar solo una pequeña sección del tiempo de la señal, una técnica llamada ventaneando la señal. La adaptación de Gabor, la llamó La Transformada de Fourier de Tiempo-Corto (TFTC), traza una señal en una función de dos dimensiones de tiempo y de frecuencia. [BaB]

La TFTC representa el tipo, de acuerdo entre la base del tiempo y la base frecuencia de la observación de la señal. Proporciona algo de información cuando y a que frecuencia ocurre el evento de una señal acerca de ambas. Sin embargo puedes obtener solo esta información con precisión limitada, y esta precisión es determinada por el tamaño de la ventana. Cuando la TFTC comprime la información entre el tiempo y la frecuencia puede ser provechosa. La desventaja está en que una vez que escoges un tamaño en particular para la ventana del tiempo, esta ventana es la misma para todas las frecuencias.

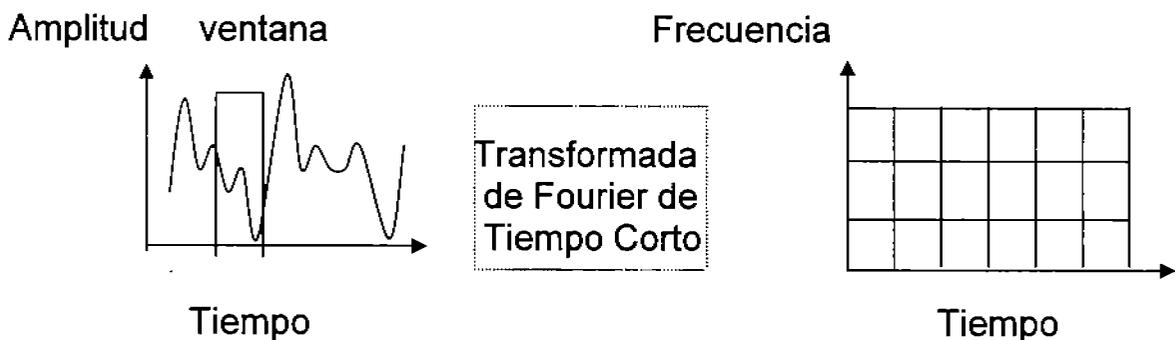


Figura 1.21

Se puede obtener la localización del tiempo haciendo la sustitución del pre-ventaneado de la señal $x(t)$ como se muestra en la figura 1.22 [AuO] [BoT]

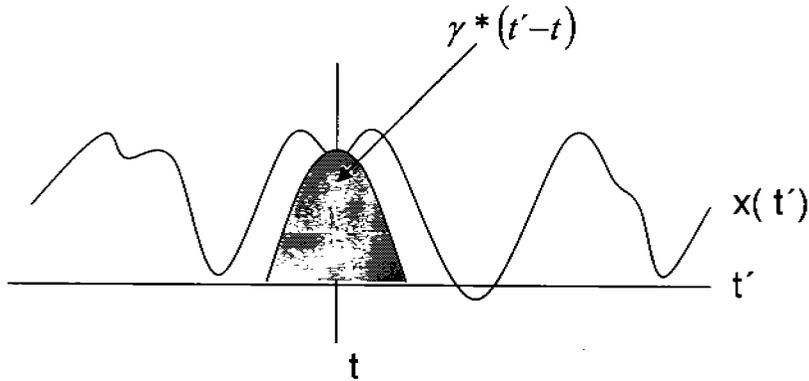


Figura 1.22 La TFTC es un **espectral local** al tiempo t

La Transformada de Fourier de Tiempo Corto es la transformada de Fourier de la señal $x(t')$ multiplicada por el corrimiento de un análisis de ventana $\gamma^*(t'-t)$ (señal impulso). Donde se suprime toda forma de señal afuera de la ventana en la vecindad local alrededor del tiempo t . La TFTC ó espectro de tiempo corto de una señal $x(t)$ esta definida como

$$\text{TFTC}_x^\gamma(tf) = \int [x(t')\gamma^*(t'-t)]e^{-j2\pi ft'} dt' \quad (1.34)$$

La TFTC al tiempo t es la TF de la señal $x(t')$ multiplicada por un cambio de "ventana de análisis" $\gamma^*(t'-t)$ centrada alrededor de t . (todas las integrales van desde $-\infty$ a ∞ . El carácter sobrescrito $*$ denota conjugación compleja).

Relativamente la multiplicación de la ventana corta $\gamma^*(t'-t)$ efectivamente suprime la señal a los lados en la vecindad del tiempo de análisis en el punto $t'=t$. La TFTC es simplemente un “espectral local” de la señal $x(t')$ alrededor del tiempo de análisis t .

Determinación Frecuencia –Tiempo

La TFTC espectral al tiempo t de la señal $x(t')$ pre-ventaneada por la ventana $\gamma^*(t'-t)$ de todos los lineamientos de la señal localizados en el interior de la ventana local de intervalos alrededor del tiempo t , se muestra al tiempo t en la TFTC. Por lo tanto, la buena resolución de tiempo de la TFTC requiere de una ventana corta $\gamma^*(t')$. La buena resolución de la TFTC requiere un análisis de ventana angosta $\gamma^*(t')$. De acuerdo, al principio de incertidumbre prohíbe la existencia de ventanas con duración y ancho de banda arbitrariamente pequeña. De aquí la resolución de la unión de frecuencia – tiempo de la TFTC es limitada esencialmente. Específicamente de esto existe una resolución fundamental de intercambio; mejorando el tiempo de resolución (por utilizar una ventana corta) le resulta en una pérdida de resolución de frecuencia y viceversa. Si la ventana de análisis $\gamma(t)$ es un impulso infinitamente angosto, la TFTC reduce esencialmente a la señal $x(t)$ preservando todas las variaciones de tiempo de la señal pero no proporciona cualquier resolución de frecuencia.

[STr] [FiM]

Expansión de la Señal Frecuencia – Tiempo y síntesis de la TFTC

Si consideramos la representación de una señal $x(t)$ como una superposición (asignando el peso a la combinación lineal) del cambio de la versión frecuencia – tiempo de una señal elemental $g(t)$. [FiM]

$$x(t) = \int t_x(t', f') [g(t-t') e^{j2\pi f' t'}] dt' df' \quad (1.35)$$

Esto puede ser visto como una expansión de la señal $x(t)$ adentro de la “señal base” $g_{t', f'}(t) = g(t-t') e^{j2\pi f' t'}$ de índice continuo por t', f' . Si $g(t)$ se centra alrededor en el dominio del tiempo, $t = 0$ y alrededor en el dominio de la frecuencia $f = 0$, entonces la frecuencia – tiempo de $g(t-t') e^{j2\pi f' t'}$ estará centrada alrededor del punto (t', f') . Por tanto, el coeficiente de la función $t_x(t', f')$ de la “expansión frecuencia – tiempo” la expresamos firmemente como vecindad de la frecuencia – tiempo alrededor del punto (t', f') lo que contribuye a la señal $x(t)$.

Existe la expansión de energía finita para cualquier señal $x(t)$. Además, el coeficiente de la función $t_x(t, f)$ puede ser escogido como la TFTC

$$t_x(t, f) = \text{TFTC}_x^\gamma(t, f) = \int x(t') \gamma^*(t'-t) e^{-j2\pi f t'} dt' \quad (1.36)$$

La TFTC proporciona que el análisis de la ventana $\gamma^*(t)$ sea seleccionada para satisfacer $\int g(t) \gamma^*(t) dt = 1$. Esta no es una condición muy restrictiva, y libremente escogiendo el lado izquierdo, el análisis de la ventana $\gamma^*(t)$ muestra que el coeficiente de expansión de la función $t_x(t, f)$ únicamente no esta definida.

sustituyendo la ecuación (1.36) en la ecuación (1.35) obtenemos la relación

$$x(t) = \int \text{TFTC}_x^\gamma(t', f') g(t-t') e^{j2\pi f' t} dt' df' \quad (1.37)$$

que indica como recupera o “ sintetiza “ la señal $x(t)$ desde la TFTC. Al dar el análisis de ventana $\gamma^*(t)$ se tiene que infinitamente hay muchas “ síntesis de ventana “ $g(t)$ que satisfacen la condición $\int g(t)\gamma^*(t)dt = 1$.

Una ecuación natural selecciona el análisis de ventana y la síntesis de ventana con apropiada normalización $g(t) = \gamma(t)$. Seleccionando otros dos $g(t) = \delta(t)$ y $g(t) = 1$. La implementación de la señal variante - tiempo junto con el dominio de la frecuencia – tiempo depende de la modificación realizada en la TFTC junto con la ventana de análisis $\gamma^*(t)$ y la ventana de síntesis $g(t)$ en donde la modificación de la TFTC es simplemente una multiplicación de la TFTC por alguna señal independiente de una función sólida frecuencia – tiempo.

La TFTC Discreta

Para aplicaciones practicas de la TFTC, es necesario hacer el plano discreto de la frecuencia – tiempo. Consideremos muestras equidistantes de la TFTC de frecuencia – tiempo de una rejilla de puntos (nt, kf) donde $T > 0$ y $F > 0$ son los periodos variables hechos un muestreo para la frecuencia y el tiempo respectivamente n y k son enteros.

$$\text{TFTC}_x^\gamma(nT, kF) = \int x(t')\gamma^*(t'-nT)e^{-j2\pi(kF)t'} dt' \quad (1.38)$$

la versión discreta de la relación (1.36) de la síntesis de la TFTC es

$$x(t) = \sum_n \sum_k TFTC'_x(nT, kF) g(t - nT) e^{j2\pi(kf)t} \quad (1.39)$$

esta relación es valida siempre que los periodos muestreados T y F, el análisis de ventana $\gamma^*(t)$, y la síntesis de ventana $g(t)$ sean escogidas tal que

$$\frac{1}{F} \sum_n g\left(t + k\frac{1}{F} - nT\right) \gamma^*(t - nT) = \delta[k] \quad \text{para todo } t \quad (1.40)$$

con $\delta[k]$ definido como $\delta[0]=1$ y $\delta[k]=0$ para $k \neq 0$. Esta condición esta más lejos de lo restrictivo de la condición $\int g(t)\gamma^*(t)dt = 1$ requerida en el caso continuo.

El calculo para hacer la TFTC discreta, $TFTC'_x(nT, kF)$; para cada análisis de frecuencia $f_k = kF$. Todas las señales son supuestas de tiempo discreto de valores muestreados bajo conversión y hasta la conversión por el factor de modificación de las muestras de la TFTC. El análisis $\gamma^*(-n)$ y la síntesis $g(n)$ pueden ser interpretados como diezmar(disminuir) y una interpolación (inserción) respectivamente.

La síntesis de la relación (1.39) puede ser interpretada como una expansión de la señal $x(t)$ adentro la frecuencia – tiempo de la versión cambiada $g_{nk}(t)$ de una función elementalmente $g(t)$.

$$x(t) = \sum_n \sum_k G_x(n, k) g_{nk}(t) \quad (1.41)$$

con

$$g_{nk}(t) = g(t - nT) e^{j2\pi(kf)t}$$

Esta señal de expansión discreta frecuencia – tiempo es conocida como la Expansión de Gabor . El coeficiente de expansión $G_x(n,k)$ son llamados coeficientes de Gabor y las funciones $g_{nk}(t)$ son llamados abreviaturas de Gabor .

Las abreviaturas estaban originalmente tomadas de la función Gaussiana frecuencia – tiempo de cambio por Gabor porque las señales gaussianas son concentradas máximamente en frecuencia y tiempo. Los coeficientes de Gabor $G_x(n,k)$ pueden ser escogidos para ser las muestras de la TFTC $TFTC_x'(nT, kF)$, estos coeficientes no son en general definidos únicamente por una señal dada. La señal de base $g_{nk}(t)$ puede ser construida tal que ambas están bien localizadas y bien concentradas con respecto a frecuencia y tiempo. La integridad de la base de Gabor garantiza que cualquier señal de energía finita puede ser representada por la combinación lineal de la función de base de Gabor dado en la expansión de Gabor . Una condición necesaria para la integridad de la base de Gabor es de que la $TF \leq 1$: esta condición es un limite de la densidad del " muestreo de rejilla frecuencia – tiempo " empleada. En el caso extremo del "muestreo critico " $TF = 1$.

Señales de energía y señales de potencia

Una *señal de energía* se define como aquella para la cual *la energía total*, cuyo valor está dado por la integral [MeD]

$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.42)$$

es finita.

La energía de una señal se define entonces como el *área* limitada por la gráfica de la magnitud al cuadrado de la señal y el eje del tiempo, y se trata siempre de una cantidad positiva. Las señales con forma de pulsos que tienen duración finita, o que disminuyen exponencialmente hacia cero tienen energía finita.

Si se intentara evaluar la ecuación 1.42 en el caso de una señal periódica o cualquier otra señal que no se reduzca a cero con el tiempo, la energía se acumularía conforme se tomaran en cuenta secciones más y más grandes de la señal y, en el límite, la energía total sería infinita. Es por ello que para tratar estas señales se debe trabajar con la *potencia* de la señal. Para una señal de voltaje $v(t)$, establecido a través de una resistencia R , la *potencia instantánea*

se define como la cantidad $P(t) = \frac{v(t)^2}{R}$ **watts**

La gráfica de la potencia instantánea es positiva en todo punto y puede promediarse en cualquier intervalo de tiempo de interés para obtener la *potencia media* suministrada a la resistencia de carga:

$$P_{prom} = \frac{1}{T_M} \int_{t_1}^{t_1+T_M} P(t) dt = \frac{1}{T_M} \int_{t_1}^{t_1+T_M} \frac{v(t)^2}{R} dt$$

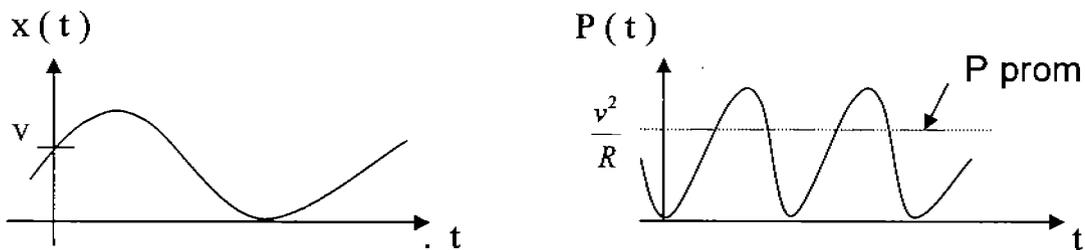


Figura 1.23

La potencia media asociada con una señal representada por una secuencia de N muestras puede aproximarse mediante la suma

$$P_{prom} = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \frac{x^2[n]}{R}$$

Las señales que no se reducen a cero con el tiempo suelen denominarse *señales de potencia* dado que su potencia media es finita incluso en intervalos de medición muy largos. [MeD]

En particular, para las señales periódicas la potencia media se puede calcular promediando $P(t)$ en un intervalo muy largo que contenga muchos periodos de la señal u obteniendo el promedio en un solo periodo.

Entonces, para una señal periódica con periodo T_0 ,

$$P_{prom} = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{|v(t)|^2}{R} dt$$

La distinción entra señales de potencia y señales de energía es importante porque indica las circunstancias en que se pueden utilizar los promedios en el tiempo en lugar de la integración directa en el análisis de señales. Por esta razón, en el estudio de las señales de energía con forma de pulsos requiere de la utilización de integrales de tiempo, mientras que las señales periódicas generalmente suelen asociarse con la obtención de promedios.

Vectores Ortogonales

En el estudio de fenómenos abstractos, las semejanzas resultan muy útiles, en particular si lo que sucede es análogo a algún fenómeno concreto. Por lo que es fácil obtener una idea de lo nuevo que sucede a partir del conocimiento del fenómeno conocido. Para nuestro suceso existe una analogía entre los vectores y las señales. Consideremos dos vectores V_1 y V_2 como los de la figura 1.24. [Lat]

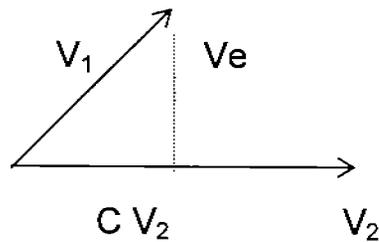


Figura 1.24

$$V_1 = C V_2 + V_e \quad (1.43)$$

Sea $C V_2$ la componente de V_1 sobre V_2 la cual se obtiene geoméricamente al trazar una perpendicular desde el extremo de V_1 hacia el vector V_2 , como se ve en la figura 1.24. El vector V_1 se puede expresar ahora en términos del vector V_2 .

Las figuras 1.25 y 1.26 nos muestran dos entre infinitas posibilidades

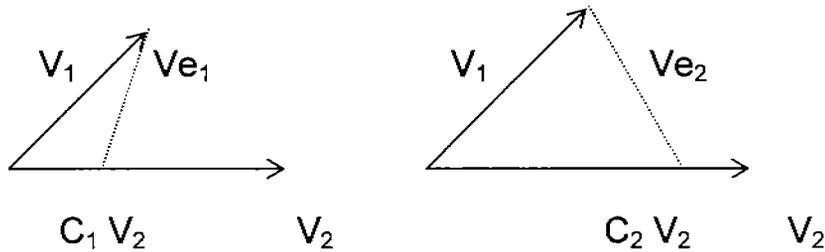


Figura 1.25

Figura 1.26

La figura 1.25 $V_1 = C_1 V_2 + Ve_1$ (1.44)

La figura 1.26 $V_1 = C_2 V_2 + Ve_2$ (1.45)

En cada representación, V_1 queda expresado en términos de V_2 más otro vector, que llamaremos vector error. Si se quiere aproximar el vector V_1 mediante un vector en la dirección de V_2 , el vector Ve representa el error de la aproximación. Por ejemplo, si en la figura 1.24 aproximamos a V_1 mediante $C V_2$, entonces el error de la aproximación es Ve .

Si en la figura 1.25 se aproxima V_1 mediante $C_1 V_2$ entonces el error está dado por Ve_1 y así sucesivamente. La componente del vector V_1 en la dirección del vector V_2 está dada por $C V_2$, en donde C se escoge de forma tal que el vector error sea mínimo.

Entre mayor sea la componente de un vector en la dirección de otro vector, más se parecen las direcciones de ambos vectores y es más pequeño el vector error.

Si la componente del vector V_1 a lo largo de V_2 es CV_2 , entonces la magnitud de C indica la similitud de los dos vectores. Si C es cero, entonces el vector no tiene componente en dirección del otro, y por lo tanto los vectores son perpendiculares entre si.

A estos vectores se les conoce como **vectores ortogonales**. Por lo tanto, los vectores ortogonales son vectores independientes. Si los vectores son ortogonales, entonces el parámetro C es cero

Para nuestra referencia, definimos el producto escalar de los vectores A y B como

$$A \cdot B = A B \cos \theta$$

En donde θ es el ángulo que forman los vectores A y B . De la definición se tiene que

$$A \cdot B = B \cdot A$$

De acuerdo con esta notación

$$\text{la componente de } A \text{ a lo largo de } B = A \cos \theta = \frac{A \cdot B}{B}$$

y

$$\text{la componente de } B \text{ a lo largo de } A = B \cos \theta = \frac{A \cdot B}{A}$$

De igual forma, la componente de V_1 a lo largo de $V_2 = \frac{V_1 \cdot V_2}{V_2}$

$$\text{para } C_1 \text{ o } C_2 = C_1$$

$$= C_{12} V_2$$

por lo tanto

$$C_{12} = \frac{V_1 \cdot V_2}{V_2} = \frac{V_1 \cdot V_2}{V_2 \cdot V_2} \quad (1.46)$$

si V_1 y V_2 son ortogonales, entonces

$$V_1 \cdot V_2 = 0 \quad (1.47)$$

y $C_{12} = 0$

Si dos vectores son *ortogonales* y los dos tienen valor uno se les llama **vectores ortonormales**, en el cual cada vector es diferente de cero, es linealmente independiente. A menudo los términos señal y función se emplean indistintamente.

Una señal es una función del tiempo; sin embargo, existe una diferencia entre las señales y las funciones. Una función $f(t)$ puede ser función multi valuada de la variable t . Pero la señal física siempre es función uní valuada de t . En consecuencia, siempre que se emplee el término función, se entenderá que es una función uní valuada de la variable independiente.

Señales

Consideraremos dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Supóngase que se desea aproximar $f_1(t)$ en términos de $f_2(t)$ en un cierto intervalo ($t_1 < t < t_2$) de la forma siguiente: [Lat]

$$f_1(t) \approx C_{12} f_2(t) \quad \text{en } (t_1 < t < t_2) \quad (1.47)$$

Para seleccionar C_{12} y obtener la mejor aproximación, debemos encontrar un valor para C_{12} tal que el error entre la función real y la aproximada sea mínimo en el intervalo ($t_1 < t < t_2$). Definamos una *función de error* $f_e(t)$:

$$f_e(t) = f_1(t) - C_{12} f_2(t) \quad (1.48)$$

Uno de los criterios para reducir al mínimo el error $f_e(t)$ en el intervalo t_1 a t_2 es el de reducir el valor promedio de $f_e(t)$ en este intervalo; es decir reducir al mínimo la expresión

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12} f_2(t)] dt$$

El criterio resulta inadecuado, pues tal vez, existan errores positivos y negativos grandes que se cancelen entre sí durante el proceso de promediar, de donde se tendrá una indicación falsa de que el error es cero.

Por ejemplo, si aproximamos la función $\sin t$ con una función nula $f(t) = 0$ en el intervalo de 0 a 2π , el error promedio será cero; eso indica incorrectamente que $\sin t$ se puede aproximar a cero en el intervalo de 0 a 2π sin error alguno.

Esta situación se puede corregir si reducimos al mínimo el promedio (o valor medio) del cuadrado del error, en lugar de hacerlo con el promedio del error mismo.

Designemos al promedio de $f e^2(t)$ por ε .

$$\varepsilon = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f e^2(t) dt = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12} f_2(t)]^2 dt \quad (1.49)$$

Para encontrar el valor de C_{12} que reduce ε al mínimo, debemos tener

$$\frac{d\varepsilon}{dC_{12}} = 0 \quad (1.50)$$

es decir,

$$\frac{d}{dC_{12}} \left\{ \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12} f_2(t)]^2 dt \right\} = 0 \quad (1.51)$$

Si cambia el orden de integración y diferenciación, obtenemos:

$$\frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dC_{12}} f_1^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt + 2 C_{12} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \right] = 0 \quad (1.52)$$

Evidentemente, la primera integral es cero; por lo tanto, de la ecuación (1.52) se obtiene:

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \quad (1.53)$$

Obsérvese la similitud entre la ecuación (1.53) y la (1.52) que expresa C_{12} en términos de vectores.

Por analogía con los vectores, decimos que $f_1(t)$ tiene una componente de forma de onda $f_2(t)$ y que la componente tiene una magnitud C_{12} . Si se anula C_{12} , entonces la señal $f_1(t)$ no contiene componente de la señal $f_2(t)$ y decimos que las dos funciones son ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) . Se deduce, por lo tanto, que las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) Si

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0 \quad (1.54)$$

Obsérvese la similitud entre la ecuación (1.54) de funciones ortogonales y la ecuación (1.42) de vectores ortogonales.

Podemos demostrar fácilmente que las funciones $\sin n\omega_0 t$ y $\sin m\omega_0 t$ son ortogonales en cualquier intervalo $(t_0, t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0})$ para valores enteros de n y m .

Considérese la integral I:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} \text{sen } n \omega_0 t \text{sen } m \omega_0 t dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} \frac{1}{2} [\cos(n - m)\omega_0 t - \cos(n + m)\omega_0 t] dt \\
 &= \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{1}{(n - m)} \text{sen}(n - m)\omega_0 t - \frac{1}{n + m} \text{sen}(n + m)\omega_0 t \right]_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}}
 \end{aligned}$$

Como n y m son enteros, $(n - m)$ y $(n + m)$ también lo son.

En ese caso la integral I se vuelve cero. Por lo tanto las dos funciones son ortogonales. En la misma forma, se puede demostrar que $\text{sen } n \omega_0 t$ y $\text{cos } m \omega_0 t$ son funciones ortogonales y que $\text{cos } n \omega_0 t$, $\text{cos } m \omega_0 t$ también son ortogonales entre sí. En el caso de vectores, la ortogonalidad implica que un vector no tiene componentes en la dirección de otro. De igual forma, una función no contiene componente alguna de la forma de la función que es ortogonal a ella. Si intentamos aproximar una función mediante su función ortogonal, el error será más grande que la función original misma, de tal forma que será mejor aproximar a una función con una función nula $f(t) = 0$ en lugar de una función ortogonal a ella.

Por consiguiente el valor de C_{12} es 0 en ese caso, dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son *orto-normales* en el intervalo (t_1, t_2) si son ortogonales y unitarias en amplitud como máximo.

Determinación gráfica de la componente de una función

Si suponemos que se conocen gráficamente dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y que se desea determinar la componente de la forma de onda $f_2(t)$ contenida en la señal $f_1(t)$ en un periodo de $(0, T)$.

Sabemos que la componente está dada por $C_{12} f_2(t)$; es decir, $f_1(t)$ contiene la componente de la función $f_2(t)$ de magnitud C_{12} , dada por:

$$C_{12} = \frac{\int_0^T f_1(t) f_2(t) dt}{\int_0^T f_2^2(t) dt}$$

La integral del numerador de esta ecuación se obtiene al multiplicar las dos funciones y evaluar el área bajo la curva producto.

La integral del denominador se obtiene al encontrar el área bajo la función $[f_2(t)]^2$ de una forma similar como se muestra en la Figura 1.29.

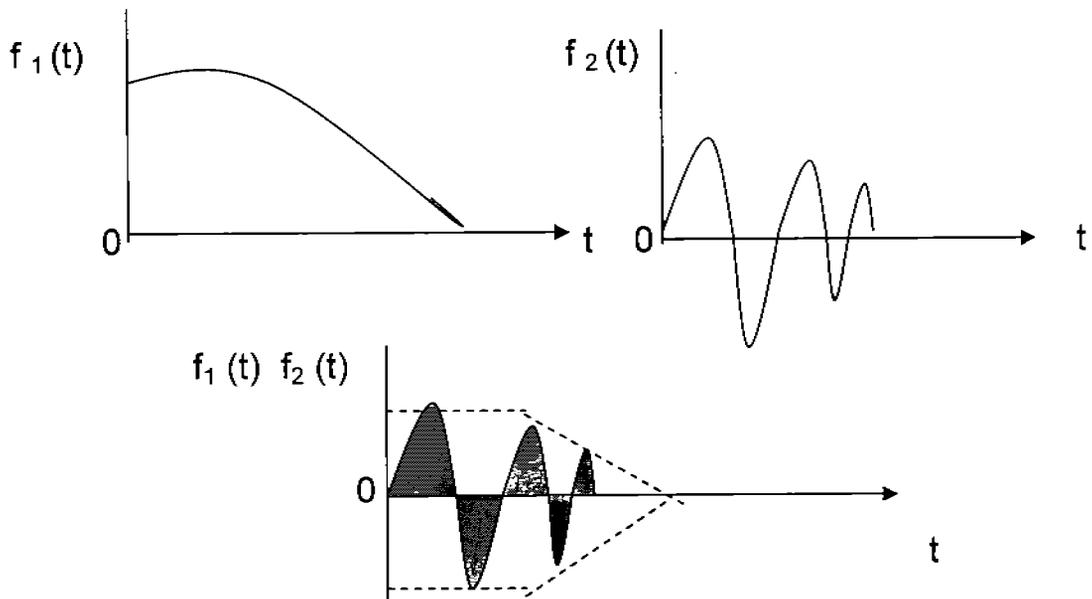


Figura 1.29

Si la función $f_1(t)$ varía mucho más lentamente que $f_2(t)$, el área bajo la curva $f_1(t)f_2(t)$ es muy pequeña ya que las áreas positivas y negativas son aproximadamente iguales y tienden a cancelarse entre sí. En consecuencia, $f_1(t)$ contiene una pequeña componente de $f_2(t)$. [Lat]

Si la función $f_1(t)$ varía aproximadamente con la misma rapidez que $f_2(t)$, entonces el área bajo la curva producto $f_1(t) f_2(t)$ es mucho mayor y por lo tanto $f_1(t)$ contiene una componente grande de la función $f_2(t)$ como se muestra en la la Figura 1.30

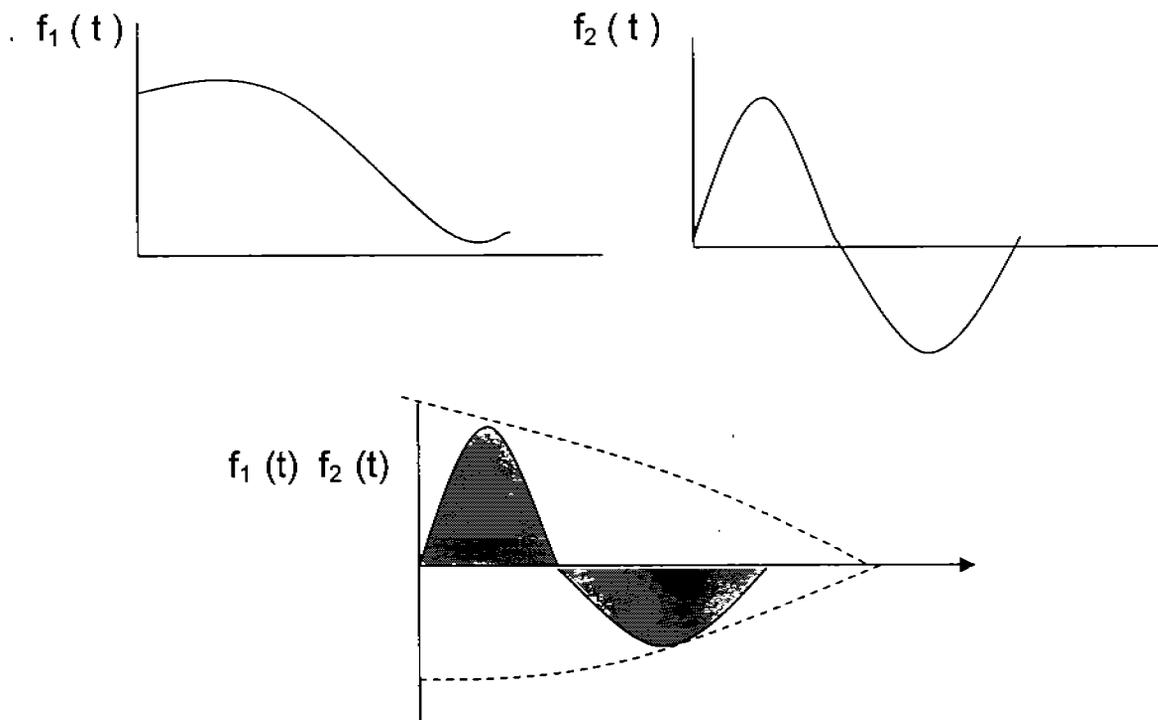


Figura 1.30

Cuando dos funciones varían con rapidez aproximadamente iguales, deben de ser bastante parecidas y, por lo que $f_1(t)$ contiene una componente grande de la función $f_2(t)$.

Espacio ortogonal de señales

Podemos expresar cualquier función $f(t)$ como suma de sus componentes a lo largo de un grupo o conjunto de funciones ortogonales entre si, si forman un conjunto completo. [Lat]

Aproximación de una función mediante un grupo de funciones ortogonales entre si

Consideremos un grupo de n funciones $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ ortogonales entre si en el intervalo de t_1 a t_2 ; es decir

$$\int_{t_1}^{t_2} g_j(t) g_k(t) dt = 0 \quad j \neq k \quad (1.55)$$

y sea

$$\int_{t_1}^{t_2} g_j^2(t) dt = k_j \quad (1.56)$$

Considerando ahora que la función arbitraria $f(t)$ se aproxima en el intervalo (t_1, t_2) mediante una combinación lineal de las n funciones mutuamente ortogonales.

$$F(t) \approx C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \dots + C_k g_k(t) + \dots + C_n g_n(t) = \sum_{r=1}^n C_r g_r(t)$$

Para obtener la mejor aproximación, debemos encontrar los adecuados valores de las constantes C_1, C_2, \dots, C_n tales que ε el valor cuadrático medio de $fe(t)$ sea mínimo.

Por definición
$$fe(t) = f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)$$

y
$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t) \right]^2 dt \quad (1.57)$$

por la ecuación (1.57) el valor de ε es función de C_1, C_2, \dots, C_n . Para reducir al mínimo ε debemos tener que

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_2} = \dots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_j} = \dots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_n} = 0$$

Considerando la ecuación:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_j} = 0 \quad (1.58)$$

Tenemos que $(t_2 - t_1)$ es constante, se puede expresar la ecuación (1.58) como

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t) \right]^2 dt \right\} = 0 \quad (1.59)$$

Al desarrollar el integrando, todos los términos que proceden del producto $\int g_j(t)g_k(t)dt$ son cero, como se expresa en la ecuación (1.59).

De la misma forma , la derivada con respecto a C_j , de todos los términos que no contienen a C_j , vale cero, es decir

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt = \frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} c_r g_r^2(t)dt = \frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} c_r f(t)g_r(t)dt = 0$$

Obteniendo solamente dos términos de la ecuación (1.59)

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} \left[-2C_j f(t)g_j(t) + C_j^2 g_j^2(t) \right] dt = 0 \quad (1.60)$$

Cambiando el orden de diferenciación e integración de la ecuación (1.60),
Obtenemos

$$2 \int_{t_1}^{t_2} f(t)g_j(t)dt = 2C_j \int_{t_1}^{t_2} g_j^2(t)dt$$

por lo tanto

$$C_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_j(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_j^2(t)dt} \quad (1.61)$$

$$= \frac{1}{k_j} \int_{t_1}^{t_2} f(t)g_j(t)dt \quad (1.62)$$

Dado un grupo de n funciones $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ mutuamente ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) , podemos aproximar a una función arbitraria $f(t)$ en dicho intervalo mediante una combinación lineal de las n funciones

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots + c_n g_n(t) = \sum_{r=1}^n c_r g_r(t) \quad (1.63)$$

Debemos calcular los coeficientes C_1, C_2, \dots, C_n , etc. para tener la mejor aproximación, con la cual se reduce al mínimo el valor cuadrático medio del error en el intervalo dados en la ecuación (1.61)

Determinación del error cuadrático medio

El valor de ε cuando se escogen valores óptimos de C_1, C_2, \dots, C_n , de acuerdo con la ecuación (1.63).

Por definición

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t) \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt + \sum_{r=1}^n c_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt - 2 \sum_{r=1}^n c_r \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt \right] \quad (1.64) \end{aligned}$$

de las ecuaciones (1.61) y (1.62) se deduce que

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r dt = c_r \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt = c_r k_r \quad (1.65)$$

al sustituir la ecuación (1.64) en la ecuación (1.65) obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt + \sum_{r=1}^n c_r^2 k_r - 2 \sum_{r=1}^n c_r k_r \right] \\ &= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{r=1}^n c_r^2 k_r \right] \quad (1.66) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t)^2 dt - (c_1^2 k_1 + c_2^2 k_2 + \dots + c_n^2 k_n) \right] \quad (1.67)$$

por lo tanto determinamos el error cuadrático medio por la ecuación (1.67)

y entonces ε se anula. Obteniendo

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 k_r \quad (1.68)$$

para un conjunto **orto-normal** $k_r = 1$

ahora $f(t)$ queda representada por la serie infinita :

$$f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots + c_r g_r(t) + \dots$$

La serie infinita del segundo miembro de la ecuación (1.68) converge a $f(t)$ de tal forma que el valor medio del cuadrado del error es cero. Se dice que la serie *converge al valor medio*. Aquí la representación de $f(t)$ es exacta. El conjunto de funciones $g_1(t), g_2(t), \dots, g_r(t)$ mutuamente ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) es completo o cerrado cuando no existe una función $x(t)$ para la cual se cumple que:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_k(t) dt = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Si encontramos una función $x(t)$ tal que la integral anterior se anule, entonces $x(t)$ es ortogonal a cada uno de los miembros del conjunto $\{g_r(t)\}$ y en consecuencia forma parte del conjunto. El conjunto no es completo si $x(t)$ no pertenece a él.

Resumiendo resultados. Para un conjunto $\{g_r(t)\}$, $(r = 1, 2, \dots)$ mutuamente ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) ,

$$\int_{t_1}^{t_2} g_m(t) g_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ k_m & \text{si } m = n \end{cases} \quad (1.69)$$

Si este conjunto de funciones es completo, entonces se puede expresar cualquier función $f(t)$ como

$$f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots + c_r g_r(t) + \dots \quad (1.70)$$

en donde

$$c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt}{k_r} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt} \quad (1.71)$$

se puede expresar cualquier función $f(t)$ como una de sus componentes a lo largo de las funciones mutuamente ortogonales, siempre y cuando formen un conjunto completo

Señales ortogonales y simétricas

El concepto de comparación y vectores ortogonales se puede extender a las señales. El termino "ortogonal" significa literalmente "en ángulos rectos" y refleja la relación entre los fasores de $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ en un diagrama de fasores.

El análisis de señales requiere la utilización repetida de una operación particular que da la integral o promedio de un *producto* de señales, por ejemplo:

$$r = \int_{t_1}^{t_1 + T_M} x_1(t) x_2(t) dt$$

El resultado de esta operación, r , será una constante para una pareja de señales dada. Sin embargo, en muchos casos r valdrá cero y esto a menudo se puede determinar *antes* de intentar evaluar la integral. En algunos libros, r se conoce como coeficiente de correlación y se utiliza para medir el grado de similitud entre dos señales.

Cuando la integral o el promedio del producto de dos señales vale cero en un intervalo especificado de $t = t_1$ a $t = t_1 + T_M$, se dice que las señales son *ortogonales* en ese intervalo. Así, para las señales ortogonales $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

$$r = \int_{t_1}^{t_1 + T_M} x_1(t)x_2(t)dt = 0$$

De acuerdo con estas definiciones, $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ son ortogonales para $-T < t < T$. Además, puesto que estas señales son periódicas con periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, también son ortogonales en cualquier intervalo de $t = t_1$ a $t = t_1 + k T_0$, donde k es un entero:

$$\int_{t_1}^{t_1 + kT_0} \cos \omega t \sin \omega t dt = 0, T_0 = \frac{2\pi}{\omega}, k = 1, 2, \dots$$

Como regla general, si el producto de dos señales es impar en un intervalo dado, entonces las señales serán ortogonales en ese intervalo. [MeD]

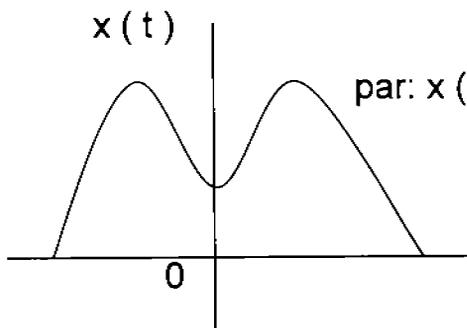


Figura 1.27

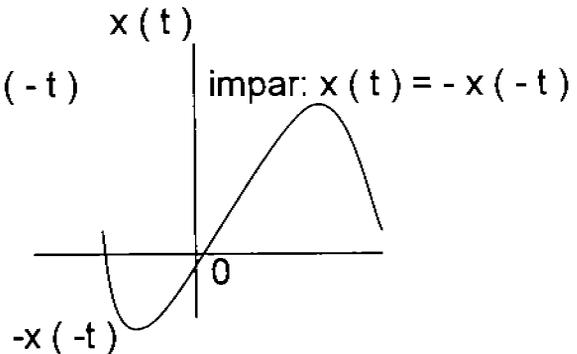


Figura 1.28 señal ortogonal

TIPOS DE ONDAS

Las ondas (o movimientos ondulatorios) son, fundamentalmente, de dos clases: *mecánicas* y *electromagnéticas*. Las ondas mecánicas necesitan un medio material para propagarse; las ondas electromagnéticas no, pues se *propagan* también por el vacío. Atendiendo a otros aspectos, las ondas son:

- a) *periódicas*, cuando proceden de una fuente que vibra periódicamente y transmite frentes de ondas en sucesivas perturbaciones;

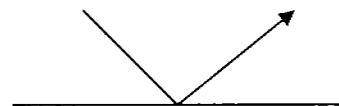
- b) *No periódicas*, cuando son perturbaciones o frentes de onda aislados;
(un pulso)
- c) *longitudinales*, si el desplazamiento de las partículas del medio es paralelo a la dirección de traslación de la energía (como el sonido);
- d) *transversales*, si la onda va asociada a desplazamientos perpendiculares a la dirección de propagación de la energía (como las ondas electromagnéticas);
- e) *progresivas o viajeras*, transportan energía y cantidad de movimiento desde el origen a otros puntos del *entorno*;
- f) *estacionarias*, no transmiten energía pero si intercambian energías cinética y potencial en sus elongaciones.

Las ondas *progresivas* se propagan con una *velocidad* que depende exclusivamente de las propiedades del medio. [Tip] [AIF]

FENÓMENOS ASOCIADOS A LAS ONDAS

En su propagación pueden experimentar:

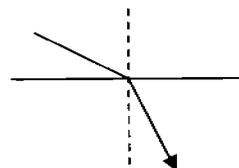
Reflexión



Se entiende por **reflexión** el cambio en la dirección de propagación de su velocidad en el medio que experimenta una onda al encontrarse (chocar) con un obstáculo o superficie. [Tip] [AIF]

Propagación

dentro de un segundo medio en donde pueden experimentar *refracción* y *dispersión*;



Refracción

Se entiende por refracción al conjunto de fenómenos o de cambios que experimenta una onda al *pasar de un medio a otro*. Como consecuencia de tener los medios de propiedades diferentes o ser de distinta estructura, *la velocidad de propagación de la onda es distinta en cada uno de ellos*.

Superposición de ondas en una región del espacio puede dar origen a:

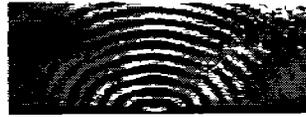
Interferencias, pulsaciones y ondas estacionarias cuando coinciden en determinadas direcciones y frecuencias.

Difracción, cuando un objeto dificulta el paso de la onda y distorsiona el avance del frente.

Interferencias

Es el fenómeno que se presenta cuando en una región del espacio, se encuentran, en ciertas condiciones, dos o más ondas, el desplazamiento resultante en ese punto es la suma de los desplazamientos individuales producidos por cada una de las ondas. Si los desplazamientos van en el mismo sentido, ambas ondas se refuerzan; si van en sentido opuesto, se debilitan mutuamente. Físicamente se caracteriza porque en dicha región existe una distribución de la intensidad de la onda resultante, es decir, varía de unos puntos a otros: no es uniforme ni igual a la suma de las intensidades de las ondas que se superponen.

Difracción



Es el fenómeno que se presenta siempre que una *onda se encuentra con un obstáculo, o una abertura, de dimensiones comparables a su longitud de onda*. El obstáculo puede ser una casa, un poste, un disco, una varilla, la abertura de un pequeño orificio o rendija en una pantalla, las plumas de un ave, etc. En estas condiciones, la propagación del movimiento ondulatorio no es rectilínea y su intensidad depende de la dirección que se considere, se extiende en todas las direcciones en forma de ondas circulares. En todos los casos *se bloquea el paso de una parte del frente de onda*

Polarización.

La onda esta polarizada si las vibraciones van y vienen en una dirección. Es un fenómeno específico de las ondas, sea cual fuere su dimensión, pero a diferencia de aquellos sólo lo presentan las ondas transversales. El sonido, que como veremos, está constituido por ondas longitudinales, no lo presenta. Es el fenómeno que permite decidir si una onda es transversal o longitudinal. Por ejemplo: si la onda esta polarizada verticalmente las vibraciones de la onda están en un plano vertical, si la onda esta polarizada horizontalmente las vibraciones van en el plano de referencia horizontal. Si un electrón que vibra emite una onda electromagnética polarizada en sentido de un plano de referencia vertical, emite luz verticalmente.

Las fuentes de luz comunes, como una lámpara incandescente, una flama de vela, etc. Emiten luz no polarizada, esto se debe a que los electrones que producen la luz vibran en direcciones al azar.

Longitud de onda.

Es la distancia que hay entre dos puntos consecutivos de la onda que están en fase, es decir, con la misma velocidad (v), aceleración (a) y elongación (y). Por lo tanto: $k\lambda = 2\pi$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (m^{-1}), k número de ondas, representa el número de longitudes de onda que hay en la longitud 2π . Sustituyendo ω y k por sus valores obtenemos de las ecuaciones anteriores *otra* expresión equivalente de las ondas unidimensionales:

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{X}{\lambda} \right) \text{ (m)} \quad (1.72)$$

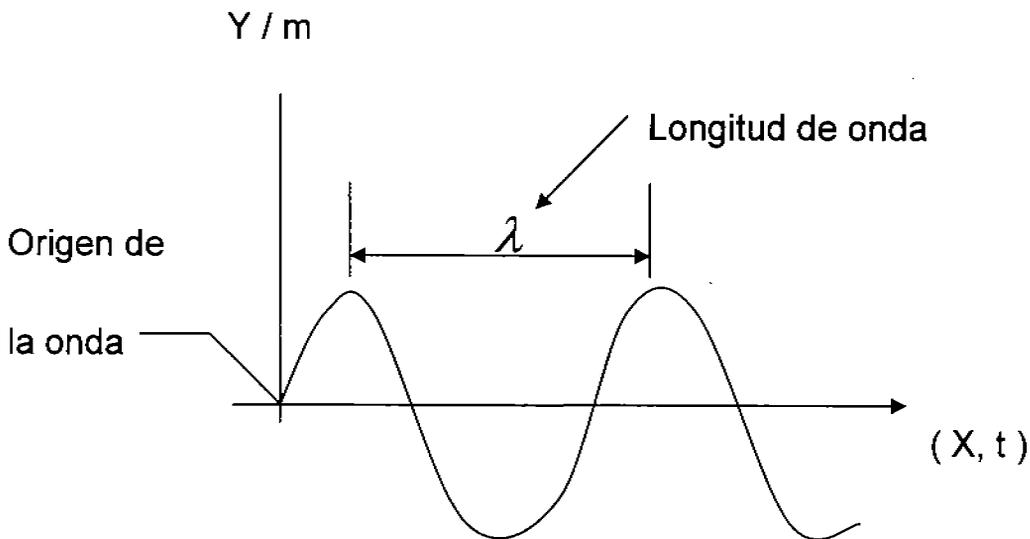


Figura 1.31

Si el tiempo t se incrementa en un periodo T la fase de la onda no cambia pero la onda avanza una longitud λ igual a $v \cdot T$ de donde $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$ y

$$v = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right) \cdot (2\pi f) = \frac{\omega}{k} \quad (\text{m/s}) \quad (1.73)$$

La fase de un movimiento ondulatorio se expresa en la ecuación por el argumento; en la ecuación (1.73) es:

$$2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{X}{\lambda} \right)$$

Ecuación de las ondas progresivas unidimensionales sinusoidales.

Ecuación de las ondas progresivas unidimensionales sinusoidales. Las ondas sinusoidales se producen cuando un cuerpo vibra con m. a. s. (movimiento armónico simple) y no se distorsiona al propagarse.

En general, toda onda se puede considerar como superposición de ondas sinusoidales de frecuencia, amplitud y fase correspondientes. Un movimiento vibratorio sinusoidal es *doblemente periódico porque* es función del *desplazamiento de* la onda y del *tiempo*. Por eso se expresa la elongación por el símbolo: $y(x, t)$

En el origen, la ecuación del m. a. s. que origina la onda es $y(0, t) = A \sin(\omega t)$

en la cual $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ es la pulsación o frecuencia angular de la onda.

La elongación y de un punto cualquiera x de la onda ($x > 0$) varia también con el tiempo, pero presenta un desfase respecto del origen.

Por eso se escribe la ecuación del cualquier punto de la onda:

$$y(X,t) = A \operatorname{sen}(wt - \varphi).$$

Como la velocidad v de la onda que se propaga por un medio homogéneo e isótropo es constante, el desfase depende de la distancia del punto x al origen; luego $\varphi = kx$.

Y así tenemos una ecuación de las ondas unidimensionales sinusoidales que se desplazan hacia la derecha (sentido positivo):

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(wt - kx) \quad (1.74)$$

k se llama número de ondas.

Si la onda se propaga hacia la izquierda (sentido negativo) la velocidad v y los desplazamientos x respecto del origen son negativos y entonces la ecuación se escribiría:

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(wt + kx) \quad (1.75)$$

Cada punto del medio por el que se propaga una onda sinusoidal realiza un m. a. s.

ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Un medio en el que se propaga un movimiento ondulatorio posee energía, que es en parte cinética y en parte potencial.

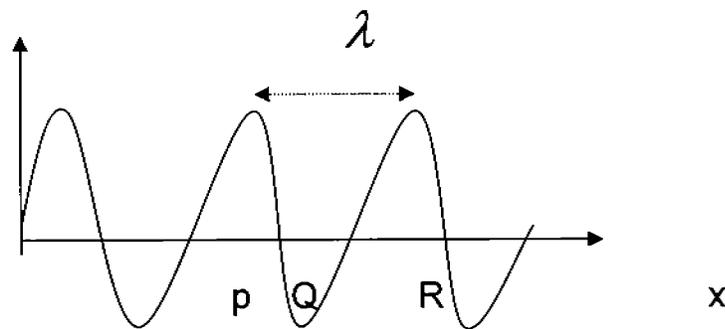


Figura 1.32

Observando la figura 1.32, en P toda la energía es potencial, en Q toda la energía es cinética, y en R parte es potencial y parte cinética.

La energía cinética del elemento de masa $dm = \rho dx$ (ρ es la densidad lineal de masa) situada en Q será: $\frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{máx}^2$. Ahora bien como todos los elementos de masa tienen la misma energía.

$$E = \frac{1}{2} \rho \lambda \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{máx}^2 .$$

La potencia total transferida será $\frac{E}{T}$

$$P = \frac{1}{2} \frac{\rho \lambda}{T} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{\text{máx}}^2; \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{\text{máx}} = (-Akv \cos k(x - vt))_{\text{máx}} = Akv$$

Donde hemos tenido en cuenta que $k\nu = \omega$, podemos escribir, por tanto,

$$P = \frac{1}{2} ZA^2 \omega^2 \quad \text{donde} \quad Z = \rho\nu \quad \text{es la impedancia de la onda. Dicha magnitud}$$

caracteriza las propiedades ondulatorias del medio. Como Z es constante la potencia es proporcional a A^2 y ω^2 .

En el caso de ondas tridimensionales, conviene, introducir una nueva magnitud, la intensidad I de la onda, definida como la potencia que pasa a través de la unidad de superficie normal a la dirección de propagación. Es por tanto, la energía que pasa por unidad de tiempo y unidad de superficie. Sus unidades en el S. I.

Son $\mathbf{w m}^{-2} = \mathbf{J s}^{-1} \mathbf{m}^{-2}$. (Para una onda esférica)

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi^2}$$

Si consideramos los dos frentes de onda esféricos de la figura, y suponiendo que no existe absorción de energía, la cantidad de esta, que atraviesa la superficie de radio r_1 tiene que ser igual a la que atraviesa la de radio r_2 ,

por lo tanto,

$$I_1 S_1 = I_2 S_2 \Rightarrow I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$\frac{1}{2} \rho v A_1^2 \omega^2 r_1^2 = \frac{1}{2} \rho v A_2^2 \omega^2 r_2^2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

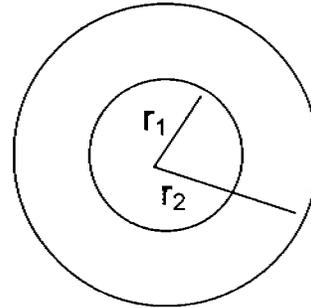


Figura 1.33

Es decir, la intensidad disminuye proporcionalmente al cuadrado de la distancia al foco, mientras que la amplitud de las oscilaciones de las partículas disminuye proporcionalmente a la distancia al mismo.

En realidad la disminución de la intensidad y la densidad es mayor que las expresadas por las relaciones anteriores debido a la absorción de energía, a rozamientos, etc.

Piénsese que en una onda plana, en donde $R_1 = R_2 \rightarrow \infty$, la intensidad y la amplitud deberían permanecer constantes, lo que está en contradicción con la experiencia. Por lo tanto en el caso de ondas esféricas a la disminución de la intensidad por la distancia habrá que añadir la disminución por absorción.

Se puede definir la absorción de un movimiento ondulatorio, como la disminución en la intensidad debido a la naturaleza y características físicas del medio propagador.

En el caso de ondas planas que se propagan, se ha comprobado experimentalmente que la disminución relativa de intensidad, viene dada por: $\frac{dI}{I} = -\gamma dx$, donde γ se llama coeficiente de absorción y depende del medio y de la frecuencia de la onda.

Integrando:
$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = - \int_0^x \gamma dx$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\gamma x \rightarrow I = I_0 \cdot e^{-\gamma x}$$

La intensidad disminuye exponencialmente con tanta mayor rapidez cuanto mayor sea γ .

La onda transmite energía; la energía transportada se caracteriza, entre otros parámetros, por la *intensidad de onda I*. La *Intensidad de onda* es la energía que fluye perpendicularmente a la dirección de propagación a través de la unidad de superficie en cada segundo. Se expresa así:

$$I = \frac{E}{S} \cdot t = \frac{P}{S} \quad (\text{w}\cdot\text{m}^{-2}) \quad (1.76)$$

El sonido.

El sonido es una onda mecánica longitudinal que se puede propagar por sólidos, líquidos y gases. En su desplazamiento por los gases origina variaciones de presión, densidad y desplazamiento de las masas de gas por el que se propaga.

Al llegar al oído actúa sobre la membrana del tímpano y, a través de la cadena de huesitos del oído medio, transmite al cerebro por el nervio auditivo la percepción del sonido.

Las ondas sonoras capaces de ser detectadas por el oído humano van desde 20 Hz (*umbral inferior*) a 20000 Hz (*umbral superior*). Por debajo de 20 hz están los infrasonidos (mareas, ondas sísmicas) y por encima de 20000Hz, los ultrasonidos (como el sonar, de baja energía, y las vibraciones de las redes cristalinas (cuarzo), de alta energía.

El ruido es un sonido audible *no armonioso*. Procede de ondas no periódicas. Una nota musical es un sonido agradable; procede de ondas periódicas.

El sonido o nota fundamental es la vibración cuya frecuencia f_0 , es la más baja que se puede obtener en la flauta aguda (caramillo). Un armónico es una nota cuya frecuencia es un múltiplo entero de f_0 .

Todo sonido posee una mayor o menor energía que es función de su mayor o menor frecuencia. Las moléculas del aire transmiten la energía que provienen *de* movimientos periódicos.

Referida la energía a la masa de la unidad de volumen o densidad ρ , vale: $E = (\frac{1}{2})\rho\omega^2 A^2$ y como $\omega = 2\pi f$, tenemos:

$$E = 2\pi^2 \rho f^2 A^2 \text{ (julios)} \quad (1.77)$$

Esta energía es muy notable en los ultrasonidos; en los de alta frecuencia llega a ser diez mil millones de veces mayor que en los sonidos normales.

Las notas o sonidos musicales se caracterizan por la *intensidad*, el *tono* y el *timbre*. La *intensidad* de un sonido depende de la mayor o menor amplitud de la onda, ya que la energía de la misma es función del *cuadrado de la amplitud*. La audición está unida a la intensidad de la onda sonora. Para cada frecuencia hay una intensidad mínima (umbral de audición) por debajo de la cual no se oye; y una intensidad máxima que produce sensación de dolor (umbral doloroso). El nivel de intensidad sonora, se mide en decibelios

(d b):
$$dB = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (1.78)$$

I_0 , es la intensidad inferior de audición que se toma como punto de referencia y vale: $I = 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$ (en el aire).

Así un sonido cuya intensidad sea 1000 veces superior a I_0 – umbral de referencia - tiene de nivel:

$$dB = 10 \log (10^3 \cdot 10^{-12} / 10^{-12}) = 30 \text{ decibelios.}$$

El *tono* de un sonido depende de su frecuencia. Los tonos agudos tienen mayor frecuencia que los graves. De la relación: $f = \frac{v}{\lambda}$ se deduce que a mayor longitud de onda, menor frecuencia, y viceversa. El *timbre* depende de los armónicos que acompañan a los sonidos; como éstos varían con los instrumentos, por el timbre se distingue una nota dada por diferentes instrumentos.

Velocidad del sonido en los gases

La velocidad del sonido en el aire depende de las variaciones de presión, densidad y desplazamiento del mismo que se originan en el lugar de la perturbación (timbre, campana, guitarra...).

El análisis de estos factores lleva a la expresión: $v = \left[\frac{K}{\rho} \right]^{1/2} (\text{ms}^{-1})$

K es el módulo de elasticidad y ρ la densidad del gas. Por otra parte, entre las velocidades del sonido y la temperatura del gas se da la relación:

$$\frac{V_i}{V_0} = \left[\frac{T_i}{T_0} \right]^{1/2}$$

Conocida la velocidad a una temperatura absoluta (kelvin) se deduce, de la relación anterior, la velocidad a cualquier temperatura.

En los gases ideales en condiciones adiabáticas se obtiene, para la velocidad del sonido:

$$v = \left[\frac{\gamma RT}{M} \right]^{1/2}$$

Siendo $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ el coeficiente adiabático que vale para los gases monoatómicos: $\gamma = 1,67$, y para los biatómicos $\gamma = 1,40$. M es la masa molar molecular del gas. A menor masa molar molecular mayor velocidad. Las ondas se clasifican según la dirección de los desplazamientos de las partículas en relación con la dirección del movimiento de la propia onda. Si la vibración es paralela a la dirección de propagación de la onda, la onda se denomina longitudinal.

Una onda longitudinal siempre es mecánica y se debe a las sucesivas compresiones (estados de máxima densidad y presión) y enrarecimientos (estados de mínima densidad y presión) del medio. Las ondas sonoras son un ejemplo típico de esta forma de movimiento ondulatorio. Otro tipo de onda es la onda transversal, en la que las vibraciones son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Las ondas transversales pueden ser mecánicas, como las ondas que se propagan a lo largo de una cuerda tensa cuando se produce una perturbación en uno de sus extremos, o electromagnéticas, como la luz, los rayos X o las ondas de radio.

En esos casos, la dirección de los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación. Algunos movimientos ondulatorios mecánicos, como las olas superficiales de los líquidos, son combinaciones de movimientos longitudinales y transversales, con lo que las partículas de líquido se mueven de forma circular.

En una onda transversal, la longitud de onda es la distancia entre dos crestas o valles sucesivos. En una onda longitudinal, corresponde a la distancia entre dos compresiones o entre dos enrarecimientos sucesivos.

La frecuencia de una onda es el número de vibraciones por segundo. La velocidad de propagación de la onda es igual a su longitud de onda multiplicada por su frecuencia.

En el caso de una onda mecánica, su amplitud es el máximo desplazamiento de las partículas que vibran.

En una onda electromagnética, su amplitud es la intensidad máxima del campo electromagnético o de la inducción electromagnética.

COMPORTAMIENTO DE LAS ONDAS

La velocidad de una onda en la materia depende de la elasticidad y densidad del medio. En una onda transversal a lo largo de una cuerda tensa, por ejemplo, la velocidad depende de la tensión de la cuerda y de su densidad lineal o masa por unidad de longitud.

La velocidad puede duplicarse cuadruplicando la tensión, o reducirse a la mitad cuadruplicando la densidad lineal.

La velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío (entre ellas la luz) es constante y su valor es de aproximadamente $300.000 \text{ km} / \text{s}$. Al atravesar un medio material esta velocidad varía sin superar nunca su valor en el vacío. Cuando dos ondas de igual amplitud, longitud de onda y velocidad avanzan en sentido opuesto a través de un medio se forman ondas estacionarias. Por ejemplo, si se ata a una pared el extremo de una cuerda y se agita el otro extremo hacia arriba y hacia abajo, las ondas se reflejan en la pared y vuelven en sentido inverso.

Si suponemos que la reflexión es perfectamente eficiente, la onda reflejada estará media longitud de onda retrasada con respecto a la onda inicial. Se producirá interferencia entre ambas ondas y el desplazamiento resultante en cualquier punto y momento será la suma de los desplazamientos correspondientes a la onda incidente y la onda reflejada.

En los puntos en los que una cresta de la onda incidente coincide con un valle de la reflejada, no existe movimiento; estos puntos se denominan nodos.

A mitad del camino entre dos nodos, las dos ondas están en fase, es decir, las crestas coinciden con crestas y los valles con valles; en esos puntos, la amplitud de la onda resultante es dos veces mayor que la de la onda incidente; por tanto, la cuerda queda dividida por los nodos en secciones de una longitud de onda. Entre los nodos (que no avanzan a través de la cuerda), la cuerda vibra transversalmente.

Las ondas estacionarias aparecen también en las cuerdas de los instrumentos musicales. Por ejemplo, una cuerda de violín vibra como un todo (con nodos en los extremos), por mitades (con un nodo adicional en el centro), por tercios... Todas estas vibraciones se producen de forma simultánea; la vibración de la cuerda como un todo produce el tono fundamental y las restantes vibraciones generan los diferentes armónicos.

Capítulo 2

Concentración de Onda (wavelet)

La teoría de Fourier sólo es válida para señales estacionarias. En el análisis de una señal no estacionaria, el método que se prefiere es utilizar una descripción de la señal que incluye tanto al tiempo como a la frecuencia. Como su nombre lo indica, el análisis tiempo-frecuencia es el mapeo que presenta las componentes espectrales de la señal como una función del tiempo. En términos conceptuales, podemos considerar este **Mapeo** como una *representación espectral variable del tiempo* de la señal. Los valores de la representación de tiempo-frecuencia de la señal proporcionan una indicación de los tiempos específicos en los que se observan ciertos componentes de la señal. [PrM]

Las señales más interesantes contienen numerosas características dinámicas o transitorias: de movimiento, de tendencia, de cambios repentinos y eventos de comienzo y de término. Estas características son con frecuencia las partes más importantes de la señal, y el análisis de Fourier no es el adecuado para detectarlo.

Muchas señales requieren más flexibilidad de aproximación, una donde podamos variar el tamaño de la ventana para determinar más exactamente además del tiempo, la frecuencia.

El análisis de Concentración de Onda no utiliza una región de tiempo-frecuencia, utiliza una región de tiempo-escalado. La mejor ventaja proporcionada por la concentración de onda es la habilidad para realizar el análisis local, lo cual es para analizar un área localizada de una señal más grande. [Bat]

Aquí como se indica que en contraste con el tiempo-base, la frecuencia-base, y la observación de la TFTC de una señal: [ArR]

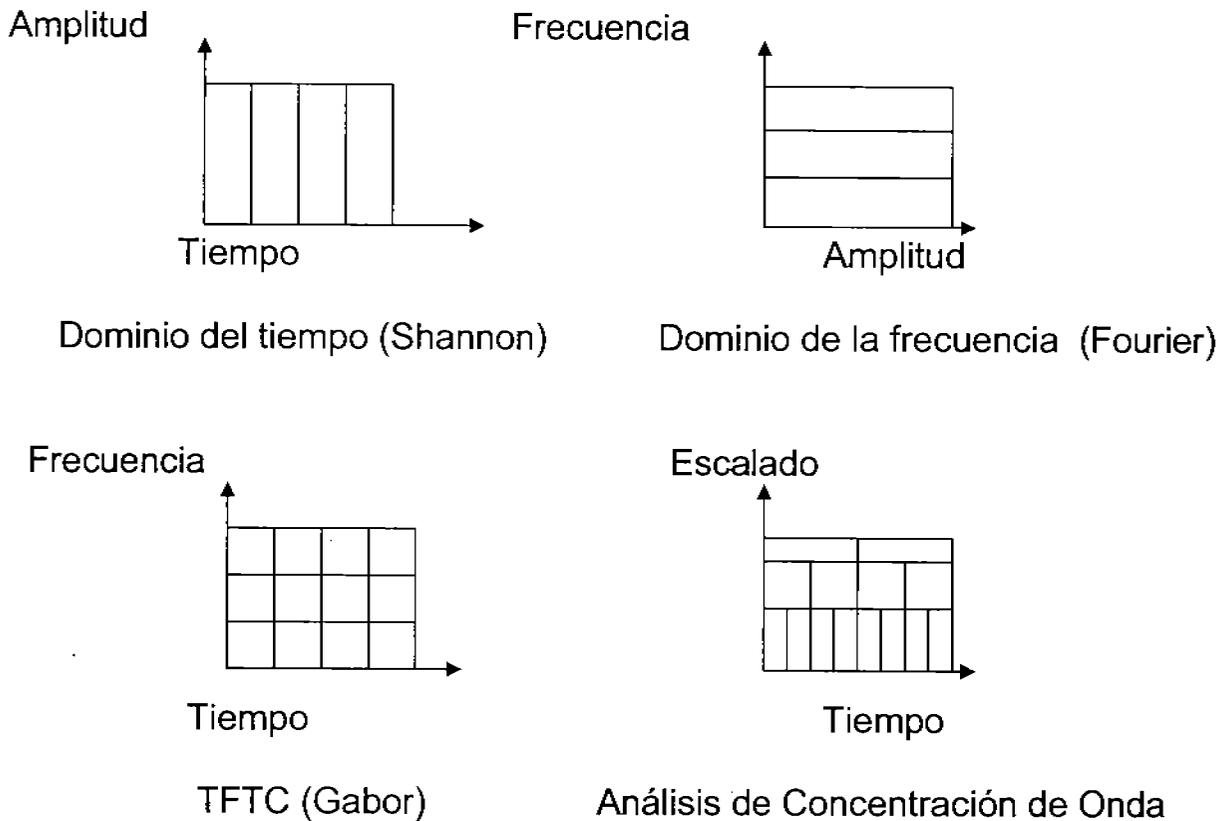


Figura 2.1

Considerando una señal senoide con una discontinuidad pequeña una tan pequeña como sea apenas visible. Se puede generar en el mundo real. Quizá por una fluctuación de potencia o un intercambiador ruidoso.

Un diagrama de los coeficientes de Fourier de esta señal particularmente nada muestra de interesante. Un espectro plano con dos picos representando una única frecuencia. Sin embargo un diagrama de los

coeficientes de Concentración de Onda, claramente muestra la localización exacta en el tiempo de la discontinuidad.

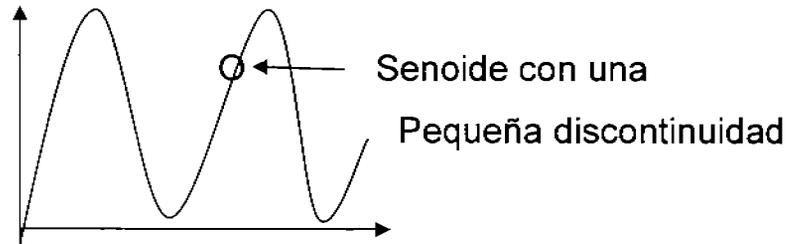


Figura 2.2

El análisis de Concentración de Onda es capaz de revelar aspectos de datos que de otras técnicas de análisis de señales no se comprenden, aspectos como direccionales, puntos de interrupción, discontinuidad. Además proporciona una diferente forma de ver datos que están representados por técnicas tradicionales, el análisis de Concentración de onda puede comprimir o eliminar el ruido de una señal sin disminución apreciable

La Concentración de Onda tiene su representación en el tiempo y en el escalamiento consecuentemente cada aplicación tiene su representación en el tiempo y en el escalamiento. Cuando se toma totalmente la descomposición, los puntos centrales, son el proceso de compresión y eliminación del ruido. La concentración de onda es una forma de onda de duración limitada.

Comparando la Concentración Onda con ondas de senos que son las bases del análisis de Fourier. Las sinusoides no tienen duración limitada, ellas se extienden desde menos a más infinito y en donde las sinusoides son uniformes y predecibles, la Concentración de Onda tiende a ser irregular y asimétrica.

Matemáticamente, los procesos del análisis de Fourier están representados por la transformada de Fourier [ABM] [AAE]

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

Es la suma que cubre todo el tiempo de la señal $f(t)$ multiplicada por un exponencial complejo. El análisis de Fourier consiste de la descomposición de una señal en ondas de sinusoides imaginarias y reales de varias frecuencias, que cuando son multiplicados por una senoide de frecuencia ω producen las componentes continuas sinusoidales de la señal original. Gráficamente, el proceso se parece a

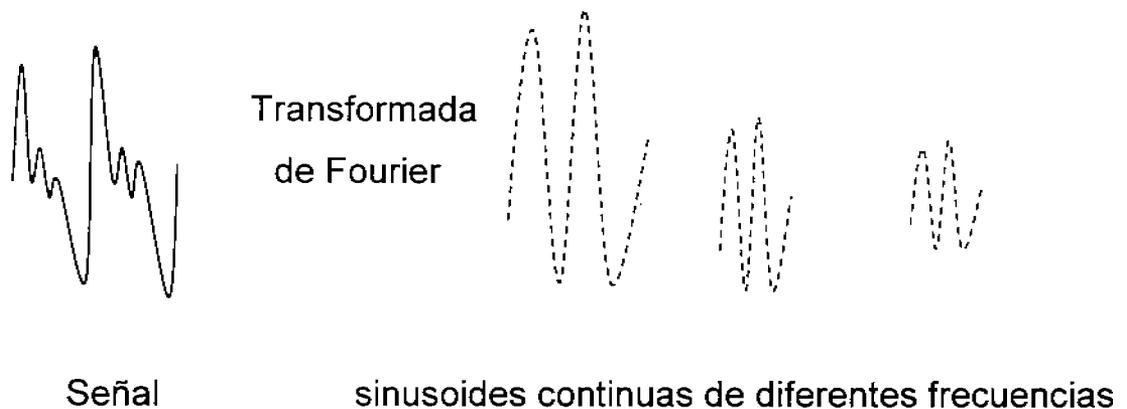


Figura 2.3

Similamente el análisis de Concentración de Onda es la descomposición de una señal en versiones de escalado de la Concentración de Onda original (o madre).

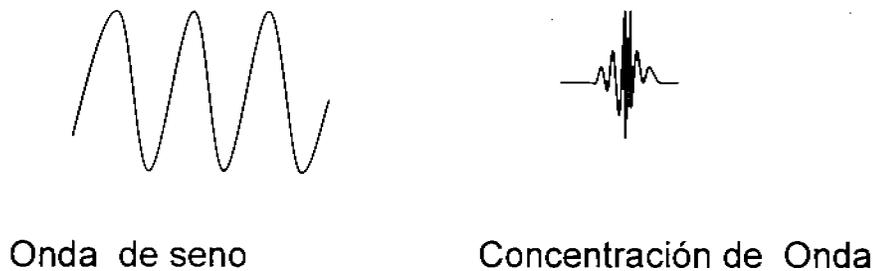


Figura 2.4

La transformada de Concentración de Onda Continúa TCOC esta definida como la suma que cubre todo el tiempo de la señal multiplicada por el escalado, de los desplazamientos de la función de la versión de la Concentración de onda ψ :

$$C(\text{escalado, posición}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(\text{escalado, posición}, t) dt \quad (2.2)$$

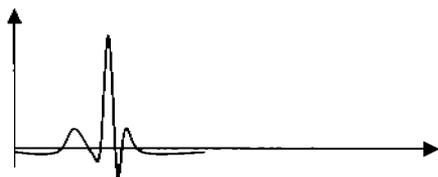
El resultado de la TCOC son muchos coeficientes C de Concentración de Onda, que están en función del escalado y de la posición, multiplicando cada coeficiente por el escalado apropiado de los desplazamientos de la Concentración de Onda, produciendo los componentes de la señal original de la Concentración de Onda. [FoS]

Precisamente buscando una ilustración de Concentración de onda y de ondas de seno se puede observar intuitivamente que las señales con cambios definidos pueden ser mucho mejor analizadas con una Concentración de Onda irregular que con sinusoides continuas. También tiene sentido de que la característica local puede ser descrita mucho mejor con Concentración de Onda que tiene extensión local.

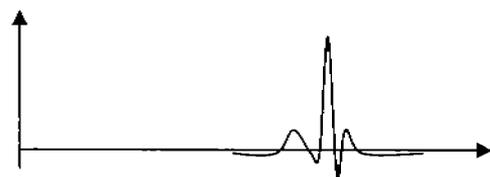
Escalado

El escalado es la expansión o dilatación (y compresión) al mismo tiempo de una Concentración de Onda simplemente quiere decir retardo (o adelanto) del inicio.

Matemáticamente, el retardo de una función $f(t)$ por k esta representada por $f(t - k)$



Función Concentración de Onda
 $\psi(t)$



Función escalado de Concentración
de Onda (desplazado) $\psi(t - k)$

Figura 2.5

El análisis de Concentración de Onda

El análisis de Concentración de Onda asigna la utilización de intervalos de tiempo largos en donde queremos exactamente más información de frecuencias-bajas, y regiones cortas donde queremos información de frecuencias-altas. Una técnica de ventaneado con regiones de tamaño-variable. [BeF]

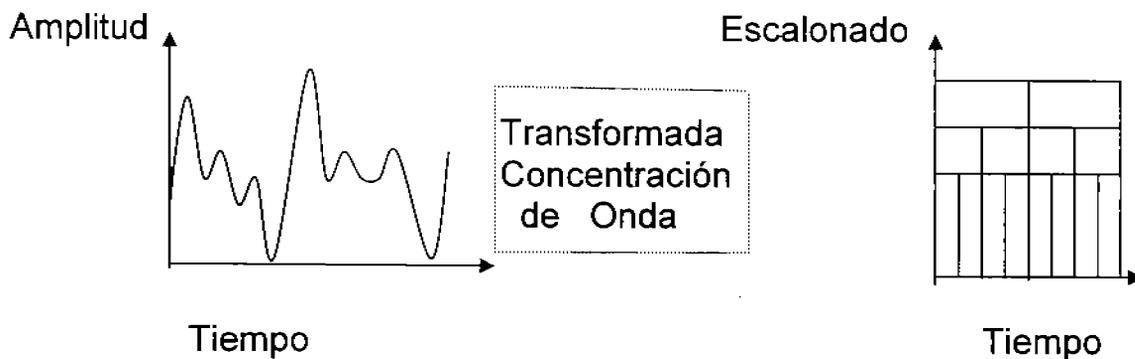


Figura 2.6

La transformada de Concentración de Onda Continúa

La Transformada Concentración de Onda continua (TCOC) realiza un mapeo intercambiando la resolución del tiempo por la resolución de la frecuencia y viceversa. Donde $\psi(t)$ es el análisis de la ventana de Concentración de Onda

En la figura 2.7 el efecto del tiempo – cambio / frecuencia – cambio del operador de la TFTC de tiempo y frecuencia $S^{(t,f)}$. En la TFTC a la frecuencia f es esencialmente el resultado del paso de la señal $x(t)$ entre el filtro pasa banda $\Gamma(f'-f)$. La $TFTC_x^2(\tau, f)$ es el producto interno de la señal $x(t)$ y una versión tiempo – desplazado / frecuencia – desplazado $(S^{(\tau, f)} \psi)(t) = \psi(t-\tau)e^{j2\pi ft}$ del análisis de la ventana del tipo pasa bajas $\psi(\tau)$.

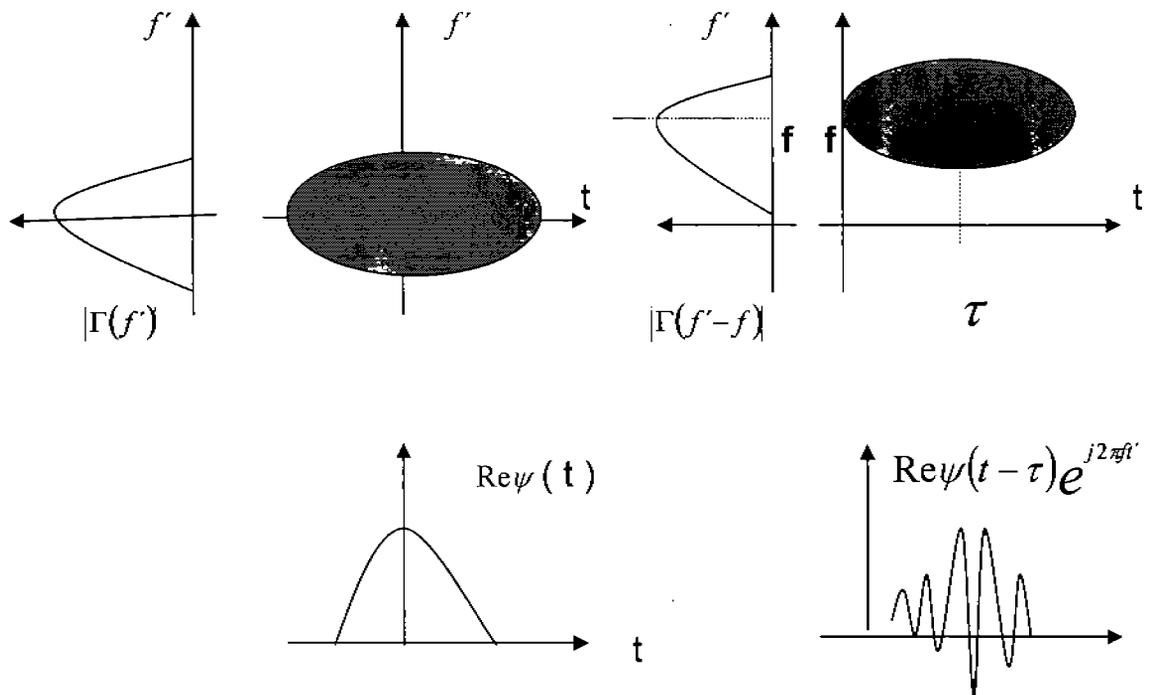


Figura 2.7

El tiempo – cambio / frecuencia – cambio del operador de la TFTC del tiempo y frecuencia $S^{(\tau, f)}$ causa el análisis de la ventana $\psi(\tau)$ para centrarlo alrededor del tiempo τ y la frecuencia f .

El efecto del tiempo - escalado / tiempo - cambio de frecuencia. No afecta el ancho de banda o la duración de la ventana. Originalmente la TCO fue introducida como una representación tiempo – escalado. La formula clásica se obtiene del análisis de escalado de $a = \frac{f_0}{f}$. [AGH] [CMW] [GGM]

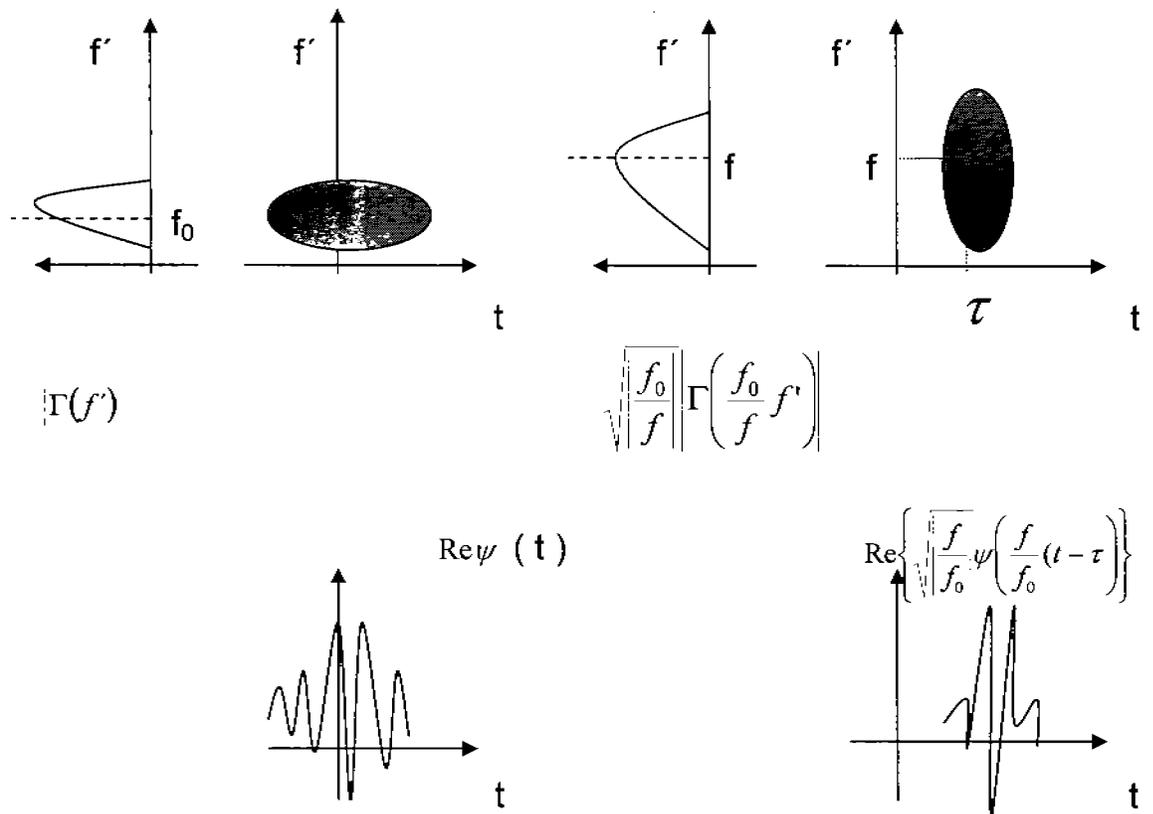


Figura 2.8

En la figura 2.8 El tiempo - escalado / tiempo - desplazamiento del operador de la TCOC^(τ, f) causa el análisis de la ventana $\psi(t)$ al ser centrada alrededor del tiempo τ y la frecuencia f , el tiempo del escalado también le afecta el ancho de banda y la duración de la ondulada: el ancho de banda (duración) es proporcional (inversamente proporcional) a f .

El efecto del tiempo - escalado / tiempo - cambio del operador de la TCO, $C^{(\tau, f)}$. La TCO. $TCO_x^\Psi(\tau, f)$ es el producto interno de la señal $x(t)$ y un tiempo - escalado / tiempo - desplazamiento de la versión de $(C^{(\tau, f)} \psi)(t) = \sqrt{\frac{f}{f_0}} \psi\left(\frac{f}{f_0}(t-\tau)\right)$ del análisis del tipo pasa banda de la ondulada $\psi(t)$. Las figuras 2.7 y 2.8 ilustran las secuencias prácticas de estas diferencias formales al comparar los efectos del operador lineal $S^{(\tau, f)}$ y $C^{(\tau, f)}$. El operador de la TFTC $S^{(\tau, f)}$ primero el tiempo - cambio $\psi(t)$ por el tiempo τ y después el resultado de la frecuencia - cambio por la frecuencia f . El operador $C^{(\tau, f)}$ de la TCO del otro lado primero el tiempo - escalado $\psi(t)$ por un factor de $\frac{f}{f_0}$ y después el resultado del tiempo - cambio por el tiempo τ . De esta forma, el cambio de la frecuencia en el caso de la TFTC es reemplazada por un tiempo de escalado en la TCO (un tiempo de escalado por un factor a induce a un escalado de la frecuencia por el factor inverso $\frac{1}{a}$ ambos $(S^{(\tau, f)} \psi)(t)$ y $(C^{(\tau, f)} \psi)(t)$ son centrados alrededor del punto (τ, f) tiempo frecuencia. Sin embargo, considerando que la duración efectiva y el ancho de banda de la señal de la TFTC $(S^{(\tau, f)} \psi)(t)$ es independiente del análisis de la frecuencia f , la duración efectiva de la señal de control de la TCO $(C^{(\tau, f)} \psi)(t)$ es inversamente proporcional a f y el ancho de banda es proporcional a f .

El ancho de banda de la TCO del filtro pasa bandas es proporcional a f o equivalentemente el factor de calidad del filtro Q ($=$ centrado – frecuencia / ancho de banda) es independiente a f . La TCO puede ser vista como un análisis “ constante – Q ”.

Si definimos a la transformada de Concentración de Onda continua como

$$TCOC_x^\psi(f) = \int x(t) \sqrt{\frac{f}{f_0}} \psi^* \left(\frac{f}{f_0} (t - \tau) \right) dt \quad (2.3)$$

donde $\psi(\tau)$ (análisis de Concentración de Onda) es una función real o compleja pasa banda centrada alrededor de $t = 0$ en el dominio del tiempo. El parámetro f_0 utilizado en (2.3) es igual al centro de la frecuencia de

$\psi(\tau)$. La TCOC fue introducida originalmente como una representación de tiempo – escalado: Esta clásica formulación de la TCOC puede ser obtenida de la formulación frecuencia – tiempo introducido por el análisis de escala a como $a = \frac{f_0}{f}$. La TCOC preserva los cambios de la frecuencia

de f_0 a f . [GGM]

Para la versión de frecuencia – tiempo de la ecuación (2.3), suponemos que la TF de $\psi(\tau)$ es esencialmente concentrada alrededor del centro de la frecuencia f_0 . Dada una señal no estacionaria $x(t)$, la TCOC se define como el producto interior de $x(t)$ con la familia de dos parámetros de funciones básicas denotadas por [HaV]

$$\psi_{\tau,a}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi \left(\frac{t - \tau}{a} \right) \quad (2.4)$$

donde a es un *factor de escala* (conocido como un *parámetro de dilatación*), y τ es un retardo de tiempo.

De tal forma que en términos matemáticos la TCOC de la señal $x(t)$ está definida por

$$W_x(\tau, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \quad (2.5)$$

la función básica $\psi_{\tau, a}(t)$ es una función oscilatoria, por lo tanto, no se tiene necesidad de utilizar senos y cosenos como en el análisis de Fourier.

Más específicamente, la función básica $e^{j\omega t}$ siempre oscila en el análisis de Fourier; en contraste, la función básica $\psi_{\tau, a}(t)$ en el análisis de la TCOC se localiza en el tiempo: perdura solo unos cuantos ciclos. Al igual que la TF, la TCOC es invertible; si contamos con la $W_x(\tau, a)$, es posible reconstruir la señal original $x(t)$ sin perder información las funciones básicas $\psi_{\tau, a}(t)$ se denominan concentración de ondas; constituyen los bloques fundamentales del análisis de Concentración de Onda dilatada. De acuerdo con la ecuación 2.4, son versiones escaladas y trasladadas de un prototipo $\psi(t)$, llamada concentración de onda dilatada básica. El parámetro de retardo τ proporciona la posición de la Concentración de Onda dilatada $\psi_{\tau, a}(t)$, en tanto que el factor de escala a gobierna su contenido de frecuencia. Para $a \ll 1$, la Concentración de Onda dilatada $\psi_{\tau, a}(t)$ es una versión altamente dilatada y comprimida de una Concentración de Onda dilatada básica $\psi(t)$ con contenido de frecuencia comprimida y dilatada principalmente en el intervalo de alta frecuencia. Por otra parte, para $|a| \gg 1$, la concentración de onda dilatada $\psi_{\tau, a}(t)$ está muy dispersa y tiene mayormente frecuencias bajas.

El término de concentración de onda originalmente llamada concentración de onda de forma constante, denota una función uni-variante Ψ (también

existe la concentración de onda multi-variante) definida en \mathfrak{R} , que cuando esta sujeto a la operación fundamental de cambios (cambio de posición en enteros) y dilatación debido a dos valores, produce una base ortogonal de $L_2 \mathfrak{R}$. Que es la función $\psi_{j,k} := 2^{\frac{k}{2}} \psi(2^k - j)$, $j, k \in \mathbb{Z}$, desde un sistema ortonormal completo para $L_2 \mathfrak{R}$.

Se puede construir la dilatación de frecuencia de onda ortogonal con el suavizado más alto(y el soporte compacto parejo). En la figura 2.8 se muestra el crecimiento de la dilatación o expansión y el cambio de posición [VoB]

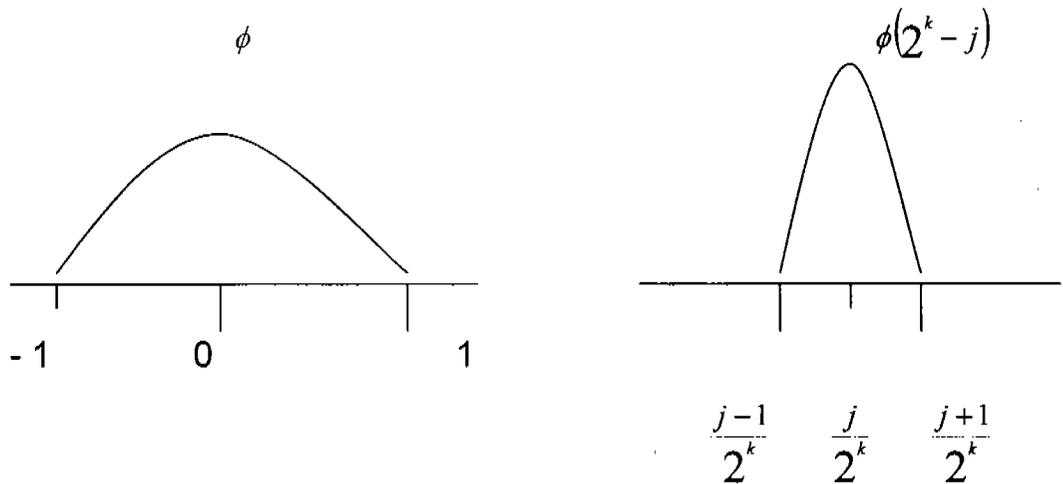


Figura 2.9 Ejemplo de una función ϕ y $\phi(2^k - j)$

Entonces, $\psi_{j,k}$ es una versión a escala de ψ centrado entre los dos valores enteros (lo cual nos da un valor de 2) $j2^{-k}$. Si k es grande positivo, entonces $\psi_{j,k}$ es un crecimiento con soporte pequeño; si k es grande negativo, el soporte de $\psi_{j,k}$ es grande.

El requerimiento de que el conjunto $\{ \psi_{j,k} \} j, k \in \mathbb{Z}$ forma un medio de sistema ortonormal que cualquier función $f \in L_2(\mathbb{R})$ puede ser representada como una serie

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (2.6)$$

con $\langle f, g \rangle := \int f \bar{g} dx$ el producto habitual de dos funciones $L_2(\mathbb{R})$.

Vemos de (2.6) como la construcción de la función f desde el crecimiento de $\psi_{j,k}$. Correspondiendo el crecimiento a pequeños valores de k , lo que aporta a la extensa resolución de f ; correspondiendo eso a valores grandes de k de detalles refinado. La transformada de concentración de onda continua es la suma que cubre toda la señal y su tiempo multiplicada por el escalado, de la versión de desplazamiento de la concentración de onda. Este proceso produce los coeficientes de concentración de onda que son una función de escalado y de su posición.

Se Tienen los siguientes cinco pasos lógicos de una formula sencilla para la creación y representación del análisis de la transformada de concentración de onda continua.

1. Tomar una concentración de onda y compararla a una sección del inicio de la señal original (el resultado dependerá de la forma de concentración de onda).

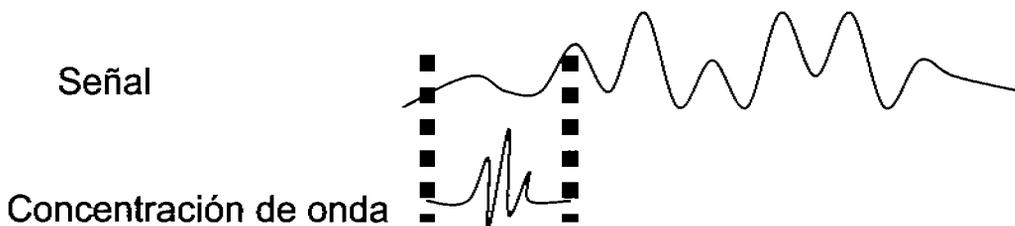


Figura 2.10

2. Calcular un número, c , que representa, como se relaciona estrechamente la concentración de onda con esta sección de la señal. La c más alta similarmente es la más precisa, si la energía de la señal y la energía de la ondulada son iguales a uno, c puede ser interpretada como una relación muy estrecha de coeficientes.
3. Desplazar la Concentración de Onda continuamente y repetir los pasos 1 y 2 hasta cubrir la señal completa

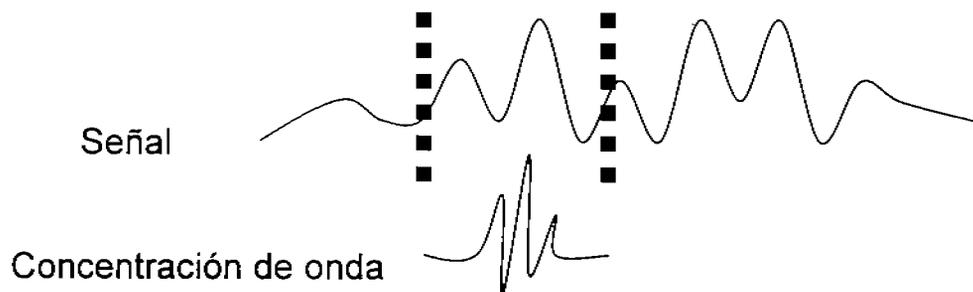


Figura 2.11

4. Escalar (desplazamiento con expansión y compresión simultaneo) y repetir los pasos del 1 al 3

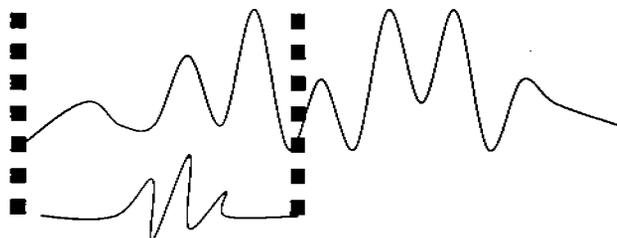


Figura 2.12

5. Repetir del paso 1 al 4 para todo el escalonamiento

Cuando lo hemos realizado, se ha producido los coeficientes a diferente escalado por diferentes secciones de la señal. Los coeficientes constituyen los resultados de una regresión de la señal original representada en la concentración de onda

La representación en el tiempo

Los principales objetivos son: Descubrir los límites y las rupturas. Estudiar el fenómeno del tiempo-corto como procedimientos transitorios

Numero de dimensiones

Las señales más ordinarias normalmente son datos de una dimensión. Sin embargo, el análisis de concentración de onda puede ser aplicado a datos de dos dimensiones (imagen) y, en principio, a datos de dimensiones más altas.

La representación del escalamiento

Como un complemento al análisis de la señal espectral, aparecen formas de señales nuevas. Son señales pequeñas normales que habitualmente son únicas. Los picos de la señal representan una variación local muy rápida. El escalado es un desplazamiento con una expansión o dilatación (y compresión) al mismo tiempo.

Si introducimos el factor de escalado, con frecuencia indicado por la letra a . Al hablar acerca de las sinusoides, por ejemplo, el factor del escalado es muy fácil de verlo: [ReW]

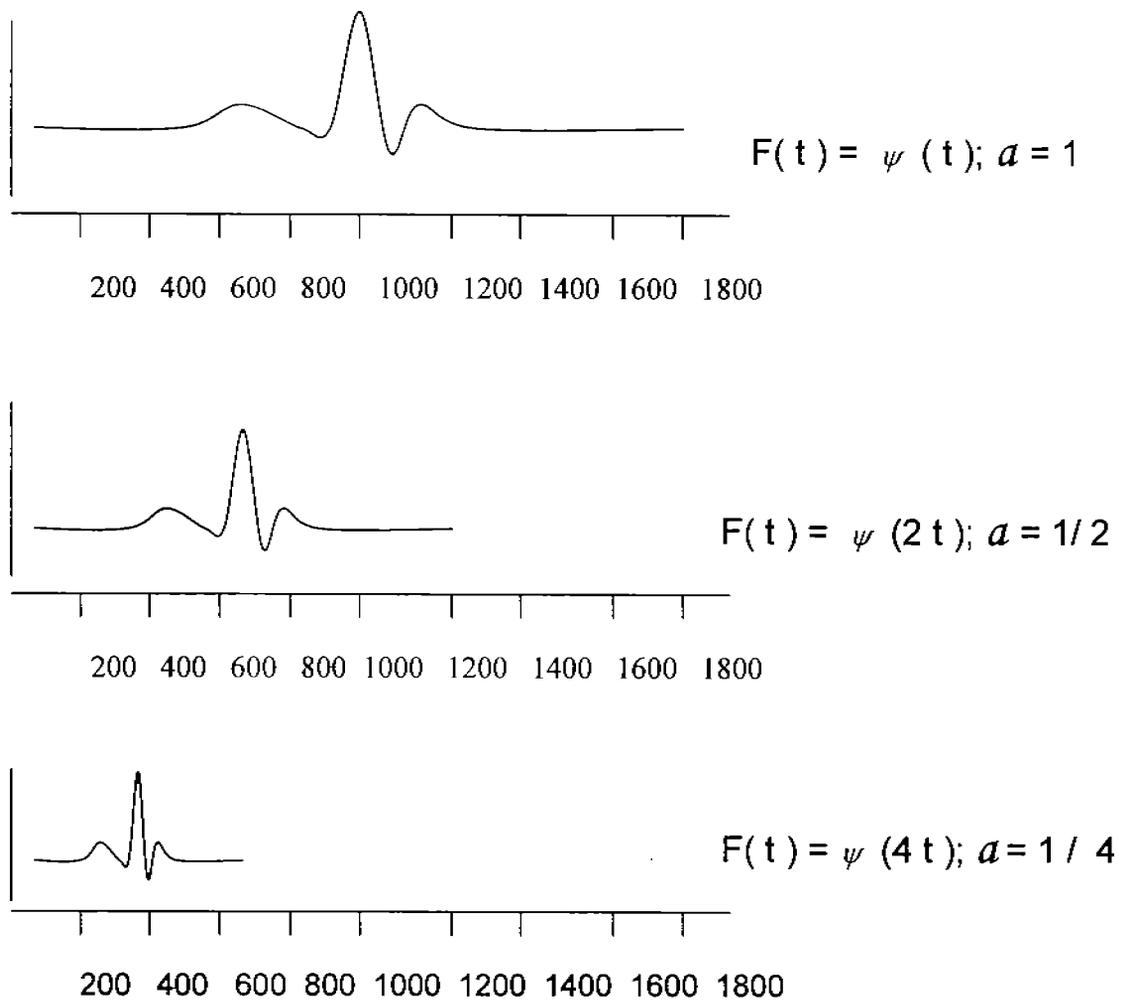


Figura 2.13

El elemento de escalado más pequeño, con la Concentración de onda más pequeña. El elemento de escalado esta relacionado a la frecuencia de la señal.

Escalado y frecuencia

El escalado más alto corresponde a la mayor expansión de concentración de onda. La mayor expansión de concentración de onda, corresponde a la mayor longitud de la porción de la señal, con la que se esta comparando, y por lo tanto el grosor de la señal característica es medida por los coeficientes de concentración de onda. [AAE]

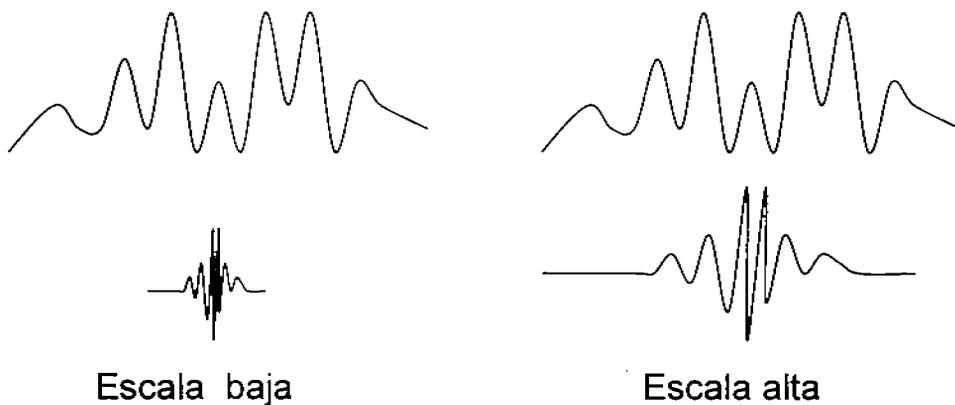


Figura 2.14

De esta, forma se tiene una correspondencia entre los escalados de la concentración de onda y la frecuencia como es revelado por un análisis de la concentración de onda

Escalado bajo a \Rightarrow comprime la concentración de onda \Rightarrow
Rápidamente cambia los detalles \Rightarrow Frecuencia alta w
Escalado alto a \Rightarrow expansión de la concentración de onda \Rightarrow Cambios lentos, características abruptas \Rightarrow Baja frecuencia w

Transformada de espectro de concentración de onda

El tipo de señal con la que trabaja la transformada de espectro de concentración de onda es una señal discreta. Una señal discreta es una función del tiempo con valores ocurriendo en instantes discretos. Generalmente expresamos una señal discreta en la forma $F = (f_1, f_2, \dots, f_N)$, donde N es un par entero positivo en el cual nos referimos como la longitud de F . Los valores de F son los números reales f_1, f_2, \dots, f_N . Estos valores son típicamente valores de medidas de una señal analógica g , medida a los valores de tiempo $t = t_1, t_2, \dots, t_N$. Esto es, los valores de f son [WAL]

$$f_1 = g(t_1), f_2 = g(t_2), \dots, f_N = g(t_N) \quad (2.7)$$

El incremento del tiempo que separa cada uno del par de los valores sucesivos de tiempo es siempre el mismo. Cuando la señal discreta tiene valores definidos en esta dirección utilizamos la frase *muestra de valores espaciados igualmente* o simplemente *valores de muestras*. Un ejemplo importante de valores de muestras es el conjunto de valores de datos almacenados en un archivo de audio de un computador. Otro ejemplo es la grabación de valores de intensidad de sonido en un disco compacto. Un ejemplo sin audio, donde una señal analógica g no es una señal de sonido, es un electrocardiograma digitalizado como todas las transformadas de concentración de onda, es la descomposición de una señal larga en la transformada de espectro en señal discreta de dos señales-bajas. [BCR]

Una de las señales-bajas es un promedio en funcionamiento u orientación, la otra señal-baja es una diferencia en funcionamiento o fluctuación.

La primera señal-baja orientada $a^1 = (a_1, a_2, \dots, a_{\frac{N}{2}})$, para la señal, f es calculada tomando un promedio de los valores calculados de la corrida siguiendo la dirección. El primer valor, a_1 , es calculado tomando un promedio del primer par de valores de $f: (\frac{f_1 + f_2}{2})$, y entonces multiplicándolo por $\sqrt{2}$. Esto es, $a_1 = \frac{(f_1 + f_2)}{\sqrt{2}}$. Similarmente, el siguiente valor a_2 es calculado tomando un promedio del siguiente par de valores de $f: (\frac{f_3 + f_4}{2})$, y multiplicándolo por $\sqrt{2}$. Donde $a_2 = \frac{(f_3 + f_4)}{\sqrt{2}}$.

La formula exacta para los valores de a^1 es [ReW]

$$a_m = \frac{f_{2m-1} + f_{2m}}{\sqrt{2}} \quad (2.8)$$

Para $m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$.

Por ejemplo, suponiendo que f está definido por ocho valores, es decir $f = (4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5)$ en donde tenemos

$$\frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad ; \quad \frac{10+12}{2} = \frac{22}{2} = 11; \quad \frac{8+6}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad ; \quad \frac{5+5}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

La primera señal-baja orientada es $a^1 = (5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$. Este resultado se obtiene utilizando la formula (2.6). Cuando mostramos que la multiplicación por $\sqrt{2}$ es necesaria en el orden para asegurar que la transformada espectral conserva la energía de una señal. La otra señal es llamada *la primera fluctuación*. [HEW]

La primera fluctuación de la señal f , que es denotada por $d^1 = (d_1, d_2, \dots, d_{\frac{N}{2}})$, se calcula tomando una diferencia de corrida del programa en la siguiente dirección del primer valor, d_1 , es calculado tomando la mitad de la diferencia del primer par de valores de $f: \frac{(f_1 - f_2)}{2}$, y multiplicando por $\sqrt{2}$. Esto es, $d_1 = \frac{(f_1 - f_2)}{\sqrt{2}}$. De la misma forma, el siguiente valor d_2 se calcula tomando la mitad de la diferencia del siguiente par de valores de $f: \frac{(f_3 - f_4)}{2}$, y multiplicando por $\sqrt{2}$. Por lo que, $d_2 = \frac{(f_3 - f_4)}{\sqrt{2}}$. Continuando en este sentido todos los valores de d^1 son producidos de acuerdo a la siguiente formula

$$D_m = \frac{f_{2m-1} - f_{2m}}{\sqrt{2}} \quad (2.9)$$

Para $m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$

Por ejemplo, para la señal $f = (4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5)$, la primera fluctuación d^1 utilizando la formula (2.8) es

$$\frac{4-6}{2} = \frac{2}{2} = -1 \Rightarrow -1\sqrt{2} = -\sqrt{2} \quad ; \quad \frac{10-12}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow -1\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{8-6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow 1\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad ; \quad \frac{5-5}{2} = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow 0\sqrt{2} = 0$$

$$d^1 : (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \quad ; \quad f: 4 \quad 6 \quad 10 \quad 12 \quad 8 \quad 6 \quad 5 \quad 5$$

La transformada de espectro de nivel - 1

La transformada de espectro se realiza en varios estados, o niveles. El primer nivel es el delineado de H_1 definido por [AIR]

$$f \xrightarrow{H_1} (a^1 | d^1)$$

de una señal discreta f , a la primera tendencia a^1 y la primera variación d^1 . Por ejemplo de la señal

$$(4 \ 6 \ 10 \ 12 \ 8 \ 6 \ 5 \ 5) \xrightarrow{H_1} \left(a_m = \frac{f_{2m-1} + f_{2m}}{\sqrt{2}} \mid d_m = \frac{f_{2m-1} - f_{2m}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(4 \ 6 \ 10 \ 12 \ 8 \ 6 \ 5 \ 5) \xrightarrow{H_1} (5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2} \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \quad (2.10)$$

Delineando H_1 en (2.6) tiene una inversa. Es el delineado de la inversa de la transformada de la señal $(a^1 | d^1)$ regresa a la señal f , por medio de la siguiente fórmula

$$f = \left(\frac{a_1 + d_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1 - d_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{a_N + d_N}{\sqrt{2}}, \frac{a_N - d_N}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.11)$$

en otras palabras, $f_1 = \frac{(a_1 + d_1)}{\sqrt{2}}$, $f_2 = \frac{(a_1 - d_1)}{\sqrt{2}}$, $f_3 = \frac{(a_2 + d_2)}{\sqrt{2}}$, $f_4 = \frac{(a_2 - d_2)}{\sqrt{2}}$

y así sucesivamente.

Por ejemplo, el siguiente diagrama muestra como al invertir la transformación en (2.11)

$$a^1 : 5\sqrt{2} \quad 11\sqrt{2} \quad 7\sqrt{2} \quad 5\sqrt{2}$$

$$d^1 : -\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad 0$$

$$f : 4 \quad 6 \quad 10 \quad 12 \quad 8 \quad 6 \quad 5 \quad 5$$

$$f : \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}) = 4 \quad \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}) = 6$$

Consideremos ahora que las ventajas aumentan realizando la transformación desde el espectro.

Los pequeños cambios principales

Las magnitudes de los valores de los cambios de las bajas señales son obtenidas significativamente más pequeñas que las magnitudes de los valores de la señal original.

Por ejemplo, para la señal $f = (4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5)$ son ocho valores que tienen un promedio de medida de 7. Por otro lado, las cuatro primeras variaciones $d^1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, el promedio de estas cuatro magnitudes es $0.75\sqrt{2}$. En este caso las magnitudes de los valores de la variación son un promedio de 6.6 veces más pequeñas que las magnitudes de los valores de la señal original.

Conservación y compactación de la energía

Tenemos dos de las más importantes propiedades

- 1) La conservación de la energía de la señal
- 2) La realización de una compactación de la energía de la señal.

Conservación de la energía

Una importante propiedad de la transformada de espectro es la conservación de la energía de la señal. Denotamos la energía de una señal f por medio de la suma del cuadrado de los valores. La energía ε_f de una señal f esta definida por la ecuación

$$\varepsilon_f = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_N^2 \quad (2.12)$$

Si suponemos a $f = (4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5)$ como la señal, entonces calculamos a ε_f como sigue

$$\varepsilon_f = 4^2 + 6^2 + 10^2 + 12^2 + 8^2 + 6^2 + 5^2 + 5^2 = 446$$

Por lo que la energía de f es 446. sin embargo, utilizando los valores para la transformada de espectro del primer nivel

$$(a^1 | b^1) = (5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Encontramos que también $\varepsilon (a^1 | b^1) = 25.2 + 121.2 + \dots + 2 + 0 = 446$

La transformada de espectro de nivel-1 tiene la energía constante guardada.

y conserva la energía $\varepsilon (a^1 | b^1) = \varepsilon_f$ para cada señal f . [Wic]

La razón del porque le hemos dado el nombre de energía a la incógnita ε_f es de que la suma de los cuadrados frecuentemente aparece en física cuando varios tipos de energía es calculada.

Por ejemplo, si una partícula de masa m tiene una velocidad de $V =$

(v_1, v_2, v_3) , entonces la energía cinética es $\frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$, donde la energía

cinética es proporcional a $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \varepsilon_v$ la constante de proporcionalidad

$\frac{m}{2}$ es ignorada obtenemos la incógnita ε_v la cual llamamos la energía de

V.

La conservación de la energía es una propiedad, pero es aun más importante al considerar como la transformada de espectro distribuye de nuevo la energía en una señal comprimiendo más la energía dentro de la tendencia de la sub-señal. Por ejemplo, para la sub-señal $f = (4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5)$ esto es la tendencia de a^1 igual $(5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ por lo tanto, la energía de a^1 es

$$\varepsilon a^1 = 25.2 + 121.2 + 49.2 + 25.2 = 440$$

Por otro lado

La variación d^1 es $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ que tiene energía

$$\varepsilon d^1 = 2 + 2 + 2 + 0 = 6$$

Entonces la energía de la tendencia a^1 cuenta para $\frac{440}{446} = 98.7\%$ de la energía total de la señal, en otras palabras, la transformada de espectro de nivel -1 tiene una distribución de la energía de f de tal forma que sobre el 98% está concentrado dentro de la sub-señal a^1 la cual es la mitad de la longitud de f . Por obvias razones esto es llamado compactación de la energía. La energía $\mathcal{E} d^1$ contribuye solo en pequeñas fracciones de la energía total $\mathcal{E} a^1 + \mathcal{E} d^1$. La tendencia de la energía de la señal-baja a^1 cuenta para un gran porcentaje de la energía de la señal transformada ($a^1 \mid d^1$). La compactación de la energía ocurrirá cuando las magnitudes de las variaciones de los valores sean significativamente más pequeños que los valores de las tendencias.

Justificación de la conservación de la energía

Primero observemos que los términos a_1^2 y d_1^2 en la fórmula

$$\mathcal{E} (a^1 \mid b^1) = a_1^2 + \dots + a_{\frac{N}{2}}^2 + d_1^2 + \dots + d_{\frac{N}{2}}^2$$

Sumando de la siguiente forma

$$a_1^2 + d_1^2 = \left[\frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left[\frac{f_1 - f_2}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{f_1^2 + 2f_1f_2 + f_2^2}{2} + \frac{f_1^2 - 2f_1f_2 + f_2^2}{2} = f_1^2 + f_2^2$$

Similarmente, $a_m^2 + d_m^2 = f_{2m-1}^2 + f_{2m}^2$ para todos los otros valores de m .

Por lo tanto sumando a_m^2 y d_m^2 sucesivamente para cada uno de m , encontramos que

$$a_1^2 + \dots + a_{\frac{N}{2}}^2 + d_1^2 + \dots + d_{\frac{N}{2}}^2 = f_1^2 + \dots + f_N^2$$

En otras palabras, $\mathcal{E} (a^1 | b^1) = \mathcal{E}_f$, que justifica la conservación de la propiedad de la energía.

Concentración de Onda de espectro

Las concentraciones de ondas están definidas como

$$W_1^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right)$$

$$W_2^1 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right)$$

⋮
⋮
⋮

$$W_{\frac{N}{2}}^1 = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.13)$$

Esta concentración de onda de espectro tiene un número de propiedades interesante. Primero, cada una de ellas tiene una energía D1. Segundo, cada una de ellas consiste de una rápida variación justo entre dos valores que no son cero, $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ con un valor de variación de cero. De aquí el nombre de concentración de onda (wavelet). Finalmente todas ellas son muy similares cada una de ellas en la traslación en el tiempo por un número igual de unidades de tiempo de la primera concentración de onda de espectro W_1^1 la segunda concentración de onda de espectro W_2^1 es una traslación hacia delante en el tiempo por dos unidades de W_1^1 y W_3^1 es una

traslación hacia delante en el tiempo por cuatro unidades de W_1^1 y así sucesivamente.

La razón para introducir la concentración de onda de espectro de nivel -1 es la de poder expresar la baja-señal de variación de nivel -1 en una forma más simple utilizando el producto escalar con estas concentraciones de ondas.

El producto escalar es una operación fundamental en dos señales y esta definida como sigue.

Producto escalar

El producto escalar $f \cdot g$ de la señal $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ y $g = (g_1, g_2, \dots, g_N)$ esta definida por

$$f \cdot g = f_1g_1 + f_2g_2 + \dots + f_Ng_N \quad (2.14)$$

Utilizando la concentración de onda de espectro de nivel -1 , podemos expresar los valores para la primera variación d^1 como producto escalar, por ejemplo,

$$d_1 = \frac{f_1 - f_2}{2} = f \cdot W_1^1$$

De forma similar, $d_2 = f \cdot W_2^1$, y así sucesivamente.

Podemos resumir la formula (2.7) en términos del producto escalar con el espectro de la onda permitida de nivel -1

$$d_m = f \cdot W_m^1 \quad (2.15)$$

Para $m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$

Si decimos que el soporte de cada uno de los espectros de concentración de onda es el conjunto de dos índices de tiempo donde la concentración de onda no es cero, entonces tenemos la siguiente versión más precisa de las características más pequeñas de las variaciones:

Propiedad 1. Si una señal f es (aproximadamente) constante sobre el sustento de una concentración de onda de espectro de nivel -1 de \mathcal{W}_k^1 , entonces los valores de las variaciones $d_k = f \cdot \mathcal{W}_k^1$ son (aproximadamente) cero.

Podemos expresar los valores de la tendencia de nivel -1 como producto escalar con ciertas señales elementales.

Estas señales elementales son llamadas escalado de señales de espectro de nivel -1 , y están definidas como [ABM]

$$V_1^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right)$$

$$V_2^1 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right)$$

.

.

.

$$V_{\frac{N}{2}}^1 = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.16)$$

Utilizando el escalado de estas señales de espectro, tenemos los valores $a_1, \dots, a_{\frac{N}{2}}$ para la primera tendencia expresada como producto escalar:

$$a_m = f \cdot V_m^1 \quad (2.17)$$

Para $m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$

El escalado de las señales de espectro es totalmente similar a las concentraciones de ondas de espectro. Todas ellas tienen energía 1 y su soporte consiste de dos índices de tiempo consecutivos. En realidad son convertidos todos ellos por unidades de tiempo de un múltiplo par a partir de la primera señal de escalado V_1^1 . Diferente de la concentración de onda de espectro, sin embargo, los valores promedio de las señales de escalado de espectro no son cero. En realidad, cada una de ellas tiene un valor promedio de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aplicación de concentración de onda

La técnica de concentración de onda la utilizan varios campos de la ciencia regularmente para su estudio por ejemplo:

- . Biología, para el reconocimiento de la membrana celular como en distinguir las membranas normales de las patológicas
- . Metalurgia para la representación de las superficies rugosas
- . Finanzas, para descubrir las cualidades de la rápida variación de valores
- . En internet, para la descripción del tráfico, ideando el tamaño de los servicios

Capítulo 3

Momentos Mecánicos

El concepto de momentos mecánicos es de gran importancia porque es una medida del “ efecto de rotación “ el cual depende del valor de la fuerza y de la distancia de su línea de acción al eje de rotación que produce al ser aplicada sobre un cuerpo rígido. Si se determina y compensa un desequilibrio, es decir el centrado de las masas de un cuerpo rotor de forma que el eje de rotación coincida con el eje de inercia, se consigue que el giro sea concéntrico. **A medida que las máquinas se hacen mas rápidas, el equilibrado debe ser mas preciso ya que se presentan fuerzas y momentos centrífugos** que aumentan en proporción al cuadrado de la velocidad; especialmente es necesario su equilibrado para que no presenten problemas en el momento de atravesar la zona de resonancia de las partes que componen la máquina incluida la zona de anclaje de la misma.

Inercia rotacional

En un cuerpo rígido las partículas del sistema siempre mantienen las mismas posiciones entre si. En el caso en el que el eje de rotación está fijo en una referencia de inercia. [HaR]

Centro de masa

Ahora si tratamos a los objetos que tienen masa, no como si fueran partículas sino en tamaño. En el movimiento de traslación, cada punto del cuerpo sufre el

mismo desplazamiento que cualquier otro en el mismo tiempo, de tal forma que el movimiento de una partícula representa al movimiento de todo el cuerpo.

Pero aun cuando un cuerpo gire o vibre al moverse, hay un punto en dicho cuerpo, el llamado centro de masa, que se mueve de la misma forma que lo haría una simple partícula sujeta a las mismas fuerzas externas.

Consideremos primero el caso simple de un sistema de dos partículas m_1 y m_2 , a distancias x_1 y x_2 , respectivamente, de un origen dado O , como en la fig. 3.1

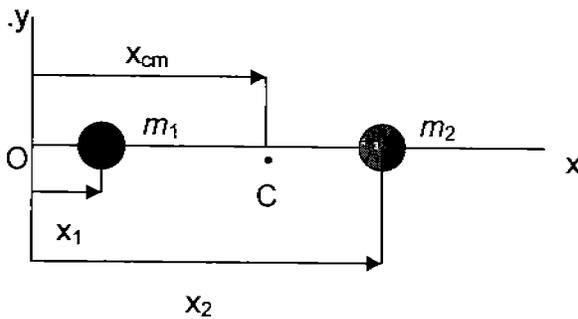


Figura 3.1

Definimos un punto C , el centro de masa del sistema, a una distancia x_{cm} del origen O , donde x_{cm} está definida por

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

El centro de masa está entre las dos masas y la línea que las une. Si toda la masa se concentrara en x_1 ($m_2 = 0$), entonces $x_{cm} = x_1$. Si las masas son iguales, entonces el centro de masa está equidistante de ambas masas.

El producto de la masa total $M (= m_1 + m_2)$ por la distancia al centro de masa, es la suma de los productos semejantes para cada elemento de masas del sistema, es decir
$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2$$

Centro de gravedad

Al trabajar con fuerzas que actúan sobre un cuerpo, encontramos siempre la fuerza gravitacional que actúa sobre él, o sea su peso. En realidad, el peso es el resultado de la acción de atracción de la tierra sobre un cuerpo. Si el cuerpo es una partícula, la acción se representa por una fuerza aplicada a la partícula, pero si el cuerpo tiene dimensiones no despreciables, la acción de la tierra actúa sobre cada partícula, es decir que estas acciones constituyen un sistema de fuerzas aplicadas en diferentes partículas (las partículas que forman el cuerpo). Por lo tanto el peso es el resultado de este sistema de fuerzas y es necesario hallar la posición de ese resultado, dónde debe localizarse para sustituir el sistema como se muestra en la figura 3.2 [Max]

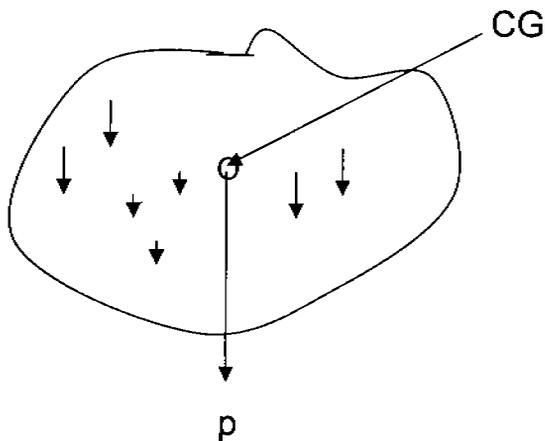


figura 3.2 El centro de gravedad de un cuerpo es el punto donde pasa la línea de acción de un cuerpo

El punto donde el peso debe aplicarse es decir la fuerza única que sustituye todas las acciones de la tierra sobre las diversas partículas que constituyen el cuerpo, se llama **centro de gravedad del cuerpo**. La fuerza con que la tierra atrae todas las partículas de un cuerpo son concurrentes al centro de la tierra. Como el punto donde se encuentran estas direcciones está muy alejado, podemos suponerlas paralelas y el peso del cuerpo sería la resultante de un número muy grande de fuerzas paralelas. Para los cuerpos homogéneos y de forma geométrica definida, *el centro de gravedad estará en el centro de simetría* (si hubiera) del cuerpo. Para los cuerpos homogéneos, de forma esférica, circular, cúbica, etc., el centro de gravedad estará en el centro de estas figuras. En el cono o pirámide, estará sobre el eje o plano de simetría de estos cuerpos etc.

Experimentalmente se puede localizar el centro de gravedad de un objeto por el procedimiento indicado en la figura 3.3: se suspende el objeto sucesivamente de dos puntos diferentes y se busca el punto de intersección de las verticales trazadas por los puntos de suspensión. Si el objeto fuera suspendido en un tercer punto la vertical pasaría también por el centro de gravedad

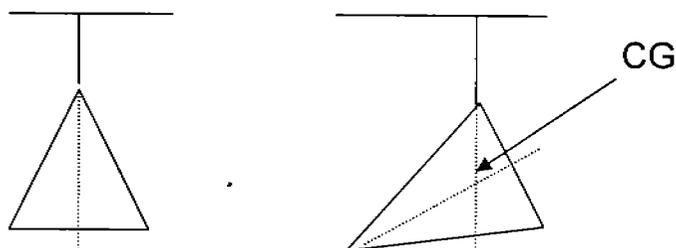


Figura 3.3 Localización experimental de la posición del centro de gravedad de un cuerpo

De acuerdo con la ley de la caída de los cuerpos, descubierta por Newton, la aceleración generada por la fuerza gravitacional esta dirigida hacia el centro de la tierra. La aceleración $g = 9.8 \text{ m / seg}^2$ debida a la gravedad se representa por un vector que apunta hacia el centro de la tierra. Todos los cuerpos, cualesquiera que sean su tamaño, peso o composición química, caen con la misma aceleración

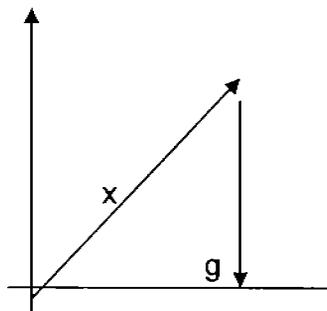


Figura 3.4

La aceleración gravitacional g en línea recta dirigida al centro de la tierra se representa por un vector.

La energía potencial (U) es la energía que un cuerpo tiene en virtud de su posición en relación con otros cuerpos.

$U = g x$, donde x es el peso sobre la superficie de la tierra

$$\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \dot{x} = -g \approx 9.8 \text{ m / seg}^2$$

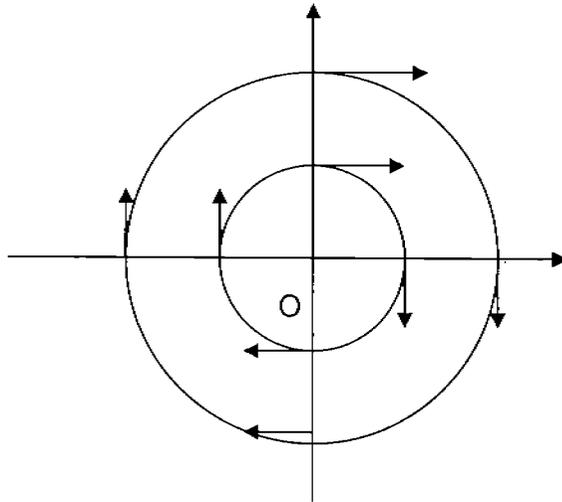


Figura 3.5

En el movimiento de rotación, la velocidad en línea recta está representada por un vector que es tangente a la trayectoria. Si en el movimiento de rotación con respecto a un eje de un cuerpo de masa m representamos a la velocidad en línea recta por un vector en cada posición diferente tenemos una velocidad diferente con el transcurso del tiempo durante la trayectoria, cada una de las partículas o puntos de la masa cambia de posición y de velocidad a cada momento durante la trayectoria con el tiempo, respecto a nuestra referencia, por ejemplo respecto a los ejes de las coordenadas. La fuerza no depende de la velocidad relativa al movimiento.

Movimiento de rotación y movimiento de traslación

Si q es el vector de radio cartesiano de un punto relativo a las coordenadas de un sistema inercial k (que llamaremos estacionario) y Q es el vector de radio cartesiano al mismo punto relativo a las coordenadas de un sistema de movimiento F . [Am]

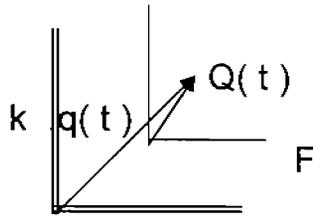


Figura 3.6

Definición: si k y F son espacios euclidianos orientados. Un movimiento de F relativo a k es un mapeado continuo dependiente sobre t : $D_t: F \rightarrow k$ lo cual preserva la métrica y la orientación como se muestra en la siguiente figura.

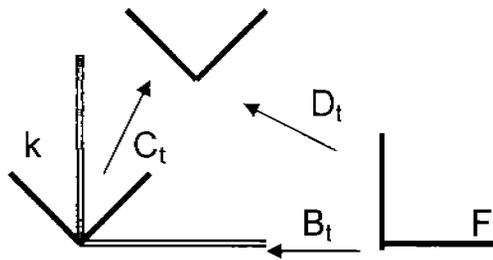


Figura 3.7

El movimiento D_t se descompone como el producto de una rotación B_t y la traslación C_t .

Definición.

Un movimiento D_t es llamado una rotación si tomas como el origen de F al origen de k , si D_t es un operador lineal.

Teorema

Cada movimiento D_t puede ser únicamente la composición de una rotación $B_t: F \rightarrow k$ y una traslación $C_t: F \rightarrow k$

$$D_t = C_t B_t$$

donde $C_t q = q + r(t)$, ($q, r \in k$)

Si $r(t) = D_t 0$, $B_t = C_t^{-1} D_t$ entonces $B_t 0 = 0$

Definición.

Un movimiento D_t es llamado de traslación si el mapeado $B_t: F \rightarrow k$ correspondiendo a la no dependencia sobre $t: B_t = B_0 = B$, $D_t Q = B Q + r(t)$

Llamaremos a k un sistema de coordenadas estacionarias, a F un movimiento único, y $q(t) \in k$ el radio vector de un punto de movimiento relativo al sistema estacionario.

$$\text{Si } q(t) = D_t Q_t = B_t Q(t) + r(t) \quad (3.0)$$

En la figura siguiente, $Q(t)$ es llamado el vector de radio del punto relativo al sistema de movimiento

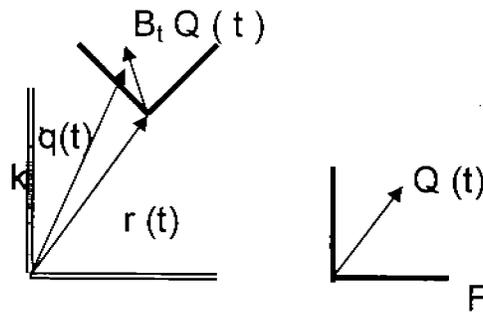


Figura 3.8

El vector de radio de un punto con respecto a los sistemas de coordenadas estacionarias (q) y de movimiento Q .

El vector $B_t Q(t) \in k$ esta situado en diferente espacio de $Q(t) \in F$

Suma de velocidades

Expresando la " velocidad absoluta " \dot{q} en términos del movimiento relativo $Q(t)$ y el movimiento del sistema de coordenadas, D_t . Diferenciando con respecto a t en la formula $q(t) = B_t Q(t) + r(t)$ encontramos una formula para la suma de velocidades.

$$\dot{q} = \dot{B} Q + B \dot{Q} + \dot{r} \quad (3.1)$$

Ordenando para tener más claro el significado de los tres términos en (3.1), consideramos los siguientes casos especiales.

El caso del movimiento de traslación ($\dot{B} = 0$).

En este caso de la ecuación (3.1) obtenemos $\dot{q} = B \dot{Q} + \dot{r}$

Teorema

Si el sistema F se esta moviendo, se tiene un movimiento relativo de traslación a k , entonces la velocidad absoluta es igual a la suma de las velocidades relativas y la velocidad del movimiento del sistema F es

$$v = v' + v_0 \quad (3.2)$$

donde

$v = \dot{q} \in k$ es la velocidad absoluta

$v' = B \dot{Q} \in k$ es la velocidad relativa (distinto de $\dot{Q} \in F$)

$v_0 = \dot{r} \in k$ es la velocidad de movimiento del sistema de coordenadas que se esta moviendo

Velocidad angular

En el caso de una rotación de F la relación de las velocidades relativa y absoluta no es tan simple. Primero consideremos el caso cuando nuestro punto esta en reposo en F ($\dot{Q} = 0$) y el sistema de coordenadas F rota o gira ($r = 0$) en este caso el movimiento del punto $q(t)$ es llamado una *rotación transferida*.

La velocidad del movimiento transferido del punto q en este caso esta dado por la formula \dot{q} como se muestra en la siguiente figura

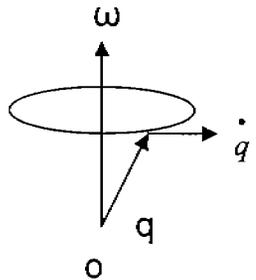


Figura 3.9 Rotación alrededor del eje ω entre el ángulo $\omega| t$.

Teorema

En cada momento de tiempo t , hay una dirección del movimiento de $\omega(t) \in k$ tal que la velocidad transferida esta expresada por la formula $\dot{q} = [\omega, q]$, $\forall q \in k$. La dirección del movimiento ω es llamado la velocidad angular instantánea.

Corolario

Si suponemos que un cuerpo rígido F gira alrededor de un punto estacionario O del espacio k . Entonces en cada momento de este tiempo existe un eje instantáneo de rotación-de la dirección del movimiento pasando en el cuerpo a través de O tal que la velocidad de esos puntos al momento dado de tiempo es igual a cero. La velocidad de los puntos restantes es perpendicular a esta dirección del movimiento y es proporcional a la distancia de ella.

Los ejes instantáneos de rotación en k están dados por la dirección del movimiento de ω .

Velocidad transferida

El caso del movimiento de rotación puro.

Si suponemos que el sistema F gira ($r = 0$), y que un punto en F se esta moviendo ($\dot{Q} \neq 0$) de (3.1) encontramos a

$$\dot{q} = \dot{B}Q + B\dot{Q} = [\omega, q] + v' \quad (3.2)$$

obtenemos lo que se muestra en la figura

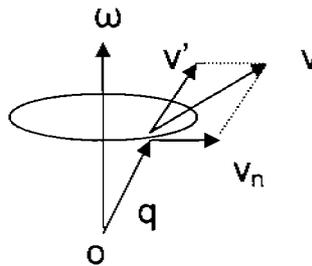


Figura 3.10

donde

$v = \dot{q} \in k$ es la velocidad absoluta

$v' = B\dot{Q} \in k$ es la velocidad relativa

$v_n = \dot{B}Q = [\omega, q] \in k$ es la velocidad transferida de rotación

Teorema

Si un sistema de movimiento F relativamente gira en $O \in k$, entonces la velocidad es igual a la suma de la velocidad relativa y la velocidad transferida:

$$v = v' + v_n$$

Fuerzas inerciales y la fuerza de coriolis

Sistema de coordenadas del movimiento por traslación

Teorema

En un sistema de coordenadas F con movimiento de traslación relativo a un sistema inercial k , el lugar del movimiento de un sistema mecánico se toma como si el sistema de coordenadas fuera inercial en cada punto de la masa m actúa una suma de fuerzas inercial: $F = -m\ddot{r}$, donde $\ddot{r} = -g$ es la aceleración del sistema F .

Prueba

Si $Q = q - r(t)$, entonces $m\ddot{Q} = m\ddot{q} - m\ddot{r}$. El efecto de la traslación del sistema de coordenadas esta reducido en esa dirección a la apariencia de una suma de campos de fuerza homogéneos $-m w$, donde w es la aceleración del origen.

Coordenadas del sistema de rotación

Sea $B_t : F \rightarrow k$ una rotación de las coordenadas del sistema F relativo a las coordenadas del sistema estacionario k . Designaremos por $Q(t) \in k$ la dirección del movimiento de radio de un punto, en las coordenadas del sistema de movimiento, y por $q(t) = B_t Q(t) \in k$ la dirección del movimiento de radio en el sistema estacionario.

La dirección de la velocidad angular en las coordenadas del sistema de movimiento esta designado por Ω . Suponemos que el movimiento del punto q en k esta sujeto a la ecuación de Newton $m \ddot{q} = f(q, \dot{q})$.

Teorema

En las coordenadas de un sistema de rotación, el movimiento se toma como si en el lugar actuara la suma de tres fuerzas inerciales sobre cada punto del movimiento Q de masa m :

1. la fuerza inercial de rotación : $m [\dot{\Omega}, Q]$
2. la fuerza de coriolis : $2 m [\Omega, \dot{Q}]$
3. la fuerza centrífuga : $m [\Omega, [\Omega, Q]]$

$$\text{entonces } m \ddot{Q} = F - m [\dot{\Omega}, Q] - 2m [\Omega, \dot{Q}] - m [\Omega, [\Omega, Q]] \quad (3.4)$$

$$\text{donde } BF(Q, \dot{Q}) = f(BQ, (B\dot{Q})) \quad (3.5)$$

La primera de las fuerzas inerciales se observa solo en la rotación no uniforme. La segunda y la tercera están presentes cuando esta en rotación constante.

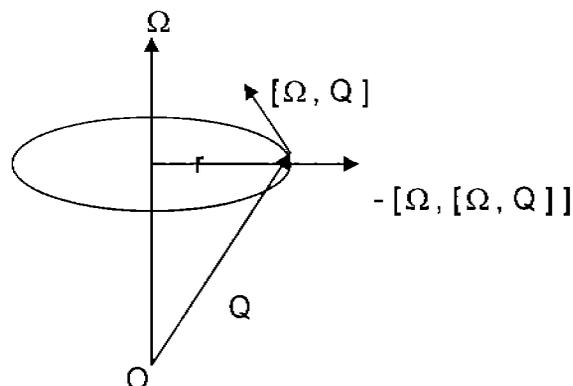


Figura 3.11 Fuerza centrífuga de inercia

La fuerza centrífuga como se muestra en la figura esta siempre dirigida hacia fuera de los ejes instantáneos de rotación Ω ; tiene magnitud $|\Omega|^2 r$, donde r es la distancia a estos ejes.

Estas fuerzas no dependen de la velocidad del movimiento relativo, y se comportan como si actuaran sobre un cuerpo de apoyo en el sistema de coordenadas F .

La fuerza de coriolis depende de la velocidad \dot{Q} . El hemisferio norte de la tierra desvía cada cuerpo que se esta moviendo a lo largo de la tierra hacia la derecha, y en cada caída del cuerpo en dirección de este. [Arn]

Teorema

El centro de masas de un sistema en movimiento es como si todas las masas estuvieran concentradas en él y todas las fuerzas estuvieran aplicadas a él

$$\left(\sum m_i\right)\dot{r} = p \quad \text{por lo tanto} \quad \left(\sum m_i\right)\ddot{r} = \frac{dp}{dt} = \sum_i F_i \quad (3.6)$$

Corolario. Si un sistema es cerrado, entonces su centro de masa se mueve uniformemente y linealmente

Leyes de la conservación de la energía

Definición

La energía cinética de un punto de masa m es $T = \frac{m\dot{r}^2}{2}$

Definición

La energía cinética de un sistema de puntos de masa es la suma de las

energías cinéticas de los puntos $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2}$

Donde m_i son las masas de los puntos y \dot{r}_i son sus velocidades.

Teorema

El incremento en la energía cinética de un sistema es igual a la suma del trabajo de todas las fuerzas actuando sobre los puntos del sistema.

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{r}_i, \ddot{r}_i) = \sum_{i=1}^n (\dot{r}_i, m_i \ddot{r}_i) = \sum_{i=1}^n (\dot{r}_i, F_i). \quad (3.7)$$

sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ el vector de radio de un punto en la configuración del espacio, y $F = (F_1, \dots, F_n)$ el vector de la fuerza, en otras palabras, el incremento en la energía cinética es igual al trabajo de la " fuerza " F sobre la trayectoria $r(t)$ en la configuración del espacio.

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{r(t_0)}^{r(t_1)} (F, dr) = \int_0^1 (\dot{r}, F) dt \quad (3.8)$$

Si suponemos que el campo gravitacional de la tierra es uniforme, podemos demostrar que todas las fuerzas de los pesos individuales que actúan sobre un cuerpo pueden reemplazarse por una sola fuerza Mg que actúa hacia abajo en el centro de masa del cuerpo.

Esto es equivalente a demostrar que los efectos aceleradores de las fuerzas de los pesos individuales que actúan hacia abajo pueden balancearse con una sola fuerza $F (= -Mg)$ que actúa hacia arriba, siempre que esta fuerza F esté aplicada en el centro de masas del cuerpo. [HaR]

La figura 3.12 muestra dos partículas típicas o elementos de masa m_1 y m_2 , escogidos entre los n elementos de dicha clase en los cuales se ha dividido al cuerpo rígido. Una fuerza hacia arriba $F (= -M g)$ está aplicada en un cierto punto O . El cuerpo está en equilibrio mecánico si y sólo si el punto O es el centro de masas.

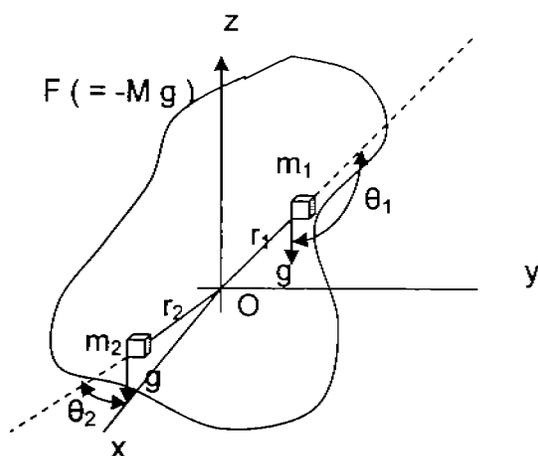


Figura 3.12 Un cuerpo irregular está dividido en n elementos de masa de los cuales se muestran dos elementos típicos m_1 y m_2 . El cuerpo puede mantenerse en equilibrio de traslación y rotacional con una sola fuerza $F (= -M g)$ dirigida hacia arriba y aplicada en el centro de masas del cuerpo. La condición de equilibrio $F = F_1 + F_2 + \dots = 0$ se satisface desde luego por nuestra elección de la magnitud y la dirección de F .

Es decir

$$F + m_1 g + m_2 g + \dots + m_n g = 0, \quad (3.9)$$

O

$$F = - (m_1 + m_2 + \dots + m_n) g = - Mg \quad (3.10)$$

La segunda condición del equilibrio es de que la torca es igual a cero ($\tau = 0$) en cualquier punto del cuerpo. Escogiendo a O como origen aseguramos que la torca de F respecto a ese punto es cero, porque el brazo del momento de F es cero para este punto.

La torca respecto a O debido a la atracción gravitacional sobre los elementos de masa es

$$\tau = r_1 \times m_1 g + r_2 \times m_2 g + \dots + r_n \times m_n g$$

$m_1, m_2,$ etc. Son escalares podemos escribir como

$$\tau = m_1 r_1 \times g + m_2 r_2 \times g + \dots + m_n r_n \times g$$

factorizando
$$\tau = (m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n) \times g = \left(\sum_1^n m_i r_i \right) \times g$$

en donde la suma abarca a todos los elementos de masa que constituyen al cuerpo.

Las fuerzas gravitacionales que actúan sobre los elementos de masas individuales que constituyen un cuerpo rígido son equivalentes en sus efectos de traslación y rotación a una sola fuerza ($F = -Mg$), el peso total del cuerpo que actúa sobre el centro de masas. Obtenemos el mismo resultado si el cuerpo es continuo y lo dividimos en un número infinito de partículas. Esto se puede lograr por los métodos del cálculo integral. El punto de aplicación de la fuerza gravitacional resultante equivalente se llama el *centro de gravedad*.

Las fuerzas distribuidas son proporcionales a las áreas o volúmenes elementales asociadas a ellas. Por lo tanto, la resultante de estas fuerzas puede obtenerse sumando las velocidades de las diferentes direcciones de las áreas o volúmenes correspondientes con respecto al tiempo, y el momento de la resultante respecto a un eje dado puede determinarse calculando los primeros momentos de las diferentes direcciones de las velocidades con respecto al tiempo de las áreas o volúmenes respecto a ese eje.

Las magnitudes de las fuerzas distribuidas dependen de las diferentes direcciones de velocidades de cada elemento con respecto al tiempo del área sobre el que actúan y también de la distancia del área a un eje dado. Más exactamente, la magnitud de la fuerza de las diferentes velocidades de las partículas con respecto al tiempo por unidad de área varía linealmente con la distancia al eje.

Si convenientemente escogemos los ejes de coordenadas x, y, z las fuerzas de las velocidades de las diferentes direcciones de las partículas elementales con respecto al tiempo se distribuyen sobre un área o volumen y varían linealmente con la distancia al eje. Observando por ejemplo que el cuadrado de la distancia r del elemento dm al eje y es $z^2 + x^2$, expresamos el momento de inercia del cuerpo respecto al eje y como $I_y = \int r^2 dm = \int (z^2 + x^2) dm$; con respecto al eje x $\int (y^2 + z^2) dm$; con respecto al eje z $\int (x^2 + y^2) dm$.

Esta integral es el momento de inercia del cuerpo.

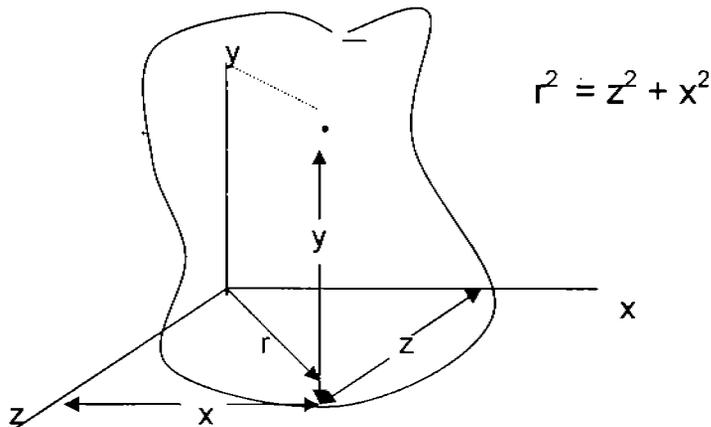


Figura 3.13

Imaginemos un cuerpo rígido girando con rapidez angular ω alrededor de un eje que está fijo en una referencia de inercia específico, como se ve en la figura 3.14. Cada partícula de dicho cuerpo giratorio tiene una cierta cantidad de energía cinética. Una partícula de masa m con una rapidez angular ω alrededor del eje a una distancia r del eje de rotación se mueve en un círculo de radio r . Su energía cinética es por lo tanto $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$.

La energía cinética total del cuerpo será la suma de las energías cinéticas de sus partículas. [HaR]

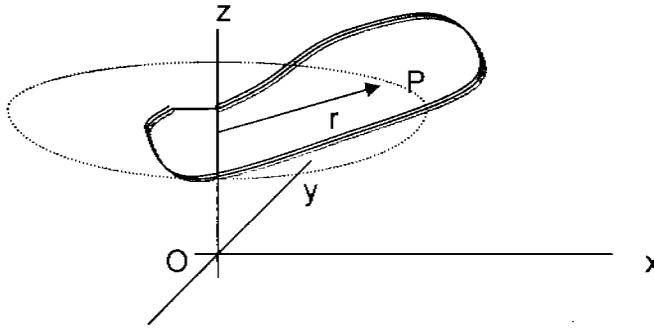


Figura 3.14

Si el cuerpo es rígido cada partícula tiene diferente dirección y velocidad de partículas con respecto al tiempo. Los radios r pueden ser diferentes para diferentes partículas. Por lo tanto, la energía cinética total K del cuerpo giratorio puede escribirse como

$$K = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2)$$

El término $\sum m_i r_i^2$ es la suma de los productos de las diferentes direcciones de las velocidades de las masas de las partículas por los cuadrados de sus respectivas distancias al eje de rotación. Si designamos esta cantidad por I tenemos

$$I = \sum m_i r_i^2$$

que se llama la inercia rotacional o *momento de inercia* del cuerpo respecto a dicho eje particular de rotación.

La inercia rotacional de un cuerpo depende del eje particular sobre el cual está girando, lo mismo que de la forma del cuerpo y de como está distribuida su masa. Se expresa habitualmente en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ o $\text{slug}\cdot\text{pie}^2$

Para un cuerpo que no está compuesto de masas puntuales discretas sino que está formado por una distribución continua de materia, la suma en $I = \sum m_i r_i^2$ se convierte en una integración. Imaginemos el cuerpo subdividido en cambios de dirección y velocidad con respecto al tiempo en cada instante (elementos infinitesimales), cada uno de ellos de masa dm . Sea r la distancia de dichos elementos al eje de rotación. Entonces la inercia rotacional se obtiene de

$$I = \int r^2 dm \quad (3.11)$$

donde la integral abarca todo el cuerpo.

Para cuerpos de forma irregular, las integrales pueden ser difíciles de evaluar. Para cuerpos de formas geométricas sencillas, las integrales son relativamente fáciles cuando se escoge como eje de rotación uno de los ejes de simetría.

Dinámica rotacional

Al estudio de las causas de la rotación se le llama dinámica rotacional Masa vs Peso. Muchos de los errores que ocurren en los cálculos de las propiedades de la masa, son el resultado de la confusión en las unidades utilizadas, y, en particular, de los conceptos de masa y peso.

MASA es la CANTIDAD DE MATERIA presente en un objeto (su inercia), mientras que PESO es la FUERZA que empuja al objeto hacia abajo, en una escala función de la aceleración de la gravedad. La masa de un objeto es una cantidad fija; su peso varía en función de la aceleración de la gravedad.

Las propiedades de la masa de un objeto, están relacionadas con la masa, no con el peso. Las propiedades de la masa no cambian cuando un vehículo espacial abandona la atracción de la tierra y entra en el espacio exterior. La masa está relacionada con el peso mediante la segunda ley de Newton:

$$W = M g \quad (3.12)$$

Donde W = el peso del objeto (fuerza de la gravedad)

M = la masa del objeto

g = la aceleración de la gravedad en la tierra

Si se utilizan diferentes palabras para designar peso y masa, el problema de distinguirlos se minimiza. El nuevo Sistema Métrico Internacional (SI), utiliza la palabra "Newton" para el peso y la palabra "Kilogramo" para la masa. El Newton está definido como la fuerza requerida para acelerar 1 Kilogramo de masa, 1 metro por segundo². La industria aeroespacial, ha creado una unidad de masa llamada "Slug". Se requiere una fuerza de 1 libra para acelerar 1 Slug de masa a 1 ft/sec². Si un objeto pesa 32.174 libras en la tierra, su masa es de 1 Slug.

Por desgracia, no todos los sistemas de unidades diferencian adecuadamente entre masa y peso. En los EE.UU., la palabra "libra", se utiliza comúnmente para medir peso y masa, resultando esto en confusión y errores al calcular las propiedades de la masa y la respuesta dinámica. La unidad de masa "libra", es dimensionalmente incorrecta. La LIBRA es SIEMPRE FUERZA o PESO. Si el término "libra" es utilizado para describir una masa cuyo peso es una libra, esta cantidad DEBE ser dividida por la aceleración de la gravedad, en las unidades apropiadas, para convertirla en dimensiones de masa apropiadas, si se va utilizar el cálculo de las propiedades de la masa.

Para evitar confusiones o ambigüedades, un análisis de dimensiones fundamentales, confirmarán si se están usando las unidades de medida correctas, y si los factores de conversión se están aplicando correctamente para alcanzar los resultados deseados. Los diferentes sistemas métricos son, fundamentalmente, sistemas de MASA, LONGITUD y TIEMPO, con la FUERZA definida o derivada a partir de ellas. Los sistemas de los EE.UU. son sistemas de FUERZA, LONGITUD y TIEMPO, con la masa definida o derivada a partir de ellas. No existe un sistema de medida, dimensionalmente correcto, que reconozca la libra de masa.

La Tabla 1 muestra los tres sistemas de medida más extendidos y utilizados. El tiempo está en segundos.

SISTEMAS DE MEDIDA DIMENSIONALMENTE CORRECTOS				
	MASA	LONGITUD	PESO	g
SI (métrico)	Kg	Metro (m)	Newton	9.81 m/s²
U.S. (pulgada)	(lb-s²)/386.09 in	Pulgada (" , in)	Libra	386.088 in/s²
U.S. (pie)	Slug	Pie (ft)	Libra	32.174 ft/s²

TABLA 1

El sistema U.S. de pulgadas, no tiene nombre para la masa cuyo peso es una libra. No obstante, la aplicación de $W = Mg$, demuestra que el sistema es dimensionalmente correcto.

La aceleración de la gravedad, utilizada para convertir el peso en masa, es una cantidad fija que ha sido establecida como norma internacional. No se debe usar la aceleración local (que varía de 32.09 a 32.26 ft/s², a menos que se utilice una masa conocida para medir la confianza, o en alguna otra aplicación específica.

Ejes de referencia

Las propiedades de la masa que no son el peso, no tienen sentido a menos que los datos incluyan los ejes de referencia utilizados en los cálculos de las mismas. Establecer que la coordenada de un centro de gravedad (CG) es "3.950 in", no significa nada a menos que el eje de referencia de ese valor esté también esta definido.

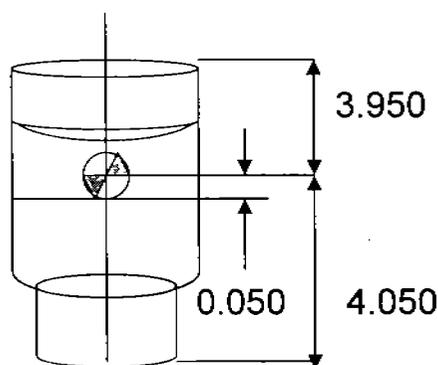


Figura 3.15

Se puede escoger cualquier eje de referencia. Los valores numéricos para las propiedades de la masa, dependerán de la localización de los ejes de referencia. Por ejemplo, Figura 3.15 el centro de gravedad de un cilindro puede estar a 4.050 in de un extremo, a 0.050 in del centro, y a 3.950 in del otro extremo. Además, cada extremo del cilindro puede no ser perpendicular al eje central, de manera que el "extremo" del cilindro debería estar definido.

Tres ejes de referencia mutuamente perpendiculares, son necesarios para definir la localización del centro de gravedad de una objeto. Estos ejes se seleccionan, habitualmente, para coincidir con los bordes del objeto, con detalles localizados, o con el centro geométrico del objeto.

El momento de inercia, es una cantidad rotacional y requiere sólo un eje para su referencia. Aunque puede ser, teóricamente, un eje en las inmediaciones del objeto, este eje es, habitualmente, el centro geométrico, el centro rotacional (si el objeto gira sobre soportes), o un eje principal (ejes que pasan por el centro de gravedad escogidos así para que los productos de inercia sean cero).

El producto de inercia requiere tres ejes mutuamente perpendiculares. Uno de esos ejes debe ser un eje rotacional o una línea geométrica central.

Para obtener la máxima precisión, es importante utilizar ejes de referencia que puedan ser localizados con un alto grado de precisión. Si el objeto es un elemento aeroespacial, recomendamos que sea diseñado con dos anillos de referencia por sección que definen los ejes de referencia. Estos anillos pueden ser puntos de acoplamiento del objeto con otros elementos o secciones de la nave espacial o el cohete, o pueden ser anillos proporcionados únicamente para el alineado y / o la medida de propiedades de la masa.

En el caso particular del centro de gravedad y el producto de inercia, la precisión del cálculo (y la consiguiente precisión de la medida del objeto) es tan buena como la precisión de la forma de localizar los ejes de referencia. Hemos descubierto que la principal fuente simple de error en los cálculos de las propiedades de la masa es la inexactitud de la referencia.

Los datos dimensionales proporcionados al ingeniero de las propiedades de la masa, deben ser lo suficientemente precisos para permitir que las tolerancias de las propiedades de la masa sean respetadas. Por ejemplo, si se le pide hacer cálculos precisos de propiedades de la masa de un proyectil, lo primero que debe hacer, es determinar el error debido al desalineamiento de referencia.

Si se le pide calcular el CG con una precisión de 0.001 in en el eje de referencia no esta redondeado por debajo de 0.003 in, no puede realizar el cálculo. No tiene sentido realizar un análisis detallado de los componentes de un objeto cuando el error de referencia afecta a la precisión de los cálculos. La localización de los ejes de referencia, debe ser de la más alta precisión.

Si tu trabajo consisten en calcular las propiedades de la masa de un vehículo estructurado en secciones, debe darle una gran importancia a la precisión del alineado de las secciones cuando están montadas. A menudo, este puede ser el mayor factor único que limite el grado de equilibrado (si el vehículo fue equilibrado por secciones porqué es demasiado grande para el equilibrante). El error de alineado se amplifica para cohetes largos: una inclinación de 0.001 in introducida por error de alineado en un diámetro de 12 in, puede resultar en un error de 0.007 in en el CG, en un sección larga de cohete de 15 ft.

Selección de la posición de los ejes

El primer paso en el cálculo de las propiedades de la masa, es establecer la localización de referencia de los ejes X, Y y Z. La precisión de los cálculos (y la posterior precisión en la medida para verificar los cálculos), dependerá enteramente de una buena selección de dichos ejes.

Teóricamente, estos ejes pueden situarse en cualquier lugar relativo al objeto considerado, ya que los ejes son mutuamente perpendiculares.

En la vida real, a menos que los ejes sean situados en un lugar que se pueda medir e identificar con precisión, los cálculos no tienen sentido.

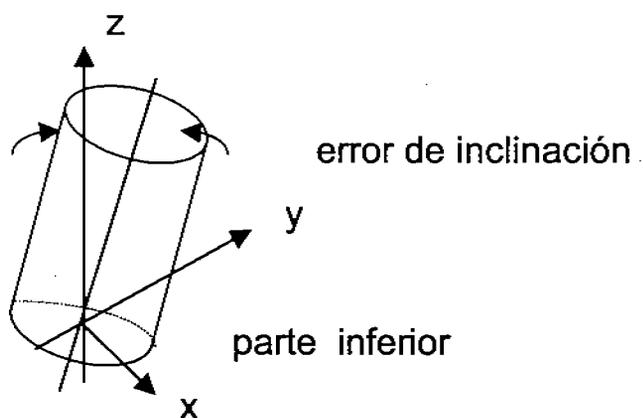


Figura 3.16

Los ejes de la figura 3.16 muestran el efecto de la inclinación y no constituyen una buena referencia porque un pequeño error en la cuadratura de la parte inferior del cilindro, provoca que el objeto se incline respecto al eje vertical.

Los ejes de abajo, constituyen una mejor elección. Los ejes de referencia deben situarse en puntos físicos del objeto que puedan ser medidos con precisión. Aunque la línea central de un anillo puede estar en el aire, puede ser medida con precisión y constituye, por tanto, una buena referencia. Un eje debe pasar siempre a través de una superficie fuertemente asociada con la estructura del objeto.

En la figura 3.17 sería mejor localizar el origen al final del objeto, para evitar la holgura dimensional relativa al final del objeto,

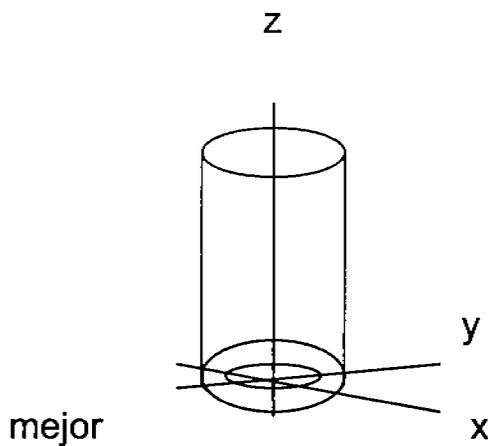


Figura 3.17

CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA

El momento de inercia (Moment of inertia, "MOI") es similar a la inercia, excepto en que se aplica a la rotación más que al movimiento lineal. La inercia es la tendencia de un objeto a permanecer en reposo o a continuar moviéndose en línea recta a la misma velocidad. La inercia puede pensarse como una nueva definición de la masa.

El momento de inercia es, entonces, masa rotacional. Al contrario que la inercia, el MOI también depende de la distribución de masa en un objeto. Cuanto más lejos está la masa del centro de rotación, mayor es el momento de inercia. Una fórmula análoga a la segunda ley de Newton del movimiento, se puede describir para la rotación:

- $F = Ma$ (F = fuerza; M = masa; a = aceleración lineal)
- $T = IA$ (T = torsión; I = momento de inercia; A = aceleración rotacional)

Selección de la posición de los ejes de referencia

Para nuestra referencia por ejemplo se necesitan tres ejes para definir el centro de gravedad, pero sólo se necesita un eje para definir el momento de inercia. Aunque cualquier eje puede ser de referencia, es deseable seleccionar los ejes de rotación del objeto como referencia. Si el objeto está montado sobre soportes, el eje está definido por la línea central de los soportes. Si el objeto vuela en el espacio, entonces este eje es un "eje principal" (ejes que pasan por el CG y están orientado de forma que el producto de inercia alrededor de ese eje es cero). Si el eje de referencia se va a utilizar para calcular el momento de inercia de una forma compleja, se debe elegir un eje de simetría para simplificar el cálculo. Este eje puede ser trasladado, más tarde, a otro eje si se desea, utilizando las reglas descritas en el apartado "Teorema de los ejes paralelos".

Signo / polaridad de momento de inercia

Los valores del centro de gravedad pueden ser positivos o negativos, y de hecho, su signo depende de la elección de los ejes de referencia.

Los valores del momento de inercia, sólo pueden ser positivos, ya que la masa sólo puede ser positiva.

Unidades del Momento de Inercia

En los Estados Unidos, la palabra "libra" se utiliza para designar tanto el peso como la masa. Si la unidad de peso es la libra, no puede ser la unidad de masa, ya que esto violaría la segunda ley de Newton. No obstante, por razones ancestrales, en los EEUU, un objeto que pesa 1 libra, tiene 1 libra de masa. Esto lleva a usar unidades de momento de inercia como lb in^2 , donde la libra se refiere al peso del objeto, más que a su masa. Las unidades correctas del momento de inercia, son [BoW]

$$\text{MASA} \times \text{DISTANCIA}^2$$

Cuando las lb in^2 o las lb ft^2 se utilizan para definir el MOI o el POI, la cantidad DEBE ser dividida por el valor apropiado de "g", para que sean dimensionalmente correctos en cálculos de ingeniería. De nuevo, un análisis dimensional, confirmará si se están utilizando las unidades correctas. La siguiente tabla muestra algunas de las unidades utilizadas en la actualidad para el MOI y el POI:

UNIDAD	COMENTARIOS
lb in^2	$\text{lb} = \text{peso}$; debe dividirse por $g = 386,088 \text{ in/s}^2$
lb in s^2	$\text{lb in s}^2 = \text{distancia} \times \text{peso} / g$; $\text{peso} / g = \text{masa}$; dimensionalmente correcto
slug ft^2	$\text{slug} = \text{masa}$; dimensionalmente correcto
Kg m^2	$\text{Kg} = \text{masa}$; dimensionalmente correcto

Las unidades más utilizadas en los EEUU, son las lb in², incluso siendo dimensionalmente incorrectas.

REGLA 1. Si el momento de inercia o el producto de inercia se expresan en las siguientes unidades, pueden ser utilizadas directamente en cálculos de ingeniería: slug ft², lb in s², Kg m², oz in s²

REGLA 2. Si el momento de inercia o el producto de inercia se expresan en las siguientes unidades, entonces, sus valores deben ser divididos por el valor apropiado de "g" para hacerlos dimensionalmente correctos. **lb ft², lb in², oz in²**

Calculando el momento de inercia

El MOI (a veces llamado el segundo momento), de una masa puntual, alrededor de un eje es:

$$I = Mr^2 \quad (3.13)$$

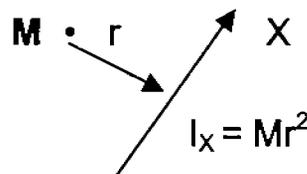


Fig. 3.18 Punto de masa

donde:

- $I = \text{MOI}$ (slug ft² u otras unidades de masa longitud)
- $M = \text{masa del elemento}$ (slug u otra unidad de masa)
- $r = \text{distancia de la masa puntual al eje de referencia.}$

Para varias masas puntuales o una masa distribuida, la definición general es:

$$I = \text{Integral } (r^2)$$

Fórmula básica - Radio de giro

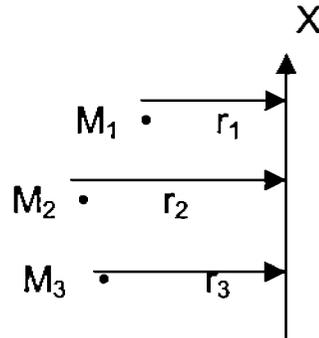


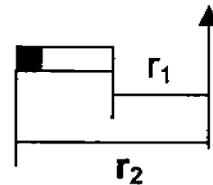
Fig. 3.19 Puntos de masas

El momento de inercia de cualquier objeto, puede ser expresado

por la fórmula:
$$I_x = \sum_0^n Mr^2$$

Fig. 3.20 Masa distribuida

$$I = M k^2$$



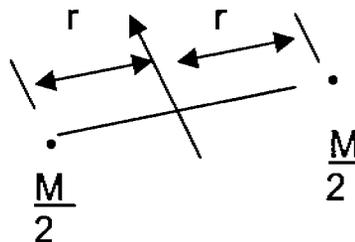
$$I_x = \int_r^{r^2} r^2 dM$$

donde:

- I = momento de inercia
- M = masa (slug u otra unidad de masa dimensionalmente correcta)
- k = longitud (radio de giro) (ft)

La distancia (k) se llama radio de giro y se refiere a la distribución de masas.

El método para calcular esta cantidad, se describe en las siguientes secciones como primer ejemplo, considérese un cuerpo consistente en dos masas puntuales de masa $\frac{M}{2}$, separadas una distancia DE $2r$. El eje de referencia pasa a través del punto medio (CG). Las masas tienen cada una un MOI de $\frac{Mr^2}{2}$. Su MOI combinado es Mr^2 . El segundo ejemplo muestra un tubo fino de radio r . Por simetría, el CG cae sobre el eje central. De nuevo, la masa está localizada a una distancia r del eje de referencia, así que el MOI es Mr^2 . en estos ejemplos, el radio de giro es r .



$$I = \frac{M}{2} r^2 + \frac{M}{2} r^2 = M r^2 \quad (3.14)$$

Fig. 3.21

Esto nos lleva a la siguiente

Definición: "El radio de giro de un objeto, respecto de un eje que pasa a través del CG, es la distancia desde el eje en el cual se puede concentrar toda la masa del objeto sin cambiar su momento de inercia. El radio de giro es siempre medido desde el CG."

Teorema de los ejes paralelos

Si en el ejemplo anterior hubiésemos querido determinar el MOI del objeto alrededor del eje X_a en lugar de alrededor del eje X , que pasa por el CG, entonces, el valor puede determinarse utilizando el **teorema de los ejes paralelos**: $I_a = I + d^2 M$

Como $I = k^2 M$, entonces $I_a = M (d^2 + k^2)$

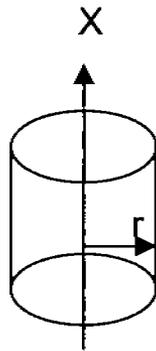


Fig. 3.22

El teorema de los ejes paralelos, se utiliza frecuentemente al calcular el MOI de un cohete u otro dispositivo aeroespacial.

Primero se mide o se calcula alrededor del eje que pasa por el CG, el MOI de cada componente del cohete, y el teorema de los ejes paralelos se utiliza para determinar el MOI total del vehículo con estos componentes montados en el lugar apropiado. El offset "d"(el objeto "d" fuera de lugar) es la distancia del CG del componente a la línea central del cohete.

Aproximaciones de Boynton

Como el momento de inercia de un objeto desplazado de su eje de referencia es proporcional a $(d^2 + k^2)$, podemos hacer dos observaciones que simplificarán el trabajo de calcular el MOI:

REGLA 1. Si el radio de giro de un objeto es menor que el 1% de distancia offset "d", entonces el MOI del objeto alrededor de su CG se puede ignorar cuando se calcula el MOI total, y el valor es d^2 . Por ejemplo, si un giroscopio con una masa de 0.1 slug, está situado cerca de la superficie externa de un cohete, y el offset respecto al CG del giroscopio es de 3 ft, mientras que el radio de giro del giroscopio es sólo de 0.02 ft, entonces el MOI alrededor de la línea central del cohete, debido al giroscopio es $d^2 = 0.9$ slug ft². El error usando esta aproximación es menor del 0.01%.

REGLA 2. Si el radio de giro de un objeto es más de 100 veces de la distancia de offset "d", entonces el offset de un objeto puede ser ignorado al calcular el MOI total, y el valor es $k^2 M$. Por ejemplo, si el motor de un cohete, con masa de 100 lb está situado cerca de la línea central del cohete, y el offset del CG del motor del cohete es 0.100 in, mientras que el radio de giro del motor del cohete es 12 in, entonces el MOI alrededor de la línea central del cohete, debido al motor del cohete, es $k^2 = 14400$ lb in² (o más correctamente 37.3 lb in s²). De nuevo, el error de aproximación, es menor del 0.01%.

La **REGLA 2** puede ser también aplicada a errores de alineado, cuando se calcula o se mide el MOI. Si el offset o desalineado es menor del 1% del radio de giro, el error de alineamiento es despreciable.

Combinando el momento de inercia de dos objetos.

Si el objeto contiene más de una masa, entonces, el momento de inercia es la suma de los momentos de inercia individuales, tomados alrededor del mismo eje. El radio de giro es:

Donde $SQR = Raíz\ cuadrada$.

El momento de inercia de los dos ejemplos es el mismo. Nótese que es indiferente el ángulo que formen las masas unas respecto de las otras. El radio es el único factor que afecta al momento de inercia.

Estos ejemplos ilustran que el momento de inercia depende solo del radio de las masas de una objeto. No obstante, si el objeto está volando en el espacio, como el CG, radio de giro y el eje principal son diferentes para los dos ejemplos, sus respectivas características de vuelo, serán diferentes.

Cada peso = 1 lb

Radio desde el eje X = 2 in

$I_X = 1 \times 2^2 = 4 \text{ lb in}^2$ El MOI alrededor del eje X es la misma para ambos ejemplos

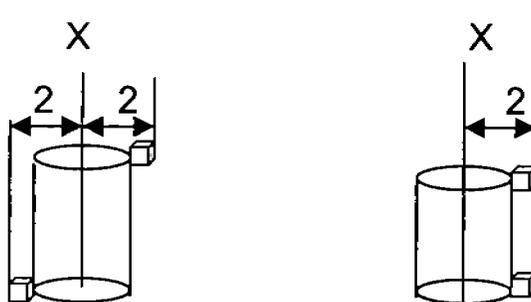


Figura 3.23

Fórmula básica utilizando elementos diferenciales (infinitesimales) de masa

La técnica básica para calcular el momento de inercia de un objeto consiste en considerar cada elemento de masa y su radio, aplicar la fórmula $I = Mr^2$ a cada uno, y sumar todos los momentos de inercia de los elementos. Los cálculos son los siguientes:

$$I_1 = M_1 (r_1)^2 \text{ donde } r_1 \text{ es el radio de } M_1, \text{ etc.}$$

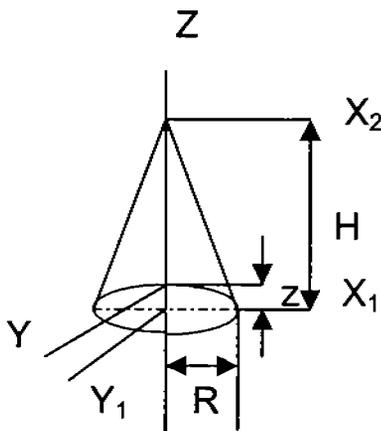
$$I_2 = M_2 (r_2)^2$$

$$I_n = M_n (r_n)^2 \text{ etc.}$$

$$I = \text{Total } I$$

Si el objeto es un sólido homogéneo, el proceso se puede realizar tomando un elemento diferencial e integrándolo a través de los límites del radio:

Cono circular derecho



$$I_x = I_y = \frac{3w}{20} \left(R^2 + \frac{H^2}{4} \right)$$

$$I_{x1} = I_{y1} = \frac{w}{20} (3R^2 + 2H^2)$$

$$I_z = \frac{3w}{10} R^2$$

Figura 3.24

$$I_{x2} = \frac{3w}{20} (R^2 + 4H^2)$$

Formas normalizadas

El momento de inercia de muchas formas normalizadas, viene tabulado en muchos libros de texto y manuales que tratan de dinámica, como el SAWE Handbook, Machinery's Handbook, etc.

Véanse algunos ejemplos.

Cubierta cilíndrica lateral

$$I_X = I_Y = \frac{w}{2} \left(R^2 + \frac{H^2}{6} \right)$$

$$I_Z = \omega p^2$$

$$I_{X_1} = I_{Y_1} = \frac{w}{6} (9R^2 + 2H^2)$$

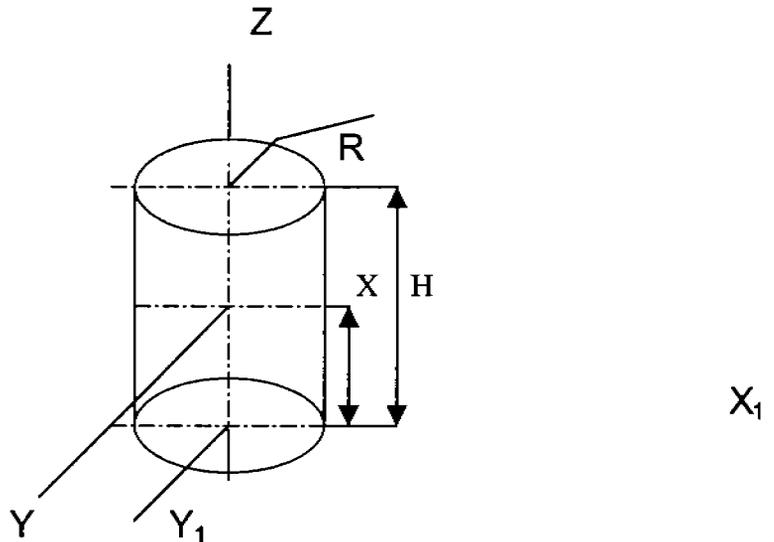


Figura 3.25

Momento de inercia de objetos similares a formas normalizadas

Como el momento de inercia total se puede calcular simplemente sumando los valores de las partes, es posible derivar el MOI de muchos objetos modificando los valores de las formas normalizadas. A menudo, esto elimina la necesidad de cálculo, y acelera el cálculo del MOI.

Por ejemplo, para determinar el MOI de un cono hueco, nótese que el MOI del espacio cónico interno, se puede restar del MOI del espacio cónico total.

Paraboloide de revolución

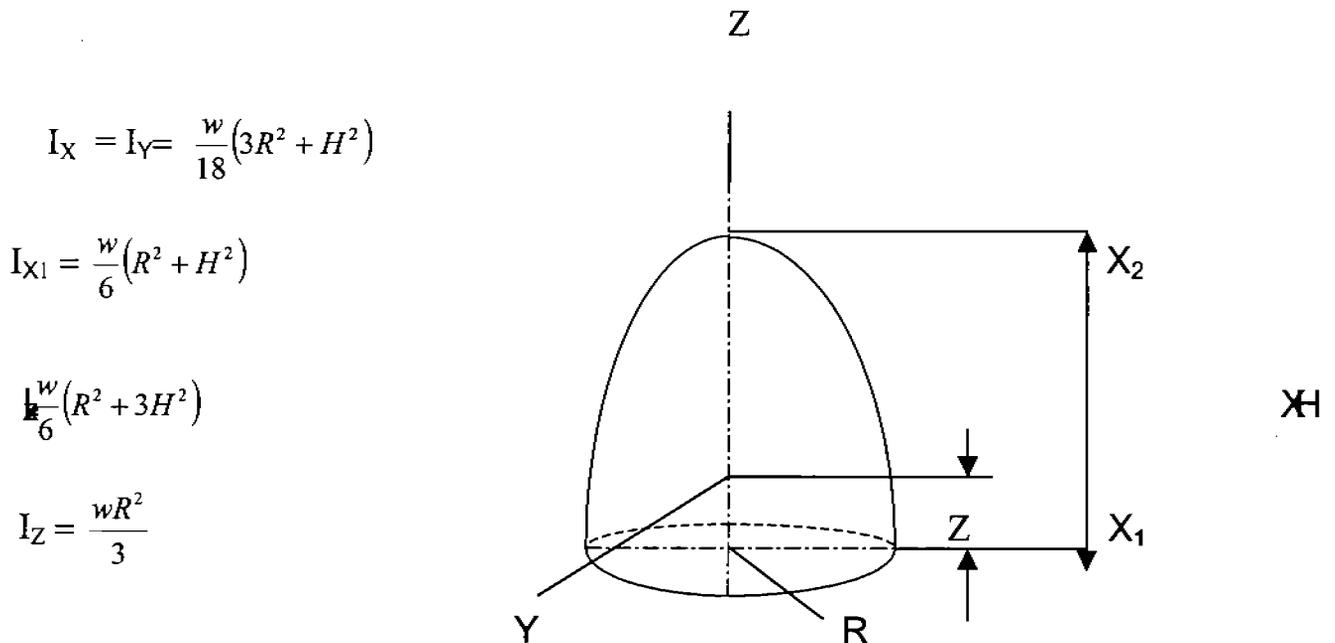


Figura 3.26

Combinando valores de MOIs axiales

Si el momento de inercia axial de dos secciones cilíndricas de cohete, alrededor de la línea central común, son 10 slug ft^2 y 20 slug ft^2 respectivamente, entonces el momento de inercia total de ambas secciones al ensamblarlas, es 30 slug ft^2 . Los valores del MOI simplemente se suman para obtener el total.

Antes de sumar los valores, asegúrese de que ambos están calculados a través de ejes que coinciden al ensamblarse, y de que las unidades de cada uno son consistentes y correctas. El desalineado es relativamente poco importante.

El error de momento de inercia debido al desalineado es proporcional a la relación entre el cuadrado del offset de desalineado, y el cuadrado del radio de giro del objeto. Por ejemplo, si un cohete tiene un radio de giro de 15 in , y está desalineado lateralmente 0.002 in , entonces el error resultante es solo de 0.000002% (2 millonésimas del 1%).

Combinando valores del MOI transversales

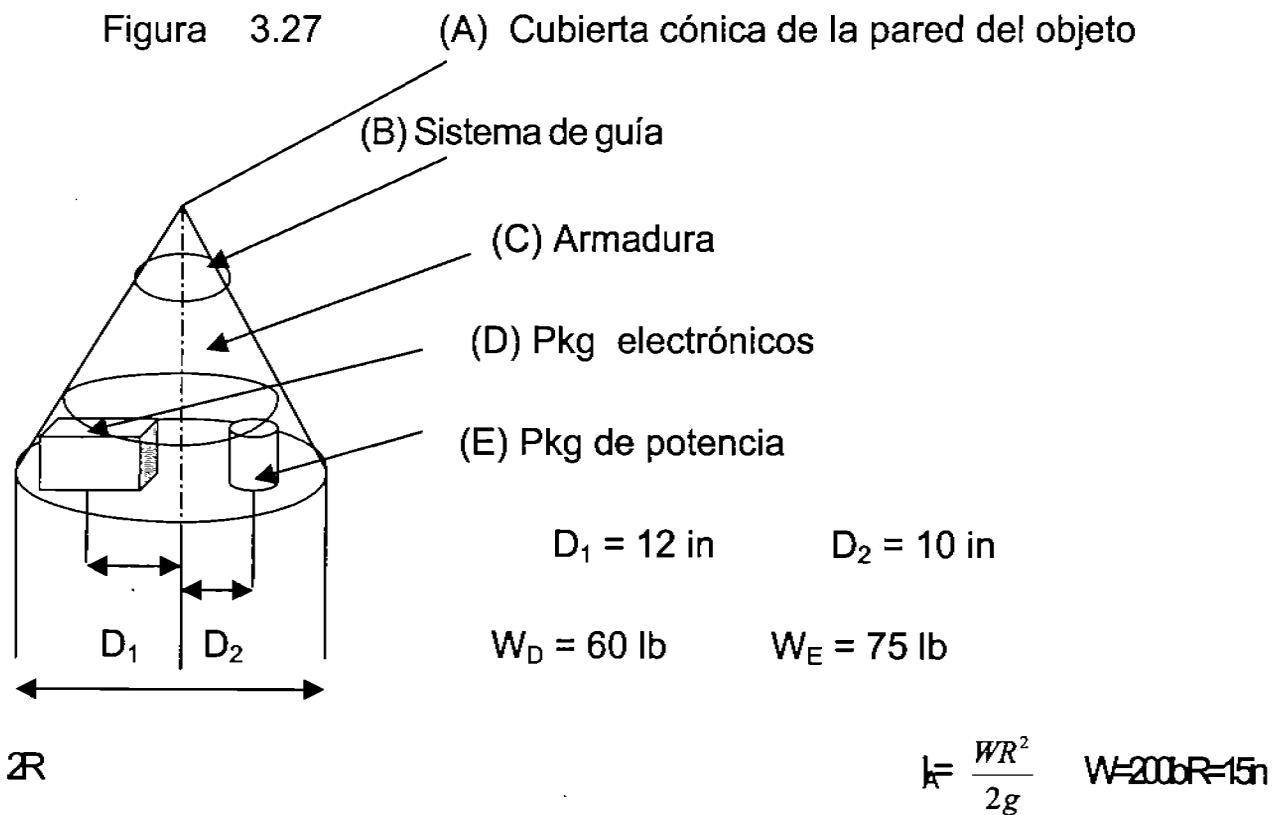
La combinación del MOI alrededor de ejes transversales es un procedimiento más complejo.

- Primero, el MOI de cada componente alrededor de un eje que pasa por su CG, paralelo al eje deseado, se debe determinar mediante cálculo o medición.
- Segundo, se debe calcular la situación del CG compuesto.
- Tercero, el MOI de cada componente alrededor del CG compuesto debe ser calculado utilizando el teorema de los ejes paralelos.
- Finalmente, los MOIs se suman para obtener el MOI alrededor del eje deseado, que pasa por el CG compuesto.

Ejemplo de MOI compuesto

A continuación, se presenta un ejemplo de cálculo del MOI alrededor del eje Z, de un vehículo de reentrada consistente en un cono hueco y otros componentes.

El teorema de los ejes paralelos se utiliza para calcular I_z para los componentes desplazados respecto del centro.



$$I_B = 450 \text{ lb-in}^2 ; \quad I_C = 25 \text{ slug-ft}^2 ; \quad I_D = 1.8 \text{ lb-in-sec}^2 ; \quad I_E = 35 \text{ lb-in-sec}^2$$

Calculo del MOI alrededor del eje Z

$$I_A = \frac{200lb(15)^2 in^2 ftseg^2}{(2)144in^2 32ft} = 4.8 lb - ft - seg^2 = 4.8 slug - ft^2$$

Slug - ft² ⇒ slug = masa dimensiones correctas

$$I_B = \frac{450lb - in^2}{386.088in / seg^2 12in} = 0.097lb - ft - seg^2 = 0.1 slug - ft^2$$

$$I_X = 25 slug - ft^2 \quad I_{D(Z)} = 0.15 + \left(\frac{60}{32}\right)\left(\frac{12}{12}\right)^2 = 2.03 slug - ft^2$$

$$I_{D_0} = \frac{1.8lb - in - seg^2}{12in} = 0.15 slug - ft^2$$

$$I_{E(Z)} = 0.29 + \left(\frac{75}{32}\right)\left(\frac{10}{12}\right)^2 = 1.92 slug - ft^2$$

$$I_Z \text{ TOTAL} = 4.8 + 0.1 + 25 + 2.03 + 1.92 = 33.85 slug - ft^2$$

Efectos del desalineado

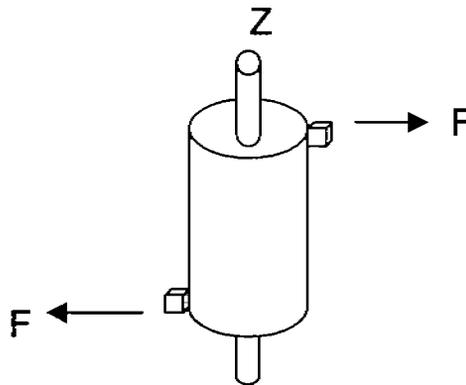
Cuando el desalineado provoca errores de cabeceo o si otros efectos causan que tanto el CG como el MOI cambien, se debe realizar un análisis más complejo llamado "Producto de inercia".

CALCULO DEL PRODUCTO DE INERCIA

Considérese un cilindro homogéneo y equilibrado al que se le colocan dos pesos iguales, separados 180°, y equidistantes del CG, a lo largo de la altura del cilindro. La suma de dichos pesos, no altera el CG del cilindro, y el cilindro permanece equilibrado estáticamente. No obstante, si hacemos girar el cilindro alrededor de su eje Z, la fuerza centrífuga actúa sobre ambos pesos,

haciendo que aparezca un par de fuerzas. Si el cilindro está montado en soportes, este par provoca una fuerza sinusoidal ejercida sobre los soportes, durante el giro del cilindro. Si el cilindro gira en el espacio, el eje de rotación se desplaza a una posición donde las fuerzas centrífugas se igualan (en efecto, se desplaza ligeramente hacia los pesos de desequilibrio). A esto, se le llama **producto de inercia**.

Figura 3.27A



Básicamente, el producto de inercia (POI), es una medida del desequilibrio dinámico. El POI se expresa en las mismas unidades que el momento de inercia, pero tiene una mayor relación con el CG que el momento de inercia. El producto de inercia no se suele enseñar en las asignaturas de dinámica de las titulaciones de ingeniería, por lo que muchos ingenieros no están familiarizados con él.

Comprobando cálculos de MOI mediante medidas físicas

Existen instrumentos para medir el momento de inercia con una precisión del 0.01%. Los equipos modernos utilizan péndulos de torsión invertidos, ya que estos instrumentos son tan precisos como fáciles de usar. Los otros métodos descritos solo tienen un interés histórico.

PÉNDULO DE TORSIÓN INVERTIDO

Este es el método más preciso. El objeto a probar se monta en un mesa giratoria con soportes a gas; así la fricción es mínima. Una barra de torsión proporciona un impulso rotacional. El objeto se retuerce ligeramente y se libera. El periodo de oscilación se relaciona con el momento de inercia de todo el sistema mediante:

- $I = C \times^2$
- donde C es una constante de calibrado

Los péndulos de torsión de este tipo, tienen un comportamiento lineal y sin fricciones, de manera que no es necesaria una compensación de la amplitud de la oscilación.

PÉDULO TRIFILAR PARA OBJETOS GRANDES

Los aviones se miden, en general, suspendiéndolos con tres cables, intentando rotar el avión sin desplazar los cables lateralmente, y cronometrando la oscilación cuando el avión es liberado. Este método es no lineal y difícil de ejecutar, porque el avión tiene tendencia a tambalearse de un lado a otro, así como a oscilar en la dirección de la torsión. El factor de calibrado depende del peso del avión, de los cables, de la distancia entre cables, de la amplitud de la rotación, etc. Este método puede ser muy barato si los cables se pueden colgar de la estructura de un edificio; si no, requiere una estructura especial muy cara, para suspender el objeto. Desgraciadamente, este es, a veces, el único método posible para medir objetos grandes, ya que los péndulos de torsión con soportes de gas, son muy caros cuando son muy grandes (más de 100000 lb).

PÉDULO COMPUESTO - NO RECOMENDADO

Con este método, ya obsoleto, el objeto es suspendido de un pivote y se le hace oscilar de forma similar a como lo hace el péndulo de un reloj. El impulso rotacional, es la aceleración de la gravedad. Ya que esta actúa hacia abajo, en lugar de en la dirección del eje de rotación, la fórmula del momento de inercia es no lineal e independiente de la amplitud, requiriendo la medida simultánea del periodo y de la amplitud, para tener un resultado con una precisión aceptable. Además, un error en la determinación del CG, afecta la medida del MOI (de hecho, la posición del CG predomina, ya que el MOI del objeto es menor que el termino de traslación). Finalmente, este método requiere grandes y caras estructuras para soportar el objeto rígidamente, y los accidentes son comunes al suspender el objeto de dicha estructura.

GRADO DE ACELERACION - METODO TEORICO DE LOS LIBROS DE TEXTO

Los libros de texto, describen a menudo un método en el que se aplica un par de fuerzas al objeto, y se mide su aceleración rotacional. El momento de inercia se calcula con la fórmula $T = I\alpha$, donde T es el par y α es la aceleración angular. Este método es instructivo para los estudiantes, pero esta sujeto a errores de fricción, es caro de aplicar y no se usa nunca en la industria. Una variante de este método, consiste en montar el objeto dentro de un tubo hueco y hacerlo rodar por un plano inclinado, midiendo su recorrido. Otro método utiliza un cordel atado a un tambor con un peso al final del cordel. Se mide el grado de aceleración del peso. Un tercer método, consiste en montar el objeto en unos soportes, y utilizar un motor con características corriente vs par conocidas.

VIBRACIONES EN MAQUINAS HERRAMIENTAS

En estructuras y dispositivos, determinados movimientos globales y ciertas deformaciones son más comunes que otros: los movimientos oscilatorios más probables (los más fáciles de producir) ocurren según ciertas frecuencias naturales. Algunas frecuencias de excitación pueden coincidir con las frecuencias naturales (resonancia) y producir respuestas de vibración relativamente muy intensas ; los cuerpos vibrantes son cuerpos sonoros que nos producen ondas de sonido

Las ondas en medios deformables o elásticos son un ejemplo de ondas ordinarias de sonido a las cuales se les llama **ondas mecánicas** Se originan por el desplazamiento de alguna parte de un medio elástico de su posición normal, causando oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio. A causa de las fuerzas elásticas sobre capas adyacentes, esta perturbación se transmite de una capa a la próxima a través del medio. El propio medio no se mueve como un conjunto; por el contrario, las diversas partes oscilan en trayectorias limitadas. Por ejemplo, en el caso de las ondas superficiales en el agua, pequeños objetos flotantes como corchos demuestran que el movimiento real de las moléculas de agua es elíptico, ligeramente hacia arriba y hacia abajo y hacia delante y hacia atrás. Sin embargo, las ondas del agua se mueven estacionariamente a lo largo del líquido. [Bro]

Cuando alcanzan a los objetos flotantes los ponen en movimiento, es decir, les transfieren energía. La energía en las ondas está en la forma tanto de energía cinética como de energía potencial y su transmisión se produce al pasar de una parte de la materia a la siguiente y no por un movimiento de largo alcance de la propia materia.

Por lo, tanto las ondas mecánicas están caracterizadas por el transporte de energía a través de la materia mediante el movimiento ondulatorio de una perturbación en éste sin que haya ningún movimiento global de la materia misma, ya que cada elemento del medio transmite energía a los elementos vecinos. Para la transmisión de las ondas mecánicas es necesario un medio material. Las propiedades del medio material que determinan la velocidad de las ondas mecánicas en él son su *elasticidad* y su *inercia*. Todos los medios materiales (aire, agua, acero, etc.) poseen esas propiedades y en ellos pueden propagarse las ondas mecánicas. Es la *elasticidad* la que da lugar a las fuerzas restauradoras sobre cualquier elemento que se desplaza de su posición de equilibrio; es la *inercia* la que determina la respuesta a esas fuerzas restauradoras.

La característica que nos permite distinguir el sonido de otro se llama timbre. El timbre depende de los armónicos que contiene el sonido, así como de sus intensidades relativas y de la forma en que van cambiando de intensidad al producirse el sonido. Se tienen dos formas de producir timbres interesantes: 1) empezando desde cero y sumando armónicos uno a uno o 2) partiendo de una onda rica de armónicos y restándole componentes por medio de filtros

VIBRACIÓN

En cualquier estructura o dispositivo, determinados movimientos globales y ciertas deformaciones son más comunes que otros: los movimientos más probables (los más fáciles de producir) ocurren según ciertas frecuencias naturales. [Tho]

Algunas frecuencias de excitación pueden coincidir con las frecuencias naturales (resonancia) y producir respuestas de vibración relativamente muy intensas.

La vibración es el factor limitativo mas importante en la productividad de las maquinas herramientas. La vibración determina en gran parte la cantidad de remoción de material, influye en la cantidad de mantenimiento que necesitará la máquina, determina la calidad del producto, etc. En la actualidad la productividad de las maquinas herramientas aumenta en forma constante para contrarrestar el costo de la mano de obra y, al mismo tiempo, la tecnología exige mayor exactitud. Por esta razón en la actualidad se presta más atención al efecto de las vibraciones de las maquinas herramientas. [AMM]

El elevado costo del equipo de las máquinas herramientas con control numérico, y la necesidad de un rendimiento predecible a la vez que se trata de obtener control por calculador (computadora), recalca la necesidad de un estrecho control de las vibraciones.

En términos generales, hay tres fuentes de vibración en las maquinas herramientas:

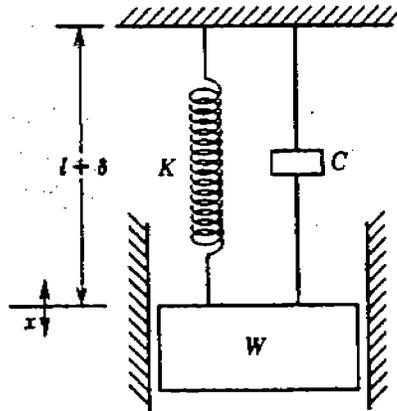
Las **fuerzas externas**, tales como los choques transmitidos a través de la cimentación de la maquina. Estas fuerzas pueden inducir vibraciones en los componentes estructurales de la máquina.

El **sistema de impulsión de la máquina**, que puede transmitir cualquier fuerza indeseable, desequilibrada (sin-balanceo) que ocasiona vibración de un componente de la máquina.

El **proceso de corte en si**, que puede crear traqueteo y vibración.

Por lo tanto, el resultado final es un movimiento indeseable entre la herramienta y la pieza de trabajo. [Boo]

Para comprender la naturaleza fundamental de las vibraciones de las maquinas herramientas se analizará el sistema muy simplificado de la figura 3.28. El sistema comprende un cuerpo de peso W y masa M , un resorte cuya rigidez es K , y un amortiguador viscoso cuya constante de amortiguamiento es C .



Sistema con un solo grado de libertad (SUGL).

Figura 3.28

Por lo general, K se denomina constante de fuerza del resorte (o simplemente constante del resorte), una fuerza estática de K newtones deforma estáticamente el resorte en una distancia 5 milímetros, por lo que la longitud del resorte se transforma en $5 + 1$. (En unidades inglesas, se considera que una fuerza de K lb deforma estáticamente el resorte 1 pulg.) Este sistema vibratorio simplificado está restringido a sólo un movimiento: la traslación vertical de la masa. Tales sistemas con un solo grado de libertad (SUGL) no se encuentran en el mundo real, pero el comportamiento dinámico de muchos sistemas reales se aproxima al comportamiento de los SUGL en intervalos de frecuencia pequeños.

Supóngase que se tira hacia abajo del cuerpo de peso W una corta distancia y que a continuación se libera. El sistema oscilará con movimiento ascendente y descendente del cuerpo a una frecuencia natural f_N , expresada en ciclos por segundo (c/s), o bien hertz (Hz); esta condición se denomina "vibración libre". [DeD]

Se omitirá el efecto del amortiguador, que actúa del mismo modo que los amortiguadores de la suspensión de un automóvil; absorbiendo energía de vibración, de forma que las oscilaciones se extingan, puede calcularse mediante:

$$f_N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Kg}{W}} \quad (3.15)$$

Con frecuencia conviene relacionar f_N con la deformación estática δ debida

a la fuerza gravitatoria de la Tierra, $F = W = Mg$, en donde $g = 9.81 \frac{m}{s^2} =$

$32 \cdot 2 \frac{pie}{s^2} = 386 \frac{pulg}{s^2}$, a la que se opone la rigidez del resorte, K , expresada

en $\frac{N}{mm}$ o en $\frac{lb}{pulg}$. En la Luna, tanto g como W serían considerablemente

menores (alrededor de una sexta parte de su valor en la Tierra). Sin embargo, f , es la misma. En las obras de texto usuales, la ecuación 3.15 se presenta como:

$$f_N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

En un sistema gravitacional de unidades (métrico o inglés)

$$\delta = \frac{F}{K} = \frac{W}{K}$$

Por ejemplo, en el Sistema inglés:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{386}{\delta}} = \frac{19.7}{2\pi\sqrt{\delta}} = \frac{3.13}{\sqrt{\delta}} \quad (3.16)$$

En el sistema internacional:

$$\delta = \frac{F}{K} = \frac{Mg}{K}$$

Entonces:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9807}{\delta}} = \frac{99.1}{2\pi\sqrt{\delta}} = \frac{15.76}{\sqrt{\delta}} \quad (3.17)$$

Las relaciones 3.16 y 3.17 frecuentemente aparecen en “ calculadores de vibración “ especializados. Conforme aumenta la masa sostenida por el resorte, δ también aumenta y f_N disminuye. A partir de las ecuaciones 3.15 y 3.16 se observa que f_N depende de δ , y en consecuencia tanto de M como de K (o de W y K). Dado que la carga y la rigidez varían proporcionalmente, f_N no cambia.

La energía potencial que se depositó en el resorte se vuelve cero cada vez que la masa pasa por la posición original, y es máxima en cada extremo. La energía cinética se hace máxima cuando la masa pasa por cero (máxima velocidad), y se anula en cada extremo (velocidad cero). Sin amortiguamiento, la energía cambia continuamente de potencial a cinética.

Pero con amortiguación, el movimiento disminuye gradualmente: la energía se transforma en calor.

Ciertas fuerzas de perturbación dan origen a amplitudes de vibración más grandes que otras. Esta condición llamada resonancia, ocurre cuando la frecuencia de la fuerza de perturbación coincide con la frecuencia natural de la estructura.

En la práctica, la vibración resonante puede ocasionar por ejemplo:

- La acción cortante de la herramienta

- Las vibraciones de los engranes de impulsión (frecuencia de paso de dientes)

- Desalineación de los componentes, tales como acoplamiento (coples)

- Desequilibrio (sin balanceo) rotatorio; por ejemplo, los efectos mecánicos y eléctricos del motor .

Las condiciones enumeradas ocurren en forma individual o simultánea

Los movimientos vibratorios en cualquier estructura de una máquina, pueden ocurrir en uno, dos o tres sentidos en forma simultánea y por lo común, dos o tres de estas vibraciones forzadas ocasionaran problemas cuando hay vibraciones resonantes. Siempre que ocurre resonancia, la amplitud de la vibración depende de:

- Magnitud de la fuerza

- Ubicación de la vibración aplicada dentro de la estructura

- Cantidad de amortiguación disponible en la estructura.

El valor de la frecuencia natural y de la forma del modo correspondiente, se determina por la distribución de la masa y de las propiedades elásticas tanto

en la estructura como en la cimentación en donde la rigidez de la estructura de la máquina determina la frecuencia a la cual ocurre la resonancia y la amortiguación disponible dentro de la estructura determina la amplitud durante la resonancia. En condiciones de resonancia la amortiguación es más eficaz para disminuir las amplitudes vibratorias.

Si el "soporte" se encuentra en vibración con una constante D igual a, por ejemplo, 1 pulg. Es posible variar su frecuencia. ¿Cuánta vibración se produce en el cuerpo de peso W? La respuesta dependerá de:

1. La frecuencia de la vibración "de entrada".
2. La frecuencia natural y el amortiguamiento del sistema.

Supóngase que la f_N del sistema es igual a 1 Hz mientras que la frecuencia de forzamiento o excitadora es de 0.1 Hz, la décima parte de la frecuencia natural (figura 3.29). Se observa que el peso W tiene casi el mismo desplazamiento que la vibración de entrada, de alrededor de 1 pulg, D. Esto se ve en la parte izquierda de la figura 3.29; la **transmisibilidad**, que es la relación entre la vibración de respuesta y la vibración de entrada, en este caso es $\frac{1}{1} = 1$. En la medida en que se incrementa la frecuencia de excitación, se encuentra que aumenta la respuesta. ¿En qué magnitud lo hace?

Depende de la cantidad de amortiguamiento del sistema. Supóngase que éste es ligeramente amortiguado, por ejemplo, con una relación $\frac{C}{C_c}$, de 0.05 (razón del amortiguamiento real al amortiguamiento "crítico"). Cuando la frecuencia de excitación alcanza el valor de 1 Hz (exactamente f_N), el cuerpo de peso W posee una respuesta D de alrededor de 10 pulg, que es 10 veces mayor que la entrada D.

A esta frecuencia de "respuesta máxima" se tiene la condición de "resonancia"; la frecuencia de excitación es igual a la f_N de la carga.

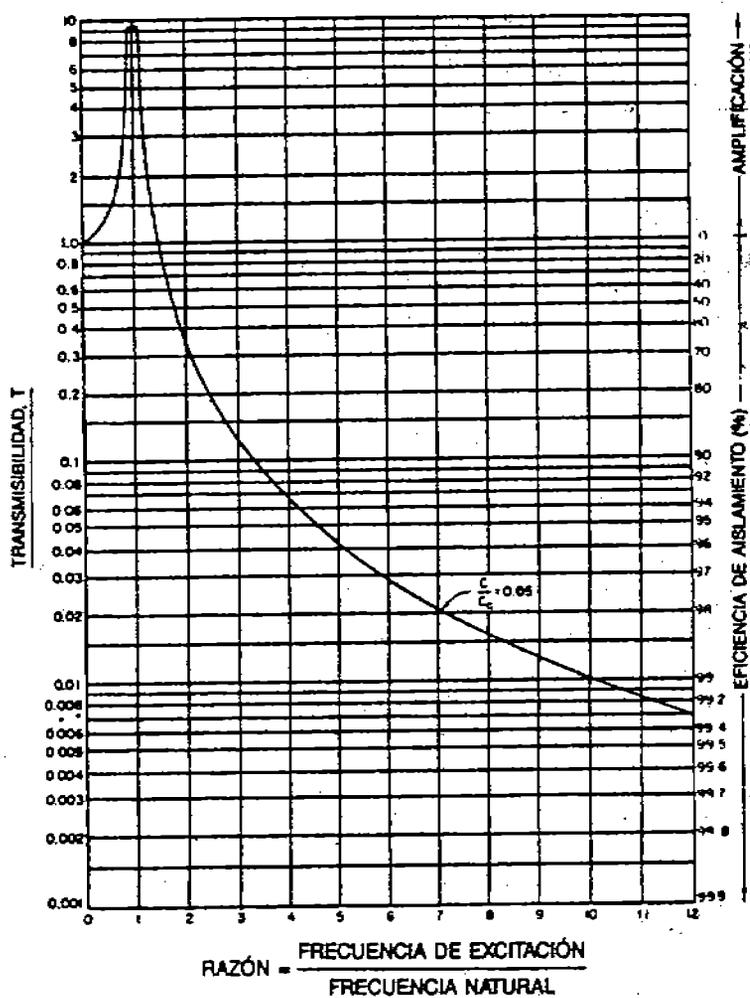


Figura 3.29 Patrones temporales continuos de una vibración Amortiguada registrados en un osciloscopio [DeD]

En la medida en que se incrementa aún más la frecuencia excitadora (ver figura 3.29), se encuentra que la respuesta disminuye. Cuanto más se incrementa la frecuencia de forzamiento, tanto más disminuye la respuesta.

Para una frecuencia forzada de 2 Hz, la respuesta será de 0.3 pulg aproximadamente, y para una de 3 Hz, será casi igual a 0.1 pulg.

Un captador de vibraciones colocado en el cuerpo de peso W proporcionaría formas temporales de movimiento registradas en el osciloscopio, como los que se muestran en la siguiente figura 3. 30; en el patrón inferior hubo mayor amortiguación y el movimiento disminuyó con mayor rapidez. [DeD]

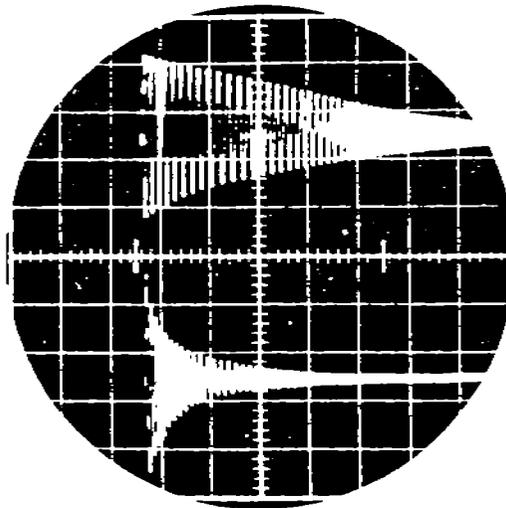


Figura 3.30 Patrones temporales continuos de una vibración amortiguada, registradas en un osciloscopio.

La abscisa de la figura 3.30 está “normalizada”; esto es los valores de transmisibilidad del párrafo anterior pueden encontrarse para otro sistema cuya frecuencia natural sea de 10 Hz cuando la frecuencia de excitación es, respectivamente, 1, 10, 14.14, 20 y 30 Hz.

La región por arriba de 14.14 veces f_N (donde la transmisibilidad es menor que 1) se denomina región de “ aislamiento “. Esto es, el cuerpo de peso W posee menor vibración que la entrada: se encuentra **aislado**. Esto ilustra la utilización de aislantes antivibratorios: elementos de goma o resortes que reducen la vibración de entrada a términos muy pequeños en aeronaves, misiles, buques, otros vehículos, así como en ciertas máquinas. Normalmente se intenta establecer una f_N (mediante la selección de aislantes) considerablemente por debajo de la frecuencia forzada esperada. Así en caso de que el soporte vibre a 50 Hz, pueden seleccionarse aislantes cuya K haga que f_N sea de 25 Hz o menor (sin embargo no deben utilizarse aislantes demasiado blandos, debido a las inestabilidades que pueden resultar por deformaciones estáticas demasiado grandes, y debido a la necesidad excesivo espacio libre respecto a cualquier estructura cercana).

Suponiendo un sistema en el que un cuerpo pesado está sostenido por un resorte cuya rigidez K sea suficiente para que $f_N = 10$ Hz. A una frecuencia de excitación de 50 Hz, la relación de frecuencia es $\frac{50}{10}$, o sea 5 , y en la figura 3.29 se observa que la transmisibilidad es 0.042 . El cuerpo “ sentiría “ sólo el 4.2% de la vibración que recibiría si estuviese montado rígidamente en el soporte.

También se observa que la “eficiencia de aislamiento” es de 96% . Sin embargo, cuando aumenta la velocidad de la fuente de vibración de 50 Hz, pasando lentamente a través de 10 Hz, el articulo aislado “ siente “ aproximadamente 20 veces más vibraciones que si estuviese fijado rígidamente, sin ningún aislante. Aquí es donde resulta útil el amortiguamiento; limitar la Q o “ acumulación mecánica “ de la resonancia.

Una forma común de vibración y una de las más desagradables para el personal de manufactura es el traqueteo, en términos estrictos, el traqueteo es una inestabilidad dinámica retroalimentada en la cual los movimientos oscilatorios pequeños ocasionados por el proceso se retroalimentan al sistema y se hacen más grandes debido a la energía requerida para mantener el proceso en marcha. Ese traqueteo produce un desgaste rápido de la herramienta y pieza de trabajo. El movimiento total es muy complejo y es difícil establecer reglas generales para contrarrestarlo. Teniendo en cuenta la interacción del sistema de la máquina y piezas de trabajo como un servomecanismo con propiedades de retroalimentación (el cual se considera como una retroalimentación inestable) y con la identificación y evaluación de las variables implicadas, el método del servomecanismo permitirá obtener el funcionamiento confiable y exacto de la máquina. La supresión del traqueteo se basa en el concepto de servo, es la impedancia mecánica controlada (I M C) que se creó bajo los auspicios de la fuerza aérea por T. R. Comstock de la Universidad de Cincinnati. Este proceso utiliza un mecanismo de retroalimentación que puede responder a las diferencias entre la posición real y la posición deseada de la herramienta. Los errores de desplazamiento se detectan con un transductor cerca de la punta de la herramienta y se alimentan a un amplificador diferencial. Después se retransmite una señal de corrección del proceso a la válvula del servo y ésta ajusta la posición de la herramienta.

De lo que se trata es de corregir un error detectado antes de que haya tiempo de que se convierta en traqueteo o produzca algún defecto dimensional en la pieza.

Las vibraciones de una máquina se concentran a altas frecuencias la cual es una característica del frotamiento de partes mecánicas, que se supone deben deslizarse suavemente.

Tanto las resonancias como las vibraciones de traqueteo auto-excitadas se suprimen con la instalación de amortiguación en el sistema vibratorio esto puede lograrse en varias formas, por ejemplo, mediante amortiguación interna en el material estructural , amortiguación por fricción en las uniones apernadas de la estructura o por amortiguación viscosa en las superficies lubricadas en contacto (guías, cojinetes, rodamientos, etc.). También es posible estimar la amortiguación de una estructura a partir de curvas de respuestas obtenidas experimentalmente.

Vibraciones regenerativas

Estas vibraciones son ocasionadas por la superposición de la acción que ocurre en la mayoría de las operaciones de mecanización, aunque el sistema sea básicamente estable, la vibración forzada resultante del mecanizado de una superficie ondulada generada durante la carrera o revolución precedente de la pieza o de la herramienta puede amplificar la vibración previa. Después, en la practica, si se estudia la inestabilidad dinámica de una operación mediante el aumento gradual posterior (por ejemplo profundidad del corte) pueden inducirse vibraciones a causa de los efectos regenerativos antes que la verdadera inestabilidad dinámica ocurra.

TOLERANCIA Y GRADO DE EQUILIBRADO

Debemos tener en cuenta que definir el grado de precisión de equilibrado es esencial para que las máquinas funcionen correctamente, sin vibraciones, y con el menor coste posible; esto depende en gran medida del tipo de rotor y si éste es una pieza simple o un conjunto, además influyen las revoluciones de trabajo real y su tamaño y forma. Debemos tener en cuenta que el no ajustarse "*a lo necesario*" puede suponer que se quede corto en la calidad y el rotor vibre o bien que se pase de calidad lo cual será beneficioso para el rotor pero habrá tenido un coste muy alto sin ser necesario.

Supongamos que debemos montar un rotor con unos rodamientos los cuales, según el fabricante, permiten una excentricidad de 10 micras; está claro que el desequilibrio admisible en el rotor no debe provocar un desplazamiento del eje superior a 10 micras; en este caso debemos entrar en una calidad de equilibrado Q que nos asegure este margen. **El grado de calidad se representa mm/s** que es la unidad que representa la velocidad de desplazamiento de la excentricidad, del eje del rotor, provocada por el desequilibrio. Generalmente **las máquinas que realizan el equilibrado de montantes blandos** permiten un ajuste previo para cada tipo de rotor de forma que la indicación de la electrónica se puede expresar en cualquier unidad como pueden ser: gr / mm., gramos, arandelas, mm. de profundidad de broca, etc. Supongamos que tenemos una serie de 1000 rotores preparados para equilibrar, cuya tolerancia es de 50 gr./mm. y debemos realizar taladros a 100 mm. de radio y además deseamos que la electrónica nos indique el desequilibrio en gramos.

- 1) En primer lugar poner un rotor patrón (equilibrado) igual a los de la serie; si no está equilibrado utilice la puesta a cero de la electrónica.
- 2) Coloque un peso conocido, por ejemplo de 10 gramos, en el radio de compensación, en este caso a 100 mm. del centro.
- 3) Ahora debe realizar la medida del desequilibrio y la electrónica de medición debe indicar 10 gramos ya que como hemos dicho antes el rotor patrón está equilibrado. En caso de no indicar 10 gramos debemos regular el ajuste de magnitud hasta que nos indique 10 gramos; comprobar además que la indicación de ángulo es correcta.
- 4) Sacar el rotor patrón y el peso de prueba; ahora la máquina está preparada para la indicación en gramos directamente.

Ahora solo nos falta saber cual es la indicación máxima con la que quedarán equilibrados los rotores y para ello utilizaremos el dato del plano que nos dice que la tolerancia es de 50 gr / mm (o gramos / cm) lo cual significa que en el primer mm. de radio es permitido dejar 50 gramos residuales, en el segundo mm. de radio 25 y así sucesivamente; para saber cuanto nos es permitido dejar a un radio de 100 mm que es el caso de nuestro rotor debemos dividir 50/100 y obtendremos 0,5 gramos que es la tolerancia máxima admisible. En el caso de **máquinas con montantes duros** el sistema es diferente pues este tipo de máquina indica directamente los gramos de desequilibrio en el radio de compensación seleccionado.

NORMA OFICIAL MEXICANA:

NOM-024-STPS-1993.RELATIVA A LAS CONDICIONES DE SEGURIDAD E HIGIENE EN LOS CENTROS DE TRABAJO DONDE SE GENEREN VIBRACIONES. [MVI]

ARSENIO FARELL CUBILLAS, SECRETARIO DEL TRABAJO Y PREVISION SOCIAL, CON FUNDAMENTO EN LOS ARTICULOS 16, 40 FRACCIONES I Y XI DE LA LEY ORGANICA DE LA ADMINISTRACION PUBLICA FEDERAL; 512, 523 FRACCION I, 524 Y 527 ULTIMO PARRAFO DE LA LEY FEDERAL DEL TRABAJO; 3o. FRACCION XI, 38 FRACCION II, 40 FRACCIONES I Y VII, 41 A 47 Y 52 DE LA LEY FEDERAL SOBRE METROLOGIA Y NORMALIZACION; 2o., 3o. Y 5o. DEL REGLAMENTO GENERAL DE SEGURIDAD E HIGIENE EN EL TRABAJO Y 5o. DEL REGLAMENTO INTERIOR DE LA SECRETARIA DEL TRABAJO Y PREVISION SOCIAL, Y

CONSIDERANDO

Que con fecha 2 de julio de 1993, en cumplimiento de lo previsto en el artículo 46 fracción I de la Ley Federal Sobre Metrología y Normalización, la Secretaría del Trabajo y Previsión Social presentó al Comité Consultivo Nacional de Normalización de Seguridad, Higiene y Medio Ambiente Laboral, el Anteproyecto de la presente Norma Oficial Mexicana:

Que en sesión de fecha 7 de julio de 1993, el expresado Comité consideró correcto el Anteproyecto y acordó que se publicara como Proyecto en el Diario Oficial de la Federación;

Que con fecha 19 de julio de 1993, en cumplimiento del acuerdo del Comité y de lo previsto en el artículo 47 Fracción I de la Ley Federal sobre Metrología y Normalización, se publicó en el Diario Oficial de la Federación el Proyecto de la presente Norma Oficial Mexicana a efecto de que dentro de los siguientes 90 días naturales a dicha publicación, los interesados presentarán sus comentarios al Comité Consultivo Nacional de Normalización de Seguridad, Higiene y Medio Ambiente Laboral;

Que con fecha 17 de octubre de 1993, venció el término de 90 días naturales previstos en el artículo 47 fracción I de la Ley Federal Sobre Metrología y Normalización sin que el expresado Comité haya recibido comentario alguno al Proyecto de la presente Norma Oficial Mexicana;

Que en atención a las anteriores consideraciones y toda vez que con fecha 26 de octubre de 1993, el Comité Consultivo Nacional de Normalización de Seguridad, Higiene y Medio Ambiente Laboral otorgó la aprobación respectiva, se expide la siguiente:

NOM-024-STPS-1993.

RELATIVA A LAS CONDICIONES DE SEGURIDAD E HIGIENE EN LOS CENTROS DE TRABAJO DONDE SE GENEREN VIBRACIONES.

1. Objetivo.

Establecer las condiciones de seguridad e higiene en los centros de trabajo donde se generen vibraciones que por sus características y tiempo de exposición, sean capaces de alterar la salud de los trabajadores.

1.1 Campo de aplicación.

En los centros de trabajo donde por las características de operación de la maquinaria y/o equipo se generen vibraciones.

2. Referencias.

Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, artículo 123 Apartado "A" fracción XV.

Ley Federal del Trabajo, artículos 512 y 527.

Reglamento General de Seguridad e Higiene en el Trabajo, Título octavo, Capítulo III, artículo 140.

3. Requerimientos.

3.1 El patrón debe:

- a) Cuando existan vibraciones que puedan afectar la salud de los trabajadores, efectuar el reconocimiento, evaluación y control a fin de disminuir el posible efecto de las mismas.
- b) Contar con el o los perfiles del puesto de los trabajadores que estén expuestos a vibraciones.
- c) Informar a los trabajadores y a la Comisión Mixta de Seguridad e Higiene, de los riesgos que representan las vibraciones a su salud.
- d) Establecer los procedimientos seguros y las medidas de control.
- e) Capacitar a los trabajadores sobre el uso de la maquinaria y equipo donde se generen vibraciones.
- f) Donde se generen vibraciones, requerir como edad mínima 18 años y la edad máxima será determinada por las condiciones de salud del trabajador, previa autorización del médico designado por el patrón.

3.2 Los trabajadores deben:

- a) Cumplir con las medidas de seguridad establecidas por el patrón.
- b) Participar en la capacitación y adiestramiento proporcionadas por el patrón.
- c) Colaborar con los exámenes médicos que se les practiquen.

3.3 Los miembros de la Comisión Mixta de Seguridad e Higiene, deben vigilar el seguimiento a las medidas preventivas en lugares donde se tengan equipo o maquinaria que genere vibraciones.

3.4 Las Autoridades del Trabajo, los patrones y los trabajadores promoverán, mediante exámenes médicos de ingreso y periódicos el mejoramiento de las condiciones de salud de los trabajadores que vayan a estar o estén expuestos a vibraciones en los centros de trabajo a que se refiere esta NOM-STPS-. Los exámenes médicos periódicos se practicarán como mínimo cada 6 meses o con la periodicidad que se requiera, de acuerdo a la exposición (corporal segmentario o corporal total) de cada caso.

En el anexo III que forma parte de la presente NOM-STPS- para todos los efectos correspondientes, se sugieren los puntos básicos que deberán comprender los exámenes que se practiquen a los trabajadores expuestos a vibraciones.

4. Requisitos.

4.1 Del reconocimiento:

En relación con las actividades de reconocimiento los patrones deben efectuar cuando menos lo siguiente:

- a) Conocer las características, tipo e intensidad de la vibración.
- b) Identificar y señalar dichas fuentes emisoras de vibración.

4.1.1 Tipos de vibraciones.

Las vibraciones en los centros de trabajo se clasifican en dos tipos:

a) Bajo.

b) Alto.

Se consideran de tipo bajo, de 1 a 80 Hz (ciclos / segundo) causadas principalmente por máquinas de baja velocidad.

De tipo alto, de 10 a 200 Hz (ciclos / segundo) en donde se utiliza equipo o maquinaria de alta velocidad.

4.2 De la evaluación:

Para efectuar la evaluación, el patrón deberá cuantificar periódicamente los niveles de vibración, aplicando la instrumentación y métodos específicos.

4.3 Del control:

Cuando por las características de los procesos productivos del centro de trabajo se generen vibraciones, los patrones deben adoptar en su orden, algunas de las medidas siguientes:

a) Aislar las fuentes que generen vibraciones.

b) Programar los tiempos de exposición en que el trabajador este sometido a las vibraciones de acuerdo con las tablas número 1 y 2 de la presente NOM-STPS-.

c) Para evitar los efectos de las vibraciones en la salud de los trabajadores, el patrón debe adoptar una o más de las medidas siguientes:

c.1 Afirmer las máquinas independientes de la cimentación general y nivelarlas.

c.2 Ajustar las máquinas e instalar los dispositivos antivibratorios necesarios.

c.3 Cimentar sobre material aislante en casos especiales.

c.4 Evitar que las transmisiones se apoyen en las paredes colindantes o en otras que puedan transmitir vibraciones.

c.5 Elaborar y ejecutar programas de mantenimiento predictivo y preventivo.

c.6 Proyectar adecuadamente las estructuras de los edificios con materiales que no sean afectados por las vibraciones.

c.7 Efectuar controles especiales cuando se utilice por primera vez una maquinaria o se le hayan hecho modificaciones importantes.

d) El patrón debe controlar la exposición de los trabajadores, de tal manera que si es afectada su salud, se les reubique en otras áreas donde la vibración no represente un riesgo.

e) El patrón debe delimitar las zonas en que existan riesgos de exposición a vibraciones en base a estudios técnicos.

A n e x o I

Definiciones de los términos empleados en esta NOM-STPS-

- Dispositivo para eliminar las vibraciones: Mecanismo, equipo o pieza que disminuye la vibración absorbiéndola o disipándola.
- Exposición a vibraciones: Es la interrelación del trabajador con las vibraciones y la fuente que las genera en su ambiente laboral.
- Exposición corporal segmentaria: Es el movimiento oscilatorio que recibe un trabajador al estar expuestas sus manos, brazos o ambos.
- Exposición corporal total: Expuesto todo su cuerpo.
- Frecuencia: Es el número de veces que se repite un fenómeno o suceso de vibración con las mismas características en la unidad de tiempo, su unidad es el Hertz abreviado Hz (ciclos / segundo).

Vibración: Movimiento oscilatorio de un cuerpo.

A n e x o II

T a b l a

Cuando se conoce la frecuencia de un mecanismo que genera la vibración y se relaciona con la aceleración (m / s^2) ya sea en el eje de aceleración longitudinal (a_z) o en los ejes de aceleración transversal (a_x , a_y) se obtiene el tiempo de exposición que puede variar de un minuto a veinticuatro horas.

Las direcciones de incidencia de las vibraciones sobre el cuerpo humano, se especifican en la figura 1 de esta NOM-STPS-.

Por ejemplo:

En la tabla uno, para una frecuencia de 5 Hz (ciclos/segundo) y con una aceleración de $1.12 m/s^2$ se puede observar un tiempo de exposición de 8 horas. Observando para la misma frecuencia y una aceleración de $1.8 m/s^2$ se aprecia un tiempo de exposición de 4 horas. Asimismo, el tiempo de exposición se reduce a 2.5 horas cuando la aceleración aumenta a $2.5 m/s^2$ con la misma frecuencia.

A n e x o III

I Examen médico de ingreso.

1. Antecedentes heredo-familiares.

1.1 Antecedentes heredo-familiares.

1.2 Búsqueda de antecedentes oste-ohmio-articulares y vasculares.

1.3 Búsqueda de antecedentes de padecimientos mentales.

2. Antecedentes personales no patológicos.

2.1 Tabaquismo intenso asociado a problemas vasculares.

2.2 Alcoholismo habitual con o sin asociación a trastornos mentales.

3. Antecedentes laborales

3.1 Antecedentes de exposición laboral y /o extralaboral a sonidos de gran magnitud y /o vibraciones.

4. Antecedentes personales patológicos y padecimientos.

4.1 Interrogatorio intencionado sobre los siguientes padecimientos:

4.1.1 Enfermedad de la colágena con afección articular y peri articular.

a) Artritis reumatoide.

b) Dermatomiositis.

c) Lupus eritema toso sistémico.

- d) Esclerodermia.
- e) Fiebre reumática.
- f) Enfermedad de Raynaud.
- g) Síndrome de Sjögren.

4.1.2 Padecimientos vasculares periféricos.

a) Insuficiencia arterial.	b) Insuficiencia venosa grado III-IV.
c) Síndrome de Raynaud.	d) Tromboflebitis.
e) Flebotrombosis.	

4.1.3 Padecimientos articulares y peri articulares avanzados.

- a) Osteo artrosis generalizada grado III-IV.
- b) Espóndil artrosis grado III-IV.
- c) Síndrome del túnel del carpo.
- d) Enfermedad de Dupuytren.
- e) Tenosinovitis.
- f) Artrosis traumáticas y degenerativas.
- g) Secuelas graves de fractura.

4.1.4 Padecimientos mentales.

- a) Neurosis.
- b) Psicosis.
- c) Trastornos de la personalidad.

5. Exploración física completa con énfasis en los aparatos y sistemas siguientes:

- a) Músculo-esquelético.
- b) Cardiovascular.
- c) Esfera mental.

6. Estudios de laboratorio y gabinete, no se recomiendan exámenes de rutina, sino que deberán realizarse los necesarios, según los resultados obtenidos en el interrogatorio y exploración física.

II Examen médico periódico.

Deberá efectuarse revisión médica como mínimo con una periodicidad de 6 meses, poniendo énfasis en el interrogatorio y exploración física de los aparatos y sistemas siguientes:

- a) Músculo-esquelético.

b) Cardiovascular.

c) Esfera mental.

1. Estudios de laboratorio y gabinete.

Deberán realizarse las siguientes valoraciones médicas especializadas, así como exámenes de laboratorio y gabinete, cuando se requieran:

a) Estudio radiográfico simple comparativo de manos y pies en proyecciones dorso-palmar, dorso-plantar y oblicuas.

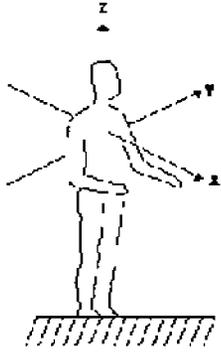
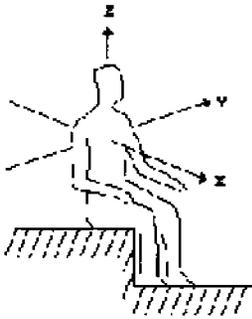
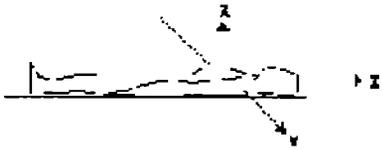
b) Estudio radiográfico simple de columna vertebral, en sus segmentos lumbar y sacro, en proyecciones postero-anterior y lateral.

c) Determinación de ácido úrico, urea, creatinina y glucosa en sangre.

d) Valoración psicológica y/o psiquiátrica

Ver Grafica 1. Limites de Aceleración Transversal

Ver Gráfica2. Limites de Aceleración Longitudinal

	<p>FIGURA 1.- DIRECCIONES DE INCIDENCIA DE LAS VIBRACIONES SOBRE EL CUERPO HUMANO.</p>
	
	
<p>a_x, a_y, a_z = Aceleración en las direcciones de los ejes x,y,z</p> <p>eje x= de espalda a pecho.</p>	

eje y= de lado derecho a izquierdo.

eje z= de los pies o parte inferior, a la cabeza.

TABLA No. 1 LIMITES DE ACELERACION TRANSVERSAL (a_x , a_y) COMO FUNCION DE LA FRECUENCIA Y DEL TIEMPO DE EXPOSICION

FRECUENCIA (FRECUENCIA CENTRAL DE BANDA)		TIEMPO DE EXPOSICION								
		24 h	16 h	8 h	4 h	2.5 h	1 h	25 min.	16 min.	1 min.
DE TERCIO OCTAVA)	UN DE	ACELERACION m/s^2								
1.0		0.20	0.30	0.448	0.710	1.0	1.7	2.5	3.0	4.0
1.25		0.20	0.30	0.448	0.710	1.0	1.7	2.5	3.0	4.0
1.6		0.20	0.30	0.448	0.710	1.0	1.7	2.5	3.0	4.0
2.0		0.20	0.30	0.448	0.710	1.0	1.7	2.5	3.0	4.0
2.5		0.25	0.38	0.56	0.90	1.26	2.12	3.2	3.8	5.0
3.15		0.32	0.472	0.71	1.12	1.6	2.64	4.0	4.72	6.3
4.0		0.40	0.60	0.90	1.42	2.0	3.40	5.0	6.0	8.0
5.0		0.50	0.75	1.12	1.80	2.5	4.24	6.3	7.5	10.0
6.3		0.63	0.95	1.42	2.24	3.2	5.30	8.0	9.5	12.6

8.0	0.80	1.20	1.80	2.80	4.0	6.70	10.0	12.0	16.0
10.0	1.00	1.50	2.24	3.60	5.0	8.50	12.6	15.0	20.0
12.5	1.26	1.90	2.80	4.48	6.30	10.6	16.0	19.0	25.0
16.0	1.60	2.36	3.60	5.60	8.0	13.4	20.0	23.6	32.0
20.0	2.00	3.00	4.48	7.10	10.0	17.0	25.0	30.0	40.0
25.0	2.50	3.80	5.60	9.00	12.6	21.2	32.0	38.0	50.0
31.5	3.20	4.72	7.10	11.20	16.0	26.4	40.0	47.2	63.0
40.0	4.00	6.00	9.00	14.20	20.0	34.0	50.0	60.0	80.0
50.0	5.00	7.50	11.20	18.00	25.0	42.4	63.0	75.0	100.0
63.0	6.30	9.50	14.20	22.4	32.0	53.0	80.0	91.4	126.0
80.0	8.00	12.00	18.00	28.0	40.0	67.0	100.0	120	160.0

TABLA No. 2 LIMITES DE ACELERACION LONGITUDINAL (a_z) COMO FUNCION DE LA FRECUENCIA Y DEL TIEMPO DE EXPOSICION

FRECUENCIA (FRECUENCIA CENTRAL DE BANDA	TIEMPO DE EXPOSICION									
	UN TERCIO DE OCTAVA)	24 h	16 h	8 h	4 h	2.5 h	1 h	25 min.	16 min.	1 min.
Hz (Ciclos/s)	ACELERACION m/s^2									
1.0	0.560	0.850	1.26	2.12	2.80	4.72	7.10	8.50	11.20	
1.25	0.500	0.750	1.12	1.90	2.52	4.24	6.30	7.50	10.00	
1.60	0.448	0.670	1.00	1.70	2.24	3.80	5.60	6.70	9.00	
2.00	0.400	0.600	0.90	1.50	2.00	3.40	5.00	6.00	8.00	
2.50	0.360	0.530	0.80	1.34	1.80	3.00	4.48	5.30	7.10	
3.15	0.320	0.470	0.71	1.20	1.60	2.64	4.00	4.70	6.30	
4.00	0.280	0.424	0.63	1.06	1.42	2.36	3.60	4.24	5.60	
5.00	0.280	0.424	0.63	1.06	1.42	2.36	3.60	4.24	5.60	
6.30	0.280	0.424	0.63	1.06	1.42	2.36	3.60	4.24	5.60	
8.00	0.280	0.424	0.63	1.06	1.42	2.36	3.60	4.24	5.60	
10.00	0.360	0.530	0.80	1.34	1.80	3.00	4.48	5.30	7.10	
12.50	0.448	0.670	1.00	1.70	2.24	3.80	5.60	6.70	9.00	

16.00	0.560	0.850	1.26	2.12	2.80	4.72	7.10	8.50	11.20
20.00	0.710	1.060	1.60	2.64	3.60	6.00	9.00	10.60	14.20
25.00	0.900	1.340	2.00	3.40	4.48	7.50	11.20	13.40	18.00
31.50	1.120	1.700	2.50	4.24	5.60	9.50	14.20	17.00	22.40
40.00	1.420	2.120	3.20	5.30	7.10	12.00	18.00	21.20	28.00
50.00	1.800	2.640	4.00	6.70	9.00	15.00	22.40	26.40	36.00
63.00	2.240	3.400	5.00	8.50	11.20	19.00	28.00	34.00	44.80
80.00	2.800	4.240	6.30	10.60	14.20	23.60	36.00	42.40	56.00

La vigilancia del cumplimiento de esta Norma Oficial Mexicana corresponde a la Secretaría del Trabajo y Previsión Social.

TRANSITORIO

UNICO.- La presente Norma Oficial Mexicana entrará en vigor al día siguiente de su publicación en el Diario Oficial de la Federación. México, D.F., a los doce días del mes de noviembre de mil novecientos noventa y tres.

SUFRAGIO EFECTIVO NO REELECCION EL SECRETARIO DEL
TRABAJO Y PREVISION SOCIAL ARSENIO FARELL CUBILLAS

Capítulo 4

Desarrollo del Algoritmo

Algoritmo para el cálculo de la Transformada de Concentración de Onda Discreta

Para hacer el calculo de la Transformada de Concentración de Onda Discreta puedes utilizar Wavelet toolbox, el bloque de diseño automático del filtro de base-concentración de onda. Debes especificar tu propio filtro FIR pasa bajas y pasa altas para colocar los parámetros del filtro ya definido a utilizar. Por ejemplo en el Banco del Filtro de Análisis Diádico esta construido desde la unidad básica siguiente. La unidad puede ser de cascada para el banco del filtro de análisis diádico ambos con estructura de árbol simétrico o asimétrico. [MiO]

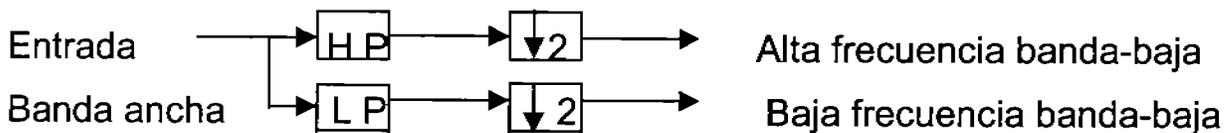


Figura 4.1

Cada unidad consiste de un par de filtros pasa bajas (L P) y pasa altas (H P), seguido por una disminución por un factor de 2. Los filtros son de la mitad de banda con un corte de frecuencia de $F_{s/4}$, un cuarto del muestreo de entrada de la frecuencia. Cada uno con los filtros de paso de la frecuencia de banda que el otro filtro detiene.

En la entrada se descompone la unidad en bandas bajas adyacentes o juntas de alta frecuencia y baja frecuencia. Comparando la entrada con cada una de las bandas bajas estas tienen la mitad del ancho de banda (debido a los filtros de media-banda) y la mitad del valor de la muestra (debido a la disminución por un factor de 2). El banco del filtro de análisis diádico descompone una señal en bandas bajas con ancho de banda más pequeña y valores de muestras mas lentas.

Las señales base-forma las descompone con formas de tamaño en múltiplos de 2^n en ambos $n + 1$ o bandas bajas 2^n . Al descomponer las señales base-muestras o señales base-forma de diferentes tamaños, utiliza el bloque del filtro de banda baja del análisis de dos canales. Puedes conectar múltiples copias del bloque del filtro de banda baja del análisis de dos canales para crear un banco de filtro de varios niveles de análisis diádico. El bloque del banco del filtro de análisis diádico descompone una señal de banda ancha en una colección de bandas bajas con ancho de banda más pequeña y valores de muestras más lentas.

El bloque utiliza una serie de filtros F I R pasa bajas y pasa altas para dividir repentinamente el alcance de la frecuencia de entrada, como se ilustra en la siguiente figura. [Fli]

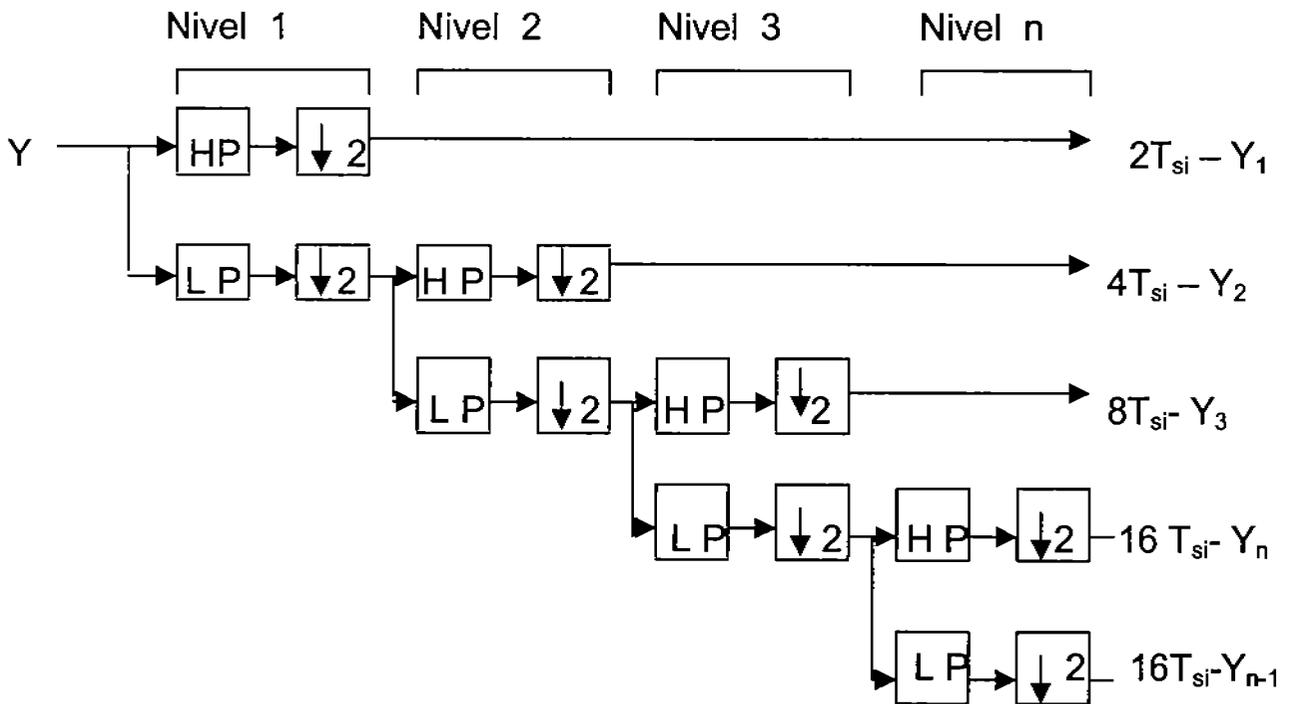


Figura 4.2 Estructura asimétrica

Periodo de la muestra de entrada = T_{si} ; $\downarrow 2$: Muestra baja por 2

HP: Filtro pasa altas con $f_s = \frac{1}{4}$ de f_s ; LP: Filtro pasa bajas con $f_s = \frac{1}{4}$ de f_s

Periodo de muestreo de la salida = $2^k [T_{si}]$ para la salida Y_1 $1 \leq k \leq 0$

Periodo de muestreo de la salida = $2^n [T_{si}]$ para la salida Y_{n+1}

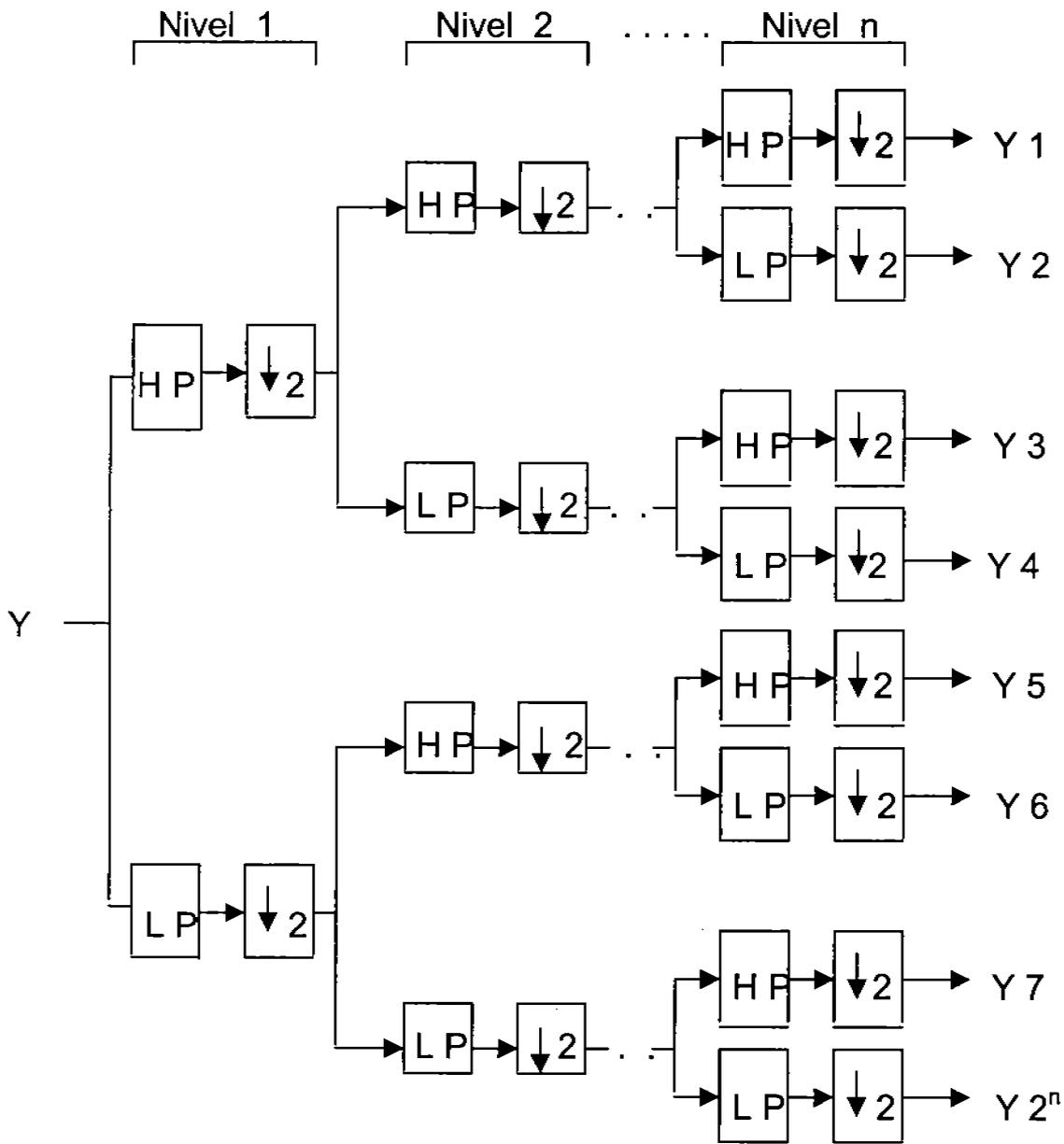


Figura 4.3 estructura simétrica

Periodo de muestreo de entrada = T_{si} ; $\downarrow 2$: Muestra baja por 2

H P: filtro pasa altas con $f_s = \frac{1}{4}$ de f_s ; L P: Filtro pasa bajas con $f_s = \frac{1}{4}$ de f_s

Periodo de muestreo de salida = $2^n (T_{si})$ para todas 2^n salidas

La figura 4.2 muestra el banco del filtro de análisis diádico asimétrico de nivel n , compara las dos estructuras de árboles del banco del filtro de análisis diádico. La estructura asimétrica (sin simetría) descompone solo las frecuencias bajas de la salida de cada uno de los niveles, la figura 4.3 muestra la estructura simétrica descompone la estructura de las bandas bajas de la alta y baja frecuencia de la salida de cada uno de los niveles.

La siguiente tabla resume las características de la llave del banco del filtro diádico, asimétrico y simétrico.

Tabla 1 características notables del análisis diádico simétrico y asimétrico

	Nivel- n Simétrico	Nivel- n Asimétrico
La descomposición de bandas bajas de frecuencia bajas y altas	todas las bandas bajas de baja-frecuencia y de alta frecuencia	cada uno de los niveles de bandas de baja frecuencia es descompuesta en el siguiente nivel, y cada uno de los niveles de la banda de alta frecuencia es una salida del banco del filtro
Número de salidas de banda baja	2^n	$n + 1$

	Nivel-n Simétrico	Nivel-n Asimétrico
Ancho de banda y número de muestras en la salida de la banda baja	Para una entrada con ancho de banda BW y N muestras, todas las salidas tienen ancho de banda $BW / 2^n$ y $N / 2^n$ muestras	Para una entrada con ancho de banda BW y N muestras, Y_k tiene el ancho de banda BW_k y N_k muestras, donde $BW_k \begin{cases} BW / 2^k & (1 \leq k \leq n) \\ BW / 2^n & (k = n + 1) \end{cases}$ $N_k \begin{cases} N / 2^k & (1 \leq k \leq n) \\ N / 2^n & (k = n + 1) \end{cases}$ Del ancho de banda, y numero de muestras en cada una de las bandas, las ultimas dos banda bajas tienen el mismo ancho de banda y numero de muestras desde el origen del mismo nivel en el banco del filtro
Muestras del periodo de la salida	Todas las bandas bajas de la salida tienen un periodo de muestras de $2^n (T_{si})$	Periodo de muestras de $k^{ésima}$ $2^k (T_{si}) \quad (1 \leq k \leq n)$ $2^n (T_{si}) \quad (k = n + 1)$ debido a la disminución por 2, el periodo de muestras de cada una de las bandas (excepto la ultima) es el doble que el de la previa banda baja. Las ultimas dos bandas bajas tienen el mismo periodo de muestras desde el origen del mismo nivel del banco del filtro

Numero total de muestras de la salida	El numero total de muestras de la salida de todas las bandas bajas es igual al numero de muestras en la entrada (debido a la disminuci3n por 2 en cada uno de los niveles)
Aplicaci3n de Concentraci3n de Ondas	En la aplicaci3n de Concentraci3n de onda, los filtros pasa altas y pasa bajas de base-concentraci3n de onda est3n dise1ados, tal que el alisado Introducido por la disminuci3n son cancelados exactamente en la reconstrucci3n

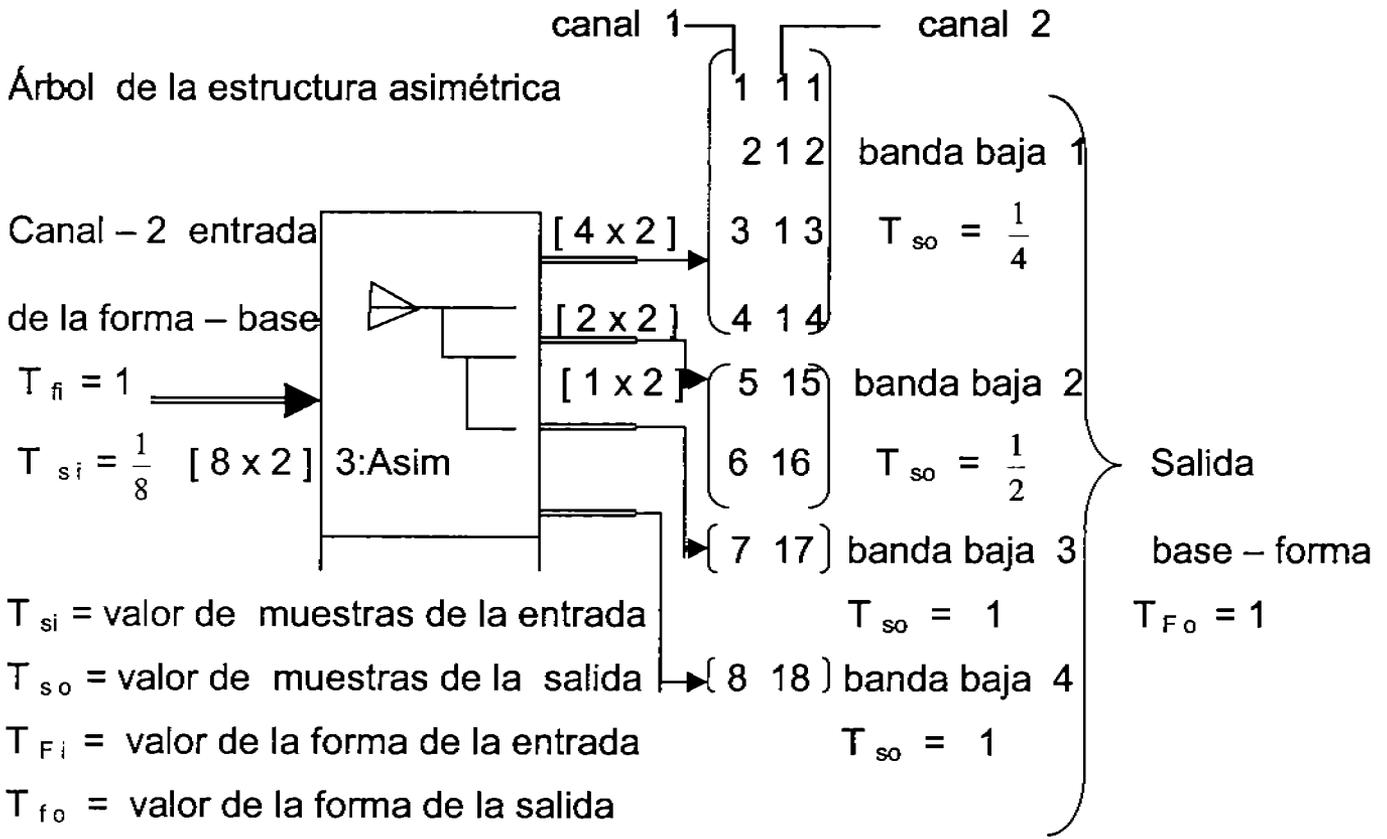
Requerimientos de la entrada

- La entrada puede ser un vector en base-forma o una matriz en base-forma
- El tama1o de la forma de la entrada debe de ser un m3ltiplo de 2^n , donde n es el numero del nivel del banco del filtro. Por ejemplo el tama1o de la forma de 16 debe de ser apropiado para un 3rbol en tres niveles (16 es un m3ltiplo de 2^3) en la figura 4.4 se muestra el por que de los requerimientos de la entrada de 3 niveles
- El bloque siempre funciona a lo largo de la columna de la entrada

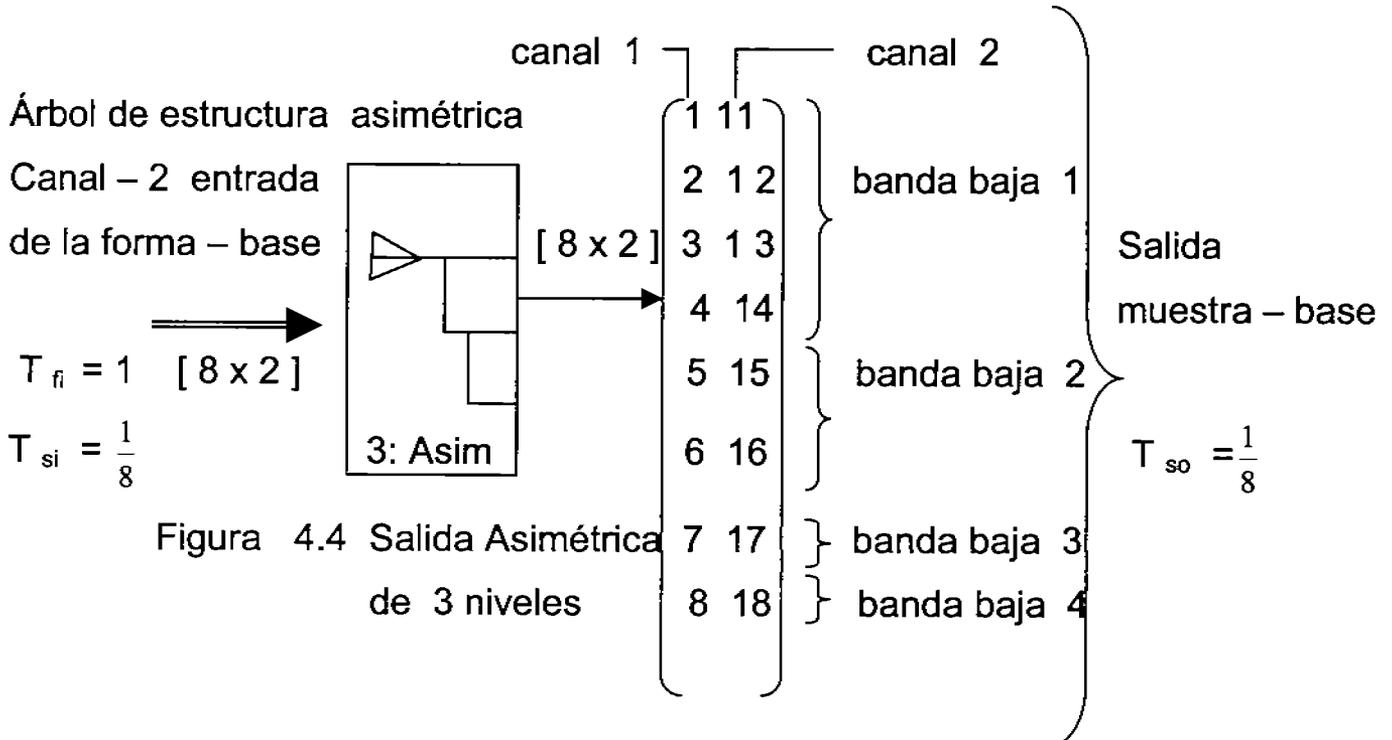
Puedes especificar el filtro del banco de filtros pasa altas y pasa bajas por vectores proporcionando los coeficientes del filtro.

Al utilizar wavelet toolbox se puede especificar los filtros de base-concentraci3n de onda seleccionando el tipo de concentraci3n de onda desde los par3metros del filtro. Se debe colocar la estructura del banco del filtro para la asimetr3a o simetr3a, y especificar el n3mero de niveles en el banco del filtro

Puerto de múltiples salidas



Puerto de una sola salida



La siguiente tabla resume las diferentes salidas características del bloque cuando se coloca en la salida desde un puerto de una sola salida o un puerto de múltiples salidas.

Tabla 2 salidas características para n – niveles del filtro de análisis diádico

	Nivel-n Simétrico	Nivel-n Asimétrico
Descripción de la salida	concatenación del bloque de todas las bandas bajas en un vector o en una matriz y la concatenación de las salidas de bandas bajas desde un solo puerto. Cada una de las columnas de salida contiene las bandas bajas del canal de entrada que le corresponde	bandas bajas de cada una de las salidas del bloque desde un puerto separado de la salida. La banda baja mas en lo alto de la salida del puerto con las frecuencias mas altas. Cada una de las columnas de la salida contiene una banda baja para la entrada del canal correspondiente
Estado de la forma de la salida	Base – muestra	Base – forma
valor de la forma de la salida	No aplicable	Lo mismo como el valor de la forma de la entrada (la forma de la salida puede variar de tamaño, tal que el valor de la muestra de salida puede variar)

Nivel-n Simétrico

Nivel-n Asimétrico

<p>Dimensiones de la salida (tamaño de la forma)</p>	<p>El mismo numero de renglones y columnas como la entrada</p>	<p>La salida tiene el mismo numero columnas como la entrada. El numero de renglones de la salida es el tamaño de la forma de la salida. Para una entrada con el tamaño de la forma M_i, la salida Y_k tiene el tamaño de la forma $M_{o,k}$:</p> <p><u>Simétrico</u> – El tamaño de la forma de todas las salidas tienen $M_i / 2^n$</p> <p><u>Asimétrico</u> – El tamaño de la forma de cada una de las salidas (excepto la ultima) es la mitad de la salida del nivel anterior.</p>
		<p>El tamaño de la forma de las dos ultimas salidas del puerto ultimas salidas del puerto de la salida es la misma desde el origen del mismo nivel en el banco del filtro.</p> $M_{o,k} = \begin{cases} M_i / 2^k & (1 \leq k \leq n) \\ M_i / 2^n & (k = n + 1) \end{cases}$

	Nivel-n Simétrico	Nivel-n Asimétrico
Valor de la muestra de la salida	El valor de la muestra de la salida es la misma	El valor entre la salida y la entrada es el mismo. El tamaño de la forma es diferente que la entrada. Por lo tanto, los valores de las muestras de la salida, $F_{so, k}$, son diferentes del valor de las muestras de la entrada, F_{si} : Simétrico – Todas las salidas tienen el valor de las muestras $F_{si} / 2^n$
		Asimétrico - $F_{so, k} = \begin{cases} F_{si} / 2^k & (1 \leq k \leq n) \\ F_{si} / 2^n & (k = n + 1) \end{cases}$

Especificando el filtro del banco de filtros

En el banco de filtros debes especificar los filtros pasa altas y pasa bajas colocando los parámetros del filtro en una de las opciones siguientes:

Definido por el utilitario

Asignas especificando los filtros con dos vectores de los coeficientes en el filtro F I R pasa bajas de los coeficientes del filtro F I R pasa altas.

Utilizas el bloque de los mismos filtros pasa bajas y pasa altas entre el banco del filtro. Los dos filtros deben de ser filtros de media banda, donde cada filtro pasa la banda de la frecuencia que el otro filtro detiene. [Kei]

La Concentración de Onda tal como la Biorthogonal Daubechies [Kei]

El bloque utiliza la Concentración de onda especificada con la construcción de los filtros pasa bajas y pasa altas utilizando la función de la caja de herramientas de concentración de onda wavelet toolbox wfilters.

Dependiendo de la concentración de onda, el bloque puede permitir ambos tal como el orden de la concentración de onda, y / o el orden del filtro [resumen / parámetros] (el ultimo parámetro le sigue la especificación diferente del orden de la concentración de onda para el análisis y resumen del estado del filtro). Para utilizar la wavelet debes instalar la wavelet toolbox

Tabla 3 Especificando los filtros, con los parámetros y relaciones del filtro

	Nivel-n Simétrico	Nivel-n Asimétrico
Filtro	Colocando la muestra para el filtro relacionado de la especificación	sintaxis de la función de la concentración de onda que le corresponde al parámetro
Definido por el Utilitario	Base del filtro en concentración de onda Daubechies con orden 3 Coeficientes del filtro F I R Pasa bajas = [0.0352 – 0.0854 -0.1350 0.4599 0.8069 0.3327] Coeficientes del filtro F I R Pasa altas = [-0.3327 0.8069 -0.4599 -0.1350 0.0854 0.0352]	Ninguna
Haar	Ninguno	wfilters (' haar ')
Daubechies	Orden de concentración de onda = 4	wfilters (' db4 ')
Symlet	Orden de concentración de onda = 3	wfilters (' sym3 ')
Coiflets	Orden de concentración de onda = 1	wfilters (' coif1 ')
Biorthogonal	Orden del filtro [resumen / análisis] = 3.1	wfilters (' bior3.1 ')
Biorthogonal Inversa	Orden del filtro [resumen / análisis] = 3.1	wfilters (' rbio3.1 ')
Meyer discreta	Ninguno	wfilters (' dmey ')

Programa para calcular la Concentración de onda de 1 - dimensión

```
function varargout = dscedw1d(varargin)    [Mat]
%DSCEDW1D Demonstrates typical wavelet 1-D scenarios %in the
Wavelet Toolbox (Auto play).
% This is a slideshow file for use with wshowdrv.m
% To see it run, type 'wshowdrv dscedw1d',
% Initialization and Local functions if necessary.
if nargin>0
    action = varargin{1};
    switch action
        case 'auto'      , wshowdrv('#autoMode',mfilename,'close');
        case 'gr_auto'  ,
wshowdrv('#gr_autoMode',mfilename,'close');

        case 'getFigParam'
            figName = 'Short Scenario DW1D';
            showType = 'command';
            varargout = {figName,showType};

        case 'slidePROC'
            wait_mode = 0;
            [figHandle,idxSlide] = deal(varargin{2:end});
            idxPREV = wshowdrv('#get_idxSlide',figHandle);
            localPARAM = getappdata(figHandle,'localPARAM');
            switch idxSlide
```

```

case 1
    if ~isempty(localPARAM)
        win_dwld = localPARAM{1};
        delete(win_dwld);
        dmsgfun('close');
        rmappdata(figHandle, 'localPARAM');
    end
    % wshowdrv('#bloc_BackBtn', figHandle);
    return

```

```

case 2
    if ~isempty(localPARAM)
        win_dwld = localPARAM{1};
        delete(win_dwld);
    end

```

```

%-----
% Display main window (demo initialization).
%-----
        win_dwld = dwldtool;
%-----
% Main window parameters.
%-----
        tag_pop_viewm = 'View_Mode';
        tag_valapp_scr = 'ValApp_Scr';
        pop_handles =

```

```

findobj(win_dwld, 'style', 'popupmenu');

```

```

                pop_viewm      =
findobj(pop_handles,'tag',tag_pop_viewm);
                pop_app_scr    =
findobj(pop_handles,'tag',tag_valapp_scr);
%-----
                localPARAM = {win_dwld,pop_viewm,pop_app_scr};

setappdata(figHandle,'localPARAM',localPARAM);

wshowdrv('#modify_cbClose',figHandle,win_dwld,'dwldtool');
                msg = get_Message(idxSlide);

wshowdrv('#disp_msg',figHandle,msg,'step',localPARAM{1});
                if idxPREV<idxSlide
                        figMSG = dmsgfun('handle');

wshowdrv('#modify_cbClose',figHandle,figMSG,'dmsgfun');
                end
                return

                otherwise
                        [win_dwld,pop_viewm,pop_app_scr] =
deal(localPARAM{:});
                end

                switch idxSlide

```

```

        case 3
            if idxPREV<idxSlide
                %-----
                % Full decomposition mode.
                %-----

                    sig_nam = 'noisdopp'; wav_nam = 'sym4';
lev_dec = 5;
dwldmgr('demo',win_dwld,sig_nam,wav_nam,lev_dec);
                    wenamngr('Inactive',win_dwld);
            else
                set(pop_viewm,'value',2);
                eval(get(pop_viewm,'Callback'));
            end

        case 4
            if idxPREV<idxSlide
                %-----
                % Separate mode.
                %-----

                    set(pop_viewm,'value',3);
                    eval(get(pop_viewm,'Callback'));
            else
                win_mopt_Params =
getappdata(figHandle,'win_mopt_Params');
                [win_mopt,chk_det_on,chk_cfs_on,pop_ccfs]
deal(win_mopt_Params{:});

```

```

        figure(win_mopt);
        set(chk_det_on, 'Value', 1);
        pause(0.5);
        dwlddisp('apply', win_dwld, win_mopt);
        set(pop_app_scr, 'Value', 1);
        eval(get(pop_app_scr, 'Callback'));
        delete(win_mopt)
        rmappdata(figHandle, 'win_mopt_Params');
    end

```

```

    case 5

```

```

        if idxPREV<idxSlide

```

```

            %-----

```

```

            % Show and Scroll mode (app5+sig+cfs).

```

```

            %-----

```

```

            set(pop_viewm, 'value', 1);

```

```

            eval(get(pop_viewm, 'Callback'));

```

```

            pause(2);

```

```

            %-----

```

```

            % More Display Option window parameters.

```

```

            %-----

```

```

                win_mopt_Params =

```

```

makeWinOpt(figHandle, win_dwld);

```

```

    [win_mopt, chk_det_on, chk_cfs_on, pop_ccfs] =

```

```

deal(win_mopt_Params{:});

```

```

            %-----

```

```

                pause(1);

```

```

        set(chk_det_on, 'Value', 0);
        pause(1);
        dwliddisp('apply', win_dwld, win_mopt);
        set(pop_app_scr, 'Value', 5);
        eval(get(pop_app_scr, 'Callback'));
    else
        win_mopt_Params =
getappdata(figHandle, 'win_mopt_Params');
        [win_mopt, chk_det_on, chk_cfs_on, pop_ccfs] =
deal(win_mopt_Params{:});
        figure(win_mopt);
        pause(1)
        set(pop_ccfs, 'Value', 1);
        pause(1)
        dwliddisp('apply', win_dwld, win_mopt);
    end

    case 6
%-----
% Show and Scroll mode (app5+sig+cfs ).
%     coloration : init + all levels + abs
%-----

        if idxPREV>idxSlide
            makeWinOpt(figHandle, win_dwld);
            return;
        end

```

```

        win_mopt_Params =
getappdata(figHandle, 'win_mopt_Params');
        [win_mopt,chk_det_on,chk_cfs_on,pop_ccfs] =
deal(win_mopt_Params{:});
        figure(win_mopt);
        pause(1)
        set(pop_ccfs, 'Value', 3);
        pause(1)
        dwlddisp('apply',win_dwld,win_mopt);

    case 7
%-----
% Close More Display Option window.
% And message for Histograms.
%-----

        if idxPREV<idxSlide
            win_mopt_Params =
getappdata(figHandle, 'win_mopt_Params');
            win_mopt = win_mopt_Params{1};
            dwlddisp('close',win_dwld,win_mopt);
            rmappdata(figHandle, 'win_mopt_Params');
            wenamngr('Inactive',win_dwld);
        else
            win_hist_Params =
getappdata(figHandle, 'win_hist_Params');
            win_hist = win_hist_Params{1};
            dwldhist('close',win_hist);
            delete(win_hist)

```

```

        rmappdata(figHandle,'win_hist_Params');
    end
    case 8
%-----
% Histograms window - all the detail coefficients.
% And first message for De-noising.
%-----
        win_hist      = dwldmgr('hist',win_dwld);
        wenamngr('Inactive',win_hist);
        tag_det_sig   = 'Det_sig';
        tag_det_all   = 'Det_All';
        tag_sel_cfs   = 'Sel_Cfs';
        tag_show_hist = 'Show_Hist';
        uic_win_hist  =
findobj(win_hist,'Type','uicontrol');
        chk_win_hist  =
findobj(uic_win_hist,'Style','checkbox');
        pus_win_hist  =
findobj(uic_win_hist,'Style','pushbutton');
        chk_det_sig   =
findobj(chk_win_hist,'tag',tag_det_sig);
        pus_det_all   =
findobj(pus_win_hist,'tag',tag_det_all);
        rad_sel_cfs   =
findobj(uic_win_hist,'Style','radiobutton','tag',tag_sel_cfs);
        pus_show_hist =
findobj(pus_win_hist,'tag',tag_show_hist);

```

```

        win_hist_Params =
{win_hist,chk_det_sig,pus_det_all,rad_sel_cfs,pus_show_hist};
    setappdata(figHandle,'win_hist_Params',win_hist_Params);
    %-----
        set(chk_det_sig,'value',1)
        eval(get(chk_det_sig,'Callback')); pause(1)
        eval(get(pus_det_all,'Callback')); pause(1)
        eval(get(rad_sel_cfs,'Callback')); pause(1)
        eval(get(pus_show_hist,'Callback'));
        wenamngr('Inactive',win_hist);

    case 9
        if idxPREV<idxSlide
    %-----
    % Close Histograms window.
    % And first message for Compression.
    %-----
        deleteSubFig(figHandle,'win_hist_Params');
            wenamngr('Inactive',win_dwld);
        else
            deleteSubFig(figHandle,'win_comp_Params');
        end

    case 10
        if idxPREV>idxSlide
deleteSubFig(figHandle,'win_comp_Params');
            deleteSubFig(figHandle,'win_deno_Params');
        end

```

```

%-----
% Compression: Initialization of window.
%-----
win_comp = dwldmgr('comp',win_dwld);
wenamngr('Inactive',win_comp);
% UTTHRGBL handlesUIC (Compression).
%-----
% ud.handlesUIC = ...
%   [fra_utl;txt_top;pop_met;...
%   txt_sel;sli_sel;edi_sel; ...
%   txt_nor;edi_nor;txt_npc;...
%   txt_zer;edi_zer;txt_zpc;...
%   tog_res;pus_est];
%-----
% Memory of stored values (Compression).
%-----
        n_misc_comp = ['MB1_dwldcomp'];
        ind_status  = 2;
        ind_pop_mod = 8;
        pop_mod     =
wmemtool('rmb',win_comp,n_misc_comp,ind_pop_mod);
        handlesUIC = utthrgbl('handlesUIC',win_comp);
        edi_zer    = handlesUIC(11);
        win_comp_Params =
{win_comp,pop_mod,edi_zer,n_misc_comp,ind_status};
        setappdata(figHandle,'win_comp_Params',win_comp_Params);
%-----

```

case 11

```
%-----  
% Compression: Global mode.  
% After compression with the default threshold value.  
%-----
```

```
win_comp_Params =  
getappdata(figHandle, 'win_comp_Params');  
win_comp = win_comp_Params{1};  
dwldcomp('compress', win_comp, win_dwld);  
wenamngr('Inactive', win_comp);
```

case 12

```
%-----  
% Compression: change the zeros value.  
%-----
```

```
win_comp_Params =  
getappdata(figHandle, 'win_comp_Params');  
  
[win_comp, pop_mod, edi_zer, n_misc_comp, ind_status] =  
deal(win_comp_Params{:});  
set(edi_zer, 'String', num2str(96.4));  
eval(get(edi_zer, 'Callback'));  
dwldcomp('compress', win_comp, win_dwld);  
wenamngr('Inactive', win_comp);
```

case 13

```
%-----  
% Compression: By Level mode.  
%-----
```

```
win_comp_Params =
```

```
getappdata(figHandle, 'win_comp_Params');
```

```
[win_comp, pop_mod, edi_zer, n_misc_comp, ind_status] =  
deal(win_comp_Params{:});
```

```
set(pop_mod, 'Value', 2)
```

```
eval(get(pop_mod, 'Callback'))
```

```
wenamngr('Inactive', win_comp);
```

case 14

```
%-----  
% Compression: By Level mode.  
% After compression with the default threshold values.  
%-----
```

```
win_comp_Params =
```

```
getappdata(figHandle, 'win_comp_Params');
```

```
win_comp = win_comp_Params{1};
```

```
dwldcomp('compress', win_comp, win_dwld);
```

```
wenamngr('Inactive', win_comp);
```

```
case 15
```

```
%-----  
% Close Compression window.  
% And message for De-noising.  
%-----
```

```
deleteSubFig(figHandle, 'win_comp_Params');  
wenamngr('Inactive', win_dwld);
```

```
case 16
```

```
if idxPREV>idxSlide
```

```
deleteSubFig(figHandle, 'win_deno_Params');
```

```
lin_handles =
```

```
findobj(win_dwld, 'type', 'line');
```

```
try
```

```
lin(1) =
```

```
findobj(lin_handles, 'tag', 'SSig_in_App');
```

```
lin(2) =
```

```
findobj(lin_handles, 'tag', 'SSig_in_Det');
```

```
delete(lin);
```

```
end
```

```
end
```

```
%-----
```

```
% De-noising:
```

```
% - Initialization of window.
```

```
% - De-noising with the default threshold values,
```

```
% with Fixed form soft thresholding method.
```

```
%-----
```

```

win_deno = dwlwmngr('deno',win_dwld);
wenamngr('Inactive',win_deno);
% UTTHRWD handlesUIC (De-noising).
%-----
% ud.handlesUIC = ...
%   [fra_utl;txt_top;pop_met; ...
%     rad_sof;rad_har;txt_noi;pop_noi; ...
%     txt_BMS;sli_BMS;txt_tit(1:4),...
%     txt_nor;edi_nor;txt_npc; ...
%     txt_zer;edi_zer;txt_zpc; ...
%     tog_thr;tog_res;pus_est];
%-----
        handlesUIC = utthrwld('handlesUIC',win_deno);
        pop_met     = handlesUIC(3);
        rad_har     = handlesUIC(5);
        win_deno_Params = {win_deno,pop_met,rad_har};
setappdata(figHandle,'win_deno_Params',win_deno_Params)
%-----
pause(1)
dwlwdeno('denoise',win_deno,win_dwld);
wenamngr('Inactive',win_deno);

case 17
%-----
% De-noising:
%   - De-noising with the default threshold values.
%     with Fixed form hard thresholding.
%-----

```

```

win_deno_Params =
getappdata(figHandle, 'win_deno_Params');
[win_deno, pop_met, rad_har] = deal(win_deno_Params{:});
if idxPREV>idxSlide
    set(pop_met, 'Value', 1)
    eval(get(pop_met, 'Callback'))
end
set(rad_har, 'Value', 1)
eval(get(rad_har, 'Callback'))
dwlddeno('denoise', win_deno, win_dwld);
wenamngr('Inactive', win_deno);

    case 18
% De-noising:
%   - Change the method of thresholding to:
%     the Penalize medium thresholding method.
%-----
        win_deno_Params =
getappdata(figHandle, 'win_deno_Params');
        [win_deno, pop_met, rad_har] =
deal(win_deno_Params{:});
        set(pop_met, 'Value', 6)
        eval(get(pop_met, 'Callback'))

    case 19
        if idxPREV<idxSlide
% De-noising:
%   - De-noising with the default threshold values,

```

```
% with Penalize medium thresholding method.
```

```
%-----
```

```
        win_deno_Params =  
getappdata(figHandle, 'win_deno_Params');  
        win_deno = win_deno_Params{1};  
        dwlddeno('denoise', win_deno, win_dwld);  
        wenamngr('Inactive', win_deno);  
    else  
        dmsgfun('close');  
    end
```

```
case 20
```

```
    if idxPREV>idxSlide
```

```
        deleteSubFig(figHandle, 'win_deno_Params');
```

```
        win_deno = dwldmngr('deno', win_dwld);
```

```
        wenamngr('Inactive', win_deno);
```

```
        handlesUIC =
```

```
utthrwld('handlesUIC', win_deno);
```

```
        pop_met      = handlesUIC(3);
```

```
        rad_har      = handlesUIC(5);
```

```
        win_deno_Params =
```

```
{win_deno, pop_met, rad_har};
```

```
setappdata(figHandle, 'win_deno_Params', win_deno_Params);
```

```
set(pop_met, 'Value', 6)
```

```
eval(get(pop_met, 'Callback'))
```

```
dwlddeno('denoise', win_deno, win_dwld);
```

```

        wenamngr('Inactive',win_deno);
else
        % DISPLAY MESSAGE ONLY!
end

```

```

case 21

```

```

%-----
% Close De-noising window
% and update synthesized signal.
%-----

```

```

        win_deno_Params =

```

```

getappdata(figHandle,'win_deno_Params');

```

```

        win_deno = win_deno_Params{1};

```

```

% MemBloc1 of stored values.

```

```

%-----

```

```

        n_param_anal = 'DWA1d_Par_Anal';

```

```

        ind_ssig_type = 7;

```

```

        wwaiting('msg',win_deno,'Wait ... computing');

```

```

        lin_den = utthrwld('get',win_deno,'handleTHR');

```

```

wmemtool('wmb',win_dwld,n_param_anal,ind_ssig_type,'ds');

```

```

        dwldmngr('return_deno',win_dwld,1,lin_den);

```

```

        wenamngr('Inactive',win_dwld);

```

```

        wwaiting('off',win_deno);

```

```

        delete(win_deno)

```

```

        dmsgfun('close');

```

```

case 22
    if idxPREV<idxSlide
        %-----
        % More Display Option window parameters.
        %-----

        win_mopt_Params =
makeWinOpt(figHandle,win_dwld);

        win_mopt = win_mopt_Params{1};
        wenamngr('Inactive',win_mopt);

        %-----

    else

        win_mopt_Params =
getappdata(figHandle,'win_mopt_Params');

        [win_mopt,chk_det_on,chk_cfs_on,pop_ccfs] =
deal(win_mopt_Params{:});

        set(chk_cfs_on,'Value',1);
        dwlddisp('apply',win_dwld,win_mopt);

    end

case 23

    if idxPREV<idxSlide

        win_mopt_Params =
getappdata(figHandle,'win_mopt_Params');

    else

        win_mopt_Params =
makeWinOpt(figHandle,win_dwld);

    end

```

```

        [win_mopt,chk_det_on,chk_cfs_on,pop_ccfs] =
deal(win_mopt_Params{:});
        set(chk_cfs_on,'Value',0);
        pause(1)
        dwliddisp('apply',win_dwld,win_mopt);

        case 24
%-----
% Close More Display Option window.
%-----
                deleteSubFig(figHandle,'win_mopt_Params');
        end
        [msg,ok] = get_Message(idxSlide);
        if ok ,
wshowdrv('#disp_msg',figHandle,msg,'step',win_dwld); end
        end
        return
end
if nargout<1,
    wshowdrv(mfilename)
else
    idx = 0;  slide(1).code = {}; slide(1).text = {};

%===== Slide 1 =====
    idx = idx+1;
    slide(idx).code = {

```

```

        'figHandle =(gcf;',
        [mfilename
, ' (' 'slidePROC' ',figHandle, ',int2str(idx), '); ' ] };

%===== Slide 2 to Slide 24 =====
for idx = 2:24
    slide(idx).code = { [mfilename
, ' (' 'slidePROC' ',figHandle, ',int2str(idx), '); ' ] };
end

%===== Set "previous" slide indices =====
% Compression slides.
%-----
slide(12).idxPrev = 10;
slide(13).idxPrev = 10;
slide(14).idxPrev = 10;
slide(15).idxPrev = 10;
% De-noising slides.
%-----
slide(16).idxPrev = 10;
slide(21).idxPrev = 20;
slide(22).idxPrev = 20;
%=====

varargout{1} = slide;

end

```

```
%-----%  
function deleteSubFig(figHandle,win_Params_Name)  
  
win_Params = getappdata(figHandle,win_Params_Name);  
if ~isempty(win_Params)  
    win = win_Params{1};  
    if ishandle(win) , delete(win); end  
    rmappdata(figHandle,win_Params_Name);  
end  
%-----%
```

CONCLUSIONES

Cuando nos interesamos en entender los fenómenos físicos naturales y los que el ser humano produce, nos auxiliamos de diferentes ciencias. Este conocimiento puede ser utilizado para mejorar la forma de cómo interactuamos con nuestro medio ambiente. La adquisición de este conocimiento comienza con la observación de los procesos físicos en diferentes formas como por una percepción sensorial directa del proceso físico, o de una percepción indirecta a través de un censor, etc.

Una vez que el proceso a sido observado, la adquisición de un conocimiento más profundo proviene de otras formas de investigación como la documentación de su acción sobre otros procesos físicos con el fin de alterar sus características, otra forma de investigación más poderosa involucra el desarrollo de una descripción abstracta del proceso físico como el lenguaje matemático que se puede utilizar en la investigación de las propiedades del proceso físico para analizar su representación abstracta. En esta forma de investigación, nuestro entendimiento del proceso físico se desarrolla indirectamente, estudiando las propiedades de la descripción matemática

Matemáticamente una señal se describe como una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio, otra variable o variables independientes por ejemplo las señales de voz se generan al forzar el paso del aire a través de las cuerdas vocales. Las imágenes se obtienen exponiendo película fotográfica ante un objeto o un paisaje. Por lo tanto, la forma en que se obtienen las señales se encuentra asociada con un sistema que responde a un estímulo o fuerza. El estímulo en combinación se llama fuente de la señal. Por lo tanto tenemos fuentes de voz, de ruido, de imágenes y de otros tipos de señales.

Podemos decir que un sistema es un dispositivo físico que realiza una operación sobre una señal. Por ejemplo, un filtro que se utiliza para reducir el ruido y las interferencias que se unen a la señal la cual contiene la información deseada, a esto se le denomina sistema. En este caso, el filtro realiza algunas operaciones sobre la señal, cuyo efecto es reducir (filtrar) el ruido y la interferencia presentes en la señal. Cuando pasamos una señal a través de un sistema, como en el caso del filtrado, decimos que hemos procesado la señal. En este caso, el procesado de la señal implica la separación de la señal deseada del ruido o de la interferencia.

El sistema puede incluir dispositivos físicos con software de operaciones sobre una señal. En el procesado digital de señales de un computador, las operaciones realizadas sobre una señal constan de varias operaciones matemáticas especificadas por un programa de software.

La aplicación de las señales a las vibraciones y al sonido es de mucha importancia. Para su estudio los analistas de señales tienen a su disposición un impresionante arsenal de herramientas. Quizás la mejor conocida de estas es el análisis de Fourier que descompone una señal en componentes de senoides de diferentes frecuencias. Para muchas señales, el análisis de Fourier es extremadamente provechoso porque el contenido de la frecuencia de la señal es de gran importancia. Por lo tanto ¿porqué necesitamos otras técnicas, como el análisis de concentración de onda?

El análisis de Fourier tiene una seria desventaja. En la transformada al dominio de la frecuencia, la información del tiempo se pierde. Cuando vemos a una transformada de Fourier de una señal, es imposible decir cuando tomo lugar un evento en particular. Si las propiedades de la señal no cambian mucho sobre el tiempo esto es si es que es llamada una señal estacionaria, esta desventaja no es muy importante.

Sin embargo, las señales más interesantes contienen numerosas características dinámicas o transitorias: de movimiento, de tendencia, de cambios repentinos y eventos de comienzo y de término.

Estas características son con frecuencia las partes más importantes de la señal, y el análisis de Fourier no es el adecuado para detectarlo.

La concentración de onda tiene su representación en el tiempo y en el escalamiento consecuentemente cada aplicación tiene su representación en el tiempo y en el escalamiento.

La concentración de onda es una forma de onda de duración limitada. Comparando la concentración de onda con ondas de senos que son las bases del análisis de Fourier. Las sinusoides no tienen duración limitada, ellas se extienden desde menos a más infinito y en donde las sinusoides son uniformes y predecibles, la concentración de onda tiende a ser irregular y asimétrica.

El análisis de Fourier consiste de la descomposición de una señal en ondas de seno de varias frecuencias, similarmente el análisis de la concentración de onda es la descomposición de una señal en versiones de escalado y desplazamiento de la concentración de onda original (o madre).

Precisamente buscando una comparación de la concentración de onda y las ondas de seno se puede intuir que las señales con cambios definidos pueden ser mucho mejor analizadas con una ondulada irregular que con sinusoides continuas.

Las señales más ordinarias normalmente son datos de una dimensión. Sin embargo, el análisis de concentración de onda puede ser aplicada a datos de dos dimensiones (imagen) y, en principio, a datos de dimensiones más altas. La técnica de concentración de onda la utilizan muchos campos de las ciencias regularmente para su estudio. Mediante la transformada discreta de concentración de onda es posible generar un análisis multi-resolución sobre una señal discreta.

Un análisis multi-resolución corresponde a un proceso iterativo de convoluciones entre la señal discreta y coeficientes que actúan tanto como filtro pasa-bajo y filtro pasa-banda de tal forma que la señal discreta es descompuesta obteniendo información sobre las características generales de la señal y sobre las características del detalle de la señal en forma separada.

Debido a que los coeficientes de concentración de onda son los encargados del detalle de la señal, estos son de valores pequeños.

Esto sugiere que pueden eliminarse o hacerse cero los coeficientes cercanos a cero y la señal reconstruida no variará mucho, es decir, el error de aproximación entre la señal reconstruida y la original será mínimo. Esta sencilla idea ha sido la base sobre la cual la concentración de onda ha encontrado importantes aplicaciones en la compresión de señales y eliminación de ruido.

La obtención de los coeficientes escala como de los coeficientes de concentración de onda se realiza mediante el producto interno entre las versiones dilatadas y trasladadas de la función escala y concentración de onda con la señal a analizar. De esta forma el coeficiente obtenido representa el grado de correlación que existe entre la función escala y concentración de onda con la señal en un intervalo finito en el espacio - tiempo.

Si un cuerpo vibra o gira al moverse, hay un punto en dicho cuerpo, el llamado centro de masa, que se mueve de la misma forma que lo haría una simple partícula sujeta a las mismas fuerzas externas.

Si el cuerpo es una partícula, la acción se representa por una fuerza aplicada a la partícula, pero si el cuerpo tiene dimensiones no despreciables, la acción de la tierra actúa sobre cada partícula, es decir que estas acciones constituyen un sistema de fuerzas aplicadas en diferentes partículas (las partículas que forman el cuerpo).

La fuerza con que la tierra atrae todas las partículas de un cuerpo es concurrente al centro de la tierra. En el movimiento de rotación, la velocidad en línea recta está representada por un vector que es tangente a la trayectoria.

Si en el movimiento de rotación con respecto a un eje de un cuerpo de masa m representamos a la velocidad en línea recta por un vector en cada posición diferente tenemos una velocidad diferente con el transcurso del tiempo durante la trayectoria, cada una de las partículas o puntos de la masa cambia de posición y de velocidad a cada momento durante la trayectoria con el tiempo, respecto a nuestra referencia

El momento de inercia, es una cantidad rotacional y requiere sólo un eje para su referencia. Aunque puede ser, teóricamente, un eje en las inmediaciones del objeto, este eje es, habitualmente, el centro geométrico, el centro rotacional (si el objeto gira sobre soportes), o un eje principal (ejes que pasan por el centro de gravedad escogidos así para que los productos de inercia sean cero). Los movimientos oscilatorios más probables (los más fáciles de producir) ocurren según ciertas frecuencias naturales. Algunas frecuencias de excitación pueden coincidir con las frecuencias naturales (resonancia) y producir respuestas de vibración relativamente muy intensas ; los cuerpos vibrantes son cuerpos sonoros que nos producen ondas de sonido

Las ondas en medios deformables o elásticos son un ejemplo de ondas ordinarias de sonido a las cuales se les llama **ondas mecánicas** Se originan por el desplazamiento de alguna parte de un medio elástico de su posición normal, causando oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio. A causa de las fuerzas elásticas sobre capas adyacentes, esta perturbación se transmite de una capa a la próxima a través del medio.

El propio medio no se mueve como un conjunto; por el contrario, las diversas partes oscilan en trayectorias limitadas. Tanto las ondas mecánicas están caracterizadas por el transporte de energía a través de la materia mediante el movimiento ondulatorio de una perturbación en éste sin que haya ningún movimiento global de la materia misma, ya que cada elemento del medio transmite energía a los elementos vecinos. Para la transmisión de las ondas mecánicas es necesario un medio material. Es esencial para que las máquinas funcionen correctamente, sin vibraciones, y con el menor coste posible; esto depende en gran medida por ejemplo del tipo de rotor y si éste es una pieza simple o un conjunto, además influyen las revoluciones de trabajo real y su tamaño y forma

APENDICE A

Conceptos Básicos

Tenemos tres conceptos básicos: **campo escalar (campo físico), campo vectorial y formas diferenciales o campo covectorial.**

Matemáticamente se le llama campo numérico (campo matemático) al conjunto de operaciones de suma, multiplicación y división.

Al conjunto de operaciones de suma y multiplicación se le llama Álgebra.

En física e Ingeniería se le llama campo a las aplicaciones en donde la división no existe

Producto escalar

El potencial del campo gravitacional es el producto punto en el espacio tiempo.

Campo escalar

Es la asociación de una propiedad física a cada punto del espacio por ejemplo: temperatura, diferencia de potencial.

Las coordenadas es un ejemplo de campo escalar. El campo escalar es un sinónimo de una función real o de medida.

El campo escalar esta asociado a cada elemento del dominio de un número real en donde las coordenadas son solamente para nuestra referencia por ejemplo las coordenadas cartesianas. El sistema de referencias es solamente para nuestra conveniencia no es absoluto pueden ser coordenadas polares, cartesianas, etc.

Función real.

El campo escalar tiene sus valores en los reales. Se asocia a cada elemento del dominio un real (asocia a cada punto el valor). El dominio puede ser cualquier cantidad física. Si no se puede sumar y multiplicar no es escalar por ejemplo; una silla y una mesa no se pueden sumar. Un escalar es un número real.

Campo vectorial

En 1632 Galileo afirmó que se requería una fuerza externa para cambiar la velocidad de un cuerpo, pero que no era necesaria ninguna fuerza externa para conservar dicha velocidad, por ejemplo: si nuestra mano ejerce una fuerza sobre un bloque y lo pone en **movimiento rectilíneo** sobre un plano rugoso el cual ejerce una fuerza en éste al frenarlo, estas dos fuerzas realizan un cambio en su velocidad, a este cambio de velocidad se le llama aceleración.

Este principio de Galileo fue adoptado por Newton como la primera de sus leyes del movimiento.

Newton formuló su primera ley: Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (*si originalmente estaba en reposo*) o se moverá con **velocidad constante en línea recta** (*si originalmente estaba en movimiento*).

Velocidad es un movimiento relativo de un cuerpo con respecto a otro cuerpo

Galileo dice que el espacio físico no es espacio vectorial. Ejemplos de vector: velocidad, aceleración, fuerza newtoniana ($F = m a$).

Si se cambian las coordenadas el campo vectorial no cambia (es independiente de las coordenadas). El vector es independiente de la base (coordenadas).

El vector describe un movimiento en línea recta.



Las coordenadas no existen físicamente, sólo son referencias para analizar los fenómenos físicos. La **magnitud del vector** v esta en función o depende de dos variables, de la velocidad y del producto punto $v = f(v, \text{producto punto})$, sin el producto escalar el vector no tiene magnitud, si cambiamos el producto punto el vector no cambia por ejemplo 40 km / h y 20 millas / h. Cada elemento del espacio vectorial es un vector.

Para que exista la dirección del vector se necesita una referencia de aplicación inicial de origen o de cero.

En los vectores obtenemos la **dirección** con la propiedad de la suma: Para que el vector tenga dirección deben de existir otros vectores.

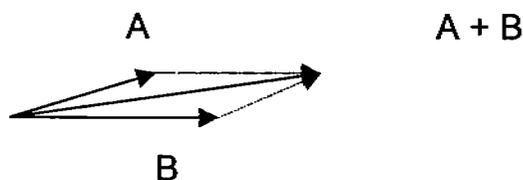


Figura 1.1

Para que exista el **sentido** de los vectores debe de existir el cero vector u origen $V + (-V) = 0$. La orientación no es física es matemática. Los puntos no tienen orientación.

Tiempo discreto

Si el dominio de la definición para $s(t)$ es restringido a un conjunto de puntos discretos $T_n = nT$, donde n es un entero y T es el periodo de muestreo, la señal $s(t_n)$ se llama tiempo discreto (TD) de la señal. La cual se obtiene de

Señal digital

Si el intervalo de muestreo es también, el periodo de muestreo y es normalizado por $T=1$, y un TD de la señal es representado simplemente como una secuencia $s(n)$. Si el valor de la secuencia $s(n)$ es representada como un número finito de bits (como es requerido en una maquina de estado finito), entonces $s(n)$ se puede tomar en un solo conjunto discreto de valores. En ese caso, $s(n)$ se llama señal digital.

Convolución finita y ecuaciones diferenciales

Si definimos a $y(n) = s\{x(n)\}$ de la relación de entrada-salida para un sistema de tiempo discreto con entrada $x(n)$ y salida $y(n)$, las definiciones siguientes son comúnmente utilizadas para definir las propiedades de linealidad, invariancia de cambio, causalidad, y estabilidad.

Linealidad

S es lineal si y solo si

$S \{ a x_1 (n) + b x_2 (n) \} = a S \{ x_1 (n) \} + b S \{ x_2 (n) \}$, donde a y b son constantes escalares y $x_1 (n)$, $x_2 (n)$ son dos entradas de secuencias arbitrarias .

In variancia de cambio

S es invariante-de cambio si y solo si y para todo valor entero de n_0 ,
 $(n - n_0) = S \{ x (n - n_0) \}$

Causalidad

S es causal si y solo si $y (n)$ depende de muestras de $x (k)$ al tiempo de $k \leq n$

Estabilidad (BIBO)

S es estable en el sentido de la entrada- limitada salida - limitada (BIBO) si y solo si $y (n)$ queda limitada para todas las $x (n)$ que son limitadas. Cada vez que S es de cambio-invariante y lineal es posible expresar la respuesta del estado cero, $y (n)$, debido a que una entrada arbitraria, $x (n)$ en términos de una convolución discreta de $h (n)$ y $x (n)$, donde $h (n) = S \{ \delta (n) \}$, y $\delta (n) = 0$ para $n \neq 0$ y $\delta (n) = 1$ cuando $n = 1$.

La función $\delta(n)$ es llamada un pulso unidad, $h(n)$ es la respuesta pulso-unidad de S y la convolución finita es expresada por

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \quad (4.1)$$

Si S es causal, $h(k) = 0$ para $k < 0$, y el mas bajo en la sumatoria en la ecuación (4.1) se hace cero.

En ciertos tipos de sistema de tiempo discreto (TD) la respuesta pulso unitario es cero de la salida de un intervalo finito conteniendo N muestras $h \equiv 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$. Este tipo de sistemas es una respuesta de impulso finito (FIR) del sistema TD si $h(n)$ es apoyado sobre un intervalo de longitud finita, entonces S se llama una respuesta de impulso infinito (IIR) del sistema TD. Estas dos clases constituyen los dos tipos importantes de filtros digitales, teniendo con cada uno ventajas y desventajas considerando a la estabilidad, el rendimiento de error de cuantización y el calculo de la eficiencia.

Un sistema IIR tiene una memoria infinita porque, en general, la salida depende de la entrada de todas las direcciones dentro del paso infinito. Tal que un sistema puede también ser caracterizado por una ecuación lineal diferencial de enesimo orden, dado como por

$$Y(n) + a_1 Y(n-1) + \dots + a_{N-1} Y(n-N+1) = b_0 x(n) + \dots + b_{M-1} x(n-M+1)$$

Una ecuación lineal diferencial es una relación recursiva que se puede completamente realizar fácilmente con multiplicadores digitales, sumadores y registros de retardo unitario.

En general los sistemas I I R son mas baratos para implementar que un sistema F I R porque la iteración de una ecuación diferencial requiere de al menos operaciones aritméticas para muestras de la salida, como comparando el calculo de una convolución finita. Sin embargo el sistema I I R debe de ser cuidadosamente diseñado para garantizar estabilidad.

También los sistemas I I R desde el limite de los ciclos sufren de oscilación y de la acumulación de errores de cuantización porque los errores de cuantización son reciclados entre la propia realimentación que la vuelve a repetir.

REFERENCIAS

- [Ozi] Zbigniew Oziewicz, from Grassmann to Clifford, en: J. S. R. Chisholm and A. K. common, editors, " Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics", D. Reidel Publishing Company, 1986
- [San] Silverio J. Sánchez P. "Como nos afectan las ondas electromagnéticas" Revista F. E. S. C. Divulgación Científica Multidisciplinaria Publicación Trimestral, Año 3, No. 9 , pag. 18 – 22, Julio – Sept. U. N. A. M. 2003
- [AlF] Marcelo Alonso Y Edward J. Finn "Física vol. 2: campos y ondas", Universidad de Georgetown Washington, D. C. ed. Fondo Educativo Interamericano, S. A. 1976
- [Tip] Paul A. Tipler, " Física para la ciencia y la tecnología " New York, ed. Reverte, S. A. 1976
- [Lat] B. P. Lathi, "Introducción a la teoría y sistemas de comunicación" Ed. Limusa, Bradley University, 1990
- [MeD] M. L. Meade y C. R. Dillon "Señales y sistemas modelos y comportamientos " , Ed. Addison Wesley Iberoamericana, Londres Inglaterra, 1993
- [OWY] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky and Ian T. Young, " Señales y Sistemas " Instituto Tecnológico de Massachussets, Ed. Prentice Hall, 1994

- [PrM] Jhon G. Proakis y Dimitris G. Manolakis, "Tratamiento digital de señales principios, algoritmos y aplicaciones", Ed. Prentice Hall, Northeastern University, Boston College, 1998
- [AuO] Auslander L., Buffalano C., Orr R. and Tolimieri R. "A comparison of the Gabor and short – time Fourier Transforms for signal detection and feature extraction in noisy environments", Proc. SPIE conf., vol. 1348., nov. 1990
- [BoT] Boudreaux – Bartels, G. F. Tufts, D.W., and Umesh, S. "On improving the detections of Gabor components of transient signals", third biennial acoust., speech, sig. Proc mini – conf., Boston, MA. Apr. 1991
- [Bat] G. Battle, " A block spin construction of ondelettes, part I: Lemaire functions ", comm. Math. Phys. 1987
- [ArR] A. Ben Artzi and A. Ron, " On the integer translates of a compactly Supported function : Dual bases and linear projectors ", siam J. math. Anal. 1990
- [Str] Strawn J. " Analysis and Synthesis of Musical Transitions Using Discrete Short – Time Fourier Trasforms ", J. Aud. Eng. Soc. Vol. 35 Jan. – Feb. 1987
- [Wal] James S. Walker "A primer on wavelet and their scientific applications " Shock and Vibration Information Center, U. S. Dept. Of Defense (Washington D. C.), Ed. Chapman & hall / crc, 1999

- [HEW] Eugenio Hernandez and Guido Weiss, " A first course on wavelet ",
Washington University in St. Louis, ed. CRC Press LLC 1976
- [BCR] G. Beylkin, R. Coifman and V. Rokhlin, " Fast wavelet transforms and
numerical algorithms 1", comm. pure and appl. Math XLIV, 1991
- [ABM] Antonini M., Barlaud M. and Mathieu P. " Image coding using Lattice
vector Quantization of wavelet coefficients", Int. Conf. Acoust.,
speech, sig. Proc., Toronto Canada, may 1991
- [AAE] Argoul f., Arnéodo A., Elezgaray J., Grasseau G. and Murenzi R.,
" wavelet Transform of fractal Aggregates" , Phys. Lett. A. Vol. 135,
1989
- [AGH] Arnéodo A., Grasseau G. and Holschneider M., " Wavelet transform
analysis of invariant measures of some dynamical systems", 1989
- [CMW] Coifman R. R., Meyer Y. and Wickerhauser V. " Wavelet Analysis
and Signal Processing ", Yale University 1991
- [FoS] Fowler M. L. and Sibul L. H. " A Unified Formulation for Detection
Using Time – Frequency and Time – scale Methods ", Asilomar conf.
On sig. Syst. And comp. Pacific Grove, Ca. Nov. 1991
- [GGM] Goupillaud P. , Grossman A. and Morlet J. " Cycle Octave and
Related Transforms in Seismic Signal Analysis Geoexploration ",
vol. 23, 1984

- [Wic] Wickerhauser M. V. “ Acoustic Signal Compression with Wave Packets “ preprint, Yale University, 1989
- [BeF] John J. Benedetto and Michael W. Frazier “ Wavelets Mathematics and Applications “, Ed. CRC Press LLC, Washington University, 1994
- [ReW] Howard I. Resnikoff and Raymond O. Well Jr. “ wavelet analysis the scalable structure of information “, Ed. Springer – Verlag 1998
- [MiO] D. wight F. Mix and Kraig J. Olejniczak “ Elements of wavelets for engineers and scientists “, Ed. Jhon Wiley & Sons, inc. Arkansas University, 2003
- [Kei] Fritz Keinert “ Wavelets and multiwavelets “, Ed. Chapman & Hall / CRC Boca Raton Florida, 2004
- [ReW] Howard L. Resnikoff and Raymond O. Well, Jr. The scalable structure of information “ Wavelet analysis “, Ed. Springer, 1998
- [AIR] Allen J. B. And Rabiner L. R. “ Unbiased Spectral Estimation and System Identification Using Short – Time Spectral Analysis Methods “, Bell Syst. Tech. J., Vol. 58 Oct. 1979
- [StG] Strang G. and T. N Guyen, “wavelets and filter“, Wellesley, M A: Wellesley – Cambridge press, 1996
- [Dou] Douglas K. L. “Introducción a las señales y sistemas “, Ed. Mc graw hill, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2002

- [VoB] Ronald A. De Vore and Bradley J. Lucier “ Wavelets “, Acta numérica ,A. Iseries,Ed. Cambridge university press, V 1, 1992
- [BaB] Basseville M. And Benveniste A., “ Multiscale statistical signal processing” IEEE Int. Conf. Acoust., speech. Sig proc., Glasgow, Scotland, may 1989
- [Max] Alvarenga Máximo, “Física General”, 2a. Ed. M. G. Brasil, ed. Harla S. A. 1976
- [ArR] David Halliday, Robert Resnick, “Fundamentos de Física”, University of Pittsburgh C. E. C. S. A. 1974
- [BoW] Richard Boyton and Kurt Wiener,” Como calcular las propiedades de las masas “, Space Electronics, Inc.
- [Am] V. I. Arnold “Mathematical methods of classical mechanics “, Ed. Springer – verlag, Moscow 1974
- [BAT] Bourdier R., Allard J. F. And Trumpf K. “ Effective Frequency Response and Signal Replicas Generation for Filtering Algorithms using Multiplicative Modification of the STFT “, Signal Proc. Vol. 15, 1988
- [CrR] Crochiere R. E. And Rabiner L. R. “ Multi – Rate Digital Signal Processing “ Prentice – Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1983

- [FiM] Fineberg A. and Mammone R. J. "Detection and Classification of Multi – Component Signals ", Asilomar Conf. on Sig. Syst. Comp. Pacific Grove, CA. Nov. 1991
- [Ste] Robert F. Steidel, jr. "Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas " compañía editorial continental, S. A. de C. V. University of California Berkeley, 1981
- [Tho] William T. Thomson " Teoría de vibraciones aplicaciones ", Ed. Prentice – Hall Hispanoamericana s. a. Santa Barbara California, 1981
- [BeP] J. S. Bendat y A. G. Piersol, " Random Data: Análisis and Measurement Procedures ", Wiley – Interscience, New York
- [Bro] J. T. Broch, " Mechanical Vibration and Shock Measurement ", Bruel & Kjaer Measurement Systems, Dinamarca
- [Tus] Wayne Tustin, " Vibración y Choque (o impacto) ", Tustin Institute of Technology Santa Barbara, California
- [DeD] Dep. Of Defense, " Shock And Vibration " Information Center, U. S. Washintong D. C.
- [MVI] Manual de Vibraciones ISO International Standards Organization (76 Normas) Handbook 36: Mechanical Vibration and Shock, ISBN 92 – 67 – 10 / 62 – 5 Switzerland. First Edition, 1990

- [HaV] Simon Haykin and Barry Van Veen “ Señales y sistemas “,
Ed. Limusa wiley, University of Wisconsin, Mc master University, 2001
- [Sam] Edward C. Jordan “Reference data for engineers:Radio, electronics,
computer, and communications”, Ed. Howard W. Sams & Company,
Indianapolis Indiana, 1989
- [Fli] Fliege N. J. “ Multirate digital signal processing: Multirate systems,
filter banks “, Sussex, England : Jhon wiley & son, 1994
- [Mat] MATLAB 6.5 The Math Works Inc. Wavelet toolbox Version 2.2
(R 13), 2002
- [AMM] American machinist magazine “ Máquinas y herramientas para la
industria metal mecánica, Usos y cuidados “, Ed. Mc Graw – Hill, U. S.
A. 1986
- [Boo] Geoffrey Boothroyd “ Fundamentos del corte de metales y de las
máquinas - herramienta “, Ed. Mc Graw – Hill Latinoamericana,
Massachusetts University, 1978
- [Gal] Galileo Galilei, “ Dialogo Sobre los Sistemas Máximos del Mundo”, 1632
- [Gra] Hermann Grassmann, “ Lineale Ausdebnonglebre “, ein neuer Zweig der
Mathematik, 1844

[RiC] G. Ricci y T. Levi – Civita, “Methodes de Calcul Differential Absolu et Leur Aplicatios”, Mathematische annalen, pag. 125 – 201, 1901